



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TEORIA DE GRADO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
M A T E M A T I C O
P R E S E N T A :
ALFREDO CANO RODRIGUEZ



DIRECTOR DE ESTUDIOS:
DRA. MÓNICA CLAPP JIMÉNEZ LABORA

FACULTAD DE CIENCIAS
1997

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
" TEORIA DE GRADO "

realizado por ALFREDO CANO RODRIGUEZ

con número de cuenta 9262262-3 , pasante de la carrera de MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

DRA.
Directora de Tesis
Propietario

DR.
Propietario

DR.
Propietario

DR.
Suplente

M. en C.
Suplente

MONICA ALICIA CLAPP JIMENEZ LABORA. *M. Clapp*

CARLOS FRIETO de CASTRO. *[Firma]*

ERNESTO VALLEJO RUIZ. *[Firma]*

GUILLERMO SIENRA LOERA. *[Firma]*

DEBORAH OLIVEROS BRANIFF. *Deborah Oliveros Braniff*

Consejo Departamental de Matemáticas

[Firma]
DR. MANUEL FALCONI MAGANA.

FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
MATEMÁTICAS

*Viven a nuestro lado,
los ignoramos, nos ignoran.
Alguna vez conversan con nosotros.
Objetos. Octavio Paz.*

Es necesario dedicar esta tesis a mis padres Ma. Luisa Rodríguez y Félix Cano por haber creído en mi y por el apoyo infinito que me brindan. A mis hermanos siempre pendientes de mis logros.

Dedico también este trabajo a todas aquellas personas que me han ayudado a estar en esta situación, y que por no excluirlos no nombro; a mis amigos de prepa que a pesar del tiempo se que están conmigo; a lo de la facultad de Ciencias con los que compartía futuros similares, entre estos una dedicatoria especial al duo del exilio; a los compañeros del Instituto de Matemáticas por su ayuda en el escrito de este trabajo y su constante preocupación por terminarlo.

Finalmente agradezco el apoyo de mis sinodales y la paciencia de la Dra. Mónica Clapp.

Alfredo Cano Rodríguez.

Indice

	0
Introducción	3
1 Preliminares (Topología diferencial)	5
1.1 Introducción.	5
1.2 Teorema de la función inversa.	6
1.3 Teorema de la preimagen.	11
1.4 Teoremas de aproximación.	14
1.5 El teorema de Sard	23
2 El grado de una aplicación	27
2.1 Introducción.	27
2.2 Grado de una aplicación diferenciable.	28
2.3 Grado de una aplicación continua.	39
2.4 Propiedades del grado.	44
2.5 Aplicaciones.	68
3 Otros Invariantes Topológicos	77
3.1 El número de vueltas.	77
3.2 El número de corte.	81
3.3 El número de enredamiento.	90
3.4 Relación entre los invariantes definidos.	94
Bibliografía	97

Introducción

Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= y_1 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= y_n, \end{aligned} \tag{0.1}$$

donde cada $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación continua definida para un abierto U de \mathbb{R}^n . Nos preguntamos si este sistema tiene solución y si es así cuantas soluciones tiene. Es decir, nos interesa conocer la imagen inversa de y bajo la función

$$f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Si f es lineal y $U = \mathbb{R}^n$ la respuesta es sencilla: el sistema 0.1 tiene solución si y solo si $\det f \neq 0$; y en este caso la solución es única. Si f no es lineal el problema es mucho más complicado. Las imágenes inversas de puntos cercanos pueden ser muy diferentes. Lo mismo puede ocurrir si perturbamos un poco a la aplicación f .

Si f es diferenciable, U es acotado y y es un valor regular de f entonces $f^{-1}(y)$ es finito. Si "contamos" los puntos de $f^{-1}(y)$ poniéndoles un "signo", es decir contándolos como ± 1 dependiendo de si el signo del determinante Jacobiano, $\det(Df(x))$, es positivo o negativo, obtendremos un número entero que es un **invariante**, es decir, no varía cuando movemos ligeramente al valor regular y , ni cuando perturbamos a la aplicación f . estas propiedades nos permiten extender este invariante a valores y no regulares y, mejor aún, a aplicaciones continuas. Más aún estas propiedades hacen accesible el cálculo de este invariante.

Este invariante se llama el **grado de f en y** y es el personaje central de esta tesis.

El primer capítulo consiste básicamente en demostrar teoremas de topología diferencial que serán de utilidad en la definición del grado.

En el capítulo dos comenzamos con la definición y estudio del grado para aplicaciones diferenciables. El grado nos da a conocer la estructura que tiene la imagen inversa del valor regular sin encontrar explícitamente cual es esta. Con esta definición obtenemos teoremas importantes como el de la invariancia homotópica y de la continuidad del grado visto como aplicación.

Posteriormente se extiende la noción de grado a aplicaciones continuas. Para esto nos apoyamos en los teoremas de aproximación de aplicaciones continuas por diferenciables, expuestos también en el capítulo uno; de este modo podemos usar lo ya establecido y generalizar. El proceso de conteo en el grado en general no es posible. Demostraremos propiedades del grado que facilitan su cálculo como son los teoremas de determinación por la frontera, de aditividad, de multiplicatividad y otros. Aplicando teoría de grado demostraremos resultados muy interesantes como el teorema de descomposición de Jordan y el teorema de punto fijo de Brouwer.

En el último capítulo se relaciona el grado como un resultado analítico con cuestiones topológicas. Veremos el concepto del número de vueltas descrito a partir del grado, este número (winding number) es de los mas conocidos. También se define el número de corte y el número de enredamiento. Para fijar ideas supongamos dos curvas en el plano, el número de corte nos dice cuantas veces se intersectan las curvas, aquí la invariancia homotópica heredada del grado nos ayuda a remover puntos de corte hasta donde sea posible; en el caso del número de enredamiento imaginemos estas curvas en \mathbb{R}^3 , aquí se permite mas movilidad por lo que hay enlaces entre ellas, y entonces el conteo de cuantas veces se enreda una en la otra será nuestro invariante; en estos ejemplos especificamos dimensiones, pero las definiciones formales son mas generales.

Capítulo 1

Preliminares (Topología diferencial)

1.1 Introducción.

Recordemos primero unas definiciones y notación. A lo largo del trabajo se estarán considerando espacios euclidianos \mathbb{R}^n y subconjuntos en ellos, a menos que se indiquen otros diferentes. Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ podrá escribirse como $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y la norma utilizada será la de

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Además sabemos una norma nos induce una métrica. En el caso de medir distancias entre un punto $x \in \mathbb{R}^n$ y un subconjunto V en \mathbb{R}^n ésta la damos por

$$\rho(x, V) = \inf_{y \in V} |x - y|.$$

Decimos que una aplicación es de clase C^r si sus parciales hasta de orden r existen y son continuas. A lo largo del trabajo se considerarán en la mayoría de los casos aplicaciones de clase C^1 . El conjunto de aplicaciones $f: W \rightarrow \mathbb{R}^m$ con W abierto de \mathbb{R}^n y f de clase C^1 es el espacio $C^1(W, \mathbb{R}^m)$ (de dimensión infinita), y la norma en este espacio la damos con

$$\|f\| = \sup_{|x| \leq 1} |f(x)|$$

6 CAPÍTULO 1. PRELIMINARES (TOPOLOGÍA DIFERENCIAL)

Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una aplicación C^1 en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, diremos que $y \in \mathbb{R}^m$ es un **valor regular** de f si f tiene rango m en cada punto de $f^{-1}(y)$, es decir, si la dimensión de la imagen de la derivada $Df(x)$ en cada punto $x \in f^{-1}(y)$ es m (en particular, $m \leq n$) y entonces los **puntos regulares** serán los puntos de $f^{-1}(y)$. Con esto un valor $y \in f(U)$ que no es valor regular se dirá que es un **valor crítico** y también los puntos de $f^{-1}(y)$ serán **puntos críticos**.

1.2 Teorema de la función inversa.

Este teorema nos dice como se comporta una aplicación y su derivada en cierta vecindad de un valor regular: si $m = n$ la aplicación es un **difeomorfismo local**.

Teorema 1.2.1 *Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación C^1 , U abierto en \mathbb{R}^n , $a \in U$ punto regular tal que $f(a) = b$. Entonces existen abiertos W y V en \mathbb{R}^n que contienen a a y a b respectivamente y tales que $f : W \rightarrow V$ tiene inversa g , también C^1 , y además*

$$Dg(y) = [Df(g(y))]^{-1}$$

para todo $y \in V$.

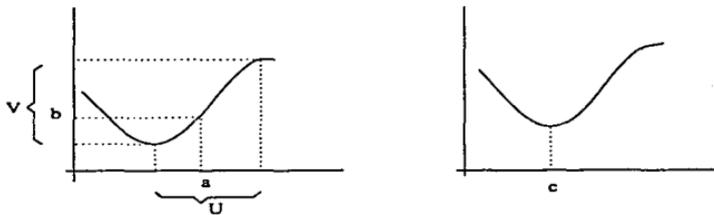


Figura 1.1: Teorema de la función inversa.

Demostración.

De las definiciones anteriores, que a sea punto regular implica que $\text{rango}(Df(a)) = n$, i.e., tiene rango máximo, y $Df(a)$ es invertible; entonces podemos tomar un valor c constante de modo que

$$4c \| [Df(a)]^{-1} \| = 1. \quad (1.1)$$

Por la continuidad de Df podemos encontrar una bola abierta W con centro en a , denotada $W(a)$, tal que para toda $x \in W$ se tenga que

$$\| Df(x) - Df(a) \| < 2c \quad (1.2)$$

Sea $x \in W(a)$ y $h \in \mathbb{R}^n$ tal que $h \neq 0$, y adecuada para que $x + h$ esté en W . Definimos $F(t) = f(x + th) - tDf(a)h$ con $0 \leq t \leq 1$. Entonces

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} F(t) \right| &= | (Df(x + th) - Df(a))h | \\ &\leq 2c | h | \\ &= 2c | [Df(a)]^{-1} Df(a)h | \\ &= \frac{1}{2} | Df(a)h |, \end{aligned}$$

i.e., $\frac{d}{dt} F(t)$ es acotado por $\frac{1}{2} | Df(a)h |$.

Con esto y como consecuencia del teorema fundamental del cálculo obtenemos la desigualdad

$$| F(1) - F(0) | \leq \frac{1}{2} | Df(a)h |,$$

o bien

$$| f(x + h) - Df(a)h - f(x) | \leq \frac{1}{2} | Df(a)h |. \quad (1.3)$$

Así

$$\begin{aligned} | f(x + h) - f(x) | &\geq | Df(a)h | - | f(x + h) - f(x) - Df(a)h | \\ &\geq | Df(a)h | - \frac{1}{2} | Df(a)h | = \frac{1}{2} | Df(a)h |. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Si $h \neq 0$, entonces $x \neq x + h$ y por lo anterior $f(x + h) \neq f(x)$, que es la prueba de que f es uno a uno en $W(a)$.

Escogemos $V = f(W)$; necesitamos ver que es un abierto en \mathbb{R}^n .

8 CAPÍTULO 1. PRELIMINARES (TOPOLOGÍA DIFERENCIAL)

Tomemos una bola abierta, de radio r y con centro x_0 , $B_r(x_0)$, para x_0 fijo en W , y tal que $\overline{B_r(x_0)} \subset W$. A continuación probaremos que la bola de radio cr con centro en $f(x_0)$ está contenida en V .

Sea $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $|y - f(x_0)| < cr$, es decir, un y que está en la bola abierta de radio cr con centro en $f(x_0)$. Definimos $\phi : \overline{B_r} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\phi(x) = |y - f(x)|$; con esto, en x_0 se tiene que $\phi(x_0) < cr$. Obsérvese que ϕ es continua en $\overline{B_r(x_0)}$. Así

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - y| + |y - f(x_0)| = \phi(x) + \phi(x_0) < \phi(x) + cr;$$

y de 1.1 y 1.4 se tiene que $|f(x) - f(x_0)| \geq \frac{1}{2} \|Df(a)\| |r| = 2cr$, para todo $x \in \partial B_r(x_0)$. De ambas desigualdades se deduce que $cr < \phi(x)$ y entonces se tiene

$$\phi(x_0) < cr < \phi(x) \quad \text{para } x \in \partial \overline{B_r}. \quad (1.5)$$

Dado que $\overline{B_r}$ es compacto en \mathbb{R}^n y ϕ es continua en $\overline{B_r(x_0)}$, ϕ alcanza su mínimo \bar{x} en $\overline{B_r(x_0)}$ y por 1.5 $\bar{x} \in B_r(x_0)$.

La invertibilidad de $Df(a)$ nos permite encontrar un $h \in \mathbb{R}^n$ tal que $Df(a)h = y - f(\bar{x})$, y entonces para $\epsilon \in (0, 1)$ adecuado, $\bar{x} + \epsilon h \in B_r$ y

$$|Df(a)\epsilon h - (y - f(\bar{x}))| = (1 - \epsilon) |y - f(\bar{x})|.$$

De 1.3

$$\begin{aligned} |f(\bar{x} + \epsilon h) - f(\bar{x}) - Df(a)\epsilon h| &\leq \frac{1}{2} |Df(a)\epsilon h| \\ &= \frac{\epsilon}{2} |y - f(\bar{x})|. \end{aligned}$$

sumando las dos ecuaciones anteriores

$$\begin{aligned} |Df(a)\epsilon h - (y - f(\bar{x}))| + |f(\bar{x} + \epsilon h) - f(\bar{x}) - Df(a)\epsilon h| \\ \geq |f(\bar{x} + \epsilon h) - y| = \phi(\bar{x} + \epsilon h) \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} \phi(\bar{x} + \epsilon h) &\leq \frac{1}{2} \epsilon |y - f(\bar{x})| + (1 - \epsilon) |y - f(\bar{x})| \\ &= (1 - \frac{\epsilon}{2}) |y - f(\bar{x})| = (1 - \frac{\epsilon}{2}) \phi(\bar{x}) \end{aligned}$$

De esto, si suponemos $\phi(\bar{x}) > 0$ entonces $\phi(\bar{x} + \epsilon h) \leq \phi(\bar{x}) - (\frac{\epsilon}{2})\phi(\bar{x}) < \phi(\bar{x})$, es decir, $\phi(\bar{x})$ no es mínimo. Por lo tanto $\phi(\bar{x}) = 0$, y por como definimos ϕ , concluimos que $y = f(\bar{x})$. Así cada punto en V lo podemos considerar como un $f(x_0)$ el cual es centro de una bola de radio ϵr que está completamente contenida en V ; por lo que V es abierto como se quería.

Hemos demostrado que $f: W \rightarrow V$ es biyectiva por lo cual tiene una inversa que la denotamos por g .

Probemos ahora que para $x \in W(a)$, $Df(x)$ tiene inversa. De como escogimos a c y de la invertibilidad de $Df(a)$,

$$\begin{aligned} |h| &= |[Df(a)]^{-1}Df(a)h| \leq \| [Df(a)]^{-1} \| |Df(a)h| \\ &= (1/4c) |Df(a)h| \end{aligned}$$

para $h \in \mathbb{R}^n$. Y entonces, por 1.2,

$$\begin{aligned} 2c|h| &= (4c - 2c)|h| \leq |Df(a)h| - 2c|h| \\ &\leq |Df(a)h| - |(Df(x) - Df(a))h| \\ &\leq |Df(x)h|. \end{aligned}$$

De esto, si $Df(x)h = Df(x)h'$, para $h, h' \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$0 = |Df(x)(h - h')| \geq 2c|h - h'| \Rightarrow h = h'$$

que demuestra que, para toda $x \in W$, el operador lineal

$$Df(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

es uno a uno, esto en un espacio vectorial de dimensión finita y por lo tanto tiene una inversa. Veamos cuál es ésta.

Tomemos y tal que y y $y + k$ estén en V y se cumple $g(y) = x$. Definimos $h = g(y + k) - g(y)$. Como f es C^1 podemos hacer $k = f(x + h) - f(x) = Df(x)h + r(h)$, donde $\frac{|r(h)|}{|h|} \rightarrow 0$ si $h \rightarrow 0$. Aplicando a k la inversa de $Df(x)$ tenemos

$$[Df(x)]^{-1}k = h + [Df(x)]^{-1}r(h) = g(y + k) - g(y) + [Df(x)]^{-1}r(h);$$

entonces $g(y + k) - g(y) = [Df(x)]^{-1}k - [Df(x)]^{-1}r(h)$. Además con 1.4, $|k| = |f(x + h) - f(x)| \geq \frac{1}{2}|Df(a)h|$, que nos dice que $h \rightarrow 0$ si

$k \rightarrow 0$; por lo que

$$\frac{|[Df(x)]^{-1}r(h)|}{|k|} \leq \frac{\|[Df(x)]^{-1}\| |r(h)|}{2c |h|} \rightarrow 0 \text{ si } k \rightarrow 0$$

Por lo tanto g es diferenciable y $Dg(y) = [Df(g(y))]^{-1} \forall y \in V$. ■

Un resultado muy importante es el teorema de la función implícita que resulta como un corolario del anterior. En este se suponen aplicaciones $f_i: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ tales que $f_i(a, b) = 0$ para cada i ; y se responde a la pregunta de cuándo puedo encontrar para cada x cercano a a un único y cercano a b tales que satisfagan que $f_i(x, y) = 0$.

Teorema 1.2.2 (De la función implícita). *Sea $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ de clase C^1 en un abierto que contiene a (a, b) y $f(a, b) = 0$. Si M es la matriz $m \times m$*

$$D_{n+j}f^i(a, b), \quad 1 \leq i, j \leq m,$$

y $\det M \neq 0$, entonces existen conjuntos abiertos $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ que contienen a a y a b respectivamente, tales que para cada $x \in U$ existe una única $g: U \rightarrow V$ de clase C^1 tal que $g(a) = b$ y $f(x, g(x)) = 0$.

Demostración.

Sea $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ dada por $F(x, y) = (x, f(x, y))$ que también es de clase C^1 . Con ésta, $\det DF(a, b) = \det Id \cdot \det M \neq 0$ y así (a, b) es punto regular de F . Por el teorema 1.2.1 existe $W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ vecindad de $F(a, b) = (a, 0)$ y una vecindad abierta, $U \times V$, en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ que contiene a (a, b) . Entonces la aplicación F restringida $F: U \times V \rightarrow W$ es C^1 y tiene inversa diferenciable

$$h: W \rightarrow U \times V \text{ de la forma } h(x, y) = (x, k(x, y))$$

donde $k: U \times V \rightarrow V$ es C^1 .

Ahora consideremos $\pi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $\pi(x, y) = y$; con esta se tiene que $\pi \circ F = f$, y entonces

$$\begin{aligned} f(x, k(x, y)) &= f(h(x, y)) = \pi \circ F(h(x, y)) = \\ &= \pi(F \circ h(x, y)) = \pi(x, y) = y. \end{aligned}$$

En particular si $y = 0$, $f(x, k(x, 0)) = 0$; por lo que la aplicación g que buscamos es $g(x) = k(x, 0)$. ■

1.3 Teorema de la preimagen.

Un concepto que nos es necesario definir es el de subvariedad de un espacio euclidiano. Decimos que un espacio topológico M Hausdorff con base numerable es una **variedad n-dimensional** si este es localmente homeomorfo a algún \mathbb{R}^n . Formalmente, es necesario que exista una cubierta abierta $\{U_i\}_{i \in I}$ de M tal que para cada $i \in I$ exista una aplicación $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ que manda U_i homeomorficamente sobre un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . A el par (ϕ_i, U_i) se le llama una carta, y al conjunto de cartas $\{(\phi_i, U_i)\}_{i \in I}$ un atlas. Decimos que dos cartas tienen un cambio de coordenadas de clase C^1 si

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$$

es de clase C^1 . Y entonces una variedad será de clase C^1 si todos sus cambios de coordenadas son C^1 .

Como un ejemplo clásico podemos tomar

$$M = S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\},$$

la n-esfera, que la cubrimos por un número finito de hemisferios abiertos

$$U_{2j-1} = \{x \in S^n : x_j < 0\},$$

$$U_{2j} = \{x \in S^n : x_j > 0\},$$

para $j = 1, \dots, n+1$. Las funciones ϕ_i son en este caso las proyecciones sobre el hiperplano $x_j = 0$.

Dentro de estas variedades podemos encontrar subconjuntos con estructura de variedad. Un subconjunto A de una variedad n-dimensional M se dirá que es una **subvariedad** de M si para algún entero $k \geq 0$ menor o igual que n , cada punto de A pertenece a un abierto U_i de M y

$$U_i \cap A = \phi^{-1}(\mathbb{R}^k),$$

donde ϕ es un homeomorfismo como antes y $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ es el conjunto de puntos cuyas últimas coordenadas $n - k$ se anulan; con esto la subvariedad A tendrá dimensión k , o bien codimensión $n - k$.

12CAPÍTULO 1. PRELIMINARES (TOPOLOGÍA DIFERENCIAL)

Teorema 1.3.1 Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}^k$ una aplicación de clase C^1 , con A un abierto en \mathbb{R}^{n+k} . Si $y \in f(A)$ es un valor regular entonces $f^{-1}(y)$ es una subvariedad de clase C^1 de dimensión n en \mathbb{R}^{n+k} .

Demostración.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $y = 0$, pues nos basta con tomar la aplicación $f(x) - y$. Sea $M = f^{-1}(0)$, y $p \in M$; como $M \subset \mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ podemos hacer $p = (a, b)$ donde $a \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}^k$. Luego ya que 0 es valor regular aplicamos el teorema 1.2.2; entonces existe una vecindad $U \times V$ de (a, b) en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ y una aplicación C^1 $g : U \rightarrow V$ tal que $g(x) = z$ si y sólo si $f(x, z) = 0$.

Así

$$M \cap (U \times V) = \{(x, g(x)) : x \in U\},$$

que es la gráfica de g y que vamos a denotar con W .

Definimos entonces la aplicación $\phi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\phi(x, g(x)) = x$ ($x \in U$), la cual analizándola vemos que aplica W homeomorficamente a el abierto U en \mathbb{R}^n , con lo que M tiene estructura de variedad de dimensión n en \mathbb{R}^{n+k} . Mas aún, M es de clase C^1 ya que, como se construyen las cartas, estas son C^1 , y $\phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow W$ dada por $\phi^{-1}(x) = (x, g(x))$ también lo es; así que si (ψ, W') es otra carta de M

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(W \cap W') \rightarrow \psi(W \cap W')$$

es de clase C^1 . ■

Hay un caso particular que nos interesa que es para $n = 1$. Clasifiquemos ahora estas variedades de dimensión 1.

Teorema 1.3.2 Sea M una variedad diferenciable conexa de dimensión 1, entonces M es difeomorfa a S^1 o a algún intervalo abierto en \mathbb{R} .

Demostración.

Sean I, J intervalos en \mathbb{R} ; supongamos $f : I \rightarrow M$, $g : J \rightarrow M$, parametrizaciones por longitud de arco de M . La aplicación

$$g^{-1} \circ f : I \cap f^{-1}(g(J)) \rightarrow J \cap g^{-1}(f(I))$$

manda un relativamente abierto de I a un relativamente abierto de J , además es difeomorfismo local ya que g y f lo son.

Tomamos $V = \{(s, t) \in I \times J : f(s) = g(t)\}$, que es cerrado en $I \times J$. Como f y g parametrizan por longitud de arco, V constará de segmentos con pendiente $+1$ o -1 , según si f y g parametrizan en la misma dirección o al contrario. Estos segmentos se extienden a la frontera de $I \times J$ debido a que V es cerrado en $I \times J$.

Por lo anterior, V tiene a lo mas dos componentes.

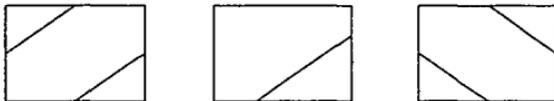


Figura 1.2: Una o dos componentes.

Si V es conexa (tiene una componente), a

$$g^{-1} \circ f : I \cap f^{-1}(g(J)) \longrightarrow J \cap g^{-1}(f(I)),$$

que es lineal como podemos observar en la figura, la podemos extender a los reales por una aplicación afín $L : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Y entonces la parametrización

$$F : I \cup L^{-1}(J) \longrightarrow f(I) \cup g(J), \quad F(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in I \\ g \circ L(t) & \text{si } t \in L^{-1}(J) \end{cases}$$

extiende a f .

Si V es no conexa tiene a lo mas dos componentes. Sin pérdida de generalidad supongamos que I tiene como extremos al 0 y al 1, $J = (\gamma, \beta)$, y que la pendiente de las dos componentes es $+1$.

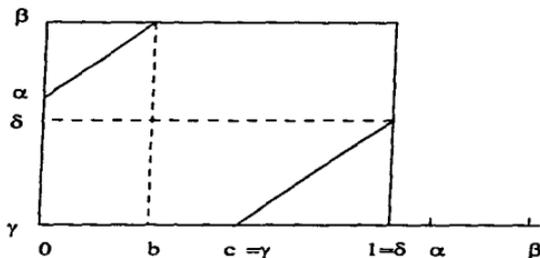
Analizando la figura y haciendo coincidir $\gamma = c$, $\delta = 1$ se tiene

$$0 < b \leq c < 1 \leq \alpha < \beta.$$

Definimos ahora $h : S^1 \longrightarrow M$ como

$$h(\cos(\theta), \sin(\theta)) = \begin{cases} f(t) & 0 < t < 1 \\ g(t) & \gamma < t < \beta \end{cases}$$

$$\text{con } \theta = \frac{2\pi t}{\alpha}.$$

Figura 1.3: Si V es no conexa.

