UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Un sistema tutorial en Visual Basic para Investigación de Operaciones

TESIS

Que para obtener el título de:
Ingeniero en Computación

presenta:

Margarita Josefa Prado Pelayo

Director de Tesis: Dra. Mayra Trejos Alvarado

Ciudad Universitaria, Abril 1997

A Dios por darme la vida y la sabiduría necesaria para terminar mis estudios

A mi familia por su apoyo en todo momento

A Eduardo por su paciencia y cariño.

Reconocimientos:

A la Universidad Nacional Autónoma de México especialmente a la Facultad de Ingeniería porque gracias a ella soy lo que soy en el ámbito profesional.

Al Instituto de Ingeniería y a la Dirección General de Asuntos del Personal Académico, (DGAPA) por permitirme participar en el proyecto número 5133.

A la Dra. Mayra Trejos por aceptar la dirección de este trabajo. Sus sugerencias y observaciones fueron importantes para la elaboración del mismo. Por su confianza y apoyo constante que me sirvieron de estímulo durante el trabajo de investigación y desarrollo.

A los profesores de la materia de Investigación de Operaciones de la Facultad por sus conocimientos impartidos.

Indice

Pág.

Introducción:

Actualmente uno de los lenguajes de programación para desarrollar aplicaciones en Windows de manera rápida y con excelente presentación es Visual Basic.

En esta tesis se describe un sistema tutorial en Visual Basic para el curso de Investigación de Operaciones, el cual tiene por objetivo ayudar en el proceso de aprendizaje de dicho curso. Esta destinada a profesores y alumnos de la Facultad de Ingeniería de las carreras de Ingeniero en Computación e Industrial..

El desarrollo del sistema en este lenguaje fue una experiencia muy importante para el desarrollo de mi carrera. Sirvió de aprendizaje constante de una herramienta útil, muy poderosa y flexible para desarrollar cualquier aplicación Windows que permitió crear una aplicación dinámica y en poco tiempo.

El sistema contiene conceptos fundamentales, ejemplos y una herramienta de autoevaluación que apoya al proceso de enseñanza-aprendizaje del curso.

El trabajo se divide en 7 capítulos y tres apéndices. El primer capitulo introduce al lector en el mundo de Visual Basic, cómo se desarrollo, sus características y las ventajas por las cuales se eligió para desarrollar el sistema tutorial. Se dan los conceptos fundamentales del software y su metodología de programación. En el capítulo 2 se desarrollan los conceptos de Investigación de Operaciones, se exponen tipos de problemas que pueden ser resueltos con técnicas de Investigación de Operaciones como problemas de optimación y se desarrolla el concepto de sistema, su evolución, clasificación, morfología y su relación con la Investigación de Operaciones. En el capítulo 3 se explica la técnica de Programación Lineal y los siguientes métodos: el método gráfico, el método simplex, sus complicaciones y el método de las dos fases. Se explica brevemente la teoría de la dualidad. En el capitulo 4 se ven algoritmos especiales: el problema de transporte y el problema de asignación. En el problema de transporte se dan dos métodos para obtener la solución inicial: el método de la esquina noroeste y el método de Vogel. Del problema de asignación se da un ejemplo y se desarrolla el algoritmo húngaro, el cual es un método para obtener la solución óptima. En el capítulo 5 se consideran los conceptos básicos de la teoría de redes, su descripción y características. En el capítulo 6 se explican los pasos que se llevaron a cabo en el desarrollo de este sistema. En el capítulo 7 se dan las conclusiones. Finalmente, los apéndices, el apéndice A es una explicación de lo que significa el término orientado a objetos, lo cual permite hacer una comparación entre Visual Basic y el lenguaje de programación C++ que es un lenguaje de programación orientado a objetos, y que fue considerado en un principio para desarrollar el sistema tutorial, el apéndice B que contiene el temario de la materia de investigación de operaciones, y el apéndice C que es el manual del usuario.

CAPITULO 1: Visual Basic: lenguaje conveniente para programas tutoriales

1.1 Consideraciones generales

En 1987 Alan Cooper escribió un programa llamado "Ruby" el cual permitía a cualquier usuario programar. Dos años después, la combinación de Ruby y QuickBasic (lenguaje de programación), dieron origen a Visual Basic (VB), que permite la programación en ambiente *Windows*.

El VB permite por primera vez, escribir programas para *Windows* en *Windows* sin la enorme cantidad de códigos que requieren otros lenguajes de programación, como por ejemplo el C.

Como el propósito principal de esta tesis es desarrollar un programa tutorial para el curso de Investigación de Operaciones que apoye al proceso de enseñanza-aprendizaje, se consideró conveniente utilizar el lenguaje VB que trabaja bajo un ambiente *orientado a lo visual* (*Windows*) y que permite el diseño de una interfase de aplicación amigable, situación que refuerza el aprendizaje del usuario.

En este capítulo se da a conocer qué es VB y cuáles son sus características. Por la similitud de los términos *basado en objetos* y *orientado a objetos* que se confunden en muchas ocasiones se aclaran sus diferencias. Para definir algunos términos de la programación orientada a objetos, que sale del interés de este trabajo, en el apéndice A se profundiza acerca de ella.

1.2 Visual Basic

El lenguaje de programación VB es un poderoso sistema de programación gráfico que hace posible la creación de aplicaciones *Windows* reales con código Basic. Con VB se crean aplicaciones que se correrán en *Windows*, el cual es un ambiente *orientado a lo visual* que proporciona librerías de herramientas y objetos para aplicaciones de programación. Podría decirse que es *basado en objetos* pero no *orientado a objetos*.

Es un error definir VB como un *sistema de programación orientado a objetos*. En VB se crean objetos, llamados formas y controles, que hacen que una aplicación funcione. Sin embargo, estos objetos carecen de las propiedades de herencia y polimorfismo, las cuales tienen que estar presentes en un verdadero ambiente orientado a objetos .

Se pueden usar objetos o controles, a los cuales se les establecen y cambian sus propiedades y después se les asigna un código Basic funcional a cada uno de ellos. VB requiere una manera de programación totalmente diferente a otros sistemas de programación cuando se elabora el código para las aplicaciones. Utiliza un *procedimiento de evento* para estructurar los códigos, este procedimiento establece una relación entre un control y un evento. Esta relación hace posible invocar un código con el cual la aplicación realiza una actividad específica.

Antes de utilizar el código en las aplicaciones de VB la mayor parte de los programas en basic tendrán que adaptarse y modificarse. Para adaptar el programa se deben revisar cuidadosamente los procedimientos escritos en basic y darse cuenta de cómo son las operaciones.

Con este lenguaje se hace posible el diseño de una interfaz[1] de aplicación utilizando la interfaz de *Windows* para darle a los usuarios un método consistente de interacción con la computadora. La consistencia es probablemente la mayor ventaja de la interfaz. Todas las aplicaciones utilizan comandos y controles similares. Aprendiendo una aplicación de VB se logran conocimientos acerca de otras aplicaciones.

La creación de un programa efectivo en VB comienza con un buen diseño, una visión amplia del contenido y el propósito de la aplicación. La forma en la que se organiza una aplicación depende de la información y de cómo se espera que otras personas utilicen dicha información. Al avanzar en el proceso para definir las necesidades de los usuarios, se realiza la aplicación de manera que puedan trabajar con ella.

La manera de programar en VB es muy diferente a lo que se está acostumbrado. Por ejemplo, en lugar de crear un diagrama de flujo tradicional que muestra cómo un control del programa se mueve de un procedimiento a otro, se programa "visualmente", esto es, se planea de modo que los controles puedan operar juntos para darle funcionalidad a cualquier aplicación *Windows*.

El pasar de un enfoque complejo, como escribir y codificar un algoritmo en Basic, al rico ambiente basado en los objetos de VB, puede ser desconcertante para quien se inicia en este tipo de programación. Sin embargo, el enfoque modular al programar en *Windows* introduce un estilo efectivo y totalmente nuevo que puede ahorrar tiempo y VB es una herramienta de desarrollo de *Windows*, extraordinariamente poderosa y flexible, que permite a los programadores crear aplicaciones dinámicas con rapidez.

1.2.1 Conceptos fundamentales de Visual Basic

Los conceptos fundamentales de VB son:

- Control

  Es un término general utilizado para describir cualquier forma o elemento gráfico dibujado sobre una forma, incluyendo cajas de texto, cajas de listados, botones de comandos, cajas de imágenes, barras de desplazamiento e iconos. Un control son datos acoplados con una serie de rutinas, denominados *métodos*, que se definen posteriormente. Estos métodos se utilizan exclusivamente para accesar y manipular el

[1] Interfaz: a.Equipo o programas diseñados para comunicar información de un dispositivo de computación (o programa) a otro. b.Cualquier arrreglo para tal comunicación.

control. Las únicas operaciones que pueden desarrollarse sobre un control son aquellas definidas como métodos para él. En VB, los términos *control* y *objeto* se utilizan indistintamente.

- Evento

  Es una acción reconocida por un control VB.

- Forma

  Es una ventana creada y adaptada a las necesidades de la aplicación.

- Método

  Es una palabra de código VB similar a una función o instrucción, pero que siempre actúa sobre un control particular. Para cada control, VB predefine una serie de métodos a utilizar.

- Procedimiento

  Un procedimiento es una secuencia de instrucciones en VB ejecutadas en grupo. Existen dos tipos de procedimientos: procedimientos de evento y procedimientos generales. Los procedimientos de evento se limitan a las formas y los controles, mientras que los procedimientos generales se utilizan durante toda la aplicación y pueden ser requeridos por procedimientos de eventos.

- Proyecto

  Es el conjunto de todos los archivos que forman la aplicación.

- Propiedad

  Es una característica o atributo de un control. Para cada tipo de control, VB define una serie de propiedades que se aplican solamente a ese control.

- Definición

  Es el valor de una propiedad. Se puede cambiar la definición de la mayoría de las propiedades mientras se está construyendo una aplicación. El código de una aplicación que se ejecuta también puede cambiar las definiciones.

1.2.2 Programación en Windows con Visual Basic

El enfoque tradicional para desarrollar una aplicación de *Windows* ha sido programar en C de *Microsoft* y utilizar el *Windows Software Development Kit* el cual es un proceso mas complicado. El ciclo de desarrollo de una aplicación en C es de la siguiente manera: se elabora un programa *Windows* esbozando los módulos principales y la lógica que los enlaza. Se compila, enlaza y depura el código del programa repetidamente. Los iconos, menús, cajas de diálogo y todos los otros controles en la interfaz del usuario se diseñan y compilan por separado. Los componentes anteriores se controlan por el programa principal, a través de un laberinto de funciones y mensajes. Si se quiere modificar la interfaz, se busca el código principal para realizar el cambio.

La filosofía de programación con VB es mas sencilla; consiste en seleccionar primero objetos como ventanas, iconos y menús y elaborar procedimientos que se llaman por cada uno de estos objetos. Esto es diferente del método tradicional de elaboración de un programa. Aqui no existen estructuras para controlar el flujo del programa de un procedimiento a otro de manera lógica hasta que el programa termine.

El desarrollar una aplicación *Windows* en C puede llevarse meses con VB se puede construir una aplicación *Windows* dinámica en pocos días. En el primero, un programa debe ser compilado antes de poder ser ejecutado. Como VB es *interpretado* más que compilado, las aplicaciones están listas para correr tan pronto como esté terminado de escribir el código.

En un lenguaje interpretado como VB, las instrucciones del procedimiento pueden ejecutarse tan pronto como son tecleadas. El intérprete lee una línea de un procedimiento y envía las instrucciones apropiadas a la computadora para su ejecución. Cuando la línea está completa el intérprete se mueve a la siguiente línea, la interpreta y la ejecuta. El tener una aplicación inmediatamente lista para correr hace que el desarrollo de un programa sea mucho más rápido.

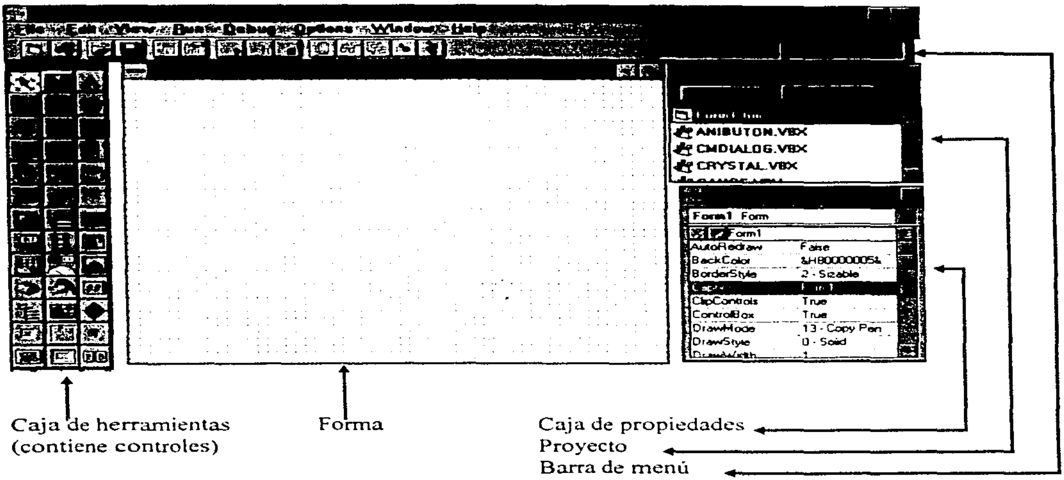
1.2.3 Elaboración de programas Orientados a Eventos

VB utiliza la metáfora del *evento* para describir su paradigma de programación. Siempre que se crea una aplicación se utiliza este enfoque. *Orientado a Eventos* significa que todos los 4589 controles que se dibujen en una forma, especifican cómo se comportará la interfaz. Los controles de VB esperan que sucedan eventos particulares antes de que respondan. Se escribe un código para cada control a fin de que algo suceda cuando los usuarios interactúen con la forma.

En VB, durante el diseño, la mayor parte del tiempo se dedica a crear una interfaz de aplicación. Para ello se crean formas, se dibujan controles y se escriben módulos de código. Cuando se ejecuta una aplicación sólo son visibles las formas que están programadas y creadas.

Las formas son la base de cualquier aplicación VB que eventualmente correrá como un programa independiente en Windows. Los controles, como botones de comando, menús, cajas de diálogo y barras de desplazamiento, se dibujan en la forma. Cuando un usuario selecciona y activa un control, se invoca el código *basic* que está asignado al control y se realiza una tarea específica. Después de dibujar los controles que se desean que aparezcan en una forma, se escribe el código funcional para cada control que los usuarios pueden invocar.

A continuación se muestra la ventana de VB en donde se ven algunos de los conceptos anteriormente mencionados:



CAPITULO 2: La Investigación de Operaciones

2.1 Consideraciones generales

La IO es una disciplina que se ocupa de proponer soluciones óptimas en procesos de toma de decisiones en los que se tienen recursos limitados, de manera que se hace necesario ser eficiente. Utiliza modelos matemáticos en sus planteamientos de solución y métodos que utilizan dichos modelos. El modelo matemático utilizado esquematiza la realidad mediante una función a optimizar, además de ecuaciones y desigualdades que representan restricciones del problema específico.

Tanto las personas físicas como morales se enfrentan en todo momento a un proceso de toma de decisiones con el fin de alcanzar objetivos previstos. Es por eso que, desde siglos atrás, ha habido interés por estudiar y proponer esquemas que sinteticen y organicen las actividades de manera que se obtengan en forma eficiente, los fines. El enfoque sistémico es la herramienta conceptual que permite realizar el proceso de toma de decisiones de manera que se tomen en cuenta y se organicen dichas actividades importantes entorno a un problema.

En este capítulo presentamos problemas tipo que pueden solucionarse con técnicas de Investigación de Operaciones, algunas de las cuales veremos en el siguiente capítulo. Veremos algunas consideraciones generales, teoría y principios fundamentales de I de O.

Se expondrá el concepto de enfoque sistémico con el que conviene abordar los problemas de decisiones y las etapas del proceso de decisión. Una forma de estudiar con mayor facilidad el problema para su solución es esquematizarlo, por ejemplo, a través de diagramas de bloques y señales que presentaremos en este capítulo. Analizaremos las etapas del proceso de solución de un problema, así como la generación de alternativas, fundamental en dicho proceso. Por último, hablaremos de la jerarquización de los sistemas.

2.1.1 La Investigación de Operaciones en la solución de problemas

Al utilizar las técnicas de I.O. en la solución de problemas se debe tomar en cuenta lo siguiente:

- Las implicaciones que concierne a la toma de decisiones dentro del proceso de solución deben ser claras. Por ejemplo, si el problema es elegir sobre un nuevo producto al mercado se debe tener en cuenta qué tan beneficiosa puede ser su producción para el consumidor, la venta y distribución para el productor, la capacitación del personal y la capacidad de producción de la planta, etc.

- El análisis empleado debe estar respaldado en criterios de eficiencia, esto es, debe haber una correspondencia entre recursos, cursos de acción y objetivos de manera que, el curso de acción será eficiente si los recursos que consumen son mínimos y se logran los objetivos. Por ejemplo, minimización de costos, maximización de utilidades, etc.

- El problema se debe poder estructurar con un modelo matemático que describa la situación en forma precisa. Por ejemplo, poder realizar estudios de mercado que revelen el éxito del consumo, las restricciones del mercado, la localización de los centros de distribución etc.

- La implementación del modelo. Por ejemplo, contar con información suficiente y fidedigna, buenas estadísticas, ayuda de computadoras y técnicos preparados para el procesamiento de dicha información, etc.

Otro cuidado que debe observarse en todo proceso de análisis en la solución de un problema es que se debe concluir con un análisis de sensibilidad que revele la fortaleza de la decisión. Si en la realización de este último análisis, al mover un poco los parámetros del modelo, la solución se altera, debe regresarse el proceso al inicio, buscar más información y repetirlo hasta que se encuentre una solución que no sea sensible a pequeños cambios de los parámetros.

En este sentido podemos concluir que no basta con plantear un modelo que contenga toda la información, ni dar una solución utilizando estas técnicas que generalmente funcionan, sino que cada caso hay que estudiarlo de manera independiente de acuerdo con el medio en que van a operar las soluciones propuestas.

Reglas simples que debe observar todo especialista en IO al enfrentarse a un problema de decisiones son : explorar el conjunto de soluciones simples que pueden encontrarse sin métodos complicados que pudieran no ser aceptados por el o los decisores ; además debe proponer soluciones eficientes y a tiempo ; debe quedar muy claro al usuario que los costos en los que incurrirá no serán mayores a los beneficios.

Los tipos de problemas que pueden ser resueltos con técnicas de IO como problemas de optimación se describen a continuación.

Asignación

En los problemas de asignación típicamente hay una colección de recursos que deben ser distribuidos de manera óptima entre distintos lugares, actividades, tiempos, etc. Por ejemplo, una compañía manufacturera que dispone de m clases de materia prima en cantidades limitadas para producir n tipo de bienes. Se supone que la producción y el modelo de beneficios es lineal.

El problema consiste en encontrar una distribución adecuada que maximíce las ganancias

$$\text{Maximizar } C = \sum p_j x_j \qquad j=1,\ldots,n$$
$$\text{sujeto a : } \quad Ax \le b$$

donde:

$C = \sum p_j x_j$ es la función objetivo
A es una matriz mxn
b un vector mx1
p_j el precio del bien j
x_j vector nx1
$Ax \geq b$ son las restricciones del problema

El problema está formulado en un espacio lineal de n dimensiones. El vector x con componentes x_j es el vector desconocido. Las restricciones definen una región en el espacio lineal en la cual debe estar el vector que se seleccione. El vector óptimo es aquel que maximiza la función objetivo.

Planeación

La planeación consiste en determinar un procedimiento óptimo para alcanzar un conjunto de objetivos. Se refiere esencialmente a aquellos problemas que involucran gastos en un período de tiempo. Por ejemplo:

1. Planear una inversión futura en equipo para generar la energía eléctrica que se va a consumir en una región (problema de ampliación de capacidad)
2. Determinar la mejor política salarial para realizar un proyecto complejo minimizando los gastos.

Por ejemplo, considérese un problema de planeación de la producción. Una empresa produce un cierto producto y desea planear su programa de producción óptimo en un período de tiempo. Se supone que la demanda es fija y conocida en un intervalo de tiempo, la cual debe ser satisfecha. El exceso de producción debe ser almacenado con un costo de almacenamiento proporcional a la cantidad. Hay un costo de producción asociado con la tasa de producción. Si x(t) denota la reserva de producto en el tiempo t, r(t) la tasa de producción en el tiempo t, y d(t) la tasa de demanda en el tiempo t, el sistema de producción puede ser descrito por:

dado x(0),

$$\text{Minimizar } J = \int_0^T (c[r(t)] + hx(t))dt$$

$$\text{sujeto a: } dx/dt = r(t) - d(t),$$

$$x(0) + \int [r(t) + d(t)]dt = \begin{cases} r(t) \geq 0 \\ x(t) \geq 0 \end{cases} \qquad \text{para } 0 \le t \le T$$

donde c[r] es la tasa de costo de producción para el nivel de producción r y hx(t) es la tasa de costo de inventario para el nivel x.

Este problema puede considerarse definido en un espacio lineal de funciones continuas en el intervalo de la línea real (0,t). El calendario óptimo de producción r es entonces un elemento de este espacio. Nuevamente las restricciones definen una región en el espacio en la cual la solución r debe minimizar el costo.

Control

Los problemas de control están asociados con sistemas dinámicos que involucran el tiempo. El control es similar a la planeación cuando esta última está formulada en términos matemáticos.

El control se refiere usualmente a la influencia directa sobre un sistema dinámico con el propósito de alcanzar un funcionamiento deseado. El sistema puede ser de naturaleza física, como un cohete o un proceso en una planta química, o puede ser operacional, como un almacén que recibe y envía pedidos.

Como ejemplo de problema de control considérese el despegue de un cohete para alcanzar una altura h en un tiempo dado t gastando un mínimo de combustible. Por simplicidad suponemos masa unitaria y una fuerza constante de gravedad y la ausencia de fuerzas aerodinámicas. El movimiento del cohete dirigido verticalmente está gobernado por las ecuaciones

$$d^2y/dt^2 = u(t) - g\,(t)$$

donde y es la altura vertical, u la fuerza de aceleración y g la fuerza gravitacional. La función de control óptimo u es tal que se cumple $y(T) = h$, minimizando el consumo de combustible

$$\int_0^T |u(t)|\,dt$$

Este problema está formulado en un espacio vectorial de funciones u, definido sobre el intervalo [0,T]. La solución a este problema, sin embargo, es que u(t) consiste de un impulso en $t = 0$.

Aproximación

Los problemas de aproximación están motivados por la necesidad de aproximar una entidad matemática general (tal como una función) por una más simple. Una clase muy amplia de tales problemas de optimización aparece en el análisis numérico. Por ejemplo, se desea por limitaciones de memoria o por propósito de simplificar un análisis, aproximar una función x(t) sobre un intervalo [a,b] de la línea real por un polinomio p(t) de orden n. La mejor aproximación del polinomio es la que minimiza el error $e = x - p$ en el sentido de algún criterio. La elección del criterio determina la aproximación.

Frecuentemente se usan los siguientes criterios:

1. $\int_a^b e^2(t)\,dt$

2. $\max_{a \leq t \leq b} |e(t)|$

3. $\int |e(t)|\,dt$

El problema se formula de manera natural en un espacio vectorial de funciones sobre el intervalo [a,b]. El problema es entonces visualizado como, encontrar un vector de una clase dada (polinomios) que es el más próximo a un vector dado.

Estimación

Los problemas de estimación son realmente una clase particular de problemas de aproximación. Se busca estimar alguna cantidad a partir de observaciones imperfectas que pueden estar estadísticamente correlacionadas pero que no se relacionan entre sí de manera determinística. El problema consiste en aproximar la cantidad no observable combinando las cantidades observables. Por ejemplo, la posición de un aeroplano en un tiempo futuro puede ser estimada razonablemente por una combinación lineal de mediciones anteriores de su posición.

Otro ejemplo de estimación son los problemas de triangulación como la localización de incendios forestales, barcos en el mar, o estrellas remotas. Supóngase que hay tres estaciones de observación, cada una de las cuales mide el ángulo de la línea de visión de la estación al objeto observado. Dados los tres ángulos hay que estimar la ubicación del objeto.

Para formular el problema completamente se debe precisar un criterio que prescriba la naturaleza de los errores probables y la localización probable del objeto.

Juego

Muchas situaciones que involucran elementos competitivos pueden analizarse como juegos. En la formulación más usual están involucrados dos jugadores o protagonistas y hay una función objetivo cuyo valor depende conjuntamente de las acciones de ambos jugadores. Un jugador intenta maximizar su objetivo mientras que el otro intenta minimizarlo.

Frecuentemente dos problemas como los vistos antes pueden ser intermezclados para producir un juego. Combinaciones de categorías que llevan a juegos interesantes pueden ser: asignación-asignación, asignación-control, control-control y estimación-control.

Como un ejemplo se considera un juego control-control. Muchos problemas de esta clase son del tipo perseguidor-evasor como un avión caza bombardero atacando a un avión bombardero. Cada jugador tiene un sistema que controla, pero uno de ellos trata de maximizar el objetivo (tiempo de intercepción, por ejemplo), mientras que el otro trata de minimizarlo.

Como un ejemplo más simple considérese el siguiente problema. Dos candidatos que se oponen A y B están optando para un puesto de elección y deben planear como asignar sus recursos de publicidad (A y B pesos, respectivamente) entre n áreas geográficas. Sean x_i y y_i los recursos dedicados al área i por los candidatos A y B. Suponemos que hay un total de u votantes indecisos de los cuales u_i están en el área i. El número de votos de los candidatos A y B de área i se supone son:

$$\frac{x_i u_i}{x_i + y_i} \qquad\qquad \frac{y_i u_i}{x_i + y_i}$$

respectivamente. La diferencia total entre los números de votos recibidos por A y B es entonces:

$$\sum_i \frac{x_i - y_i}{x_i + y_i} u_i$$

El candidato A busca maximizar esta cantidad mientras que el candidato B busca minimizarla.

Este problema es de dimensión finita y puede ser resuelto por cálculo ordinario, pero ilustra una clase interesante de problemas de juego.

En los ejemplos de optimación anteriores la IO juega un papel importante con sus técnicas de solución.

2.2 Principios básicos

La teoría de optimación se deriva de unas cuantas relaciones geométricas simples e intuitivas. El siguiente teorema juega un papel muy importante en su desarrollo.

Teorema de la proyección

Ese teorema es uno de los más simples y útiles de la teoría de optimación. En el *espacio euclidiano* [Luenberger, 1969] de tres dimensiones, el teorema establece que la línea más corta de un punto a un plano es la perpendicular del punto al plano.

Este resultado, aparentemente simple e inocuo, tiene extensiones directas en espacios de mayor dimensión y en *espacios de Hilbert* de dimensión infinita [Luenberger, 1969]. En su forma generalizada, este principio de optimación es la base de todos los procedimientos de aproximación, control y estimación por mínimos cuadrados.

Teorema de Hahn-Banach

Entre los muchos resultados y conceptos del análisis funcional [Luenberger, 1969], este teorema es el más importante en la solución de problemas y es la esencia de las ideas geométricas en las que se construye la teoría. Este teorema tiene varias formas. Una versión es extendida a problemas que tienen objetivos no cuadráticos; de una manera sencilla la interpretación geométrica se preserva para problemas más complejos. Otra versión del teorema establece en su forma más simple, que dada una esfera y un punto que no esté en la esfera, existe un *hiperplano* [Luenberger, 1969] que separa el punto y la esfera.

Dualidad

En la teoría de optimación hay varios principios de dualidad que relacionan un problema expresado en términos de vectores en un espacio con un problema expresado en términos de hiperplanos en el espacio. Muchos de estos principios están basados en la siguiente relación geométrica. La distancia más corta de un punto a un *conjunto convexo* [Luenberger, 1969] es igual al máximo de las distancias del punto a un hiperplano que separa al punto del conjunto convexo. Así, la minimización original sobre vectores puede convertirse en una maximización sobre hiperplanos.

Diferenciales

La técnica más familiar de optimación es quizá el método de cálculo diferencial (hacer la derivada de la función objetivo igual a cero). Esta técnica se discute en los cursos elementales de cálculo diferencial para una o quizá un número finito de variables. Su extensión a espacios de dimensión infinita es directa y en esa forma puede ser aplicada a una variedad interesante de problemas de optimación. Gran parte de la teoría del cálculo de variaciones puede verse como una consecuencia de este principio.

La *interpretación geométrica* de la técnica para problemas de una dimensión es obvia. En un máximo o mínimo la tangente a la gráfica de una función es horizontal. Para mayores dimensiones la interpretación geométrica es similar. En un máximo o mínimo el hiperplano tangente a la gráfica es horizontal. Así, nuevamente observamos el papel fundamental de los hiperplanos en la optimación.

