78
2ej

# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

## FACULTAD DE CIENCIAS

# LA UTILIZACION DE CARTERAS DE INVERSION COMO UN METODO PARA LA MINIMIZACION DE INCERTIDUMBRE

# T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :


MARICARMEN RUEDA SANDOVAL


DIRECTOR DE TESIS:
ACT. FERNANDO ALONSO PEREZ TEJADA LOPEZ

1997

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

**M. en C. Virginia Abrín Batule**
**Jefe de la División de Estudios Profesionales de la**
**Facultad de Ciencias**
**P r e s e n t e**

**Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:**

"LA UTILIZACION DE CARTERAS DE INVERSION COMO UN METODO PARA LA MINIMIZACION DE INCERTIDUMBRE"

realizado por MARICARMEN RUEDA SANDOVAL

con número de cuenta 8552446-4 , pasante de la carrera de ACTUARIA

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario ACT. FERNANDO ALONSO PEREZ TEJADA LOPEZ

Propietario M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE Virginia Abrín Batule

Propietario ACT. AGUSTIN ROMAN AGUILAR

Suplente ACT. MAURICIO AGUILAR GONZALEZ

Suplente ACT. AMALIA MALDONADO ROSAS

Consejo Departamental de Matemáticas

ACT. AGUSTIN ROMAN AGUILAR

MATEMATICAS

*Gracias a la vida que me ha dando tanto...*
(Violeta Parra)

# La utilización de carteras de inversión como un método para la minimización de incertidumbre.

Maricarmen Rueda Sandoval

# ÍNDICE

| *TEMA* | | *PÁGINA* |
|---|---|---|
| Introducción | ............................................................................................ | 1 |
| Capítulo 1. | Carteras de inversión. ............................................................ | 3 |
| Capítulo 2. | Modelos determinísticos para el problema de cartera ......... | 21 |
| Capítulo 3. | Modelos de selección de cartera ...................................... | 34 |
| Capítulo 4. | Sistema Financiero Mexicano ...................................... | 59 |
| Capítulo 5. | Aplicación del modelo de Markowitz.................................... | 75 |
| Conclusiones | ............................................................................................ | 83 |
| Bibliografía | ............................................................................................ | 85 |

## INTRODUCCIÓN

El propósito de este trabajo, es proporcionar las bases conceptuales para que un individuo con la debida motivación, pueda construir su propio modelo de inversión, adaptado a sus necesidades y adecuado a su situación particular.

Hay que considerar que ningún modelo, por bueno que sea, puede garantizar una aplicación adecuada de los resultados que proporciona para llegar a buenas decisiones, ya que hay varios factores que influyen en forma definitiva en la eficacia del uso de un modelo, por lo tanto quien confíe totalmente en algún modelo, lo hace a su propio riesgo y responsabilidad.

Es así que se proporcionan los elementos que conducen al planteamiento de los modelos, entonces la materia principal se refiere a la construcción de modelos específicos para "resolver" el problema de selección de cartera. Sin embargo, estoy convencida de que en el problema de inversiones se requiere de una buena intuición además de las técnicas cuantitativas que aquí se plantean.

En teoría, se pretende a través de un modelo, poner en términos matemáticos las relaciones que existen entre las diferentes variables que intervienen en cualquier proceso de inversión, para que a través de ese análisis sea posible determinar la elección más favorable, para lo cual, el primer paso es determinar las alternativas que están al alcance del inversionista, que representan el conjunto de alternativas de inversión que son objeto de la elección.

El desarrollo de este trabajo se estructuró en 5 partes que se describen a continuación:

- En el primer capítulo, se plantean las características generales de un problema de selección de cartera, se establece también el proceso a seguir para realizar una inversión, se desarrolla un modelo para resolver el problema general de elección y se ilustra con un ejemplo hipotético de selección. Este modelo exige que se cumplan 4 axiomas que en conjunto garantizan racionalidad y congruencia en la manera de elegir, es decir, que el sujeto que debe elegir tiene un criterio bien definido para hacerlo. En segundo lugar, el modelo pide que el conjunto de "paquetes" entre los cuales se puede hacer la eleción esté bien definido y cumpla un requisito de "convexidad" que facilite la representación de la región de oportunidades y la solución del problema de selección. Se muestra cómo este modelo conduce a un problema de optimización, el cual al ser resuelto proporciona la solución al problema de elección (selección de cartera). También se comentan los problemas que genera la incertidumbre en el problema de elección, se mencionan los tipos de riesgo a que se está expuesto y se analiza un modelo de indiferencia para ver cuál es el efecto del riesgo en la cartera de inversión.

- En el segundo capítulo, se analizan modelos específicos para atacar el problema bajo el esquema de certeza, es decir que se toma en cuenta en forma explícita todos los elementos que intervienen en el problema de elección de cartera, pero suponiendo que se sabe con certeza los resultados a obtener. También se establecen los lineamientos generales de modelos determinísticos dinámicos para el problema de selección de cartera, notándose el tipo de restricciones impuestas y las complicaciones que surgen al tomar en cuenta las posibilidades de inversión en el tiempo. Los conceptos se plasman en un modelo básico y se ilustran por medio de un ejemplo numérico. Posteriormente, se analizan criterios de riesgo para el problema de selección cartera.

- En el tercer capítulo, se presenta la parte más importante del trabajo como se comentó antes, pues se explica el análisis del problema de cartera con diferentes técnicas de solución como el modelo de Markowitz que utiliza el criterio de la media y la varianza, además de otros que utilizan otras aproximaciones, como el rendimiento medio geométrico, los criterios safety firts, dominación estocástica y asimetría de cartera. En el caso del modelo de Markowitz, básicamente se pretende cuantificar el riesgo en la inversión y el rendimiento esperado de la cartera, con el objetivo de construir la cartera óptima. En los otros planteamientos, mientras que en los dos primeros no se utiliza la idea de utilidad esperada, en los otros dos se usa el análisis de la media-varianza, haciendo en general, referencia a la forma de la función de utilidad y/o a la forma de la distribución de los rendimientos. El criterio de Dominación Estocástica intenta seleccionar portafolios óptimos sin la necesidad de considerar la forma de la función de utilidad del inversionista o la distribución de los rendimientos de los activos a incluir en la cartera. La alternativa denominada Criterios Safety First, lleva a que los inversionistas emplearán un criterio de decisión muy simple centrado en la manera de evitar "malas" salidas. Por su parte la Dominación Estocástica define conjuntos eficientes de inversión bajo condiciones alternativas del comportamiento de las funciones de utilidad. El último criterio denominado Asimetría de Cartera, es tan sólo una introducción al sesgo en el problema de cartera en adición a la media y la varianza.

- A continuación en el capítulo 4, se plantea de manera muy general como está constituído el Sistema Financiero Mexicano, enfocándose principalmente al Mercado de Dinero y describiendo algunos de los instrumentos que cotizan en él, ya que en función de ellos, posteriormente en el capítulo 5, se elabora una aplicación para seleccionar una cartera bajo el modelo de Markowitz.

Finalmente, se presentan las conclusiones al presente trabajo.

# 1

# CARTERAS DE INVERSIÓN

## Introducción

En Administración se presenta el problema de decidir si la inversión de algún recurso, ya sea humano o monetario, por ejemplo, se justifica en términos de los beneficios esperados de la misma.

Si existe la posibilidad de que los beneficios se produzcan en un período corto y pueden medirse en utilidades monetarias la solución resulta relativamente sencilla; pero si existe la posibilidad de que los beneficios esperados de esta inversión se produzcan dentro de varios períodos entonces, la solución es más compleja.

Es importante entonces para el futuro del inversionista, seleccionar adecuadamente métodos y técnicas que le permitan al menos establecer metas y criterios para poder invertir sus recursos en proyectos a largo plazo.

El problema de inversión consiste en encontrar alternativas de inversión nuevas y más rentables, de tal manera que se acepten o rechacen en función de la capacidad de asignación de recursos.

Invertir, en forma general, implica colocar dinero en algún negocio y/o destinar recursos a alguna operación con el objeto de obtener alguna utilidad. Es claro que difícilmente se encontrará alguna inversión con cero riesgos.

El principal factor del problema de inversión es la toma de decisiones adecuadas para la asignación de los principales recursos, de tal forma que se pueda obtener el mayor rendimiento o beneficio a mediano o a largo plazo.

La complicación del problema aumenta si se incorpora el concepto de inversionista agresivo, que es aquel tipo que sigue y analiza el desenvolvimiento del mercado prácticamente sobre una base diaria, en búsqueda de oportunidades. Es claro que este tipo de inversionista, por su propia naturaleza, con mayor frecuencia efectuará cambios en su inversión, teniendo como objetivo acelerar el ritmo de generación de utilidades.

En la actualidad, el uso de técnicas matemáticas permiten que el inversionista cuente con herramientas seguras para no disminuir riesgos que pueden ser considerados en términos matemáticos, y con ello se garantiza un mayor rendimiento en sus negocios.

La solución del problema de inversión hace uso de la Toma de Decisiones (en la que la Investigación de Operaciones es una herramienta importante), estudia la posibilidad de reducir su consumo para comprar un bien al escoger entre dos o más alternativas; entonces, el problema del inversionista es uno de selección de alternativas de inversión.

***Teoría de carteras***

En teoría un individuo puede gastar toda su riqueza inmediatamente pero en la práctica no es así. La riqueza de una persona es la cantidad máxima de dinero presente que posee; puede escoger consumir menos de lo que tiene para tener dinero en el futuro, la diferencia es el ahorro. Puede invertir en activos riesgosos, prestar o guardar en efectivo. Desde el punto de vista de la teoría de cartera, estas alternativas son consideradas una inversión. Una cartera es la totalidad de decisiones que determinan la expectativa futura del individuo.

En un amplio contexto, la selección de un portafolio o cartera incluye la elección de un trabajo, una póliza de seguro, incluso una esposa, etc., sin embargo, los teóricos de carteras usualmente se preocupan de decisiones ordinarias como la selección de un conjunto apropiado de inversiones que tengan liquidez. Por tanto se dice que un portafolio o cartera está compuesto de activos o valores. En general, un valor es una decisión que afecta el futuro y la totalidad de tales decisiones constituyen una cartera.

Los individuos están interesados sobre todo en el gasto. La inversión es meramente un medio de tener para el gasto futuro; no obstante, este hecho está muy relacionado a la selección de cartera, así que es tradicional usar el término inversionista más que el de consumidor. El problema es por tanto, determinar la manera en la cual un inversionista debe seleccionar una de una gran variedad de alternativas de carteras.

La teoría de cartera implica tomar decisiones bajo condiciones de riesgo, el término incertidumbre es usado en sentido popular para referirse a situaciones en las cuales el futuro no puede ser predicho con certeza, y entonces la teoría asume que el inversionista está bajo incertidumbre pero no es ignorante.

***Activos o valores***

Una gran variedad de activos pueden ser incluidos en una cartera, especialmente si el término activo denota un amplio significado. En la práctica sólo un subconjunto de todas las posibilidades es considerado. La apropiada selección de un grupo de candidatos potenciales no es una tarea simple. Si se tuviera toda la información deseada disponible y las herramientas computacionales suficientes, todas las posibilidades podrían ser consideradas; pero como no es así, los beneficios deben ser balanceados con costos.

Se asume que el inversionista selecciona una cartera incluyendo uno o $N$ activos. El número considerado puede ser pequeño (por ejemplo $N=10$) o grande ($N=10,000$) dependiendo de las ventajas y desventajas de un límite contra una selección más completa.

Se supone que los valores o activos son perfectamente divisibles, y dentro de los límites especificados cualquier cantidad deseada puede ser invertida en cada uno de ellos, aunque la tasa real de rendimiento no se ve afectada por la cantidad invertida.

Una cartera puede ser descrita por la proporción invertida en cada valor.

*Ejemplo* :

| *Valores* | *Proporción invertida* |
|---|---|
| 1 | .10 |
| 2 | .50 |
| 3 | .00 |
| 4 | .30 |
| 5 | .00 |
| 6 | .10 |
| | 1.00 |

La proporción invertida en el valor 1 es denotada $x_1$ y la proporción invertida en el valor 2 es denotada $x_2$; como el todo es igual a la suma de sus partes, entonces la suma de las proporciones deben sumar 1:

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1$$

Si $X_i = 0$, la cartera no incluye al valor $i$; un valor negativo denota la ausencia de un valor, en su lugar existe un riesgo; esto puede ser o no posible dependiendo de la situación del inversionista. Un valor total mayor a 1 denota que hay acciones que requieren más fondos de los que el inversionista había previsto, esto es posible sólo si puede obtener el dinero adicional emitiendo uno o más valores. En general cada $x_i$ es restringida a un rango entre 0 y 1.

Una cartera es un conjunto de valores de $x_i$ que suman 1 y que para hacerlo factible debe satisfacer otras restricciones; por ejemplo, todas las $x_i$ deben ser mayores o iguales a cero.

La tasa de rendimiento de una cartera, es el promedio ponderado de las tasas de rendimiento de los valores que la componen, usando las proporciones invertidas como peso. Sea $R_p$ la tasa de rendimiento de la cartera y sea $R_i$ la tasa del valor $i$, entonces:

$$R_p = \sum_{i=1}^{N} X_i R_i$$

Del ejemplo 1 se tendría,

| *Valores* | *Proporción invertida* | *Tasa de rendimiento* | |
|---|---|---|---|
| ( *i* ) | ( $X_i$ ) | ( $R_i$ ) | $X_i R_i$ |
| 1 | .10 | .10 | .010 |
| 2 | .50 | .20 | .100 |
| 3 | .00 | .05 | .000 |
| 4 | .30 | .15 | .045 |
| 5 | .00 | .07 | .000 |
| 6 | .10 | .25 | .025 |
| | 1.00 | | .180 |

Si la tasa de rendimiento de cada valor pudiera predecirse con exactitud, uno podría predecir la tasa de rendimiento de cada cartera posible; pero ni la tasa de rendimiento de la cartera ni la de los valores que la componen puede ser predicha con certeza. El problema es hacer predicciones de los activos que pueden ser usados para predecir la tasa de la cartera. Sin embargo, se requiere una estimación de la tasa de rendimiento esperada de cada valor; este estimador puede obtenerse como el valor esperado de una distribución de probabilidad de la tasa de rendimiento de los valores.

Además de la predicción de la tasa de rendimiento, se requiere de alguna medida de incertidumbre; ésta también puede ser derivada de una distribución de probabilidad, formalmente se considera la desviación estándar de dicha distribución.

Uno de los principales atributos de la teoría de cartera es la insistencia de las interrelaciones que se toman en consideración; las relaciones entre las tasas de rendimiento de los valores pueden ser expresadas en términos de coeficientes de correlación, coeficientes de determinación o covarianzas.

El problema es estimar la relación de la tasa de rendimiento de un valor con cada una de las otras. En la práctica tales estimaciones se derivan con frecuencia de algún modelo simple de la relación entre los activos pero en la teoría se obtiene un valor por separado para cada par.

La relación entre las tasas de rendimiento de dos activos pueden ser expresadas por medio de coeficientes de correlación, donde un valor de +1 indica correlación positiva perfecta, un valor de 0 indica que no hay correlación, y un valor de -1 indica correlación negativa perfecta. El valor numérico del coeficiente de correlación depende de la probabilidad de cada par posible de activos. La correlación sólo indica la extensión o grado en que dos activos se mueven. El valor del coeficiente de correlación indica la razón de incertidumbre atribuible a la relación entre dos valores y el total de incertidumbre asociada con uno de ellos.

La covarianza entre la tasa de rendimiento de dos valores, es el promedio ponderado del producto de las desviaciones no normales; o bien, es igual al producto de los coeficientes de correlación y las desviaciones estándar de las tasas de rendimiento de los valores.

La desviación estándar de la tasa de rendimiento de una cartera, depende de las desviaciones estándar del rendimiento de los valores que la componen, de sus coeficientes de correlación y de las proporciones invertidas.

En resumen, los activos de una cartera pueden ser exitosos, maximizando la tasa de rendimiento esperada en la cartera sujeta a un nivel de riesgo dado o el riesgo puede ser minimizado sujeto a una tasa de rendimiento dada. La varianza de la cartera o su riesgo, es determinada no sólo por la desviación estándar de la tasa de rendimiento de cada valor o activo, sino también por el coeficiente de correlación de cada par de activos. En otras palabras, el riesgo de la cartera se ve afectado por la manera en la que la tasa de rendimiento de dos o más activos se correlacionan.

Por tanto, es importante mencionar que las siguientes reglas se aplican a cualquier inversionista:

1. Si dos carteras tienen la misma desviación estándar de rendimiento y diferente rendimiento esperado, entonces es preferida aquella de la cual se espera mayor rendimiento.

2. Si dos carteras tienen el mismo rendimiento esperado y diferente desviación estándar de rendimiento, entonces es preferida aquella que tenga la menor desviación estándar.

3. Si una cartera tiene una desviación estándar pequeña de rendimiento y un rendimiento esperado mayor que la otra, entonces ésta es preferida.

***El Proceso de inversión***

Hay cinco pasos principales en el proceso de inversión:

1. Establecer los objetivos de inversión.

2. Establecer las políticas de inversión.

3. Seleccionar la estrategia de cartera de inversión.

4. Seleccionar los activos.

5. Medir y evaluar su desarrollo.

*Establecer los objetivos de inversión*.

El primer paso en el proceso de inversión es establecer los objetivos. Por ejemplo, para instituciones como fondos de pensiones y compañías aseguradoras, estos objetivos pueden ser la especificación de flujo de dinero para satisfacer la responsabilidad de pagar en fechas futuras. Para sociedades de inversión, el objetivo de inversión puede ser maximizar el rendimiento.

*Establecer políticas de inversión*.

El segundo paso es establecer las políticas para satisfacer los objetivos; para ello hay que asignar los activos de entre la clase principal de activos de los instrumentos del mercado, como son los instrumentos de renta fija y bonos extranjeros. Por ejemplo, las restricciones regulatorias deben ser consideradas por el cliente al establecer la política de inversión, al igual que el monto asignado a cada activo dependiendo de las características particulares de éste.

Otro ejemplo sería la restricción del monto a colocar en ciertos instrumentos. También los reportes financieros pueden tener implicaciones que deben ser consideradas; desgraciadamente, algunas veces estas implicaciones pueden forzar a establecer políticas de inversión que pueden no ser las mejores a largo plazo para el inversionista.

*Seleccionar la estrategia de cartera de inversión*.

Seleccionar la estrategia de cartera de inversión que sea consistente con los objetivos y políticas del cliente, es el tercer paso en el proceso de inversión. Las estrategias de cartera pueden ser clasificadas como estrategias activas o pasivas. Las estrategias activas son esencialmente las expectativas de los factores que se espera influyan en la evolución de algún instrumento, como los bonos extranjeros que requerirán un pronóstico del tipo de cambio. Las estrategias pasivas tienen una expectativa mínima, el objetivo es replicar la evolución del activo indexándolo a un índice predeterminado.

*Seleccionar los activos*.

Una vez que la cartera es seleccionada, el siguiente paso es la selección de los activos específicos a incluir en la cartera. En esta fase, la teoría financiera dice que al invertir se trata de construir una cartera óptima o eficiente que intenta dar el mayor rendimiento esperado para cierto nivel de riesgo dado, o equivalentemente, el menor riesgo para un rendimiento esperado dado.

*Medir y evaluar su desarrollo.*

El medir y evaluar el desarrollo o evolución de la inversión es el último paso en el proceso de inversión, en realidad no es muy apropiado decir que es el último paso ya que el invertir es un proceso continuo. En este paso se mide la evolución y se evalúa contra algún instrumento estándar que sirva como punto de referencia; puede suceder que al hacer la comparación, la inversión resulte demostrar una mejor evolución que el que se tomó para hacer la comparación, esto no necesariamente significaría que la cartera de inversión satisface el objetivo de inversión. Por ejemplo, suponga que una compañía de seguros establece como sus objetivos maximizar el rendimiento de la cartera y asignar 75% del fondo a valores y al saldo de obligaciones; supóngase además que el inversionista responsable de la cartera gana durante un año un rendimiento de más del 4% que Standard & Poor's (punto de referencia usado para evaluar); asumiendo que el riesgo de la cartera fue similar al de S&P, se diría que el inversionista actuó bien. Sin embargo, suponga que a pesar de ello la compañía de seguros no puede con todas sus obligaciones; el error estuvo en la manera de establecer el objetivo y las políticas de inversión y no en el inversionista responsable. No obstante, pudo ocurrir algún fenómeno totalmente azarozo que impidiera la realización del objetivo. La decisión fue mala si no se consideró adecuadamente la información disponible.

Al hacer una selección se pretende llegar a patrones generales de conducta a través de un modelo y pruebas que se realizan para la validación del mismo. Es decir, obtener patrones generales de conducta de la forma en que un sujeto elige entre distintos bienes, de acuerdo con el ambiente dentro del cual puede hacer dicha elección. Entonces en la selección de activos, el primer paso es determinar las alternativas que están al alcance del inversionista, que representan el conjunto de alternativas de inversión que son objeto de la elección, en general éste es restringido y se le conoce también como conjunto factible; por ejemplo, un inversionista puede encontrar restricciones del mercado que le impidan comprar cantidades pequeñas o muy grandes de cierto instrumento. El segundo paso es definir una estructura de preferencias de la que debe hacer la elección; este es un problema complejo ya que sus preferencias están determinadas por elementos difíciles de caracterizar, así que la teoría no entra en los detalles del por qué de sus preferencias, simplemente supone que el individuo es capaz de expresarlas en una forma manejable y parte de ahí para su análisis.

***La representación geométrica de la estructura de preferencias, las curvas de indiferencia y la función de utilidad.***

La pretensión es plantear matemáticamente, las características y acciones a tomar de un sujeto dispuesto a invertir.

