

43
241



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

GEOMETRIA DE GRUPOS FUCHSIANOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
M A T E M A T I C O
P R E S E N T A :
ROGELIO VALDEZ DELGADO



DIRECTOR DE TESIS:
M. en C. JOSE ANTONIO GOMEZ ORTEGA

DIVISION DE ESTUDIOS



1997
FACULTAD DE CIENCIAS
SECRETARIA DE EDUCACION

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



VERDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

GEOMETRIA DE GRUPOS FUCHSIANOS

realizado por ROGELIO VALDEZ DELGADO

con número de cuenta 9355254-9 . pasante de la carrera de MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis	M. en C. JOSE ANTONIO GOMEZ ORTEGA
Propietario	DOCTOR SILVIA DE NEYMET URBINA
Propietario	M. en C. PILAR MARTINEZ TELLEZ
Suplente	DOCTOR GUILLERMO SIENRA LOERA
Suplente	DOCTOR ANGEL TAMARIZ MASCARUA

JCGO

Pilar Martínez Tellez

G. Sierra

Consejo Departamental de Matemáticas
Dr. MANUEL FALCONI MACARA

m. falconi

Geometría de Grupos Fuchsianos

Rogelio Valdez Delgado
Facultad de Ciencias UNAM

Enero, 1997

Deseo agradecer ...

No he tratado de buscar en ninguna parte las palabras con las cuales quiero agradecer y dedicar este trabajo a la gente que ha estado siempre conmigo y que aprecio de verdad, simplemente al pensar en ellos me han venido a la mente y deseo plasmarlas aquí.

Antes que nada dedico esto a mis Padres pero más que una dedicatoria lo expreso como un profundo agradecimiento por todo lo que me han enseñado en la vida y por haberme apoyado en todo siempre.

A ti Sara por toda la motivación que me has hecho sentir y por todo tu amor.

A mis amigos de toda la vida Avelino, Gabriel y Miguel por haber compartido conmigo grandes momentos, por los sueños que hemos tenido y por estar siempre ahí.

A mis amigos, Carlos, Andres, Fidel con los cuales he estado a lo largo de la carrera y de los cuales he aprendido mucho, gracias.

Especialmente quiero dedicar este trabajo, que aunque humilde, pero hecho con el mayor de los entusiasmos y esperanza, al profesor José Antonio Gómez Ortega, Toño, por todo su apoyo durante todo este tiempo, por haberme mostrado que eran las matemáticas, por haberme enseñado matemáticas y por haberme puesto en el camino de lo que realmente me gusta, las matemáticas. También deseo agradecerle por los consejos que he recibido de el y sobretodo por no sólo ser el profesor, sino el amigo.

A mis tíos Licha y Manuel por haberme acogido en su hogar y haber soportado la carga que pudiera haber sido yo para ellos.

A todos mis profesores que han contribuido a que pueda estar haciendo esto, especialmente a los profesores Silvia de Neymet U., Angel Tamariz Mascarúa y a todos los amigos que durante la carrera yo he conseguido.

Enero 1997

Contenido

Introducción	1
1 Formas Cuadráticas	5
1.1 Ortogonalidad	5
1.2 Teorema de Witt	9
1.3 Tipos Sylvester	12
1.4 Espacios Vectoriales Euclidianos	14
1.5 Formas Parabólicas	18
1.5.1 Similitudes	21
1.6 Grupo de Lorentz	24
2 Grupo de Möbius	37
2.1 Transformaciones de Möbius	37
2.2 Producto Inverso de Esferas	45
2.3 Esfera de Riemann	49
3 Tres Tipos de Geometrías	55
3.1 Geodésicas	55
3.2 Espacio Euclidiano	56
3.3 Espacio Esférico	61
3.4 Espacio Hiperbólico	64
3.5 Modelo del disco de Klein	67
3.6 Modelo del disco de Poincaré	68
3.7 Semi-Espacio de Poincaré	72
3.8 Semi-Plano de Poincaré	73
4 Plano Hiperbólico	77
4.1 El espacio $sl_2(\mathbb{R})$	77
4.2 Haces de Geodésicas	79
4.2.1 Vectores normales	79
4.2.2 Angulos orientados	80
4.2.3 Intersección de geodésicas	81
4.2.4 Geodésicas con una perpendicular común	82
4.2.5 Rectas con final común	84
4.2.6 Haces de geodésicas	84

Introducción

Los conocimientos matemáticos son proposiciones que construye nuestro intelecto para que siempre funcionen como verdaderas, porque son innatas o bien porque las matemáticas se inventaron antes que las otras ciencias

William the Baskerville

Al hablar de geometría hiperbólica es difícil no remontarse a los inicios de ésta, cuando era una materia oscura. Desde la antigüedad el axioma de las paralelas despertó la inquietud de los matemáticos pues les pareció el único axioma de la geometría euclidiana que no se podía comprobar con el requisito de simplicidad y de aceptabilidad intuitiva. Hasta finales del siglo XVIII la validez del axioma de las paralelas fue cuestionado, de hecho se trabajó mucho con el intento fallido de probar este axioma por medio de los otros axiomas de la geometría euclidiana, los cuales se veían mucho más intuitivos. Alrededor de 1820, tres matemáticos de manera independiente empezaron a construir otra geometría con rectas, planos y ángulos similares a los usuales pero sin tomar en cuenta el axioma de las paralelas por el contrario, aceptando que hay más de una paralela a una recta que pasa por un punto dado fuera de ella, estos fueron János Bolyai en Hungría, Carl F. Gauss en Alemania y Nikolai I. Lobachevski en Rusia.