Este es un difeomorfismo local ya que f y g lo son, y es inyectivo.

Además como $h(S^1)$ es abierto, ya que siempre podemos encontrar para cada punto un abierto que lo contenga y completamente contenido en $h(S^1)$, y $h(S^1)$ es compacto por ser imagen continua de un compacto, en particular es cerrado; entonces $h(S^1) = M$.

Así si V es no conexa, M es difeomorfa a S^1 .

Por último, todo par de parametrizaciones por longitud de arco de M se puede extender con un proceso como en el caso conexo hasta maximizar el intervalo de definición, y obtenemos alguno de los casos expuestos. ■

1.4 Teoremas de aproximación.

Comencemos recordando una definición. Se dice que un espacio X dotado con cierta topología es **normal** si para cualesquiera A, B cerrados disjuntos en X , existen abiertos ajenos U y V tales que $A \subset U$ y $B \subset V$. Para nuestro interés nos basta que el espacio sea \mathbb{R}^n con la topología de bolas abiertas. Sin embargo en estos resultados vemos el caso general.

Lema 1.4.1 (De Urysohn). *Un espacio topológico X es normal si y solo si para cualesquiera dos cerrados disjuntos A y B en X , existe*

una aplicación continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ con $f(A) = 0$ y $f(B) = 1$.

Demostración.

Por normalidad podemos encontrar U abierto que contiene a A y tal que $\bar{U} \cap B = \emptyset$; observamos entonces que $X - U$ es cerrado y $(X - U) \cap A = \emptyset$. También por normalidad hay un abierto W que contiene a A y $\bar{W} \cap (X - U) = \emptyset$, y un abierto V que contiene a \bar{U} y $\bar{V} \cap B = \emptyset$, esto es

$$A \subset W, \bar{W} \subset U, \bar{U} \subset V \text{ y } \bar{V} \cap B = \emptyset.$$

Podemos hacer lo mismo para los cerrados disjuntos A y $X - W$, V y B , pero obtendríamos mas abiertos; para facilitar las cosas pongámosle índices

$$W = U_{\frac{1}{4}}, U = U_{\frac{1}{2}}, V = U_{\frac{3}{4}},$$

así

$$A \subset U_{\frac{1}{4}}, \bar{U}_{\frac{1}{4}} \subset U_{\frac{1}{2}}, \bar{U}_{\frac{1}{2}} \subset U_{\frac{3}{4}}, \bar{U}_{\frac{3}{4}} \subset B = \emptyset.$$

Ahora sí, con procesos similares creamos una sucesión con conjuntos $U_{\frac{k}{2^n}}$ con $k = 1, \dots, 2^n - 1$ arreglados de la siguiente forma

$$A \subset U_{\frac{1}{2^n}}, \dots, \bar{U}_{\frac{k-1}{2^n}} \subset U_{\frac{k}{2^n}}, \dots, \bar{U}_{\frac{2^n-1}{2^n}} \cap B = \emptyset.$$

Sea I el conjunto de índices que se obtienen; entonces podemos decir que para todo $i \in I$, $A \subset U_i$ y $\bar{U}_i \cap B = \emptyset$, además de que $\bar{U}_i \subset U_j$ para $i < j$ en I .

Sea $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin U_i \quad \forall i \in I \\ \inf\{i \in I : x \in U_i\} & \text{si } x \in U_i \text{ para algún } i \in I \end{cases}$$

Notese que si hacemos que n tienda a infinito $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$ y entonces $\forall x \in A$, $f(x) = 0$. Y por otro lado si $x \in B$ entonces $x \notin U_i$, $\forall i \in I$ por lo que $f(x) = 1 \quad \forall x \in B$.

La aplicación es continua, ya que si $x \notin U_i$ entonces $f(x) \geq i$ y si tomamos una sucesión que converja a algún otro punto en B , esta se aplica en una sucesión que converge a 1; si $x \in U_i$ se tiene que $f(x) \leq i$ y para toda sucesión convergente a algún punto en A se aplica en una

16CAPÍTULO 1. PRELIMINARES (TOPOLOGÍA DIFERENCIAL)

sucesión que converge a 0; por último si $x \in U_r - \bar{U}_s$, donde $s < r$ entonces $s \leq f(x) \leq r$ y cada sucesión que converja a algún punto en $U_r - \bar{U}_s$, se aplica en una sucesión convergente a algún $i \in I$ tal que $s \leq i \leq r$. De este modo f es continua en todo X .

Ahora supongamos que para A y B cualesquiera cerrados ajenos en X existe una aplicación f tal que $f(A) = 0$ y $f(B) = 1$, entonces solo tomamos los abiertos $f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$, $f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ (relativos) que claramente son ajenos en X y contienen a A y a B respectivamente. Esto demuestra la normalidad de X . ■

Con este lema estamos preparados para demostrar el teorema de nuestro interés.

Teorema 1.4.1 (De extensión de Tietze). *Un espacio topológico X es normal si y solo si para cualquier conjunto cerrado A de X y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua, existe una extensión de f a todo X , i.e., existe una aplicación continua $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F|_A = f$.*

Demostración.

Supongamos primero que f va de A en $[-1, 1]$. Definamos los subconjuntos cerrados de A

$$A_1 = \{x \in A : f(x) \geq \frac{1}{3}\}, \quad B_1 = \{x \in A : f(x) \leq -\frac{1}{3}\}.$$

Por la continuidad de la aplicación se tiene que estos subconjuntos son ajenos en A y por tanto también en X . Por el lema de Urysohn la normalidad implica que existe una aplicación continua $f_1 : X \rightarrow [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ tal que

$$f_1(A_1) = \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad f_1(B_1) = -\frac{1}{3}.$$

Con estas condiciones lo que hay que observar es lo siguiente: para un $x \in A$ cualquiera $|f(x)| \leq 1$ y $|f_1(x)| \leq \frac{1}{3}$; para $x \in A_1 \cup B_1$, $|f(x) - f_1(x)| \leq \frac{2}{3}$; y para $x \in A - (A_1 \cup B_1)$ tanto $f(x)$ como $f_1(x)$ están entre $\frac{1}{3}$ y $-\frac{1}{3}$, esto es, $|f(x) - f_1(x)| < \frac{2}{3}$. Así $|f(x) - f_1(x)| \leq \frac{2}{3} \quad \forall x \in A$ y por lo tanto la aplicación $f - f_1$ va de A sobre $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$.

Denotemos $g_1 = f - f_1 : A \rightarrow [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$, y partimos de nuevo,

$$A_2 = \{x \in A : g_1(x) \geq \frac{2}{9}\}, \quad B_2 = \{x \in A : g_1(x) \leq \frac{2}{9}\}.$$

Luego por Urysohn existe $f_2 : X \rightarrow [-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}]$ continua tal que

$$f_2(A) = \frac{2}{9}, \quad f_2(B) = -\frac{2}{9}.$$

Para $x \in A - (A_2 \cup B_2)$ tanto g_1 como f_2 están entre $-\frac{2}{9}$ y $\frac{2}{9}$, entonces

$$|f(x) - f_1(x) - f_2(x)| = |g_1(x) - f_2(x)| \leq \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \quad \forall x \in A.$$

Repitiendo el proceso podemos encontrar aplicaciones $f_3, f_4 \dots$ tales que para la n -ésima aplicación continua $f_n : X \rightarrow [-\frac{2^{n-1}}{3^n}, \frac{2^{n-1}}{3^n}]$ se tenga

$$|f(x) - \sum_{i=1}^n f_i(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \forall x \in A.$$

Si hacemos que n tienda a infinito $(\frac{2}{3})^n \rightarrow 0$ y así

$$|f(x) - \sum_{i=1}^n f_i(x)| \rightarrow 0 \quad \forall x \in A,$$

por lo que

$$G = \sum_{i=1}^{\infty} f_i : X \rightarrow [-1, 1]$$

es la aplicación que buscamos, si cumple que es continua. Veamos esto último.

Sea $\epsilon > 0$ y $x \in X$. Fijamos $N > 0$ tal que $\sum_{n=N+1}^{\infty} (\frac{2}{3})^n < \frac{\epsilon}{2}$. Por la continuidad de las f_i^s para $i = 1, \dots, N$, hay abiertos U_i que contienen a x tales que para toda $y \in U_i$ se tenga

$$|f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\epsilon}{2N}.$$

Luego la intersección finita $U = U_1 \cap \dots \cap U_N$ es abierto en X , que contiene a x , y si y en X es distinto de x entonces

$$\begin{aligned} |G(x) - G(y)| &= \left| \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) - \sum_{i=1}^{\infty} f_i(y) \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^N f_i(x) - \sum_{i=1}^N f_i(y) \right| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{i=N+1}^{\infty} f_i(x) - \sum_{i=N+1}^{\infty} f_i(y) \right| \\
\leq & \sum_{i=1}^N \frac{\epsilon}{2N} + 2 \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{2^{i-1}}{3^i} \\
< & \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Y así G es continua en X , y en A coincide con f .

Para generalizar a \mathbb{R} nos basta con tomar el homeomorfo $(-1, 1)$. Sin ningún problema podemos escribir $f : A \rightarrow [-1, 1]$; por lo anterior se puede extender a X por G . Pero entonces $|G(x)| = |f(x)| < 1 \forall x \in A$, y si $A_0 = \{x \in X : |G(x)| = 1\}$, vemos que $A_0 \cap A = \emptyset$ y son cerrados en X . Nuevamente por Urysohn existe $h : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $h(A) = 1$ y $h(A_0) = 0$. Entonces damos $F : X \rightarrow (-1, 1)$ por $F(x) = h(x)G(x)$ que también es continua en X y para $x \in A$, $F(x) = 1G(x) = f(x)$.

El otro sentido del teorema se demuestra como sigue: si A y B son cerrado ajenos en X , $A \cup B$ es cerrado; ahora solo damos la aplicación

$$f : A \cup B \rightarrow [0, 1] \text{ por } f(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in A \\ 1 & \forall x \in B. \end{cases}$$

La continuidad se da por la propiedad de ajenos de A y B . Por las hipótesis podemos extender la aplicación a X con $F : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $F|_{A \cup B} = f$, es decir,

$$F(A) = 0 \text{ y } F(B) = 1.$$

Y por Urysohn X es normal. ■

La siguiente parte de esta sección se refiere en gran parte a las particiones de la unidad.

Definamos primero lo que es una partición de la unidad. Sea X subconjunto de \mathbb{R}^n y Γ una familia de subconjuntos abiertos también en \mathbb{R}^n tales que $X = \cup_{V \in \Gamma} V$. Entendemos por una **partición de la unidad subordinada** a Γ a una familia de aplicaciones C^∞ ,

$$\pi_V : X \rightarrow [0, 1], \quad V \in \Gamma,$$

que cumplen

(i) π_V se anula en $X - V$, i.e., $\pi_V^{-1}(0, 1] \subset V$,

(ii) para cada x en X se tiene

$$\sum_{V \in \Gamma} \pi_V(x) = 1.$$

Además decimos que la partición es **localmente finita** si para cada x en X podemos encontrar una vecindad en X en la que todas excepto un número finito de las π_V son cero.

Lo que queremos probar es que si tenemos una cubierta abierta de un abierto X en \mathbb{R}^n , siempre podemos encontrar una partición de la unidad localmente finita subordinada a la cubierta dada. Para esto probamos antes dos lemas.

Lema 1.4.2 Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ abierto y Γ un sistema de conjuntos abiertos V tales que $\cup_{V \in \Gamma} V = X$; entonces hay en \mathbb{R}^n dos sucesiones de bolas

$$B_{r_j}(a_j) \subset B_{s_j}(a_j),$$

con $0 < r_j < s_j$ para $j = 1, 2, \dots$, tales que cumplen lo siguiente:

- (i) Cada bola $B_{s_j}(a_j)$, está contenida en al menos un abierto V de Γ .
 (ii) Cada $x \in X$ está en el interior de al menos una bola $B_{r_j}(a_j)$; esto es

$$\cup_{j=1}^{\infty} B_{r_j}(a_j) = X = \cup_{V \in \Gamma} V.$$

Demostración.

Sabemos que Q^n es un subconjunto denso numerable de \mathbb{R}^n , con esto podemos tomar dos sucesiones de bolas con centro en Q^n , y s_j , r_j también racionales que cumplen con las contenciones de bolas y el inciso (i).

Demostremos pues el punto (ii).

Sea $x \in X$, entonces x está en algún $V_0 \in \Gamma$; como V_0 es abierto podemos encontrar un $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subset V_0$. Tomemos $a \in Q^n$ y r , s en Q tales que

$$|x - a| < r < s < \epsilon - |x - a|.$$

Con esto $X \in B_r(a)$. Chequemos que a , r y s son como los tomamos al principio, es decir $B_s(a) \subset V$ para algún V en Γ .

20CAPÍTULO 1. PRELIMINARES (TOPOLOGÍA DIFERENCIAL)

Cada $z \in B_s(a)$ cumple que

$$\begin{aligned} |z - x| &\leq |z - a| + |x - a| \\ &< s + |x - a| \\ &< \epsilon - |x - a| + |x - a| = \epsilon, \end{aligned}$$

por lo que $z \in B_\epsilon(x) \subset V_0$ y $B_s(a) \subset V_0$, con lo que queda demostrado el lema. ■

Una **aplicación flán** C^∞ es una aplicación C^∞ que toma el valor 1 en un cerrado $A \subset \mathbb{R}^n$ y se anula fuera de una vecindad de A . Para el siguiente lema ocuparemos una aplicación flán para bolas en \mathbb{R}^n . Aquí construimos una.

Tomemos una bola abierta $B_r(a)$ con centro en a y radio $r > 0$, y otra bola $B_s(a)$ con $s > r$. Entonces damos $h: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ como

$$h(x) = \beta\left(\frac{|x - a|^2 - r^2}{s^2 - r^2}\right),$$

donde

$$\beta(x) = \frac{\alpha(1-x)}{\alpha(1-x) + \alpha(x)},$$

que a su vez

$$\alpha(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Los cálculos sobre esta h , que omitiremos, muestran que efectivamente h se anula fuera de $B_s(a)$ y vale 1 en $B_r(a)$. Sin embargo mas adelante veremos que para cada cerrado en \mathbb{R}^n y un vecindad que lo contenga podemos encontrar una función flán C^∞ .

Lema 1.4.3 Sea Γ un sistema de conjuntos abiertos en \mathbb{R}^n y X como en el lema anterior, entonces existe una sucesión de abiertos $V_j \in \Gamma$, $j = 1, 2, \dots$, y aplicaciones C^∞ ,

$$\eta_j: X \rightarrow [0, \infty), \quad j = 1, 2, \dots,$$

tales que:

(i) $\eta_j(x) = 0 \quad \forall x \in X - V_j$,

(ii) la sucesión $\{\eta_j\}$ es localmente finita en $X = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} V_j$,

(iii) para cada $x \in X$, $\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j(x) > 0$.

Demostración.

Del lema anterior podemos encontrar bolas $B_{r_j}(a_j) \subset B_{s_j}(a_j)$, con $r_j < s_j$ ($j = 1, 2, \dots$); cada una de estas está contenida en al menos un $V \in \Gamma$, digamos una V_j ; obtenemos con esto un subsistema numerable de Γ .

Sea $h_j : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ una aplicación lisa C^∞ que toma el valor 1 en $B_{r_j}(a_j)$ y se anula fuera de $B_{s_j}(a_j)$; con esto esto, $h_j(x) = 0 \forall x \in X - V_j$, que es el punto (i).

Sin embargo estas aplicaciones no bastan. Consideremos ahora las aplicaciones, $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ y $\eta_j : X \rightarrow [0, \infty)$, ambas C^∞ , dadas por

$$\alpha(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

y

$$\eta_j(x) = \alpha(h_j(x) - \sum_{i < j} h_i(x))$$

Como $h_j(x) = 0$ cuando $x \in \mathbb{R}^n - V_j$ y $h_i(x) > 0$ para $i < j$ y para toda $x \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$h_j(x) - \sum_{i < j} h_i(x) \leq 0 \implies \alpha(h_j(x) - \sum_{i < j} h_i(x)) = 0$$

por lo que las η_j cumplen también la condición (i).

Para ver que la sucesión es localmente finita fijemos una k y tomemos una bola $B_{r_k}(a_k)$; si $j < k$, para toda $x \in B_{r_k}(a_k)$ se tiene

$$\begin{aligned} h_j(x) - \sum_{i < j} h_i(x) &= h_j(x) - \sum_{i=1}^{k-1} h_i(x) - h_k(x) - \sum_{i=k+1}^j h_i(x) \\ &\leq h_j(x) - 1 \leq 0 \end{aligned}$$

y entonces $\eta_j(x) = 0$.

Así para cada $x \in X$ la sucesión $\{\eta_j\}$ es localmente finita.

Ahora para cada $x \in X$ podemos encontrar j 's tales que $x \in B_{r_j}(a_j)$; de todas estas tomemos la mínima, entonces $h_j(x) = 1$; pero $h_i(x) = 0$ para $i < j$; luego

$$h_j(x) - \sum_{i < j} h_i(x) = 1 \text{ y } \eta_j(x) > 0.$$

En particular

$$\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j(x) > 0.$$

Con estos lemas estamos preparados para el siguiente

Teorema 1.4.2 *Sea Γ un sistema de conjuntos abiertos V en \mathbb{R}^n tales que $\cup_{V \in \Gamma} V = X$, entonces podemos encontrar una partición de la unidad localmente finita subordinada a él.*

Demostración.

Tomemos las η_j y los V_j como en lema anterior y definamos

$$\eta_V : X \rightarrow [0, \infty) \text{ tal que } \eta_V(x) = \sum_{V=V_j} \eta_j(x).$$

Notemos que V puede ser igual a V_j para varios j 's; y si V no está en el subsistema numerable de Γ se tiene $\eta_V \equiv 0$. Para cada $x \in X$ solo un número finito de las η_j permanecen distintas de cero por lo que $\eta_V(x) = \sum_{V=V_j} \eta_j(x)$ es una suma finita de aplicaciones C^∞ , con esto η_V es C^∞ .

Ahora definamos las aplicaciones que queremos. Sea

$$\pi_V(x) = \frac{\eta_V(x)}{\sum_{V \in \Gamma} \eta_V(x)}.$$

Vemos que está bien definida ya que $\sum_{V \in \Gamma} \eta_V(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j(x) > 0$ por el punto (iii) del lema anterior. Además para cada $V \in \Gamma$, π_V se anula fuera de V , esto porque $\eta_V = \sum_{V=V_j} \eta_j$ y cada η_j se anula fuera de V .

Como en una vecindad de x las η_j son distintas de cero para un número finito de j 's, en particular solo un número finito de las η_V son distintas de cero, y así las π_V también tienen esta propiedad.

Y claramente se cumple que

$$\sum_{V \in \Gamma} \pi_V(x) = 1.$$

por lo que $\{\pi_V\}_{V \in \Gamma}$ es una partición de la unidad localmente finita subordinada a Γ .

Corolario 1.4.1 Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ cerrado, y una vecindad abierta U de A , podemos encontrar una aplicación flán C^∞ .

Demostración.

Llamemos

$$\begin{aligned} V_1 &= U \\ V_2 &= \mathbb{R}^n - A. \end{aligned}$$

Vemos que $V_1 \cup V_2 = \mathbb{R}^n$, i.e., tenemos una cubierta abierta de \mathbb{R}^n . Por el teorema, podemos encontrar una partición de la unidad subordinada a V_1 y V_2 . Con esto, $\pi_1|_{\mathbb{R}^n - U} = 0$ y $\pi_1|_A = 1$; por lo que π_1 es la aplicación flán C^∞ que buscábamos. ■

En los resultados anteriores se han obtenido aplicaciones de clase C^∞ . Sin embargo en los resultados siguientes solo nos bastará con encontrar aplicaciones C^1 que se aproximen a otra continua.

1.5 El teorema de Sard

La sección anterior será de utilidad mas adelante, puesto que ya teniendo aplicaciones C^1 se hará necesaria la existencia de valores regulares. Este teorema nos resuelve los problemas.

Teorema 1.5.1 (De Sard). Sea W un abierto en \mathbb{R}^n y $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación C^1 . Si $C(f)$ es el conjunto de puntos críticos de f entonces $f(C(f))$ tiene medida cero.

Demostración.

Para cada $x \in W$ tomemos la distancia $\rho(x, \mathbb{R}^n - W) = 2\eta_x$, y luego formemos cubos abiertos, $R(x)$, con centro en x y lado $\leq \eta_x$; por ser para cada x en W tenemos entonces que $W = \cup_{x \in W} R(x)$.

Como $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ es denso numerable podemos tomar todos los x en $\mathbb{Q}^n \cap W$ y así obtener

$$W = \cup_{q=1}^{\infty} R(x_q).$$

Demostremos el teorema en el cubo $R(x_q) = R$ para alguna $x \in \mathbb{Q}^n \cap W$; supongamos que es de lado l .

Escribamos f en sus componentes, $f = (f_1, \dots, f_n)$, con f_i una aplicación de W en \mathbb{R} . Entonces dados, z, y en \mathbb{R}^n se tiene por el teorema del valor medio,

$$\begin{aligned} f_i(y) - f_i(z) &= Df_i(x^i)(y - z) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^i)(y_j - z_j), \end{aligned}$$

para algún x^i en el segmento que une z y y .

Como f es C^1 en W cada f_i lo es; entonces Df_i es continua en el cubo cerrado y acotado \bar{R} , así $\{\|Df_i(x)\| : x \in \bar{R}\}$ es acotado. Y de lo anterior se obtiene que

$$|f(y) - f(z)| \leq M |y - z|,$$

para alguna constante M , y para todas $y, z \in \bar{R}$.

Si definimos

$$T_i^z(y) = f_i(z) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(z)(y_j - z_j), \quad \text{para } i = 1, \dots, n,$$

tenemos entonces, para cada i , lo siguiente,

$$\begin{aligned} f_i(y) - T_i^z(y) &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^i) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(z) \right) (y_j - z_j) \\ &= (Df_i(x^i) - Df_i(z))(y - z). \end{aligned}$$

Además si $|y - z| < \delta$ entonces $|x^i - z| < \delta$, por como tomamos a x^i . Y como f es C^1 en W y su derivada es uniformemente continua en \bar{R} , dada $\sqrt{\frac{\epsilon^2}{n}} > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|y - z| < \delta$ entonces $|Df_i(x^i) - Df_i(z)| < \sqrt{\frac{\epsilon^2}{n}}$. Entonces

$$\begin{aligned} |f(y) - T^z(y)|^2 &= \sum_{i=1}^n |(Df_i(x^i) - Df_i(z))(y - z)|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon^2}{n} |y - z|^2 \\ &= n \frac{\epsilon^2}{n} |y - z|^2 \\ &= \epsilon^2 |y - z|^2; \end{aligned}$$

y por lo tanto, dada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $y, z \in \bar{R}$ y $|y - z| < \delta$ entonces

$$|f(y) - T^z(y)| \leq \epsilon |y - z|. \quad (1.6)$$

A T^z la escogimos afín con transformación lineal la derivada de f en z . Entonces si $\det(Df(z)) = 0$, i.e., z punto crítico, se tiene también $\det(T^z) = 0$. Lo que implica que el espacio en que se aplica T^z no puede tener dimensión n ; entonces el subespacio afín, P^z , en el que se aplica T^z tiene dimensión a lo mas $n-1$. Ahora si damos η tal que $|z - y| < \eta < \delta$, entonces $|f(z) - f(y)| \leq M\eta$ y también $\rho(f(y), P^z) \leq \epsilon\eta$ por 1.6. Con esto hemos creado un cubo, que contiene a $f(y)$, centrado en $f(z)$ de lados $2M\eta$ en el subespacio P^z y lado $2\epsilon\eta$ perpendicular a este subespacio. Su volumen es entonces $(2M\eta)^{n-1}2\epsilon\eta = 2^n M^{n-1} \epsilon \eta^n$.

Subdividamos a R en s^n hipercubos R_1, \dots, R_{s^n} de lados $\frac{l}{s}$ con s suficientemente grande de modo que la diagonal $\eta = \sqrt{n} \frac{l}{s}$ de cada uno de ellos sea menor que δ . Por lo anterior, si $z \in R_t \cap C(f)$, $1 \leq t \leq s^n$, entonces $R_t \subset B_\eta(z)$ y $f(R_t)$ tiene medida menor o igual que

$$2^n M^{n-1} (\sqrt{n} \frac{l}{s})^n \epsilon,$$

y como $R \cap C(f) = \cup_{t=1}^{s^n} (R_t \cap C(f))$, entonces $f(R \cap C(f))$ tiene medida menor o igual que $2^n M^{n-1} (\sqrt{nl})^n \epsilon$ y como ϵ es arbitraria $f(R \cap C(f))$ tiene medida cero.

Y como al principio tomamos los cubos $R(x_q)$, concluimos que $f(C(f))$ tiene medida cero. ■

26 **CAPÍTULO 1. PRELIMINARES (TOPOLOGÍA DIFERENCIAL)**

Capítulo 2

El grado de una aplicación

2.1 Introducción.

Cuando se encuentra uno con una ecuación de la forma $f(x) = p$, muchas veces se trata de encontrar las soluciones a esta, aunque lo que se busca en algunos casos es conocer que tipo de conjunto son las soluciones. Para esto surge la teoría de grado, que sin dar las soluciones en forma explícita nos describe la naturaleza de estas; se usa por ejemplo en la demostración de los teoremas de existencia en ecuaciones diferenciales.