2.3 El Enfoque de sistemas

2.3.1 El concepto de sistema

Después de la Segunda Guerra Mundial surge la necesidad de estructurar las organizaciones de manera que los procesos de producción que mueven la economía y la sociedad de un país sean eficientes en el sentido de minimizar recursos y optimizar las soluciones para su propio beneficio. Esto da lugar al surgimiento de diversas disciplinas bajo los títulos de "enfoque de sistemas", "investigación de sistemas", "teoría de sistemas", "pensamiento sistémico" o simplemente "sistemas".

Kuhn en su obra "La Estructura de las Revoluciones Científicas" [Kuhn, T ; 1982], promueve el enfoque de sistemas como una nueva forma del pensamiento que se aplica tanto a ciencias sociales como exactas.

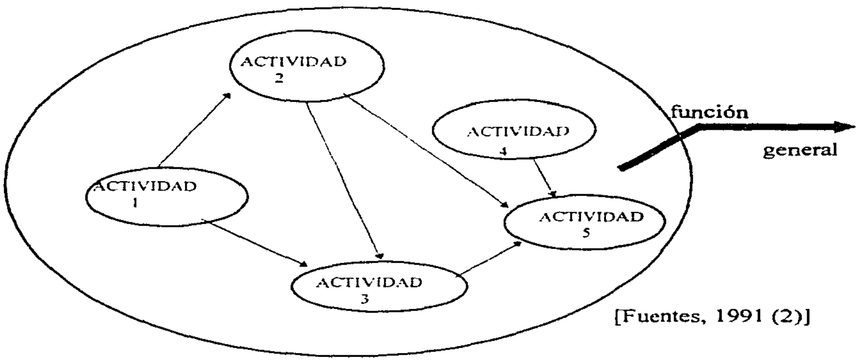
Entre las corrientes que han emergido del pensamiento sistémico podemos mencionar: la administración científica, análisis de sistemas, cibernética, dinámica de sistemas y otras técnicas de simulación, ingeniería de sistemas, investigación de operaciones, sistemas sociotécnicos, teoría general de sistemas, teorías de información, comunicación y control.

Por los diversos enfoques con los que se estudian estas disciplinas es importante saber qué ha dado lugar a hablar de los sistemas como un movimiento o forma de pensamiento unificada, cómo se articula este movimiento y sus principales líneas de desarrollo.

El término sistema, tiene diversas definiciones en la literatura, por ejemplo, *un sistema es un conjunto de elementos interconexos que forman una integridad.* Con esta definición igual se llama sistema al hombre que a la sociedad, a una máquina y al organismo, si además a esta definición de sistema se le suma un propósito específico tampoco queda claro pues tal condición la cumple cualquier arreglo al que se le atribuya una función, por ejemplo, un generador, un libro o un órgano humano. Para muchos autores el enfoque de sistema se ocupa de casos como el de una empresa o una universidad y lo importante es la manera particular en que concibe el objeto.

Lo anterior no aclara como desarrollar, por ejemplo, la ciencia y la tecnología de un país, en las que participan no una sino varias organizaciones . Es más apropiado verlos como conglomerados y considerar el concepto de sistema como un conjunto de actividades necesarias para el cumplimiento de la función atribuida al objeto. De manera que, la definición de sistema la concebimos como:

Sistema es aquel conjunto de actividades relacionadas unas con otras a través de las cuales se cumple con una función o propósito general.



[Fuentes, 1991 (2)]

2.3.2 Evolución del concepto de sistema y la investigación de operaciones

Para entender y facilitar el desarrollo de una organización debe interpretarse como un sistema. Todo sistema tiene componentes e interacciones entre ellas. Algunas de estas interacciones son controlables. Quienes se interesan en el estudio del pensamiento sistémico enfrentan la dificultad de dicho estudio no tiene límites precisos, por lo que es conveniente contar con una descripción general acerca de cómo se integra este pensamiento.

De manera que conviene distinguir entre lo que constituye *el desarrollo de las ideas de sistemas como tales* y lo que corresponde con la *aplicación de esas ideas dentro de alguna disciplina ya establecida*. En lo primero, puede plantearse una subdivisión, incluyendo en un grupo a aquellas corrientes que se orientan hacia el *desarrollo teórico de sistemas* y en el otro a los trabajos que tienen como centro de interés el *desarrollo y aplicación del pensamiento sistémico en la solución de problemas*. Dentro de este último grupo, también es posible distinguir tres áreas de trabajo, que son:

a) El área de *apoyo a la toma de decisiones*, que se caracteriza por su marcado énfasis en el desarrollo y aplicación de técnicas y modelos como medio para determinar soluciones; con frecuencia, en búsqueda de soluciones óptimas.

b) En la segunda área, sin dejar de lado las técnicas y modelos, se da mayor importancia al proceso de solución de problemas (formulación de objetivos, generación de alternativas, evaluación, diseño, etc.), lográndose interesantes aportes metodológicos y conceptuales en temas tales como la evaluación, diseño y análisis de costos. Esta área surge y se desarrolla con una fuerte influencia del pensamiento ingenieril y de quienes trabajan en el campo de la programación y presupuestación, por lo cual el elemento humano (subjetividad, valores, necesidad de consenso y temas similares) ocupa un lugar secundario, a las corrientes aquí incluidas se les denomina *trabajo en sistemas duros*.

c) La tercer área, a diferencia de la anterior, se distingue por enfatizar los aspectos metodológico y conceptual, así como por tener en cuenta el ingrediente del comportamiento humano. Se le denomina genéricamete *trabajo en sistemas suaves* y tiene una fuerte influencia del área de teoría del conocimiento y de las disciplinas dedicadas al estudio de la conducta

En la figura 2.1 se hace una representación esquemática de lo señalado:

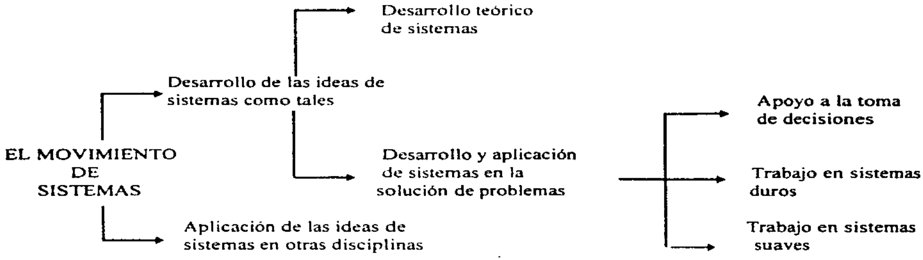


FIGURA 2.1 Estructura general del movimiento sistémico

El cuadro 2.1 muestra las principales corrientes que se han desarrollado en cada una de las áreas de la figura 2.1, donde la IO se ubica como una disciplina de apoyo a la toma de decisiones.

ESTRUCTURA GENERAL DEL MOVIMIENTO DE SISTEMAS Y PRINCIPALES CORRIENTES

EL MOVIMIENTO SISTEMICO

A. Aplicación de las ideas de sistemas en otras disciplinas
En biología , psicología, psiquiatría, economía, sociología, ciencia política, geografía, historia, etc.

B. Desarrollo de las ideas de sistemas como tales

B.1 Desarrollo teórico de sistemas

- Teoría General de Sistemas
- Cibernética
- Teoría de la Información
- Teoría del Control, etc.

B.2 Desarrollo y aplicación de sistemas en la solución de problemas

B.2.1. Apoyo a la toma de decisiones
- Investigación de Operaciones
- Análisis de Sistemas*

B.2.2. Trabajo en sistemas duros
- Análisis de Sistemas*
- Ingeniería de Sistemas
- Dinámica de Sistemas

B.2.3. Trabajo en sistemas suaves
- Planeación Interactiva (Ackoff)
- Metodología de Sistemas Suaves (Checkland)
- Diseño de Métodos d e Inquirir (Churchman)
- Sistemas Sociotécnicos (Emery y Trist)
- Organizaciones de referencia, Conferencias de búsqueda, Análisis de poder, etc.

* Dentro del Análisis de Sistemas se dan ambas corrientes

CUADRO 2.1

2.3.3 Relación entre la Ingeniería de Sistemas y la Investigación de Operaciones

La ingeniería de sistemas es la corriente metodológica de ingeniería para el diseño y creación de grandes y complejos sistemas hombre-máquina. Esta disciplina surge en los Laboratorios Bell (Bell Telephone Laboratories, Inc.), cuando sus ingenieros y científicos buscaban procedimientos que trasladaran los nuevos conocimientos de la I.O. a la práctica.

Con tal propósito, en 1950 se comienza a impartir un curso de ingeniería de sistemas en el Instituto Tecnológico de Massachusetts, en el que se combinan el estudio para la solución de problemas reales con la elaboración de material didáctico. Como resultado de los cursos y la experiencia ganada en los Laboratorios, se obtiene la obra hoy clásica de la ingeniería de sistemas: A Methodology for Systems Engineering, de Arthur D. Hall, editada en 1962.

Poco antes, se habían editado otras obras entre las cuales destacan las siguientes: "Systems Engineering" de H. H. Goode y R.E. Machol (1957); "Systems: Research and Design", de D. P. Ekman (1961); "Systems Engineering for de Process Industries", de T.J. Williams (1961); "The Design of Engineering Systems", de W. Gosling (1962), y "Operation Research and Systems Engineering", de Flage, Huggins y Roy [editores] (1960). Sin embargo, como apunta P. Keys (30). Para ampliar en este tema, ver [Fuentes, A ;1991].

La Investigación de Operaciones es la aplicación, por grupos interdisciplinarios, del método científico a problemas relacionados con el control de las organizaciones o sistemas (hombre-máquina) a fin de obtener soluciones que mejor sirvan a los objetivos de toda la organización. [Prawda, J; 1991]. Se refiere a las operaciones de un sistema y examina las funciones de los componentes del sistema. Como su nombre lo indica, la I.O. significa "hacer investigación sobre las operaciones", de esta manera se ha aplicado en los negocios, la industria, la milicia, el gobierno, los hospitales, etc. La gama de aplicaciones es extraordinariamente amplia. La I.O. es pues una disciplina que permite, dado un objetivo específico, encontrar las relaciones óptimas que mejor operen un sistema.

La I.O. está estrechamente relacionada, y a veces se confunde con la ingeniería de sistemas que enfatiza más en la planeación y diseño de nuevos sistemas para obtener un mejor rendimiento de las operaciones existentes. Ambas se basan en el método científico y utilizan la misma metodología, cada una haciendo énfasis según su interés particular.

La I.O se ha enriquecido con teorías como la del tráfico, la teoría de retroalimentación y la teoría de la información que ha desarrollado la ingeniería de sistemas.

Por otro lado, la ingeniería de sistemas ha provocado una verdadera revolución dentro de la Ingeniería. Sus aplicaciones pueden ser tan variadas como la creatividad que demostramos los ingenieros. Estudia los problemas como parte de un sistema. La metodología que propone ha tenido éxitos rotundos sobre todo en sistemas complejos que serían muy difíciles manejar de otra manera.

Existen muchos sistemas que tienen el mismo tipo de relaciones internas, de manera que las conclusiones y resultados que se obtienen al estudiar uno solo de ellos, se pueden aplicar a todos los demás. Esto lleva a estudiar la estructura del sistema, más que su naturaleza específica.

2.3.4 Clasificación de los sistemas

Otra estructura y clasificación de los sistemas puede observarse tomando en cuenta factores de las entidades como son sus atributos, actividades y el medio ambiente en las que están insertas.

La estructura de los sistemas está formada por la *entidad* que es el objeto de interés dentro del sistema, los *atributos* son propiedades de la entidad. La *actividad,* que se realiza en la entidad, es todo proceso que provoca cambios en el sistema; aquí es importante el estado del sistema que da una descripción de todas las entidades. El *medio ambiente* es todo lo que rodea al sistema, sin ser parte de él. En el modelado de sistemas es importante establecer el límite entre el sistema y el medio ambiente.

Las actividades que ocurren dentro del sistema son *endógenas y exógenas* las que ocurren en el medio ambiente y que afectan al sistema.

Cuando no existe actividad exógena el sistema es *cerrado* pero la mayoría de los sistemas tienen actividades exógenas y son llamados sistemas *abiertos*.

Cuando se puede conocer con certeza el resultado de una actividad se dice que la actividad es *determinística,* pero cuando los resultados varían aleatoriamente, la actividad *es estocástica o probabilística.*

Un sistema es *continuo* cuando los cambios se producen ininterrumpidamente en el tiempo, de lo contrario es *discreto.*

Un esquema de lo anterior se da en el cuadro 2.2.

Estructura, Clasificación y Evolución de los sistemas [De Buen Lozano, 1982]

- **Sistema**
  - Estructura
    - Entidades
    - Atributos
    - Actividades
    - Medio Ambiente
      - Endógenas
      - Exógenas
  - Clasificación
    - Continuo
      - Abierto
        - Estocástico
        - Determinístico
      - Cerrado
        - Estocástico
        - Determinístico
    - Discreto
      - Abierto
        - Estocástico
        - Determinístico
      - Cerrado
        - Estocástico
        - Determinístico
  - Evolución*
    - Ingeniería de Sistemas (objetivos)
    - Investigación de Operaciones (metodología)

CUADRO 2.2

*Por ser las disciplinas más importantes para la Facultad de Ingeniería sólo se trataron el conocimiento de estas dos.

2.3.5 Morfología de los sistemas [De Buen Lozano, 1982]

Con el fin de tener un conocimiento global sobre el análisis de la problemática cuando nos enfrentamos a un problema real y como debemos estructurarlo para proponer soluciones, se debe conocer el todo y sus partes. En este sentido se deben conocer los elementos que intervienen en el análisis de los sistemas.

La estructura de los sistemas puede ser analizada en tres dimensiones:

1a. dimensión: el *tiempo* asociado a las fases del proyecto.

2a. dimensión: la metodología que se refiere a los pasos de solución.

3a. dimensión: los *conocimientos* que forman la disciplina.

El *modelo de análisis de sistemas* queda definido por el tiempo y la metodología que se esquematiza en el cuadro 2.3, donde los renglones corresponden al tiempo y las columnas a la metodología de solución .

Pasos Fases	Definición del problema	Medición del sistema	Análisis de datos	Modelado de sistemas	Síntesis de Sistemas	Toma de decisión
Planeación del programa	COMIENZO					
Planeación del proyecto						
Desarrollo del sistema						
Producción ó construcción						
Distribución ó puesta en servicio						
Operación ó consumo						
Retiro						FIN

CUADRO 2.3

El cuadro 2.3 es una *matriz de actividades* cuya secuencia lógica de realización tiene el sentido indicado por las flechas en el esquema siguiente:

Pasos Fases	Lógica →
T i e m p o ↓	

La fases de la metodología son:

Planeación del programa:

En esta fase se deben determinar las actividades o programas a realizar. El objetivo es determinar la congruencia de los programas y establecer una base de información.

Planeación del Proyecto:

En esta fase se analiza un proyecto en particular y termina cuando se decide implantar una de las alternativas.

Desarrollo del sistema:

En esta fase se plantea como meta desarrollar un plan para implementar un proyecto específico y termina con la preparación de :

- las especificaciones del plan
- los dibujos y esquemas
- y las listas de materiales

Producción ó construcción:

En esta fase se implanta el proyecto. si este es de producción se determina el flujo de materiales. la secuencia de operaciones. etc. Si es de construcción, se ejecuta la obra.

Distribución o puesta en servicio:

En esta fase se hace llegar a los usuarios el producto manufacturado, o se pone en servicio la obra realizada en la fase anterior.

Operación o consumo:

Es la fase principal de un proyecto de sistemas; es la operación de la obra obtenida o el consumo final de un producto.

Retiro:

Finalmente, cuando finaliza el trabajo, se pasa a la fase de retiro, que en general coincide en el tiempo con la fase de puesta en servicio de un nuevo sistema que sustituye al antiguo.

Las fases del análisis difieren en las diversas disciplinas, sin embargo la metodología (etapas del proceso de solución) es común .

Los pasos que se deben realizar en toda metodología son:

Definición del problema:

Definir el problema dada una *problemática* [Fuentes, 1991 (1)]. Esta definición obedece a cierta estructura de decisión que depende de la información que se tenga y se quiera obtener.

Medición del sistema:

Incluye la delimitación de los objetivos aún los que no están bajo nuestra responsabilidad. Dichos objetivos pueden establecerse tomando en cuenta criterios específicos que pueden resumirse en:

- Económicos: como por ejemplo, ganancias o costos del cambio que se propone
- Sociales: como por ejemplo, distribución del ingreso o maximización del beneficio social
- Técnicos: como por ejemplo, especificaciones de algún equipo
- Ecológicos: como por ejemplo, daños a los ríos, al medio ambiente

Los objetivos varían con el sistema y la fase y están ligados al problema en cuestión, por ejemplo, para diseñar un producto se debe considerar:

- la producción
- la distribución
- la operación
- y el retiro

Análisis de datos:

Esta etapa consiste en descubrir relaciones entre las variables.

Modelado del sistema:

El modelo es una abstracción de la realidad y explica relaciones entre variables del problema. Depende de la estructuración que se hizo en la etapa inicial; si hay uno o varios decisores, del preferencias de estos, de el cumplimiento de algunas propiedades matemáticas como la transitividad, de la "racionalidad" de las preferencias, etc..

Síntesis de sistemas:

Al concluir cada fase, si el objetivo del problema fuera seleccionar alguna alternativa propuesta, se debe especificar la mejor. En los sistemas complejos, por ejemplo, si pueden dividirse en clases, determinar la clase más promisoria para reducir el problema. En este caso se puede utilizar el criterio de descartar las menos importantes y recurrir a la simulación si es necesario, esto es, si el conjunto de opciones no pudiera ser definido para elegir una de ellas, debe simularse el comportamiento de soluciones alternativas empleando modelos propios. Se debe concentrar el esfuerzo en alternativas promisorias y no gastar más de lo que se piensa obtener como beneficio. Por último, deben explorarse las soluciones dentro de dicha clase, tratando de analizar el mayor número de alternativas económicamente justificables.

Toma de decisiones o selección:

Los grandes sistemas cumplen con diversos criterios o medidas de efectividad que determinan el grado de cumplimiento de un objetivo. Sólo si las medidas de efectividad tienen la misma escala, existe una sola función objetivo que se debe *optimizar*, es decir, *seleccionar* una sola alternativa. Vale la pena aclarar que, en los problemas de toma de decisiones no siempre se desea obtener un óptimo, podemos pensar, por ejemplo, en los bancos para dar una tarjeta de crédito aceptan o rechazan solicitudes, en las entidades que otorgan préstamos para realizar proyectos de inversión, necesitan seleccionar algún conjunto de alternativas puesto que el presupuesto es limitado, etc.. Estos problemas claramente no son de optimización, sin embargo, si son toma de decisiones, pero no es el objetivo de este trabajo ahondar en este tema.

2.4 Generación de alternativas

Etapas del proceso de solución

Las etapas para resolver problemas se pueden resumir en la siguiente forma:

- Definición del problema, generación de alternativas, recolección de datos y establecimiento de criterios de evaluación.
- Desarrollo de modelos.
- Validación de los modelos.
- Investigación de soluciones, políticas o planes alternos.
- Control e implementación.

Es importante que el método de solución en la etapa de evaluación dentro del proceso se dé utilizando el concepto de sistema.

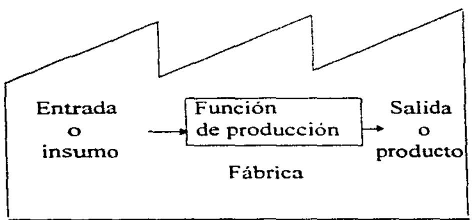
La generación de alternativas es un aspecto muy importante dentro de los problemas de toma de decisiones. Forma parte de la primera etapa de la estructuración de un problema de decisión. En muchos problemas las alternativas están en el mercado y sólo es necesario establecer criterios para seleccionar alguna, en otros es necesario diseñarlas. Por ejemplo, si se va a comprar un auto o un par de zapatos, sólo será necesario el costo si es lo único importante para que el decisor elija, aunque puede ser el caso que haya otros criterios importantes que intervengan: comodidad, color, etc. Pero si el problema es como impulsar el desarrollo de un país, habrá que diseñar una serie de alternativas para elegir la mejor de acuerdo con los objetivos que se quieran alcanzar.

Lo importante en la generación de alternativas es que se contemplen todas aquellas que puedan solucionar el problema y que cada una de ellas sea independiente. Deben eliminarse aquellas alternativas que a primera vista son dominadas por otras en todos los aspectos que van a considerarse para evaluarlas y todas aquellas que no sean factibles, es decir, las que por su costo, tamaño o tiempo de ejecución no sean soluciones al problema

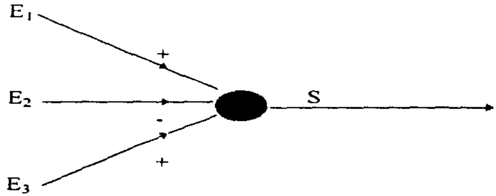
2.5 Diagramas de bloque y señales

Los diagramas de bloque y de señales son auxiliares muy importantes para representar la transformación de una variable en otra en una relación entrada-salida. En los diagramas suelen emplearse dos tipos de símbolos: los bloques o cajas negras y los diagramas de flujo de señales.

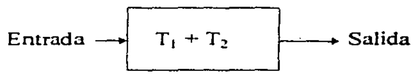
Algunos tipos de diagramas de bloques se representan como sigue:

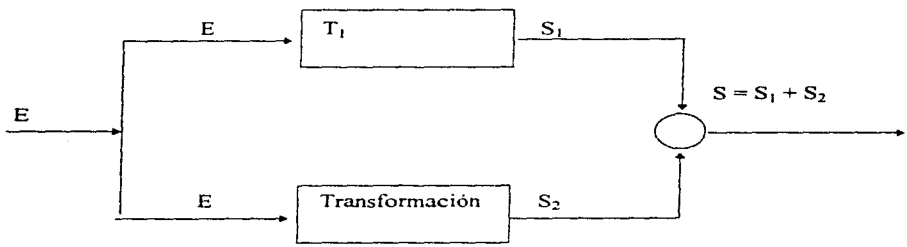


Un símbolo auxiliar en diagramas de bloque es el punto de suma (resta). En este símbolo, la variable que sale del punto es igual a la suma algebraica de las señales que entran:

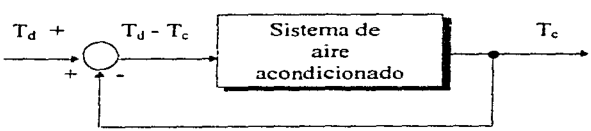


Una conexión en paralelo:

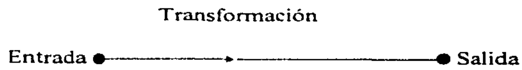




Un sistema realimentado:



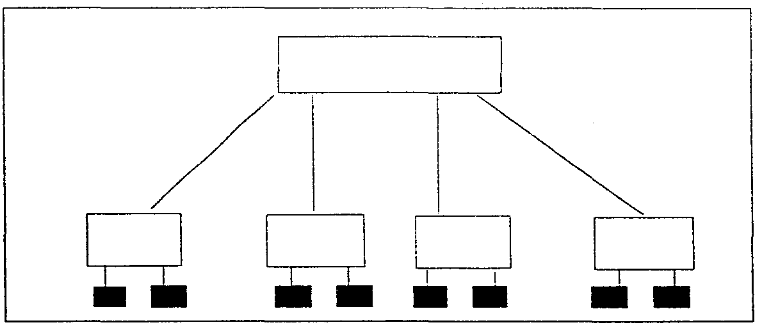
El siguiente, por ejemplo, es un diagrama de flujo de señales:



2.6 Jerarquización

La jerarquización es la manera de organizar y ordenar los sistemas. Todo sistema está formado por partes o subsistemas y entre los subsistemas hay relaciones jerárquicas en los que se deben determinar las estructuras y los niveles.

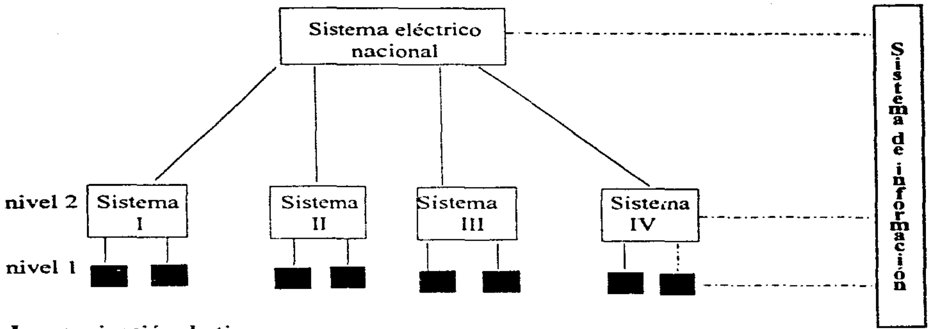
Resulta imposible analizar un número importante de sistemas si se desconoce su estructura y la estructura de sus subsistemas. El esquema siguiente es un sistema estructurado y con niveles:



La jerarquización es indispensable en el análisis de ciertos sistemas. Existen diversas clases de jerarquización, a saber: de nivel, tiempo y modo.

Jerarquizaciones de nivel

En este tipo de jerarquizaciones se crean subdivisiones que usualmente se basan en consideraciones geográficas y de espacio. Por lo general implican descentralización o conservación de la autonomía, hasta donde sea posible. Por ejemplo, la jerarquización del sistema eléctrico nacional por plantas, sistemas regionales y sistema de interconexión se puede esquematizar así:



Jerarquización de tiempo

Este tipo de jerarquización surge de rangos de tiempo de respuesta amplios inherentes a muchos sistemas. Por ejemplo, en el sistema educativo se nota una gran diferencia entre el tiempo de respuesta del sistema a los cambios en la estructura social de un país (usualmente de muchos años), el tiempo de respuesta a los cambios en el grado de educación (primaria, secundaria y preparatoria) y el tiempo de respuesta a los cambios entre el nivel de educación obtenido año con año.

Los tiempos de respuesta tienen diversas órdenes de magnitud, por ejemplo, años, días, minutos y segundos.

Jerarquización de modo

Tanto los sistemas educativos como los eléctricos y de todo tipo deben ser capaces de trabajar bajo diversas condiciones: normales, de emergencia, preventivas y otras de restauración. Se crean así subdivisiones de acuerdo con el modo de trabajo. Por ejemplo, para el sistema eléctrico:

Los objetivos del modo normal así como los de modo de trabajo preventivo pueden resumirse como sigue:

1) Mantener una frecuencia de 60 Hz.
2) Dar mantenimiento a la red
En el modo normal se minimizan costos y en el modo de trabajo se debe mantener una reserva de energía.

El objetivo del modo de trabajo de emergencia y de restauración es:

Mantener una frecuencia de 60 Hz.. En el modo de trabajo de emergencia se minimizar los apagones y en el de restauración se maximizar la velocidad de restauración.

CAPITULO 3: Programación Lineal

3.1 Consideraciones Generales

Como una herramienta en la solución de problemas, las técnicas de programación lineal y teoría de redes, son dos técnicas muy importantes dentro de la Investigación de Operaciones. Sin embargo, el campo de la investigación de operaciones es muy amplio y existen otras técnicas tan importantes como estas dos, como lo son la programación dinámica, teoría de inventarios, teoría de colas, simulación, etc. Si se está interesado en conocer los principios de éstas se pueden consultar libros como [Bronson,1983], [Hiller,1989], [Prawda,1980].

La programación lineal es una técnica poderosa de IO para tratar problemas de asignación de recursos escasos entre actividades que compiten, tomando en cuenta un sólo criterio como el de maximizar las ganancias o el de minimizar los costos. Por esta razón se ha convertido en una herramienta estándar de gran importancia para muchas organizaciones y cada vez es mayor el reconocimiento de su aplicabilidad.

Uno de los aspectos más importantes en el análisis del problema de programación lineal es la caracterización analítica de sus soluciones óptimas. Esta caracterización y sus consecuencias son el punto de partida de los métodos de solución del problema lineal.

El uso práctico de la solución gráfica de programación lineal está limitado a problemas de dos variables (o bivariados). Sin embargo, el método gráfico revela el resultado importante de que, para resolver problemas de programación lineal sólo se necesitan considerar los puntos extremos del espacio de soluciones. Este resultado es el aspecto principal en el proceso de desarrollo del método simplex, el cual es un procedimiento algebraico diseñado para resolver el problema de programación lineal general.

3.2 Forma general del modelo matemático de programación lineal

La programación lineal a menudo se utiliza para resolver problemas de asignación de recursos limitados a varias actividades económicas. El modelo de programación lineal (PL) para decidir los valores de $x_1,x_2,\dots,x_n$ es:

$$\text{Maximizar } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

sujeto a las restricciones

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\le b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\le b_m \end{aligned}$$

$x_1,x_2,\dots,x_n \ge 0$ llamadas restricciones de no negatividad.