*Axiomas básicos de la elección y el principio de utilidad máxima.*

Las condiciones que se mencionan a continuación son los axiomas de la teoría económica de selección, los cuales se deben interpretar como supuestos cuya justificación se basa en el poder predictivo y descriptivo de las conclusiones que de ellos se derivan.

Sean $x$, $y$ y $z$, tres tipos de bienes, entonces:

*Axioma 1 (Comparabilidad).*

Para cada pareja de paquetes $x$, $y$ el sujeto puede decidir si:

*i)* Prefiere a $x$ sobre $y$.

*ii)* Prefiere a $y$ sobre $x$.

*iii)* Es indiferente ante $x$ o $y$.

*Axioma 2 (Transitividad).*

Supóngase que al sujeto se le presentan tres bienes $x$, $y$, $z$; si prefiere a $x$ sobre $y$ y prefiere a $y$ sobre $z$, entonces prefiere a $x$ sobre $z$. Además, si es indiferente entre $x$ y $y$, y entre $y$ y $z$, también lo es entre $x$ y $z$.

El axioma 1 trata de eliminar situaciones en que el sujeto es incapaz de decidir, y el 2 sustenta que es consistente en su forma de elegir; en consecuencia, el comportamiento de elección del sujeto tiene implícito un criterio bien definido de decisión, pues el sujeto se comporta como si estuviera maximizando una "función de utilidad", la cual asigna a cada paquete un valor numérico denominado *índice de utilidad U* dependiendo de los bienes que contenga, con ello le permite jerarquizar los objetos entre los que se debe elegir en orden decreciente de preferencias. Hay que hacer notar que la función de utilidad no es única, ya que si una función existe en forma tal que califique como criterio de selección, es probable que existan muchas más.

*Ejemplo 1*:

Supóngase que a un individuo se le presentan tres paquetes *(x,y,z)* con tres tipos de bienes y que el paquete $x$ tiene la forma general $\{q_1^{(x)}, q_2^{(x)}, \ldots, q_i^{(x)}, \ldots, q_n^{(x)}\}$ es decir $q_i^{(x)}$ bienes del tipo $i$, de igual forma para los paquetes $y$ y $z$. Entonces,
$x = \{50,3,2\}$, $y = \{20,4,2\}$ $z = \{55,5,2\}$

Además, el individuo escogerá su paquete dependiendo del rendimiento en unidades monetarias (um) que le proporcione durante los próximos tres meses, y para ello cuenta con la siguiente información: cada Bien 1 (B1) le produce 1 um, cada B2 le produce 30 um y cada B3 le produce cero um. Entonces, cada paquete le produce una utilidad $U$ de:

$Ux = 50*1 + 3*30 + 2*0 = 140$

$Uy = 20*1 + 4*30 + 2*0 = 140$

$Uz = 55*1 + 5*30 + 2*0 = 205$

Con esto, de acuerdo a los axiomas es claro que preferirá el paquete $z$ sobre cualquiera de los otros y será indiferente entre $x$ y $y$ ya que:

$$Uz>Ux=Uy$$

*Ejemplo 2*:

Ahora supóngase que se ignoraba que el individuo escogería como criterio de decisión el ingreso monetario en los próximos tres meses; sin embargo, informó que prefiere a $z$ sobre los otros dos y que es indiferente entre $x$ y $y$. Supóngase que se quiere encontrar la función de utilidad y que se supone que es de la siguiente forma:

$$U_p = \alpha_1 q_1^p + \alpha_2 q_2^p + \alpha_3 q_3^p$$

donde:

$q_i^p$ = número de bienes del tipo $i$ que contiene el paquete $p$.

$\alpha_i$ = coeficiente que representa el valor que el inversionista le asocia a cada unidad del bien tipo $i$.

$i$=1,2,3.

Entonces se tendrían que averiguar los valores de los coeficientes $\alpha_i$ que el inversionista le asigna a los distintos bienes, en forma tal que se obtenga su estructura de preferencias. Para esto, los coeficientes deben satisfacer las relaciones siguientes:

$$Uz>Ux=Uy$$

es decir,

$$\alpha_1 q_1^z + \alpha_2 q_2^z + \alpha_3 q_3^z > \alpha_1 q_1^x + \alpha_2 q_2^x + \alpha_3 q_3^x$$

y,

$$\alpha_1 q_1^y + \alpha_2 q_2^y + \alpha_3 q_3^y = \alpha_1 q_1^x + \alpha_2 q_2^x + \alpha_3 q_3^x$$

Sustituyendo del ejemplo 1 los valores de $q_1$, $q_2$, y $q_3$, para los paquetes *x, y,* y *z* en las ecuaciones anteriores tenemos que:

$$55\alpha_1 + 5\alpha_2 + 2\alpha_3 > 20\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3$$

y,

$$20\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3 = 50\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3$$

eliminando $2\alpha_3$ y despejando $\alpha_2$ se obtiene:

$$\alpha_2 = 30\alpha_1 \quad (1.1)$$

Esto quiere decir que cada unidad del bien 2 le representa 30 veces la utilidad que obtiene de una unidad del bien 1. Es obvio que hay un número infinito de valores de $\alpha_1$ y $\alpha_2$ que satisfacen (1.1), y por lo tanto hay una infinidad de funciones de utilidad de la forma "lineal" propuesta que proporcionarían la misma estructura de preferencias $Uz>Ux=Uy$.

***Representación geométrica del mapa de indiferencia.***

La geometría que se puede utilizar está limitada a la selección de paquetes con sólo dos tipos de bienes, ya que la representación gráfica en 3 dimensiones es imposible; sin embargo, permite visualizar el problema en forma clara y de esta manera las combinaciones de cantidades de dos bienes que proporcionen un mismo valor de la función de utilidad, se representarán como "curvas de nivel" en un diagrama bidimensional.

*Ejemplo 3.*

En el caso del individuo de los ejemplos anteriores, eliminaremos el B3 ya que le reporta un beneficio de "cero" y entonces sólo debe decidir entre B1 y B2. De acuerdo al ejemplo anterior se puede utilizar como función de utilidad cualquier función lineal del tipo

$$U_x = \alpha_1 q_1^{(x)} + \alpha_2 q_2^{(x)}$$

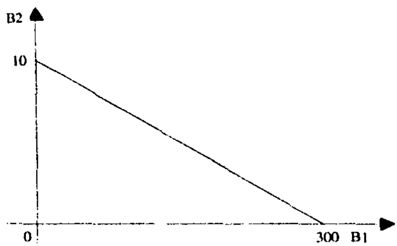
de modo que $\alpha_2 = 30\alpha_1$ y sea $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 30$ con lo que se obtiene:

$$U_x = q_1^{(x)} + 30 q_2^{(x)} = B1 + 30B2$$

Ahora supóngase que se quiere encontrar todos los paquetes que proporcionarían un "índice" de utilidad de 300 ($U_t = 300$), entonces éstos quedarían representados por todos aquellos paquetes $x$ que contengan combinaciones de bienes $\{B1,B2\}$ de modo tal que,

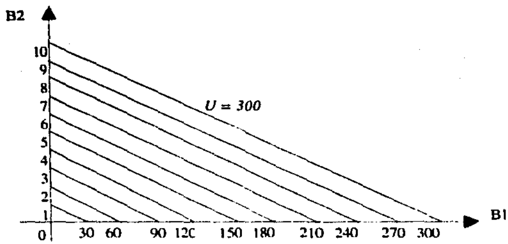
$$B1+30B2=300$$

Supóngase que no se le presenta el caso de cantidades negativas (paquetes con menos *25B1* por ejemplo), entonces las combinaciones de $\{B1,B2\}$ que proporcionan un índice de utilidad de 300 quedan representadas por el segmento de recta *U(300)* donde el individuo es totalmente indiferente entre dos paquetes cualesquiera que tengan combinaciones de bienes $\{B1,B2\}$ contenidos en esa recta, pues todos tendrían el mismo índice de utilidad.

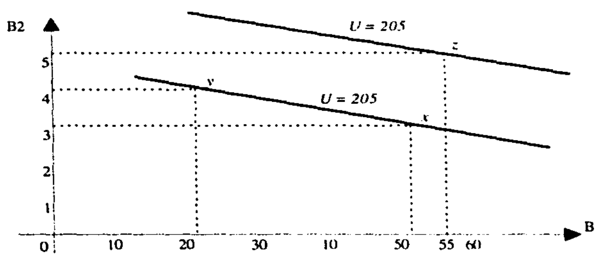



El *mapa de indiferencia* del sujeto es una representación de las combinaciones de bienes $\{q_1,q_2\}$ entre las cuales es indiferente. Esta representación se logra por medio de un conjunto de curvas de nivel, cada una de las cuales está asociada a un valor particular del índice de utilidad. Cada curva de nivel representa el conjunto de combinaciones de bienes que le proporcionan un mismo valor del índice de utilidad del sujeto, representan también paquetes entre los cuales el sujeto es indiferente, y por esto se les conoce como *curvas de indiferencia o de nivel*.

Con la función de utilidad definida en el ejemplo 3, se obtiene un mapa de indiferencia formado por una serie de líneas paralelas en el primer cuadrante.




En realidad hay un número infinito de curvas de indiferencia porque necesariamente a cualquier punto en el espacio de combinaciones $\{q_1, q_2\}$ le corresponde una curva de indiferencia. Si se trazan las curvas de indiferencia de los paquetes *x*, *y* y *z*, se puede notar cómo los paquetes *x* y *y* están sobre la misma línea mientras que el paquete *z* está en una línea con un nivel de utilidad alto de acuerdo a la jerarquía de preferencias manifestada por el individuo.




*Axioma 3 (No saciedad).*

El sujeto siempre preferirá o en el peor de los casos será indiferente, a un paquete que contenga más de cierto bien que otro, que contenga menos del mismo siempre que no tenga que hacer sacrificios en términos de otros bienes. Como consecuencia de este axioma, las curvas de indiferencia tendrán pendiente negativa pues con pendiente positiva implicaría bienes que le proporcionan una utilidad negativa o pérdida al sujeto.

*Axioma 4 (Convexidad).*

Sean *x*, *y* dos paquetes indiferentes tales que $U_x = U_y$. Entonces cualquier paquete *w* que es una combinación convexa de *x* y *y* es tal que

$$U_w > U_x = U_y$$

Es decir, dados dos paquetes $x$, $y$ entre los cuales hay indiferencia, si se forma una combinación convexa $w$ de ambos el sujeto nunca preferirá $x$ o $y$ sobre $w$, o bien al formar una combinación convexa de dos paquetes indiferentes para obtener un tercero, los sacrificios en un bien se pueden compensar por las ganancias en otros, así el paquete resultante tiene cuando menos la misma utilidad que los combinados.

En la mayoría de las aplicaciones de la teoría de selección a problemas de inversión, se trabaja con mapas de indiferencia cuyas curvas son estrictamente convexas, además tienen una serie de propiedades que se utilizan para derivar patrones del comportamiento ante el problema de selección. En forma resumida;

*Propiedad 1.* Pendiente negativa. Esto implica que a medida que se sacrifican cantidades de un bien en el paquete se deben compensar con cantidades cada vez mayores de otro para mantener la condición de indiferencia.

*Propiedad 2.* Mientras más "alta" esté una curva en el mapa, mayor será su índice de utilidad.

*Propiedad 3.* Las curvas jamás se cruzan.

***La región de oportuniades***

Una de las características de cualquier problema económico, es la escasez de recursos que también opera en el problema de elección, pues si no se enfrenta a escasez de recursos no habría problema y sencillamente se pedirían satisfactores a su antojo, sin verse forzado a hacer una elección, entonces surgen las restricciones. Por ejemplo, en el caso de un inversionista está claro que su presupuesto impondrá una restricción a sus posibilidades de elección, que por fuerza deberá respetar ya que no puede comprar activos sin financiarse de alguna manera; pueden existir también restricciones fiscales o de liquidez y además, como no puede comprar cantidades negativas de los activos, siempre estarán presentes las restricciones de no negatividad. Así la región de posibilidades de inversión, se conforma por la intersección de todas las regiones definidas por las restricciones a que está sometido dando siempre como resultado un conjunto convexo. Lo anterior no implica que necesariamente las restricciones sean líneas rectas, de hecho pueden existir situaciones en que son "no lineales"; sin embargo, en el caso de las inversiones las linealidades son frecuentes ya que los precios de los activos en los mercados, permiten cambios de uno a otro sin problemas con el supuesto de que los mercados son perfectos.

En términos del problema del inversionista, la convexidad de la región de oportunidades significa que si el inversionista identifica dos paquetes de inversión, también estará en posibilidad de invertir en cualquier paquete que sea una combinación convexa de los dos que identifique, y evita la necesidad de enumerarlos todos explícitamente pues conociendo un número restringido de ellos, los demás son simples combinaciones convexas de ellos.

***La solución del problema de selección***

Se tienen dos elementos básicos indispensables para poder realizar una elección, (*i*) caracterizar el conjunto de paquetes entre los cuales es posible elegir, dado por la región de oportunidades y (*ii*) proporcionar un criterio de selección dado por el mapa de indiferencia que define la función de utilidad. Sólo resta unir los dos elementos y ver cómo el criterio de selección, se sobrepone a la región de oportunidades para llegar a definir cuál paquete se elige entre todos los posibles.

Recuérdese que mientras más "alta" está una curva de indiferencia, mayor es su nivel de utilidad (beneficio o satisfacción que proporciona un paquete contenido en esa curva al sujeto). Significa que escogiendo paquetes en la región de oportunidades en curvas de indiferencia sucesivamente más altas, mayor será el beneficio que se obtenga; pero como la región de oportunidades está acotada por una o varias de las restricciones, es imposible subir de nivel indefinidamente.

*Ejemplo 4.*

Supóngase que un inversionista cuenta con 5 millones para comprar paquetes de activos (*PA*); en el *PA1* cada activo le cuesta 5,000 y en el *PA2* cada activo tiene un valor de 1,000,000. Además, decide que por razones de impuestos no le conviene comprar más de 4*PA2* y que requiere cierta liquidez en sus inversiones, por lo que debe tener cuando menos 500,000 en *PA1*. El paquete que se le ofrece es $P_1 = (400,2)$.

Para encontrar la solución planteamos las restricciones:

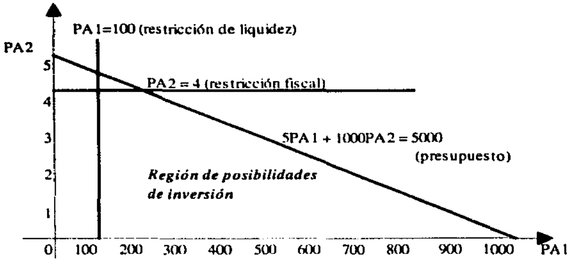
Presupuesto: $5{,}000PA1 + 1{,}000{,}000PA2 \leq 5{,}000{,}000$

Problemas fiscales: $PA2 \leq 4$

Liquidez: $PA1 \geq 100$

y como no puede comprar cantidades negativas, $PA1,\ PA2 \geq 0$

Graficando la intersección de éstas restricciones, tenemos la región de posibilidades de inversión de la siguiente manera,




Para obtener la utilidad con este paquete calculamos:
$U_p = \alpha_1 q_1^p + \alpha_2 q_2^p$

donde,
$q_i^p$ = número de bienes del tipo $i$ que contiene el paquete $p$.

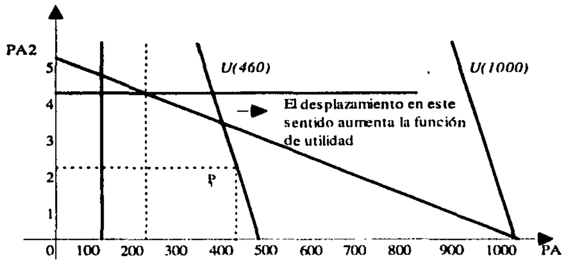
$\alpha_i$ = coeficiente que representa el valor que el inversionista le asocia a cada unidad del bien tipo $i$.

$i=1,2$

Ahora, si $P_1 = (400,2)$ y $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 30$; el nivel de utilidad que se logra es: $U_{(p_1)} = 400+30*2=460$

Esto se observa en la siguiente gráfica y también que es posible desplazar la función de utilidad hacia la derecha de manera que haya sobre ella puntos contenidos en la región de oportunidades hasta que la función de utilidad pase por el paquete $p^* = (1,000,0)$.

Nótese que si se continúa desplazando después del punto $p^*$ no habrá intersección entre la función de utilidad y la región de oportunidades. Por lo tanto, $p^*$ es el único paquete óptimo de inversión que le proporciona un nivel de 1,000.




Este es un caso general; ya que cuando el paquete que se selecciona es único, la función de utilidad es estrictamente convexa y la región de oportunidades es un conjunto convexo. Se puede presentar el caso especial de que haya soluciones múltiples (que más de un paquete proporcione el máximo nivel de utilidad), esto sucede cuando la función de utilidad es paralela a alguna restricción.

***El problema del riesgo (incertidumbre) en la selección de cartera***

La incertidumbre tiene dos fuentes, la primera son las apreciaciones subjetivas (juicios y valorizaciones que dependen de gustos, experiencias, intuición, etc.), que en el fondo es imposible apoyar racionalmente en todos sus aspectos, pero es posible cuando menos medir el costo o beneficio de una apreciación errónea o acertada, esta información se puede incorporar a un modelo matemático. La segunda fuente de incertidumbre, proviene del medio dentro del cual se debe realizar la elección, donde operan fuerzas fuera del control del sujeto que debe hacer la elección, como son los precios de los distintos activos de los mercados, las acciones gubernamentales en cuanto a requisitos legales y fiscales, necesidades de liquidez o la ocurrencia de alguna contingencia que le obligue a hacer un gasto no previsto.

El problema de selección de cartera no está exento de ninguna de las dos fuentes de incertidumbre, y es precisamente el factor que lo hace difícil conceptual y técnicamente, ya que es el culpable del riesgo en una inversión. Si no existiera el riesgo ni la incertidumbre, el problema de cartera estaría resuelto montando el modelo matemático de optimización correspondiente y resolviéndolo mecánicamente con algún método numérico; por el contrario se crean problemas técnicamente difíciles de resolver como la modelación (matemática o no) que complica las técnicas de solución.

En el problema de selección de cartera hay tres tipos de riesgos:

1. Riesgo de pérdida; no recuperar la inversión y producir una pérdida de capital.

2. Riesgo de desaprovechar oportunidades de inversión; asignar recursos a ciertos activos menos redituables que otros.

3. Riesgo de liquidez; comprometer recursos en activos difíciles de convertir en dinero provocando una pérdida en el momento en que se hace necesario efectuar un pago imprevisto.

Independientemente de las interrelaciones que existan entre ellos, la distinción obedece a que hay sutilezas que obligan a tratarlos de manera diferente; de ahí la necesidad de consideralos explícitamente.

El riesgo en una inversión es consecuencia de la incertidumbre. En la teoría de la economía de mercado, el riesgo tiene una importancia fundamental pues en general, las inversiones más riesgosas efectivamente son las de mayores rendimientos en caso de éxito. Una consecuencia directa del riesgo es la diversificación en la cartera; esto es, distribuir el riesgo entre varios activos de forma que las pérdidas en algunos sean compensadas y aún superadas con las ganancias en otros.

***Un modelo de indiferencia para el problema de elección entre riesgo y rendimiento.***

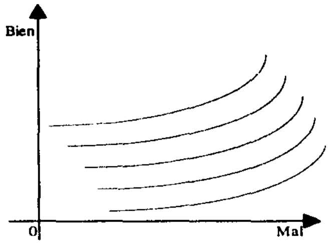
Para llegar a un modelo de indiferencia para el problema de elección entre un bien y un mal se necesita el axioma siguiente:

*Axioma.*

Dado un problema de elección entre paquetes que contienen "bienes" y "males", el sujeto siempre preferirá o en el peor de los casos será indiferente, entre un paquete que contiene menos del mal a otros que contienen mayor cantidad de ese mal, siempre que no haya sacrificios en términos de los otros bienes y males que componen el paquete.

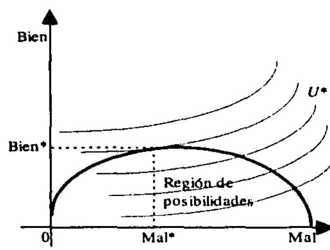
La consecuencia directa de este axioma es que las curvas de indiferencia en un mapa de preferencias entre un bien y un mal tienen pendiente positiva, lo cual implica que para obtener más cantidad del bien hay que aceptar más del mal, o para eliminar algo del mal hay que sacrificar alguna cantidad del bien.

El axioma de convexidad también se aplica; en este caso tiene la interpretación de que mientras más cantidad del mal se agregue a un paquete, más cantidades del bien se deben agregar para mantener la condición de indiferencia; el mapa de indiferencia bien-mal tiene la forma que muestra la gráfica donde las curvas de indiferencia son convexas y no se cruzan, tienen pendiente positiva y la utilidad aumenta a medida que las curvas están más "arriba y a la izquierda".




En general, $U_{i+1} > U_i$ para $i=0,1,2,...$

El problema de elección para el caso de bienes-males, se resuelve identificando la región de oportunidades definida por las restricciones que limitan las posibilidades de elección del sujeto que entonces elegirá como paquete óptimo $p^*$, el punto donde es tangente la curva de indiferencia más alta con la región de oportunidades.




***El requisito de liquidez.***

La incertidumbre incide en las utilidades de una inversión y por tanto, la aleatoriedad del rendimiento proveniente de fluctuaciones en tasas de interés y precios de activos. Sin embargo, no es la única fuente de incertidumbre que puede obligar a una diversificación de la cartera; también influye el requisito de liquidez.

