

01170 +  
FACULTAD DE INGENIERIA

Caracterización Geométrica de Leyes de Control:  
Algoritmos para el  
Desacoplamiento de Perturbaciones

Ricardo López Lena Estrada  
Director de tesis: Dr. Juan Carlos Martínez García

Tesis de Maestría en Ingeniería Eléctrica  
División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Marzo, 1997

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

1997



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



Dedicado a la memoria de Don Alfredo López Tenca Gómez  
1898-1997

"Todo esto es así, señor don Quijote -dijo Carrasco-; pero quisiera yo que los tales censuradores fueran mas misericordiosos y menos escrupulosos. sin atenerse a los átomos del sol clarísimo de la obra de que murmuran: que si *Aliquando bonus dormitat Homerus.* consideren lo mucho que estuvo despierto, por dar la luz de su obra con la menos sombra que pudiese: y quizá podría ser que lo que a ellos les parece mal fuesen lunares, que a las veces acrecientan la hermosura del rostro que los tiene; y así, digo que es grandísimo el riesgo a que se pone el que imprime un libro. siendo de toda imposibilidad imposible componerle tal, que satisfaga y contente a todos los que le leyeren".

**-Miguel de Cervantes en El ingenioso Hidalgo Don Quijote de la Mancha, Segunda Parte, Capitulo III.**

"If people do not believe  
that mathematics is simple,  
is only because they do not realize  
how complicated life is."

**-John Louis Von Neumann.**

"Una vez descartado lo imposible,  
lo que queda,  
por improbable que parezca,  
debe ser la verdad".

**-Sir Arthur Conan Doyle.**

## **Agradecimientos**

Deseo expresar mi agradecimiento a todas las personas que directa o indirectamente colaboraron al desarrollo y mejoramiento de este trabajo.

En particular deseo agradecer al Dr. Juan Carlos Martínez García, por el interés y paciencia que mostró durante todo el desarrollo de la tesis, sin los cuales poco se habría logrado.

Al Dr. Michel Malabre por sus comentarios acerca de la parametrización en las primeras etapas de la investigación .

A los Sinodales en general por las observaciones hechas, que indudablemente ayudaron al mejoramiento del trabajo. En especial:

Al Dr. Vladimir Kharitonov y al Dr. Jaime Moreno por haber dedicado parte de su tiempo para la discusión de los resultados obtenidos y por aportar ideas para mejorarlos.

A la Dra. Cristina Verde por haber proporcionado las facilidades físicas en las instalaciones de la coordinación de Automatización del Instituto de Ingeniería.

Finalmente, agradezco el apoyo que recibí de mis compañeros de generación en la maestría en control automático. El ambiente de camaradería y la voluntad de trabajo fueron elementos esenciales para la finalización de los cursos.

**R. L. E.**



# Índice

Terminología	3
<b>1 Preliminares</b>	<b>7</b>
1.1 Control Geométrico	7
1.1.1 Algunos conceptos geométricos básicos	7
<b>2 Formulación del problema</b>	<b>11</b>
2.1 Desacoplamiento de perturbaciones	11
2.1.1 Condición de resolución de PDP	12
2.2 Grados de Libertad y Polos Fijos en PDP	12
2.2.1 Diagrama de inclusiones de subespacios asociados a los polos fijos de PDP	13
<b>3 Metodología propuesta</b>	<b>15</b>
3.1 Enfoque matricial	15
3.1.1 Parametrización de las aplicaciones que resuelven PDP	17
3.1.2 Aprovechamiento de los grados de libertad	22
3.2 Enfoque basado en transformaciones de similitud	24
3.2.1 Descripción de la metodología	24
3.2.2 Asignación de polos libres y grados de libertad	28
3.3 Interpretación de los polos fijos	28
3.4 Desacoplamiento de perturbaciones medibles	29
3.4.1 Determinación de $F$ y $J$	30
<b>4 Ilustración de la metodología</b>	<b>32</b>
4.1 Ejemplo ilustrativo	32
4.1.1 Condición para el desacoplamiento en términos de los parámetros de Markov	33
4.1.2 Verificación de la condición geométrica de solución de PDP	34
4.1.3 Caracterización de los polos fijos de PDP	35
4.1.4 Parametrización de las aplicaciones $F$ que resuelven PDP por medio del enfoque matricial.	38
4.1.5 Enfoque basado en transformaciones de similitud	42
4.1.6 Interpretación de los polos fijos de PDP	43
4.2 Ejemplo de medición de perturbaciones	43
4.3 Implantación computacional de la metodología	46

<b>5</b>	<b>Aplicación de las rutinas de cómputo: Control de una columna de destilación</b>	<b>47</b>
5.1	El control de una columna de destilación	47
5.2	Columna de destilación de tres charolas	48
5.2.1	Enfoque matricial	49
5.2.2	Enfoque basado en transformaciones de similitud	51
5.2.3	Comparación de resultados	52
5.3	Columna de destilación de nueve charolas	52
5.3.1	Comentarios finales	55
	<b>Bibliografía</b>	<b>58</b>
	<b>Apéndices</b>	<b>60</b>
<b>A</b>	<b>Rutinas de cómputo</b>	<b>61</b>
A.1	Algoritmos para matemáticas Simbólicas	61
A.1.1	Solución al ejemplo académico del capítulo 5.	61
A.1.2	Parametrización de la aplicación $F$ para la Columna de Destilación	63
A.2	Antecedentes numéricos	65
A.2.1	Pruebas de inclusión	65
A.2.2	Cálculo de bases ortogonales	66
A.3	Implantación de algoritmos	67
A.3.1	Estructura de los algoritmos	67
A.3.2	POLFIJ	69
A.3.3	REJECT	73
A.3.4	INCLUS	77



## Terminología

$\mathcal{X}$  : El espacio de estados.

$A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  : Aplicación lineal que mapea elementos del espacio vectorial  $\mathcal{X}$  en el espacio vectorial  $\mathcal{Y}$ .

$\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$  : Intersección de los subespacios  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ .

$\mathcal{A} + \mathcal{B}$  : Suma de los subespacios  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ .

$\text{Im } A$  : Imagen de la aplicación lineal  $A$ .

$\ker A$  : Espacio nulo de la aplicación lineal  $A$ .

$A^{-1}(\mathcal{R})$  : Imagen recíproca del subespacio  $\mathcal{R}$  a través de la aplicación lineal  $A$ .

$\sigma(A)$  : Espectro de la aplicación lineal  $A$ .

$\dot{\cup}$  : Unión de conjuntos con elementos repetidos.

$\mathbb{R}$  : El campo de los números reales.

$\mathbb{R}^m$  : El espacio de dimensión  $m$  definido sobre  $\mathbb{R}$ .

$\mathbb{C}$  : El campo de los números complejos.

$\mathbb{C}^+$  : El conjunto de los números complejos cuya parte real es positiva.

$\mathbb{C}^-$  : El conjunto de los números complejos cuya parte real es negativa.

$\dim(\mathcal{X})$  : Dimensión del espacio vectorial  $\mathcal{X}$ .

$\mathcal{X} \approx \mathcal{Y}$  :  $\dim(\mathcal{X}) = \dim(\mathcal{Y})$ .

$\mathcal{X}/\mathcal{R}$  : Espacio cociente generado por los espacios vectoriales  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{R}$ , con  $\mathcal{R} \subset \mathcal{X}$

$A\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$  :  $\mathcal{V}$  es un subespacio  $A$ -invariante.

$A|_{\mathcal{V}}$  : Restricción de la aplicación lineal  $A$  al subespacio  $\mathcal{V}$ .

$\Pi : \mathcal{X} \rightarrow \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{S}}$  : Para  $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ ,  $\Pi$  representa la proyección canónica que a cada elemento de  $\mathcal{X}$  le asocia su clase de equivalencia en  $\mathcal{X}/\mathcal{S}$ .

$A_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$  : Para  $A\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$ , aplicación inducida por  $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ , a través de la proyección canónica, sobre  $\mathcal{X}/\mathcal{S}$ .

$I_p$  : Indica la matriz identidad de dimensión  $p$ .

$\mathfrak{S}(A, B; \mathcal{K})$  : Familia de todos los subespacios  $(A, \text{Im} B)$ -invariantes incluidos en el subespacio  $\mathcal{K}$ .

$\mathcal{V}^*$  : El más grande subespacio  $(A, \text{Im} B)$ -invariante incluido en  $\ker C$ , i.e.  $\mathcal{V}^* \doteq \sup \mathfrak{S}(A, B; \ker C)$

$\mathcal{V}_g^*$  : El miembro más grande de la familia de subespacios  $(A, \text{Im} B)$ -invariantes incluidos en  $\ker C$ , cuyo espectro  $\sigma[(A + BF)|_{\mathcal{V}^*}]$  es estable.

$\mathcal{R}^*$  : El más grande subespacio  $(A, \text{Im} B)$ -invariante de controlabilidad incluido en  $\ker C$ .

$\mathcal{R}_E^*$  : El más grande subespacio  $(A, \text{Im}(B[E]))$ -invariante de controlabilidad incluido en  $\ker C$ .

$F \in \mathbf{F}(\mathcal{V}^*)$  : La familia de aplicaciones  $F$  tales que  $(A + BF)\mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}^*$ .

$\max(a, b)$  : El valor mayor entre  $a$  y  $b$ .

$M^+$  : Pseudoinversa de la matriz real  $M$ .

$\mathcal{V}^\perp$  : El complemento ortogonal del subespacio  $\mathcal{V}$ .



# Introducción

## *Motivación y antecedentes*

En el contexto de los sistemas lineales estacionarios, el denominado enfoque geométrico ha demostrado exitosamente su utilidad para establecer las condiciones de solución de algunos problemas clásicos de control tales como el desacoplamiento de perturbaciones y el desacoplamiento entrada-salida. Con ésto, las contribuciones de este enfoque al análisis de sistemas de control han sido ampliamente reconocidas.

Las condiciones geométricas de resolución, dentro del marco de la síntesis de leyes de control, están constituidas por relaciones de inclusión entre subespacios vectoriales caracterizados por los parámetros del sistema.

Así, no obstante que desde finales de los años sesentas y principios de los años setentas las herramientas de control geométrico demostraron su utilidad para el análisis de sistemas de control, la concepción de metodologías para la síntesis de controladores por medio de esta teoría no ha sido suficientemente abordada (exceptuando trabajos como los expuestos en [13, Basile y Marro] y [11, Lin, Saberi, Chen, 1992]).

La reciente aparición de programas de computadora capaces de realizar operaciones matemáticas en forma simbólica ha abierto la posibilidad de desarrollar algoritmos formales de cálculo. De esta manera, en el contexto del control geométrico, parece interesante explotar estas herramientas para la síntesis de leyes de control. Su ventaja con respecto a los métodos numéricos usados tradicionalmente estriba en el hecho de que bajo el esquema de matemáticas simbólicas no existen problemas de mal condicionamiento numérico, siendo esencialmente los datos de entrada los que condicionan la validez de los resultados.

Ahora bien, la ventaja principal del control geométrico reside en el hecho de que los conceptos que se manejan son independientes del sistema coordinado que se utiliza para representar las operaciones con subespacios. Sin embargo, la utilización práctica de tales conceptos exige la elección de bases matriciales que representen las aplicaciones lineales. Tal elección no es trivial, ya que de ella depende en gran medida la precisión de los resultados obtenidos por los algoritmos del control geométrico. De esta manera, el interés inicial de los investigadores del área se centró en el desarrollo de metodologías basadas en la teoría del álgebra lineal numérica, dado que para esta teoría la precisión de los resultados producidos por algoritmos numéricos es el objetivo primordial.

Es en esta década (años noventa), que los valiosos conceptos de transformaciones ortogonales, estabilidad numérica, sensibilidad numérica, y consideraciones de redondeo del álgebra lineal numérica, han sido exitosamente aplicados para la obtención de algoritmos numéricamente confiables, es decir algoritmos en los que la precisión de los resultados depende esencialmente de los datos de entrada y no de los algoritmos en sí.

Últimamente han sido publicados libros como [13, Basile, Marro, 1992], y programas como *Linear System Toolbox* para *Matlab* ( ver [11, Lin, Saberi, Chen, 1992]), en donde se proporcionan

implantaciones de los algoritmos básicos del enfoque geométrico confiables numéricamente.

#### *Formulación del problema*

En este trabajo se aborda una nueva metodología de síntesis de controladores basada en el conocimiento previo de los grados de libertad existentes para el problema de desacoplamiento de perturbaciones. Dichos grados de libertad están caracterizados por los así llamados polos fijos del desacoplamiento de perturbaciones [12. Malabre, Martínez-García, 1995].

#### *Contribuciones de la tesis*

Como contribuciones *principales* del trabajo de tesis, se consideran las siguientes:

1. Desarrollo de una nueva metodología de diseño de leyes de control por retroalimentación estática de estados, para sistemas lineales estacionarios multivariables, con la finalidad de desacoplar perturbaciones indeseables.

La metodología propuesta utiliza la caracterización geométrica de los polos fijos que resultan en el sistema retroalimentado, al aplicarse una ley de control que desacopla al vector de perturbaciones, para delimitar los grados de libertad existentes y con ello abre la posibilidad de obtener objetivos de desempeño complementarios.

2. Desarrollo de un algoritmo basado en la resolución ecuaciones matriciales, que implanta la metodología mencionada en el punto anterior. El algoritmo permite la parametrización de las retroalimentaciones estáticas de estado que desacoplan las perturbaciones y que dan lugar al número mínimo de polos fijos en el sistema retroalimentado. Los polos libres se pueden asignar por medio de la selección del parámetro libre.
3. Desarrollo de un algoritmo basado en transformaciones de similitud, que implanta la metodología mencionada en el punto 1. El algoritmo permite la caracterización de una familia de retroalimentaciones estáticas de estado, que desacoplan las perturbaciones y que dan lugar al número mínimo de polos fijos en el sistema retroalimentado. Los polos libres se asocian en este algoritmo con dos subsistemas controlables, obtenidos por medio de un proceso de triangularización del sistema resultante.
4. Realización de rutinas de cómputo para el diseño asistido por computadora de leyes de control para el desacoplamiento de perturbaciones, via la metodología mencionada en el punto 1. El algoritmo matricial mencionado en el punto 2 fue implantado en Maple V y el algoritmo basado en transformaciones de similitud fue implantado en Matlab.
5. Ilustración del uso de las herramientas del control geométrico en el desarrollo de métodos de síntesis de controladores.

#### *Contribuciones secundarias:*

1. Interpretación del significado de los polos fijos del desacoplamiento de perturbaciones, en términos de los polos fijos del precompensador equivalente en lazo abierto a la retroalimentación que desacopla las perturbaciones.

2. Parametrización de las matrices de medición de perturbaciones que permiten la construcción de una ley de control por retroalimentación estática de estado con medida de la perturbación, para desacoplarla (cuando esto es posible).

### *Organización de la tesis*

En el capítulo 1 se presenta una breve síntesis de las herramientas básicas del control geométrico, tales como subespacio invariante, espacio cociente, restricción, aplicación inducida en un espacio cociente y ceros finitos invariantes.

En el capítulo 2 se introduce el problema de desacoplamiento de perturbaciones, para sistemas lineales estacionarios, y se expone brevemente la condición geométrica de resolución. Se presenta así mismo la caracterización de los grados de libertad del problema, en términos del conocimiento previo de los polos fijos en lazo cerrado asociados a cualquier ley de control que desacople el vector de perturbaciones.

En el capítulo 3 se presentan las contribuciones principales de este trabajo de tesis. Se proponen métodos basados en ecuaciones matriciales, y métodos basados en transformaciones de similaridad, para la parametrización de las leyes de control que desacoplan las perturbaciones. Así mismo se comenta la forma de aprovechar los grados de libertad existentes, asociados a los polos fijos del desacoplamiento de perturbaciones.

El propósito del capítulo 4 es ilustrar la metodología expuesta en el capítulo 3 por medio de su aplicación en un ejemplo académico. Se obtiene la parametrización de la familia de leyes de control, que desacoplan la señal de perturbación y se muestran ambos enfoques, el matricial y el basado en transformaciones de similaridad. Un ejemplo más complejo es abordado en el capítulo 5, en el cual el modelo matemático de una columna de destilación es discutido y una ley de control es sintetizada. Se tratan dos modelos de ordenes diferentes y se comparan los resultados obtenidos con los publicados por otros autores.

Finalmente, se presentan algunas conclusiones generales y las perspectivas para trabajo futuro.

En los anexos se incluyen las rutinas de cómputo documentadas que implantan la metodología desarrollada.



# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1 Control Geométrico

El uso de herramientas geométricas para el análisis de sistemas de control surgió en parte como una alternativa al manejo matricial del análisis tradicional de sistemas en variables de estado, del llamado control moderno.

Los conceptos básicos del enfoque geométrico son en esencia una reinterpretación de las nociones familiares de la teoría de sistemas, tales como controlabilidad y observabilidad, pero vistas como propiedades geométricas de ciertos subespacios vectoriales, construidos a partir de los parámetros del sistema, y cuyas interacciones a través de aplicaciones lineales definen al sistema en sí.

El denominado enfoque geométrico ha demostrado exitosamente su utilidad para establecer las condiciones de solución de algunos problemas clásicos de control, tales como el desacoplamiento de perturbaciones y el desacoplamiento entrada-salida. Dichas condiciones se presentan como relaciones de inclusión entre subespacios vectoriales, perfectamente caracterizados por los parámetros del sistema.

En esta sección se abordarán brevemente las nociones fundamentales del control geométrico. El lector interesado puede consultar el libro clásico [1, Wonham, 1985], y el más reciente [13, Basile, Marro, 1992], referencias en las cuales se basa el material siguiente.

#### 1.1.1 ALGUNOS CONCEPTOS GEOMÉTRICOS BÁSICOS

Considérese el sistema lineal invariante en el tiempo  $(A, B, C)$  descrito por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias siguiente:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & t \geq 0 \\ y(t) = Cx(t), & t \geq 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

donde

$x \in \mathcal{X}$  denota el estado ( $\dim(\mathcal{X}) = n$ );

$u \in \mathcal{U}$  denota la entrada ( $\dim(\mathcal{U}) = m$ );

$y \in \mathcal{Y}$  denota la salida ( $\dim(\mathcal{Y}) = p$ );

$A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ ,  $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$  y  $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  son aplicaciones lineales representadas en bases particulares (de  $\mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}$ ), por medio de matrices reales constantes.

#### Definición 1.1. *Subespacio invariante*

Un subespacio  $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$  se dice que es un subespacio invariante para la aplicación  $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  si  $A\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$ . ■

**Nota:** Por ejemplo, considérese el sistema (1.1) con  $u(t) = 0$ , para todo  $t \geq 0$ . Se puede decir que un subespacio  $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$  es  $A$ -invariante si estando el estado inicial  $x_0$  en  $\mathcal{V}$ , toda la trayectoria de estados se encuentra dentro de  $\mathcal{V}$ .

**Definición 1.2. Subespacio  $(A, \text{Im } B)$ -invariante**

Se dice que un subespacio  $\mathcal{V}$  es un  $(A, \text{Im } B)$ -invariante si existe al menos una aplicación  $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$  (una retroalimentación estática de estados), tal que  $(A + BF)\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$  o bien de manera equivalente, si  $A\mathcal{V} \subset \mathcal{V} + \text{Im } B$ . Se dice entonces que  $F$  es un "amigo" (*friend*) de  $\mathcal{V}$ , lo cual se denota como  $F \in \mathbf{F}(\mathcal{V})$ . ■

**Nota:** Por ejemplo, considérese el sistema (1.1). Se puede decir que un subespacio  $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$  es  $(A, \text{Im } B)$ -invariante si estando el estado inicial  $x_0$  en  $\mathcal{V}$ , existe una retroalimentación de estado  $u(t) = Fx(t)$ , para todo  $t \geq 0$ , tal que toda la trayectoria de estados del sistema retroalimentado  $\dot{x}(t) = (A + BF)x(t)$  se encuentra dentro de  $\mathcal{V}$ .

**Definición 1.3. Subespacio alcanzable del par  $(A, B)$**

El subespacio alcanzable  $\langle A \mid \text{Im } B \rangle$  del par  $(A, B)$  está dado por:

$$\langle A \mid \text{Im } B \rangle := \text{Im } B + A \text{Im } B + \dots + A^{n-1} \text{Im } B.$$

y es un subespacio  $A$ -invariante del espacio de estados  $\mathcal{X}$ . ■

**Definición 1.4. Subespacio inobservable del par  $(C, A)$**

El subespacio inobservable  $\mathcal{N}$  del par  $(C, A)$  está dado por:

$$\mathcal{N} := \ker C \cap \ker (CA) \cap \dots \cap \ker (CA^{n-1}),$$

y es un subespacio  $A$ -invariante del espacio de estados  $\mathcal{X}$ . ■

**Definición 1.5. Subespacio  $(A, \text{Im } B)$ -invariante de controlabilidad**

Un subespacio  $\mathcal{R}$  es denominado un subespacio  $(A, \text{Im } B)$ -invariante de controlabilidad si existe un par de aplicaciones  $F \in \mathbf{F}(\mathcal{R})$ , y  $G : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  (*i.e.* una ley de control  $u(t) = Fx(t) + Gv(t)$ , para todo  $t \geq 0$ ), tales que  $\mathcal{R} = \langle A + BF \mid \text{Im}(BG) \rangle$ . Cuando  $G$  es no singular se tiene  $\langle A + BF \mid \text{Im}(BG) \rangle = \langle A + BF \mid \text{Im } B \rangle$ . ■

**El máximo subespacio  $(A, \text{Im } B)$ -invariante incluido en  $\ker C$**

El máximo subespacio  $(A, \text{Im } B)$ -invariante incluido en  $\ker C$  se denota  $\mathcal{V}^*$  y corresponde al límite del algoritmo ISA ("algoritmo del subespacio invariante" o *Invariant Subspace Algorithm*):

$$\begin{cases} \mathcal{V}_0 &= \mathcal{X} \\ \mathcal{V}_{\mu+1} &= \ker C \cap A^{-1} \{ \text{Im } B + \mathcal{V}_\mu \}, \quad \forall \mu \geq 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

cuando  $\mathcal{V}_{k+1} = \mathcal{V}_k$ , para algún  $k \geq 0$ .

**El máximo subespacio  $(A, \text{Im } B)$ -invariante de controlabilidad incluido en  $\ker C$**

El máximo subespacio  $(A, \text{Im } B)$ -invariante de controlabilidad incluido en  $\ker C$  se denota  $\mathcal{R}^*$  y corresponde al límite del algoritmo CISA ("algoritmo del subespacio invariante condicionado" o *Conditioned Invariant Subspace Algorithm*):

$$\begin{cases} \mathcal{R}_0 &= \{0\} \\ \mathcal{R}_{\mu+1} &= \mathcal{V}^* \cap \{\text{Im}(B) + A\mathcal{R}_\mu\}, \quad \forall \mu \geq 0. \end{cases}$$

cuando  $\mathcal{R}_{k+1} = \mathcal{R}_k$ , para algún  $k \geq 0$ .