Las variables x_i (recursos básicos), $i = 1,\ldots,n$ son las *variables de decisión*; a_{ij}, b_j, c_i reciben el nombre de *parámetros del modelo*; a_{ij}, $i=1,\ldots,n$; $j=1,\ldots m$; indica que cantidad del recurso i se necesita para producir una unidad de la actividad j; b_j indica la cantidad disponible del recurso j; c_i indica el costo del recurso i. Las restricciones $x_i \geq 0$ indican que ninguna de las variables de decisión debe ser negativa. La función que se desea maximizar $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ se llama *función objetivo*. El problema consiste en *maximizar las ganancias* representadas por la función objetivo. Cualquier situación cuya formulación matemática se ajuste a este modelo y tanto la función objetivo como las restricciones sean lineales es un problema de programación lineal.

Si el modelo anterior se utiliza por ejemplo para asignar recursos, en una economía en competencia perfecta, en m industrias. Las industrias planean sus actividades para maximizar sus respectivas ganancias, sus niveles de actividades están dados por un vector x de n componentes, donde cada componente representa el nivel de actividad (o recurso) $i=1,\ldots n$ de la industria j, $j=1,\ldots m$. Las restricciones de producción o tecnológicas, el vector de componentes b_j es el vector de máxima capacidad (es decir, número de máquinas, horas-hombre, etc.) disponible en la industria j. Las restricciones corresponden al consumo de recursos básicos de las industrias cuya cantidad depende del nivel de actividad a que operen, las restricciones de no negatividad significan que ninguna componente del vector x puede ser negativa. El problema correspondería a pedir que el conjunto de industrias maximicen sus ganancias totales, pero que el consumo de recursos básicos no exceda el vector de cantidades disponibles.

El modelo anterior puede ser transformado como otro problema de programación lineal equivalente:

1. Minimizar en lugar de maximizar la función objetivo:

$$\text{Minimizar} \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

2. Algunas restricciones con desigualdad en el sentido mayor o igual:

$$a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \ldots + a_{nj}x_n \geq b_j, \text{ para algunos valores de j,}$$

3. Algunas restricciones en forma de ecuación:

$$a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \ldots + a_{nj}x_n = b_j, \text{ para algunos valores de j,}$$

4. Las variables de decisión sin la restricción de no negatividad:

x_i no restringida en signo para algunos valores de i.

3.3 Forma estándar del modelo para maximización y minimización

Un modelo de Programación lineal puede incluir restricciones de los tipos $\leq$, = y $\geq$.Además las variables pueden ser no negativas o "libres". Para desarrollar un método de solución general, el problema de programación lineal debe ponerse en un formato común, al que se le llama la *forma estándar* con propiedades como las siguientes:

1. Todas las restricciones son ecuaciones con segundo miembro no negativo (para el caso de minimización).
2. Todas las variables son no negativas.
3. La función objetivo puede ser la maximización o la minimización

Con respecto a las restricciones

1. Una restricción del tipo $\leq$ ($\geq$) puede convertirse en una ecuación mediante la suma de una variable de *holgura* (o restando una variable de exceso) al primer miembro de la restricción.
2. El segundo miembro de una ecuación puede hacerse siempre no negativo multiplicando ambos lados por -1
3. La dirección de una desigualdad se invierte cuando ambos miembros se multiplican por -1.

En relación con las variables:

Una variable no restringida y_i, puede expresarse en términos de dos variables no negativas mediante el uso de la sustitución

$$y_i = y_i^{*} - y_i^{**} \qquad y_i^{*}, y_i^{**} \geq 0$$

La sustitución debe efectuarse en todas las restricciones y en la función objetivo.

Con respecto a la función objetivo:

Aunque el modelo estándar de programación lineal puede ser del tipo de maximización o de minimización, algunas veces sirve para convertir una forma en la otra.

La maximización de una función equivale a la minimización del negativo de la misma función max $\sum c_j x_j = -$ min $\sum - c_j x_j$

Un programa lineal está en forma estándar si todas las restricciones son igualdades y existe una solución factible. En notación matricial, la forma estándar es:

optimícese: $z = C^T x$

con la condición: $Ax=B$

$x \geq 0$

donde x es el vector columna de incógnitas, incluyendo todas las variables de holgura, superfluas y artificiales; C^T es el vector renglón de los costos correspondientes; A es la matriz de coeficientes de las ecuaciones de restricciones; y B es el vector columna de los lados derechos de las ecuaciones de restricciones. Si x_0 denota sólo al vector de las variables de holgura y artificiales, entonces la solución factible inicial está dada por $x_0=B$, entendiéndose que, a toda variable en x que no se incluya en $\mathbf{x}_0$ se le asigna un valor cero.

3.4 El método gráfico

El modelo de solución gráfico sólo es práctico para menos de tres variables. El procedimiento incluye la construcción de una gráfica de dos dimensiones , con x_1 y x_2 en los ejes.

El primer paso del método gráfico consiste identificar los valores de (x_1,x_2) permitidos por las restricciones, esto se hace graficando las soluciones factibles, o el espacio de soluciones factibles, que satisfaga todas las restricciones en forma simultánea.

Ejemplo:

Sean x_1 y x_2 las variables que representan las cantidades del producto 1 y el producto 2 por minuto, respectivamente en tres fabricas. Sea z la contribución a la ganancia que resulta por minuto. Entonces x_1 y x_2 son las variables de decisión del modelo y el objetivo es escoger sus valores de manera que se maximice.

$$z= 3x_1 + 5x_2,$$

sujeta a las restricciones impuestas sobre esos valores por las capacidades disponibles limitadas en cada fábrica. La siguiente tabla dice que cada unidad de producto 1 que se produce por minuto, usará el 1% de la capacidad de la fábrica 1, y sólo se dispone de 4 % . Matemáticamente esta restricción se expresa mediante la desigualdad $x_1 \leq 4$. De igual manera la fábrica 2 impone la restricción $2x_2 \leq 12$ y para la restricción de la fábrica 3 sería $3x_1 + 2x_2 \leq 18$. Finalmente como las tasas de producción no pueden ser negativas, es necesario restringir las variables de decisión a valores no negativos:

$$x_1 \geq 0 \quad y \quad x_2 \geq 0.$$

En resumen, se tiene:

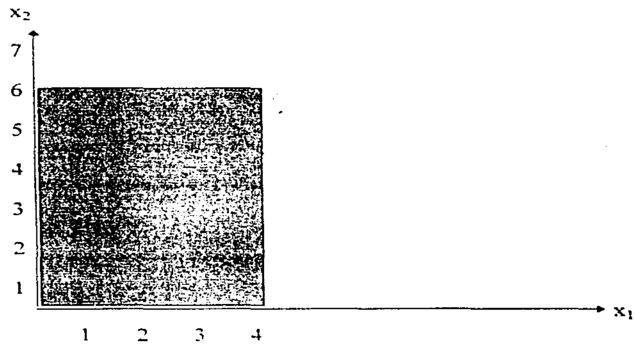
	Producto		
Fábrica	1	2	Capacidad Disponible
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
Ganancia unitaria	\$3	\$5	

$$\text{Maximizar } Z=3x_1 + 5x_2$$

sujeta a las restricciones

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Primer paso: identificar los valores (x_1, x_2) permitidos por las restricciones. Esto se hace dibujando las líneas de la frontera de valores permisibles. Debido a las restricciones de no negatividad (x_1, x_2) están en el lado positivo de los ejes.

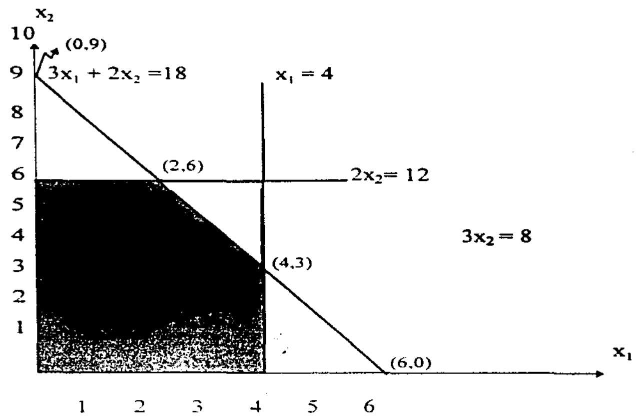


El área sombreada muestra los valores de (x_1, x_2) permitidos por las restricciones:

$x_1 = 4$

$2x_2 = 12$

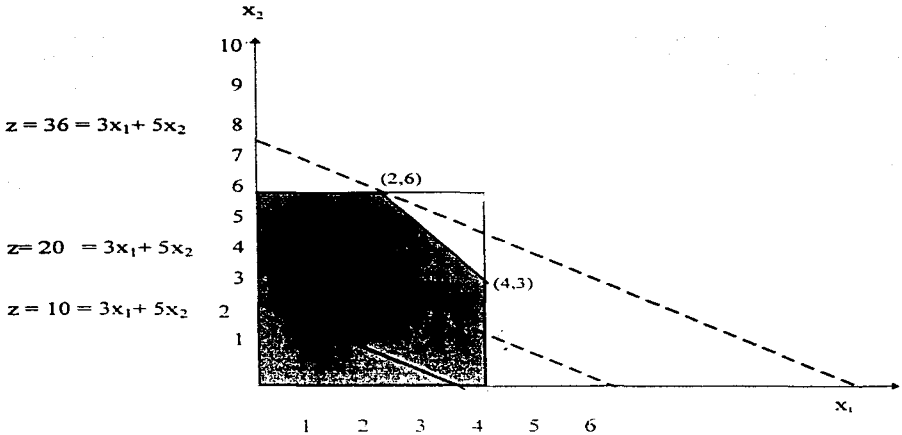
La última restricción, $3x_1 + 2x_2 \leq 18$, se encuentra graficando los puntos (x_1, x_2), tales que $3x_1 + 2x_2 = 18$ (otra recta), para completar la frontera:



3.5 Región de soluciones factibles

Corresponde con la intersección de las regiones que cumplen con cada restricción. Dicha región se denomina *región factible*. Todos los puntos de esta región, se denominan ***soluciones factibles***, y tienen como característica que cumplen con todas las restricciones del problema incluyendo las de no negatividad. La solución óptima es un punto de ésta región factible.

El paso final es seleccionar, dentro de esta región, el punto que maximiza el valor de $z=3x_1+ 5x_2$. Este paso se vuelve automático después de un poco de práctica. Si se intentan algunos valores de prueba y error, por ejemplo, $z=10=3x_1+5x_2$, para ver si existe algún valor de (x_1, x_2) dentro de la región permisible, que dé un valor de 10 para z. Si se dibuja la recta $3x_1+ 5x_2= 10$, se puede ver que existen muchos puntos sobre esta recta que están dentro de la región. Por lo tanto, se deben intentar un valor mayor para z, por ejemplo $z = 20 = 3x_1+ 5x_2$ De nuevo, se revela que un segmento de esta línea cae dentro de la región. Se siguen probando los valores y se puede corroborar que el valor máximo lo adquiere en el punto (2,6) donde z=36.



3.6 Soluciones básicas factibles y no factibles

Se llama *solución básica* a una solución del modelo de programación lineal en forma canónica, que se obtiene al fijar en cero tantas variables como sea necesario para tener un sistema con igual número de ecuaciones que de variables. La *forma canónica* tiene las siguientes características:

- para un problema de minimización (maximización) las restricciones son del tipo ≥ (≤)
- cada restricción tiene, al menos, una variable con coeficiente +1, que aparece en ella únicamente y no aparece en la función objetivo.
- las variables también deben ser no negativas

Un problema canónico se lleva a la forma estándar, agregando una variable de holgura o de exceso. Un problema de PL en forma estándar es, por ejemplo:

Ejemplo:

$$\begin{array}{l} \text{Maximizar } Z = 5x_1 + 8x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad\qquad = 8 \\ \qquad 2x_2 \qquad + x_4 \quad = 12 \\ 2x_1 + 3x_2 \qquad\qquad + x_5 = 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{array}$$

Una solución básica que cumple con las restricciones de no negatividad de las variables, se llama *solución básica factible*.

Al conjunto de variables que resuelve el sistema se les denomina *variables básicas*; a las que se fijan en cero se les llama *variables no básicas*. Al conjunto de variables básicas se le denomina Base [Gilbert, 1986]

3.7 Degeneración

Si una ó mas de las variables básicas tienen valor cero se dice que la solución básica es *degenerada*.

3.8 Método Simplex

El método simplex es un algoritmo, el cual consiste en un procedimiento matricial para resolver programas lineales expresados en forma estándar. El tableau simplex es:

		x_1 x_2 .... x_n	b_j
c_j			
x_i	0	A	
x_j	0		
(z_j-c_j):			0

Para un problema de maximización el algoritmo es el siguiente [Schaum, 1983]

PASO 1 Localizar el número más negativo en el renglón inferior del tableau simplex, excluyendo la última columna. A la columna en la cual aparece este número, se le denomina "columna de trabajo". Si existiera más de una posibilidad en la selección del número más negativo, seleccionar sólo uno.

PASO 2 Obtener razones dividiendo cada número positivo de la columna de trabajo, excluyendo el último renglón, entre el elemento en el mismo renglón y en la última columna. Al elemento de la columna de trabajo que dé la razón más pequeña, se le denomina elemento pivote. Si más de un elemento da la misma razón más pequeña, debe seleccionarse uno de ellos. Si ningún elemento en la columna de trabajo es positivo, el programa no tiene solución.

PASO 3 Usar operaciones elementales de renglones para convertir el elemento pivote en 1 y reducir los otros elementos en la columna de trabajo 0.

PASO 4 Reemplazar en la primera columna la variable x_i del renglón pivote por la variable x_j de la columna pivote. Esta nueva primera columna es ahora el conjunto de variables básicas.

PASO 5 Repítanse los pasos 1 al 4 hasta que no queden números negativos en el último renglón, excluyendo a la última columna.

PASO 6 La solución óptima se obtiene asignando a cada variable de la primera columna aquel valor en el renglón correspondiente y en la última columna. A todas las otras variables se es asigna el valor cero. El valor asociado z^*, último valor óptimo de la función objetivo, es el número en el último renglón y última columna para un programa de maximización, pero es el negativo de éste numero para un programa de minimización.

Ejemplo:

maximícese: $z = x_1 + 9x_2 + x_3$

con las condiciones:
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 9$$
$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 15$$

Primero lo ponemos en forma estándar, empezando por introducir variables de holgura x_4 y x_5 en la primera y segunda desigualdades de restricción, respectivamente, y definiendo después:

$$X=[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]^T \qquad C=[1,9,1,0,0]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \end{bmatrix}, \qquad X_0 = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Los costos asociados con los componentes x_0, variables de holgura, son cero; por lo tanto $C_0=[0,0]^T$.

La Tabla queda:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
		1	9	1	0	0	
x_4	0	1	2	3	1	0	9
x_5	0	3	2	2	0	1	15

Observación: al inicio, x_4 y y_5 son las variable básicas.

Para obtener el último renglón de esta tabla, se empleó la simplificación a la tabla y primero se calcula por inspección cada z_j; z_j es el producto escalar de la columna 2 y la columna *j* de A. Después se le resta el costo correspondiente c_j. En este caso, la segunda columna es cero, por lo que $z_j-c_j=0-c_j= -c_j$. Por lo tanto, el renglón inferior de la tabla, excluyendo al último elemento, es el negativo del renglón 2. El último elemento del último renglón es el producto escalar de la columna 2 y la columna final B, así que también es cero. En este punto, el segundo renglón y la segunda columna del tableau son superfluos. Eliminándolos, se obtiene la tabla 1 como la tabla inicial completa.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
x_4	0	1	2*	3	1	0	9	
x_5	0	3	2	2	0	1	15	tabla 1
(z_j-c_j):		-1	-9	-1	0	0	0	

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
x_2	0	1/2	1	3/2	1/2	0	9/2	
x_5	0	2	0	-1	-1	1	6	tabla 2
		7/2	0	25/2	9/2	0	81/2	

Se puede ahora aplicar el método simplex. El elemento más negativo en el último renglón de la tabla 1 es -9, correspondiente a la columna x_2; por lo tanto, esta columna se transforma en la columna de trabajo. Obteniendo las razones 9/2 = 4.5 y 15/2 = 7.5, se encuentra que el elemento 2, marcado con asterisco en la tabla 1, es el elemento pivote que da la razón más pequeña. Entonces aplicando los pasos 3 y 4 a la tabla1, se obtiene la tabla 2. Ya que el último renglón de la tabla 2 no contiene elementos negativos, se tiene del paso 6 que la solución óptima es:

$$x_1{}^* = x_3{}^* = x_4 \quad x_2 = 4.5 \quad x_5 = 6 \quad z^* = 40.5$$

3.9 Complicaciones en la aplicación del método simplex

El método simplex se complica cuando no hay una solución factible básica inicial, sin embargo, hay varios procedimientos que resuelven este problema [Bazara, 1981]. Otro problema que se puede mencionar es cuando se produce un ciclo en la solución, es decir, después de un número fijo de iteraciones la solución se repite. En Bazara, se encuentra un ejemplo de ciclo, dado por Beale.

Las soluciones degeneradas es otro problema para dar la solución de un P.L. después de aplicar el método simplex. [Bazara, 1981]

3.10 El método de las DOS FASES

Este método tiene dos fases:

- El objetivo de la fase 1, es minimizar la suma de las variables artificiales o equivalentemente maximizar la resta.. El mínimo se da cuando las variables artificiales valen cero. Una vez conseguido este objetivo se pasa a la fase 2.

- El objetivo de la fase 2, es maximizar la función objetivo del problema original.

El procedimiento del método de las dos fases es el siguiente:

. Se requiere maximizar el negativo de la suma de las variables artificiales (función objetivo). Estas variables no aparecen en la función objetivo original.

- Este problema, con dos objetivos, se escribe en una tabla simplex, la cual contendrá dos renglones evaluadores.

- Se hacen cero los coeficientes de las variables artificiales en la función objetivo de la fase I, por medio de operaciones elementales con los renglones.

- Se aplica el algoritmo simplex. Cuando la función objetivo de la fase I sea cero se puede eliminar su correspondiente renglón evaluador.

- Con la tabla simplex resultante se continúa aplicando el método simplex hasta llegar al óptimo.

Ejemplo: Resuélvase por el método de las dos fases el siguiente problema lineal.

$$\text{Min } Z = -3x_1 + 5x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 \quad &\leq 4 \\ x_2 &\leq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 &\geq 18 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Primero se reescribe el problema en forma estándar como:

$$\text{Min } Z = -3x_1 + 5x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 \quad + x_3 \quad &= 4 \\ x_2 \quad + x_4 \quad &= 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \quad -x_5 + w_1 &= 18 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \quad x \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

La primera fase consiste en resolver el problema, observando que el vector w de variables artificiales sólo tiene una componente, que es w_1.

$$\text{Min } w_1$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 \quad + x_3 \quad &= 4 \\ x_2 \quad + x_4 \quad &= 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \quad -x_5 + w_1 &= 18 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ w_1 \geq 0$$

Aplicando el método Simplex, una vez que se ha cambiado la función objetivo a Max -W_1, se tiene:

	w_1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	1	0	0	0	0	0	0
a_3	0	1	0	1	0	0	4
a_4	0	0	1	0	1	0	6
a_{w1}	1	3	2	0	0	-1	18

Para tener el primer punto extremo se requiere que los vectores de la base sean unitarios, por lo tanto se convierte a w_1 en vector unitario. Restándole la última (w_1) a la primera columna y aplicando el método simplex, la columna pivote es x_1, con el valor -3. El elemento pivote corresponde al primer renglón. Para ir minimizando la función objetivo (en el primer renglón) multiplicamos el renglón x_3 por +3 y lo sumamos al primer renglón (función objetivo) y nos da el vector señalado en la siguiente tabla. Se siguen las operaciones elementales hasta lograr w=0.

	w_1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	-3	-2	0	0	1	-18
a_3	0	1	0	1	0	0	4
a_4	0	0	1	0	1	0	6
a_{w1}	1	3	2	0	0	-1	18
	0	0	-2	3	0	1	-6
	1	0	0	0	0	0	0
a_3	0	1	0	1	0	0	4
a_4	0	0	1	0	1	0	6
a_{w1}	1	0	2	-3	0	-1	6
	1	0	0	0	0	0	0
a_3	0	1	0	1	0	0	4
a_4	-1/2	0	0	3/2	1	1/2	3
a_{w1}	1/2	0	1	-3/2	0	-1/2	3

Esta es la solución óptima a la fase uno, y como W=0 el problema original tiene solución. Para empezar la fase dos, se toma el tableau óptimo anterior, únicamente ignorando la columna a_{w1} (que ya no se necesita) y el renglón de los $z_j - c_j$. Sustituyendo ese renglón por la función objetivo original.

$$\text{Mín } z = -3x_1 + 5x_2$$

o equivalentemente

$$\text{Max } h = -z = 3x_1 - 5x_2$$
$$h - 3x_1 + 5x_2 = 0$$

Al iniciarse la fase dos se tiene la siguiente estructura:

	h	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	1	-3	5	0	0	0	0
a_1	0	1	0	1	0	0	4
a_4	0	0	0	3/2	1	½	3
a_2	0	0	1	-3/2	0	-1/2	3

Se restauran los vectores unitarios por medio de operaciones matriciales elementales obteniendo el siguiente tabla:

	h	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	1	0	0	0	0	0	0
a_1	0	1	0	1	0	0	4
a_4	0	0	0	3/2	1	½	3
a_2	0	0	1	-3/2	0	-1/2	3

En este ejemplo no es necesario seguir iterando en la fase dos, pues al restaurar los vectores unitarios correspondientes a la base de la tabla óptima de la fase uno, se obtuvieron por coincidencia las condiciones de optimalidad $(z_j - c_j) \geq 0$ para toda j en A. Por lo general este no es el caso y será necesario hacer varias iteraciones del método simplex en la segunda fase . La solución es:

$$\mathbf{x} = \left(\frac{x_B}{x_N}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_2 \\ \hline x_3 \\ x_5 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad h = -z = -3 \text{ ó } z = 3.$$

3.11 Teoría de la dualidad

El programa dual asociado a un programa lineal se define con los dos siguientes problemas:

	Primal (P_1)		Dual (D_1)
minimizar	$c^T x$	maximizar	$y^T b$
sujeto a	$Ax \geq b$		$y^T A \leq c^T$
	$x \geq 0$		$y \geq 0$

Si A es una matriz de m x n, entonces x es un vector columna n-dimensional, b es un vector columna m-dimensional, c^T es un vector fila n-dimensional y y^T es un vector fila m-dimensional. El vector x es la variable del problema primal y y es la variable del problema dual.

Es decir, dado un par de problemas, el primal (P_1) y su correspondiente dual (D_1) únicamente y sólo uno de los tres siguientes casos pueden ocurrir.

1) Ambos programas tiene soluciones óptimas y sus funciones objetivos óptimas son iguales, es decir, si x^* es óptimo para (P_1) y y^* es óptimo para (D_1) entonces :

$$z^* = c^T x^* = y^{*T} b = G^*$$

2) Si el problema primal (P_1) no tiene soluciones factibles y el problema dual (D_1) tiene al menos una, entonces, el dual tiene una solución óptima no acotada y viceversa, si el problema dual no tiene soluciones factibles y el primal tiene al menos una, entonces, el primal tiene una solución óptima no acotada.

3) Ambos problemas (P_1) y (D_1) no tienen solución.

Este teorema es muy importante porque la información generada por la solución de uno de los problemas (ya sea el primal o el dual) permite conocer la solución del otro, sin tener que resolverlo.

3. 12 Transformación del problema primal a su problema asociado dual

Con respecto al problema original, si hay que maximizar la función objetivo del problema:

- Todas las restricciones deben ser del tipo menor o igual ($\leq$) sin importar el signo del elemento del lado derecho.
- Todas las variables deben ser no negativas.

La transformación es como sigue:

- Los elementos del lado derecho de las restricciones pasan a ser los coeficientes de la función objetivo del dual que será una minimización.
- Los coeficientes de la función objetivo pasan a ser los elementos de lado derecho de las restricciones del dual.
- La matriz de coeficientes de las restricciones en el primal se debe trasponer en el dual.
- Las desigualdades del dual son todas del tipo mayor o igual $(\geq)$.
- Todas las variables duales son no negativas.

Ejemplo:

Obtener el Dual del siguiente modelo:

Minimizar $z= 5x_1 +2x_2 + x_3$

sujeto a

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 20$$
$$6x_1 + 8x_2 + 5x_3 \geq 30$$
$$7x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 40$$
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 50$$

con todas las variables no negativas

siguiendo los paso anteriores, su dual es:

maximizar $z = 20w_1 + 30w_2 + 40w_3 +50w_4$

sujeto a:

$$2w_1 + 6w_2 + 7w_3 + w_4 \leq 5$$
$$3w_1 + 8w_2 + w_3 + 2w_4 \leq 2$$
$$w_1 + 5w_2 + 3w_3 + 4w_4 \leq 1$$

con todas las variables no negativas

Se puede concluir que el modelo dual tiene tantas variables como restricciones tiene el primal y el modelo dual tiene tantas restricciones como variables el primal.

3.13 Relaciones primal- Dual

Variables primales $\Leftrightarrow$ Restricciones del dual

Variables duales $\Leftrightarrow$ Restricciones del primal

Si las restricciones en cualquiera de los modelos, primal o dual, son desigualdades, se les debe agregar variables de holgura; una por cada restricción, de manera que la relación se puede establecer como:

Variables primales $\Leftrightarrow$ Variables de holgura del dual

Variables duales $\Leftrightarrow$ Variables de holgura del primal

3.14 Interpretación económica del Dual

La interpretación económica de un problema dual se basa directamente en la interpretación más frecuente del problema primal, si el problema primal es uno de planeación, por ejemplo, la planeación de la producción, planeación de inventarios, planeación de cultivos, en los cuales se desea maximizar un objetivo, sujeto a las limitaciones de los recursos, entonces el modelo dual es un problema de asignar precios a estos recursos, y da como resultado, el precio que debe tener el recurso para que la persona que se enfrenta con el problema, sea indiferente a vender el recurso o utilizarlo para producir, sembrar, mantener inventario, etc, así el dual es un problema de tipo económico que tiene gran importancia. A estos precios se les llama precios sombra.

Ejemplo:

Considere el problema lineal

$$\text{maximice } z = 20x_1 + 10x_2 + x_3 + 15x_4$$

$$(P)\qquad \begin{aligned} 3X_1 + 2X_2 + 10X_3 + 3X_4 &\le 10 \\ 2X_1 + 4X_2 + 20X_3 + X_4 &\le 15 \\ X_1 \ge 0;\ X_2 \ge 0;\ X_3 \ge 0;&\ X_4 \ge 0 \end{aligned}$$

Determine la solución óptima de este problema y de su dual.

El problema dual de (P) es

$$\text{minimice } w = 10\lambda_1 + 15\lambda_2$$

$$\begin{aligned} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 &\ge 20 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 &\ge 10 \\ 10\lambda_1 + 20\lambda_2 &\ge 1 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 &\ge 15 \\ \lambda_1 \ge 0;\ \lambda_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

cuya solución óptima, obtenida gráficamente, es

$w^* = 200/3$; $\lambda_1^* = 20/3$; $\lambda_2^* = 0$

usando esta información y el teorema de complementariedad se implica que la solución óptima x^* de (P) satisface

$x^*_2 = 0$; $x^*_3 = 0$; $x^*_4 = 0$

pues la segunda, tercera y cuarta restricciones del problema dual se satisfacen con estricta desigualdad cuando se sustituye la solución óptima $(\lambda_1^*, \lambda_2^*)$. Por otra parte, λ_1^* positivo implica que la solución óptima del problema (P), satisface con igualdad la primera de las restricciones de desigualdad, esto es, se cumple que

$$3x^*_1 + 2x^*_2 + 10x^*_3 + 3x^*_4 = 10$$

Sin embargo, dado que $x^*_2 = x^*_3 = x^*_4 = 0$ se tiene que $x^*_1 = 10/3$. Finalmente, es fácil verificar que el vector x^* es una solución factible del problema (P), y que el valor de la función objetivo es $z^* = 200/3$. Esto demuestra que x^* es la solución óptima del problema (P)

CAPITULO 4: Algoritmos Especiales

4.1 El problema de transporte

Una de las principales áreas de aplicación de la programación lineal, son los problemas de distribución y de transporte. Este tipo de problemas requiere que determinados productos situados en puntos orígenes, se trasladen físicamente a puntos de destino, de manera que se satisfagan las demandas, sin exceder las capacidades de las fuentes y a un costo mínimo.

El título de "el problema de transporte", es sólo un emblema representativo de los primeros problemas que le dieron origen. En la actualidad se ha usado ésta técnica en problemas de planeación de la producción, programas de maquinado, etc.

4.2 Modelo de programación lineal del problema del transporte

Aunque el modelo e transporte es un programa lineal, su estructura especial permite modificar los detalles del algoritmo simplex a fin de producir una técnica más eficiente en términos de cálculo. En este sentido la teoría de la dualidad es muy importante en el desarrollo del método de transporte.

El modelo de transporte clásico tiene que ver con el envío (o transbordo) de una o más mercancías entre fuentes y destinos. El modelo se puede modificar para que incluya el problema de transporte capacitado, que difiere del modelo clásico en que se imponen límites superiores sobre las capacidades de las rutas. El modelo se aplica también a otros casos que no entran en la descripción clásica, como el problema de asignación y el problema del inventario de producción.

