

57
2ej.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Escuela Nacional de Estudios Profesionales Acatlán. (ENEP - A)

APLICACION DEL METODO DE LOS CENTROS ANALITICOS EN LA SOLUCION DE PROBLEMAS DE PROGRAMACION LINEAL.



T E S I S A

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

LICENCIADO EN MATEMATICAS APLICADAS Y COMPUTACION

P R E S E N T A

CESAR VALENCIA ORTIZ

Asesor de Tesis:

ING. REYES L. GARCIA MONTAÑA

DEPTO. DE TITULOS PROFESIONALES Y CERTIFICACION

97 FEB 18 PM 6:31

GENERACION 95

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO Acatlán de Juarez



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

MEXICO, D. F.

00155

1997



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Contenido:	
Introducción	2
Capítulo 1: Optimización No Lineal. (Sin Restricciones)	4
1.1.- Optimización Unidimensional. (Sin Restricciones)	4
1.1.1.- Optimización Clásica	5
1.1.2.- Métodos de Aproximación Polinomial	5
Método de Powell	6
Método de Davies-Swan-Campey	6
Interpolación Cubica	7
1.1.3.- Métodos de Eliminación de Regiones	8
1.1.4.- Método de Condiciones de Optimalidad	9
Método de Newton	9
Método de Cuasi-Newton	9
Método de la Secante	9
1.2.- Optimización Multidimensional. (Sin Restricciones)	11
1.2.1.- Método Indirecto de Primer Orden	11
Método del Gradiente	11
1.2.2.- Métodos Indirectos de Segundo Orden	12
Método de Newton	12
Método de Fletcher-Reeves	14
1.2.3.- Métodos de Métrica Variable	14
Método de Davidon-Fletcher-Powell	15
Método de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shano	16
Capítulo 2: Optimización Lineal	17
2.1.- El Método Gráfico	18
2.2.- Método de Punto Esquina	19
2.3.- Método Simplex	21
2.3.1.- Método de la M Grande, o , Método de Penalizaciones	25
2.4.- Método de la Doble Fase	27
2.5.- El Algoritmo de Karmarkar	27
2.6.- El Método de los Centros Analíticos	29
Capítulo 3: Centros Analíticos Vs Simplex	35
3.1.- Acerca de los Programas Auxiliares	35
3.2.- Consideraciones de Evaluación	36
3.3.- Contraste de Métodos	37
3.3.1.- Preparación e Inicio	37
3.3.2.- Comportamiento Bajo Situaciones Especiales	39
3.3.2.1.- Función Objetiva No Acotada	39
3.3.2.2.- Restricciones (\geq), Lado Derecho Negativo y Problemas de Minimización	40
3.3.2.3.- Ciclaje o Degeneración	41
3.3.2.4.- Sin Región de Factibilidad	44
3.3.2.5.- Soluciones Óptimas Múltiples	45
3.3.2.6.- Variables que Pueden Ser Negativas	46
3.3.3.- Problemas Mayores	50
3.3.4.- Apoyo en el Análisis de Sensibilidad	52
Conclusiones	53
Apéndice	55
Glosario	103
Bibliografía	105

INTRODUCCIÓN.

El presente trabajo se encuentra dentro del campo de estudio de la investigación de operaciones (IO), campo que tiene su origen en el siglo XVIII y que vino tomando forma para tener su auge durante la segunda guerra mundial, de tal forma que el impulso a su desarrollo se obtuvo por la vía de intereses bélicos, sin embargo, la obtención de grandes logros a través de su utilización motivó a que su aplicación trascendiera a diversas áreas y disciplinas, y tenía que ser así, pues la investigación de operaciones ha demostrado que es una herramienta ejemplar para la determinación de las mejores alternativas y cursos de acción a seguir para lograr cubrir de forma satisfactoria los objetivos y expectativas de toda organización.

La investigación de operaciones cuenta con una diversidad de algoritmos y conceptos que son de gran utilidad en dependencia con la naturaleza del problema a que nos enfrentemos. Así tenemos algoritmos que nos auxilian en problemas de estadística, de asignación, de ruta crítica, de inventarios, etc. Con esta breve panorámica podemos darnos cuenta de la extensa cobertura de la investigación de operaciones, y por ende, podemos establecer que el presente trabajo se aboca a una pequeña parte de este importante campo de estudio.

Como ya se ha mencionado, fue durante la primera mitad de este siglo cuando la investigación de operaciones tuvo grandes avances, en esta época surgieron algoritmos que siguen teniendo un peso innegable en la actualidad, entre estos podemos mencionar los estudios realizados por los húngaros König y Egervary en relación a problemas de asignación, la teoría de juegos desarrollada por Von Neuman, la teoría de preferencias de Morgenstern, el método Simplex del doctor George Dantzig, entre otros, esta serie de algoritmos pueden señalarse como clásicos e imprescindibles en el estudio y la enseñanza del "arte" de la toma de decisiones. De esta forma, nos encontramos que en la actualidad la divulgación de los conceptos e ideas concernientes a la investigación de operaciones se limita a algoritmos que tienen ya un "largo" camino recorrido, tal que gozan ya de cierto prestigio y reconocimiento, y que momentáneamente nos hace pensar que la investigación de operaciones esta completa, que esta prácticamente culminada, que contamos con los medios necesarios y totalmente adecuados para resolver todo problema que se nos presente. Y sin embargo, la realidad no es tal.

Para conocer esta realidad regularmente se requiere la realización de estudios mas allá de la licenciatura, y así adentrarnos al mundo de los avances mas recientes en la toma de decisiones, para conocer, en otro plano, el desarrollo actual de la teoría de juegos, de la programación dinámica, de la programación entera, de la mixta, de la no lineal, de la lineal, etc. Pues el desarrollo de la investigación de operaciones continua cosechando frutos.

El presente estudio se enmarca en lo que corresponde al campo de la programación lineal, principalmente a problemas que presentan la estructura clásica que es fácilmente resuelta por el método Simplex. Actualmente este método es considerado no tan solo clásico, si no como la vía confiable y sencilla para dar solución a problemas de programación lineal. Sin embargo han surgido diversos algoritmos que son una alternativa paralela al Simplex, entre los cuales podemos mencionar a: Mangasarian, Karmarkar, Murty. Métodos que logran dar con la solución óptima del problema, pero que aún no logran mejorar el prestigio y eficiencia del Simplex (la posible excepción es el método de Karmarkar). Hoy en día existen diversidad de métodos y técnicas que dan solución a problemas de programación lineal, sin embargo, pocos de estos algoritmos han causado un impacto importante en relación con el método Simplex, uno de estos casos es representado por el algoritmo de Karmarkar, un algoritmo denominado de punto interior, ya que sus avances en busca de la solución óptima los realiza a través de la región de soluciones factibles, y no por las aristas de esta región, como lo hace el método Simplex. Esta es la característica que lo hace superior en problemas de gran escala.

En nuestro trabajo nos ubicaremos en un método que mantiene esta idea, dirigirse al óptimo a través de la región de factibilidad, este método lo denominaremos **EL MÉTODO DE LOS CENTROS ANALÍTICOS**.

Durante los siguientes apartados trataremos de llevar una secuencia lógica de temas, para llegar a los conceptos del método de los centros analíticos. Así, revisaremos en el primer capítulo los conceptos y metodología de la optimización no lineal sin restricciones tanto en sus modalidades de unidimensional y multidimensional, realizando un recorrido por los métodos que, al ser relevantes en su campo, pueden ser factibles de uso durante la aplicación del método de los centros analíticos. Dentro del segundo capítulo recordaremos conocimientos de la programación lineal, a los que están ligados los fundamentos del método Simplex, en este mismo capítulo contemplamos un pequeño esbozo del método de Karamarkar, para posteriormente visualizar las ideas básicas del método de los centros analíticos. En el tercer capítulo nos atreveremos a una comparación del método de los centros analíticos con el método Simplex. Dicha comparación, no tiene la finalidad de definir la supremacía o la inferioridad del método de los centros en forma tajante, sino, tiene como finalidad la ejemplificación del uso de este método y su factibilidad de uso. Sin embargo, el desarrollo del tercer capítulo nos dará las bases para tomar una posición plenamente definida en relación al método de los centros analíticos como una alternativa para la solución de problemas lineales. Dicha posición se detalla dentro de las conclusiones del trabajo, que se encuentran posterior al tercer capítulo.

Hasta el momento, quizás alguien puede cuestionarse ¿porqué nos metemos con la programación no lineal si nuestro trabajo se enfoca a la optimización lineal?. La pregunta parece lógica, y encierra la característica que hace del método de los centros analíticos un método diferente al común de los algoritmos lineales. Esta característica es la siguiente:

Regularmente los investigadores han intentado métodos de optimización no lineal que se basan en aproximaciones lineales, esto es así puesto que es más sencillo resolver o trabajar con funciones lineales, que trabajar con funciones exponenciales, cuadráticas, o de algún otro tipo no lineal. Y sin embargo, la idea fundamental del método de los centros analíticos es totalmente la inversa: Llevar el planteamiento lineal de nuestro problema a un equivalente problema no lineal (de tipo logarítmico, he aquí la justificación de recordar los algoritmos no lineales). ¿Cuales son las consecuencias y relevancias de aplicar estas ideas?, ¿ como se comporta el método de los centros analíticos ante problemas de diferentes características?.

Estas son algunas de las interrogantes que los expertos tratan de responder cuando se presenta algún nuevo algoritmo, sin embargo, el material disponible en referencia al método de los centros analíticos es muy escaso, y nuestro trabajo tratará de ser un material de referencia al tiempo de resolver estas y otras interrogantes.

1.- OPTIMIZACIÓN NO LINEAL **(SIN RESTRICCIONES)**

En el presente trabajo nos ubicaremos principalmente en dos ramas específicas de la investigación de operaciones: la programación no lineal y la programación lineal. Aunque nuestro interés primordial está en dirección de la programación lineal, nuestro algoritmo central (el método de los centros analíticos), se apoya en forma imprescindible en la metodología y conceptos que envuelven el análisis de problemas no lineales.

En estas circunstancias es necesario realizar un recorrido por el mundo de la programación no lineal, un mundo con una gran diversidad de algoritmos.

La programación no lineal se topa con problemas con características diversas, la función objetivo puede ser continua o discreta, diferenciable o no diferenciable, univariable o multivariable, restringida o no restringida, convexa, cuadrática, separable, unimodal, multimodal, entre otras características. La función objetivo toma una combinación posible de estas características, así, por ejemplo, podemos tener un problema con una función objetivo discreta y multivariable, sujeta a restricciones de desigualdad e igualdad, lineales y no lineales en ambos casos. Este ejemplo puede mostrarse como sigue:

$$\begin{array}{ll} \text{optimizar } f(x) & \\ \text{s.a.} & \\ h_j(x) = b_j & j=[1, m_1] \\ g_k(x) = b_k & k=[m_1, m] \\ \\ g_i(x) \geq c_i & i=[1, n_1] \\ h_z(x) \geq c_z & z=[n_1, n] \end{array}$$

donde $g_{k,i}$ es no lineal,
 $h_{j,z}$ es lineal.

No detallaremos las características de este ejemplo. Lo importante es visualizar la gran diversidad de características que un problema de programación no lineal puede adquirir, y que en forma paralela se tiene también una variedad de algoritmos que nos ayudan a resolver estos problemas. Sin embargo, nuestra meta no es dar un compendio de programación no lineal, ya que hacerlo nos llevaría "lejos" de nuestro objetivo. En su lugar solo se muestran algunos algoritmos, que han sido seleccionados en relación a los requerimientos del método de los centros analíticos, requerimientos que serán tocados más a fondo posteriormente. Por el momento solo señalaremos que los algoritmos seleccionados se relacionan con problemas no lineales sin restricciones.

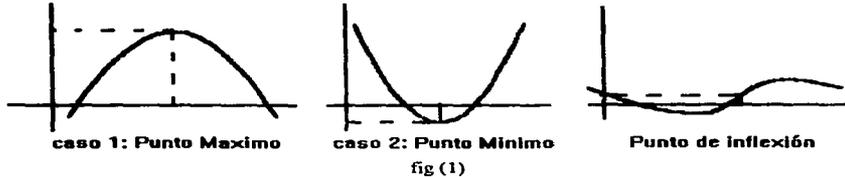
1.1.- OPTIMIZACIÓN UNIDIMENSIONAL **(SIN RESTRICCIONES)**

Una buena técnica de optimización unidimensional es esencial por una razón principal: Los algoritmos de optimización multivariable sin restricciones (de los cuales nos ocuparemos en la siguiente sección 1.2), llevan, en su mayoría, procesos que requiere de la implementación de una técnica unidimensional que auxilie en la búsqueda del punto óptimo.

Dentro de estos algoritmos unidimensionales encontramos diversas clasificaciones, tenemos métodos de búsqueda clásica, directa, por eliminaciones de regiones y otros, pero los que describiremos solo algunos de ellos: Optimización clásica, método de Powell, método de Davies-Swan-Campey, interpolación cúbica y eliminación por regiones.

1.1.1.- OPTIMIZACIÓN CLÁSICA.

En todo tipo de algoritmo de optimización se tienen una serie de supuestos, en la optimización clásica se presupone que la función objetivo $f(x)$ es diferenciable y, en consecuencia, continua; entonces se procede obtener la derivada de la función objetivo, $f'(x) = g(x)$, e igualar esta última a cero, $g(x) = 0$, encontrando las raíces de la función resultante, x_i . Estas raíces son evaluadas en la segunda derivada de $f(x)$, es decir, $f''(x) = g'(x)$, y en dependencia de este valor se determina si la raíz x_i corresponde a un mínimo (caso 1: $g'(x_i) > 0$), o a un máximo (caso 2: $g'(x_i) < 0$), en otro caso nos encontramos en un punto de inflexión.



Este tipo de optimización es muy sencillo, sin embargo, los supuestos que requiere lo limitan en su aplicación, pues existen funciones que no son diferenciables o en las cuales el proceso para encontrar las raíces de $f'(x) = g(x) = 0$ es muy complicado o imposible, por mencionar algunos inconvenientes. Para estas situaciones existen métodos que utilizan otra mecánica de búsqueda del óptimo. Todos ellos podemos denominarlos como métodos numéricos.

En general, dichos métodos numéricos son iterativos y tienen dos rasgos característicos:

- Se basan en evaluaciones repetitivas para determinar la mejor dirección de búsqueda. Inician con un punto de búsqueda inicial, el cual es evaluado en la función objetivo, y continúa haciendo evaluaciones en la función objetivo con otros puntos (los cuales son determinados por el método en cuestión). Cada evaluación es una iteración del método en la cual se seleccionan los mejores valores.
- Los métodos llegan a su fin cuando $\text{abs}(f(x^{k+1}) - f(x^k)) < \epsilon$. En otras palabras, se interrumpe el método cuando la diferencia entre el valor de $f(x)$ evaluado en el punto seleccionado en la iteración anterior, es decir, x^k , y el valor de $f(x)$ evaluado en el punto seleccionado en la iteración actual, es decir, x^{k+1} , es menor a una constante de error ϵ , que es previamente establecida. De esta forma el punto óptimo es: $x^* \rightarrow x^{k+1}$.

De este segundo rasgo se deduce que estos métodos dan como resultado un óptimo x^* que no es el real, sino una aproximación a este (salvo algunas excepciones que en la práctica son rarísimas). Para ver más claro esto visualicemos algunas técnicas:

1.1.2.- MÉTODOS DE APROXIMACIÓN POLINOMIAL.

Esta es una clase de métodos de minimización unidimensional que se aproxima al valor óptimo x^* a través de interpolaciones en el uso de un modelo polinomial de aproximación a $f(x)$. Los métodos de interpolación cuadrada y cubica son ejemplos de esta clase de metodología.

La utilización de este tipo de métodos requiere de un punto inicial de aproximación al óptimo. Los métodos proceden a ajustar un polinomio de bajo orden con las evaluaciones de las funciones y posteriormente a determinar el punto óptimo de este polinomio, repitiendo el procedimiento hasta entrar a la

exactitud requerida, los métodos varían de acuerdo al grado del polinomio, así como la selección de los puntos sobre los que se ajusta el mismo.

MÉTODO DE POWELL (INTERPOLACIÓN CUADRADA).

En la interpolación cuadrada empezamos con tres puntos. iniciales x_1 , x_2 y x_3 ; sabemos que existe una función del tipo $f(x) = a + bx + cx^2$ que pasa exactamente por los tres puntos, dicha función es diferenciable y conocemos que su derivada igualada a cero nos garantiza un mínimo de la función aproximada, ese mínimo se obtiene de:

$$\bar{x}^* = -b/2c \quad (1)$$

ahora bien, $f(x)$ es evaluada en los puntos x_1 , x_2 y x_3 ; consideremos que $f(x_1) = f_1$, $f(x_2) = f_2$, $f(x_3) = f_3$. La función es evaluada en el punto inicial x_1 y en $x_2 = x_1 + \Delta x$, el punto x_3 se selecciona de acuerdo al siguiente criterio:

$$x_3 = x_1 + 2\Delta x \quad \text{si } f(x_1) \geq f(x_2)$$

$$x_3 = x_1 - 2\Delta x \quad \text{si } f(x_1) < f(x_2)$$

La solución a nuestro problema se liga a un sistema de tres ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= a + bx_1 + cx_1^2 \\ f(x_2) &= a + bx_2 + cx_2^2 \\ f(x_3) &= a + bx_3 + cx_3^2 \end{aligned}$$

De donde se tiene que nuestro punto buscado en términos de x_1 , x_2 , x_3 , f_1 , f_2 y f_3 , se deduce de (1) y esta dado por:

$$\bar{x}^* = \frac{1}{2} \frac{(x_2^2 - x_3^2)f_1 + (x_3^2 - x_1^2)f_2 + (x_1^2 - x_2^2)f_3}{(x_2 - x_3)f_1 + (x_3 - x_1)f_2 + (x_1 - x_2)f_3} \quad (2)$$

Si cualquiera de los cuatro valores de x que corresponda al menor valor de la función por menos de la exactitud requerida, se termina el proceso de búsqueda del mínimo, de lo contrario, se descarta de los cuatro valores de x aquel que reporta el mayor valor de la función y se procede nuevamente con la interpolación. De esta forma se continua iterando hasta lograr el rango de error predeterminado.

Existen otras técnicas similares y otras de otro orden como la interpolación cubica la cual ya utiliza en su algoritmo evaluaciones de la derivada de la función objetivo. A continuación se describirá brevemente el método Davies Swan Campey.

MÉTODO DE DAVIES-SWAN-CAMPEY. (DSC).

En la búsqueda unidireccional del óptimo, este método parte de un estimado del mínimo x_0 y una variación Δx de este estimado, no necesariamente positivo, que asegure una reducción de la función $f(x)$. El método se aplica de acuerdo a los siguientes cinco pasos:

Paso 1: hacer $k=0$. Evaluar $f(x_0)$, si $f(x + \Delta x) \leq f(x_0)$ continuar el paso 2. En caso contrario, es decir, si $f(x + \Delta x) > f(x_0)$, hacer $\Delta x = -\Delta x$ y continuar en el paso 2.

Paso 2: calcular: $x_{k+1} = x_k + 2^k \Delta x$, y, $f(x_{k+1})$

Paso 3: Si $f(x_{k+1}) \leq f(x_k)$ hacer $k = k+1$ y continuar el paso 2.

Si $f(x_{k+1}) > f(x_k)$ hacer:

$$x_m = x_{k+1} ; x_{m-1} = x_k ; x_{m-2} = x_{k-1}$$

$$t = (x_m - x_{m-1})/2 ; x_{m+1} = x_m - t = x_{m-1} + t$$

evaluar $f(x_{m+1})$

Paso 4: escoger entre x_{m-1} y x_{m+1} el punto con menor valor de función y llámese a este punto x_b .

Defínase:

$$x_a = x_b - t ; x_c = x_b + t$$

y determinar el punto óptimo de la parábola que pasa por los puntos x_a , x_b , x_c , con los valores de la función $f(x_a)$, $f(x_b)$, $f(x_c)$ respectivamente.

$$x^* = x_b + \frac{t}{2} \frac{f(x_a) - f(x_c)}{f(x_a) - 2f(x_b) + f(x_c)}$$

(Note que la obtención de x^* , y la forma de calcular \bar{x}^* , en el método anterior, representa la aplicación de la idea de interpolación en ambos métodos).

Paso 5: El procedimiento termina cuando x^* y x_b están muy cercanos, $\text{abs}(f(x_b) - f(x^*)) < \epsilon$, donde ϵ es el error predeterminado. De otra forma regresar al paso 2.

Si $f(x_b) < f(x^*)$, reducir el valor de Δx , es decir, $\Delta x = (x^* - x_b) / 4$, hacer $x_0 = x_b$ y comenzar en el paso 1.

INTERPOLACIÓN CÚBICA.

Para encontrar el mínimo de $f(x)$ la interpolación cúbica se basa en aproximar la función objetivo a un polinomio de tercer grado. Con un razonamiento similar al utilizado en la interpolación cuadrada, y utilizando la misma terminología, llegamos a la conceptualización del punto óptimo \bar{x}^* de la forma:

$$\bar{x}^* = x_2 - \frac{f_2' + w - z}{f_2' - f_1' + 2w} (x_2 - x_1)$$

donde $z = 3[f_1 - f_2] / [x_2 - x_1] + f_1 + f_2$, $w = [z^2 - f_1' f_2']^{1/2}$

Si f_1 o f_2 nos son menores a $f(\bar{x}^*)$, entonces se acepta que el óptimo aproximado es \bar{x}^* . De lo contrario, si $f(\bar{x}^*) > 0$ entonces, $x_2 = \bar{x}^*$, y se continua interpolando. Si $f(\bar{x}^*) < 0$ entonces, $a = \bar{x}^*$ en la siguiente interpolación. Notemos que en el proceso global solo son empleados dos puntos en la búsqueda del óptimo.

En general los métodos polinomiales son eficientes, sin embargo tienen algunas desventajas, por ejemplo : en la interpolación cúbica no sirve en caso de funciones multimodales no diferenciables, por otra parte todo método de este tipo su eficiencia esta sumamente ligada tanto al punto de búsqueda inicial como al valor del incremento asociado. Pese a estos "inconvenientes" tales métodos han sido clasificados como superiores (aunque en una forma mínima), a los métodos de eliminación de regiones, por lo que estos métodos los tocaremos en una forma superficial y descriptiva en esencia.

1.1.3.- MÉTODOS DE ELIMINACIÓN DE REGIONES.

Estos métodos tienen la ventaja de no requerir que la función objetivo sea diferenciable, ya que se basa únicamente en la utilización de evaluaciones de $f(x)$. Esto es posible pues toma un intervalo inicial estimado (donde se presume que se haya el punto óptimo), y en cada iteración del método este intervalo se ve acortado en uno (o los dos) de su(s) extremo(s). Cuando el intervalo que permanece es lo suficientemente pequeño, en relación a la exactitud requerida, entonces las iteraciones se dan por terminadas. La mecánica de eliminación de regiones es la comparación de dos puntos o más que pertenecen a un intervalo definido. Se presupone que $f(x)$ es unimodal y tiene un mínimo en dicho rango. Si consideramos un intervalo imaginario $[a, b]$, en el cual está el mínimo, entonces, solo pueden ocurrir tres cosas que gráficamente se ilustran en la figura 2 . En el caso (a) se elimina la porción $[a, x_1]$, pues en este se encuentra las evaluaciones de mayor valor, en el caso (b) se anula $[x_2, b]$, por la razón análoga, en el caso (c) , que en la práctica es muy raro, el intervalo sobreviviente es $[x_1, x_2]$.

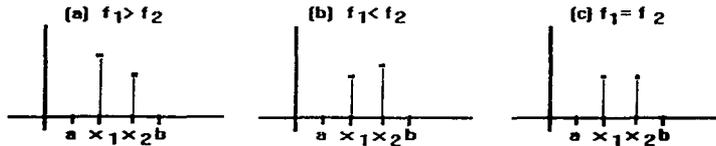


figura 2

Por otro lado, la determinación de los puntos x_1 y x_2 se hace de acuerdo con el algoritmo de búsqueda, así tenemos varios métodos. El método de búsqueda en intervalo de dos puntos iguales, hace la selección de x_1 y x_2 dividiendo el intervalo en tres partes iguales, tal que $x_1 - a = b - x_2 = x_2 - x_1$, aquí el intervalo de incertidumbre es reducido en un tercio en cada iteración. Así, si L^0 es el intervalo original $[a, b]$ al término de la iteración k el intervalo es una proporción de L^0 definida por:

$$L^k = (2/3)^k L^0$$

(nótese que en este caso k es un exponente).

El método de bisección o búsqueda dicotómica considera que $x_1 - a = b - x_2$, pero x_1 y x_2 están muy cercanos entre sí. La disminución del intervalo en la iteración k es:

$$L^k = (1/2)^k L^0$$

Este es un método más eficiente ya que la reducción del intervalo es más significativa en cada iteración, sin embargo, en esta clase de algoritmos los métodos que presentan una metodología más idónea para plasmarla en un algoritmo computacional son el método de Fibonacci y el método de la sección de oro, ambos métodos echan mano de la sucesión de Fibonacci. La disminución en intervalo inicial para el caso de la sección de oro después de la k -ésima iteración es:

$$L^k = (0.618)^k L^0$$

(esta eficiencia es ligeramente inferior a la proporcionada por el método de Fibonacci).

1.1.4.- MÉTODOS DE CONDICIONES DE OPTIMALIDAD.

Existen otros métodos que en sus procedimientos esta intrínseco la aplicación de la condición de optimalidad descrita como: $f'(x) = 0$. De este tipo de métodos veremos la formulación empleada de tres de ellos (Newton, cuasi-Newton, secante).

MÉTODO DE NEWTON.

Este método utiliza la siguiente fórmula en la búsqueda del óptimo:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f'(x^k)}{f''(x^k)}$$

tal ecuación es empleada en cada iteración hasta alcanzar el grado de error deseado. La fórmula presentada es obtenida de la aproximación cuadrática:

$$f(x) \approx f(x^k) + f'(x^k)(x - x^k) + [f''(x^k)(x - x^k)^2] / 2$$

de esta forma el procedimiento hace la localización del óptimo en una iteración para una función cuadrática. Sin embargo, para otras funciones en donde $f'(x)$ tienda a cero tiene una convergencia lenta, o si existe más de un punto extremo (es decir, máximo o mínimo) puede converger al punto no deseado.

MÉTODO CUASI-NEWTON.

El método de cuasi-Newton es una imitación del método de Newton, se emplea cuando las derivadas de las funciones son complicadas ya que reemplaza el uso de estas en la fórmula por una aproximación de estas, quedando la fórmula como sigue:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{[f(x^k + h) - f(x^k - h)] / 2h}{[f(x^k + h) - 2f(x^k) + f(x^k - h)] / h^2}$$

La diferencia central, así como la desventaja de este método en contraste con el método de Newton es el cálculo del "tamaño de paso h ", además en cada iteración se emplea un número mayor de cálculos para la determinación del siguiente punto. Por último, podemos señalar que como se espera cierto "error" en la aproximación del óptimo en el método de Newton, entonces al ser este método una aproximación del método de Newton es lógico espera un error más marcado.

