UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TEMAS FUNDAMENTALES DE LAS MATEMÁTICAS FINANCIERAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
ACTUARIO

P R E S E N T A :

LUIS ANTONIO GODÍNEZ MONTAÑO

DIRECTOR DE TESIS:
ACT. HUMBERTO RAMOS SÁNCHEZ

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

MÉXICO, D.F. MARZO 1997

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVPNOMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"Temas fundamentales de las Matemáticas Financieras"

realizado por Luis Antonio Godínez Montaño

con número de cuenta 8310538-2 **, pasante de la carrera de** Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Act. Humberto Ramos Sánchez.
Propietario	Act. Arturo Arias Archundia.
Propietario	Act. Héctor de la Rosa Elizalde
Suplente	Act.Ricardo Villegas Azcorra
Suplente	Mat.Juan Pablo Ornelas Van

Claudia Carrillo Q.
Consejo Departamental de Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar deseo dar las gracias a mis padres, por sembrar en mi el amor por el conocimiento y a mis maestros por darme su tiempo, al adiestrarme y estimularme para que adquiriera todos los conocimientos necesarios y así poder desarrollarme profesionalmente.

A mi esposa, por brindarme su amor, apoyo y confianza en todo momento para así poder tener seguridad y poder realizar todo lo que me proponía. A mi hija por darme la esperanza.

A mi director de tesis por su gran ayuda y paciencia.

A cada uno de mis amigos porque siempre estuvieron conmigo apoyándome.

II

ÍNDICE

CAPÍTULO 1. La teoría del interés

CAPÍTULO 2. Solución a problemas relacionados con el interés

CAPÍTULO 3. Anualidades elementales

CAPÍTULO 4. Anualidades más generales

INTRODUCCIÓN

En la actualidad se cuentan con pocas obras a nivel superior en las que se desarrollen la teoría del interés.

Esta obra pretende ser un material de consulta para estudiantes que requieran tener conocimientos acerca de las Matemáticas Financieras y servir para consolidar los temas vistos en los cursos, especialmente para la gente que cursa la carrera de Actuaría. Por su terminología el lector deberá tener conocimientos previos de los tecnicismos que se utilizan.

El presente trabajo se propone ayudar al lector a consolidar lo aprendido, desarrollando los temas básicos de la teoría del interés con fundamentos matemáticos. Se pretende introducir al lector de manera general para que tenga un panorama del material que cubre esta obra y ejemplos que ayudarán a entender mejor los temas.

En el Capítulo 1 se analizan las diversas formas cuantitativas del interés. Este capítulo incluye principios básicos esenciales; todos involucran la teoría del interés. El objetivo de los siguientes capítulos es elaborar y extender los principios básicos a transacciones financieras más complejas. Los principios básicos de la teoría del interés son relativamente pocos. En Capítulo 1, Las diversas medidas cuantitativas del interés serán analizadas. en el Capítulo 2 discutiremos principios generales para la solución de problemas de interés. El propósito de este capítulo es desarrollar un enfoque sistemático por medio del cual los principios básicos de Capítulo 1 pueden ser aplicados en transacciones financieras más complejas.

Con una comprensión cabal de los primeros dos capítulos es posible resolver casi cualquier problema de interés. Los capítulos sucesivos tienen dos propósitos principales:

1. Familiarizar al estudiante con tipos más complejos de transacciones financieras, que ocurre en la práctica, incluyendo definiciones de términos.
2. Proveer un análisis sistemático de estas transacciones financieras, que frecuentemente guiará a una manipulación más eficiente del problema sin recurrir a principios básicos.

Como resultado de simplificaciones, ocasionalmente, se derivarán otras fórmulas. Afortunadamente, la cantidad de fórmulas que el estudiante puede necesitar aprender de memoria será pequeña. Suponiendo que esto presente, una fuente común de dificultad para muchos estudiantes es difícil confiar ciegamente en fórmulas sin una comprensión de los principios básicos sobre los cuales las fórmulas están basadas. Para muchos es importante recurrir a principios básicos para comprender.

CAPÍTULO 1.

LA TEORÍA DE INTERÉS

1.1. El VALOR ACUMULADO Y LA FUNCIÓN MONTO

El Interés puede estar definido como, la cantidad que un prestatario paga a un prestamista, de capital, por su uso. Esta cantidad puede verse como una forma de alquiler que se paga al prestamista para compensar la pérdida de capital que tiene este mientras está prestado al prestatario. En teoría, interés y capital no tiene que estar expresado en función del mismo rubro. Por ejemplo, un granjero A presta un tractor a un granjero B para ser usado en la siembra y cosecha de trigo; B en recompensa da un porcentaje del trigo cosechado. En este ejemplo, el tractor es capital y la porción de trigo que B da a A es interés. Sin embargo, en las aplicaciones, tanto interés como el capital, están expresados en función de dinero. En la teoría de interés se usan diversos métodos para calcular éste.

Una transacción financiera común es la inversión de una cantidad de dinero para obtener un interés. Por ejemplo, un hombre puede invertir abriendo una cuenta de ahorros en un banco en cuyo caso el hombre es el que presta y el banco es el que pide prestado. La cantidad inicial de dinero invertido es llamado el principal (capital) y la cantidad total recibida después de que un período de tiempo ha transcurrido es llamado el valor acumulado.

La diferencia entre valor acumulado y el principal es la cantidad de interés, ganado durante el período de inversión.

Por el momento, suponga que dado el principal invertido, el valor acumulado puede estar determinado en cualquier punto del tiempo. Nosotros supondremos que ningún principal se añade o retira durante el período de inversión, es decir, que cualquier cambio en el fondo es debido estrictamente al efecto de interés. Sea t el período de tiempo de la inversión. En teoría, el tiempo puede estar medido en muchas unidades diferentes, por ejemplo, días, meses, décadas, etc. Es muy común, medir t en años, y esto estará supuesto a menos que se plantee de otra manera.

Considere la inversión de una unidad de principal. Podemos definir una función de acumulación, $a(t)$, que va al valor acumulado en un tiempo $t > 0$ de una inversión de principal igual a 1.

¿Qué propiedades tiene esta función que depende del tiempo? Primero, $a(0) = 1$, $a(t)$ es en general una función creciente. La disminución de a, en los valores de la función, para t creciente implicaría interés negativo. Aunque el interés negativo es posible, matemáticamente es irrelevante para la mayoría de las situaciones que encontraremos en la práctica. Valores constantes implicarían cero interés y por último $a(t)$ es una función continua. En general el principal no será 1 pero tomará valores $k > 0$. Ahora definimos una función monto, $A(t)$, Que va al valor acumulado en un tiempo $t > 0$ de un principal k. Entonces tenemos:

$$A(t) = k\,a(t) \qquad (1.1)$$

y

$$A(0) = k$$

La segunda y tercera propiedades de $a(t)$ descritas más arriba también valdrán para $A(t)$. Podemos denotar la cantidad de interés ganado durante el *t-ésimo* año de la fecha de inversión por I_t Entonces:

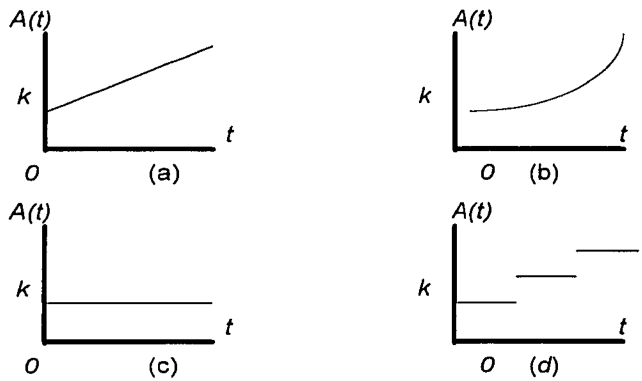
$$I_t = A(t) - A(t-1) \text{ para } t \geq 1 \qquad (1.2)$$

Deben notar que I_t involucra el efecto de interés sobre un período de tiempo, mientras que $A(t)$ es una cantidad en un momento del tiempo.

La función de acumulación es un caso especial de la función monto cuando $k = 1$. En general, la función de acumulación y la función monto pueden ser utilizadas recíprocamente.

La figura 1.1 muestra cuatro ejemplos de la función monto. La figura (a) es una función monto lineal la pendiente nos indica, que tan alto es el interés,. La figura (b) es no lineal, en este caso es una curva exponencial. La figura (c) es una función monto constante, es decir, la pendiente es cero, esta figura representa una función monto en la que el principal no acumula interés. La figura (*d*) es un monto en el que el interés no está acumulando continuamente pero si en segmentos finitos sin interés acumulado, entre fecha de pago de interés, es decir el interés es pagado al final del intervalo.

FIGURA 1.1



Estas gráficas nos representan diversos comportamientos de interés, pero no son las única formas en que éste se comporta. La gráfica (a), (c) y (d) nos representa interés simple y la figura (b), interés compuesto, En la siguiente sección, se desarrollarán diversas formas de interés en la función de acumulación. En la práctica, bastarán dos funciones de acumulación particular para la mayoría de las situaciones que surjan (interés simple y compuesto). Sin embargo, el estudiante debe entender las propiedades de una función de acumulación general como se define en esta sección y poder trabajar con ella.

1.2 LA TASA EFECTIVA DE INTERÉS

La primera forma de interés es la tasa efectiva de interés y está denotado por i, una definición es:

La tasa efectiva de interés, "i", es la cantidad de dinero que por unidad invertida al comienzo del período ganará el principal durante el transcurso de éste, y es pagada al final del período. La tasa efectiva de interés es con frecuencia expresada como un porcentaje, por ejemplo, $i = 7\%$.

Observe que en términos de la función de acumulación, esta definición es equivalente a decir que:

$$i = a(1) - a(0)$$

o

$$a(1) = 1+i \qquad (1.3)$$

Para $k=1$ y $t = 1$

Varias observaciones acerca de ésta definición son relevantes:

1. El uso de la palabra "efectiva" está reservado para tasas anuales de interés en las que el interés es pagado una vez al año. el caso de interés pagado más de una vez al año estarán consideradas en la Sección 1.7. cuando se vea tasas "nominales" de interés

2. El concepto de la tasa efectiva de interés como un porcentaje no es inconsistente con la definición anterior, que plantea que es una cantidad de dinero, *7%* puede verse como *.07* por unidad de principal.

3. La cantidad de principal es constante el resto del año, es decir, no se añade ni se retira principal durante el año.

4. La definición no está restringida para intervalo de un año; esta definición puede ser generalizada a otros intervalos de tiempo, como veremos en la sección 1.7.

5. La tasa efectiva de interés es una cantidad, la cual, es pagada al cabo del año. En la Sección 1.6 veremos otra situación donde el interés es pagado al comienzo del año.

La tasa efectiva de interés puede estar definida en términos de la función monto como sigue:

$$i = \frac{(1+i)-1}{1} = \frac{a(1)-a(0)}{a(0)} = \frac{A(1)-A(0)}{A(0)} = \frac{I_1}{A(0)} \qquad (1.4a)$$

Así, una definición alternativa es:

La tasa efectiva de interés, i, es la razón entre la cantidad de interés ganado durante el año y la cantidad de principal invirtió en el comienzo del año.

Las cinco observaciones que se hicieron anteriormente también se aplican a esta definición alternativa.

Las tasas efectivas de interés puede ser calculada para algún período de año. Si i_n es la tasa efectiva de interés durante el *n-ésimo* año de la fecha de inversión. Entonces tenemos:

$$i_n = \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n-1)} = \frac{I_1}{A(n-1)} \qquad \text{para } n \geq 1. \qquad (1.4b)$$

Dentro de esta estructura, la "i" en la fórmula (1.4a) podría estar marcada como "i_n" cuando n = 1.

Aunque la fórmula (1.4b) permita que diversas tasas efectivas de interés, i, sean diferentes para diferente n, lo que se demostrará en la Sección, 1.4 para una función de acumulación muy importante, la tasa efectiva de interés, i_n, es constante sobre algún período de año, por ejemplo, para todos los $n \geq 1$.

1.3 INTERÉS SIMPLE

En secciones anteriores vimos que $a(0) = 1$ y $a(1) = 1+i$. Hay un número infinito de funciones de acumulación que pasan por estos dos puntos, esto será discutido en la Sección 1.4.

Considere la inversión de 1, la cantidad de interés ganado durante cada año es constante. El valor acumulado de 1 al cabo del primer año es $1 + i$; Al cabo del segundo año es $1 + 2i$, etc. Así, en general, tenemos una función de acumulación lineal.

$$a(t) = 1 + it \qquad \text{para } t \geq 0 \qquad (1.5)$$

El interés acumulado con este patrón es llamado interés simple.

La función de acumulación para interés simple se ha definido sólo para valores enteros de t. Sin embargo, es natural extender la definición también para valorar no enteros de t. Éste es equivalente a asignar el interés proporcionalmente sobre cualquier fracción de un año. Si éste es el caso, entonces la función monto puede ser representada en la Figura 1.1 (a). Si el interés estuviera acumulado sólo para años completos sin considerar años fraccionales, entonces la función monto puede estar representado por la figura 1.1 (d). A menos que se diga lo contrario, estará supuesto que el interés es acotado sobre períodos fraccionales.

Sobre períodos fraccionales usamos el interés simple. Sin embargo, en la práctica, diferentes métodos han surgido cuando el período de tiempo involucrado es un número de días. En el primer método se utiliza el número exacto de días en el numerador y 365 días en el denominador. El Interés basado en esto es llamado interés simple exacto. En el segundo método se utiliza aproximadamente el número de los días, asumiendo 30 días mensuales, en el numerador y utilizando 360 días en el denominador. El interés así calculado es denominado interés simple ordinario. En el tercer método se utiliza el número exacto de días en el numerador y 360 días en el denominador a este llamaremos método de un tercio. Una cuarta posibilidad sería utilizar el número aproximado de días en el numerador y utilizar 365 siempre en el denominador, este método es poco utilizado en la práctica.

Puede demostrarse que una tasa constante de interés simple no implica una tasa efectiva constante de interés para el *n-ésimo* año, como se define en la Sección 1.2. Entonces, tenemos:

$$i_n = \frac{a(n)-a(n-1)}{a(n-1)} = \frac{[1+in]-[1+i\,(n-1)]}{1+i\,(n-1)} = \frac{i}{1+i\,(n-1)}$$

Que es función decreciente de n. Así, una tasa constante de interés simple implica una tasa efectiva decreciente de interés.

Ejemplo 1.1. Encuentre el valor acumulado de $300 invertidos por cinco años si la tasa de interés simple es de 2% anual.

La respuesta es:

$$300[1+(.02)(5)] = \$330.$$

Observe que la cantidad de interés ganado es \$330 - \$300 = \$30. Esto puede obtenerse también como 300(.02)(5). En diferente Notación, esto se convierte en un resultado elemental de escuela secundaria,

$$I = Prt,$$

lo cual plantea que la cantidad de interés es igual al producto de la cantidad de principal, la tasa de interés, y el período de tiempo.

1.4 INTERÉS COMPUESTO

El interés simple tiene la propiedad siguiente: el interés no se reinvierte para ganar interés adicional. Por ejemplo, si un hombre invierte \$100 por dos años al 4% de interés simple, el recibirá \$4 al cabo de cada uno de los dos años. Sin embargo, en realidad, por año tiene \$104 que él pudo haber invertido al comienzo del nuevo año. Sería una ventaja invertir Los \$104 en 4% ya que entonces recibiría \$4.16 de interés por el segundo año en lugar de \$4.

La teoría de interés compuesto manipula este problema asumiendo que el interés ganado es reinvertido automáticamente. La palabra "compuesto" se refiere al proceso de reinversión de interés para ganar interés adicional.

Con interés compuesto la inversión total de interés y principal, hasta la fecha, se mantuvo invertido en todo momento. Ahora es necesario encontrar la función de acumulación para interés compuesto. Considere la inversión de 1 que acumula $1+i$ al final los primeros años. Este total de $1+i$ puede estar considerado como principal al comienzo del segundo año y ganará interés de $i(1+i)$ durante el segundo año. El total al cabo del segundo año es $(1+i)+i(1+i)=(1+i)^2$. Igualmente, el total de $(1+i)^2$ puede estar considerado al comienzo como principal del tercer año y ganará interés de $i(1+i)^2$ durante el tercer año. El total, al cabo del tercer año es $(1+i)^2 + i(1+i)^2=(1+i)^3$. Al continuar este proceso, obtenemos:

$$a(t)=(1+i)^t \qquad \text{para } t \geq 0. \tag{1.6}$$

La función de acumulación para interés compuesto está definido sólo para valores enteros de t. Sin embargo, es natural suponer que ese interés es acumulado continuamente y, por lo tanto, es necesario extender la definición para valores de t no enteros. Estará supuesto que el interés está acumulado sobre períodos fraccionales. Así las funciones monto es exponencial y pueden estar representada por la Figura 1.1 (b).

Tenemos dos puntos de vista: El interés pagado al cabo del año y el interés acumulado continuamente. A simple vista, las dos formas son contradictorias. Sin embargo, no hay inconsistencia el interés está acumulado sobre años fraccionados así como años completos. Cuando éste es el caso, los valores acumulados en cualquier punto del tiempo son iguales, independientemente de la perspectiva.

Puede demostrarse que una tasa constante de interés compuesto implica una tasa efectiva constante de interés y, más aún, que las dos son iguales. Sea i la tasa de interés compuesto y sea i_n la fuerza de interés en el *n-ésimo* año, como se define en la Sección 1.3. Entonces, tenemos:

$$i_n = \frac{a(n)-a(n-1)}{a(n-1)} = \frac{(1+i)^n - (1+i)^{n-1}}{(1+i)^{n-1}} = \frac{(1+i)-1}{1} = i$$

Así, aunque se definió de diferente forma, una tasa de interés compuesto y una tasa efectiva de interés son idénticas.

El resultado derivado puede ser comparado con el resultado obtenido en la Sección 1.3; es decir, que una tasa constante de interés simple implica un tasa decreciente de interés efectivo. Este resultado debería ser intuitivamente claro, ya que el interés simple es progresivamente menos favorable para el inversionista en la medida en que aumenta el período de inversión.

El interés compuesto y el simple producen el mismo resultado sobre un año o un período. Sobre un período más largo de tiempo, el interés compuesto produce un mayor valor acumulado que el interés simple; mientras que, no ocurre esto sobre un período más corto. Las pruebas de los resultados se deja como ejercicio.

El interés compuesto es utilizado para transacciones financieras en período de un año o más y es frecuente utilizado para transacciones de término más cortas. El interés simple es utilizado ocasionalmente para abreviar transacciones de término y como una aproximación al interés compuesto sobre períodos fraccionales. Este uso de interés simple estará examinado con más detalle en la Sección 2.2. En adelante, Nosotros Utilizaremos interés compuesto en lugar de interés simple.

Ejemplo 1.2. Resolver el ejemplo 1.1 utilizando interés compuesto en lugar de interés simple.

La respuesta es:

$$300\,(\,1.02\,)^5 = \$331.22$$

Esta respuesta contrasta con la respuesta de \$330 utilizando interés simple. El extra \$1.22 es el resultado de interés compuesto.

En este ejemplo, la respuesta numérica puede ser obtenida directamente por multiplicación. En general, si el exponente es grande o entero, este método es poco práctico. Diversos métodos para obtener respuesta numérica a tales problemas se discutirán en la Sección 2.1. Sin embargo, hasta estos métodos, se expresarán en forma exponencial pues es poco práctico obtener respuestas numéricas directamente.

1.5 VALOR PRESENTE

Hemos visto que una inversión de 1 acumulará $1+i$ al cabo de un año. dicho término con frecuencia es llamado un factor de acumulación, ya que acumula el valor de una inversión en el comienzo de un año a su valor al final del año.

Es frecuente que una persona necesite determinar cuanto tiene que invertir inicialmente de modo que él tenga 1 al cabo de un año. La respuesta es $(1+i)^{-1}$, ya que esta cantidad acumulará 1 al cabo de un año. Ahora definimos un nuevo símbolo v, tal que:

$$v = \frac{1}{1+i} \tag{1.7}$$

El término v es con frecuencia llamado factor de descuento, ya que "descuenta" el valor de una inversión al cabo del año a su valor en el comienzo del año. Podemos generalizar el resultado anterior a períodos de tiempo diferentes a un año, es decir, si queremos encontrar la cantidad que un hombre tiene que invertir para acumular una cantidad de 1 al cabo de t años. La respuesta es $a^{-1}(t)$, la recíproca de la función de acumulación, el valor de la cantidad al cabo de t años es $a^{-1}(t)\, a(t) = 1$. Llamaremos $a^{-1}(t)$ la función de descuento. Así, obtenemos los siguientes resultados para $t \geq 0$:

Interés simple: $$a^{-1}(t) \quad \frac{1}{1+it} \tag{1.8}$$

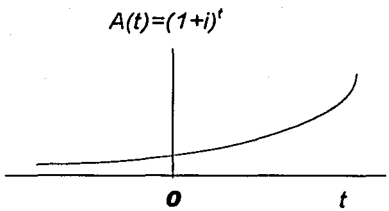
Interés compuesto: $$a^{-1}(t) \quad \frac{1}{(1+i)^t} = v^t \qquad (1.9)$$

Descontar y acumular son procesos recíprocos. El término $(1+i)^t$ es el valor acumulado de 1 al cabo de t años y v^t es el valor presente (o valor de descuento) de 1 pagaderos al cabo de t años.