Las características de su estructura son:

- Los coeficientes de las variables en las restricciones son siempre unos o ceros.
- Si la oferta es igual a la demanda (lo cual siempre se puede lograr añadiendo orígenes o destinos ficticios), una de las restricciones es redundante.
- La variable dual correspondiente a una restricción redundante se puede fijar arbitrariamente.

El método simplex se utiliza directamente sobre el tableau de transporte que se da a continuación.

Destinos

	1	2	3	...	n	Suministro	u_i
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1	u_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2	u_2
.....	.....	.....	.....	...	.....	.....	...
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	c_{m3} x_{m3}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m	u_m
Demanda	b_1	b_2	b_3	...	b_n		
v_j	v_1	v_2	v_3	...	v_n		

Tabla 4.1 Tabla simplex del problema de transporte

Ejemplo:

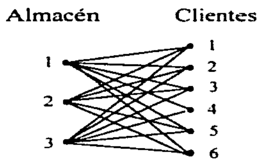
Una empresa opera tres almacenes cuyas capacidades mensuales son: 100, 140 y 150 unidades, respectivamente. Se desea determinar la forma en que se habrán de satisfacer los pedidos de sus tiendas de víveres, que ascienden a 52, 38, 55, 92, 69 y 84 unidades, respectivamente, de manera que el costo de transportación sea el menor posible.

En la siguiente tabla se muestran los costos de transportación para una unidad de mercancía desde cada almacén hasta cada tienda, así como la oferta y la demanda:

Clientes

Almacén	1	2	3	4	5	6	Oferta
1	15	25	18	35	40	23	100
2	22	36	40	60	50	38	140
3	26	38	45	52	45	48	150
Demanda	52	38	55	92	69	84	390

Planteamiento



a) Definición general de las variables

x_{ij} : unidades de mercancías a transportar desde el almacén i hasta la tienda j, mensualmente

$i \varepsilon 1$ a 3; $j \varepsilon 1$ a 6;

b) Restricciones

1ra. Envio desde cada almacén a todas las unidades:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = 100$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} = 140$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} = 150$$

2da. Recepción de cada tienda, proveniente de todos los almacenes:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 52$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 38$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 55$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 92$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} = 69$$

$$x_{16} + x_{26} + x_{36} = 84$$

3ra. No negatividad:

$x_{ij} \geq 0$; $i \varepsilon 1,2,3$; $\quad j \varepsilon 1,2,3,4,5,6$

c) Función objetivo

$$\text{Min } z = 15x_{11} + 25x_{12} + 18x_{13} + 35x_{14} + 40x_{15} + 23x_{16} +$$

$$22x_{21} + 36x_{22} + 40x_{23} + 60x_{24} + 50x_{25} + 38x_{26} +$$

$$26x_{31} + 38x_{32} + 45x_{33} + 52x_{34} + 45x_{35} + 48x_{36}$$

Para obtener una solución básica factible se dan a continuación dos **métodos.**

4.3 Métodos de aproximación para obtener una solución inicial

Una solución inicial básica factible se puede obtener por alguno de los métodos siguientes:

- Método de la esquina noroeste.
- Método de Vogel

Método de la esquina noroeste

Empezando con la celda (1,1) del tabla simplex del modelo de transporte (esquina noroeste), se asignan a x_{11} tantas unidades como sea posible, sin incumplir con las restricciones. Este será el menor valor de a_1 y de b_1. En seguida, se continua moviendo una celda hacia la derecha, si queda algún suministro o, si no, una celda hacia abajo. En cada paso se asigna, tanto como sea posible, a la celda (variable) bajo consideración, sin ir en contra de las restricciones: la suma de las asignaciones del i-ésimo renglón no puede exceder a a_i, la suma de la asignaciones de la j-ésima columna no puede exceder a b_j; además, ninguna asignación puede ser negativa. Una asignación puede ser cero.

Ejemplo:

	Destino 1	Destino2	Destino 3	
Origen 1	6000	4000	3000	11
Origen 2	2000	3000	5000	13
	6	4	14	

1. La celda en la esquina noroeste es la celda del origen 1 destino 1. El origen tiene disponibles 11 vagones y el destino requiere al menos 6, en esta cantidad se fija el embarque, es decir, $x_{11} = 6$.

En las siguientes tablas los costos están divididos entre mil

	Destino 1	Destino2	Destino 3	
Origen 1	$\boxed{6}$ 6	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$	5
Origen 2	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	13
	0	4	14	

2. Al efectuar esta asignación, lo que se tiene en el origen 1 es ahora 11 - 6 = 5 vagones y en el destino 1 se requieren 6 - 6 = 0 vagones, por lo cual se elimina la columna 1.

	Destino 1	Destino2	Destino 3	
Origen 1	$\boxed{6}$ 6	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$	5
Origen 2	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	13
	0	4	14	

3. Aún quedan dos orígenes y dos demandas, se debe continuar con el método. La esquina noroeste es ahora la del origen 1 y el destino 2. El origen dispone de 5 vagones, y el destino requiere de 4. Se deben asignar 4, es decir $X_{14} = 4$. Actualizando los valores, en el origen 1, se dispondrán de 5 - 4 = 1 vagón y el destino requiere de 4 - 4 = 0 vagones, por lo cual se elimina la columna 2.

	Destino 1	Destino2	Destino 3	
Origen 1	$\boxed{6}$ 6	$\boxed{4}$ 4	$\boxed{3}$	~~5~~ 1
Origen 2	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	13
	0	~~4~~ 0	14	

Aún queda un destino y dos orígenes, se debe continuar con el método

	Destino 1	Destino2	Destino 3	
Origen 1	$\boxed{6}$ 6	$\boxed{4}$ 4	$\boxed{3}$ 1	~~1~~ 0
Origen 2	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	13
	0	0	~~14~~ 13	

Se asigna 1 a la celda noroeste, que es la del origen 1 y el destino 3, se actualizan los valores y se elimina el primer renglón.

	Destino 1	Destino2	Destino 3	
Origen 1	$\boxed{6}$ 6	$\boxed{4}$ 4	$\boxed{3}$ 1	0
Origen 2	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	13
	0	0	13	

Queda una sola celda a la que se le asignan 13 unidades.

La solución inicial con este método es:

	Destino 1	Destino2	Destino 3
Origen 1	$\boxed{6}$ 6	$\boxed{4}$ 4	$\boxed{3}$ 1
Origen 2	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$ 13

Las variables básicas son:

$x_{11} = 6$, $x_{22} = 4$, $x_{13} = 1$, $x_{23} = 13$

Las variables no básicas son:

$x_{21} = 0$, $x_{22} = 0$

La función objetivo vale:

$$z = (6 \times 6) + (4 \times 4) + (3 \times 1) + (5 \times 13)$$

$$= 120 \text{ mil pesos}$$

Método de Vogel.

Requiere de los siguientes pasos:

1. Calcular para cada renglón y columna la diferencia entre el menor elemento de costo y el segundo costo menor, expresada en valor absoluto.

2. Escoger el renglón o columna con la máxima diferencia.

- asignar lo más posible a la celda con menor costo en el renglón o columna (aún cero en el caso degenerado).

- disminuir el origen y destino en la cantidad asignada.
- eliminar el origen o destino que sea cero, pero no ambos.

3. Si sólo queda un renglón o una columna, hacer la asignación remanente con un elemento básico en cada celda del renglón o columna respectivamente y, si no, ir al paso (1).

Aplicando éste método al ejemplo anterior:

	Destino 1	Destino2	Destino 3	
Origen 1	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$	11
Origen 2	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	13
	6	4	14	

En el renglón del origen 1, el menor elemento de costo es 3, el segundo menor elemento es 4. La diferencia es 4 - 3 =1. En el renglón del origen 2, el menor costo es 2, el segundo menor es 3, la diferencia es 3 - 2 = 1. Para cada columna la diferencia es 6 - 2 = 4; 4 - 3 = 1; y 5 - 3 = 2

Estas diferencias siempre dan como resultado un número positivo.

	Destino 1	Destino2	Destino 3	
Origen 1	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$	1
Origen 2	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	1
	4	1	2	

La mayor diferencia corresponde a la columna del destino 1. En esta columna, la celda con el menor costo es el correspondiente al origen 2, destino 1. Se le puede asignar 6 ó 13, se deben asignar 6, ya que si se asignan más se violarán las restricciones de no negatividad de las variables.

	Destino 1	Destino2	Destino 3	
Origen 1	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$	11
Origen 2	$\boxed{2}$ 6	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	~~13~~ 7
	6 ~~0~~	4	14	

Actualizando los valores, se observa que se debe eliminar la columna del destino 1. Quedan dos renglones y dos columnas, se debe continuar el método.

	Destino 1	Destino2	Destino 3	
Origen 1	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$	1
Origen 2	6 $\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	2
Diferencia		1	2	

La mayor diferencia es de 2 y se puede tomar en el renglón o en la columna. Se tomará en el renglón. El menor elemento de costo es 3 y hay la posibilidad de asignar 4 ó 7 vagones. Se asignan 4 y se actualizan los valores.

	Destino 1	Destino2	Destino 3	
Origen 1	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$	11
Origen 2	6 $\boxed{2}$	4 $\boxed{3}$	$\boxed{5}$	~~7~~ 3
	0	~~4~~ 0	14	

Como queda una sola columna, se debe asignar un valor a todas las celdas que restan.

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	
Origen 1	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$	11 $\boxed{3}$	11
Origen 2	6 $\boxed{2}$	4 $\boxed{3}$	3 $\boxed{5}$	~~3~~ 0
	0	0	~~14~~ 11	

La solución inicial con el método Vógel es:

	Destino 1	Destino2	Destino 3
Origen 1	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$	11 $\boxed{3}$
Origen 2	6 $\boxed{2}$	4 $\boxed{3}$	3 $\boxed{5}$

Las variables básicas son:

$$x_{13} = 11\ , \qquad x_{21} = 6\ , \qquad x_{22} = 4\ , \qquad x_{23} = 3$$

Las variables no básicas son:

$$x_{11} = 0\ , x_{22} = 0$$

La función objetivo vale:

$$z = (3 \times 11) + (2 \times 6) + (3 \times 4) + (5 \times 3)$$

$$= 72 \text{ mil pesos}$$

Comparando los dos métodos la regla de la esquina noroeste es la más sencilla. Sin embargo, el método Vogel, que toma en cuenta los costos unitarios de embarque, generalmente da como resultado una solución inicial más cercana al óptimo.

4.4 El problema de asignación

La formulación del problema de asignación se considera un caso especial del modelo de transporte y por tener una estructura lineal puede resolverse por el método simplex. Se dará un método propio asociado, que hace que el método simplex resulte muy ineficiente. El objetivo es el de asignar los trabajos a las máquinas (un trabajo por máquina) al menor costo total. Se presentan en forma resumida las reglas que se deben seguir:

1. Definir costos relativos:

$$C^*_{ij} = C_{ij} - a_i \qquad i, J = 1, \ldots, n$$

donde $\quad a_i = \min\limits_{J}\{C_{ij}\}$

2. Defina $C^*_{ij} = C^*_{ij} - b_j = C_{ij} - a_i - b_j; \qquad i, J = 1, \ldots, n$

donde $\quad b_j = \min\limits_{i}\{C_{ij} - a_i\} = \min\limits_{i}\{C^*_{ij}\}$

3. Examine las filas y columnas. Efectúe una asignación para cada fila (columna) con exactamente un cero, elimine los ceros de la columna (fila) apropiada. Repita hasta que no sea posible efectuar más asignaciones. Si el número de asignaciones es igual a n, suspenda. La solución es óptima; de lo contrario, ir a (4).
4. Marque las filas sin asignación.
5. Marque las columnas con ceros (no asignados) en las filas marcadas.
6. Marque las filas con asignación en las columnas marcadas.
7. Repita los pasos (5) y (6) hasta que no sea posible marcar filas o columnas adicionales.

8. Dibuje una línea para cada fila no marcada y cada columna marcada * (esta líneas deben cubrir todos los ceros y el número de líneas debe ser igual al número de asignaciones).
9. Encuentre el elemento mínimo no cruzado por una línea, réstelo de los elementos no cruzados por líneas y añádalo a los elementos cruzados por dos líneas. Vaya a (3).

Ejemplo:

Supóngase que el D.D.F. en su programa de expansión del metro, requiere de 300 trabajos diferentes, como por ejemplo excavación, alumbrado, plomería, tendido de vías, comunicación, etc. Al mismo tiempo 300 compañías diferentes han presentado en concurso sus proyectos. El DDF ha decidido que cada trabajo sea realizado por una sola compañía y que cada compañía podrá hacer un solo trabajo. Esta condición ha sido dictaminada para distribuir el presupuesto del proyecto entre más individuos. La siguiente matriz proporciona un resumen del costo del trabajo i (i=1, . . ., 300), cotizado por la compañía j (j= 1,. . .,300).

Bajo tales condiciones, ¿Cuál es la asignación que el DDF deberá realizar, con el objeto de minimizar el costo total del proyecto?

Formulación:

Sea x_{ij} la variable de decisión, que será igual a uno si el trabajo i (i=1, . . ., 300) lo realiza la compañía j (j= 1,. . .,300), y será igual a cero si esto no sucede. Sea c_{ij} el costo del trabajo i (i=1, . . ., 300) cotizado por la compañía j (j= 1,. . .,300). Entonces la función objetivo es

$$\text{Mín} \sum_{i=1}^{300}\sum_{j=1}^{300} c_{ij}X_{ij}$$

sujeto, primero, a la restricción que cada compañía podrá realizar únicamente un trabajo, es decir:

$$\sum_{i=1}^{300} X_{ij} = 1 \qquad j = 1, \ldots, 300,$$

y segundo, que cada trabajo sólo podrá ser realizado por una sola compañía, es decir:

$$\sum_{i=1}^{300} X_{ij} = 1 \qquad i = 1, \ldots, 300,$$

y además $X_{ij} = 0$ ó 1 para toda i y j.

4.5 Método para obtener la solución óptima del problema de asignación

El algoritmo desarrollado se llama el *algoritmo hungaro* [Rodriguez, 1984] y se resume como sigue:

Paso Inicial

Para cada renglón de la matriz de costos, réstese el mínimo de sus elementos a cada elemento en ese renglón. Para cada columna de la matriz resultante, réstese a cada elemento en esa columna el mínimo de sus elementos. El resultado es una matriz reducida.

Paso Principal

1. Trace el mínimo número de líneas sobre los renglones y las columnas para cubrir todos los ceros en la matriz reducida. Si el mínimo número de líneas es m, se dispone entonces de una solución óptima. En caso contrario, siga el paso 2.

2. Seleccione el mínimo elemento no cubierto. Reste este elemento a cada elemento no cubierto y súmelo a cada elemento cubierto por dos líneas. Regrese al paso 1.

Ejemplo:

Considérese la siguiente matriz de costos.

	1	2	3	4	5
1	2	3	5	1	4
2	-1	1	3	6	2
3	-2	4	3	5	0
4	1	3	4	1	4
5	7	1	2	1	2

La matriz reducida es:

	1	2	3	4	5
1	1	2	3	0	2
2	0	2	3	7	2
3	0	6	4	7	1
4	0	2	2	0	2
5	6	0	0	0	0

Aquí, el mínimo número de líneas que cubren todos los ceros es 3. El mínimo elemento no cubierto es 1. Réstese 1 de cada elemento no cubierto y súmelo a cada elemento cubierto dos veces.

	1	2	3	4	5
1	1	1	2	0	1
2	0	1	2	7	1
3	0	5	3	7	0
4	0	1	1	0	1
5	7	0	0	1	0

De nuevo, no se tiene a mano una solución óptima. El mínimo elemento no cubierto es 1. Réstese 1 de cada elemento no cubierto y súmelo a cada elemento cubierto dos veces. Esto lleva a la siguiente matriz.

	1	2	3	4	5
1	1	$\boxed{0}$	1	0	1
2	$\boxed{0}$	0	1	7	1
3	0	4	2	7	$\boxed{0}$
4	0	0	0	$\boxed{0}$	1
5	8	0	$\boxed{0}$	2	1

En esta matriz una solución óptima está dada por $x^*_{12}=x^*_{21}=x^*_{35}=x^*_{44}=x^*_{53}=1$ y todos los x^*_{ij} iguales a cero.

CAPITULO 5: Redes

Consideraremos los conceptos y resultados básicos de teoría de redes. Además, problemas de redes que se pueden modelar como uno de programación lineal. En particular, analizaremos el denominado problema de redes con flujos restringidos y costo mínimo, el método de ruta crítica y el PERT.

5.1 Descripción y características de las redes

Una *gráfica* denotada por G=(N,A) consiste de un conjunto finito de N elementos denominados *nodos* y un conjunto A formado por pares de nodos que se denominan *arcos*. La forma clásica de dibujar una gráfica es dibujar círculos pequeños, para caracterizar cada nodo $i \in N$, y dibujar para cada arco $(i,j) \in A$, una línea del nodo i al nodo j.

5.2 Redes dirigidas

Una *gráfica dirigida* denotada por G=(N,A) consiste de un conjunto finito de N *nodos* y un conjunto A de nodos, los que se denominan *arcos* con una dirección. En una gráfica dirigida podemos tener arcos de la forma (i,i), y el arco (i,j) es diferente al arco (j,i).

Ejemplo 1:
Considere la gráfica dirigida G=(N,A) donde N= (1,2,3), A= ((1,2), (1,3), (2,1),(2,2),(3,2)). La gráfica corresponde a la figura 5.1.

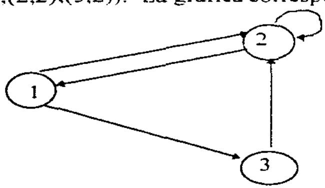


FIGURA 5.1

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

MATRIZ 5.2

Existen formas alternativas de caracterizar una gráfica dirigida. Una de éstas es por medio del denominado concepto de la *matriz de adyacencia nodos-nodos*, que es una matriz Q de orden m x m, donde m es el número de nodos. En la matriz $Q = (q_{ij})$ se tiene que $q_{ij}= 1$, si existe un arco que va del nodo i al nodo j; de otra manera $q_{ij}=0$. La matriz de adyacencia asociada a la gráfica dirigida del ejemplo es Q (matriz 5.2).

Otra forma de caracterizar una gráfica dirigida es por medio de la *matriz de incidencia de nodos-arcos* que es en una matriz P de orden m x n, donde m es el número de nodos y n el número de arcos, los cuales han sido previamente numerados. En la matriz $P=(p_{ij})$ se tiene que $p_{ij}=1$, si del nodo i parte el arco j. Asimismo, $p_{ij}= -1$, si al nodo i llega el arco j. En otros casos, $q_{ij}=0$. Note que esta caracterización es sólo aplicable cuando no hay arcos de la forma (i,i) en la gráfica dirigida.

Ejemplo 2: La matriz de incidencia nodos-arcos (3X6) de la gráfica dirigida (Fig. 5.3) está dada por P .

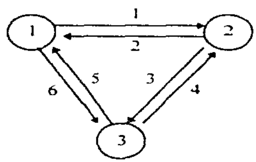


Fig. 5.3

$$P=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

En una gráfica dirigida G=(N,A) se define una *cadena* del nodo i al nodo j como la sucesión de nodos distintos de N, denotados por $i= i_1,i_2,...i_r=j$, y arcos de A, denotados por $a_1,a_2,...a_r$ tales que $a_t=(i_t,i_{t+1})$, donde $t=1,. . .,r-1$. En aquellos casos en que no hay ambigüedad, sólo se especifican los nodos que forman la cadena. Si en la definición de cadena se permite que cada arco pueda tener la forma $a_t=(i_t,i_{t+1})$ o bien $a_t=(i_{t+1},i_t)$, donde $t=1,...,r-1$, entonces la sucesión resultante se denomina *trayectoria* del nodo i al nodo j.

En una gráfica dirigida G=(N;A) se define un *circuito* como una cadena en que el nodo inicial es igual al nodo final. Un *ciclo* es una trayectoria con el mismo nodo inicial y final.

Observaciones:

- En las cadenas y circuitos se necesita que los arcos tengan un mismo sentido y que todo ciclo es un circuito, sin embargo, lo recíproco no es cierto.
- Toda cadena es una trayectoria, todo ciclo es un circuito sin embargo lo recíproco no es cierto.

Ejemplo 3 Sea la gráfica dirigida del ejemplo 1. Entonces,

. cadena de 2 a 3 nodos 2,1,3.; Arcos (2,1) y (1,3)

. trayectoria de 3 a 1: Nodos 3,1: Arco (1,3)

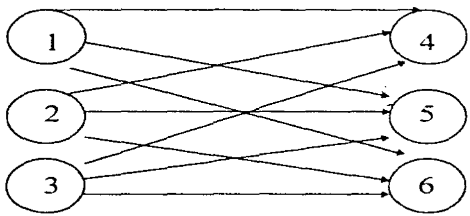
. circuito de 1 a 1: Nodos 1,3,2,1; Arcos (1,3), (3,2) y (2,1)

. ciclo de 1 a 1: Nodos 1,2,3,1; Arcos (1,2), (3,2) y (1,3).

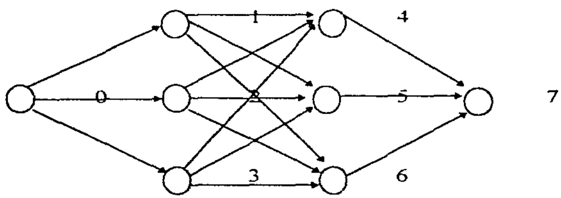
La gráfica dirigida más importante es la *red.* Una red es una gráfica dirigida G=(N;A), donde no existen arcos de la forma (i,i) $\in$ A. Es común asociar a los elementos de una red ciertos parámetros. Dado el nodo $i\in N$, se denota por d_i disponibilidad en este nodo y se dice que es nodo de *depósito*, *destino* o *traspaso*, si la disponibilidad es positiva, negativa o cero, respectivamente. Por otra parte, se denotan por a_{ij} y b_{ij} las capacidades de "flujo" mínimo y máximo que se permiten en el arco (i,j) $\in$ A, y se denota por c_{ij} el *costo* por unidad de flujo que pasa por este arco.

Existen diferentes tipos de redes. Sólo mencionamos las más comunes. Una red, G=(N;A) es *simple* si el conjunto de nodos N puede dividirse en dos subconjuntos N_1, N_2, tales que si (i,j) $\in$ A entonces, $i \in N_1$, y $j \in N_2$. Una red, G=(N,A), es *reducida* si tiene un solo depósito *s* y un sólo destino *r*, y no existen arcos que formen un circuito es decir los nodos son de traspaso. Conviene puntualizar que toda red reducida puede transformarse en red *circulatoria* añadiendo un arco del destino r al depósito s.

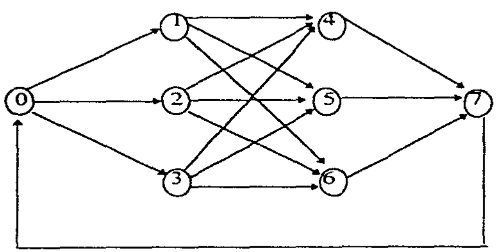
Red simple (se puede particionar en nodos de depósito y nodos de destino)



Red reducida.



Red circulatoria



5.3 Árbol de mínima expansión

Para definir el árbol de mínima expansión requerimos del concepto de red convexa, se dice que una red G es convexa si existe al menos una cadena que conecta todos sus vértices. Por definición se establece que una red con un solo vértice, es convexa.

Un árbol es una *red conexa* que no tiene ciclos. Es decir, es un conjunto de arcos unidos, que tienen una cadena desde cualquier nodo de la red a otro nodo, sin que forme un ciclo. El *árbol de mínima expansión* es el árbol con el menor costo, distancia o tiempo.

La aplicación de este tipo de problemas de optimización se ubica, sobre todo, en las redes de comunicación eléctrica, telefónica, telegráfica, carretera, ferrocarrilera, aérea, marítima, etc., donde los nodos representan, por ejemplo, puntos de consumo correspondientes y los arcos las líneas que unen físicamente los nodos.

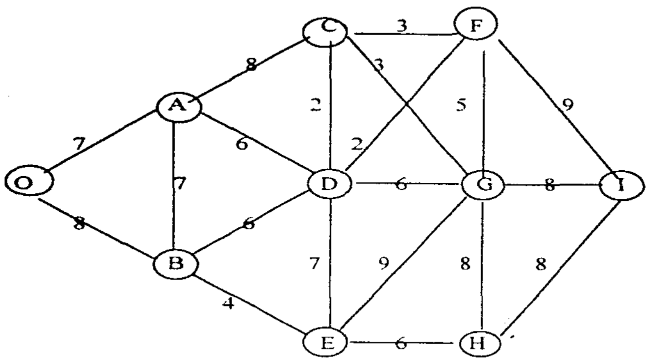
El algoritmo que resuelve este problema fue diseñado por KrusKal y su lógica es muy sencilla. Consiste en construir un árbol de la siguiente manera:

1. Seleccionar un nodo arbitrario
2. Si el árbol tiene n - 1 arcos, donde n es el número de nodos en la red, pare. De otra manera se continua con el siguiente paso
3. Seleccionar aquel arco (que no pertenezca al árbol) que tenga el costo más pequeño, de todos los arcos que unen al árbol con los nodos vecinos a él. Tanto el arco como el nodo seleccionado entran a formar parte del árbol. Continuar con el paso 2.

Este algoritmo termina en n - 1 iteraciones.

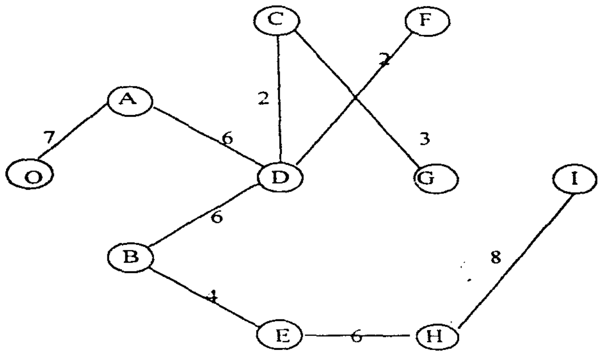
Ejemplo:

Supóngase que en la red que se muestra a continuación, los nodos son centros de consumo eléctrico, y los números en los arcos son distancias en kilómetros. Se trata de encontrar el árbol que con una longitud total mínima, comunica a todos los nodos. Como el costo de tendido de cable eléctrico es proporcional a la distancia, con la distancia mínima se habrá encontrado el costo mínimo.



Iteración	Paso	Nodo seleccionado en el árbol	Arco seleccionado en el árbol	Arcos en el árbol
1	1	C (arbitrario)		
	2			0
	3	D	$A_{CD} = 2$	
2	2			1
	3	F	$A_{DF} = 2$	
3	2			2
	3	G	$A_{CG} = 3$	
4	2			3
	3	B	$A_{DB} = 6$	
5	2			4
	3	E	$A_{BE} = 4$	
6	2			5
	3	A	$A_{DA} = 6$	
7	2			6
	3	H	$A_{EH} = 6$	
8	2			7
	3	O	$A_{AO} = 7$	
9	2			8
	3	I	$A_{HI} = 8$	
10	2			9
	3	Solución óptima, con longitud total mínima de 44 unidades.		

El árbol mínimo de comunicación, que no es necesariamente único, se muestra a continuación:

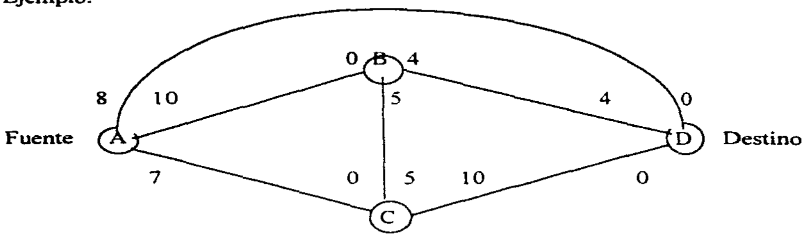


5.4 Problemas de flujo máximo

El objetivo en un problema de flujo máximo es desarrollar un programa de embarque que maximice la cantidad de material enviado entre dos puntos. Al punto de origen se le denomina *fuente*; al punto final *destino*. Existen varias vías de embarque que unen a la fuente con el destino, directamente o pasando por lugares intermedios denominados empalmes. Se considera que los empalmes no almacenen material, es decir, que cualquier material que llega a un empalme sea embarcado inmediatamente a otro sitio.

Una red puede ser el modelo para un problema de flujo máximo. La fuente, el destino y los empalmes se representan mediante nodos, mientras que las ramas representan los conductos a través de las cuales de transportan materiales. Asociando a cada nodo N, M y a cada rama NM que salga de N y llegue a M, hay un número no negativo, o capacidad, que representa la cantidad máxima de material que pueden embarcarse de B a través de NM.