**Definición 1.6. Espacio cociente  $\mathcal{X}/\mathcal{V}$**

Sea  $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$ . El espacio cociente  $\mathcal{X}/\mathcal{V}$  se define como el conjunto de todas las *variedades lineales*

$$\bar{x} = \{z \mid z = v + x, v \in \mathcal{V}\}, \quad x \in \mathcal{X}. \quad (1.3)$$

En ocasiones la definición (1.3) se denota por medio de  $\bar{x} = \{x\} + \mathcal{V}$ . ■

**Definición 1.7. Restricción**

Sea  $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$  un subespacio  $A$ -invariante para  $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ , entonces la *restricción* de  $A$  al subespacio  $\mathcal{V}$  es la aplicación  $\rho : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  tal que:

$$\rho(v) = A(v), \quad v \in \mathcal{V}.$$

La restricción de  $A$  a  $\mathcal{V}$  se denota normalmente como  $A|_{\mathcal{V}}$ . ■

**Definición 1.8. Aplicación inducida en un espacio cociente**

Sea  $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$  un subespacio  $A$ -invariante para  $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ , entonces la aplicación inducida por  $A$  en el espacio cociente  $\mathcal{X}/\mathcal{V}$  es la aplicación  $\bar{A} : \mathcal{X}/\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{X}/\mathcal{V}$  definido como sigue:

$$\bar{A}(\bar{x}) = \{A(x)\} + \mathcal{V}, \quad \forall \bar{x} \in \mathcal{X}/\mathcal{V}.$$

La función inducida por  $A$  en un espacio cociente  $\mathcal{X}/\mathcal{V}$  se denota normalmente como  $A|_{\mathcal{X}/\mathcal{V}}$ . ■

**Subespacios invariantes y separación espectral**

Los subespacios invariantes tienen una propiedad interesante de separación espectral que se menciona a continuación (ver [2, Commault, Dion, s.d.] y [20, Lancaster, Tismenetsky, 1985, pp.145,147]). Considérese un subespacio  $A$ -invariante  $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$  ( $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ ). En una representación matricial adecuada,  $A$  puede escribirse como:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

donde  $A_{11}$  representa la restricción de  $A$  a  $\mathcal{V}$  y  $A_{22}$  es la aplicación inducida por  $A$  en el espacio cociente  $\mathcal{X}/\mathcal{V}$ . Los valores propios de  $A_{11}$  representan la dinámica del sistema en  $\mathcal{V}$  y los valores propios de  $A_{22}$  representan la dinámica del sistema fuera de  $\mathcal{V}$ . Así mismo el espectro de  $A$ .

denotado  $\sigma(A)$ , está dado por la unión con elementos repetidos de los espectros de  $A_{11}$  y  $A_{22}$ , *i.e.*:

$$\sigma(A) = \sigma(A_{11}) \dot{\cup} \sigma(A_{22}).$$

### Ceros finitos invariantes

El conjunto de los ceros finitos invariantes de  $(A, B, C)$  coincide con:

$$\sigma\left(\overline{A + BF} \Big|_{\frac{\mathcal{V}^*}{\mathcal{R}^*}}\right).$$

donde  $\overline{A + BF} \Big|_{\frac{\mathcal{V}^*}{\mathcal{R}^*}}$  es la aplicación inducida por  $A + BF$ , para cualquier  $F \in \mathbf{F}(\mathcal{V}^*)$ , sobre el espacio cociente  $\mathcal{V}^*/\mathcal{R}^*$  [1, Wonham, 1985, pp. 113]. Cuando  $(A, B, C)$  es una realización mínima, este conjunto coincide con el de los ceros de transmisión de la matriz de transferencia  $C(sI - A)^{-1}B$  [3, Rosenbrock H. H., 1970].



## Capítulo 2

### Formulación del problema

En este capítulo se tratarán en detalle los conceptos relativos al desacoplamiento de perturbaciones:

- condiciones de resolución geométricas y no geométricas;
- polos fijos asociados a cualquier retroalimentación estática del estado;
- grados de libertad;
- diagrama de inclusiones de subespacios de los polos fijos asociados al desacoplamiento de perturbaciones.

#### 2.1 Desacoplamiento de perturbaciones

Considérese el sistema lineal estacionario perturbado  $(A, B, C, E)$  descrito como sigue:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t), & t \geq 0 \\ y(t) = Cx(t). & t \geq 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

donde  $d \in \mathcal{D}$  denota la perturbación ( $\dim(\mathcal{D}) = q$ ), y  $E : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{X}$ , es una aplicación lineal representada, para bases particulares de  $\mathcal{D}$  y  $\mathcal{X}$ , por medio de una matriz real y constante.

Dado el sistema (2.1), se dice que el *Problema de Desacoplamiento de Perturbaciones (PDP)*, admite una solución si existe al menos una ley de control  $u(t) = Fx(t)$ , con  $t \geq 0$  ( $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$ ), tal que la salida del sistema en lazo cerrado resultante  $y(\cdot)$  sea independiente de la perturbación  $d(\cdot)$ .

**Nota:** Si la perturbación  $d(\cdot)$  está disponible para medición, se buscan leyes de control de la forma  $u(t) = Fx(t) + Jd(t)$ , donde  $J : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{U}$  es usualmente llamada *medición de la perturbación*  $d(t)$ .

En términos geométricos, **PDP** se define de la manera siguiente (ver [J. Wonham, 1985]):

#### **Definición 2.1. PDP en términos geométricos**

Dado el sistema (2.1), se dice que **PDP** tiene solución si existe al menos una aplicación  $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$ , tal que:

$$\langle A + BF \mid \text{Im } E \rangle \subset \ker C. \quad (2.2)$$

■

### 2.1.1 CONDICIÓN DE RESOLUCIÓN DE PDP

La condición de existencia equivalente de al menos una solución para **PDP** es bien conocida y está dada por el siguiente teorema, que se presenta sin demostración.

**Teorema 2.1** [14, Skelton, 1988]. ***PDP en términos de parámetros de Markov***

Dado el sistema (2.1), la ley de control  $u(t) = Fx(t)$  rechaza una perturbación arbitraria  $d(t)$  si y solamente si los parámetros de Markov de  $C[sI - (A + BF)]^{-1}E$ , son nulos. *i.e.*:

$$M_i = C(A + BF)^i E = 0, \quad (2.3)$$

para todo  $i = 0, \dots, n - 1$ , donde  $n$  es la dimensión del espacio de estados  $\mathcal{X}$ . ■

El teorema precedente constituye la condición algebraica de resolución de **PDP**. En cuanto a la condición geométrica, esta se presenta en el teorema siguiente sin demostración.

**Teorema 2.2** [1, Wonham, 1985]. ***Condición geométrica de resolución de PDP***

Dado el sistema (2.1), **PDP** tiene solución si y solamente si:

$$\text{Im } E \subset \mathcal{V}^* \quad (2.4)$$

Además, si (2.4) se cumple, entonces cualquier  $F \in \mathbf{F}(\mathcal{V}^*)$  desacopla la perturbación. ■

**Observación 2.1.** *La condición geométrica de resolución de PDP es la base sobre la cual se construyen los algoritmos que serán presentados en el capítulo siguiente.*

## 2.2 Grados de Libertad y Polos Fijos en PDP

Se ha visto en la sección precedente que si  $\text{Im } E \subset \mathcal{V}^*$ , entonces cualquier  $F \in \mathbf{F}(\mathcal{V}^*)$  es solución de **PDP**. Surge así naturalmente el cuestionamiento siguiente: *¿Cómo escoger una  $F \in \mathbf{F}(\mathcal{V}^*)$  de manera tal que objetivos de desempeño suplementarios puedan ser alcanzados (piénsese por ejemplo en la estabilidad interna del sistema retroalimentado)?*

La respuesta a esta pregunta depende del conocimiento de los grados de libertad existentes, que delimitan los desempeños suplementarios alcanzables. Ha sido demostrado recientemente (vea [12, Malabre, Martínez-García, 1995]), que cuando se utiliza cualquier retroalimentación estática del estado  $u(t) = Fx(t)$ ,  $t \geq 0$ , ( $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$ ), que desacopla la perturbación, siempre está presente en el conjunto de los polos del sistema retroalimentado. *i.e.*  $\sigma(A + BF)$ , un subconjunto fijo de ellos. Este subconjunto se define así de la siguiente manera:

**Definición 2.2. Polos fijos de PDP**

Dado el sistema (2.1) y suponiendo que  $\text{Im } E \subset \mathcal{V}^*$ , se dice que  $\zeta$  es un polo fijo de **PDP** si pertenece al siguiente conjunto:

$$\left\{ \zeta : \zeta \in \bigcap \sigma(A + BF), \forall F : C(sI_n - (A + BF))^{-1} E = 0 \right\}.$$

De esta forma, si se elige  $F$  de manera que en el sistema retroalimentado se tenga la menor cantidad de polos fijos, la libertad del diseñador de alcanzar objetivos de desempeño suplementarios será máxima. En consecuencia, para poder elegir una  $F$  adecuada se necesita conocer previamente cuáles son los polos fijos. ■

Los polos fijos del problema de desacoplamiento de perturbaciones han sido caracterizados geoméricamente. Antes de presentar esta caracterización es necesario introducir dos sistemas ficticios asociados al sistema perturbado  $(A, B, C, E)$ . Por una parte el sistema no perturbado  $(A, B, C)$  (i.e.  $d(\cdot) = 0$ ), y por otra parte el sistema combinado  $(A, [B | E], C)$  (i.e.  $d(\cdot)$  es considerada como una entrada de control).

**Teorema 2.3** [12, Malabre, Martínez-García, 1995]. *Caracterización geométrica de los polos fijos de PDP*

Dado el sistema perturbado  $(A, B, C, E)$  descrito en (2.1) y bajo las hipótesis de controlabilidad del par  $(A, B)$  e  $\text{Im } E \subset \mathcal{V}^*$ , los Polos Fijos del problema de Desacoplamiento de Perturbaciones son los elementos del conjunto:

$$\sigma \left\{ \overline{A + BF} \Big|_{\frac{\mathcal{R}_c^*}{\mathcal{R}^*}} \right\}$$

donde  $\overline{A + BF} \Big|_{\frac{\mathcal{R}_c^*}{\mathcal{R}^*}}$  denota la restricción de la aplicación inducida por  $A + BF$  sobre  $\mathcal{X}/\mathcal{R}^*$  a  $\mathcal{R}_c^*/\mathcal{R}^*$ . La aplicación  $F$  es cualquier elemento de  $\mathbf{F}(\mathcal{V}^*)$ .  $\mathcal{R}_c^*$  denota el máximo subespacio  $(A, \text{Im}[B | E])$ -invariante de controlabilidad incluido en  $\ker C$ .

Además, cualquier elemento de  $\mathbf{F}(\mathcal{R}_c^*)$  da lugar a que en el conjunto de los polos del sistema retroalimentado únicamente aparezcan como polos fijos los del desacoplamiento de perturbaciones<sup>1</sup>. ■

Así:

Si el problema de rechazo de perturbaciones tiene solución y asumiendo que  $(A, B)$  es controlable, cualquier  $F$  tal que:

$$(A + BF)\mathcal{R}_c^* \subset \mathcal{R}_c^* \quad (2.5)$$

puede ser utilizada en la ley de control que desacopla el vector de perturbaciones, apareciendo entre los polos del sistema retroalimentado el número mínimo de polos fijos y por ende el máximo de grados de libertad<sup>2</sup>.

**Nota:** La inclusión  $\text{Im } E \subset \mathcal{V}^*$ , garantiza la  $(A, \text{Im } B)$ -invariancia de  $\mathcal{R}_c^*$  y con ello la existencia de la aplicación  $F$  tal que la inclusión (2.5) sea verificada.

### 2.2.1 DIAGRAMA DE INCLUSIONES DE SUBESPACIOS ASOCIADOS A LOS POLOS FIJOS DE PDP

Un diagrama de inclusión de un conjunto de subespacios es una forma gráfica de establecer las relaciones de inclusión existentes en el conjunto. Los nodos en el diagrama representan subespa-

<sup>1</sup>Si se elige cualquier elemento de  $\mathbf{F}(\mathcal{V}^*)$  para desacoplar el vector de perturbaciones, en el conjunto de los polos del sistema retroalimentado podrían aparecer además de los polos fijos de PDP, otros polos fijos.

<sup>2</sup>La relación de inclusión (2.5) es válida solamente si  $\text{Im } E \subset \mathcal{V}^*$ .

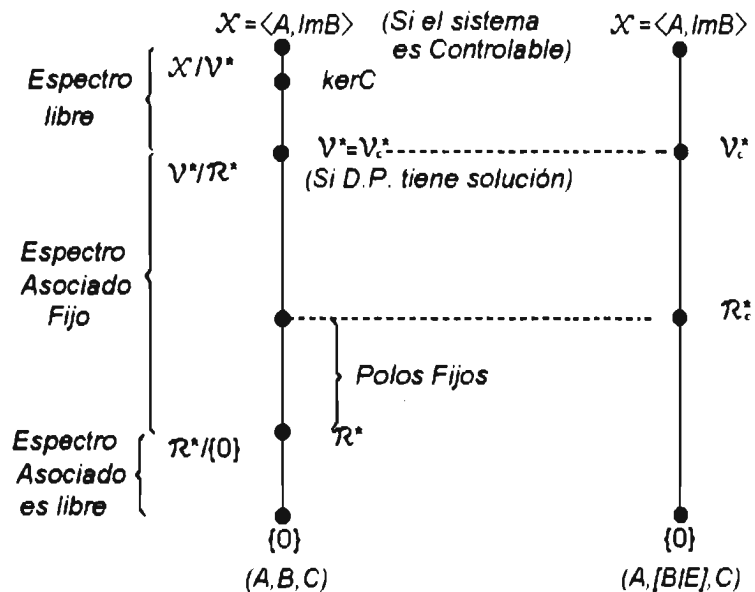


FIGURA 2.1. Caracterización geométrica de los polos fijos del desacoplamiento de perturbaciones.

cios y las ramas que unen a los nodos representan las relaciones de inclusión. La jerarquía se establece verticalmente. En una misma rama, el nodo que se encuentra en el extremo superior representa al subespacio que contiene al que está siendo representado por el nodo inferior.

Las relaciones de inclusión de los subespacios asociados a los polos fijos de **PDP** se muestran en el diagrama de la figura 2.1 (ver [1, Wonham, 1985], pag 117, y [13, Basile, Marro, 1992], pag. 221, para más detalles).

Una consecuencia importante de la caracterización de los polos fijos de **PDP** y de la utilización del diagrama de inclusiones de subespacios mostrado en la figura 2.1 es la siguiente: *los Polos Fijos del Problema de Desacoplamiento de Perturbaciones son los ceros finitos invariantes del sistema  $(A, B, C)$  que no son ceros finitos invariantes del sistema  $(A, [B | E], C)$ .*

## Capítulo 3

### Metodología propuesta

En los capítulos anteriores se discutieron los diversos conceptos que son necesarios para la comprensión de las ideas básicas que envuelven al control geométrico y al desacoplamiento de perturbaciones visto desde este enfoque.

En el capítulo 2 se indicó que cuando el par  $(A, B)$  (asociado al sistema lineal estacionario (2.1)), es controlable y cuando se cumple la condición de resolución del desacoplamiento de perturbaciones, *i.e.*  $\text{Im } E \subset \mathcal{V}^*$ , cualquier  $F \in \mathbf{F}(\mathcal{R}_c^*)$  puede ser utilizada en la ley de control  $u(t) = Fx(t)$  para desacoplar el vector de perturbaciones y obtener en el sistema retroalimentado el menor número de polos fijos. Esta elección de la aplicación  $F$  permite en consecuencia obtener la mayor libertad para la asignación de polos libres.

A continuación se presentará una metodología de síntesis de controladores para **PDP**, basada en el conocimiento previo de los grados de libertad existentes. La metodología será vista a través de dos enfoques:

El primero parte de la interpretación en términos matriciales de la caracterización geométrica del conjunto de las aplicaciones  $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$  que resuelven **PDP**, para la obtención de una parametrización de tal conjunto. El parámetro libre resume la libertad para la asignación de los polos libres.

El segundo se basa, para la parametrización del conjunto de aplicaciones  $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$  que resuelven **PDP**, en una descomposición del sistema perturbado, por medio de transformaciones de similitud construidas con las matrices de base de los subespacios asociados a los polos fijos de **PDP**. Los polos libres son los polos de dos subsistemas controlables resultantes de la descomposición.

Para ambos enfoques se proponen estrategias para la asignación de los polos libres.

La metodología descrita en este capítulo no requiere de la medición de las perturbaciones. Cuando las perturbaciones pueden ser medidas el problema de desacoplamiento de perturbaciones es menos restrictivo. Este capítulo finaliza con la determinación de la matriz de medición de perturbaciones, que complementa a la metodología presentada.

#### 3.1 Enfoque matricial

Hasta donde el autor conoce, los resultados que a continuación se exponen son *aplicaciones originales* en control geométrico de los resultados publicados en [16, Baksalary, Kala, 1980], relativos a la teoría de ecuaciones matriciales.

En aras de la claridad, se repite a continuación la condición de pertenencia de  $F$  a  $\mathbf{F}(\mathcal{R}_c^*)$ :

$$(A + BF)\mathcal{R}_c^* \subset \mathcal{R}_c^* \quad (3.1)$$

Como se ha indicado precedentemente, cualquier aplicación  $F$  que satisface (3.1) es una buena elección en términos de desacoplamiento de perturbaciones y de asignación de polos libres (sí

**PDP** tiene solución y si el sistema es controlable).

La inclusión de subespacios (3.1) puede ser reformulada en términos matriciales como la ecuación:

$$(A + BF)R_c = R_c P, \quad (3.2)$$

donde  $R_c$  es tal que  $\mathcal{R}_c^* = \text{Im } R_c$  y  $P \in \mathbb{R}^{\dim(\mathcal{R}_c^*) \times \dim(\mathcal{R}_c^*)}$  (las aplicaciones  $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ ,  $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$  y  $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$  están ahora representadas por matrices reales constantes, lo cual supone la elección de bases para  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{D}$  y  $\mathcal{Y}$ ).

En lo que sigue se abordará la parametrización de la familia  $\mathbf{F}(\mathcal{R}_c^*)$ , para las bases escogidas de  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{D}$  y  $\mathcal{Y}$ .

Los algoritmos actuales desarrollados para el enfoque geométrico (ver [13, Basile, Marro, 1992], y [11, Lin, Saberi y Chen, 1992]) pueden proporcionar una base para el subespacio  $\mathcal{R}_c^*$ , por lo que en lo que resta de esta sección se asumirá que una base para  $\mathcal{R}_c^*$  es conocida.

La ecuación matricial (3.2) puede ser ordenada como sigue:

$$AR_c + BFR_c = R_c P, \quad (3.3)$$

que es un caso particular de la ecuación matricial real<sup>1</sup>  $\bar{A} X \bar{B} + \bar{C} Y \bar{D} = \bar{E}$ , donde las matrices  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$ ,  $\bar{D}$  y  $\bar{E}$  se asumen conocidas y las matrices  $X, Y$  son matrices incógnitas. Esta ecuación matricial ha sido estudiada extensivamente en la teoría del álgebra lineal y las condiciones necesarias y suficientes para su resolución, así como su solución general han sido establecidas en el teorema siguiente, que a continuación se repite sin demostración, restringiendo el resultado a matrices de coeficientes reales, y que resultará útil para la obtención de una parametrización de  $F \in \mathbf{F}(\mathcal{R}_c^*)$ .

**Teorema 3.1** [16, Baksalary, Kala, 1980].

Sean  $\bar{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\bar{B} \in \mathbb{R}^{p \times q}$ ,  $\bar{C} \in \mathbb{R}^{m \times r}$ ,  $\bar{D} \in \mathbb{R}^{s \times q}$  y  $\bar{E} \in \mathbb{R}^{m \times q}$  matrices conocidas. Denótese, para cualquier matriz dada  $M$ , los proyectores<sup>2</sup>  $K_M$  y  $S_M$  definidos como  $I - MM^+$  e  $I - M^+M$ , respectivamente. Sean  $G = K_{\bar{A}} \bar{C}$  y  $H = \bar{D} S_{\bar{B}}$ . Entonces, existen matrices reales  $X$  e  $Y$  que satisfacen la ecuación matricial:

$$\bar{A} X \bar{B} + \bar{C} Y \bar{D} = \bar{E}, \quad (3.4)$$

si y solamente si:

$$GG^+ K_{\bar{A}} \bar{E} \bar{D}^+ \bar{D} = K_{\bar{A}} \bar{E} \quad \text{y} \quad \bar{C} \bar{C}^+ \bar{E} S_{\bar{B}} H^+ H = \bar{E} S_{\bar{B}}$$

o equivalentemente:

$$\begin{cases} K_G K_{\bar{A}} \bar{E} = 0; \\ K_{\bar{A}} \bar{E} S_{\bar{D}} = 0; \\ K_{\bar{C}} \bar{E} S_{\bar{B}} = 0; \\ \bar{E} S_{\bar{B}} S_H = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

<sup>1</sup>Para evitar confusión con otras matrices, se usará la barra para indicar las matrices de la ecuación  $\bar{A} X \bar{B} + \bar{C} Y \bar{D} = \bar{E}$ .

<sup>2</sup>Un proyector o matriz idempotente es la matriz  $W$  que cumple con la propiedad  $W^2 = W$ .

Además, si (3.5) se verifica, una representación de la solución general está dada como sigue:

$$Y = G^+ K_{\bar{A}} \bar{E} \bar{D}^+ + (S_G \bar{C}^+ + S_{\bar{C}} G^+ K_{\bar{A}}) \bar{E} S_{\bar{B}} H^+ \quad (3.6)$$

$$+ W - \bar{C}^+ \bar{C} S_G W H H^+ - G^+ G W \bar{D} \bar{D}^+, \quad (3.7)$$

$$X = \bar{A}^+ (\bar{E} - \bar{C} Y \bar{D}) \bar{B}^+ + Z - \bar{A}^+ \bar{A} Z \bar{B} \bar{B}^+$$

con matrices arbitrarias  $W \in \mathbb{R}^{r \times s}$  y  $Z \in \mathbb{R}^{n \times p}$ . ■

**Observación 3.1.** Cuando una matriz real  $M$  es inyectiva, su pseudoinversa  $M^+$  es igual a (ver [13, Basile, Marro, 1992, p.393]):

$$M^+ = (M^T M)^{-1} M^T.$$

En el caso que concierne al presente trabajo de tesis, la matriz  $R_c$  es siempre inyectiva (ya que sus columnas forman una base del subespacio  $\mathcal{R}_c^*$ ) y por otra parte, puede suponerse que la matriz  $B$  también lo es. De hecho, cuando  $B$  no es inyectiva, puede substituirse en la realización  $(A, B, C, E)$  por una matriz formada por sus columnas linealmente independientes, lo cual obliga a una adecuación de las entradas del sistema.