Gauss fue el primero en hacer esto, pero no publicó sus conclusiones y es que la mayoría, no sólo de los matemáticos de la época, sino de gente culta en general, quizá debido en parte a las doctrinas filosóficas entonces prevalecientes, estaba firmemente convencida de que no se puede ni siquiera concebir el espacio apartándose de los axiomas de Euclides. Gauss, pese a su gran autoridad, temía pues desencadenar una polémica si diera a conocer sus ideas. Bolyai no recibió reconocimiento de su descubrimiento hasta después de su muerte, así la geometría no-euclidiana en sus inicios fue conocida como geometría Lobachevskiana y no fue sino hasta principios de este siglo cuando Felix Klein introdujo el término geometría hiperbólica.

Eugenio Beltrami, en 1868 fue el primero en construir un modelo explícito

Contenido

Introducción	1
1 Formas Cuadráticas	5
1.1 Ortogonalidad	5
1.2 Teorema de Witt	9
1.3 Tipos Sylvester	12
1.4 Espacios Vectoriales Euclidianos	14
1.5 Formas Parabólicas	18
1.5.1 Similaridades	21
1.6 Grupo de Lorentz	24
2 Grupo de Möbius	37
2.1 Transformaciones de Möbius	37
2.2 Producto Inverso de Esferas	45
2.3 Esfera de Riemann	49
3 Tres Tipos de Geometrías	55
3.1 Geodésicas	55
3.2 Espacio Euclidiano	56
3.3 Espacio Esférico	61
3.4 Espacio Hiperbólico	64
3.5 Modelo del disco de Klein	67
3.6 Modelo del disco de Poincaré	68
3.7 Semi-Espacio de Poincaré	72
3.8 Semi-Plano de Poincaré	73
4 Plano Hiperbólico	77
4.1 El espacio $sl_2(\mathbb{R})$	77
4.2 Haces de Geodésicas	79
4.2.1 Vectores normales	79
4.2.2 Angulos orientados	80
4.2.3 Intersección de geodésicas	81
4.2.4 Geodésicas con una perpendicular común	82
4.2.5 Rectas con final común	84
4.2.6 Haces de geodésicas	84

4.3	Clasificación de Isometrías	85
4.3.1	Horolaciones	87
4.3.2	Rotaciones	88
4.3.3	Traslaciones	88
4.4	El Grupo Especial Lineal	90
4.5	Trigonometría Hiperbólica	92
4.6	Cono de Luz	98
4.7	De Poincaré a $sl_2(\mathbb{R})$	99
5	Grupos Fuchsianos	101
5.1	Subgrupos Discretos	101
5.2	Subgrupos Elementales	107
5.3	Geometría de Conmutadores	114
5.4	Teorema de Jacob Nielsen	118
5.5	Cúspides	125
5.6	El espacio cociente como superficie de Riemann	131
5.7	Dominios Fundamentales	134
	5.7.1 Dominios Localmente Finitos	134
5.8	Dominios Convexos	138
5.9	Dominios de Dirichlet	143
	Bibliografía	147
	Lista de Símbolos	149
	Índice	151

Introducción

Los conocimientos matemáticos son proposiciones que construye nuestro intelecto para que siempre funcionen como verdaderas, porque son innatas o bien porque las matemáticas se inventaron antes que las otras ciencias

William the Baskerville

Al hablar de geometría hiperbólica es difícil no remontarse a los inicios de ésta, cuando era una materia oscura. Desde la antigüedad el axioma de las paralelas despertó la inquietud de los matemáticos pues les pareció el único axioma de la geometría euclidiana que no se podía comprobar con el requisito de simplicidad y de aceptabilidad intuitiva. Hasta finales del siglo XVIII la validez del axioma de las paralelas fue cuestionado, de hecho se trabajó mucho con el intento fallido de probar este axioma por medio de los otros axiomas de la geometría euclidiana, los cuales se veían mucho más intuitivos. Alrededor de 1820, tres matemáticos de manera independiente empezaron a construir otra geometría con rectas, planos y ángulos similares a los usuales pero sin tomar en cuenta el axioma de las paralelas por el contrario, aceptando que hay más de una paralela a una recta que pasa por un punto dado fuera de ella, estos fueron János Bolyai en Hungría, Carl F. Gauss en Alemania y Nikolai I. Lobachevski en Rusia.

Gauss fue el primero en hacer esto, pero no publicó sus conclusiones y es que la mayoría, no sólo de los matemáticos de la época, sino de gente culta en general, quizá debido en parte a las doctrinas filosóficas entonces prevaletentes, estaba firmemente convencida de que no se puede ni siquiera concebir el espacio apartándose de los axiomas de Euclides. Gauss, pese a su gran autoridad, tenía pues desencadenar una polémica si diera a conocer sus ideas. Bolyai no recibió reconocimiento de su descubrimiento hasta después de su muerte, así la geometría no-euclidiana en sus inicios fue conocida como geometría Lobachevskiana y no fue sino hasta principios de este siglo cuando Felix Klein introdujo el término geometría hiperbólica.

Eugenio Beltrami, en 1868 fue el primero en construir un modelo explícito

del espacio hiperbólico, algo así como un mapa del espacio hiperbólico en el espacio euclidiano. Después otros modelos fueron introducidos, cada uno con sus ventajas y desventajas, estos modelos sirven de la misma forma que un mapa de la tierra sirve para conocer a ésta.