También podemos tomar $f(x) = g(x) - x$, y entonces resolver $f(x) = 0$ es encontrar un punto fijo de g (véase por ejemplo el teorema de punto fijo de Brouwer). Con esto vemos que la teoría de punto fijo y la teoría de grado están fuertemente relacionadas.

Lo que nos basta es saber de la existencia de tales soluciones. Así el grado nos indica su existencia a partir de otros resultados puesto que f no siempre es fácil de estudiar. En este capítulo damos además métodos para calcular el grado indirectamente.

2.2 Grado de una aplicación diferenciable.

Sea $W \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, $\phi : \overline{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua y $y \in \mathbb{R}^n - \phi(\partial W)$. En esta sección supondremos además que

(a) $\phi|_W : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase C^1 .

(b) y es valor regular de ϕ .

Definiremos a continuación el grado en esta situación. Empezaremos probando el siguiente lema.

Lema 2.2.1 *Sea $\phi : Z \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación continua con $Z \subset \mathbb{R}^n$ compacto y $Y \subset \mathbb{R}^n$, entonces la aplicación*

$$\phi|_{\phi^{-1}(Y)} : \phi^{-1}(Y) \rightarrow Y$$

es cerrada.

Demostración.

Un conjunto $A \subset \phi^{-1}(Y)$ es relativamente cerrado si $A = C \cap \phi^{-1}(Y)$ con C cerrado en Z . Como Z es compacto, C también lo es; por la continuidad de ϕ , $\phi(C)$ es compacto y por lo tanto cerrado. Con esto $\phi(C) \cap Y$ es un cerrado relativo en Y , pero $\phi(C) \cap Y = \phi(A)$. Esto demuestra que la aplicación $\phi|_{\phi^{-1}(Y)} : \phi^{-1}(Y) \rightarrow Y$ es cerrada. ■

Tomemos la cerradura \overline{W} de W , que por ser cerrado y acotado en \mathbb{R}^n es compacto, entonces también lo es $\partial W \equiv \overline{W} - W$; por la continuidad de ϕ , $\phi(\partial W)$ es compacto, en particular cerrado; por lo que entonces $Y = \mathbb{R}^n - \phi(\partial W)$ es abierto en \mathbb{R}^n . Por el lema anterior

$$\phi|_W : W \rightarrow \mathbb{R}^n - \phi(\partial W)$$

es C^1 y cerrada.

Tomemos $y \in \mathbb{R}^n - \phi(\partial W)$, entonces $\phi^{-1}(y)$ es cerrado en \overline{W} y por lo tanto compacto; si y es valor regular de $\phi|_W$, el determinante funcional $\det(D\phi(x_i)) \neq 0$ para toda $x_i \in \phi^{-1}(y)$. Por el teorema 1.3.1 $\phi^{-1}(y)$ es una subvariedad de dimensión cero y como es compacto

$$\phi^{-1}(y) = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$$

es un conjunto finito de puntos.

Con lo anterior, podemos ya definir el **grado de ϕ en y** como el número entero

$$\text{grado}(\phi, W, y) = \sum_{x_i \in \phi^{-1}(y)} \text{sig}[\det(D\phi(x_i))],$$

donde

$$\text{sig}[\det D\phi(x_i)] = \begin{cases} 1 & \text{si } \det D\phi(x_i) > 0 \\ -1 & \text{si } \det D\phi(x_i) < 0 \end{cases},$$

y y es un valor regular que está en $\mathbb{R}^n - \phi(\partial W)$.

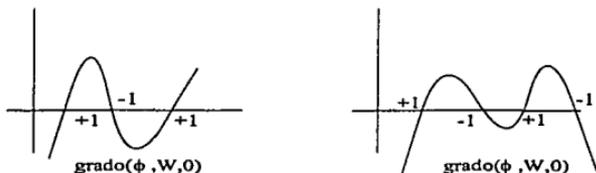


Figura 2.1: Grado de una aplicación diferenciable.

Como primer resultado acerca del grado de una aplicación C^1 , tenemos que este es **localmente constante**.

Teorema 2.2.1 *Sea $\phi : \bar{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua, $W \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado en donde ϕ es C^1 . Si $y \in \mathbb{R}^n - \phi(\partial W)$ es valor regular de $\phi|_W$, entonces existe una vecindad abierta de y , $V(y) \subset (\mathbb{R}^n - \phi(\partial W))$ tal que para todo z , valor regular de $\phi|_W$, en V , se cumple*

$$\text{grado}(\phi, W, z) = \text{grado}(\phi, W, y).$$

Demostración.

Como antes probamos $\phi^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_r\}$ es finito. El teorema de la función inversa nos dice que y tiene una vecindad abierta $V(y)$ localmente difeomorfa a una vecindad abierta $U(x_i)$ para cada x_i , y que para toda $x \in U(x_i)$, $D\phi(x)$ es invertible; así para cada z en $V(y)$,

$$\phi^{-1}(z) = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r\}$$

tiene el mismo número de elementos que $\phi^{-1}(y)$. En particular podemos tomar los $U(x_i)$ conexos y ajenos, esto si hacemos a $V(y)$ lo bastante pequeño y conexo.

El funcional $\det D\phi(x)$ o es siempre > 0 , o siempre < 0 en $U(x_i)$, pues como ϕ es continua, si cambiara de signo existiría un $\bar{x} \in U(x_i)$ tal que $\det D\phi(\bar{x}) = 0$ y $D\phi(\bar{x})$ no sería invertible, contradiciendo nuestra aplicación del teorema de la función inversa.

Por lo tanto

$$\text{sig}[\det D\phi(\bar{x}_i)] = \text{sig}[\det D\phi(x_i)], \quad i = 1, \dots, r.$$

Y entonces

$$\begin{aligned} \text{grado}(\phi, W, z) &= \sum_{\bar{x}_i \in \phi^{-1}(z)} \text{sig}[\det D\phi(\bar{x}_i)] \\ &= \sum_{x_i \in \phi^{-1}(y)} \text{sig}[\det D\phi(x_i)] \\ &= \text{grado}(\phi, W, y). \end{aligned}$$

Hemos visto que el grado de un valor regular no cambia en cierta vecindad abierta. A continuación veamos qué sucede si a la aplicación ϕ la 'deformamos' pero siempre definida en el abierto W . Para esto damos la siguiente definición.

Decimos que Φ_0 y Φ_1 son **homotópicas** si existe una aplicación continua $\Phi : \bar{W} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, tales que $\Phi_0(x) = \Phi(x, 0)$ y $\Phi_1(x) = \Phi(x, 1)$. Para cada $t \in [0, 1]$ tenemos $\Phi_t : \bar{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada como $\Phi_t(x) = \Phi(x, t)$. A la aplicación Φ se le llama **homotopía**.

Lema 2.2.2 *Sea $W \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado. Si $\Phi : \bar{W} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una homotopía y $y \in \mathbb{R}^n$ son tales que:*

- (i) $y \notin \Phi_t(\partial W) \quad \forall t \in [0, 1]$.
 - (ii) $\Phi_0|_W, \Phi_1|_W$ son aplicaciones C^1 con y valor regular de ambas.
 - (iii) $\Phi|_{W \times (0,1)}$ es C^1 y tiene a y como valor regular
 - (iv) $\Phi_t = \Phi_0, \Phi_{1-t} = \Phi_1 \quad \forall t \in [0, \epsilon]$ donde $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$.
- Entonces $\text{grado}(\Phi_0, W, y) = \text{grado}(\Phi_1, W, y)$

Demostración.

Sabemos que si y es valor regular y $y \notin \Phi_0(\partial W)$, entonces $\Phi_0^{-1}(y)$, consiste de un número finito de puntos a_1, \dots, a_p en \mathbb{R}^n , por (iv) tenemos que

$$\Phi^{-1}(y) \cap (\overline{W} \times [0, \epsilon]) = \{a_i \times [0, \epsilon] : i = 1, \dots, p\}$$

es un conjunto de p segmentos en $\overline{W} \times [0, \epsilon]$.

De igual modo con Φ_1 y para la misma y , $\Phi_1(y)$ consiste de puntos b_1, b_2, \dots, b_q en \mathbb{R}^n , entonces

$$\Phi^{-1}(y) \cap (\overline{W} \times [1 - \epsilon, 1]) = \{b_j \times [1 - \epsilon, 1] : j = 1, \dots, q\}$$

son segmentos en $\overline{W} \times [1 - \epsilon, 1]$.

Del teorema 1.3.1 tenemos que $\Phi^{-1}(y) \cap (W \times (0, 1))$ es subvariedad de $W \times (0, 1)$, de dimensión 1; y por el teorema 1.3.2 cada una de sus componentes conexas k_μ son difeomorfos a \mathbb{R} o a S^1 .

Por otra parte $\Phi^{-1}(y)$ es cerrado en el compacto $\overline{W} \times [0, 1]$ y por lo tanto es compacto, entonces

$$\Phi^{-1}(y) \cap (\overline{W} \times [\epsilon, 1 - \epsilon]) = \Phi^{-1}(y) \cap (W \times [\epsilon, 1 - \epsilon])$$

es compacto; la igualdad es porque $y \notin \Phi(\partial W)$. Así las curvas k_μ cubren a $\Phi^{-1}(y) \cap (W \times [\epsilon, 1 - \epsilon])$, por lo que entonces solo hay un número finito de curvas que lo cubren, algunas de ellas extendiéndose a los segmentos en $W \times (0, \epsilon]$ y $W \times [1 - \epsilon, 1)$.

Las k_μ difeomorfas a S^1 no intersecan a $(W \times (0, \epsilon]) \cup (W \times [1 - \epsilon, 1))$. Pues si así fuera S^1 contendría a un punto de un segmento, digamos $a_i \times (0, \epsilon]$ (puede tomarse un $b_j \times [1 - \epsilon, 1)$ y hacerse un análisis similar en $W \times \{1\}$), que por ser variedad diferenciable, $a_i \times (0, \epsilon] \subset k_\mu$. Como k_μ es compacto $a_i \times \{0\} \in k_\mu$; pero k_μ , difeomorfo a S^1 , es tangente a $W \times \{0\}$ en $a_i = \Phi_0^{-1}(y) \cap k_\mu$, por lo que entonces existe t en $(0, \epsilon)$ tal que

$$\Phi_i^{-1}(y) \cap k_\mu = \{a'_i, a''_i\} \neq \Phi_0^{-1}(y) \cap k_\mu,$$

contradiciendo nuestra hipótesis (iv).

Esto nos dice que las curvas difeomorfas a S^1 no intersecan a $W \times \{0\}$ y $W \times \{1\}$.

Por otro lado las k_μ difeomorfas a \mathbb{R} no pueden tener un extremo en $W \times [\epsilon, 1 - \epsilon]$; esto es por que $\Phi^{-1}(y) \cap (W \times [\epsilon, 1 - \epsilon])$ es compacto,

y cualquier sucesión en k_μ que converja a algún punto extremo debe necesariamente contener a este punto, por lo que k_μ no sería difeomorfo a \mathbb{R} .

Con esto, las curvas difeomorfas a \mathbb{R} tienen como extremos a intervalos de la forma $a_i \times (0, \epsilon]$ o $b_j \times [1 - \epsilon, 1)$, y además todos estos intervalos son extremos de una de tales curvas.

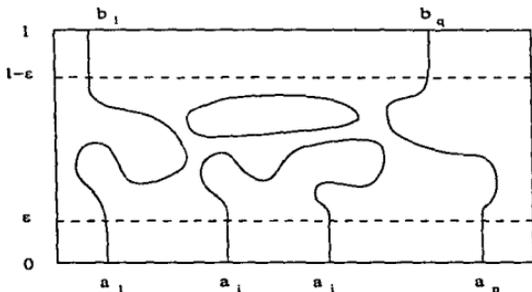


Figura 2.2: Curvas difeomorfas a \mathbb{R} o a S^1 .

Veamos ahora que una información que transmiten estas curvas es la del grado.

Sea $\alpha : (0, 1) \rightarrow W \times (0, 1)$ una parametrización regular de una curva k_μ difeomorfa a \mathbb{R} , que en $W \times (0, 1)$ se ve como $\alpha(r) = (x, t)$ con $x \in W$. $\alpha'(r) \neq 0$ es un vector en \mathbb{R}^{n+1} , tangente a $\alpha(r)$, que en coordenadas se ve como $(\alpha'_1(r), \dots, \alpha'_{n+1}(r))$.

Definamos ahora $G_r : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, una aplicación lineal con regla de correspondencia

$$G_r(v) = (D\Phi(\alpha(r))v, \alpha'(r) \cdot v),$$

para cada $r \in (0, 1)$. Su matriz asociada es:

$$M(r) = \begin{pmatrix} D\Phi(\alpha(r)) \\ \alpha'_1(r) \quad \dots \quad \alpha'_{n+1}(r) \end{pmatrix}.$$

Observemos que $\det M(r)$ como aplicación de r es continua.

Como $\Phi(\alpha(r)) = y$ para todo $r \in (0, 1)$,

$$0 = \frac{d}{dr}\Phi(\alpha(r)) = D\Phi(\alpha(r))(\alpha'(r)),$$

es decir, $\alpha'(r) \in \ker D\Phi(\alpha(r))$, y como dicho kernel tiene dimensión 1 (porque $D\Phi(\alpha(r))$ tiene rango máximo) se tiene que

$$\ker D\Phi(\alpha(r)) = \{t\alpha'(r) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Ahora bien, si $M(r)v = 0$ entonces $D\Phi(\alpha(r))v = 0$ y $\alpha'(r) \cdot v = 0$.

La primera igualdad implica que $v = t\alpha'(r)$ y la segunda que $t = 0$ (ya que $\alpha'(r) \neq 0$). De modo que $v = 0$. Es decir, $M(r) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ es inyectiva y, por lo tanto, un isomorfismo.

Con lo anterior $M(r)$ es invertible y con esto $\det M(r) \neq 0$ para toda $r \in (0, 1)$. Entonces $\det M(r)$ es siempre > 0 o siempre < 0 .

Como $\alpha(r) = \alpha(0)$ para $r \in [0, \epsilon)$, $\alpha'(0) = (0, \dots, 0, \alpha'_{n+1}(0))$ y

$$M(0) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ D\Phi_0(x) & & & \\ & \vdots & & \\ & 0 & & \\ 0 \cdots 0 & & \alpha'_{n+1}(0) & \end{pmatrix}.$$

Análogamente

$$M(1) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ D\Phi_1(x) & & & \\ & \vdots & & \\ & 0 & & \\ 0 \cdots 0 & & \alpha'_{n+1}(1) & \end{pmatrix}.$$

Para estos casos

$$\begin{aligned} \alpha'_{n+1}(0) \det D\Phi_0(x) &= \det M(0) = \\ &= \det M(1) = \alpha'_{n+1}(1) \det D\Phi_1(x). \end{aligned}$$

Cuando k_μ empieza en un segmento $a_i \times (0, \epsilon]$ y termina en $b_j \times [1 - \epsilon, 1)$ (o al contrario)

$$\text{sig}[\alpha'_{n+1}(0)] = \text{sig}[\alpha'_{n+1}(1)],$$

y por lo tanto

$$\text{sig}[\det D\Phi_0(a_i)] = \text{sig}[\det D\Phi_1(b_j)].$$

Si k_μ empieza en un segmento $a_i \times (0, \epsilon]$ y termina en un $a_j \times (0, \epsilon]$, (igual para los b_j)

$$\text{sig}[\alpha'_{n+1}(0)] = (-1)\text{sig}[\alpha'_{n+1}(1)]$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \text{sig}[\det D\Phi_0(a_i)] &= (-1)\text{sig}[\det D\Phi_0(a_j)] \\ (\text{ó } \text{sig}[\det D\Phi_1(b_i)] &= (-1)\text{sig}[\det D\Phi_1(b_j)]). \end{aligned}$$

Estas últimas no aportan nada al grado de Φ_0 o Φ_1 , pues se cancelan al sumarse.

Las k_μ que comunican a $W \times (0, \epsilon]$ y $W \times [1 - \epsilon, 1)$ conservan el signo del determinante, así

$$\begin{aligned} \text{grado}(\Phi_0, W, y) &= \sum_{x \in \Phi_0^{-1}(y)} \text{sig}[\det D\Phi_0(x)] \\ &= \sum_{x \in \Phi_1^{-1}(y)} \text{sig}[\det D\Phi_1(x)] = \text{grado}(\Phi_1, W, y), \end{aligned}$$

con lo que queda demostrado el teorema. ■

Sin embargo el punto (iii) de las hipótesis de teorema anterior puede ser removible. Hagamos pues lo siguiente.

Sabemos Φ es C^1 en $W \times (0, \epsilon) \cup W \times (1 - \epsilon, 1)$. Tomamos ϵ' tal que $0 < \epsilon' < \epsilon$. Y escribimos Φ en sus componentes $\Phi = (\Phi^1, \dots, \Phi^n)$.

Hagamos

$$\begin{aligned} Y &= \overline{W} \times [0, 1], \\ X &= W \times (0, 1), \\ A &= \overline{W} \times [0, \epsilon'] \cup \overline{W} \times [1 - \epsilon', 1]. \end{aligned}$$

Con esto $W \times (0, \epsilon) \cup W \times (1 - \epsilon, 1)$ es vecindad abierta de $A \cap X$.

Sea $\eta: Y \rightarrow [0, 1]$ continua tal que

$$\eta^{-1}(0) = Y - X.$$

Con Φ^i fija definamos para cada $s \in \mathbb{R}$.

$$V_s = \{z \in X : |\Phi^i(z) - s| < \frac{\eta(z)}{2}\};$$

este es abierto en X y además $X = \bigcup_{s \in \mathbb{R}} V_s$.

Por el teorema 1.4.2 podemos encontrar $\{\pi_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ una partición de la unidad localmente finita de clase C^1 subordinada a la cubierta $\{V_s\}_{s \in \mathbb{R}}$. Tomemos $\gamma : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\gamma(z) = \sum_{s \in \mathbb{R}} s \pi_s(z);$$

que como cada π_s es C^1 y la suma es localmente finita, tenemos que γ es C^1 .

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto tal que $A \subset U$, $\overline{W} \times [\epsilon, 1 - \epsilon] \subset \mathbb{R}^n - U$, y $h : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ una aplicación C^1 que se anula en una vecindad V de $\mathbb{R}^n - U$, y toma el valor 1 en $A \cap X$.

Definamos ahora $\Psi^i : Y \rightarrow \mathbb{R}$, con regla de correspondencia

$$\Psi^i(z) = \begin{cases} \gamma(z) + h(z)(\Phi^i(z) - \gamma(z)) & \text{para } z \in X \\ \Phi^i(z) & \text{para } z \in Y - X \end{cases}$$

que es C^1 en X ya que h se anula donde Φ^i tal vez no lo sea.

Problemos que Ψ^i es una 'buena' aproximación a Φ^i . Tomemos $z \in X$, entonces

$$\begin{aligned} |\Phi^i(z) - \Psi^i(z)| &= \left| \Phi^i(z) \sum_{s \in \mathbb{R}} \pi_s(z) - \sum_{s \in \mathbb{R}} s \pi_s(z) \right. \\ &\quad \left. - h(z) [\Phi^i(z) \sum_{s \in \mathbb{R}} \pi_s(z) - \sum_{s \in \mathbb{R}} s \pi_s(z)] \right| \\ &= \left| \sum_{s \in \mathbb{R}} (\Phi^i(z) - s) \pi_s(z) \right. \\ &\quad \left. - h(z) [\sum_{s \in \mathbb{R}} (\Phi^i(z) - s) \pi_s(z)] \right| \\ &\leq \sum_{s \in \mathbb{R}} |\Phi^i(z) - s| \pi_s(z) \\ &\quad + h(z) \sum_{s \in \mathbb{R}} |\Phi^i(z) - s| \pi_s(z); \end{aligned}$$

pero para $z \in X$ fija, las π_s son distintas de cero en aquellas V_s tales que contengan a z , esto es, para cuando $|\Phi^i(z) - s| < \frac{\eta(z)}{2}$. Y la desigualdad continúa como sigue:

$$\begin{aligned} |\Phi^i(z) - \Psi^i(z)| &< \sum_{s \in \mathbb{R}} \frac{\eta(z)}{2} \pi_s(z) + h(z) \sum_{s \in \mathbb{R}} \frac{\eta(z)}{2} \pi_s(z) \\ &< \frac{\eta(z)}{2} + h(z) \frac{\eta(z)}{2} \\ &\leq \eta(z). \end{aligned}$$

Además Ψ^i es continua en $Y - X$ por lo siguiente. Sea $z \in Y - X$ y $z' \in Y$, entonces se tiene

$$\begin{aligned} |\Psi^i(z') - \Psi^i(z)| &\leq |\Psi^i(z') - \Phi^i(z')| + |\Phi^i(z') - \Phi^i(z)| \\ &\quad + |\Phi^i(z) - \Psi^i(z)| \\ &< \eta(z') + |\Phi^i(z') - \Phi^i(z)| + 0 \\ &= |\eta(z') - \eta(z)| + |\Phi^i(z') - \Phi^i(z)|, \end{aligned}$$

y como η y Φ^i son continuas en Y entonces también Ψ^i es continua en Y .

Ahora pongamos $\Psi = (\Psi^1, \dots, \Psi^n)$ para obtener una aproximación a Φ . Si hacemos $\eta(z) = \frac{\epsilon(z)}{\sqrt{n}}$ con $\epsilon(z) = \rho(z, Y - X)$ se tiene

$$|\Psi(z) - \Phi(z)| \leq \epsilon(z) \quad \forall z \in Y.$$

Por lo que la homotopía Ψ cumple con (i), (ii) y (iv) del teorema 2.2.2.

Ahora el problema es que $y = \Phi(x, t)$ puede no ser valor regular de Ψ .

Sabemos que

$$\Psi_t = \Phi_t = \Phi_0 = \Psi_0, \quad \Psi_{1-t} = \Phi_{1-t} = \Phi_1 = \Psi_1 \quad \forall t \in [0, \epsilon']; \quad (2.1)$$

donde $\Psi_t(x) = \Psi(x, t)$. Además, $\Psi_t(x) = \Phi_t(x) \quad \forall x \in \partial W$ y $\forall t \in [0, 1]$.

Si y es valor regular de Φ_0 y Φ_1 , sabemos por el teorema 2.2.1 que existe $V \in \mathbb{R}^n$, vecindad de y , tal que para todo $y' \in V$

$$\text{grado}(\Phi_0, W, y') = \text{grado}(\Phi_0, W, y), \quad (2.2)$$

$$\text{grado}(\Phi_1, W, y') = \text{grado}(\Phi_1, W, y).$$

Podemos tomar V tal que $V \subset \mathbb{R}^n - \Psi_t(\partial W)$ para toda t en $[0, 1]$. Si tomamos $y' \in V$ valor regular de Ψ y de Φ , sabemos del teorema 2.2.2 aplicado en Ψ que

$$\text{grado}(\Psi_0, W, y') = \text{grado}(\Psi_1, W, y'),$$

y por 2.1

$$\text{grado}(\Phi_0, W, y') = \text{grado}(\Psi_0, W, y'),$$

y

$$\text{grado}(\Phi_1, W, y') = \text{grado}(\Psi_1, W, y');$$

que junto con 2.2 se obtiene el resultado

$$\text{grado}(\Phi_0, W, y) = \text{grado}(\Phi_1, W, y).$$

Mas aún, con una nueva homotopía $H : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$H(x, t) = \begin{cases} \Phi(x, 0) & 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ \Phi(x, 3t - 1) & \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ \Phi(x, 1) & \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

el punto (iv) queda excluido. Así el teorema demostrado es el siguiente.

Teorema 2.2.2 (De la invariancia homotópica). Si $W \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado, $\Phi : \bar{W} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una homotopía y $y \in \mathbb{R}^n$ satisfacen

(i) $y \notin \Phi_t(\partial W) \quad \forall t \in [0, 1]$,

(ii) $\Phi_0|_W, \Phi_1|_W$ son aplicaciones de clase C^1 que tienen a y como valor regular, entonces

$$\text{grado}(\Phi_0, W, y) = \text{grado}(\Phi_1, W, y).$$

En la siguiente sección se hará una generalización del concepto de grado. El siguiente resultado va encaminado a ello, pues se vé que para cualquier valor dado, podemos encontrar una vecindad en la cual nuestra definición de grado es aplicable y mas aún en esta vecindad el grado es constante.

Teorema 2.2.3 *Supongamos que $W \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado, y $g: \overline{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación continua que es C^1 en W . Si $y \in \mathbb{R}^n - g(\partial W)$ (cualquier valor) entonces existe $V \subset \mathbb{R}^n - g(\partial W)$ vecindad abierta de y tal que si z y z' son valores regulares de $g|_W$, ambos en V , se tiene*

$$\text{grado}(g, W, z) = \text{grado}(g, W, z').$$

Demostración.