Los requisitos de liquidez inciden en las restricciones de modelo y como consecuencia afectan las utilidades. Un mal cálculo de las necesidades de liquidez puede tener uno de dos efectos: 1) Si el cálculo es muy restrictivo (si se estima un requisito mayor del necesario) significará un sacrificio en utilidades potenciales y, 2) Si el cálculo es muy liberal (si se subestima el requisito), se puede incurrir en pérdidas innecesarias al tener que vender activos menos líquidos a precios castigados.

Entonces siempre es deseable diversificar la cartera para incluir activos líquidos y poder así afrontar gastos imprevistos y anticiparse a la posibilidad de futuras alternativas de inversión que sean más redituables que las actuales.

Usualmente la determinación del nivel óptimo de liquidez se ha tratado usando teoría para ello, pero es difícil ampliar los modelos al caso de varios activos ya que hay diferentes "grados" de liquidez entre activos no líquidos de la cartera, razón por la cual se utilizan para el modelado técnicas de programación matemática.

# 2

## Modelos determinísticos para el problema de cartera

Los supuestos de racionalidad conducen al planteamiento del problema de elección como uno de optimización matemática. En términos del problema de cartera, la aplicación de la teoría es inmediata y salvo en el tratamiento del riesgo todos los elementos que intervienen son objetivos y pueden ser caracterizados matemáticamente en forma explícita. Dado que el problema de selección de cartera es un problema de optimización, ahora se analizan modelos específicos para atacar el problema con el supuesto de certeza.

Algunos intentos que se emplean para aplicar técnicas cuantitativas al problema de cartera, abarcan desde métodos heurísticos hasta modelos matemáticos de optimización . Un método heurístico popular es el método de "asignación de activos" para la cartera de inversión de un banco, que parte del supuesto de que a mayor plazo, mayor rendimiento en la inversión; sin embargo, se le encontraron defectos y se buscaron métodos más formales para atacar el problema por medio de modelos de programación matemática.

Hay dos corrientes principales. La primera fué iniciada por H. Markowitz y se refiere a la cartera de una empresa que puede incluir instrumentos del mercado de valores y que por fuerza tiene que tomar en cuenta en forma explícita las características de riesgo de dichos valores. La segunda corriente tiene su origen en el trabajo de Chambers y Charnes, aplicable a la cartera de un banco privado y su aportación principal es el reconocimiento explícito de las características dinámicas que operan en el manejo de activos, de las restricciones legales a que está sometido un banco privado y de la incorporación de criterios de seguridad (una prueba de suficiencia de capital y otra de liquidez).

En la actualidad, hay una gran proliferación de modelos, ya que a medida que avanza la tecnología de computación y la investigación en técnicas de modelación es posible hacer modelos cada vez más apegados a la realidad y adaptados al caso particular que le interesa al investigador o empresa que lo requiera. Debido a que cada aplicación puede requerir un sesgo especial, es muy difícil hacer un modelo totalmente general aunque se han hecho y se siguen haciendo intentos por lograrlo. Por tanto, aquí se analizan los elementos que se sabe que son comunes a cualquier caso, indicando donde es necesario los puntos en que pueden existir discrepancias según los casos particulares de que se trate.

### Modelos dinámicos con horizonte de planeación finito

Para lograr una cartera de inversión adecuada es imposible ignorar los factores dinámicos del futuro tanto en oportunidades de inversión que se pudieran presentar como en restricciones que pudieran cambiar respecto al presente, y por tanto es necesario incluirlos en alguna forma en el modelo.

Los modelos que aquí se presentan son dinámicos, éstos no se limitan a tratar de encontrar la mejor inversión en el período considerado como presente, sino además plantean relaciones para varios períodos en el futuro donde el horizonte de planeación es finito.

Así, los modelos dinámicos con el supuesto de certidumbre proporcionarían la cartera óptima en cada período que se considere; sin embargo, dado que el futuro es incierto, la única solución del modelo que interesa y puede ser útil para tomar una decisión es la del primer período, ya que es la única que requiere una decisión inmediata, aunque esta elección tiene gran impacto en decisiones futuras.

**Elementos principales de los modelos**

Estos elementos se refieren al tipo de restricciones que en ellos operan además de los criterios de decisión que se utilizan.

Se pueden identificar restricciones de dos clases, las estructurales, que las impone la mecánica del proceso de inversión (por ejemplo, el monto de recursos disponibles para inversión en un período depende de cómo se invirtieron los recursos en períodos anteriores), y las restricciones ambientales, dadas por el medio que rodea al problema (restricciones legales, fiscales y de política institucional).

Dentro de esta clasificación se pueden distinguir los dos siguientes tipos de restricciones que surgen del carácter dinámico de los modelos que se estudian.

1. Restricciones intraperíodos:
Estas restricciones son las que se deben respetar dentro de cada período en que se ha dividido el horizonte de planeación, ya que cada período tiene sus propias restricciones estructurales y ambientales. Por ejemplo, el requisito de liquidez del período y los que sean particulares de la política del inversionista al que pertenece la cartera.

2. Restricciones entre períodos:
Estas restricciones generalmente se plantean en términos de variables que funcionan dentro de un solo período. Además, es preciso encadenar las variables para reflejar dependencias entre un período y otro o cómo las decisiones de un período influyen en los demás períodos dentro del horizonte de planeación. Por ejemplo, los activos líquidos disponibles en un período dependen de las inversiones realizadas en períodos anteriores.

**Criterios de decisión**

En general, los modelos determinísticos utilizan el de rendimiento esperado pues cualquier criterio de riesgo involucra un reconocimiento explícito de incertidumbre, entonces se puede pensar en maximizar alguno o varios de los siguientes objetivos:

*i*) El rendimiento total esperado de la cartera durante el horizonte de planeación.

*ii*) El rendimiento esperado de la cartera en algún período específico.
*iii*) El valor presente del rendimiento total esperado de la cartera en el horizonte de planeación.

El modelo se resuelve utilizando varios criterios de selección como se mencionó en el primer capítulo, con la ventaja de proporcionar un amplio panorama de alternativas de decisión para compensar un poco el no incluir incertidumbre en forma explícita en el modelo.

**Un modelo de programación lineal básico**

Aquí se proporciona un modelo utilizando los conceptos del primer capítulo que sólo tiene restricciones de liquidez además de las estructurales que surgen del modelado. Se supone además que debido a que hay certidumbre total acerca del requisito de liquidez en cada período y los rendimientos que proporciona cada instrumento, es imposible vender un activo de inversión antes de su vencimiento; también el número $I$ de activos y plazos $J$ es finito y que el plazo máximo $J$ a que se puede invertir es cuando mucho igual al total de períodos $T$ que se consideran para el horizonte de planeación, es decir $J \leq T$.

Para construir el modelo se definen:

1. Variables de decisión

Sea $X_{ijt}$ = la cantidad de dinero que se invierte en el activo "*i*" a plazo "*j*" durante el período "*t*".

$i = 1, 2,\dots,I;\ j = 1,2,\dots,J;\ t = 1,2,\dots,T$

2. Datos que requiere el modelo para el horizonte de planeación,

Sean $\gamma_{ijt}$ = el rendimiento que produce al activo tipo *i*, a plazo *j*, comprado en el período *t*.

$i = 1,2,\dots,I;\ j = 1,2,\dots,J;\ t = 1,2,\dots,T$

$L_t^0$ = el requisito de liquidez para el período *t*.
$t = 1,2,\dots,T.$

3. Variables auxiliares

$P_t$ = presupuesto de inversión para el período *t*.
$t = 2,3,\dots,T.$

Estas variables no son necesarias pero dan claridad al plantamiento del modelo.

4. Datos de inicio del modelo.

Se conoce la composición de la cartera y el presupuesto que se tiene para el período inicial $t$=0.
Entonces sean:

$X^0_{ijt}$ = la inversión actual en activos de tipo $i$ a plazo $j$ comprados en un período anterior $t$, pero que vencen dentro del horizonte de planeación.
$i = 1,2,...,I;\ j = 1,2,...,J;\ t = 0,-1,-2,...-T$
$\gamma^0_{ijt}$ = el rendimiento asociado al activo $i$ a plazo $j$ de la cartera actual, comprado en un período anterior, que vence dentro del horizonte de planeación.
$i = 1,2,...,I;\ j = 1,2,...,J;\ t = 0,-1,-2,...-T$
$P_1$ = presupuesto disponible en el período actual.

El problema consiste en determinar las cantidades $X_{ijt}$ a invertir en los diversos activos a los distintos plazos y en cada período de tal forma que se maximice el rendimiento que se obtenga durante el horizonte de planeación y se respeten los requisitos de liquidez.

Para iniciar el modelo se plantean unas relaciones estructurales básicas:

a) Vencimiento

Un activo "$i$" comprado en el período "$k$" a plazo "$j$", vence en el período $t=k+j$ y por tanto para que un instrumento a plazo $j$ venza en el período $t$ tiene que haber sido comprado en un período anterior $k=t-j$.

b) Liquidez neta

Dado que en el momento de decidir futuras inversiones existe una cartera vigente, habrá ciertos activos que venzan en algún período dentro del horizonte de planeación generando recursos disponibles que se deben tomar en cuenta y se pueden calcular antes de plantear el modelo. Para cierto período $t$ más el rendimiento que se obtenga de ellos. Entonces,

$$R_t = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} (1+\gamma_{ij,t-j})\, X^0_{ij,t-j}$$

Las sumas se hacen en todos los posibles instrumentos y a todos los plazos posibles que se compraron antes del período actual $t=0$.
Para efectos de congruencia se puede fijar
$\gamma^0_{ijt} = X^0_{ijt} = 0$ para $t>0$

Ahora, si existen estos recursos ya líquidos de antemano, el requisito de liquidez real del período es inferior a $L_t^0$ precisamente en $R_t$ y por lo tanto el requisito de liquidez es:

$$L_t = L_t^0 - R_t$$

c) Restricciones entre períodos

El único conjunto de este tipo de restricciones se refiere al presupuesto disponible para inversión en cada período $t$, es la diferencia entre el requisito de liquidez y los activos que vencen durante el período más el rendimiento que se obtiene;

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{M}(1+\gamma_{ij,t-j})X_{ij,t-j}$$

Donde $M$ tiene un límite indefinido en los plazos $j$ porque depende del período $t$ y el plazo máximo $J$ al que se puede invertir, ya que si $t \leq J$ existe la posibilidad de que $t - j \leq 0$. Es decir, se requieren montos correspondientes a activos comprados en períodos anteriores a los que se consideran en el horizonte de planeación; pero ya están considerados en el requisito neto de liquidez y por lo tanto,

$$M = \begin{cases} t-1 & \text{para } t = 2,3,\ldots,J \\ J & \text{para } t = J+1,\ldots,T \end{cases}$$

Entonces, el presupuesto de inversión para el período $t$ es:

$$P_t = \begin{cases} \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{t-1}(1+\gamma_{ij,t-j})X_{ij,t-j} - L_t; & t = 2,3,\ldots,J \\ \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(1+\gamma_{ij,t-j})X_{ij,t-j} - L_t; & t = J+1,\ldots,T \end{cases} \tag{2.1}$$

Nótese que estas restricciones empiezan sólo a partir del segundo período ya que en el primero, el presupuesto está determinado por la cartera vigente; por eso se toma $P_1$ como dato inicial del modelo.

d) Restricciones intraperíodos

Hay dos conjuntos de restricciones de este tipo:

1. Que las inversiones que se hagan en cada período no excedan al presupuesto disponible en el período respectivo; esto, es la suma de lo que se invierta en cada activo a cada plazo y en cada período sin exceder el presupuesto disponible $P_t$ en el período respectivo:

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} X_{ijt} \leq P_t \qquad t = 1,2,\ldots,T \qquad (2.2)$$

2. Que el requisito de liquidez se satisfaga en cada período; es decir, los activos que vencen en cada período sean capaces de cubrir los requisitos de liquidez de los períodos respectivos. Se representa exigiendo que el presupuesto $P_t$ disponible en cada período sea no negativo:

$$P_t \geq 0 \qquad t = 2,3,\ldots,T \qquad (2.3)$$

Finalmente, para efectos de congruencia se pide que:

$X_{ijt} \geq 0$ para todos los tipos de activos, plazos y períodos.

e) El criterio de decisión o función objetivo

Recuérdese que el criterio de selección se fijó como el de maximizar el rendimiento total de las inversiones durante el horizonte de planeación; esto es maximizar la suma de los rendimientos de todas las inversiones que se hagan dentro del horizonte de planeación;

$$\text{maximizar} \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{t=1}^{T}\gamma_{ijt} X_{ijt} \qquad (2.4)$$

**El modelo**

Las relaciones (2.1), (2.2), (2.3) y (2.4) constituyen el modelo para el problema básico de inversiones como un programa de programación lineal que queda de la siguiente forma:

$$\begin{array}{lll}
\text{Maximizar} & \displaystyle\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{t=1}^{T}\gamma_{ijt} X_{ijt} & \\
\text{Sujeto a:} & \displaystyle\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{t-1}(1+\gamma_{ij,t-j}) X_{ij,t-j} - L_t = P_t & t = 2,3,\ldots,J \\
 & \displaystyle\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(1+\gamma_{ij,t-j}) X_{ij,t-j} - L_t = P_t & t = J+1,\ldots,T \\
 & \displaystyle\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} X_{ijt} \leq P_t & t = 1,2,\ldots,T \\
 & P_t \geq 0 & t = 1,2,\ldots,T \\
 & X_{ijt} \geq 0 \qquad i = 1,2,\ldots,I; \quad j = 1,2,\ldots,J; & t = 1,2,\ldots,T
\end{array}$$

**Observaciones.**

Existe una serie de supuestos implícitos en el modelo que son simplificaciones importantes de la realidad. En el modelo se considera que todas las inversiones se hacen al inicio del período $t$ dentro del horizonte de planeación y se supone que los activos que vencen en un período también lo hacen al inicio. Estos supuestos son más importantes para los primeros períodos que para los últimos, pues a medida que los períodos se encuentran más hacia el futuro también es mayor la incertidumbre. Además como ya se indicó, el único período que tiene relevancia para la decisión actual es el primero y por lo tanto es el que requiere más precisión.

También es necesario notar que debido al carácter determinístico del modelo no tiene mucho sentido incluir varios activos al mismo plazo ya que el criterio de decisión de maximización de rendimiento esperado automáticamente seleccionará el de mayor rendimiento para cada plazo porque el procedimiento de optimización en la solución del problema, elimina los instrumentos de más bajo rendimiento pra cada plazo dejando sólo los de rendimiento más alto.

Así, si se selecciona solo un activo para cada plazo y cada período, las variables de decisión del modelo y los rendimientos son:

$X_{jt}$ = la cantidad que se invierta a plazo $j$ durante el período $t$.

$\gamma_{jt}$ = rendimiento que se obtenga por invertir a plazo $j$ en el período $t$.

Con lo cual el modelo básico se simplifica, quedando un programa lineal de la siguiente forma:

Maximizar $\displaystyle\sum_{j=1}^{J}\sum_{t=1}^{T}\gamma_{jt} X_{jt}$

Sujeto a: $\displaystyle\sum_{j=1}^{t-1}(1+\gamma_{j,t-j}) X_{j,t-j} - L_t = P_t \qquad t=2,3,\ldots,J$

$$\sum_{j=1}^{J}(1+\gamma_{j,t-j}) X_{j,t-j} - L_t = P_t \qquad t=J+1,\ldots,T$$

$$\sum_{j=1}^{J} X_{jt} \leq P_t \qquad t=1,2,\ldots,T$$

$$P_t \geq 0 \qquad t=1,2,\ldots,T$$

$X_{jt} \geq 0$ para todos los perídos $t$ y todos los plazos $j$.

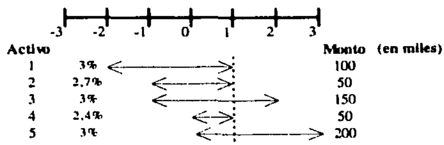
Ejemplo:

Supóngase que se puede invertir en activos sólo a tres plazos distintos (uno, dos y tres meses), y se quiere planear la cartera para un horizonte de cuatro meses. La cartera actual tiene las siguientes características:

Tabla 1.

| Activo | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimiento | 3% | 2.7% | 3% | 2.4% | 3% |
| Monto (miles de pesos) | 100 | 50 | 150 | 50 | 200 |
| Comprado en el período | -2 | -1 | -1 | 0 | 0 |
| Plazo (meses) | 3 | 2 | 3 | 1 | 3 |

Para mejor comprensión se grafica en una línea de tiempo:




Las expectativas de rendimientos para los próximos cuatro meses son:

Tabla 2.

| | Plazo\Período | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\gamma_{jt} =$ | 1 | 0.7% | 0.5% | 0.6% | 0.8% |
| | 2 | 1.6% | 1.2% | 1.4% | 1.8% |
| | 3 | 2.7% | 2.1% | 2.4% | 3.0% |

El requisito bruto de liquidez para los meses 2, 3 y 4 es el siguiente:

Tabla 3.

| Período | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $L_t^0$ = Monto (miles de pesos) | 80 | 200 | 230 | 100 |

Y el presupuesto para el período actual es de 100 mil pesos, además de los recursos disponibles por activos que vencen al inicio de este período, menos el requisito de liquidez.

Para determinar las constantes se harán los siguientes cálculos:

a) Presupuesto inicial

En la tabla 1 se observa que al comienzo del período inicial vencen los activos 1, 2 y 4 y los recursos disponibles por este concepto ascienden a :

$$R_1 = (1.03)100 + (1.027)50 + (1.024)50 = 205.55$$

A esto se debe agregar 100 y restar 80 que es el requisito de liquidez para el período, de acuerdo con la tabla 3, se tiene,

$$P_1 = 205.55 + 100 - 80 = 225.55$$

b) Recursos disponibles en períodos posteriores

Aquí se calculan los recursos líquidos que se harán disponibles en períodos dentro del horizonte de planeación y que provienen de la cartera vigente,

Período 2. En este período vence el activo 3 de la cartera por:

$$R_2 = (1.03)150 = 154.50$$

Período 3. En este período vence el activo 5 por:

$$R_3 = (1.03)200 = 206.00$$

c) Requisito de liquidez neto

Como el requisito de liquidez del primer período queda incluído en el cálculo del presupuesto para ese período, sólo se debe calcular para los períodos 2, 3 y 4. Sólo hay recursos provenientes de la cartera vigente disponibles dentro del horizonte de planeación en los períodos 2 y 3; por lo tanto, restando las cantidades que se obtengan en el punto anterior de las correspondientes de la tabla 3 se obtiene la liquidez neta indicada en la siguiente tabla.

Tabla 4.

| **Período** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|
| $L_t$ = Monto (miles de pesos) | 45.50 | 24 | 100 |

donde, $L_t = L_t^0 - R_t$, para $t = 2,3,4$

Con los cálculos anteriores ya es posible plantear el modelo. Para resolver el programa lineal se debe escribir el modelo en formato estándar, que queda de la siguiente manera:

Maximizar

$$.007\,x_{11} + .016\,x_{21} + .027\,x_{31} + .005\,x_{12} + .012\,x_{22} + .021\,x_{32} +$$
$$.006\,x_{13} + .014\,x_{23} + .024\,x_{33} + .008\,x_{14} + .018\,x_{24} + .030\,x_{34}$$

Sujeta a:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 225.55$$
$$1.007\,x_{11} - P_2 = 45.50$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} - P_2 \leq 0$$
$$1.016\,x_{21} + 1.005\,x_{12} - P_3 = 24$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} - P_3 \leq 0$$
$$1.027\,x_{31} + 1.012\,x_{22} + 1.006\,x_{13} - P_4 = 100$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} - P_4 \leq 0$$

$$P_t \geq 0 \qquad \text{para} \quad t = 2,3,4$$
$$X_{jt} \geq 0 \qquad \text{para} \quad j = 1,2,3; \qquad t = 1,2,3,4$$

La matriz de restricciones se presenta en la tabla 5.

Tabla 5.

| VP | $X_{11}$ | $X_{21}$ | $X_{31}$ | $X_{12}$ | $X_{22}$ | $X_{32}$ | $P_2$ | $X_{13}$ | $X_{23}$ | $X_{33}$ | $P_3$ | $X_{14}$ | $X_{24}$ | $X_{34}$ | $P_4$ b |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F | 0.007 | 0.016 | 0.027 | 0.005 | 0.012 | 0.021 | 0 | 0.006 | 0.014 | 0.024 | 0 | 0.008 | 0.018 | 0.030 | 0 --- |
| 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | $\leq 225.55$ |
| 2 | 1.007 | | | | | | -1 | | | | | | | | =45.50 |
| | | | | 1 | 1 | 1 | -1 | | | | | | | | $\leq 0$ |
| 3 | | 1.016 | | 1.005 | | | | | | | -1 | | | | =24.0 |
| | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | -1 | | | | $\leq 0$ |

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | | | 1.027 | | 1.012 | | | 1.006 | | | | 1 | 1 | 1 | -1 = 100<br>-1 ≤ 0 |

V: variable.
P: período.
F: Función objetivo.

El problema se resolvió usando EXCEL y la solución se presenta en las tablas 6 y 7.

Tabla 6.

| | Plazo\Período | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $X^*_{it}$ | 1 | 45.184 | 0 | 0 | 0 |
| | 2 | 23.622 | 0 | 0 | 0 |
| | 3 | 156.744 | 0 | 0 | 60.976 |

Tabla 7.

| | Período | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P^*_t$ | Presupuesto | 0 | 0 | 60.976 |

La solución óptima para este problema indica que en el primer período se debe invertir a los tres plazos y que la cantidad mayor se invierte al plazo más largo. Así, las inversiones a plazo más corto se utilizan para satisfacer los requisitos de liquidez y se invierte todo lo posible al plazo más largo para aprovechar el mayor rendimiento que ofrecen estas inversiones. Nótese cómo en el último período del horizonte de planeación se invierte todo a largo plazo ya que no se advierten requisitos de liquidez posteriores.