En los primeros cuarenta años de existencia de la geometría hiperbólica, esta estuvo en una especie de limbo, separada del resto de las matemáticas y sin bases firmes que la fundamentaran. Sin embargo con la teoría de superficies de Gauss en 1827 y la teoría de variedades en dimensiones mayores de Riemann en 1868 se abrió el camino para hacer de la geometría no-euclidiana una respetable rama de las matemáticas.

Uno se puede preguntar qué tan distintas son la geometría euclidiana y la hiperbólica, para contestar esto es bueno compararlas también con la geometría esférica.

La geometría esférica y la geometría hiperbólica son opuestas duales; esta dualidad empieza de manera natural con el postulado de las paralelas y se hace más evidente con los triángulos en cada geometría. La suma de los ángulos de un triángulo esférico es siempre mayor que 180° mientras que la suma de los ángulos de un triángulo hiperbólico es siempre menor que 180° , entonces uno podría decir que la geometría euclidiana está "en medio" de estas dos geometrías, pues los ángulos de un triángulo euclidiano suman 180° .

La dualidad continúa cuando consideramos las curvaturas de los modelos de estas geometrías, por ejemplo si adoptamos la esfera unitaria como modelo de la geometría esférica, vemos que tiene curvatura constante 1; igualmente existen modelos de la geometría hiperbólica cuya curvatura es -1, no es de sorprenderse entonces que un plano euclidiano tenga curvatura 0, -1 un valor intermedio entre -1 y 1.

En 1882 Henri Poincaré introduce el modelo del semi-espacio superior de la geometría hiperbólica y lo usa para identificar al grupo de isometrías que preservan orientación del plano hiperbólico con el grupo consistente de todas las transformaciones fraccionales lineales $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con coeficientes reales y con determinante uno, llamado $PSL_2(\mathbb{R})$; Poincaré usaba este descubrimiento para ilustrar la naturaleza espontánea de la creatividad matemática, pues cuenta que al abordar un camión repentinamente vino a él la idea de que las transformaciones que él había usado para definir grupos Fuchsianos eran idénticas a las de la geometría no-euclidiana.

Los grupos Fuchsianos fueron estudiados primeramente por Poincaré en 1880 después de leer un artículo de L. Fuchs sobre ecuaciones diferenciales, sin embargo algunos ejemplos particulares como el grupo modular habían sido trabajados antes.

En muchos aspectos los grupos Fuchsianos están relacionados con las latices, es decir grupos discretos de isometrías euclidianas cuyos cocientes son superficies de Riemann compactas homeomorfas al toro; los grupos Fuchsianos son grupos discretos de isometrías hiperbólicas y sus cocientes también son superficies de Riemann.

Las funciones que son invariantes bajo latices son llamadas elípticas, mientras que, las que son invariantes bajo grupos Fuchsianos son llamadas funciones automorfas, es por esto que Poincaré enfatizó la importancia de encontrar grupos discretos de isometrías hiperbólicas.

Pero antes de empezar a estudiar grupos Fuchsianos en este trabajo, debemos dar las bases, primero para construir los modelos adecuados de espacios hiperbólicos, y después para encontrar los grupos de isometrías.

La tesis se encuentra dividida en seis capítulos; iniciamos este trabajo considerando las nociones generales de formas cuadráticas y sus grupos ortogonales asociados; especialmente estudiamos tres tipos de formas cuadráticas, las cuales nos dan los tres tipos de geometrías mencionados; luego veremos propiedades generales del grupo de transformaciones de un espacio vectorial generado por inversiones y reflexiones en esferas, este será un grupo de interés fundamental en el estudio de las isometrías hiperbólicas, todo lo anterior está en los capítulos 1 y 2 del trabajo.

Regresando a la dualidad entre la geometría esférica y la geometría hiperbólica, en el capítulo 3 hacemos una comparación de las tres geometrías, incluyendo a la geometría euclidiana, resaltando la representación de las geodésicas en cada espacio y dotando de una métrica a cada geometría. Al final de este capítulo introducimos los tres modelos principales del espacio hiperbólico, haciendo énfasis en el del semi-plano de Poincaré.

Después en el capítulo 4 analizamos con más detalle las geodésicas del plano hiperbólico así como la trigonometría de ésta, utilizando un espacio vectorial especial, un espacio de matrices, que nos facilitará los cálculos.

Finalmente nos adentramos al tema central de este trabajo: grupos discretos de isometrías del plano hiperbólico o grupos Fuchsianos, con el modelo del semi-espacio de Poincaré \mathbb{H}^2 , donde las isometrías son el grupo de transformaciones generado por inversiones y reflexiones en esferas de \mathbb{H}^2 ; haremos algunas clasificaciones sobre grupos Fuchsianos, teniendo especial interés en el Teorema de Nielsen, en donde se caracteriza a los grupos Fuchsianos no elementales. También se hace un análisis detallado de las cúspides de un grupo Fuchsiano, así como de los espacios cociente. Como la mejor manera de obtener información acerca de un grupo Fuchsiano es a través de los dominios fundamentales, estudiaremos los conceptos más generales acerca de éstos.

Rogelio Valdez Delgado
Ciudad Universitaria, México, DF
Enero 1997

4 Introducción

1 Formas Cuadráticas

En este capítulo, damos las bases para el trabajo subsecuente, vemos aquí la teoría básica necesaria para el desarrollo de los temas importantes contenidos en esta tesis.