Escogemos

$$V = \{z \in \mathbb{R}^n - g(\partial W) : |z - y| < |g(x) - y| \quad \forall x \in \partial W\}. \quad (2.3)$$

Por el teorema de Sard podemos encontrar z, z' valores regulares de $g|_W$ en V . Tomemos la homotopía $F: \overline{W} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$F(x, t) = g(x) + t(z - z').$$

Aplicaremos el teorema de la invariancia homotópica con z . Primero debemos probar que $z \notin F(x, t) \quad \forall x \in \partial W$ y $\forall t \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} |F(x, t) - z| &= |g(x) + t(z - z') - z + y - y + ty - ty| \\ &\geq |g(x) - y| - |1 - t| |z - y| - t |z' - y| \\ &> |g(x) - y| - (1 - t) |g(x) - y| - t |g(x) - y| \\ &= |g(x) - y| - |g(x) - y| = 0. \end{aligned}$$

Y por lo tanto $z \neq F(x, t)$ para $x \in \partial W$ y $t \in [0, 1]$.

Además $F_0 = g$ es C^1 en W y $F_1 - z = g - z'$, de esto último $DF_1 = Dg$ por lo que F_1 también es C^1 y además $\text{grado}(F_1, W, z) = \text{grado}(g, W, z')$.

Del teorema anterior $\text{grado}(F_0, W, z) = \text{grado}(F_1, W, z)$; y concluimos que

$$\text{grado}(g, W, z) = \text{grado}(g, W, z').$$

Con este teorema podemos generalizar un poco la definición de grado que teníamos, puesto que si $y \in \mathbb{R}^n - g(\partial W)$ no es valor regular de g , para todo valor en una vecindad de y el grado es constante. Defino pues el el **grado de g en y** , como

$$\text{grado}(g, W, y) = \text{grado}(g, W, z)$$

donde z es valor regular en la vecindad dada por 2.3.

Pero la invariancia no solo se dá en valores regulares de cierta vecindad de un valor cualquiera, sino que además al cambiar la aplicación por otra que coincida con la primera en la frontera del abierto en el cual se definen, el grado es el mismo.

Teorema 2.2.4 *Sea $W \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado, $f_1, f_2 : \overline{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuas tales que $f_1|_W, f_2|_W$ son C^1 y $f_1|_{\partial W} = f_2|_{\partial W}$, entonces para cada valor regular $y \notin f_1(\partial W) = f_2(\partial W)$, se tiene*

$$\text{grado}(f_1, W, y) = \text{grado}(f_2, W, y).$$

Demostración.

Haciendo uso del teorema de la invariancia homotópica y de la homotopía $F : \overline{W} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $F(x, t) = (1 - t)f_1(x) + tf_2(x)$ el resultado es inmediato. Veamos que cumple con las hipótesis necesarias.

Tenemos para $x \in \partial W$ que $f_1(x) = f_2(x)$, esto implica $F_t(x) = f_1(x)$, y como $y \neq f_1(x)$ entonces $y \neq F_t(x)$. Con esto se cumple la hipótesis (i) de 2.2.2.

Además $F_0(x) = f_1(x)$ y $F_1(x) = f_2(x)$ por lo que $F_0|_W$ y $F_1|_W$ son C^1 con y valor regular de ambas, teniendo con esto ambas hipótesis de 2.2.2 y consecuentemente el resultado

$$\text{grado}(F_0, W, y) = \text{grado}(F_1, W, y).$$

Y por lo tanto

$$\text{grado}(f_1, W, y) = \text{grado}(f_2, W, y).$$

■

2.3 Grado de una aplicación continua.

Los resultados anteriores nos permiten generalizar el concepto de grado para una aplicación continua $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde W es abierto y acotado en \mathbb{R}^n , y un valor arbitrario y en $\mathbb{R}^n - f(\partial W)$, es decir, eliminando las hipótesis (a) y (b) del comienzo del capítulo.

Empezaremos probando que f puede aproximarse tanto como queramos por una función de clase C^1 .

Teorema 2.3.1 Sea W un abierto acotado en \mathbb{R}^n , $f: \overline{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua. Entonces dada una aplicación $\epsilon: \overline{W} \rightarrow \mathbb{R}$ también continua y tal que $W = \epsilon^{-1}(0, \infty)$, existe $g: \overline{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua, C^1 en W , y tal que cumple

$$|f(x) - g(x)| \leq \epsilon(x) \quad \forall x \in \overline{W}.$$

En particular, si doy $\epsilon(x) = \rho(x, \partial W)$, $f = g$ en ∂W .

Demostración.

Para cada $s \in \mathbb{R}$ tomamos los abiertos

$$V_s = \{x \in W : |f_i(x) - s| < \delta(x)\},$$

donde f_i es la i -ésima coordenada de f , y $\delta(x) = \frac{\epsilon(x)}{\sqrt{n}}$.

Esta nos da una cubierta abierta de W . Entonces podemos encontrar una partición de la unidad localmente finita subordinada a $\{V_s\}_{s \in \mathbb{R}}$.

Sea $\gamma: W \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\gamma(x) = \sum_{s \in \mathbb{R}} s \pi_s(x)$. esta cumple que

$$\begin{aligned} |f_i(x) - \gamma(x)| &= \left| f_i(x) \sum_{s \in \mathbb{R}} \pi_s(x) - \sum_{s \in \mathbb{R}} s \pi_s(x) \right| \\ &= \left| \sum_{s \in \mathbb{R}} (f_i(x) - s) \pi_s(x) \right| \\ &< \delta(x). \end{aligned}$$

Definimos ahora

$$g_i(x) = \begin{cases} \gamma(x) & \text{si } x \in W \quad \epsilon(x) > 0 \\ f_i(x) & \text{si } x \in \partial W \quad \epsilon(x) = 0 \end{cases}.$$

La cual cumple que $|f(x) - g(x)| < \epsilon(x)$.

Probemos que g_i es continua en ∂W . Para $z \in \partial W$ y $x \in \overline{W}$,

$$\begin{aligned} |g_i(x) - g_i(z)| &\leq |g_i(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(z)| + \\ &\quad + |f_i(z) - g_i(z)| \\ &\leq \delta(x) + |f_i(x) - f_i(z)| + 0 \\ &= |\delta(x) - \delta(z)| + |f_i(x) - f_i(z)|; \end{aligned}$$

y como ϵ y f son continuas en z , entonces g es continua en z . Por lo que entonces g está bien definida y es como buscábamos. ■

Con lo anterior, si tomamos $y \in \mathbb{R}^n - f(\partial W)$ arbitrario entonces $y \in \mathbb{R}^n - g(\partial W)$, que puede no ser valor regular de g ; pero sabemos por 2.2.3 que podemos encontrar V abierto en W que contiene a y y tal que para todos $z' \in V$ puntos regulares de g ,

$$\text{grado}(g, W, z) = \text{grado}(g, W, z').$$

Definimos entonces el **grado de f en y** , donde f es continua en \overline{W} y y es cualquier valor en $\mathbb{R}^n - g(\partial W)$ como

$$\text{grado}(f, W, y) = \text{grado}(g, W, z),$$

donde $g : \overline{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es cualquier función continua y C^1 en W que coincide con f en la frontera de W y z es cualquier valor regular de g en

$$\{z \in W : |z - y| < \rho(y, f(\partial W))\}.$$

El teorema 2.2.4 de la sección anterior nos dice que el grado es independiente de la aproximación g que tomemos, pues para cualquier $\tilde{g} : \overline{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\tilde{g}|_W C^1$ y $\tilde{g}(x) = f(x)$ para toda $x \in \partial W$, se tiene que $\tilde{g}(x) = g(x) \quad \forall x \in \partial W$; y si z lo escogemos valor regular de g y de \tilde{g} entonces

$$\text{grado}(\tilde{g}, W, z) = \text{grado}(g, W, z) = \text{grado}(f, W, y).$$

Veamos algunos ejemplos

EJEMPLO 2.3.1 Sea $k : \overline{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la aplicación constante $k(x) = x_0$; entonces

$$\text{grado}(k, W, y) = 0 \quad \forall y \neq x_0.$$

■

EJEMPLO 2.3.2 Sea $i : \overline{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la inclusión, $i(x) = x$. Entonces

$$\text{grado}(i, W, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in W \\ 0 & \text{si } y \in \mathbb{R}^n - \overline{W}. \end{cases}$$

■

EJEMPLO 2.3.3 Sea $a : \overline{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación afín $a(x) = L(x) + y_0$ donde L es un isomorfismo lineal. Entonces

$$\text{grado}(a, W, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in \mathbb{R}^n - a(\overline{W}) \\ \frac{\det L}{|\det L|} = \pm 1 & \text{si } y \in a(W). \end{cases}$$

EJEMPLO 2.3.4 Dado $\zeta \in \mathbb{C}$, $\zeta \neq 0$, consideremos la aplicación

$$F : \overline{B}_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$$

tal que $F(z) = \zeta z$. En $0 \in \mathbb{C}$, $F^{-1}(0) = 0$, además

$$\text{sig}[\det DF(0)] = |\zeta| > 0$$

por lo que

$$\text{grado}(F, B_1(0), 0) = 1.$$

EJEMPLO 2.3.5 Para $n = 1$; si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, el grado toma únicamente los valores $-1, 0, 1$.

En efecto, basta con tomar la homotopía $\Phi : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\Phi(x, t) = (1-t)f(x) + t\left[\frac{f(b)(x-a)}{b-a} + \frac{f(a)(x-b)}{a-b}\right],$$

donde $\Phi(x, 1)$ es una aplicación afín. Para $t = 1$, $D\Phi_1(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Y ya que Φ_t mantiene fijos a $f(a)$ y $f(b)$ entonces para $y \neq f(a)$ y $y \neq f(b)$ se tiene

$$\text{grado}(f, (a, b), y) = \text{grado}(\Phi_1, (a, b), y) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(b) > y > f(a) \\ -1 & \text{si } f(a) > y > f(b) \\ 0 & \text{si } y \notin f([a, b]). \end{cases}$$

EJEMPLO 2.3.6 Si $n = 2$, la aplicación $\Pi_k : \overline{B_1(0)} \rightarrow \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, tal que $\Pi_k(z) = z^k$, $k \geq 0$, tiene grado k en 0. En efecto, si consideramos la forma polar de los complejos, $z = r(\cos\theta + isen\theta)$ con $r = |z|$ y θ el argumento de z , entonces

$$\Pi_k(z) = r^k(\cos k\theta + isenk\theta).$$

Dado w un valor regular en el interior de $\Pi_k(\overline{B_1(0)})$ ($w \neq 0$), este lo vemos como $w = |w|(\cos\theta + isen\theta)$, por lo que bajo Π_k tenemos k imagenes inversas, a saber

$$z_j = \sqrt[k]{|w|} \left(\cos\left(\frac{\theta + 2\pi j}{k}\right) + isen\left(\frac{\theta + 2\pi j}{k}\right) \right),$$

$j=0, \dots, (k-1)$.

Entonces viendo el problema como en \mathbb{R}^2

$$\det D\Pi_k(z_j) = \det \begin{pmatrix} \cos k\left(\frac{\theta+2\pi j}{k}\right) & -\sqrt[k]{|w|} k \operatorname{sen} k\left(\frac{\theta+2\pi j}{k}\right) \\ \operatorname{sen} k\left(\frac{\theta+2\pi j}{k}\right) & \sqrt[k]{|w|} k \cos k\left(\frac{\theta+2\pi j}{k}\right) \end{pmatrix}$$

Y entonces $\det D\Pi_k(z_j) = \sqrt[k]{|w|} k$ que es positivo para cada z_j .

Por último, como para todo w en una vecindad del 0 es regular y

$$\operatorname{grado}(\Pi_k, B_1(0), w) = k$$

entonces también

$$\operatorname{grado}(\Pi_k, B_1(0), 0) = k.$$

Para el caso conjugado, $\overline{\Pi}_k(z) = \overline{z^k}$ se resuelve de la misma forma con la diferencia que $\det D\overline{\Pi}_k(z_j)$ es negativo por lo que

$$\operatorname{grado}(\overline{\Pi}_k, B_1(0), 0) = -k.$$

EJEMPLO 2.3.7 Sea $f : \overline{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua con $W \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado; para cualquier $y \in \mathbb{R}^n - f(\overline{W})$ no podemos encontrar $x \in W$ tal que $f(x) = y$, es decir, no tenemos imagenes inversas y así no hay signos sumables en la determinación del grado por lo que

$$\operatorname{grado}(f, W, y) = 0.$$

2.4 Propiedades del grado.

Hemos visto que el grado de una aplicación continua $f : \bar{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$, con W abierto acotado de \mathbb{R}^n , está definido para toda $y \in \mathbb{R}^n - f(\partial W)$, y es un número entero. Entonces podemos considerar la aplicación

$$\text{grado}(f, W, \cdot) : \mathbb{R}^n - f(\partial W) \rightarrow \mathbb{Z}$$

Sabemos que dada $y_0 \in \mathbb{R}^n - f(\partial W)$ existe una vecindad $V \subset \mathbb{R}^n - f(\partial W)$ de y_0 tal que para todo $y \in V$

$$\text{grado}(f, W, y) = \text{grado}(f, W, y_0);$$

entonces podemos decir que la aplicación $\text{grado}(f, W, \cdot)$ es **localmente constante** o mejor dicho es **continua**, donde la topología de \mathbb{Z} es la discreta.

Ahora consideremos la imagen inversa bajo $\text{grado}(f, W, \cdot)$ de $r \in \mathbb{Z}$:

$$\Gamma(f, W, r) = \{y \in \mathbb{R}^n - f(\partial W) : \text{grado}(f, W, y) = r\}.$$

Como $\{r\}$ es abierto y cerrado en \mathbb{Z} , $\Gamma(f, W, r)$ es abierto y cerrado en $\mathbb{R}^n - f(\partial W)$. Cualquier subconjunto conexo de $\mathbb{R}^n - f(\partial W)$ está entonces completamente contenido en alguna $\Gamma(f, W, r)$.

Si $r \neq 0$ entonces $\Gamma(f, W, r) \subset f(\bar{W})$ (véase ejemplo 2.3.7 en la sección anterior). En particular $\Gamma(f, W, r)$ es compacto si $r \neq 0$. Y como

$$\mathbb{R}^n - f(\bar{W}) \subset \Gamma(f, W, 0)$$

$\Gamma(f, W, 0)$ es, en particular, no acotado.

De lo anterior se desprende que

Teorema 2.4.1 Si $\mathbb{R}^n - f(\partial W)$ es conexo, entonces

$$\text{grado}(f, W, y) = 0$$

para todo $y \in \mathbb{R}^n - f(\partial W)$.

De esta última propiedad damos un ejemplo.

EJEMPLO 2.4.1 Tomemos un disco abierto en \mathbb{R}^2 ,

$$W = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < r\}, \quad r > 0,$$

y una aplicación continua $f : \overline{W} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2));$$

observemos que $f(x_1, x_2) = f(x_2, x_1)$.

Si

$$V_1 = \{x \in W : x_1 \leq x_2\},$$

$$V_2 = \{x \in W : x_1 \geq x_2\},$$

entonces $f(V_1 \cap (\partial W)) = f(V_2 \cap (\partial W))$ es el arco de parábola $f_1^2(x) - 2f_2(x) = r^2$, por lo siguiente:

En $V_1 \cap (\partial W)$, $x_1^2 + x_2^2 = r^2$, luego $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = r^2$, o bien $f_1^2(x) - 2f_2(x) = r^2$.

Por lo que $\mathbb{R}^2 - f(\partial W)$ es conexo; y entonces dado $y \in \mathbb{R}^2 - f(\partial W)$ se tiene que $\text{grado}(f, W, y) = 0$.

En el caso complejo se tiene algo distinto. Si

$$W = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} < r^2\}$$

y $f : W \rightarrow \mathbb{C}^2$ dada como la anterior, $f(z_1, z_2) = (z_1 + z_2, z_1 z_2)$. Que, pensándola como en \mathbb{R}^4 , está dada por

$$f(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1);$$

tiene como determinante de su derivada

$$\det Df = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_2 & -y_2 & x_1 & -y_1 \\ y_2 & x_2 & y_1 & x_1 \end{pmatrix} = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2;$$

y ya en \mathbb{C}^2 , $\det Df(z_1, z_2) = (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) = |z_1 - z_2|^2 \geq 0$ (a diferencia del anterior cuyo determinante resulta ser $x_1 - x_2$), siempre positivo a menos que $z_1 = z_2$.

Dado (y_1, y_2) valor regular en $f(W)$ existe $(z_1, z_2) \in W$ tal que

$$f(z_1, z_2) = (y_1, y_2),$$

pero como dimos la aplicación

$$f(z_1, z_2) = f(z_2, z_1) = (y_1, y_2)$$

por lo que $y = (y_1, y_2)$ tiene dos preimágenes; y no puede tener más puesto que resolver la ecuación $f(w_1, w_2) = (y_1, y_2)$ es equivalente a resolver el sistema $w_1 + w_2 = y_1$, $w_1 w_2 = y_2$, que nos lleva a su vez a resolver una ecuación cuadrática $w_1^2 - w_1 y_1 + y_2 = 0$ la cual no tiene más de dos soluciones.

Y como vimos ambas soluciones tienen determinante positivo, por lo que

$$\text{grado}(f, W, y) = 2.$$

Para $y \notin f(\overline{W})$, sabemos, $\text{grado}(f, W, y) = 0$.

Así, $\mathbb{R}^4 - f(\partial W) = \Gamma(f, W, 0) \cup \Gamma(f, W, 2)$, y entonces tenemos que $\mathbb{R}^4 - f(\partial W)$ no es conexo, al contrario del caso en \mathbb{R}^2 . ■

En algunos casos la imagen inversa de algún valor para cierta aplicación como las que hemos estado trabajando, puede encontrarse en un abierto más pequeño; veremos ahora que podemos restringirnos a este abierto y que el grado de la aplicación restringida no se altera.

Teorema 2.4.2 (De escisión). *Supongamos como antes $W \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado, $f: \overline{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua y un valor $y \in \mathbb{R}^n - f(\partial W)$. Si tenemos un abierto $V \subset W$ tal que $f^{-1}(y) \subset V$, entonces*

$$\text{grado}(f, W, y) = \text{grado}(f, V, y).$$

Demostración.

Tomemos la restricción $f|_{\overline{V}}: \overline{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$, que sigue siendo continua; aproximemos con una aplicación continua en \overline{V} y C^1 en V , que coincida con f en ∂V ; a esta la llamamos γ .

Peguemos γ con f en ∂W con

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \forall x \in \overline{W} - V \\ \gamma(x) & \forall x \in V; \end{cases}$$

esta aplicación nos asegura que $f_1^{-1}(y) \subset V$.

Sea ahora U un subconjunto abierto de V tal que $f_1^{-1}(y) \subset U$ y $\bar{U} \subset V$; y aproximemos f_1 por una nueva aplicación $g: \bar{W} \rightarrow \mathbb{R}^n, C^1$ en W tal que

$$g(x) = \begin{cases} \gamma(x) & \forall x \in \bar{U} \\ f_1(x) & \forall x \in \partial W, \end{cases}$$

y que además cumpla

$$|g(x) - f_1(x)| < \rho(y, f_1(\bar{W} - U));$$

de esta desigualdad $y \notin g(\bar{W} - U)$, o bien, $g^{-1}(y) \subset U$.

Si $r = \rho(y, g(\bar{W} - U))$, construimos una bola abierta de radio r y centro en y , $B_r(y)$.

Claramente vemos que

$$B_r(y) \subset (\mathbb{R}^n - g(\bar{W} - U)) \cap f_1(\bar{W}).$$

Por el teorema de Sard podemos encontrar z valor regular de g que está en $B_r(y)$. Sabemos ya por la definición de grado de una aplicación continua que

$$\text{grado}(f, W, y) = \text{grado}(g, W, z).$$

Pero $g^{-1}(z) = \gamma^{-1}(z) \subset U \subset V$; entonces

$$\begin{aligned} \text{grado}(g, W, z) &= \sum_{x_i \in g^{-1}(z)} \text{sig}[\det Dg(x_i)] \\ &= \sum_{x_i \in g^{-1}(z) \cap V} \text{sig}[\det Dg(x_i)] \\ &= \sum_{x_i \in \gamma^{-1}(z) \cap V} \text{sig}[\det D\gamma(x_i)] \\ &= \text{grado}(\gamma, V, z); \end{aligned}$$

y $\text{grado}(f, V, y) = \text{grado}(\gamma, V, z)$, de nuevo por la definición.

Concluimos pues que $\text{grado}(f, W, y) = \text{grado}(f, V, y)$. ■

Corolario 2.4.1 Supongamos $f_1: \bar{W}_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f_2: \bar{W}_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuas con $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^n$, abiertos acotados. Si $y \in \mathbb{R}^n$ con $f_1^{-1}(y) = f_2^{-1}(y) \subset W_1 \cap W_2$ y $f_1 = f_2$ en una vecindad V de $f_1^{-1}(y)$, entonces

$$\text{grado}(f_1, W_1, y) = \text{grado}(f_2, W_2, y).$$

Demostración.

Del teorema, como $f_1^{-1}(y) \subset V$ se tiene

$$\begin{aligned} \text{grado}(f_1, W_1, y) &= \text{grado}(f_1, V, y), \\ &= \text{grado}(f_2, V, y). \end{aligned}$$

También $f_2^{-1}(y) \subset V$, con esto, $\text{grado}(f_2, W_2, y) = \text{grado}(f_2, V, y)$. Y de ambas igualdades

$$\text{grado}(f_1, W_1, y) = \text{grado}(f_2, W_2, y).$$

Ahora damos un ejemplo de una sola aplicación que para ciertos valores se obtengan grados para cualquier entero positivo. ■

EJEMPLO 2.4.2 *Tomemos el abierto acotado W como el interior del triángulo en el plano con vértices $B = (0, 0)$, $B_1 = (1, 1)$ y $A_1 = (1, -1)$.*

En \overline{W} marcamos los puntos

$$A_i = \left(\frac{1}{i}, \frac{(-1)^i}{i}\right), \quad B_i = \left(\frac{1}{i}, \frac{(-1)^{i+1}}{i}\right) \quad \text{y} \quad \alpha_{2i+1} = \left(\frac{2}{4i-1}, \frac{2}{4i-1}\right);$$

y unimos A_i con B_i , A_{2i} con A_{2i-1} , B_{2i+1} con B_{2i} y finalmente α_{2i-1} con A_{2i-1} , obteniendo así una triangulación de \overline{W} .

Nos tomamos una aplicación f que sea afín en cada triángulo menor; entonces basta con indicar donde se aplican los vértices; damos pues

$$f(A_i) = A_i, \quad f(B_i) = B, \quad f(B) = B, \quad f(\alpha_{2i-1}) = A_{2i-1};$$

y su aplicación a los triángulos menores son:

$$\begin{aligned} f(\Delta B_{2i-1} B_{2i} A_{2i}) &= \Delta B B A_{2i} = B A_{2i}, \\ f(\Delta B_{2i} B_{2i+1} A_{2i+1}) &= \Delta B B A_{2i+1} = B A_{2i+1}, \\ f(\Delta \alpha_{2i-1} A_{2i-1} B_{2i-1}) &= \Delta A_{2i-1} A_{2i-1} B = A_{2i-1} B, \\ f(\Delta A_{2i-1} \alpha_{2i-1} A_{2i}) &= \Delta A_{2i-1} A_{2i-1} A_{2i} = A_{2i-1} A_{2i}, \\ f(\Delta A_{2i-1} A_{2i} B_{2i}) &= \Delta A_{2i-1} A_{2i} B. \end{aligned}$$

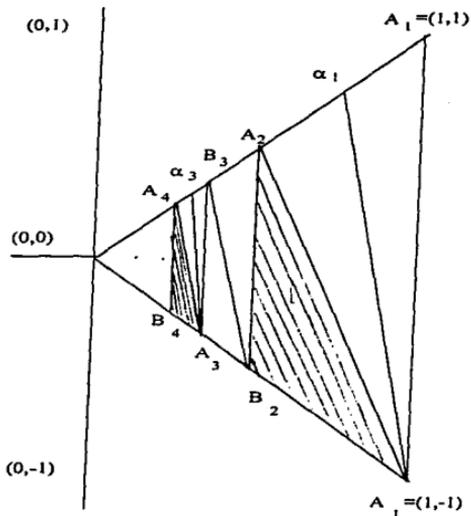


Figura 2.3: Grado que toma todos los valores enteros positivos.

f es continua en B ya que cada triángulo se aplica en un triángulo o segmento hacia la izquierda, y si tomamos una sucesión en \bar{W} que converja a B entonces la imagen de la sucesión también converge a B . Y en el resto, *f* es continua porque se pega en cada segmento que trazamos.

Notemos que los únicos triángulos que no se aplican en segmentos son los triángulos $\Delta A_{2i-1}A_{2i}B_{2i}$ (sombreados en la figura) que vamos a denotar solo por Δ_{2i-1} .

Sea y un valor de *f* tal que y esté en el interior del $\Delta_{2i-1}A_{2i}B$; entonces $f^{-1}(y) \subset \cup_{j=1}^{\infty} \text{int} \Delta_{2i-1}$. Por el teorema de escisión podemos restringir la aplicación a los triángulos Δ_{2i-1} . Nuestra aplicación afín

es entonces

$$f_{2i-1}(x) = \left(\frac{4i+1}{\frac{1-4i}{2}} \frac{1}{2} \right) x + (-1, 1)$$

para los triángulos Δ_{2i-1} , y el determinante de su derivada

$$\det Df_{2i-1}(x) = \frac{4i+1}{4} - \frac{1-4i}{4} = 2i > 0,$$

siempre positivo.