El término "valor acumulado" como se define anteriormente parece referir a pagos hechos en el pasado, mientras que el término "valor presente" parece referir estrictamente a pagos hechos en el futuro. Este es el sentido en que utilizaremos el término. Algunos escritores utilizan "valor acumulado" para referir ya sea pagos pasado o futuros.

Es interesante relacionar v con la función de acumulación para interés compuesto. Es claro que los valores de v extiende la definición de la función de acumulación a valores negativos de t. Así, la función de acumulación para interés compuesto tiene sentido para todos los valores de t. La gráfica de esta función se muestra en la Figura 1.2

FIGURA 1.2



Ejemplo 1.3. Encuentre la cantidad que se tiene que invertir a una tasa de interés simple de 6% anual para acumular $2000 al cabo de dos años.

La respuesta es:

$$\frac{2000}{1+(.06)(2)} = \frac{2000}{1.12} = \$1785.71$$

Ejemplo 1.4. La solución del Ejemplo 1.3 Utilizando interés Compuesto en lugar de interés simple.

La respuesta es:

$$2000v = \frac{2000}{(1.06)2} = \$\ 1779.99$$

Razonamiento general. El estudiante deberá justificar las cantidades relativas de las respuestas a los ejemplos 1.3 y 1.4.

1.6. TASA EFECTIVA DE DESCUENTO

En la Sección 1.3 la tasa efectiva de interés fue definida como una cantidad de interés pagado al cabo del año. En esta sección definimos la tasa efectiva de descuento, denotamos por d, como una cantidad de interés pagada al comienzo del año.

Un ejemplo numérico ayudará aclarar esta diferencia. Si **A** va a un banco y retira \$1000 por un año a una tasa efectiva de interés de 7% entonces el banco le dará \$1000. Al cabo del año, **A** reembolsará al banco el préstamo original de \$1000, más interés de \$70, o un total de \$1070.

Sin embargo, si **A** retira \$1000 por un año en una tasa efectiva de descuento de 7%, entonces el banco reunirá su interés de 7% por adelantado y dará a **A** sólo \$930. Al cabo del año, **A** reembolsará \$1000.

Así, está claro que una tasa efectiva de interés de 7% no es la misma que una tasa efectiva de descuento de 7% En el ejemplo anterior, **A** pagó \$70 de interés en ambos casos. Sin embargo, en el caso de interés pagadero al final del año, utilizó \$1000 durante el año; mientras que, en el caso de interés pagó en el comienzo del año, tuvo el uso de sólo \$930.

Viendo el ejemplo anterior de una manera diferente, en el caso de una tasa efectiva de interés, el 7% es tomado como un porcentaje del total en el comienzo del año; mientras que, en el caso de una tasa efectiva de descuento, el 7% es tomado como un porcentaje del total al cabo del año. Así, podemos formular una definición precisa de tasa efectiva de descuento como sigue:

La tasa efectiva de descuento *d*, es la razón del monto de interés (llamada "monto de descuento" o "descuento") ganado durante el año sobre la cantidad invertida al cabo del año.

Esta definición es análoga a la definición alternativa de la tasa efectiva de interés dada en la sección 1.2.

Son relevantes varias observaciones acerca de la definición anterior:

1. Las observaciones 1,2,3, y 4 en la sección 1.2. En la definición de la tasa efectiva de interés también se aplica para la definición de la tasa efectiva de descuento.

2. La frase "monto de descuento" se utiliza en lugar de "monto de interés" en situaciones donde se involucra tasas de descuento.

3. La definición no utiliza la palabra "principal", ya que la definición de principal se refiere al monto invertido en al comienzo del año y no al cabo del año.

4. Las diferencias entre la tasa efectiva de interés y la tasa efectiva de descuento es que el interés se pagó al final del año conforme al capital en el comienzo del año y el descuento se pagó al comienzo del año conforme al capital al cabo del año

La tasa efectiva de descuento puede estar calculada sobre cualquier período, es decir si d_n es la tasa efectiva de descuento durante el *n-ésimo* año con respecto a la fecha de inversión, una fórmula análoga a la fórmula (1.4b) es:

$$d_n = \frac{A(n) - A(n-l)}{A(n)} = \frac{I_n}{A(n)} \qquad para\ n \geq 1 \qquad (1.10)$$

Como se mencionó anteriormente d_n es el "monto de descuento". En la práctica, d_n puede variar de año en año. Sin embargo, para cuestiones teóricas se maneja tasa constante de interés compuesto. La prueba de que una tasa constante del descuento compuesto implica una tasa efectiva constante de descuento se deja como un ejercicio para el estudiante. Estas situaciones se refieren a descuento compuesto. Un término análogo a "interés compuesto."

El ejemplo, antes discutido en esta sección, muestra una tasa efectiva de interés del 7% no es la misma que una tasa efectiva de descuento del 7%. Sin embargo, hay una relación entre tasa efectiva de interés y tasa efectiva de descuento.

Si queremos tener una equivalencia entre i y d es necesario encontrar una relación tales que sean equivalentes. Dos tasas de interés o descuento son equivalente si dado un principal invertido para el mismo lapso a cada una de las tasas asigna el mismo valor acumulado. Como veremos en la Sección 1.8, esta definición "equivalente" puede extenderse a tasas nominales de interés y descuento así como tasas efectivas.

Suponga que un hombre retira 1 a una tasa efectiva de descuento d. Entonces en efecto, el principal es $1-d$ y el monto de interés (descuento) es d. Sin embargo, de la definición básica de i la parte del monto de interés (descuento) de la cantidad de principal, se obtiene:

$$i = \frac{d}{1-d} \qquad (1.11)$$

Esta fórmula expresa i en función de d.

Por álgebra simple, es posible expresar d en función de i.

$$i = \frac{d}{1-d}$$

$$i - id = d$$

$$d(1+i)=i$$

$$d = \frac{i}{1+i} \qquad (1.12a)$$

La fórmula (1.12a) es una reafirmación de la definición de la tasa efectiva de descuento, nos indica que podemos ver a la tasa efectiva de descuento como una tasa efectiva de interés, es decir, como la parte de la cantidad de interés (descuento) que 1 ganará durante el año de la cantidad invertida al cabo del año.

Hay una relación entre d, tasa de descuento, y v, valor presente. que se deriva de (1.12a); y es:

$$d = iv \tag{1.12b}$$

La interpretación de esta relación es interesante, porque la cantidad de interés pagada en el comienzo del año es d y La cantidad de interés pagada al cabo del año es i. Por lo tanto, si i se trae a valor presente, obtenemos d.

Hay otra relación entre d y v que se usa con frecuencia ésta es:

$$d = \frac{i}{1+i}$$

$$= \frac{1+i-1}{1+i}$$

$$= \frac{1+i}{1+i} - \frac{1}{1+i}$$

$$= 1 - v \tag{1.13}$$

La que también tiene una interpretación, pues escrito en la forma $v = 1 - d$, es inmediato que ambos lados de la ecuación representan el valor presente de 1 a ser pagado al cabo del año.

Hay otra relación entre i y d que es significativa:

$$d = iv$$
$$= i(1-d)$$
$$= i - id$$

Así,

$$i - d = id. \tag{1.14}$$

Esta relación también tiene una interesante interpretación. Un hombre puede ya sea retirar 1 y reembolsa $1 + i$ en el año o pueden pedir prestado $1\text{-}d$ y reembolsar 1 al final del año. La expresión $i\text{-}d$ es la diferencia en la cantidad de interés pagado.

Esta diferencia surge debido a que el principal prestado difiere por d. El interés, de la cantidad d, por un año a la tasa i, es id.

Resumiendo: la tasa efectiva de interés, o descuento compuesto, supone interés compuesto. Es posible definir descuento simple de una manera análoga a la definición de interés simple. Considere una situación en que la cantidad de descuento ganada durante cada año es constante. Entonces, el principal que otorgará un valor acumulado de 1 al cabo del año t es:

$$a^{-1}(t) = 1 - dt. \tag{1.15}$$

Esto contrasta con el descuento compuesto, en cuyo caso el valor presente es:

$$a^{-1}(t) = v^t = (1 - d)^t \tag{1.16}$$

Debemos notar que las fórmulas (1.11), (1.12), (1.13), y (1.14), suponen tasas efectivas de interés y descuento y no son válidas para tasas de interés y descuento simples a menos que el período de inversión ocurra exactamente en un año los siguientes se dejan como ejercicios:

1. Mientras que una tasa constante de interés simple implica una tasa efectiva decreciente de interés, una tasa constante de descuento simple implica una tasa efectiva creciente de descuento.
2. Descuento simple y compuesto producen el mismo resultado sobre un período o año, sobre un período más largo de tiempo, el descuento simple produce un valor

presente más pequeño que el descuento compuesto; Mientras que, ocurre lo contrario sobre un período más corto. Que fue el caso con interés simple, descuento simple se utiliza sólo para transacciones en períodos cortos y como una aproximación para descuento compuesto sobre períodos fraccionales.

La palabra "descuento" lamentablemente se utiliza en dos diferentes contextos con diversos significados. Se utiliza en conexión con valor presente (factor de descuento, función de descuento, descontando, valor descontado) y en conexión con interés pagadero en el comienzo del año (tasa efectiva de descuento, monto de descuento, descuento compuesto, descuento simple). El estudiante deberá ser cuidadoso en utilizar el término "descuento" para mantener el significado muy claro. los siguientes ejemplos ilustran el uso de tasas de descuento.

El ejemplo 1.5. Resolver el Ejemplo 1.3. Utilizando descuento simple en lugar de interés simple.

La respuesta es:

$$2000[1 - (.06)(2)] = \$ 1760$$

El ejemplo 1.6. Resolver el Ejemplo 1.3. Utilizar descuento compuesto en lugar de interés compuesto.

La respuesta es:

$$2000 (.94)^2 = \$ 1767.2$$

Forme un razonamiento general, el estudiante debe justificar las magnitudes relativas de las respuestas de los Ejemplos 1.5 y 1.6.

1.7. TASAS NOMINALES DE INTERÉS Y DESCUENTO

En la Sección 1.2 y 1.6 discutimos tasas efectivas de interés y descuento El término "efectivo" es utilizado para tasas anuales de interés y descuento en donde el interés está pagado una vez al año, ya sea al cabo o en el comienzo de él, según sea el caso. En esta sección, consideramos situaciones en que el interés es pagado varias veces al año. La tasa de interés y descuento en este caso es llamada "nominal".

Algunas personas encuentran tales situaciones en la práctica. Por ejemplo una Unión de Crédito A, cobra 7% de interés efectivo; Ahorros y Préstamo B, cobra 6.75% trimestralmente de interés compuesto; Mientras Depósitos C, cobra 6.5 % pagado por adelantado y convertible mensualmente, la mayoría de las personas probablemente no son capaces de hacer una comparación válida entre ellas.

Unión de Crédito A, está cobrando unas tasas efectivas real de interés, que ya fue discutido. Sin embargo, Ahorros y Préstamo B, está cobrando lo que llamamos una tasa nominal de interés, y depósitos C, está cobrando lo que llamamos una tasa nominal de descuento.

Diversos términos se utilizan en la práctica para describir situaciones en las que el interés es pagado varias veces al año. Entre estos están "pagaderos", "compuesto", y "convertible", como en "pagadero trimestralmente", "compuesto semianual", y "mensualmente convertible". La frecuencia con que el interés es pagado y reinvertido para ganar interés adicional es llamado el período de conversión de interés.

El propósito de esta sección es definir tasas nominales de interés y descuento. y derivar un método sistemático para encontrar tasas efectivas y nominales de interés y descuento que sean equivalentes. La definición de "equivalente" fue dada en la Sección 1.6.

El símbolo para la tasas nominal de interés pagadera m veces por año es: $i^{(m)}$, significa una tasa anual pagadera *m* veces, es decir, la tasa de interés es $i^{(m)}/m$ por cada *m-ésimo* de año y no $i^{(m)}$. Por ejemplo una tasa nominal de 4% convertible trimestralmente no significa una tasa de interés de 4% por trimestre sino, una tasa de interés de 1% por trimestre. En realidad, podemos decir que la tasas nominal de interés de $i^{(m)}$ anual es idéntica a una tasa efectiva de interés $i^{(m)}/m$ *por m-ésimo* de año. La palabra "efectiva" requiere una ligera generalización de períodos de tiempo diferentes a un año, que fue discutida en la observación 4 en la definición de "tasa efectiva de interés" en la Sección 1.2.

La tasa nominal de interés, $i^{(m)}$, es una medida de interés pagado al cabo de *m* períodos de un año casi de la misma manera como fue una medida de interés pagadero al cabo del año. Por un argumento similar se ha utilizado al desarrollar la función de acumulación para interés compuesto, es posible desarrollar una relación entre $i^{(m)}$ e i tal que sean equivalentes.

Considere la inversión de 1 por un año en una tasa nominal de interés $i^{(m)}$. Durante el primer *m-ésimo* de año el total inicial es 1 y la cantidad de interés es $(i^{(m)}/m)1$ haciendo un total al cabo del primer *m-ésimo* del año tenemos $1+(i^{(m)}/m)$. Durante el segundo *m-ésimo* de año, el total inicial es $1+(i^{(m)}/m)$, y la cantidad de interés es $(i^{(m)}/m)(1+(i^{(m)}/m))$, haciendo un total al cabo del segundo *m-ésimo* del año de $(1+i^{(m)}/m) + (i^{(m)}/m)(1+i^{(m)}/m) = (1+i^{(m)}/m)^2$;. el proceso se continúa al final del año, siendo el total $(1+i^{(m)}/m)^m$. Sin embargo, al cabo del año se debe tener también $1+i$. Así,

$$1+i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m \qquad (1.17\ a)$$

Lo cuál da:

$$i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1 \qquad (1.17b)$$

y

$$i^{(m)} = m[(1+i)^{1/m} - 1] \qquad (1.17c)$$

La Figura 1.3 ilustra los argumento anteriores.

FIGURA 1.3

Tiempo	0	$\frac{1}{m}$	$\frac{2}{m}$ ...	$\frac{m-1}{m}$	$\frac{m}{m}$
Interés		$\frac{i^{(m)}}{m} 1$	$\frac{i^{(m)}}{m}(1+\frac{i^{(m)}}{m})$ ...	$\frac{i^{(m)}}{m}(1+\frac{i^{(m)}}{m})^{m-2}$	$\frac{i^{(m)}}{m}(1+\frac{i^{(m)}}{m})^{m-1}$
Total	1	$1+\frac{i^{(m)}}{m}$	$(1+\frac{i^{(m)}}{m})^2$ ...	$(1+\frac{i^{(m)}}{m})^{m-1}$	$(1+\frac{i^{(m)}}{m})^m = 1+i$

Las flechas diagonales hacia la derecho puede interpretarse como signos más y la flecha hacia abajo como signos de igual.

El símbolo para tasa nominal de descuento pagadera *m* veces por año es $d^{(m)}$. Por tasa nominal de descuento, $d^{(m)}$, entendemos la tasa anual pagadera *m* veces en el año, es decir, la tasa efectiva de descuento es $d^{(m)}/m$ por cada *m-ésimo* de año.

La tasa nominal de descuento, $d^{(m)}$, mide el interés pagadero al comienzo de cada *m-ésimo* de año de la misma manera como *d* fue una medida de interés pagadera al comienzo del año. Un argumento similar como el a utilizado en el desarrollo de la relación entre $i^{(m)}$ e i, es posible utilizar para encontrar una fórmula que relacione $d^{(m)}$ y d tal que sean equivalentes.

Considere una inversión de 1 que será reembolsada al final del año, en la cual el interés está recopilado por adelantado en la tasa nominal de descuento $d^{(m)}$. En este caso, trabajamos hacia atrás, del fin de año al comienzo del año. Durante el *m-ésimo* de un año el total es 1 y la cantidad de descuento es: $(d^{(m)}/m)1$. Formando un total en el comienzo del año m de $1-(d^{(m)}/m)$, Durante el *(m- 1) m-ésimo* de año el total es: $1-(d^{(m)}/m)$ y la cantidad de descuento es: $(d^{(m)}/m)(1-d^{(m)}/m)$. Formando un total al comienzo del *(m-1) m-ésimo* de año de: $(1-(d^{(m)}/m))-(d^{(m)}/m)(1-(d^{(m)}/m))=(1-(d^{(m)}/m))^2$. Este proceso continúa hasta el comienzo del año siendo de: $(1-(d^{(m)}/m))^m$. También al inicio del período es $1-d$. Así:

$$1-d = \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^m \qquad (1.18a)$$

Lo cual da:

$$d = 1-\left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^m \qquad (1.18b)$$

y

$$d^{(m)} = m[1-(1-d)^{1/m}] = m(1-v^{1/m}) \qquad (1.18c)$$

La Figura 1.4 ilustra el argumento anterior.

FIGURA 1.4

Tiempo	0	$\frac{1}{m}$ ...	$\frac{m-2}{m}$	$\frac{m-1}{m}$	$\frac{m}{m}$
Interés	$\frac{d^{(m)}}{m}(1-\frac{d^{(m)}}{m})^{m-1}$	$\frac{d^{(m)}}{m}(1-\frac{d^{(m)}}{m})^{m-2}$ ...	$\frac{d^{(m)}}{m}(1-\frac{d^{(m)}}{m})$	$\frac{d^{(m)}}{m}\ 1$	
Total	$1-d=(1-\frac{d^{(m)}}{m})^{m}$	$(1-\frac{d^{(m)}}{m})^{m-1}$ ...	$(1-\frac{d^{(m)}}{m})^{2}$	$1-\frac{d^{(m)}}{m}$	1

Las flechas diagonales a la izquierda pueden interpretarse como signos menos y hacia abajo como signos de igual.

Hay una relación entre tasas nominales de interés y tasas nominales de descuento, como a continuación se indica

$$\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m}=\left(1-\frac{d^{(p)}}{p}\right)^{-p} \qquad (1.19\ a)$$

la siguiente relación se mantiene, ya que ambos lados de la ecuación son igual a $1+i$. Si $m=p$, de la fórmula (1.19a) tenemos:

$$\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)=\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{-1} \qquad (1.19\ b)$$

Si $m=1$, entonces $i^{(m)}=i$, es la tasa efectiva de interés; y si $p=1$, entonces $d^{(p)}=d$, es la tasa efectiva de descuento. Así la fórmula (1.19a) puede ser utilizada en general para encontrar tasas equivalentes de interés o descuento, ya sea efectiva o nominal, convertible con cualquier frecuencia deseada.

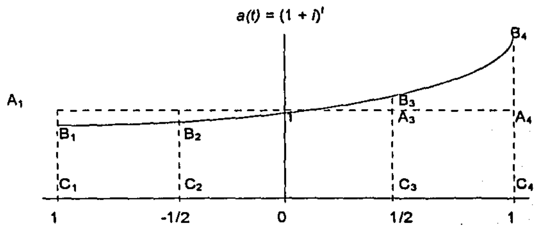
Otra relación entre $i^{(m)}$ y $d^{(m)}$ análoga a la fórmula (1.14) es:

$$\frac{i^{(m)}}{m} - \frac{d^{(m)}}{m} = \frac{i^{(m)}}{m} \quad \frac{d^{(m)}}{m} \qquad (1.20)$$

La interpretación de este resultado es similar a la interpretación de la fórmula (1.14).

Es interesante relacionar tasas nominales de interés y descuento con la función de acumulación, *a(t)*. Un ejemplo se da en la Figura 1.5 para m=2. El estudiante puede construir otros ejemplos.

FIGURA 1.5



La siguiente relación se fundamenta en:

$$A_1B_1 = d \qquad B_1C_1 = v \qquad = (1 - \frac{d^{(2)}}{2})^2$$

$$A_2B_2 = \frac{d^{(2)}}{2} \qquad B_2C_2 = v^{1/2} \qquad = 1 - \frac{d^{(2)}}{2}$$

$$A_3B_3 = \frac{i^{(2)}}{2} \qquad B_3C_3 = (1+i)^{1/2} \qquad = 1 + \frac{i^{(2)}}{2}$$

$$A_4B_4 = i \qquad B_4C_4 = i+1 \qquad = (1 + \frac{i^{(2)}}{2})^2$$

Observe que las tasas nominales de interés y de descuento no tienen sentido bajo interés simple.

Ejemplo 1.7. Encuentre el valor acumulado de $800 invertidos por 8 años al 6% anual convertible semestralmente.

La respuesta es:

$$800\left(1+\frac{.06}{2}\right)^{2(8)} = 800(1.03)^{16}.$$

Debemos notar que esta situación es idéntica a otra en la que $800 se invierten al 3% efectivo por 16 años.

Ejemplo 1.8. Encuentre el valor presente de $ 1000 al cabo de seis años al 8% de interés pagadero anualmente por adelantado y convertible trimestralmente.

La respuesta es:

$$1000\left(1-\frac{.08}{4}\right)^{4(6)} = 1000(1-.02)^{24}$$

Debemos notar que esta situación es idéntica al valor presente de $ 1000 pagaderos al cabo de 24 años a una tasa efectiva de descuento de 2%.

Ejemplo 1.9. Encuentre la tasa nominal de interés convertible semestralmente equivalente a una tasa nominal de descuento de 6% mensual convertible anualmente.

Utilizando la fórmula (1.19 a):

$$\left(1+\frac{i^{(2)}}{2}\right)^{2} = \left(1-\frac{.06}{12}\right)^{-12}$$

$$1+\frac{i^{(2)}}{2} = (.995)^{-6}$$

$$i^{(2)} = 2[(.995)^{-3}-1)]= 0.0303$$

1.8. FUERZAS DE INTERÉS Y DESCUENTO

Las medidas de interés definido en las secciones anteriores son útiles para interés sobre intervalos específicos de tiempo. Las tasas efectivas de interés y descuento se miden en período de un año, mientras que, las tasas nominales de interés y descuento sobre *m-ésimos* de año.