En lo que sigue se aplicará el Teorema 3.1 a la obtención de la parametrización de las aplicaciones  $F$  que resuelven **PDP**, tomando en cuenta lo expresado en la observación precedente.

### 3.1.1 PARAMETRIZACIÓN DE LAS APLICACIONES QUE RESUELVEN PDP

Antes de presentar la parametrización de las aplicaciones que resuelven **PDP**, y que dan lugar al número mínimo de polos fijos en el sistema retroalimentado, se introduce el lema siguiente, que será de utilidad en la demostración del resultado principal.

**Lema 3.1. Parametrización de aplicaciones  $F$  que cumplen  $(A + BF) \mathcal{R}_c^* \subset \mathcal{R}_c^*$**

Dado el sistema perturbado  $(A, B, C, E)$ , bajo las hipótesis  $(A, B)$  controlable,  $\text{Im} E \subset \mathcal{V}^*$  y  $B$  inyectiva, la familia de aplicaciones  $F$  que cumplen  $(A + BF) \mathcal{R}_c^* \subset \mathcal{R}_c^*$  se encuentra dada por:

$$F^{\mathcal{R}_c^*} = G^+ K_{R_c} A R_c R_c^+ + W K_{R_c}, \quad (3.8)$$

donde  $W \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es arbitraria y:

$$\begin{aligned} G &:= -K_{R_c} B, \\ K_{R_c} &:= I_n - R_c R_c^+. \end{aligned}$$

#### **Demostración.**

En lo que sigue, para simplificar la notación, se omitirá la indicación de dimensión en las matrices identidad.

Definanse las matrices reales:

$$\begin{cases} \tilde{A} &= R_c; \\ \tilde{X} &= P; \\ \tilde{B} &= I; \\ \tilde{C} &= -B; \\ \tilde{Y} &= F^{\mathcal{R}_c}; \\ \tilde{D} &= R_c; \\ \tilde{E} &= AR_c. \end{cases} \quad (3.9)$$

Entonces, de acuerdo con el Teorema 3.1, para que existan matrices  $F^{\mathcal{R}_c}$  y  $P$  que satisfagan la ecuación (3.3), las siguientes igualdades matriciales deben verificarse:

$$K_G K_{R_c} A R_c = 0; \quad (3.10)$$

$$K_{R_c} A R_c S_{R_c} = 0; \quad (3.11)$$

$$K_{-R_c} A R_c S_I = 0; \quad (3.12)$$

$$A R_c S_I S_{II} = 0. \quad (3.13)$$

donde:

$$K_{R_c} = I - R_c R_c^+;$$

$$K_G = I - G G^+;$$

$$S_{R_c} = I - R_c^+ R_c;$$

$$S_B = I - B^+ B;$$

$$S_{-B} = S_B;$$

$$S_G = I - G^+ G;$$

$$S_I = 0;$$

$$H = R_c S_I = 0$$

$$S_{II} = I.$$

#### Verificación de la igualdad (3.10):

Sea  $M_1 := K_G K_{R_c} A R_c$ . De las definiciones (3.9) y de la sustitución de los proyectores correspondientes:

$$M_1 = \left( I - (K_{R_c} B)(K_{R_c} B)^+ \right) \left( I - R_c R_c^+ \right) A R_c. \quad (3.14)$$

De la ecuación (3.3), se tiene que  $A R_c = R_c P - B F^{\mathcal{R}_c} R_c$ . Así  $M_1$  toma la forma siguiente:

$$M_1 = \left( I - (K_{R_c} B)(K_{R_c} B)^+ \right) \left( I - R_c R_c^+ \right) (R_c P - B F^{\mathcal{R}_c} R_c)$$

o bien:

$$M_1 = \left( I - (K_{R_c} B)(K_{R_c} B)^+ \right) (R_c P - B F^{\mathcal{R}_c} R_c - R_c R_c^+ R_c P + R_c R_c^+ B F^{\mathcal{R}_c} R_c),$$

pero debido a que  $R_c^+ R_c = I$ , esto se reduce a:

$$M_1 = \left( I - (K_{R_c} B)(K_{R_c} B)^+ \right) \left( I - R_c R_c^+ \right) B F^{\mathcal{R}_c} R_c.$$



y de la definición de  $K_{R_c}$  se tiene:

$$M_1 = \left( I - (K_R, B)(K_R, B)^+ \right) K_{R_c} B F^{\mathcal{R}_c} R_c.$$

es decir,

$$M_1 = K_{R_c} B F^{\mathcal{R}_c} R_c - (K_R, B)(K_{R_c} B)^+ (K_{R_c} B) F^{\mathcal{R}_c} R_c. \quad (3.15)$$

Ahora bien, tomando en cuenta la definición  $G = -K_{R_c} B$ , la ecuación (3.15) se puede expresar como sigue:

$$M_1 = G F^{\mathcal{R}_c} R_c - G G^+ G F^{\mathcal{R}_c} R_c. \quad (3.16)$$

Finalmente, teniendo en cuenta la propiedad  $G^+ G = I$ , la ecuación (3.16) toma la forma:

$$M_1 = G F^{\mathcal{R}_c} R_c - G F^{\mathcal{R}_c} R_c = 0,$$

lo cual verifica la igualdad (3.10).

**Verificación de la igualdad (3.11):**

Sea  $M_2 := K_{R_c} A R_c S_{R_c}$ . De las definiciones (3.9) y de la sustitución de los proyectores correspondientes:

$$M_2 = \left( I - R_c R_c^+ \right) A R_c \left( I - R_c^+ R_c \right)$$

y ya que  $R_c^+ R_c = I$ , se tiene:

$$M_2 = 0.$$

lo cual verifica la igualdad (3.11).

**Verificación de la igualdad (3.12):**

Sea  $M_3 := K_{-R_c} A R_c S_I$ . De las definiciones (3.9) y dado que  $S_I = 0$ , se tiene:

$$M_3 = 0.$$

lo cual verifica la igualdad (3.12).

**Verificación de la igualdad (3.13):**

Sea  $M_4 := A R_c S_I S_H$ . De las definiciones (3.9) y dado que  $S_I = 0$ , se tiene:

$$M_4 = 0.$$

lo cual verifica la igualdad (3.13).

Dado que las igualdades (3.10)-(3.13) se verifican, existen matrices  $F^{\mathcal{R}_c}$  y  $P$  que satisfacen la ecuación (3.3) y del Teorema 3.1 se tiene:

$$\begin{aligned} F^{\mathcal{R}_c} = & G^+ K_{R_c} A R_c R_c^+ - (-S_C B^+ + S_{-B} G^+ K_{R_c}) A R_c S_I H^+ \\ & + W - B^+ B S_C W H H^+ - G^+ G W R_c R_c^+, \end{aligned}$$

y:

$$P = R_c^+ (A R_c + B F^{\mathcal{R}_c} R_c) H^+ + Z - R_c^+ R_c Z H H^+.$$

Tomando en cuenta que  $S_I = 0$ ,  $S_G = I - G^+G = 0$ ,  $S_{R_c} = 0$ ,  $S_{-B} = S_B = 0$  y  $R_c^+R_c = I$ , se tiene finalmente como solución de la ecuación (3.3) lo siguiente:

$$F^{\mathcal{R}_c^*} = G^+K_{R_c}AR_cR_c^+ + WK_{R_c} \quad (3.17)$$

y:

$$P = R_c^+(A + BF^{\mathcal{R}_c^*})R_c. \quad (3.18)$$

Así, la ecuación (3.17) parametriza a  $F(\mathcal{R}_c^*)$ , siendo la matriz  $W$  el parámetro libre<sup>3</sup>.

Notése que de la hipótesis de controlabilidad de  $(A, B)$  se desprende la no existencia de polos no controlables en el sistema resultante al aplicar cualquier elemento de la familia (3.17). ■

**Observación 3.2.** En el Lema 3.1 se obtuvo la parametrización de las aplicaciones que pertenecen a  $F(\mathcal{R}_c^*)$ , i.e.:

$$F^{\mathcal{R}_c^*} = G^+K_{R_c}AR_cR_c^+ + WK_{R_c}.$$

En términos de PDP, esta parametrización tiene la siguiente interpretación:

Por una parte, el componente  $G^+K_{R_c}AR_cR_c^+$  actúa como una retroalimentación estática de estados que desacopla el vector de perturbaciones. Por otro lado, el componente  $WK_{R_c}$  actúa como una nueva retroalimentación y como tal asigna los polos libres del sistema resultante de la aplicación de  $G^+K_{R_c}AR_cR_c^+$ , que no están asociados al subespacio  $\mathcal{R}_c^*$ , ya que  $\text{Im } K_{R_c} = (\mathcal{R}_c^*)^\perp$ . En otras palabras, el componente  $WK_{R_c}$  solo retroalimenta los estados asociados al complemento ortogonal de  $\mathcal{R}_c^*$ .

Lo anterior significa que  $W$  puede ser siempre escogida para asignar los  $n - \dim(\mathcal{R}_c^*)$  polos asociados con el complemento ortogonal de  $\mathcal{R}_c^*$ . Sin embargo, ninguna elección de  $W$  podrá servir para asignar los polos libres asociados con el subespacio  $\mathcal{R}_c^*$ , ya que este está incluido en  $\mathcal{R}_c^*$ .

Como consecuencia inmediata de la observación se tiene el siguiente:

**Corolario 3.1. Parametrización de las aplicaciones que resuelven PDP cuando  $\mathcal{R}^* = \{0\}$**

Dado el sistema perturbado  $(A, B, C, E)$ , bajo las hipótesis  $(A, B)$  controlable,  $\text{Im } E \subset \mathcal{V}^*$ ,  $B$  inyectiva y  $\mathcal{R}^* = \{0\}$ , la familia de aplicaciones  $F$  que resuelven PDP con el número máximo de grados de libertad está dada por (3.8).

En lo que sigue se presenta el resultado principal de este capítulo.

**Teorema 3.2. Parametrización de las aplicaciones que resuelven PDP con el número máximo de grados de libertad**

<sup>3</sup>La obtención de (3.17) y de (3.18) se realizó con base en las asignaciones (3.9). La asignación alternativa:  $\tilde{A} = B$ ,  $X = F^{\mathcal{R}_c^*}$ ,  $\tilde{B} = R_c$ ,  $\tilde{C} = -R_c$ ,  $Y = P$ ,  $\tilde{D} = I$  y  $\tilde{E} = -AR_c$ , da lugar a la parametrización equivalente:

$$F^{\mathcal{R}_c^*} = -B^+(R_cG^+K_B + I)AR_cR_c^+ + ZK_{R_c}.$$

y:

$$P = -G^+K_BAR_c.$$

en términos del parámetro libre  $Z$ , que desempeña el mismo papel que el parámetro  $W$  en (3.17)

Dado el sistema perturbado  $(A, B, C, E)$ , bajo las hipótesis  $(A, B)$  controlable,  $\text{Im} E \subset \mathcal{V}^*$  y  $B$  inyectiva, la familia de aplicaciones  $F$  que resuelven PDP con el número máximo de grados de libertad está dada por:

$$F = \Psi + \tilde{W}\tilde{\Omega}, \quad (3.19)$$

donde:

$$\begin{aligned} \Psi &= G^+ K_{R_c} A R_c R_c^+, \\ \tilde{\Omega} &= K_{R_c} + R R^+ R_c R_c^+, \end{aligned}$$

$\tilde{W} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es una matriz real arbitraria y:

$$\begin{aligned} G &:= -K_{R_c} B, \\ K_{R_c} &:= I_n - R_c R_c^+. \end{aligned}$$

#### **Demostración.**

De la Observación 3.2 se tiene que  $W$  en (3.19) asigna los polos asociados con el complemento ortogonal de  $\mathcal{R}_c^*$ , ya que  $K_{R_c}$  solo permite la retroalimentación de los estados que pertenecen  $(\mathcal{R}_c^*)^\perp$ . Para asignar adicionalmente los polos libres asociados con  $\mathcal{R}^*$  solo resta construir un proyector  $\tilde{\Omega}$  que permita la retroalimentación de los estados que pertenecen al complemento ortogonal de la intersección entre  $\mathcal{R}^*$  y  $(\mathcal{R}_c^*)^\perp$ , i.e.:

$$\text{Im } \tilde{\Omega} = \left( \text{Im } R_c \cap (\text{Im } R)^\perp \right)^\perp.$$

La construcción de  $\tilde{\Omega}$  se lleva a cabo por medio de proyectores conmutantes<sup>4</sup> como sigue:

Sean los proyectores conmutantes  $P = I - R R^+$  y  $Q = R_c R_c^+$ , entonces el proyector  $PQ$  es tal que  $\text{Im } PQ = (\text{Im } R)^\perp \cap \text{Im } R_c$ , y eligiendo  $\tilde{\Omega} = I - PQ$  se tiene:

$$\text{Im } \tilde{\Omega} = \ker PQ = \text{Im } R + \ker R_c^T.$$

Simplificando:

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega} &= I - (I - R R^+) R_c R_c^+ \\ &= I - R_c R_c^+ + R R^+ R_c R_c^+, \end{aligned}$$

lo cual finaliza la demostración. ■

<sup>4</sup>Se dice que  $P$  y  $Q$  son proyectores conmutantes si tienen un conjunto de vectores propios linealmente independientes en común. Además, si  $P$  y  $Q$  son proyectores conmutantes, entonces el proyector  $PQ$  es tal que

$$\text{Im } PQ = \text{Im } P \cap \text{Im } Q;$$

$$\ker PQ = \ker P + \ker Q.$$

### 3.1.2 APROVECHAMIENTO DE LOS GRADOS DE LIBERTAD

En lo que sigue se describen dos estrategias para la asignación de los polos libres. La primera se basa en la retroalimentación estática de una salida ficticia, mientras que la segunda se fundamenta en la retroalimentación de los estados (vía una transformación de similaridad adecuada), que no están asociados con los polos fijos de **PDP**.

Asignación de polos por retroalimentación de salida ficticia

Bajo las hipótesis del Teorema 3.2, las aplicaciones  $F$  parametrizadas por (3.19) dan lugar al mínimo de polos fijos en el sistema retroalimentado, garantizando el desacoplamiento del vector de perturbaciones. El parámetro libre  $\tilde{W}$  puede ser entonces escogido para obtener desempeños complementarios. Una manera de aprovechar esta libertad es la siguiente:

La retroalimentación de estados (3.19):

$$F = \Psi + \tilde{W}\tilde{\Omega}, \quad (3.20)$$

donde:

$$\Psi := G^+ K_{R_c} A R_c R_c^+ \text{ y } \tilde{\Omega} := K_{R_c} + R R^+ R_c R_c^+.$$

puede ser interpretada como dos acciones de retroalimentación complementarias. La primera:

$$u(t) = \Psi x(t) + v(t)$$

desacopla el vector de perturbaciones (efectivamente, la elección  $\tilde{W} = 0$  en (3.20) es válida), *i.e.* la salida  $y(\cdot)$  del sistema en lazo cerrado:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= (A + B\Psi)x(t) + Bv(t) + Ed(t), \quad t \geq 0, \\ y(t) &= Cx(t), \quad t \geq 0 \end{cases}$$

no depende de la perturbación  $d(\cdot)$ .

La segunda acción de retroalimentación, que tendrá por función la asignación de los polos libres, puede ser interpretada como una retroalimentación de salida *ficticia*, *i.e.*:

$$v(t) = \tilde{W} z(t), \quad t \geq 0,$$

donde la salida ficticia  $z(t)$  está definida como sigue:

$$z(t) := \tilde{\Omega} x(t), \quad t \geq 0.$$

La asignación de polos por retroalimentación estática de salida no es en general tarea fácil. Sin embargo, debido a que  $\tilde{\Omega}$  es de rango igual a  $\dim(\mathcal{X}) - \dim(\mathcal{R}_c^*/\mathcal{R}^*)$  se puede aplicar directamente la metodología de retroalimentación de salida descrita en [19. Lewis, F. L., 1992] para asignar a voluntad todos los polos libres. La ubicación de éstos, para obtener desempeños complementarios específicos (en el dominio del tiempo y/o en el dominio de la frecuencia), es un tema de investigación actual.

Asignación de polos por retroalimentación de estados

Como alternativa a la retroalimentación de salida ficticia propuesta anteriormente, se pueden asignar los polos libres, del desacoplamiento de perturbaciones, por medio de la aplicación de una retroalimentación de estados  $v(t) = \tilde{F}x(t) + r(t)$  al sistema  $(\tilde{A}, \tilde{B}, C, E)$ , resultante de la retroalimentación  $u(t) = \Psi x(t) + v(t)$  en el sistema perturbado original  $(A, B, C, E)$ , *i.e.*:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \tilde{A}x(t) + \tilde{B}v(t) + Ed(t), t \geq 0, \\ y(t) &= \tilde{C}x(t), t \geq 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

con  $\tilde{A} = A + B\Psi$  y  $\tilde{B} = B$ , bajo la siguiente hipótesis:

$$\ker \tilde{\Omega} = \mathcal{N}. \quad (3.22)$$

donde  $\mathcal{N}$  denota el espacio de estados inobservables del par  $(\tilde{A}, \tilde{\Omega})$ . La igualdad (3.22) permite obtener una retroalimentación que actúe únicamente sobre los estados que no están asociados a los polos fijos de **PDP**.

De esta manera, la construcción de la aplicación  $\tilde{F}$  se basa en la aplicación de una transformación de similaridad al sistema (3.21):

Sea  $\tilde{\Omega}_{\tilde{h}}$  la matriz formada por los renglones linealmente independientes de la matriz  $\tilde{\Omega}$  y sea  $\Gamma$  cualquier matriz tal que  $\left( \begin{array}{c|c} \tilde{\Omega}_{\tilde{h}} & \Gamma \end{array} \right)^T$  sea invertible. Entonces, se define la transformación de similaridad  $\tilde{T}$  como sigue:

$$\tilde{T} = \left( \begin{array}{c|c} \tilde{\Omega}_{\tilde{h}} & \Gamma \end{array} \right)^{-1}.$$

Ahora bien, aplicando  $\tilde{T}$  a (3.21) se obtiene el sistema similar  $(\tilde{T}^{-1}\tilde{A}\tilde{T}, \tilde{T}^{-1}\tilde{B}, \tilde{C}\tilde{T}, \tilde{T}^{-1}E)$ :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{w}_{\tilde{\Omega}}(t) \\ \dot{w}_{\Gamma}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_{\tilde{\Omega}} & 0 \\ A_{\Gamma_1} & A_{\Gamma_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{\tilde{\Omega}}(t) \\ w_{\Gamma}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{\tilde{\Omega}} \\ B_{\Gamma} \end{pmatrix} v(t) + \begin{pmatrix} E_{\tilde{\Omega}} \\ E_{\Gamma} \end{pmatrix} d(t), t \geq 0, \\ y(t) &= \begin{pmatrix} C_{\tilde{\Omega}} & C_{\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{\tilde{\Omega}}(t) \\ w_{\Gamma}(t) \end{pmatrix}, t \geq 0, \end{cases} \quad (3.23)$$

(dado que  $\Psi$  en (3.21) resuelve PDP, la perturbación  $d(\cdot)$  no afecta la salida  $y(\cdot)$  en (3.23)), donde el subsistema asociado  $(A_{\tilde{\Omega}}, B_{\tilde{\Omega}}, C_{\tilde{\Omega}}, E_{\tilde{\Omega}})$  es controlable. Entonces, siempre se puede hallar una matriz  $F_{\tilde{\Omega}}$  para que la ley de control:

$$v(t) = \left( F_{\tilde{\Omega}} \mid 0 \right) \begin{pmatrix} w_{\tilde{\Omega}}(t) \\ w_{\Gamma}(t) \end{pmatrix}$$

asigne a voluntad el espectro de  $A_{\tilde{\Omega}} + B_{\tilde{\Omega}}F_{\tilde{\Omega}}$ , es decir los polos libres de **PDP**.

En consecuencia, la ley de control que desacopla la perturbación y asigna todos los polos libres, está dada por:

$$u(t) = \left( \Psi + \tilde{F} \right) x(t) + r(t), \quad (3.24)$$

donde:

$$\tilde{F} = \left( F_{\Omega} \mid 0 \right) T^{-1}.$$

## 3.2 Enfoque basado en transformaciones de similaridad

Una solución alternativa a la presentada en la sección precedente, para la parametrización de las aplicaciones que resuelven **PDP**, será desarrollada a continuación. Como se verá, esta alternativa se basa en la aplicación de transformaciones de similaridad construidas a partir de los subespacios que intervienen en la caracterización de los polos fijos de **PDP**. La solución, además de garantizar el desacoplamiento de perturbaciones (cuando esto es posible), proporciona al diseñador una base adecuada para la utilización de los grados de libertad, que pueden ser empleados con propósitos diversos tales como la asignación de polos para la estabilización del sistema (si los polos fijos de **PDP** son estables), o bien para la minimización de algún índice de desempeño.

### 3.2.1 DESCRIPCIÓN DE LA METODOLOGÍA

La metodología que será descrita se basa en una descomposición del espacio de estados que muestra explícitamente la dinámica fija asociada al desacoplamiento de perturbaciones, cuando se elige el subespacio  $\mathcal{R}_c^*$  como soporte para la parametrización de las soluciones de **PDP**. Los pasos que se siguen corresponden a los desarrollados en [15, Rugli, 1993], con la diferencia de que en dicho trabajo se elige el subespacio  $\mathcal{V}^*$ , para la determinación de la ley de control que desacopla la perturbación, y por lo tanto no puede garantizarse la máxima libertad de asignación de polos libres.

Los pasos de la metodología son los siguientes:

1. Partiendo de un sistema perturbado controlable (bajo las hipótesis de existencia de solución de **PDP** y de inyectividad de  $B$ ), se determina una ley de control  $u(t) = \bar{F}x(t) + Gr(t)$ , que desacople la perturbación, fijando un número mínimo de polos, y que disocie las entradas del sistema asociadas a los polos libres, de aquellas asociadas a los polos fijos de **PDP**.
2. Para mostrar explícitamente la inclusión de subespacios:

$$(\text{Im } B \cap \mathcal{R}^*) \subset \mathcal{R}^* \subset \mathcal{R}_c^* \subset \mathcal{X},$$

con la finalidad de disociar los polos libres de los polos fijos de **PDP**, se construye la transformación de similaridad  $T$ , con las bases de los subespacios  $\text{Im } B \cap \mathcal{R}^*$ ,  $\mathcal{R}^*$ ,  $\mathcal{R}_c^*$ , que son obtenidas con algoritmos estándares, y se aplica al sistema obtenido en el paso precedente.