Así para y , en el interior del cuadrilátero

$$A_{2i}A_{2i-1}A_2A_1 \quad (\text{para } i \geq 2),$$

su imagen inversa, $f^{-1}(y)$, consiste de puntos interiores de triángulos Δ_{2k-1} para $k = 1, 2, \dots, i-1$, uno en cada triángulo y con determinante de la derivada en ese punto, positivo, obteniendo grados que toman valores $1, 2, \dots, i$, según el cuadrilátero en que se encuentre y . Finalmente si $y \notin \Delta_{A_2A_1B}$, $f^{-1}(y) = \emptyset$, que como sabemos $\text{grado}(f, W, y) = 0$. ■

El siguiente teorema es una generalización del teorema de invariancia homotópica 2.2.2; la diferencia con el anterior es que ahora nuestra definición de grado abarca también a las aplicaciones continuas.

Teorema 2.4.3 (Invariancia homotópica). Sea $\Phi : \overline{W} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una homotopía y y un valor en $\mathbb{R}^n - \Phi_t(\partial W) \quad \forall t \in [0, 1]$. Entonces

$$\text{grado}(\Phi_0, W, y) = \text{grado}(\Phi_1, W, y).$$

Demostración.

Aproximemos a Φ_0 y Φ_1 por dos aplicaciones $\Psi_0, \Psi_1 : \overline{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$, C^1 en W y tales que

$$\Phi_i|_{\partial W} = \Psi_i|_{\partial W} \quad i = 0, 1.$$

Si z es un valor regular de Ψ_0 y Ψ_1 ubicado en una vecindad suficientemente pequeña de y , entonces

$$\text{grado}(\Phi_i, W, z) = \text{grado}(\Psi_i, W, z) \quad i = 0, 1.$$

Ahora definimos una nueva homotopía

$$H(x, t) = \begin{cases} (1 - 3t)\Psi_0(x) + 3t\Phi_0(x) & t \in [0, \frac{1}{3}] \\ \Phi(x, 3t - 1) & t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ (3 - 3t)\Phi_1(x) + (3t - 2)\Psi_1(x) & t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

Vemos que en $t = \frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, H está bien definida y es continua. Si $x \in \partial W$, se tiene $\Psi_0(x) = \Phi_0(x)$ y $\Psi_1(x) = \Phi_1(x)$, por como escogimos las aproximaciones; entonces para $t \in [0, \frac{1}{3}]$, $H(x, t) = \Phi_0(x)$; y para $t \in [\frac{2}{3}, 1]$, $H(x, t) = \Phi_1(x)$. Con esto,

$$H((\partial W) \times [0, 1]) = \Phi((\partial W) \times [0, 1]) \neq y,$$

y $H_0 = \Psi_0$, $H_1 = \Psi_1$ son C^1 con z valor regular de ambas. Obtuvimos, pues, las hipótesis del teorema de invariancia homotópica para aplicaciones C^1 2.2.2, entonces

$$\text{grado}(H_0, W, z) = \text{grado}(H_1, W, z),$$

lo que implica que

$$\text{grado}(\Psi_0, W, z) = \text{grado}(\Psi_1, W, z);$$

y por lo tanto

$$\text{grado}(\Phi_0, W, y) = \text{grado}(\Phi_1, W, y).$$

■

Y análogamente para el caso C^1 , obtenemos como corolario del teorema anterior la generalización de 2.2:4:

Teorema 2.4.4 (Determinación por la Frontera). Sean $W \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado, $f_1, f_2 : \bar{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuas, tales que $f_1|_{\partial W} = f_2|_{\partial W}$; si $y \in \mathbb{R}^n - f_1(\partial W)$ entonces

$$\text{grado}(f_1, W, y) = \text{grado}(f_2, W, y).$$

Demostración.

Tomamos la homotopía $\Phi : \bar{W} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, con regla de correspondencia

$$\Phi_t(x) = \Phi(x, t) = (1-t)f_1(x) - tf_2(x).$$

Para $x \in \partial W$ se tiene $f_1(x) = f_2(x)$ por lo que entonces $\Phi(x, t) = f_1(x)$; y si y está en $\mathbb{R}^n - f_1(\partial W)$ entonces está en $\mathbb{R}^n - \Phi_t(\partial W) \quad \forall t \in [0, 1]$. Y por el teorema generalizado de invariancia homotópica 2.4.3

$$\text{grado}(\Phi_0, W, y) = \text{grado}(\Phi_1, W, y);$$

por lo que concluimos

$$\text{grado}(f_1, W, y) = \text{grado}(f_2, W, y).$$

A continuación damos un ejemplo encauzado a conocer el comportamiento del grado para productos de aplicaciones. ■

EJEMPLO 2.4.3 Consideremos dos aplicaciones continuas ambas en los complejos

$$f, g : \bar{W} \rightarrow \mathbb{C},$$

con $W \subset \mathbb{C}$ abierto acotado, y tales que $0 \notin f(\partial W)$ y $0 \notin g(\partial W)$. Entonces veremos que $\text{grado}(f \cdot g, W, 0) = \text{grado}(f, W, 0) + \text{grado}(g, W, 0)$.

Vemos que para $x \in \partial W$ se tiene que $f(x) \neq 0$ y $g(x) \neq 0$, por lo que también $(f \cdot g)(x) \neq 0$. Ya sin pérdida de generalidad supondremos que f y g son C^1 en W .

Sea $\epsilon \in (0, 1)$ tal que

$$\epsilon < \frac{|f(x)g(x)|}{|f(x)| + |g(x)| + 1} \quad \forall x \in \partial W;$$

de aquí tanto $|f(x)|$ como $|g(x)|$ son mayores que ϵ si $x \in \partial W$, pues se tiene que

$$\frac{|f(x)| |g(x)|}{|f(x)| + |g(x)| + 1} < |f(x)| \quad \forall x \in \partial W.$$

Esta desigualdad vale también para $g(x)$.

Sea a valor regular de f con $|a| < \epsilon$, y $f^{-1}(a) = \{x_1, \dots, x_p\}$. Sea b valor regular de g , con $|b| < \epsilon$ y tal que $b \neq g(x_i)$ para $i = 1, 2, \dots, p$. Sea $g^{-1}(b) = \{y_1, \dots, y_q\}$.

De esto,

$$\text{grado}(f, W, 0) = \text{grado}(f, W, a)$$

y

$$\text{grado}(g, W, 0) = \text{grado}(g, W, b).$$

Definimos ahora una aplicación $h: \overline{W} \rightarrow \mathcal{C}$, dada por

$$h(z) = (f(z) - a)(g(z) - b),$$

\mathcal{C}^1 , que se anula en $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q$. Luego

$$Dh(x_i) = Df(x_i)(g(x_i) - b)$$

y

$$Dh(y_j) = (f(y_j) - a)Dg(y_j).$$

Si usamos notación compleja

$$f(s, t) = u_1(s, t) + iv_1(s, t) \quad , \quad g(s, t) = u_2(s, t) + iv_2(s, t) \\ a = a_1 + ia_2 \quad , \quad b = b_1 + ib_2;$$

y haciendo cálculos como en \mathbb{R}^2

$$Df(x_i) = \begin{pmatrix} u_2 - b_1 & -(v_2 - b_2) \\ v_2 - b_2 & u_2 - b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix} = (g(x_i) - b)Df(x_i),$$

por lo que $\det Df(x_i) = \det(g(x_i) - b)\det Df(x_i)$, de donde $\det(g(x_i) - b)$ tiene que ser positivo. De igual forma se observa que $\det(f(y_j) - a) > 0$.

Entonces

$$\text{sig}[\det Dh(x_i)] = \text{sig}[\det Df(x_i)] \\ \text{y } \text{sig}[\det Dh(y_j)] = \text{sig}[\det Dg(y_j)].$$

Con esto

$$\text{grado}(h, W, 0) = \sum_{z_k \in h^{-1}(0)} \text{sig}[\det Dh(z_k)],$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{x_i} \text{sig}[\det Dh(x_i)] + \sum_{y_j} \text{sig}[\det Dh(y_j)], \\
 &= \sum_{x_i} \text{sig}[\det Df(x_i)] + \sum_{y_j} \text{sig}[\det Dg(y_j)], \\
 &= \text{grado}(f, W, a) + \text{grado}(g, W, b), \\
 &= \text{grado}(f, W, 0) + \text{grado}(g, W, 0).
 \end{aligned}$$

Pero aún falta comprobar que realmente

$$\text{grado}(f \cdot g, W, 0) = \text{grado}(h, W, 0).$$

Aquí la prueba.

Nos tomamos la homotopía $F(x, t) = (f(x) - ta)(g(x) - tb)$. Chequemos que para $x \in \partial W$ se cumple que $F(x, t) \neq 0 \ \forall t$. Sea $x \in \partial W$, entonces

$$F(x, t) = f(x)g(x) - t(ag(x) - bf(x) + tab),$$

pero

$$\begin{aligned}
 |f(x)g(x)| &> \epsilon(|f(x)| + |g(x)| + 1) \\
 &> \epsilon(|f(x)| + |g(x)| + \epsilon),
 \end{aligned}$$

esto por como tomamos ϵ ; entonces

$$\begin{aligned}
 |F(x, t)| &> \epsilon(|f(x)| + |g(x)| + \epsilon) - t|ag(x) - t|bf(x)| \\
 &\quad - t|tab| \\
 &> \epsilon(|f(x)| + |g(x)| + \epsilon) - t\epsilon(|g(x)| + |f(x)| + t\epsilon) \\
 &= (|f(x)| + |g(x)|)(\epsilon - t\epsilon) + \epsilon(\epsilon - t^2\epsilon) > 0.
 \end{aligned}$$

Así, $F(x, t) \neq 0 \ \forall t \in [0, 1]$ y $\forall x \in \partial W$.

Por el teorema de invariancia homotópica

$$\text{grado}(f \cdot g, W, 0) = \text{grado}(h, W, 0).$$

Y por lo tanto

$$\text{grado}(f \cdot g, W, 0) = \text{grado}(f, W, 0) + \text{grado}(g, W, 0).$$

Un método que nos facilita el cálculo del grado es cuando la imagen inversa del valor en cuestión de la aplicación se encuentra en abiertos ajenos. ■

Si se hacen cálculos por separado será igual a tomarlo para todo el dominio abierto. El teorema de escisión ya nos facilitó un poco esto. Formalicemos.

Teorema 2.4.5 (Aditividad). Sean W y f igual que antes. Supongamos que para $y \in \mathbb{R}^n - f(\partial W)$, $f^{-1}(y) = A_1 \cup A_2$ con A_1 y A_2 cerrados y ajenos. Si W_1, W_2 son abiertos ajenos que contienen a A_1, A_2 respectivamente, entonces

$$\text{grado}(f, W, y) = \text{grado}(f, W_1, y) + \text{grado}(f, W_2, y).$$

Demostración.

Por las propiedades de espacio métrico de \mathbb{R}^n , siempre podemos encontrar abiertos V_i tales que $A_i \subset V_i \subset W_i$, $i = 1, 2$ y $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \emptyset$; entonces podemos suponer los W_i de tal manera que $\overline{W_1} \cap \overline{W_2} = \emptyset$. Como $f^{-1}(y) \subset W_1 \cup W_2$, por el teorema de escisión 2.4.2

$$\text{grado}(f, W, y) = \text{grado}(f, W_1 \cup W_2, y).$$

Restrinjámonos entonces al abierto $W' = W_1 \cup W_2$.

Sea $g : \overline{W'} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aproximación C^1 de $f : \overline{W'} \rightarrow \mathbb{R}^n$, que coinciden en $\partial W'$, y $z \in \mathbb{R}^n - g(\partial W')$ valor regular de g en una vecindad suficientemente pequeña de y para que

$$\text{grado}(f, W', y) = \text{grado}(g, W', z).$$

Como W_1 y W_2 son ajenos, y $g|_{W_i}$ es una aproximación C^1 de $f|_{W_i}$, tal que $g|_{\partial W} = f|_{\partial W}$, $i = 1, 2$, se tiene que

$$\text{grado}(f, W_i, y) = \text{grado}(g, W_i, z) \quad i = 1, 2.$$

Y entonces

$$\begin{aligned}
 \text{grado}(g, W', z) &= \sum_{x \in g^{-1}(z)} \text{sig}[\det Dg(x)] \\
 &= \sum_{x \in g|_{\overline{W}_1}^{-1}(z)} \text{sig}[\det Dg|_{\overline{W}_1}(x)] \\
 &\quad + \sum_{x \in g|_{\overline{W}_2}^{-1}(z)} \text{sig}[\det Dg|_{\overline{W}_2}(x)] \\
 &= \text{grado}(g, W_1, z) + \text{grado}(g, W_2, z) \\
 &= \text{grado}(f, W_1, y) + \text{grado}(f, W_2, y).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\text{grado}(f, W, y) = \text{grado}(f, W', y) = \text{grado}(f, W_1, y) + \text{grado}(f, W_2, y),$$

que es lo que queríamos. ■

Se puede demostrar por inducción (y se observa fácilmente) que el teorema se cumple si la imagen inversa del valor tomado se descomponen en cerrados ajenos, que están contenidos en abiertos también ajenos.

Ahora veamos otro resultado: cuando la aplicación está definida en abiertos no necesariamente ajenos.

Teorema 2.4.6 *Sea $W = W_1 \cup W_2 \subset \mathbb{R}^n$ con W_1, W_2 abiertos acotados, $f: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua y $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $y \notin f(\partial W_1)$, $y \notin f(\partial W_2)$. Entonces se cumple que*

$$y \notin f(\partial W), \quad y \notin f(\partial(W_1 \cap W_2)).$$

y además

$$\text{grado}(f, W, y) = \text{grado}(f, W_1, y) + \text{grado}(f, W_2, y) - \text{grado}(f, W_1 \cap W_2, y).$$

Demostración.

Con contenciones simples se demuestra que $\partial W \subset (\partial W_1) \cup (\partial W_2)$. Por lo que

$$f(\partial W) \subset f(\partial W_1) \cup f(\partial W_2);$$

y si y no está en el lado derecho de la contención entonces $y \notin f(\partial W)$, como se quería. De igual modo se demuestra que $\partial(W_1 \cap W_2) \subset (\partial W_1 \cup \partial W_2)$, y así

$$f(\partial(W_1 \cap W_2)) \subset f(\partial W_1) \cup f(\partial W_2),$$

por lo que $y \notin f(\partial(W_1 \cap W_2))$. Con esto, el grado en W y el grado en $W_1 \cap W_2$ ya pueden ser calculables.

Definamos

$$\begin{aligned} V_{12} &= W_1 \cap W_2, \\ V_1 &= W_1 - \overline{W_1 \cap W_2} = W_1 - \overline{V_{12}} \\ V_2 &= W_2 - \overline{W_1 \cap W_2} = W_2 - \overline{V_{12}}; \end{aligned}$$

así $f^{-1} \subset V_1 \cup V_2 \cup V_{12}$.

Por escisión y por el teorema anterior podemos hacer

$$\begin{aligned} \text{grado}(f, W, y) &= \text{grado}(f, V_1, y) + \text{grado}(f, V_2 \cup V_{12}, y) \\ &= \text{grado}(f, W_1, y) - \text{grado}(f, V_{12}, y) \\ &\quad + \text{grado}(f, V_2 \cup V_{12}, y) \\ &= \text{grado}(f, W_1, y) - \text{grado}(f, V_{12}, y) \\ &\quad + \text{grado}(f, V_2, y) + \text{grado}(f, V_{12}, y) \\ &= \text{grado}(f, W_1, y) + \text{grado}(f, W_2, y) - \\ &\quad - \text{grado}(f, V_{12}, y) \\ &= \text{grado}(f, W_1, y) + \text{grado}(f, W_2, y) \\ &\quad - \text{grado}(f, W_1 \cap W_2, y). \end{aligned}$$

Y acerca del producto de dos aplicaciones ■

Teorema 2.4.7 (Multiplicatividad). *Consideremos las aplicaciones continuas $f_1 : \overline{W}_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f_2 : \overline{W}_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $W_1 \subset \mathbb{R}^m$, $W_2 \subset \mathbb{R}^n$ abiertos acotados. Si $y_1 \in \mathbb{R}^m - f_1(\partial W_1)$ y $y_2 \in \mathbb{R}^n - f_2(\partial W_2)$ entonces*

$$\text{grado}(f_1 \times f_2, W_1 \times W_2, (y_1, y_2)) = \text{grado}(f_1, W_1, y_1) \text{grado}(f_2, W_2, y_2).$$

Demostración.

Ya que f_1 y f_2 son continuas entonces también lo es la aplicación $f_1 \times f_2 : W_1 \times W_2 \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, que está dada por

$$(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2)).$$

De las hipótesis $f_1^{-1}(y_1) \subset W_1$ y $f_2^{-1}(y_2) \subset W_2$, entonces se tiene

$$(f_1 \times f_2)^{-1}(y_1, y_2) = f_1^{-1}(y_1) \times f_2^{-1}(y_2) \subset W_1 \times W_2;$$

con esto, sí podemos calcular el grado de $f_1 \times f_2$ en (y_1, y_2) .

Sean g_1, g_2 respectivas aproximaciones de f_1 y f_2 , con $g_i |_{\partial W_i} = f_i |_{\partial W_i}$, para $i = 1, 2$. Sabemos que en y_1 y en y_2 podemos encontrar vecindades y valores regulares, z_1, z_2 , en estas, tales que

$$\text{grado}(f_i, W_i, y_i) = \text{grado}(g_i, W_i, z_i) \quad i = 1, 2.$$

La imagen inversa de z_1 y z_2 son

$$g_1^{-1}(z_1) = \{a_1, \dots, a_p\},$$

$$g_2^{-1}(z_2) = \{b_1, \dots, b_q\},$$

para ciertos p y q enteros positivos. Consecuentemente para (z_1, z_2) valor de $(g_1 \times g_2) |_{W_1 \times W_2}$ se tiene

$$(g_1 \times g_2)^{-1}(z_1, z_2) = g_1^{-1}(z_1) \times g_2^{-1}(z_2) \ni (a_i, b_j),$$

y

$$D(g_1 \times g_2)(a_i, b_j) = \begin{pmatrix} Dg_1(a_i) & 0 \\ 0 & Dg_2(b_j) \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es entonces

$$\det D(g_1 \times g_2)(a_i, b_j) = \det Dg_1(a_i) \det Dg_2(b_j) \neq 0$$

por ser a_i y b_j puntos regulares. Hemos demostrado pues, que (z_1, z_2) es valor regular de $(g_1 \times g_2) |_{W_1 \times W_2}$.

Con esta expresión del determinante

$$\text{grado}(g_1 \times g_2, W_1 \times W_2, (z_1, z_2)) = \sum \text{sig}[\det D(g_1 \times g_2)(a_i, b_j)]$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1, \dots, p} \sum_{j=1, \dots, q} \text{sig}[\det D(g_1 \times g_2)(a_i, b_j)] \\
 &= \sum_{i=1, \dots, p} \text{sig}[\det Dg_1(a_i)] \sum_{j=1, \dots, q} \text{sig}[\det Dg_2(b_j)] \\
 &= \text{grado}(g_1, W_1, z_1) \text{grado}(g_2, W_2, z_2).
 \end{aligned}$$

La demostración estará completa si demostramos que

$$\text{grado}(f_1 \times f_2, W_1 \times W_2, (y_1, y_2)) = \text{grado}(g_1 \times g_2, W_1 \times W_2, (z_1, z_2)).$$

Tomemos pues la homotopía $\Phi : [0, 1] \times \overline{W_1 \times W_2} \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ que la damos de la siguiente forma

$$\Phi(t, x_1, x_2) = ((1-t)f_1(x_1) + tg_1(x_1), (1-t)f_2(x_2) + tg_2(x_2)).$$

Veamos que $(y_1, y_2) \neq \Phi(t, x_1, x_2) \quad \forall t$ y para (x_1, x_2) en $\partial(W_1 \times W_2)$.

Si (x_1, x_2) está en la frontera del producto sucede entonces que, o $x_1 \in \partial W_1$ o $x_2 \in \partial W_2$. Si $x_1 \in \partial W_1$, por como escogimos a g_1 , $g_1(x_1) = f_1(x_1)$ y entonces

$$(1-t)f_1(x_1) + tg_1(x_1) = f_1(x_1) \neq y_1,$$

por lo que entonces $(y_1, y_2) \neq \Phi(t, x_1, x_2)$ para tales (x_1, x_2) ; y de igual forma se demuestra si $x_2 \in \partial W_2$.

Entonces por el teorema de invariancia homotópica

$$\text{grado}(f_1 \times f_2, W_1 \times W_2, (y_1, y_2)) = \text{grado}(g_1 \times g_2, W_1 \times W_2, (y_1, y_2)),$$

y el lado derecho de la igualdad es a su vez igual a

$$\text{grado}(g_1 \times g_2, W_1 \times W_2, (z_1, z_2)).$$

Por lo tanto concluimos

$$\text{grado}(f_1 \times f_2, W_1 \times W_2, (y_1, y_2)) = \text{grado}(f_1, W_1, y_1) \text{grado}(f_2, W_2, y_2).$$

Y como consecuencia de la multiplicatividad.

Teorema 2.4.8 (Estabilidad). Sean $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ continuas con $W \subset \mathbb{R}^n$ y $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ abiertos acotados tales que $U \subset \mathbb{R}^m \times W$, y $g(x_1, x_2) = (x_1, f(x_2))$. Entonces para $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ con $\{y_1\} \times f^{-1}(y_2) \subset U$ se tiene

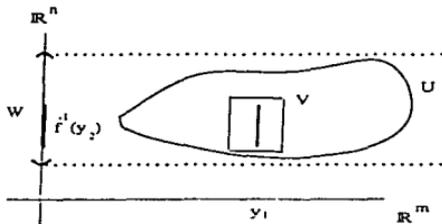
$$\text{grado}(g, U, (y_1, y_2)) = \text{grado}(f, W, y_2).$$

Demostración.

De la continuidad de f el subconjunto $\{y_1\} \times f^{-1}(y_2)$ de U es cerrado, entonces por la normalidad de \mathbb{R}^{m+n} podemos encontrar un abierto acotado $V \subset \mathbb{R}^{m+n}$ tal que

$$\{y_1\} \times f^{-1}(y_2) \subset V \subset \bar{V} \subset U$$

y además que $V = W_1 \times W_2$ con W_1 una vecindad abierta de y_1 en \mathbb{R}^m , y W_2 vecindad abierta de $f^{-1}(y_2)$ en \mathbb{R}^n .



Así $g^{-1}(y_1, y_2) = \{y_1\} \times f^{-1}(y_2) \subset W_1 \times W_2 \subset \overline{W_1 \times W_2} \subset U \subset \mathbb{R}^m \times W$ y $f^{-1}(y_2) \subset W_2 \subset \overline{W_2} \subset W$.

Por el teorema de escisión podemos tomar las aplicaciones restringidas $g|_{\bar{V}}$, $f|_{\overline{W_2}}$ y obtenemos

$$\text{grado}(g, U, (y_1, y_2)) = \text{grado}(g, V, (y_1, y_2)),$$

pero a g podemos verla como el producto $i \times f$, donde i es la inclusión, y entonces

$$\text{grado}(g, V, (y_1, y_2)) = \text{grado}(i \times f, W_1 \times W_2, (y_1, y_2))$$

$$\begin{aligned} &= \text{grado}(i, W_1, y_1) \text{grado}(f, W_2, y_2) \\ &= \text{grado}(f, W_2, y_2), \end{aligned}$$

y este último es igual a $\text{grado}(f, W, y_2)$ ya que $f^{-1}(y_2)$ está contenido en $W_2 \subset W$ y por lo tanto

$$\text{grado}(g, U, (y_1, y_2)) = \text{grado}(f, W, y_2).$$

Para fijar ideas un poco, veamos un ejemplo en donde usamos la estabilidad del grado. ■

EJEMPLO 2.4.4 Si damos $k \in \mathbb{Z}$, vamos a encontrar una aplicación

$$g_k : \bar{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

para cada natural $n > 1$, continua con

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\},$$

$|g_k(x)| = |x| \quad \forall x \in \bar{U}$ y $\text{grado}(g_k, U, 0) = k$.

Si suponemos $n = 2$ podemos considerarnos en el plano complejo, y la aplicación casi como la aplicación potencia $\pi_k : \bar{W} \longrightarrow \mathbb{C}$ con W el disco unitario en $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, es decir, $\pi_k(z) = z^k$; sin embargo la condición $|\pi_k(z)| = |z|$ solo se cumple para z en ∂W ; modifiquemos un poco esta.