MÉTODO DE LA SECANTE

Este método emplea la siguiente fórmula:

$$x^{n+1} = x^q - \frac{f'(x^q)}{[f'(x^q) - f'(x^p)] / (x^q - x^p)}$$

Dicha fórmula aprovecha el uso de la primera derivada, pero también puede clasificarse como un método de eliminación de regiones, por el siguiente aspecto. El método para ir avanzando necesita de dos puntos, los cuales deben tener signos opuestos en la evaluación de sus derivadas, en la siguiente iteración los puntos que persisten son el punto recién obtenido (es decir, x^{n+1}), y x_q o x_p dependiendo de cual tenga la primera derivada con signo opuesto en relación a la evaluación de la primera derivada de x^{n+1} , es aquí donde se da una eliminación de región, para ver mejor esto consideremos la siguiente figura:

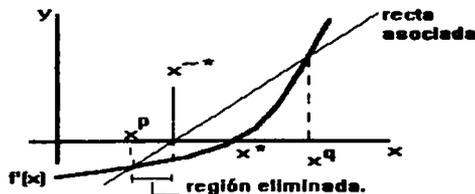


fig 3.

Para concluir mencionaremos que los criterios para terminar estos tres métodos son:
para Newton y cuasi-Newton:

$$\frac{\|x^{k+1} - x^*\|}{\|x^k - x^*\|^2} \leq \varepsilon$$

para método de la secante:

$$\frac{\|x^{k+1} - x^*\|}{\|x^k - x^*\|} \leq \varepsilon$$

donde $\varepsilon > 0$ es el error requerido, y x^* es el equivalente a x^{k+2} .

Hasta aquí hemos visto algunos de los algoritmos más importantes en la optimización unidimensional sin restricciones, los cuales son necesarios no tan solo en problemas de una sola variable, sino también en aquellos problemas que relacionan varias variables, como veremos a continuación.

1.2.- OPTIMIZACIÓN MULTIDIMENSIONAL (SIN RESTRICCIONES)

Al igual que en la optimización unidimensional, existen diversidad de algoritmos que permiten tener una aproximación al óptimo de la función objetivo. En general, y en lo que se refiere a la optimización multivariable irrestricta, podemos dividir a estos algoritmos en dos grupos: 1) aquellos que hacen uso de la información de las derivadas de la función objetivo, y 2) en los que esta información puede ser omitida. En nuestro estudio no tomaremos en cuenta a los algoritmos del segundo caso, pues aunque existen algunos de cierta importancia (búsqueda aleatoria, búsqueda univariable,...), son casi en su totalidad menos eficientes, a excepción del método de Powell. Este método a pesar de no usar información de las derivadas de la función objetivo, tiene una eficiencia comparable con otros métodos que si usan dicha información (y en algunos casos los llega a superar). Sin embargo, nos limitaremos a describir solo algunos algoritmos del caso 1).

Con esto en mente, en esta sección se ve la optimización irrestricta encontrando:

$$\mathbf{x}^* = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \quad \text{que optimiza la función} \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\mathbf{x})$$

En los procesos iterativos que veremos se pueden observar dos similitudes en sus algoritmos:

- la selección de una dirección de búsqueda s^k .
- la obtención de $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}^k$, donde $\Delta \mathbf{x}^k$ es generalmente conocido como el tamaño de paso.

Además de la necesidad de un punto de inicio o partida $\mathbf{x}^0 = [x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0]^T$, así como la presuposición de que $f(\mathbf{x})$ es diferenciable.

En la descripción de cada método no profundizaremos en los conceptos matemáticos que los fundamentan, sino, que solo se hará referencia a los pasos que implantan sus algoritmos para aproximarse al óptimo. Es importante señalar que estos algoritmos requieren del uso de una búsqueda unidimensional para lograr su objetivo, de ahí la importancia de haber echado un vistazo a la optimización univariable en la sección anterior.

1.2.1 .- MÉTODO INDIRECTO DE PRIMER ORDEN.

MÉTODO DEL GRADIENTE.

Este método es también conocido como el método de descenso (o ascenso) acelerado. El método hace uso de la primeras derivadas de la función objetivo. Los pasos de este método son:

- 1) La selección de un punto inicial $\mathbf{x}^0 = [x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0]^T$.
- 2) El cálculo de las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} \quad j=1, \dots, n$$

- 3) Evaluación del **gradiente**:

$$\mathbf{s}^k = \nabla f(\mathbf{x}^k)$$

- 4) Uso de alguna de las relaciones siguientes:

- En el caso de una maximización: $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \lambda^k \mathbf{s}^k$
- En el caso de una minimización: $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \lambda^k \mathbf{s}^k$

En el primer caso el método toma el nombre de ascenso acelerado, en segundo caso se llama descenso acelerado. Ahora bien el valor de λ^k puede ser determinado de varias maneras: a) Se puede considerar como una constante, en cuyo caso $\lambda^k = \lambda$, en toda iteración. b) λ^k es el valor correspondiente a la optimización de una función univariable $g(\lambda^k)$, guardando la siguiente relación:

$$\lambda^k = \max g(\lambda^k) = f(x^k) - \lambda^k \nabla f(x^k)$$

notemos que se trata de una función univariable pues conocemos a x^k y $\nabla f(x^k)$. Esta optimización podemos llevarla a cabo con algún método visto en la sección anterior. b) Una alternativa es el empleo de la siguiente fórmula:

$$\lambda^k = - \frac{(\nabla f(x^k))^T s^k}{(s^k)^T H(x^k) s^k}$$

(notemos en esta fórmula la utilización del hessiano). Cabe mencionar que para la selección de λ^k la alternativa a) es deficiente ya que no sabemos el tamaño adecuado del "paso". Por otro lado, las alternativas b) y c) muestran una eficiencia semejante, pero si no se desea evaluar el hessiano, entonces la opción a elegir es b)

5) Se realiza una comparación entre $f(x^{k+1})$ y $f(x^k)$, si

$$\text{abs}(f(x^k) - f(x^{k+1})) < \epsilon$$

donde ϵ es la tolerancia de error predefinido, entonces se da por terminado el algoritmo. Otra forma de determinar la finalización del algoritmo es analizando la evaluación del gradiente, si este es cero, es decir ($\nabla f(x^k) = 0$), entonces las iteraciones son paradas. Así el óptimo aproximado es el último x^k encontrado. Si ninguno de estos criterios es cubierto, entonces se regresa al paso 3).

Es importante señalar la posibilidad de caer en un punto silla, en cuyo caso debe emplearse otro método de búsqueda para lograr salir de él, para determinar si nuestro punto óptimo es un punto de silla se analiza la matriz hessiana, si esta es no definida positiva, entonces estamos en aprietos. De otra forma nos encontramos en un óptimo ya sea local o global, si es local podemos intentar el método con otro punto inicial.

1.2.2 MÉTODOS INDIRECTOS DE SEGUNDO ORDEN.

MÉTODO DE NEWTON.

El método de Newton hace uso de información de segundo orden, es decir, de la información obtenida a través de las segundas derivadas parciales de $f(x)$, pues aquí interviene el Hessiano invariablemente. La regla iterativa del método es:

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k - [H(x^k)]^{-1} \Delta f(x^k) && \text{para minimizar} \\ y \\ x^{k+1} &= x^k + [H(x^k)]^{-1} \Delta f(x^k) && \text{para maximizar} \end{aligned}$$

en donde $\Delta f(x^k)$ es la transpuesta del gradiente y $[H(x^k)]^{-1}$ es la matriz inversa del Hessiano. Con el método de Newton se obtiene la solución en una iteración para una función cuadrática, pero no todas las funciones tiene esa característica. Por ello puede ser sugerible la introducción del parámetro de paso λ^k el cual puede ser obtenido de dos formas: por algún método de la sección anterior aplicado en la relación:

$$\lambda^k = \max g(\lambda^k) = f(x^k) - \lambda^k \Delta f(x^k)$$

o por:

$$\lambda^k = - \frac{(\nabla f(x^k))^T s^k}{(s^k)^T H(x^k) s^k}$$

de tal forma que la función iterativa queda como:

$$x^{k+1} = x^k (+/-) \lambda^k [H(x^k)]^{-1} \Delta f(x^k)$$

de otra forma el valor λ^k puede ser tomado como 1 en cada paso, y así puede ser omitido.

Hay que recordar que para iniciar también se requiere del punto de partida x^0 , y que para terminar el algoritmo se siguen los mismos criterios que en el método del gradiente, aunque se recomienda el uso del siguiente criterio.

$$\left| \frac{f(x^{k+1}) - f(x^k)}{f(x^k)} \right| < \varepsilon$$

donde ε es el parámetro de error requerido. Cabe mencionar que existen otros criterios de convergencia asociados.

Ahora bien, este método, al igual que el método del gradiente, no necesariamente localiza el óptimo global, y de la misma forma puede caerse en un punto silla si el Hessiano no es definido positivo. Por otra parte, a pesar de que el método de Newton presenta la "desventaja" de necesitar la inversa del Hessiano, este ha mostrado ser más eficiente que el método del gradiente.

Hemos hablado de la posibilidad de caer en un punto silla, para evitar esto se ha sugerido una matriz asociada al Hessiano: $H'(x)$ que es en realidad una suma a los elementos de la diagonal de $H(x)$:

$$H'(x) = [H(x) + \beta I]$$

donde β es una constante tan grande que $H'(x)$ sea definida positiva cuando $H(x)$ no lo sea. De forma análoga para $[H'(x)]^{-1}$ tenemos:

$$[H'(x)]^{-1} = [[H(x)]^{-1} + \beta I]$$

El parámetro β puede ser definido como $\beta > -\min \{\alpha\}$, donde α representa los eigenvalores de $H(x)$ o de $[H(x)]^{-1}$ según sea el caso.

Por otro lado, hemos visto la forma en que se determina λ^k , sin embargo, aquí presentamos otra forma paralela para su obtención y que puede llegar a ser más eficiente que las formas tratadas anteriormente. Esta "nueva" forma esta dada por:

$$\lambda = \frac{(\nabla f(x^k))^T s^k}{2[f(x^k + s^k) - f(x^k) - (\nabla f(x^k))^T s^k]}$$

MÉTODO DE FLETCHER-REEVES

Este método podemos ubicarlo como intermedio entre los métodos de segundo orden y los métodos de métrica variable, que más adelante se describen. El método tiene ideas relacionadas con el método de direcciones conjugadas, que no tratamos, sin embargo, puede notarse características que lo distinguen de los métodos anteriores.

El método de Fletcher-Reeves contempla los siguientes pasos:

Etapas 1: Se inicia con un punto inicial x^0 , se determina el gradiente de la función, y se hace $k=0$.

Etapas 2: Se determina la dirección de búsqueda:

$$s^k = -\nabla f(x^k)$$

Etapas 3: Se obtiene el tamaño de paso λ^k minimizando la relación:

$$\lambda^k = \min_g g(\lambda^k) = f(x^k + \lambda^k s^k)$$

Etapas 4: El punto x^{k+1} es:

$$x^{k+1} = x^k + \lambda^k s^k$$

Etapas 5: La nueva dirección de búsqueda es obtenida por:

$$s^{k+1} = -\nabla f(x^{k+1}) + \alpha^k s^k$$

en donde $\alpha^k = \frac{(\nabla f(x^{k+1}))^T \nabla f(x^{k+1})}{(\nabla f(x^k))^T \nabla f(x^k)}$

Etapas 6: Se analiza si se cumple cualquiera de los siguientes criterios. Si ninguno se cumple se hace $k = k + 1$, y se regresa a la etapa 3.

$$\left| \frac{f(x^{k+1}) - f(x^k)}{f(x^k)} \right| < \epsilon_1$$

o

$$\|\nabla f(x^k)\| < \epsilon_2$$

1.2.3.- MÉTODOS DE MÉTRICA VARIABLE.

En la optimización multidimensional existe una metodología llamada método de la secante o cuasi-Newton, la cual no tratamos en el presente trabajo, de esta metodología se derivan algunas ideas que dan origen a los métodos conocidos como métodos de métrica variable, estos métodos se basan en la idea de una aproximación al Hessiano, o a la inversa del Hessiano. En nuestro tratamiento solo visualizaremos la aproximación ligada a la inversa del Hessiano.

Cuando tenemos funciones cuadráticas se tiene un Hessiano constante, pero para funciones que no son cuadráticas el Hessiano no es constante. Con este conocimiento, para un punto dado x^{k+1} se puede obtener una aproximación al Hessiano $H(x^{k+1})$ conociendo los valores $\nabla f(x^k)$, $\nabla f(x^{k+1})$, $H(x^k)$, x^k .

Ahora bien, los métodos de métrica variable establecen condiciones adicionales para $H(x^{k+1})$ como:

- Matriz positiva definida*.
- Matriz simétrica*.
- Matriz próxima a la matriz estimada en la iteración anterior. Esta condición puede establecerse como:

$$\text{abs}[H(x^{k+1}) - H(x^k)] \leq \varepsilon$$

(* Definiciones en el glosario)

A continuación de muestran los pasos que contemplan este tipo de métodos:

MÉTODO DE DAVIDON-FLETCHER-POWELL (D F P).

El procedimiento inicia con cualquier matriz simétrica (regularmente es, y se recomienda que sea, la matriz identidad) que denotaremos por d^0 , y cualquier punto inicial x^0 , se hace $k=0$.

Etapa 1: Se calcula

$$s^k = - d^k g^k$$

donde $g^k = \nabla f(x^k)$.

Etapa 2: Encontrar λ^k de relación:

$$\lambda^k = \min g(\lambda^k) = f(x^k + \lambda^k s^k)$$

y determinar

$$x^{k+1} = x^k + \lambda^k s^k$$

$$g^{k+1} = \nabla f(x^{k+1})$$

$$\Delta g^k = g^{k+1} - g^k$$

$$\Delta x^k = x^{k+1} - x^k$$

Etapa 3: Actualizar la aproximación de la inversa del Hessiano, lo que representa d^{k+1} .

$$d^{k+1} = d^k + \frac{(\Delta x^k)(\Delta x^k)^T}{(\Delta x^k)^T (\Delta g^k)} - \frac{d^k (\Delta g^k)(\Delta g^k)^T d^k}{(\Delta g^k)^T d^k (\Delta g^k)}$$

Incrementar k en una unidad, $k = k+1$, y continuar en la etapa 1, si no se a cumplido alguno de los siguientes criterios de terminación:

$$\left| \frac{f(x^{k+1}) - f(x^k)}{f(x^k)} \right| < \varepsilon_1$$

$$|f(x^{k+1}) - f(x^k)| < \varepsilon_2$$

$$\left| \frac{(x^{k+1}) - (x^k)}{(x^k)} \right| < \varepsilon_3$$

6

$$\|(x^{k+1}) - (x^k)\| < \epsilon_4$$

$$\|s^{k+1}\| < \epsilon_5$$

6

$$\|\nabla f(x^k)\| < \epsilon_6$$

en donde ϵ_i son parámetros de error previamente definidos.

MÉTODO DE BROYDEN-FLETCHER-GOLDFARB-SHANNO (BFGS).

El procedimiento recursivo que emplea este método es sumamente similar al usado por el método anterior (DFP), excepto por la actualización de la aproximación de la inversa de Hessiano d^{k+1} , la cual en este método toma la siguiente forma:

$$d^{k+1} = d^k + \frac{\lambda^k}{(\Delta x^k)^T (\Delta g^k)}$$

en donde

$$\lambda^k = T^k [\Delta x^k (\Delta x^k)^T] - \Delta x^k (d^k \Delta g^k)^T - d^k \Delta g^k (\Delta x^k)^T$$

con

$$T^k = 1 + \frac{(\Delta g^k)^T d^k \Delta g^k}{(\Delta x^k)^T \Delta g^k}$$

Los métodos de métrica variable, pueden ser clasificados como métodos indirectos de segundo orden, pero en general los de métrica variable muestran una eficiencia superior a los de segunda orden, aunque una excepción puede ser el método de Fletcher-Reeves. Sin embargo, la elección del mejor método siempre va ligada a los requerimientos y características del problema en cuestión, y de la facilidad de implantación del método, por ejemplo, el método de Fletcher-Reeves es de cálculos más manejables y requiere de menos memoria que el DFP o BFGS, y eso lo hace más práctico aunque no necesariamente superior en cuanto a eficiencia se refiere.

Es así como llegamos al final de un primer capítulo en el cual hemos visto diversas herramientas en el campo de la programación no lineal. En el siguiente capítulo nos introduciremos en el mundo de la programación lineal, específicamente en tres metodologías: el método Simplex, el método de Karmanarkar y el método de los centros analíticos, el cual es la justificación no solo del primer capítulo sino del presente trabajo en su totalidad.

2.- OPTIMIZACIÓN LINEAL

Durante el capítulo anterior hemos tratado lo referente a la optimización no lineal sin restricciones, en el presente capítulo daremos un giro hacia a la programación (optimización) lineal.

En muchas ocasiones los problemas a los que nos enfrentamos pueden llevarse a una representación matemática de tipo lineal, es decir, que todas las funciones matemáticas en este modelo son lineales. Las técnicas para dar solución a este tipo de representaciones han tenido gran avance durante nuestro siglo, un ejemplo de estos grandes avances es sin duda el método Simplex, desarrollado por George Dantzing en 1947. Paralelo a este desarrollo se dieron otros avances como la teoría de colas, la programación dinámica, entre otros de gran importancia. Pero en nuestro trabajo nos ubicaremos en las características del método Simplex, pues este tiene mucho que ver con las intenciones de nuestro objetivo.

El método Simplex es un algoritmo para resolver problemas de programación lineal, (el termino programación no se refiere a la programación en computadoras sino más bien pretende ser un sinónimo de planificación). En general los problemas que conceptualicemos como un modelo matemático, son problemas que buscan la optimización de algún tipo de "utilidad" (ya sea tiempo , intereses monetarios, u otros), pero que a lo largo de esta búsqueda están sujetos a una serie de limitaciones. Estas limitaciones pueden ser de tiempo, de capital, de mano de obra, de material, en fin de todo tipo de recursos. De esta forma el modelo matemático del problema es, en sí, la descripción de un módulo de intereses.

Así podemos decir que, un problema de programación lineal (PPL) consiste en encontrar el óptimo de una función, llamada función objetivo, sujeta a ciertas restricciones o condiciones.

Ahora bien, el modelo que nos ayuda en la solución de un PPL tiene la siguiente generalización:

$$\begin{array}{ll} \text{optimizar} & z = f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{sujeto a} & \sum a_{ij} x_j \leq b_i \\ & x_j \geq 0 \end{array}$$

donde :

optimizar = maximizar o minimizar,
 c_j = parámetros (costos, utilidades),
 b_i = vector de disponibilidades,
 $\sum a_{ij} \leq b_i$ = restricciones tecnológicas,
 $x_j \geq 0$ = restricción de no negatividad.

En forma matricial se tiene:

$$\begin{array}{ll} \text{optimizar} & Z = C x \\ \text{sujeto a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

donde:

$$C = [c_1, c_2, \dots, c_n] \implies \text{vector de costos,}$$

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \implies \text{variable de decisión del problema,}$$

$$b = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T \implies \text{vector de disponibilidades,}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \implies \text{matriz de coeficientes tecnológicos.}$$

Es claro que ambas formas son equivalentes. Ahora bien, la finalidad es darle solución al problema a través de la obtención del máximo o mínimo de la función sin violar sus restricciones. Esto puede hacerse de varias formas, revisaremos rápidamente algunas, con la finalidad de tener presente algunos conceptos importantes. Para lo cual tengamos en cuenta el problema siguiente:

$$\max \quad v(x_1, x_2) = 3x_1 + 6x_2 \quad \dots (1)$$

$$\text{s.a.} \quad 20x_1 + 50x_2 \leq 3300 \quad \dots (2)$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 380 \quad \dots (3)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

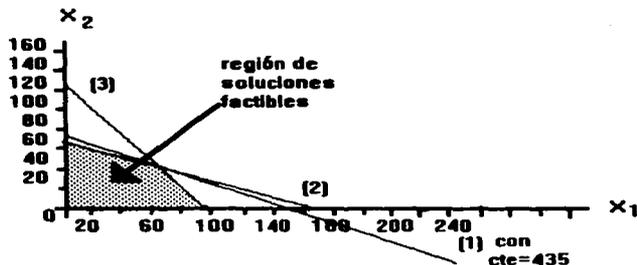
2.1 EL MÉTODO GRÁFICO.

Para resolver un problema gráficamente:

a) Se gráfica el conjunto de restricciones, que no es otra cosa que el conjunto solución de las desigualdades. (la **región de soluciones factibles**).

b) Se traza las rectas que satisfagan a (1) para valores distintos de la constante. Cada una de las rectas se llama recta de utilidades constantes para el problema.

En nuestro ejemplo tendríamos:



de donde se observa que la solución óptima está definida por la recta (1) con una constante de 435, lo que es la utilidad máxima al trabajar con el punto $(x, y) = (65, 40)$.

2.2 MÉTODO DEL PUNTO ESQUINA.

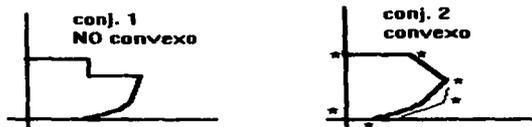
Existe otra forma de ver y solucionar el problema, como vemos la intersección de dos rectas (restricciones), cualesquiera, que limitan la región de factibilidad, es un punto en el plano, y si dicho punto se encuentra contenido en la región factible, entonces el punto es llamado **punto esquina** de la región de factibilidad. En nuestro ejemplo los puntos esquina son:

$$\begin{array}{l} (95, 0), (0, 66), (65, 40), (0, 0) \quad \text{-->factibles} \\ (165, 0), (0, 126.7) \quad \text{-->no factibles} \end{array}$$

Así, el método del punto esquina propone hallar los puntos esquina factibles (ya sea en forma algebraica o en forma gráfica), y evaluarlos en la función objetivo, para posteriormente compararlos y de esta forma determinar la utilidad máxima y el punto óptimo asociado a esta. De realizar tal desarrollo en el ejemplo encontraríamos nuevamente que el punto óptimo es $(65, 40)$ con valor de la función objetivo de 435.

El procedimiento nos llevará a la solución correcta, pues se ha demostrado que el siguiente enunciado es verdadero: *los valores máximos y mínimos de la función objetivo de un PPL se encuentran siempre en los puntos esquina.*

Aunado a este enunciado tenemos la siguiente definición: un **conjunto convexo** es una colección de puntos tal que para todo par de puntos de la colección, el segmento rectilíneo que los une se encuentra por completo en esta colección.



En relación a esto se tiene que, un **punto extremo** de un conjunto convexo es un punto en el conjunto que no está en segmento rectilíneo alguno que una otros dos puntos del conjunto. En la gráfica

convexa (arriba), los puntos extremos son: los puntos esquina y los puntos comprendidos en la curva, (se han marcado con * para su mejor visualización).

Por otra parte, es fácil ver que tanto como el método gráfico, como el método del punto esquina, son prácticos en problemas pequeños, (esencialmente de dos variables), pues las dificultades en problemas más grandes resaltan fácilmente, (¿donde estaría la sencillez de resolver un problema octadimensional con alguno de estos métodos?).

Para problemas mayores existe el método Simplex. Este método retoma ideas de las definiciones que se han expuesto, pues el método, después de adecuar el problema para su solución, empieza a "caminar" por las aristas de la región de soluciones factibles (que es a su vez un conjunto convexo), en cada paso o iteración el método salta de un punto esquina a otro, con un procedimiento que asegura que el punto esquina actual es mejor (en base a su evaluación en la función objetivo), al punto esquina anterior. De esta forma el Simplex solo revisa los puntos esquina que envuelve el problema, y aún más, de estos puntos esquina solo revisa algunos.

La metodología con la que el Simplex logra resolver los problemas es muy sencilla. Daremos un pequeño resumen de esta, su terminología y algunos aspectos importantes, pues en nuestro trabajo es importante el conocimiento de estos, ya que los resultados arrojados por el método Simplex, son a los que deseamos llegar a través de una alternativa diferente, y para ver las posibles conveniencias y eficiencias de esta nueva alternativa el parámetro esencial será la forma de trabajo del método Simplex.

Así pues, continuamos con ideas en la solución de PPL.

FORMAS CANÓNICA, ESTÁNDAR Y MIXTA. VARIABLES DE HOLGURA Y DE EXCESO

Un PPL se puede presentar de tres formas:

1) forma CANÓNICA

$$\text{opt } Z=Cx$$

s.a.

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

2) forma ESTÁNDAR

$$\text{opt } Z=Cx$$

s.a.

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

3) forma MIXTA

$$\text{opt } Z=Cx$$

$$\text{s.a. } \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq_i \geq b_i \quad i \in 1, \dots, k$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad i \in k+1, \dots, n$$

$$x_j \geq 0$$

La forma más conveniente es la canónica, y cualquiera de las otras dos formas se puede llevar a esta a través del uso de las siguientes cinco reglas:

$$R1.- a) \text{ Max } Cx \equiv \text{Min } -Cx,$$

$$b) \text{ Min } Cx \equiv \text{Max } -Cx$$

$$R2.- a) Ax \leq b \equiv -Ax \geq -b,$$

$$b) Ax \geq b \equiv -Ax \leq -b$$

$$R3.- Ax = b \equiv Ax \geq b, Ax \leq b; \text{ (la intersección de ambas desigualdades).}$$

R4.- a) toda desigualdad $Ax \leq b$ puede convertirse en una igualdad mediante la adición de un vector Y, llamado de holgura. El vector columna Y tiene n componentes, todos ellos no negativos.

b) toda desigualdad $Ax \geq b$ puede convertirse en igualdad mediante la resta de un vector Z, llamado de exceso. El vector columna Z tiene n componentes no negativos.

R5.- Una variable no restringida, o sea, aquella que puede tener todo tipo de valores, ya sean positivos, negativos o cero, puede escribirse como la diferencia de dos variables no negativas.

Estas reglas son de importancia ya que al modelar nuestro problema, se puede obtener un modelo que no corresponda a la forma canónica, la cual es de gran utilidad al momento de ejecutar el Simplex.

2.3 EL MÉTODO SIMPLEX.

El método Simplex (creado por Danzang a finales de los 40's), permite, como ya se a mencionado, resolver un PPL sin necesidad de analizar explícitamente el valor de la función objetivo en cada punto extremo. El método Simplex es en realidad un algoritmo, como todos los vistos en el capítulo anterior, y como tal es poseedor de una estructura:

Ya teniendo el modelo en la forma canónica, se convierten las desigualdades de las restricciones funcionales a restricciones equivalentes de igualdad.

Ejemplo:

forma canónica

$$\text{Max } z = x_1 + 5x_2$$

s.a

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 4 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

forma equivalente

$$\text{Max } z = x_1 + 5x_2$$

s.a

$$\begin{aligned} x_1 &+ x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 &+ x_4 &= 18 \\ &2x_2 &+ x_5 = 12 \\ x_j &\geq 0, \quad j=1\dots5 \end{aligned}$$

Es importante notar que un modelo que tenga mas variables (n), que ecuaciones (m), (contando con las variables de holgura y exceso necesarias), es decir, $n > m$, se tiene infinitad de soluciones ya que se pueden elegir n-m variables cualesquiera y hacerlas constantes (igual a cero), y resolver el sistema en términos de las variables restantes, lo que equivale a decir que se tiene n-m grados de libertad, (en el ejemplo se tienen 2 grados de libertad).

Las variables que se hacen igual a cero se llaman **variables no básicas**, y las otras son las **variables básicas**. La solución resultante del problema se le conoce como **solución básica**, y si todas las variables básicas son no negativas, entonces es una **solución básica factible**.