Iniciamos analizando los principios generales de las formas cuadráticas y sus grupos ortogonales asociados. Nuestro interés en estudiar formas cuadráticas es motivado por la facilidad que estas prestan para trabajar la geometría hiperbólica; resaltamos que las formas cuadráticas abundan en el contexto matemático, así como en la mecánica y en la física. Dieudonné dijo que era difícil encontrar una teoría matemática que no incluyera formas bilineales. Mencionamos algunos ejemplos; en análisis están presentes en los espacios de Hilbert y Sobolev; en topología algebraica, el producto cuña da una forma cuadrática (o alternante); en aritmética, la descomposición de enteros en suma de cuadrados; en geometría diferencial, las métricas de Riemann y de Lorentz (la última en la teoría de la relatividad) son formas cuadráticas.

En especial prestamos atención a tres tipos de formas cuadráticas: las definidas positivas, las parabólicas y las hiperbólicas, con sus correspondientes grupos ortogonales que junto con los respectivos grupos de isometrías nos dan las bases de tres geometrías que consideraremos mas adelante.

Estudiaremos el grupo ortogonal de una forma cuadrática como una generalización del conocido grupo $O(n)$ de matrices ortogonales en un espacio vectorial euclidiano, también extendemos el concepto de ortonormalidad a espacios no euclidianos. Veremos la completación no-singular de un subespacio arbitrario, dentro de la prueba del Teorema de Witt, así como la descomposición de una transformación ortogonal en transformaciones más simples.

En la última sección introducimos un espacio vectorial, el cual es base para desarrollar la geometría hiperbólica que nos interesa, así como las transformaciones de Lorentz, que resultan las isometrías de la geometría hiperbólica.

1.1 Ortogonalidad

En este capítulo entenderemos por E un espacio vectorial de dimensión finita n sobre un campo k , donde $k = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} , aunque bien se podría tomar un campo de característica distinta de dos.

Definición Una forma cuadrática es una función $Q : E \rightarrow k$ homogénea de grado 2, es decir

$$Q(\lambda z) = \lambda^2 Q(z) \quad \lambda \in k, z \in E$$

con la propiedad de que

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)) \quad x, y \in E$$

es bilineal en x y y .

La igualdad anterior se conoce como **fórmula de Polarización**.

Proposición 1.1 *La fórmula de Polarización induce una correspondencia uno a uno entre formas cuadráticas y formas bilineales simétricas de E sobre el campo k .*

Demostración:

Sea $Q(z)$ una forma cuadrática, si definimos $\langle x, y \rangle$ por la fórmula de Polarización es fácil ver que es bilineal y simétrica.

Recíprocamente, para una forma bilineal simétrica $\langle x, y \rangle$ definamos $Q: E \rightarrow k$ por $Q(z) = \langle z, z \rangle$, así $Q(\lambda z) = \langle \lambda z, \lambda z \rangle = \lambda^2 \langle z, z \rangle = \lambda^2 Q(z)$, por lo que $Q(z)$ es homogénea de grado 2. Veamos que $Q(z)$ cumple la fórmula de Polarización, como

$$\begin{aligned} Q(x+y) &= \langle x+y, x+y \rangle \\ &= \langle x, x+y \rangle + \langle y, x+y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2 \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

tenemos que $Q(x+y) - Q(x) - Q(y) = 2 \langle x, y \rangle$, por lo que

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(Q(x+y) - Q(x) - Q(y))$$

de donde, $Q(z)$ es una forma cuadrática. ■

De esta manera hablaremos de la forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle$ asociada a la forma cuadrática $Q(z)$. También (E, Q) denotará la forma cuadrática Q en el espacio vectorial E .

Definición *Dos elementos x, y en E son ortogonales si $\langle x, y \rangle = 0$. El subespacio total ortogonal a K , un subespacio lineal de E , se define como $K^\perp = \{e \in E : \forall x \in K \langle e, x \rangle = 0\}$.*

Definición *Una forma cuadrática Q en un espacio vectorial E es no singular si su forma bilineal asociada $\langle \cdot, \cdot \rangle$, satisface lo siguiente: si $\forall x \in E$, $\langle x, y \rangle = 0$ entonces $y = 0$.*

De la definición se sigue que Q es no singular si y sólo si $E^\perp = 0$. Diremos en tal caso que E es no singular entendiéndose que en E se ha fijado ya una forma cuadrática.

A las transformaciones lineales con dominio E y contradominio el campo k , se les denomina formas lineales sobre E . Las formas lineales forman un espacio vectorial sobre k , llamado el espacio dual E^* , y $\dim E^* = \dim E$; teniendo en cuenta este hecho, vemos que cada forma lineal no es otra cosa que la forma cuadrática actuando en un punto fijo, lo cual se sigue por el siguiente resultado.

Lema 1.1 Sea (E, Q) una forma cuadrática no singular. Entonces la función

$$q: E \rightarrow E^*, \text{ donde } q(e)(x) = \langle e, x \rangle \quad e, x \in E$$

es lineal y biyectiva.

Demostración:

Sean $e, f \in E$ y $\lambda, \mu \in k$, entonces $q(\lambda e + \mu f)(x) = \langle \lambda e + \mu f, x \rangle = \lambda \langle e, x \rangle + \mu \langle f, x \rangle = \lambda q(e)(x) + \mu q(f)(x)$ por lo que es lineal. Sea $e \in E$ tal que $e \in \ker(q)$ entonces $q(e)(x) = \langle e, x \rangle = 0 \quad \forall x \in E$, es decir $e \in E^\perp$ pero como E es no singular $e = 0$, luego q es inyectiva. Por otro lado como $\dim E = \dim(\text{Im}(q)) + \dim(\ker(q)) = \dim(\text{Im}(q)) + 0 = \dim E^*$, tenemos que q es suprayectiva. ■

Definición Sean E y F espacios vectoriales de dimensión finita sobre el campo k y sean Q y P formas cuadráticas en E y F respectivamente. Un isomorfismo de (E, Q) a (F, P) es un isomorfismo lineal $\sigma: E \rightarrow F$ tal que $Q = P \circ \sigma$.