3. El sistema transformado es sometido a una nueva ley de control  $F^pl$ , para asignar los polos libres.

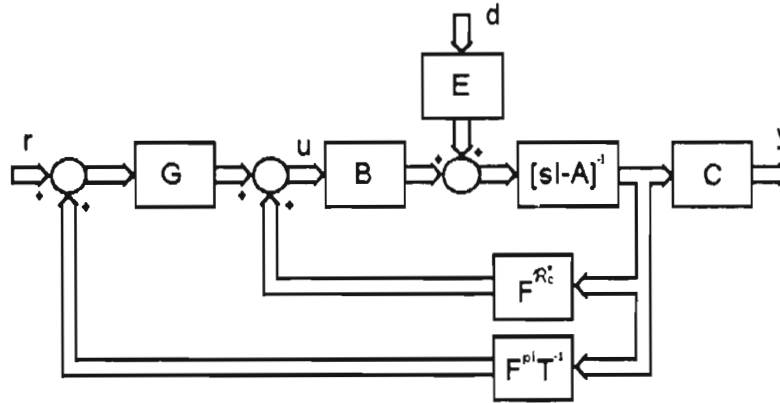


FIGURA 3.1. Diagrama de bloques de la retroalimentación con ley de control compuesta que desacopla y asigna los polos libres.

4. Finalmente, se obtiene la ley de control  $F = \bar{F} + GF^pT^{-1}$ .

Gráficamente pueden visualizarse los pasos anteriores si se considera el diagrama de bloques mostrado en la figura (3.1). Obsérvese que el lazo interno de retroalimentación asociado a la ley de control  $\bar{F}$  se encarga de desacoplar la perturbación del sistema  $(A, B, C)$ , y el lazo externo permite la asignación del espectro libre.

A continuación se desarrollan detalladamente los pasos anteriores. Se supone que  $\text{Im } E \subset \mathcal{V}^*$  y que  $(A, B)$  es controlable y que  $B$  inyectiva.

*Obtención de un sistema con perturbación desacoplada.* Utilizando la ley de control por retroalimentación estática de estados:

$$u(t) = \bar{F}x(t) + Gr(t)$$

tal que  $\bar{F} \in \mathbf{F}(\mathcal{R}_c^*)$  y:

$$G = \begin{pmatrix} G_a & G_b \end{pmatrix}, \tag{3.25}$$

donde  $G_a$  es invertible<sup>5</sup> y es tal que  $\text{Im}(BG_a) = \text{Im } B \cap \mathcal{R}^*$ . Se obtiene así el sistema en lazo cerrado:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + B\bar{F})x(t) + BGr(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{3.26}$$

en el cual  $d(\cdot)$  ha sido desacoplada. La matriz  $G_a$  se construye teniendo en cuenta que  $B$  se asume inyectiva.

Sea  $W$  tal que  $\text{Im } W = \text{Im } B \cap \mathcal{R}^*$  de manera que se tiene la ecuación matricial:

$$BG_a = W.$$

<sup>5</sup> $G$  invertible asegura que la estructura de los polos al infinito no sea modificada (consultar por ejemplo [7. Morse,1973]).

donde  $B$  admite una pseudoinversa izquierda  $B^+ = (B^T B)^{-1} B^T$  tal que  $B^+ B = I_m$  por lo que la solución puede ser determinada como sigue:

$$G_a = B^+ W = (B^T B)^{-1} B^T W. \quad (3.27)$$

*Construcción del cambio de bases y aplicación de la transformación  $T$  al sistema con perturbación desacoplada.* Sea una transformación de similitud:

$$T = (T_1 | T_2 | T_3 | T_4),$$

donde:

$T_1$  es tal que  $\text{Im}(B \cap \mathcal{R}^*) = \text{Im } T_1$ .

$(T_1 | T_2)$  es tal que  $\mathcal{R}^* = \text{Im}(T_1 | T_2)$ .

$(T_1 | T_2 | T_3)$  es tal que  $\mathcal{R}_c^* = \text{Im}(T_1 | T_2 | T_3)$ .

$(T_1 | T_2 | T_3 | T_4)$  es tal que  $\mathcal{X} = \text{Im } T$ .

Bajo esta descomposición  $T$  transforma el sistema (3.26) a otra representación de estados, en la cual los polos fijos de **PDP** se muestran explícitamente.

Entonces se tiene como nuevo estado a  $w(t) = T^{-1}x(t)$  y se obtiene el sistema transformado:

$$\dot{w}(t) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{pmatrix} w(t) + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \\ 0 & B_{32} \end{pmatrix} r(t) \quad (3.28)$$

(por el momento se omite la ecuación para  $y(\cdot)$ ). Esta descomposición en forma triangular permitirá, como se verá mas adelante, obtener directamente los polos fijos de **PDP**. Las dimensiones de cada una de las matrices es como sigue:

$$A_{11} \in \mathbb{R}^{\dim(\mathcal{R}^*) \times \dim(\mathcal{R}^*)}, \quad (A_{11} = \overline{T^{-1}(A + B\bar{F})T} | \frac{\mathcal{R}^*}{\{0\}});$$

$$A_{12} \in \mathbb{R}^{\dim(\mathcal{R}_c^*) \times \dim(\mathcal{R}_c^*/\mathcal{R}^*)};$$

$$A_{13} \in \mathbb{R}^{\dim(\mathcal{R}_c^*) \times \dim(\mathcal{R}_c^*/\mathcal{R}^*)};$$

$$A_{22} \in \mathbb{R}^{\dim(\mathcal{R}_c^*/\mathcal{R}^*) \times \dim(\mathcal{R}_c^*/\mathcal{R}^*)}, \quad (A_{22} = \overline{T^{-1}(A + B\bar{F})T} | \frac{\mathcal{R}_c^*}{\mathcal{R}^*});$$

$$A_{23} \in \mathbb{R}^{\dim(\mathcal{R}_c^*/\mathcal{R}^*) \times \dim(\mathcal{X}/\mathcal{R}_c^*)};$$

$$A_{33} \in \mathbb{R}^{\dim(\mathcal{X}/\mathcal{R}_c^*) \times \dim(\mathcal{X}/\mathcal{R}_c^*)}, \quad (A_{33} = \overline{T^{-1}(A + B\bar{F})T} | \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{R}_c^*});$$

$$B_{11} \in \mathbb{R}^{\dim(\mathcal{R}_c^*/\mathcal{R}^*) \times \dim(\mathcal{R}_c^*/\mathcal{R}^*)};$$

$$B_{12} \in \mathbb{R}^{\dim(\mathcal{R}^*) \times \dim(\mathcal{U}/(\text{Im } B \cap \mathcal{R}^*))};$$

$$B_{22} \in \mathbb{R}^{\dim(\mathcal{R}_c^*/\mathcal{R}^*) \times \dim(\mathcal{U}/(\text{Im } B \cap \mathcal{R}^*))};$$

$$B_{32} \in \mathbb{R}^{\dim(\mathcal{X}/\mathcal{R}_c^*) \times \dim(\mathcal{U}/(\text{Im } B \cap \mathcal{R}^*))}.$$

*Triangularización del sistema retroalimentado transformado.* Para poner en evidencia los polos fijos y para facilitar la asignación de los polos libres se eligió una ley de control:

$$u(t) = F^{pl} w(t). \quad (3.29)$$

donde  $F^{pl}$  tiene la estructura siguiente:

$$F^{pl} = \begin{pmatrix} F_{11}^{pl} & | & 0 & | & 0 \\ \hline 0 & | & 0 & | & F_{23}^{pl} \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$



y:

$$\begin{aligned} F_{11}^{pl} &\in \mathbb{R}^{\dim(\text{Im } B \cap \mathcal{R}^*) \times \dim(\mathcal{R}^*)}, \\ F_{23}^{pl} &\in \mathbb{R}^{\dim(\mathcal{U} / \text{Im } B \cap \mathcal{R}^*) \times \dim(\mathcal{R}^*)}. \end{aligned}$$

Al aplicar (3.29) al sistema con perturbación desacoplada transformado (3.28), se obtiene entonces:

$$\begin{pmatrix} \dot{w}_a(t) \\ \dot{w}_b(t) \\ \dot{w}_c(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11}F_{11}^{pl} & A_{12} & A_{13} + B_{12}F_{23}^{pl} \\ 0 & A_{22} & A_{23} + B_{22}F_{23}^{pl} \\ 0 & 0 & A_{33} + B_{32}F_{23}^{pl} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_a(t) \\ w_b(t) \\ w_c(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \\ 0 & B_{32} \end{pmatrix} r(t). \quad (3.31)$$

El polinomio característico  $\Pi_{mc}(s)$  de la matriz de dinámica del sistema (3.31) está dado como sigue:

$$\Pi_{mc}(s) = \Pi_{A_{11c}}(s) \Pi_{A_{22c}}(s) \Pi_{A_{33c}}(s), \quad (3.32)$$

donde:

- $\Pi_{A_{11c}}(s) = \det(sI - (A_{11} + B_{11}F_{11}^{pl}))$ ;
- $\Pi_{A_{22c}}(s) = \det(sI - (A_{22}))$ ;
- $\Pi_{A_{33c}}(s) = \det(sI - (A_{33} + B_{32}F_{23}^{pl}))$ .

Se puede entonces observar que los polos fijos del problema de desacoplamiento de perturbaciones están dados por los valores propios de la matriz  $A_{22}$  y dado que  $(A_{11}, B_{11})$ , el par ligado a la dinámica del sistema:

$$\dot{w}_a = (A_{11} + B_{11}F_{11}^{pl})w_a + A_{12}w_b + (A_{13} + B_{12}F_{23}^{pl})w_c + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \end{pmatrix} r \quad (3.33)$$

(el subsistema ligado al subespacio  $(A, \text{Im } B)$ -invariante de controlabilidad,  $\mathcal{R}^*$ ) y  $(A_{33}, B_{32})$ , el par ligado a la dinámica del sistema:

$$\dot{w}_c = (A_{33} + B_{32}F_{23}^{pl})w_c + \begin{pmatrix} 0 & B_{32} \end{pmatrix} r \quad (3.34)$$

(subsistema ligado al espacio cociente  $\mathcal{X}/\mathcal{R}^*$ ), son controlables (Ver [1, Wonham, 1985, Teorema 5.1 y Prop. 1.2]), es posible asignar libremente las raíces de  $\Pi_{A_{11c}}(s)$  y  $\Pi_{A_{33c}}(s)$ , esto es los polos libres.

Resumiendo, la ley de control que desacopla la perturbación y permite la asignación del número máximo de polos libres es la siguiente:

$$F = \bar{F} + GF^{pl}T^{-1}. \quad (3.35)$$

### 3.2.2 ASIGNACIÓN DE POLOS LIBRES Y GRADOS DE LIBERTAD

De la metodología precedente resulta la parametrización del conjunto de leyes de control que resuelven **PDP**. Dicha parametrización está descrita por:

$$u(t) = \left( \bar{F} + G \begin{pmatrix} F_{11}^{pl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{23}^{pl} \end{pmatrix} T^{-1} \right) x(t) + Gr(t).$$

donde  $F_{11}^{pl}$  y  $F_{23}^{pl}$  son los parámetros matriciales, cuya elección determina la ubicación de los polos libres. La selección adecuada de los parámetros libres, para lograr desempeños complementarios deseados, es motivo actual de estudio.

## 3.3 Interpretación de los polos fijos

Dar una interpretación a los polos fijos es un asunto difícil de realizar debido a que no es evidente el papel que desempeñan en el rechazo de perturbaciones por retroalimentación estática. Sin embargo pueden interpretarse en términos de polos fijos del precompensador equivalente en lazo abierto a la retroalimentación estática de estados.

Considérese las transformadas de Laplace del estado en el sistema perturbado:

$$x(s) = (sI - A)^{-1} Bu(s) + (sI - A)^{-1} Ed(s) \quad (3.36)$$

y de la retroalimentación estática de estados  $u(s) = Fx(s)$ . Se tiene así:

$$u(s) = F(sI - A)^{-1} Bu(s) + F(sI - A)^{-1} Ed(s). \quad (3.37)$$

Despejando  $u(s)$ :

$$u(s) = c(s)d(s), \quad (3.38)$$

donde:

$$c(s) = \left( I - F(sI - A)^{-1} B \right)^{-1} F(sI - A)^{-1} E$$

puede interpretarse como un precompensador equivalente en lazo abierto a la retroalimentación estática de estados. Así mismo, la salida del sistema compensado está dada por:

$$y(s) = T_u(s)u(s) + T_d(s)d(s), \quad (3.39)$$

donde  $T_u(s) = C(sI - A)^{-1} B$  y  $T_d(s) = C(sI - A)^{-1} E$ .

Sustituyendo en (3.39) el precompensador  $c(s)$  se tiene:

$$y(s) = (T_u(s)c(s) + T_d(s))d(s). \quad (3.40)$$

Para que la salida sea cero, como se desea en el desacoplamiento de perturbaciones, se debe cumplir forzosamente que:

$$T_u(s)c(s) = -T_d(s). \quad (3.41)$$

Anteriormente se ha dicho que los polos fijos del desacoplamiento de perturbaciones son los ceros finitos invariantes de  $(A, B, C)$  que no son ceros finitos invariantes de  $(A, [B \mid E], C)$ .

Supóngase que tanto  $(A, B, C)$  como  $(A, [B \mid E], C)$  son descripciones mínimas. Entonces, los polos fijos de **PDP** son los ceros finitos de transmisión de  $T_u(s)$  que no son ceros finitos de transmisión de  $[T_u(s) \mid T_d(s)]$ . Debido a la ecuación (3.41), para que el desacoplamiento de perturbaciones se produzca se requiere que los ceros finitos de transmisión de  $T_u(s)$  que no son ceros finitos de transmisión de  $[T_u(s) \mid T_d(s)]$  sean siempre polos de  $c(s)$ , de otra manera los ceros de  $T_u(s)$  aparecerían todos en  $[T_u(s) \mid T_u(s)c(s)]$ .

La suposición de que  $(A, B, C)$  y  $(A, [B \mid E], C)$  son realizaciones mínimas se elimina sin dificultad.

### 3.4 Desacoplamiento de perturbaciones medibles

Durante todo el trabajo se ha tratado el desarrollo de algoritmos para el desacoplamiento de perturbaciones no medibles. Cuando estas son accesibles, el problema de desacoplamiento de perturbaciones es menos restrictivo. Efectivamente:

Considérese el sistema perturbado  $(A, B, C, E)$ :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t), & t \geq 0 \\ y(t) = Cx(t), & t \geq 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

y la ley de control:

$$u(t) = Fx(t) + Jd(t), \quad t \geq 0, \quad (3.43)$$

donde  $J$  es la matriz de medición de perturbaciones. Se desea entonces que la perturbación  $d(\cdot)$  no afecte la salida del sistema retroalimentado  $y(\cdot)$ , *i.e.* se desea que:

$$C(sI_n - (A + BF))^{-1}(E + BJ) = 0, \quad (3.44)$$

lo cual en términos geométricos se expresa como sigue:

Hallar (si es posible) una pareja de aplicaciones  $(F, J)$  tales que:

$$\langle A + BF \mid \text{Im}(E + BJ) \rangle \subset \ker C. \quad (3.45)$$

La condición geométrica de existencia del par  $(F, J)$  que satisfaga (3.45) está dada por el siguiente teorema, que se presenta sin demostración:

**Teorema 3.3** [4, Bhattacharyya, S., 1980].

Existe un par de aplicaciones  $(F, J)$  que satisfacen la ecuación (3.44), si y solamente si:

$$\text{Im}(E) \subset \mathcal{V}^* + \text{Im}(B). \quad (3.46)$$

Además, si (3.46) es satisfecha, se puede tomar cualquier  $F \subset \mathbf{F}(\mathcal{V}^*)$  y  $J$  tal que:

$$\text{Im}(E + BJ) \subset \mathcal{V}^*. \quad (3.47)$$

Como puede apreciarse, el desacoplamiento de perturbaciones, cuando estas son medibles, es menos restrictivo que cuando no es posible medirlas, ya que aún si  $\text{Im } E \subset \mathcal{V}^*$  no se cumple, podría cumplirse (3.46), lo contrario es imposible. ■

3.4.1 DETERMINACIÓN DE  $F$  Y  $J$ 

Como en el caso en el cual la perturbación no es medible, cualquier  $F \in \mathbf{F}(\mathcal{R}_c^*)$  da lugar a la menor cantidad posible de polos fijos (asumiendo que  $(A, B)$  es controlable) (ver [12, Malabre, M. y Martínez García, J. C., 1995]). Se puede entonces seguir la metodología descrita en las secciones 3.1 y 3.2 para determinar una aplicación  $F$  conveniente, suponiendo que  $B$  es inyectiva.

La aplicación  $J$  se determina reformulando la expresión (3.47), en términos de la ecuación matricial:

$$E + BJ = VN. \quad (3.48)$$

donde la matriz  $V$  es tal que  $\text{Im } V = V^*$  y  $J$  y  $M$  son matrices desconocidas, cuya solución se muestra a continuación.

Solución de  $E + BJ = VN$

En lo que sigue se aplicará el Teorema 3.1 para la obtención de la solución de (3.48), para ello se definen las siguientes matrices (como anteriormente se hizo, no se muestra la dimensión de las matrices identidad):

$$\begin{cases} \bar{A} = V; \\ X = N; \\ \bar{B} = I; \\ \bar{C} = -B; \\ Y = J; \\ \bar{D} = I; \\ \bar{E} = E. \end{cases} \quad (3.49)$$

Bajo estas definiciones, la ecuación (3.48) tiene solución, si y solamente si se verifican las siguientes igualdades:

$$K_G K_V E = 0. \quad (3.50)$$

$$K_V E S_I = 0. \quad (3.51)$$

$$K_{-B} E S_I = 0. \quad (3.52)$$

$$E S_B S_H = 0. \quad (3.53)$$

donde para cualquier matriz  $M$ ,  $K_M = I - MM^+$  y  $S_M = I - M^+M$ . También  $G = -K_V B$  y  $H = 0$ .

**Verificación de las igualdades (3.50)-(3.53):**

Dado que  $S_I = 0$  y  $S_B = 0$ , se verifican automáticamente (3.51)-(3.53) y sólo resta por ser verificada (3.50).

Definiendo  $M_1 = K_G K_V E$ , se tiene

$$M_1 = (I - (K_V B)(K_V B)^+) (I - VV^+) E. \quad (3.54)$$

Si se sustituye  $E = VN - BJ$  de (3.48) en (3.54), se obtiene:

$$M_1 = (I - (K_V B)(K_V B)^+) (I - VV^+) (VN - BJ)$$

o bien:

$$M_1 = \left( I - (K_V B)(K_V B)^+ \right) \left( V N - V V^+ V N - \left( I - V V^+ \right) B J \right).$$

Ahora bien, debido a que  $V^+ V = I$ ,  $M_1$  se reduce a:

$$M_1 = - \left( I - (K_V B)(K_V B)^+ \right) \left( I - V V^+ \right) B J,$$

pero  $K_V = I - V V^+$ , por lo que:

$$M_1 = - \left( I - (K_V B)(K_V B)^+ \right) K_V B J$$

o bien, realizando el producto:

$$M_1 = - \left( K_V B - (K_V B)(K_V B)^+ K_V B \right) J$$

y dado que  $(K_V B)^+ K_V B = G^+ G = I$ , se tiene que  $M_1 = 0$ , lo cual verifica (3.50). ■

Puesto que (3.50)-(3.53) se verifican, la ecuación (3.48) tiene solución.

De esta manera, y de acuerdo con el Teorema 3.1, la solución está dada por:

$$J = G^+ K_V E \tag{3.55}$$

y:

$$N = V^+ (E + B J). \tag{3.56}$$

Entonces, cuando en el desacoplamiento de perturbaciones, éstas son medibles (y si se verifica  $\text{Im}(E) \subset \mathcal{V}^* + \text{Im}(B)$ ), la ecuación (3.55) proporciona la matriz de medición.

## Capítulo 4

### Ilustración de la metodología

En este capítulo se ilustrará por medio de un ejemplo académico la metodología de síntesis de controladores presentada en el capítulo 3. Ambos enfoques, el matricial y el basado en transformaciones de similaridad serán abordados. Así mismo se aprovechará la ocasión para mostrar cómo el conocimiento previo de los polos fijos de **PDP** facilita el proceso de diseño. Además, se ilustrará la interpretación de los polos fijos de **PDP**.

Se incluye también un ejemplo para ilustrar el desacoplamiento de perturbaciones medibles.

Se finaliza este capítulo con algunos comentarios sobre la implantación computacional de la metodología ilustrada.

#### 4.1 Ejemplo ilustrativo

Considérese el sistema lineal estacionario perturbado  $(A, B, C, E)$  descrito como sigue:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t), & t \geq 0 \\ y(t) = Cx(t), & t \geq 0 \end{cases}$$

donde las correspondientes matrices están definidas como:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = (-2 \ 1 \ 1) \text{ y } E = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Nótese que  $(A, B)$  es controlable y  $B$  es inyectiva.

Para el sistema  $(A, B, C, E)$  especificado, los puntos que se ilustrarán con este ejemplo son los siguientes:

1. Obtención de una condición de desacoplamiento de perturbaciones, vía retroalimentación estática de estados, basada en los parámetros de Markov del sistema en lazo cerrado. Adicionalmente se observará que con esta condición se pueden caracterizar los polos fijos de **PDP**.
2. Verificación de la condición geométrica de solución de **PDP**.
3. Caracterización de los polos fijos de **PDP**.
4. Obtención de la parametrización de las aplicaciones  $F$  que resuelven **PDP** por medio del enfoque matricial.
5. Obtención de la parametrización de las aplicaciones  $F$  que resuelven **PDP** por medio del enfoque basado en transformaciones de similaridad.

## 6. Interpretación de los polos fijos de PDP.

Cabe mencionar que el sistema perturbado, que se muestra en el ejemplo, no representa a ningún sistema físico existente y sólo es de utilidad para ilustrar la metodología de síntesis de controladores presentada en el capítulo anterior.