La teoría de PL afirma que una solución óptima (única) debe ser una solución básica factible. Por lo tanto, no es necesario considerar cualesquiera otras soluciones en las que algunas de las variables "extras" se hagan iguales a valores diferentes de cero. Así, la idea esencial del método Simplex es la siguiente: se resuelve repetidas veces el sistemas de ecuaciones, para una sucesión de soluciones básicas factibles, cada una mejor que su predecesora, cambiando una variable básica a no básica, y una no básica a básica. Por otra parte ,cada solución factible de un PPL corresponde a un punto extremo del conjunto convexo de soluciones. Sin embargo, en el procedimiento nos podemos encontrar con **soluciones factibles degeneradas** y **no degeneradas**.

Ahora bien, sea el problema lineal en su forma canónica:

$$\begin{aligned} \text{Max } & Z=Cx \\ \text{s.a. } & \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

se denota a la columna de A por a_1, a_2, \dots, a_n con $m < n$, se considera a la matriz A partida en dos matrices, una B con m vectores linealmente independientes y otra N con n-m vectores linealmente dependientes.

$$A_{m,n} = (B_{m,m} \mid N_{m,n-m})$$

La matriz B se llama la base y cualquier vector a_j en A , que no esta en B , puede escribirse como una combinación de vectores de B , es decir, dado que $a_j \notin B$, este puede escribirse como:

$$a_j = y_{1j} a_1 + y_{2j} a_2 + \dots + y_{mj} a_m = \sum_{k=1}^m y_{kj} a_k$$

donde $a_i \in B$, $i = 1, \dots, m$.

Se hace $Y_j = (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{mj})^t$ por lo que $a_j = BY_j$, como B tiene inversa, $Y_j = B^{-1}a_j$. Ahora bien planteando el problema de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Z - C_1 x_1 - C_2 x_2 - \dots - C_n x_n &= 0 \\ a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n + x_{n+1} &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n + x_{n+2} &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n + x_{n+m} &= b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 & \quad x_{n+1} \geq 0, \dots, x_{n+m} \geq 0 \end{aligned}$$

variables de holgura

se construye una tabla con los coeficientes del problema lineal, como la que se muestra a continuación:

TABLA DE PROGRAMACION LINEAL (SIMPLEX).

	Z	x ₁	x ₂	...	x _n	x _{n+1}	x _{n+2}	...	x _{n+m}	Z ₀	
	1	Z ₁ - C ₁	Z ₂ - C ₂	...	Z _n - C _n	Z _{n+1} - C _{n+1}	Z _{n+2} - C _{n+2}	...	Z _{n+m} - C _{n+m}	Z ₀	↓
a _{B1}	0	y ₁₁	y ₁₂	...	y _{1n}	y _{1 n+1}	y _{1 n+2}	...	y _{1 n+m}	x _{B1}	
a _{B2}	0	y ₂₁	y ₂₂	...	y _{2n}	y _{2 n+1}	y _{2 n+2}	...	y _{2 n+m}	x _{B2}	
.	
.	
a _{Bm}	0	y _{m1}	y _{m2}	...	y _{mn}	y _{m n+1}	y _{m n+2}	...	y _{m n+m}	x _{Bm}	↑

↑ VECTORES QUE INTENDRAN LA BASE ACTUAL. VARIABLES ORIGINALES VARIABLES HOLGURA IDENTIFICACION DEL PUNTO EXTREMO ASOCIADO A LA BASE ACTUAL. VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO ASOCIADO A LA BASE ACTUAL

en forma condensada se tiene:

	Z	x ₁	x ₂	...	x _n	x _{n+1}	x _{n+2}	...	x _{n+m}	C _B	x _B
	1	C _B	B ⁻¹ A - C	...	C _B	B ⁻¹	...	C _B	x _B		
a _{B1}	0	B ⁻¹ A				B ⁻¹				x _B	
a _{B2}	0										
.	.										
.	.										
a _{Bm}	0										

Teniendo en cuenta estos esquemas y las anteriores conceptualizaciones, procedemos a enunciar los pasos que describen al algoritmo del Simplex.

ALGORITMO SIMPLEX.

Paso 0 : Obtener una solución básica factible inicial. (La cual esta dada por las variables de holgura).

Paso 1 : Calcular el mínimo de los coeficientes de costos, es decir,

$$Z_j - C_j = \text{Min} \{ Z_j - C_j \} , j \in B \quad [\text{criterio de entrada}]$$

a) si los $Z_j - C_j \geq 0$, se tiene la solución óptima finita.

b) si los $Z_j - C_j < 0$, ir al paso 2.

Nota: los empates se rompen arbitrariamente.

Paso 2 : Una vez seleccionada la columna a_j que entra a la nueva base, se selecciona el vector de salida a_r , de la actual base, utilizando la siguiente regla:

$$\frac{x_{Br}}{y_{rj}} = \text{Min}_k \left\{ \frac{x_{Bk}}{y_{kj}} \right\}$$

si los $y_{kj} < 0$, para toda $j \in B$, entonces el problema no tiene solución óptima finita. (Solución no acotada).

Paso 3 : La intersección en la tabla de la columna que entra con la que sale, determina elemento pivote y_{rj} . Aplicando operaciones elementales, se convierte a la columna a_j en el vector unitario e_r , es decir, ceros en toda al columna y 1 en la r-ava componente, que resulta ser y_{rj} . Regresar al paso 1.

ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a. } x_1 &\leq 4 \\ &2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

el problema
equivalente es:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 3x_1 - 5x_2 \\ \text{s.a. } x_1 + x_3 &= 4 \\ &2x_2 + x_4 = 12 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_5 &= 18 \\ x_i &\geq 0, i=1,\dots,5 \end{aligned}$$

la tabla del Simplex asociada a su solución es:

var. bas.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_B
iter 0	1	-3	-5	0	0	0	0
x_3	0	1	0	1	0	0	4
x_4	0	0	2	0	1	0	12
x_5	0	3	2	0	0	1	18
iter 1	1	-3	0	0	5/2	0	30
x_3	0	1	0	1	0	0	4
x_2	0	0	1	0	1/2	0	6
x_5	0	3	0	0	-1	1	6
iter 2	1	0	0	0	3/2	1	36
x_3	0	0	1	0	1/2	0	2
x_2	0	0	1	0	1/2	0	6
x_5	0	1	0	0	-1/3	1/3	2

(los elementos encerrados en los cuadros gruesos, son los elementos pivote en la iteración i)

donde tenemos que la solución es : variables básicas $\rightarrow x_1 = 2, x_2 = 6, x_3 = 2, \text{ y } Z = 36$

Por otra parte, si en la tabla óptima de un PPL los coeficientes de costos de las variables no básicas son estrictamente mayores que cero, entonces, se dice que la solución es única. Si existe al menos un coeficiente de costos de las variables no básicas igual a cero, se dice que la solución óptima es múltiple. En este último caso se procede a realizar una iteración más del Simplex, lo cual nos dará el otro punto esquina, que es también una solución óptima al problema. Ambos puntos determinan una recta, equivalente a alguna restricción del problema, la cual contiene, entre estos puntos, una infinidad de soluciones óptimas factibles al problema.

Además de este posible suceso, nos podemos encontrar con otros:

- Empate en la variable básica que entra. En este caso la selección puede hacerse arbitrariamente. Al final se llegará a la solución óptima independientemente de la variable empatada que se elija, y no existe método conveniente para predecir cual de ellas llegará más pronto a la solución óptima.

- Empate en la variable básica que sale. (Degeneración). En este caso, una selección arbitraria podría hacer caer al método en un "círculo vicioso", esto puede ocurrir debido: 1) Todas las variables básicas empatadas llegan a cero simultáneamente a medida que se incrementa la variable básica que entra. 2) Si una variable básica degenerada conserva su valor de cero hasta que se elige, en una iteración subsecuente como la variable básica que sale, la variable básica correspondiente que entra también debe seguir siendo cero (ya que no puede incrementarse sin hacer que la variable básica que sale se vuelva negativa), por lo tanto, el valor de z debe permanecer inalterable.

Para evitar estos problemas, se usan las llamadas reglas LEXICOGRAFICAS. Las cuales no contemplamos en nuestro trabajo, para mayor información refiérase a alguno de los siguientes libros: Métodos y modelos de investigación de operaciones Vol I, Juan Prawda; Introduction to mathematical programming applications and algorithms, Wayne L. Winston. Por otra parte la introducción de estos algoritmos (en códigos computacionales), reduce la eficiencia del Simplex.

Ahora bien, en ocasiones no es posible obtener una solución básica factible inicial,

$\begin{aligned} \text{Min } Z &= -3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a.} \quad x_1 &\leq 4 \\ &x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 &\geq 18 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$	<p>el problema equivalente es:</p>	$\begin{aligned} \text{Max } -Z &= 3x_1 - 5x_2 \\ \text{s.a.} \quad x_1 + x_3 &= 4 \\ &x_2 + x_4 = 6 \\ -3x_1 - 2x_2 + x_5 &= -18 \\ x_i &\geq 0, i=1, \dots, 5 \end{aligned}$
---	--	--

observemos que en el ejemplo de arriba, su problema equivalente no proporciona una variable inicial básica factible en la tercera restricción, ahora bien, esta restricción puede ser modificada de tal forma que quede como:

$$3x_1 + 2x_2 - x_5 = 18$$

sin embargo, seguimos sin tener la variable básica factible inicial.

En tales casos se emplean procedimientos que hacen uso de la llamada **variable artificial**. Aunque en realidad, estos métodos son una extensión del Simplex que hace uso de dicha variable de "truco"

2.3.1 MÉTODO DE LA M GRANDE, O MÉTODO DE PENALIZACIONES.

Como ya se mencionó, cuando no se logra obtener una solución básica factible inicial, se emplea la técnica de variable artificial. Esta técnica construye un problema "revisado" mas conveniente, introduciendo una variable simulada (la variable artificial), en cada una de las restricciones que lo necesiten, solo con el fin de ser la variable básica inicial para esa restricción, sometándose estas variables a las restricciones usuales de no negatividad.

Para ver más claro esto veamos las siguientes restricciones y su modificación:

$$(\geq) 3x_1 + 2x_2 \geq 18 \quad \text{---->} \quad 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 18 \quad \text{---->} \quad 3x_1 + 2x_2 + x_3 + \bar{x}_4 = 18$$

$$(\leq) 2x_1 = 12 \quad \text{---->} \quad 2x_1 + \bar{x}_3 = 12$$

ahora bien, la función objetivo se corrige de acuerdo al tipo de optimización:

i) si se maximiza $\text{--->} \text{Max } Z = Cx - M \bar{x}_i$

ii) si se minimiza $\text{--->} \text{Min } Z = Cx + M \bar{x}_i$

De tal forma tenemos que, la solución óptima al problema:

$$\text{Min } Z = Cx + M W$$

s.a

$$Ax - y + W = b \quad (1)$$

$$x \geq 0, y \geq 0, w \geq 0$$

es también, una solución óptima al problema:

$$\text{Min } Z = Cx$$

s.a

$$Ax \geq b \quad (2)$$

$$x \geq 0$$

si y solo si, $W = 0, b \geq 0$, donde W representa el vector de las variables artificiales \bar{x}_i , y M un coeficiente constante muy grande (por ello el nombre del método). Esto es así, ya que si $W = 0$, entonces el planteamiento (1) es idéntico al planteamiento correspondiente de (2), sin el uso de variables artificiales.

Como el método Simplex siempre trata, en cada iteración, de mejorar el valor de la función objetivo, si el problema original no tiene restricciones inconsistentes, entonces llegará el momento en que W salga completamente de la base (ya que al tener coeficientes muy grandes, estos perjudican al valor de la función objetivo, por lo que el Simplex tiende a sacar estas variables de la base), momento en el cual estas valdrán cero, es decir, $W = 0$.

Si el problema original no tiene soluciones factibles, entonces cualquier solución óptima para el problema revisado con el método de la M grande, tiene al menos una variable artificial que no es cero. De lo contrario (si el problema original tiene solución factible), todas las variables artificiales son iguales a cero.

Como vemos, las variables artificiales desempeñan la misma función que las variables de holgura, al proporcionar una variable básica inicial. Las variables artificiales no tiene significado físico desde el punto de vista del problema original (por ello son nombradas artificiales), por lo que (como ya se advirtió), el procedimiento es válido solo si estas variables son cero al obtener la solución óptima.

Ya vimos los ajustes que realiza el método de la M grande en el planteamiento del problema, ahora bien, el paso de la información a la tabla del Simplex puede hacerse en forma: a) directa, o b) realizar una

conversión en la función objetivo, pasando las variables artificiales a su correspondiente en relación al resto de las variables.

Veamos el primer caso, consideremos el ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad \text{Mín } Z &= 3x_1 + 5x_2 \\ x_1 &\leq 4 \\ 2x_2 &= 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\geq 18 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

el problema
equivalente es:

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad \text{Max } Z &= 3x_1 - 5x_2 \\ x_1 + x_3 &= 4 \\ 2x_2 + x_4 &= 12 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_5 + x_6 &= 18 \\ x_i &\geq 0, i=1, \dots, 6 \end{aligned}$$

entonces tenemos que:

var. bas.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_B
iter 0	1	-3	-5	0	-M	0	-M	0
x_3	0	1	0	1	0	0	0	4
x_4	0	0	2	0	1	0	0	12
x_6	0	3	2	0	0	-1	1	18
+M x_4	1	-3	2M-5	0	0	0	-M	30
+M x_6	1	3M-3	4M-5	0	0	-M	0	30
x_3	0	1	0	1	0	0	0	4
x_4	0	0	2	0	1	0	0	12
x_6	0	3	2	0	0	-1	1	18

o, por medio de la segunda opción tenemos que:

$$x_4 = 12 - 2x_2, \quad x_6 = 18 - 3x_1 - 2x_2 + x_5$$

sustituyendo:

$$Z = 3x_1 + 5x_2 + M(12 - 2x_2) + M(18 - 3x_1 - 2x_2 + x_5)$$

realizando operaciones llegamos a,

$$= x_1(3 - 3M) + x_2(5 - 4M) + M x_5 + 30M$$

que al pasar la información a la tabla del Simplex queda como:

var. bas.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_B
iter 0	1	3M-3	4M-5	0	0	-M	0	30
x_3	0	1	0	1	0	0	0	4
x_4	0	0	2	0	1	0	0	12
x_6	0	3	2	0	0	-1	1	18

que es exactamente igual a lo obtenido anteriormente. Así, de cualquiera de las dos formas, tenemos listo todo para empezar a iterar normalmente.

Por otra parte, existe otro método paralelo al de la M grande para dar solución a problemas con detalles como los descritos. En cuestión de códigos de programación computacional el método que en seguida recordaremos, nos da ventajas en relación al método de la M grande, sin embargo, la eficiencia en la resolución del problema es idéntica en ambos métodos.

2.4 MÉTODO DE LA DOBLE FASE.

Una desventaja del método de la M grande (recordemos que hablamos en términos de códigos computacionales), es el posible error de cálculo que pudiera generarse de la asignación de un valor muy grande a la constante M. EL método de la doble fase esta hecho para remediar esta dificultad. Las variables artificiales se siguen empleando como se hizo en el método de la M grande, pero se elimina el uso de la constante M mediante la solución del problema en dos fases.

FASE I : Se aumentan las variables artificiales que se necesiten para asegurar una solución inicial. Se forma una nueva función objetivo, en la cual se minimiza la sumatoria de las variables artificiales, esta nueva función estará sujeta a las restricciones originales modificadas por las variables artificiales. Este nuevo problema es resuelto por la metodología del Simplex. Si el valor mínimo óptimo de la función objetivo es cero (lo que quiere decir que todas las variables artificiales son cero), el problema original tiene un espacio de soluciones factibles bien delimitado, entonces se continua con la fase II. De lo contrario, si el mínimo óptimo es positivo, el problema original no tiene solución.

FASE II : Se utiliza la solución básica óptima de la fase I como solución inicial para el problema original. Y se usa el Simplex para obtener la solución final.

Es posible que una variable artificial (o mas de una), se mantenga básica en el nivel cero al final de la fase I. En este caso deben hacerse prevenciones para garantizar que dicha variable nunca se volverá positiva durante los cálculos de la fase II.

Por otra parte, el número de iteraciones del método de la M grande y el método de doble fase son necesariamente el mismo, pues existe una correspondencia bionivoca (uno a uno) entre las tablas de ambos métodos. Por ello se mencionó que ambos presentan la misma eficiencia, pero la ventaja del método de la doble fase es la eliminación de la constante M.

Pues bien, la información que tenemos hasta el momento, el capítulo 1 y esta parte del capítulo 2, es suficiente para continuar con la descripción del método de los centros analíticos, pero aún no lo haremos: Antes de hacerlo describiremos otro método, creado durante la década pasada, que tiene como finalidad resolver el mismo tipo de problemas que resuelve el Simplex, si perteneces el campo de la investigación de operaciones seguramente ya habrás escuchado de él, sino es así, entonces aquí tienes una oportunidad de conocer algunos de sus aspectos.

2.5.- EL ALGORITMO DE KARMARKAR.

Este algoritmo fue propuesto por Naren Dra Karmarkar en 1984, y esta diseñado para una aplicación preferentemente en problemas de gran escala. En estos problemas con un gran numero de variables y de restricciones el método de Karmarkar a demostrado en diferentes estudios una superioridad en número de iteraciones y en tiempo de computadora en relación a los requeridos por el Simplex.

Durante el proceso del algoritmo se hace uso del gradiente de la función objetivo $\nabla f(x)$ ($\nabla f(x)$ para el caso de maximización y $-\nabla f(x)$ en la minimización), y requiere de llevar nuestro PPL a la estructura siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{opt} & z = Cx \\ \text{s.a} & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

esto se logra con los principios vistos anteriormente, sin embargo, cabe señalar que en el caso en que el planteamiento del problema no requiera de la inclusión de variables "auxiliares", es decir, que el problema

original ya tenga la estructura arriba señalada, se puede trabajar directamente y el resultado no se alterará. Estas son las circunstancias de nuestro problema ejemplo en la ilustración del método de Karmarkar.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & F(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_i \geq 0, \quad i=1,2,3 \end{aligned}$$

El problema tiene como solución óptima a $x_1 = 1$ $x_2 = 0$ $x_3 = 0$, el resultado puede obtenerse por cualquier método de PL visto en este capítulo.

Como se ha señalado el problema tiene ya la estructura requerida para las iteraciones del método de Karmarkar el cual consiste en dos fases principales, que son las que se describirán a continuación:

FASE K

Se inicia con un punto que este comprendido en el interior de la región de factibilidad $Ax = b$, que no se encuentre sobre ninguna de las aristas que definen dicha región, así que se trata de un punto factible, se calcula la proyección de $-c$ (recordemos que c es negativo puesto que estamos hablando de una minimización), lo cual no es otra cosa que el gradiente de nuestra función $f(x)$. Ahora bien se determina la siguiente proyección: $P = I - A^T (AA^T)^{-1} A$, que en nuestro ejemplo es:

$$P = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & 1 \\ & & & 1 \end{array} \right]^{-1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \\ & & & \\ & & & \end{array} \right]$$

y la proyección del gradiente negativo es $P(-\nabla f) = p(-c) = [1 \ 0 \ -1]^T$. Tomemos como punto inicial a $x(0) = (1/3 \ 1/3 \ 1/3)^T$. Ahora bien se obtiene el valor absoluto de las componentes negativas de $P(-\nabla f)$ y se determina el mayor de estos números, lo denotaremos con w , en nuestro ejemplo $w = 1$. Con estos datos determinamos al punto \bar{x} de la forma:

$$\begin{aligned} 1/3 + \lambda(1) &= x_1 \\ 1/3 + \lambda(0) &= x_2 \\ 1/3 + \lambda(-1) &= x_3 \end{aligned}$$

que resulta de utilizar la relación $\bar{x} = x^k + (\lambda/w) P(-\nabla f)$. El valor de λ puede ser establecido de diversas formas, algunos investigadores sugieren un valor de 0.25 para de esa forma no "pegarse" a una frontera de la región de factibilidad, pues esto haría que el proceso de búsqueda fuese más lento. En nuestro ejemplo se observa que si λ toma un valor de 1/3 entonces $\bar{x} = [2/3 \ 1/3 \ 0]$, sin embargo, si se toma un valor de $\lambda = (0.98/3)$, con esto $\bar{x} = [1.98/3 \ 1/3 \ 0.2/3]$ aproximadamente.

FASE K+1

Esta fase se centra en determinar $x^{k+1} = [x_1^k/1.98 \ x_2^k/1 \ x_3^k/0.02]$, en forma iterativa tendríamos:

$$x^{k+1} = D^{-1} \bar{x}$$

donde D es una matriz diagonal con los elementos $(1.98, 1, 0.02)$.

En las fase $k+1$ las restricciones $Ax^k = b = ADD^{-1}x^k$, son cambiadas por $ADx^{k+1} = b$, y la función objetivo $f(x) = c^T DD^{-1}x^k$, llega a ser $f(x) = c^T D^{k+1}x^k$. De esta forma tenemos que AD reemplaza a A en la proyección de la matriz, y Dc reemplaza a c en la función objetivo. Así el procedimiento es repetido.

Los ajustes que tendríamos para la siguiente iteración son que nuestro punto de "partida" esta dado por $x^1 = [0.168 \ 0.333 \ 16.67]$. La matriz A en la proyección es reemplazada por

$$AD = [1 \ 1 \ 1] \begin{vmatrix} 1.98 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02 \end{vmatrix} = [1.98 \ 1 \ 0.02]$$

y la función objetivo se transforma a:

$$f(x) = c^T Dx = [1 \ 2 \ 3] \begin{vmatrix} 1.98 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = 1.98x_1 + 2x_2 + 0.06x_3$$

Con esto la nueva iteración continua con la fase k .

Así observamos que las fases contemplan los siguientes cálculos:

$$A = AD \quad y \quad c = Dc,$$

$$P = I - A^T (A A^T)^{-1} A,$$

$$\bar{x} = x^k + (\lambda/w) Pc$$

$$x^{k+1} = D\bar{x}$$

Estos son los rasgos que envuelve el algoritmo de Karmarkar, cuyo criterio de terminación es la verificación de un grado de error predeterminado, y el cual es verificado mediante la relación $\text{abs}(x^k - x^{k+1})$, o otra forma es verificar que gradiente tenga un valor muy cercano a cero. Esto significa que este algoritmo nos da como resultado una aproximación al óptimo, pese a este inconveniente el método ha tenido gran relevancia en la solución de PPL de gran tamaño. Para una información mas detallada se refiere el siguiente libro: Optimization of chemical processes, T.F. Edgar, D.M. Himmelblau, ed. MacGraw Hill.

2.6.- EL MÉTODO DE LOS CENTROS ANALÍTICOS.

El algoritmo de Karmarkar realiza su búsqueda pasando de un punto en el interior de la región de factibilidad a otro punto también en el interior de esta zona, por ello es denominado como un método de punto interior. El método de los centros analíticos mantiene esta idea, por lo tanto es también un método de punto interior. Sin embargo, la metodología que emplean para llevar a cabo el proceso es bastante diferente.

El método de los centros analíticos considera, en un espacio R^n , el centro analítico de una región G definida como la región de M semiespacios lineales,

$$g_i = (x \in R^n) \leq b_i$$

con $i = 1, 2, \dots, m$, lo cual representa L vértices V_i , y esta definida como:

$$h = \sum_{i=1}^L \frac{V_i}{L}$$

si los m semiespacios lineales están representados como:

$$g_i = a_i^t \leq b_i$$

una función barrera $\Psi(x)$, para la región G del tipo:

$$\Psi(x) = \begin{cases} -\sum \log(b_i - a_i^t x) & \text{si } x \text{ es factible} \\ \infty & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

garantiza puntos interiores en la región G . El centro analítico de esta región está determinada de la siguiente manera:

$$h = \operatorname{argmin} [\Psi(x)]$$

Otra presentación de la función barrera que conlleva al mismo centro analítico de la región G tiene la siguiente forma:

$$\Psi(x) = \begin{cases} \Pi[1 / (b_i - a_i^t x)] & \text{si } x \text{ es factible} \\ \infty & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Para ver la forma en que trabajan estos conceptos veamos el siguiente ejemplo:

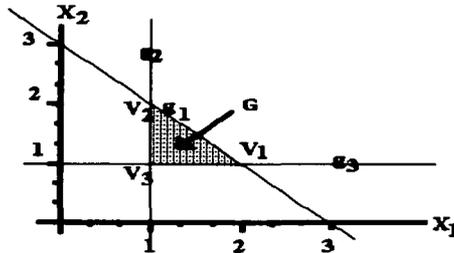
Sea $G = \cap g_i$, con $i = 1, 2, 3$. Y donde:

$$g_1 = x_1 + x_2 \leq 3$$

$$g_2 = x_1 \geq 1$$

$$g_3 = x_2 \geq 1$$

geoméricamente hablando se tiene:



$$h = \sum_{i=1}^L \frac{V_i}{L} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \begin{vmatrix} 4/3 \\ 4/3 \end{vmatrix}$$

de donde $g_1(h) = g_2(h) = g_3(h) = 1/3$ y $A_1 = A_2 = A_3$

Así mismo, utilizando el concepto del centro analítico, mediante la función barrera se tiene que:

$$h(G) = \operatorname{argmin} [\Psi(x)]$$

donde $\Psi(x) = -\log(3 - x_1 - x_2) - \log(x_1 - 1) - \log(x_2 - 1)$.

Al minimizar dicha función* se encuentra que la solución, x óptima, equivale a:

$$x = h(G) = \begin{vmatrix} 4/3 \\ 4/3 \end{vmatrix}, \text{ y que } \Psi(x) = 3.2958$$

lo que representa una solución idéntica a la obtenida previamente.

*Esta minimización es lograda a través de la metodología vista en el primer capítulo, pudiendo emplearse el método de nuestro agrado, (en este caso se empleó el algoritmo de Newton).

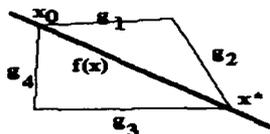
Como podemos observar, el concepto del centro analítico funciona adecuadamente. Ahora bien, haciendo los ajustes pertinentes, estos conceptos se pueden proyectar hacia un problema de optimización lineal del tipo:

$$\operatorname{Max} f(x), x \in G$$

donde $G = \bigcap g_i, i = 1, 2, 3, \dots, m$.

Es esta última expresión la que representa la transformación de nuestro problema lineal. De esta forma G está incluyendo tanto la función objetivo como las restricciones del problema original. Para ver como se logra esto consideremos que existe un intervalo Δ de los valores de la función objetivo, en el cual la solución óptima se encuentra en uno de sus extremos:

$$\Delta = (t_0, t^*) \quad \text{donde } t^* = f(x^*) \text{ y } x^* \in G$$



y además existe un punto x_1 que pertenece al interior de G donde $f(x_1) \leq t \in \Delta$, o sea, que tenemos un intervalo $[t_0 < t < t^*]$. Esta nueva desigualdad $f(x_1) \leq t_0$ puede incorporarse a las desigualdades:

$$g_i(x) \leq b_i$$

y formar una nueva región convexa $\Psi(t_0)$ definida como:

$$\Psi(t_0) = G \cap \{ (f(x_{t_0}) - t_0) \geq 0 \}$$

para el cual se puede determinar el centro analítico x_{t_1} . Es decir:

$$x_{t_1} = \text{argmin} [f_t(x)] .$$

donde $f_t(x) = -S \log (f(x) - t_0) - \sum \log (b_i - g_i(x))$, con $i = 1, 2, 3, \dots, m$; y $S \geq 1$.