En particular, los automorfismos de (E, Q) forman un grupo, el grupo ortogonal de (E, Q) denotado por $O(E, Q)$. Usaremos también $O(E)$ o $O(Q)$ si está claro cuál es la forma cuadrática o espacio considerado, respectivamente.

Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base para E . La matriz de Gram $G \in M_n(k)$ asociada a Q , es la matriz cuyas entradas son $G_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$ con $i, j \in \{1, \dots, n\}$, es decir la matriz

$$G = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle & \dots & \langle e_1, e_n \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \langle e_n, e_2 \rangle & \dots & \langle e_n, e_n \rangle \end{pmatrix}$$

Proposición 1.2 Sea Q una forma cuadrática no singular en E . Entonces $\sigma \in O(Q)$ tiene determinante 1 ó -1.

Demostración:

Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base para E , así $\sigma(e_j) = \sum_i \lambda_{ij} e_i$ para $i, j \in \{1, \dots, n\}$, por lo que la matriz A asociada a σ es

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$$

de donde tenemos que

$$\langle \sigma(e_i), \sigma(e_j) \rangle = \langle \sum_k \lambda_{ki} e_k, \sum_h \lambda_{hj} e_h \rangle = \sum_{h,k} \lambda_{ki} \lambda_{hj} \langle e_k, e_h \rangle = \lambda_{hj}$$

por lo que la matriz de Gram para $Q \circ \sigma$ es $A^T G A$. Ahora como $\sigma \in O(E)$, $Q = Q \circ \sigma$ entonces $A^T G A = G$. Veamos ahora que $\det G \neq 0$; supongamos que no, entonces un renglón de la matriz G es combinación lineal de los demás, digamos el primero, entonces existen $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n \in k$ tal que $\langle e_1, e_1 \rangle, \dots, \langle e_1, e_n \rangle = \lambda_2 \langle e_2, e_1 \rangle, \dots, \langle e_2, e_n \rangle + \dots + \lambda_n \langle e_n, e_1 \rangle, \dots, \langle e_n, e_n \rangle$, de donde $\lambda_2 \langle e_2, e_j \rangle + \dots + \lambda_n \langle e_n, e_j \rangle - \langle e_1, e_j \rangle = 0$. Es decir $\langle \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n - e_1, e_j \rangle = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$, por lo tanto, $q = -e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$ cumple que $q \neq 0$ y $q \in E^\perp$ lo cual es una contradicción al hecho de que Q es no singular en E . Como $\det A^T G A = \det A^T \det G \det A = \det A^2 \det G = \det G$ y $\det G \neq 0$ entonces $\det A^2 = 1$, por lo tanto $\det A = \pm 1$. ■

El grupo ortogonal para la forma cuadrática usual sobre k^n

$$Q_n(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

es denotado por $O_n(k)$.

Teorema 1.1 Sean E un espacio vectorial de dimensión finita n sobre el campo \mathbb{C} y Q una forma cuadrática no singular sobre E . Entonces existe e_1, e_2, \dots, e_n base de E , con $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$.

Demostración:

Como Q no es idénticamente cero pues es no singular existe $v \in E$ con $Q(v) \neq 0$, así $Q(v) = \lambda^2$ con $\lambda \in \mathbb{C}$, de donde $Q(\lambda^{-1}v) = 1$, por lo que existe $e \in E$ tal que $Q(e) = 1$. Sea K el subespacio generado por e y sea $F = K^\perp$, entonces $E = K \oplus F$, (ya que si $z \in K \cap F$ entonces $z = \mu e$, por lo que $0 = \langle z, z \rangle = \langle \mu e, \mu e \rangle = \mu^2 Q(e) = \mu^2$, de donde $\mu = 0$ y $z = 0$).

Ahora veamos que Q restringida a F es no singular. Sea $y \in F$ tal que $\langle x, y \rangle = 0 \quad \forall x \in F$ y sea $z \in E$ diferente de cero, entonces es de la forma $z = \lambda e + f$ con $f \in F$, así $\langle z, y \rangle = \langle \lambda e + f, y \rangle = \lambda \langle e, y \rangle + \langle f, y \rangle = 0 \quad \forall z \in E$ por lo que $y = 0$, entonces Q restringida a F es no singular.

Procederemos por inducción sobre $\dim(E)$. Si $\dim(E) = 1$ entonces existe $v \in E$. $v \neq 0$ tal que $Q(v) = \langle v, v \rangle = 1$ y v genera a E .

Supongamos el resultado cierto cuando la dimensión es $n-1$. Sea E tal que $\dim(E) = n$ y sea $e \in E$ con $Q(e) = 1$ y $K = \{\lambda e : \lambda \in K\}$, entonces $E = K \oplus K^\perp$, además $\dim(E) = \dim(K) + \dim(K^\perp)$; como $\dim(K) = 1$ tenemos que $\dim(K^\perp) = n-1$, por lo que existen e_2, \dots, e_n , tales que $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ con $i, j = 2, \dots, n$ y con $\langle e, e_j \rangle = 0$ para $j \in \{2, \dots, n\}$. Considerando la base $\{e, e_2, \dots, e_n\}$ tenemos el resultado. ■

De esto se sigue que si $k = \mathbb{C}$, cualquier forma cuadrática no singular sobre k^n es isomorfa a la forma $Q_n(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$.