### 4.1.1 CONDICIÓN PARA EL DESACOPLAMIENTO EN TÉRMINOS DE LOS PARÁMETROS DE MARKOV

Se desea hallar una ley de control  $u(t) = Fx(t)$ ,  $t \geq 0$ , (si esto es posible), tal que la perturbación  $d(\cdot)$  sea desacoplada de la salida  $y(\cdot)$ , *i.e.* se busca una matriz  $F$  tal que:

$$C(sI_3 - (A + BF))^{-1}E = 0$$

o equivalentemente:

$$M_j = 0, \quad \forall j \geq 0,$$

donde  $M_j = C(A + BF)^j E$  denota al  $j$ -ésimo parámetro de Markov de  $C(sI_3 - (A + BF))^{-1}E$ .

Para  $j = 0$  se tiene:

$$M_0 = CE = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

(*i.e.*,  $\text{Im } E \subset \ker C$ ).

Para que  $M_1$  sea igual a cero se debe escoger  $F$  de manera tal que:

$$M_1 = C(A + BF)E = 0 \tag{4.1}$$

Definiendo  $F = \begin{pmatrix} f & g & h \end{pmatrix}$  y sustituyendo en (4.1) los valores de  $A, B, C$  y  $E$ , se tiene:

$$\begin{aligned} M_1 &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ f-1 & g-3 & h-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= f - 2g + 4h + 1 \end{aligned}$$

y  $M_1$  es igual a cero si y solamente si:

$$f - 2g + 4h = -1. \tag{4.2}$$

Además,  $M_j = 0$ , para toda  $j \geq 2$ . Esto último debido a que si (4.2) se cumple, entonces  $(A + BF)\text{Im } E \subset \text{Im } E$ .

Se puede afirmar entonces que la ecuación (4.2) parametriza a todas las leyes de control que desacoplan la perturbación.

## Grados de libertad

Dado que en (4.2) se tienen dos parámetros libres, es natural cuestionarse acerca de la posibilidad de lograr objetivos de desempeño complementarios, por ejemplo el de garantizar la estabilidad interna del sistema retroalimentado. El análisis de la función de transferencia puede ayudar a la resolución de esta interrogante.

Suponiendo que (4.2) es cierta, la función de transferencia del sistema retroalimentado ( $A + BF, E, C$ ) está dada como sigue:

$$\begin{aligned} C(sI_3 - (A + BF))^{-1}E &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1-f & 3-g & s-h+3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\text{num}_{lc}(s)}{\text{den}_{lc}(s)}. \end{aligned}$$

donde:

$$\text{num}_{lc}(s) = (s-1)(f-2g+4h+1) \quad (4.3)$$

y:

$$\text{den}_{lc}(s) = s^3 + (3-h)s^2 + (3-g)s + (1-f). \quad (4.4)$$

Como la ecuación (4.2) se verifica,  $\text{num}_{lc}(s) = 0$  y:

$$\text{den}_{lc}(s) = (s+2)(s^2 + (1-h)s + (1-g+2h)).$$

Esto es, la perturbación  $d(\cdot)$  es desacoplada y  $s = -2$  es un polo fijo (en este caso el único), del sistema en lazo cerrado con perturbación desacoplada. Ninguna elección en los parámetros libres de (4.2) podrá cambiar este hecho.

Nótese que el conocimiento previo del polo fijo habría permitido hallar fácilmente los valores de  $h$  y de  $g$  para asignar las raíces de  $s^2 + (1-h)s + (1-g+2h)$  a voluntad (en un conjunto simétrico de números complejos). En lo que sigue se ilustrarán, con el ejemplo presentado, las metodologías mostradas en el capítulo anterior.

## 4.1.2 VERIFICACIÓN DE LA CONDICIÓN GEOMÉTRICA DE SOLUCIÓN DE PDP

Como se ha visto, en los capítulos precedentes (ver Teorema 2.2), **PDP** tiene solución si y solamente si  $\text{Im } E \subset \mathcal{V}^*$ . Para verificar esta inclusión de subespacios se determinará primero la base de  $\mathcal{V}^*$ . Nótese que:

$$\text{Im } E = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Determinación de  $\mathcal{V}^*$ 

Para el cálculo de  $\mathcal{V}^*$  se utiliza el algoritmo ISA:

$$\begin{cases} \mathcal{V}_0 &= \mathcal{X} \\ \mathcal{V}_{\mu+1} &= \ker C \cap A^{-1} \{ \text{Im } B + \mathcal{V}_\mu \}, \quad \forall \mu \geq 0 \end{cases} \quad (4.5)$$



Se tiene que  $\mathcal{V}_0 = \mathcal{X}$  y<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_1 &= \ker C \cap A^{-1}\{\text{Im } B + \mathcal{V}_0\} \\ &= \ker C \cap \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \left\{ \text{Im} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathcal{X} \right\}.\end{aligned}$$

Pero

$$\text{Im} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathcal{X} = \mathcal{X},$$

de manera que la imagen recíproca de  $\mathcal{X}$  a través de  $A$ ,  $A^{-1}\{\mathcal{X}\}$ , es por supuesto  $\mathcal{X}$  y entonces

$$\mathcal{V}_1 = \ker C \cap \{\mathcal{X}\} = \ker C.$$

Dado que:

$$\ker C = \text{Im} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

se tiene que  $\text{Im } B + \ker C = \mathcal{X}$ , lo cual implica que  $\mathcal{V}_2 = \ker C$ . Así pues:

$$\mathcal{V}^* = \ker C = \text{Im} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Verificación de la inclusión  $\text{Im } E \subset \mathcal{V}^*$

La verificación es inmediata. En efecto:

$$\text{Im } E = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Se puede entonces resolver para el ejemplo en curso el problema de desacoplamiento de perturbaciones (lo cual ya se sabía desde la subsección anterior).

#### 4.1.3 CARACTERIZACIÓN DE LOS POLOS FIJOS DE PDP

Se determinará cuantos polos fijos tiene el sistema en lazo cerrado, al escoger cualquier solución  $F \in \mathbf{F}(\mathcal{R}_c^*)$ .

##### Número de polos fijos de PDP

Del capítulo precedente se sabe que:

$$\dim(\mathcal{R}_c^*) - \dim(\mathcal{R}^*)$$

es igual al número de polos fijos de PDP. Así pues, se deben primero determinar bases de  $\mathcal{R}_c^*$  y de  $\mathcal{R}^*$ .

<sup>1</sup>Recuérdese que  $A^{-1}$  no significa aquí la inversa de  $A$ , sino que  $A^{-1}\{\text{Im } B + \mathcal{V}_0\}$  denota la imagen recíproca de  $\text{Im } B + \mathcal{V}_0$  a través de  $A$ .

*Determinación de  $\mathcal{R}_c^*$ .* Aplicando el algoritmo CISA:

$$\begin{cases} \mathcal{R}_{c_0} &= \{0\} \\ \mathcal{R}_{c_{\mu+1}} &= \mathcal{V}_c^* \cap \{\text{Im}(B | E) + A\mathcal{R}_{c_\mu}\}, \quad \forall \mu \geq 0 \end{cases}$$

se tiene  $\mathcal{R}_{c_0} = \{0\}$  y como  $\text{Im } E \subset \mathcal{V}_c^*$ , entonces  $\mathcal{V}_c^* = \mathcal{V}^*$ . Así

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{c_1} &= \mathcal{V}_c^* \cap \{\text{Im}(B | E) + A\{0\}\} \\ &= \mathcal{V}_c^* \cap \text{Im}(B | E) \\ &= \text{Im} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cap \text{Im} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \text{Im} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \text{Im } E. \end{aligned}$$

Puesto que  $A \text{Im } E \subset \text{Im}(B | E)$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{c_2} &= \mathcal{V}_c^* \cap \{\text{Im}(B | E) + A\mathcal{R}_{c_1}\} \\ &= \mathcal{V}_c^* \cap \{\text{Im}(B | E) + A \text{Im } E\} \\ &= \mathcal{V}_c^* \cap \text{Im}(B | E) = \text{Im } E, \end{aligned}$$

lo cual significa que

$$\mathcal{R}_c^* = \text{Im } E.$$

*Determinación de  $\mathcal{R}^*$ .* Aplicando el algoritmo CISA:

$$\begin{cases} \mathcal{R}_0 &= \{0\} \\ \mathcal{R}_{\mu+1} &= \mathcal{V}^* \cap \{\text{Im } B + A\mathcal{R}_\mu\}, \quad \forall \mu \geq 0 \end{cases}$$

Así,  $\mathcal{R}_0 = \{0\}$  y:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= \mathcal{V}^* \cap \{\text{Im } B + A\mathcal{R}_0\} \\ &= \mathcal{V}^* \cap \{\text{Im } B + A\{0\}\} \\ &= \mathcal{V}^* \cap \text{Im } B \\ &= \text{Im} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cap \text{Im} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \{0\}. \end{aligned}$$

lo cual implica:

$$\mathcal{R}^* = \{0\}.$$

Entonces, el número de polos fijos del problema de desacoplamiento de perturbaciones es igual a:

$$\dim(\mathcal{R}_c^*) - \dim(\mathcal{R}^*) = 1 - 0 = 1.$$

*Caracterización del polo fijo.* En el capítulo 2 se mencionó que los polos fijos asociados al desacoplamiento de perturbaciones son los ceros finitos invariantes del sistema  $(A, B, C)$ , que no son ceros finitos invariantes del sistema  $(A, [B | E], C)$ . Dado que los ceros finitos invariantes de  $(A, B, C)$  son los valores complejos de  $s$  que hacen disminuir el rango de su matriz sistema (ver por ejemplo [3. Rosenbrock,1970]):

$$\Sigma = \begin{pmatrix} sI_n - A & B \\ -C & 0_{p \times m} \end{pmatrix}.$$

se tiene para el ejemplo en curso que los valores de  $s$  que hacen disminuir el rango de:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 \\ 1 & 3 & s+3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

son  $s = -2$  y  $s = 1$ , ya que su determinante es:

$$\det \Sigma = s(s+1) - 2 = s^2 + s - 2 = (s-1)(s+2).$$

Entonces,  $s = -2$  y  $s = 1$ , son los ceros finitos invariantes de  $(A, B, C)$ . No es difícil de verificar que la matriz sistema de  $(A, [B | E], C)$  pierde rango para  $s = 1$  pero no para  $s = -2$ . Se puede entonces afirmar que  $s = -2$  es el único polo fijo del problema de desacoplamiento de perturbaciones para el ejemplo en curso, lo cual confirma lo hallado anteriormente.

Dado que el único polo fijo es estable, se podrá siempre desacoplar la perturbación asegurando la estabilidad interna del sistema retroalimentado.

Se sabe de esta manera que los polinomios característicos posibles en lazo cerrado están parametrizados como sigue:

$$\Pi_{\text{posibles}}(s) = (s+2)(s^2 + l_1s + l_2) \quad (4.7)$$

$$= s^3 + (l_1 + 2)s^2 + (l_2 + 2l_1)s + 2l_2 \quad (4.8)$$

donde  $l_1$  y  $l_2$  pueden ser escogidos libremente, para asignar las raíces de  $s^2 + l_1s + l_2$  en un conjunto simétrico de números complejos.

#### 4.1.4 PARAMETRIZACIÓN DE LAS APLICACIONES $F$ QUE RESUELVEN PDP POR MEDIO DEL ENFOQUE MATRICIAL.

Dado que  $\text{Im } E \subset \mathcal{V}^*$ ,  $(A, B)$  es controlable,  $B$  es inyectiva y  $\mathcal{R}^* = \{0\}$ , se tiene del capítulo precedente, que la parametrización de  $F$  está definida como (ver Corolario 3.1):

$$F = \Psi + W\Omega$$

donde:

$$\Psi = G^+ K_{R_c}^* A R_c^* R_c^{*+}$$

y:

$$\Omega = K_{R_c}.$$

Esta ley de control desacopla la perturbación y da lugar a la menor cantidad posible de polos fijos.

Para la obtención de  $F$  deben determinarse previamente las siguientes matrices  $R_c^+$ ,  $B^+$ ,  $G^+$  y  $K_{R_c}$ .

*Obtención de  $R_c^+$ ,  $B^+$ ,  $G^+$  y  $K_{R_c}$  para el ejemplo en curso.* Dado que  $\mathcal{R}_c^* = \text{Im } E$ , i.e.  $R_c = E$ , se obtiene la pseudoinversa como sigue:

$$\begin{aligned} R_c^+ &= (R_c^T R_c)^{-1} R_c^T \\ &= \left( (1 \ -2 \ 4) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)^{-1} (1 \ -2 \ 4) \\ &= \frac{1}{21} (1 \ -2 \ 4). \end{aligned}$$

De la misma manera:

$$\begin{aligned} B^+ &= (B^T B)^{-1} B^T \\ &= \left( (0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} (0 \ 0 \ 1) \\ &= (0 \ 0 \ 1). \end{aligned}$$

Así:

$$\Omega = K_{R_c} = I - R_c R_c^+.$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \left( \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -8 \\ 4 & -8 & 16 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 20 & 2 & -4 \\ 2 & 17 & 8 \\ -4 & 8 & 5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

y finalmente puesto que  $G = -K_{R_c}B$ , se tiene:

$$G = \frac{-1}{21} \begin{pmatrix} 20 & 2 & -4 \\ 2 & 17 & 8 \\ -4 & 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix},$$

por lo que la pseudoinversa de  $G$  se encuentra dada por  $G^+ = (G^T G)^{-1} G^T$ , es decir:

$$\begin{aligned}
G^+ &= (-K_{R_c}B)^T (-K_{R_c}B)^{-1} (-K_{R_c}B)^T \\
&= \left( \frac{1}{21^2} \begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix} \right)^{-1} \left( \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \end{pmatrix} \right) \\
&= \left( \frac{5}{21} \right)^{-1} \left( \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

por lo que para  $\Psi$  se tiene:

$$\begin{aligned}
\Psi &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \end{pmatrix} \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 20 & 2 & -4 \\ 2 & 17 & 8 \\ -4 & 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -8 \\ 4 & -8 & 16 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{21} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo  $W = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$  en la última expresión, donde  $x$ ,  $y$ , y  $z$ , son parámetros libres, se obtiene:

$$\begin{aligned}
F &= \frac{1}{21} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} + \frac{1}{21} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 2 & -4 \\ 2 & 17 & 8 \\ -4 & 8 & 5 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{21} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} + \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 20x + 2y - 4z \\ 2x + 17y + 8z \\ -4x + 8y + 5z \end{pmatrix}^T.
\end{aligned}$$

por lo que finalmente la parametrización es:

$$F = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} -1 + 20x + 2y - 4z \\ 2 + 2x + 17y + 8z \\ -4 - 4x + 8y + 5z \end{pmatrix}^T. \quad (4.9)$$

Resulta entonces sencillo comprobar que esta solución cumple con la relación (4.2):

$$f - 2g + 4h = -1.$$

Efectivamente, defínase:

$$Q = f - 2g + 4h. \quad (4.10)$$

De la parametrización de la ecuación (4.9) se tiene:

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{21} (-1 + 20x + 2y - 4z); \\ g &= \frac{1}{21} (2 + 2x + 17y + 8z); \\ h &= \frac{1}{21} (-4 - 4x + 8y + 5z). \end{aligned}$$

y sustituyendo en (4.10) resulta:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{21} (-1 + 20x + 2y - 4z) - \frac{2}{21} (2 + 2x + 17y + 8z) + \frac{4}{21} (-4 - 4x + 8y + 5z) \\ &= \frac{1}{21} (-1 - 4 - 16) + \frac{x}{21} (20 - 4 - 16) + \frac{y}{21} (2 - 34 + 32) + \frac{z}{21} (-4 - 16 + 20) \\ &= -1. \end{aligned}$$

Así,  $F = \Psi + W\Omega$  cumple con la relación que debe cumplir en este problema una ley de control  $F$  que desacopla la perturbación.

Aprovechamiento de los grados de libertad

Dada la simplicidad del ejemplo, se puede determinar la matriz de parámetros libres  $W$ , para una asignación específica de los polos libres, a partir del análisis del polinomio característico del sistema retroalimentado (ecuación (4.4)):

$$\Pi_{lc}(s) = s^3 + (3 - h)s^2 + (3 - g)s + 1 - f$$

(nótese que  $den_{lc}(s) = \Pi_{lc}(s)$ ).

Sustituyendo en  $\Pi_{lc}(s)$  la parametrización  $\Psi + W\Omega$  descrita anteriormente se tiene:

$$\Pi_{lc}(s) = \frac{1}{21} (s + 2) (21s^2 + (4x - 8y - 5z + 25)s + (-10x - y + 2z + 11)). \quad (4.11)$$

A continuación, basándose en la ecuación (4.11) se realizará una asignación de los polos libres.

Igualando con la parametrización de los polinomios característicos posibles se tiene la ecuación (4.7):

$$\Pi_l(s) = \Pi_{posibles}(s).$$

Si se desea asignar, por ejemplo, los dos polos libres en  $-1$  (para garantizar la estabilidad en lazo cerrado del sistema retroalimentado), entonces puede asignarse  $l_1 = 2$ ,  $l_2 = 1$  y consecuentemente: comparando la ecuación (4.7), con la ecuación (4.11), se obtiene:

$$l_1 = \frac{1}{21}(4x - 8y - 5z + 25) = 2, \quad (4.12)$$

$$l_2 = \frac{1}{21}(-10x - y + 2z + 11) = 1, \quad (4.13)$$

con lo que se tiene gran libertad de seleccionar la retroalimentación estática de estado. Sean por ejemplo  $x = -2$ ,  $y = 0$ ,  $z = -5$  de manera que se cumpla con las ecuaciones (4.12). Entonces basándose en la ecuación (4.9) se obtiene finalmente:

$$F = \begin{pmatrix} f & g & h \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Esta misma aplicación puede obtenerse por medio de la estrategia, de asignación de los polos libres, por retroalimentación de estados presentada en el capítulo anterior.

#### Asignación de polos libres por retroalimentación de estados

Se toman los dos primeros renglones linealmente independientes de  $\Omega$ , que en este problema particular coincide con la matriz  $\tilde{\Omega}$  introducida en el capítulo precedente. Agregando a estos renglones el vector fila  $(1, -1, 0)$ , se tiene:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{20}{21} & \frac{2}{21} & \frac{-4}{21} \\ \frac{2}{21} & \frac{17}{21} & \frac{8}{21} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicando esta transformación ( $T$ ) de similaridad al sistema  $(A + B\Psi, B, C, E)$  se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \dot{w}_{\tilde{\Omega}_1}(t) \\ \dot{w}_{\tilde{\Omega}_2}(t) \\ \dot{w}_{\Gamma}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{42} & \frac{1}{14} & 0 \\ \frac{-25}{84} & \frac{-17}{14} & 0 \\ \frac{9}{4} & \frac{-3}{2} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{\tilde{\Omega}_1}(t) \\ w_{\tilde{\Omega}_2}(t) \\ w_{\Gamma}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-4}{21} \\ \frac{8}{21} \\ 0 \end{pmatrix} v(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} d(t).$$

cuyo subsistema:

$$\begin{pmatrix} \dot{w}_{\tilde{\Omega}_1}(t) \\ \dot{w}_{\tilde{\Omega}_2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{42} & \frac{1}{14} \\ \frac{-25}{84} & \frac{-17}{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{\tilde{\Omega}_1}(t) \\ w_{\tilde{\Omega}_2}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-4}{21} \\ \frac{8}{21} \end{pmatrix} v(t).$$

es controlable y la elección (por medio de la fórmula de Ackermann) :

$$F_{\tilde{\Omega}} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{5}{2} \\ & \end{pmatrix}$$

permite asignar los polos libres en  $s_1 = -1$ ,  $s_2 = -1$ .

De esta manera, la aplicación que permite asignar los polos libres en  $(A + B\Psi, B, C, E)$  está dada por:

$$\begin{aligned} F_{\tilde{\Omega}} &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix} T^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{20}{21} & -\frac{44}{21} & -\frac{17}{21} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalmente, la aplicación que desacopla la perturbación y que garantiza la estabilidad del sistema en lazo cerrado es:

$$F = \Psi + F_{\tilde{\Omega}} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

que por supuesto corresponde con los resultados anteriores.

#### 4.1.5 ENFOQUE BASADO EN TRANSFORMACIONES DE SIMILARIDAD

De acuerdo con lo expuesto en el capítulo precedente, el primer paso consiste en obtener una aplicación  $\bar{F} \in \mathbf{F}(\mathcal{R}_c^*)$ , para obtener un sistema con perturbación desacoplada. Se puede aprovechar la retroalimentación encontrada al final de la subsección anterior:

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se aplica entonces la ley de control  $v(t) = \bar{F}x(t) + v(t)$ ,  $t \geq 0$ , al sistema  $(A, B, C, E)$  tomando  $G = 1$ , para obtener el sistema retroalimentado siguiente:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v(t), \quad t \geq 0. \quad (4.16)$$

Se procede ahora a encontrar la transformación de similitud  $T$  (en este caso puede ser determinada fácilmente). Se propone entonces:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

donde puede observarse que la primera columna es la base encontrada anteriormente para  $\mathcal{R}_c^*$ . Aplicando esta transformación sobre la ecuación (4.16) se obtiene el nuevo sistema transformado:

$$\dot{w}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -9 & -4 \end{pmatrix} w(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v(t), \quad t \geq 0.$$

Ahora es posible aplicar al sistema transformado la ley de control  $v(t) = F^p w(t)$ ,  $t \geq 0$ , con



$$F^{pl} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{F}_{12} & \bar{F}_{13} \end{pmatrix},$$

donde  $-2$ ,  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} \bar{F}_{12} & \bar{F}_{13} \end{pmatrix}$ , corresponden a  $A_{22}$ ,  $A_{33}$  y  $F_{23}^{pl}$ , respectivamente. Entonces:

$$\dot{w}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -9 + \bar{F}_{12} & -4 + \bar{F}_{13} \end{pmatrix} w(t), t \geq 0.$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} \Pi_{lc}(s) &= \det(sI - A_{22}) \det(sI - (A_{33} + B_{32}F_{23}^{pl})) \\ &= (s + 2) \left( s^2 + (2 - \bar{F}_{13})s + (1 - 2\bar{F}_{13} - \bar{F}_{12}) \right), \end{aligned}$$

y se pueden asignar arbitrariamente los dos polos libres, seleccionando adecuadamente  $\bar{F}_{12}$  y  $\bar{F}_{13}$ . Recuérdese que la ley de control que se debe aplicar es  $F = \bar{F} + GF^{pl}T^{-1}$ .