Es importante en muchos casos poder medir la intensidad con que el interés está operando a cada momento del tiempo, por ejemplo. Sobre un intervalo infinitesimal, (intervalo pequeño de tiempo). Esta medida de interés en cada instante de tiempo, es llamado la fuerza de interés.

Considere la inversión en un fondo tal que la cantidad en el fondo en el tiempo t está dado por la función monto, $A(t)$. Recordar que el único factor operativo en el fondo es el crecimiento del fondo a través de interés, es decir, el principal no se añade ni se retira.

La intensidad con que el interés esté operando en el tiempo t depende de la tasa de cambio o la pendiente de la curva de $A(t)$ en un tiempo t, del cálculo diferencial, está dado por la derivada en ese punto, denotado por $D\,A(t)$.

Sin embargo, como la medida de interés, $D\,A(t)$ es insatisfactorio, ya que depende de la cantidad invertida. Si \$ 200 y \$ 100 se invierten bajo condiciones idénticas, La tasa de cambio de los \$ 200 sería dos veces el cambio de los \$ 100 . Sin embargo, el interés no está operando doble vez en la intensidad en los \$ 200; en realidad, decimos que está operando con la misma intensidad a la vez en el fondo, Es decir la razón de cambio no afecta al principal directamente sino mediante el factor interés.

Podemos compensar esto dividiendo $D\,A(t)$ por la cantidad en el fondo al tiempo t, es decir $A(t)$. Esto da una medida de la intensidad con que el interés está operando en el tiempo t expresado como una tasa independiente de la cantidad en el fondo. Así, la fuerza de interés en el tiempo t, denotada por δ_t, está definida como

$$\delta_t = \frac{D\,A(t)}{A(t)} = \frac{D\,a(t)}{a(t)} \qquad (1.21)$$

las siguientes propiedades de δ_t deberán estar presentes.

1. δ_t es una medida de interés en tiempo exacto *t*.

2. δ_t está expresada como interés de una tasa anual.

Es posible tener una expresión para el valor de *A(t)* y *a(t)* en términos de la función δ_t. La cual podemos ver en la fórmula (1.21) una expresión alternativa para δ_t es

$$\delta_t = D \log_e A(t) = D \log_e a(t) \qquad (1.22)$$

Reemplazando *t* por r e integrando entre los límites de 0 a *t*,

$$\int_0^t \delta_t \, dr = \int_0^t D \log_e A(r) dr$$

$$= \log_e A(r) \Big]_0^t = \log_e \frac{A(t)}{A(0)}$$

Y por lo tanto tenemos:

$$e^{\int_0^t \delta r \, dr} = \frac{A(t)}{A(0)} = \frac{a(t)}{a(0)} = a(t) \qquad (1.23)$$

Una derivación alternativa puede obtenerse de (1.21) escrita como $A(t)\delta_t = D\ A(t)$. Integrando entre los límites 0 a n, obtenemos:

$$\int_0^n A(t)\delta_t\, dt = \int_0^n D\ A(t)dt = A(t)\Big]_0^n = A(n) - A(0) \qquad (1.24)$$

La fórmula (1.24) tiene una interesante interpretación. El término $A(n) - A(0)$ es la cantidad de interés ganado sobre período de *n-ésimos* de año La expresión de la diferencial $A(t)\delta_t\ dt$ puede estar interpretada como la cantidad de interés ganado en el monto $A(t)$ en el tiempo exacto t debido a la fuerza de interés δ_t . Cuando esta expresión es integrada entre los límites 0 y n, da la cantidad total de interés ganado sobre el período *n-ésimo*.

Se puede expresar la fórmula (1.21) en términos de la definición de derivada. La derivada de $A(t)$ puede estar expresada como:

$$D\ A(t) = \lim_{h \to 0} \frac{A(t+h)-A(t)}{h}$$

de la fórmula (1.21) puede expresarse como:

$$\delta_t = \frac{D\ A(t)}{A(t)} = \lim_{h \to 0} \frac{A(t+h)-A(t)}{h\ A(t)} \qquad (1.25)$$

Ahora la expresión $[A(t+h) - A(t)]/hA(t)$ puede considerarse como una tasa anual de interés basada en interés durante el intervalo de tiempo t a $t+h$. Por ejemplo, si $h=.1$, tenemos $[A(t+1)-A(t)]/A(t)$, que es el incremento del fondo en el año dividido por la cantidad en el fondo al comienzo del período y si $h=.5$, tenemos $2[A(t+.5)-A(t)]/A(t)$, que es dos veces el incremento a la mitad del año en el fondo dividido por la cantidad en el fondo al comienzo del período. Cuando h tiende a 0, el límite de este expresa, la fuerza de interés, puede estar descrito como la tasa anual nominal de interés basada en la intensidad de interés en el tiempo t.

Es también posible definir una fuerza de descuento análogo a la fórmula (1.21). Para este propósito, utilizamos la función de descuento, $a^{-1}(t)$ en lugar de la función de acumulación, $a(t)$. La definición de la fuerza de descuento al tiempo t, denotada por δ_t', está dado por:

$$\delta_t' = - \frac{D\, a^{-1}(t)}{a^{-1}(t)} \qquad (1.26)$$

La definición de δ_t' es análoga a la definición de δ_t excepto por el signo menos, dicho signo menos es necesario para hacer la fuerza de descuento una cantidad positiva debido a que el denominador de la fórmula (1.26) es positivo pero el numerador es negativo, donde $a^{-1}(t)$ es una función decreciente.

Posteriormente en esta sección se verá que la fuerza de descuento tiene una relación entre tasas nominales y efectivas de descuento similar a la relación que la fuerza de interés tiene a las tasas nominales y efectivas de interés. Sin embargo, puede demostrarse que $\delta_t' = \delta_t$, de modo que podemos decir que:

$$\delta_t' = - \frac{D\, a^{-1}(t)}{a^{-1}(t)}$$

$$= - \frac{a^{-2}(t) D\, a(t)}{a^{-1}(t)}$$

$$= -\frac{a^{-2}(t)\ a(t)\delta_t}{a^{-1}(t)} \qquad \text{de la fórmula (1.21)}$$

$$= \delta_t$$

En teoría, la fuerza de interés puede variar instantáneamente. Sin embargo, en la práctica es con frecuencia una constante. En particular, una tasa efectiva constante de interés es equivalente a la fuerza de interés constante. Si la tasa efectiva de interés i, es constante, obtenemos:

$$\delta_t = \frac{D\ a(t)}{a(t)} = \frac{D\ (1+i)^t}{(1+i)^t} = \frac{(1+i)^t \log_e (1+i)}{(1+i)^t} = \log_e (1+i).$$

Así, δ_t es constante para todos los valores de t, de modo que δ puede estar dada como:

$$\delta = \log_e (1+i), \qquad (1.27a)$$

La cual se expresa como una función de i, Tomando el antilogaritmo de ambos lados de la ecuación se expresa como una función de δ,

$$1+i = e^{\delta}$$

$$i = e^{\delta} - 1. \qquad (1.28a)$$

Este resultado pudo haberse obtenido de la fórmula (1.23), suponiendo una fuerza constante de interés como sigue:

$$1 + i = a(1) = e^{\int_0^1 \delta r\, dr} = e^{\delta}.$$

La fórmula (1.27a) y (1.28a) puede también expresarse como una serie:

$$\delta = \log_e (1 + i) = i - \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} - \frac{i^4}{4} + \ldots \qquad (1.27b)$$

$$i = e^{\delta} - 1 = \delta + \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^3}{3!} - \frac{\delta^4}{4!} + \ldots \qquad (1.28b)$$

En la práctica i y δ son números positivos generalmente pequeños cuyas características sucesivas disminuyen rápidamente.

Hemos relacionado las otras medidas de interés descritas en este capítulo. la siguiente serie de igualdades es una versión expandida de fórmula (1.19a) la cual resume gran parte del material contenido en este capítulo.

$$\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = 1 + i = v^{-1} = (1 - d)^{-1} = \left(1 - \frac{d^{(p)}}{p}\right)^{-p} = e^{\delta}. \qquad (1.29)$$

Otro punto interesante en la fuerza de interés se puede obtener analizando la función $i^{(m)}$. de la fórmula (1.29),

$$\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = e^{\delta}.$$

$$i^{(m)} = m\,(e^{\delta/m} - 1)$$

Utilizando series y expansión, tenemos:

$$i^{(m)} = m\left(\frac{\delta}{m}\ \ \frac{1}{2!} + \frac{\delta^2}{m^2} + \frac{1}{3!}\ \ \frac{\delta^3}{m^3} + \ldots\right) \quad 4!$$

$$\delta + \frac{\delta^2}{2!m} + \frac{\delta^3}{3!m^2} + \ldots$$

y tomando límite cuando m tiende a infinito,

$$\lim_{m \to \infty} i^{(m)} = \delta. \tag{1.30}$$

Esta fórmula tiende a llamar la atención. Como i es una tasa nominal de interés convertible m *veces*, podemos interpretar δ como una tasa nominal de interés convertible continuamente.

Por un argumento análogo, es posible demostrar que

$$\lim_{m \to \infty} d^{(m)} = \delta. \tag{1.31}$$

La prueba se deja al lector como un ejercicio. $d^{(m)}$ es una tasa nominal de descuento convertible *m-veces*, podemos interpretar a δ como una tasa nominal de descuento convertible continuamente. En esencia, esta es una prueba alternativa de este resultado que se deja como un ejercicio.

La fuerza de interés es un dispositivo conceptual útil, para crecimiento continuo de dinero en interés compuesto, similar, para funciones de crecimiento encontrada en las ciencias naturales. En teoría, la medida fundamental de interés es la fuerza de interés y no la tasa efectiva de interés. En la práctica, tasas efectivas y nominales de interés y descuento tienden a utilizarse con más frecuencia porque son simples de comprender. Esto no quiere decir que la fuerza de interés no sea significativa en la práctica. Además es una herramienta conceptual y analítica útil, puede ser utilizada en la práctica como una aproximación para interés convertible muy frecuente, como diario o semanal.

Ejemplo 1.10 Encuentre el valor acumulado de $1000 invertidos por cinco años si la fuerza de interés es de 4%.

La respuesta es:

$1000\ e^{(.04)(5)} = 1000\ e^{(.2)} = 1221.40276$

1.9. INTERÉS VARIABLE

Esta sección trata con situaciones que involucran interés variable. Se consideran dos tipos de variación:. Otros tipos de variación se pueden analizar de los principios básicos.

El primer tipo de variación considerada es una fuerza continua de variación de interés continuo. La fórmula básica para usar en problemas que involucran una fuerza variable de interés es la marcada con (1.23) de la Sección 1.8,

$$a(t) = e^{\int_o^1 \delta r\, dr}.$$

Si δ_t es integrable, el resultado puede ser obtenido directamente. Si t no es integrable, necesitamos los métodos de integración.

El segundo tipo de variación involucra cambios en la tasa efectiva de interés sobre el período de tiempo, esta variación es probablemente la más utilizada en la práctica. Como antes, sea i_n que denota la tasa efectiva de interés durante el *n-ésimo* año de la fecha de inversión. Entonces para enteros t ≥ 1, tenemos

$$a(t) = (1+i_1)\,(1+i_2)\,(1+i_3)\ldots(1+i_t). \qquad (1.32)$$

Si $i_1 = i_2 = i_3 = \ldots = i_t = i$, el resultado obtenido es conocido $a(t) = (1+i)^t$.

Ejemplo 1.11. Encuentre el valor acumulado de 1 al cabo de n años si $\delta_t = 1/(1+i)$. Utilizando fórmula (1.23), la respuesta es:

$$e^{\int_0^n \delta r\, dt} = e^{\int_0^n 1/(1+\tau)\, dt} = e^{\log e(1+t)}\Big]_0^n = 1+n.$$

Ejemplo 1.12. Encuentre el valor acumulado de $1000 al cabo de 12 años si la tasa efectiva de interés es de 8% para los primeros 4 años, 6% por los segundos 4 años, y 3.5% por los años restantes. Utilizando la fórmula (1.32), la respuesta es:

$$1000(1.08)^4\,(1.06)^4\,(1.035)^4 = 1970.9694$$

1.10. RESUMEN DE RESULTADOS

La tabla 1.1 sumariza una parte de las fórmulas, material de este capítulo.

TABLA 1.1

La tasa de interés o descuento	*El Valor Acumulado de 1 en el tiempo t=a(t)*	*El Valor Presente de 1 en el tiempo t=a⁻¹(t)*
Interés compuesto		
i	$(1+i)^t$	$v^t=(1+i)^{-t}$
$i^{(m)}$	$(1+\frac{i^{(m)}}{m})^{mt}$	$(1+\frac{i^{(m)}}{m})^{-mt}$
d	$(1+d)^{-t}$	$(1+d)^{t}$
$d^{(m)}$	$(1-\frac{d^{(m)}}{m})^{-mt}$	$(1-\frac{d^{(m)}}{m})^{mt}$
δ	$e^{\delta t}$	$e^{\delta t}$
Interés simple		
i	$1+it$	$(1+it)^{-1}$
d	$(1-dt)^{-1}$	$1-dt$

CAPÍTULO 2.

LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS RELACIONADOS CON EL INTERÉS

2.1. OBTENCIÓN DE RESULTADOS NUMÉRICOS

En el Capítulo 1, se dio respuestas a muchos de los ejemplos y ejercicios que involucran valores acumulados, valores presentes y aquellos que consideran tasas equivalentes de interés y descuento. Pero no se obtuvo un resultado numérico Esto se hizo para facilitar la presentación de los principios básicos sin la necesidad de que el estudiante realice una cantidad indebida de cálculo aritmético. Naturalmente, en trabajos prácticos, se desean en general respuestas numéricas reales, y el propósito de esta sección es discutir los diversos métodos posibles de obtener tales respuestas.

El advenimiento de calculadoras digitales y computadoras hacen posible obtener respuestas a todos los problemas del interés por cálculo directo. En realidad, el cálculo directo es, probablemente, el más fácil y el método más eficiente. Sin embargo, no siempre es posible utilizar una computadora, ya sea porque ésta no esté disponible o debido a que el volumen del cálculo efectuados no garantiza buenos resultados. El resto de esta sección estará dedicada a obtener respuestas numéricas sin el uso de una computadora.

El enfoque que utilizaremos dependerá de la forma de la función que sea evaluada. Hay tres casos que nosotros consideraremos: (1) calcular $(1+i)^n$ para n entero, (2) calcular $(1+i)^n$ para n no entero y (3) calcular $e^{\delta n}$.

Calcular $(1+i)^n$ para n entero

Hay tres métodos posibles para este caso. Su uso dependerá de cada situación.

En el primer método se utilizan tablas de interés compuesto, el uso de estas es el método apropiado si se requiriera de valores que aparecen en ellas. El estudiante deberá familiarizarse totalmente y por si mismo con estas tablas.

EL segundo método nos sirve para calcular los valores numéricos directamente y es el que se utilizó en varios de los ejemplos del Capítulo 1. En general, este enfoque es práctico para el cálculo manual excepto cuando los exponentes involucrados no son enteros positivos pequeños. Con una calculadora de escritorio la situación se mejora un poco. Por ejemplo, evaluar $(1.045)^{18}$ no es tan difícil como puede parecer a simple vista; para calcularla $(1.054)^{18}$ podemos elevar al cuadrado 1.054, después elevar al cuadrado el producto para obtener la potencia 4, posteriormente elevar al cuadrado el producto para obtener la potencia 8, después nuevamente el resultado elevarlo al cuadrado para obtener la potencia 16, y multiplicar finalmente por $(1.054)^2$ para obtener la respuesta. Como previamente se hace mención, si una computadora está disponible, entonces por medio de la generación de una función de interés compuesto, el cálculo directo es probablemente el más rápido.

El tercer método es el uso de una tabla de logaritmos. Los logaritmos pueden ser utilizados para casi cualquier problema, aunque nosotros utilizaremos este método sólo para aquellos problemas que no sean rápidamente manejables. Suponemos que el estudiante está familiarizado con el uso de éstas tablas.

Calcular $(1+i)^n$ para n no entero

La situación es diferente en este caso. Tenemos $(1+i)^k$ o v^k con $0<k<1$ para calcular esto observe que, cualquier término con exponentes no entero puede ser reducido a una expresión en la que se involucre un factor con un exponente entero y un factor de la forma anterior. Por ejemplo,

$$(1+i)^{8.25} = (1+i)^{8} (1+i)^{1/4}.$$

Hay cuatro métodos posibles para evaluar $(1+i)^{1/4}$ o $v^{1/4}$ con $0 < k < 1$. En el primero se utilizan tablas de interés compuesto. El uso de estas tablas es el método más rápido si el valor requerido aparece en las tablas. El segundo método utiliza el teorema del binomio, de la siguiente manera:

$$(1+i)^{k} = 1 + ki + \frac{k(k-1)}{2!} i^{2} + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} i^{3} + \ldots \qquad (2.1)$$

Esta fórmula puede ser utilizada ya sea para valores positivos o negativos de k.

En el tercero se utiliza logaritmos. De la misma forma que se hizo el cálculo de $(1+i)^n$ para n entero.

En el cuarto método se utiliza interés simple como una aproximación para interés compuesto para cualquier período fraccional. Este enfoque es equivalente a utilizar sólo los primeros dos términos de la expansión binomial en la fórmula (2.1), asumiendo $0<k<1$. Como se muestra en los ejercicios, el uso de interés simple para un período fraccional es también equivalente a ejecutar una interpolación lineal con las tablas de interés. Por ejemplo, evaluar $(1+i)^{8.25}$ por medio de interpolación lineal entre $(1+i)^{8}$ y $(1+i)^{9}$ el interés es siempre equivalente durante el período fraccional final. El uso del interés simple introduce un error, ya que se demostró en La Sección 1.4 que el interés simple produce un valor acumulado mayor, en períodos fraccionados, que el interés compuesto.

Calcular $e^{\delta n}$

Hay dos métodos para este caso.

En el primero se utiliza la expansión de la serie para $e^{\delta n}$ como sigue:

$$e^{\delta n} = 1+(\delta n) + \frac{(\delta n)^2}{2!} + \frac{(\delta n)^3}{3!} + \ldots \qquad (2.2)$$

Esta fórmula puede ser utilizada ya sea para valores positivos o negativos de *n*. En el segundo método se utiliza una tabla de logaritmos o una tabla de valores de e^x.

Ejemplo 2.1. Obtenga una respuesta numérica para los ejemplos 1.7, 1.8, 1.9, 1.10, y 1.12.

1. Ejemplo 1.7:

Usando las tablas de interés:

$$800(1.03)^{16} = 800(1.60471) = \$\ 1283.77$$

2. Ejemplo 1.8:

En este caso el uso de logaritmos es apropiado.

$$log_{10}\,1000(.98)^{24} = log_{10}\,1000 + 24 log_{10}\,.98$$
$$=3 + 24(-0.00877) = 2.78952$$
$$antilog_{10}\,2.78952 = \$615.78$$

3. Ejemplo 1.9:

En este caso es posible el cálculo directo.

$$i^{(2)} = 2\left(\frac{1}{(.995)^6} - 1\right) = .0611, \text{ o } 6.11\ \%$$

4. Ejemplo 1.10:

Utilizando la expansión de serie,

$$1000e^{.2} = 1000\left(1 + .2 + \left(\frac{(.2)^2}{2!}\right) + \left(\frac{(.2)^3}{3!}\right) + \left(\frac{(.2)^4}{4!}\right) + \left(\frac{(.2)^5}{5!}\right) + \ldots\right) = \$1221.40$$

5. Ejemplo 1.12:

De las tablas de interés,

$$1000(1.08)^4\,(1.06)^4\,(1.035)^4 = 1000(1.36049)(1.26248)(1.14752) = \$1970.97$$

Ejemplo 2.2. Encuentre el valor acumulado de $ 40 al cabo de 20 años y 4 meses al 8% anual convertible semestral, (1) asumiendo interés compuesto a través de todo el período, y (2) asumiendo interés simple durante el período fraccional final.

1. Suponiendo interés compuesto a través de todo el período, la respuesta es:

$$40(1.04)^{40+2/3}$$

El cual puede ser factorizado en:

$$40(1.04)^{40}\,(1.04)^{2/3}$$

Ahora utilizando el teorema del binomio, tenemos:

$$(1+.04)^{2/3} = 1 + (2/3)(.04) + \frac{(2/3)(-1/3)}{2!}(.04)^2 + \ldots = 1.02684$$

La respuesta es:

$$40(4.80102)(\ 1.02684) = \$\ 197.19$$

2. Suponiendo interés simple durante el período fraccional final, la respuesta es:

$$40(4.80102)(1.04) = \$\ 199.72$$

El valor en la respuesta a 2 es mayor que en la 1, esto ilustra que el interés simple produce un valor acumulado mayor sobre períodos fraccionales que el interés compuesto, aunque la diferencia es bastante pequeña. La diferencia se debe a que se hace una interpolación lineal y el comportamiento del problema es geométrico.

2.2. EL PROBLEMA BÁSICO

Descompuesto en sus términos más simples, cada problema de interés involucra cuatro cantidades:

1. El principal u original invertido.
2. El período de inversión.
3. La tasa de interés.
4. El valor acumulado del principal al final del período de inversión.