Estos resultados muestran claramente el sesgo de los modelos determinísticos al escoger las inversiones de mayor rendimiento cubriendo los requisitos de liquidez con las inversiones menos redituables.

**Modelos con criterio de riesgo**

Ya se mencionaron los tipos de riesgo a que se enfrenta el inversionista y cómo conducen a una diversificación de la cartera para que el riesgo se distribuya entre los activos que la componen. Ahora se analizan modelos e ideas que se han propuesto para la selección de cartera utilizando criterios de riesgo explicitados por medio de técnicas matemáticas.

Los modelos que se estudian utilizan resultados de la teoría matemática de probabilidad tradicional para especificar criterios de riesgo. De los tres tipos de riesgo mencionados antes sólo se trata el riesgo de pérdida, es decir no considera el riesgo de desaprovechar oportunidades de inversión y riesgo de liquidez.

**Criterios de riesgo**

1) Criterio de maximización de rendimiento esperado

El primer intento de tomar en cuenta la incertidumbre usando modelos determinísticos, es utilizar valores esperados en todos los parámetros inciertos, pero hay argumentos poderosos que desechan los criterios de valor esperado como un buen criterio de selección ya que puede conducir a soluciones en que la cartera no presenta diversificación adecuada, pues el modelo escogerá los activos de rendimientos esperados más altos que no serán necesariamente los mejores.

2) Criterio de minimización de incertidumbre: varianza.

El primero en proponer la utilización de medidas de variación en modelos para la selección de cartera fue Markowitz, quien propuso usar la varianza de los rendimientos esperados como medida de riesgo y que el criterio de selección fuese minimizar la varianza del rendimiento de la cartera para minimizar el riesgo.

Utilizar la varianza parte del hecho de que si ésta es cero, entonces no hay incertidumbre; mientras menor sea la varianza, menor será el posible rango de variación de los rendimientos, menor la incertidumbre y por lo tanto el riesgo. En este sentido, la varianza es una medida indirecta del riesgo ya que lo que mide en realidad es el grado de incertidumbre.

Estadísticamente la varianza es una medida de dispersión alrededor de la media; si una variable puede tomar muchos valores en forma aleatoria, la varianza es un indicador de qué tan concentrados se encuentran los valores posibles de la variable en torno a su valor medio; lo cual hace evidente que la varianza es efectivamente una medida del grado de incertidumbre, pero no está libre de complicaciones técnicas ya que matemáticamente el cálculo de la varianza es un forma cuadrática (por tanto no lineal) y esto contrasta con el criterio de rendimientos esperados que preserva linealidades y hace su empleo mucho más fácil.

3. Minimización de riesgo

Dado que el riesgo es "lo que no se quiere que suceda", en el caso de las inversiones en términos monetarios, se definiría mediante una declaración del siguiente tipo: "El rendimiento $\gamma$ que se obtenga de la cartera no deber ser inferior a la cantidad $\alpha$". Entonces, el evento indeseable es $\gamma < \alpha$. Con esto el riesgo $\rho$ se puede definir como la probabilidad de que suceda lo indeseable.

$\rho$ = Probabilidad $\{\gamma < \alpha\}$

Entonces el criterio de minimización de riesgo es el de la minimización de $\rho$ :
minimizar $\rho = \Pr\{\gamma < \alpha\}$

Otra forma de atacar el problema es con la proposición contraria:
maximizar $\rho = \Pr\{\gamma \geq \alpha\}$

Ambas proposiciones son equivalentes porque
$\rho = \Pr\{\gamma < \alpha\} = 1 - \Pr\{\gamma \geq \alpha\}$

Por lo tanto,
$\Pr\{\gamma \geq \alpha\} = 1 - \rho$
donde $0 \leq \rho \leq 1$, y maximizar $\Pr\{\gamma \geq \alpha\}$ equivale a minimizar $\rho$.

Este criterio es quizás el más riguroso y el más complicado en cuanto a su tratamiento ya que depende del conocimiento que se tenga de la función de distribución de probabilidades del rendimiento $\gamma$ que puede ser muy difícil o imposible de estimar.

# 3

## Modelos de selección de cartera

### El modelo de Markowitz de minimización de incertidumbre

Esta sección resume las ideas principales propuestas por H. Markowitz para atacar el problema de selección de cartera. Para ello, se analiza el concepto de "portafolio eficiente" y el tipo de problemas de optimización a que conduce dicho concepto. Como aclaración se utilizará "portafolio" o "cartera" indistintamente para referirse al mismo concepto.

En la construcción de un portafolio, los inversionistas buscan maximizar el rendimiento esperado de su inversión dado algún nivel de riesgo que están dispuestos a aceptar. Los portafolios o carteras que satisfacen este requerimiento son llamados *portafolios eficientes.*

Para construir un portafolio eficiente, es necesario hacer algunas suposiciones acerca de cómo un inversionista se comporta al tomar una decisión de inversión. Una suposición razonable es que los inversionistas tienen aversión al riesgo, por ejemplo, cuando alguien se enfrenta a dos inversiones con el mismo nivel de rendimiento esperado pero dos diferentes niveles de riesgo, el sujeto preferirá aquel de menor riesgo. Por tanto, dada una selección de portafolios eficientes de las cuales se puede elegir, el *portafolio óptimo* será el preferido.

Por otro lado, en la teoría económica hay situaciones en las que diversas entidades (individuos o empresas), tienen varias alternativas y requieren entonces de la teoría de selección. Esta describe el proceso de tomar una decisión con la ayuda de un concepto que se conoce como *función de utilidad*, recordando del capítulo 1, es una expresión matemática que asigna valores a todas las posibles alternativas y, mientras mayor sea el valor, mayor será la utilidad, expresando las preferencias del inversionista con respecto al nivel de riesgo y el rendimiento esperado.

Además, cabe mencionar que un *activo con riesgo* es aquel cuyo rendimiento en el futuro es desconocido, mientras que existen valores de los que se conoce con certeza el rendimiento producido en el futuro conocidos como *activos libres de riesgo.*

*Medición del rendimiento esperado de una cartera*

Usualmente los inversionistas se enfrentan con alternativas de elegir entre activos con riesgo. El cálculo del rendimiento esperado de una cartera con este tipo de activos o valores en un período simple, es de la siguiente manera:

$$R_p = \sum_{g=1}^{G} w_g R_g \qquad (3.1.1)$$

donde

$R_p$ = tasa de rendimiento del portafolio en el período
$R_g$ = tasa de rendimiento del valor $g$ en el período
$w_g$ = peso del valor $g$ en el portafolio (es decir, el valor $g$ como proporción del valor de mercado del total del portafolio)
$G$ = número de valores en el portafolio

La ecuación anterior establece que el rendimiento de un portafolio con $G$ activos ( $R_p$ ), es igual a la suma del peso que cada activo individualmente tiene en la cartera por su rendimiento. Entonces, el rendimiento $R_p$ del portafolio es llamado algunas veces "rendimiento ex-post".

Por ejemplo, considérese el siguiente portafolio compuesto por tres activos o valores:

| Activo | Monto Invertido | Tasa de Rendimiento |
|---|---|---|
| 1 | 6 mills | 12% |
| 2 | 8 mills | 10% |
| 3 | 11 mills | 5% |

El valor de mercado total del portafolio es de 25 millones, entonces:
$R_1 = 12\%$ y $w_1 =$ 6 mills/ 25 mills = 0.24 o 24%
$R_2 = 10\%$ y $w_2 =$ 8 mills/ 25 mills = 0.32 o 32%
$R_3 = 5\%$ y $w_3 =$ 11 mills/ 25 mills = 0.44 o 44%

Obsérvese que la suma de los pesos es igual a 1. Sustituyendo en la ecuación (3.1.1) se tiene que:

$$R_p = 0.24(12\%) + 0.32(10\%) + 0.44(5\%) = 8.28\%$$

*El rendimiento "esperado" de un portafolio formado de valores con riesgo*

La ecuación (3.1.1) muestra cómo calcular el rendimiento esperado de una cartera en un período específico. Pero al construir un portafolio, el inversionista también quiere saber el rendimiento esperado (o anticipado) de los valores con riesgo que lo conforman. Este rendimiento esperado del portafolio, es el promedio ponderado del rendimiento esperado de cada valor que está incluído, por el peso asignado al rendimiento esperado de cada valor, es decir, el porcentaje que le corresponde a cada activo del valor de mercado del total del portafolio. Esto es,

$$E(R_p) = w_1 E(R_1) + w_2 E(R_2) + \ldots\ldots + w_G E(R_G) \qquad (3.1.2)$$

donde $E(\ )$ significa la expectativa y $E(R_p)$ es algunas veces llamado "rendimiento *exante*".

Para calcular el rendimiento esperado de un valor con riesgo asociado, primero se especifica una distribución de probabilidad para las posibles tasas de rendimiento. Una distribución de probabilidad es una función que asocia la probabilidad de ocurrencia de un valor. Dada dicha distribución, el valor esperado de una variable aleatoria es simplemente el promedio ponderado de las posibles ocurrencias, donde el peso es la probabilidad asociada con la posible salida. Es importante mencionar que más que usar el término "valor esperado del rendimiento de un activo", se usa el de "rendimiento esperado", que matemáticamente se expresa:

$$E(R_i) = p_1 r_1 + p_2 r_2 + \ldots + p_N r_N \qquad (3.1.3)$$

donde,
$r_N$ = es la n-ésima tasa de rendimiento posible para el valor $i$
$p_N$ = la probabilidad de tener la tasa de rendimiento $n$ para el valor $i$
$N$ = el número de posibles salidas para la tasa de rendimiento

Por ejemplo, asumiendo que un individuo está contemplando una inversión que denominaremos ***X***, y considerando que en la práctica la distribución de probabilidad es basada en rendimientos históricos, se tiene que la distribución de probabilidad de la tasa de rendimiento para algunos períodos es la siguiente:

*Distribución de probabilidad para la tasa de rendimiento de la inversión X*

| **n** | **Tasa de rendimiento** | **Probabilidad de ocurrencia** |
|---|---|---|
| 1 | 15% | 0.50 |
| 2 | 10% | 0.30 |
| 3 | 5% | 0.13 |
| 4 | 0% | 0.05 |
| 5 | -5% | 0.02 |
| *Total* | | 1.00 |

Por tanto, el valor esperado de la inversión ***X*** es 11%, el cual se obtiene sustituyendo en la ecuación (3.1.3):

$$E(R_X) = 0.50(15\%) + 0.30(10\%) + 0.13(5\%) + 0.05(0\%) + 0.02(-5\%) = 11\%$$

*La varianza como medida de riesgo*

Una definición común de riesgo es "la exposición a la pérdida de algo". Con respecto a la inversión, se han usado una variedad de definiciones para describir el riesgo, pero

Markowitz cambió la idea de riesgo de la comunidad inversionista cuantificando dicho concepto. El definió riesgo en términos de una medida estadística conocida como varianza; específicamente cuantificó el riesgo como la varianza de los rendimientos esperados de los activos o valores.

La varianza de una variable aleatoria es una medida de dispersión de la posible ocurrencia de un valor esperado. En el caso del rendimiento de un activo, la varianza es una medida de dispersión de la posible ocurrencia de una tasa del rendimiento esperado. La ecuación para la varianza del rendimiento esperado del activo $i$ es la siguiente:

$$\text{var}(R_i) = p_1\left[r_1 - E(R_i)\right]^2 + p_2\left[r_2 - E(R_i)\right]^2 + \ldots + p_N\left[r_N - E(R_i)\right]^2$$

o bien,

$$\text{var}(R_i) = \sum_{n=1}^{N} p_n\left[r_n - E(R_i)\right]^2 \qquad (3.1.4)$$

Para ilustrar el cálculo de la varianza, se usará la distribución de probabilidad para la inversión $\boldsymbol{X}$, y sustituyendo en la ecuación (3.1.4):

$$\text{var}(R_X) = 0.50(15\% - 11\%)^2 + 0.30(10\% - 11\%)^2 + 0.13(5\% - 11\%)^2 + 0.05(0\% - 11\%)^2$$
$$+ 0.02(-5\% - 11\%)^2 = 24\%$$

Cabe destacar, que Markowitz argumentó que **la varianza es equivalente a la incertidumbre o riesgo de la inversión**. Por lo tanto, si un activo o valor está libre de riesgo, entonces tiene una dispersión de rendimiento esperado de cero.

*Desviación estándar*: Como la varianza es el cuadrado de las unidades, es común ver la varianza convertida en desviación estándar o raíz cuadrada de la varianza, dado que además las dos son conceptualmente equivalentes, es decir que tan grande como sea la varianza o la desviación estándar, igual de grande será el riesgo de la inversión:

$$DesvSt(R_i) = \sqrt{\text{var}(R_i)}$$

Como ejemplo, considérese nuevamente la inversión $\boldsymbol{X}$, donde la desviación estándar es:

$$DesvSt(R_X) = \sqrt{24\%} = 4.9\%$$

*Crítica a la varianza como una medida de riesgo o incertidumbre*

Hay dos críticas en el uso de la varianza como medida de riesgo. La primera, es que dado que la varianza es una medida de dispersión del rendimiento de los activos alrededor de su valor esperado, se consideraría la posibilidad de rendimientos por arriba y por debajo del rendimiento esperado. Sin embargo, los inversionistas no ven desfavorable la posibilidad de ocurrencia de un rendimiento por arriba del rendimiento esperado. Es por esto, que algunos investigadores han argumentado que esta medida de riesgo no debería considerar la posibilidad de rendimientos por arriba de los esperados.

Markowitz reconoció esta limitación y de hecho, sugirió una medida de *downside risk*, que es el riesgo de que realice una ocurrencia por debajo del rendimiento esperado llamado "semi-varianza". Esta es similar a la varianza, excepto que en el cálculo no se consideran los rendimientos que resultan por arriba del rendimiento esperado. No obstante, por los problemas computacionales con el uso de la semi-varianza y la limitación de recursos disponibles en ese momento, optó por usar la varianza en el desarrollo de la teoría de portafolios.

La segunda crítica es que la varianza es sólo una medida de cómo los rendimientos varían alrededor del rendimiento esperado. Cuando una distribución de probabilidad no es simétrica alrededor del rendimiento esperado, entonces debería usarse alguna medida estadística adicional a la varianza que por cierto, Markowitz no consideró. La varianza puede ser justificada basada en una evidencia empírica que sugiere que la distribución histórica de los rendimientos es aproximadamente simétrica.

Adicionalmente, el rendimiento esperado y la varianza son los únicos dos parámetros que los inversionistas asumen como necesarios a considerar al tomar una decisión de inversión, es por ello que la formulación de teoría de portafolios de Markowitz es conocida como un modelo de dos parámetros.

*Medición del riesgo o incertidumbre de un portafolio*

La ecuación (3.1.4) da como resultado la varianza para el rendimiento de un activo, para el caso en el que la cartera consta de dos activos el cálculo se complica un poco, ya que no depende sólo de la varianza de dos activos, sino también de qué tan cerca se mueve uno del otro. La fórmula es:

$$\text{var}(R_p) = w_i^2 \,\text{var}(R_i) + w_j^2 \,\text{var}(R_j) + 2\, w_i w_j \,\text{cov}(R_i, R_j)$$

donde,
$\text{cov}(R_i, R_j)$ = covarianza entre el rendimiento de los activos $i$ y $j$.

La covarianza es un término nuevo, significa el grado en el que los rendimientos de dos activos varían o cambian juntos y no está expresada en unidades particulares. Si la covarianza es positiva, significa que el rendimiento de los dos activos tiende a moverse o cambiar en la misma dirección, mientras que una covarianza negativa implica que los rendimientos se mueven en direcciones opuestas. La covarianza entre dos activos cualquiera $i$ y $j$ se calcula usando la siguiente fórmula:

$$\text{cov}(R_i, R_j) = \sum_{N=1}^{n} p_N \left[r_{iN} - E(R_i)\right]\left[r_{jN} - E(R_j)\right] \quad (3.1.5)$$

donde,

$r_{iN}$ = la n-ésima tasa de rendimiento posible para el valor $i$

$r_{jN}$ = la n-ésima tasa de rendimiento posible para el valor $j$

$p_N$ = la probabilidad de obtener la tasa de rendimiento $n$ para los valores $i$ y $j$

$N$ = el número de posibles ocurrencias de la tasa de rendimiento

Para ilustrar el cálculo de la covarianza entre dos activos, se usará la inversión ***X*** de los ejemplos anteriores y otra inversión hipotética denominada ***Y*** cuya información se encuentra en la siguiente tabla:

*Distribución de Probabilidad para las tasas de rendimiento de las inversiones **X** y **Y***

| **n** | **Tasa de rendimiento de la inversión *X*** | **Tasa de rendimiento de la inversión *Y*** | **Prob. de ocurrencia** |
|---|---|---|---|
| 1 | 15% | 8% | 0.50 |
| 2 | 10% | 11% | 0.30 |
| 3 | 5% | 6% | 0.13 |
| 4 | 0% | 0% | 0.05 |
| 5 | -5% | -4% | 0.02 |
| *Total* | | | 1.00 |
| Rendto esperado | 11% | 8% | |
| Varianza | 24% | 9% | |
| Desv. Estándar | 4.9% | 3% | |

Usando los datos anteriores y sustituyendo en (3.1.5), la covarianza entre la inversión ***X*** y ***Y*** es la siguiente:

$\text{cov}(R_X, R_Y) = 0.50(15\%-11\%)(8\%-8\%)+0.30(10\%-11\%)(11\%-8\%)$
$+0.13(5\%-11\%)(6\%-8\%)+0.05(0\%-11\%)(0\%-8\%)+0.02(-5\%-11\%)(-4\%-8\%)=8.9$

Es importante mencionar la relación que existe entre la *covarianza* y la *correlación*, ya que la primera es análoga a la segunda entre los rendimientos esperados para dos activos. Específicamente, la correlación entre los rendimientos para los activos $i$ y $j$ es defininda como la covarianza de dos activos, dividida por el producto de sus desviaciones estándar:

$$cor(R_i, R_j) = \frac{\text{cov}(R_i, R_j)}{DesvSt(R_i)\, DesvSt(R_j)}$$

La importancia radica en que conceptualmente ambos términos son equivalentes, ya que dividiendo la covarianza por el producto de las desviaciones estándar resulta que la correlación es un número comparable entre los diferentes activos. La correlación entre la inversión $X$ y $Y$ es:

$$cor(R_X, R_Y) = \frac{8.9}{(4.9)(3)} = 0.60$$

El coeficiente de correlación puede tener valores entre +1.0 (denotando co-movimiento perfecto en la misma dirección) y -1.0 (denotando co-movimiento perfecto en dirección opuesta).

Ahora para medir el riesgo ( o incertidumbre) de un portafolio (o cartera) con más de dos activos (o valores), podemos plantear un extensión a tres activos - $i, j$ y $k$ - de la siguiente manera:

$$\mathrm{var}(R_P) = w_i^2\,\mathrm{var}(R_i) + w_j^2\,\mathrm{var}(R_j) + w_k^2\,\mathrm{var}(R_k) + 2\,w_i w_j \,\mathrm{cov}(R_i, R_j) +$$
$$2\,w_i w_k \,\mathrm{cov}(R_i, R_k) + 2\,w_j w_k \,\mathrm{cov}(R_j, R_k)$$

En otras palabras, esta última ecuación establece que la varianza del rendimiento de un portafolio, es la suma de las varianzas ponderadas de los activos individuales más la suma de las covarianzas ponderadas de los activos. Por lo tanto, la varianza del rendimiento esperado del portafolio es la suma ponderada de las varianzas individuales de los activos que componen el portafolio más la suma ponderada del grado en el cual los activos varían juntos.

En general, para una cartera con $G$ activos, la varianza es:

$$\mathrm{var}(R_P) = \sum_{g=1}^{G} w_g^2 \;\; \mathrm{var}(R_g) + \sum_{g=1}^{G}\sum_{h=1}^{G} w_g w_h \,\mathrm{cov}(R_g, R_h) \quad \text{para } h \neq g \qquad (3.1.6)$$

*<u>Diversificación del portfolio</u>*

Frecuentemente uno escucha hablar acerca de diversificar su portafolio, con esto un inversionista quiere decir construir un portafolio de manera que se reduzca el riesgo sin sacrificar rendimiento. Ellos mismos podrían decir que la diversificación puede darse incluyendo activos de todas clases, pero ¿cuánto debe invertirse en cada tipo de activo? y, ¿en qué tipo de activos?. Una estrategia de diversificación simple de una cartera, consiste en que un inversionista tome diversos tipos de valores y espere ver que la varianza del rendimiento esperado del portafolio sea pequeña.

La estrategia de diversificación de Markowitz, concierne de manera primaria con el grado de covarianza entre los rendimientos de los activos en una cartera. En realidad la clave de la contribución de diversificación de Markowitz, es la formulación del riesgo de un activo en términos de los activos que componen el portafolio. El busca combinar los activos de un portafolio con rendimientos que con la menor correlación positiva, incluso negativa, en un esfuerzo por tener el mínimo riesgo (varianza) sin sacrificar rendimiento. Es decir, mantener el rendimiento, mientras se disminuye el riesgo a través de un análisis de covarianza entre los rendimientos de los activos.

El principio de la diversificación de carteras de Markowitz, establece que así como la correlación (covarianza) entre los rendimientos de los activos combinados en un portafolio decrece, también lo hace la varianza (y desde luego, la desviación estándar) del rendimiento para ese portafolio. Lo bueno es que los inversionistas pueden mantener el rendimiento esperado de un portafolio con un menor riesgo, combinando activos con menores (preferiblemente negativas) correlaciones. Sin embargo, lo malo es que muy pocos activos tienen una pequeña (o negativa) correlación con los otros activos. El problema entonces se convierte en realizar la búsqueda entre un gran número de activos para encontrar el portafolio que minimice el riesgo a un nivel dado de rendimiento esperado, o equivalentemente, el mayor rendimiento esperado, dado cierto nivel de riesgo.