#### 4.1.6 INTERPRETACIÓN DE LOS POLOS FIJOS DE PDP

La interpretación de los polos fijos de **PDP**, como los polos fijos del precompensador equivalente en lazo abierto a la retroalimentación estática de estados, puede visualizarse fácilmente en el ejemplo, seleccionando  $F = \begin{pmatrix} -5 & -8 & -3 \end{pmatrix}$ , que ubica los polos de lazo cerrado en  $-1$ ,  $-2$ , y  $-3$ . Entonces:

$$T_u(s) = C(sI_3 - A)^{-1}B = \frac{(s-1)(s+2)}{(s+1)^3}$$

y por otra parte:

$$T_d(s) = C(sI_3 - A)^{-1}E = \frac{(s-1)}{(s+1)^3}$$

y el precompensador está dado por:

$$P(s) = \left( 1 - F(sI_3 - A)^{-1}B \right)^{-1} F(sI_3 - A)^{-1}E = \frac{-1}{(s+2)}.$$

En el cual aparece el único polo fijo del desacoplamiento de la perturbación.

## 4.2 Ejemplo de medición de perturbaciones

Considérese el sistema perturbado  $(A, B, C, E)$  con:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se busca, como en el ejemplo precedente, desacoplar la perturbación por medio de una retroalimentación estática de estados.

Ya anteriormente se obtuvo:

$$\mathcal{V}^* = \text{Im} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que no se verifica que  $\text{Im } E \subset \mathcal{V}^*$ , ya que no es posible hallar una combinación lineal de los vectores que generan a  $\mathcal{V}^*$  que iguale a  $E$ . Entonces, no es posible el desacoplamiento de la perturbación, cuando ésta no es medible. No obstante, se podría desacoplar la perturbación si se le mide. Para ello debe cumplirse que  $\text{Im } E \subset \mathcal{V}^* + \text{Im } B$ , lo cual puede verificarse como sigue:

Como puede verse:

$$\mathcal{V}^* + \text{Im } B = \text{span} \{w_1, w_2, w_3\},$$

donde:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ y } w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora bien:

$$\text{Im } E = \text{span} \{w_1 - 3w_2 - 4w_3\},$$

con lo que se verifica que  $\text{Im } E \subset \mathcal{V}^* + \text{Im } B$ . Entonces existe una ley de control  $u(t) = Fx(t) + Jd(t)$  que desacopla la perturbación.

Se puede tomar  $F$  del ejemplo precedente, *i.e.*:

$$F = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

que garantiza la estabilidad interna del sistema retroalimentado. En lo que respecta a  $J$ , se debe verificar que  $\text{Im}(E + BJ) \subset \mathcal{V}^*$ , o en términos matriciales, se deben hallar  $J$ ,  $n_1$  y  $n_2$  tales que:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}.$$

Al ser resuelta esta ecuación se obtienen:  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = -3$  y  $J = 4$ .

También se puede obtener  $J$  con la expresión general de la ecuación (3.55), que a continuación se repite:

$$J = G^+ K_V E.$$

donde:

$$\begin{aligned} V^+ &= (V^T V)^{-1} V^T; \\ K_V &= I - V V^+; \\ G &= -K_V B; \\ G^+ &= (G^T G)^{-1} G^T. \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores correspondientes se tiene:

$$\begin{aligned}
 V^+ &= (V^T V)^{-1} V^T \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

y por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 K_V &= I - VV^+ \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
 G &= -K_V B, \\
 &= \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

y la correspondiente pseudoinversa se calcula como:

$$\begin{aligned}
 G^+ &= (G^T G)^{-1} G^T \\
 &= \frac{1}{6} \left\{ \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{6} \left( \frac{1}{6} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$J = G^+ K_V E.$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= 4,
\end{aligned}$$

que por supuesto es el valor esperado.

Entonces, la ley de control que desacopla la perturbación (y que asegura la estabilidad interna del sistema retroalimentado) es:

$$u(t) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + 4d(t), \quad t \geq 0.$$

### 4.3 Implantación computacional de la metodología

La metodología ilustrada en este capítulo ha sido implantada en la plataforma de cálculo simbólico *Maple V* (ver [9, Char,B.W.,1993]) en la parte concerniente al enfoque matricial, y en *Matlab* (ver [10, The Mathworks,1993]) en lo que respecta al enfoque basado en transformaciones lineales.

Las plataformas de programación citadas fueron escogidas por ser las más adecuadas para el tipo de trabajo que concierne a esta tesis. La existencia de subrutinas eficientes en *Matlab*, para el análisis y síntesis de sistemas de control basados en el enfoque geométrico, y la versatilidad de *Maple V* para el cálculo matricial simbólico, justifican plenamente la elección.

En el capítulo siguiente se ilustra la utilización de la metodología en el control de una columna de destilación.

## Capítulo 5

# Aplicación de las rutinas de cómputo: Control de una columna de destilación

La metodología de síntesis de controladores basada en el conocimiento previo de los polos fijos del problema de desacoplamiento de perturbaciones, mostrada e ilustrada en los capítulos anteriores, ha sido implantada en *Maple V* en lo que concierne al enfoque matricial y en *Matlab* en lo que respecta al enfoque basado en transformaciones de similaridad.

Los programas que han sido implantados son los siguientes:

- POLFIJ: determinación de polos fijos mínimos del problema de desacoplamiento de perturbaciones.
- REJECT: determinación de una retroalimentación estática de estado  $F$  que desacopla la perturbación y realiza una asignación de los polos libres de acuerdo a un vector columna  $P$  proporcionado por el usuario. Debido a que se hace uso del comando *place* de *Matlab*, no es posible colocar en  $P$  valores propios con multiplicidad mayor que el número de entradas a los subsistemas. El tamaño de  $P$  debe ser igual al número de polos libres.
- INCLUS: proporciona un diagnóstico de la inclusión de un subespacio  $\mathcal{A}$  en otro subespacio  $\mathcal{B}$ , donde  $\text{Im } A_0 = \mathcal{A}$ , y  $\text{Im } B = \mathcal{B}$ , haciendo uso de la descomposición en valores singulares (DVS).

En este capítulo se presenta la aplicación de las rutinas de cómputo que implantan la metodología de síntesis, al control del modelo de una columna de destilación.

A continuación se considera un problema de control publicado en [17, Ozguler, 1994], basado en [18, Takamatsu, et. al., 1979], y cuya simplicidad permite ilustrar la metodología de síntesis expuesta en el capítulo 3, por medio de la aplicación de las rutinas de cómputo que implantan los enfoques matricial y el basado en transformaciones de similaridad. Posteriormente se atacará el problema de [18, Takamatsu, et. al., 1979] sólo con el enfoque basado en transformaciones de similaridad.

Previamente a la aplicación de las rutinas se presentará una breve descripción del problema de control de una columna de destilación.

### 5.1 El control de una columna de destilación

El objetivo de control en una columna de destilación, es el de mantener dos variables de salida, las composiciones del producto destilado y el producto sedimentado, en determinados valores deseados, manipulando para ello la tasa de gasto de reflujo y la tasa de calentamiento.

Las columnas de destilación se usan frecuentemente en las destilerías de alcohol e incluso en las refinerías de petróleo. Las columnas de destilación binaria son utilizadas para la separación de

dos materiales volátiles y consisten de un conjunto de charolas, o platos, cada una conteniendo algún líquido, a través del cual el vapor ascendente puede pasar. Una corriente de alimentación es aplicada en una de las charolas intermedias, denominada *charola de alimentación*. La parte de la columna consistente del condensador, y de las charolas superiores a la charola de alimentación, es denominada sección de rectificación o de enriquecimiento (*enriching section*).

La parte inferior de la columna de destilación, que va desde la charola de alimentación hasta el recalentador, se denomina sección de separación (*stripping section*).

En la parte superior de la columna hay un flujo de vapor que es colectado en un condensador donde es parcial o totalmente condensado. La corriente de producto, que es extraída en la parte superior, es denominada *destilado* y es uno de los dos productos de salida.

El líquido que escurre en el fondo de la columna es parcialmente evaporado en un recalentador. El vapor producido por el recalentador es retroalimentado en las charolas y el líquido extraído del recalentador es el segundo producto de salida.

Si el vapor en la parte superior de la columna se encuentra completamente condensado, entonces el condensador es denominado *condensador total*. En este caso el destilado es retirado como líquido y los líquidos restantes son retornados a las charolas. Adicionalmente al flujo de alimentación, el líquido proveniente del condensador total y el vapor del recalentador retroalimentado a las charolas, son considerados como entradas al sistema, puesto que éstas pueden servir como variables de control.

## 5.2 Columna de destilación de tres charolas

Considérese la columna de destilación mostrada en la figura (5.1), cuyo modelo matemático es el siguiente [17, Ozguler, 1994]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t), & t \geq 0 \\ y(t) = Cx(t), & t \geq 0 \end{cases}$$

con:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-r_1}{h_1} & \frac{r_2 k_1}{h_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{f_r}{h} & -\frac{r_2 k_2 + f_1}{h} & \frac{r_2 k_3}{h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f_r}{h} & -\frac{r_2 k_3 + f_1}{h} & \frac{r_2 k_2}{h} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f_r}{h} & -\frac{r_2 k_4 + f_2}{h} & \frac{r_2 k_5}{h} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{f_r}{h_5} & -\frac{r_2 k_5 + f_5}{h_5} \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{l_1 - l_2}{h} & \frac{l_1 - l_2}{h} \\ \frac{l_2 - l_3}{h} & \frac{l_4 - l_2}{h} \\ \frac{l_3 - l_4}{h} & \frac{l_5 - l_4}{h} \\ \frac{l_4 - l_5}{h_5} & \frac{l_5 - l_5}{h_5} \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{f_3}{h} & 0 \\ 0 & \frac{l_3 - l_4}{h} \\ 0 & \frac{l_4 - l_5}{h_5} \end{pmatrix}$$

y:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

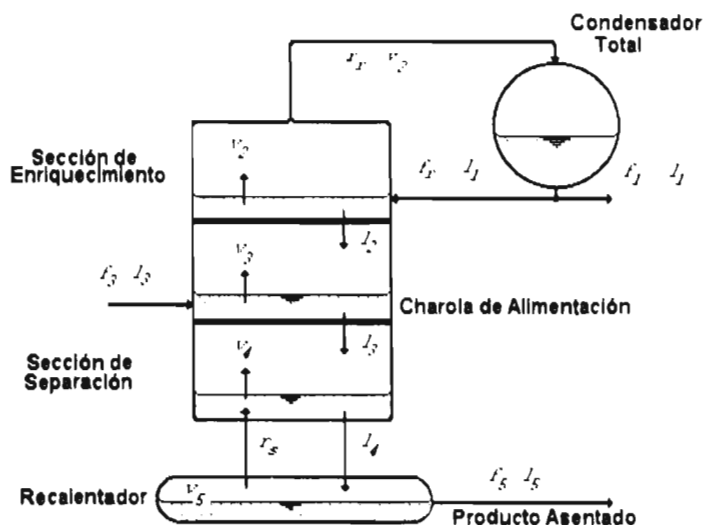


FIGURA 5.1. Columna de destilación de tres charolas.

Donde:

- $r_s$  : Tasa de flujo de vapor en sección de separación.
- $r_r$  : Tasa de flujo de vapor en sección de rectificación.
- $f_s$  : Tasa de flujo de líquido en sección de separación.
- $f_r$  : Tasa de flujo de líquido en sección de separación.
- $f_1$  : Tasa de flujo de líquido en sección de separación.
- $f_5$  : Tasa de flujo de líquido en sección de separación.
- $f_3$  : Tasa de flujo de líquido en sección de separación.
- $h$  : Asentamiento de líquido en charolas.
- $h_1$  : Asentamiento de líquido en condensador.
- $h_5$  : Asentamiento de líquido en calentador.
- $l_i$  : Composición de líquido en la etapa  $i$ -ésima.
- $v_i$  : Composición de vapor en la etapa  $i$ -ésima.

Los valores considerados para los parámetros son los siguientes:  $r_r = 20$ ,  $r_s = 20$ ,  $h_1 = 100$ ,  $h = 25$ ,  $h_5 = 200$ ,  $f_r = 15$ ,  $f_3 = 10$ ,  $f_s = 25$ ,  $f_5 = 5$ ,  $L_1 = 0.9$ ,  $L_2 = 0.8$ ,  $L_3 = 0.7$ ,  $L_4 = 0.6$ ,  $L_5 = 0.5$ ,  $v_2 = 0.9$ ,  $v_3 = 0.8235$ ,  $v_4 = 0.75$ ,  $v_5 = 0.6667$ ,  $k_2 = 0.6175$ ,  $k_3 = 0.6920$ ,  $k_4 = 0.7812$ ,  $k_5 = 0.8889$ .

Se verifica fácilmente que  $(A, B)$  es controlable y que  $B$  es inyectiva.

En lo que sigue se procederá a la parametrización de las leyes de control, para el desacoplamiento de perturbaciones, utilizando la metodología expuesta en el capítulo 3.

### 5.2.1 ENFOQUE MATRICIAL

Debido a que el sistema es de orden relativamente reducido, es posible aplicar las rutinas implantadas en *Maple V*, con el propósito de caracterizar la ley de control que desacopla la

perturbación.

Para este ejemplo se verifica que únicamente la primera columna de  $E$  está incluida en  $\mathcal{V}^*$  (haciendo uso de la rutina INCLUS), por lo que únicamente la primera perturbación puede ser desacoplada, por medio de una retroalimentación estática de estado  $u(t) = Fx(t) + r(t)$ .

Usando rutinas estándares<sup>1</sup>, se realizó el cálculo de las bases de los subespacios  $\mathcal{R}^*$  y  $\mathcal{R}_c^*$ , obteniéndose para este sistema  $\mathcal{R}^* = \{0\}$  y:

$$\mathcal{R}_c^* = \text{Im} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De esta manera, utilizando la hoja de trabajo de *Maple V* mostrada en el apéndice (que implanta la parametrización proporcionada por el Corolario 3.1), se obtuvo la siguiente parametrización de las ganancias  $F$  de retroalimentación de estado, que dan lugar al desacoplamiento de la perturbación:

$$F = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \frac{-55782120}{218087} & \frac{46240750}{218087} & x_5 \\ x_6 & x_7 & \frac{-2091411341}{136304375} & \frac{120890817}{436174} & x_{10} \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

donde  $x_1, x_2, x_5, x_6, x_7$  y  $x_{10}$ , son parámetros libres.

Esta clase de parametrización de la ley de control, en donde se observa también que existen elementos de la matriz fijos, es difícil de ser obtenida via el enfoque basado en transformaciones de similaridad, aunque sí puede ser obtenida por los métodos de la matriz-sistema (consultar por ejemplo [17, Ozguler, 1994, pag 95] para el enfoque de matriz-sistema; y [18, Takamatsu, et. al.,1979] para una parametrización matricial equivalente). Así mismo, es posible obtener los valores de los polos fijos de **PDP**, que coinciden con las raíces del polinomio  $P(s)$  siguiente (este polinomio proviene de la aplicación de la hoja de *Maple V* mencionada):

$$P(s) = 20407472487605000s^2 + 78079008380961937s + 6720276365702319.$$

De esta manera, los polos fijos de **PDP** son  $s_1 = -1.307588312$  y  $s_2 = -2.518412602$ . Dado que son estables, se puede desacoplar la primera perturbación asegurando la estabilidad interna del sistema retroalimentado.

**Observación:** Es interesante el hecho que la ecuación (3.8) obtenida en el capítulo 3 puede aplicarse en forma muy simple, haciendo uso de un programa en código de *Matlab* (donde se define por medio de  $R_c$  una base para  $\mathcal{R}_c^*$ ,  $B_{mas} = B^+$ ,  $G_{mas} = G^+$ , etc.) como sigue:

```
Bmas=pinv(B);
Rcmass=pinv(Rc);
Krc=eye(5)-Rc*Rcmass;
G=-Krc*B;
Gmas=pinv(-Krc*B);
```

<sup>1</sup>Ver por ejemplo las rutinas *ima\_ker* y *manco* publicadas en [13, Basile, Marro, 1992] con las que es posible, partiendo de su definición, obtener una base para  $\mathcal{R}_c^*$ .



$\Psi = G_{mas} * K_{rc} * A * R_c * R_{c_{mas}}$   
 $\Omega = K_{rc}$

Los valores de las matrices  $\Psi$  y  $\Omega$  están dados en este caso por:

$$\Psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -255.7792 & 212.0288 & 0 \\ 0 & 0 & -153.4368 & 277.1619 & 0 \end{pmatrix}$$

y:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora bien,  $W$  es una matriz de parámetros completamente libres:

$$W = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \end{pmatrix},$$

y el producto  $W\Omega$  es de la forma:

$$W\Omega = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 & 0 & x_5 \\ x_6 & x_7 & 0 & 0 & x_{10} \end{pmatrix}.$$

La operación  $\Psi + W\Omega$  da lugar a la parametrización:

$$F = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & -255.7792 & 212.0288 & x_5 \\ x_6 & x_7 & -153.4368 & 277.1619 & x_{10} \end{pmatrix}$$

que corresponde por supuesto a la ecuación (5.1), que también posee la forma  $F = \Psi + W\Omega$ .

### 5.2.2 ENFOQUE BASADO EN TRANSFORMACIONES DE SIMILARIDAD

La obtención de una ley de control, por retroalimentación estática de estados, que desacople la perturbación, puede ser obtenida haciendo uso de las subrutinas POLFIJ y REJECT. Considerando las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $E$ , especificadas precedentemente, el uso de las subrutinas es como sigue:

Se aplica POLFIJ con el propósito de determinar si el problema de desacoplamiento de perturbaciones tiene solución:

```
> polfij(A,B,C,E)
```

Ante lo cual el programa responde:

```
>Im(E) No esta en V*
```

Lo cual implica que no es posible desacoplar ambas perturbaciones simultáneamente. Sin embargo si se considera la primera columna de  $E$ , se tiene:

```
> polfij(A,B,C,E1)
```

```
>Im(E) esta en V*
```

```
>Polfij = -1.3076, -2.5184
```

Por lo que el programa está confirmando la solubilidad del problema y además proporciona los polos fijos de PDP. Este resultado corresponde por supuesto al resultado obtenido en [17,

[Ozguler, 1994]. Nótese que los polos fijos son estables, por lo cual la perturbación puede ser desacoplada asegurando estabilidad interna del sistema en lazo cerrado. Por otra parte, si se asignan los tres polos libres en  $-0.1236$ ,  $-1.1702$  y  $-0.1139$ , como en la referencia citada, se tiene:

```
>Fr=reject(A,B,C,E1,P)
```

Donde P representa el vector de polos libres mencionados, el programa proporciona:

```
Im(E) esta en V*
```

```
place: ndigits= 15
```

$$F_r = \begin{pmatrix} 0.0871 & 0.0924 & -255.7792 & 212.0288 & 0.0212 \\ 0.0522 & 0.0554 & -153.4368 & 277.1619 & 0.0277 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

### 5.2.3 COMPARACIÓN DE RESULTADOS

En lo que respecta a los coeficientes asociados a los polos libres, de la matriz de retroalimentación estática de estados, no es fácil comparar los resultados obtenidos en este trabajo con los obtenidos en [17, Ozguler, 1994], ya que en tal referencia no se especifica con precisión la ubicación de los polos libres. Sin embargo, en el caso de los coeficientes directamente asociados a los polos fijos de **PDP**, la comparación si es pertinente:

Como se determinó anteriormente, la parametrización de las aplicaciones que resuelven **PDP**, obtenida a través el enfoque matricial es:

$$F = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & -255.7792 & 212.0288 & x_5 \\ x_6 & x_7 & -153.4368 & 277.1619 & x_{10} \end{pmatrix}.$$

mientras que para la ubicación escogida de los polos libres, el enfoque basado en transformaciones de similitud proporciona (5.2). Por otra parte, en la referencia citada se proporciona la siguiente ganancia de retroalimentación de estados:

$$F_o = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -278.6378 & 197.3684 & 0 \\ 0 & 0 & -167.1827 & 268.4211 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Como puede observarse, existe coincidencia total entre los coeficientes correspondientes al enfoque matricial y al basado en transformaciones de similitud. La diferencia con respecto a (5.3) es apreciable. La aplicación de la rutina INCLUS, para verificar el cumplimiento de  $(A + BF) \mathcal{R}_c^* \subset \mathcal{R}_c^*$  mostró que la matriz  $F_o$  no garantiza el desacoplamiento de la perturbación, mientras que las aplicaciones obtenidas en el presente trabajo si lo hacen. Se considera, sin embargo, que el no cumplimiento de la condición se debe básicamente a imprecisiones de los cálculos realizados para obtener  $F_o$ .

## 5.3 Columna de destilación de nueve charolas

Considérese el problema publicado en [18, Takamatsu, *et. al.*,1979], consistente en una columna de destilación binaria de nueve charolas, condensador y recalentador.



```

> polfij(A,B,C,E1)
> Im(E) esta en V*
> Polfij =-2.0427,-1.8173, -1.3213,
-0.8314 + 0.0588i, -0.8314 - 0.0588i,
-2.9771, -3.3549, -0.330

```

Por lo que el programa está confirmando la solubilidad del problema y además proporciona los polos fijos de **PDP**. Una vez más se observa que el problema de desacoplamiento de la perturbación tiene solución y que puede asegurarse la estabilidad interna en lazo cerrado.

Este resultado corresponde por supuesto al obtenido en [18, Takamatsu, et. al. 1979], ya que si se calculan los polos del sistema retroalimentado, utilizando la solución que se proporciona en el artículo citado, se tiene:

```

-3.3549;
-2.9771;
-1.3213;
-0.8314 + 0.0587i;
-0.8314 - 0.0587i;
-1.0086 (Polo libre);
-0.1083 (Polo libre);
-1.8173;
-0.3305;
-2.0427;
-0.1710 (Polo libre),

```

donde pueden ser fácilmente identificadas las ubicaciones donde los polos libres están asignados.

Si en la metodología aquí ilustrada, se fijan como elementos del vector de polos libres **P** a -1.0086, -0.1083, -0.1710, se tiene:

```

> Fr=reject(A,B,C,E1,P)
el programa proporciona:
Im(E) esta en V*
place: ndigits= 16

```

$$F_{ro} = \begin{pmatrix} 0.1556 & 0.0704 & -330.0603 & 0.0 & 0.0 & 0 & 0 & 0.0 & 0.0 & 470.1743 & 0.0 \\ 0.1186 & 0.0536 & -251.4745 & 0.0 & 0.0 & 0 & 0 & 0.0 & 0.0 & 632.0375 & 0.0 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

que corresponde aproximadamente con el resultado del artículo citado:

$$F_o = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -330.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 470.17 & 0 \\ 0 & 0 & -251.47 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 632.04 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, la asignación de los polos libres por medio de técnicas de descomposición del espacio de estados presenta la problemática siguiente:

Los polos libres pueden ser asignados, en las mismas localidades, por medio de diferentes matrices de retroalimentación estática de estados. En efecto, para la columna de destilación de

nueve charolas, si se realiza la asignación del espectro libre eligiendo  $P = (-1.0086, -0.1710, -0.1083)$  en REJECT, se tiene:

$$F_{r_1} = \begin{pmatrix} -350.5777 & -44.0550 & -330.0603 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 470.1743 & -256.3472 \\ -267.1069 & -33.5657 & -251.4745 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 632.0375 & -344.5979 \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Si se elige  $P = (-0.1710, -0.1083, -1.0086)$  en REJECT, se obtiene:

$$F_{r_2} = \begin{pmatrix} -368.7 & 589.5 & -330.0603 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 470.2 & 3424.5 \\ -280.9 & 449.2 & -251.4745 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 632.0 & 4603.4 \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

que asigna los polos en las mismas localidades que  $F_{r_1}$ , al igual que (5.4).