Si cualesquiera tres de estas cantidades fueran conocidas, entonces la cuarta cantidad está automáticamente determinada. En los problemas anteriores consideramos casos en los que se involucran valores acumulados, hasta el momento, sólo la cantidad 4 ha sido desconocida; en la presente sección se considerará el caso en el que, el valor de principal es desconocido. La sección 2.4 considerará el caso en que el período de inversión será desconocido, mientras que en la Sección 2.5 considera el caso en que ninguna cantidad es desconocida excepto la tasa de interés.

El siguiente esquema general es importante ya que será de gran ayuda al estudiante en la solución de problemas de interés.

A) El período de inversión es medido en unidades de tiempo. Fue mencionado en El Capítulo 1 que la unidad de tiempo fundamental es de un año, y muchos problemas son trabajados con esta unidad de tiempo, especialmente aquellas tasas efectivas que involucra descuento. Sin embargo las tasas nominales de interés o descuento involucran, con frecuencia una unidad de tiempo diferente a un año, es más ventajoso si el problema se trabaja considerando un año, por ejemplo, considera el problema de encontrar el valor acumulado de $1000 al cabo de 20 años si la tasa de interés es del 6% anual convertible semestralmente, entonces son necesarios dos pasos. Primero, La tasa efectiva de interés i, que corresponde a $i^{(2)}=.06$ debe encontrarse.

$$1+i = (1.03)^2$$
$$i = (1.03)^2-1$$
$$i = .0609$$

Segundo, la respuesta es $1000(1.0609)^{20}$. Pero si no cuenta con tablas de interés para 6.09%, se tienen que utilizar logaritmos para obtener una respuesta numérica. El problema se simplifica trabajando con una unidad de tiempo de un semestre, que es lo mismo que trabajar con interés convertible, a un año. La respuesta entonces es $1000(1.03)^{40}$= \$3262.04, el resultado se obtiene inmediatamente, de las tablas de interés.

En general, la unidad de tiempo elegida tiene que ser consistente con la función de interés involucrada. En el desarrollo de algunos ejemplos anteriores es posible ahorrar mucho esfuerzo.

B) Puede utilizarse diferentes funciones de interés. Para problemas numéricos, la opción de la función de interés adecuada puede llevarnos a considerable simplificación, dependiendo de la naturaleza del problema. Para problemas numéricos, funcionan las tablas de interés. El ejemplo visto anteriormente en el inciso (A) ilustra esto. En general, la unidad de tiempo y la función de interés deberán ser elegidas juntas.

C) Cualquier problema de interés puede ser observado desde dos perspectivas, ya que involucra una transacción financiera entre dos partes, el prestatario y el prestamista, de cualquier perspectiva, el problema es esencialmente el mismo; Sin embargo, la dirección de un problema puede ser diferente dependiendo del punto de vista. Los ejemplos y ejercicios se pueden plantear desde ambos puntos de vista, y el estudiante puede no hacerlo si las diferentes formas de plantearlos lo confunde. El resultado es el mismo en cualquiera de los planteamientos.

2.3. LA ECUACIÓN DE VALOR

Es un principio fundamental en la teoría de interés que el valor de una cantidad de dinero en cualquier punto depende del tiempo, el tiempo transcurrió desde que el dinero fue pagado en el pasado o sobre el tiempo que transcurrirá antes de que sea pagado. Hemos visto ya esto en muchos de los ejemplos y ejercicios considerados en los dos capítulos anteriores.

Por resultados anteriores, es obvio que dos cantidades de dinero pagaderas en diferentes puntos del tiempo no pueden ser comparadas hasta que todas las cantidades estén acumuladas o estén descontadas en una fecha común. Esta fecha común es llamada la fecha de comparación, y la ecuación que acumula o descuenta cada pago a la fecha de comparación es llamada la ecuación de valor.

Un dispositivo que es frecuentemente de gran ayuda en la solución de la ecuación de valores es el diagrama de tiempo. Un diagrama de tiempo es un diagrama unidimensional en el que se miden unidades de tiempo, los pagos están situados en la diagonal. La fecha de comparación es denotado por una flecha. La figura 2.1 es un ejemplo de un diagrama de tiempo utilizado en la solución del Ejemplo 2.3.

El diagrama de tiempo no es necesario en la solución de ecuaciones de valor; Es simplemente una ayuda visual del problema. Con la práctica el estudiante puede prescindir del diagrama de tiempo en problemas simples.

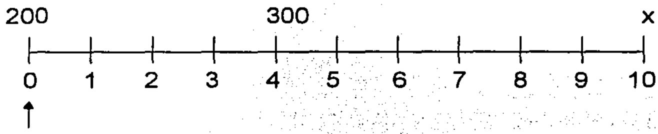
Una de las propiedades del interés compuesto es que en cualquier fecha de comparación la respuesta obtenida es la misma. Entonces, hay una ecuación de valor diferente para cada fecha de comparación, pero todas dan el mismo resultado. Sin embargo, la elección correcta de una fecha de comparación frecuentemente otorgará un ahorro en la cantidad de cálculo aritmético, como nos lo ilustra el Ejemplo 2.3.

El estudiante deberá estar consciente de que los problemas involucran valor presente y valor acumulado ya considerados en los primeros dos capítulo. Estos son ejemplos de ecuaciones de valor. El siguiente ejemplo ilustra un tipo más general de problema.

Ejemplo 2.3. A cambio de recibir \$800 al cabo de 7 años, un hombre está de acuerdo en pagar \$200 en este momento, \$300 al cabo de 4 años, y hacer un pago dentro de 10 años. Encuentre el pago al cabo de 10 años si la tasa efectiva de interés es del 6% anual.

El problema podría trabajarse primero con una fecha de comparación en el presente. El diagrama de tiempo se muestra en la Figura 2.1.

FIGURA 2.1



La ecuaciones de valor es:

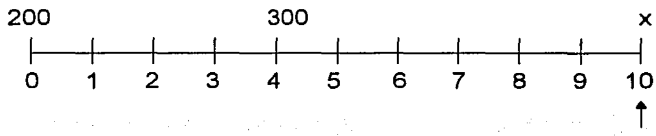
$$200 + 300v^4 + xv^{10} = 800v^7$$

$$x = \frac{800\,v^7 - 200 - 300\,v^4}{v^{10}}$$

$$x = \frac{800\,(0.66506) - 200 - 300(0.79209)}{0.55839}$$

$$= \$\ 169.09$$

Pudimos también haber elegido una fecha diferente de comparación y obtener una ecuación de valor diferente. Por ejemplo, si la fecha de comparación es elegida al final del año 10, entonces la flecha en el diagrama de tiempo estría debajo del 10 y la ecuación de valor sería:



$$200(1.06)^{10} + 300(1.06)^{6} + x = 800(1.06)^{3}$$

$$x = 800(1.06)^{3} - 200(1.06)^{10} - 300(1.06)^{6}$$

$$= 800(1.191016) - 200(1.7908477) - 300(1.41851911)$$

$$= \$169.09$$

Se obtuvo la misma respuesta. las dos ecuaciones de valor son equivalentes. Si ambos lados de la primera ecuación se multiplican por $(1.04)^{10}$, se obtiene la segunda. Sin embargo, debemos notar que la segunda ecuación de valor involucra menos cálculos aritméticos y, así, es preferible efectuar los cálculos.

2.4. CUANDO DESCONOCEMOS EL TIEMPO

En la Sección 2.2 discutimos que, si están dadas tres de cualquiera de las cuatro cantidades en cualquier problema de interés, Entonces la cuarta puede ser determinada. En esta sección consideramos la situación en que el período de inversión es la cantidad desconocida.

Hay dos métodos a utilizar para resolver este tipo de problema. El primero de estos es interpolación con las tablas de interés, y el segundo es utilizar logaritmos. Esto será ilustrado en el Ejemplo 2.4. Para la mayoría de los problemas nosotros utilizaremos el método de interpolación usando las tablas de interés.

En ocasiones se presenta la situación en la que varios pagos hechos en diversos puntos del tiempo serán reemplazados por un pago igual a la suma de los otros pagos. El problema es encontrar el punto del tiempo en el que el pago debería ser hecho tal, que sea equivalente en valor a los pagos que se hicieron separadamente.

Sean $s_1, s_2, \ldots, s_n$ cantidades que son pagado al tiempo $t_1, t_2, \ldots, t_n$ respectivamente. El problema es encontrar el tiempo t, tal que $s_1+s_2+\ldots+s_n$ pagados en el tiempo t sean equivalentes a los pagos $s_1, s_2, \ldots, s_n$ efectuados por separado.

La ecuación fundamental de valor es:

$$(s_1 + s_2 + \ldots + s_n)v^t = s_1 v^{t1} + s_2 v^{t2} + \ldots + s_n v^{tn} \qquad (2.3)$$

Que es una ecuación en donde desconocemos t. Como un ejercicio, el estudiante deberá encontrar una expresión exacta para t. Como una primera aproximación, t se calcula con frecuencia como un promedio de los diferentes puntos de pago, con respecto a las diversas cantidades pagadas, i.e.

$$t = \frac{s_1 t_1 + s_2 t_2 + \ldots + s_n t_n}{s_1 + s_2 + \ldots + s_n} \qquad (2.4)$$

Esta aproximación de t es llamada el método del tiempo. Es posible probar usando la fórmula (2.4) que el valor aproximado de t es siempre mayor que el valor verdadero de t

de la fórmula (2.3), alternativamente, se desprende que el valor presente utilizando el método de tiempo es más pequeño que el valor presente verdadero.

Considere s_1 igual a v^{t1} , s_2 igual a v^{t2} , y así sucesivamente hasta s_n igual a v^{tn} . La media aritmética de estas cantidades es:

$$\frac{s_1v^{t1} + s_2v^{t2} + \ldots + s_nv^{tn}}{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}$$

La media geométrica de estas cantidades es:

$$v^{\frac{s_1 t_1 + s_2 t_2 + \ldots + s_n t_n}{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}} = v^t$$

Donde t es calculada por el método de tiempo equivalente. Sin embargo, conocemos que la media aritmética de números positivos es mayor que el media geométrico, y así tenemos:

$$\frac{s_1v^{t1} + s_2v^{t2} + \ldots + s_nv^{tn}}{s_1 + s_2 + \ldots + s_n} > v^t$$

O

$$s_1v^{t1} + s_2v^{t2} + \ldots + s_nv^{tn} > (s_1 + s_2 + \ldots + s_n)v^t$$

El lado izquierdo es el valor presente verdadero, que excede al valor presente dado por el método de tiempo equivalente en el lado derecho. Así, el valor de t de la fórmula (2.4) es siempre mayor que el valor verdadero de t de la fórmula (2.3).

El ejemplo 2.4. Encuentre el tiempo necesario para que \$1000 acumulen \$20000 si invirtiéramos al 8% anual convertible semestralmente (1) por interpolación usando las tablas de interés, y (2) usando logaritmos.

Sea n la cantidad a la mitad del año. La ecuación es:

$$1000(1.04)^n = 20000$$
$$(1.04)^n = 20$$

1. De las tablas de interés, $(1.04)^{17}$ =1.9479y $(1.04)^{18}$ =2.02582, y como $17 < n < 18$. Ejecutando un interpolación lineal.

$$n = 17 + \frac{2 - 1.9479}{2.02582 - 1.9479} = 17.669$$

Tenemos que, la cantidad de años es 17.676. Este método es equivalente a suponer interés simple durante la fracción final de un período de conversión de interés. Este punto se discutió con más detalle en la Sección 2.1.

2. Utilizando logaritmos,

$$n \, log_{10} 1.04 = log_{10} 2$$

$$n = \frac{log_{10} 2}{log_{10} 1.04} = \frac{0.30103}{0.01703} = 17.676$$

Así, el número de años es 17.676, que coincide con el método 1 usando dos decimales.

Ejemplo 2.5. Pagos de \$200, \$400, y \$700 deberán hacerse en los años 3,4, y 9, respectivamente. Asumiendo una tasa efectiva de interés de 3% anual, encuentra el punto del tiempo en el que un pago de \$1200 sería equivalente. (1) por el método de tiempo equivalente, (2) por un método exacto.

1. Por el método del tiempo equivalente utilizando la fórmula (2.4)

$$t = \frac{200(3) + 400(4) + 700(9)}{200 + 400 + 1200} = 4.25 \text{ años}$$

2. La ecuación de valor exacta es:

$$1200v^t = 200v^3 + 400v^4 + 700v^9$$

O

$$v^t = \frac{200(0.91514) + 400(0.88849) + 700(0.76642)}{1200} = 0.89577$$

Esta ecuación puede ser resuelta por interpolación usando las tablas de interés o por logaritmos. Interpolando en las tablas de interés entre v^3 =.91514 y v^4 =.88849, obtenemos:

$$t = 3 + \frac{.89577 - .91514}{.88849 - .91514} = 3.727 \text{ años}$$

Es de esperar que el valor verdadero de t sea menor que el valor utilizando en el método de tiempo equivalente.

2.5. TASA DE INTERÉS DESCONOCIDA

En la sección 2.4 se consideró el caso en que el período de inversión es desconocida. En esta sección consideramos la situación en que la tasa de interés es desconocida.

Hay tres métodos a utilizar para resolver este tipo de problema. El primero de estos es interpolación, con las tablas de interés, este es el método que nosotros utilizaremos en la mayoría de los casos. EL segundo es utilizando logaritmos. El tercero es resolviendo la ecuación expresada por técnicas algebraicas, como una serie de *i* o *1+i*

El tercer método comentado anteriormente es con frecuencia obsoleto para cálculos a mano, sin embargo, es bastante eficiente si está disponible una calculadora digital. Por ejemplo, una ecuación de valor con exponentes enteros en todos sus términos puede ser escrita como un polinomio de grado *n* en *i* o *1+i*. Es una cuestión simple encontrar las raíces de un polinomio de grado *n* con subrutinas de una computadora estándar.

Los problemas que involucran una tasa desconocida de interés pueden ser ilustrados con un ejemplo.

Ejemplo 2.6. ¿A qué tasa de interés convertible semestralmente, \$2000 acumulan \$2800 en ocho años?

Sea $j = i^{(2)}/2$ de modo que la ecuación de valor es:

$$2000(1+j)^{16} = 2800$$

O

$$j = (1.9)^{1/16} - 1$$

Ahora utilizando logaritmos, tenemos:

$$log_{10}\,(1.9)^{1/16} = 1/16\ log_{10}\ 1.9 = 1/16\ (.27875) = .01742$$

$$Antilog_{10}\ 0.01742 = 1.04093,$$

Lo cuál da:

$$j = 1.04093 - 1 = .04093$$

Y

$$i^{(2)} = 2(.04093) = .08186$$

Debemos notar que este problema puede también ser trabajado por interpolación usando las tablas de interés.

Ejemplo 2.7. ¿A qué tasa de interés convertible trimestralmente se deben invertir \$1000 en este momento y \$3000 al cuarto año para obtener un valor acumulado de \$6000 al décimo año?

Sea $j=i^{(4)}/4$ entonces la ecuación de valor es:

$$1000(1+j)^{40} + 3000(1+j)^{24} = 6000$$

Para resolver este problema interpolaremos usando las tablas de interés. como sigue:

$$f(j) = 1000(1+j)^{40} + 3000(1+j)^{24} - 6000$$

Buscamos j, tal que f(j)=0. Por ensayo y error.

$$f(0.0125) = 1000(1.64362) + 3000(1.34735) - 6000 = 314.33$$

$$f(0.0150) = 1000(1.81402) + 3000(1.4295) - 6000 = -102.52$$

Y efectuamos la interpolación lineal:

$$j = 0.0125 + 0.0025 \frac{0 + 102.52}{314.33 + 102.52} = 0.0131, \text{ o } 1.31\%$$

lo cual da:

$$i^{(4)} = 4(.0131) = .0524, \text{ O } 5.24\%$$

Debemos notar que aunque los logaritmos no pueden utilizarse para obtener la respuesta, la precisión de la respuesta puede ser revisada utilizando logaritmos.

Ejemplo 2.8. ¿Qué tasa efectiva de interés se debe considerar para que el valor presente de una serie de pagos de $1 al final de cada dos años, y por siempre, sea igual a $100?

La ecuación de valor es:

$$100 = v^2 + v^4 + v^6 + \ldots = \frac{v^2}{1 - v^2} = \frac{1}{(1+i)^2 - 1},$$

O

$$(1+i)^2 = 1.01$$

Y aplicando raíces cuadradas:

$$1+i = 1.005$$

lo cual da:

$$i = .005, 0.5\%.$$

CAPÍTULO 3.

ANUALIDADES ELEMENTALES

3.1 ANUALIDAD VENCIDA

Una anualidad puede definirse como una serie de pagos hechos en intervalos iguales de tiempo. Las anualidades son comúnmente útiles en nuestra vida. La renta de una casa, pagos de hipoteca, pagos del automóvil, y los pagos de interés de dinero invertido son ejemplos todos de anualidades. Originalmente el significado de la palabra "anualidad" se restringió para pagos anuales, pero ha sido también extendido para incluir pagos hechos a otros intervalos regulares.

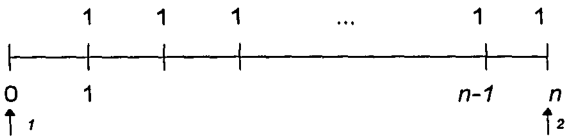
Considere una anualidad tal que los pagos son ciertos y serán hechos para un período de tiempo pactado. Una anualidad con estas propiedades es llamada anualidad cierta. El período de tiempo pactado durante el cual los pagos son hecho es llamado el término de la anualidad. Por ejemplo, pagos de hipoteca de una casa o negocio constituye una anualidad cierta.

No todas las anualidades son anualidades ciertas. Una anualidad en la cual los pagos no son ciertos es llamada una anualidad contingente. Un tipo común de anualidad contingente es en la que los pagos se hacen sólo si una persona vive. Tal anualidad es llamado renta vitalicia. Por ejemplo, beneficios de retiro mensuales de un plan de jubilación, que continúen durante la vida de un retirado, constituye una renta vitalicia. Nosotros pondremos nuestra atención en anualidades ciertas.

Frecuentemente será conveniente omitir la palabra "cierta" y utilizar el término "anualidad" para referirnos a una anualidad cierta. La frecuencia con que se hacen los pagos de la anualidad se llama el período de pago. En el capítulo 3, consideramos anualidades en las que el período de pago y el período de conversión de interés son iguales, y en las que los pagos son de cantidad fija. En el Capítulo 4, se considerarán anualidades en las que los pagos son hechos más, o menos frecuentemente que la convertibilidad de la tasa de interés y serán examinadas anualidades con una serie variable de pagos.

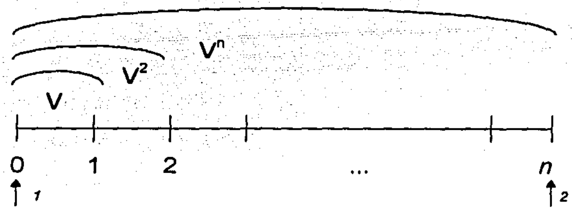
Considere una anualidad en la cual se hacen pagos de una unidad monetaria al final de cada año por *n* años. Esta anualidad es llamada anualidad vencida. La figura 3.1 muestra un diagrama de tiempo para dicha anualidad. La flecha 1 aparece un año antes de que el primer pago se haga. El valor presente de la anualidad en este punto del tiempo está denotado por $a_{\overline{n}|}$ La flecha 2 aparece *n* años después de la flecha 1, justamente después de que el último pago se hizo. El valor acumulado de la anualidad en este punto del tiempo se denota por $s_{\overline{n}|}$.

FIGURA 3.1



Podemos derivar una expresión para $a_{\overline{n}|}$. mediante una ecuación de valor al comienzo del primer año. El valor presente de un pago de una unidad monetaria al final del primer año es *v*. El valor presente de un pago de una unidad monetaria al final del segundo año es v^2 y así sucesivamente hasta que el valor presente de un pago de una unidad monetaria al final del *n*-ésimo año es v^n .

FIGURA 3.2



El valor presente total $a_{\overline{n}|}$ tiene que ser igual a la suma de los valores presentes de cada pago, es decir;

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + .. + v^{n-1} + v^n \qquad (3.1)$$

ya que estamos tomando el valor se cada pago a la fecha actual.

Esta fórmula puede ser utilizada para evaluar $a_{\overline{n}|}$, pero podría ser poco práctica para cuando n es muy grande. Es posible derivar una expresión más compacta debido a que la fórmula (3.1.) es una progresión geométrica; donde v es el primer término; el último término es v^n y la razón es v.

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + ... + v^{n-1} + v^n$$

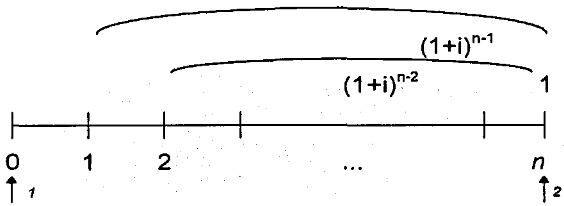
$$= v\,\frac{1 - v^n}{1 - v}$$

$$= v\,\frac{1 - v^n}{iv}$$

$$= \frac{1 - v^n}{i} \qquad (3.2)$$

Una expresión para $s_{\overline{n}|}$ puede derivarse de una manera análoga como una ecuación de valor al final del *n*-ésimo año. El valor acumulado de un pago de una unidad monetaria al final del primer año es $(1+i)^{n-1}$ El valor acumulado de un pago de una unidad monetaria al final del segundo año $(1+i)^{n-2}$. y así sucesivamente hasta que el valor acumulado de un pago de una unidad monetaria al final del *n*-ésimo año sea justamente una unidad monetaria.