Debido a que x_{t_1} representa un punto interior de G_i , se puede utilizar nuevamente este punto para proponer una nueva cota t_1 para el semiespacio actual.

$$f(x) \leq t_1$$

donde t_1 se determina como: $t_1 = f(x_{t_1})$, y así se genera una nueva región,

$$\Psi(t_1) = G \cap \{ (f(x_{t_1}) - t_1) \geq 0 \}$$

de la cual se puede determinar su centro analítico x_{t_2} .

Este proceso se continua de forma iterativa, concluyendo en limite $x_t \rightarrow x^*$, que es la solución óptima a la función objetivo, la cual converge en el limite $t_k \rightarrow t^*$.

Con lo anterior tenemos las herramientas necesarias para nuestros fines: convertir un problema de programación lineal hacia uno no lineal, de tal forma que la solución al problema transformado pueda ser buscada a través de técnicas propias de la optimización no lineal (capítulo anterior).

El método en sí contiene una estructura que podemos considerar sencilla, sin embargo, a primera vista, requiere de un gran número de iteraciones para aproximarnos a la solución óptima.

Por otra parte, la exactitud en la aproximación es establecida previamente de acuerdo a nuestras necesidades.

Ahora bien, para tratar de visualizar, de una mejor manera, cual es el funcionamiento de este proceso iterativo veamos el siguiente ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{Max } f(x) &= x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 1 \\ & x_i > 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Este planteamiento se puede escribir como la intersección de cuatro semiespacios, tal como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 f(t) &\geq t \\
 x_1 + x_2 &\leq 3 \\
 x_1 &\geq 1 \\
 x_2 &\geq 1
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

notemos que aquí tenemos la aparición del parámetro "t". Ahora bien, de (2) tenemos que,

$$\begin{aligned}
 x_1 + 2x_2 &\geq t \\
 t &= x_1 + 2x_2 - B,
 \end{aligned}$$

donde B es una constante mayor a cero. Así, rescribiendo (2)

$$\begin{aligned}
 x_1 + 2x_2 &\leq t - B \\
 x_1 + x_2 &\leq 3 \\
 x_1 &\geq 1 \\
 x_2 &\geq 1
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

(3) representa la intersección de cuatro semiespacios, los cuales forman una región convexa G , región que tiene una solución en términos de los conceptos del centro analítico, y por lo tanto, en forma iterativa representa la solución de (1) a través del planteamiento final:

$$\begin{aligned}
 x_1 + 2x_2 &\leq t \\
 x_1 + x_2 &\leq 3 \\
 -x_1 &\leq -1 \\
 -x_2 &\leq -1
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

donde $t = (t - B)$, con este último planteamiento la estructura para la aplicación del método de los centros analíticos es:

$$\text{Min } f(x) = -S \log(x_1 + 2x_2 - t_k) - \log(3 - x_1 - x_2) - \log(-1 + x_1) - \log(-1 + x_2)
 \tag{5}$$

el cual esta listo para ser resuelto con un método no lineal, en nuestro ejemplo se ha utilizado el método de Newton para la obtención de la secuencia de centros analíticos. Y a los parámetros B y S se les asignó los siguientes valores: $B = 0.0005$, $S = 5$ y un grado de error de 0.0001 . Las iteraciones obtenidas y sus resultados son:

Centro	t	x_1	x_2	f
1	4.5929	1.1819	1.7018	2.9495
2	4.8873	1.0555	1.9159	12.6347
3	4.9680	1.0160	1.9760	21.5443
4	4.9907	1.0046	1.9930	30.2498
5	4.9972	1.0014	1.9979	38.6643
6	4.9991	1.0005	1.9993	46.2839
7	4.9996	1.0002	1.9997	52.0692
8	4.9997	1.0001	1.9998	55.2712

de donde observamos que $x_1 = 1.0001 \approx 1$, $x_2 = 1.9998 \approx 2$ y que $f = 55.2712$, $t = 4.9997 \approx 5$.

Con este ejemplo se muestra como un problema de programación lineal con restricciones puede transformarse hacia un conjunto de desigualdades lineales, formando estas una región convexa, así aplicando el método de los centros analíticos a este conjunto de desigualdades se forma una función no lineal, que al minimizarla se obtiene un punto que corresponde al centro de la región convexa (el centro analítico), momento en cual es actualizado el parámetro t , que representa una penalización, volviendo a calcular un nuevo centro analítico en la nueva región convexa. Se continua iterando hasta que el parámetro t tiene una tolerancia de error satisfactoria ($abs[t_{k-1} - t_k]$).

Por último, es importante mencionar que en este caso de maximización el parámetro B se resto en los pasos intermedios de (2) a (3). En un caso de minimización este parámetro es sumado.

3.- CENTROS ANALÍTICOS Vs SIMPLEX.

3.1.- ACERCA DE LOS PROGRAMAS AUXILIARES.

Hemos llegado al punto donde realizaremos el contraste del método de los centros analíticos y el método Simplex. Para realizar esta labor nos apoyaremos en la utilización de programas computacionales, un programa para cada método.

En lo referente al método Simplex hay diversidad de programas con diferentes estructuras de uso, determinar cual es el mejor de ellos requiere de su obtención, entre otras cosas, lo cual resulta bastante caro de realizar. Para nuestros fines utilizaremos un paquete, que si bien seguramente no es el mejor, nos brinda la confianza de su viabilidad y eficacia de uso. Este paquete nos presenta un amplio menú de opciones en técnicas de IO y otras áreas, tales como cadenas de Markov, transbordo, asignación, simulación, el método Simplex, entre otros. Este paquete es comúnmente conocido como W C B Educational and professional software, y ha sido desarrollado por Sang M. Lee (University of Nebraska - Lincoln), y Jung P. Shim (Mississippi state university). La forma de utilización del paquete queda fuera de nuestros fines, aunque mencionaremos que esta es clara y sencilla. (Más adelante las aplicaciones del método Simplex se realizarán en la hoja de cálculo Excel 5.2 de Microsoft).

Ahora bien, en relación al método de los centros analíticos, tenemos que si la información pertinente al método es escasa, resulta ser aún más difícil localizar algún paquete que nos proporcione el algoritmo ya computarizado, por ende, y como parte de nuestro trabajo de investigación, se desarrolló un programa en lenguaje Pascal. Dicho programa tiene las siguientes características internas convenientes de mencionar:

El programa desarrollado ha sido denominado como "centro", dicho programa contiene en su interior, transparente al usuario, los códigos concernientes a la metodología de programación no lineal en los que se apoyara el método de los centros analíticos.

En lo que corresponde a la programación no lineal univariable sin restricciones se optó por la utilización de la relación:

$$\lambda^k = - \frac{(\nabla f(x^k))^T s^k}{(s^k)^T H(x^k) s^k}$$

que fue revisada en el capítulo uno. En lo que corresponde la optimización no lineal multivariable sin restricciones, el programa "centro" ofrece la elección entre dos alternativas posibles: método del Gradiente y el método de Newton.

La inclinación por la utilización de estos conceptos en nuestro programa obedece pruebas realizadas contemplando a las otras metodologías restantes tratadas en el capítulo uno. Así tenemos que la relación λ^k ofrece una eficacia que en el peor de los casos es igual al método univariable en cuestión, a pesar de tener la desventaja de utilizar al Hessiano en su aplicación. Con esta base se optó por su utilización en nuestro programa. Por la parte de la optimización multivariable, se observó que, a excepción del método de Newton, las metodologías que hacen uso de la inversa del Hessiano presentaban frecuentes problemas en la obtención de esta, por lo cual se optó por contemplar al método del gradiente (que no requiere a la inversa de Hessiano), y al método de Newton (que en casos "raros" presenta problemas con la inversa del Hessiano).

Por otra parte, es prudente mencionar que las constantes que necesita el método de los centros analíticos se establecieron como sigue: $B = 0.0005$, pues de esta manera se garantiza una aproximación bastante grande a la solución exacta del problema, $S = 5$, pues se observó que este valor es el que ofrece en la mayoría de los casos una convergencia más rápida hacia el punto óptimo, al hacer menor este parámetro el número de iteraciones necesarias para llegar a la solución era más grande, mientras que un numero mayor a 5 originaba frecuentemente la salida, en algún momento, de la región de factibilidad del problema.

Por último, el programa centro se realizó en base a la función barrera:

$$\Psi(x) = \begin{cases} -\sum \ln(b_i - a_i^t x) & \text{si } x \text{ es factible} \\ \infty & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

originando la optimización de: $\min f_t(x) = -S \ln(f(x) - t_0) - \sum \ln(b_i - g_i(x))$, con $i = 1, 2, 3, \dots, m$; y $S \geq 1$.

Este concepto fue elegido ya que representa una forma fácil de llevar a una estructura cíclica dentro de un programa computacional, mostrando al mismo tiempo eficiencia en su aplicación.

Para revisar otro detalles acerca del programa centro refiérase al manual y listado del mismo ubicados en el apéndice.

3.2.- CONSIDERACIONES DE EVALUACIÓN.

Existen diversas personalidades en el mundo de la investigación de operaciones que dedican buena parte de su tiempo al estudio y análisis de diversos algoritmos. Estos estudios son más abundantes en el campo de la programación no lineal, de tal manera que se cuenta con varias funciones "especiales" que tienen la finalidad de meter en problemas al algoritmo que se tenga a prueba. Esta es una de las razones por la cual estos análisis logran tener un criterio más o menos equilibrado y uniforme independiente del investigador que realice el estudio.

Sin embargo, si visualizamos la situación en la programación lineal, veremos que la panorámica es diferente. Si bien es cierto que el método Simplex cuenta con características que lo hacen un algoritmo extraordinariamente sencillo y eficiente, y además representa una poderosa herramienta de análisis post óptimo, también hay que tener en cuenta que los estudios realizados en relación con algoritmos "competidores" han sido un tanto vagos y desequilibrados (con esto no se entienda que al Simplex se le ayuda en dichos estudios), puesto que las evaluaciones han sido regularmente bajo circunstancias que pueden, o no, ser iguales a ambos algoritmos.

Un ejemplo de esto lo es la evaluación con respecto al algoritmo de Karmarkar, quizás la más trascendente en los últimos años.

El nivel de vagancia y desequilibrio que se ha señalado se debe principalmente al hecho de que los planteamientos prueba en las evaluaciones suelen no ser el mismo para cada método. Así, retomando el ejemplo de Karmarkar, en un principio se aseguró que este era mucho más eficiente al Simplex, sin embargo, los resultados de otros investigadores mostraban lo contrario, ¿? Posteriormente se hizo un estudio mas "serio" del cual los resultados obtenidos continuaban apoyando la idea de una "superioridad al Simplex, pero las opiniones aún estaban en controversia. No es, sino, hasta hace poco que las opiniones se empiezan a uniformar, inclinándose por la mayor eficiencia del algoritmo de karamarkar, al menos en problemas masivos. Lo importante de todo esto, es señalar que los problemas con los cuales se llevaron a cabo los estudios para uno y otro método eran de dimensiones "similares", en otras palabras no eran circunstancias iguales las de ambos métodos sino "similares". Y tomar en cuenta el número de iteraciones y el tiempo maquina bajo condiciones diferentes puede ser visualizado como una deficiencia o ambigüedad de evaluación.

Esto es uno de los puntos que cuidaremos en la presente evaluación de algoritmos, en la cual también contemplaremos el número de iteraciones y tiempo maquina requerido por cada algoritmo para llegar a la solución adecuada al problema. Estas consideraciones serán tomadas, principalmente, en la aplicación de

los métodos sobre problemas que tengan dimensiones más grandes de lo común en los libros de texto. En los casos donde los algoritmos se prueben con problemas de características "especiales" tendrá más relevancia las observaciones sobre comportamiento que tenga el método ante tales problemas, y poder generalizar dicho comportamiento para problemas de diferentes dimensiones pero con las mismas características. De esta forma, tenemos los siguientes puntos a tratar en la evaluación:

Aplicación de los métodos considerando:

- Preparación e inicio.
- Comportamiento bajo situaciones especiales:
 - Función objetivo no acotada,
 - Restricciones \geq , lado derecho negativo y problemas de minimización,
 - Ciclaje o degeneración,
 - Sin región de factibilidad,
 - Soluciones óptimas múltiples,
 - Variables que pueden ser negativas.
- Problemas mayores.
- Apoyo en el análisis de sensibilidad.

Estos son los puntos que se evaluarán para determinar nuestra posición final respecto a la factibilidad del uso del método de los centros analíticos.

3.3.- CONTRASTE DE MÉTODOS.

3.3.1.- PREPARACIÓN E INICIO.

Recordemos los planteamientos "estándar" sobre los cuales se apoyan nuestros algoritmos para iniciar el proceso de búsqueda:

planteamiento caso Simplex	
forma	opt $Z=Cx$
s.a.	$Ax \leq b$
	$x \geq 0$

planteamiento caso Centros Analíticos	
forma	opt $Z=Cx$
s.a.	$Ax \leq b$
	$x \geq 0$

en apariencia parece tratarse del planteamientos iguales, sin embargo no lo son, en el caso del Simplex su planteamiento lleva implícitamente el uso de variables de holgura y/o de exceso, del mismo modo, el posible uso de variables artificiales. Y a través del empleo de estos conceptos poder llegar a su forma equivalente (mostrada arriba).

En el caso del método de los centros es totalmente posible evitar el uso de estas variables "sobrantes" (sin embargo, esto es una ventaja parcial, de la cual hablaremos más adelante). Por ello podríamos decir que resulta ser más cómodo en este sentido, ya que a pesar de que en la actualidad son los programas computacionales los que realizan la adecuación del problema al método Simplex, siempre resulta benéfico hacer uso de la menor cantidad posible de la memoria de la computadora, y este aspecto es superado por el método de los centros, la no requerir de las variables auxiliares.

A pesar de lo anterior el método Simplex nos ofrece una ventaja que puede subsanar los "inconvenientes" por el uso de las variables auxiliares. Esta ventaja está dada por la propiedad de proporcionar una solución factible inicial (recordemos que dicha solución inicial está dada precisamente en términos de las variables auxiliares), mientras que en el caso de los centros analíticos debemos emplear un tiempo extra de planteamiento para definir nuestro punto de inicio, el cual debe pertenecer al interior de la región de factibilidad. Quizás este detalle parezca pequeño si solo tenemos en cuenta problemas pequeños, en donde el punto inicial sería fácilmente encontrado, pero si consideramos un problema de dimensiones considerables entonces la localización de dicho punto llevará un mayor tiempo.

Pongamos el siguiente esbozo como ejemplo:

$$\begin{array}{ll} \max & Z = 3X_1 + 5X_2 \\ \text{s.a.} & \\ & X_1 \leq 4 \\ & X_2 \leq 12 \\ & 3X_1 + 2X_2 \leq 18 \\ & X_j \leq 0 \text{ para } j=1,2. \end{array}$$

planteamiento final Simplex					
max	Z =	3X ₁	+ 5X ₂		
s.a.					
X ₁	+	X ₃			= 4
		X ₂	+	X ₄	= 12
3X ₁	+	2X ₂		X ₅	= 18
				X _j	<= 0 para j=1,....,5.
punto inicial: X ₃ = 4, X ₄ = 12, X ₅ = 18					

planteamiento final centros analíticos					
max	Z =	3X ₁	+ 5X ₂		
s.a.					
X ₁					<= 4
		X ₂			<= 12
3X ₁	+	2X ₂			<= 18
				X _j	<= 0 para j=1,....,2.
punto inicial : X ₁ = 0.1 X ₂ = 0.1					

Nótese que el método de los centros no propone un punto inicial por sí mismo, mientras que en el método Simplex el punto inicial es propuesto por el mismo método.

En resumen tenemos, en este primer punto, que el método de los centros analíticos tiene la ventaja de evadir el uso de variables auxiliares y así mejorar las condiciones a nivel computadora, sin embargo, tiene la desventaja de requerir un mayor tiempo de planteamiento para localizar un punto en el interior de la zona factible.

En los siguientes puntos presentamos una visualización del comportamiento de ambos métodos en condiciones que en algunos casos tiene una ocurrencia escasa (no por ello debemos dejar de contemplarla), y otros casos nos brinda información acerca del planteamiento del problema (como una posible redundancia en las restricciones contempladas).

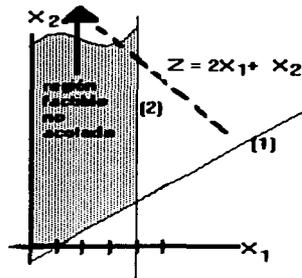
3.3.2.- COMPORTAMIENTO BAJO SITUACIONES ESPECIALES.

3.3.2.1.- FUNCIÓN OBJETIVO NO ACOTADA.

Consideremos el siguiente problema (problema E1 en apéndice):

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = 2X_1 + X_2 \\ \text{s.a.} \quad & X_1 - X_2 \leq 10 \\ & 2X_1 \leq 40 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

si observamos el planteamiento en forma gráfica tenemos:



es fácil observar que el valor de la función objetivo puede crecer tanto como se quiera sin violar las restricciones, así como el valor de la variable X_2 , que en su restricción es la causante de esto. Cuando nos encontramos ante situaciones similares la conclusión inmediata es que nuestro planteamiento tiene algún error que debe ser corregido.

básica	X_1	X_2	X_3	X_4	solución
Z	-2	1	0	0	0
X_3	1	-1	1	0	10
X_4	2	0	0	1	40

La reacción del Simplex ante esta situación es inmediata, si somos lo suficientemente observadores. Para reconocer este tipo de errores hay que tener en cuenta que "si en cualquier iteración los coeficientes de las restricciones de un variable *no básica* son no positivos, entonces el espacio de soluciones no está acotado en esa dirección. Además, si el coeficiente de la función objetivo de esa variable es negativo en el caso de la maximización o positivo en el caso de la minimización, entonces el valor de la función objetivo tampoco es acotado"¹.

Hay que considerar que en problemas de muchas variables y restricciones no es tan fácil darse cuenta de estos detalles a simple vista, así que en el caso de pasar desapercibidos el método Simplex, por un lado,

¹ Investigación de operaciones 2ª edición, Hamdy A. Taha, Ed. Alfaomega, pag 98.

tendrá que realizar las iteraciones necesarias hasta darse cuenta que ya no es posible continuar, es decir, de que una variable no básica, por regla, debe entrar, sin embargo su entrada no es posible ya que sus coeficientes son no positivos, dado este fenómeno se determina que la solución no esta acotada. Así que es de esperarse que entre más grande sea el problema más tiempo y posiblemente más iteraciones sean necesarias para llegar a tal conclusión.

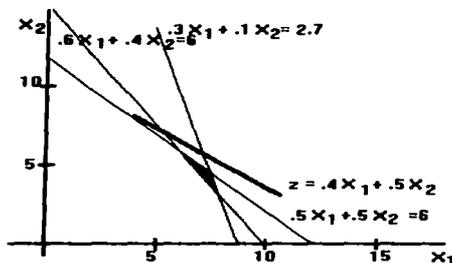
En el caso del método de los centros, el método se percata en la primera iteración independientemente de la grandeza del problema. Esto se debe a que el método busca determinar el centro de la región factible, y al no tener bien acotada dicha región resuelve que el tamaño de paso (dentro del algoritmo no lineal) es demasiado grande, infinito, ya que se produce una división entre cero. De esta forma requiere solo una iteración para concluir que el problema tiene una región factible no acotada.

3.3.2.2.- RESTRICCIONES (\geq), LADO DERECHO NEGATIVO Y PROBLEMAS DE MINIMIZACIÓN.

En los casos de restricciones (\geq) y lado derecho negativo son eventos que tienen un manejo similar. Para ver esto supongamos el siguiente problema (problema E2 en apéndice):

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 0.4 x_1 + 0.5 x_2 \\ \text{s.a.} \quad & 0.3 x_1 + 0.1 x_2 \leq 2.7 \\ & 0.5 x_1 + 0.5 x_2 \leq 6 \\ & 0.6 x_1 + 0.4 x_2 \geq 6 \end{aligned}$$

su gráfica es:



Nuestro punto de interés se encuentra en la tercera restricción. Si seguimos el método Simplex en forma detallada para dicha restricción, tenemos que tal restricción pasa en primera instancia a la forma:

$$0.6 x_1 + 0.4 x_2 - x_5 = 6$$

en este punto se le añadió la variable de exceso x_5 , (considerando las variables necesarias para las otras restricciones), luego entonces se añade la variable artificial :

$$0.6 x_1 + 0.4 x_2 - x_5 + x_6 = -6$$

de esta forma x_6 es la variable básica inicial ($x_6 = 6$). Con esto, y considerando la inserción de las variables de holgura en las otras restricciones, el método Simplex esta listo para iniciar el proceso de búsqueda.

Por el lado del método de los centros, los requerimientos para ajustar la restricción tres son menores, ya que el método solo requiere del cambio de sentido de la desigualdad, de tal forma que la restricción queda como:

$$- 0.6 x_1 - 0.4 x_2 \leq - 6$$

evitando con ello el uso de dos variables "auxiliares" : var. de exceso y var. artificial.

Independientemente del enfoque utilizado por los métodos, una optimización que incluya restricciones del tipo ($> =$) no impedirá la obtención de la respuesta adecuada por parte del método, sin embargo es meritorio señalar que el método de los centros, en este sentido, tiende a lograr optimizar los recursos de la computadora al evitar la inserción de dos variables por cada restricción de este tipo.

Como último comentario al respecto, tenemos que la solución al problema ejemplo es: $x_1 = 6$ y $x_2 = 6$, con $z = 5.4$, (si desea puede consultar las corridas en el apéndice).

Ahora pensemos en una restricción con disponibilidad negativa del recurso. Consideremos un problema "X" de PL, el cual tiene entre sus restricciones la siguiente:

$$5 x_1 + 2 x_2 \leq - 30$$

esta situación cae en el caso que hemos visto ya que su forma equivalente es: $-5 x_1 + -2 x_2 \geq 30$. Lo que requiere del tratamiento ya descrito: el Simplex requerirá de dos variables "auxiliares" y los centros analíticos solo invertirá el sentido de la desigualdad.

Si la restricción tiene la forma: $5 x_1 + 2 x_2 \geq - 30$

entonces, su equivalente es: $-5 x_1 - 2 x_2 \leq 30$, y la única diferencia radica en que el Simplex utilizará sólo una variable, la variable de holgura, y los centros analíticos, no tendrán mayor problema.

Por último, consideramos el caso de una minimización de $F(x)$, en esta circunstancia ambos métodos continúan sus algoritmos con los cambios pertinentes para la minimización, o en su defecto transforman el problema en una maximización de $-F(x)$, y continúan normalmente. (recuerde que $\min F(x)$ es equivalente a $\max -F(x)$).

Así podemos decir que la naturaleza de la optimización (max o min), no representa un aspecto significativo en la ejecución de los métodos. Y, en contraste, la inclusión de una restricción del tipo (\geq), que de alguna manera absorbe el caso de una disponibilidad negativa del recurso, tiene un carácter significativo que aumenta con el tamaño del problema y la cantidad de restricciones de este tipo, debido a que por cada restricción de dicho tipo el método Simplex requerirá no solo una, sino dos variables "auxiliares", mientras que el método de los centros no se ve afectado por estas peculiaridades.

3.3.2.3.- CICLAJE O DEGENERACIÓN.

Como vimos durante el apartado dedicado al método Simplex, la ocurrencia de empates en la variable básica que entra pueden romperse en forma arbitraria, de cualquier manera se llegará a la solución óptima. Sin embargo, la presencia de un empate en la variable que sale puede llevarnos a un círculo repetitivo del método, esto debido a factores como pueden ser que todas las variables básicas llegan a cero simultáneamente a medida que se incrementa la variable básica que entra, y si una variable básica degenerada conserva su valor de cero hasta que se elige en una iteración subsecuente como la variable básica que sale, la variable básica que entra debe seguir siendo cero, puesto que no puede incrementarse sin hacer el valor de la variable básica que sale negativa, por lo tanto, el valor de z permanece sin alteración.

Para manejar este tipo de situaciones existen las reglas LEXICOGRAFICAS, las cuales, como ya se mencionó, no están incluidas en la gran mayoría de los sistemas computacionales del Simplex. Sin embargo resulta interesante observar que, a primera vista, es de esperarse que la presencia de esta clase de inconvenientes pueden ser superadas por el método de los centros analíticos.

Supongamos dos ejemplos (en la literatura de programación lineal, que tratan este tema contienen, regularmente, un problema² equivalente a los presentados a continuación):

(problema E3 en apéndice)

$$(1) \text{ Max } z = 3x_1 + 9x_2$$

s.a.

$$x_1 + 4x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_i \geq 0 \quad i=1,2.$$

(problema E4 en apéndice)

$$(2) \text{ Min } z = -3/4 x_1 + 150 x_2 - 1/50 x_3 + 6 x_4$$

s.a.

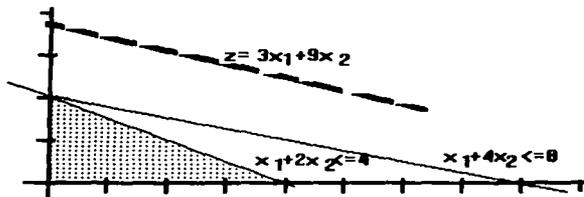
$$1/4 x_1 - 60 x_2 - 1/25 x_3 + 9 x_4 \leq 0$$

$$1/2 x_1 - 90 x_2 - 1/50 x_3 + 3 x_4 \leq 0$$

$$x_3 \leq 1$$

$$x_i \geq 0 \quad i=1, \dots, 4.$$

En ambos casos se tenemos situaciones que causan ciclaje en la aplicación del Simplex. El primero de ellos se trata de un problema bidimensional, de tal forma que podemos determinar su gráfica asociada:



puede apreciarse que la primera restricción es redundante en el modelo, ya que no tiene efecto significativo en la determinación de la región de factibilidad, y es precisamente este hecho el que ocasiona que el método Simplex pueda caer en un ciclaje en sus iteraciones. Así tenemos que la presencia de ciclajes representan alguna irregularidad en modelo planteado, pese a esta irregularidad el planteamiento puede tener una solución óptima definida.

En ocasiones el efecto de ciclaje puede tener una naturaleza temporal (hablando del Simplex), es decir, después de cierto número de iteraciones el método Simplex, logra salir del ciclo y logra corregir el camino para llegar finalmente a la solución óptima.

En la aplicación del método Simplex y del método de los centros analíticos se tiene resultados certeros a la solución del problema, quedando de la siguiente manera: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ con $z = 18$. (Véase apéndice).

Sin embargo, una corrección en la trayectoria de búsqueda no es siempre el caso, ya que existen planteamientos que logran llevar al Simplex a un ciclo infinito y por ende a la no localización del óptimo al planteamiento asociado. Este es el caso del segundo ejemplo.

² Los problemas presentados tiene la siguiente referencia: (1) Investigación de operaciones 2ª edición, Hamdy A: Taha, ED. Alfaomega, pag 93. (2) linear programming 5ª edición, Saul I. Gass, Ed. McGraw Hill book company pag 190.

En este segundo planteamiento, y hablando en términos del Simplex, caemos en un ciclo infinito que solo puede ser superado a través de la aplicación de las reglas lexicográficas. Puesto que el programa que hemos utilizado no contempla dichas reglas (y es el caso de la extensa variedad de paquetes), entonces no llegamos a resolver el problema vía la aplicación de Simplex. (Véase apéndice).