En la forma polar de los complejos $z = r(\cos\theta + isen\theta)$, con $r = |z|$ y θ el argumento de z . Definimos entonces

$$f_k(z) = r(\cos k\theta + isenk\theta),$$

y procedemos como en el ejemplo 2.3.6; de este modo $|f_k(z)| = |z|$ $\forall z \in \bar{W}$ y $\text{grado}(f_k, W, w) = k \quad \forall w \neq 0$ como queríamos y es positivo o negativo según el signo de k . Así

$$\text{grado}(f_k, W, w) = k.$$

Luego para $n > 2$ hacemos uso del teorema de estabilidad, con $W \subset \mathbb{C}$ como para $n = 2$, y $U \subset \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^n$ como está definida

en el teorema, y además que $U \subset \mathbb{R}^{n-2} \times W$. Entonces la aplicación $g_k : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la damos como necesitamos para el teorema, es decir,

$$g_k(x_1, x_2) = (x_1, f_k(x_2)) \text{ donde } x_2 \in W, \text{ y } f_k \text{ como antes.}$$

Así para (y_1, y_2) valor regular de $\mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}^2$ (y por tanto y_2 valor regular de f_k en \mathbb{R}^2), con $\{y_1\} \times f_k^{-1}(y_2)$ subconjunto de U , se tiene

$$\text{grado}(g_k, U, (y_1, y_2)) = \text{grado}(f_k, W, y_2) = k.$$

En particular esto se cumple para todo (y_1, y_2) en una vecindad del cero (que no es valor regular), por lo tanto

$$\text{grado}(g_k, U, 0) = k.$$

■

Ahora definimos otro producto. Consideremos dos aplicaciones continuas $f : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : \bar{V} \times \bar{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $V \subset \mathbb{R}^m$, $W \subset \mathbb{R}^n$ abiertos acotados como siempre hemos tomado. Definamos

$$f \star g : \bar{V} \times \bar{W} \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

de la siguiente forma

$$f \star g(v, w) = (f(v), g(v, w)).$$

Ya que cada entrada es una aplicación continua el nuevo producto también es continuo. Y con esta definición damos el siguiente

Corolario 2.4.2 Sean $V \subset \mathbb{R}^m$ un abierto acotado convexo, $W \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado, y dos aplicaciones continuas $f : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : \bar{V} \times \bar{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuas. Con esta última definimos para cada $v \in \bar{V}$ la aplicación $g_v : \bar{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$ con regla de correspondencia $g_v(w) = g(v, w)$. Si $y_1 \in \mathbb{R}^m - f(\partial V)$ y $y_2 \in \mathbb{R}^n - g_v(\partial W) \forall v \in V$, entonces

$$\text{grado}(g_v, W, y_2) = r \quad \forall v \in V,$$

es decir, el grado es constante, y

$$(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^{m+n} - f \star g(\partial(V \times W)),$$

con lo que

$$\text{grado}(f \star g, V \times W, (y_1, y_2)) = \text{grado}(f, V, y_1) \text{grado}(g_v, W, y_2) \quad \forall v \in V.$$

Demostración.

Fijemos $a \in V$; con esta tenemos la aplicación continua $g_a(w) = g(a, w)$. Luego para una $v \in V$ damos una homotopía $\Phi : \overline{W} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de la siguiente forma

$$\Phi(w, t) = g_{(1-t)v+ta}(w);$$

observemos que $\Phi(w, 0) = g_v(w)$ y $\Phi(w, 1) = g_a(w)$.

Problemos que $y_2 \notin \Phi_t(\partial W) \quad \forall t \in [0, 1]$, o bien, que para toda $w \in \partial W$ se tenga que $y_2 \neq \Phi_t(w) \quad \forall t \in [0, 1]$.

Si $w \in \partial W$, por las hipótesis sobre y_2 se tiene que $y_2 \neq g_v(w) \quad \forall v \in V$, en particular en el segmento $(1-t)v + ta$ que está completamente contenido en V por ser convexo; de este modo $y_2 \neq g_{(1-t)v+ta}(w) \quad \forall t$, esto es, $y_2 \neq \Phi_t(w) \quad \forall t \in [0, 1]$ y $w \in \partial W$.

Del teorema de invariancia homotópica se tiene que

$$\text{grado}(g_a, W, y_2) = \text{grado}(g_v, W, y_2),$$

pero v fue arbitrario en V por lo que la igualdad se cumple para todo $v \in V$; así, si $\text{grado}(g_a, W, y_2) = r$ entonces $\text{grado}(g_v, W, y_2) = r \quad \forall v \in V$, como se quería.

Ahora veamos si se puede calcular el grado para \star . Si $(v, w) \in \partial(V \times W)$, puede suceder que $v \in \partial V$ o $w \in \partial W$; si suponemos lo segundo, $y_2 \neq g_v(w) \quad \forall v \in V$ por las hipótesis (mas en general, sucede para todo el segmento que une v con a) y entonces

$$(y_1, y_2) \neq (f(v), g_v(w)) = f \star g(v, w);$$

por otro lado si $v \in \partial V$, $y_1 \neq f(v)$ y también

$$(y_1, y_2) \neq f \star g(v, w).$$

Así, ya el grado puede ser definido.

Consideremos otra homotopía

$$\Psi : \overline{V \times W} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}, \quad \Psi(v, w, t) = (f(v), g_{(1-t)v+ta}(w));$$

ya que (y_1, y_2) está en $\mathbb{R}^{m+n} - \Psi_t(\overline{V \times W}) \quad \forall t \in [0, 1]$ podemos utilizar invariancia homotópica,

$$\text{grado}(\Psi_0, V \times W, (y_1, y_2)) = \text{grado}(\Psi_1, V \times W, (y_1, y_2)).$$

Luego por multiplicatividad

$$\text{grado}(\Psi_1, V \times W, (y_1, y_2)) = \text{grado}(f, V, y_1) \dot{\text{grado}}(g_a, W, y_2).$$

Por otro lado $\text{grado}(\Psi_0, V \times W, (y_1, y_2)) = \text{grado}(f \times g, V \times W, (y_1, y_2))$.
Entonces

$$\text{grado}(\Psi_0, V \times W, (y_1, y_2)) = \text{grado}(f, V, y_1) \dot{\text{grado}}(g_a, W, y_2),$$

o bien

$$\text{grado}(f \times g, V \times W, (y_1, y_2)) = \text{grado}(f, V, y_1) \dot{\text{grado}}(g_v, W, y_2) \quad \forall v \in V. \quad \blacksquare$$

Hemos visto como se comporta el grado cuando el dominio de la aplicación se descompone en abiertos disjuntos y cuando descomponemos la aplicación a subconjuntos abiertos del dominio (escisión); también cuando hacemos el producto directo de aplicaciones continuas (multiplicatividad).

Ahora le toca el turno a la composición. Empezaremos dando un teorema con restricciones a nuestras aplicaciones.

Teorema 2.4.9 (Funtorialidad). Sean $f : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : \bar{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuas, con $V, W \subset \mathbb{R}^n$ abiertos acotados; si $z \in \mathbb{R}^n$ es tal que $g^{-1}(z) \subset W$ y $f^{-1}(g^{-1}(z)) \subset V$, entonces para $y \in g^{-1}(z)$ el $\text{grado}(f, V, y)$ es calculable. Y si $\text{grado}(f, V, y) = K \quad \forall y \in g^{-1}(z)$, entonces

$$\text{grado}(g \circ f, V \cap f^{-1}(W), z) = \text{grado}(f, V, y) \text{grado}(g, W, z) \quad \forall y \in g^{-1}(z).$$

Demostración.

En efecto el $\text{grado}(f, V, y)$ se puede definir con las hipótesis, pues cuando se pide $f^{-1}(g^{-1}(z)) \subset V$ estamos pidiendo que $g^{-1}(z) \subset f(V)$, o bien, que $g^{-1}(z) \subset \mathbb{R}^n - f(\partial V)$; basta tomar entonces y en $g^{-1}(z)$. Por las propiedades encontradas al comienzo de la sección

$$\mathbb{R}^n - f(\partial V) = \cup_{r \in \mathbb{Z}} \Gamma(f, V, r),$$

donde la unión es ajena y

$$\Gamma(f, V, r) = \{y \in \mathbb{R}^n - f(\partial V) : \text{grado}(f, V, y) = r\}$$

es abierto. Pero $\text{grado}(f, V, y) = K \quad \forall y \in g^{-1}(z)$; esto quiere decir que $g^{-1}(z) \subset \Gamma(f, V, r)$ para $r \in \mathbb{Z}$ fijo.

Denotamos $W_r = W \cap \Gamma(f, V, r)$, que contiene a $g^{-1}(z)$ (debe estar en ambos); entonces $(g \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}(g^{-1}(z)) \subset f^{-1}(W_r)$. También denotamos $V_r = f^{-1}(W_r)$, para que tengamos

$$V_r = f^{-1}(W \cap \Gamma(f, V, r)) \subset f^{-1}(\Gamma(f, V, r)) \subset V,$$

y entonces tenemos que $(g \circ f)^{-1}(z) \subset V_r \subset V$.

Por último, con la escisión se dan las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\text{grado}(f, V, y) &= \text{grado}(f, V_r, y), \\ \text{grado}(g, W, z) &= \text{grado}(g, W_r, z).\end{aligned}$$

Además también por escisión tenemos

$$\text{grado}(g \circ f, V \cap f^{-1}(W), z) = \text{grado}(g \circ f, V_r, z).$$

En el resto de la demostración consideraremos solo las aplicaciones restringidas según correspondan a V_r, W_r .

Notemos que si $V_r = f^{-1}(W_r)$ se tiene $f(V_r) \subset W_r$; y además, dado que f es continua, $f(\partial V_r) \subset \partial W_r$. Vamos a aproximar $f|_{V_r}$ por una aplicación $f' : V_r \rightarrow \mathbb{R}^n$, que sea C^1 en V_r y además cumpla que

$$|f'(x) - f(x)| < \rho(f(x), \mathbb{R}^n - W_r) \quad \forall x \in V_r$$

y

$$|f'(x) - f(x)| = 0 \quad \forall x \in \partial V_r.$$

Como $f(V_r) \subset W_r$ la primera desigualdad se vale y entonces

$$f'(V_r) \subset W_r.$$

También $f'(\partial V_r) \subset \partial W_r$, pues $f(\partial V_r) \subset \partial W_r$ y f y g coinciden en ∂V_r . Ahora aproximemos g por $g' : W_r \rightarrow \mathbb{R}^n$, C^1 en W_r y que coincide con g en ∂W_r . Luego la composición $g' \circ f' : V_r \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una aproximación C^1 de $g \circ f$ y también son iguales en la frontera de V_r . Con esto se cumple

$$\begin{aligned}\text{grado}(f, V_r, y) &= \text{grado}(f', V_r, y'), \\ \text{grado}(g, W_r, z) &= \text{grado}(g', W_r, z'), \\ \text{grado}(g \circ f, V_r, z) &= \text{grado}(g' \circ f', V_r, z')\end{aligned}$$

con z' valor regular de g' suficientemente cercano a z en donde el grado no cambia, y que además su imagen inversa bajo g' , $g'^{-1}(z')$, esté en $W_r = W \cap \Gamma(f, V, r)$ (se dá por haber tomado la restricción); también $y' \in g'^{-1}(z') \subset W_r$, valor regular de f cercano a y .

Entonces por regla de la cadena $D(g' \circ f')(x) = Dg'(y')Df'(x)$ para $x \in f'^{-1}(y')$ y $y' \in g'^{-1}(z')$; con determinante

$$\det D(g' \circ f')(x) = \det Dg'(y') \det Df'(x) \neq 0.$$

Y calculando

$$\begin{aligned} \text{grado}(g' \circ f', V_r, z') &= \sum_{x \in (g' \circ f')^{-1}(z')} \text{sig}[\det D(g' \circ f')(x)] \\ &= \sum_{y' \in g'^{-1}(z')} \text{sig}[\det Dg'(y')] \\ &\quad \sum_{x \in f'^{-1}(y')} \text{sig}[\det Df'(x)] \\ &= \text{grado}(g', W_r, z') = \text{grado}(f', V_r, y'), \end{aligned}$$

que comparando con las igualdades obtenida anteriormente se obtiene

$$\text{grado}(g \circ f, V, z) = \text{grado}(g, W, z) \text{grado}(f, V, y) \quad \forall y \in g^{-1}(z).$$

El hecho de restringir la aplicación f a que el grado de esta fuera constante para todo punto en $g^{-1}(z)$, además de facilitar la demostración, es porque es más utilizable, por lo menos en el resto de este trabajo. Sin embargo aquí damos la generalización. ■

Teorema 2.4.10 Sean f y g igual que antes, $z \in \mathbb{R}^n$ tal que $g^{-1}(z) \subset W$ y $f^{-1}(g^{-1}(z)) \subset V$. Entonces, con $W_r = W \cap \Gamma(f, V, r)$, existen r_1, \dots, r_k tales que

$$g^{-1}(z) \subset \bigcup_{i=1}^k W_{r_i},$$

es decir, $(g^{-1}(z) \cap W_r = \emptyset$ si $r \notin \{r_1, \dots, r_k\}$) y

$$\text{grado}(g \circ f, V \cap f^{-1}(W), z) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} r \text{grado}(g, W_r, z).$$

Demostración.

Como vimos en la demostración anterior

$$g^{-1}(z) \subset \mathbb{R}^n - f(\partial V) = \cup_{r \in \mathbb{Z}} \Gamma(f, V, r),$$

pero también $g^{-1}(z) \subset W$ y es compacto por lo que

$$g^{-1}(z) \subset \cup_{r \in \mathbb{Z}} (W \cap \Gamma(f, V, r)) = \cup_{r \in \mathbb{Z}} W_r,$$

es unión ajena y $g^{-1}(z) \subset \cup_{i=1}^k W_{r_i}$, entonces podemos decir que

$$g^{-1}(z) \cap W_r = \emptyset \text{ si } r \notin \{r_1, \dots, r_k\}.$$

También vimos que $V_r = f^{-1}(W_r) \subset f^{-1}(\Gamma(f, V, r)) \subset V$, con esto

$$f^{-1}(g^{-1}(z)) \subset f^{-1}(\cup_{i=1}^k W_{r_i}) = \cup_{i=1}^k V_{r_i},$$

y como los W_r son ajenos por pares también V_{r_i} lo son.

Entonces ya podemos calcular el grado en cada V_{r_i} y sumarlos para obtener el grado en $V \cap f^{-1}(W)$, esto es

$$\text{grado}(g \circ f, V \cap f^{-1}(W), z) = \sum_{i=1}^k \text{grado}(g \circ f, V_{r_i}, z),$$

donde cada $\text{grado}(g \circ f, V_{r+i}, z)$ podemos calcularlo como en el teorema anterior

$$\begin{aligned} \text{grado}(g \circ f, V_{r_i}, z) &= \text{grado}(f, V_{r_i}, y) \text{grado}(g, W_{r_i}, z) \\ &= r_i \text{grado}(g, W_{r_i}, z). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\text{grado}(g \circ f, V \cap f^{-1}(W), z) = \sum_{i=1}^k r_i \text{grado}(g, W_{r_i}, z).$$

Por último, para $r \notin \{r_1, \dots, r_k\}$, sucede que $W_r \cap g^{-1}(z) = \emptyset$ por lo que $\text{grado}(g, W_r, z) = 0$ como sabíamos; de este modo podemos extender la suma

$$\text{grado}(g \circ f, V \cap f^{-1}(W), z) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} r \text{grado}(g, W_r, z).$$

2.5 Aplicaciones.

Hasta ahora hemos desarrollado un poco lo que es la teoría de grado, con algunos ejemplos en los que se calcula, pero no hemos visto aplicaciones de nuestra teoría. El siguiente teorema, sin llegar a ser una aplicación, nos describe, con ayuda del grado un comportamiento notable de los homeomorfismos.

Teorema 2.5.1 *Para $V \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado conexo y cualquier aplicación $h : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua que manda V homeomorficamente a $h(V) \subset \mathbb{R}^n$, se tiene que*

$$\begin{aligned} \text{grado}(h, V, y) &= 1 \quad \forall y \in h(V), \\ \text{ó } \text{grado}(h, V, y) &= -1 \quad \forall y \in h(V). \end{aligned}$$

Demostración.

Sea $y \in h(V)$; como $h(V)$ es homeomorfo a V , existe un solo punto $v \in V$ tal que $h(v) = y$; pero no se aclara que no exista $v' \in \partial V$ que también cumpla $h(v') = y$, esto para que $y \in \mathbb{R}^n - h(\partial V)$, puesto que el homeomorfismo solo se restringe a V . Demostremos pues que esto no sucede.

Supongamos que sí existe tal v' . Tomemos U' , U vecindades abiertas de v' , v respectivamente, U' puede considerarse un abierto relativo en \bar{V} ya que v' está en ∂V , y como tal $U' \cap V \neq \emptyset$; U lo tomamos completamente contenido en V y tal que $U \cap U' = \emptyset$.

Por el homeomorfismo, $h(U) \subset h(V)$ es un abierto que contiene a y , luego su imagen inversa, $h^{-1}(h(U))$, es una vecindad de v y v' , en particular $U' \cap h^{-1}(h(U)) \cap V \neq \emptyset$.

Otra vez por el homeomorfismo, la imagen inversa de cada valor en $h(U)$ tiene un solo punto en U , por lo que entonces en el abierto $V \cap U' \subset V$ no hay tales puntos, es decir $V \cap U' \cap h^{-1}(h(U)) = \emptyset$, contradiciendo lo dicho anteriormente. Por lo tanto no hay v' en ∂V tal que $h(v') = y$.

Entonces ya podemos tomar libremente $y \in h(V)$ y su respectivo $v \in V$ tal que $h(v) = y$. Sea U vecindad abierta de v y tal que $\bar{U} \subset V$. Por escisión

$$\text{grado}(h, V, y) = \text{grado}(h, U, y).$$

Ahora \bar{U} es homeomorfo a $h(\bar{U}) = \overline{h(U)}$; por otra parte definimos $g = h|_{\bar{U}^{-1}}: \overline{h(U)} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Como

$$g^{-1}(v) = y \subset h(U), \quad h|_{\bar{U}^{-1}}(g^{-1}(v)) = h|_{\bar{U}^{-1}}(y) = v,$$

y $\text{grado}(h, U, y)$ es constante para $y \in g^{-1}(v)$ (pues $g^{-1}(v)$ solo contiene a y), podemos usar el teorema de la funtorialidad y obtenemos

$$\text{grado}(g \circ h|_{\bar{U}}, U, y) = \text{grado}(g, h(U), v) \text{grado}(h, U, y) \quad \forall y \in g^{-1}(v).$$

Pero $g \circ h|_{\bar{U}} = i$, en la que sabemos $\text{grado}(i, U, y) = 1$ por el ejemplo 2.3.2. Así los únicos casos posibles del $\text{grado}(h, U, y)$ son $+1, -1$.

Y por lo tanto

$$\text{grado}(h, V, y) = \pm 1 \quad \forall y \in h(V).$$

Entonces tenemos tres casos: o bien

$$\text{grado}(h, V, y) = 1 \quad \forall y \in h(V)$$

en cuyo caso se dice que h **preserva orientación**, o bien

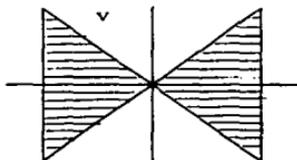
$$\text{grado}(h, v, y) = -1 \quad \forall y \in h(V),$$

que se dice que h **invierte orientación**; o bien que existan $y_1, y_2 \in h(V)$ tales que $\text{grado}(h, V, y_1) = 1$ y $\text{grado}(h, V, y_2) = -1$. Un ejemplo de esta última situación es el siguiente:

EJEMPLO 2.5.1 *Tomemos el abierto*

$$V = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_2| < |x_1| < 1\}$$

y a $h: V \rightarrow \mathbb{R}^2$ la damos por $h(x_1, x_2) = (x_1, x_1 x_2)$; observemos que



V no es conexo puesto que los puntos $(0, x) \quad \forall x$ tales que $|x| < 1$ no

están en V .

Como cada entrada de h es continua, esta también lo es, además puedo encontrar $h^{-1}(x_1, x_2) = (x_1, \frac{x_2}{x_1})$ que es continua en $h(V)$. De este modo h es un homeomorfismo de V en $h(V)$.

Si y está en $h(V)$, para cada $x = (x_1, x_2) \in V$ y $x \in h^{-1}(y)$

$$\det Dh(x) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} = x_1;$$

entonces si $x_1 > 0$, $\text{grado}(h, V, y) = +1$ y si $x_1 < 0$, $\text{grado}(h, V, y) = -1$. Y el mismo homeomorfismo preserva e invierte la orientación. ■

Como consecuencia de este último obtenemos el siguiente resultado que nos dice como se comporta el grado de una aplicación cuando se hace una transformación a las coordenadas vía un homeomorfismo.

Teorema 2.5.2 Consideremos $f: \overline{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua con $W \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado, y sea $h: \overline{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua, con V abierto acotado y tal que h es un homeomorfismo de V a $h(V)$. Entonces:

i) si $y \in V$ y $f^{-1}(y) \subset W$ esto implica que

$$\text{grado}(f, W, y) = \pm \text{grado}(h \circ f, W \cap h^{-1}(V), h(y)),$$

ii) si $y \in \mathbb{R}^n$, $f^{-1}(y) \subset W \cap h(V)$ y h conserva la orientación, entonces

$$\text{grado}(f, W, y) = +\text{grado}(f \circ h, V \cap h^{-1}(W), y);$$

o si h invierte orientación

$$\text{grado}(f, W, y) = -\text{grado}(f \circ h, V \cap h^{-1}(W), y).$$

Demostración.

(i) Lo que queremos es aplicar el teorema de funtorialidad para $h \circ f|_{W \cap f^{-1}(V)}$. Sea $z = h(y) \in h(V)$; como h es homeomorfismo en V podemos hacer $y = h^{-1}(z) \in V$; por hipótesis $f^{-1}(y) \subset W$ o bien $f^{-1}(h^{-1}(z)) \subset W$. Ahora $h^{-1}(z)$ solo consta del punto y , por lo que $\text{grado}(f, W, y)$ es constante, y entonces

$$\text{grado}(h \circ f, W \cap f^{-1}(V), z) = \text{grado}(f, W, y) \text{grado}(h, V, z)$$

para $y = h^{-1}(z)$. El teorema anterior nos advierte $\text{grado}(h, V, z) = \pm 1$ para toda z en $h(V)$, y por lo tanto

$$\text{grado}(f, W, y) = \pm \text{grado}(h \circ f, W \cap f^{-1}(V), z).$$

(ii) Tomemos z en $f^{-1}(y) \subset h(V)$, entonces por el teorema anterior

$$\text{grado}(h, V, z) = \pm 1.$$

Si h preserva orientación el signo es $+$ y en la región donde se preserva (en $\Gamma(h, V, 1)$) el grado es constante. Nuevamente por el teorema de la composición

$$\begin{aligned} \text{grado}(f \circ h, V \cap h^{-1}(W), y) &= \text{grado}(f, W, y) \text{grado}(h, V, z) \\ &= + \text{grado}(f, W, y). \end{aligned}$$

Análogamente en la región donde h invierte orientación (en $\Gamma(h, V, -1)$) el grado es constante. Y entonces

$$\text{grado}(f \circ h, V \cap h^{-1}(W), y) = - \text{grado}(f, W, y).$$

Para apreciar un poco nuestra teoría daremos una demostración del conocido teorema de descomposición de Jordan utilizando lo hasta ahora expuesto. Esta demostración fue dada por Leray en 1950. ■

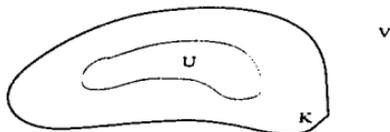
Teorema 2.5.3 (Descomposición de Jordan). *Dados dos subconjuntos compactos K y L en \mathbb{R}^n homeomorfos, se cumple que $\mathbb{R}^n - L$ es conexo si y solo si $\mathbb{R}^n - K$ es conexo; o equivalentemente, si K descompone a \mathbb{R}^n entonces también lo hace L .*

Demostración.

Excluiremos el caso $n = 1$ pues dado cualquier compacto en \mathbb{R} , este es un intervalo (o unión de intervalos) cerrados y su complemento claramente no es conexo; con esto el enunciado equivalente se cumple.

Caso $n > 1$. Supongamos que con alguno de ellos, digamos K , se tenga $\mathbb{R}^n - K$ no conexo, entonces existe una descomposición, $\mathbb{R}^n - K = U \cup V$, con U y V abiertos ajenos no vacíos. Como K en particular es acotado podemos encontrar una bola abierta B de radio finito que

contenga a K ; entonces $\mathbb{R}^n - B$ que es conexo no acotado en $\mathbb{R}^n - K$ debe estar contenido en U o en V , supongamos que está en V que también será no acotado, luego entonces U se encuentra en B por la conexidad de $\mathbb{R}^n - B$, y por lo tanto es acotado; mas aún $K \cup U = \mathbb{R}^n - V$.



La propiedad de cerrado de $\mathbb{R}^n - V$ implica que $K \cup U$ es compacto, entonces se cumple que $\overline{U} \subset \overline{K \cup U} = K \cup U$, o mejor aun, $\partial U \subset K$.

Ahora tomemos h el homeomorfismo entre K y L . Por el teorema de extensión de Tietze (1.4.1) podemos encontrar $f : K \cup U \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua tal que $f|_K = h$.

Como $K \cup U$ es compacto también lo es $f(K \cup U)$, entonces podemos suponer que la bola B que escogimos también contiene a $f(K \cup U)$. También por Tietze podemos extender h^{-1} en L a todo \overline{B} por una aplicación continua $g : \overline{B} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($g|_L = h^{-1}$) tal que $g|_{\partial B} = i$, la identidad.

Ya que $\partial U \subset K$, la aplicación $g \circ f : \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es tal que

$$g \circ f|_{\partial U} = h^{-1} \circ h|_{\partial U} = i|_{\partial U}$$

y entonces

$$\text{grado}(g \circ f, U, z) = \text{grado}(i, U, z) = 1 \quad \forall z \in U,$$

la primera igualdad porque ambas aplicaciones coinciden en la frontera de U .