FIGURA 3.3



El valor total acumulado, $s_{\overline{n}|}$ es igual a la suma de los valores acumulados de cada pago, es decir:

$$s_{\overline{n}|} = 1 + (1+i) + \ldots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1} \qquad (3.3)$$

de nuevo, una expresión más compacta puede derivarse sumando la progresión geométrica.

$$s_{\overline{n}|} = 1 + (1+i) + \ldots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}$$

$$= \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$

$$= \frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad (3.4)$$

Ocasionalmente, la tasa de interés se escribe en la parte inferior derecha del símbolo, por ejemplo $a_{\overline{5}|.03}$ y $s_{\overline{4}|.02}$. Ya que éstos tienden a confundir los símbolos, nosotros haremos esto sólo si pudiera haber cualquier ambigüedad debido a la tasa de interés para evaluar la función.

Es posible dar otra interpretación a la fórmula (3.2) como sigue:

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{i}$$

$$i\,a_{\overline{n}|} = 1 - v^n$$

$$1 = i\,a_{\overline{n}|} + v^n$$

Considere la inversión de una unidad monetaria por n años. Cada año la inversión de una unidad monetaria devengará interés pagadero al final del año. El valor presente de estos pagos de interés es $i\,a_{\overline{n}|}$. Al cabo de n años la inversión original de una unidad monetaria, cuyo valor presente es v^n, será regresado. Así, ambos lados de la ecuación representa el valor presente de una inversión de una unidad monetaria en la fecha de inversión.

Hay una relación entre $a_{\overline{n}|}$ y $s_{\overline{n}|}$

$$s_{\overline{n|}} = a_{\overline{n|}} (1 + i)^n \tag{3.5}$$

Esta relación se obtiene de una comparación de las fórmulas (3.1) y (3.3) o de las fórmulas (3.2) y (3.4). Es también derivada del diagrama de tiempo, donde $s_{\overline{n|}}$ es el valor de los mismos pagos que $a_{\overline{n|}}$ sólo que valuados n años después.

Otra relación entre $a_{\overline{n|}}$ y $s_{\overline{n|}}$ es:

$$\frac{1}{a_{\overline{n|}}} = \frac{1}{s_{\overline{n|}}} + i \tag{3.6}$$

Esta relación puede deducirse como sigue:

$$\frac{1}{s_{\overline{n|}}} + i = \frac{i}{(1+i)^n - 1} + i$$

$$= \frac{i + i\ (1+i)^n - i}{(1+i)^n - 1}$$

$$= \frac{i}{1 - v^n}$$

$$= \frac{1}{a_{\overline{n|}}}$$

La Fórmula (3.6) es útil al obtener valores de $1/a_{\overline{n|}}$ sin tener que realizar una división. Esto se ilustrará en el Ejemplo 3.3 (Esta fórmula también será muy útil en otro contexto, en El Capítulo 5).

Para simplificar, hemos considerado anualidades en las que el período de conversión de interés y el período de pago es un año en ambos casos. Sin embargo, podemos generalizar nuestros resultados a cualquier situación en que el período de conversión de interés y el período de pago no sean iguales. Esta generalización se ilustra en el Ejemplo 3.2 y se aplicará a través del resto del capítulo.

Ejemplo 3.1 Encuentra el valor presente de una anualidad de \$10 al final de un año durante 30 años si la tasa efectiva de interés es 4%.

La respuesta es:

$$10a_{\overline{30|}} = 10\ (17.29203) = \$\ 172.9203$$

Ejemplo 3.2 Encuentra el valor acumulado vencido después del último pago de una anualidad en la que se hacen pagos de \$ 50 cada 4 meses por 20 años si la tasa de interés es del 3% anual convertible 3 veces al año.

La respuesta es:

$$50s_{\overline{60|}\,.01}$$

el período de conversión de interés y el período de pago son ambos de dos meses. Si el valor de $s_{\overline{60|}}$ no aparece en las tablas. Se puede utilizar (3.4) como sigue:

$$50s_{\overline{60|}.01} = 50\ \frac{(1.01)^{30\,(2)} - 1}{.01}$$

$$= 50 \frac{(1.34785)^2 - 1}{.01}$$

$$= 50\ (\ 81.670\ )$$

$$= \$4083.5$$

Ejemplo 3.3. Si un hombre invierte \$10000 al 8% de interés anual convertible trimestral, ¿cuánto puede retirar al final de cada tres meses para utilizar el fondo exactamente 10 años?

Sea R la cantidad de retirada cada 3 meses. La ecuación de valor en la fecha de inversión es:

$$R\, a_{\overline{40}|.02} = 10000$$

$$R..= \frac{10000}{a_{\overline{40}|.02}}$$

Podemos evitarnos hacer una división utilizando la fórmula (3.6)

$$R = 10000 \frac{1}{a_{\overline{40}|.02}}$$

$$= 10000 \frac{1}{s_{\overline{40}|.02}} + .02$$

$$= 10000\ (.016556 + .02)$$

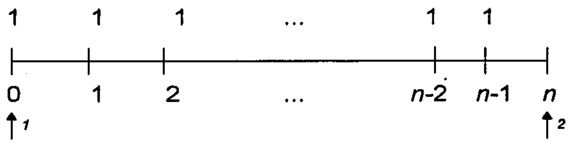
$$= \$365.60$$

3.2. ANUALIDAD ANTICIPADA

En la Sección 3.1, definimos anualidad vencida como una anualidad en la que los pagos serían hechos al final del año. En esta sección, nosotros consideraremos la anualidad anticipada en la que los pagos serán al comienzo del año en lugar del final de éste.

La FIGURA 3.4 es un diagrama de tiempo para una anualidad anticipada y a *n* año.

FIGURA 3.4



La flecha 1 aparece en el momento en el que el primer pago se hizo. El valor presente de la anualidad en este punto del tiempo está denotado por $\ddot{a}_{\overline{n}|}$. La flecha 2 aparece *n* años después de flecha 1, un año después de que el último pago fue hecho. El valor acumulado de la anualidad en este punto del tiempo se denota como $\ddot{s}_{\overline{n}|}$.

Podemos escribir una expresión para $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ análoga a la fórmula (3.l)

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1} \qquad (3.7)$$

y sumando, de nuevo, una progresión geométrica,

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = \frac{1 - v^n}{1 - v}$$

$$= \frac{1 - v^n}{iv} = \frac{1 - v^n}{d} \qquad (3.8)$$

Qué es análoga a la fórmula (3.2)

Similarmente para $\ddot{s}_{\overline{n|}}$ tenemos las siguientes analogía para (3.3) y (3.4)

$$\ddot{s}_{\overline{n|}} = (1+i) + (1+i)^2 \ldots + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n \qquad (3.9)$$

$$= (1+i)\,\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$

$$= \frac{(1+i)^n - 1}{iv} = \frac{(1+i)^n - 1}{d} \qquad (3.10)$$

Es útil comparar las fórmulas (3.2) y (3.8). El numerador es idéntico, sin embargo, el denominador de (3.2) es *i* y el denominador de (3.8) es *d*. En la anualidad vencida, los pagos son efectuados al final del año e *i* es la medida del interés que se paga al final del año. En la anualidad anticipada, los pagos son efectuados al comienzo del año y *d* es la medida del interés que se paga al comienzo del año. Una comparación de la fórmulas (3.4) y (3.10) arroja resultados similares.

La propiedad anterior, relaciona el tiempo en que son hechos los pagos de las anualidades con la medida de interés en el denominador, esto facilita grandemente la memorización de las fórmulas de anualidades. Aún más, esta propiedad puede generalizarse en anualidades más complejas que serán discutidas en el Capítulo 4.

Es inmediato que:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|}(1+i)^n \qquad (3.11)$$

Puede ser mostrada también una fórmula análoga a la fórmula (3.5).

$$\frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} = \frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} + d \qquad (3.12)$$

Lo anterior es análoga a la fórmula (3.6). La derivación de (3.2) se deja como un ejercicio.

Es posible relacionar la anualidad vencida y la anualidad anticipada. Una relación es

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|}(1+i) \qquad (3.13)$$

Y

$$s_{\overline{n}|} = \ddot{s}_{\overline{n}|}(1+i) \qquad (3.14)$$

La fórmula (3.13) puede derivarse inmediatamente comparando (3.1) y (3.7) o las fórmulas (3.2) y (3.8). Ya que cada pago bajo $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ es hecho un año antes que bajo $a_{\overline{n}|}$, el valor presente total de $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ tiene que ser mayor por un año de interés. la Fórmula (3.14) puede ser derivada análogamente.

Hay otro tipo de relación entre la anualidad vencida y la anualidad anticipada:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + a_{\overline{n-1}|} \qquad (3.15)$$

Esta fórmula puede deducirse de la FIGURA 3.4 Los n pagos hechos bajo $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ puede convertirse en el primer pago más los restante n-1 pagos. El valor presente del primer pago es 1, y el valor presente de los n-1 pagos restantes es $a_{\overline{n}|}$. La suma tiene que dar el valor presente $\ddot{a}_{\overline{n}|}$.

Igualmente, podemos obtener:

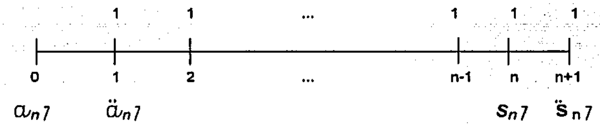
$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = s_{\overline{n}|} - 1 \qquad (3.16)$$

Esta fórmula puede obtenerse de La FIGURA 3.5. Temporalmente, supongamos que un pago imaginario de una unidad monetaria se hace al final del n-écimo año. Entonces, el valor acumulado total de el n+1 pago es $s_{\overline{n+1}|}$ Sin embargo, tenemos que retirar el valor acumulado del pago imaginario que es justamente 1, La diferencia da como resultado el valor acumulado, $\ddot{s}_{\overline{n}|}$

Las fórmulas (3.15) y (3.16) son más conveniente que las fórmulas (3.13) y (3.14) para el cálculo a mano, ya que involucra adiciones y restas en lugar de multiplicaciones. la mayoría de las tablas de interés compuesto, no incluyen valores para anualidades anticipadas.

Considerables confusiones son provocadas por tratar la anualidad vencida y la anualidad anticipada como si fueran muy diferentes. Realmente refieren a evaluar exactamente la misma serie de pagos en diferentes puntos a tiempo. la FIGURA 3.5 esclarece esto.

FIGURA 3.5



Ejemplo 3.4. Un hombre desea acumular \$100 en un fondo en junio 1, del 2004. Para lograr esto planea hacer depósitos anuales en junio 1, de 1996, y hasta junio 1, de 2003. ¿de que tamaño debería ser cada depósito si el fondo gana 2% de interés efectivo?

Ya que estamos interesados en el valor acumulado un año después del último pago, la ecuación de valor en junio 1, de 2005, es:

$$R\ddot{s}_{\overline{9}|} = 100$$

Si R es el depósito anual.

$$R = \frac{100}{\ddot{s}_{\overline{8}|}}$$

$$= \frac{100}{s_{\overline{9}|} - 1}$$

$$= \frac{100}{9.7546 - 1}$$

$$= \$\ 11.4226$$

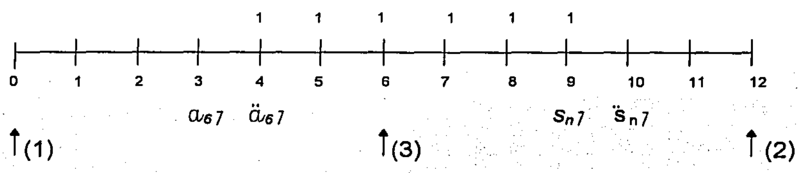
3.3. ANUALIDAD VALUADA EN CUALQUIER FECHA

Hasta ahora hemos evaluado anualidades consideradas sólo en el comienzo de la serie de pagos (ya sea un año antes, o en el momento del pago), o bien al final de la serie de pagos (ya sea en la fecha de pago, o un año después, del último pago). Sin embargo, es necesario con frecuencia evaluar anualidades en otras fechas. Nosotros discutiremos aquí los siguientes casos: (1) El valor presente antes de la fecha de pago, (2) El valor acumulado después de la fecha de pago y por último (3). El valore actual entre la primera y última fecha de pago. Nosotros asumiremos que la fecha de evaluación sea un número entero de años en cada fecha de pago.

El valor de una anualidad en cualquier fecha puede encontrarse, acumulando o descontando cada uno de los pagos por separado y sumando el resultado. Sin embargo, este método pondría ser poco práctico si se involucra un gran número de pagos. Nosotros veremos que es posible desarrollar valores para los tres casos en función de términos de anualidad ya definidas.

Los tres casos arriba descritos pueden ser ilustrados con ejemplos. Considere una anualidad en la que se hacen seis pagos de una unidad monetaria, comenzando en el cuarto año y hasta el año 9 inclusive. La FIGURA 3.6 muestra un diagrama de tiempo para esta anualidad. Los valores al final de el año 3, 4, 9, y 10 son dados directamente, ya sea por anualidades vencidas o por anualidades anticipadas. El valor presente al comienzo de el año 1 es un ejemplo del caso (1), el valor acumulado al final de el año 12 es un ejemplo del caso (2),

FIGURA 3.6



y los valores actuales al final del año 6 es un ejemplo del caso (3). Estos tres casos están marcados con las flechas 1,2, y 3, respectivamente, en el diagrama de tiempo.

El valor presente más allá de un año antes de la primera fecha de pago

El valor presente de la anualidad al comienzo del año 1 será visto como el valor presente al final del tercer año descontado durante tres años, es decir,

$$v^3 a_{\overline{6}|}$$

Es posible desarrollar una expresión alternativa para este valor presente. Supongamos que temporalmente esos pagos imaginarios de una unidad monetaria son hechos al final de los años 1,2 y 3. Entonces el valor presente del nueve pago es $a_{\overline{9}|}$. Sin embargo, tenemos que retirar los valores presentes de los pagos imaginarios, que son $a_{\overline{3}|}$. Así, una expresión alternativa para el valor presente es:

$$a_{\overline{9}|} - a_{\overline{3}|}$$

Esta expresión es preferible para cálculos a mano, ya que involucra una resta en lugar de una multiplicación.

Una anualidad como la del caso (1) es con frecuencia llamada una anualidad diferida, ya que los pagos comienzan después de un período diferido. El símbolo para una anualidad vencida diferida *m* años y a un término de *n* años después del período suspendido es ${}_{m|}a_{\overline{n}|}$. En el ejemplo anterior, el símbolo apropiado sería ${}_{3|}a_{\overline{6}|}$. Debemos notar que debido a que los pagos son hechos al final del año, el primer pago hecho bajo ${}_{m|}a_{\overline{n}|}$ es en *m+1* años después de la fecha de evaluación, en lugar de m años.

En general, utilizando el razonamiento en este ejemplo, tenemos

$$v^m a_{\overline{n}|} = v^m \frac{1 - v^n}{i}$$

$$= \frac{v^m - v^{n+m}}{i}$$

$$= a_{\overline{m+n}|} - a_{\overline{m}|}$$

$${}_{m|}a_{\overline{n}|} = v^m a_{\overline{n}|} = a_{\overline{m+n}|} - a_{\overline{m}|} \qquad (3.17)$$

Es posible trabajar con una anualidad anticipada diferida, ${}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|}$. el ejemplo anterior, exprezándolo como una anualidad anticipada es:

$${}_{4|}\ddot{a}_{\overline{6}|} = v^4 \ddot{a}_{\overline{6}|} = \ddot{a}_{\overline{10}|} - \ddot{a}_{\overline{4}|}$$

El valor acumulado después de la última fecha de pago

En este ejemplo, el valor acumulado de la anualidad al final de los años 12 es visto como el valor acumulado en el año 9, acumulado por cuatro año más, es decir,

$$s_{\overline{6|}}(1+i)^3$$

Es posible también desarrollar una expresión alternativa que involucra una resta en lugar de una multiplicación. Temporalmente, supongamos que se hacen pagos imaginarios de una unidad monetaria en los años 10,11, y 12 Entonces el valor acumulado de los pagos imaginarios, $s_{\overline{9|}}$. Sin embargo tenemos que restar el valor acumulado del pago imaginario que es $s_{\overline{3|}}$. Así, una expresión alternante para el valor acumulado es:

$$s_{\overline{9|}} - s_{\overline{3|}}$$

En general, el valor acumulado de una anualidad a *n* años, *m* años después de la última fecha de pago, es:

$$s_{\overline{n|}}(1+i)^m = s_{\overline{m+n|}} - s_{\overline{m|}} \qquad (3.18)$$

Es también posible trabajar con anualidades anticipadas en lugar de anualidades vencida. El ejemplo anterior expresándolo como una anualidad anticipada es:

$$\ddot{s}_{\overline{6|}}(1+i)^2 = \ddot{s}_{\overline{8|}} - \ddot{s}_{\overline{2|}}$$

El valor actual entre el primero pago y la última fecha de pago

En este ejemplo, los valores actuales de la anualidad al final de el año 6 serán visto como el valor presente al final del año 3 acumulado por tres años o los valores acumulados al final del año 9 descontados por tres año, es decir:

$$a_{\overline{6|}}(1+i)^2 = v^4\ddot{s}_{\overline{6|}}$$

Aquí es posible desarrollar una expresión alternativa que involucre una adición en lugar de una multiplicación. Separar los seis pagos en los primeros tres más los tres últimos. El valor acumulado de los pagos de los primeros tres es $s_{\overline{3}|}$, y el valor presente de los tres últimos pagos es $a_{\overline{3}|}$ Así, una expresión alternativa para el valor actual es:

$$s_{\overline{3}|} + a_{\overline{3}|}$$

En general, los valores actuales de una anualidad a n años anticipada diferida m años donde $m < n$ es

$$a_{\overline{n}|}\,(1+i)^{m} = v^{n-m}\,s_{\overline{n}|} = s_{\overline{m}|} + a_{\overline{n-m}|} \quad (3.19)$$

Es también posible trabajar con anualidad anticipada en lugar de anualidades vencida. El ejemplo anterior expresándolo como una anualidad anticipada

$$\ddot{a}_{\overline{6}|}\,(1+i)^{3} = v^{3}\,\ddot{s}_{\overline{6}|} = \ddot{s}_{\overline{3}|} + \ddot{a}_{\overline{3}|}$$

Sumario

En general. Es posible expresar el valor de una anualidad en cualquier fecha, que sea un número entero de año en cada fecha de pago, como la suma o diferencia de anualidades vencida, que es lo más conveniente para cálculos a mano. existe Otra expresión equivalente, y el estudiante deberá practicar traduciendo cada una de las respuestas en su forma equivalente.

El estudiante no debería intentar trabajar los problemas memorizando las fórmulas (3.17), (3.18) y (3.19). Cualquier problema de este tipo puede ser manejado con los principios básicos, como se ilustró en esta sección.

Si fuera necesario encontrar los valores de una anualidad en una fecha que no es un número entero de años de cada fecha de pago, el valor deberá ser encontrado en una fecha que es un número entero de años de cada fecha de pago y entonces el valor en esta fecha puede acumularse o descontarse para el período fraccional a la fecha de evaluación real.

3.4. PERPETUIDADES

Una perpetuidad es una anualidad cuyos pagos son continuos, es decir, se harán por siempre, el término de la anualidad no es finito. Aunque parezca irreal podemos tener una anualidad con pagos continuos en la práctica, por ejemplos algunas criptas.

El valor presente de una perpetuidad vencida se denota por $a_{\overline{\infty}|}$, y se tiene:

$$a_{\overline{\infty}|} = v + v^2 + v^3 + \ldots$$

$$= \frac{v}{1 - v}$$

$$= \frac{v}{iv}$$

$$= \frac{1}{i}$$

Alternativamente, tenemos

$$a_{\overline{\infty}|} = \lim_{n \to \infty} a_{\overline{n}|} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - v^n}{i} = \frac{1}{i}$$

donde

$$\lim_{n \to \infty} v^n = 0$$

La fórmula (3.20) puede interpretarse como sigue; Si un principal $1/i$ es invertido a una tasa efectiva i, entonces el interés de $(1/i)i = 1$ puede ser pagado al final de cada año por siempre, y dejar el principal intacto. Por un argumento análogo, para una perpetuidad anticipada, tenemos

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{d} \qquad (3.21)$$

Debemos notar que el valor acumulado para perpetuidades no existe, ya que los pago se hacen por siempre.

3.5. TÉRMINOS FRACCIONALES

En todos los casos anteriores hemos supuestos que n es un entero positivo. En realidad, en la fórmula (3.1) para $a_{\overline{n}|}$ y en la fórmula (3.3) para $s_{\overline{n}|}$ no se permite ningúna otra suposición.

Sin embargo, es posible tener un significado para los símbolos, como $a_{\overline{n+k}|}$ y $s_{\overline{n+k}|}$ para n entero positivo y 0 < k < 1, que coincida con las fórmulas (3.2) y (3.4).

Consideremos primero $a_{\overline{n+k}|}$.

$$a_{\overline{n+k}|} = \frac{1 - v^{n+k}}{i}$$

$$= \frac{1 - v^{n} + v^{n} - v^{n+k}}{i}$$

$$= a_{\overline{n}|} + v^{n+k} \frac{(1+i)^{k} - 1}{i} \qquad (3.22)$$

Así, $a_{\overline{n+k}|}$ es el valor presente de una anualidad vencida con pagos de una unidad monetaria por n años más un pago de $((1+i)^k - 1) / i$, al final del año n+k,

Para simplificar suponemos, que el pago $((1+i) - 1) / i$ se hace al final del año k. esta suposición involucra un error.