Ejemplo:



La figura anterior es una red que tiene A como fuente , a D como destino y a B y C como empalmes. Cerca de los extremos de cada rama se indican las capacidades de flujo en ambas direcciones. Nótese que pueden embarcarse 7 unidades de A a C a lo largo de AC, pero en dirección opuesta sólo pueden embarcarse = unidades; esta asimetría permite, de desearse, definir una orientación para AC. En contraste, los flujos a lo largo de BC pueden moverse en ambas direcciones, con una capacidad de 5 unidades en ambos sentidos.

Los problemas de flujo máximo se resuelven mediante el siguiente algoritmo:

1. Encontrar una ruta que permita el flujo positivo de material de la fuente al destino. Si no existe alguna, se debe continuar con el paso 5

2. Determinar el flujo máximo que puede embarcarse a lo largo de esta ruta y denotarlo con k.

3. Disminuir la capacidad directa (es decir, la capacidad en la dirección de flujo de las k unidades) de cada rama de esta ruta k y aumentar la capacidad en sentido inverso en k. Se agregan k unidades a la cantidad enviada al destino.

4. Continuar con el paso 1.

5. El flujo máximo es la cantidad de material entregada en el destino. El programa óptimo de embarque se determina comparando la red original con la red final. Cualquier reducción en capacidad significa un embarque.

Ejemplo:

Determinar el flujo máximo de material que puede ser enviado de la fuente A al destino D, a través de la red que se muestra a continuación:

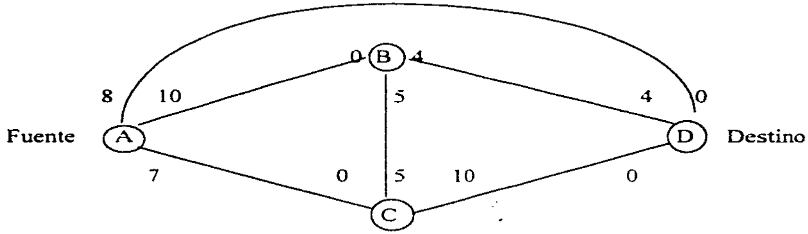


FIGURA 5.1

Solución:

Una ruta que va de la fuente al destino es la rama AD, la cual une a estos nodos directamente. Puede permitir 8 unidades. Embarcando esta cantidad, se envían 8 unidades a D, disminuyendo en 8 la capacidad de AD y aumentando en 8 la capacidad de DA. LA red resultante es la figura 5.2:

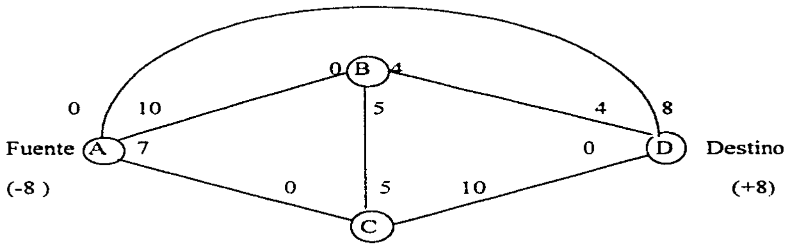


FIGURA 5.2

Otra ruta de la fuente al destino que puede permitir el flujo positivo es $\{AC, CB, BD\}$. La cantidad máxima de material que puede ser enviado a lo largo de esta ruta es de 4 unidades, es decir, la capacidad de BD. Haciendo este embarque, se incrementa en 4 unidades el suministro en D, con lo cual se tiene 8+4= 12. Simultáneamente , se disminuyen en 4 unidades las capacidades de AC, CB y BD y se incrementan en esta misma cantidad las capacidades de CA, BC y DB. Entonces , la figura 5.2 queda como la figura 5.3:

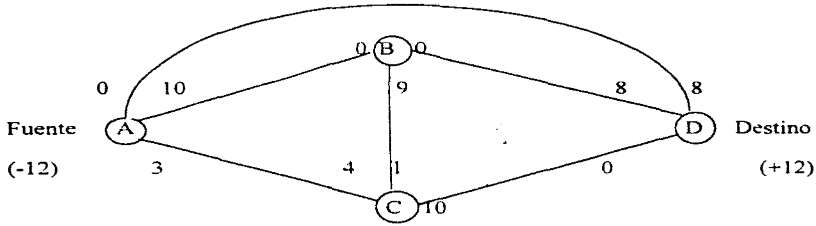


FIGURA 5.3

La ruta $\{AC, CD\}$, en la figura 5.3, puede permitir 3 unidades de A a D. Haciendo este embarque, se aumenta en 3 unidades el suministro en D, teniéndose 12+3=15, y se disminuyen en 3 las capacidades de AC y CD. También se incrementan en 3 unidades las capacidades de CA y DC. La nueva red es la figura 5.4.

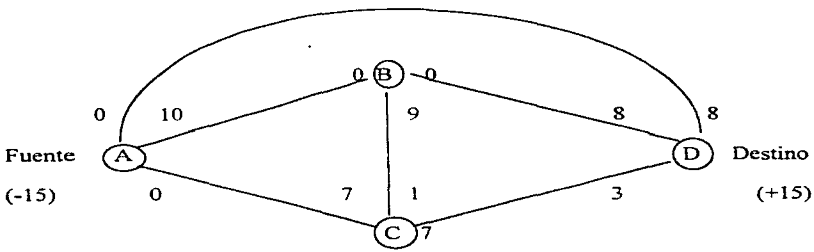


FIGURA 5.4

La ruta $\{AB, BC, CD\}$ de la figura anterior puede permitir 7 unidades de la fuente al destino. Haciendo este embarque, se aumenta el suministro en 15 +7= 22 unidades y se disminuyen en 7 las capacidades de AB, BC y CD. También se incrementan en 7 unidades las capacidades de BA, CB y DC. El resultado es la figura 5.5

La ruta $\{AB, BC, CD\}$ de la figura anterior puede permitir 7 unidades de la fuente al destino. Haciendo este embarque, se aumenta el suministro en 15 + 7 = 22 unidades y se disminuyen en 7 las capacidades de AB, BC y CD. También se incrementan en 7 unidades las capacidades de BA, CB y DC.

El resultado es la siguiente figura:

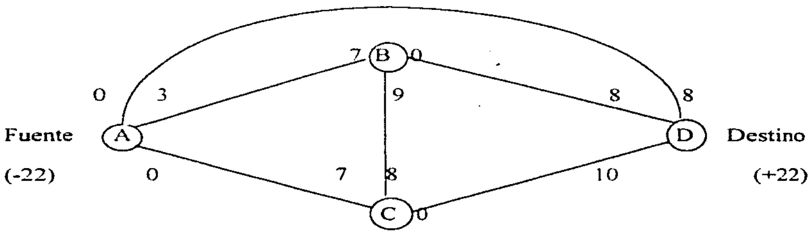


FIGURA 5.5

No hay ninguna ruta de la fuente al destino, en la figura anterior, que permita un flujo positivo. Por lo tanto, la cantidad máxima de material que puede enviarse se A a D es de 22 unidades. Para determinar el programa óptimo de embarque, se compara la última figura 5.5 con la figura 5.1. Se notan las siguientes reducciones en capacidad: 7 unidades de A a B, 8 unidades de A a C, 4 unidades de B a D, 3 unidades de B a C y 10 unidades de C a D. Estas reducciones, consideradas como embarques, constituyen el programa óptimo de embarque.

5.5 Ruta más corta

El problema de la ruta más corta involucra una red conexa con un costo no negativo asociado a cada rama. A un nodo se le denomina *fuente* y a otro nodo se le denomina *destino*, (estos términos no implican en este caso una orientación de las ramas de la red, simplemente sugieren la dirección en la cual será aplicado el algoritmo de solución). El objetivo es determinar una ruta que una a la fuente con el origen, de manera que la suma de los costos asociados con las ramas en la ruta sea mínima.

Los problemas de la ruta más barata se resuelven mediante el siguiente algoritmo, en cuya aplicación todo empate será resuelto arbitrariamente.

1. Constrúyase una lista maestra tabulando bajo cada nodo, el orden ascendente según el costo, las ramas que llegan a él. Cada rama bajo un nodo dado, se escribe con ese nodo como su primer nodo. Omítase en la lista cualquier rama que tenga a la fuente como su segundo nodo o que tenga al destino como su primer nodo.

2. Márquese con un asterisco a la fuente y asígnesele el valor 0. Localícese la rama más barata que coincida con la fuente y enciérrese en un círculo. Márquese con un asterisco al segundo nodo de esta rama y asígnese a este nodo un valor igual al costo de la rama. Elimínese de la lista maestra todas aquellas otras ramas que tengan como segundo nodo al que se acaba de marcar con asterisco.

3. Si el nodo que acaba de marcarse con asterisco es el destino, continúese en el paso 5. Si no, continúese en el paso 4.

4. Considerar en la lista maestra actual, todos los nodos marcados con asterisco que tengan bajo ellos ramas muy cerradas en el círculo. Para cada uno de ellos, agregar el valor asignado al nodo, al costo de la rama sin círculo más barata bajo él. Denotar a la menor de estas sumas con M y encerrar en un círculo la rama cuyo costo contribuyó a M. Marcar con un asterisco el segundo nodo de esta rama y asignar el valor M. Eliminar de la lista maestra todas las otras ramas que tengan al nodo que acaba de marcarse con asterisco como segundo nodo. Continuar con el paso 3.

5. z^* es el valor asignado al destino. Una ruta de costo mínimo se obtiene recursivamente, iniciando con el destino, al incluir en la ruta cada rama encerrada en círculo cuyo segundo nodo pertenece a la ruta.

De la operación realizada en el paso 4, puede verse que el conjunto de ramas encerradas en un círculo producido por el algoritmo constituye un sub-árbol de la red original, con la propiedad de que la distancia única (costos) entre la fuente y otro nodo en el sub-árbol es igual a la distancia más corta entre estos dos nodos en la red original. Sin embargo, generalmente el sub-árbol no amplía la red.

Ejemplo:

Un individuo que vive en Ridgewood, Nueva Jersey, y que trabaja en Whippany, Nueva Jersey, busca una ruta automovilística que minimice el tiempo matutino de manejo. Esta persona ha registrado los tiempos de manejo (en minutos) en las principales autopistas que comunican a las diferentes ciudades intermedias; estos datos se muestran en la tabla 5.1. Una anotación punteada indica que ninguna autopista importante une directamente a los puntos correspondiente. Determinar la mejor ruta para este individuo:

	Ridgewood	Clifton	Orange	Troy Hills	Parsippany	Whippany
Ridgewood	...	18	...	32	...	...
Clifton	18	...	12	28	...	...
Orange	...	12	...	17	...	32
Troy Hills	32	28	17	...	4	17
Parsippany	...	...	...	4	...	11
Whippany	...	...	32	17	11	...

Tabla 5.1

El modelo para esta situación puede ser el del problema de la ruta más corta. Los nodos son las ciudades, las ramas son las autopistas que las unen y los costos asociados con las ramas son los tiempos de viaje.

La fuente es Ridgewood y el destino es Whippany.

1. La lista se muestra en la figura 5.6: cada ciudad está representada por la primera letra de su nombre. Las ramas CR y TR están ausentes bajo los encabezados C y T, respectivamente, ya que aparecen como RC y RT, exclusivamente bajo la fuente. De manera similar, no se listan ramas que tengan al destino como primer nodo

R	C	O	T	P	W
RC 18	CO 12	OC 12	TP 4	PT 4	
RT 32	CT 28	OT 17	TW 17	PW 11	
		OW 32	TO 17		
			TC 28		

FIGURA 5.6

2. Se marca con un asterisco al nodo fuente, R y se le asigna el valor de 0. La rama más barata a partir de R es RC, así que se marca con asterisco a C y se le asigna el valor de

18 al costo de RC. Se encierra en un círculo a la rama RC y se eliminan de la figura 5.6 todas aquellas ramas cuyo segundo nodo sea C; esto es, OC y TC. La nueva lista maestra está en la figura 5.7

R* (0)	C* (18)	O	T	P	W
RC 18	CO 12	OT 17	TP 4	PT 4	
RT 32	CT 28	OW 32	TW 17	PW 11	
			TO 17		

FIGURA 5.7

3. Los nodos marcados con asterisco son R y C. Las sumas de interés bajo R son 0 + 32 = 32, obtenidas al agregar el valor de R al costo de RT y 18 + 12 = 30 bajo C, obtenida al agregar el valor de C al costo de CO. Ya que 30 es la suma menor, se encierra en un círculo a CO, se marca con asterisco a O, se asigna a O el valor de 30 y se eliminan de la figura 5.7 todas aquellas ramas que tengan a O como segundo nodo; esto es, CO. El resultado está en la siguiente figura 5.8.

R* (0)	C* (18)	O*30	T	P	W
RC 18	CO 12	OT 17	TP 4	PT 4	
RT 32	CT 28	OW 32	TW 17	PW 11	

FIGURA 5.8

4. Los nodos marcados con asterisco con R, C y O. Las sumas de interés son 0 + 32 = 32 bajo R, 18 + 28 = 46 bajo C y 30 + 17 = 47 bajo O. La menor suma es 32; por lo tanto, se encierra en un círculo a RT, se marca con asterisco a T, se asigna a T el valor de 32 y se eliminan de la figura 5.8 todas aquellas ramas que tengan segundo nodo a T. El resultado es la figura 5.9

R* (0)	C* (18)	O*30	T* (32)	P	W
RC 18	CO 12	OW 32	TP 4	PW 11	
RT 32			TW 17		

FIGURA 5.9

5. O y T son los únicos nodos marcados con asterisco que tienen bajo ellos ramas no encerradas en círculo en la lista maestra actual, figura 5.9. Para estos nodos, las sumas de interés son 30 + 32 = 62 y 32 + 4 = 36, respectivamente. Por lo tanto, se encierra en un círculo a TP, se marca con asterisco a P, se asigna a P el valor 36 y se eliminan todas aquellas ramas que tengan como segundo nodo a P, de las cuales no hay ninguna. La nueva lista se muestra en la figura 5.10

R* (0)	C* (18)	O*(30)	T* (32)	P	W
RC 18	CO 12	OW 32	TP 4	PW 11	
RT 32			TW 17		

FIGURA 5.10

6. O, T y P son los únicos nodos marcados con asteriscos que tienen bajo ellos ramas no encerradas en círculo en la nueva lista maestra. Las sumas de interés son, respectivamente 30 + 32 = 62, 32 + 17 = 49 y 36 + 11 = 47. Ya que 47 es el menor valor, se encierra en un círculo a PW, se marca con asterisco a W (destino), se asigna a W el valor 47 y se eliminan de la figura 5.10 todas aquellas otras ramas que tengan a W como segundo nodo. El resultado es la figura 5.11

R* (0)	C* (18)	O*(30)	T* (32)	P	W
RC 18	CO 12		TP 4	PW 11	
RT 32					

FIGURA 5.11

7. El tiempo mínimo de manejo de Ridgewood a Whippany es z* = 47 min. Para identificar la ruta óptima, se busca en la figura 5.10 una rama encerrada en un círculo que tenga como segundo nodo a W; ésta es PW. A continuación, se busca una rama encerrada en un círculo que tenga como segundo nodo a P; ésta es TP. Ahora se busca una rama encerrada en círculo que tenga como segundo nodo a T; ésta es RT. Ya que R es la fuente, la ruta deseada es {RT,TP,PW}

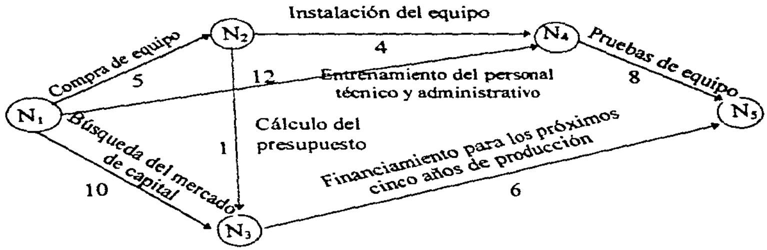
5.6 Planeación y control de proyectos mediante ruta crítica

La ruta crítica es una cadena de actividades críticas que conecta, en la red que representa al proyecto, al nodo inicial con el nodo final. El método de ruta crítica permite determinar si una actividad del proyecto es *crítica*, es decir, si una demora en su comienzo causará una demora en la fecha de terminación del proyecto. Si la actividad no es crítica, tendrá un tiempo de holgura, es decir, se puede demorar.

El Método para calcular la ruta crítica de un proyecto consta de los siguientes pasos:

1. Conocer el proyecto al cual se aplicará el método de ruta crítica.
2. Listar las actividades de este proyecto.
3. Construir la matriz de secuencias.
4. Construir la red de actividades.
5. Numerar los nodos de la red.
6. Determinar la duración de las actividades.
7. Numerar los nodos de la red.
8. Determinar la duración de las actividades.
9. Calcular la holgura total.
10. Calcular la ruta crítica.

Ejemplo: Encuentre la ruta crítica en la red que se muestra a continuación, considerando que la duración (en meses) que se indica en cada actividad es determinística.



Evento (N_i)	IR_i	TT_i	H_i	Ruta crítica
N_1	0	0	0	*
N_2	5	8	3	
N_3	10	14	4	
N_4	12	12	0	*
N_5	20	20	0	*

Actividad A_{ij}	HT_{ij}	HS_{ij}	HL_{ij}	HI_{ij}
1.2	3	3	0	0
1.3	4	4	0	0
1.4	0	0	0	0
2.3	8	5	4	1
2.4	3	0	3	0
3.5	4	0	4	0
4.5	0	0	0	0

	Actividad	Fecha de inicio necesario	Se podría iniciar en el rango de:	Fecha de término obligatorio	Se podría terminar en el rango de:
crítica	A_{14}	día 1	no hay rango	a los 12 meses	no hay rango
crítica	A_{45}	12 meses después	---------------	a los 20 meses	no hay rango
	A_{12}	------------------	del primer día hasta 3 meses después	------------------------	de 5 a 8 meses después
	A_{13}	------------------	del primer día hasta 4 meses después	------------------------	de 10 a 14 meses después
	A_{23}	------------------	de 5 a 8 meses después	------------------------	de 6 a 9 meses después
	A_{24}	------------------	de 5 a 8 meses después	------------------------	de 9 a 12 meses después
	A_{35}	------------------	de 10 a 14 meses después		de 16 a 20 meses después

La ruta crítica la componen los eventos N_1, N_4 y N_5 junto con las actividades A_{14} y A_{45}. La duración total del proyecto es 20 meses. Si por ejemplo A_4 se retrasa un mes, el proyecto se terminará en 21 meses, en vez de los 20 planeados.

5.6.1 Evaluación y revisión de programas. La técnica PERT/Tiempo

La técnica de Evaluación y Revisión de Programas -PERT- tuvo sus principios en la gráfica de Gantt [Thierauf, 1995]. PERT se desarrolló para el proyecto Polaris en 1958 por la Oficina de Proyectos Especiales de la Marina y la Lockheed Aircraft Corporation, en colaboración con Booz, Alden & Hamilton, empresa consultora de administración.

En las siguientes páginas se profundizará el conocimiento de un sistema de red PERT y su ruta crítica relativa. Se enumerarán las ventajas y desventajas de PERT para demostrar su aplicabilidad a ciertos proyectos industriales y de negocios.

PERT/Tiempo

La técnica PERT es un método para minimizar los sitios de problemas (congestiones de producción, demoras e interrupciones), determinando las actividades críticas antes de que ocurran, a fin de poder coordinar varias partes del trabajo en total. Básicamente, es una técnica de planeación y control que utiliza una red para programar y presupuestar a fin de lograr un objetivo predeterminado o llevar a cabo un proyecto. PERT es un valioso instrumento administrativo para la toma de decisiones.

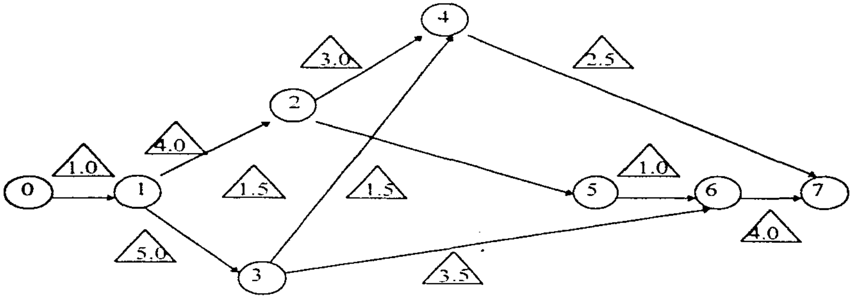


FIGURA 5.12 Red Pert

Una Red Pert tiene ciertas diferencias con la gráfica de Gantt, y lo primero que hay que considerar es la terminología. Una red PERT se ocupa de desarrollar una secuencia lógica de diversas actividades que se emprenden para llevar a cabo un proyecto, así como las relaciones de esas actividades con el transcurso del tiempo. El término actividad se define como un paso de trabajo en el proyecto total, y se representa con una flecha. El extremo de la flecha representa el principio de la actividad y la punta su terminación. La longitud, forma o posición de la flecha no tienen importancia alguna. Lo importante es la forma en que las actividades, representadas con flechas, se eslabonan juntas en una secuencia de tiempo para formar una red operacional.

Al construir un diagrama de flechas, el planeador debe tener en cuenta las actividades requeridas y sus respectivas relaciones de tiempo, lo que puede hacerse escribiendo una lista de las actividades del proyecto. En un proyecto muy complicado parece imposible anotar inicialmente todas sus actividades. Sin embargo, las actividades adicionales aparecerán a medida que se desarrolla el diagrama de flechas. En seguida el planeador debe determinar el orden lógico de las actividades, o sea la forma en que cada una de ellas se ajusta a las demás. Finalmente, es necesario dibujar el diagrama de flechas, para mostrar cómo se interrelacionan las actividades en el tiempo. El planeador debe vigilar las actividades que sean demasiado grandes o demasiado pequeñas. Es posible que una actividad de gran tamaño pueda tratarse como más de una, o que muchas actividades pequeñas puedan combinarse en una sola.

El punto de iniciación y de terminación de las actividades, que se muestra en la figura 5.12 como números dentro de círculos, se llaman eventos. Los eventos son puntos en el tiempo, en contraste con las actividades que tienen una longitud de tiempo o duración. Los eventos se numeran en serie, desde el principio hasta el fin de un programa. La regla general para numerarlos es que ningún evento puede numerarse hasta que se hayan enumerado todos los eventos precedentes. Si nos referimos a la figura 5.12, esto significa que no puede numerarse ningún evento hasta que se haya numerado primero el extremo de cada flecha, cuya punta señale el evento. El número de la punta de una flecha siempre es mayor que el de su extremo.

El término "red" se relaciona con las actividades y eventos que se combinan mutuamente. Se dibuja el diagrama resultante, como se ve en la figura 5.12. Dentro de esa red podemos ver que el evento 0 es el principio de la red, mientras que el evento 7 es el final. Al examinar el evento 6, notamos que las actividades 3-6 y 5-6 llevan a él, lo que significa que el evento 6 es el evento final de esas dos actividades. De modo semejante, el evento 2 inicia dos actividades, 2-4 y 2-5, lo que indica que el evento 2 es el principio de dos actividades. Ese mismo razonamiento se aplica a las demás actividades y eventos de la red PERT.

La red PERT precedente, muestra relaciones sencillas en una secuencia de tiempo. A menudo las relaciones son más complicadas, y en algunos casos esto requiere el empleo de flechas que no representan una actividad, que se insertan para aclarar relaciones de actividades, y que se llaman flechas artificiales, y que se representan con flechas de líneas de puntos (Fig. 5.13).

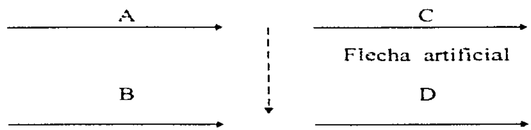


FIGURA 5.13 Flecha artificial

Tiempo esperado

La asignación de tiempo de duración a las actividades es indispensable para completar la red PERT. Debe hacerse basándose en el costo más bajo posible, independientemente de la longitud del tiempo requerido; en el tiempo más corto posible, independientemente de los costos; en algún compromiso entre los dos, o sobre cualquiera otra base. Para contestar a esta pregunta es necesario emplear estadísticas, y especialmente la distribución normal y la distribución beta. Como se recordará, según la estadística la mayor parte de los grupos de datos tienden a tomar una forma de campana cuando se trazan.

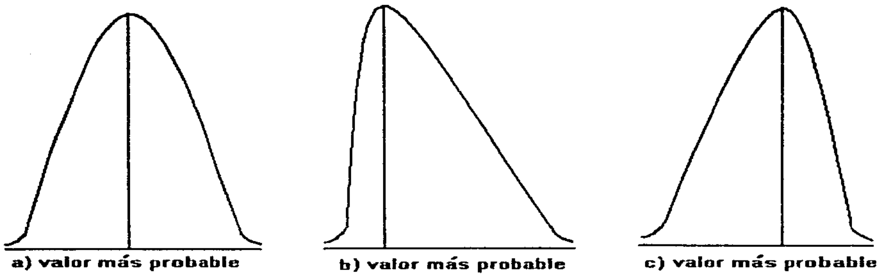


FIGURA 5.14 Curva en forma de campana y curvas de distribución beta. a) Curva normal en forma de campana. b) y c), curvas de distribución beta, o asimétricas en una dirección.

Sin embargo, algunas variables no se distribuyen normalmente y no toman la forma de campana, sino que en vez de ello, las variables son asimétricas en una dirección, como se observa en la anterior figura 5.14

Como los datos del mundo de los negocios reflejan básicamente una de las tres curvas de la figura anterior, los diseñadores PERT tuvieron que encontrar un tipo especial de distribución que satisficiera la mayor parte de las circunstancias de tiempo más corto (optimistas), o más largo (pesimistas), y aquella que se utilizara con más probabilidad. Se puede probar la validez del promedio ponderado empleado en la fórmula final de PERT [Rodríguez, R; 1984]. El tiempo más probable (m), debe tener una mayor ponderación que el más optimista (a) y el más pesimista (b). Puesto que hay más probabilidad de que un programa se complete cerca del tiempo más probable que de los tiempos extremos. La fórmula desarrollada para el tiempo esperado de una actividad (t_e) es:

$$t_e = \frac{a + 4m + b}{6} \qquad (1)$$

Cuando se usa esa fórmula para obtener una curva normal en forma de campana, el valor calculado de t_e, representa el valor intermedio de la curva en forma de campana, que es lo deseado para ese tipo de curva.

Veamos los siguientes dos ejemplos de curvas asimétricas. Los primeros cálculos de tiempo para obtener una distribución beta que muestre el tiempo esperado (en semanas), que queden a la derecha del tiempo más probable son: $a = 4$ (más optimista), $m = 6$ (más probable) y $b = 15$ (más pesimista). Si usamos la ecuación 1, el valor de t_e es igual a 7.2 semanas. Los valores de este ejemplo se muestran en la figura 5.15.

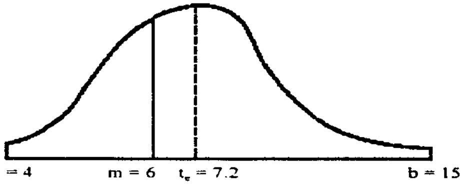


FIGURA 5.15 Distribución beta -t_e se encuentra a la derecha del tiempo más probable, debido al factor de tiempo m.

El cálculo pesimista de 15 semanas, empujó el tiempo esperado t_e más hacia la derecha en la distribución.

En el segundo ejemplo de una distribución beta la asimetría está en dirección opuesta. Ahora t_e queda a la izquierda del tiempo mas probable. Las tres estimaciones de tiempo son: a=4, m=12 y b=1 5, dan un tiempo transcurrido de 11.2 semanas, como se ve en la figura 5. Este ejemplo indica que el cálculo es ligeramente optimista, porque t_e queda a la derecha del tiempo mas probable.

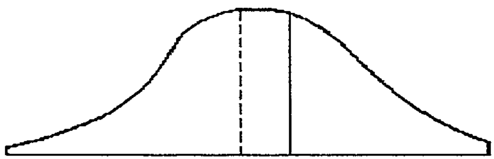


FIGURA 5.16 Distribución beta -t_e queda a la izquierda del tiempo más probable, debido al factor de tiempo m.

El tiempo esperado t_e, representa el valor especial de tiempo (horas, días, semanas o cualquiera otra base), que tiene, tanto una probabilidad de 50 por ciento de que se sobrepase, como una oportunidad de 50 por ciento de que se cumpla. Hay la misma oportunidad de que el tiempo requerido realmente sea mayor o menor que el tiempo esperado. Volviendo a las curvas, si levantamos una línea, como anteriormente, en una curva normal en forma de campana, el tiempo más probable es el tiempo esperado o promedio. Sin embargo, en la distribución beta, desviada a la izquierda o a la derecha, el tiempo esperado quedará a la izquierda o derecha del valor más probable, dependiendo de las tres cifras de tiempo. Se han hecho estudios sobre la exactitud de t_e, y todos parecen indicar que el error de cálculo del tiempo esperado fue demasiado pequeño para que tuviera algún efecto en la mayor parte de los casos industriales o de negocios.