1.2 Teorema de Witt

Sean E un espacio vectorial de dimensión n y Q una forma cuadrática en E . Decimos que $m \in E$ es **no isotrópico** si $Q(m) \neq 0$, es decir $\langle m, m \rangle \neq 0$.

Un vector m no isotrópico define un automorfismo τ_m de (E, Q) dado por

$$\tau_m(x) = x - 2 \frac{\langle x, m \rangle}{\langle m, m \rangle} m \quad x \in E$$

porque

$$\langle \tau_m(x), \tau_m(x) \rangle = \langle x, x \rangle \quad x \in E$$

En particular para $\{e_1, \dots, e_n\}$ base de E se tiene que

$$\langle \tau_m(e_i), \tau_m(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle \quad i, j \in \{1, \dots, n\}$$

por lo cual $Q = Q \circ \tau_m$. La definición de τ_m también garantiza lo siguiente: el hiperplano ortogonal a m es fijado puntualmente por τ_m , $\tau_m(m) = -m$ y $\tau_m^2 = id$, es decir es una involución; también $\det(\tau_m) = -1$, para convencernos de esto tomemos una base ortonormal para el hiperplano ortogonal a m y completemos a una base de E con el vector m . A τ_m se le llama la **reflexión a través de m** .

Proposición 1.3 Sea Q forma cuadrática sobre E . Sea $\lambda \in k^*$, entonces $O(E)$ actúa transitivamente en el conjunto $\{e \in E : Q(e) = \lambda\}$.

Demostración:

Sean $e, f \in E$ con $Q(e) = Q(f) = \lambda$, entonces $\langle e - f, e + f \rangle = \langle e, e \rangle - \langle f, f \rangle = 0$. Como e es no isotrópico y es combinación lineal de $e + f$ y $e - f$, entonces $Q(e + f), Q(e - f)$ no pueden ser al mismo tiempo cero. Tenemos dos casos:

Si $Q(e - f) \neq 0$

$\tau_{e-f}(e - f) = e - e, \tau_{e-f}(e + f) = e + f$, entonces $\tau_{e-f}(e) = f$.

Si $Q(e + f) \neq 0$

$\tau_{e+f}(e - f) = e - f, \tau_{e+f}(e + f) = -f - e$, entonces $\tau_{e+f}(e) = -f$, de donde $\tau_f \tau_{e+f}(e) = \tau_f(-f) = f$. ■

Siguiendo esta idea de transitividad tenemos el Teorema de Witt, el cual tendrá varias consecuencias a lo largo de este trabajo.

Artin cierta vez dijo que el Teorema de Witt era un escándalo, refiriéndose al hecho de que se tuvo que esperar hasta 1936 para formular y probar un teorema tan simple en su enunciado como en los conceptos que contenía: el teorema es el siguiente:

Teorema 1.2 (Witt 1936) Sea (E, Q) forma cuadrática no singular. Sean U, V subespacios lineales de E , entonces cualquier isomorfismo $\sigma : (U, Q) \rightarrow (V, Q)$ puede ser extendido a una transformación ortogonal de (E, Q) .

Demostración:

Caso 1. U no singular, es decir $U^\perp = 0$. Sea $\sigma : U \rightarrow V$ isomorfismo tal que $Q|_U = Q \circ \sigma$. Procederemos por inducción sobre $\dim(U)$.

Si $\dim(U) = 1$, como Q no es idénticamente cero existe $u \in U$ con $u \neq 0$, tal que $Q(u) = \lambda \neq 0$, además u es generador de U , es decir $U = \{\mu u : \mu \in k\}$. Como $Q(\sigma(u)) = Q(u) = \lambda$, de la proposición anterior obtenemos que existe $\tau \in O(E)$ tal que $\tau(u) = \sigma(u)$ (pues $O(E)$ actúa transitivamente en $A = \{e \in E : Q(e) = \lambda\}$). Sea $x \in U$ entonces existe $\mu \in k$ tal que $x = \mu u$, así $\tau(x) = \tau(\mu u) = \mu \sigma(u) = \sigma(\mu u) = \sigma(x)$ por lo que $\tau|_U = \sigma$, es decir τ extiende a σ .

Si $\dim(U) > 1$, nuevamente tomemos $e \in U$ vector no isotrópico con $Q(e) = Q(\sigma(e)) \neq 0$, por la proposición anterior existe $\tau \in O(E)$ tal que $\sigma(e) = \tau(e)$. Como $\sigma : U \rightarrow V$ y $\tau : E \rightarrow E$ son isomorfismo y automorfismo respectivamente entonces $\tau^{-1} \circ \sigma : U \rightarrow E$ es un isomorfismo de U sobre su imagen, con $\tau^{-1} \circ \sigma(e) = \tau^{-1} \circ \tau(e) = e$. De esta manera es suficiente extender $\sigma : U \rightarrow E$ isomorfismo de U sobre su imagen con $\sigma(e) = e$, a una transformación ortogonal de E . Sea $L = \{te : t \in k\}$ y consideremos $W = L^\perp \cap U, F = L^\perp$, luego $U = W \oplus L$ y $E = F \oplus L$ (para ver la validez de estas sumas directas, se procede como sigue: si existe $z \in L \cap W$ entonces $z = \lambda e$ y $\langle \lambda e, \lambda e \rangle = \lambda^2 \langle e, e \rangle = 0$, entonces $\lambda = 0$ por lo que $L \cap W = 0$ y por lo tanto $U = W \oplus L$, análogamente se puede hacer lo mismo para ver que $E = F \oplus L$).