Notemos que $g^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^n - L$, pues de otro modo si existiera x en $g^{-1}(U)$ y en L tendríamos que $g(x) \in U$ y $g(x) \in K$ contradiciendo

entonces que $U \cap K = \emptyset$; ahora si nos fijamos en un punto $z_0 \in U$, se tiene

$$g^{-1}(z_0) \subset g^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^n - L = \mathbb{R}^n - f(K) \subset \mathbb{R}^n - f(\partial U)$$

y si se supone que para todo $y \in g^{-1}(z_0)$, $\text{grado}(f, K \cup U, y) = 0$, es decir, es constante, entonces

$$\text{grado}(g \circ f, U, z_0) = \text{grado}(f, K \cup U, y) \text{grado}(g, B, z_0) = 0 \quad \forall y \in g^{-1}(z_0),$$

contradiciendo el anterior resultado del grado de $g \circ f$ en z_0 . Así entonces existen valores $y \in \mathbb{R}^n - L$ tales que $\text{grado}(f, K \cup U, y) \neq 0$; por otra parte podemos encontrar valores y en $\mathbb{R}^n - L$ tales que $\text{grado}(f, K \cup U, y) = 0$, por ejemplo un $y \in \mathbb{R}^n - B$.

Con esto vemos que $\Gamma(f, K \cup U, r) \neq \emptyset$ para algún $r \neq 0$ entero y $\Gamma(f, K \cup U, 0) \neq \emptyset$, y por lo antes expuesto acerca de los conjuntos Γ , concluimos que $\mathbb{R}^n - L$ no puede ser conexo, obteniendo así nuestro resultado. ■

En la demostración utilizamos el hecho conocido de que para una bola (abierta o cerrada) B su complemento $\mathbb{R}^n - B$ es conexo. Esto se generaliza rápidamente a que lo mismo sucede para cualquier subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ homeomorfo a B . Similarmente cuando el complemento del conjunto es no conexo; por ejemplo, para $S_r^n(a)$ una esfera en \mathbb{R}^n con centro en a y radio $r > 0$, su complemento consta de los abiertos $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x - a| > 1\}$ y $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x - a| < 1\}$ ajenos; y para cualquier conjunto homeomorfo a $S_r^n(a)$ el complemento también será no conexo.

Teorema 2.5.4 (Invariancia de Dominio). *Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación continua e inyectiva, con $X \subset \mathbb{R}^n$ un abierto cualquiera, entonces $f(X)$ es abierto.*

Demostración.

Para $n = 1$. Un abierto en \mathbb{R} puede verse como una unión de intervalos abiertos; para nuestros fines nos basta con tomar un abierto (a, b) no vacío.

Sea $x \in f((a, b))$ y $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = x$. Por la normalidad de \mathbb{R} podemos encontrar un cerrado $[a', b'] \subset (a, b)$ con $a' < b'$ y que $c \in (a', b')$; sin perdida de generalidad supongamos que $f(a') < f(b')$; así

$$f((a, b)) \supset f([a', b']) \supset (f(a'), f(b')).$$

La última contención resulta del teorema del valor intermedio puesto que para cualquier elemento z entre $f(a')$ y $f(b')$ existe un $y \in (a', b')$ tal que $f(y) = z$.

Lo que queremos es encontrar un abierto que contenga a x y que esté completamente contenido en $f((a, b))$. Proponemos $V = (f(a'), f(b'))$, que ya está en $f((a, b))$. Si este contiene a x ya terminamos. Si no, puede suceder que $x \geq f(b')$ o $x \leq f(a')$; las igualdades estrictas no se dan porque entonces f dejaría de ser inyectiva. Entonces se puede tener una de las desigualdades siguientes

$$x > f(b') > f(a'),$$

$$x < f(a') < f(b').$$

De la primera se obtiene que b' está entre a' y c y de la segunda que a' está entre b' y c , y ambas desigualdades nos llevan a una contradicción ya que supusimos que $c \in (a', b')$. Y por lo tanto x debe estar en $V \subset f((a, b))$, i.e., $f((a, b))$ es abierto.

Para $n > 1$. Sea $b \in f(X)$ y $a \in X$ tal que $f(a) = b$: por la normalidad de \mathbb{R}^n podemos encontrar una bola cerrada centrada en a , $B(a)$, completamente contenida en X . Luego la aplicación de $B(a)$ sobre $f(B(a))$ es continua y biyectiva.

Como $B(a)$ es compacta, también lo es $f(B(a))$, entonces aquí la aplicación f es cerrada y por lo tanto $f : B(a) \rightarrow f(B(a))$ es homeomorfismo. El homeomorfismo nos dice que la frontera, $S(a)$, de $B(a)$ se aplica en la frontera, $f(S(a))$, de $f(B(a))$. Además del teorema anterior y las observaciones hechas, tanto $S(a)$ como $f(S(a))$ separan a \mathbb{R}^n , esto es,

$$\mathbb{R}^n - f(S(a)) = V_1 \cup V_2$$

donde V_1, V_2 son dos abiertos ajenos en \mathbb{R}^n .

Por otro lado se tiene

$$\mathbb{R}^n - f(S(a)) = (\mathbb{R}^n - f(B(a))) \cup f(B(a) - S(a)),$$

cada uno de los últimos conexos y ajenos entre sí.

De ambas desigualdades se concluye que $\mathbb{R}^n - f(B(a)) = V_1$ y $f(B-S) = V_2$, o $\mathbb{R}^n - f(B) = V_2$ y $f(B-S) = V_1$; de cualquier forma $f(B-S)$ es abierto en \mathbb{R}^n y contiene a b .

Por último $f(B-S) \subset f(B) \subset f(X)$, por lo que $f(B-S)$ es un abierto que contiene a b y está completamente contenido en $f(X)$, y ya que b fue arbitrario en $f(X)$ entonces $f(X)$ es abierto. ■

Damos mas aplicaciones.

Teorema 2.5.5 *Sea $W \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado no vacío. Entonces no existe ninguna función continua $f: \overline{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f(\overline{W}) \subset \partial W$ y $f(x) = x$ para todo $x \in \partial W$.*

Demostración.

Supongamos lo contrario. Sea $f: \overline{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$ con las propiedades mencionadas. Escogemos un valor $y \in \mathbb{R}^n - f(\partial W)$ tal que $y \in W$, como $f(\overline{W}) \subset \partial W$ entonces $y \notin f(\overline{W})$, y por el ejemplo 2.3.7

$$\text{grado}(f, W, y) = 0.$$

Por otro lado con la identidad $id: \overline{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$ sabemos por el ejemplo 2.3.2 que

$$\text{grado}(id, W, y) = 1.$$

Pero $f(x) = id(x)$ para $x \in \partial W$, es decir, coinciden en la frontera de W , esto contradice el teorema 2.4.4, concluyendo así la demostración. ■

Corolario 2.5.1 (Teorema de punto fijo de Brouwer). *Sea*

$$B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}.$$

Entonces toda aplicación continua $f: \overline{B_1(0)} \rightarrow \overline{B_1(0)}$ tiene un punto fijo.

Demostración.

Supongamos que $f(x) \neq x$ para todo $x \in \overline{B_1(0)}$. Vamos a trazar una línea desde $f(x)$ que pase por x y nos fijamos en el punto de la línea que interseca la frontera de $B_1(0)$.

Entonces damos $\rho : \overline{B_1(0)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$\rho(x) = \lambda(x - f(x)) + f(x);$$

como queremos que $|\rho(x)| = 1$ debe cumplirse que $|\lambda(x - f(x)) - f(x)| = 1$ y elevando al cuadrado obtenemos la ecuación

$$\lambda^2 |x - f(x)|^2 + 2\lambda(x - f(x)) \cdot f(x) + |f(x)|^2 - 1 = 0;$$

como λ debe ser positiva toma el valor

$$\lambda = \frac{-2(x - f(x)) \cdot f(x)}{|x - f(x)|^2} + \frac{\sqrt{[(x - f(x)) \cdot f(x)]^2 - |x - f(x)|^2 (|f(x)|^2 - 1)}}{|x - f(x)|^2}.$$

Como f no fija puntos entonces $|x - f(x)|^2 \neq 0$. Por otra parte

$$-1 \leq |f(x)|^2 - 1 \leq 0$$

por lo que $|x - f(x)|^2 (|f(x)|^2 - 1) \leq 0$ y entonces lo que hay dentro de la raíz es positivo; y así λ es continua. Y por lo tanto ρ es continua y manda $\overline{B_1(0)}$ a su frontera; además si $x \in \partial B_1(0)$, como vimos en la construcción λ debe ser 1 y entonces $\rho(x) = x$, y se contradice el teorema anterior. ■

Capítulo 3

Otros Invariantes Topológicos

3.1 El número de vueltas.

Vamos a suponer a $W \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y una aplicación $\gamma : \partial W \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua que nos describe ya sea una curva si $n = 2$, una superficie si $n = 3$ o su similar en dimensiones mas altas.

Lo que hay que ver es cuantas vueltas da la imagen de γ alrededor de y ; para esto es necesario suponer que y no esté en $\gamma(\partial W)$. Con esta idea algo intuitiva procederemos como sigue.

Extendamos por el teorema de extensión de Tietze la aplicación γ a todo W con $f : \overline{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f|_{\partial W} = \gamma$. Como $y \notin \gamma(\partial W)$ podemos calcular $\text{grado}(f, W, y)$, además cualquier otra extensión g de γ coincide con f en la frontera, y por las propiedades del grado

$$\text{grado}(f, W, y) = \text{grado}(g, W, y),$$

es decir, este número es independiente de la extensión que tomemos. Entonces podemos definir el **número de vueltas** de γ alrededor de y por

$$U(\gamma, y) = \text{grado}(f, W, y). \quad (3.1)$$

Aquí aunque es un concepto distinto las propiedades que tiene son las mismas que las del grado, que se ve inmediatamente de la definición. Veamos que tan inmediato es esto.

Teorema 3.1.1 (De la invariancia homotópica). *Sea $W \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado, y $\Phi : (\partial W) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una homotopía continua; entonces*

$$U(\Phi_0, y) = U(\Phi_1, y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n - \Phi((\partial W) \times [0, 1]).$$

Demostración.

Por Tietze (teorema 1.4.1) extendemos Φ a todo $\bar{W} \times [0, 1]$ por Ψ . Como en $(\partial W) \times [0, 1]$ coincide Ψ con Φ entonces $y \notin \Psi((\partial W) \times [0, 1])$. De la invariancia del grado en y ,

$$\text{grado}(\Psi_0, W, y) = \text{grado}(\Psi_1, W, y);$$

pero $\Psi_0|_{\partial W} = \Phi_0$ y $\Psi_1|_{\partial W} = \Phi_1$; y por la definición del número de vueltas

$$U(\Phi_0, y) = U(\Phi_1, y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n - \Phi((\partial W) \times [0, 1]).$$

■

Teorema 3.1.2 *Sea $W \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado, $y \in W$. Entonces no existe aplicación continua $\Phi : (\partial W) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n - \{y\}$ tal que $\Phi_0 = i$, la identidad, y $\Phi_1 = k$, constante. O bien podríamos decir que ∂W no puede contraerse a un punto en el complemento de y .*

Demostración.

Si suponemos que existe una homotopía que cumpla esto, por lo anterior

$$U(\Phi_0, y) = U(\Phi_1, y).$$

Pero sabemos que $U(\Phi_0, y) = U(i, y) = \text{grado}(i, W, y) = 1$, por el ejemplo 2.3.2, y además

$$U(\Phi_0, y) = U(k, y) = \text{grado}(k, W, y) = 0.$$

Contradicción a lo que suponíamos. Así ∂W no puede contraerse a un punto en el complemento de y . ■

Notemos que no tomamos importancia al abierto acotado W , sino que solo nos fijamos en su frontera. Así se pensaría que pudimos considerar un conjunto Y que pudiera expresarse como frontera de algún

abierto acotado. Si embargo no siempre será así, pues un tal Y puede ser frontera de un abierto acotado y entonces se habrá de tener cuidado en que el cálculo del número de vueltas sea independiente del abierto que encierre a Y .

En teoría de funciones sobre el plano complejo se estudia también el número de vueltas, éste para una curva cerrada diferenciable $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a\}$ y un punto a que no esté en la imagen de γ , y se define como una integral:

$$\Omega(\gamma, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a} dt.$$

Veamos que ambos conceptos coinciden. Para esto, veremos primero que $\Omega(\gamma, a) \in \mathbb{Z}$ satisface la propiedad de invariancia homotópica.

Tomemos unos $\gamma, \eta : [0, 1] \rightarrow V$ curvas cerradas sobre un abierto $V \subset \mathbb{C}$ y una homotopía $\Phi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow V$ tal que $\Phi_s(t) = \Phi(t, s)$ con $\Phi_0(t) = \gamma(t)$ y $\Phi_1(t) = \eta(t)$. De la continuidad de Φ podemos partir ambos intervalos

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = 1,$$

$$0 = s_0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_m = 1,$$

de tal forma que para $R_{i,j} = [t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]$ se tenga $\Phi(R_{i,j}) \subset D_{i,j}$ un disco en V . De hecho, dado cualquier disco en V se pueden encontrar particiones tales que la imagen bajo Φ de un rectángulo se encuentre en el disco elegido.

De este modo $\Phi_{s_j}(t)$ se encuentra tan cerca como queramos (como hayamos tomado el disco) de la curva $\Phi_{s_{j+1}}(t)$.

Sea f una función analítica en $[0, 1] \times [0, 1]$. Un resultado en análisis complejo es que toda aplicación analítica tiene una primitiva local g , esto es, podemos encontrar g diferenciable en algún abierto en $[0, 1] \times [0, 1]$ tal que $g' = f$. Denotaremos por g_i a la primitiva de f en $D_{i,j}$.

Observemos que $D_{i,j} \cap D_{i+1,j} \neq \emptyset$ pues al menos está $\Phi_s(t_{i+1})$ con $s \in [s_j, s_{j+1}]$; entonces tanto g_i como g_{i+1} son primitivas de f en $D_{i,j} \cap D_{i+1,j}$ abierto acotado. Entonces existe un intervalo $[t_\mu, t_\nu] \ni t_{i+1}$ tal que

$$g_i(\Phi_s(t_\mu)) - g_{i+1}(\Phi_s(t_\nu)) = \int_{\Phi_s} f = g_{i+1}(\Phi_s(t_\nu)) - g_{i+1}(\Phi_s(t_\mu)),$$

lo que implica que $g_{i+1}(\Phi_s(t_\nu)) - g_i(\Phi_s(t_\nu)) = g_{i+1}(\Phi_s(t_\mu)) - g_i(\Phi_s(t_\mu))$, i.e., $g_{i+1} - g_i$ es constante en $D_{i,j} \cap D_{i+1,j}$.

Como $\Phi_s(t_{i+1}) \subset D_{i,j} \cap D_{i+1,j}$, para $s \in [s_j, s_{j+1}]$ denotamos

$$z_i = \Phi_{s_j}(t_i), \quad w_i = \Phi_{s_{j+1}}(t_i),$$

$$z_{i+1} = \Phi_{s_j}(t_{i+1}), \quad w_{i+1} = \Phi_{s_{j+1}}(t_{i+1});$$

entonces $g_{i+1}(z_{i+1}) - g_i(z_{i+1}) = g_{i+1}(w_{i+1}) - g_i(w_{i+1})$, o bien

$$g_{i+1}(z_{i+1}) - g_{i+1}(w_{i+1}) = g_i(z_{i+1}) - g_i(w_{i+1});$$

y con esto se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\Phi_{s_j}} f - \int_{\Phi_{s_{j+1}}} f &= \sum_{i=0}^{n-1} [(g_i(z_{i+1}) - g_i(z_i)) - (g_i(w_{i+1}) - g_i(w_i))] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} [(g_i(z_{i+1}) - g_i(w_{i+1})) - (g_i(z_i) - g_i(w_i))] \\ &= (g_{n-1}(z_n) - g_{n-1}(w_n)) - (g_0(z_0) - g_0(w_0)) \\ &= (g_n(z_n) - g_n(w_n)) - (g_0(z_0) - g_0(w_0)) = 0 \end{aligned}$$

lo último porque

$$z_n = \Phi_{s_j}(t_n) = \Phi_{s_j}(1) = \Phi_{s_j}(0) = \Phi_{s_j}(t_0) = z_0$$

y la diferencia $g_0 - g_n$ también es constante en $D_{n,j} \cap D_{0,j}$.

Por lo tanto $\int_{\Phi_{s_j}} f = \int_{\Phi_{s_{j+1}}} f$ y con el proceso en la partición para s_j se obtiene

$$\int_\gamma f = \int_\eta f.$$

Por último, si $f(z) = \frac{1}{z-a}$ que es analítica para $z \neq a$ pues $a \neq \gamma(t) = z$ para t en $[0, 1]$,

$$\begin{aligned} \Omega(\gamma, a) &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a} dt = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{z - a} dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_\eta \frac{1}{z - a} dz = \Omega(\eta, a); \end{aligned}$$

esto es, el número de vueltas Ω es invariante bajo homotopías; propiedad que también cumple U .

Ahora haciendo a un lado este esbozo de demostración, vamos a suponer que $\gamma(0) = \gamma(1) = 1$ en \mathcal{C} (la curva comienza y termina en 1) y que $a = 0$. Esto último puede suponerse sin perder generalidad ya que $\Omega(\gamma, a)$ y $U(\gamma, a)$ son invariantes bajo traslación.

Usaremos el hecho de que toda curva γ de este tipo es homotópica en $\mathcal{C} - \{0\}$ a $\pi_n(t) = e^{2\pi i n t}$ para alguna $n \in \mathbb{Z}$ (véase por ejemplo [7] Capítulo 5, Teorema 5.1). Por el ejemplo 2.3.6, $U(\pi_n, 0) = n$.

Bastará entonces con probar que $\Omega(\pi_n, 0) = n$ y usar la invariancia homotópica de ambos para concluir que

$$U(\gamma, y) = \Omega(\gamma, y)$$

para toda curva cerrada diferenciable

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathcal{C}$$

tal que $\gamma(0) = \gamma(1)$ y $y \in \mathcal{C} - \gamma([0, 1])$.

Haciendo calculos

$$\Omega(\pi_n, 0) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{\pi_n'(t)}{\pi_n(t)} dt = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{e^{2i\pi n t} 2\pi i n}{e^{2i\pi n t}} dt = n.$$

Entonces

$$\Omega(\gamma, 0) = \Omega(\pi_n, 0) = n.$$

3.2 El número de corte.

Este concepto surge cuando dos curvas, superficies o sus similares en dimensión mas alta (que denotaremos solo por 'superficies') se intersectan. Sean $U \subset \mathbb{R}^i$, $V \subset \mathbb{R}^{n-i}$ abiertos acotados, entonces también lo es $U \times V \subset \mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^{n-i} = \mathbb{R}^n$. Las aplicaciones continuas $\sigma : \bar{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\tau : \bar{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, son las que describen las 'superficies'; estas deben cumplir que

$$\sigma(\partial U) \cap \tau(\bar{V}) = \emptyset = \sigma(\bar{U}) \cap \tau(\partial V),$$

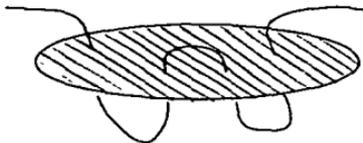


Figura 3.1: Número de corte.

es decir, la imagen de la frontera del abierto en la 'superficie' no debe intersectarse con la otra 'superficie'. Con esta restricción ya se predice la utilización del grado.

Definamos para $W = U \times V$, $\sigma * \tau : \bar{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$ que lo damos por

$$(\sigma * \tau)(u, v) = \sigma(u) - \tau(v). \quad (3.2)$$

Como

$$\partial W = \partial(U \times V) = ((\partial U) \times \bar{V}) \cup (\bar{U} \times (\partial V)),$$

entonces para $x \in \partial W$, se tiene que $x \in (\partial U) \times \bar{V}$ o $x \in \bar{U} \times (\partial V)$, por lo que $x = (u, v)$ tiene a u en ∂U y a v en \bar{V} (o el otro caso), de cualquier forma $\sigma(u) \neq \tau(v)$ por nuestras hipótesis; entonces $(\sigma * \tau)(x) \neq 0$ y así $0 \notin (\sigma * \tau)(\partial W)$ por lo que entonces $\text{grado}(\sigma * \tau, W, 0)$ está bien definido.

Ahora definimos el **número de corte** de σ y τ , que lo denotamos por $\sigma \cdot \tau$, de la siguiente forma

$$\sigma \cdot \tau = (-1)^{n-i} \text{grado}(\sigma * \tau, W, 0). \quad (3.3)$$

El número de corte es pues el conteo de cuantas veces y de que forma se cortan $\sigma(U)$ y $\tau(V)$ en \mathbb{R}^n , esto con la ayuda del grado, pues lo que calculamos son los ceros de $\sigma * \tau$, es decir, cuando $\sigma = \tau$.

EJEMPLO 3.2.1 Tomemos dos bolas abiertas con centro en 0,

$$U(0) \subset \mathbb{R}^i \quad \text{y} \quad V(0) \subset \mathbb{R}^{n-i},$$

que las encajamos en \mathbb{R}^n por

$$\sigma : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{y} \quad \tau : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

tales que $\sigma(u) = (u, 0)$ y $\tau(v) = (0, v)$.

Notemos que $U \times V$ es también vecindad abierta del 0 en \mathbb{R}^n . Por como dimos *,

$$(\sigma * \tau)(u, v) = (u, -v)$$

es lineal con matriz asociada y determinante

$$\det \begin{pmatrix} I_i & 0 \\ 0 & -I_{n-i} \end{pmatrix} = (-1)^{n-i},$$

y entonces $\text{grado}(\sigma * \tau, U \times V, 0) = (-1)^{n-i}$. Por lo tanto

$$\sigma \cdot \tau = (-1)^{n-i}(-1)^{n-i} = 1.$$

■

Observemos que conmutando σ y τ los resultados son diferentes, empezando con $\tau * \sigma : \overline{V} \times \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ que debe tratar a los encajes de un modo distinto,

$$\tau(v) = (v, 0) \text{ y } \sigma(u) = (0, u);$$

entonces $\tau * \sigma(v, u) = (v, -u)$ es lineal y el determinante de su matriz da $(-1)^i$.

Por lo que en general no se da la igualdad entre $\sigma \cdot \tau$ y $\tau \cdot \sigma$. El teorema siguiente nos da la relación que hay entre estos.

Teorema 3.2.1 Si $U \subset \mathbb{R}^i$, $V \subset \mathbb{R}^{n-i}$ son abiertos acotados y $\sigma : \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\tau : \overline{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ son continuas; entonces

$$\tau \cdot \sigma = (-1)^{i(n-i)} \sigma \cdot \tau.$$

Demostración.

Para relacionar $\sigma * \tau$, que va de $\overline{U} \times \overline{V}$ en \mathbb{R}^n , con $\tau * \sigma$ que va de $\overline{V} \times \overline{U}$ en \mathbb{R}^n , necesitamos de una aplicación $f : \overline{U} \times \overline{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ que la damos por $f(u, v) = (v, u)$. Haciendo la composición $(\tau * \sigma) \circ f : \overline{U} \times \overline{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$, nos queda

$$(\tau * \sigma) \circ f(u, v) = \tau * \sigma(v, u) = \tau(v) - \sigma(u).$$

Falta cambiar a su negativo para que nos quede $\sigma(u) - \tau(v) = \sigma * \tau(u, v)$.
 Damos pues $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $g(x) = -x$, y componemos otra vez.

Nos queda $g \circ (\tau * \sigma) \circ f : \overline{U \times V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ que nos hace

$$\begin{aligned} g \circ (\tau * \sigma) \circ f(u, v) &= g \circ (\tau * \sigma)(v, u) = g(\tau(v) - \sigma(u)) \\ &= \sigma(u) - \tau(v) = \sigma * \tau(u, v). \end{aligned}$$

Entonces

$$\text{grado}(g \circ (\tau * \sigma) \circ f, U \times V, 0) = \text{grado}(\sigma * \tau, U \times V, 0).$$

Pero $g^{-1}(0) = 0$ por lo que $\text{grado}((\tau * \sigma) \circ f, U \times V, z)$ es constante para toda $z \in g^{-1}(0)$, y el teorema de la composición nos dice que

$$\text{grado}(g \circ (\tau * \sigma) \circ f, U \times V, 0) =$$

$$= \text{grado}(g, (\tau * \sigma)(f(U \times V)), 0) \text{grado}((\tau * \sigma) \circ f, U \times V, 0).$$

Además $\text{grado}(f, U \times V, y)$ es constante para todo valor y en $V \times U$, ya que f es lineal; en particular es constante para todo y en $(\tau * \sigma)^{-1}(0)$. El valor de este resulta de fijarnos en su determinante funcional

$$\det \begin{pmatrix} 0 & I_i \\ I_{n-i} & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{(n-i)i}.$$

Entonces

$$\text{grado}(g \circ (\tau * \sigma) \circ f, U \times V, 0) =$$

$$= \text{grado}(g, (\tau * \sigma)(f(U \times V)), 0) \text{grado}(\tau * \sigma, V \times U, 0) (-1)^{(n-i)i}.$$

También calculamos para g , que sin ningún problema vemos que es $(-1)^n$. Así

$$\text{grado}(g \circ (\tau * \sigma) \circ f, U \times V, 0) = (-1)^n \text{grado}(\tau * \sigma, V \times U, 0) (-1)^{(n-i)i}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \sigma * \tau &= (-1)^{n-i} \text{grado}(\sigma * \tau, U \times V, 0) \\ &= (-1)^{n-i} (-1)^n (-1)^{(n-i)i} \text{grado}(\tau * \sigma, V \times U, 0); \end{aligned}$$

pero $\tau \cdot \sigma = (-1)^i \text{grado}(\tau * \sigma, V \times U, 0)$, por lo que

$$\begin{aligned}\sigma \cdot \tau &= (-1)^{2n} (-1)^{(n-i)} \tau \cdot \sigma \\ &= (-1)^{(n-i)} \tau \cdot \sigma.\end{aligned}$$

Fijémonos nuevamente en la definición (3.4).

$$\sigma \cdot \tau = (-1)^{n-i} \text{grado}(\sigma * \tau, U \times V, 0); \quad (3.4)$$

igual debe cumplir algunas propiedades del grado. Se observa fácilmente que la propiedad de escisión se hereda. Entonces, como un ejemplo en \mathbb{R}^2 , si tenemos curvas que se cortan como en la siguiente figura

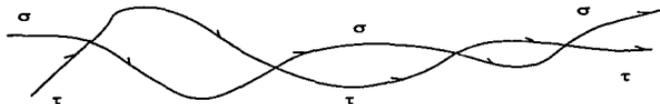


Figura 3.2:

Podemos restringirnos a una vecindad de $U \times V$ en la cual se encuentren las intersecciones $(\sigma * \tau)^{-1}(0)$.