Como puede apreciarse, en el conjunto de los coeficientes que no están asociados con **PDP** se produce la situación siguiente:

Un mismo coeficiente, en las aplicaciones obtenidas al variar el orden de asignación de los polos libres, puede tomar valores muy diferentes, por ejemplo el coeficiente  $F_{r_{11}}$  en (5.4) toma el valor 0.1556, en (5.5) toma el valor  $-350.5777$  y en (5.6) el valor  $-368.7$ . De esta forma, los polos libres deberían ser asignados de manera que la  $F$  elegida presente mayor ventaja desde el punto de vista numérico (coadyuvando por ejemplo a una asignación de polos bien condicionada numéricamente). Haría falta sin embargo una investigación más profunda en torno a la asignación de los polos libres.

### 5.3.1 COMENTARIOS FINALES

Es importante resaltar que aunque se conocieran las ubicaciones de los polos fijos de **PDP**, no necesariamente sería esta información suficiente como para determinar una aplicación  $F$  que resuelva **PDP**, por medio de una simple estrategia de asignación de polos en lazo cerrado en las ubicaciones de los polos de **PDP** (utilizando por ejemplo la subrutina PLACE de *Matlab*), ya que esto no garantiza que  $F$  cumpla con  $(A + BF)\mathcal{R}_c^* \subset \mathcal{R}_c^*$ , condición necesaria para el desacoplamiento de perturbaciones con número mínimo de polos fijos.

Se puede concluir que la utilización de métodos computacionales, como los aquí ilustrados, facilitan el diagnóstico de la factibilidad de resolución del desacoplamiento de perturbaciones, para problemas específicos, siendo el conocimiento de los polos fijos del problema una información adecuada para la obtención de soluciones más sencillas que las publicadas previamente, basta con verificar las operaciones realizadas en [17. Ozguler, 1994] y en [18. Takamatsu, *et. al.*,1979], para comprobar las ventajas de las herramientas empleadas en este capítulo.

## Conclusiones y Perspectivas

En el trabajo que ha sido presentado, se mostró una metodología geométrica de síntesis de controladores, para el desacoplamiento de perturbaciones, basada en el conocimiento *a priori* de los grados de libertad existentes, caracterizados por los polos fijos del sistema retroalimentado. La metodología fue desarrollada vía métodos matriciales y métodos basados en transformaciones de similaridad.

Se consideran contribuciones *principales* del trabajo de tesis las siguientes:

1. Desarrollo de metodologías de diseño de leyes de control por retroalimentación estática de estados, para sistemas lineales estacionarios multivariables, que permiten desacoplar perturbaciones indeseables. Las metodologías se apoyan en el conocimiento previo de los grados de libertad existentes, asociados a la caracterización geométrica de los polos fijos que resultan en el sistema retroalimentado al aplicarse una ley de control que desacopla al vector de perturbaciones.
2. Parametrización de todas las matrices de retroalimentación estática que desacoplan perturbaciones (cuando esto es posible). La parametrización es de la forma  $F = \Psi + W\Omega$  donde las matrices  $\Psi$  y  $\Omega$  son constantes y la matriz real  $W$  es asignable a voluntad.
3. Desarrollo de un algoritmo basado en métodos de álgebra simbólica, que implanta la metodología mencionada en el punto anterior. El algoritmo permite la parametrización de todas las retroalimentaciones estáticas de estado que desacoplan las perturbaciones y que dan lugar al número mínimo de polos fijos en el sistema retroalimentado. Los polos libres se pueden asignar: vía la selección del parámetro libre, que se presenta en la ley de control a través de una retroalimentación estática de salida ficticia; o a través de una retroalimentación de los estados no asociados a los polos fijos del desacoplamiento de perturbaciones.
4. Desarrollo de un algoritmo basado en una descomposición del espacio de estados (por medio de transformaciones de similaridad), que implanta la metodología mencionada en el punto 1. El algoritmo permite la caracterización de una familia de retroalimentaciones estáticas de estado, que desacoplan las perturbaciones y que dan lugar al número mínimo de polos fijos en el sistema retroalimentado. Los polos libres se asocian en este algoritmo con dos subsistemas controlables, obtenidos por medio de un proceso de triangularización del sistema resultante.
5. Realización de rutinas de cómputo para el diseño asistido por computadora de leyes de control, para el desacoplamiento de perturbaciones, vía la metodología mencionada en el punto 1. El algoritmo simbólico descrito someramente en el punto 3, fue implantado en

Maple V y el algoritmo basado en la descomposición del espacio de estados fue implantado en Matlab.

6. Ilustración del uso de las herramientas del control geométrico en el desarrollo de métodos de síntesis de controladores. En particular, la metodología desarrollada en el presente trabajo reduce de manera notable el número de etapas de diseño en el proceso de obtención del controlador.
7. Determinación de la matriz de medición de perturbaciones que permite la construcción de una ley de control por retroalimentación estática de estado con medida de la perturbación, para desacoplarla (cuando esto es posible y la perturbación se encuentra disponible para ser medida).

Finalmente se considera que el presente trabajo es una modesta contribución a la comprensión del comportamiento de los sistemas retroalimentados lineales estacionarios basada en la información que proporciona la estructura del sistema.

La ilustración de la metodología se llevó a cabo, basándose en la aplicación de los algoritmos implantados, con la resolución de problemas de control tratados en la literatura. En particular el problema de la columna de destilación de tres charolas (ver [17, Ozguler, 1994]), fue abordado, pudiéndose reproducir y mejorar los resultados de [17, Ozguler, 1994], con una reducción significativa del número de las etapas de diseño necesarias para la obtención del controlador. Se trató así mismo el control del modelo de una columna de destilación binaria de nueve charolas (ver [18, Takamatsu, *et. al.*, 1979]), que constituye un problema clásico en la literatura de control geométrico. En este caso el modelo matemático posee once estados (siendo en consecuencia de mayor complejidad) y los resultados obtenidos por los algoritmos desarrollados en este trabajo igualan a los presentados en [18, Takamatsu, *et. al.*, 1979]. Una vez más se demuestra la versatilidad de las herramientas desarrolladas, ya que el aumento en el orden del vector de estados, con respecto al modelo de la columna de tres charolas, no significó un incremento en la dificultad en el proceso de diseño.

Cabe mencionar que la utilización de los polos fijos, como indicadores de los grados de libertad existentes, hace innecesaria la construcción del subespacio  $(A, \text{Im}B)$ -invariante internamente estabilizable, como soporte de construcción de una ley de control que desacople la perturbación bajo la restricción de estabilidad interna del sistema retroalimentado (cuando esto es posible). La construcción del subespacio mencionado es compleja (ver por ejemplo [1, Wonham]).

En lo que respecta a las perspectivas de este trabajo, se manifiesta claramente la necesidad de aprovechar los grados de libertad existentes en el problema de desacoplamiento de perturbaciones, para la consecución de objetivos suplementarios de desempeño del sistema bajo control.

La extensión de la metodología presentada al caso del desacoplamiento de perturbaciones y desacoplamiento entrada-salida simultáneos es actualmente tema de investigación de otro trabajo de tesis de maestría.

Finalmente, el trabajo de investigación descrito fue reportado en [22, Lopezlena E. y Martinez Garcia] y [23, Lopezlena E. y Martinez Garcia].



## Bibliografía

- [1] Wonham M., *Linear Multivariable Control: a geometric approach*. Springer-Verlag, 1985.  
El libro base para el estudio de control geométrico es el anterior, sin embargo debido a su complejidad, si se desea iniciar el estudio del control geométrico probablemente lo mejor sea comenzar con libros como el capítulo de introducción de [15], o el libro [13]. Una excelente introducción breve acerca del control geométrico aparece en el siguiente reporte:
- [2] Commault C., Dion J.M., "A Comprehensive Introduction to the Geometric Theory of Linear Multivariable Systems", *s.d.*, Laboratoire d'Automatique de Grenoble. France. *s.f.*
- [3] Rosenbrock H. H., *State-Space and Multivariable Theory*, Tomas Nelson and Sons LTD. U.K., 1970
- [4] Bhattacharyya S. P., "Frequency Domain Conditions for Disturbance Rejection", *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol AC-25. no.6. pp1211-1213, December 1980.
- [5] Petkov P.Hr., Christov N.D., Konstantinov M.M., *Computational Methods for Linear Control Systems*, Prentice Hall, U.S.A., 1991.
- [6] Klema V.C., Laub A.J., "The Singular Value Decomposition: Its Computation and Some Applications", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol AC-25, no.2, pp164-176, April 1980.
- [7] Morse A. S., "Structural invariants of linear multivariable systems", *SIAM J. of Control and Optimization*, vol. 24, no. 1, pp. 446- 465. 1973.
- [8] Patel R.V., Laub A.J., Van Dooren P.M. (editors). *Numerical Linear Algebra Techniques for Systems and Control*, *IEEE Press. U.S.A., 1994.*
- [9] Char, B. W., *Maple V: Library Reference Manual*. Springer-Verlag, New York, U.S.A.. 1993.
- [10] The Mathworks Inc., *Matlab: User Guide*. The Mathworks Inc., Natick MA, U.S.A., 1993.  
El siguiente manual describe un algoritmo implementado en MATLAB para el desarrollo de leyes de control, PCDECOUP, para el desacoplamiento diagonal de sistemas multivariables via sistema precompensador y retroalimentación de estado:
- [11] Lin Z., Saberi A., Chen B. M., *Linear System Toolbox*, Ver 1.1, A.J. Controls Inc., 1992.  
En el siguiente artículo es que aparecen las ideas principales del enfoque de diseño de este trabajo:



- [12] Malabre M., Martínez-García J.C.. "On the fixed poles for disturbance Rejection", *IFAC Conference CSSC*, p601-604, Nantes, July 5-7, 1995.

Para el diseño de sistemas de control con el enfoque de modelo interno en forma geométrica, puede consultarse:

- [13] Basile G, Marro G. *Controlled and Conditioned Invariants in Linear System Theory*, Prentice Hall, 1992.

En el libro:

- [14] Skelton R.E., *Dynamic Systems Control: Linear Systems Analysis and Synthesis*, Wiley, U.S.A., 1988.

se hacen algunas referencias para el análisis de sistemas cuya entrada de perturbación puede ser descoplada a la salida.

La siguiente referencia realiza una descomposición anidada de subespacios semejante a la que se utilizó para la síntesis de la metodología numérica tratada en el trabajo:

- [15] Rugh W.J., *Linear System Theory*, Prentice-Hall.U.S.A., 1993.

- [16] Baksalary J.K., Kala R., "The matrix equation  $AXB+CYD=E$ ". *Linear Algebra and its Applications*, Vol 30, p141-147, 1980.

- [17] Ozguler A. B., *Linear Multichannel Control: A System Matrix Approach*, Prentice-Hall, U.S.A., 1994.

- [18] Takamatsu T., Hashimoto I, Nakai Y.. "A Geometric Approach to Multivariable Control System Design of a Distillation Column". *Automatica*, vol 15, pp 387-402, 1979.

- [19] Lewis F.L., *Applied Optimal Control & Estimation: Digital Design & Implementation*, Prentice-Hall, U.S.A., 1992.

- [20] Lancaster P., Tismenetsky M., *The Theory of Matrices: with applications*, 2nd Ed, Academic Press. U.S.A., 1985.

- [21] DeCarlo R. A., *Linear Systems: A State Variable Approach With Numerical Implementation*, Prentice Hall, U.S.A., 1989.

- [22] Lopezlena Estrada, R. y Martínez García, J. C.. "Geometric Characterization of Feedback Control Laws", Congreso Latinoamericano de Control Automático, Buenos Aires, Argentina, 1996.

- [23] Lopezlena Estrada, R. y Martínez García, J. C.. "Geometric Characterization of Feedback Control Laws: The Disturbance Decoupling Problem Case". 4th European Control Conference (ECC'97), Brussels, Belgium, 1997.



## Apéndices



.

# Capítulo A

## Rutinas de cómputo

### A.1 Algoritmos para matemáticas Simbólicas

En esta sección se transcriben las *hojas de trabajo* utilizadas en *Maple V* para la solución, usando matemáticas simbólicas, del ejemplo ilustrativo del capítulo 4 y la parametrización de la ley estática de retroalimentación de estados de la columna de destilación binaria de tres charolas, estudiada en el capítulo 5.

La ventaja de los métodos simbólicos reside en que permite resultados directos, sin problemas de condicionamiento numérico. En este caso particular la metodología se encuentra restringida al buen condicionamiento de los resultados obtenidos por los métodos comunes de cálculo de los subespacios usados, (ver [13, Basile, Marro, 1992]), ya que se suponen conocidos.

#### A.1.1 SOLUCIÓN AL EJEMPLO ACADÉMICO DEL CAPÍTULO 5.

##### SINTESIS DE CONTROLADORES CON MATEMATICAS SIMBOLICAS USANDO EL ENFOQUE GEOMETRICO.

En este caso se determinará la ley de control para un sistema de tercer orden.

Este programa requiere de la previa determinación de la matriz  $R$  cuya imagen es el subespacio  $\mathcal{R}_c^*$ .

Parametrizacion de F.

```
> with(linalg):
> n:=3 : ui:=1 : yoi:=1 : rr:=1:
> A:=matrix(n,n,[ 0,1,0,0,0,1,-1,-3,-3]) :
> B:=matrix(n,ui,[ 0,0,1]) :
> C:=matrix(yoi,n,[ -2, 1, 1]) :
> R:=matrix(n,rr,[ 1,-2.4 ]) :
> Bmas:=evalm(inverse(transpose(B)*B)*transpose(B)):
> Rmas:=evalm(inverse(transpose(R)*R)*transpose(R)):
> wi:=seq(w[i], i = 1..n*ui) :
> Wo:=matrix(ui,n,[wi]) :
```

La matriz  $W_o$  es una matriz de parametros libres arbitrarios

$$W_o := \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

```
> Kr:=evalm(1-R*Rmas) :
> G:=evalm(-Kr*B) :
> Gmas:=evalm(inverse(transpose(G)*G)*transpose(G)):
> Kg:=evalm(1-G*Gmas):
```

Las siguientes matrices  $F$  y  $P$  son las matrices solución:

>  $F := \text{evalm}(G_{\text{mas}} * K_{\text{r}} * A * R * R_{\text{mas}} + W_0 * K_{\text{r}})$  ;

$$F := \begin{bmatrix} -\frac{1}{21} + \frac{20}{21} w_1 + \frac{2}{21} w_2 - \frac{4}{21} w_3, & \frac{2}{21} + \frac{2}{21} w_1 + \frac{17}{21} w_2 + \frac{8}{21} w_3, \\ -\frac{4}{21} - \frac{4}{21} w_1 + \frac{8}{21} w_2 + \frac{5}{21} w_3 \end{bmatrix}$$

>  $P := \text{evalm}(R_{\text{mas}} * (A + B * F) * R)$  ;

A continuación se determina el polinomio característico de malla cerrada

$$P := \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix}$$

>  $\text{Policar} := \text{factor}(\text{charpoly}(\text{evalm}(A + B * F), s))$ ;

$$\text{Policar} := \frac{1}{21} (s + 2) (21 s^2 - 5 s w_3 + 25 s + 4 s w_1 - 8 s w_2 + 2 w_3 + 11 - 10 w_1 - w_2)$$

A.1.2 PARAMETRIZACIÓN DE LA APLICACIÓN  $F$  PARA LA COLUMNA DE DESTILACIÓNSINTESIS DE CONTROLADORES CON MATEMATICAS  
SIMBOLICAS USANDO EL ENFOQUE GEOMETRICO

En este caso se determinará la ley de control para una Columna de Destilación

Este programa requiere de la previa determinación de la matriz  $R$  cuya imagen es el subespacio

$\mathcal{R}_c^*$ .

A continuación  $\mathcal{R}_c^*$  se denominará  $R$ .

> with(linalg):

A continuación se introduce la dimension del espacio de estados y las matrices del sistema.

$dx = Ax + Bu + Ev$ ,

$y = Cx$

sometidos a la retroalimentación de estados  $u = Fx$

Parametrización de  $F$ .

> with(linalg):

> n:=5 : ui:=2 : yoi:=2 : rr:=2:

> A:=matrix(n,n,[-1/5, 247/2000, 0, 0, 0, 3/5, -547/500, 346/625, 0, 0, 0, 3/5, -971/625, 5/8,  
0, 0, 0, 1, -13/8, 143

> 5/2018, 0, 0, 0, 1/8, -237/2081 ]):

> B:=matrix(n,ui,[0, 0, 1/250, -74/24183, 1/250, -22/7483, 1/250, -25/7503, 1/2000, -25/29994])

> C:=matrix(yoi,n,[ 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 ]):

> R:=matrix(n,rr,[ 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0 ]):

> Bmas:=evalm(inverse(transpose(B)\*B)\*transpose(B)):

> Rmas:=evalm(inverse(transpose(R)\*R)\*transpose(R)):

> wi:=seq(w[i], i = 1..n\*ui):

> Wo:=matrix(ui,n,[wi]):

La matriz  $W_o$  es una matriz de parametros libres arbitrarios

$$W_o := \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 \\ w_6 & w_7 & w_8 & w_9 & w_{10} \end{bmatrix}$$

> Kr:=evalm(1-R\*Rmas):

> G:=evalm(-Kr\*B):

> Gmas:=evalm(inverse(transpose(G)\*G)\*transpose(G)):

> Kg:=evalm(1-G\*Gmas):

Las siguientes matrices  $F$  y  $P$  son las matrices solución:

> F:=evalm(Gmas\*Kr\*A\*Rmas+Wo\*Kr):

$$F := \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \frac{-55782120}{218087} & \frac{46240750}{218087} & w_5 \\ w_6 & w_7 & \frac{-20914111341}{136304375} & \frac{120890817}{436174} & w_{10} \end{bmatrix}$$

> P:=evalm(Rmas\*(A+B\*F)\*R) ;

A continuación se determina el polinomio característico de malla cerrada

$$P := \begin{bmatrix} \frac{-7419616827}{4363484696} & \frac{1331230382}{2727177935} \\ \frac{8593958241}{13055560168} & \frac{-2168052175789}{1019965638125} \end{bmatrix}$$

> Policar:=factor(charpoly(evalm(A+B\*F),s));

$$\begin{aligned} Policar := & - \frac{1}{102679704032792810065121700000000000} ( \\ & 67202763650702319 + 20407472487605000 s^2 + 78079008380961937 s ) \\ & ( 283073101454520 w_1 + 458417978064000 w_2 + 364027274386119 w_5 \\ & - 216550981140000 w_6 - 350689848000000 w_7 - 606833490675000 w_{10} \\ & - 9076780940000 w_7 s w_5 - 1469545628290758000 s \\ & - 82916351782326000 + 9076780940000 w_2 s w_{10} \\ & - 7083752162360760000 s^2 + 2515737901770000 s^2 w_5 \\ & - 4193735250000000 s^2 w_{10} + 3255364844890380 s w_5 \\ & - 5426693413500000 s w_{10} + 20125903214160000 w_2 s^2 \\ & + 6317270533152000 w_2 s + 1815356188000 w_2 w_{10} \\ & - 15396320120000000 w_7 s^2 - 4832713264000000 w_7 s \\ & - 1815356188000 w_7 w_5 - 5031475803540000000 s^3 \\ & + 2485549046948760 w_1 s + 1120982446090 w_1 w_{10} \\ & - 1901445534820000 w_6 s - 1120982446090 w_6 w_5 ) \end{aligned}$$

> evalf(solve(67202763650702319 + 78079008380961937\*s + 20407472487605000\*s^2));

$$-1.307588312. -2.518412602$$

Estos polos son exactamente los polos fijos obtenidos con el enfoque numérico.

>

## A.2 Antecedentes numéricos

No obstante que el desarrollo de algoritmos confiables desde el punto de vista del álgebra lineal numérica es un asunto de expertos, las facilidades que proporcionan paqueterías como *Matlab* [10. Mathworks, 1993] para desarrollo de algoritmos basados en una extensa biblioteca, que incluye la Descomposición en Valores singulares(DVS), la Factorización QR, la Descomposición LU, *etc.*, puede, bajo un juicioso uso de estas herramientas de cálculo, proporcionar resultados razonables en problemas comunes.

### A.2.1 PRUEBAS DE INCLUSIÓN

Todos los algoritmos implementados deben realizar una prueba de inclusión de subespacios antes de proceder a ejecutar (por ejemplo  $\text{Im}(E) \subset \mathcal{V}^*$ , o también  $\text{Im}(E) \subset \mathcal{V}^* + \text{Im}(B)$ ), por lo que es necesario tener un algoritmo confiable para este fin.

De acuerdo a [6, Klema, Laub, 1980], que a su vez apareció en [8. Patel, et. al., 1994] se recomienda el uso de DVS (Descomposición en Valores Singulares) con el propósito de indicar inclusión de subespacios.

En efecto:

Sean  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{T}$  dos subespacios de  $\mathcal{X}$  tal que se desea determinar si  $\mathcal{R} \subset \mathcal{T}$ . Supóngase que  $\text{Im } R = \mathcal{R}$  y que  $\text{Im } T = \mathcal{T}$ . Entonces  $\mathcal{R} \subset \mathcal{T}$  si y solamente si

$$TT^+R = R \quad (\text{A.1})$$

entonces

$$T = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

donde  $\Sigma_r = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ ,  $\sigma_i \neq 0$ , donde adicionalmente se verifican las siguientes igualdades [5, Petkov, et. al., 1991]:

$$\begin{aligned} \text{Im}(T) &= \text{Im}(U_1) \\ \text{Im}(T)^\perp &= \text{Im}(U_2) \\ \ker(T) &= \text{Im}(V_2) \\ \ker(T)^\perp &= \text{Im}(V_1), \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

por lo que usando  $U_1$  de la DVS de  $T$ , es posible verificar la inclusión de subespacios como sigue:

$$U_1 U_1^T R = R. \quad (\text{A.4})$$

Así mismo se indica en [6. Klema, Laub, 1980], que es posible verificar la inclusión si el número de valores singulares de  $T$  es igual al número de valores singulares de la matriz  $\begin{pmatrix} R & T \end{pmatrix}$ .