Ahora veamos que W es no singular, sea $y \in W$ tal que $\langle x, y \rangle = 0$, para todo $x \in W$, debemos ver que $y = 0$; como cada $u \in U$ puede expresarse como $u = te + w$ con $te \in L, w \in W$, tenemos que:

$$\langle u, y \rangle = \langle te + w, y \rangle = t \langle e, y \rangle + \langle w, y \rangle = 0, \quad \forall u \in U$$

pero U es no singular por lo que $y = 0$, por lo tanto W es no singular. Veamos también que F es no singular, sea $y \in F$ tal que $\langle x, y \rangle = 0 \quad \forall x \in F$. Sea $z \in E$ entonces $z = te + f$ con $f \in F, \langle z, y \rangle = \langle te + f, y \rangle = \langle te, y \rangle + \langle f, y \rangle = 0 \quad \forall z \in E$ que es no singular, por lo que $y = 0$, por lo tanto F es no singular. Como $W = L^\perp \cap U$ entonces $W \subset F$ y tomando $w \in W$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle \sigma(w), e \rangle &= \langle \sigma(w), \sigma(e) \rangle \\ &= \frac{1}{2} [Q(\sigma(w) + \sigma(e)) - Q(\sigma(w)) - Q(\sigma(e))] \\ &= \frac{1}{2} [Q(w + e) - Q(w) - Q(e)] = \langle w, e \rangle = 0 \end{aligned}$$

ya que $Q(\sigma(w + e)) = Q(w + e)$, por tanto $\sigma(W) \subset F$. Como $\dim(F) = 1$ entonces $\dim(W) < \dim(U)$, y considerando $\sigma : W \rightarrow F$, por hipótesis de

inducción existe $\tau \in O(F)$ tal que $\tau|_W = \sigma$ y $Q|_F = Q \circ \tau$. Sea $\varphi: E \rightarrow E$ dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sigma(x) & \text{si } x \in L \\ \tau(x) & \text{si } x \in F \end{cases}$$

la cual está bien definida ya que $E = F \oplus L$, así φ es un isomorfismo lineal de E , además

$$\begin{aligned} \varphi|_U &= \varphi|_{W \oplus L} = \varphi|_W \oplus \varphi|_L = \\ &= \sigma|_W \oplus \sigma|_L = \sigma \end{aligned}$$

Ahora sólo falta constatar que $Q = Q \circ \varphi$. Sabemos que para $f \in F$, $\langle f, e \rangle = 0$, de donde $\langle \tau(f), e \rangle = 0$ ya que $\tau(f) \in F = L^\perp$ y se sigue directamente que si $z \in E$ con $z = te + f$, $t \in k$ y $f \in F$ entonces

$$\begin{aligned} Q(\varphi(te + f)) &= \varphi(te + f), \varphi(te + f) \rangle = \langle \sigma(te) + \tau(f), \sigma(te) + \tau(f) \rangle = \\ &= \langle te + \tau(f), te + \tau(f) \rangle = t^2 \langle e, e \rangle + \langle f, f \rangle = \langle te + f, te + f \rangle = Q(te + f) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\varphi \in O(E)$ es el isomorfismo que extiende a σ .

Caso 2. U es singular, es decir existe $e \neq 0$ tal que $e \in U \cap U^\perp$. Sean $L = \{\lambda e : \lambda \in k\}$ y R subespacio tales que $R \oplus L = U$; sea $\beta: E \rightarrow k$ una transformación lineal tal que $\beta(e) = 1$ y $\beta(R) = 0$, así $\beta \in E^*$ (el espacio dual de E). Consideremos la función $q: E \rightarrow E^*$, tal que $q(e)(x) = \langle e, x \rangle$, la cual es biyectiva pues E es no singular, de donde existe $b \in E$ tal que $q(b) = \beta$, es decir $\beta(x) = \langle b, x \rangle$, por lo tanto $\forall r \in R$, $\beta(r) = \langle b, r \rangle = 0$, por lo que b es ortogonal a R . Como $1 = \beta(e) = \langle b, e \rangle$, considerando $f = b - \frac{1}{2} \langle b, b \rangle e$, tenemos que $\langle f, f \rangle = \langle b - \frac{1}{2} \langle b, b \rangle e, b - \frac{1}{2} \langle b, b \rangle e \rangle = \langle b, b \rangle - \langle b, b \rangle = 0$ por lo que f es isotrópico. Sea $r \in R$, entonces $\langle r, f \rangle = 0$ pues $r \in R \subset U$ y $e \in U^\perp$, entonces f es ortogonal a R con $\langle e, f \rangle = \langle e, b \rangle - \frac{1}{2} \langle b, b \rangle \langle e, e \rangle = 1$. Como $\langle e, f \rangle = 1$ con e ortogonal a U tenemos que f no está en U , de esta forma $W = U + \lambda f$ es la suma directa de dos subespacios ortogonales $R \oplus (\lambda e + tf)$ con $\lambda, t \in k$. Considerando ahora $\sigma(U)$, $\sigma(e)$ y $\sigma(R)$, entonces $\sigma(U) = \sigma(R \oplus L) = \sigma(R) \oplus \sigma(L)$ y $\sigma(e) \in \sigma(U) \cap \sigma(U^\perp)$ con $\sigma(e)$ ortogonal a $\sigma(R)$. Procediendo de la misma forma que arriba obtenemos $g \in E$ isotrópico tal que es ortogonal a $\sigma(R)$ con $\langle g, \sigma(e) \rangle = 1$; ahora extendamos la función $\sigma: U \rightarrow E$ a una función lineal $\tilde{\sigma}: W \rightarrow E$ con $\tilde{\sigma}(f) = g$, esta función cumple que $\tilde{\sigma}(W) = \sigma(R) \oplus (\lambda \sigma(e) + tg)$. Sea $a \in W$ el cual podemos expresar como $a = r + \lambda e + tf$ con $r \in R$, entonces