Figura 3.3:

Pero seguiríamos un poco como al principio. Aquí el siguiente paso podría ser aplicar homeomorfismos que preserven orientación y nos mande las partes de 'superficies' a bolas (en nuestro caso de curvas a intervalos en \mathbb{R}^2). Y no pude haber problema pues habíamos visto que cuando una aplicación se compone con un homeomorfismo que preserva orientación el grado de la aplicación es igual al grado de la composición, por lo que el número de corte no cambia.

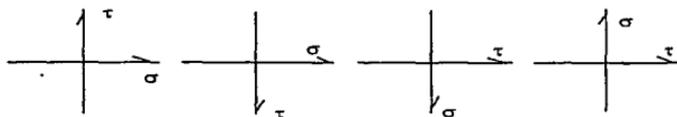


Figura 3.4:

El ejemplo que vimos acerca de bolas encajadas es para facilitar el cálculo; para las figuras dadas aquí los números de corte son

$$+1, \quad -1, \quad +1, \quad -1,$$

respectivamente; luego la restricción que hicimos es de tal manera que se restringe a cerrados acotados ajenos, si no, puede hacerse solo tomando vecindades de $(\sigma * \tau)^{-1}(0)$ mas pequeñas. Entonces

$$\text{grado}(\sigma * \tau, U \times V, 0) = \sum_{j=1}^k \text{grado}(\sigma * \tau, W_j, 0),$$

donde k es la cardinalidad de $(\sigma * \tau)^{-1}(0)$.

Si $(\sigma \cdot \tau) |_j$ es el número de corte calculado solo en la vecindad W_j , entonces

$$\begin{aligned} \sigma \cdot \tau &= (-1)^{n-i} \text{grado}(\sigma * \tau, U \times V, 0) \\ &= \sum_{j=1}^k (-1)^{n-i} \text{grado}(\sigma * \tau, W_j, 0) = \sum_{j=1}^k (\sigma \cdot \tau) |_j. \end{aligned}$$

En nuestra figura, el número de corte es cero. De una manera intuitiva podríamos verlo así : si de los puntos extremos de σ estiramos la curva pero siempre manteniendo fijos los extremos y de igual manera hacemos esto a τ vemos que las curvas resultantes no se cortan por lo que se comprende porque el número de corte es cero.

Cuando estiramos las curvas, las estamos deformando, es decir, les estamos aplicando homotopías. Entonces es de esperarse la invariancia del número de corte bajo homotopías.

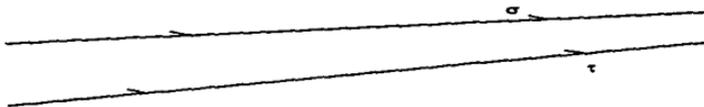


Figura 3.5:

Consideremos dos homotopías

$$\Phi : \bar{U} \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \Psi : \bar{V} \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

de σ y τ respectivamente, $\Phi_0 = \sigma$, $\Psi_0 = \tau$ y U y V son como antes.

Para nuestra definición fue necesario suponer que

$$\sigma(\partial U) \cap \tau(\bar{V}) = \emptyset = \sigma(\bar{U}) \cap \tau(\partial V).$$

Generalizando esta idea a las homotopías, estas deben cumplir lo siguiente

$$\Phi_s(\partial U) \cap \Psi_t(\bar{V}) = \emptyset = \Phi_s(\bar{U}) \cap \Psi_t(\partial V) \quad \forall t, s \in [0, 1],$$

para que de este modo, se tenga (análogamente al análisis de σ y τ) que

$$0 \in \mathbb{R}^n - (\Phi_s * \Psi_t)(\partial(U \times V)) \quad \forall s, t \in [0, 1].$$

Si aplicamos dos veces la invariancia homotópica del grado

$$\begin{aligned} \text{grado}(\Phi_0 * \Psi_0, U \times V, 0) &= \text{grado}(\Phi_0 * \Psi_1, U \times V, 0) \\ &= \text{grado}(\Phi_1 * \Psi_1, U \times V, 0). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\Phi_0 \cdot \Psi_0 = \Phi_0 \cdot \Psi_1 = \Phi_0 \cdot \Psi_1 = \Phi_1 \cdot \Psi_1,$$

es decir, podemos perturbar solo alguna aplicación o ambas y el resultado siempre será el mismo.

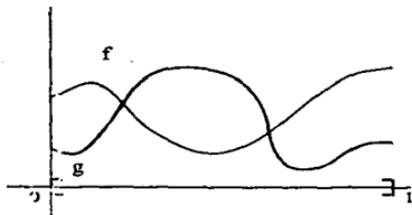


Figura 3.6: Graficas del ejemplo 3.2.2.

EJEMPLO 3.2.2 Sean $\sigma, \tau : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ curvas dadas por

$$\sigma(s) = (s, f(s)), \quad \tau(t) = (t, g(t)),$$

donde f y g son aplicaciones continuas de $[0, 1]$ en \mathbb{R} y tales que $f(0) \neq g(0)$ y $f(1) \neq g(1)$. Hay que calcular el número de corte de $\sigma \cdot \tau$.

Observemos que σ y τ son las gráficas de f y g respectivamente, y que el número de corte de σ y τ es en este caso es el número de puntos en el intervalo $[0, 1]$ en los que f y g coinciden.

Construyamos dos homotopías

$$\Phi(t, r) = (t, (1-r)f(t) + r[(1-t)f(0) + tf(1)]),$$

$$\Psi(s, r) = (s, (1-r)g(s) + r[(1-s)g(0) + sg(1)]),$$

estas transforman las curvas homotópicamente en rectas dejando sus puntos extremos fijos; para utilizar la invariancia bajo homotopías hay que probar que

$$\Phi_r([0, 1]) \cap \Psi_{r'}(\{0, 1\}) = \emptyset = \Phi_r(\{0, 1\}) \cap \Psi_{r'}([0, 1]) \quad \forall r, r' \in [0, 1].$$

Tomemos solo la primera igualdad. Fijemonos en los elementos de $\Psi_{r'}(\{0, 1\})$,

$$\Psi_{r'}(0) = (0, (1-r')g(0) + r'g(0)) = (0, g(0)),$$

$$\Psi_{r'}(1) = (1, (1-r')g(1) + r'g(1)) = (1, g(1)).$$

Si suponemos que $\Phi_r([0, 1])$ se interseca con $\Psi_r(\{0, 1\})$ para algún r , $r' \in [0, 1]$, tendríamos

$$(t, (1-r)f(t) + r[(1-t)f(0) + tf(1)]) = (0, g(0)),$$

o

$$(t, (1-r)f(t) + r[(1-t)f(0) + tf(1)]) = (1, g(1));$$

En el primer caso t debe ser igual a 0, entonces

$$(0, g(0)) = \Phi_r(0) = (0, (1-r)f(0) + rf(0)) = (0, f(0)),$$

contradiciendo nuestra suposición de que $g(0) \neq f(0)$. En el segundo caso debe ser $t = 1$, pero

$$(1, g(1)) = \Phi_r(1) = (1, (1-r)f(1) + rf(1)) = (1, f(1))$$

contradice que $g(1) \neq f(1)$.

Por lo tanto se cumple lo que queríamos.

Solo nos falta encontrar $\Phi_1 \cdot \Psi_1$. Veamos,

$$\Phi_1 * \Psi_1(t, s) = (t - s, (1-t)f(0) + tf(1) - (1-s)g(0) - sg(1)),$$

tiene matriz asociada y determinante

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -f(0) + f(1) & g(0) - g(1) \end{pmatrix} = (g(0) - f(0)) - (g(1) - f(1));$$

de aquí podríamos dar el grado para diferentes casos, pero el resultado sería muy vago. Para concretar fijémonos en la imagen inversa del cero bajo $\Phi_1 * \Psi_1$. Vemos que $\Phi_1 * \Psi_1(t, s) = 0$ si y solo si $t = s$
 $0 = (1-t)f(0) + tf(1) - (1-s)g(0) - sg(1)$; mezclando las dos,

$$\begin{aligned} 0 &= (1-t)f(0) + tf(1) - (1-t)g(0) - tg(1) \\ &= t[f(1) - f(0) + g(0) - g(1)] + f(0) - g(0); \end{aligned}$$

esto implica que

$$0 < t = \frac{g(0) - f(0)}{f(1) - f(0) + g(0) - g(1)} = s < 1,$$

aquí el denominador es distinto de cero pues queremos que el determinante sea distinto de cero; pero no importa si es positivo o negativa, siempre se tiene que $g(0) - f(0)$ tiene signo contrario al de $g(1) - f(1)$.

Entonces $\text{grado}(\Phi_1 * \Psi_1, [0, 1] \times [0, 1], 0)$ es igual a

$$\begin{cases} 1 & \text{si } g(0) - f(0) > 0 > g(1) - f(1) \\ -1 & \text{si } g(0) - f(0) < 0 < g(1) - f(1) \\ 0 & \text{si } \text{sig}(g(0) - f(0)) = \text{sig}(g(1) - f(1)) \end{cases}$$

Luego el término $(-1)^{n-i}$ toma el valor -1 . Por lo tanto

$$\sigma \cdot \tau = \Phi_1 \cdot \Psi_1 = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{sig}(g(0) - f(0)) = \text{sig}(g(1) - f(1)) \\ -1 & \text{si } g(0) - f(0) > 0 > g(1) - f(1) \\ 1 & \text{si } g(0) - f(0) < 0 < g(1) - f(1) \end{cases}$$

■

3.3 El número de enredamiento.

En el número de corte habíamos tomado 'superficies' de dimensión i y $n - i$ encajados en \mathbb{R}^n , ahora si a la 'superficie' de dimensión $n - i$ la cambiamos por una de dimensión $n - i - 1$ ($i < n$), puede que estas no se corten sino que solo se enreden entre sí. Lo que queremos ahora es contar cuantas veces la imagen de una aplicación continua $\gamma : S^i \rightarrow \mathbb{R}^n$ da vueltas alrededor de la imagen de $\delta : S^{n-i-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde S^k denota una esfera unitaria, o bien puede ser un subconjunto homeomorfo a esta. De hecho puedo suponer δ definida en la frontera de algún abierto acotado en \mathbb{R}^{n-i} .

Definamos pues lo siguiente. Sea $\gamma : S^i \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\delta : \partial V \rightarrow \mathbb{R}^n$ aplicaciones continuas, donde $V \subset \mathbb{R}^{n-i}$ es un abierto acotado, y $\gamma(S^i) \cap \delta(\partial V) = \emptyset$.

Por el teorema de Tietze (1.4.1) podemos tomar una extensión continua $\Delta : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de δ .

Luego consideramos la aplicación

$$J : S^i \times \mathbb{R}^{n-i} \rightarrow \mathbb{R}^{i+1} \times \mathbb{R}^{n-i-1} = \mathbb{R}^n$$

dada por $J(x, y) = (\xi, \eta)$ donde

$$\xi(x, y) = e^{y_1} x, \quad \eta(x, y) = (y_2, \dots, y_{n-i}); \quad (3.5)$$

con $x \in S^i$ distinto de cero por lo que $\xi \neq 0$; así $\xi \in \mathbb{R}^{i+1} - \{0\}$ y $\eta \in \mathbb{R}^{n-i-1}$. Observemos que tanto ξ como η son continuas y por lo tanto también lo es J .

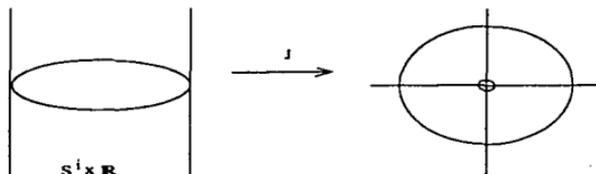


Figura 3.7: Aplicación encaje J

Ahora si damos la aplicación $H : (\mathbb{R}^{i+1} - \{0\}) \times \mathbb{R}^{n-i-1} \rightarrow S^i \times \mathbb{R}^{n-i}$ como sigue, $H(\xi, \eta) = (x, y)$ donde

$$x(\xi, \eta) = \frac{\xi}{|\xi|}, \quad y(\xi, \eta) = (\ln |\xi|, \eta_1, \dots, \eta_{n-i-1}); \quad (3.6)$$

vemos que H es continua y $H \circ J = I = J \circ H$, es decir, J es homeomorfismo de $S^i \times \mathbb{R}^{n-i}$ en $(\mathbb{R}^{i+1} - \{0\}) \times \mathbb{R}^{n-i-1}$ y manda $S^i \times V$ en un abierto acotado $J(S^i \times V)$ de \mathbb{R}^n .

Definimos entonces el **número de enredamiento** de γ en δ como

$$\gamma \& \delta \equiv (-1)^{n-i} \text{grado}((\gamma * \Delta)J^{-1}, J(S^i \times V), 0), \quad (3.7)$$

donde $\gamma * \Delta$ está dada como antes en 3.2

EJEMPLO 3.3.1 Sean $\gamma, \delta : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dos curvas cerradas en \mathbb{R}^3 dadas de la siguiente forma

$$\gamma(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 0), \quad \delta(y_1, y_2) = (1 + y_1, 0, y_2).$$

Vamos a extender la aplicación δ a el interior de S^1 por $\Delta : \overline{B_1(0)} \rightarrow \mathbb{R}^3$ que haga lo mismo que δ

Por 3.6

$$\begin{aligned}(\gamma * \Delta)J^{-1}(\xi, \eta) &= (\gamma * \Delta)\left(\frac{\xi}{|\xi|}, \ln |\xi|, \eta\right) \\ &= \gamma\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) - \Delta(\ln |\xi|, \eta) \\ &= \left(\frac{\xi_1}{|\xi|} - 1 - \ln |\xi|, \frac{\xi_2}{|\xi|}, -\eta\right).\end{aligned}$$

Como queremos calcular el grado en cero, debemos fijarnos en la imagen inversa del 0 bajo $\gamma * \Delta$; haciendo esto resulta que

$$1 + \ln |\xi| = \frac{\xi_1}{|\xi|}, \quad \xi_2 = 0 \quad \eta = 0.$$

Pero de la primera igualdad y sabiendo que $x = \frac{\xi}{|\xi|} \in S^1$ entonces $x = (\frac{\xi_1}{|\xi|}, 0)$, es decir, $\frac{\xi_1}{|\xi|} = \pm 1$; por lo tanto $\ln |\xi| = \pm 1 - 1$ es igual a 0 o 2; pero además como antes vimos, la propiedad de acotado de $S^1 \times V$ se traduce con el homeomorfismo a que

$$(\ln |\xi|)^2 + |\eta|^2 < 1,$$

por lo que no queda otra que $\ln |\xi| = 0$, i.e., $|\xi| = 1$ y mas aún $\xi_1 = 1$. Concluyendo con esto que

$$((\gamma * \Delta)J^{-1})^{-1}(0) = (1, 0, 0).$$

Por otro lado calculamos la matriz de su derivada y luego el determinante, esto es

$$\det D((\gamma * \Delta)J^{-1})(1, 0, 0) = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1.$$

Por lo que $\gamma \&\delta = (-1)^2 = 1$. ■

EJEMPLO 3.3.2 Ahora trazamos dos curvas en el toro $S^1 \times \mathbb{R}^2 = T \subset \mathbb{R}^3$,

$$\gamma, \delta : S^1 \longrightarrow S^1 \times \mathbb{R}^2 = T,$$

$$\gamma(x) = (x, x^7), \quad \delta(x) = (x, 0).$$

Como las curvas se aplican en $S^1 \times \mathbb{R}^2$ primero vamos a cambiar las coordenadas por medio del homeomorfismo J ; para facilitar los cálculos supongámonos en los complejos, así $x^7 = (\operatorname{Re}(x^7), \operatorname{Im}(x^7))$ y entonces

$$J\gamma(x) = J(x, x^7) = (xe^{\operatorname{Re}(x^7)}, \operatorname{Im}(x^7)),$$

$$J\delta(x) = J(x, 0) = (x, 0).$$

Extendemos δ sin ningún problema a B (bola unitaria en \mathbb{C}) por $\Delta: \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\Delta(y) = (y, 0)$.

Luego damos $J(\gamma * \Delta): S^1 \times \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ que nos queda

$$J(\gamma * \Delta)(x, y) = J\gamma(x) - J\Delta(y) = (xe^{\operatorname{Re}(x^7)} - y, \operatorname{Im}(x^7)).$$

Para calcular el grado hay que fijarnos en la imagen inversa del 0 bajo $J(\gamma * \Delta)J^{-1}$. Debe cumplirse que $y = xe^{\operatorname{Re}(x^7)}$ e $\operatorname{Im}(x^7) = 0$. Como $x \in S^1$ también $x^7 \in S^1$, por lo que

$$x^7 = (1, 0) \text{ o } x^7 = (-1, 0),$$

o sea, $\operatorname{Re}(x^7)$ es 1 o bien -1 ; en el primer caso $y = xe$ y $|y| = |xe| > 1$, en contradicción con que y está en B ; entonces $\operatorname{Re}(x^7) = -1$, i.e., $x^7 = (-1, 0)$ y $y = \frac{x}{e}$. Para este complejo $r = |(-1, 0)| = 1$ y el argumento $\theta = \pi$. Calculando las raíces de x^7 encontramos

$$x_k = e^{i(\frac{\pi+2k\pi}{7})}$$

para $k = 0, 1, \dots, 6$.

Así $(J(\gamma * \Delta)J^{-1})^{-1}(0)$ consta de 7 puntos.

Ahora $x \in S^1$ podemos verlo como $x = \frac{x}{|x|} = (\cos\phi, \operatorname{sen}\phi)$; haciendo con esto que los puntos solo dependan de ϕ ; también se tiene

$$x^7 = (\cos 7\phi, \operatorname{sen} 7\phi).$$

Entonces haciendo cálculos obtenemos matriz y determinante de la derivada en los puntos preimagen de la siguiente forma

$$\det DJ(\gamma * \Delta)J^{-1}(x_k) = \det \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ -e^{-1} \operatorname{sen}(\frac{\pi+2k\pi}{7}) & -1 & 0 \\ e \cos(\frac{\pi+2k\pi}{7}) & 0 & -1 \end{pmatrix} = -7.$$

Por lo que grado $(J(\gamma * \Delta)J^{-1}, J(S^1 \times B), 0)$ es -7 , y por lo tanto $\gamma \& \delta = -7$. ■

En nuestra definición extendimos $\delta : \partial V \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $\Delta : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ para después calcular el grado de $\gamma * \Delta$ en 0. Pero la extensión no necesariamente es única. Veamos si depende de la extensión que tomamos. Si $\tilde{\Delta} : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es otra extensión de δ se cumple que $\tilde{\Delta}(x) = \Delta(x)$ para toda $x \in \partial V$.

Pero por otro lado, como

$$z \in \partial(S^i \times V) = (\partial S^i \times V) \cup (S^i \times \partial V) = S^i \times \partial V,$$

entonces podemos escribir $z = (s, y)$ con $s \in S^i$ y $y \in \partial V$. Y con esto

$$\gamma * \Delta(z) = \gamma * \Delta(s, y) = \gamma(s) - \Delta(y) = \gamma(s) - \tilde{\Delta}(y) = \gamma * \tilde{\Delta}(z),$$

esto es, $\gamma * \Delta = \gamma * \tilde{\Delta}$ en la frontera de $S^i \times V$ y por el teorema 2.4.4

$$\text{grado}((\gamma * \Delta)J^{-1}, J(S^i \times V), 0) = \text{grado}((\gamma * \tilde{\Delta})J^{-1}, J(S^i \times V), 0).$$

Y por lo tanto $\gamma \& \delta$ no depende de la extensión de δ .

3.4 Relación entre los invariantes definidos.

En esta sección veremos que el grado, el número de vueltas, el número de corte y el número de enredamiento son equivalentes en el sentido de que cada uno se puede expresar en términos de otro.

De hecho estos últimos se definieron en términos del grado. A su vez el grado puede expresarse en términos del número de vueltas como sigue:

$$\text{grado}(f, W, y) = U(f|_{\partial W}, y)$$

(véase 3.1).

Veamos ahora que el número de vueltas se puede expresar como número de enredamiento.

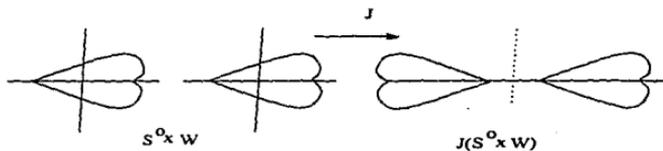
Tomemos una aplicación continua $\delta : \partial W \rightarrow \mathbb{R}^n$ con W abierto acotado, y un punto $a \notin \delta(\partial W)$. Sea $b \in \mathbb{R}^n$ tal que $|b| > |\delta(x)| \quad \forall x \in \partial W$; y otra aplicación $F : S^0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ que haga $F(1) = a$ y $F(-1) = b$. Entonces tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.4.1

$$U(\delta, a) = F \& \delta$$

Demostración.

Extendemos δ a $\Delta : \overline{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de tal manera que $|b| > |\Delta(x)|$ para todo $x \in \overline{W}$.



Hacemos lo siguiente

$$(-1)^n (F \& \delta) = \text{grado}((F * \Delta)J^{-1}, J(S^0 \times W), 0); \quad (3.8)$$

por la aditividad del grado, esto último es igual a

$$\begin{aligned} &= \text{grado}((F * \Delta)J^{-1}, J(\{-1\} \times W), 0) + \\ &\quad + \text{grado}((F * \Delta)J^{-1}, J(\{1\} \times W), 0). \end{aligned}$$

Fijándonos en que

$$(F * \Delta)(-1, x) = F(-1) - \Delta(x) = b - \Delta(x) \neq 0,$$

concluimos que en $\{-1\} \times W$ no existen imágenes inversas del cero, por lo que

$$\text{grado}((F * \Delta), \{-1\} \times W, 0) = 0,$$

que junto con 3.8 obtenemos

$$\begin{aligned} (-1)^n (F \& \delta) &= \text{grado}((F * \Delta)J^{-1}, J(\{1\} \times W), 0) \\ &= \text{grado}((F * \Delta), \{1\} \times W, 0), \end{aligned}$$

esta última igualdad porque J preserva la orientación en $\{1\} \times W$. Y

$$\begin{aligned} \text{grado}((F * \Delta), \{1\} \times W, 0) &= \text{grado}(a - \Delta, W, 0) \\ &= (-1)^n \text{grado}(\Delta, W, a) \\ &= (-1)^n U(\delta, a). \end{aligned}$$

Por lo que $F \& \delta = U(\delta, a)$. ■

Por último, el grado es un caso especial de número de corte:

Si en la definición del número de corte damos $i = n$, $V = \bar{V} \subset \mathbb{R}^0 = \{0\}$; $\tau : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ se aplica en un punto $\tau(0) = a \notin \sigma(\partial U)$, luego entonces $\sigma * \tau : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ está dado por $(\sigma * \tau)(u) = \sigma(u) - a$. Con esto $\text{grado}(\sigma * \tau, U, 0) = \text{grado}(\sigma, U, a)$. El término $(-1)^{n-i}$ es igual a 1 y entonces

$$\sigma \cdot \tau = \sigma a = \text{grado}(\sigma, U, a).$$

Bibliografía

- [1] A. Dold. *Teoría de Punto Fijo, vol I y II*. Monografías del Instituto de Matemáticas, UNAM, **18**, 1984.
- [2] V. Guillemin y A. Pollack. *Differential Topology*. Prentice-Hall. 1974.
- [3] M. W. Hirsch. *Differential Topology*. Springer-Verlage. 1976.
- [4] K. Hoffman y R. Kunze. *Álgebra Lineal*. Prentice-Hall. 1973.
- [5] S. Lang. *Complex Analysis*. Springer-Verlage. 1985.
- [6] N. G. Lloyd. *Degree Theory*. Cambridge University Press. 1970.
- [7] W. S. Massey. *Algebraic Topology: An Introduction*. Springer-Verlage. 1967.
- [8] J. W. Milnor. *Topology from the Differentiable Viewpoint*. The University Press of Virginia, Charlottesville. 1965.
- [9] W. Rudin. *Principios de Análisis Matemático*. McGraw-Hill, México. 1966.
- [10] M. Spivak. *Cálculo en Variedades*. Reverté. 1988.
- [11] S. Willard. *General Topology*. Addison-Wesley. 1970.