Por otro lado, como hemos mencionado, en el primer ejemplo el método de los centros analíticos, logra, al igual que el Simplex, llegar a la solución óptima. Para el segundo ejemplo, los centros analíticos vuelven a obtener la solución óptima asociada: $x_1 = 0.34318$, $x_2 = 0.00184$, $x_3 = 0.29860$, $x_4 = 0.00001$ con $z = 0.01288$. De esta forma podemos argumentar que los efectos nocivos de una situación de ciclaje logran, en el peor de los casos, que el Simplex caiga en un ciclo infinito, provocando no encontrar la solución óptima. Y que, en contraste, las mismas circunstancias no impiden que la solución sea encontrada por el método de los centros analíticos, encontrando así una ventaja de dicho método sobre el Simplex. Sin embargo, cabe mencionar que pese a que el método de los centros logra la obtención del óptimo se ve afectado en su velocidad a causa de las mismas circunstancias que hacen del Simplex un ciclo infinito.

Como un tercer ejemplo tenemos el siguiente planteamiento:

(problema E5 en apéndice)

$$(3) \quad \text{Max} \quad z = 3/4 x_1 - 20 x_2 + 1/2 x_3 - 6 x_4$$

s.a.

$$1/4 x_1 - 8 x_2 - 1 x_3 + 9 x_4 \leq 0$$

$$1/2 x_1 - 12 x_2 - .5 x_3 + 3 x_4 \leq 0$$

$$x_3 \leq 1$$

$$x_i \geq 0 \quad i=1, \dots, 4.$$

(solución asociada vía método de los centros: $x_1 = 0.99988$, $x_2 = 0.00001$, $x_3 = 0.99988$, $x_4 = 0.00001$ con $z = 1.24956$, consúltese apéndice).

notamos una gran analogía con el ejemplo dos, sin embargo las diferencias que presentan son suficientes para lograr diferencias notorias en la aplicación del método de los centros analíticos.

Recordemos que cuando hablamos de la solución óptima encontrada por este método, en realidad nos referimos a una aproximación al óptimo. Dicha aproximación varía de acuerdo al grado de error establecido para la solución del problema lineal, pero también se relaciona al error establecido para las diversas optimizaciones NO lineales que el método realiza durante su aplicación. Así tenemos dos factores que "degradan" la solución encontrada, ambas causas están muy relacionadas. Y es precisamente en los grados de error donde el método se ve afectado por las circunstancias relacionadas con el ciclaje en el Simplex. Esto es debido a que bajo tales circunstancias la función NO lineal asociada al problema lineal obtiene una naturaleza de valles de índole especial en su función, tales valles deben ser muy marcados, de tal forma que hacen que la optimización NO lineal sea sumamente lenta si manejamos un grado de error superior a 0.1, y con ello la optimización en general se ve afectada.

Para acelerar el procedimiento se requiere de aumentar el grado de error no lineal al menos a 0.2, con ello logramos rescatar la rapidez del método, pero como consecuencia perderemos precisión en la solución óptima. Sin embargo, este último inconveniente se ve solventado al bajar el grado de error NO lineal después de las primeras iteraciones³ a un nivel requerido que bien puede estar mas allá de 0.001. Con esta consideraciones podemos estar seguros de un desempeño adecuado del método de los centros no tan solo en situaciones de ciclaje, sino en bajo cualquier situación en general.

³ El número adecuado de iteraciones dependerá de las dimensiones del problema.

3.3.2.4.- SIN REGIÓN DE FACTIBILIDAD.

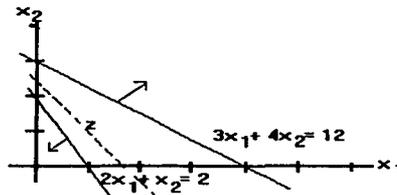
Puede ocurrir que el planteamiento de programación lineal no asocie ninguna solución, ya sea por que tengamos un error en el planteamiento o por que así es la naturaleza de nuestro problema. Indistinto a la causa que provoque un problema sin soluciones, la irregularidad causada por ello es detectada por el método Simplex.

En primer lugar notemos que las restricciones no generan una región de factibilidad, (algo que es fácilmente visible en dos dimensiones). Esta peculiaridad normalmente solo puede ocurrir cuando es necesario la intervención de variables artificiales para generar una solución factible inicial. Como se mencionó durante el capítulo dos, si una (o más de una), variable artificial tiene un valor mayor de cero en la solución óptima asociada (método de la M grande), o si el óptimo obtenido en la primera fase es positivo (método de las dos fases), entonces concluimos que el problema original no tiene solución. Es decir, no contiene una región de factibilidad.

Tomemos en cuenta el siguiente ejemplo (problema E6 en apéndice):

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a. } & \\ & 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 3x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

cuya gráfica es:



podemos ver que no se cuenta con una región de soluciones factibles, de aquí podemos asegurar que al aplicar el Simplex tendremos que la variable artificial aplicada para la segunda restricción mantendrá un valor positivo. (Véase el apéndice).

Hemos visto que el Simplex echa mano de las variables artificiales para resolver este tipo de inconvenientes, la cuestión es ver que ocurre con el método de los centros analíticos bajo las mismas circunstancias.

En este sentido tenemos que en el caso de la inexistencia de una región de factibilidad el método de los centros ni siquiera empieza a iterar, ya que este requiere de un punto inicial que se encuentre dentro de la región factible, así que al no existir esta, entonces tampoco será posible determinar el punto inicial requerido por lo cual el método no llega a aplicarse.

3.3.2.5.- SOLUCIONES OPTIMAS MÚLTIPLES.

Como hemos visto puede ocurrir que nuestro planteamiento no tenga solución alguna, pero también existen casos en los que se nos presenta la situación del otro polo, es decir, que nuestro problema no tan solo tenga una solución óptima sino que asocie múltiples soluciones óptimas. Bajo estas situaciones en realidad estamos hablando de una infinidad de soluciones que son óptimas por el hecho que todas ellas generan el valor óptimo en nuestra función objetivo, el cual continua siendo un valor único.

Cuando ocurre una situación de infinidad de soluciones, podemos asegurar que nuestra función objetivo es paralela a la restricción que delimita el valor óptimo de nuestra función objetivo. En dos dimensiones estamos hablando de líneas paralelas, en tres dimensiones nos referimos a polígonos planos, en una dimensión mayor es difícil realizar la analogía sin embargo aun en dimensiones mayores podemos continuar conservado la idea de que la función objetivo es paralela a la restricción que la delimita.

Por facilidad consideremos un ejemplo bidimensional (problema E7 en apéndice):

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 2x_1 + 4x_2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

cuya gráfica es:



Hemos señalado en el capítulo anterior que las soluciones las encontraremos en los puntos esquina de la región de factibilidad, y por ende la solución óptima debe encontrarse en uno de estos puntos. Y así es, sin embargo bajo la situación de un paralelismo de la función objetivo la solución óptima la podemos encontrar en más de un punto esquina.

Recordemos que el método Simplex localiza al óptimo a través de viajar por los puntos esquina, así al encontrar el óptimo el nivel de las variables no básicas es mayor a cero, en un caso "normal". En la situación de múltiples soluciones se identifica otro punto óptimo en la tabla del Simplex a través de los coeficientes de las variables no básicas, si estos, en el momento de encontrar el óptimo, tienen un coeficiente igual a cero, entonces nos indican que pueden entrar alterando el nivel de las variables básicas pero manteniendo el nivel óptimo en la función objetivo.

De esta forma podemos seguir iterando después de encontrar el óptimo, con la intención de hallar los otros puntos óptimos que nos auxilien a determinar una función asociada con la infinidad de soluciones del problema.

En nuestro ejemplo, como es bidimensional, es una recta la que determina las múltiples soluciones, y esta recta es dada por los punto $P1 = (x_1, x_2) = (0, 2.5)$ y $P2 = (x_1, x_2) = (3, 1)$ con $z = 10$. Dichos puntos son los encontrados por el método Simplex.

Bajo las mismas circunstancias, ¿cual es la reacción del método de los centros analíticos?

Es de nuestro conocimiento que la solución de optima de todo problema se localiza en algún punto esquina de la región de soluciones factibles. Por otro lado sabemos que el método de los centros realiza una secuencia de aproximación hacia el punto esquina que representa la solución optima al problema. De tal suerte que cuando el problema dispone de una infinidad de soluciones optimas, y un cierto número de puntos esquina representativos de soluciones optimas, entonces el método de los centros tiende, o se aproxima, hacia el centro del plano N-dimensional que esta definido por la restricción que esta paralela a la función objetivo del problema en cuestión.

Es por ello que la solución arrojada, para el ejemplo, por el método de los centros es: $(x_1, x_2) = (1.43, 1.78)$ con $z = 9.999$ (con un error de 0.0001), lo cual tiende hacia $(x_1, x_2) = (1.5, 1.75)$ y $z = 10$, en relación al grado de error que manejemos.

Tomando en cuenta que el método de los centros analíticos, bajo las circunstancias de múltiples soluciones, se aproximará al punto medio del plano que defina a la infinidad de soluciones óptimas, podemos entonces argumentar que la solución aportada quedaría incompleta, ya que seguramente no nos percatáramos de que nos encontramos en la vecindad de un punto que no es un punto esquina de la región factible, y por lo tanto no estaremos en posición de aprovechar las ventajas que pueden ofrecernos las otras soluciones optimas.

Con esta visión, el método Simplex representa una gran ventaja bajo estas circunstancias ya que nos localiza los punto óptimos (que a la vez son punto esquina), de tal manera que podemos determinar una relación que nos enlace a todas las soluciones optimas, y así tener la opción de elegir la que mejor se adecue a nuestras necesidades, sin afectar por ello el nivel óptimo de la función objetivo.

3.3.2.6.- VARIABLES QUE PUEDEN SER NEGATIVAS.

En la aplicación de los métodos de nuestro interés no hemos hecho explícita una situación que resulta importante. En los planteamientos de programación lineal, es normal encontrarse con variables de decisión cuya naturaleza no presenta disparidad con el principio de no negatividad exigido por el método Simplex, sin embargo, esto no es la norma.

Existen diversidad de situaciones que se nos pueden presentar, en las cuales las variables de decisión no enlazan una condición de no negatividad en forma explícita. Veamos este tipo de circunstancias para el caso del método Simplex.

Recordemos que el método Simplex trabaja bajo la certeza de que toda variable de decisión es no negativa, es decir, $x_j \geq 0$. Empero, hay problemas que encierran variables que no necesariamente tienen que ser NO negativas. Cuando se presentan este tipo de características, se requiere de una adecuación del problema de tal forma que no presente contrariedad alguna con el principio de no negatividad.

En general estas situaciones pueden darse por variables de decisión que tengan una cota inferior definida, o bien, que no cuenten con esta, de tal forma que, en el segundo caso, la variable bien puede ser tan

negativa como positiva sin limite alguno. Vamos el primer caso (variable de decisión con cota inferior), para ello consideremos el siguiente problema (problema E8 en apéndice):

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} & \text{Max } z = 3x_1 + 5x_2 \\
 \text{s.a.} & \\
 & x_1 \leq 4 \\
 & x_2 \leq 12 \\
 & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\
 & x_1 \geq -10 \\
 & x_2 \geq 0
 \end{array}$$

la peculiaridad se encuentra dada por la cuarta restricción: $x_1 \geq -10$. La conversión de esta restricción a una de no negatividad es lograda a través de un cambio de variables apropiado. Así tenemos que:

$$x_1' = x_1 - 10$$

en donde x_1' es mayor o igual a cero.

Haciendo la sustitución de la variable en el problema original llegamos a:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} & \text{Max } z = 3x_1' + 5x_2 - 30 \\
 \text{s.a.} & \\
 & x_1' \leq 14 \\
 & x_2 \leq 12 \\
 & 3x_1' + 2x_2 \leq 48 \\
 & x_1' \geq 0 \\
 & x_2 \geq 0
 \end{array}$$

con $x_1' = x_1 - 10$. Como puede verse, a través de este cambio de variable la condición de no negatividad de la variable x_1 es pasado a x_1' , de tal forma que al obtener la solución al problema asociado con x_1' , tendremos que realizar la "convergencia" para el valor de la variable original x_1 . Es obvio que dicha "convergencia" esta determinada por la misma relación del cambio de variable: $x_1' = x_1 - 10$

Por otro lado, puede darse el caso que la variable no tenga ningún tipo de cota, así que en la solución óptima puede ser tanto negativa como positiva, en tales casos el cambio de variable esta dado por la diferencia de dos variables: x' , x'' , las cuales son no negativas. Consideremos nuevamente el ejemplo anterior pero en esta ocasión excluimos la cuarta restricción (problema E9 en apéndice):

$$\begin{array}{ll}
 \text{(b)} & \text{Max } z = 3x_1 + 5x_2 \\
 \text{s.a.} & \\
 & x_1 \leq 4 \\
 & x_2 \leq 12 \\
 & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\
 & x_2 \geq 0
 \end{array}$$

el cambio de variable que dado por: $x_1 = x_1' - x''_1$. Con ello el problema equivalente queda como:

$$\begin{aligned}
 & \text{(b) Max } z = 3x_1 - 3x''_1 + 5x_2 \\
 & \text{s.a.} \\
 & \quad x_1 - x''_1 \leq 4 \\
 & \quad \quad \quad x_2 \leq 12 \\
 & \quad 3x_1 - 3x''_1 + 2x_2 \leq 18 \\
 & \quad x_1, x''_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

con este cambio tenemos un problema con condiciones de no negatividad cumplidas y en consecuencia podemos resolverlo a través del Simplex.

Cabe mencionar que las variables x_1 y x''_1 representan la parte positiva y negativa, respectivamente, de la variable x_1 . Además, considerando que la solución óptima se encuentra en un punto esquina, entonces en el punto óptimo al menos una de estas variables (x_1 y/o x''_1) debe ser cero.

Hemos visto los detalles que implican las variables que pueden ser negativas en un problema lineal. Estos detalles son previstos por los paquetes computacionales, para el primer caso solo es necesario incluir sin modificación alguna la restricción que rompa la condición de no negatividad. Para el segundo caso es necesario hacer la conversión de variables antes de introducir los datos en el paquete computacional. Sin embargo, es de mencionarse que su solución, al requerir nuevas variables, consumirá más recursos del equipo de cómputo lo que va en detrimento de la velocidad de solución.

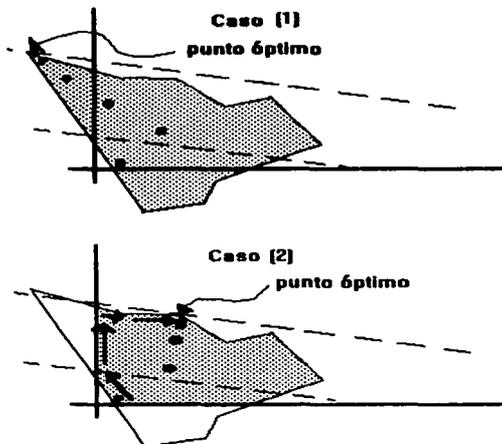
Este tipo de inconvenientes es tratado en forma muy diferente por el método de los centros analíticos. Esta vía de solución pareciese ofrecernos una ventaja, sin embargo, existe una situación por default que opaca a esta posible ventaja. Profundicemos un poco más en esto.

En realidad, en el concepto de los centros analíticos, una variable que puede ser negativa es manejada de la misma forma ya que no representa ningún inconveniente teórico para el método. De tal forma que tanto en el caso (a) como en el caso (b) no requerimos de ningún ajuste especial para iniciar a resolver nuestro problema. Sin embargo existe un detalle de tipo práctico en el método de los centros analíticos que es importante no pasar por alto.

Resulta que en el método Simplex las variables de decisión son por default de carácter positivo (de ahí los problemas teóricos con la presencia de variables de decisión con posibilidad de negatividad). En el caso de los centros analíticos la condición de no negatividad no está establecida por el método en sí, por lo cual, aun en los casos convencionales en donde se requiere que todas las variables de decisión sean no negativas, el método de los centros hallará la combinación de variables que logra el valor óptimo en la función objetivo a pesar que esta solución implique variables de decisión con valor menor a cero.

En otras palabras, y hablando en forma general, tenemos que para el método de los centros analíticos es necesario incluir explícitamente tantas restricciones "adicionales" como variables de decisión tengamos inmiscuidas en el planteamiento. De aquí puede cuestionarse el hecho de que en la mayoría de los ejemplos tratados durante el presente trabajo no incluyan entre sus restricciones explícitas aquellas relacionadas con la no negatividad de las variables de decisión. Como respuesta a la cuestión tenemos que al encontrarse el óptimo de cada uno de estos ejemplos (con una excepción), en una posición tal que las variables de decisión que tenían peso en la función objetivo se encontraban en un nivel mayor a cero, por lo cual no fue necesario incluir sus restricciones adicionales en el planteamiento del problema. Sin embargo, la solución óptima no necesariamente debe reflejar valores mayores para las variables de decisión, por lo que en un caso de aplicación normal deben incluirse explícitamente las cotas relacionadas con cada variable de decisión independientemente de que estas cotas sean, o no, negativas.

Para ilustrar gráficamente esta situación supongamos un problema de maximización que genera las siguientes regiones factibles, en el caso (1) sin tomar las condiciones de no negatividad, y en el caso (2) tomándolas en cuenta:



en el caso (1) podemos determinar gráficamente el punto óptimo, de tal forma que podemos imaginar cual sería el camino que seguirá el método de los centros, dicho camino se encuentra ilustrado por la secuencia de puntos en la gráfica. Es fácil observar que el punto (x_1, x_2) , hallado sin la consideración de condiciones de no negatividad contiene una componente negativa (x_1) y una positiva (x_2) lo cual no representa una solución idónea bajo condiciones "normales".

Por otro lado, el caso (2) contiene las formas default del método Simplex, formas en las que el método de los centros requiere de mas especificaciones en las restricciones. Es obvio pensar que normalmente la solución puede cambiar notoriamente cuando las condiciones de no negatividad son contempladas, así que el método de los centros seguirá un camino diferente al caso (1), esta vez coincidiendo con el punto hallado por el método Simplex (la trayectoria del método Simplex se ilustra con flechas, mientras que la trayectoria del método de los centros con puntos).

De esta forma insistimos en resaltar la importancia en el manejo de las condiciones de no negatividad en el momento de aplicar alguno de los métodos, especialmente el de los centros analíticos.

3.3.3.- PROBLEMAS MAYORES.

Hasta este momento hemos realizado nuestro análisis basándonos principalmente en las características que pueden tomar los problemas de programación lineal por resolver, siendo de esa forma conveniente trabajar con ejemplos pequeños (que podemos encontrar en cualquier libro que contemple el estudio del Simplex), ya que resultaría exhaustivo manejar problemas mayores cuando la comparación se basaba en ver la reacción del método ante las características del problema. Ahora bien, es lógico considerar que las reacciones observadas se mantienen vigentes independientemente de las dimensiones del problema.

A pesar de esta consideración, en nuestro análisis aun nos falta tocar un punto que es de vital consideración: la eficiencia de los métodos medida principalmente en el tiempo máquina requerido para resolver problemas.

Para analizar esta situación es obvio que requerimos de problemas de dimensiones superiores a los que hemos tratado hasta este momento, para de esa forma poder observar si alguno de los métodos presenta una mayor eficiencia en forma significativa.

La extensa mayoría de los libros de programación lineal no ofrecen ejemplos de aplicación de grandes dimensiones, de tal forma que para continuar nuestro análisis nos hemos visto obligados a la creación de problemas ejemplo, sin embargo hemos procurado que dichos ejemplos garanticen tener una región factible y por lo tanto un punto óptimo en su solución.

Antes de continuar con el análisis es necesario mencionar que la aplicación utilizada para resolver, vía Simplex, los problemas propuestos para este estudio, ha sido el "solver" proporcionado por la hoja de cálculo *excel 5.0*, el cual fue elegido a consecuencia de que el programa desarrollado por Sang M. Lee y Jung P. Shim, que se había estado utilizando, no tiene la capacidad de resolver problemas de las dimensiones que se manejan a continuación.

Hemos expresado que las reacciones observadas en ambos métodos, ante los problemas de diferentes características que se han manejado, las podemos generalizar a todo problema independientemente de sus dimensiones, por ende en esta parte del estudio nos centraremos en visualizar, el tiempo máquina (y de ser posible la cantidad de operaciones), que requiere cada método para lograr determinar una solución a los problemas que hemos establecido y que en el apéndice se muestra su estructura. Así pues, empezamos por describir el equipo empleado para tales fines:

La máquina empleada corresponde a un equipo de computo IBM procesador 486DX a 65 Mhz y 16 Mb en RAM. Estas son las características de carácter considerable. Por otra parte los tiempos son medidos de la siguiente manera: para el método de los centros analíticos se cuenta con comandos internos en el algoritmo computacional que determinan la hora de inicio y la hora de término del procesamiento. Para el método Simplex los tiempos son medidos con un cronómetro marca Casio con centésimas de segundo.

En el siguiente cuadro presentamos los detalles del estudio, basado en seis problemas de diferentes dimensiones y algunas características especiales. En el cuadro se detalla en primer lugar el inciso con el que nos referiremos al problema (a, b, . . .), así como las dimensiones del mismo, empezando: por el número de variables y continuando con el número de restricciones (es decir, $15 \times 20 = 15$ variables con 20 restricciones), se mencionan las características de consideración en los problemas, y por último se plasma el tiempo que ha requerido cada método para dar solución a cada uno de los cuatro planteamientos. (El tiempo se expresa en el siguiente formato hh:mm:ss:cc.).

Dimensiones	Características Particulares	Tiempo de Respuesta e Iteraciones	
		Simplex	Centros Analíticos
(a) 15x20	Maximización, todas las restricciones de tipo \leq . Cumple condición de no negatividad para todas las variables	00:00:05:56	00:00:08:01
(b) 20x30	Mínimización, con una restricción de tipo \geq . Cumple condición de no negatividad para todas las variables	00:00:08:78	00:45:58:25
(c) 40x50	Maximización, cinco restricciones del tipo \geq . Cumple condición de no negatividad para todas las variables	00:00:27:68	10:58:31:07
(d) 40x60	Maximización, tres restricciones del tipo \geq . Cumple condición de no negatividad para todas las variables	00:00:39:25	32:36:48:17
(e) 50x70	Maximización, tres restricciones del tipo \geq . Cumple condición de no negatividad para todas las variables	00:00:47:51	59:06:17:38
(f) 50x70	Maximización, tres restricciones del tipo \geq . Condición de no negatividad no requerida para todas las variables	00:01:31:25	36:09:07:32

Es fácilmente observable la supremacía del método Simplex, podemos deducir sin riesgo a errar que a medida que aumente las dimensiones del problema la eficiencia y efectividad del método Simplex sobre el método de los centros será más aplastante.

Esta consideración es la que nos define prácticamente nuestra posición en relación a la factibilidad de empleo del método de los centros para dar solución a problemas de programación lineal.

Desde los inicios de la presente tesina teníamos presente que en términos de tiempos de respuesta, y considerando problemas pequeños, el método de los centros es superado por el método Simplex, sin embargo, tal hecho no era tan obvio si pensáramos en problemas de mayor índole (al menos no para mí). En este momento, tenemos las bases, no para declarar la supremacía del método de los centros, sino, para comprender las características intrínsecas en el método que lo hacen lento e ineficiente ante el método Simplex.

Observemos que método de los centros requiere de una optimización no lineal (que llamaremos optimización inferior), en cada iteración que nos da un punto con un mejor valor en la función objetivo, (a estas iteraciones la llamaremos optimización superior). El número de operaciones requeridas para resolver tal optimización es tan exhaustivo que logran hacer del método un algoritmo lento. En relación con ello, el grado de error que manejemos tendrá un efecto que ira en detrimento al algoritmo ya que si se maneja un grado de error cercano a cero lograremos hacer aún más lento al método. De tal suerte que podemos enunciar que si el grado de error (en la optimización inferior) es cercano a cero, entonces el método de los centros requerirá de un gran número de iteraciones en cada optimización anterior, pero el número de iteraciones en la optimización superior será una cantidad pequeña. Si por el contrario manejamos un error bajo para las optimizaciones inferiores, entonces, serán pocas las iteraciones requeridas en cada optimización inferior, pero muchas iteraciones se requerirán en la optimización superior a fin de llegar al punto óptimo.

Con esto en mente es importante señalar que el grado de error usado por el método de los centros, durante nuestro estudio, fue de carácter variable, en el caso de la optimización inferior, así en las primeras iteraciones se usa un grado de error alejado de cero (en la primera iteración al grado de error es igual a 10), para posteriormente ir disminuyendo al transcurrir de las iteraciones de la optimización superior. Con ello se

logro disminuir el tiempo de respuesta del método, sin embargo, pese a esta adecuación el método continúa siendo lento en exceso.

Con la intención de detallar en los ajustes que se realizaron en el algoritmo computacional del método de los centros analíticos se mencionan a continuación los rasgos sobresalientes. El grado de error usado en la optimización superior fue de 0.0001. El grado de error usado en la primera optimización inferior es de 10.00, para finalmente ser reducido a un error de 0.0001, la disminución en el error se realizaba en cada iteración de la optimización superior con base a la siguiente relación: $|X_i - X_{i-1}| / 2$, es decir, el error en la optimización inferior es igual a la mitad del error relacionado a la iteración anterior de la optimización superior. Por otra parte el valor en los parámetros S y B fue de 5 y 0.0005, respectivamente. Por último, se verificó que una mala determinación en el valor de estos parámetros hará que el método de los centros se salga de la región de factibilidad para posteriormente causar un error en la aplicación del mismo.

Ahora bien, no olvidemos que finalmente el método de los centros llega a una solución correcta y acorde a la solución aportada por el método Simplex. Dicha solución es aproximada y respeta el margen de error que se maneje, en otras palabras, pese a las desventajas en el tiempo de respuesta el método de los centros obtiene una respuesta acertada al problema planteado.

3.3.4.- APOYO EN EL ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD.

En este último punto de evaluación, al igual que el anterior, la superioridad del método Simplex es enorme, aunque este hecho era desde un inicio obvio, aun no teníamos al dato de la supremacía del método Simplex en lo referente a los tiempos de respuesta. Así que con los datos actuales solo nos resta reafirmar la inclinación por el método Simplex a través de la siguiente reflexión:

El método Simplex al tiempo que genera la solución óptima genera también los datos pertinentes para el análisis de sensibilidad, datos que se encuentran en la tabla de la última iteración realizada. En el caso de los centros analíticos obtenemos en la última iteración sólo una aproximación a la solución óptima y de querer obtener los datos para realizar un análisis de sensibilidad, tendríamos que usar la solución obtenida y en combinación con el método Simplex generar la tabla final del método Simplex, y así poder estar en posición de realizar un análisis de sensibilidad. Esto último no solo crearía una dependencia del método de los centros con el método Simplex, sino que además hace que se requiera un tiempo adicional, al requerido para dar solución al problema, lo que pone en un nivel más bajo de eficiencia al método de los centros ante el Simplex.

CONCLUSIONES.

Al iniciar la presente investigación se presupuso que las diferencias en la eficiencia entre método Simplex y el método de los Centros Analíticos no serían de un carácter abrumador. De hecho en las primeras etapas del tercer capítulo esta suposición se mantenía como certera, ya que el método de los centros analíticos mostró características que justificaban el interés en él como un algoritmo competente en comparación al método Simplex.

Antes de describir la conclusión primordial de este trabajo resumamos los resultados arrojados por cada una de las evaluaciones consideradas:

Se observó que si bien el método de los centros analíticos evade el uso de las variables "auxiliares", requeridas por el método Simplex, no proporciona un punto inicial para iniciar la aplicación del método, por otra parte requiere de la especificación de las restricciones de no negatividad para las variables de decisión .