*Construcción de los portafolios eficientes de Markowitz*

La diversificación es el medio que sugirió Markowitz para la construcción de carteras con el máximo rendimiento esperado dado un cierto nivel de riesgo. Para construirlos, la teoría hace algunas suposiciones básicas acerca del comportamiento de los inversionistas para seleccionar los activos:

1. Asume que sólo dos parámetros afectan la decisión de los inversionistas: el rendimiento esperado y la varianza.
2. Supone que todos tienen aversión al riesgo.
3. Afirma que siempre se busca alcanzar el mayor rendimiento esperado dado cierto nivel de riesgo.
4. Piensa que todos los inversionistas tienen la misma expectativa de rendimiento esperado, varianza y covarianzas para todos los activos con riesgo.
5. Finalmente, asume que todos tienen en común un período en el horizonte de inversión.

La técnica de construcción de carteras eficientes de Markowitz de una amplia gama de activos, requiere de un número masivo de cálculos, ya que en un portafolio con $G$ activos, hay $\frac{(G^2 - G)}{2}$ covarianzas que calcular. Sin embargo, es posible ilustrar la idea general de la construcción de portafolios eficientes de Markowitz refiriéndose a un portafolio que consiste de sólo dos activos $C$ y $D$, donde:

| **Activo** | **Rendimiento esperado, E(R)** | **DesvSt (R)** |
|---|---|---|
| $C$ | 10% | 30% |
| $D$ | 25% | 60% |

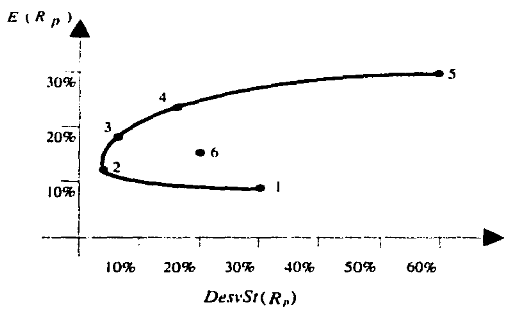
Además se supone que la correlación es: $cor(R_C, R_D) = -0.5$. El rendimiento esperado y la desviación estándar del portafolio son calculadas para cinco diferentes proporciones de $C$ y $D$ como se observa en la siguiente tabla:

| Portafolio | Proporción de C ($w_C$) | Proporción de D ($w_D$) | E( $R_p$ ) | DesvSt( $R_p$ ) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 100% | 0% | 10.0% | 30.0% |
| 2 | 75% | 25% | 13.8% | 3.9% |
| 3 | 50% | 50% | 17.5% | 6.8% |
| 4 | 25% | 75% | 21.2% | 17.4% |
| 5 | 0% | 100% | 25.0% | 60.0% |

Dadas estas combinaciones posibles de $C$ y $D$, es posible introducir la noción de un portafolio factible y un portafolio eficiente de Markowitz.

*Portafolios eficientes y factibles*

Un portafolio factible puede ser construido por un inversionista dada la variedad de activos o valores disponibles. La colección de todos los portafolios factibles, es llamada conjunto de portafolios factibles y es graficado como una curva que representa las combinaciones de riesgo y rendimiento esperado que se logran construyendo portafolios de las combinaciones disponibles de dos activos. En el ejemplo anterior con dos activos, el conjunto de portafolios factibles es graficado como una curva que representa las combinaciones de riesgo y rendimiento esperado, es definido por las combinaciones de $C$ y $D$ producidas de E( $R_p$ ) y DesvSt( $R_p$ ) dadas en la tabla anterior.



Un portafolio eficiente de Markowitz, es el que resulta con el mayor rendimiento esperado de todos los portafolios factibles con el mismo riesgo, también se les dice portafolios con media-varianza eficientes. Por tanto, para cada nivel de riesgo hay un portafolio eficiente de Markowitz y la colección de todos ellos es llamado conjunto de portafolios eficientes de Markowitz. Esto se puede observar en la gráfica anterior donde las combinaciones de *C* y *D* ofrecen el mayor rendimiento esperado dado un cierto nivel de riesgo, además nótese que el portafolio 1 no se incluye en el conjunto eficiente, dado que sólo hay tres (el 2, 3 y 4) que tienen el mayor rendimiento esperado con el menor nivel de riesgo. Portafolios que se ubicarán a la derecha del 2, 3, 4 y 5, no se incluirían en el conjunto eficiente, ya que seguramente existen otros que ofrecen un rendimiento esperado mayor con el mismo nivel de riesgo, o alternativamente un menor nivel de riesgo con el mismo rendimiento esperado. Para ilustrarlo, considérese en la misma gráfica el portafolio 6, donde el 4 y el 6 tienen el mismo nivel de riesgo, pero el 4 tiene mayor rendimiento esperado, o bien, los portafolios 2 y 6 tienen el mismo rendimiento esperado, pero el número 2 tiene menor nivel de riesgo, por lo tanto los portafolios 2 y 4 dominan al portafolio 6.

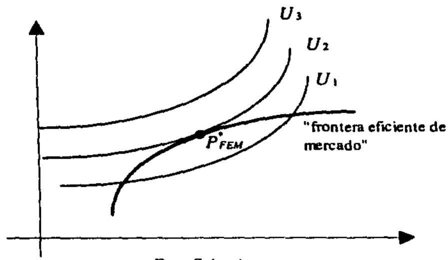
El conjunto de portafolios eficientes, es llamado también frontera eficiente de Markowitz, porque gráficamente todos los portafolios eficientes se ubican en el límite del conjunto de portafolios factibles que tienen el máximo rendimiento para un nivel de riesgo dado. Cualquier portafolio que se encuentre sobre la frontera eficiente no puede ser alcanzado, al igual que cualquiera que se encuentre por debajo del mismo ya que serán dominados por los portafolios que se encuentran en la frontera eficiente.

*Selección de un portafolio en el conjunto eficiente de Markowitz*

Después de haber construido el conjunto de portafolios eficientes, el siguiente paso es seleccionar el óptimo.

Nótese en la gráfica anterior, que moviéndose de izquierda a derecha en la frontera eficiente el rendimiento esperado incrementa, pero también el nivel de riesgo. Por tanto, la cuestión es seleccionar cuál es el mejor portafolio de la frontera eficiente, es decir, el portafolio óptimo.

Intuitivamente, el portafolio óptimo dependería de las preferencias del inversionista entre riesgo y rendimiento, misma que como ya se comentó, puede expresarse en términos de función de utilidad. En la siguiente gráfica, hay tres curvas de indiferencia y la frontera eficiente; la curva de indiferencia indica las combinaciones de riesgo y rendimiento esperado que ofrecen el mismo nivel de utilidad. Entonces, de la gráfica es posible determinar el portafolio óptimo para el inversionista con las curvas de indiferencia mostradas. Recuérdese que un inversionista quiere tener la mayor curva de indiferencia alcanzable dada la frontera eficiente de Markowitz, por tanto, dado ese requerimiento el portafolio óptimo es representado por el punto donde la curva de indiferencia es tangente a la frontera eficiente.




Supóngase que $P^*_{FEM}$ corresponde al portafolio 4 del ejemplo anterior, entonces de la tabla previa se puede ver que este portafolio es una combinación de 25% del valor $C$ y 75% del valor $D$, con $E(R_p)$= 21.2% y $DesvSt(R_p)$= 17.4%. En consecuencia, las preferencias de riesgo y rendimiento de un inversionista, están determinadas por la forma de las curvas de indiferencia y sus expectativas de rendimiento y covarianza de los activos $C$ y $D$, donde el portafolio 4 maximiza la utilidad. Si este inversionista tuviera una preferencia diferente de riesgo y rendimiento, entonces el portafolio óptimo sería diferente.

En este punto, la cuestión es cómo estimar la función de utilidad del inversionista para determinar las curvas de indiferencia, desafortunadamente no existe una guía a seguir para construirlas, pero la inhabilidad para medir las funciones de utilidad no significa que la teoría sea descartada, lo que quiere decir es que una vez que un inversionista construye la frontera eficiente de Markowitz, puede subjetivamente determinar cuál es el portafolio eficiente apropiado dada su tolerancia al riesgo.

**Maximización del rendimiento medio geométrico**

Una alternativa para el análisis de la media y la varianza es simplemente seleccionar aquella cartera que tiene el rendimiento medio geométrico esperado más alto. Muchos investigadores han reforzado este criterio; esto es, ellos defendieron su uso sin tomar en cuenta la forma de la función de utilidad o las características de la función de probabilidad del rendimiento de los activos.

Considérese algún inversionista que ahorra para algún propósito en el futuro, por ejemplo, retirarse en 20 años. Un criterio de cartera razonable para tal inversionista, sería seleccionar aquella cartera que tiene el valor esperado más alto y ésta es la cartera que tiene el rendimiento geométrico más alto.

Las siguientes proposiciones argumentan que la media geométrica máxima:

- tiene la más alta probabilidad de alcanzar o exceder cualquier nivel óptimo en el tiempo más corto posible y,

- tiene la probabilidad más alta de exceder cualquier nivel de beneficios sobre cualquier período de tiempo dado.

A continuación se examina la definición de la media geométrica y algunas propiedades del criterio medio geométrico que maximiza las carteras.

Si $\mu_{ij}$ es el i-ésimo rendimiento en la j-ésima cartera y cada salida es igualmente probable, entonces el rendimiento medio geométrico de la cartera ($\overline{\mu}_{Gj}$) es:

$$\overline{\mu}_{Gj} = (1+\mu_{1j})^{1/N}(1+\mu_{2j})^{1/N}\ldots(1+\mu_{Nj})^{1/N}-1.0$$

Si la probabilidad de cada observación es diferente y $P_{ij}$ es la probabilidad de la i-ésima salida para la cartera j, entonces el rendimiento medio geométrico es:

$$\overline{\mu}_{Gj} = (1+\mu_{1j})^{P_{1j}}(1+\mu_{2j})^{P_{2j}}\ldots(1+\mu_{Nj})^{P_{Nj}}-1.0$$

la expresión anterior se puede escribir como:

$$\overline{\mu}_{Gj} = \prod_{i=1}^{n}(1+\mu_{ij})^{P_{ij}} - 1.0 \qquad (3.2.1)$$

La cartera que tiene la media geométrica máxima es generalmente una cartera diversificada. Por ejemplo, la siguiente tabla muestra tres posibles inversiones registradas como activos A, B y C. Cada una de éstas inversiones tiene dos salidas posibles, cada una igualmente probable. La cartera consiste de proporciones iguales de cada uno de los tres activos:

**Activos:**

| Salida | A | B | C | Cartera |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.80 | -0.10 | -0.20 | 0.16 |
| 2 | -0.30 | 0.30 | 0.60 | 0.20 |
| media geométrica | 0.12 | 0.08 | 0.13 | 0.18 |

Como puede verse en la tabla, la cartera tiene el rendimiento medio geométrico más alto que cualquiera de los activos individualmente. Este resultado se puede explicar fácilmente, pues el rendimiento medio geométrico penaliza las observaciones extremas. De hecho, una estrategia con cualquier probabilidad de bancarrota nunca sería seleccionada porque tendría una media geométrica de cero, por tanto la estrategia de media geométrica lleva a una estrategia diversificada.

Mientras que la cartera que maximiza la media geométrica es probable a ser altamente diversificable, la varianza y la media no serán eficientes (excepto en circunstancias especiales). Además, las carteras que son eficientes en el análisis de la varianza y la media pueden tener un bajo rendimiento medio geométrico. Sin embargo, hay dos casos donde el análisis de la varianza y la media es significativo para localizar la cartera con el rendimiento geométrico más alto.

Primero, maximizar el rendimiento medio geométrico es equivalente a maximizar el valor esperado de una función de utilidad logarítmica. Esto es, la función de utilidad puede escribirse como:

$$\max\ E(\ln W_1)$$

donde $W_1$ es el último período del beneficio, una variable aleatoria. Puesto que las funciones de utilidad no cambian al aplicar una transformación lineal, tenemos que si $W_0$ mantiene los fondos que el inversionista puede invertir, entonces se puede escribir el problema como:

$$\begin{aligned}\max\ E(\ln\ W_1 - \ln\ W_0) &= \max\ E(\ln\ W_1\ /\ W_0)\\ &= \max\ E(\ln(1+\mu_i))\\ &= \max \sum_i P_i \ln(1+\mu_i)\\ &= \max \sum_i \ln(1+\mu_i)^{P_i}\end{aligned}$$

Dado que la suma de los logaritmos del conjunto de variables es la misma que el logaritmo de los productos, este problema puede escribirse como:

$$\max \ln \prod (1+\mu_i)^{P_i}$$

Pero esto es justamente el logaritmo de 1 más el rendimiento medio geométrico. Como el logaritmo de un conjunto de números naturales mantiene el orden del rango, entonces la cartera con el rendimiento medio geométrico más alto podría ser la cartera preferida si el inversionista tiene una función de utilidad logarítmica.

Si los rendimientos son normalmente distribuidos, entonces el análisis de cartera de la varianza y la media de un portafolio es apropiado para los inversionistas interesados en maximizar la utilidad esperada, entonces los inversionistas con funciones de utilidad logarítmica, son aquellos interesados en maximizar el rendimiento medio geométrico utilizando el análisis de la varianza y la media si los rendimientos son normalmente distribuidos.

Se mencionó que la cartera que maximiza el rendimiento medio geométrico es aquella que tiene la varianza y media eficientes, si los rendimientos son distribuidos normal y logarítmicamente. Con excepción de estos casos, la cartera con el máximo rendimiento medio geométrico no necesita ser la de varianza y la media eficientes.

**Criterios *safety firts***

Una segunda alternativa para el teorema de utilidad esperada es un grupo de criterios llamados modelos *safety firts*. El origen de estos modelos provienen de la creencia de que el tomador de decisiones es incapaz o está indispuesto a ir a través de las matemáticas del teorema de utilidad esperada, pero utilizará un modelo de decisión más simple. El nombre *safety first* viene del énfasis que cada criterio hace para limitar el riesgo y que se centra en malas salidas. Tres diferentes criterios han sido planteados en forma consistente.

***Criterio de Roy***

El primero desarrollado por Roy, establece que la mejor cartera es aquella que tiene la probabilidad más pequeña de producir un rendimiento bajo algún nivel específico. Si $\mu_p$ es el rendimiento en la cartera y $\mu_L$ es el nivel bajo el cual el inversionista no desea que los rendimientos caigan, el criterio de Roy es:

$$\min \text{Prob}(\mu_p<\mu_L)$$

Si los rendimientos son normalmente distribuidos, entonces la cartera óptima podría ser una donde $\mu_L$ fuera el máximo número de desviaciones estándar lejos de la media (suponiendo que el rendimiento medio está arriba de $\mu_L$).

Por ejemplo, en las tres carteras mostradas en la siguiente tabla; se supone que el 5% es el rendimiento mínimo que el inversionista desea. El inversionista desea minimizar la obtención de un rendimiento bajo 5%. Si el inversionista selecciona la cartera A, entonces 5% es 1 (una) desviación estándar bajo la media. La oportunidad de obtener un rendimiento debajo del 5% es la probabilidad de obtener un rendimiento más que "una" desviación estándar bajo la media.

| Cartera: | A | B | C |
|---|---|---|---|
| Rendimiento medio | 10 | 14 | 17 |
| Desviación estándar | 5 | 4 | 8 |
| Diferencia de 5% | $-1\sigma$ | $-2.25\sigma$ | $-1.5\sigma$ |

Si el inversionista selecciona B, entonces 5% es 2 1/4 de la desviación estándar bajo la media. La probabilidad de obtener un rendimiento por debajo del 5% es la probabilidad de obtener un rendimiento más de 2 1/4 la desviación estándar bajo la media. Si selecciona la inversión C, la probabilidad de obtener un rendimiento abajo del 5% es la probabilidad de obtener un rendimiento de más de 1.5 la desviación estándar bajo la media. Ya que la suma de obtener un rendimiento más de 2 1/4 las desviaciones estándar bajo la media son menor que la suma de obtener un rendimiento más de 1.5 ó 1 desviación estándar menores que la media; la inversión B es preferida.

Para determinar cuántas desviaciones estándar $\mu_L$ se encuentran bajo la media, se calcula primero $\mu_L$ menos el rendimiento medio dividido por la desviación estándar. Para satisfacer el criterio de Roy, si los rendimientos son normalmente distribuidos, tenemos

minimizar $(\mu_L - \overline{\mu_p})/\sigma_p$

Esto es equivalente a maximizar menos esta razón,

maximizar $(\bar{\mu}_p - \mu_L)/\sigma_p$

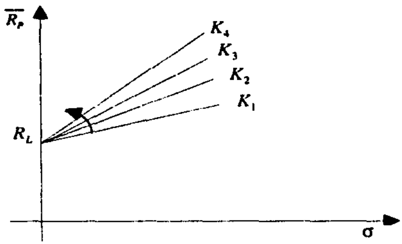
Todas las carteras que son igualmente deseables bajo el criterio de Roy podrían tener el mismo valor para esta razón. Esto es,

$[(\bar{\mu}_p - \mu_L)/\sigma_p] = k$

Además, si $k$ es muy grande, la cartera podría ser más deseable bajo el criterio de Roy. Rearreglando la expresión queda:

$\bar{\mu}_p = \mu_L + k\sigma_p$

Esta es la ecuación de una línea recta con $\mu_L$ como intersección y una pendiente $k$. Esto es, todos los puntos son igualmente deseables (es decir, $k$ es constante), graficando en líneas rectas, y la línea preferida es aquella con mayor pendiente como se muestra en la siguiente gráfica donde las $k$'s son ordenadas tales que $k_4 > k_3 > k_2 > k_1$.




El criterio de Roy con rendimientos normalmente distribuidos produce un problema de decisión de la misma forma que un problema de cartera con menor riesgo.

La cartera deseada es la cartera factible que está en la línea mayor en la dirección contraria a las manecillas del reloj. Note que la cartera que maximiza el criterio de Roy termina a lo largo de la frontera eficiente en el espacio de desviaciones estándar-media.

Aunque el análisis fue realizado suponiendo rendimientos distribuidos normalmente, un resultado similar se obtiene para cualquier distribución que tiene primeros y segundos momentos. El mismo problema de maximización se resuelve al utilizar la desigualdad de Tchebyshev, siendo una de las maneras de determinar la probabilidad de alguna salida. Esta permite determinar la probabilidad máxima de obtener una salida menor que algún valor. Esta es en general aplicable a cualquier distribución. La desigualdad de Tchebyshev es:

$$\Pr ob\left(\left|\frac{(\mu - \overline{\mu}_p)}{\sigma_p}\right| > k\right) \geq \frac{1}{k^2} \qquad (3.3.1)$$

donde

| | |
|---|---|
| $\mu$ | es la salida |
| $\overline{\mu}_p$ | es el rendimiento medio |
| $\sigma_p$ | es la desviación estándar |
| $k$ | es una constante |

Ya que estamos interesados en el caso donde el límite inferior es menor que $\overline{\mu}_p$, los rendimientos que nos interesan son aquellos que son menores que $\overline{\mu}_p$. Por lo tanto, el término absoluto tiene signo negativo, y podemos escribir (3.3.1) como:

$$\Pr ob\left(\left|\frac{(\mu - \overline{\mu}_p)}{\sigma_p}\right| < -k\right) \leq \frac{1}{k^2} \qquad (3.3.2)$$

Podemos expresar el límite inferior en el criterio de Roy como el número de desviaciones estándar de que $k$ está bajo la media, o,

$$k = (\mu_p - \mu_L)/\sigma_p \qquad (3.3.3)$$

Como la desigualdad de Tchebyshev posee cualquier valor de $k$, podemos sustituir la expresión para $k$ de la ecuación (3.3.3) en el lado izquierdo de la ecuación (3.3.2), y se obtiene:

$$P(\mu < \mu_L) \leq 1/k^2$$

que es precisamente el criterio de Roy, entonces queremos maximizar $k$, ó maximizar la ecuación (3.3.3); pero esto es precisamente lo que se obtuvo en el caso de la distribución normal.

***Criterio de Kataoka***

El segundo criterio de *safety firts* fue desarrollado por Kataoka que sugirió el siguiente criterio: maximizar el límite inferior sujeto a la restricción de que la probabilidad de un rendimiento menor que, o igual a el límite inferior, no es mayor que algún valor predeterminado. Por ejemplo, $\mu_L$ sujeto a la restricción de que la probabilidad de un rendimiento bajo $\mu_L$ es menor o igual a 5%. Si $\alpha$ es la probabilidad (5%), entonces tenemos:

maximizar $\mu_L$
sujeto a $P(\mu_p < \mu_L) \leq \alpha$

Ejemplo:

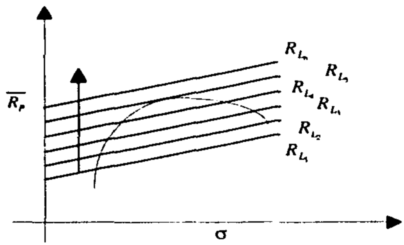
Sea $\alpha = 0.05$. De la tabla de distribución normal, se tiene que a lo largo del límite inferior es al menos 1.65 las desviaciones estándar bajo la media. Con $\alpha = 0.05$ la restricción sería:

$$\mu_L \leq \overline{\mu}_p - 1.65\sigma_p$$

ya que se quiere hacer $\mu_L$ tan grande como sea posible, esta desigualdad puede escribirse como una igualdad. Entonces, para $\mu_L$ constante se obtiene:

$$\overline{\mu}_p = \mu_L + 1.65\sigma_p$$

Esta es la ecuación de una línea recta. La siguiente gráfica muestra los diferentes valores de $\mu_L$, donde al ir cambiando éstos las líneas van cambiando en forma paralela. El objetivo es maximizar $\mu_L$ o moverla tan lejos como sea posible (en la dirección de la flecha).