Tiempos más próximo y más tardío para un evento.

Antes de determinar la ruta crítica, veremos que es el tiempo de un evento, o sea el tiempo combinado requerido para llegar a un punto del proyecto.

Un evento puede tener uno o más valores, dependiendo de las relaciones entre la actividad y el tiempo. Muchos eventos tienen un rango de tiempos posibles de acontecimiento. Para encontrar el mejor programa, necesitamos conocer los extremos de ese rango que corresponden con el tiempo más próximo del evento, medido desde el principio del programa y el tiempo más tardío del evento, medido desde la terminación del proyecto. Es decir, es necesario conocer el tiempo más próximo en que pueden iniciarse las actividades derivadas de un evento, que es *el tiempo más próximo del evento.* De modo semejante el tiempo más tardío en el que las actividades que ponen término a un evento, pueden completarse y permitir que todo el proyecto termine en la fecha fijada. A esto se le llama *tiempo más tardío del evento.*

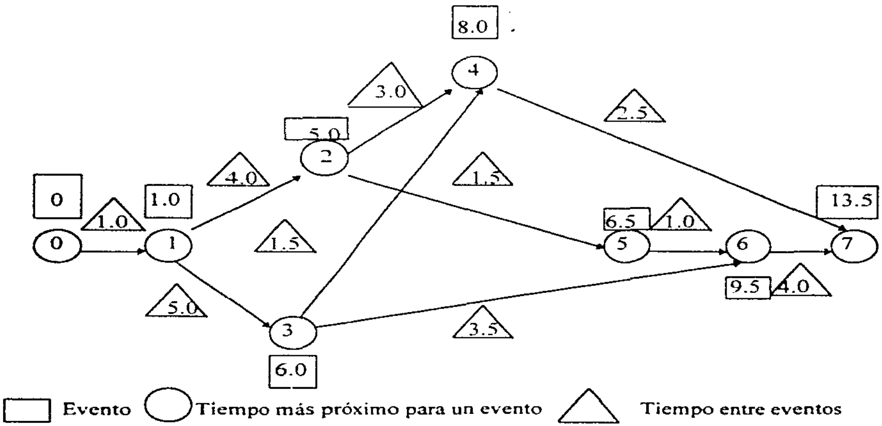


FIGURA 5.17 Red PERT. Tiempo más próximo (permisible) del evento T_E

El tiempo más próximo del evento (T_E) puede encontrarse empleando la figura 5.12, revisada en la figura 5.17, para inserción de los tiempos más próximos de eventos (que se muestran en los cuadrados). El tiempo de acontecimiento más próximo para el evento 0 es cero, porque no lo ha precedido ningún tiempo de actividad. El tiempo de acontecimiento cero se convierte en el tiempo básico al que se suman todos los tiempos subsiguientes. El tiempo más próximo de acontecimiento para el evento 1, es la suma del tiempo básico 0 y la duración de la actividad 0-1 (1 semana), o cero más uno igual a una semana. El tiempo más próximo de acontecimiento del evento 1 (1 semana), más la duración de la actividad 1-2 (4 semanas), lo que da 5 semanas. Hasta aquí el procedimiento es una simple suma.

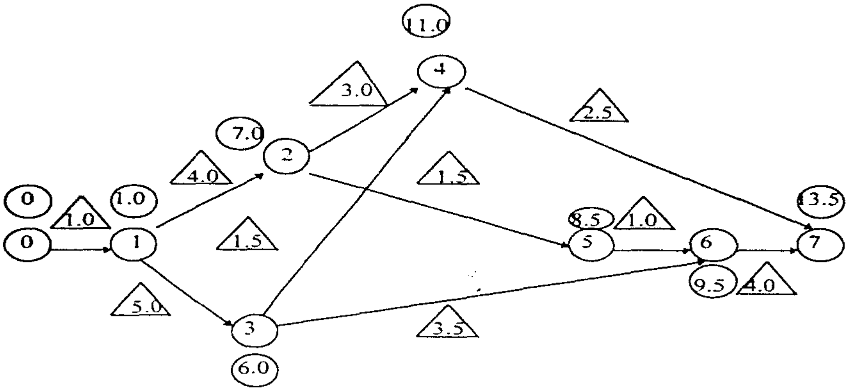


FIGURA 5.18 Red PERT. Tiempo más tardío (permisible) del evento T_L

Cuando hay dos o más actividades que fluyan en un acontecimiento, el tiempo más próximo de acontecimiento para ese evento especial exige una elección. En este ejemplo, el tiempo más próximo de acontecimiento del evento 2 (5 semanas), más la duración de la actividad 2-4 (3 semanas), igual a 8 semanas, o el tiempo más próximo de acontecimiento del evento 3 (6 semanas), más la duración de la actividad 3-4 (1.5 semanas), igual a 7.5 semanas. Como la actividad 4-7 no puede comenzar hasta que se terminen las actividades 2-4 y 3-4, es necesario escoger el tiempo máximo de 8 semanas como el tiempo más próximo de acontecimiento para el evento 4. La regla que debe seguirse para determinar los tiempos más próximos de acontecimiento es: cuando hay una selección de tiempos de acontecimiento, tómese el tiempo máximo.

Como ya se mencionó, el tiempo más tardío de acontecimiento T_L el es tiempo más tardío que puede completarse cada actividad, y que todavía permita que todo el programa se termine en el tiempo más próximo. Al calcular los tiempos más tardíos de acontecimiento (mostrados dentro de los círculos), comenzamos al final del proyecto con el tiempo más tardío de acontecimiento de 13.5 semanas para el evento 7, como se ve en la figura 5.18 El tiempo más tardío de acontecimiento para el evento 4, es la diferencia entre el tiempo más tardío de acontecimiento para el evento 7 (13.5 semanas), y la duración de la actividad 4-7 (2.5 semanas), o 13.5 menos 2.5 igual a 11 semanas. El tiempo más tardío de acontecimiento para el evento 3, es el tiempo más tardío de acontecimiento para el evento 4 (11 semanas), menos la duración de la actividad 3-4 (1.5

semanas), o 9.5 semanas. Del mismo modo, el tiempo más tardío de acontecimiento para el evento 3 es también el tiempo más tardío de acontecimiento para el evento 6 (9.5 semanas), menos la duración de la actividad 3-6 (3.5 semanas), o 6 semanas. Ahora se tiene que escoger entre dos tiempos más tardíos de acontecimiento (9.5 semanas y 6 semanas). Se debe escoger 6 semanas, porque el tiempo más tardío de acontecimiento es el tiempo más tardío en que pueden completarse las actividades que terminan con ese evento. Esto permite que las actividades que sigan del evento, terminen en la fecha más próxima de terminación del proyecto de 13.5 semanas. La regla que se debe recordar es la siguiente: cuando haya que escoger los tiempos más tardíos de acontecimiento, se debe escoger el tiempo mínimo.

Como ya se han determinado los tiempos más próximos y más tardíos de eventos, éstos pueden unirse en una sola red como se ve en la figura 8. La ruta crítica de la red es la ruta de tiempo más largo a través de la red, o sea 0-1-3-6-7. Observemos que en cada uno de los eventos de la ruta crítica, su tiempo más próximo de acontecimiento T_E es igual a su tiempo más tardío de acontecimiento T_L, lo que significa que el tiempo permisible más tardío en el que puede completarse el evento es igual a la fecha más próxima en que podemos esperar que se complete cada evento. Por lo tanto no hay tiempo de sobra o de holgura, y los eventos deben completarse exactamente como se programaron para cumplir nuestro tiempo de terminación en 13.5 semanas.

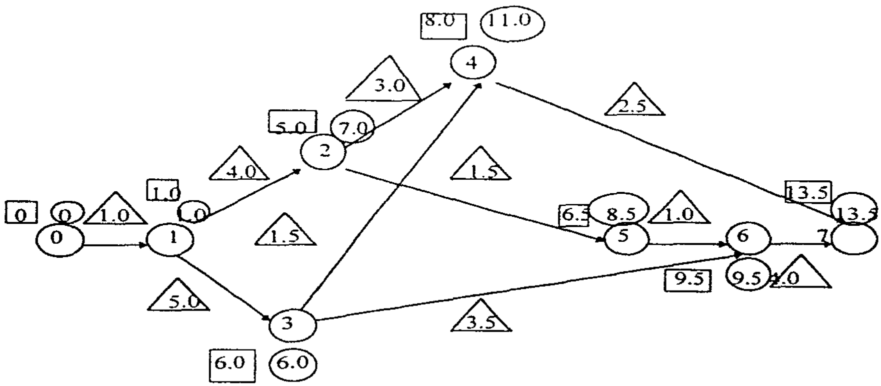


FIGURA 5.19 Red PERT. Tiempos más próximos y más tardíos T_E y T_L, respectivamente.

Examinemos los acontecimientos 2 y 4 que no están en la ruta crítica. Podríamos retrasarnos en la actividad 1-2 hasta 2 semanas, y hasta 3 semanas en la actividad 4 sin poner en peligro la terminación de la red en 13.5 semanas. Si nos retrasamos hasta una semana en el evento 2, o si éste no se completara hasta 8 semanas después de que se hubiera iniciado la red, las 5.5 semanas restantes de trabajo de las actividades 2-4 y 4-7 son tal que la red no podría completarse sino hasta 13.5 semanas después de haberse iniciado. En realidad el programa no se retrasaría en su tiempo de terminación. La red nos permite ver dónde puede o debe ahorrarse tiempo y dónde puede retrasarse un poco el plan si es conveniente.

La diferencia entre el tiempo más tardío permisible T_L y el más próximo permisible T_E, es el tiempo de holgura o sobrante. La fórmula de S es:

$$S = T_L - T_E \qquad (2)$$

Además de la holgura de los eventos 2 y 4 en la figura 8 , hay más holgura en el evento 5, que es de 2 semanas. Si sabemos la cantidad de tiempo sobrante con respecto a los distintos eventos, puede ser posible cambiar recursos; hombres, maquinaria y materiales; dentro de la ruta crítica, a fin de acortar el tiempo total del proyecto. Esta es una de las razones básicas para el empleo de PERT. Hasta ahora la holgura se ha discutido en términos de sobrante positivo, pero es posible hablar en términos de sobrante negativo, lo que significa que algunos de los eventos que se encuentran en la ruta critica están retrasados.

Los eventos y tiempos relativos que aparecen en la figura 5.19, pueden programarse en términos de eventos y cantidad de tiempo sobrante, lo que se hace basándose en la numeración de los acontecimientos, como se ve en la siguiente tabla:

EVENTO PRECEDENTE	EVENTO	t_e	T_L	T_E	HOLGURA $T_L - T_E$
-	0	0	0	0	0
0	1	1.0	1.0	1.0	0
1	2	4.0	7.0	5.0	2.0
1	3	5.0	6.0	6.0	0
2	4	3.0	11.0	8.0	3.0
2	5	1.5	8.5	6.5	2.0
3	4	1.5	11.0	8.0	3.0
3	6	3.5	9.5	9.5	0
4	7	2.5	13.5	13.5	0
5	6	1.0	9.5	9.5	0
6	7	4.0	13.5	13.5	0

Una vez que se ha dibujado la red, se han calculado todos los valores de tiempo (t_e, T_L, T_E y sobrante), y se ha determinado la ruta crítica, la verdadera tarea de PERT apenas ha comenzado. A medida que transcurre el tiempo, pueden ocurrir cambios en todas las variables, lo que significa que hay que hacer ajustes y revisiones en el plan original, para asegurar que la red PERT siga funcionando como un instrumento útil y significativo para la administración. El planeador suele usar varios métodos de ajuste. Uno es el intercambio de hombres, máquinas y materiales (si son comparables), de la ruta no crítica a la crítica. Otro método de ajuste de la red consiste en reducir las especificaciones técnicas del proyecto.

CAPITULO 6: Desarrollo del Sistema

Así como se estudia en el curso de Ingeniería de Software, los pasos principales para el desarrollo de un sistema son los siguientes:

Analizar los requerimientos	¿Cuál es el problema?
↓	
Diseño del sistema	¿Cuál es la solución?
↓	
Diseño del programa	¿Cuáles son los mejores mecanismos para implementar la solución?
↓	
Implementación	¿Cómo se construye la solución?
↓	
Pruebas	¿Esta resuelto el problema?
↓	
Liberación	¿Esta listo para ser usado por el cliente?
↓	
Mantenimiento	¿Se necesita alguna mejora?

En este capítulo explicaremos cada uno de estos pasos.

6.1 Análisis y definición de requerimientos.

El primer paso en el desarrollo de un sistema es analizar, entender y conocer el problema o la necesidad que se tiene. Las funciones, objetivos y requerimientos del sistema propuesto deben ser especificadas perfectamente. El futuro usuario y el desarrollador del sistema deben ponerse de acuerdo en las especificaciones, ya que en su conjunto son la base del diseño del sistema. La definición de requerimientos deben darse en una lista de todo lo que el cliente espera que el sistema haga.

El problema consiste en **desarrollar un programa tutorial para el curso de Investigación de Operaciones que apoye al proceso de enseñanza-aprendizaje**

Las especificaciones del sistema son las siguientes:

- **Usuarios y factores humanos**: sólo existirán dos usuarios, el profesor y el estudiante. No se necesita ningún tipo de entrenamiento para usar el sistema debido a que es muy amigable.

- **Lista de requerimientos**:

  Debe ser un sistema amigable y contener un resumen de los capítulos de la materia como apoyo a lo ya estudiado en clase.
  Debe contener ejemplos de cada tema , tener la opción de resolver ejercicios y obtener una calificación por cada capitulo
  Debe contener una lista de referencia bibliográfica.

- **Requerimientos de interfaz**:

  Las entradas solo serán obtenidas por el usuario al igual que las salidas solo serán dirigidas al usuario y no a ningún otro sistema.

- **Usuarios**:

  El usuario solo será el profesor y/o el alumno
  No se requiere un alto nivel de conocimiento en computación para usar el sistema.
  No se necesita entrenamiento para usarlo ya que el sistema es muy amigable.

- **Funcionalidad**:

  Permitirá al alumno reforzar sus conocimientos de cada tema y al profesor como un medio de evaluación.
  El sistema es creado para evaluar los conocimientos del alumno
  Se llevará a cabo esta evaluación cuando el alumno entre a la opción de examen.
  El sistema puede ser modificado o mejorado en cualquier momento
  No existen restricciones de rapidez de ejecución o tiempo de respuesta

- **Documentación:**

  La documentación será utilizada por la persona que en el futuro quiera hacer alguna modificación o mejora al programa.

- **Datos**:

  Cuando se desarrolla un sistema por lo general en los datos uno se refiere al tipo de datos que se utilizarán ya sea para entrada y salida, que tan frecuentemente se recibirán o enviaran datos, que precisión debe haber en los datos, que tan precisos deben ser los

cálculos que se llevarán a cabo, que cantidad de datos circula por el sistema y si es que algún dato debe ser retenido por el sistema.
En relación a la información anterior, en este sistema los cálculos son muy simples y sólo se trabaja con números enteros. Los únicos datos de entrada son las respuestas a los exámenes, y el único dato que se retiene es la calificación.

- **Recursos computacionales, académicos y económicos mínimos**:

  Se utilizo una computadora 486, con 8MB en memoria RAM y 10 MB del disco duro, el software Visual Basic.
  Bibliografía referente a Investigación de Operaciones, Visual Basic e Ingeniería de Sistemas.
  El desarrollador (alumno) debe tener el conocimiento de los temas del curso.
  No se necesitan recursos económicos puesto que el sistema no tiene fin lucrativo.

- **Seguridad**:

  El acceso al sistema o a la información no será controlado por ningún tipo de password puesto que cada alumno tendrá su copia del sistema.

6.2 Diseño del sistema

El diseño de un programa consiste en procesar y producir dicho sistema generando un producto tanto para el cliente como para el diseñador del programa. Para el cliente se hace un diseño conceptual que le dice al cliente cómo han sido traducidos en el sistema los requerimientos. Para el diseñador del programa se hace un diseño técnico que le explica el sistema.

En esta fase se desarrolló el sistema que cumple con las especificaciones señaladas. Dicho desarrollo fue un proceso complejo que se dividió, como se acostumbra en esta fase en 3 tipos de diseño: de la interface del usuario, preliminar y detallado.

El diseño de interface del usuario es el diseño del software como será visto por el usuario. Se diseña de manera que se manejen las funciones descritas en los requerimientos y especificaciones. Este proceso frecuentemente se lleva a cabo en paralelo con el diseño preliminar.

En el diseño preliminar se define la estructura del sistema que contiene los componentes modulares y las relaciones de dichos componentes. En esta etapa también se define las estructuras generales.

En el diseño detallado se toman decisiones respecto de cómo implementar cada componente del diseño preliminar.

6.3 Diseño del Programa

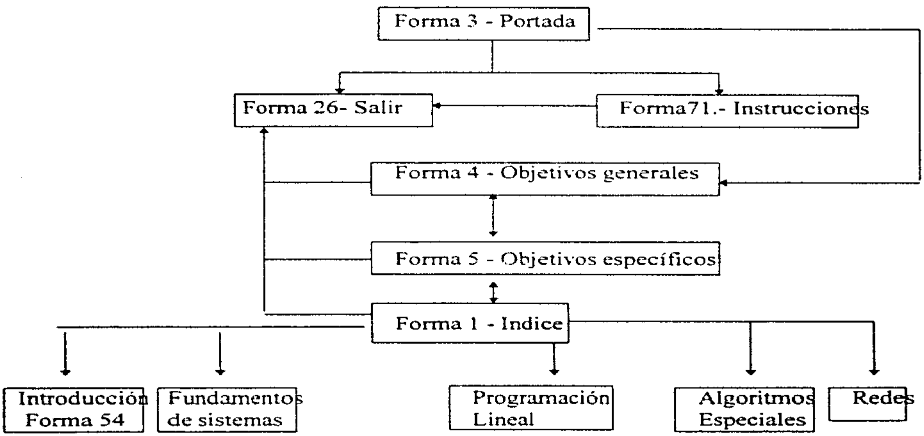
En esta etapa se explican los diferentes módulos en los que consiste el programa los cuales se examinan a continuación.

El sistema consta de 5 módulos principales:

- Introducción
- Fundamento de Sistemas
- Programación Lineal
- Algoritmos especiales
- Redes

En cada uno de los módulos se da una breve explicación teórica, y en los tres últimos, se tienen las opciones de ver ejemplos y realizar exámenes.

Un diagrama general, a partir del cual se desarrollan estos cinco módulos principales es:



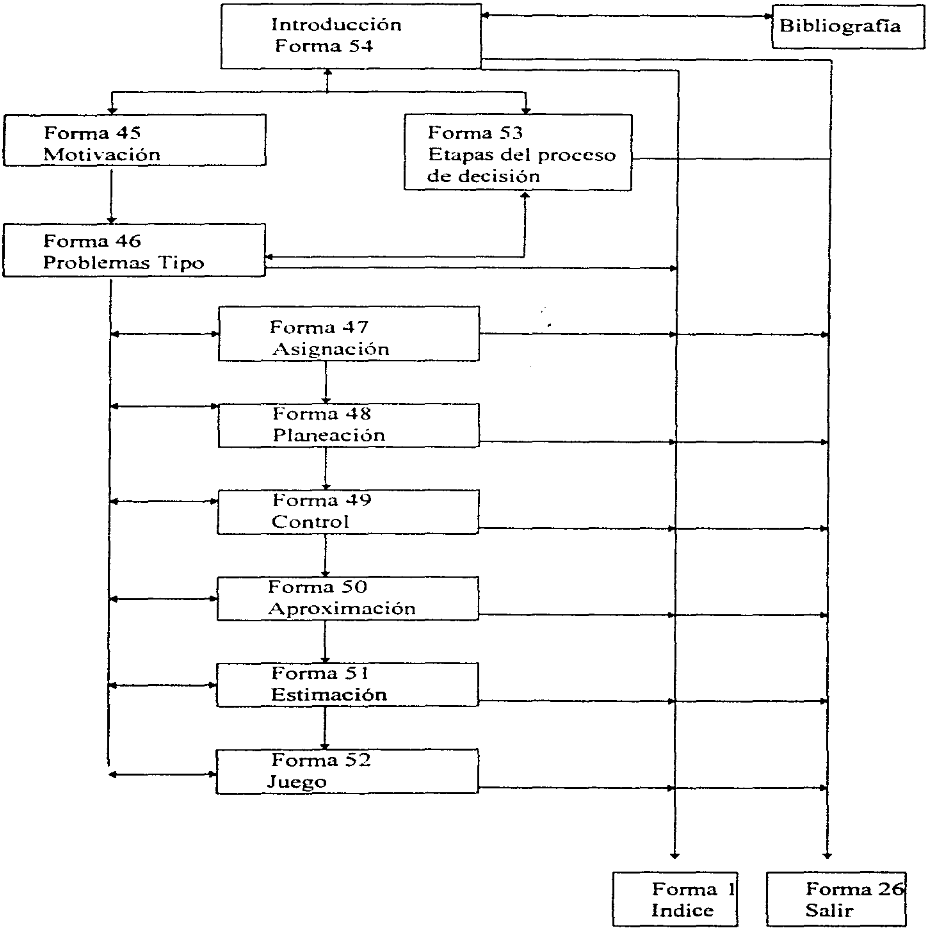
En la primera ventana de presentación se tienen las instrucciones de uso del sistema, los objetivos generales y específicos de la materia de Investigación de Operaciones, y se llega a un índice, donde se tiene acceso a la siguiente pantalla que contiene los cinco módulos mencionados.

PANTALLA 6.1

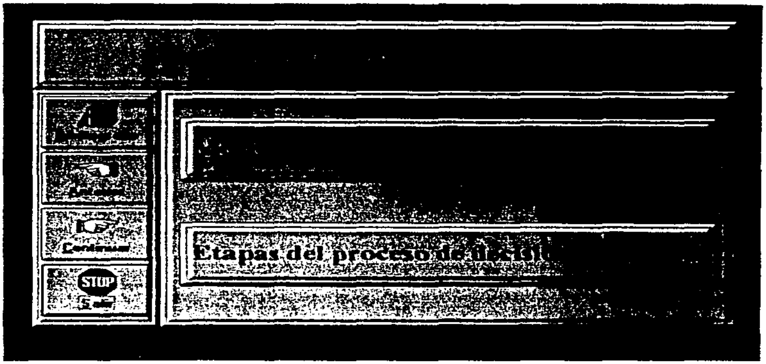
Las direcciones de las flechas, en la pantalla 6.1, indican la posibilidad de ir de una forma (pantalla o ventana) a otra. De esta manera, además de poder accesar los cinco módulos, también se tiene la opción de regresar a la pantalla anterior, que en este caso es la de objetivos específicos y a la pantalla de objetivos generales (ver diagrama general). Estas tres pantallas tienen la opción de salir del sistema.

A continuación se explican los cinco módulos.

Modulo Introducción

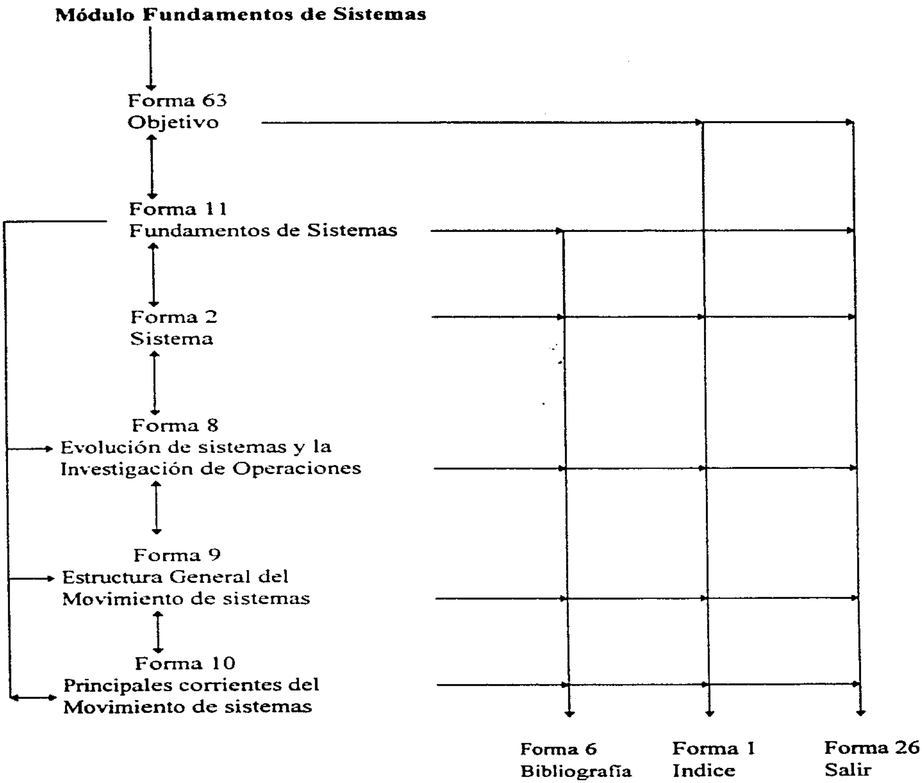


La ventana correspondiente al módulo de introducción es la siguiente,

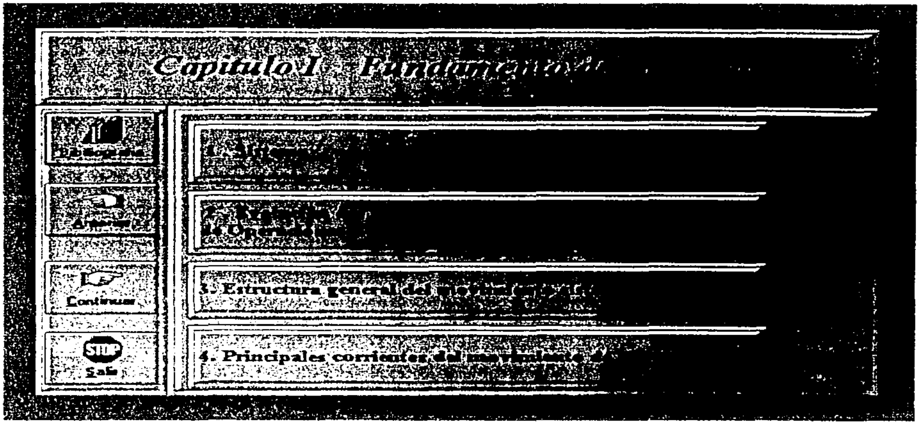


Se observa que la ventana fue diseñada en una forma amigable al usuario; las opciones pueden ser seleccionadas ya sea apuntando la opción que se quiera ejecutar y oprimiendo el botón izquierdo del mouse u oprimiendo la tecla Alt al mismo tiempo que la letra subrayada de la opción seleccionada.

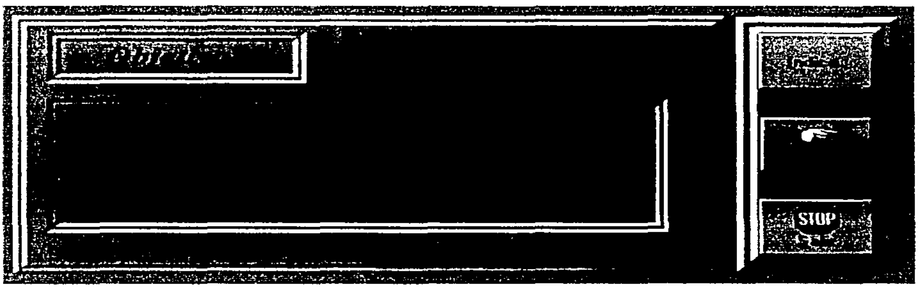
Por ejemplo, si se quiere elegir la opción Continuar hay que oprimir las teclas Alt+C.


Módulo Fundamentos de Sistemas
Forma 63
Objetivo
Forma 11
Fundamentos de Sistemas
Forma 2
Sistema
Forma 8
Evolución de sistemas y la
Investigación de Operaciones
Forma 9
Estructura General del
Movimiento de sistemas
Forma 10
Principales corrientes del
Movimiento de sistemas
Forma 6
Bibliografía
Forma 1
Indice
Forma 26
Salir

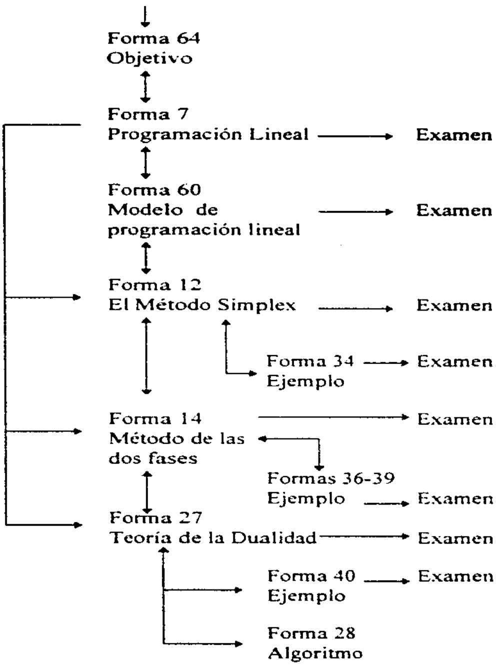
La ventana correspondiente al módulo de Fundamentos de Sistemas es la siguiente.