Consideremos ahora $s_{\overline{n+k}|}$

$$s_{\overline{n+k}|} = \frac{(1+i)^{n+k} - 1}{i}$$

$$= \frac{(1+i)^{n+k} - (1+i)^{n} + (1+i)^{n} - 1}{i}$$

$$= s_{\overline{n}|} (1 + i)^k + \frac{(1+i)^k - 1}{i} \qquad (3.23)$$

Así, $s_{\overline{n+k}|}$ se puede ver como el valor acumulado después de n+k años lo mismo que $a_{\overline{n+k}|}$, en el valor presente.

3.6. COMO CALCULAR EL TIEMPO

Anteriormente, supusimos que en cualquier anualidades n e i son conocidos, En la Sección 3.5 se consideró el caso en el que n es desconocido, y en Sección 3.7 se considerarán el caso en que i es desconocida.

En general, cuando el tiempo no se conoce no se darán respuestas para n entero. Estos problemas se manejaron a lo largo de esta Sección 3.5 cuando un pago más pequeño se hace después de el último pago regular del año.

Sin embargo, Esto no se hace con frecuencia en la práctica debido a la confusión de hacer un pago en una fecha que no es un número entero de año, siendo que las fechas en los demás pagos son enteras. Por ejemplo, se hacen pagos regulares en junio 1 de cada año para cada uno de los años seguidos por un pago más pequeño en Noviembre 16 no es conveniente para la transacción.

Lo que se hace generalmente en la práctica es un pago más pequeño al mismo tiempo como el último pago regular, convirtiéndose, un pago mayor que el pago regular, llamado un pago de globo, o hacer un pago pequeño un año después del último pago regular. Naturalmente, los pagos más pequeños en estas dos situaciones no son iguales, ni es igual al pago más pequeño hecho en un punto intermedio.

El problema cuando el tiempo no se conoce puede ilustrarse con un ejemplo.

Ejemplo 3.5. Una inversión de $1000 es utilizada para que se hagan pagos de $100 al final de cada año tantos años como sean posibles, si la inversión se hace a una tasa de interés del 6% encontrar el número de pagos regulares que serán hechos y la cantidad del pequeño pago: (1) para ser pagado en la fecha del último pago regular, (2) a ser pagado un año después del último pago regular, y (3) para ser pagados después del último pago regular, como se describió en la Sección 3.5.

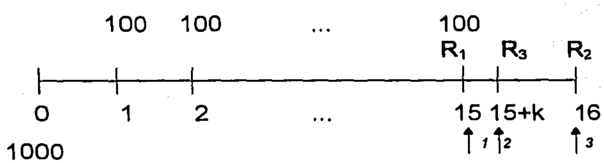
La ecuación de valor es

$$100\, a_{\overline{n}|} = 1000$$

$$a_{\overline{n}|} = 100$$

Por inspección de las tablas de interés, tenemos 15< n <16 Así, 15 pagos regulares pueden hacerse más un pago final pequeño.

FIGURA 3.7



La FIGURA 3.7 muestra un diagrama de tiempo para éste ejemplo. En ésta figurar R_1, R_2, y R_3 son los pagos finales pequeños para los tres casos arriba descritos, las flechas

1,2, y 3 marcan las fechas de comparación para los tres casos, y *k* significa lo mismo que en la Sección 3.5.

1. La ecuación de valor al final de el año 15 es:

$$10\, s_{\overline{15}|} + R_1 = 100(1.06)^{15}$$

$$R_1 = 100(1.06)^{15} - 10\, s_{\overline{15}|}$$
$$= 239.6558 - 232.7597$$
$$= \$\ 6.8961$$

2. La ecuación de valor al final del año 16 es:

$$10\, \ddot{s}_{\overline{15}|} + R_2 = 100(1.06)^{16}$$

Así,

$$R_2 = 100(1.06)^{16} - 10\,(s_{\overline{16}|} - 1)$$
$$= 254.0352 - 246.7252$$
$$= \$\ 7.310.$$

Debemos notar que 6.8961(1.06) = 7.31, o que en general $R_1(1+i)=R_2$. El estudiante deberá justificar este resultado general.

3. El siguiente enfoque probablemente será utilizado en la práctica:

$$10\, a_{\overline{15}|} = \quad 97.1225$$

$$10\, a_{\overline{15+k}|} = \ 100.000$$

$$10\, a_{\overline{16}|} = 101.0590$$

Ejecutando una interpolación lineal

$$k = \frac{100.0000 - 97.1225}{101.0590 - 97.1225} = 0.73098$$

El pago final, R_3, será 10(0. 73098)=$ 7.3098

Esta respuesta es aproximada por dos razones:

a) La interpolación lineal para k no es exacta.

b) La respuesta verdadera es $10\,\dfrac{(1.06)^k - 1}{0.06}$ en lugar de $10k$.

Una respuesta exacta puede desarrollarse como sigue:

$$10 = a_{\overline{15+k}|} = \frac{1 - v^{15+k}}{.06}$$

lo cual da

$$v^{15+k} = .4 \text{ o } (1.06)^{15+k} = 2.5$$

Utilizando logaritmos,

$$(15+k)\log_{10} 1.06 = \log_{10} 2.5,$$

$$k = \frac{-\log_{10} 2.5}{\log_{10} 1.06} - 15 = \frac{0.39794}{0.02531} - 15 = .723$$

Ahora el pago final es

$$R3 = 10 \frac{(1.06)^{.723} - 1}{.05}$$

Evaluando $(1.06)^{.723}$ utilizando logaritmos,

$$\log_{10}(1.06)^{.723} = (.723)(.02531) = 0.0183,$$

$$\text{antlog}_{10}\, 0.0183 = 1.0430$$

Así,

$$R_3 = 10 \frac{1.043 - 1}{.06} = \$\ 7.17$$

La respuesta exacta es diferente a las respuestas 1 y 2 es obvio que el método de La Sección 3.5 es inconveniente y no sólo eso, es también más difícil de utilizar si se requieren respuestas exactas.

El ejemplo 3.6. Un fondo de \$1000 acumulado por medio de depósitos de \$100 hechos al final de cada año, y tantos como sean necesarios. Si el fondo gana una tasa efectiva de interés de 2.5%, encontrar los depósitos regulares que serán necesario y el tamaño del depósito final que será hecho un año después del último depósito regular.

La ecuación de valor es

$$100\, s_{\overline{n|}} = 1000$$

$$s_{\overline{n|}} = 10$$

Por inspección de tablas de interés, tenemos 9 < n < 10. Así, tomamos nueve depósitos regulares más un depósito final pequeño, R. La ecuación de valor al final del año 10 es

$$100\, s_{\overline{9|}} + R = 1000$$

Así,

$$R = 1000 - 100(s_{\overline{10|}} - 1)$$

$$= 1000 - 1020.34$$
$$= -\$20.34$$

Lo que ha ocurrido aquí es que el último depósito regular hace que el fondo se acerque a $1000, tan sólo el interés en el último año es suficiente para hacer que el fondo sea igual o exceda de $1000. El valor en el fondo al final del año 9 es

$$100\, s_{\overline{9|}} = \$995.45$$

El valor en el fondo en el año 10 sólo con el interés en el último año es 995.45(1.025) = $1020.34 que excede al fondo deseado en $20.34. El resultado es acorde con el anterior. Este ejemplo no debe ser concebido como típico, en general es necesario un depósito final. Sin embargo, esto ilustra que existe y que se debe tener cuidado al utilizar esto para obtener respuestas razonables.

3.7. TASA DE INTERÉS DESCONOCIDA

En esta sección, consideramos el caso en que la tasa de interés es desconocida. Hay tres métodos a utilizar para este problema. El primer método es interpolación con las tablas de interés. Este método es bastante similar al que se utilizó en La Sección 2.6, y para la mayoría de trabajos prácticos es suficientemente exacto. Debemos notar que la interpolación con las tablas de interés pondría ser significativamente más exacta si estuvieran disponible funciones de interés para un gran número de tasas de interés en trabajos prácticos, tales tablas son con frecuencia disponible para un gran número de tasas de interés. El primer método es el que nosotros utilizaremos en la mayoría de los casos.

En el segundo método se utiliza una expansión de serie y se resolver por técnicas algebraicas. Por ejemplo:

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \ldots + v^n \qquad (3.1)$$

que es un polinomio de grado n con coeficientes v. Si se cuenta con una calculadora, las raíces de un polinomio de grado n puede ser encontrado o con subrutinas en una computadora estándar. Conociendo v inmediatamente determina i.

Alternativamente, podemos expresar $1/a_{\overline{n}|}$ en función de i y n

resolviendo por técnicas algebraicas, Como series, tenemos:

$$a_{\overline{n}|} = n - + \frac{n(n+1)}{3!}\, i + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\, i^2 - \ldots \qquad (3.24)$$

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|}} = \frac{1}{n}\left[1 + \frac{n+1}{2}\, i + \frac{n^2-1}{12}\, i^2 + \ldots\right] \qquad (3.25)$$

Las fórmulas (3.24) y (3.25) pueden ser utilizadas para cálculos a mano despreciando los términos de grado mayor que dos en i y resolviendo la consiguiente ecuación de segundo grado en i. Si incluimos términos de grado más altos, la precisión se mejora, pero la solución de la ecuación es más difícil. El uso de fórmulas (3.24) y (3.25) no garantiza ser completamente satisfactoria en la práctica debido al error. Ambas serie convergen, lentamente y a menudo no estamos seguros si ignorar términos de tercer grado o más altos, especialmente si n es grande. La fórmula (3.25) converge más rápidamente que la fórmula (3.24), y en general produce respuestas más exactas.

El tercer método es por aproximación o iteración sucesiva. La aproximación sucesiva puede fácilmente ser utilizada cuando la ecuación es de la forma

$$i = f(i)$$

existe. El valor verdadero de i, que es desconocido y satisface exactamente la igualdad. Ahora suponemos algún valor inicial, i_0. Entonces generamos un valor para i_1

$$i_1 = f(i_0)$$

En general i_1 distinto i_0, de modo que será necesario otro ensayo. Entonces generamos un valor para i_2

$$i_2 = f(i_1)$$

En la mayoría de los casos, los valores sucesivos i_0, i_1, i_2,.., convergerán al valor verdadero i. En la práctica, la aproximación sucesiva será llevada al cabo hasta i_n=i_n+1 según el grado requerido de precisión.

Si nosotros suponemos que el valor dado de $s_{\overline{n}|}$ es denotado por k, entonces podemos definir:

$$i = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{k},$$

es decir,

$$f(i) = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{k},$$

Ya que cada paso en la aproximación sucesiva involucró en general un retabulación de la tasa de interés, es necesario el uso de calculadora, ya sea usando logaritmos o cálculo directo. La cantidad necesaria de aproximaciones sucesiva se reduce grandemente si el valor inicial i_0 es bastante cercano a i. Un buen inicio para i_0 puede obtenerse por interpolación en las tablas de interés, es decir, por el primer método descrito anteriormente.

Ejemplo 3.7. ¿Cuál es la tasa de interés, convertible trimestralmente, si el valor presente es de $16,000 y los pagos son de $1000 al final de cada tres meses por cinco años? Utilicen los tres métodos descritos aquí.

Sea $j = i^{(4)}/4$, tal que la ecuación de valor es

$$1000\, a_{\overline{20}|j} = 16{,}000$$

O

$$a_{\overline{20}|j} = 16$$

1. Sea f(j) = $a_{\overline{20}|j}$ - 16 Buscamos j, tales que f(j) = 0. Por inspección de las tablas de interés,

f(0.02) = 16.3514 - 16 = 0.3514

Y

f(0.0225) = 15.9637 -16 = -0.0363

Y efectuamos una interpolación lineal,

$$j = 0.02 + 0.0025 \frac{0.3514 + 0}{0.3514 + 00363} = .0223$$

lo cual da

$$j^{(4)} = 4(0.0223) = 0.0892, \text{ o } 8.92\%$$

2. a) Utilizando la fórmula (3.24),

$$16 = 20 - \frac{20(21)}{2} j + \frac{10(21)(22)}{6} j^2$$

O

$$1540 j^2 - 210 j + 4 = 0$$

Y resolvemos la ecuación de segundo grado,

$$j = \frac{210 \pm \sqrt{44{,}100 - 24{,}640}}{3080} = 0.0229,$$

lo cual da

$$i^{(4)} = 4(0.0229) = 0.0916, \text{ o } 9.16\%$$

b) Usando la fórmula (3.25)

$$\frac{1}{16} = \frac{1}{20}\left[1 + \frac{21}{2} j + \frac{399}{12} j^2\right]$$

o

$$532j^2 + 168j - 4 = 0$$

Y resolver la ecuación de segundo grado,

$$j = \frac{-168 \pm \sqrt{28{,}224 + 8521}}{1064} = 0\,.\,0222,$$

lo cual da $i^{(4)} = 4\,(0.0222) = 0.0888$ 0 8.88% Así, en este ejemplo, la fórmula (3.25) es más congruente con la respuesta (1) que con la fórmula (3.24).

3. Utilizando el principio de aproximación sucesivo con j_0=0.0225, tenemos

$$j_1 = \frac{1 - (1.0225)^{-20}}{16} = \frac{1 - .64082}{16} = 0.0224$$

$$j_1 = \frac{1 - (1.0225)^{-20}}{16} = \frac{1 - .64207}{16} = 0.0224$$

Así j = 0.0224 o $i^{(4)}$ = 0.0896, o 8.96%. Debemos notar que la aproximación sucesiva puede ser llevado a cualquier grado de precisión tomando más decimales. Debemos notar también que cualquier error en los cálculos será corregido automáticamente en las iteraciones subsiguientes si el trabajo hecho después es correcto.

3.9. INTERÉS VARIABLE

Es posible derivar expresiones generales para $a_{\overline{n}|}$ y $s_{\overline{n}|}$ con interés variable en términos de la función de acumulación. Cualquier patrón de variaciones de interés se refleja directamente en la función de acumulación. El valor presente de una anualidad vencida a n años es igual a la suma de los valores presentes de los pagos individuales. Así, una versión generalizada de La fórmula (3.1) es

$$a_{\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{1} \frac{n}{a(t)} \qquad (3.26)$$

El valor acumulado de una anualidad vencida a n años es igual a el valor acumulado después de n años . Así, tenemos

$$s_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|} \sum_{t=1}^{1} \frac{n}{a(t)} \qquad (3.27)$$

Mientras que las fórmulas generales (3.26) y (3.27) pueden ser utilizadas para encontrar valores de una anualidad con interés variable, en la práctica situaciones de éste tipo son muy comunes

Frecuentemente se puede mejorar utilizando símbolos de anualidad ya definidos. El siguiente ejemplo ilustra esto.

Ejemplo 3.8. Encuentre el valor acumulado de una anualidad vencida de $100 por año si la tasa efectiva de interés es del 5% para los primeros 6 año y 4% durante los últimos 4 años.

El valor acumulado de los primeros seis pago después de seis años es:

$$100\, s_{\overline{6}|.05}$$

El valor acumulado al final de los 10 años al 4%, da:

$$100\, s_{\overline{6}|.04}\,(1.04)^{4}$$

El valor acumulado de los últimos cuatro pago es:

$$100\, s_{\overline{4}|.04}$$

Así, la respuesta es:

$$100(s_{\overline{6}|.05}\,(1.04)^{4}+100\, s_{\overline{4}|.04})$$

$$= 100((6.8019)(1.16986)+4.2465)$$
$$= \$1220.38.$$

CAPÍTULO 4.

ANUALIDADES MÁS GENERALES

4.1. ANUALIDADES PAGADERAS MENOS FRECUENTEMENTE QUE LA CONVERTIBILIDAD DEL INTERÉS

En esta sección se examinan anualidades en las cuales el período de pago es menos frecuente que la convertibilidad de la tasa de interés, esta sección estará subdividida en las siguientes partes: (1) anualidades vencidas, (2) anualidades anticipadas, y (3) otras anualidades.

Anualidades vencidas

Sea k el número de veces que es convertible el interés en un período de pago, sea n el término de la anualidad medida en períodos de conversión de interés, y sea i la tasa de interés convertible por período. Nosotros supondremos que cada fecha de pago contiene un número entero de períodos de conversión. Así, el número de pagos hechos n/k, es entero.

El valor presente de una anualidad de 1 al cabo de cada k períodos de conversión de interés para un total de n períodos de conversión de interés es:

$$v^k + v^{2k} + \ldots + v^{(n/k)k} = \frac{v^k - v^{n+k}}{1 - v^k}$$

$$= \frac{1-v^n}{(1+i)^k - 1}$$

$$= \frac{(1-v^n)/i}{((1+i)^k-1)/i}$$

$$= \frac{s_{\overline{n}|}}{a_{\overline{k}|}} \qquad (4.1)$$

Así, tenemos por ahora una expresión para esta anualidad en términos de símbolos de anualidad ya definidas.

Usando la fórmula (4.1), el valor acumulado, inmediatamente después del último pago, de esta anualidad es:

$$\frac{a_{\overline{n}|}}{s_{\overline{k}|}}(1+i)^n = \frac{s_{\overline{n}|}}{s_{\overline{k}|}} \qquad (4.2)$$

Es posible derivar la fórmula (4.1) y (4.2) con un argumento alternativa. Si consideramos que la serie de pagos de 1 al cabo de cada k período de conversión de interés para *n* períodos de conversión de interés pueden ser reemplazados por una serie de pagos de *R* al final de cada período de conversión de interés de modo que los valores presentes sean iguales. El valor presente de esta serie es:

$$R\,a_{\overline{n}|}$$

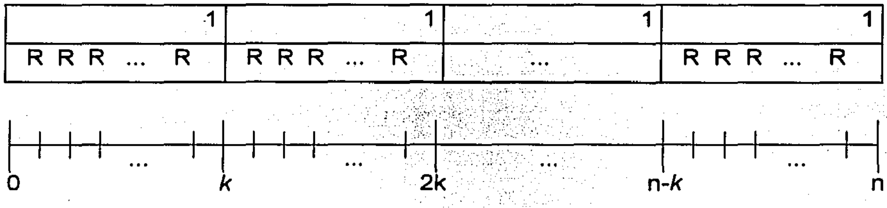
Ahora considere algún período de pago que contiene *k* períodos de conversión de interés. Al cabo del período de pago el valor acumulado de *R* pagos al final de cada período de conversión de interés tiene que ser igual a 1 hecho en ese punto. Así,

$$R\,s_{\overline{k}|}=1$$

Y substituyendo $R=1/\,s_{\overline{k}|}$ en $R\,a_{\overline{n}|}$, se obtiene la fórmula (4.1). La fórmula (4.2) puede ser derivada por un argumento similar.

La figura 4.1 es un diagrama de tiempo que aclara los argumentos anteriores.

FIGURA 4.1



Anualidades anticipadas

El valor presente de una anualidad de 1 al inicio de cada k períodos de conversión de interés para un total de n periodos de conversión de interés es

$$1 + v^k + v^{2k} + \ldots + v^{n-k} = \frac{1 - v^n}{1 - v^k}$$

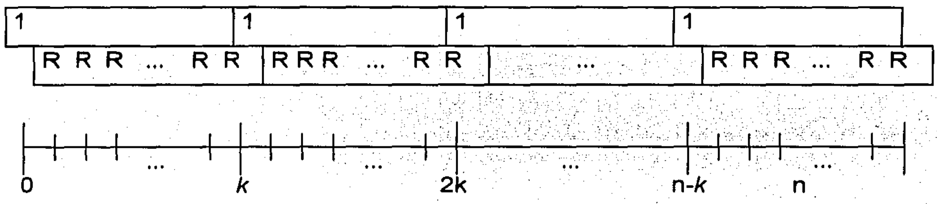
$$= \frac{a_{\overline{n}|}}{a_{\overline{k}|}} \qquad (4.4)$$

El valor acumulado de esta anualidad de k períodos de conversión de interés después de que el último pago fue hecho es:

$$\frac{a_{\overline{n}|}}{a_{\overline{k}|}}\,(1+i)^n = \frac{s_{\overline{n}|}}{a_{\overline{k}|}} \qquad (4.4)$$

Es posible derivar las fórmulas (4.3) y (4.4), por medio de un argumento alternativo análogo al argumento que se utilizó anteriormente para las anualidades vencidas. El estudiante debería dar los detalles de este argumento. La figura 4.2 es un diagrama de tiempo para este caso.

FIGURA 4.2



Otras anualidades

Ocasionalmente una perpetuidad es pagadera menos frecuentemente que la convertibilidad del interés. El valor presente de una perpetuidad anticipada es:

$$v^k + v^{2k} + \dots = \frac{v^k}{1 - v^k}$$

$$= \frac{1}{(1+i)^k - 1}$$

$$= \frac{1}{i s_{\overline{k}|}} \qquad (4.5)$$

Análogamente, el valor presente de una perpetuidad vencida es:

$$= \frac{1}{i\,a_{\overline{k|}}} \qquad (4.6)$$

El ejemplo 2.8 nos muestra una perpetuidad anticipada cuyo período es pagadero menos frecuentemente que la convertibilidad del interés.