***Criterio de Telser***

El último criterio de "Safety First" fue dado por Telser. Él sugirió que para un inversionista un criterio razonable sería el que maximiza el rendimiento esperado, sujeto a la restricción de que la probabilidad de un rendimiento menor que, o igual a algún límite predeterminado no fuera mayor que algún número dado. Así, se tiene:

maximizar $\overline{\mu}_p$

sujeto a: $P(\mu_p \leq \mu_L) \leq \alpha$ ·

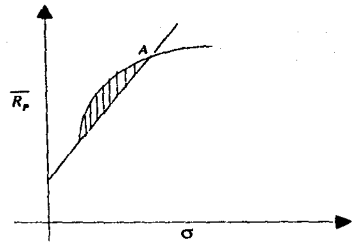
Otra vez, es conveniente rearreglar la restricción. En la discusión del criterio de Kataoka, se mostró que si los rendimientos son normalmente distribuidos, esta restricción será:

$\mu_L \leq \overline{\mu}_p - (\text{constante})\sigma$

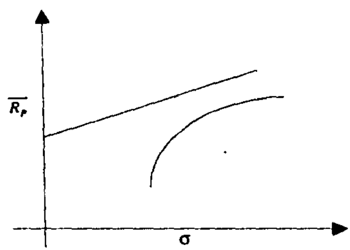
Rearreglando se obtiene:

$\overline{\mu}_p \geq \mu_L + (\text{constante})\sigma$

En la siguiente gráfica el conjunto factible es acotado por la línea recta y la frontera eficiente (el área sombreada).




En este caso el óptimo es el punto A. Si la cartera con los rendimientos más altos terminan arriba de la línea, estos serán seleccionados. Si no es así, la línea de la restricción excluye parte del conjunto eficiente. En este caso, la cartera factible con el más alto rendimiento medio terminará en la intersección más alta de la frontera eficiente y de la restricción. En otro caso, el punto seleccionado estará en un conjunto eficiente. Es posible que no haya puntos factibles que intersecte la restricción. Por ejemplo, en la siguiente gráfica, la restricción termina arriba del conjunto eficiente. En este caso, no hay cartera factible por arriba de la restricción y el criterio falla para seleccionar cualquier cartera.




**Dominación estocástica**

Un tercer conjunto de alternativas para el análisis de la varianza y la media es la dominación estocástica. La forma más general de dominación estocástica no hace suposiciones sobre la forma de la distribución de probabilidad de rendimientos. Además, cuando se emplea dominación estocástica no se tienen suposiciones para especificar las formas de las funciones de utilidad del inversionista. Estas características son consistentes con todas las familias de las funciones de utilidad. Hay tres suposiciones fuertes sobre el comportamiento del inversionista que son empleadas en dominación estocástica; éstas son el primer, segundo y tercer orden de dominación estocástica.

La dominación estocástica de primer orden supone que un inversionista prefiere máas a menos. La de segundo orden supone que además de que los inversionistas prefieren más a menos también tienen aversión al riesgo. Finalmente, la dominación estocástica de tercer orden agrega a las dos suposiciones anteriores, que "los inversionistas tienen una disminución absoluta a la aversión al riesgo".

Ejemplo:

Considere los datos de la siguiente tabla:

| Condiciones de mercado | Salidas: A | B |
|---|---|---|
| Muy bueno | 11 | 10 |
| Bueno | 10 | 9 |
| Medio | 9 | 8 |
| Pobre | 8 | 7 |
| Muy pobre | 7 | 6 |

Si un inversionista prefiere más a menos, entonces invertir en valores de A es preferible a invertir en valores de B, porque no importa cuál sea la salida, A siempre tendrá un rendimiento mayor que B. Por ejemplo, si las condiciones del mercado son "buenas", entonces A dará un rendimiento de 10% y B arrojará uno de 9%; entonces la dominación estocástica de primer orden mostrará que A domina a B. Ahora considere las elecciones mostradas en la siguiente tabla:

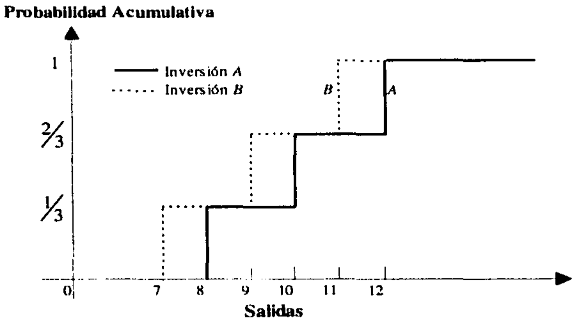
| Inversión A | | Inversión B | |
|---|---|---|---|
| Salida | Probabilidad | Salida | Probabilidad |
| 12 | 1/3 | 11 | 1/3 |
| 10 | 1/3 | 9 | 1/3 |
| 8 | 1/3 | 7 | 1/3 |

La inversión A tiene las mejores salidas. Sin embargo, esto puede no ser cierto cuando el inversionista desea invertir en B. Por ejemplo, se tiene un rendimiento del 11% si se invierte en B, y 10% u 8% si se invierte en A, no obstante el inversionista hace una mala elección al preferir B.

Si modificamos este ejemplo (ver la siguiente tabla), tenemos que la probabilidad de obtener menor rendimiento (es decir, malas salidas), son siempre tan altas con B como con A puesto que se supuso que el inversionista prefiere más a menos. Ahora supóngase que A es preferido a B, decisión que no se hará porque se vaya a obtener el mayor rendimiento, sino porque la ventaja de obtener cierto rendimiento, es tan alta con B como con A.

| Rendimiento | A | B |
|---|---|---|
| 7 | 0 | 1/3 |
| 8 | 1/3 | 1/3 |
| 9 | 1/3 | 2/3 |
| 10 | 2/3 | 2/3 |
| 11 | 2/3 | 1 |
| 12 | 1 | 1 |

Esta última tabla muestra la probabilidad acumulada de cualquier rendimiento particular. La probabilidad acumulativa, es la probabilidad de obtener un rendimiento dado o menos. El ejemplo de ésta tabla se presenta en la siguiente gráfica:




Note que B coincide con A, o se ubica antes que A para todos los niveles de rendimiento. Esto implica que la ventaja de obtener cualquier rendimiento, incluso menor, es tan alta con B como con A, o más alta. Estos ejemplos ilustran las ideas de dominación estocástica de primer orden.

El teorema formal es: Si los inversionistas prefieren más a menos, y si la probabilidad acumulativa de A nunca es más grande que la probabilidad acumulativa de B y en algunas ocasiones es menor, entonces A es preferido a B.

La probabilidad acumulativa de A nunca es mayor que la probabilidad acumulativa de B; en la gráfica anterior se puede observar que las dos curvas no se cruzan y que A no termina arriba de B. Si las dos curvas se cruzaran, no sería posible hacer una elección entre A y B, basada en la dominación estocástica de primer orden. Para hacer una elección, se debería hacer una suposición más fuerte sobre las características de la función de utilidad. Para ilustrar esto, considérese la siguiente tabla que muestra dos inversiones,

Tabla 3.4.1.

| A | | B | |
|---|---|---|---|
| **Salida** | **Probabilidad** | **Salida** | **Probabilidad** |
| 6 | 1/4 | 5 | 1/4 |
| 8 | 1/4 | 9 | 1/4 |
| 10 | 1/4 | 10 | 1/4 |
| 12 | 1/4 | 12 | 1/4 |

La probabilidad acumulativa para estas dos inversiones se muestra en la siguiente tabla:

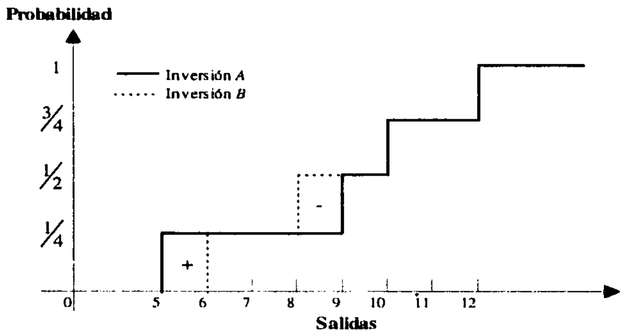
Tabla 3.4.2.

| | **Probabilidad acumulativa** | | **Suma de probabilidad acumulativa** | | **Suma de probabilidades acumulativas** | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Rendimiento** | **A** | **B** | **A** | **B** | **A** | **B** |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 1/4 | 0 | 1/4 | 0 | 1/4 |
| 6 | 1/4 | 1/4 | 1/4 | 1/2 | 1/4 | 3/4 |
| 7 | 1/4 | 1/4 | 1/2 | 3/4 | 3/4 | 1 1/2 |
| 8 | 1/2 | 1/4 | 1 | 1 | 1 3/4 | 2 1/2 |
| 9 | 1/2 | 1/2 | 1/2 | 1 1/2 | 3 1/4 | 4 |
| 10 | 3/4 | 3/4 | 2 1/4 | 2 1/4 | 3 1/2 | 6 1/4 |
| 11 | 3/4 | 3/4 | 3 | 3 | 8 1/2 | 9 1/4 |
| 12 | 1 | 1 | 4 | 4 | 12 1/2 | 13 1/4 |

Para un rendimiento de 5%, B tiene una mayor probabilidad de obtener un rendimiento pobre que A, mientras que para un 8%, A tiene una mayor probabilidad de tener un rendimiento más pobre. Esto es, no se puede seleccionar entre A y B usando dominación estocástica de primer orden.

Para ser capaces de seleccionar entre dos inversiones, se debe decidir si la probabilidad más alta de rendimientos bajos en el rango entre 5% y 6% para B, es más importante que la probabilidad más alta de un bajo rendimiento de A en el rango de un 8% a 9%. Si suponemos una aversión al riesgo, además de preferir más a menos, se puede resolver esta situación. Nosotros preferimos obtener 9% a un 8%. Sin embargo, el incremento de 1% en rendimiento de 8% a 9% tiene menor valuación que el incremento en 1% de 5% a 6%. De la tabla 3.4.1, se puede ver que A difiere de B en los dos rendimientos más bajos. Si resultan en la peor posible, el inversionista obtiene 6% de A y sólo 5% de B obteniendo en su salida un 1% extra de A. El costo de seleccionar A en lugar de B, si la segunda peor opción ocurre, es que el inversionista obtiene 8% de A y 9% de B, perdiendo un 1% extra. Si el inversionista tiene aversión al riesgo, entonces él podría aceptar perder un 1% en rendimiento, en un nivel superior de rendimiento, en orden a obtener un extra de 1% para un nivel de rendimiento menor. Esta es la idea de dominación estocástica de segundo orden, donde ésta implica que A domina a B.

El mismo resultado puede verse examinando la distribución de probabilidad acumulativa. La siguiente es una gráfica de la tabla 3.4.1.




El área entre 5% y 6% es idéntica que el área entre 8% y 9%. Ya que la aversión al riesgo ha sido supuesta, es preferible tener una probabilidad baja de un rendimiento bajo entre el rango de 5 a 6% que en el rango de 8 a 9%. Esto es, A prefiere a B. Las áreas han sido designadas por + y -. Si para todos los rendimientos, el área + no fuera menor en rendimiento que el área -, y para algunos fuera mayor, entonces A dominaría a B por la dominación estocástica de segundo orden.

Estas ideas pueden formalizarse en el siguiente teorema:

Si,
1. el inversionista prefiere más a menos, y
2. el inversionista es averso al riesgo, y
3. la suma de las probabilidades acumulativas para todos los rendimientos no son mayores con A que con B y algunas veces menos, entonces A domina a B con la dominación estocástica de segundo orden.

La aplicación de éste teorema se muestra en la tabla 3.4.2.

Se ha visto que A domina a B examinando la distribución de probabilidad acumulativa. Se puede ver que es más fácil aplicar el punto 3 anterior para la suma de la distribución de probabilidad acumulativa que se muestra en las columnas 4 y 5 de la tabla 3.4.2. Aplicando el punto 3, se muestra claramente que A domina a B.

La dominación estocástica de tercer orden exhibe disminución absoluta a la aversión al riesgo. Una de las propiedades de una función que "exhibe" lo anterior, es la de poseer la tercera derivada positiva. El teorema para la dominación estocástica utiliza este hecho, esto es:

A domina a B usando la dominación estocástica de tercer orden, si:
1. El inversionista prefiere más a menos,
2. el inversionista tiene aversión al riesgo,
3. la tercera derivada de la función de utilidad del inversionista es positiva,
4. la media de A es mayor que la media de B, y
5. la suma de las sumas de la distribución de probabilidad acumulativa para todos los rendimientos nunca es más con A que B y algunas veces menos.

Una función de utilidad muestra una disminución absoluta de aversión al riesgo, si $A'(w)<0$ donde $U'(w)$ y $U''(w)$ son las primeras y segundas derivadas de la función de utilidad respectivamente, entonces:

$$A(w) = -(U''(w) / U'(w))$$
$$A'(w) = [U''(w)/U'(w)]^2 - [U''(w)/U'(w)]$$

El primer término es positivo, puesto que su razón es de términos cuadrados. $U'(w)>0$ por hipótesis. Por lo tanto, para que el segundo término sea negativo, es necesario que $U'''>0$. Note que $U''(w)$ es necesaria pero no suficiente para que se cumpla la condición $A'(w)<0$.

Las columnas 4 y 5 de la tabla 3.4.2 son las sumas de la distribución acumulativa y las columnas 6 y 7, son las sumas de la suma de la distribución acumulativa, como puede verse A domina a B usando la dominación estocástica de tercer orden. Esto es de esperarse ya que A domina a B bajo la dominación estocástica de segundo orden, sólo que la de tercer orden es más restrictiva.

Muchos de los resultados en el análisis de cartera pueden obtenerse del uso de dominación estocástica, que son bien conocidos y es más fácil de obtener en otros sentidos.

**Asimetría y análisis de cartera**

Para comentar otra idea existente en relación al tema, en este modelo se proponen para la selección de cartera, los primeros tres momentos de las distribuciones de rendimientos que son la media, la varianza y más que estos dos, el sesgo que se utiliza para medir la asimetría de una distribución (la distribución normal tiene un sesgo de cero).

Si los tres momentos son importantes para el inversionista, entonces el problema de cartera se representa mejor en un espacio tridimensional con la media en un eje, la varianza en otro y el sesgo en el último. El conjunto eficiente sería el conjunto factible con el rendimiento medio máximo, la varianza mínima y el mayor sesgo.

El sesgo de una cartera de activos no es un simple promedio ponderado del sesgo de los activos que componen la cartera. Como la varianza, depende de cómo se mueven los activos; esto significa que para medir el sesgo de una cartera se necesita un buen número de estimaciones de cómo se mueven los activos. Por tanto, para el análisis de un portafolio en los tres momentos debería presentarse el desarrollo de un conjunto de técnicas analíticas para estimar y resolver problemas que involucren mediciones de sesgo, lo cual no es objetivo de este trabajo.

# 4

## Sistema Financiero Mexicano

Con el propósito de considerar algunos instrumentos para generar aplicaciones de este trabajo, se presenta un esquema muy general del Sistema Financiero Mexicano, enfocándose en mayor medida al Mercado de Dinero y algunos instrumentos que tienen cabida en él.

Hoy en día, el sistema financiero mexicano se define como el conjunto de instituciones y organismos que generan, administran, orientan y dirigen el ahorro y la inversión dentro de la gran unidad político económica que es nuestro país[1].

El sistema financiero mexicano está constituido por tres subsistemas: el bancario, el bursátil y las instituciones auxiliares de crédito, los cuales dinamizan y encauzan el flujo de recursos monetarios regulados por un régimen jurídico y se interrelacionan dentro del contexto económico nacional e internacional.

Un punto de interés dentro del sistema financiero mexicano es el mercado bursátil; éste es el conjunto de organizaciones tanto públicas como privadas a través de las cuales se regulan y llevan a cabo actividades crediticias mediante títulos valor que se negocían en la Bolsa Mexicana de Valores de acuerdo con las disposiciones de la Ley del Mercado de Valores, y está formado por: la Comisión Nacional de Valores, el organismo regulador que es la Secretaría de Hacienda y Crédito Público; la Bolsa Mexicana de Valores; las casas de bolsa; el Instituto Nacional del Depósito de Valores (INDEVAL) y el Instituto Mexicano del Mercado de Capitales.

## Sectores y niveles dentro del mercado bursátil mexicano

Desde un punto de vista general el mercado bursátil mexicano, está organizado en dos niveles y dos sectores.

El primer nivel o *mercado primario*, está constituido por la intermediación entre las empresas emisoras y las casas de bolsa; su función es la de inyectar recursos frescos a las empresas (al capital de la empresa en el caso de acciones y como pasivo en el caso de obligaciones o papel comercial). En otras palabras, es aquél en el cual los fondos llegan a los emisores de valores primarios a través de las colocaciones o ventas de títulos primarios que dichos emisores realizan.

El segundo nivel o *mercado secundario*, está constituido por la intermediación entre las casas de bolsa y los inversionistas, ya sean estos personas físicas o morales; su función es la de poner en contacto a demandantes y oferentes de valores además de otorgarle

---

[1] MARMOLEJO GONZALEZ, M. "Inversiones. Práctica, Metodología, Estrategia y Filosofía". Instituto Mexicano de Ejecutivos de Finanzas, A.C. Primera Edición. México 1985.

liquidez al mercado a través de estimular la compra-venta constante de los títulos emitidos por las empresas y hacer llegar al mercado los recursos necesarios para financiar sus actividades mediante el cobro de comisiones y aranceles; es decir, es un mercado de reventa tanto de títulos primarios como de títulos secundarios en el cual los fondos que se manejan ya no llegan a los emisores de los títulos primarios.

El sector del Mercado de Capitales es donde se manejan los valores con vencimiento a largo plazo (bonos, obligaciones, acciones, etc.), cuya función es la de proporcionar a las empresas emisoras financiamiento para hacer frente a nuevos proyectos, modernización de instalaciones, etcétera. Y por último, el sector del *mercado de dinero* es donde se manejan los valores con vencimiento a corto plazo (CETES, papel comercial, aceptaciones, etc.), que proporciona al mercado instrumentos con alto grado de liquidez ya sea para cubrir carencias temporales en el flujo de efectivo de las empresas o financiar su capital de trabajo. Este sector es el que interesa para el presente trabajo, ya que en función de sus instrumentos, se presentarán algunas aplicaciones y por tanto, es importante profundizar en poco más en él.

**Instrumentos del mercado de dinero**

Son instrumentos que representan una deuda o un crédito colectivo, y que típicamente se colocan o venden a descuento. Esto es, su precio es menor a su valor nominal.

Dichos instrumentos, se caracterizan porque se negocían a corto plazo, es decir, en un período menor a un año. La situación que aquí se presenta, es que cuando el valor es emitido (en el mercado primario), aún cuando el plazo puede sobrepasar un año (como se observa en el siguiente cuadro), en el mercado secundario la compra-venta de dicho valor durante su vigencia difícilmente se pactará a largo plazo.

**Instrumentos generados por los diferentes tipos de emisor en el mercado de dinero**

| EMISOR | INSTRUMENTO | PLAZO |
|---|---|---|
| *Gobierno Federal* | Cetes | 28, 91, 180 y 360 días |
| | Tesobonos | 28, 91 y 180 días |
| | Bondes | 1 y 2 años |
| | Ajustabonos | 3 y 5 años |
| | Udibonos | 3 años |
| | Cpo's | 2 años |
| *Organismos descentralizados* | Petropagaré | 360 días máximo |
| *Bancos* | AB's | 360 días máximo |
| | PRLV | 1, 3, 6, 9 y 12 meses |
| | Bondis | 10 años |
| *Almacenes generales de depósito* | Bonos prendarios | 180 días máximo |
| *Sociedades mercantiles* | Papel Comercial | 1 a 360 días |
| | Pagaré empresarial bursátil | 1 a 360 días |

**Instrumentos del mercado de dinero**

A continuación se incluye una breve descripción de las características de cada uno de los instrumentos, los cuales se describen conforme fueron apareciendo en el mercado. Posteriormente, para ejemplificar, se detalla el cálculo del rendimiento de los CETES.

Cabe hacer notar que la comisión que se indica para cada instrumento es aquélla que deberá pagar el inversionista al intermediario por compra-venta del título, tanto en mercado primario como secundario.

**Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES)**

***Generalidades.***

Los Certificados de la Tesorería, se emiten por primera vez en enero de 1978. Hasta 1982 las tasas de emisión de CETES eran fijadas por el Banco de México, y las casas de bolsa podían solicitar una mayor o menor cantidad de cada emisión.

En septiembre de 1982, se establece el sistema de subasta en que participaba el Banco de México como vendedor y las casas de bolsa como compradores pudiendo solicitar una mayor o menor cantidad de cada emisión.

En octubre de 1985 se vuelve al sistema original, para después establecer definitivamente el sistema de subasta en julio de 1986.

La subasta o colocación primaria de los CETES se realiza los martes de cada semana. Dicha subasta la lleva a cabo la SHCP a través del Banco de México; únicamente pueden participar en la subasta instituciones de seguros, casas de bolsa e instituciones de banca múltiple.

El mecanismo de subasta es el que se describe a continuación:

Viernes: Banco de México emite una convocatoria para subastar una nueva emisión de CETES señalando el monto a subastar, el plazo de vencimiento y el monto mínimo garantizado.

Martes a las 13:30 hrs: Fecha límite para que las instituciones financieras autorizadas presenten su solicitud para participar en la subasta. Las posturas de compra forman parte de dicha solicitud para participar en la subasta, y pueden ser posturas competitivas y posturas no competitivas.