Y su correspondiente ventana de objetivos específicos es



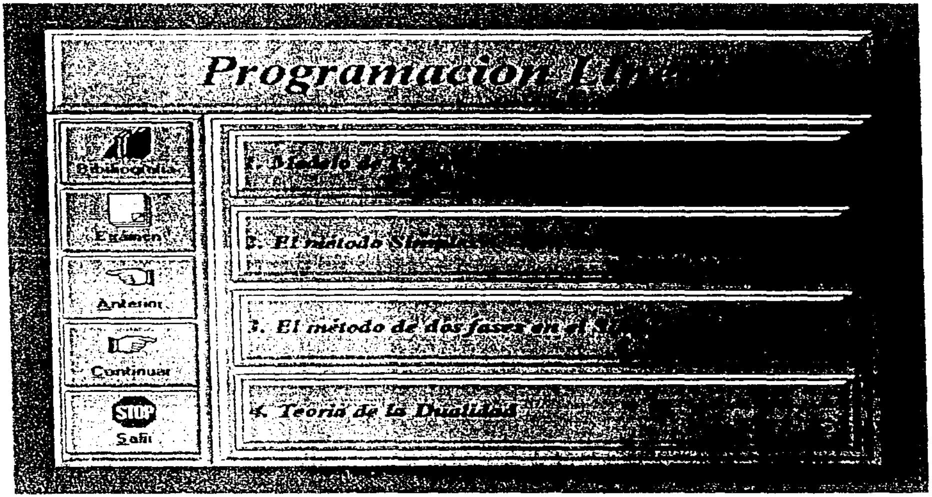
Módulo Programación Lineal



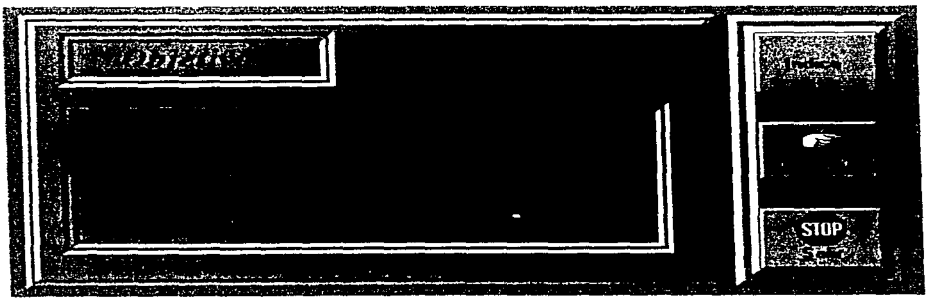
Las formas 33, 67, 68,69,70 y 72 son las 6 preguntas de examen que corresponden con este tema. Se accesa al examen por cada una de las formas que se indican en el esquema, por ejemplo, desde la forma 7. Una vez resuelto un examen, no se puede volver a hacer, ya se tiene una calificación fija.

Las formas que tienen la opción de ir a la pantalla de salida del sistema son: 64, 7, 60, 12, 14, 27, 34, 35, 36, 37, y 40. La forma que muestra la bibliografía es la forma 6 y en este módulo se puede accesar desde las formas 7, 60, 12, 14 y 27.

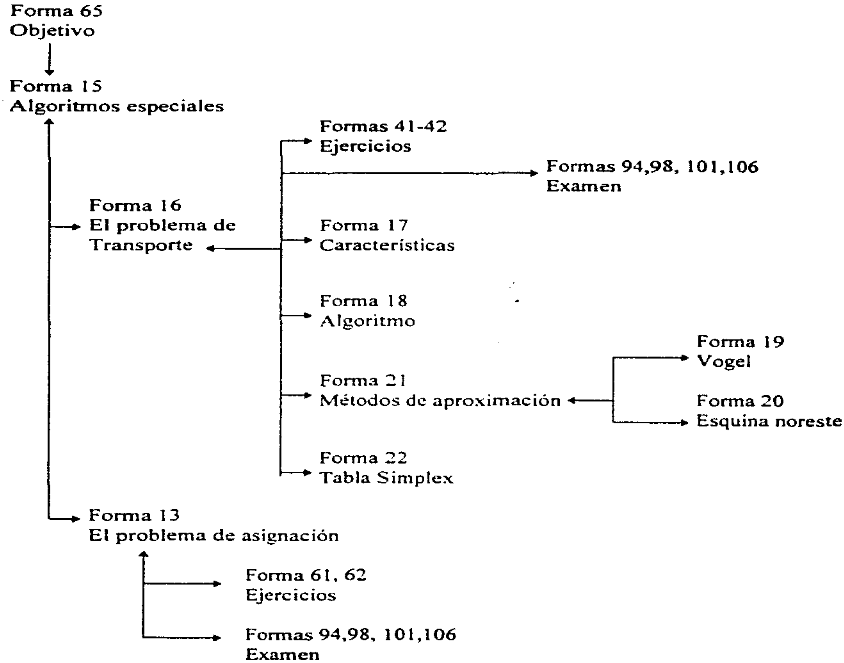
La ventana corres[illegible] de Programación Lineal es la siguiente



Y su ventana de [illegible] es

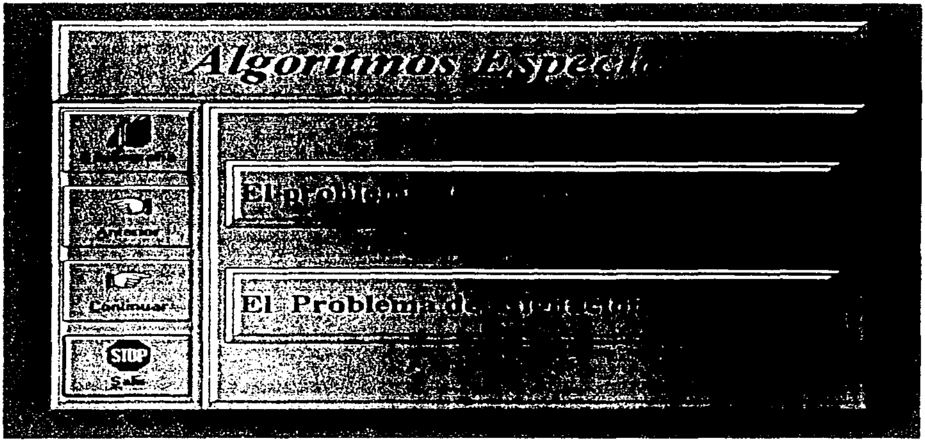


Módulo Algoritmos especiales

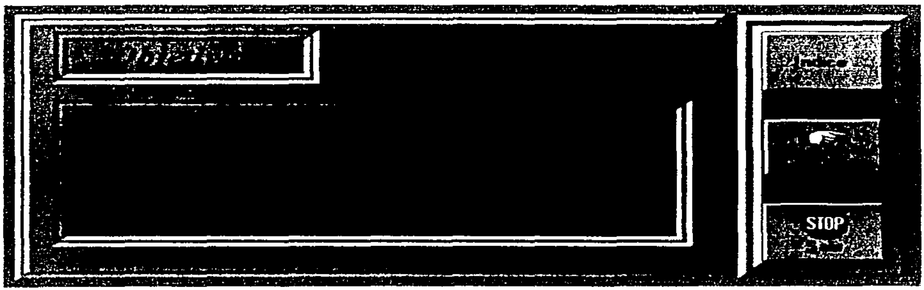


Las formas que tienen la opción de ir a la pantalla de salida del sistema son: 65, 15, 16, 41, 42, 13, 61 y 62. La forma que muestra la bibliografía es la forma 6 que se puede accesar, en éste módulo, desde las formas 15,16, y 13.

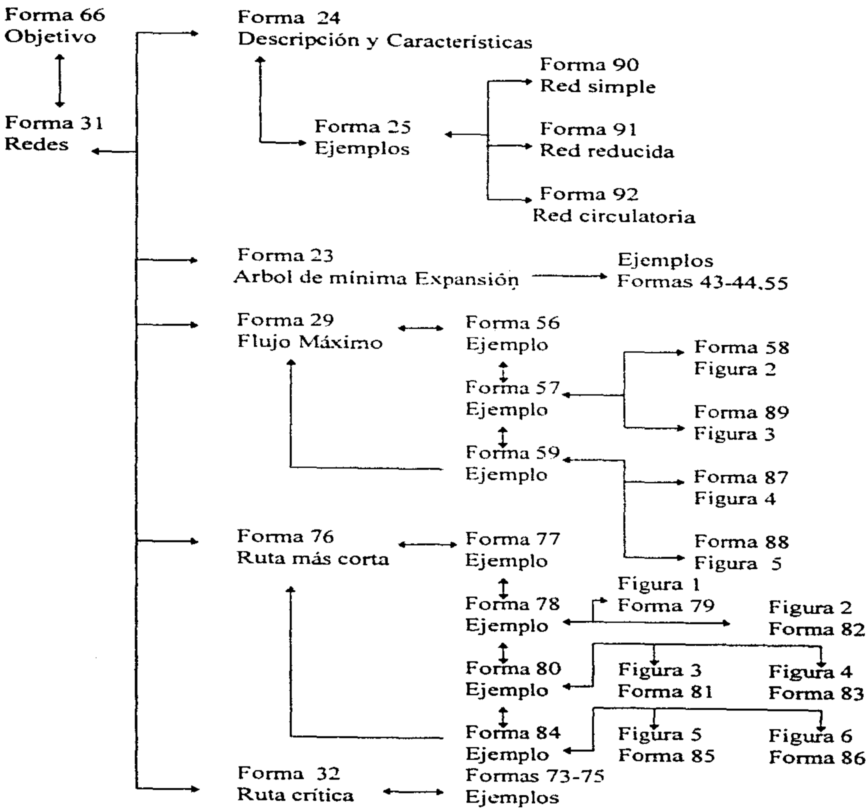
La ventana correspondiente al modulo de Algoritmos Especiales es la siguiente



Y su ventana de Objetivos es



Módulo Redes



Al examen de redes se accesa desde cualquier forma, a excepción de las formas que sólo contienen figuras. Y su estructura es la siguiente:

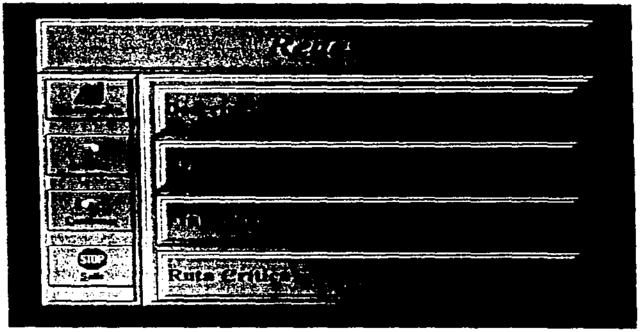
Entrada al examen

Forma 107 Pregunta 1	Forma 108 Figura 1
Forma 109 Pregunta 2	Forma 110 Figura 2
Forma 111 Pregunta 3	
Forma 112 Pregunta 4	

Salir del examen

Su ventana de objetivos es:

La ventana correspondiente al módulo de Redes es la siguiente:



6.4 Implantación:

Lo mas importante de esta fase del desarrollo del sistema es el código fuente del sistema. Las tres actividades de la implantación son codificar, probar e integrar. La codificación consiste en escribir el código fuente para cada modulo del sistema. Cada modulo codificado es probado para ver su confiabilidad y validarlo. Finalmente se prueban todos los módulos en conjunto para su integración. Estas actividades se repitieron hasta que el código quedara implementado.

6.5 Pruebas

El sistema fue sujeto a diversas pruebas durante esta etapa. El principal objetivo fue asegurar que los subsistemas creados y probados durante la implantación funcionaran juntos como un sistema y para asegurarnos que el sistema cumple con los requerimientos y especificaciones.

6.6 Liberación

Para la mayoría de los productos de software, el paso final es la entrega del sistema. El usuario es responsable de la instalación, aunque debe seguir las instrucciones en la instalación y uso del sistema. El sistema se entrega al profesor, y se prueba para asegurar que es un sistema aceptable y cumple los requerimientos establecidos. Una vez entregado el sistema el ciclo de desarrollo de software concluye y se inicia la fase de operación y mantenimiento.

6.7 Mantenimiento

La vida de un sistema no termina cuando este ha sido liberado. El software una vez creado y en operación, siempre está sujeto a cambios y mejoras.

Las actividades en la fase de mantenimiento son similares a del desarrollo del sistema: se analizan nuevos requerimientos, se diseña el programa, se escribe el código, se prueban los cambios, y se actualiza la documentación. Los analistas o programadores son los que realizan la actividad de mantenimiento. Por el conocimiento del sistema que tiene la persona que lo creó, lo ideal es que sea ella quien de el mantenimiento; aunque el sistema es tan amigable que cualquier persona podría realizarlo.

El mantenimiento del sistema involucra tanto a los usuarios como a la persona que dará el mantenimiento, pues es el usuario el que debe indicar las mejoras necesarias, hacer comentarios y explicar los problemas al programador.

Las principales actividades de la persona que le dará mantenimiento al sistema son:

1. Entender el sistema
2. Localizar la información en la documentación del sistema
3. Mantener el sistema actualizado
4. Ampliar las funciones para cambiar o poner nuevos requerimientos
5. Añadirle nuevas funciones al sistema.
6. Encontrar el origen de los errores del sistema
7. Corregir los errores encontrados en el sistema
8. Responder acerca de cómo el sistema trabaja.
9. Reestructurar diseño y código
10. Reescribir diseño y código
11. Borrar diseño y los código en aquellos módulos que ya no son útiles.

Si hay un problema la persona que se encargará del mantenimiento del sistema primero debe comprender el problema expresado por el usuario. Una petición de modificación al sistema incluye la descripción de cómo está trabajando el sistema en ese momento y cómo el usuario quiere que trabaje, y qué modificaciones se necesitan para producir el cambio.

La etapa de mantenimiento siempre involucra la interacción con los usuarios, el software y el hardware.

Para profundizar un poco mas en la fase de mantenimiento cabe mencionar que hay 4 tipos:

Mantenimiento Correctivo : es la corrección de errores que surgen día con día en el sistema.

Mantenimiento Adaptativo: algunas veces cuando se introduce un cambio en una parte del sistema, también se requiere modificar otras partes del sistema ; la implantación de estos cambios secundarios se conocen como mantenimiento adaptativo.

Mantenimiento Perfectivo : consiste en perfeccionar funciones que ya existen; este mantenimiento también incluye cambios en el diseño o en el código para mejorar el desempeño del sistema.

Mantenimiento preventivo.- Este mantenimiento es un esfuerzo para prevenir errores o un mal funcionamiento del sistema. Previene el degradamiento del sistema a niveles inaceptables.

CAPITULO 7: Conclusiones

- Se logró desarrollar un sistema amigable y útil en ambiente Windows en Visual Basic.
- El sistema contiene el temario del curso de Investigación de Operaciones para las carreras de Ingeniería en Computación y de Ingeniería Industrial.
- El sistema incluye un resumen de lo mas importante de cada tema, ejemplos resueltos y un examen por módulo. Dichos exámenes pueden ser accesados desde cualquier tema dentro del mismo módulo.
- El trabajo constituye un soporte para el profesor de la materia de Investigación de Operaciones que le ayuda en la evaluación de los alumnos y reafirma los conocimientos adquiridos en clase.
- El contenido de cualquiera de los módulos se puede modificar si cambiara el programa oficial.
- En la tesis se encuentra condensado todo el temario con las referencias que les sirven a los profesores y estudiantes para profundizar en la teoría.
- Este sistema fue diseñado para que cada alumno tenga su propio programa, aunque con algunos cambios esta característica se podría modificar para darle servicio a varios usuarios en una sola terminal. La ventaja que vimos a la primera opción fue que cada usuario (maestro o alumno) en un disco flexible pudiera tener la facilidad de trabajar en cualquier computadora con las características mencionadas en el capitulo 6 seccion 6.1

APENDICE A

1.1 La Programación Orientada a Objetos

La *programación orientada a objetos* (POO) es una metodología estructurada. Es una nueva forma de construir software que resuelve algunos de sus problemas clásicos, por ejemplo, propone Software con componentes estándar reutilizables. La POO esta formada por un conjunto de objetos cooperativos con los cuales se logra el objetivo del sistema.

Los conceptos fundamentales de POO son: objetos, mensajes, clases, herencia, polimorfismo y marcos estructurales. Los *objetos* son paquetes de datos y procedimientos. Son el elemento del dominio acerca del cual se conserva información y son responsables de ciertos comportamientos, por ejemplo, los clientes, alumnos, contratos, máquinas. Los *mensajes* son el medio de comunicación entre objetos para solicitar y proporcionar servicios activando métodos. Las *clases* son moldes para definir objetos y relaciones de dependencia entre ellos. Permiten generalizar y especializar, es decir, es la representación genérica de objetos con estructura y funcionamiento comunes. La *herencia* es la relación entre clases que permite definir nuevas clases con base en clases ya existentes. Existe la herencia múltiple, en la que una clase hereda todos los métodos y variables de todas sus superclases. Hay partidarios y enemigos de esta herencia múltiple, los primeros están a favor porque dicen que la herencia múltiple refleja la realidad y que su exclusión llevaría a la redundancia. Los segundos están en contra pues opinan que la herencia múltiple impone trabajo adicional en el lenguaje y en el programador y que ésta puede reestructurarse para tener sólo herencia simple. El *polimorfismo* es la capacidad de los objetos de responder de distinta forma al mismo mensaje. Los *marcos estructurales* son modelos operacionales de la institución, serie de clases ya definidas para operaciones genéricas, con la idea de utilizarlos de forma repetitiva, por ejemplo, las compras, las ventas, la inscripción.

La POO logra beneficios en los costos al reducir tiempos de sofware y en la reutilización de componentes.

Beneficios y costos de la POO

Beneficios

1. Mejora la productividad al reducir tiempos y costos reutilizando componentes.
2. Mejora la calidad pues utiliza componentes ya probados.
3. Facilita la modificación del software y su mantenimiento. Los objetos se pueden modificar sin afectar a otros y con ello se reducen los costos de mantenimiento.
4. Es adaptable al cambio para responder a oportunidades y demandas del mercado (competencia) y de los clientes (personalización) con se facilita la evolución de los sistemas.

5. Se logra tener sistemas de información promotores del cambio y no obstáculos para cambiar.

Costos

1. Incluyen nuevas plataformas de Software y Hardware para soportar Orientación a Objetos.

2. El entrenamiento en técnicas y herramientas de Orientación a Objetos.

3. El desarrollo de componentes de Software reusables para desarrollos futuros.

La reutilización

La utilización repetida en la POO contempla:

- el uso de componentes existentes para construir nuevos componentes
- que los nuevos componentes sean candidatos de reutilización
- tener componentes valiosos
- fomentar una cultura de reutilización
- planear y diseñar pensando en la reutilización

Los componentes de software reutilizables son:

Código objeto o fuente	Herramientas
Diseños	Datos
Casos de prueba	Requerimientos
Estimaciones de costos	Planes de Proyecto
Arquitectura	Documentos

Los pasos que se deben seguir para lograr la reutilización de componentes son:

1. buscar el componente adecuado que cumpla los requerimientos
2. que pueda ser adaptable
3. que se pueda conectar con otros componentes
4. hacer una buena prueba
5. Convertir el resultado en nuevo producto reusable

Análisis de requerimientos utilizando POO

Para utilizar la POO es conveniente realizar los siguientes pasos:

- Entender, representar y documentar ciertos aspectos de la realidad (dominio del problema)
- Definir las responsabilidades del sistema.
- Utilizar el enfoque de objetos para realizar el análisis.
- Identificar objetos y clases
- Identificar relaciones entre clases Gen- Espec y Todo-Partes
- Identificar los subsistemas
- Identificar los atributos
- Identificar los servicios.

La estructura de la OO expresa la complejidad del dominio según las responsabilidades del sistema.

Lenguajes de programación Orientado a Objetos

C++
Smalltalk
Objective C
Object Pascal
Eiffel
Actor
CLOS

APENDICE B

Temario de la materia de Investigación de Operaciones

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE INGENIERIA

Programa de Asignatura

INGENIERIA MECANICA E INDUSTRIAL — División

INGENIERIA INDUSTRIAL — Departamento

Fecha de aprobación del

*Consejo Técnico de la Facultad: 1 de abril de 1995

*Consejo Académico del Area de las Ciencias Físico Matemáticas y de las Ingenierías: 30 de enero de 1996

Programa de la Asignatura: INVESTIGACION DE OPERACIONES I

Clave: ______ Num. de créditos: 8 Carrera: ING. INDUSTRIAL

Duración del curso: Semanas: 16 Horas: 64 Semestre: 7

Horas a la semana: Teoría: 4 Obligatoria: X Prácticas: 0 Optativa: ______

OBJETIVO DEL CURSO

El alumno formulará modelos de programación lineal de problemas económicos e industriales y aplicará los métodos de Investigación de Operaciones para obtener la solución óptima.

TEMAS

Núm:	Nombre:	Horas
I	INTRODUCCION	6
II	MODELADO	10
III	PROGRAMACION LINEAL	22
IV	ALGORITMOS ESPECIALES	16
V	REDES	10
		64

ANTECEDENTES, OBJETIVOS Y CONTENIDOS DE LOS TEMAS

I INTRODUCCION

ANTECEDENTES:

Ninguno

OBJETIVO:

El alumno explicará el contenido y los alcances del curso y aplicará el enfoque sistémico para la solución de problemas multidisciplinarios.

- I.1 Introducción a la investigación de operaciones.
- I.2 El enfoque de sistemas.
- I.3 Clasificación y morfología de los sistemas.
- I.4 Generación de alternativas y jerarquización.

II MODELADO

ANTECEDENTES:

Temas Anteriores del Curso

OBJETIVO:

El alumno explicará las reglas para la clasificación, formulación y validación del modelo.

CONTENIDO:

- III.1 Definiciones
- III.2 Ventajas del modelo
- III.3 Clasificación de los modelos
- III.4 Formulación de modelos
- III.5 Selección del modelo
- III.6 Validación del modelo

III PROGRAMACION LINEAL

ANTECEDENTES:

Algebra Lineal

OBJETIVO:

El alumno explicará las propiedades fundamentales de los modelos de programación lineal y utilizará algoritmos para resolver problemas.

CONTENIDO:

- IV 1 Teoría de Programación Lineal
- IV 2 Forma general del modelo matemático de Programación Lineal
- IV 3 Forma estándar de modelos para maximización y minimización
- IV 4 El método gráfico
- IV 5 Región de soluciones factibles
- IV 6 Soluciones básicas factibles y no factibles
- IV 7 Degeneración
- IV 8 El método simplex
- IV 9 Complicaciones para la aplicación del método simplex
- IV.10 El método de las DOS FASES
- IV 11 Teoría de la Dualidad
- IV 12 Transformación del problema primal a su problema asociado dual
- IV 13 Relaciones Primal-Dual
- IV 14 Interpretación económica del Dual
- IV 15 Programación del algoritmo o aplicación de paquetes de cómputo para la solución de modelos de programación lineal

IV ALGORITMOS ESPECIALES

ANTECEDENTES:

Algebra Lineal

OBJETIVO:

El alumno empleará métodos especiales para resolver problemas de programación lineal con características particulares.

CONTENIDO:

- V.1 El problema de transporte
- V.2 Modelo de programación lineal del problema de transporte
- V.3 Tabla simplex del problema de transporte
- V.4 Métodos de aproximación para obtener una solución inicial
- V.5 Métodos para obtener la solución óptima
- V.6 El problema de asignación
- V.7 Método para obtener la solución óptima del problema de asignación
- V.8 Solución de problemas de transporte y asignación mediante la aplicación de paquetes de cómputo o bien elaboración de programas de los algoritmos

V REDES

OBJETIVO:

El alumno aplicará la metodología para planeación, administración y control de los proyectos mediante el uso de redes

CONTENIDO:

- VI 1 Descripción y características de las redes
- VI 2 Redes dirigidas
- VI.3 Arbol de mínima expansión
- VI 4 Problemas de flujo máximo
- VI 5 Ruta más corta
- VI 6 Planeación y control de proyectos mediante ruta crítica
- VI.7 Diagrama de Gantt
- VI 9 Método PERT. Método CPM. Método PERT/CPM

TECNICAS DE ENSEÑANZA:

Exposición oral	(X)
Exposición audiovisual	( )
Ejercicios dentro de clase	(X)
Ejercicios fuera del aula	( )
Seminarios	( )
Lecturas obligatorias	( )
Trabajo de investigación	(X)
Prácticas de taller o laboratorio	( )
Prácticas de campo	( )
Otras	

ELEMENTOS DE EVALUACION:

Exámenes parciales	(X)
Exámenes finales	(X)
Trabajos y tareas fuera del aula	(X)
Participación en clase	(X)
Asistencia a prácticas	( )
Otros: PROYECTO FINAL	

ANTECEDENTES

Asignatura

ALGEBRA LINEAL

CONSECUENTES

Asignatura

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES II
INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES III
PLANEACIÓN Y CONTROL DE LA PRODUCCIÓN
SISTEMAS DE PRODUCCIÓN AVANZADOS

BIBLIOGRAFIA

Texto | Temas de la materia para los que se recomienda

TEXTOS BASICOS

HILLIER y LIEBERMAN — TODOS
"Introducción a la Investigación de Operaciones"
Mc Graw Hill, 5a. Ed.
México, 1991

TAHA, Hamdy A. — TODOS
"Investigación de Operaciones"
ALFA-OMEGA, 3a. Ed.
México, 1991

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA

DAELLENBACH, et al. — TODOS
"Introducción a Técnicas de Investigación de Operaciones"
CECSA, 2a. Ed.
México, 1987

WAYNE, L. Winston — TODOS
"Operations Research Applications and algorithms"
PWS-KENT Publishing, 2a. Ed.
Boston, 1991

SCHMIDT y TAYLOR — II, III
"Analisis y simulación de Sistemas Industriales"
TRILLAS
México, 1979

BAZARAA y JARVIS — TODOS
"Programación Lineal y Flujo en Redes"
NORIEGA-LIMUSA
México, 1981

OCHOA ROSSO, Felipe — TODOS
"El método de los Sistemas"
DEPFI UNAM
México

APENDICE C

Manual del usuario

Instalación

Antes de empezar, se tiene que instalar el sistema en su PC. El programa de instalación se realiza de manera automática siguiendo las instrucciones en pantalla y toma aproximadamente 12 min.

Requisitos mínimos del sistema

- Una PC que utilice un microprocesador 80286 o de mayor capacidad
- El sistema operativo MS-DOS 3.1 o posterior
- Una versión Windows 3.0 o posterior en modo estándar o mejorado.
- Un mínimo de 4MB de memoria
- Un espacio en disco duro mínimo de 5 MB
- Un mouse
- Una pantalla EGA, VGA, SVGA o XGA

Para instalar el sistema en el disco duro

1. Si windows no está en ejecución, inicie el programa escribiendo *win* después del símbolo del sistema C:\>.
2. Hacer doble-clic en el icono del *administrador de archivos*.
3. Coloque el disco rotulado "Disco 1" en la unidad A o B
4. Elija *Ejecutar* del menú *Archivo* del administrador de archivos
5. Escriba a:setup o b:setup, en el cuadro de línea de comando, dependiendo de la unidad de disco que esté empleando. O haga clic en *Examinar* y seleccione la unidad donde se localiza el programa de instalación y seleccione el archivo setup.exe, a continuación haga clic en *Aceptar*
6. Siga las instrucciones que aparecen en los cuadros de código.

El sistema de apoyo para la materia de Investigación de Operaciones quedó instalado.

Para iniciar el sistema

En la ventana del administrador de archivos, haga doble-clic en el icono de IO, en seguida aparecerá la pantalla inicial del sistema, teclee su nombre completo iniciando por el apellido paterno, materno y nombre(s).

Descripción general del sistema

El sistema de apoyo para la Investigación de Operaciones se desarrolló en base a los requerimientos especificados en el capitulo 6.

Este sistema se basa en un diseño estructural en el cual todos los módulos están correlacionados entre si por medio de ventanas, permitiendo el uso de la aplicación de manera sencilla y eficiente. La mayoría de las ventanas tienen varios elementos comunes como son los siguientes botones.

Abre la ventana donde se encuentra la bibliografía de consulta.

Lleva al índice principal de donde se puede consultar cualquiera de los cinco temas.

Cierra la pantalla actual y abre la siguiente pantalla.

Cierra la pantalla actual y abre la anterior.

Sale del sistema.

Cierra la pantalla actual e inicia con la explicación de un ejercicio resuelto del tema que se esta consultando.