Un segundo caso especial que se presenta ocasionalmente es encontrar el valor de una serie de pagos con una fuerza dada de interés δ. Aunque es de las anualidades cuyo período es pagadero menos frecuentemente que la convertibilidad del interés, esta situación es manejada adecuadamente por los métodos ya discutidos en el Capítulo 2, ya que *n* y *k* tienden ambos a infinitos. Esta situación puede manejarse escribiendo una expresión para el valor de la anualidad como la suma de valores presentes o los valores acumulados de cada uno de los pagos separados, reemplazando con v^{tk} por $e^{-\delta tk}$ y $(1+i)^{tk}$ por $e^{\delta tk}$. Esta expresión puede entonces ser sumada como una progresión geométrica .

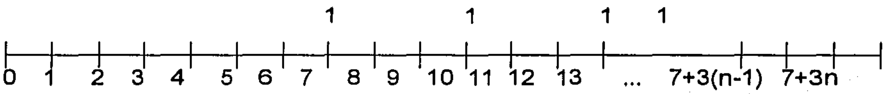
El caso especial de un tercio, se encuentra raramente en la práctica, es una situación en la que cada período de pago no contiene un número entero de períodos de conversión de interés. Aquí, de nuevo, el mejor enfoque es recurrir a los principios básicos, *es decir*, escribir a una expresión como la suma de valores presentes o los valores acumulados de cada uno de los pagos separados, y entonces sumar esta expresión como una progresión geométrica.

Debemos observar que no existe un símbolo de anualidad para las expresiones de las fórmulas (4.1) a (4.6) . Estas sólo están en función de anualidades ordinarias.

Finalmente, es posible generalizar el enfoque para encontrar valores de anualidad en cualquier fecha, como las discutidas en la Sección 3.3, anualidades donde los pagos son menos frecuentes que la convertibilidad del interés. El siguiente ejemplo ilustra esto, así como gran parte del resto de esta sección.

El ejemplo 4.1. Encuentra una expresión para el valor presente de una anualidad en la cual hay un total de n pagos de 1; los primeros son hechos al final del año siete, y los pagos restantes en 4 intervalos de tres año, a una tasa efectiva i (1) expresado como anualidad vencida y (2) como anualidad anticipada.

FIGURA 4.3



El valor presente de esta anualidad está dado por

$$v^7 + v^{10} + v^{13} + \ldots + v^{3n+4}$$

1. Sumando la progresión geométrica, tenemos

$$\frac{v^7 - v^{3n+7}}{1 - v^3} = \frac{v^4 - v^{3n+4}}{(1+i)^3 - 1} = \frac{(1 - v^{3n+4}) - (1 - v^4)}{(1+i) - 1}$$

$$= \frac{a_{\overline{3n+4}|} - a_{\overline{4}|}}{s_{\overline{3}|}}$$

Observe que la forma de la anualidad anticipada está caracterizada por $s_{\overline{3}|}$ en el denominador.

2. Sumando la progresión geométrica, tenemos

$$\frac{v^7 - v^{3n+7}}{1 - v^3} = \frac{(1 - v^{3n+7}) - (1 - v^7)}{1 - v^3}$$

$$= \frac{a_{\overline{3n+7}|} - a_{\overline{7}|}}{a_{\overline{3}|}}$$

Observe que la forma anualidad vencida, se caracteriza por $a_{\overline{3}|}$ en el denominador.

Con la práctica el estudiante debería escribir directamente la respuesta a problemas ya sea de la forma anualidad anticipada o anualidad vencida sin sumar la progresión geométrica.

4.2. ANUALIDADES PAGADERAS MÁS FRECUENTEMENTE QUE LA CONVERSIÓN DEL INTERÉS

En esta sección analizaremos las anualidades cuyo período de pago es más frecuente que la convertibilidad del interés. En la práctica las anualidades cuyo período de pago es más frecuente que la convertibilidad del interés son más comunes que las anualidades cuyo período de pago es menos frecuente que la convertibilidad del interés. Esta sección será subdividida en las siguientes partes: (1) anualidad anticipada, (2) anualidad vencida y (3) otras anualidades.

Anualidades vencidas

Sea *m* el número de períodos de pago en un período de conversión de interés, Sea *n* el término de la anualidad medida en períodos de conversión de interés, y sea *i* la tasa de interés por período de conversión. Nosotros supondremos que cada período de conversión de interés contiene un número entero de períodos de pago. Así, la cantidad de pagos de la anualidad es un entero.

El valor presente de una anualidad que paga *1/m* al cabo de cada *m-ésimo* de un período de conversión de interés para un total de *n* períodos de conversión de interés se denota $a^{(m)}_{\overline{n}|}$. Tenemos

$$a^{(m)}_{\overline{n}|} = 1/m[\, v^{1/m} + v^{2/m} + \ldots + v^{n-(1/m)} + v^{n} \,]$$

$$= 1/m \; \frac{v^{1/m} - v^{n+(1/m)}}{1 - v^{1/m}}$$

$$= \frac{1 - v^{n}}{m[(1+i) -1]}$$

$$= \frac{1 - v^{n}}{i^{(m)}} \qquad (4.7)$$

El valor acumulado después de que el último pago se hizo lo denotamos por $s^{(m)}_{\overline{n}|}$, y tenemos

$$s^{(m)}_{\overline{n}|} = a_{(m)\overline{n}|}(1+i)^{m} \qquad (4.8)$$

$$= \frac{(1+i)^{n} - 1}{i^{(m)}}$$

Las fórmulas (4.7) y (4.8) deben compararse con las fórmulas (3.2) y (3.4), respectivamente. Son idénticas excepto que los denominadores de (4.7) y (4.8) son $i^{(m)}$ en lugar de *i*, ya que $i^{(m)}$ es una medida de interés pagadera al cabo del cada *m-ésimo* de período de conversión del interés, los puntos en los que el interés es pagado bajo esta medida son consistentes con los puntos en que los pagos se hacen. Esta fórmula, que relaciona los pagos y la medida de interés en el denominador, se mencionó originalmente en la Sección 3.2.

Es posible escribir $s^{(m)}_{\overline{n|}}$ y $a^{(m)}_{\overline{n|}}$ función de $a_{\overline{n|}}$ y $s_{\overline{n|}}$ con un factor de ajuste. Las siguientes son consecuencias inmediatas de la fórmulas (4.7) y (4.8):

$$a^{(m)}_{\overline{n|}} = \frac{i}{i^{(m)}}\, a_{\overline{n|}} \qquad (4.9)$$

y

$$s^{(m)}_{\overline{n|}} = \frac{i}{i^{(m)}}\, s_{\overline{n|}} \qquad (4.10)$$

Las fórmulas (4.9) y (4.10) son utilizadas comúnmente para obtener resultados numéricos. El término $i/i^{(m)}$ se obtiene escribiendo $s^{(m)}_{\overline{1|}}$, que es consistente con la fórmula (4.8), tomando $n = 1$.

Otra relación entre $a^{(m)}_{\overline{n|}}$ y $s^{(m)}_{\overline{n|}}$ es.

$$\frac{1}{a^{(m)}_{\overline{n|}}} = \frac{1}{s^{(m)}_{\overline{n|}}} + i^{(m)} \qquad (4.11)$$

Esta fórmula es análoga a la fórmula (3.6), y la derivación es similar.

Anualidad anticipada

El valor presente de una anualidad de $1/m$ al comienzo de cada *m-ésimo* de período de conversión de interés para un total de n períodos de conversión del interés es denotado por

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n|}}$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n|}} = 1/m\,(1 + v^{1/m} + v^{2/m} + \ldots + v^{n-(1/m)})$$

$$= \frac{1-v^n}{m\,(1 - v^{1/m})}$$

$$= \frac{1-v^n}{m\,[\,1 - (1 - d)^{1/m}]}$$

$$= \frac{1-v^n}{d^{(m)}} \qquad (4.12)$$

El valor acumulado de esta anualidad de un *m-ésimo* de período de conversión de interés después de que se hace el último pago, se denota por $\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n|}}$ y tenemos

$$\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n|}} = \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n|}}(1+i)^n$$

$$= \frac{(1+i)^n - 1}{d^{(m)}} \qquad (4.13)$$

De nuevo, debemos notar la relación entre la manera en que los pagos se hacen y la medida del interés en el denominador. Es una consecuencia inmediata de las fórmulas (4.12) y (4.13) que:

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n|}} = \frac{i}{d^{(m)}}\, a_{\overline{n|}} \qquad (4.14)$$

$$\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n|}} = \frac{i}{d^{(m)}}\, s_{\overline{n|}} \qquad (4.15)$$

Las fórmulas (4.14) y (4.15) pueden ser utilizadas para obtener resultados numéricos. $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}$ $= d/d^{(m)}\, \ddot{a}_{\overline{n}|}$ y $\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n}|} = d/d^{(m)}\, \ddot{s}_{\overline{n}|}$ utilizando la relación entre la manera en que los pagos se hacen y la medida de interés en el denominador. Sin embargo, las fórmulas (4.14) y (4.15) son utilizadas con más frecuencia. En la práctica, los valores de $i/d^{(m)}$ no están disponibles. Sin embargo, hay tres métodos alternativos de obtener resultados numéricos para $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}$ y $\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n}|}$

En el primer método se utiliza lo siguiente:

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} = 1/m + a^{(m)}_{\overline{n-1/m}|} \qquad (4.16)$$

y

$$\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n}|} = s^{(m)}_{\overline{n+1/m}|} - 1/m \qquad (4.17)$$

Estas fórmulas son análogas a las fórmulas (3.15) y (3.16), y sus derivaciones son similares

En el segundo método se utiliza lo siguiente:

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} = a^{(m)}_{\overline{n}|}(1+i)^{1/m} \qquad (4.18)$$

y

$$\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n}|} = s^{(m)}_{\overline{n}|}(1+i)^{1/m} \qquad (4.19)$$

Las fórmulas son análogas a las fórmulas (3.13) y (3.14). Las derivaciones son inmediatas, ya que cada pago bajo $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}$ se hace en un *m-ésimo* de período de conversión de interés lo que anteriormente se hacía bajo $a^{(m)}_{\overline{n}|}$, e igualmente para $\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n}|}$ y $s^{(m)}_{\overline{n}|}$

En el tercer método se utiliza lo siguiente:

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} = (1+i)^{1/m}\, a^{(m)}_{\overline{n}|}$$

$$= \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right) \frac{i}{i^{(m)}}\, a_{\overline{n}|}$$

$$= \left(\frac{i}{i^{(m)}} + \frac{i}{m}\right) a_{\overline{n}|} \qquad (4.20)$$

e igualmente,

$$\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n}|} = \left(\frac{i}{i^{(m)}} + \frac{i}{m}\right) s_{\overline{n}|} \qquad (4.21)$$

También, tenemos las siguiente fórmula análogas a la fórmula (3.12),

$$\frac{1}{\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}} = \frac{1}{\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n}|}} + d^{(m)} \qquad (4.22)$$

Otras consideraciones

Ocasionalmente encontramos, una perpetuidad pagadera más frecuentemente que la convertibilidad de la tasa. Las siguientes fórmulas son análogas a las fórmulas (3.20) y (3.21).

$$a^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{i^{(m)}} \qquad (4.23)$$

y

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{d^{(m)}} \tag{4.24}$$

Un segundo caso especial encontrado raramente en la práctica es una situación en la que cada período de conversión de interés no contiene un número entero de períodos de pago. En este caso, el mejor enfoque sería recurrir a principios básicos, es decir, escribir una expresión como la suma de valores presentes o los valores acumulados de cada uno de los pagos separados y entonces sumar esta expresión como una progresión geométrica. Otro problema que es muy importante en la práctica involucra los coeficientes adecuados para anualidades pagaderas *m* veces. Cada pago hecho es de 1/*m*, mientras el coeficiente del símbolo es 1. En general, el coeficiente adecuado es la cantidad pagada durante un período de conversión de interés y no la cantidad de cada pago real. La cantidad pagada durante un período de conversión de interés es con frecuencia llamado el aniversario de la anualidad. Este es un término apropiado si el período de conversión de interés es un año, como es frecuente pero es confuso si el período de conversión de interés es diferente a un año. Algunas veces el término periódico se utilizado en lugar de "aniversario".

Finalmente, es posible generalizar el enfoque y encontrar valores de anualidad en cualquier fecha, como lo discutido en la Sección 3.4, anualidades pagaderas más frecuentemente que la convertibilidad de la tasa. El siguiente ejemplo ilustra esto, así como gran parte del resto de esta sección.

Ejemplo 4.2. Se hacen pagos mensuales de \$10 a partir de Julio 1, 1980, a Junio 1, 1990, inclusive. Si la tasa efectiva de interés es de 3% encontrar el valor presente de los pagos (1) en junio ,1980,y (2) en Julio 1, 1975.

1. La respuesta es:

$$120\, a^{(12)}_{\overline{10}|} = 120\ \left(i / i^{(12)}\right) a_{\overline{10}|}$$

$$=120(1.016177)(11.9379 - 4.5797) = \$897.27$$

2. La respuesta es

$$120\left(\ddot{a}^{(12)}_{\overline{15}|}-\ddot{a}^{(12)}_{\overline{5}|}\right)=120(i/d^{(12)})\left(a_{\overline{15}|}-a_{\overline{5}|}\right)$$

$$=120(1.016177)(11.9379 - 4.5797)$$

$$= \$897.27$$

4.3. ANUALIDADES CONTINUAS

Un caso especial de anualidades pagaderas más frecuentemente que la convertibilidad del interés es en la que la frecuencia de pago es infinito, es decir, los pagos son continuos. Aunque difícil de visualizar en la práctica, una anualidad continua es de interés teórico. También, es útil como una aproximación para anualidades pagaderas con gran frecuencia, como diario o semanal.

Nosotros denotaremos el valor presente de una anualidad continuamente pagadera para n períodos de conversión de interés, tal que la cantidad total pagada durante cada período de conversión de interés es de 1, por el símbolo $\bar{a}_{\overline{n}|}$ Una expresión para $\bar{a}_{\overline{n}|}$ es

$$\bar{a}_{\overline{n}|}=\int_0^n v^t\,dt \qquad (4.25)$$

la expresión diferencial $v^t\,dt$ es el valor presente del pago hecho en el momento exacto t.

Una expresión simplificada puede obtenerse integrando

$$\bar{a}_{\overline{n|}} = \int_0^n v^t \, dt$$

$$= \left. \frac{v}{\log_e v} \right]_0^n$$

$$= \frac{1 - v^n}{\delta} \qquad (4.26)$$

La fórmula (4.26) es análoga a la fórmula (3.2). De nuevo, hay consistencia entre la manera en que los pagos se hacen y el denominador de la expresión.

También la fórmula (4.26) pudo obtenerse como sigue:

$$\bar{a}_{\overline{n|}} = \lim_{m \to \infty} a^{(m)}_{\overline{n|}} = \lim_{m \to \infty} \frac{1 - v^n}{i^{(m)}} = \frac{1 - v^n}{\delta}$$

O

$$\bar{a}_{\overline{n|}} = \lim_{m \to \infty} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n|}} = \lim_{m \to \infty} \frac{1 - v^n}{d^{(m)}} = \frac{1 - v^n}{\delta}$$

Así, la anualidad continua son vistas como el límite de anualidades pagaderas *m* veces.

Es posible escribir $\bar{a}_{\overline{n|}}$ en función de $a_{\overline{n|}}$ con un factor de ajuste como sigue:

$$\bar{a}_{\overline{n|}} = \frac{1}{\delta} \, \bar{s}_{\overline{n|}} \, a_{\overline{n|}} \qquad (4.27)$$

El valor acumulado de una anualidad continua al cabo del término de la anualidad se denota por $\bar{s}_{\overline{n}|}$. Las siguientes relaciones se cumplen:

$$\bar{s}_{\overline{n}|} = \lim_{m \to \infty} s^{(m)}_{\overline{n}|} = \lim_{m \to \infty} \ddot{s}^{(m)}_{\overline{n}|}$$

$$= \int_0^n (1+i)^t \, dt \qquad (4.28)$$

$$= \left. \frac{(1+i)^t}{\log_e (1+i)} \right]_0^n$$

$$= \frac{(1+i)^n - 1}{\delta} \qquad (4.29)$$

$$= \frac{i}{\delta} s_{\overline{n}|} \qquad (4.30)$$

Si tuviéramos una anualidad continua y si el interés fuera convertible continuamente, entonces la fórmula (4.26) se puede escribir como:

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \frac{1 - e^{-n\delta}}{\delta} \qquad (4.31)$$

y la fórmula (4.29) pueden ser escrita como:

$$\bar{s}_{\overline{n}|} = \frac{1 - e^{-n\delta}}{\delta} \qquad (4.32)$$

Este es un caso de una anualidad en la que el período de conversión del interés y el período de pago son iguales pero que no fue considerado en el Capítulo 3.

Ejemplo 4.3 Un dinero es depositado en un fondo continuamente por 20 años a razón de \$1 anualmente para los primeros 10 años y \$2 anualmente por los segundos 10 años. El fondo gana una tasa efectiva de interés de 5%. Al cabo de 20 años, la cantidad en el fondo es cambiada con una anualidad al comienzo de cada año pagadera cada año por otros 10 años. Encuentre la cantidad del pago de la anualidad si fuera 4% sobre el período final de 10 años.

Sea R el pago de la anualidad. Entonces la ecuación de valor al cabo de 20 años es:

$$\bar{s}_{\overline{20}|.05} + \bar{s}_{\overline{10}|.05} = R\,\ddot{a}_{\overline{10}|.04}$$

$$R = \frac{i/\delta\,(s_{\overline{20}|.05} + s_{\overline{10}|.05})}{1 + a_{\overline{9}|.04}}$$

$$= \frac{(1.0247979)\,(33.0660+12.5779)}{1 + 7.4353}$$

$$= \$5.55$$

4.4. EL TIEMPO Y LA TASA DE INTERÉS DESCONOCIDOS

Anteriormente, en cualquier problemas de anualidades que involucraron pagos más o menos frecuentemente que la convertibilidad de la tasa, hemos supuesto que n e i son ambos conocidos. En esta sección nosotros consideramos los casos en que alguno de los dos es desconocido. Gran parte del material lo contuvo la Secciones 3.6 y 3.7

Como calcular el tiempo

Como en el Capítulo 3, cuando desconosemos el tiempo generalmente no producirá respuestas exactamente enteras para *n,* de nuevo un pago más pequeño se hace ya sea al mismo tiempo que el último pago regular o se hace en un período de pago posterior.

Un problema que inmediatamente aparece es que *n* es la cantidad de períodos de conversión de interés y no la cantidad de pagos. Después de que *n* se obtiene, tendremos que traducirlo a un número de pagos.

El caso de anualidades pagaderas menos frecuentemente que el interés no causa dificultad y puede ser manejado como en la Sección 3.6.

El caso de anualidades pagaderas más frecuentemente que la convertibilidad del interés no presenta problema como antes podemos encontrar dos enteros entre los cuales se encuentre *n*. Sin embargo, esta no es información suficiente para una solución completa. Por ejemplo, si el interés fuera convertible anualmente y los pagos son mensuales, entonces encontramos que $5<n<6$ significa que el número de pagos esta entre 60 y 72. interpolándolo es en general posible estar cerca de la cantidad de pagos. Una solución exacta por este tipo de problema requiere el uso de tablas de anualidad con valores en *m-ésimo*s

La tasa de interés desconocida

Para problemas que involucran una tasa desconocida de interés en general se resuelven mejor con una tasa de interés por periodo de pago. Esto se puede hacer como en la Sección 3.7. Entonces una tasa de interés convertible con la frecuencia deseada, equivalente a la tasa por periodo de pago, puede encontrarse por el método descrito en la Sección 1.7. Este enfoque trabaja igualmente bien para anualidades pagaderas más o menos frecuentemente que el interés.

Ejemplo 4.4. Una inversión de \$1000 es utilizada para hacer pagos de \$100 al cabo de cada año, tantos pagos como sea posible. El pago pequeño es hecho en el momento del último pago regular. Si el interés es del 7% convertible semestral, encuentra el número de pagos y la cantidad del pago final.

La ecuación de valor es:

$$100\,\frac{a_{\overline{n|}\,0.035}}{s_{\overline{2|}\,0.035}} = 1000$$

o

$$a_{\overline{n|}\,0.035} = 10\,s_{\overline{2|}\,0.035} = 20.35$$

Por inspección de las tablas de interés, tenemos $36 < n < 37$. Así, tenemos 18 pagos regulares y un pago final más pequeño puede ser hecho. sea R el pago final más pequeño. Entonces una ecuación de valor al cabo de 18 años es:

$$R + 100\,\frac{s_{\overline{36|}\,.035}}{s_{\overline{2|}\,.035}} = 1000(1.035)^{36}$$

o

$$R = 1000(3.45027) - 100 = \frac{70.0076}{2.0350}$$

$$= \$10.09$$

El pago final total es de \$110.09.

Ejemplo 4.5. Una inversión de \$10,000 se usa para hacer pagos de \$100 al comienzo de cada mes en tanto sea posible, con un pago final más pequeño hecho un mes después del último pago regular. Sí la tasa efectiva de interés es del 3%, encuentra el número de pagos y la cantidad del pago final más pequeño.