Ahora bien, en los casos en donde se presenta una función objetivo no acotada, el método de los centros se muestra eficaz en reportar la anomalía, de una región factible no acotada debidamente, durante la primera iteración. Por el lado del método Simplex, este logra detectar la anomalía en un número de iteraciones que resulta ser variable, sin embargo, provee información para corregir los errores del planteamiento que provocan la anomalía.

En situaciones donde algunas restricciones pueden ser del tipo \geq , o en donde la disponibilidad del recurso resulta ser de carácter negativo (que son en realidad situaciones equivalentes); el método de los centros analíticos no se ve afectado por tales peculiaridades, por lo que se tiene un manejo más sencillo del problema, puesto que el Simplex se ve obligado a incluir variables de exceso, con lo cual el problema aumenta en sus dimensiones.

Por otra parte, en problemas que generan ciclaje o degeneración, el método de los centros evita los posibles ciclajes, y logra, sin excepción, obtener la solución al problema, aunque su velocidad de respuesta se ve afectada. En el caso de los centros analíticos podemos caer en un ciclaje que puede llegar a ser infinito, y por ende no llegamos a obtener la solución a nuestro problema.

Cuando el planteamiento no asocia una región de factibilidad, el método de los centros al requerir que se le proporcione un punto inicial, que se encuentre dentro de la región factible, no empieza a iterar, pues no es posible encontrar un punto inicial adecuado. El tratamiento brindado por el Simplex es bastante diferente, este, apoyado en el uso de las variables artificiales, determina si existe o no una región factible, aunque para ello se requiere de cierto número de iteraciones.

En ocasiones, el planteamiento asocia múltiples soluciones, en estos casos, el método de los centros sólo logra determinar una solución, la cual se encuentra en el centro del espacio de las múltiples soluciones. En contraste, el método Simplex localiza los puntos esquinas que representan soluciones óptimas, y de esta manera estamos en posición de determinar un sin número de soluciones óptimas.

Cuando se presentan variables que pueden ser negativas, se observó que esto no tiene efecto notorio en la aplicación del método de los centros. Por otro lado, en el caso del Simplex, se requiere usar cambios de variable para lograr dar con la solución del problema, lo que repercute en el aumento de tamaño del planteamiento.

La aplicación de los métodos con problemas masivos, resulta ser un rublo determinante en nuestra evaluación, más aún por la enorme disparidad observada en los tiempos de respuesta arrojados por los métodos. Pese a los ajustes efectuados en el método de los centros, este no redujo su tiempo de máquina en forma satisfactoria, así el tiempo requerido para dar solución a los problemas aumenta enormemente al aumentar las dimensiones del planteamiento, lo que provoca que entre más grande sea el problema la

superioridad en tiempo de respuesta, por parte del método Simplex, será de un carácter aplastante que no permite dudas por seleccionarlo como alternativa de solución.

Por último, al considerar el apoyo brindado por los métodos para el análisis de sensibilidad, se presenta otro motivo para establecer al método Simplex como un mejor método, ya que el apoyo para el análisis de sensibilidad es una de las características que identifican al método, y tal apoyo no puede ser obtenido en forma directa por el método de los centros analíticos.

Con estas consideraciones en mente es claro que las posibles ventajas que pueda proporcionar la aplicación del método de los centros se ven opacadas por el tiempo de procesamiento que el método requiere. De tal forma que la conclusión final de la investigación es inclinarse por el método Simplex como alternativa para la solución de problemas lineales. Dejando en claro que los inconvenientes en la aplicación del método de los centros aumenta con el tamaño del planteamiento lineal.

APÉNDICE.

PROGRAM: Linear Programming I

A3

***** INPUT DATA ENTERED *****

SIMPLEX
- PROBLEMA E1
- F. OBJ. NO ACOTADA

Max Z = 2 x 1 + 1 x 2

Subject to:

C 1 1 x 1 - 1 x 2 <= 10

C 2 2 x 1 <= 40

***** PROGRAM OUTPUT *****

Simplex tableau: Iteration 0

\Cj			2.00	1.00	0.00	0.00
Cb	Basis	Bi	x 1	x 2	s 1	s 2
0.00	s 1	10.00	1.00	-1.00	1.00	0.00
0.00	s 2	40.00	2.00	0.00	0.00	1.00
	Zj	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	Cj-Zj		2.00	1.00	0.00	0.00

Simplex tableau: Iteration 1

\Cj			2.00	1.00	0.00	0.00
Cb	Basis	Bi	x 1	x 2	s 1	s 2
2.00	x 1	10.00	1.00	-1.00	1.00	0.00
0.00	s 2	20.00	0.00	2.00	-2.00	1.00
	Zj	20.00	2.00	-2.00	2.00	0.00
	Cj-Zj		0.00	3.00	-2.00	0.00

Simplex tableau: Iteration 2

\Cj			2.00	1.00	0.00	0.00
Cb	Basis	Bi	x 1	x 2	s 1	s 2
2.00	x 1	20.00	1.00	0.00	0.00	0.50
1.00	x 2	10.00	0.00	1.00	-1.00	0.50
	Zj	50.00	2.00	1.00	-1.00	1.50
	Cj-Zj		0.00	0.00	1.00	-1.50

Unbounded solution

SIMPLEX
- PROBLEMA E1
- NO RESUELTA POR EL SIMPLEX

>>>>_____ METODO DE LOS CENTROS ANALITICOS _____<<<< A4

>>>>cheque si los datos son correctos.<<<<

Maximizar funci"n objetivo :

f(x)= +(2.000)*x[1]+(1.000)*x[2]

sujeo a:

(1)-->+(1.000)*x[1]+(-1.000)*x[2] <= 10.000

(2)-->+(2.000)*x[1]+(0.000)*x[2] <= 40.000

grado de error:0.00010000
mtodo de soluci"n: Gradiente

son los datos correctos?...(s/n)

ingrese los valores para:

x[1] = .1

x[2] = .1

valor inicial de la funcion objetivo lineal: 0.300

*****tamaço de paso infinto*****

[DR DOS] C:\AXU\TP6\CVO\TESIS\TESISDOS>

-CENTROS ANALITICOS
-PROBLEMA E1
-F. OBJ. NO ACOTADA

-CENTROS ANALITICOS
-PROBLEMA E1
-RESUELTA SATISFACTORIAMENTE

SIMPLEX
PROBLEME E2
LADDER NEG. MIN.

PROGRAM: Linear Programming I

***** INPUT DATA ENTERED *****

Max Z = .4 x 1 + .5 x 2

Subject to:

- C 1 .3 x 1 + .1 x 2 <= 2.7
- C 2 .5 x 1 + .5 x 2 <= 6
- C 3 .6 x 1 + .4 x 2 >= 6

***** PROGRAM OUTPUT *****

Simplex tableau: Iteration 0

\Cj	Basis	Bi	0.40 x 1	0.50 x 2	0.00 s 1	0.00 s 2	0.00 s 3	-9999.00 A 1
0.00	s 1	2.70	0.30	0.10	1.00	0.00	0.00	0.00
0.00	s 2	6.00	0.50	0.50	0.00	1.00	0.00	0.00
-9999.00	A 1	6.00	0.60	0.40	0.00	0.00	-1.00	1.00
Zj		-59994.00	-5999.40	-3999.60	0.00	0.00	9999.00	-9999.00
Cj-Zj			5999.80	4000.10	0.00	0.00	-9999.00	0.00

Simplex tableau: Iteration 1

\Cj	Basis	Bi	0.40 x 1	0.50 x 2	0.00 s 1	0.00 s 2	0.00 s 3	-9999.00 A 1
0.40	x 1	9.00	1.00	0.33	3.33	0.00	0.00	0.00
0.00	s 2	1.50	0.00	0.33	-1.67	1.00	0.00	0.00
-9999.00	A 1	0.60	0.00	0.20	-2.00	0.00	-1.00	1.00
Zj		-5995.80	0.40	-1999.67	19999.33	0.00	9999.00	-9999.00
Cj-Zj			0.00	2000.17	-19999.33	0.00	-9999.00	0.00

Simplex tableau: Iteration 2

\Cj	Basis	Bi	0.40 x 1	0.50 x 2	0.00 s 1	0.00 s 2	0.00 s 3	-9999.00 A 1
0.40	x 1	8.00	1.00	0.00	6.67	0.00	1.67	-1.67
0.00	s 2	0.50	0.00	0.00	1.67	1.00	1.67	-1.67
0.50	x 2	3.00	0.00	1.00	-10.00	0.00	-5.00	5.00
Zj		4.70	0.40	0.50	-2.33	0.00	-1.83	1.83
Cj-Zj			0.00	0.00	2.33	0.00	1.83	-10000.83

Simplex tableau: Iteration 3

\Cj	0.40	0.50	0.00	0.00	0.00	-9999.00
-----	------	------	------	------	------	----------

Cb	Basis	Bi	x 1	x 2	s 1	s 2	s 3	A 1
0.40	x 1	6.00	1.00	0.00	0.00	-4.00	-5.00	5.00
0.00	s 1	0.30	0.00	0.00	1.00	0.60	1.00	-1.00
0.50	x 2	6.00	0.00	1.00	0.00	6.00	5.00	-5.00
Zj		5.40	0.40	0.50	0.00	1.40	0.50	-0.50
Cj-Zj			0.00	0.00	0.00	-1.40	-0.50	-9998.50

A6

Final optimal solution

Variable	Value
x 1	6.00
s 1	0.30
x 2	6.00
Z	5.40

-SIMPLEX
-PROBLEMA E2
-LADDER, NEG. MIN.

Sensitivity Analysis

Constraint Number	Right-hand side Ranging		
	Lower Limit	Current Value	Upper Limit
1	2.40	2.70	No Limit
2	5.50	6.00	7.50
3	5.70	6.00	7.20

Variable	Contribution Rate Ranging		
	Lower Limit	Current Rate	Upper Limit
x 1*	No Limit	0.40	0.50
x 2*	0.40	0.50	No Limit

* indicates basic variable

-SIMPLEX
-PROBLEMA E2
-RESUELTO POR EL SIMPLEX

-CENTROS ANALITICOS
-PROBLEMA E2
-LAD.DER. NEG.MIN.

Maximizar funci"n objetivo :
 $f(x) = +(0.400)*x[1] + (0.500)*x[2]$
 sujeto a:
 (1)-->+(0.300)*x[1]+(0.100)*x[2] <= 2.700
 (2)-->+(0.500)*x[1]+(0.500)*x[2] <= 6.000
 (3)-->+(-0.600)*x[1]+(-0.400)*x[2] <= -6.000
 grado de error:0.00010000
 mtodo de soluci"n: Gradiente

son los datos correctos?...(s/n)

ingrese los valores para:

x[1] = 7.5

x[2] = 4.1

valor inicial de la funcion objetivo lineal: 5.050

punto optimo hallado con un error de 0.000021 (menor a 0.000100)

xopt[1] = 6.37181;

xopt[2] = 5.62799;

valor funci"n objetivo ==> 5.36272

tiempo inicio: 22:0:8:33

tiempo final : 22:0:9:54

pulse <enter>

-CENTROS ANALITICOS
-PROBLEMA E2
-RESUELTO POR LOS CENTROS.

SIMPLEX -PROBLEMA E3 -CICLO DE DEGENER.

PROGRAM: Linear Programming I

***** INPUT DATA ENTERED *****

Max Z = 3 x 1 + 9 x 2

Subject to:

C 1 1 x 1 + 4 x 2 <= 8

C 2 1 x 1 + 2 x 2 <= 4

***** PROGRAM OUTPUT *****

Simplex tableau: Iteration 0

\Cj			3.00	9.00	0.00	0.00
Cb	Basis	Bi	x 1	x 2	s 1	s 2
0.00	s 1	8.00	1.00	4.00	1.00	0.00
0.00	s 2	4.00	1.00	2.00	0.00	1.00
	Zj	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	Cj-Zj		3.00	9.00	0.00	0.00

Simplex tableau: Iteration 1

\Cj			3.00	9.00	0.00	0.00
Cb	Basis	Bi	x 1	x 2	s 1	s 2
9.00	x 2	2.00	0.25	1.00	0.25	0.00
0.00	s 2	0.00	0.50	0.00	-0.50	1.00
	Zj	18.00	2.25	9.00	2.25	0.00
	Cj-Zj		0.75	0.00	-2.25	0.00

Simplex tableau: Iteration 2

\Cj			3.00	9.00	0.00	0.00
Cb	Basis	Bi	x 1	x 2	s 1	s 2
9.00	x 2	2.00	0.00	1.00	0.50	-0.50
3.00	x 1	0.00	1.00	0.00	-1.00	2.00
	Zj	18.00	3.00	9.00	1.50	1.50
	Cj-Zj		0.00	0.00	-1.50	-1.50

Degenerate final optimal solution

Variable	Value
x 2	2.00
x 1	0.00
Z	18.00

Sensitivity Analysis

 Right-hand side Ranging

-SIMPLEX
-PROBLEMA E3
-CICLAJE O DEGENER.

Constraint Number	Lower Limit	Current Value	Upper Limit
1	4.00	8.00	8.00
2	4.00	4.00	8.00

Contribution Rate Ranging

Variable	Lower Limit	Current Rate	Upper Limit
x 1*	2.25	3.00	4.50
x 2*	6.00	9.00	12.00

* indicates basic variable

-SIMPLEX
-PROBLEMA E3
-RESUELTO POR EL SIMPLEX

CENTROS ANALITICOS
 -PROBLEMA E3
 -CICLAJE O DEGENERACION

```
>>>> METODO DE LOS CENTROS ANALITICOS <<<<<
>>>>cheque si los datos son correctos.<<<<
Maximizar funci"n objetivo :
f(x)= +( 3.000)*x[1]+( 9.000)*x[2]
sujeto a:
( 1)-->+( 1.000)*x[1]+( 4.000)*x[2] <= 8.000
( 2)-->+( 1.000)*x[1]+( 2.000)*x[2] <= 4.000
grado de error:0.00010000
mtodo de soluci"n: Gradiente
```

```
son los datos correctos?...(s/n)
ingrese los valores para:
x[1] = .1
x[2] = .1
```

```
x[2] = .1
valor inicial de la funcion objetivo lineal: 1.200
iter valor anterior valor actual error
1 1.20000 13.36426 12.16426
2 13.36426 16.42448 3.06022
3 16.42448 17.56363 1.13915
4 17.56363 17.84706 0.28343
5 17.84706 17.96049 0.11343
6 17.96049 17.98995 0.02946
7 17.98995 17.99735 0.00740
8 17.99735 17.99921 0.00185
9 17.99921 17.99967 0.00046
10 17.99967 17.99979 0.00012
11 17.99979 17.99982 0.00002
punto optimo hallado con un error de 0.000025 (menor a 0.000100)
```

```
xopt[1] = -0.00000;
xopt[2] = 1.99998;
valor funci"n objetivo ==> 17.99982
```

CENTROS ANALITICOS
 -PROBLEMA E3
 -RESULTADO POR LOS CENTROS

```
tiempo inicio: 14:15:40:39
tiempo final : 14:15:42:14
```

pulse <enter>

PROGRAM: Linear Programming I

***** INPUT DATA ENTERED *****

Max Z = - .75 x 1 + 150 x 2 - .02 x 3 + 6 x 4

Subject to:

C 1 .25 x 1 - 60 x 2 - .04 x 3 + 9 x 4 <= 0

C 2 .5 x 1 - 90 x 2 - .02 x 3 + 3 x 4 <= 0

C 3 1 x 3 <= 1

***** PROGRAM OUTPUT *****

Unbounded solution

-SIMPLEX
-PROBLEMA E4
-CICLAJE O DEGENER4

-SIMPLEX
-PROBLEMA E4
-NO RESUELTO POR EL SIMPLEX

>>>cheque si los datos son correctos.<<<<

-CENTROS AX. ALITIVOS
-PROBLEMA F4
-CICLAJE

Maximizar funci"n objetivo :
 $f(x) = +(0.750)*x[1] + (-150.000)*x[2] + (0.020)*x[3] + (-8.000)*x[4]$
 sujeto a:
 { 1-->+(0.250)*x[1]+(-60.000)*x[2]+(-0.040)*x[3]+(9.000)*x[4]
 } <= 0.000
 { 2-->+(0.500)*x[1]+(-90.000)*x[2]+(-0.020)*x[3]+(3.000)*x[4]
 } <= 0.000
 { 3-->+(0.000)*x[1]+(0.000)*x[2]+(1.000)*x[3]+(0.000)*x[4]
 } <= 1.000
 { 4-->+(-1.000)*x[1]+(0.000)*x[2]+(0.000)*x[3]+(0.000)*x[4]
 } <= 0.000
 { 5-->+(0.000)*x[1]+(-1.000)*x[2]+(0.000)*x[3]+(0.000)*x[4]
 } <= 0.000
 { 6-->+(0.000)*x[1]+(0.000)*x[2]+(-1.000)*x[3]+(0.000)*x[4]
 } <= 0.000
 { 7-->+(0.000)*x[1]+(0.000)*x[2]+(0.000)*x[3]+(-1.000)*x[4]
 } <= 0.000
 grado de error:0.00010000
 mtodo de soluci"n: Gradiente

son los datos correctos?...(s/n)

ingrese los valores para:

x[1] =

1	-15.52300	-6.28240	9.24060
2	-6.28240	-2.57932	3.70308
3	-2.57932	-0.95600	1.62332
4	-0.95600	-0.34400	0.61199
5	-0.34400	-0.12194	0.22207
6	-0.12194	-0.04326	0.07868
7	-0.04326	-0.02121	0.02205
8	-0.02121	-0.01516	0.00605
9	-0.01516	-0.01336	0.00180
10	-0.01336	-0.01301	0.00034
11	-0.01301	-0.01289	0.00012
12	-0.01289	-0.01288	0.00002

punto optimo hallado con un error de 0.000017 (menor a 0.000100)

xopt[1] = 0.34318;
 xopt[2] = 0.00184;
 xopt[3] = 0.29860;
 xopt[4] = 0.00001;
 valor funci"n objetivo ==> -0.01288

tiempo inicio: 15:38:15:66
 tiempo final : 15:38:40:70

pulse <enter>

-CENTROS AX. ALITIVOS
-PROBLEMA F4
-RESULTADO POR LOS CENTROS

PROGRAM: Linear Programming I

***** INPUT DATA ENTERED *****

Max Z = .75 x 1 - 20 x 2 + .5 x 3 - 6 x 4

Subject to:

C 1 .25 x 1 - 8 x 2 - 1 x 3 + 9 x 4 <= 0
 C 2 .5 x 1 - 12 x 2 - .5 x 3 + 3 x 4 <= 0
 C 3 1 x 3 <= 1

F1 GO F2 CHANGE F3 RERUN F4 EXIT

COMMAND ->

Please wait !! Computing is in progress.
 Initialization...

-SIMPLEX
 -PROBLEMA ES
 -NO RESULTO POR EL SIMPLEX

-SIMPLEX
 -PROBLEMA ES 1 -
 -CICTAJE.O DEGENERAI

-CENTROS ANALITICOS -PROBLEMA E5 -CICLAJE O DEGENERACION
--

>>>cheque si los datos son correctos.<<<

Maximizar funci"n objetivo :

$$f(x) = +(0.750)*x[1] + (-20.000)*x[2] + (0.500)*x[3] + (-6.000)*x[4]$$

sujeto a:
 (1)-->+(0.250)*x[1]+(-8.000)*x[2]+(-1.000)*x[3]+(9.000)*x[4]
 (<= 0.000
 (2)-->+(0.500)*x[1]+(-12.000)*x[2]+(-0.500)*x[3]+(3.000)*x[4]
 (<= 0.000
 (3)-->+(0.000)*x[1]+(0.000)*x[2]+(1.000)*x[3]+(0.000)*x[4]
 (<= 1.000
 (4)-->+(1.000)*x[1]+(0.000)*x[2]+(0.000)*x[3]+(0.000)*x[4]
 (>= 0.000
 (5)-->+(0.000)*x[1]+(1.000)*x[2]+(0.000)*x[3]+(0.000)*x[4]
 (>= 0.000
 (6)-->+(0.000)*x[1]+(0.000)*x[2]+(1.000)*x[3]+(0.000)*x[4]
 (>= 0.000
 (7)-->+(0.000)*x[1]+(0.000)*x[2]+(0.000)*x[3]+(1.000)*x[4]
 (>= 0.000

grado de error:0.00010000

mtodo de soluci"n: Gradiente

son los datos correctos?...(s/n)

guardar informacion? (s/n)...s

nombre del archivo que contendra los datos?... ciclos

4	0.73185	0.87304	0.14119
5	0.87304	0.91582	0.04278
6	0.91582	1.10939	0.19357
7	1.10939	1.19057	0.08118
8	1.19057	1.22469	0.03412
9	1.22469	1.23911	0.01442
10	1.23911	1.24524	0.00613
11	1.24524	1.24780	0.00257
12	1.24780	1.24879	0.00099
13	1.24879	1.24930	0.00051
14	1.24930	1.24950	0.00020
15	1.24950	1.24956	0.00006

punto optimo hallado con un error de 0.000062 (menor a 0.000100)

xopt[1] = 0.99988;
 xopt[2] = 0.00001;
 xopt[3] = 0.99988;
 xopt[4] = 0.00001;
 valor funci"n objetivo ==> 1.24956

tiempo inicio: 15:28:46:68

tiempo final : 15:30:16:87

pulse <enter>

-CENTROS ANALITICOS -PROBLEMA E5 -RESULTADO POR LOS CENTROS

-SIMPLEX PROBLEMA E6 -SIN REGION FACTIBLE

PROGRAM: Linear Programming I

***** INPUT DATA ENTERED *****

Max Z = 3 x 1 + 2 x 2

Subject to:

C 1 2 x 1 + 1 x 2 <= 2
C 2 3 x 1 + 4 x 2 >= 12

***** PROGRAM OUTPUT *****

Simplex tableau: Iteration 0

\Cj	Basis	Bi	3.00 x 1	2.00 x 2	0.00 s 1	0.00 S 2	-9999.00 A 1
0.00	s 1	2.00	2.00	1.00	1.00	0.00	0.00
-9999.00	A 1	12.00	3.00	4.00	0.00	-1.00	1.00
Zj	-119988.00-29997.00-39996.00		0.00 9999.00 -9999.00		0.00 -9999.00 0.00		
Cj-Zj	30000.00 39998.00		0.00 -9999.00		0.00		

Simplex tableau: Iteration 1

\Cj	Basis	Bi	3.00 x 1	2.00 x 2	0.00 s 1	0.00 S 2	-9999.00 A 1
2.00	x 2	2.00	2.00	1.00	1.00	0.00	0.00
-9999.00	A 1	4.00	-5.00	0.00	-4.00	-1.00	1.00
Zj	-39992.00 49999.00		2.00 39998.00		9999.00 -9999.00		
Cj-Zj	-49996.00		0.00-39998.00		-9999.00 0.00		

Infeasible solution

-SIMPLEX PROBLEMA E6 -RESPUESTA ACEPTABLE DEL SIMPLEX -APLICACION DE LOS CENTROS NO NECESARIA
--

-SIMPLEX PROBLEMA E7 -SOLUCIONES MÚLTIPLES
--

PROGRAM: Linear Programming I

***** INPUT DATA ENTERED *****

Max Z = 2 x 1 + 4 x 2

Subject to:

C 1 1 x 1 + 2 x 2 <= 5

C 2 1 x 1 + 1 x 2 <= 4

***** PROGRAM OUTPUT *****

Simplex tableau: Iteration 0

\Cj	Basis	Bi	2.00 x 1	4.00 x 2	0.00 s 1	0.00 s 2
0.00	s 1	5.00	1.00	2.00	1.00	0.00
0.00	s 2	4.00	1.00	1.00	0.00	1.00
Zj		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Cj-Zj			2.00	4.00	0.00	0.00

Simplex tableau: Iteration 1

\Cj	Basis	Bi	2.00 x 1	4.00 x 2	0.00 s 1	0.00 s 2
4.00	x 2	2.50	0.50	1.00	0.50	0.00
0.00	s 2	1.50	0.50	0.00	-0.50	1.00
Zj		10.00	2.00	4.00	2.00	0.00
Cj-Zj			0.00	0.00	-2.00	0.00

Final optimal solution

Variable	Value
x 2	2.50
s 2	1.50
Z	10.00

Sensitivity Analysis

Right-hand side Ranging			
Constraint Number	Lower Limit	Current Value	Upper Limit
1	0.00	5.00	8.00
2	2.50	4.00	No Limit

Contribution Rate Ranging			
Variable	Lower Limit	Current Rate	Upper Limit

-SIMPLEX PROBLEMA E7 -SOLUCIONES MÚLTIPLES
--

x 1	No Limit	2.00	2.00
x 2*	4.00	4.00	No Limit

* indicates basic variable
Simplex tableau: Iteration 1

\Cj			2.00	4.00	0.00	0.00
Cb	Basis	Bi	x 1	x 2	s 1	s 2
4.00	x 2	1.00	0.00	1.00	1.00	-1.00
2.00	x 1	3.00	1.00	0.00	-1.00	2.00
Zj		10.00	2.00	4.00	2.00	0.00
Cj-Zj			0.00	0.00	-2.00	0.00

Alternate final optimal solution

Variable	Value
x 2	1.00
x 1	3.00
Z	10.00

Sensitivity Analysis

Right-hand side Ranging

Constraint Number	Lower Limit	Current Value	Upper Limit
1	4.00	5.00	8.00
2	2.50	4.00	5.00

Contribution Rate Ranging

Variable	Lower Limit	Current Rate	Upper Limit
x 1*	2.00	2.00	4.00
x 2*	2.00	4.00	4.00

* indicates basic variable

-SIMPLEX PROBLEMA E7 -RESUELTO POR EL SIMPLEX

-CENTROS ANALITICOS
 PROBLEMA E7
 -SOLUCIONES MULTIPLES

>>>>_____ METODO DE LOS CENTROS ANALITICOS _____<<<<

>>>>cheque si los datos son correctos.<<<<

Maximizar funci*n objetivo :

f(x)= +(2.000)*x[1]+(4.000)*x[2]

sujeto a:

(1)	-->+(1.000)*x[1]+(2.000)*x[2]	<=	5.000
(2)	-->+(1.000)*x[1]+(1.000)*x[2]	<=	4.000
(3)	-->+(1.000)*x[1]+(0.000)*x[2]	>=	0.000
(4)	-->+(0.000)*x[1]+(1.000)*x[2]	>=	0.000

grado de error:0.00010000

ntodo de soluci*n: Gradiente

son los datos correctos?...(s/n)

guardar informacion? (s/n)...s

nombre del archivo que contendra los datos?... multiple

son los datos correctos?...(s/n)

ingrese los valores para:

x[1] = .1

x[2] = .1

valor inicial de la funcion objetivo lineal: 0.600

iter	valor anterior	valor actual	error
1	0.60000	8.59087	7.99087
2	8.59087	9.79115	1.20028
3	9.79115	9.96994	0.17880
4	9.96994	9.99563	0.02569
5	9.99563	9.99930	0.00367
6	9.99930	9.99983	0.00052
7	9.99983	9.99990	0.00007

punto optimo hallado con un error de 0.000075 (menor a 0.000100)

xopt[1] = 1.42246;

xopt[2] = 1.78875;

valor funci*n objetivo ==> 9.99990

tiempo inicio: 16:56:18:77

tiempo final : 16:56:20:20

pulse <enter>

-CENTROS ANALITICOS
 PROBLEMA E7
 -RESUELTO POR LOS CENTROS

PROGRAM: Linear Programming I

***** INPUT DATA ENTERED *****

Max Z = 3 x 1 + 5 x 2

Subject to:

C 1 1 x 1 <= 4
 C 2 1 x 2 <= 12
 C 3 3 x 1 + 2 x 2 <= 18
 C 4 1 x 1 >= -10

***** PROGRAM OUTPUT *****

Simplex tableau: Iteration 0

\Cj			3.00	5.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Cb	Basis	Bi	x 1	x 2	s 1	s 2	s 3	S 4
0.00	s 1	4.00	1.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00
0.00	s 2	12.00	0.00	1.00	0.00	1.00	0.00	0.00
0.00	s 3	18.00	3.00	2.00	0.00	0.00	1.00	0.00
-9999.00	A 1	-10.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-1.00
Zj		99990.00	-9999.00	0.00	0.00	0.00	0.00	9999.00
Cj-Zj			10002.00	5.00	0.00	0.00	0.00	-9999.00

\Cj			-9999.00
Cb	Basis	Bi	A 1
0.00	s 1	4.00	0.00
0.00	s 2	12.00	0.00
0.00	s 3	18.00	0.00
-9999.00	A 1	-10.00	1.00
Zj		99990.00	-9999.00
Cj-Zj			0.00

Simplex tableau: Iteration 1

\Cj			3.00	5.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Cb	Basis	Bi	x 1	x 2	s 1	s 2	s 3	S 4
0.00	s 1	14.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	1.00
0.00	s 2	12.00	0.00	1.00	0.00	1.00	0.00	0.00
0.00	s 3	48.00	0.00	2.00	0.00	0.00	1.00	3.00
3.00	x 1	-10.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-1.00
Zj		-30.00	3.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-3.00
Cj-Zj			0.00	5.00	0.00	0.00	0.00	3.00

\Cj			-9999.00
Cb	Basis	Bi	A 1
0.00	s 1	14.00	-1.00
0.00	s 2	12.00	0.00
0.00	s 3	48.00	-3.00
3.00	x 1	-10.00	1.00

-SIMPLEX
 -PROBLEMA EN
 -LARS DECISION NEGATIVAS

Zj -30.00 3.00
Cj-Zj -10002.00

SIMPLEX
-PROBLEMA ES
-LARS DECISION NEGATIFAS

Simplex tableau: Iteration 2

\Cj	Basis	Bi	3.00	5.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Cb			x 1	x 2	s 1	s 2	s 3	s 4
0.00	s 1	14.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	1.00
5.00	x 2	12.00	0.00	1.00	0.00	1.00	0.00	0.00
0.00	s 3	24.00	0.00	0.00	0.00	-2.00	1.00	3.00
3.00	x 1	-10.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-1.00
Zj		30.00	3.00	5.00	0.00	5.00	0.00	-3.00
Cj-Zj			0.00	0.00	0.00	-5.00	0.00	3.00
\Cj	Basis	Bi	-9999.00					
Cb			A 1					
0.00	s 1	14.00	-1.00					
5.00	x 2	12.00	0.00					
0.00	s 3	24.00	-3.00					
3.00	x 1	-10.00	1.00					
Zj		30.00	3.00					
Cj-Zj			-10002.00					

Simplex tableau: Iteration 3

\Cj	Basis	Bi	3.00	5.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Cb			x 1	x 2	s 1	s 2	s 3	s 4
0.00	s 1	6.00	0.00	0.00	1.00	0.67	-0.33	0.00
5.00	x 2	12.00	0.00	1.00	0.00	1.00	0.00	0.00
0.00	s 4	8.00	0.00	0.00	0.00	-0.67	0.33	1.00
3.00	x 1	-2.00	1.00	0.00	0.00	-0.67	0.33	0.00
Zj		54.00	3.00	5.00	0.00	3.00	1.00	0.00
Cj-Zj			0.00	0.00	0.00	-3.00	-1.00	0.00
\Cj	Basis	Bi	-9999.00					
Cb			A 1					
0.00	s 1	6.00	0.00					
5.00	x 2	12.00	0.00					
0.00	s 4	8.00	-1.00					
3.00	x 1	-2.00	0.00					
Zj		54.00	0.00					
Cj-Zj			-9999.00					

Final optimal solution

Variable	Value
s 1	6.00
x 2	12.00
s 4	8.00
x 1	-2.00

Z

54.00

A21

-SIMPLEX -PROBLEMA EN -LARS DECISION NEGATIVAS
--

Sensitivity Analysis

Right-hand side Ranging			
Constraint Number	Lower Limit	Current Value	Upper Limit
1	0.00	4.00	No Limit
2	3.00	12.00	9.00
3	24.00	18.00	36.00
4	0.00	-10.00	No Limit

Constraint Number	Lower Limit	Current Value	Upper Limit
1	0.00	4.00	No Limit
2	3.00	12.00	9.00
3	24.00	18.00	36.00
4	0.00	-10.00	No Limit

Contribution Rate Ranging			
Variable	Lower Limit	Current Rate	Upper Limit
x 1*	0.00	3.00	7.50
x 2*	2.00	5.00	No Limit

Variable	Lower Limit	Current Rate	Upper Limit
x 1*	0.00	3.00	7.50
x 2*	2.00	5.00	No Limit

* indicates basic variable

-SIMPLEX -PROBLEMA EN -RESUELTO POR EL SIMPLEX
--

>>>> _____ METODO DE LOS CENTROS ANALITICOS _____ <<<<

>>>>Cheque si los datos son correctos.<<<<

Maximizar funci"n objetivo :

$f(x) = 3.000 * x[1] + (5.000) * x[2]$

sujeto a:

(1)-->+(1.000)*x[1]+(0.000)*x[2]	≤	4.000
(2)-->+(0.000)*x[1]+(1.000)*x[2]	≤	12.000
(3)-->+(3.000)*x[1]+(2.000)*x[2]	≤	18.000
(4)-->+(-1.000)*x[1]+(0.000)*x[2]	≤	10.000
(5)-->+(0.000)*x[1]+(-1.000)*x[2]	≤	0.000

grado de error:0.00010000

mtodo de soluci"n: Gradiente

son los datos correctos?...(s/n)

ingrese los valores para:

x[1] = .1

x[2] = .1

x[2] = .1

valor inicial de la funcion objetivo lineal:

0.800

iter	valor anterior	valor actual	error
1	0.80000	41.60972	40.80972
2	41.60972	50.94424	9.33452
3	50.94424	53.23842	2.29418
4	53.23842	53.80924	0.57082
5	53.80924	53.95212	0.14288
6	53.95212	53.98790	0.03578
7	53.98790	53.99686	0.00896
8	53.99686	53.99909	0.00223
9	53.99909	53.99965	0.00056
10	53.99965	53.99979	0.00014
11	53.99979	53.99982	0.00004

punto optimo hallado con un error de 0.000035 (menor a 0.000100)

xopt[1] = -2.00001;

xopt[2] = 11.99997;

valor funci"n objetivo ==> 53.99982

tiempo inicio: 23:24:4:34

tiempo final : 23:24:7:19

pulse <enter>

PROGRAM: Linear Programming I

***** INPUT DATA ENTERED *****

Max Z = 3 x 1 - 3 x 2 + 5 x 3

Subject to:

C 1 1 x 1 - 1 x 2 <= 4

C 2 2 x 3 <= 12

C 3 3 x 1 - 3 x 2 + 2 x 3 <= 18

***** PROGRAM OUTPUT *****

Simplex tableau: Iteration 0

\Cj	Basis	Bi	3.00 x 1	-3.00 x 2	5.00 x 3	0.00 s 1	0.00 s 2	0.00 s 3
0.00	s 1	4.00	1.00	-1.00	0.00	1.00	0.00	0.00
0.00	s 2	12.00	0.00	0.00	2.00	0.00	1.00	0.00
0.00	s 3	18.00	3.00	-3.00	2.00	0.00	0.00	1.00
Zj		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Cj-Zj			3.00	-3.00	5.00	0.00	0.00	0.00

Simplex tableau: Iteration 1

\Cj	Basis	Bi	3.00 x 1	-3.00 x 2	5.00 x 3	0.00 s 1	0.00 s 2	0.00 s 3
0.00	s 1	4.00	1.00	-1.00	0.00	1.00	0.00	0.00
5.00	x 3	6.00	0.00	0.00	1.00	0.00	-0.50	0.00
0.00	s 3	6.00	3.00	-3.00	0.00	0.00	-1.00	1.00
Zj		30.00	0.00	0.00	5.00	0.00	2.50	0.00
Cj-Zj			3.00	-3.00	0.00	0.00	-2.50	0.00

Simplex tableau: Iteration 2

\Cj	Basis	Bi	3.00 x 1	-3.00 x 2	5.00 x 3	0.00 s 1	0.00 s 2	0.00 s 3
0.00	s 1	2.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.33	-0.33
5.00	x 3	6.00	0.00	0.00	1.00	0.00	-0.50	0.00
3.00	x 1	2.00	1.00	-1.00	0.00	0.00	-0.33	0.33
Zj		36.00	3.00	-3.00	5.00	0.00	1.50	1.00
Cj-Zj			0.00	0.00	0.00	0.00	-1.50	-1.00

Final optimal solution

Variable	Value
s 1	2.00
x 3	6.00
x 1	2.00
Z	36.00

SIMPLEX PROBLEMA E9 MARS DECISION NEGATIUS
--

Sensitivity Analysis

-SIMPLEX
 PROBLEMA E9
 -PARS DECISION NEGATIVAS

 Right-hand side Ranging

Constraint Number	Lower Limit	Current Value	Upper Limit
1	2.00	4.00	No Limit
2	6.00	12.00	18.00
3	12.00	18.00	24.00

 Contribution Rate Ranging

Variable	Lower Limit	Current Rate	Upper Limit
x 1*	0.00	3.00	3.00
x 2	No Limit	-3.00	-3.00
x 3*	2.00	5.00	No Limit

* indicates basic variable
 Unbounded solution

-SIMPLEX
 PROBLEMA E9
 -RESUELTO POR EL SIMPLEX

>>>> METODO DE LOS CENTROS ANALITICOS <<<<<

>>>>cheque si los datos son correctos.<<<<<

Maximizar funci"n objetivo :

$f(x) = +(3.000)*x[1] + (5.000)*x[2]$

sujeo a:

(1)	-->+(1.000)*x[1]+(0.000)*x[2]	≤	4.000
(2)	-->+(0.000)*x[1]+(1.000)*x[2]	≤	12.000
(3)	-->+(3.000)*x[1]+(2.000)*x[2]	≤	18.000
(4)	-->+(0.000)*x[1]+(-1.000)*x[2]	≤	0.000

grado de error:0.00010000

mtodo de soluci"n: Gradiente

son los datos correctos?...(s/n)

ingrese los valores para:

x[1] = .1

x[2] = .1

x[2] = .1

valor inicial de la funcion objetivo lineal:

0.800

iter	valor anterior	valor actual	error
1	0.80000	40.29514	39.49514
2	40.29514	50.57913	10.28399
3	50.57913	53.14452	2.56538
4	53.14452	53.78607	0.64155
5	53.78607	53.94640	0.16034
6	53.94640	53.98647	0.04007
7	53.98647	53.99649	0.01002
8	53.99649	53.99900	0.00251
9	53.99900	53.99962	0.00063
10	53.99962	53.99978	0.00016
11	53.99978	53.99982	0.00004

punto optimo hallado con un error de 0.000039 (menor a 0.000100)

xopt[1] = -2.00001;

xopt[2] = 11.99997;

valor funci"n objetivo ==> 53.99982

CENTROS ANALITICOS
PROBLEMA E9
-VARS DECISION NEGATIVAS

CENTROS ANALITICOS
PROBLEMA E9
-RESUELTO POR LOS CENTROS

En las siguientes paginas se presentan las corridas de los programas utilizados para evaluar al método de los centros analíticos y al método Simplex. En la primera parte del apéndice aparecen las corridas correspondientes a las características que no requieren de un planteamiento de grandes dimensiones. La identificación cada problema en el apéndice se encuentra encerrado en un cuadro, dentro del cual se especifica el método, el número de problema y una breve descripción de este. En las corridas del método Simplex se despliegan la función objetivo, en la parte superior, seguida de las restricciones, señaladas como *c_i*, posteriormente se muestran las tablas generadas en cada iteración del Simplex, al término de la tabla óptima se lista las variables que forma la solución, así como sus valores correspondientes, en caso de que exista solución, de no existir se muestra una leyenda indicando la causa por la cual el problema no tiene solución. En las corridas pertenecientes al método de los centros analíticos se muestra la estructura del problema: función objetivo y restricciones; se especifica el grado de error y el método no lineal utilizado, seguida de los valores del punto inicial y su evaluación en la función objetivo, posteriormente se muestran el grado de error con el cual fue hallado el punto óptimo (siempre menor o igual al grado de error especificado anteriormente), las variables de la solución y su valor, así como su evaluación en la función objetivo son mostradas, finalmente se muestra la hora inicial y final del procesamiento del algoritmo. Si el problema no tiene puede es resultado se despliega la causa y el valor de la que tenía la función objetivo en el momento de determinarse que el problema era insoluble.

Las corridas correspondientes a los problemas de grandes dimensiones se han omitido debido a la exhaustiva cantidad de hojas necesarias para presentarla, en su lugar se muestran tablas con la estructura de la tabla inicial de Simplex, en las que además se omite las variables de holgura, exceso y artificiales pero en las que se incluye la solución al problema en la última columna de la derecha. Al pie de cada uno de estos cuadros encuentra el número de problema y sus dimensiones. Es importante señalar que la solución que se anexa en la última columna de la derecha es la ofrecida por el método Simplex, sin embargo, la solución obtenida por los centros analíticos es en esencia la misma.

Al término de las corridas se lista la programación desarrollada para el método de los centros, así como, una guía para su utilización.

Como un breve subíndice tenemos:

CORRIDAS DE LOS PROGRAMAS.	A3
GUÍA DEL PROGRAMA CENTRO.	A36
LISTADO DEL PROGRAMA CENTRO.	A37

	R2 49			111 82			0 00			118 36			0 00			15 36			0 00			26 55			0 00			99 27			53 82			86 27			87 36			69 91				
Var	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14	x15	b																												
R1	1																																		2062.16									
R2		1																																		0 00								
R3			1																																	400 00								
R4				1																																350 00								
R5					1																															270 00								
R6						1																														280 00								
R7							1																													181 73								
R8								1																												139 00								
R9									1																											378 56								
R10										1																										360 00								
R11											1																									440 00								
R12												1																								250 00								
R13													1																							378 00								
R14														1																						270 00								
R15															1																					338 00								
R16																1																				282 00								
R17																	1																			482 00								
R18																		1																		243 00								
R19																			1																	480 00								
R20																					1															342 00								
R21																						1														480 00								
R22																							1													342 00								
R23																								1													470 00							
R24																									1												308 00							

PROBLEMA (a): 15 VARIABLES POR 20 RESTRICCIONES (15X20)

	101	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		
	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	X12	X13	X14	X15	X16	X17	X18	X19	X20	G	b
101	1																					2408.4
102		1																				0
103			1																			587
104				1																		340
105					1																	448
106						1																753
107							1															438
108								1														398
109									1													478
110										1												387
111											1											457
112												1										573
113													1									300
114														1								455
115															1							407
116																1						587
117																	1					480
118																		1				486
119																			1			432
120																				1		483
121																						435
122																						356
123																						587
124																						461
125																						354
126																						389
127																						488
128																						516
129																						481
130																						348
131																						101
132																						411.8

21 02654856 154 1362517 06 80582717 20 59322962 11 23804214 0 74 9402276 0 0 52 661217481 87 21026066 01 77 20466064 48 94021096 0 1 847854322 113 9677754 0 0 145 840976 70 158283461 0 0 0 46 70464791 2 7481389441 0 0 0																													
	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17	x18	x19	x20	x21	x22	x23	x24	x25	x26	x27	x28	
x1	1																												
x2		1																											
x3			1																										
x4				1																									
x5					1																								
x6						1																							
x7							1																						
x8								1																					
x9									1																				
x10										1																			
x11											1																		
x12												1																	
x13													1																
x14														1															
x15															1														
x16																1													
x17																	1												
x18																		1											
x19																			1										
x20																				1									
x21																					1								
x22																						1							
x23																							1						
x24																								1					
x25																									1				
x26																										1			
x27																											1		
x28																												1	
x29																													1
x30																													1
x31																													1
x32																													1
x33																													1
x34																													1
x35																													1
x36																													1
x37																													1
x38																													1
x39																													1
x40																													1
x41																													1
x42																													1
x43																													1
x44																													1
x45																													1
x46																													1
x47																													1
x48																													1
x49																													1
x50																													1
x51																													1
x52																													1
x53																													1
x54																													1
x55																													1
x56																													1
x57																													1
x58																													1
x59																													1
x60																													1
x61																													1
x62																													1
x63																													1
x64																													1
x65																													1
x66																													1
x67																													1
x68																													1
x69																													1
x70																													1

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17	x18	x19	x20
x04	1	2																		
x05																				
x06																				
x07																				
x08																				
x09																				
x10																				
x11																				
x12																				
x13																				
x14																				
x15																				
x16																				
x17																				
x18																				
x19																				
x20																				
x21																				
x22																				
x23																				
x24																				
x25																				
x26																				
x27																				
x28																				
x29																				
x30																				
x31																				
x32																				
x33																				
x34																				
x35																				
x36																				
x37																				
x38																				
x39																				
x40																				
x41																				
x42																				
x43																				
x44																				
x45																				
x46																				
x47																				
x48																				
x49																				
x50																				
x51																				
x52																				
x53																				
x54																				
x55																				
x56																				
x57																				
x58																				
x59																				
x60																				
x61																				
x62																				
x63																				
x64																				
x65																				
x66																				
x67																				
x68																				
x69																				
x70																				

GUÍA DEL PROGRAMA CENTRO.

(La presenten guía esta dividida en *** puntos, los cuales se identifican por su número romano correspondiente: I, II,...,V. Tome en cuenta estos identificadores en el momento de utilizar la guía).

El programa ejecutable se ha denominado "CENTRO.EXE". Al ejecutarlo, el programa pedirá que determine si los datos que desea analizar serán tomados de un archivo, que haya sido creado previamente (opción letra F, punto I), o serán introducidos por vía teclado (opción letra T, punto II).

I). Archivo ya existente, Opción (F)

En caso de elegir (F) introduzca el nombre del archivo donde se encuentran los datos, si el archivo no es encontrado el programa volverá a solicitar la introducción de un nombre de archivo. Cuando el nombre del archivo es encontrado se desplegará la información del planteamiento lineal: tipo de optimización (max / min), estructura de PPL (función objetivo, restricciones), método no lineal a relacionado (Newton / Gradiente) y grado de error. Puede ocurrir que el planteamiento ya haya sido resuelto en alguna ocasión anterior por el programa, si es así, el programa cuestionará si se desea ver los resultados (opción S), o no (opción N). Si selecciona (S), el punto óptimo y valor de la función objetivo, así como el tiempo de inicio y término de operaciones será desplegado. Si por el contrario, selecciona (N), entonces se proseguirá como se describe en "Corrección de Valores", punto IV.

II) Datos nuevos vía teclado, Opción (T)

En caso de seleccionar (T), El programa pedirá que defina el número de variables y posteriormente el número de restricciones que maneja el planteamiento lineal. Es importante señalar que al definir el número de variables considere únicamente las variables de decisión, y en el número de restricciones no considere las restricciones de no negatividad.

A continuación el programa le pedirá determinar si estamos tratando de un problema de maximización (opción 1), o de minimización (opción 0).

Posteriormente se debe determinar el grado de error a manejar. Este grado de error corresponde a las iteraciones de optimización lineal, y no afectan al grado de error de las optimizaciones no lineales.

El siguiente paso es seleccionar el método que se utilizará en las optimizaciones no lineales: método del Gradiente (opción G) o método de Newton (opción N). A continuación se verifica si la información es correcta (opción letra S), en este caso se continuará como se contempla en el punto III "introducción de valores". Si la información no es correcta (opción letra N), entonces todo el punto II será repetido tantas veces como sea necesario.

III) Introducción de valores.

En primer lugar el programa pedirá la introducción de los coeficientes de la función objetivo, un coeficiente por cada variable de decisión.

Al terminar de introducir los coeficientes de la función objetivo, se continuará con la información de cada restricción: en primer término sus coeficientes, uno por cada variable de decisión, posteriormente se debe definir el tipo de relación de la restricción (\leq , $=$, \geq ; letras L, E, U, respectivamente), finalmente se requerirá introducir el valor de la disponibilidad para la relación. Estas operaciones se repiten para cada una de las restricciones

IV) Corrección de valores.

Al tener completa la estructura la descripción del problema (su función objetivo y sus restricciones), el programa le pedirá que confirme que la información es correcta, si o es oprima la letra S, o en caso contrario la letra N. Si son correctos los datos se sigue como se explica en el punto V. En este de no

ser correctos los datos se desplegará un menú, con el cual podrá hacer las modificaciones pertinentes para tener los valores correctos. Dicho menú se describe a continuación:

- 1.- Tipo de optimización. En esta opción podrá redefinir si el planteamiento trata de maximizar la función objetivo (identificado por el número 1), o bien de minimizarla dicha función (identificado por el número 0).
- 2.- Grado de error (en iteraciones lineales). Para redefinir el grado de error utilizado en el problema.
- 3.- Método solución no lineal . Podrá seleccionar nuevamente entre método de Newton (letra N), o el método del Gradiente (letra G).
- 4.- Coeficiente en la función objetivo. Al seleccionar esta opción podrá modificar el valor de un coeficiente en la función objetivo. Para lo cual se programa le pedirá que designe el número de la variable sobre la cual se realizará la operación, posterior a ello podrá ingresar el nuevo valor para dicha variable. Si el momento de designar el número de variable define una variable que no existe en el problema, entonces, la operación de modificación se cancelará.
- 5.- Coeficiente en alguna restricción. Con esta opción tiene la posibilidad de cambiar un valor en los coeficientes tecnológicos, para ello el programa solicitará que determine tanto el número de restricción como el número de la variable donde se efectuará el cambio. Después de definir estos valores podrá realizar la modificación deseada. Si la definir el coeficiente tecnológico a modificar selecciona uno inexistente en el planteamiento, entonces, la operación se cancelará
- 6.- Tipo de relación (<=,=,>=), y coeficiente de disponibilidad en alguna restricción. En esta opción se podrá modificar el tipo de relación y el valor de disponibilidad de una restricción. Así que en primer lugar deberá determinar el número de restricción donde desea cambiar los valores, posterior a ello . seleccionar los nuevos valores tanto para el tipo de relación como para el nuevo valor del coeficiente de disponibilidad.

Posterior a corregir el dato erróneo se vuelve a mostrar la estructura del problema con contemplando las modificaciones realizadas y se repite este inciso cuantas veces sea necesario.

V) Almacenamiento de información y punto inicial

Posterior a tener los datos correctos el programa cuestionará si se desean guardar los datos en un archivo (opción S), o no (opción N). Si elige (S) se pedirá el nombre del archivo donde se guardaran los datos, dicho nombre no debe ser mayor a ocho caracteres, si escribe un nombre mayor a 8 caracteres se toman los 8 primeros para dar nombre al archivo.

A continuación se introducen los valores del punto inicial, uno por cada variable de decisión. Posterior a ello el programa comienza las operaciones en busca de la solución óptima. En cada iteración se muestra el valor actualizado que toma la función objetivo. Al terminar las iteraciones se despliegan los valores de las variables de decisión en el punto óptimo, así como el valor de la función objetivo y el tiempo inicial y final de las operaciones realizadas.

Puede ocurrir que aparezcan ciertos problemas al momento de dar solución al planteamiento lineal, por ejemplo: a) Si se introduce un punto inicial fuera de la región factible, se genera un problema de aplicación. b) Si se encuentra un región no acotada se manda el mensaje de "Tamaño de paso infinito". c) Si se encuentran divergencias entre las iteraciones el programa cuestionará si se desea continuar con las operaciones o no.