Cierra la pantalla actual y empieza con el examen del tema que se esta consultando

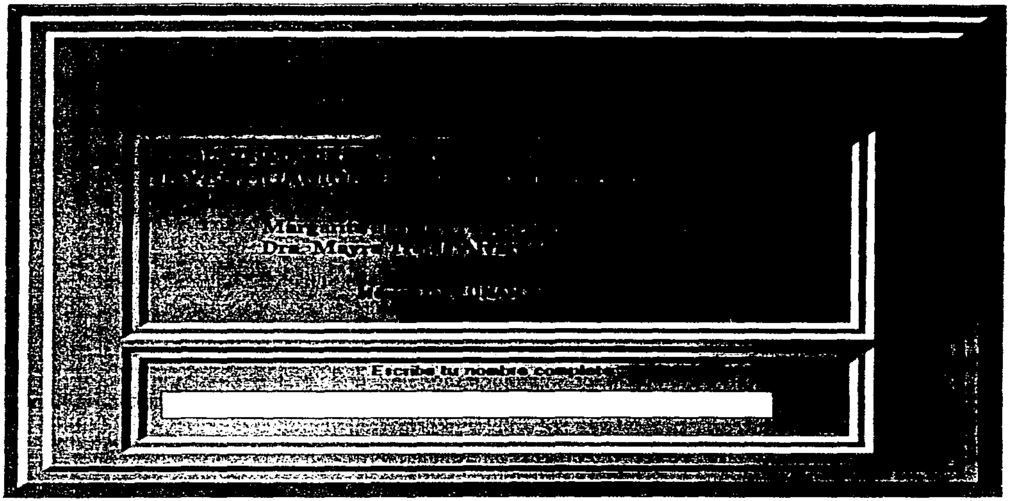
Como seleccionar opciones

Existen tres maneras de seleccionar una opción dentro de cada ventana desplegada en la pantalla.

- Utilizando el mouse, se apunta al botón que se desea ejecutar y se oprime el botón izquierdo del mouse.
- Oprimiendo la tecla TAB la cual nos va a desplazar de botón en botón hasta que se seleccione la instrucción que deseamos ejecutar, entonces se oprime la tecla ENTER
- Utilizando las teclas rápidas, lo cual consiste en sostener la tecla ALT y al mismo tiempo oprimir la letra subrayada del botón de la instrucción que queremos ejecutar. Por ejemplo, para abrir la ventana de Bibliografía se oprimen las teclas ALT B al mismo tiempo.

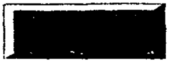
Operación del Sistema

Al entrar al sistema se despliega automáticamente la pantalla de inicio:

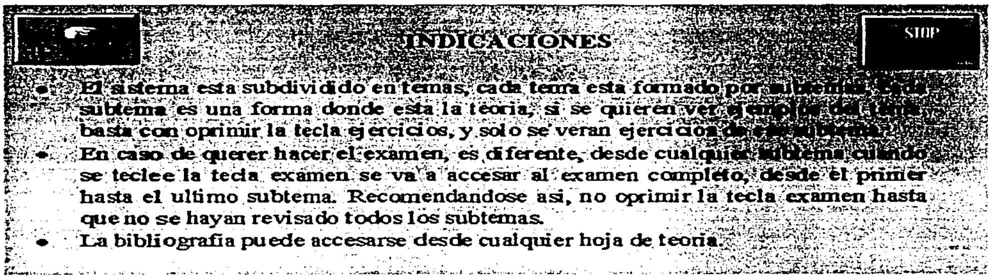


Es importante señalar que es necesario que el alumno teclee su nombre completo para poder operar el sistema, ya que cuando realize alguno o todos los exámenes las calificaciones serán archivadas en una base de datos, si no escribiera el alumno su nombre, por ningún motivo se permitirá el acceso al sistema.

Una vez que se teclea el nombre del alumno, hay dos opciones:

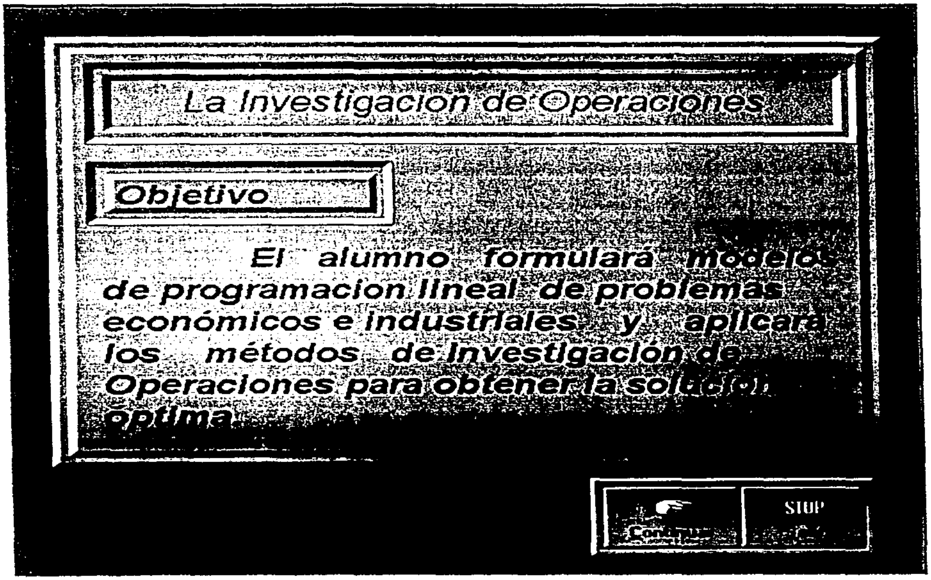


Se abre una breve ventana de instrucciones de uso del sistema :

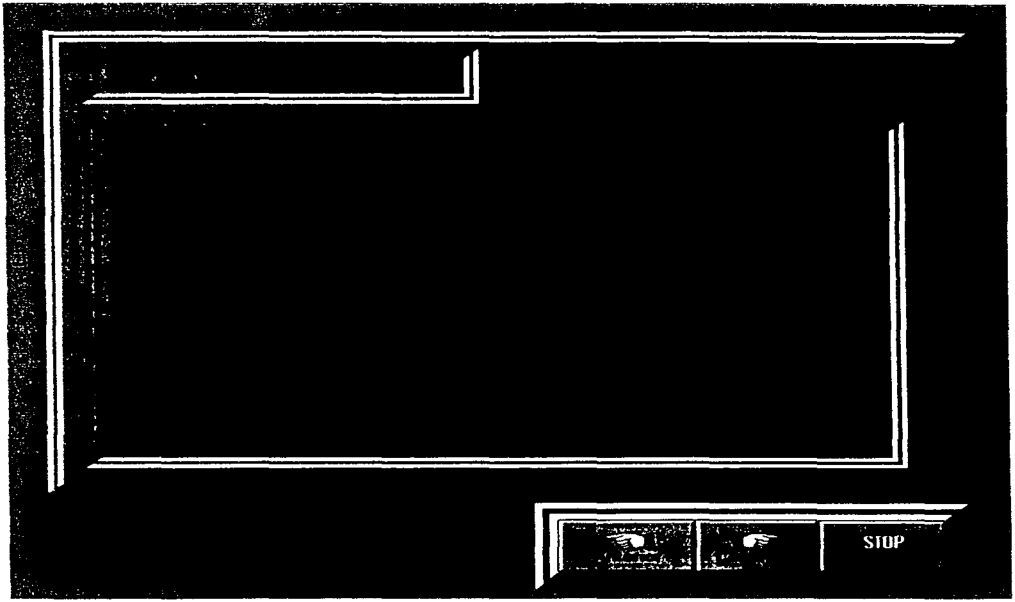


O el botón:

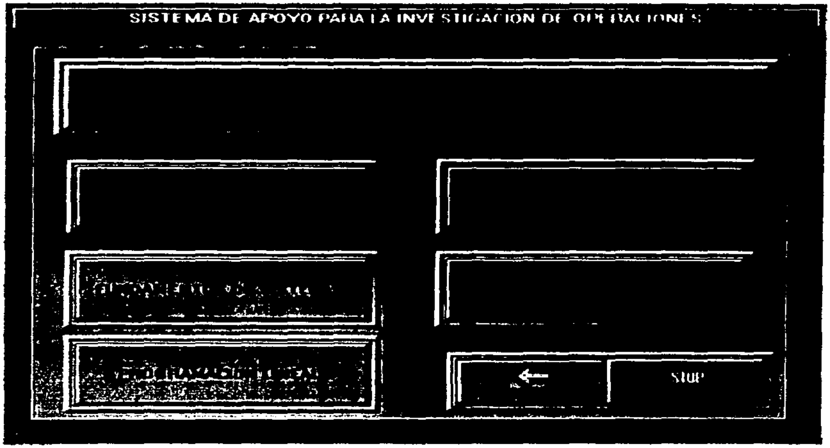
Que abriría la ventana de objetivos generales, si en la ventana de indicaciones se oprime el botón continuar también aparecerá esta misma ventana.:



La tecla continuar nos lleva a ventana de objetivos específicos de la materia de investigación de operaciones:



Al oprimir la tecla continuar se abre la ventana del índice general del sistema:



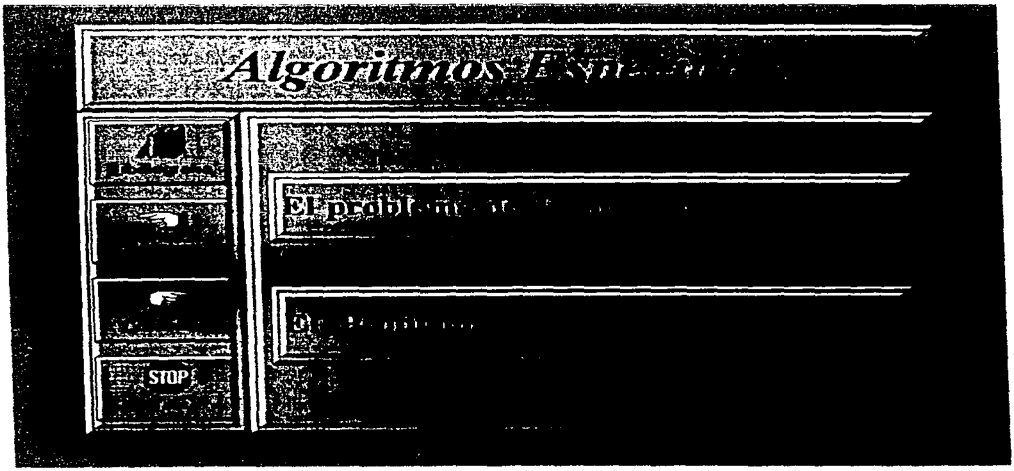
A partir de aquí podemos elegir cualquiera de los módulos que deseemos consultar.

Los módulos de los temas introducción, y fundamentos de sistemas, son información teórica. Los módulos de los tres temas siguientes, programación lineal, algoritmos especiales y redes son un conjunto de ventanas de donde se accesa a la teoria de cada tema, asi como a los módulos de ejercicios resueltos y exámenes.

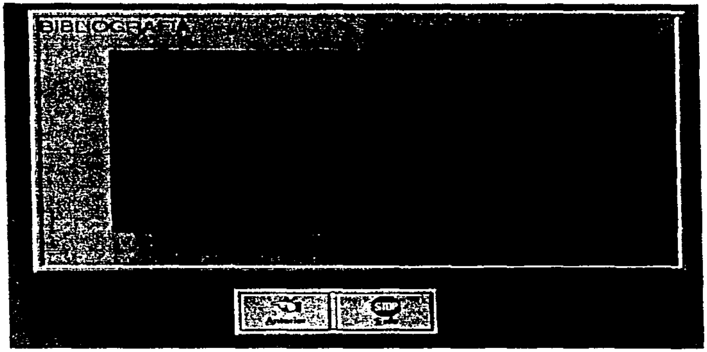
Para explicar el funcionamiento general del sistema a continuación se va a hacer un recorrido por el módulo de Algoritmos Especiales seleccionando solo el tema "El problema de Transporte".

Para comenzar, en la pantalla de indice seleccionamos el boton Algoritmos Especiales y a continuacion aparecera en la pantalla la ventana de objetivos especificos de este tema.

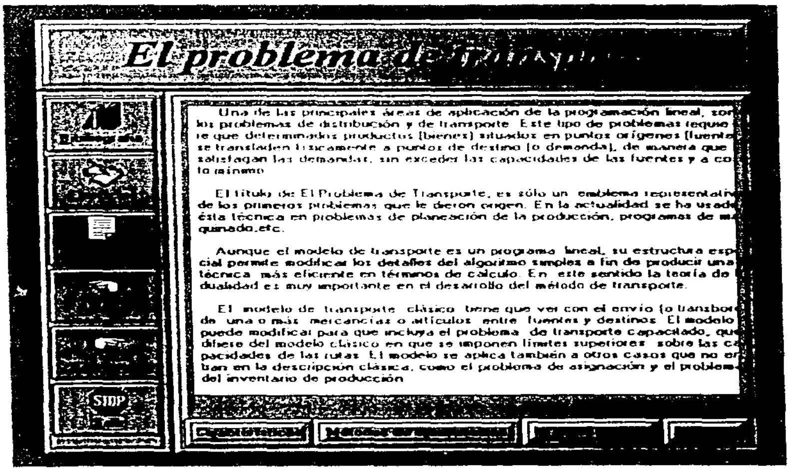
Al oprimir el boton continuar aparece la siguiente pantalla donde se muestran los temas de este modulo:



Si eligiéramos desde esta o cualquier otra pantalla de este módulo o de cualquier otro el botón de bibliografía la ventana que aparecería sería la siguiente ventana de información:

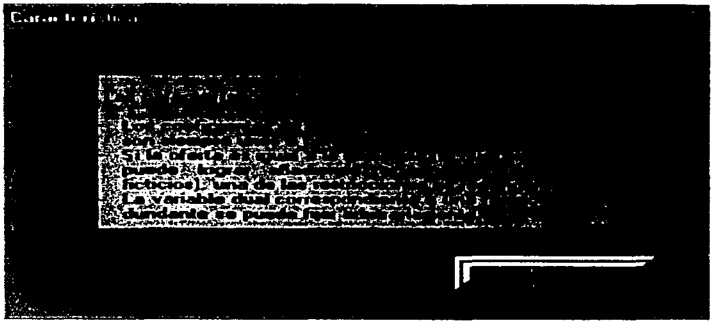


Elegimos el primer tema seleccionando el título El problema de Transporte u oprimiendo el botón continuar, entonces se abre la ventana :

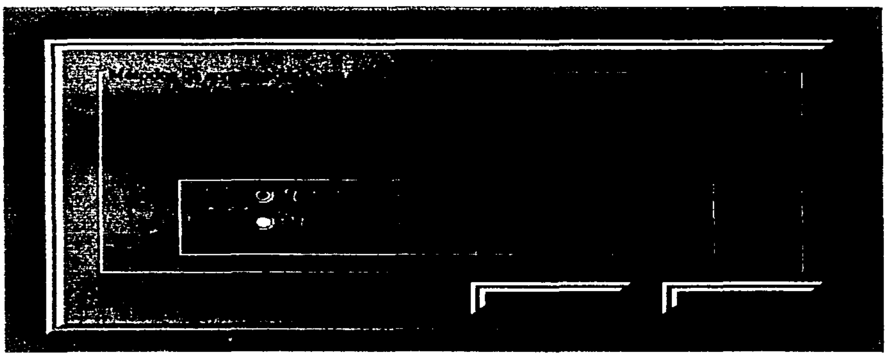


A continuación mostraremos que pantallas se aparecen al oprimir cada uno de los botones en el margen inferior:

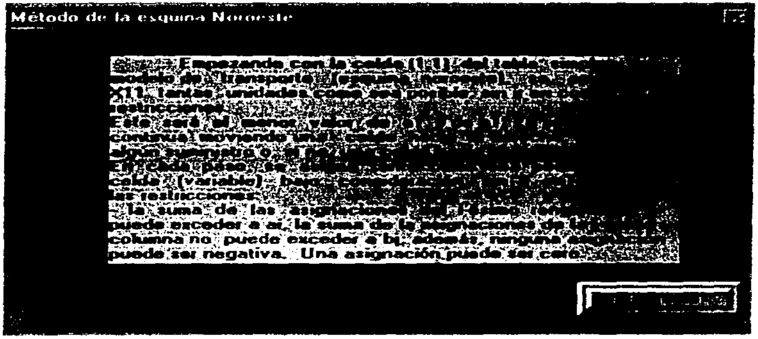
Características:



Métodos de aproximación:



Si elegimos el método de la esquina noroeste:



Si elegimos el método de Vogel:

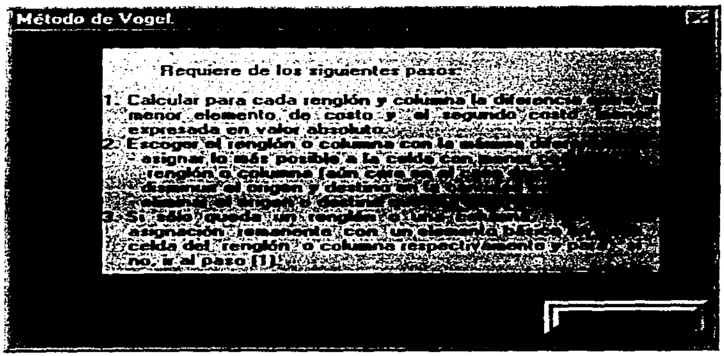
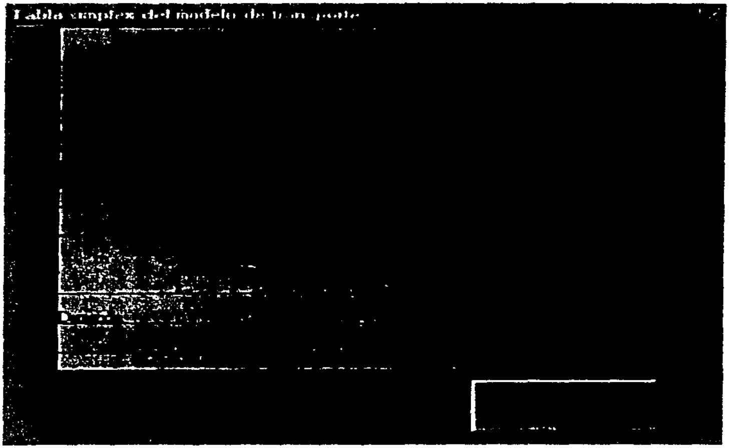
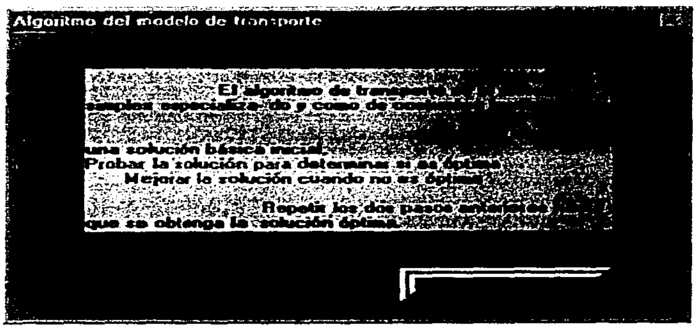


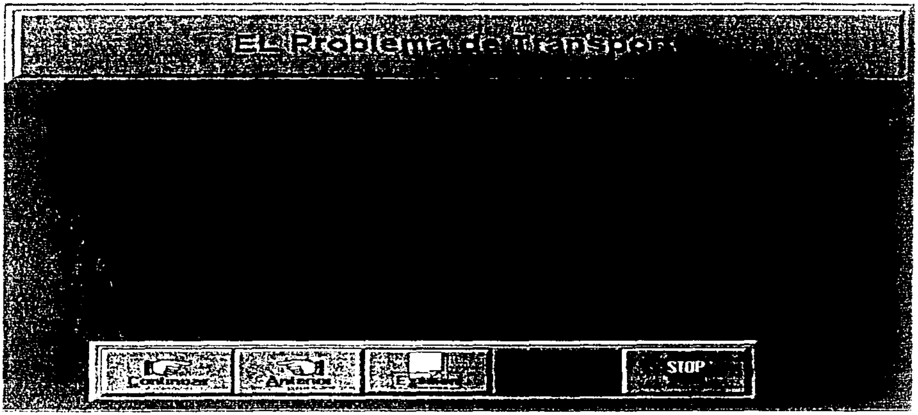
Tabla Simplex:

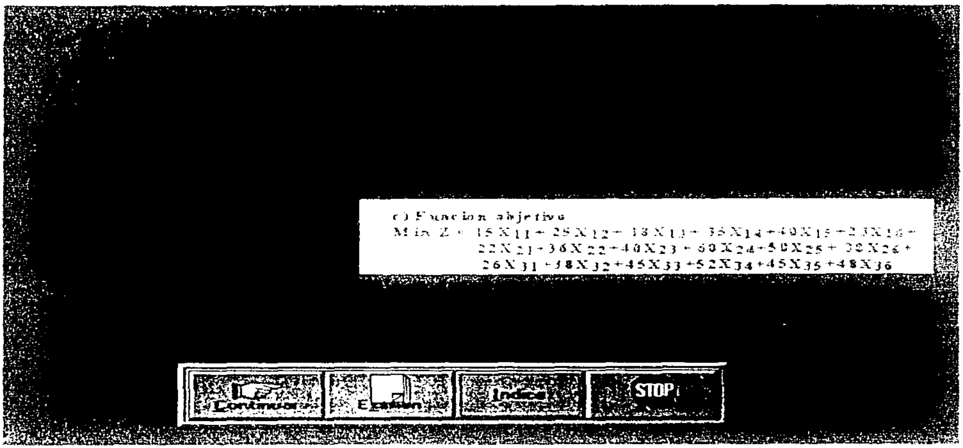


Algoritmo:



Las últimas dos opciones que nos aparecen en el tema de "El problema de Transporte" son los ejercicios y el examen; el ejercicio está resuelto y consta de dos ventanas. [illegible] es el planteamiento del problema [illegible].





El examen costa de cuatro ventanas, una vez entrando al examen no se puede consultar la teoría ni los ejercicios, no se puede detener tampoco y salirse en cualquier momento, hay que completarlo totalmente, el ejemplo de una de las preguntas de examen sería:

Fórmese la tabla de transporte para el siguiente problema, y úsese después el algoritmo de transporte para determinar un programa óptimo de producción.

Una compania de semiconductores produce un módulo específico de estado sólido, el cual se suministra a cuatro diferentes fabricantes de televisores. El módulo puede producirse en cualquiera de las tres plantas de la compania, aunque los costos varían debido a la diferente eficiencia de producción de cada una. Específicamente, cuesta $1.10 producir un módulo para la planta A, $0.95 en la planta B y $1.03 en la planta C. Las capacidades mensuales de producción de las plantas son 7500, 10000, y 8100 módulos, respectivamente. Las estimaciones de venta predicen una demanda mensual de 4200, 8300, 6300 y 2700 módulos, para los fabricantes de televisores I, II, III y IV, respectivamente. Si los costos de envío (en dólares) para embarcar un módulo de una de las fábricas a un fabricante se muestran a continuación, encuéntrese la cédula de producción que cubra todas las necesidades a un costo mínimo total.

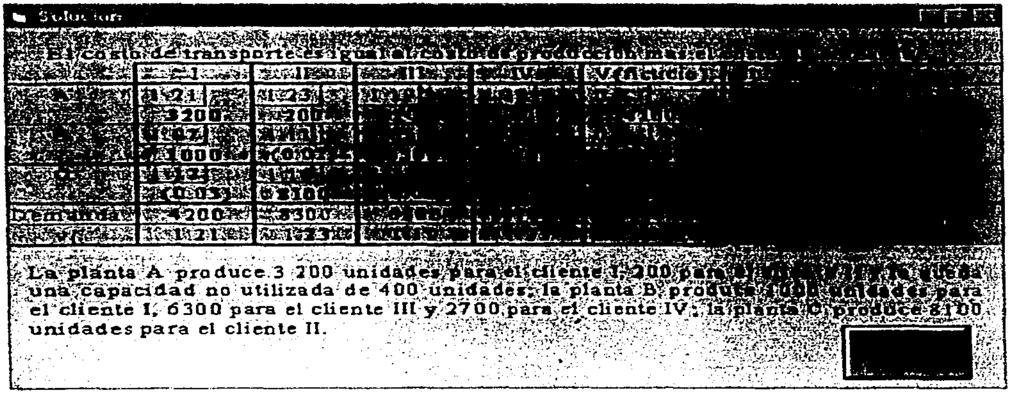
	I	II	III	IV
A	0.11	0.13	0.09	0.19
B	0.12	0.16	0.10	0.14
C	0.14	0.13	0.12	0.15

Ver las opciones:

Opcion A Opcion B Opcion C

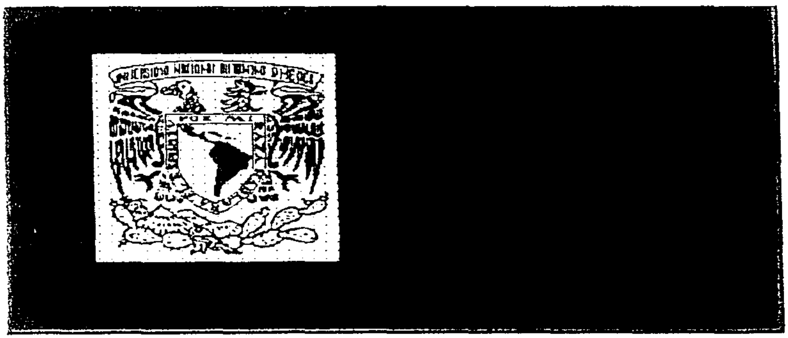
Se debe resolver el examen en un papel aparte, ya que se llega a una respuesta se observan las posibles opciones oprimiendo cualquiera de ellas, la calificación que se obtiene por esta respuesta aparecerá en el cuadro correspondiente

Si quisiéramos ver la opción de solución B aparecería la siguiente pantalla:



De esta manera se ha ejemplificado un recorrido por el tema de "El problema de Transporte" del módulo de Algoritmos Especiales. Los otros dos temas, programación lineal y redes, funcionan de la misma manera.

Por último para salir del sistema desde cualquier ventana de oprime el botón STOP y se da por terminada la sesión con la siguiente ventana:



Bibliografía

1. Fuentes, Zenón Arturo
Cuadernos de Planeación y Sistemas No. 1
Metodología de la planeación normativa
Seminario y Taller de Metodología
Departamento de Ingeniería de Sistemas, División de Estudios de Posgrado
Facultad de Ingeniería, UNAM. Abril 1991

2. Fuentes, Zenón Arturo
Cuadernos de Planeación y Sistemas No. 3
El pensamiento sistémico, caracterización y principales corrientes
Seminario y Taller de Metodología
Departamento de Ingeniería de Sistemas, División de Estudios de Posgrado
Facultad de Ingeniería, UNAM. Abril 1991

3. Fuentes, Zenón Arturo
Cuadernos de Planeación y Sistemas No. 4
El enfoque de sistemas en la solución de problemas, la elaboración del modelo conceptual
Seminario y Taller de Metodología
Departamento de Ingeniería de Sistemas, División de Estudios de Posgrado
Facultad de Ingeniería, UNAM. Abril 1991

4. Fuentes, Zenón Arturo
Cuadernos de Planeación y Sistemas No. 6
El problema general de la planeación, pautas para un enfoque contingente
Seminario y Taller de Metodología
Departamento de Ingeniería de Sistemas, División de Estudios de Posgrado
Facultad de Ingeniería, UNAM. Abril 1991

5. Bronson, Richard
Investigación de Operaciones
Serie Schaum, McGraw-Hill 1983

6. Hiller Frederick s., Lieberman, Gerald J.
Introducción a la Investigación de Operaciones
McGraw-Hill. 4a. edición en español 1989.

7. Prawda, Juan Willenberg
Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones
Tomo I. Editorial Limusa. Primera edición 1980

8. De Buen Lozano Odón
Apuntes de Ingeniería de Sistemas
Facultad de Ingeniería U.N.A.M.

9. Thierauf, Robert J.
Toma de decisiones por medio de investigación de operaciones
Editorial Limusa. MEXICO, 1995

10. Shari Lawrence Pfleeger
Software Engineering
Maxwell Macmillan International Editors, Canadá 1991.

11. Barbee Teasley Mynatt
Software engineering with student Project guidance.
Prentice Hall, New Jersey 1990

12. Bazara Mokhtars
Investigación de Operaciones
Limusa, México 1981

13. Zane Thomas, Arnson Robert Waite Mitchell
Visual Basic how-to
Waite Group Press. 2a ed. California 1993

14. Strang, Gilbert
Algebra lineal y sus aplicaciones
Sistemas técnicos de educación, 1986

15. Kuhn, T
La Estructura de las Revoluciones Científicas
México, Fondo de Cultura Económica, 5ª reeimpresión, 1982

16. Luenberger David G.
Optimization by vector space methods
John Wiley & Sons, Inc., N.Y. 1969

17. Luenberger David G.
Programacion lineal y no lineal
Addison-Wesley, Mexico, 1989

18. Laredo González Pilar Felipe
Introduccion a la teoría y aplicaciones de las redes.
Pueblo y educación, Cuba, 1982

19. Rodríguez Betancourt Ramón
Métodos económico-matemáticos aplicados al transporte, tomo I
Pueblo y educación, Cuba, 1984