El monto de CETES destinado a las posturas competitivas se asignará a aquellas instituciones que hayan ofrecido las tasas de descuento más pequeñas. Dicho monto es igual al monto total convocado menos el monto total de las posturas no competitivas.

Respecto a las posturas no competitivas, el Banco de México garantiza la asignación o venta de un monto mínimo a una tasa de descuento que se calcula como el promedio ponderado de las tasas de descuento a las cuales se vendieron CETES a instituciones con posturas competitivas.

Miércoles: A partir de este día, las instituciones financieras autorizadas pueden ofrecer en el mercado secundario los CETES a sus clientes o al público en general.

Jueves: Las instituciones financieras que adquieren CETES en mercado primario, deberán liquidar a Banco de México el monto correspondiente a los CETES que les fueron asignados.

***Definición***

Los CETES son títulos de crédito al portador emitidos por la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP), en los cuales se consigna la obligación del Gobierno Federal de pagar el valor nominal del título en la fecha de su vencimiento, así como los intereses que devenguen los cupones respectivos.

***Antecedentes***

El Ejecutivo Federal emitió CETES por primera vez en enero de 1978, con fundamento en el decreto presidencial publicado en el Diario Oficial de la Federación que autoriza su emisión a valor nominal de $10.00 pesos y sus múltiplos, y a plazos máximos de un año. Posteriormente, la SHCP publicó el decreto mediante el cual se autoriza al Ejecutivo Federal la posibilidad de emitir CETES a valor nominal de $5.00 pesos y sus múltiplos, mismos que podrán devengar intereses; en adición, se elimina la restricción de emisiones a plazos máximos de un año.

***Objetivos***

Regular las fluctuaciones de la oferta monetaria y las tasas de interés, e influir sobre las condiciones crediticias de la economía, financiar parte del gasto público del Gobierno Federal, y brindar la opción de un instrumento de ahorro de "renta fija" y liquidez inmediata.

***Características generales***

*Emisor.* SHCP como representante del Gobierno Federal, a través del Banco de México como agente colocador exclusivo.

*Garantía.* Respaldo del Gobierno Federal.

*Monto.* Variable.

*Valor nominal.* $5.00 pesos y sus múltiplos.

*Rendimiento.* Su rendimiento se deriva de la colocación bajo par, esto es, debajo de su valor nominal. El rendimiento de los CETES se da por el diferencial entre su precio de compra bajo par, y su valor de redención o precio de venta. Cuando la venta se efectúa antes del vencimiento, el precio es también bajo par, pero usualmente mayor que el de compra. Los precios de compra y de venta se determinan libremente en el mercado. En el caso de que alguna emisión devengue intereses, los CETES llevarán cupones para su pago, sin embargo en las colocaciones comunes eso no ocurre.

*Plazo.* En la actualidad se emiten a 28, 91, 182 y 364 días, aunque pueden existir emisiones a diferentes plazos según las necesidades del Banco de México.

*Liquidación.* Mismo-día, 24 o 48 horas hábiles después de realizada la operación.

*Custodia.* A cargo del Banco de México.

*Intermediación.* Bancos y casas de bolsa.

*Banco agente.* El Banco de México actuará como agente exclusivo del Gobierno Federal para la colocación y redención de los CETES.

*Colocación.* Subasta pública.

*Posibles adquirientes.* Personas físicas y personas morales de nacionalidad mexicana o extranjera.

*Amortización.* Única al vencimiento.

*Comisión.* No existe. No obstante, si el intermediario actúa por cuenta de un tercer inversionista, este último se ve afectado por el cobro de una comisión por parte del intermediario y que varía a discreción del mismo.

*Régimen fiscal.* Las personas físicas mexicanas o extranjeras, están exentas del ISR. Para las personas morales mexicanas es acumulable para el ISR por lo que exceda a la inflación mensual, para lo cual se calculará el componente inflacionario al saldo promedio diario de la inversión que se tenga. Las personas morales extranjeras están exentas del ISR. La tasa siempre se cotiza en términos netos sobre una base de 360 días.

*Ventajas para el emisor*

El CETE es un instrumento utilizado por el Gobierno Federal como medio de captación de recursos y control del circulante.

*Ventajas y desventajas para el inversionista*

*Ventajas.* El inversionista encontrará en el mercado de Cetes diferentes plazos con la ventaja de poder programar sus necesidades de liquidez al adquirir los Certificados con el vencimiento que más le convenga. La tasa del Cete funciona como tasa base de un gran número de operaciones financieras.

*Desventajas.* Cuando los Cetes se venden antes del vencimiento (en "directo"), es decir que cambian definitivamente de dueño, están sujetos a las fluctuaciones en las tasas de descuento y de rendimiento, mismas que son mayores conforme mayor sea el plazo por vencer de los títulos. En el caso de venderlos temporalmente (en el mercado secundario), las cotizaciones se podrían ver severamente afectadas por la oferta y la demanda existentes en ese momento.

*Operaciones autorizadas.* Compra-venta. Reportos.

**Mecánica operativa**

Para realizar operaciones de compra y venta de CETES para el público inversionista, es importante tomar en cuenta los siguientes aspectos:

La liquidación de la operación será "24 horas", o bien se podrá efectuar "mismo-día". La casa de bolsa pondrá a disposición del cliente el producto de la venta de sus títulos ya sea físicamente en las oficinas de la misma, o bien lo abonará en la cuenta de cheques del propio inversionista. Para el caso de solicitar una inversión, la liquidación se podrá efectuar siempre y cuando la casa de bolsa tuviere en posición títulos de la emisión requerida por el cliente o si existiere la alternativa vía Bolsa Mexicana de Valores.

Existe la posibilidad de operación de *reporto* mendiante la cual la casa de bolsa vende CETES a su cliente, comprometiéndose la primera a recomprar los títulos después de un plazo acordado, al mismo precio pagado por el cliente más un premio (equivalente a la tasa de interés). El cliente por su parte, se obliga a vender -al finalizar el plazo acordado- la misma cantidad de títulos de la misma especie, y recibir a cambio el precio pagado previamente más el premio. La tasa premio pagada en los reportos es una tasa de rendimiento.

Fórmulas para determinar el precio:

Nomenclatura:
d = Tasa de descuento (anual, en base de 360 días)
VN = Valor Nominal

T = Plazo en días
r = Tasa de rendimiento (anual, en base de 360 días)
P = Precio
D = Descuento

$$P = VN - D$$

$$P = VN(1 - \frac{rT}{360 + rT})$$

$$P = VN(1 - \frac{dT}{360})$$

$$P = VN - \frac{VN * d * T}{360}$$

**Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal (BONDES)**

***Definición***

Títulos de crédito nominativos, negociables, en los cuales se consigna la obligación directa e incondicional del Gobierno Federal a liquidar una suma de dinero; con cortes periódicos de cupón.

*Emisor.* Secretaría de Hacienda y Crédito Público como representante del Gobierno Federal, y utilizando a Banco de México como agente exclusivo para la colocación.

*Objetivo.* Financiamiento al Gobierno Federal a mediano y largo plazo.

*Garantía.* No tienen garantía específica. El Gobierno Federal se obliga a liquidar al vencimiento los valores emitidos.

*Plazo.* Mínimo 364 días, aunque existen emisiones a 364, 532, y 728 días.

*Valor nominal.* Cien pesos ($100 m.n.) o sus múltiplos.

*Posibles adquirientes.* Personas físicas, mexicanas o extranjeras y morales nacionales.

*Comisión.* Por cuenta del emisor, sin cargo para el inversionista.

*Custodia.* Banco de México.

*Régimen fiscal.* Las personas físicas nacionales y residentes en el extranjero están exentas del pago del I.S.R. sobre los ingresos derivados de la enajenación, intereses y redención. Para las personas morales residentes en México, acumulable sin retención.

*Operaciones autorizadas.* Compra-venta. Reportos.

*Información adicional.* En octubre de 1987, se autorizó la emisión de Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal (BONDES); el rendimiento es pagadero cada 28 días, calculado como la mayor tasa entre 1) los CETES a 28 días, 2) los pagarés bancarios a un mes, y 3) los depósitos bancarios a 30 días. Se colocan en la misma forma que los CETES, por medio de una subasta hecha por el Banco de México y, al igual que los CETES, se liquidan cada jueves. Asimismo, las posturas se hacen en la subasta en la forma de un descuento sobre el valor nominal de los BONDES, y se van asignando al postor que pide el menor descuento.

**Bonos de la Tesorería de la Federación (TESOBONOS)**

***Definición***

Títulos de crédito al portador, denominados en dólares americanos, en los cuales se consigna la obligación del Gobierno Federal de liquidar al tenedor en la fecha de vencimiento del documento, el equivalente en moneda nacional por el tipo de cambio libre publicado por el Banco de México diariamente en la Bolsa Mexicana de Valores.

*Emisor.* Secretaría de Hacienda y Crédito Público, como representante del Gobierno Federal, a través del Banco de México.

*Objetivo.* Captar recursos financieros provenientes del público inversionista, especialmente en períodos de incertidumbre cambiaria; herramienta para la ejecución de la política monetaria; conforma una opción de ahorro con cobertura contra el riesgo cambiario con rendimiento fijo y alta liquidez.

*Garantía.* No tienen garantía específica. El Gobierno Federal se obliga a liquidar al vencimiento los valores emitidos.

*Plazo.* Hasta 364 días.

*Valor nominal.* Mil dólares americanos ($1,000 U.S.A.) o sus múltiplos en dicha divisa.

*Posibles adquirientes.* Personas físicas y morales, nacionales o extranjeros.

*Comisión.* No existe.

*Custodia.* INDEVAL.

*Régimen fiscal.* Las personas físicas están exentas, y para las personas morales es acumulable. Los residentes en el extranjero están exentos.

*Operaciones autorizadas.* Compra-venta. Reporto.

**Bonos Ajustables del Gobierno Federal (AJUSTABONOS)**

***Definición***

Títulos de crédito nominativos, negociables a mediano y largo plazo, denominados en moneda nacional, en los cuales se consigna la obligación directa e incondicional del Gobierno Federal a liquidar una suma de dinero que se ajusta con la frecuencia que especifique la emisión particular de acuerdo al Índice Nacional de Precios al Consumidor (I.N.P.C.) publicado quincenalmente por el Banco de México.

*Emisor.* Secretaría de Hacienda y Crédito Público, como representante del Gobierno Federal, a través del Banco de México.

*Objetivo.* Obtener recursos financieros a largo plazo para el Gobierno Federal provenientes del público inversionista, brindando la opción de ahorro a largo plazo sin merma en los rendimientos reales.

*Garantía.* No tienen garantía específica. El Gobierno Federal se obliga a liquidar al vencimiento los valores emitidos.

*Plazo.* Mayor a 91 días. Actualmente existen emisiones a 3 y 5 años.

*Valor nominal.* Cien pesos ($100 m.n.) o sus múltiplos. Su valor se ajusta periódicamente al INPC.

*Posibles adquirientes.* Personas físicas y morales, mexicanas y extranjeras.

*Comisión.* No existe.

*Custodia.* Banco de México.

*Régimen fiscal.* Las personas físicas y residentes en el extranjero están exentas del pago del I.S.R. sobre ingresos derivados de la enajenación, intereses y redención. Para las personas morales es acumulable sin retención.

*Operaciones autorizadas.* Compra- venta. Reporto.

*Información adicional.* La primera emisión a plazo de 3 años se hizo el 20 de julio de 1989. La primera emisión a 5 años se hizo el 22 de noviembre de 1990.

**Certificados de Participación Ordinarios (CPO's)**

***Definición***

Los CPO's son títulos a largo plazo para financiar proyectos de infraestructura carretera. Son instrumentos negociables de renta fija.

*Emisor.* Los CPO's son emitidos por instituciones fiduciarias cuyo patrimonio está constituido por acciones representativas del capital social de sociedades cuyas acciones son cotizadas en la Bolsa Mexicana de Valores.

*Objetivo.* Financiamiento de obras para la construcción de carreteras.

*Garantía.* Están respaldados por sociedades nacionales de crédito.

*Plazo.* Vencimiento a largo plazo.

*Valor nominal.* $100.00 y sus múltiplos.

*Posibles adquirientes.* Los CPO's pueden ser adquiridos por personas físicas o morales, mexicanos o extranjeros, instituciones de fianzas, sociedades de inversión, instituciones de crédito, arrendadoras, almacenes de depósito, empresas de factoraje financiero, fondos de pensiones y jubilaciones de antiguedad.

*Custodia.* INDEVAL.

*Régimen Fiscal.* La ley del ISR, lo regula desde diversos puntos de vista: por los ingresos que obtengan los titulares por concepto de intereses o su arrendamiento; o bien la exención de los derivados del certificado de promoción bursátil. Con respecto a el IVA se encuentran exentos de pago.

NOTA:

Los denominados American Depositary Receips (ADR's) son expedidos sobre acciones comunes. Cada ADR representa diez CPO's , cada CPO representa una acción común de la compañía depositados con la institución emisora los propios ADR's.

*Garantía.* El valor del patrimonio fideicomitido respaldará la emisión de participación ordinaria. El patrimonio del fideicomiso podrá incrementarse con nuevas aportaciones en especie, ya sea en el mismo tipo de cartera o en otros valores de renta fija que determine el comité técnico, que realice la fideicomitente o Nacional Financiera para mantener el patrimonio.

*Plazo.* 728 días.

*Posibles adquirientes.* Personas físicas y morales de nacionalidad mexicana y extranjera; sociedades de inversión; fondos de pensiones y jubilaciones.

*Custodia.* Banco Internacional.

*Régimen fiscal.* Por ser un instrumento a plazo mayor de un año, las garantías de capital y las ganancias derivadas de sus rendimientos estarán exentas del pago de impuestos sobre la renta para las personas físicas; en el caso de las personas morales, constituirá un ingreso acumulable, conforme a la Ley del Impuesto Sobre la Renta.

*Operaciones autorizadas.* Compra-venta.

## Petropagaré

### *Definición*

Es un pagaré a corto plazo utilizado para conseguir recursos para capital de trabajo.

*Emisor.* Petróleos Mexicanos.

*Objetivo.* Financiamiento a corto plazo.

*Garantía.* Respaldo de Petróleos Mexicanos.

*Plazo.* Un año como máximo.

*Valor nominal.* Cien pesos ($100 m.n.)

*Posibles adquirientes.* Personas físicas y morales mexicanas y extranjeras.

*Comisión.* No existe.

*Custodia.* INDEVAL

*Régimen fiscal.* Para personas físicas: Retención y pago definitivo del 1.4%; para las personas morales es acumulable. Y para los residentes en el extranjero: retención del 15%.

*Operaciones autorizadas.* Compra-venta.

**Bonos Bancarios para el Desarrollo Industrial (BONDIS)**

***Definición.***

Bonos bancarios a largo plazo para financiar proyectos industriales donde se consigna la obligación del Gobierno Federal contraída, a través de Nacional Financiera, para liquidar una suma de dinero al vencimiento de los documentos.

*Emisor.* Nacional Financiera.

*Objetivo.* Captar recursos líquidos a largo plazo para apoyar la inversión pública y privada, orientadas al desarrollo industrial y económico del país, apoyando la creación de infraestructura, tecnología y equipamiento.

*Garantía.* No existe garantía específica. Nacional Financiera se obliga a liquidar al vencimiento los valores emitidos.

*Plazo.* Diez años, con 130 cupones a plazo de 28 días.

*Valor nominal.* Cien pesos ($100 m.n.)

*Posibles adquirientes.* Personas físicas y morales, mexicanas o extranjeras.

*Comisión.* No existe.

*Custodia.* NAFIN.

*Régimen fiscal.* Para personas físicas: Retención y pago definitivo del 1.4%. Para las personas morales: Acumulables. Para los residentes en el extranjero: Retención del 15%.

*Operaciones autorizadas.* Compra-venta. Reportos.

**Aceptaciones Bancarias (AB's)**

***Definición.***

Las AB's son letras de cambio giradas por empresas, domiciliadas en México a su propia orden y aceptadas por instituciones de banca múltiple en base a líneas de crédito que dichas Instituciones han otorgado previamente a las empresas emisoras.

*Emisor.* Personas morales, (y aceptadas por instituciones de banca múltiple).

*Objetivo.* Financiamiento de las necesidades de recursos a corto plazo de la pequeña y mediana empresa, captación bancaria.

*Garantía.* Respaldo de la institución de banca múltiple aceptante.

*Plazo.* Entre 7 y 182 días en múltiplos de 7 días.

*Valor nominal.* $100 m.n. o sus múltiplos.

*Posibles adquirientes.* Personas físicas y morales, mexicanas y extranjeras.

*Comisión.* Por cuenta del emisor, sin cargo para el inversionista.

*Custodia.* INDEVAL o instituciones de banca múltiple.

*Régimen fiscal.* Para persona física: Retención y pago definitivo del 1.4%. Para la persona moral: Acumulable. Para los residentes en el extranjero: Retención del 15%.

*Operaciones autorizadas.* Compra-venta. Reportos.

*Información adicional.* La colocación de los AB's puede ser de dos formas:
1) Pública (operada en bolsa); éstas aceptaciones deben depositarse en el INDEVAL y operarse en Bolsa.

2) Privada (extrabursátil); éstas aceptaciones se depositan en las instituciones de banca múltiple. Se venden o colocan directamente al público por dichas instituciones.

**Pagarés con Rendimiento Liquidable al Vencimiento (PRLV)**

***Definición.***

Títulos que formalizan una deuda a corto plazo, cuya liquidación y pago de intereses se realiza al vencimiento del plazo.

*Emisor.* Instituciones de banca múltiple.

*Objetivo.* Financiamiento a corto plazo, captación bancaria.

*Plazo.* Entre 7 y 182 días.

*Valor nominal.* Cien pesos ($100 m.n.)

*Posibles adquirientes.* Personas físicas y morales, mexicanas y extranjeras.

*Comisión.* Por cuenta del emisor, sin cargo para el inversionista.

*Custodia.* INDEVAL o instituciones de banca múltiple.

*Régimen fiscal.* Para personas físicas: Retención y pago definitivo del 1.4%. Para las personas morales: Acumulable. Para los residentes en el extranjero: Retención del 15%.

*Operaciones autorizadas.* Compra-venta. Reportos.

**Bonos de Prenda (PRENDARIOS)**

***Definición.***

El certificado de depósito es un documento expedido exclusivamente por los almacenes generales de depósito, el cual acredita la propiedad de las mercancías o bienes depositados en el almacén que los emite y otorga al tenedor legítimo el dominio sobre las mercancías efectos que ampara, pudiendo disponer libremente de ellas mediante la entrega del título mismo.

El bono de prenda es un título de crédito que se expide anexo al certificado de depósito y que acredita el otorgamiento de un crédito prendario sobre las mercancías o bienes indicados en el certificado de depósito correspondiente.

*Emisor.* Personas morales que cumplan con las normas jurídicas y requisitos establecidos.

*Objetivo.* El bono de prenda viene a satisfacer las necesidades específicas de aquellos que requieren de financiamiento a corto plazo para capital de trabajo, tomando como garantía grandes volúmenes de mercancías que permanecerán almacenadas por cierto período de tiempo. Este instrumento permite al emisor obtener la liquidez necesaria para la compra y mantenimiento de sus inventarios, obteniendo financiamiento del gran público inversionista con atractivas tasas, así como disponer de su mercancía de acuerdo con sus necesidades de producción y comercialización.

*Garantía.* Bienes o mercancías depositados en almacenes generales de depósito, dichos bienes deberán cumplir con las siguientes características:
- Ser bienes o mercancías genéricas; es decir, que pertenezcan a un mismo género, especie, naturaleza o tipo.
- Ser propiedad de la empresa depositante y estar libres de cualquier gravamen o limitación de dominio.
- Depositarse en locales manejados directamente por la almacenadora o en locales habilitados por la misma.
- No estar sujetos al régimen de depósito fiscal.
- Estar debidamente asegurados contra los riesgos ordinarios de almacenaje.

*Plazo.* No mayor a 180 días.

*Valor nominal.* Variable, fijado por el emisor.

*Posibles adquirientes.* Personas físicas o morales, mexicanas o extranjeras.

*Comisión.* Por cuenta del emisor, sin cargo para el inversionista.

*Custodia.* Tanto el certificado de depósito como el bono de prenda deberán depositarse en el INDEVAL.

*Régimen fiscal.* A los emisores de bonos de prenda se les dará el mismo tratamiento que a aquellos que emiten papel comercial.
Persona física: Retención y pago definitivo del 1.4%.
Persona moral: Acumulable.
Residente en el extranjero: Retención del 15%.

*Operaciones autorizadas.* Compra-venta.

**Papel comercial**

***Definición.***

El papel comercial es un pagaré suscrito sin garantía sobre los activos de la empresa emisora, en el cual se estipula una deuda de corto plazo pagadera en una fecha determinada.

*Emisor.* Sociedades anónimas registradas en el Registro Nacional de Valores e Intermediarios.

*Objetivo.* Se utiliza como línea de crédito revolvente para financiar necesidades de capital de trabajo.

*Garantía.* No tiene garantía específica.

*Plazo.* Cada emisión tiene plazo de vencimiento dependiendo de la necesidad de la emisora y será pactado entre la casa de bolsa colocadora y el emisor. Siendo el mínimo de 15 días y el máximo de 180 días.

*Valor nominal.* Cien pesos ($100 m.n.) o sus múltiplos.

*Posibles adquirientes.* Personas físicas y morales mexicanas o extranjeras.

*Comisión.* Por venta del emisor sin cargo para el inversionista.

*Custodia.* INDEVAL.

*Régimen fiscal.* Para las personas físicas: Retención y pago definitivo del 1.4%. Para las personas morales: Acumulable. Para residentes en el extranjero: Retención del 15%.