Sea n el número de pagos mensuales. La ecuación de valor es:

$$1200\,\ddot{a}^{(12)}_{\overline{\frac{n}{12}}|} = 10000$$

$$12\,\ddot{a}^{(12)}_{\overline{\frac{n}{12}}|} = 100$$

$$12\,a^{(12)}_{\overline{\frac{n-1}{12}}|} = 99$$

Por inspección de las tablas de interés, tenemos 113<n-1<114 o 114<n<115. Así, hay 114 pagos mensuales regulares y un pago final más pequeño.

$$v^{114/12}\,12a^{(12)}_{\overline{\frac{114}{12}}|} - 12a^{(12)}_{\overline{\frac{113}{12}}|} = 99.27022 - 98.51505 = .75517$$

sea R el pago final más pequeño. Entonces la ecuación de valor es:

$$1200a^{(12)}_{\overline{\frac{114}{12}}|} - Rv^{114/12} = 10000$$

$$R = \frac{10000 - 100(1+12a^{(12)}_{\overline{\frac{114}{12}}|})}{v^{114/12}}$$

$$\frac{10000\text{-}100(1+1.98.51505)}{0.75517} = \$64.22$$

El estudiante debería recordar que la respuesta a este tipo de problema tendría que ser menos que \$100. Si el resultado es mayor a \$100, obviamente se ha cometido un error

Ejemplo 4.6. ¿a qué tasa efectiva de interés con pagos de \$100 al cabo de cada cuatro periodos acumulan \$2500 al cabo de cinco años?

Sea j la tasa de interés por trimestre que logra lo anterior. Entonces la ecuación de valor al cabo de cinco años es:

$$100\, s_{\overline{20}|j} = 2500 \quad \text{o} \quad s_{\overline{20}|j} = 25$$

Definiendo $f(j) = s_{\overline{20}|} - 25$. Buscamos j, tal que $f(j) = 0$. Por inspección de las tablas de interés,

$$f(0.225) = 24.9115 - 25 = -.0885$$
$$f(0.0250) = 25.5447 - 25 = .5447.$$

Y ejecutamos una interpolación lineal,

$$j = 0.0225 + 0.0025 \quad \frac{0 + 0.0885}{0.5447 + 0.0885} \quad = 0.0228.$$

Entonces la tasa efectiva que encontramos es:

$$i = (1.0228) - 1 = 0.0944, \text{ o } 9.44\%$$

4.5. ANUALIDADES VARIABLES ELEMENTALES

Anteriormente las anualidades consideradas tenían una serie constante de pagos. Ahora retiramos esta restricción y consideramos anualidades con una serie variable de pagos. En La

Sección 4.5., supondremos que el período de conversión, de interés, y el período de pago son iguales.

Naturalmente, cualquier tipo de anualidad variable puede ser evaluado tomando el valor presente o el valor acumulado de cada pago separadamente y sumando los resultados. Ocasionalmente, este puede ser el único medio posible.

Sin embargo, hay varios tipos de anualidades variables para las que son posibles expresiones relativamente simples, y nosotros consideraremos estos casos.

Los siguientes tipos de anualidades variables se discuten en esta sección: (1) pagos variables progresión aritmética, (2) variación de pagos en progresión geométrica, y (3) otros patrones de pagos.

(1) Pagos variables en progresión aritmética

Considere una anualidad vencida con un término de n años en la que los pagos comiencen a aumentar en P por año después de Q años. La figura 4.4 es un diagrama de tiempo para esta anualidad. Debemos notar que P tiene que ser positivo pero Q puede ser ya sea positivo o negativo en tanto $P+(n-1)Q>0$.

$$A = Pv + (P+Q)v + (P+2Q)v^2 + \ldots + [P + (n-2)Q]v^{n-1} + [P+(n-1)Q]v^n$$

Y

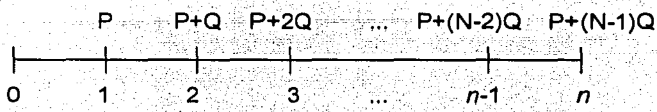
$$(1+i)A = P + (P+Q)v + (P+2Q)v^2 + (P+3Q)v^3 + \ldots + [P+(n-1)Q]v^{n-1}$$

Ahora substrayendo la primera ecuación en la segunda,

$$iA = P + Q\,(v + v + v + \ldots + v^{n-1}) - Pv^n - (n-2)Qv^n$$

$$= P(1 - v^n) + Q(v + v^2 + v^3 + \ldots + v^{n-1} + v^n) - Qnv^n .$$

FIGURA 4.4



Entonces:

$$A = P\,\frac{1 - v^n}{i} + Q\,\frac{a_{\overline{n}|} - nv^n}{i}$$

$$= P\,a_{\overline{n}|} + Q\,\frac{a_{\overline{n}|} - nv^n}{i} \qquad (4.33)$$

El valor acumulado es:

$$= P\,s_{\overline{n}|} + Q\,\frac{s_{\overline{n}|} - n}{i} \qquad (4.34)$$

ya que tiene que ser el valor presente acumulado por n años.

Las fórmulas (4.33) y (4.34) pueden ser utilizadas para resolver cualquier problema en el que los pagos varíen en progresión aritmética y tienen notación especial.

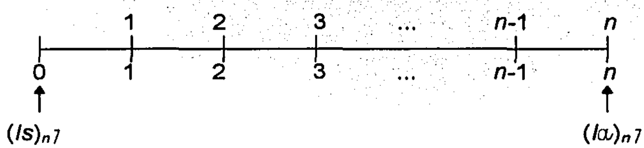
El primero de estos es la anualidad creciente en la que P=1 y Q=1. La figura 4.5 es un diagrama de tiempo para esta anualidad. El valor presente de la anualidad, denotada por $(Ia)_{\overline{n}|}$ es:

$$
\begin{aligned}
(Ia)_{\overline{n|}} &= a_{\overline{n|}} + \frac{a_{\overline{n|}} - nv^n}{i} \\
&= \frac{1 - v^n + a_{\overline{n|}} - nv^n}{i} \\
&= \frac{\ddot{a}_{\overline{n+1|}} - (n+1)v^n}{i} \\
&= \frac{\ddot{a}_{\overline{n|}} - nv^n}{i} \qquad (4.35)
\end{aligned}
$$

El valor acumulado de la anualidad, denotada por $(Is)_{\overline{n|}}$, es:

$$
\begin{aligned}
(Is)_{\overline{n|}} &= (Ia)_{\overline{n|}}(1 + i)^n \\
&= \frac{\ddot{s}_{\overline{n|}} - n}{i} = \frac{s_{\overline{n+1|}} - (n+1)}{i} \qquad (4.36)
\end{aligned}
$$

FIGURA 4.4



El segundo es la anualidad decreciente con P = n Q = 1. la Figura 4.6 es un diagrama de tiempo por esta anualidad. El valor presente de esta anualidad, denotada por $(Da)_{\overline{n|}}$ es:

$$(Da)_{\overline{n}|} = na_{\overline{n}|} - \frac{a_{\overline{n}|} - nv^n}{i}$$

$$= \frac{n - nv^n - a_{\overline{n}|} + nv^n}{i}$$

$$= \frac{n - a_{\overline{n}|}}{i} \qquad (4.37)$$

El valor acumulado de esta anualidad, denotada por $(Ds)_{\overline{n}|}$ es:

$$(Ds)_{\overline{n}|} = (Da)_{\overline{n}|}(1 + i)^n$$

$$= \frac{n(1 + i)^n - s_{\overline{n}|}}{i} \qquad (4.38)$$

Todas las fórmulas anteriores son para anualidades vencidas. Sin embargo, podemos utilizar la relación previamente mencionada, entre la manera en la que los pagos son hecho y el denominador de la expresión, para encontrar fórmulas de anualidades anticipadas,. Cambiando i en el denominador de cualquiera de la anterior por d producirá valores para anualidades anticipadas.

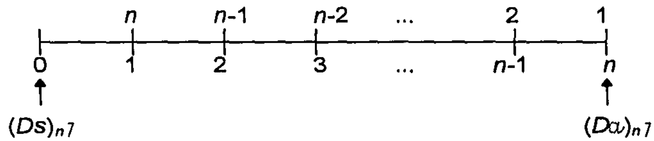
También, es posible tener perpetuidades variables. Podemos encontrar la forma general para una perpetuidad tomando el límite de la fórmula (4.33) cuando n tiende a infinito, obteniendo.

$$\frac{P}{i} + \frac{Q}{i}, \qquad (4.39),$$

$$\lim_{m \to \infty} a_{\overline{n}|} = \frac{1}{i} \qquad y \qquad \lim_{m \to \infty} nv^n = 0$$

Observe que Q y P tiene que ser ambos positivos para evitar pagos negativos.

FIGURA 4.5



(2) Pagos variables en progresión geométrica

Considere una anualidad vencida con un término de n años en la que los primeros pagos son de 1 y los pagos sucesivos aumentan en progresión geométrica con razón común $(1+k)$. El valor presente de esta anualidad es:

$$v + v^2 (1+k) + \ldots + v^n (1+k)^{n-k}$$

Sin embargo, esta es una progresión geométrica cuya suma es:

$$v \left[\frac{1 - \left(\frac{1+k}{1+i}\right)^n}{1 - \frac{1+k}{1+i}.} \right] = \frac{1 - \left(\frac{1+k}{1+i} \right)^n}{i - k} \qquad (4.40)$$

En General, esta expresión tendrá que ser evaluada por cálculo directo. Sin embargo, ocasionalmente, ya sea $(1+k)/(1+i)$ o $(1+i)/1+k)$ pueden ser igual a $1+j$ para algún j con valor en tablas, valores en cuyo caso las tablas pueden ser utilizadas directamente. Esto es ilustrado en el Ejemplo 4.9. Si $k = i$, la fórmula (4.40) no está definida. Sin embargo, el valor presente es justamente nv.

Las fórmulas para anualidades anticipadas pueden ser manejadas de una manera análoga, ya que su valor presente es también una progresión geométrica. El valor presente de una perpetuidad existe si $0<(1+k)/(1+i)<1$, para que la suma de la progresión geométrica exista. Si $(1+k)/(1+i)>1$, entonces La progresión geométrica diverge y el valor presente de la perpetuidad no existe.

(3) Otros patrones de pago

Es posible derivar una expresión general para una anualidad vencida con un término de n años por el uso de diferencias finitas. sea u el pago hecho al cabo del t-ésimo año. Recordar que:

$$\Delta u_t = u_{t+1} - u_t$$

Entonces de diferencias finitas tenemos la siguiente suma que da el valor presente de la anualidad:

$$\sum_{t=1}^{n} v^t u_t = \left[\frac{v^t}{v-1} \left[1 - \frac{v\Delta}{v-1} + \frac{v^2\Delta^2}{(v-1)^2} - \frac{v^3\Delta^3}{(v-1)^3} + \dots \right] u_t \right]_{t=1}^{t=n+1}$$

$$= \left[\frac{v^{t-1}}{i} \left[1 + \frac{\Delta}{i} + \frac{\Delta^2}{i^2} - \frac{\Delta^3}{i^3} + \dots \right] u_t \right]_{t=1}^{t=n+1} \qquad (4.41)$$

La fórmula (4.41) da resultados prácticos siempre que el orden de las diferencia rebase un cierto punto en el que el resto de la expresión sea despreciable. En particular, si u_t es un polinomio de grado m, entonces el término $m+1$ y mayores son todos cero.

El ejemplo 4.7. Encuentre el valor presente de una perpetuidad vencida cuyos pagos sucesivos son 1,2,3,4,..., a una tasa efectiva de interés de 5%.

$$\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} = \frac{1}{.05} + \frac{1}{.0025} = 420$$

4.6 CASOS MÁS GENERALES DE ANUALIDADES VARIABLES

En las anualidades variables consideradas en la Sección 4.5. supusimos que el período de pago y el período de conversión de interés eran iguales. En la Sección 4.6 se retira esta restricción.

En la práctica, las anualidades variables tenían pagos más o menos frecuentes que la convertibilidad del interés ahora se considerará esto. Consideraremos primero el caso en el que los pagos están hechos menos frecuentemente que el interés. Sea k el período de conversión de interés en un período de pago, sea n el períodos de conversión de interés de la anualidad medida, sea i la tasa de interés por período de conversión. La cantidad de pagos es n/k, que es un entero.

Una versión generalizada de la fórmula (4.33) para este caso es:

$$P \frac{a_{\overline{n|}}}{s_{\overline{k|}}} + Q \frac{\dfrac{a_{\overline{n|}}}{s_{\overline{k|}}} - \dfrac{n}{k} v^n}{i\, s_{\overline{k|}}} \qquad (4.42)$$

La derivación es como sigue:

Sea A el valor presente de la anualidad, entonces

$$A = Pv^k + (P + Q)v^{2k} + (P + 2Q)v^{3k} + \ldots + [P + ((n/k) - 2)Q]v^{n-k} + [P + ((n/k) - 1)Q]v^n$$

Y

$$(1+i)^k A = P + (P + Q)v^k + (P + 2Q)v^{2k} + \ldots + [P+((n/k) - 1)Q]v^{n-k}$$

Ahora substrayendo la primera ecuación en la segunda,

$$A[(1+i)^k - 1] = P + Q(v^k + v^{2k} + \ldots + v^{n-k}\, v^n) - Pv^n - [(n/k) - 1)]Qv^n$$

$$= P(1 - v^n) + Q(v^k + v2k + \ldots + v^{n-k} + v^n) - Q(n/k)v^n$$

Así,

$$A = \frac{P(1 - v^n) + Q\,\dfrac{a_{\overline{n|}}}{s_{\overline{k|}}} - Q\,\dfrac{n}{k}\,v^n}{(1 + i)^k - 1}$$

$$= P\,\frac{a_{\overline{n|}}}{s_{\overline{k|}}} + Q\,\frac{\dfrac{a_{\overline{n|}}}{s_{\overline{k|}}} - \dfrac{n}{k}\,v^n}{i\, s_{\overline{k|}}} \tag{4.42}$$

Consideremos después el caso en el que los pagos se hacen más frecuentemente que la convertibilidad del interés. Dos diferentes casos surgen dependiendo de si la tasa de pagos es constante o variable durante cada período de conversión de interés.

Considere primero la situación en la que la tasa de pago es constante durante cada período de conversión de interés con aumento o disminución sólo una vez por período de conversión. para obtener la siguiente versión generalizada de la fórmula (4.33) poniendo la convertibilidad del interés en el denominador:

$$= P\alpha^{(m)}_{\overline{n}|} + Q \frac{\alpha_{\overline{n}|} - nv^n}{i^{(m)}} \qquad (4.43)$$

Como un caso especial, tenemos la siguiente versión generalizadas de la fórmula (4.35):

$$= (I\alpha)^{(m)}_{\overline{n}|} + Q \frac{\ddot{\alpha}_{\overline{n}|} - nv^n}{i} \qquad (4.44)$$

La fórmula (4.44) es el valor presente de una anualidad vencida a n años, pagadera m veces por período, durante el primer año es de $1/m$, durante el segundo año es de $2/m$, y así sucesivamente hasta el *n-ésimo* año que es de n/m.

Consideremos a continuación la situación en la que la tasa cambia con cada período de pago. Suponga que una anualidad creciente es pagadera a la tasa nominal de $1/m$ por período de conversión al cabo del segundo *m-ésimo* de período de conversión de interés, y así sucesivamente. Entonces el Primer pago es de $1/m$, el segundo es de $2/m$ y así sucesivamente. Denotando el valor de presente de tal anualidad por $(I^{(m)}\alpha)^{(m)}_{\overline{n}|}$, tenemos:

$$(I^{(m)}\alpha)^{(m)}_{\overline{n}|} = 1/m^2\,(v^{1/m} + 2v^{2/m} + \ldots + nmv^{nm/m}$$

$$\frac{\ddot{\alpha}_{\overline{n}|} - nv^n}{i} \qquad (4.47)$$

La derivación de la fórmula (4.45) se queda como ejercicio para el lector.

Ejemplo 4.12. Encuentre el valor presente de una perpetuidad que tiene pagos de 1 al cabo del tercer año, 2 al cabo del sexto año, 3 al cabo del noveno año,...

Denotamos el valor presente de esta perpetuidad por *A*. Entonces:

$$A = v^3 + 2v^6 + 3v^9 + \dots$$

Y

$$v^3 A = v^6 + 2v^9 \dots$$

Ahora substrayendo la segunda ecuación en la primera,

$$A(1 - v^3) = v^3 + v^6 + v^9 + \dots = \frac{v^3}{1-v^3}$$

O

$$A = \frac{v^3}{1-v^3}$$

4.7 ANUALIDADES VARIABLES CONTINUAS

El último tipo de anualidad variable que nosotros veremos es una en el que los pagos se hacen continuamente a una tasa variable. Tales anualidades son principalmente de interés teórico.

Considere una anualidad creciente en la que los pagos son tales que se hacen continuamente a la tasa *t* anualmente en el momento exacto t. El valor presente de esta anualidad se denota por $(\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|}$ y una expresión para esta es:

$$(\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|} = \int_0^n t v^t \, dt \qquad (4.46)$$

en su expresión diferencial $tv^t\,dt$ es el valor presente del pago hecho en el momento exacto t.

Una expresión simplificada puede obtenerse ejecutando una integración por partes.

$$(\overline{I}\overline{a})_{\overline{n|}} = \int_0^n tv^t\,dt \qquad (4.47)$$

$$= \frac{tv^t}{\log_e v}\Bigg]_0^n - \int_0^n \frac{v^t}{\log_e v}$$

$$= \frac{tv^t}{\log_e v}\Bigg]_0^n - \frac{v^t}{(\log_e v)^2}\Bigg]_0^n$$

$$= \frac{nv^n}{\delta} - \frac{v^n}{\delta^2} + \frac{1}{\delta^2}$$

$$= \frac{1-v^n}{\delta^2} - \frac{nv^n}{\delta}$$

$$= \frac{\overline{a}_{\overline{n|}} - nv^n}{\delta}$$

Debemos notar que la fórmula (4.47) puede también ser derivada de la fórmula (4.45).

$$(\overline{I}\overline{a})_{\overline{n|}} = \lim_{m\to\infty} (I^{(m)}a)^{(m)}_{\overline{n|}} = \lim_{m\to\infty} \frac{\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n|}} - nv^n}{i^{(m)}} = \frac{\overline{a}_{\overline{n|}} - nv^n}{\delta}$$

En general si el monto pagadero al momento exacto t es $f(t)\ dt$, entonces la expresión para la anualidad del valor presente de n años continuos puede expresarse como sigue:

$$\int_0^n f(t)\, v^t\, dt \qquad (4.48)$$

Las anualidades variables continuas más generales son en las que no sólo los pagos continuos varían sino también la fuerza de interés. En este caso, la versión generalizada de la fórmula (4.48)sería

$$\int_0^n f(t)\, e^{\int_t^0 \delta r\, dr}\, v^t\, dt \qquad (4.49)$$

Ejemplo 4.13. Encuentre una expresión para el valor de una anualidad creciente continuamente con un término de n años si la fuerza de interés es δ y si la tasa de pago a un tiempo t es t^2 anualmente.

La respuesta se obtiene ejecutando una integración por partes.

$$\int_0^n t^2 e^{-\delta r} = -\frac{t^2}{\delta} e^{-\delta t}\Big]_0^n + \frac{2}{\delta}\int_0^n t e^{-\delta r}$$

$$= \frac{n^2}{\delta} e^{-\delta r} - \frac{2\,t}{\delta} e^{-\delta r}\Big]_v^0 + \frac{2}{\delta^2}\int e^{-\delta r}$$

$$= \frac{n^2}{\delta} e^{-\delta r} - \frac{2n}{\delta^2} e^{-\delta r} - \frac{2}{\delta^3} e^{-\delta r}\Big|_n^0$$

$$= \frac{n^2}{\delta} e^{-\delta r} - \frac{2n}{\delta^2} e^{-\delta r} - \frac{2}{\delta^3} e^{-\delta r} + \frac{2}{\delta^3}$$

$$= \frac{n^2}{\delta^3} - e^{-\delta r} \left[\frac{n^2}{\delta} - \frac{2n}{\delta^2} + \frac{2}{\delta^3} \right]$$

COMENTARIOS FINALES

Al elaborar esta tesis, me di cuenta de lo aprendido y no aprendido en los cursos de Matemáticas Financieras y cuan difícil es transmitir los conocimientos adquiridos a otros estudiantes por medio de un trabajo escrito; espero que el presente trabajo ayude a otras personas a entender los fundamentos de esta materia ya que si logran hacerlo serán capaces de entenderla en su conjunto.

Esta obra no pretende ser auto didáctica pero si un material de consulta, en el cual el estudiante puede despejar sus duda o puede profundizar en los fundamentos, ya que, en ella se trata ampliamente la teoría del interés y se desarrolla varios temas de Las Matemáticas Financieras, sin pretender abarcarlos en su totalidad, debido a que son muchos los temas a tratar en esta materia no es pertinente, en una obra como esta, desarrollarlos todos.

BIBILOGRAFÍA

- Cissell, Robert y Cissell, Helen. MATHEMATICS OF FINANCE. Boston, Houghton Mifflin, 1973. 103pp.
- Cueva G., Benjamín De La. MATEMÁTICAS FINANCIERAS. Ciudad Satélite, México. Porrúa, 135pp.
- Donald Schveltte y Morris, James. MATHEMATICS OF FINANCE. USA, Kendall Hunt, 1988. 94pp.
- Frank Ayres. MATHEMATICS OF FINANCE. New York, Schaum Publishing Company, 1963. 230pp.
- H. Highla, Esther y S. Rosenbaum, Roberta. MATEMÁTICAS FINANCIERAS. México, Prenice-Hill, 1985 622pp.
- Humel M., Paúl y Seebeck L., Charle. MATHEMATICS OF FINANCE. Japón, Mc Graw_Hill, 1971. 368pp.
- Lincoyán Portus, Govinden. MATEMÁTICAS FINANCIERAS. México D.F., Mc Graw-Hill, 1994 435pp.
- Smail, Lloyd L. MATHEMATICS OF FINANCE.New York, Mc Graw-Hill, 1953. 282pp.