Después de ofrecer una respuesta al planteamiento establecido el programa "centro" llega a su término.

```

(*****
(***** unidad métodos. *****)
(***** para la aplicación del método de los centros analíticos, contiene los métodos no lineales *****)
(***** y otras variables de importancia. Desarrollado por : Cesar Valencia ortiz. Febrero de 1996 *****)
(*****

unit métodos;
{contiene los métodos no lineales -gradiente, newton- para su utilización con el método de los centros analíticos.}
interface
const
  max = 70; {numero max de variables}
  maxres = 70; {numero maximo de restricciones}
  opt = 1; {producto que la optimización no lineal sea una minimización}
  s = 6; {parametro del metodo de los centros que multiplica al 1er logaritmo}
  b = 0.0005; {parametro de m. de los centros que influye en el 1er logaritmo}
  { error = 0.001;}
  { error = 0.02;}
type
  punto = array [1..max] of real; {variable de tipo adecuado realizar el }
  puntosres = array [1..maxres] of real; {objetivo de optimizar por completo }
  t_relacion = array [1..max] of char;
  hessiano = array [1..max,1..max] of real;
  coef_tec = array [1..max,1..maxres] of real;
var
  error: real;
  nvar,restricciones : integer; {numero de variables, ctrl de restricciones}
  opt:lineal : integer; {1 ==>maximizar, 0 ==>minimiza}
  error:lineal : real; {manejo del error lineal}
  elige : char; {var para la elección del método}
  xuno,gradiente,fobj_lineal : punto; {matriz de variables,gradiente, coeficientes de la func. obj.}
  rocurso : puntosres; {vector de disponibilidad}
  relacion : t_relacion; {vector de tipo de restricciones : <,>,<=, =}
  coeficientes : coef_tec; {matriz de coeficientes tecnológicos}
  v_fobj_1,v_fobj_2,paso,error1,val_1,val_2,t : real; {valores de la func. lineal y no lineal, tamaño de paso, y var de error}
  iter : integer; {conteo de iteraciones no lineales}
  sal : boolean; {var auxiliar}
{*****}
procedure p_inicial(var xuno:punto); {obtiene el punto inicial}
procedure salta;
procedure val_lineal(var x:evalua: punto; {obtiene el valor de la funcion obj. lineal}
  var val : real);
procedure val_restric(var x : punto; {obtiene el valor en la restricción i}
  var coef : coef_tec;
  var valr : real;
  var maxres: integer);
procedure f_objetivo(var x:punto;
  var valor:real); {obtiene el valor de la función objetivo}
procedure f_gradiente(var grad,x:punto); {obtiene el sig. punto optimo para el método del Gradiente}
procedure f_hessiano(var x,grad;punto;
  var hess : hessiano); {obtención del hessiano}
procedure sizepaso(var x,grad;punto;
  var step:real); {obtención del tamaño de paso}
procedure inv_hessiano (var hess : hessiano;
  var sal : boolean); {obtención de la inversa del hessiano se obtiene la multiplicación}
procedure new_grad(var grad,xuno : punto); {de la inversa del hessiano por el gradiente}
procedure checka(var xuno,xdoa,error:real;
  var sal :boolean); {checka divergencias}
procedure opt_gradiente( var x,grad;punto); {obtiene el sig. punto optimo para el método del Gradiente}
procedure opt_newton( var x,grad;punto); {obtiene el sig. punto optimo para el método de Newton}
procedure imprime( var valor,err : real); {imprime resultado final}
procedure imprime( var iter : integer;
  var valor1,valor2,error: real);
procedure newtonopt;
procedure gradientopt;
implementation
{*****}
uses crt;
{*****}
procedure p_inicial(var xuno:punto); {obtiene el punto inicial}
var
  i : integer;
begin
  writeln('ingrese los valores para:');
  [51-]
  for i:= 1 to nvar do
  begin
    repeat write('x['i'] = ');
      readln(xuno[i]) until (i= result-0);
  end
end

```



```

gaxu:=recurso[k2]-gaxu;
if gaxu=0 then
  begin
    writeln('falla en f_gradiente, gradiente['.k.']. de la funcion objetivo no lineal, elemento k2, div 0');
    salta;
  end;
grad[k]:=grad[k]-(1/(gaxu))*coeficientes[k2,k];
end;
end;
end; {gradiente}
{*****}
procedure f_hessiano(var x_grad:punto;
                    var hess : hessiano); {obtención del hessiano}
var k,k2,k3 : integer;
    hessaxu : real;
begin
  for k:=1 to nvar do
    begin
      for k2:=k to nvar do
        begin
          val_lineal(x,fobj_lineal,hessaxu);
          hessaxu:=hessaxu+1;
          if hessaxu=0 then
            begin
              writeln('falla en f_hessiano, hessiano['.k.','.k2.']. funcion objetivo no lineal, elemento 0');
              salta;
            end;
            hess[k,k2]:=-1*sqrt(hessaxu)*fobj_lineal[k]*fobj_lineal[k2];
          for k3:=1 to restricciones do
            begin
              val_restric(x,coeficientes,hessaxu,k3);
              hessaxu:=recurso[k3]-hessaxu;
              if hessaxu=0 then
                begin
                  writeln('falla en f_hessiano, hessiano['.k.','.k2.']. funcion objetivo no lineal, elemento k3');
                  salta;
                end;
                hess[k,k2]:=hess[k,k2]-(1/sqrt(hessaxu))*coeficientes[k3,k]*coeficientes[k3,k2];
              end;
              hess[k2,k]:=hess[k,k2];
            end;
          end;
        end;
      end;
    end;
  end; {f_hessiano}
{*****}
procedure sizepaso(var x_grad:punto;
                  var step:real); {obtención del tamaño de paso}
var
  hess : hessiano;
  axu : punto;
  abajo, arriba : real;
  i,j : integer;
begin
  f_hessiano(x_grad,hess);
  arriba:=0;
  for i:=1 to nvar do
    arriba:=arriba+(grad[i]*grad[i]);
  for i:=1 to nvar do
    begin
      axu[i]:=0;
      for j:=1 to nvar do
        axu[i]:=(hess[i,j]*grad[j])+axu[i];
      end;
      abajo:=0;
      for i:=1 to nvar do
        abajo:=abajo+grad[i]*axu[i];
      if abajo=0 then
        begin
          writeln('****tamaño de paso infinito*****');
          halt;
        end;
        step:=-arriba/abajo;
      end; {sizepaso}
{*****}
procedure inv_hessiano (var hess : hessiano;
                      var sal : boolean); {obtención de la inversa del hessiano}
var
  axu2 : hessiano;
  pas : real;

```

```

l,j,k : integer;
begin
  for i:=1 to nvar do
    for j:=1 to nvar do
      if j=i then
        axu2[i,i]:=-1
      else
        axu2[i,j]:=0;
    end;
  end;
  for i:=1 to nvar do
    begin
      pas:=hess[i,i];
      if (pas=0) then
        begin
          writeln('division entre cero al calcular la inversa...');
          sal:=true;
          salta;
          exit;
        end;
      for j:=1 to nvar do
        begin
          hess[i,j]:=hess[i,j]/pas;
          axu2[i,j]:=-axu2[i,j]/pas;
        end;
      for j:=1 to nvar do
        begin
          if (j<>i) then
            begin
              pas:=hess[j,i];
              for k:=1 to nvar do
                begin
                  hess[j,k]:=(hess[j,k]) - (pas*hess[i,k]);
                  axu2[j,k]:=(axu2[j,k]) - (pas*axu2[i,k]);
                end;
              end;
            end;
          end;
        end;
      for i:=1 to nvar do
        for j:=1 to nvar do
          hess[i,j]:=axu2[i,j];
        end;
      end;
      {*****}
      procedure new_grad(var grad,xuno : punto); {se obtiene la multiplicación de la inversa del hessiano }
      var
        hess : hessiano;
        axu1 : punto;
        i,j : integer;
      begin
        f_hessiano(xuno,grad,hess);
        inv_hessiano(hess,sal);
        for i:=1 to nvar do
          begin
            axu1[i]:=0;
            for j:=1 to nvar do
              axu1[i]:=axu1[i]+hess[i,j]*grad[j];
            end;
          end;
        for j:=1 to nvar do
          grad[j]:=axu1[j];
        end;
      end;
      {*****}
      procedure checka(var xuno,xdos,error):real;
      var
        sal : boolean; {checka divergencias}
      var
        erroraxu : real;
      begin
        erroraxu:=error;
        error:=abs(xuno-xdos);
        if iter=1 then erroraxu:=error+1;
        if ((error)>erroraxu)and(xuno<xdos) then
          begin
            writeln('salida obligada del program por divergenia');
            sal:=true;
            salta;
            exit;
          end;
        end;
      end;
      {*****}
      procedure opt_gradiente (var x,grad:punto); {obtiene el sig. punto optimo}
      var

```

```

i : integer;
begin
for i:=1 to nvar do
x[i]:=x[i]+(opt*paso)*grad[i];
end; {opt_gradiente}
{*****}
procedure opt_newton(var x,grad;punto); {obtiene el sig. punto optimo}
var
i : integer;
begin
for i:=1 to nvar do
x[i]:=x[i]+(opt)*grad[i];
end; {opt_newton}
{*****}
procedure imprfinal(er: real;var valor,err : real); {imprime resultado final}
var i : integer;
begin
writeln('punto optimo hallado con un error de ',err:3:6,' (menor a ',er:3:6,')');
writeln;
for i:=1 to nvar do
writeln('xop['i,'] = ',xuno[i]:10:5,');
writeln('valor funcion objetivo ----> ',valor:10:5);
end; {imprfinal}
{*****}
procedure imprime(var iter : integer;
var valor1,valor2,error: real);
begin
writeln(iter:2,valor2:20:5,valor1:20:5,error:20:5);
end; {imprime}
{*****}
procedure newtonopt;
begin {newton}
sal:=false;
f_objetivo(xuno,v_fobj_2);
iter:=0;
repeat
iter:=iter+1;
f_gradiente(gradiente,xuno);
new_grad(gradiente,xuno);
opt_newton(xuno,gradiente);
f_objetivo(xuno,v_fobj_1);
checa(v_fobj_1,v_fobj_2,errori,sal);
if sal=true then exit;
if (errori<=error) then
begin
exit;
end;
v_fobj_2:=v_fobj_1;
until false;
end; {newtonopt}
{*****}
procedure gradienteopt;
begin {gradiente}
sal:=false;
f_objetivo(xuno,v_fobj_2);
iter:=0;
repeat
iter:=iter+1;
f_gradiente(gradiente,xuno);
sizepaso(xuno,gradiente,paso);
opt_gradiente(xuno,gradiente);
f_objetivo(xuno,v_fobj_1);
checa(v_fobj_1,v_fobj_2,errori,sal);
if sal=true then exit;
if (errori<=error) then
begin
exit;
end;
v_fobj_2:=v_fobj_1;
until false;
end; {gradienteopt}
end.

```

```

{*****}
{*****}          programa centro.          {*****}
{*****} para la aplicación del método de los centros analíticos          {*****}
{*****} desarrollado por : Cesar Valencia ortiz.   Febrero de 1996          {*****}
{*****}
programa centro;
{contiene el código para el método de los centros analíticos}
uses
  crt,metodos,dos;
type
  name      = string[8];
var
  itercentro          : integer; {ctrl de iteraciones lineales}
  e_lineal           : real;    {ctrl de error lineal}
  nombre            : name;
  prucha            : char;
  hora_hora2_minis_minis2_segis_segis2_censt_censt2 : word;
{*****}
procedure start(var nvar,restricciones,optl : integer; {obtiene los datos iniciales}
               var errorl : real; {# de var, # de restricciones, método,}
               var elige : char; {error, y tipo de optimización})
begin
  clrscr;
  writeln('>>>> _____ METODO DE LOS CENTROS ANALITICOS _____<<<<');
  writeln;
  write('introduzca los datos correctos... ');
  writeln;
  writeln('>>>>Introduzca los datos del problema lineal por resolver:<<<<');
  writeln;
  write('numero de variables: ');
  {Si-}
  repeat readln(nvar) until (ioreault=0);
  write('numero de restricciones: ');
  repeat readln(restricciones) until (iorestult=0);
  {Si+}
  repeat
    write('problema a maximizar (1), o minimizar (0) ?(1/0): ');
    readln(optl);
    until optl in [0,1];
  {Si-}
  write('grado de error deseado: ');
  repeat readln(errorl) until (iorestult=0);
  {Si-}
  write(' método por el que desea solucionar, newton(n), gradiente (g): ');
  repeat
    elige:=readkey;
    until elige in ['n','N','g','G'];
  writeln(elige);
  writeln;
  writeln('son los datos correctos...(s/n)');
end; {start}
{*****}
procedure f_obj_lineal(var fobj_lineal : punto); { procesamiento de la función objetivo lineal}
var i : integer;
begin
  writeln('<<<< introduzca los coeficientes de la función objetivo :>>>>');
  {Si-}
  for i:=1 to nvar do
  begin
    fobj_lineal[i]:=0;
    write('coeficiente de s[',i:4,'] : ');
    repeat readln(fobj_lineal[i]) until (iorestult=0);
  end;
  {Si+}
end; {fobj_lineal}
{*****}
procedure tecnologicas(var coef_tec; {introducción de la matriz de coeficientes}
                      var relacion : t_relacion; {tecnologicas}
                      var recurso : p_recurso);
var ij : integer;
    rela_type: char;
begin
  clrscr;
  writeln('introduzca los coeficientes de las restricciones correspondientes ');
  {Si-}
  for i:=1 to restricciones do
  begin
    writeln('-----');
    write('coeficientes restricción #',i:4,': ');
    for j:=1 to nvar do
    begin

```

```

write('coeficiente x[';j;4;'] =?);
repeat readln(coeficientes[i;j]) until (i=nsult=0);
end;
write(' tipo de relación (<=) L, (=), E, (>=) U ->>> ?);
repeat
  rela_type:=readkey
until (rela_type in ['L','E','U','<','>','E']);
writeln(rela_type);
relacion[i]:=rela_type;
write('disponibilidad del recurso [';i;4;'] :?);
repeat readln(recurso[i]) until (i=nsult=0);
end;
{S!+}
end; {tecnologicos}
{*****}
procedure aumenta (var coeficientes : coef_tec; {aumento automatico de las }
var relacion : t_relacion; {restricciones de no negatividad}
var recurso : punteros);
var i,j : integer;
rela_type:=char;
begin
for i:=restricciones+1 to restricciones+nvar do
begin
for j:=1 to nvar do
begin
coeficientes[i;j]:=0;
end;
rela_type:='L';
relacion[i]:=rela_type;
recurso[i]:=0;
end;
j:=0;
for i:=restricciones+1 to restricciones+nvar do
begin
j:=j+1;
coeficientes[i;j]:=1;
end;
end; {aumenta}
{*****}
procedure transforma(var coeficientes : coef_tec; {transforman a las restricciones a un formato}
var fobj_lineal : punto; {mas conveniente al método de los centros}
var relacion : t_relacion;
var recurso : punteros;
var optlineal : integer);
var i,j : integer;
begin
if optlineal = 0 then
begin
optlineal:=1;
for i:=1 to nvar do
fobj_lineal[i]:=-fobj_lineal[i];
end;
for i:=1 to restricciones do
case relacion[i] of
'u','U' : begin
for j:=1 to nvar do
coeficientes[i;j]:=-coeficientes[i;j];
recurso[i]:=-recurso[i];
relacion[i]:='L';
end;
'e','E' : writeln('caso igualdad');
end;
end; {transforma}
{*****}
procedure muestra_plan; {muestra el planteamiento del problema}
var i,j : integer;
begin
clrscr;
writeln('***** METODO DE LOS CENTROS ANALITICOS *****');
writeln('***** cheque si los datos son correctos:*****');
if optlineal=1 then
write(' Maximizar')
else
write(' Minimizar');
writeln(' funcion objetivo : ');
write('f(x) = ');
for i:=1 to nvar do
write('(',fobj_lineal[i];10.3;')*x[';i;4;']');
writeln;
writeln('sujeto a: ');
for i:=1 to restricciones do

```

```

begin
write('1:4:-->');
for j:=1 to nvar do
write(' coeficientes[i,j]:10:3:)'*x[j,T]);
case relacion[i] of
T,'L' : write('<= ');
'E' : write('= ');
'U','X' : write('> ');
else write('***');
end;
writeln( recurso[j]:10:3);
end;
writeln(' grado de error: ',errorlineal:10:8);
if elige in ['N','N'] then
writeln('método de solución: Newton')
else
writeln('método de solución: Gradiente');
end;
writeln('con los datos correctos?...(s/n)');
end. {muestra_plan}
{.....}
procedure corrige(var optlineal :integer; { procedimiento para permitir la}
var errorlineal :real; { corrección de datos}
var elige:prueba:char;
var fobj_lineal :punto;
var coeficientes :coef_tec;
var relacion :t_relacion;
var recurso :puntores);
var num1,num2: integer;
begin
clrscr;
writeln('--- correcciones ---');
writeln;
writeln('1.- tipo de optimización (max/min).');
writeln('2.- grado de error. ');
writeln('3.- método de solución. ');
writeln('4.- coeficiente en la función objetivo. ');
writeln('5.- coeficiente en restricción. ');
writeln('6.- tipo de relación y/o recurso en restricción. ');
writeln;
writeln('elige su opción...(cancela con <esc>');
prueba:=readkey;
writeln('-----');
case prueba of
'1': begin
repeat
write('problema a maximizar (1), o minimizar (0) ?(1/0): ');
readln(optlineal);
if optlineal in [0,1] then exit;
until false;
end;
'2': begin
write('grado de error ?');
{ $i- }
repeat readln(errorlineal) until (iresult=0);
{ $i+ }
end;
'3': begin
write(' método por el que desea solucionar, newton(n), gradiente (g): ');
repeat
elige:=readkey;
until elige in ['n','N','g','G'];
writeln(elige);
end;
'4': begin
writeln('para cancelar de un numero invalido');
write(' coeficiente a cambiar en función objetivo?...');
{ $i- }
repeat readln(num1) until (iresult=0);
if (num1 > 0) and (num1 <= nvar) then
begin
write ('nuevo valor para x[' ,num1, ']- ');
repeat readln(fobj_lineal[num1]) until (iresult=0);
end
else
write ('operación cancelada');
{ $i+ }
end;
'5': begin
writeln('para cancelar de un numero invalido');
write(' número de restricción donde se efectuará el cambio?...');

```

```

{Si-}
repeat readln(num1) until (iresult=0);
write(' coeficiente a cambiar en la restricción ',num1,' ?...');
repeat readln(num2) until (iresult=0);
if ((num1>0)and(num1<=-restricciones)and((num2>0)and(num2<=-nvar)) then
begin
write ('nuevo valor para x(',num2,')= ');
repeat readln(coeficientes[num1,num2]) until (iresult=0);
end
else
write ('operación cancelada');
{Si+}
end;
6: begin
writeln('para cancelar de un numero invalido');
write(' numero de restricción donde se efectuara el cambio?..');
{Si-}
repeat readln(num1) until (iresult=0);
if (num1>0)and(num1<=-restricciones) then
begin
write(' tipo de relación (<=) L, (=), E, (>=) U --->> ');
repeat
relacion[num1]:=readkey
until (relacion[num1] in ['L','T','U','=','<','E']);
writeln(relacion[num1]);
write('disponibilidad del recurso [',num1,'] :');
repeat readln(recurso[num1]) until (iresult=0);
end
else
write ('operación cancelada');
{Si+}
end;
else writeln('operación cancelada...');
end;
end; {corrige}
{*****}
procedure guarda; {procedimiento que guarda la información}
var
archivo : text;
ij : integer;
begin
{i-}
repeat
write('nombre del archivo que contendrá los datos?... ');
readln(nombre);
assign(archivo,nombre);
rewrite(archivo);
until (iresult=0);
{Si+}
writeln(archivo,nvar);
writeln(archivo,restricciones);
writeln(archivo,optlineal);
writeln(archivo,errolineal);
writeln(archivo,elige);
for i:= 1 to nvar do
writeln(archivo,fobj_lineal[i]);
for i:= 1 to restricciones do
begin
for j:= 1 to nvar do
writeln(archivo,coeficientes[i,j]);
writeln(archivo,relacion[i]);
writeln(archivo,recurso[i]);
end;
close(archivo);
end; {guarda}
{*****}
procedure lectura (var coeficientes : array of real; {lectura de información}
var fobj_lineal : array of integer;
var relacion : array of integer;
var recurso : array of integer;
var nombre : array of string;
var prueba_elige : array of boolean;
var nvar,restricciones,optlineal,itercentro : integer;
var errolineal : array of real;
var hora,minu,segu,cent,hora2,minu2,segu2,cent2;word);
var
archivo : text;
ij : integer;
begin
{Si-}

```

```

repeat
  write('nombre del archivo que contiene los datos?... ');
  readln(nombre);
  assign(archivo,nombre);
  reset(archivo);
  until (iorresult=0);
  {Si+}
  readln(archivo,nvar);
  readln(archivo,restriciones);
  readln(archivo,oplineal);
  readln(archivo,errolineal);
  readln(archivo,eligo);
  for i:=1 to nvar do
    readln(archivo,fobj_lineal[i]);
  for i:=1 to restricciones do
    begin
      for j:=1 to nvar do
        readln(archivo,coeficientes[i,j]);
      readln(archivo,relacion[i]);
      readln(archivo,recurso[i]);
    end;
  if not eof(archivo) then
    begin
      muestra_plan;
      write('el problema ha sido resuelto, desea ver los resultados?...(s/n)');
      repeat
        prueba:=-readkey;
        until prueba in ['s','S','n','N'];
        if prueba in ['s','S'] then
          begin
            writeln;
            writeln('punto optimo:');
            for i:=1 to nvar do
              begin
                readln(archivo,xuno[i]);
                writeln('xopt[':i:'] = ',xuno[i]:10:4);
              end;
            readln(archivo,val_2);
            writeln('valor de la función objetivo: ',val_2:10:4);
            readln(archivo,e_lineal);
            writeln('con un error de ',e_lineal:10:8);
            readln(archivo,iterocentro);
            writeln('número de iteraciones: ',iterocentro);
            writeln;
            readln(archivo,hora);readln(archivo, minu);readln(archivo, segu);readln(archivo, cent);
            readln(archivo, hora2);readln(archivo, minu2);readln(archivo, segu2);readln(archivo, cent2);
            writeln('tiempo inicio: ',hora,'.',minu,'.',segu,'.',cent);
            writeln('tiempo final: ',hora2,'.',minu2,'.',segu2,'.',cent2);
            write ('pulse <enter>');
            readln;
          end;
        end;
      close(archivo);
    end;
  {*****}
  procedure salva_final: {salva los resultados}
  var
    archivo : text;
    i : integer;
  begin
    assign(archivo,nombre);
    append(archivo);
    for i:=1 to nvar do
      writeln(archivo,xuno[i]);
    writeln(archivo,val_2);
    writeln(archivo,e_lineal);
    writeln(archivo,iterocentro);
    writeln(archivo,hora);writeln(archivo,minu);writeln(archivo,segu);writeln(archivo,cent);
    writeln(archivo,hora2);writeln(archivo,minu2);writeln(archivo,segu2);writeln(archivo,cent2);
  close(archivo);
  end; {salva_final}
  {*****}
  begin {principal}
    clrscr;
    writeln('----- MÉTODO DE LOS CENTROS ANALITICOS -----');
    writeln;
    write('los datos se obtendrán de archivo (f), o son nuevos (n)? (f/n): ');
    repeat
      prueba:=-readkey
    until prueba in ['f','F','n','N'];
    writeln(prueba);
  
```

```

if prueba in ['F','f'] then
lectura (coeficientes,fobj_lineal,relacion,recurso,nombre
prueba,elige,nvar,restricciones,optlineal,itercentro,errorlineal,
hora.minu,segu,cent,hora2,mini2,segu2,cent2)
else
begin
repeat
start(nvar,restricciones,optlineal,errorlineal,elige);
repeat
prueba:=readkey;
until (prueba in ['S','s','N','n']);
until (prueba='S')or(prueba='N');
f_obj_lineal(fobj_lineal);
tecnologicos(coeficientes,relacion,recurso);
aumenta(coeficientes,relacion,recurso);
end;
restricciones:=restricciones+nvar;
repeat
muestra_plan:
repeat
prueba:=readkey;
until prueba in ['S','s','N','n'];
if (prueba='N')or(prueba='n') then
corrigioptlineal,errorlineal,elige,prueba,fobj_lineal,coeficientes,relacion,recurso);
until prueba in ['S','s'];
write('guardar informacion? (s/n)...');
repeat
prueba:=readkey
until prueba in ['S','s','N','n'];
writein(prueba);
if prueba in ['s','S'] then
guarda;
transforma(coeficientes,fobj_lineal,relacion,recurso,optlineal);
muestra_plan;
itercentro:=0;
error:=0.0001;
p_inicial(xuno);
gettime(hora,minu,segu,cent);
val_lineal(xuno,fobj_lineal,val_2);
writein('valor inicial de la funcion objetivo lineal: ',val_2:10:3);
{se debe activar la siguiente linea para el caso en que se desee ver los resultados de cada iteración}
{ writein('iter ', 'valor anterior:',20,'valor actual:',18,'error:',18);}
repeat
val_1:=val_2;
t:=val_1-b;
itercentro:=itercentro+1;
case elige of
'n','N' : newtonopt;
'g','G' : gradientopt;
else writein('sin metodo');
exit;
end;
val_lineal(xuno,fobj_lineal,val_2);
e_lineal:=abs(val_1-val_2);
if itercentro=4 then
error:=0.0001;
{se debe activar la siguiente linea para el caso en que se desee ver los resultados de cada iteración}
{imprimo(itercentro,val_2,val_1,e_lineal);}
if (sal = true)or(val_2=val_1) then
begin
write('desea continuar (S/N) ?... ');
repeat
if readkey in ['n','N'] then exit;
until readkey in ['s','S'];
writein('S');
end;
until (e_lineal<errorlineal);
gettime(hora2,mini2,segu2,cent2);
imprfinal(errorlineal,val_2,e_lineal);
writein;
writein('tiempo inicio: ',hora,'.',mini,'.',segu,'.',cent);
writein('tiempo final: ',hora2,'.',mini2,'.',segu2,'.',cent2);
writein;
writein(' pulse <enter > ');
readin;
writein('espere un momento');
salva_final;
end. {principal}

```

GLOSARIO

BFGS

DFP

DSC

Gradiente,

$\nabla f(x)$

Método Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shano

Método Davidon-Fletcher-Powell

Método Davies-Swan-Campey

Sea $f(x)$ continua y diferenciable, se define como el gradiente de $f(x)$, escrito $\nabla f(x)$, al siguiente vector de funciones:

$$\nabla f(x) = \begin{array}{|c} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{array}$$

Hessiano, $H(x)$

Sea $f(x)$ continua y diferenciable se define como matriz Hessiana o simplemente Hessiano, escrito $H(x)$, a la siguiente matriz cuadrada:

$$H(x) = \begin{array}{|cccc} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{array}$$

Matriz Definida Positiva	<p>Sea</p> $Q(x) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{vmatrix}$ <p>se dice que $Q(x)$ es definida positiva si $Q(x) > 0$ para cada $X \neq 0$</p>
Matriz Identidad	<p>Es una matriz cuadrada en la cual todos los elementos de la diagonal principal son "unos", y todos los elementos fuera de la diagonal principal son "ceros", esto es:</p> $a_{ij} = 1, \text{ para } i=j$ $a_{ij} = 0, \text{ para } i \neq j$
Matriz Transpuesta	<p>La matriz A^T se le llama transpuesta de A, si el elemento a_{ij} de A ($i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$) es el elemento a_{ji} de A^T, es decir, las filas de A se convierten en las columnas de A^T, mientras que las columnas de A se convierten en las filas de A^T.</p>
Matriz Inversa	<p>Sean B y C dos matrices n-cuadradas tales que $BC = CB = I$, donde I es la matriz Identidad, entonces B se llama la inversa de C y C es la inversa de B. La notación común para la inversa es escribir B^{-1} y C^{-1}.</p>
Matriz Simétrica PPL	<p>Es aquella en donde $A^T = A$ Problema de programación lineal.</p>

BIBLIOGRAFÍA

- INTRODUCTION TO MATHEMATICAL PROGRAMMING
APPLICATIONS AND ALGORITHMS
WAYNE L. WINSTON
PWS-KENT PUBLISHING COMPANY-BOSTON,
1ª EDICION, 1991.

- NONLINEAR OPTIMISATION
L.C.W. DIXON
THE UNIVERSITIES PRESS LONDON,
1ª EDICION, 1980.

- OPTIMIZATION OF CHEMICAL PROCESSES
T.F. EDGAR, D.M. HIMMELBLAU
McGRAW-HILL,
1ª EDICION, 1988.

- APPLIED NONLINEAR PROGRAMMING
D.M. HIMMELBLAU
McGRAW-HILL,
1ª EDICION, 1985.

- INVESTIGACION DE OPERACIONES
HAMDY A. TAHA
ALFAOMEGA,
4ª EDICION, 1993.

- INTRODUCCION A LA INVESTIGACION DE OPERACIONES
FEDERICK S. HILLER, GERALD J. LIBERMAN
McGRAW-HILL,
5ª EDICION, 1993.

- LINEAR PROGRAMMING
SAUL L.GASS
McGRAW-HILL BOOK COMPANY
5ª EDICION, 1985.

- LINEAR PROGRAMMING
G. HADLEY
ADDISON-WESLEY-PUBLISHING COMPANY INC.
2ª EDICION, 1962.

- CONTEMPORARY MATHEMATICS,
MATHEMATICAL DEVELOPMENTS
ARISING FROM LINEAR PROGRAMMING
JEFFREY C. LAGARIAS Y MICHEL J. TODD, EDITORS
AMERICAN MATHEMATICA SOCIETY 1988.

- MANAGEMENT SCIENCE
KAMLESH MATHUR, DANIEL SOLOW
THE ART OF DECISION MAKING
PRINTICE HALL,
1ª EDICION, 1994.

Agradecimientos:

En este breve espacio, agradezco y reconozco el apoyo valioso, e imprescindible, de todas aquellas personas que de alguna forma han influido en mi para impulsarme a la culminación de mis estudios profesionales y a mi titulación a través de este trabajo de investigación. Es meritorio hacer un reconocimiento explícito a mis sinodales: Mat. Héctor Arguelles Tejada, Fis. Mat. J. Luis Suárez Madariaga, Ing. Reyes L. Moncada García (asesor), Lic. Mayra Olguin Rosas, Lic Mayra Elizondo Cortés, quienes realizaron la revisión y aprobación del presente trabajo. Por último, expreso mi agradecimiento a mis hermanos por apoyo y confianza en mi, y agradezco muy especial y profundamente a mis padres: **Manuel Valencia Hernandez** y **Ma. Luisa Ortiz Leandro**, a quienes debo en gran medida mi formación como persona, y a quienes dedico mis años de estudios, el presente trabajo y el título que la Universidad me otorgue:

GRACIAS.

Por Mi Raza Hablará El Espíritu

CVO/EPQH