*Operaciones autorizadas.* Compra-venta. Reporto en el caso de papel comercial avalado.

*Información adicional.* Debido a que el papel comercial es un instrumento sin garantía específica, la sobretasa que se paga va en relación directa a la calidad y situación financiera de corto plazo de la emisora.

El monto máximo susceptible de ser autorizado por la emisora es de $500,000.00; el monto total en circulación no deberá exceder el máximo autorizado ni ser menor a $20,000.00. Además, en plazos de 15 a 29 días, el monto máximo a emitir será de $100,000.00. Es decir, debido a que el papel comercial se utiliza como una línea de crédito revolvente, no podrá exceder el monto autorizado para circular.

# 5

## Aplicación al modelo de Markowitz de minimización de incertidumbre

A continuación y con la finalidad de aclarar los conceptos expuestos, se desarrolla una cartera considerando algunos instrumentos de inversión.

Para exponer un ejemplo, se considera el problema de decidir las proporciones de algunos instrumentos para construir una cartera inversión.

En el desarrollo del modelo para construir la cartera, se hacen las siguientes consideraciones. La selección se hará en valores gubernamentales, durante un mismo período en el que el inversionista no puede vender los valores o disponer de préstamos antes del vencimiento. Las opciones que se presentan son tres: CETES, BONDES y Papel comercial.

Con el fin de obtener resultados realistas y evitar realizar un pronóstico del rendimiento esperado de cada uno de los instrumentos, dado que es atípico que el mercado mexicano presente un comportamiento fácil de predecir, se tomaron los resultados históricos de las subastas primarias semanales en el mercado de dinero de dichos instrumentos, durante todo el año de 1996, lo que implica 52 observaciones para cada uno de ellos.

Es importante aclarar las características de cada uno de ellos:

- Para el caso de los CETES, se tomó el plazo de 364 días en tasas nominales con una base de 360 días.
- En los BONDES se seleccionó el plazo de 728 días, y dado que el resultado es una sobretasa, se hicieron las operaciones necesarias para transformarla a tasa nominal también en base de 360 días.
- Por su parte, para el Papel comercial los datos corresponden al plazo de 28 días, con una base anual de 360 días igual que los dos anteriores.

La información obtenida se presenta a continuación:

**Rendimientos semanales de los instrumentos en colocación primaria**

| | CETES | BONDES | Papel comercial |
|---|---|---|---|
| *04/01/96* | 41.90 | 46.26 | 47.65 |
| *11/01/96* | 40.39 | 42.11 | 40.76 |
| *18/01/96* | 40.46 | 42.72 | 43.64 |
| *25/01/96* | 40.03 | 38.73 | 37.40 |
| *01/02/96* | 40.61 | 37.95 | 36.64 |
| *08/02/96* | 41.42 | 37.79 | 37.15 |
| *15/02/96* | 43.17 | 41.44 | 39.06 |
| *22/02/96* | 44.36 | 42.38 | 42.52 |
| *29/02/96* | 44.30 | 42.05 | 40.47 |
| *07/03/96* | 45.47 | 44.38 | 45.88 |
| *14/03/96* | 45.54 | 45.17 | 44.98 |
| *20/03/96* | 42.52 | 43.13 | 45.59 |
| *28/03/96* | 40.65 | 40.44 | 40.31 |
| *03/04/96* | 39.28 | 38.50 | 41.49 |
| *11/04/96* | 39.81 | 38.91 | 39.00 |
| *18/04/96* | 36.30 | 35.75 | 37.91 |
| *25/04/96* | 36.26 | 32.88 | 33.32 |
| *02/05/96* | 36.86 | 32.63 | 32.41 |
| *09/05/96* | 36.21 | 31.62 | 33.10 |
| *16/05/96* | 33.77 | 29.22 | 31.06 |
| *23/05/96* | 32.91 | 26.93 | 28.23 |
| *30/05/96* | 31.72 | 26.34 | 27.66 |
| *06/06/96* | 32.98 | 27.14 | 28.69 |
| *13/06/96* | 34.06 | 30.08 | 32.52 |
| *20/06/96* | 33.24 | 28.67 | 29.88 |
| *27/06/96* | 33.37 | 29.36 | 30.63 |
| *04/07/96* | 34.11 | 31.46 | 32.58 |
| *11/07/96* | 34.83 | 33.36 | 34.94 |
| *18/07/96* | 35.48 | 34.54 | 35.15 |
| *25/07/96* | 34.30 | 31.24 | 32.83 |
| *01/08/96* | 35.40 | 31.69 | 31.93 |
| *08/08/96* | 32.75 | 28.18 | 29.16 |
| *15/08/96* | 32.70 | 27.90 | 28.99 |
| *22/08/96* | 31.00 | 25.59 | 26.70 |
| *29/08/96* | 30.94 | 25.92 | 26.57 |
| *05/09/96* | 32.43 | 27.16 | 26.91 |
| *12/09/96* | 30.93 | 24.81 | 25.24 |
| *19/09/96* | 29.18 | 24.45 | 26.56 |
| *26/09/96* | 28.03 | 24.67 | 26.63 |
| *03/10/96* | 27.39 | 24.49 | 25.08 |
| *10/10/96* | 26.83 | 24.15 | 25.91 |
| *17/10/96* | 28.65 | 27.61 | 33.15 |
| *24/10/96* | 28.41 | 29.45 | 30.77 |
| *31/10/96* | 28.63 | 31.20 | 31.51 |
| *07/11/96* | 27.15 | 31.23 | 31.28 |
| *14/11/96* | 27.12 | 31.65 | 31.67 |
| *21/11/96* | 26.74 | 31.53 | 31.86 |
| *28/11/96* | 26.50 | 30.62 | 32.19 |
| *05/12/96* | 25.46 | 28.32 | 33.78 |
| *11/12/96* | 25.59 | 28.70 | 29.84 |
| *19/12/96* | 25.68 | 28.87 | 30.77 |
| *26/12/96* | 25.75 | 28.70 | 30.56 |

Fuente: Con datos del Banco de México.

Las características de estos instrumentos se resumen a continuación:

| | Rendimiento esperado | Varianza | Desviación estándar |
|---|---|---|---|
| CETES | 34.22 | 34.91 | 5.91 |
| BONDES | 32.69 | 39.27 | 6.27 |
| Papel comercial | 33.66 | 34.44 | 5.87 |

| | Coeficientes de correlación |
|---|---|
| CETES-BONDES | 0.863 |
| CETES-Papel comercial | 0.814 |
| BONDES-Papel comercial | 0.974 |

Con los coeficientes de correlación y las desviaciones estándar, se obtiene la matriz de varianza-covarianza:

**Matriz de varianzas-covarianzas**

| | CETES | BONDES | Papel comercial |
|---|---|---|---|
| CETES | 34.91 | 31.96 | 28.23 |
| BONDES | 31.96 | 39.27 | 35.83 |
| Papel comercial | 28.23 | 35.83 | 34.44 |

Entonces el rendimiento esperado de la cartera se expresa:

$$\mu = 34.22\ Xct + 32.69\ Xbd + 33.66\ Xpc$$

donde

$$Xct + Xbd + X\ pc = 1$$

Xct = proporción a invertir de CETES en la cartera.
Xbd = proporción a invertir de BONDES en la cartera.
Xpc = proporción a invertir de Papel comercial en la cartera.

Supóngase que el rendimiento que el inversionista desea obtener es de 33.00%, entonces:

$$34.22\ Xct + 32.69\ Xbd + 33.66\ Xpc = 33.00$$
$$Xct + Xbd + X\ pc = 1$$
con $Xct, Xbd$ y $Xpc \geq 0$

Para resolver este sistema de ecuaciones, considérese un sistema de la forma:

$$Ax = b$$

donde el número de incógnitas es mayor al número de ecuaciones y por lo tanto, el número de soluciones es infinito y está representado por el conjunto $S$:

$$S = \left\{ x \,\middle|\, x = x^0 + y;\ \ y \in N \right\}$$

donde $x^0$ es tal que $A\,x^0 = b$ y $N$ es el "espacio nulo" de la matriz $A$ que se define como:

$$N = \left\{ y \mid Ay = 0 \right\}$$

y sea $N$ una matriz de dimensiones (n,n-m) tales que:

*i*) cada columna $y_i$ de $N$ es un vector nulo de $A$; es decir, $A\,y_i = 0$.

*ii*) las n-m columnas de $N$ son linealmente independientes.

Entonces, $N$ genera el espacio nulo de $A$ y cualquier vector nulo $y \in N$ se puede expresar como una combinación lineal de las columnas de $N$.

Por lo tanto, las soluciones del sistema $Ax=b$ se pueden expresar matricialmente como:

$$x = x^0 + \alpha N$$

Entonces para obtener $x^0$ del sistema

$$34.22\ Xct + 32.69\ Xbd + 33.66\ Xpc = 33.00$$
$$Xct + Xbd + X\ pc = 1$$

Supóngase que Xct = 0, entonces:

$$32.69\ Xbd + 33.66\ Xpc = 33 \qquad (1)$$
$$Xbd + Xpc = 1 \qquad (2)$$

despejando Xbd de (2),

Xbd = 1 - Xpc

y sustituyendo en (1),

32.69 (1 - Xpc) + 33.66 Xpc = 33

tenemos que :

Xpc = 0.3158

Conociendo Xct y Xpc, se obtiene Xbd:
Xbd = 0.6841

Ahora para obtener *N*, hay que hacer *Ay* = *0*:

$$\begin{bmatrix} 34.22 & 32.69 & 33.66 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$34.22\ y_1 + 32.69\ y_2 + 33.66\ y_3 = 0 \qquad (3)$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0 \qquad (4)$$

De (4) si $y_1 = 1$, entonces:

$$y_2 + y_3 = -1$$

lo que implica que:

$$y_2 = -\ y_3 - 1 \qquad (5)$$

y sustituyendo en (3) se tiene que:

$$34.22\,(1) + 32.69\,(-y_3 - 1) + 33.66\ y_3 = 0$$

$$y_3 = -1.5760$$

sustituyendo en (5) para encontrar $y_2$:

$$y_2 = -(-1.5760) - 1$$

$$y_2 = 0.5760$$

Por tanto, la matriz $N$ está dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0.5760 \\ -1.5760 \end{pmatrix}$$

y la solución está dada por:

$$\begin{bmatrix} Xct \\ Xbd \\ Xpc \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.6841 \\ 0.3158 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5760 \\ -1.5760 \end{pmatrix} \qquad \text{para } 0 \leq \alpha \leq 0.20$$

Es decir,

Xct = $\alpha$
Xbd = 0.6841 + 0.5760 $\alpha$
Xpc = 0.3158 - 1.5760 $\alpha$ para cualquier $\alpha$ entre 0 y 0.20

Ya que:

1) Xct + Xbd + Xpc = $\alpha$ + 0.6841 + 0.5760$\alpha$ + 0.3158 - 1.5760$\alpha$ = 1; para toda $\alpha$
2) 34.22 Xct + 32.69 Xbd + 33.66 Xpc =
34.22$\alpha$ + 32.69 ( 0.6841 + 0.5760$\alpha$ )+33.66 (0.3158 - 1.5760$\alpha$ ) = 33.00
para toda $\alpha$
3) Si $\alpha$ = 0, entonces Xct = 0, Xbd = 0.6841 y Xpc = 0.3158

El inversionista desearía obtener un rendimiento de 33%, pero como existe una infinidad de carteras que ofrecen ese rendimiento, entonces habrá diversos niveles de riesgo. Si calculamos la varianza para algunos niveles de $\alpha$ a partir de cero, se observará que esta disminuye a medida que $\alpha$ aumenta, haciendo evidente que no todas las combinaciones que proporcionan el mismo rendimiento esperado proporcionan la misma varianza o nivel de incertidumbre, como puede verse en el siguiente cuadro:

**Varianza de la cartera dependiendo del nivel de $\alpha$**

| $\alpha$ | 0 | 0,05 | 0,1 | 0,2 |
|---|---|---|---|---|
| Xct | 0 | 0,05 | 0,1 | 0,2 |
| Xbd | 0,684 | 0,713 | 0,742 | 0,799 |
| Xpc | 0,316 | 0,237 | 0,158 | 0,001 |
| $\sigma^2$ | 37,31 | 37,05 | 36,87 | 36,75 |

Ahora bien, si se desea formar una cartera que proporcione cierto rendimiento esperado, será deseable que tenga la menor varianza posible. Recordemos que una cartera con rendimiento esperado $\mu$ es eficiente, si la varianza asociada a ella es mínima entre todas las posibles carteras que proporcionan el mismo rendimiento esperado.

En este problema, para obtener la varianza mínima asociada a un rendimiento de 33%, se sustituye en la ecuación de varianza:

$$\sigma^2 = Xct^2\sigma^2_{Xct} + Xbd^2\sigma^2_{Xbd} + Xpc^2\sigma^2_{Xpc} + 2\,Xct\,Xbd\ \mathrm{cov}(Xct, Xbd) +$$
$$2\,Xct\,Xpc\ \mathrm{cov}(Xct, Xpc) + 2\,Xbd\,Xpc\ \mathrm{cov}(Xbd, Xpc)$$

Los valores:

Xct = $\alpha$
Xbd = 0.6841 + 0.5760 $\alpha$
Xpc = 0.3158 - 1.5760 $\alpha$

Y entonces sustituyendo en la ecuación de varianza:

$$\sigma^2 = 34.91\alpha^2 + 39.27(0.6841 + 0.5760\alpha)^2 + 34.44(0.3158 - 1.5760\alpha)^2 +$$
$$2\alpha(0.6841 + 0.5760\alpha)(31.96) + 2\alpha(0.3158 - 1.5760\alpha)(28.23) +$$
$$2(0.6841 + 0.5760\alpha)(0.3158 - 1.5760\alpha)(35.83)$$

Haciendo las operaciones necesarias se obtiene que:

$$\sigma^2(\alpha) = 16.24\alpha^2 - 6.005\alpha + 37.305$$

derivando con respecto a $\alpha$ :

$$\frac{\partial\sigma^2}{\partial\alpha} = 2(16.24)\alpha - 6.005$$

e igualando a cero se obtiene:

$$32.4876\alpha \ - 6.005 = 0$$

$$\alpha^* = 0.1849$$

entonces la varianza mínima posible con una cartera de rendimiento esperado de 33% es:

$$\sigma^2(\alpha^*) = 16.24(0.1849)^2 - 6.005(0.1849) + 37.3052 = 36.7497$$

Con esta información, se tiene que las proporciones a invertir en la cartera óptima de los instrumentos seleccionados es la siguiente:

Xct = 0.1849

Xbd = 0.7906

Xpc = 0.0245

Con esto, quedan especificados los elementos que minimizan la incertidumbre en la cartera de acuerdo al modelo de Markowitz.

## Conclusiones

Nótese que en general no se dijo nada concreto acerca de la selección del horizonte de planeación ni de cómo este se debe dividir en períodos, ya que estos son problemas de carácter práctico y no hay reglas específicas para resolverlos; sin embargo, Orgler[2] proporciona una solución adecuada para propósitos prácticos.

Por otro lado, para efectos de decisión parece más adecuada la frontera de mínimo riesgo que la de carteras eficientes, porque dada una cartera en la frontera de carteras de mínimo riesgo, también se está seguro de que es eficiente. En contraste, este no es el caso con una cartera escogida exclusivamente con base en su eficiencia, ya que la eficiencia por sí sola no indica el nivel de riesgo. Es decir, no es posible saber fácilmente sobre qué punto de la frontera de mínimo riesgo se encuentra dicha cartera.

En cuanto a la viabilidad técnica, se puede notar que los problemas serían más difíciles por las no linealidades a que podrían dar lugar los planteamientos. Sin embargo, la solución de los modelos estáticos no presenta problemas de cómputo serios con los medios que existen en la actualidad. En cambio, cualquier dinamización del problema puede presentar demandas de capacidad de cómputo considerables por varias razones, ya que puede ser difícil utilizar proporciones de la cartera como variables de decisión, pues podría conducir a problemas estructuralmente más complejos. Otro problema puede ser que en la mecánica habría que explicitar la incertidumbre también en las restricciones y no solamente en la función objetivo, lo cual implica más no-linealidades y por ello mayor complejidad. Por lo tanto, el dinamizar modelos con criterios de riesgo explícitos en la práctica parece conducir a problemas o muy complejos y difíciles de resolver, o a problemas que se pueden resolver pero con menos apego a la realidad.

No obstante, no se debería menospreciar el valor práctico de los modelos analizados, ya que si no captan bien las relaciones en el proceso de inversión, si captan de manera rigurosa el elemento de riesgo en cuanto a rendimiento.

Acerca de la técnica que se utilizó para resolver el problema de minimización de varianza, en apariencia no es difícil la solución, ya que en el ejemplo resuelto, el proceso de optimización se reduce a un problema de una sola dimensión, lo cual no es válido en general y aunque se podría hacer una generalización del método, sería más difícil que el que se utilizó para resolver el ejercicio. Sin embargo debido a la estructura del problema, es posible diseñar métodos numéricos eficientes para resolver estos problemas, de hecho ya existe uno que presentó Sharpe[3], donde dice que se puede parametrizar el modelo y encontrar muchos puntos sobre la frontera de carteras eficientes en una forma bastante económica en el aspecto computacional.

---

[2] ORGLER, Y.E. "An Unequal Period Model for Cash Management Decisions", Management Science, no. 16, 1969. [s.p., s.pp., s.e.]

[3] SHARPE, W.F. "Portfolio Theory and Capital Markets", McGraw-Hill Book Co, 1970. [s.p., s.pp.]

En la aplicación que se llevó a cabo, se presentó el modelo de Markowitz donde se calcula la media y la varianza de una cartera, en el que durante el desarrollo del modelo, el autor definió una frontera eficiente de las inversiones en términos de una cartera que con una varianza dada tenga el rendimiento esperado más grande, o que con un rendimiento esperado dado tenga la varianza más pequeña. Desafortunadamente, el mundo real no es un mundo de medias y varianzas, porque otros factores (como la distribución de probabilidad de los resultados) tenderán a afectar los cálculos y por lo tanto, las decisiones.

Con relación al aspecto anterior, es importante comentar que un punto que consideran en general los modelos, es que si los rendimientos tienen una distribución normal, la mayoría de los criterios producen carteras óptimas, en caso contrario podrían darse resultados muy diferentes y probablemente equivocados.

Además, si suponemos que los valores esperados de todas las inversiones son iguales, una persona que desee eludir el riesgo deberá buscar inversiones correlacionadas en forma negativa. Agotada esta probabilidad, el segundo medio de reducción del riesgo consiste en encontrar inversiones independientes e incluirlas en la cartera (que sólo quedaría limitada por los costos de información y transacción), entonces el riesgo puede reducirse agregando inversiones correlacionadas en sentido positivo mientras la correlación sea menor, situación que no sucede en el mercado doméstico mexicano, ya que como pudo observarse en el ejercicio, los tres instrumentos están fuertemente correlacionados positivamente, y aún cuando se hubiera hecho una selección diferente de valores, con toda seguridad estarían altamente correlacionados en el mismo sentido. Sin embargo, resulta interesante advertir los incentivos para la inclusión de un gran número de tipos de inversiones en una cartera si el objetivo es sólo la reducción de la varianza de la inversión total, además hay que pensar en fijar una meta real para las ganancias sin tratar de cambiar la naturaleza de los valores y afectar la estrategia de inversión de acuerdo a las expectativas de las posibilidades de ganar o perder.

No obstante, el presente trabajo muestra técnicas viables de medición de carteras de inversión, con la idea de servir de incentivo para otros desarrollos donde se avoque al tratamiento de no-linealidades, etapas múltiples de inversión, alternativas mutuamente excluyentes, etcétera.

Por otro lado, no debe olvidarse la celeridad con la cual las decisiones deben ser tomadas, ya que en el ambiente financiero y la globalización de hoy día, los cambios son vertiginosos. Bajo esta consideración, métodos heurísticos que conduzcan a una decisión eficiente (aunque no óptima) pueden ser apreciados por los inversionistas.

**Bibliografía:**

CT MAO, James. *Análisis Financiero.* Ed. El Ateneo. Buenos Aires, Argentina 1980.

BIERMAN, H; SMIDT, S. *El Presupuesto de Capital.* La Toma de Decisiones. Fondo de Cultura Económica. México 1977.

ELTON, E; GRUBER, M. *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis.* John Wiley & Sons. Tercera Edición. Singapore 1987.

MARMOLEJO GONZALEZ, M. *Inversiones. Práctica, Metodología, Estrategia y Filosofía.* Instituto Mexicano de Ejecutivos de Finanzas, A.C. Primera Edición. México 1985.

MARQUEZ D-C, J. *Carteras de Inversión.* Ed. Limusa. México 1981.

SHARPE, W. *Portfolio Theory and Capital Markets.* McGraw-Hill. Series in Finance. 1970.

SOLBERG, R. *Sovereign Rescheduling: Risk and Portfolio Management.* Unwin Hyman. 1988.

**Artículos y Revistas:**

*Alternativas de Financiamiento en el Mercado de Valores. Guía para las Empresas.* Bolsa Mexicana de Valores, Instituto Mexicano del Mercado de Capitales. México. [s.a.]

Boletín Informativo. *El Mercado de Valores Mexicano.* Bolsa Mexicana de Valores, Instituto Mexicano del Mercado de Capitales. México. [s.a., s.pp.]

Boletín Informativo. *Mercado de Dinero.* Bolsa Mexicana de Valores. México 1989.

Boletín Informativo para uso interno del Mercado de Valores. *Acciones y Valores.* México 1991.

Circulares-Telefax del Banco de México.

*Instrumentos Financieros del Mercado de Dinero.* Academia Mexicana de Derecho Bursátil, A.C / Nacional Financiera. México 1992.