La verificación de igualdad de subespacios  $\mathcal{R} = \mathcal{T}$ , se obtiene, por supuesto como al verificar que  $\mathcal{R} \subset \mathcal{T}$  y  $\mathcal{T} \subset \mathcal{R}$ .

Por otra parte, la descomposición en valores singulares puede ser también usada con el propósito de obtener la pseudoinversa o *inversa generalizada Moore-Penrose*. Considérese  $T^{-1}$  definida como sigue:

$$T^+ = V \Sigma^+ U^T = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{pmatrix},$$

donde  $\Sigma_r^{-1} = \text{diag}(\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_r})$ ,  $\sigma_i \neq 0$ , entonces (ver [21, DeCarlo R., 1989, p.303])  $T^+$  es la pseudoinversa de  $T$ .

### A.2.2 CÁLCULO DE BASES ORTOGONALES

La determinación precisa de bases ortogonales se apoya en la obtención adecuada del rango de la matriz. Para estos casos la descomposición en valores singulares DVS, es la forma más confiable de calcular subespacios y sus combinaciones (ver [5, Petkov, et. al., 1991]). Sin embargo, la descomposición QR con pivoteo de columnas es más eficiente.

Normalmente este cálculo se realiza haciendo uso del algoritmo QR, ver [13, Basile, Marro, 1992]. Considérese el caso general donde  $A \in R^{n \times m}$ ,  $n \geq m$ , no es necesariamente de rango completo. Sea

$$A = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

[13, Basile, Marro, 1992] la descomposición QR con pivoteo de columnas de  $A$ , con  $\text{Rango}(R) = r$ . Entonces (ver [5, Petkov, et. al., 1991]):

$$\begin{aligned} \text{Im}(A) &= \text{Im}(Q_1) \\ \text{Im}(A)^\perp &= \text{Im}(Q_2). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Para encontrar una base ortogonal para  $\ker(A)$ , y para  $\ker(A)^\perp$ , se necesita la descomposición QR con pivoteo de columna de  $A^T$ . Sea entonces

$$A^T = \begin{pmatrix} \hat{Q}_1 & \hat{Q}_2 \end{pmatrix} \hat{R} \quad (\text{A.7})$$

con  $\text{Rango}(\hat{R}) = r$ , se tiene

$$\begin{aligned} \ker(A) &= \text{Im}(\hat{Q}_2) \\ \ker(A)^\perp &= \text{Im}(\hat{Q}_1). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

En el proceso de cálculo de la base ortogonal de  $A$  debe realizarse una medición de la cercanía a la nulidad de algún elemento (vector columna), de la matriz triangular superior  $R$  con respecto a la tolerancia de error de la máquina.

Los algoritmos numéricos comunes para la determinación de los subespacios  $\text{Im } E$ ,  $\text{Im } B$ ,  $\ker C$ ,  $\mathcal{V}^*$ ,  $\mathcal{R}^*$ ,  $\text{Im } B \cap \mathcal{R}^*$  y  $\mathcal{R}_c^*$ , utilizan el método de ortogonalización precedente. Las rutinas de determinación de los polos fijos y obtención de la ley de control solución se sirven de las rutinas de [13, Basile, Marro, 1992], para la obtención de los subespacios indicados.



## A.3 Implantación de algoritmos

### A.3.1 ESTRUCTURA DE LOS ALGORITMOS

A continuación se detalla la secuencia de cálculo desarrollada en los algoritmos con el objeto de indicar la manera como fueron implantados y su estructura. Debido a que gran parte de los pasos de los algoritmos se repite en los programas POLFIJ y REJECT, se indicará al inicio del paso si éste se restringe a un programa específico. Si no se indica nada implicará que es un paso general.

1. Determinación de una base ortogonal  $V$  del subespacio  $\mathcal{V}^*$ , es decir  $\text{Im } V = \mathcal{V}^*$  (necesario para la verificación de la condición de inclusión  $\text{Im}(E) \subset \mathcal{V}^*$ ), y base ortogonal de  $\text{Im}(E)$ . Esto se puede realizar con los algoritmos: *ima* (realiza proceso de ortogonalización), *ker* (obtiene una base ortonormal), y *mainco* (obtiene el máximo subespacio invariante por medio de una implantación del algoritmo ISA). tomados de [13, Basile y Marro, 1992, p.446].
2. Prueba de inclusión de subespacios  $\text{Im}(E) \subset \mathcal{V}^*$  (esta misma prueba es implantada en el programa INCLUS). Se basa en una descomposición en valores singulares de  $V$ , de acuerdo a la ecuación (A.2) de manera que se tiene:

$$V = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix}$$

de donde se obtiene la matriz  $U_1$ , con lo que se puede entonces verificar la condición de la ecuación (A.4), *i.e.*,  $U_1 U_1^T E = E$ .

3. Determinación de bases ortogonales
  - $S$  del mínimo subespacio  $(C, A)$ -invariante que contiene  $\text{Im}(B)$ .
  - $R$  del máximo subespacio  $(A, B)$ -invariante de controlabilidad incluido en  $\text{ker}(C)$ .
  - $V_c$  del máximo subespacio  $(A, [B \mid E])$ -invariante incluido en  $\text{ker}(C)$ .
  - $S_c$  del mínimo subespacio  $(C, A)$ -invariante que contiene  $\text{Im}(B \mid E)$ .
  - $R_c$  del máximo subespacio  $(A, [B \mid E])$ -invariante de controlabilidad incluido en  $\text{ker}(C)$ .

Esto se puede realizar con los algoritmos: *ima* (realiza proceso de ortogonalización), *ker* (obtiene una base ortonormal para el espacio nulo), y *mainco* (obtiene el máximo subespacio invariante), tomados de [13, Basile y Marro, 1992, p.446].

4. Proceso de determinación de matriz de transformación para descomposición del sistema. Este proceso se especifica como sigue:
  - Determinación de una base para  $\text{Im } W = \text{Im}(B) \cap \mathcal{R}^*$ . El proceso implica la determinación de una base ortogonal de  $\text{Im } B$  (usando el programa *ima*), determinación de la intersección de los subespacios  $\text{Im } B$  y  $\mathcal{R}^*$  (usando el algoritmo *mts*, ver [13, Basile y Marro, 1992, p.446]), y una ortogonalización de la base obtenida para la intersección. Las columnas resultantes se almacenan en una matriz  $T$ .

- Si las columnas obtenidas en  $T$  son cero, se le asigna a  $T$  una base ortogonal de  $\mathcal{R}^*$ . Si alguna de las columnas de  $T$  es diferente de cero, se agregan a  $T$  las columnas de la base ortogonal de  $\mathcal{R}^*$ , y posteriormente se ortogonaliza  $T$  (usando el programa *ima*, ver [13, Basile y Marro, 1992, p.446]), almacenando las columnas resultantes en  $T$ .
  - Si la columnas obtenidas en  $T$  son cero, se le asigna a  $T$  una base ortogonal de  $\mathcal{R}_c^*$ . Si alguna de las columnas de  $T$  es diferente de cero, se agregan a  $T$  las columnas de la base ortogonal de  $\mathcal{R}_c^*$ , y posteriormente se ortogonaliza  $T$  (usando el programa *ima*, ver [13, Basile y Marro, 1992, p.446]), almacenando las columnas resultantes en  $T$ .
  - Si la columnas obtenidas en  $T$  son cero, se le asigna a  $T$  una base ortogonal de  $\mathcal{X}$  (una matriz identidad del orden del sistema). Si alguna de las columnas de  $T$  es diferente de cero, se agregan a  $T$  las columnas de la base ortogonal de  $\mathcal{R}_c^*$ , y posteriormente se ortogonaliza  $T$  (usando el programa *ima*, ver [13, Basile y Marro, 1992, p.446]), almacenando las columnas resultantes en  $T$  que es la matriz de transformación final resultante.
5. Determinación de la matriz  $G_a$  de la ecuación (3.25), conforme se especifica en la ecuación (3.27) la matriz  $W$  se obtiene de pasos anteriores como  $\text{Im } W = \text{Im } B \cap \mathcal{R}^*$ . (para el cálculo de la pseudoinversa se aprovecha el algoritmo de *Matlab* denominado *pinv*). La matriz  $G_b$  puede asignarse libremente de manera que se asignó a una matriz identidad.
  6. Determinación de una matriz  $F$  "amigo" de  $\mathcal{R}_c^*$ . (esto se realiza por medio del programa *effe*, ver [13, Basile y Marro, 1992, pp.210,449]).
  7. Transformación de similaridad del sistema  $A_0 = T^{-1}(A + BF^{\mathcal{R}_c^*})T$ ,  $B_0 = T^{-1}BG$ . Adicionalmente se realiza la descomposición de  $A_0$  con el objeto de obtener matrices  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{13}$ ,  $A_{22}$ ,  $A_{23}$ ,  $A_{33}$ ,  $B_{11}$ ,  $B_{12}$ ,  $B_{22}$ ,  $B_{32}$ .
  8. (Solamente algoritmo REJECT). Se realiza una descomposición de los subsistemas de forma tal que las matrices  $F_{11}^{pl}$  y  $F_{23}^{pl}$  asignan a cada subsistema individualmente un espectro determinado en la matriz  $P$ . Esto se realiza haciendo uso del programa *place* de *Matlab* sobre cada subsistema.
  9. Se obtiene la matriz de retroalimentación  $F = F^{\mathcal{R}_c^*} + GF^{pl}T^{-1}$ , con lo cual finalmente se obtiene la ley de control deseada.
  10. (Solamente algoritmo POLFIJ). Se determinan los valores propios asociados a la matriz  $A_{22}$ , que corresponden lógicamente a los polos fijos.

### A.3.2 POLFIJ

Determinación de polos fijos mínimos del problema de desacoplamiento de perturbaciones.

Las rutinas *minco*, *mainco*, *ints*, *effc*, *ima* y *ortc* pueden encontrarse en [13, Basile y Marro, 1992].

```
function [Polfij]=polfij(A,B,C,E)
% polfij finds and returns the fixed poles for
% the disturbance rejection problem.
% polfij(A,B,C,E)
% by: Ricardo LopezLena Estrada 1996
% Necesitamos determinar bases para subesp.:  $BnR, R$ , y  $V$ .
% Calculo del maximo (A,B)-invariante en KerC:
V = mainco(A,ima(B,0),kerb(C));
% Prueba de la condicion de solubilidad
% Es posible determinar F tal que w rechace la perturbacion
% siempre que ImE este incluido en el  $V^*$ .
imE = ima(E,0);
[rengV colsV]=size(V);
% La inclusión de subesp. se verifica si  $V^*(V^+)imE = imE$ 
[Uv,Sv,Vv] = svd(V);
U1 = Uv(:,1:colsV);
% Se verifica si  $U1*U1'*imE=imE$ 
tol = norm(V,'fro')*eps*10^4;
ERR = U1*U1'*imE-imE;
[m1,n1] = size(ERR);
no = norm(ERR,'fro');
if (no < tol)
    fprintf('Im(E) esta en  $V^*\backslash n'$ );
else
    fprintf('Im(E) No esta en  $V^*\backslash n'$ );
end
% El minimo (C,A)-invariante que contiene a Im(B)
S = miinco(A,kerb(C),ima(B,0));
% El maximo (A,B)-invariante de cont. incluido en KerC
R = ints(V,S);
% El maximo (A,[B E])-invariante incluido en KerC
Vc = mainco(A,ima([B E],0),kerb(C));
% El minimo (C,A)-invariante que contiene a Im[B E]
Sc = miinco(A,kerb(C),ima([B E],0));
% El maximo (A, [B E]) de cont. incluido en KerC
Rc=ints(Vc,Sc); X=Rc;
%*** Algoritmo tipo Basile y Marro***
% Verificaciones
```

```

% nx=renglones de X, mx=columnas de X
[nx,mx] = size(X);
[ny,my] = size(mainco(A,B,X));
if my ~= mx
    error(' Rc No es un invariante controlado')
end
[nb,m] = size(B);
% nb=renglones de B, m=columnas de B
[ny,my] = size(ima(B,1));
if my ~= m
    error(' B no es de rango completo')
end
tol = norm(A,'fro')*eps*10^4;
[na,n] = size(A);
% na=renglones de A, n=columnas de A
% Interseccion entre subespacios R* Y B
T = ints(R,B);
% Base ortonormal para T (con permutaciones)
T = ima(T,1);
WRB = T;
% Se utiliza para hallar G1
% n1=renglones de T, q=columnas de T con RnB
[n1,q] = size(T);
% Es la norma Frobenius, sqrt(sum(diag(X'*X))).
no = norm(T,'fro');
if (q == 1)&(no < tol)
    q = 0;
end
% Si T no tiene columnas:
if q == 0
% Asignarle las columnas de R*
    T = ima(R,1);
else
% si no, incluir a las columnas anteriores las de R*
    T = ima([T R],0);
end
% Verificación del tamaño de T:
n2=renglones de T, p=columnas de T con R*
[n2,p] = size(T);
no = norm(T,'fro');
if (p == 1)&(no < tol)
    p = 0;
% Si T no tiene columnas: if p == 0
% Asignarle las columnas de X
    T = ima(X,1);

```

```

else
% Si no, incluir a las columnas anteriores
% las de X y obtener una matriz
  T = ima([T X],0);
end
% Verificación del tamaño de T:
% n3=reng. de T, v=colum. de T con V o Rc*
[n3,v] = size(T);
no = norm(T,'fro');
if (v == 1)&(no < tol)
  v = 0;
% Asignarle matriz unitaria de renglones de T
  T = eye(n3);
else
% Ortogonalización de T y su complemento ortogonal
  T = ima([T ortc(T)],0);
end
% q columnas de T con RnB, p columnas de T con R*
% v columnas de T con V o Rc*,
% n columnas de A,,m columnas de B
c1 = p+1; %inicio cols polos fijos
c2 = v+1;
inT=inv(T);
% G=[G1 G2], G2[(m-q)Xm]
G1=pinv(B)*WRB;
% Notese que G2 es LIBRE pero se puede alterar como:
G2=[eye(m-q); ones(q,m-q)];
% G[colsB X colsB]=G[m X m]
if q == 0
  G = G2;
else
  G = [G1 G2];
end
end
%Fa debe ser un amigo de Rc:
Fa = effe(A,B,Rc);
% Fb11[q,p] y Fb23[(m-q)X(n-v)]
Fb11=ones(q,p);
Fb23=ones(m-q,n-v);
if q ~= 0
  if m-q ~= 0
    Fb = [Fb11 zeros(q,n-p)
          zeros(m-q,v) Fb23];
  else
    Fb = [Fb11 zeros(q,n-p)];
  end
end

```

```
else
  Fb = [zeros(m,v) Fb23];
end
F = Fa+G*Fb*inT;
ABF = A+B*F;
A1 = inT*ABF*T;
W = A1((p+1):mx, (p+1):mx);
Polfij = eig(W)
% - ultima linea ---
```

## A.3.3 REJECT

Determinación de  $F$  que desacopla la perturbación y realiza una asignación de los polos libres de acuerdo a un vector columna  $P$  proporcionado por el usuario. Debido a que se hace uso del comando PLACE de *Matlab* no es posible colocar en  $P$  valores propios con multiplicidad mayor que el número de entradas a los subsistemas. El tamaño de  $P$  debe ser igual al número de polos libres.

Las rutinas *miinco*, *mainco*, *ints*, *effe*, *ima* y *ortc* pueden encontrarse en [13. Basile y Marro, 1992].

```
function Fr=reject1(A,B,C,E,P)
% reject obtains the F such that the disturbance
% is rejected and assigns the free poles
% according to P.
% Fr=reject(A,B,C,E,P)
% The complex eigenvalues in the vector P must appear
% in consecutive complex conjugate pairs.
% No eigenvalue may be placed with multiplicity
% greater than the number of inputs.
% by: Ricardo LopezLena Estrada 1996
% Determinación de bases para los subesp: BnR,R, y V.
% Cálculo del maximo (A,B)-invariante en KerC:
V = mainco(A,ima(B,0),kerb(C));
% Prueba de la condicin de solubilidad
% Es posible determinar F tal que w rechace la
% perturbacion si ImE esta incluido en el V*.
imE = ima(E,0);
[rengV colsV] = size(V);
% Inclusión de subesp. se verifica si: V*(V+)imE =imE
[Uv,Sv,Vv] = svd(V);
U1 = Uv(:,1:colsV);
% Se verifica si U1*U1'*imE=imE
tol = norm(V,'fro')*eps*10^4;
ERR = U1*U1'*imE-imE;
[m1,n1] = size(ERR);
no = norm(ERR,'fro');
if (no < tol)
    fprintf('Im(E) esta en V*\n');
else
    fprintf('Im(E) No esta en V*\n');
end
% El minimo (C,A)-inv. que contiene a Im(B)
S = miinco(A,kerb(C),ima(B,0));
% El maximo (A,B)-inv. de cont. incluido en KerC:
```

```

R = ints(V,S);
% El maximo (A,[B E])-inv. incluido en KerC:
Vc = mainco(A,ima([B E],0),kerb(C));
% El minimo (C,A)-inv. que contiene a Im[B E]
Sc = miinco(A,kerb(C),ima([B E],0));
% El maximo (A, [B E]) de cont. incluido en KerC
Rc=ints(Vc,Sc); X=Rc;
*** Algoritmo tipo Basile & Marro***
% Verificaciones
% nx=renglones de X, mx=columnas de X
[nx,mx] = size(X);
[ny,my] = size(mainco(A,B,X));
if my ~= mx
    error(' Rc No es un invariante controlado')
end
[nb,m] = size(B);
% nb=renglones de B, m=columnas de B
[ny,my] = size(ima(B,1));
if my ~= m
    error(' B no es de rango completo')
end
tol = norm(A,'fro')*eps*10^4;
[na,n] = size(A);
% na=renglones de A, n=columnas de A
% Interseccion entre subespacios R* Y B
T = ints(R,B);
% Base ortonormal para T (con permutaciones)
T = ima(T,1);
WRB=T;
%Se utiliza para hallar G1
% n1=renglones de T, q=columnas de T con RnB
[n1,q] = size(T);
% Es la norma Frobenius, sqrt(sum(diag(X'*X))).
no = norm(T,'fro');
if (q == 1)&(no < tol)
    q = 0;
end
% Si T no tiene columnas: if q == 0
% Asignarle las columnas de R*
T = ima(R,1);
else
% si no, incluir a las columnas anteriores
% las de R* y obtener una matriz
T = ima([T R],0);
end

```



```

% Verificación del tamaño de T:
% n2=renglones de T, p=columnas de T con R*
[n2,p] = size(T);
no = norm(T,'fro');
if (p == 1)&(no < tol)
    p = 0;
end
% Si T no tiene columnas:
if p == 0
% Asignarle las columnas de X
    T = ima(X,1);
else
% Si no, incluir a las columnas anteriores
% las de X y obtener una matriz
    T = ima([T X],0);
end
% Verificación de tamaño de T:
% n3=reng. de T, v=colum. de T con V o Rc*
[n3,v] = size(T);
no = norm(T,'fro');
if (v == 1)&(no < tol)
    v = 0;
% Asignarle matriz unit de reng de T
    T = eye(n3);
else
% Ortogonalización de T y su comp. ortogonal
    T = ima([T ortc(T)],0);
end
% q columnas de T con RnB, p columnas de T con R*,
% v columnas de T con V o Rc*,%
% n columnas de A, m columnas de B
c1 = p+1; %inicio cols polos fijos
c2 = v+1;
inT=inv(T);
lenP=length(P);
% G=[G1 G2], G2[(m-q)Xm]
G1=pinv(B)*WRB;
% G2 es LIBRE pero se puede alterar como:
G2=[eye(m-q); ones(q,m-q)];
% G[colsB X colsB]=G[m X m]
if q == 0
    G = G2;
else
    G = [G1 G2];
end

```

```

%Fa debe ser un amigo de Rc:
Fa = effe(A,B,Rc);
% Transformación de Similaridad
Ao = inT*(A+B*Fa)*T;
Bo = inT*B*G;
% De manera que se separen las partes libres
% de las fijas:
if p ~= 0
    A11 = Ao(1:p,1:p);
    B11 = Bo(p,q);
    [ra11,ca11] = size(A11);
    if (ra11 ~= 0 & ca11 ~= 0)
        Fb11 = -place(A11,B11,P(p));
    else
        Fb11 = 0;
    end
else
    Fb11 = 0;
end
else
    Fb11 = 0;
end
A33=Ao((v+1):nx,(v+1):nx);
B32=Bo((v+1):nb,(q+1):m);
[ra33,ca33]=size(A33);
if (ra33 ~= 0 & ca33 ~= 0)
    Fb23=-place(A33,B32,P((p+1):lenP));
else
    Fb23=0;
end
% Determina la ganancia de retroalimentación
% F=Fa+G*Fb*inT
% Nótese también que la forma de Fb es:
% Fb=[Fb11 0 0 % 0 0 Fb23];
% Donde Fb11[q,p] y Fb23[(m-q)X(n-v)]
% son conocidos
if q ~= 0
    if m-q ~= 0
        Fb=[Fb11 zeros(q,n-p)
            zeros(m-q,v) Fb23];
    else
        Fb=[Fb11 zeros(q,n-p)];
    end
else
    Fb = [zeros(m,v) Fb23];
end
Fr = Fa+G*Fb*inT;
% --- ultima linea ---

```

## A.3.4 INCLUS

Proporciona un diagnóstico acerca de la inclusión de un subespacio  $\mathcal{S}$  en otro subespacio  $\mathcal{R}$ , donde  $\text{Im } A = \mathcal{S}$ , y  $\text{Im } B = \mathcal{R}$ , haciendo uso de DVS.

Las rutinas *miinco*, *mainco*, *ints*, *effe*, *ima* y *ortc* pueden encontrarse en [13. Basile y Marro, 1992].

```
function [resp]=inclus(Ao,Bo)
% inclus Determines if subspace S
% S=im(A), is included in
% subspace R=im(B) using
% SVD.
A = ima(Ao,0);
B = ima(Bo,0);
[rengB colsB] = size(B);
% La inclusión de subespacios es
% verificable si:
% B*(B+)A = A
% o propiamente si hacemos la descomposicin
% en valores singulares del subespacio que
% asumimos mas grande:
[Ub,Sb,Vb] = svd(B);
U1 = Ub(:,1:colsB);
% Entonces, se verifica si U1*U1'*A=A
tol = norm(B,'fro')*eps*10^4;
ERR = U1*U1'*A-A;
[m1,n1] = size(ERR);
no = norm(ERR,'fro');
if (no < tol)
    fprintf('S esta en R\n');
    resp = 1;
else
    fprintf('S No esta en R\n');
    resp = 0;
end
% --- ultima linea ---
```