$$\begin{aligned} Q(a) &= \langle a, a \rangle = \langle r + \lambda e + tf, r + \lambda e + tf \rangle = \langle r, r \rangle + 2 \langle \lambda e, tf \rangle \\ &= \langle r, r \rangle + 2\lambda t = \langle \sigma(r), \sigma(r) \rangle + 2\lambda t \langle g, \sigma(e) \rangle \\ &= \langle \sigma(r) + \lambda \sigma(e) + tg, \sigma(r) + \lambda \sigma(e) + tg \rangle = \langle \tilde{\sigma}(a), \tilde{\sigma}(a) \rangle = Q \circ \tilde{\sigma}(a) \end{aligned}$$

es decir preserva producto interior, por lo tanto $\tilde{\sigma}$ es un isomorfismo de W en su imagen.

Hagamos un paréntesis aquí: Si R resultara no singular, entonces $W = R \oplus (\lambda e + t f)$ es no singular (pues si existe $x \in W, x = r + \lambda e + t f$, tal que $\langle x, y \rangle = 0 \forall y \in W$ entonces en particular $\forall s \in R, \langle x, s \rangle = 0$, es decir $\langle r, s \rangle = 0$ y como estamos suponiendo que R es no singular entonces $r = 0$, por lo que $x = \lambda e + t f$; ahora $0 = \langle x, \lambda_2 e \rangle = t \lambda_2$, con $\lambda_2 \neq 0$, entonces $t = 0$, finalmente $x = \lambda e$ pero entonces $\langle \lambda e, s f \rangle = \lambda s = 0$, con $s \neq 0$, por lo tanto $\lambda = 0$ y $x = 0$). De aquí concluimos que $\delta: W \rightarrow \delta(W)$ es isomorfismo de un subespacio no singular, entonces por el Caso 1, existe $\tau \in O(E)$ tal que $\tau|_W = \delta$ y por lo tanto $\tau|_U = \delta|_U = \sigma$.

Supongamos que $\dim(U \cap U^\perp) = r$ con e_1, e_2, \dots, e_r como base y $r < n$. Sean $L_i = \{\lambda e_i : \lambda \in k\}$, $i = \{1, \dots, r\}$ y para cada i sean R_i subespacios tales que $R_i \oplus L_i = U$. Aplicando el mismo procedimiento del caso 2, obtenemos f_1, \dots, f_r y g_1, \dots, g_r , puntos en E tales que $W = U + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = R \oplus (\mu_1 e_1 + t_1 f_1) \oplus \dots \oplus (\mu_r e_r + t_n f_n)$, donde las sumas son ortogonales, con R subespacio no singular por la demostración del paréntesis, este proceso es conocido como **completación no singular** de un subespacio. De esta forma podemos extender $\sigma: U \rightarrow E$ a una función $\tilde{\sigma}: W \rightarrow E$ isomorfismo en su imagen con $f_i \mapsto g_i$ para $i = 1, \dots, r$, que nos lleva al Caso 1, de donde existe $\tau \in O(E)$ tal que $\tau|_W = \tilde{\sigma}$, por lo tanto $\tau|_U = \sigma$. ■

1.3 Tipos Sylvester

En esta sección trataremos espacios vectoriales sobre el campo \mathbb{R} . Además introduciremos un invariante en (E, Q) , denominado la *signatura* o *tipo Sylvester* de una forma cuadrática.

Definición Un espacio vectorial E es euclidiano si es de dimensión finita y tiene asignada una forma cuadrática definida positiva, es decir $Q(e) > 0$ para todo $e \in E \setminus \{0\}$.

La siguiente proposición habla acerca de que cada espacio vectorial tiene en cierto sentido una base ortonormal.

Proposición 1.4 Sea (E, Q) forma cuadrática en E un espacio vectorial de dimensión n . Entonces existe base ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de E tal que

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ -1, 0, 1 & i = j \end{cases}$$

Demostración:

Primero si $Q \equiv 0$, cualquier base es ortonormal, entonces supongamos que Q no idénticamente cero. Procederemos por inducción sobre $\dim(E)$. Si $\dim(E) = 1$, existe $e \in E$ tal que $e \neq 0$ y $Q(e) \neq 0$, es decir $Q(e) = \epsilon \lambda^2$ con $\epsilon = \pm 1$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, entonces si $e_1 = \lambda^{-1}e$, $Q(e_1) = Q(\lambda^{-1}e) = \lambda^{-2}\lambda^2 e^2 = 1$,

además e_1 generador de E , luego e_1 es base ortonormal de E con $\langle e_1, e_1 \rangle = 1$. Supongamos que el resultado es cierto para espacios de dimensión $n-1$. Si $\dim(E) = n$, nuevamente existe $e_1 \in E$ tal que $Q(e_1) = 1$ y sea $K = \{\lambda e_1 : \lambda \in \mathbb{R}\}$, entonces $E = K^\perp \oplus K$ pues K es no singular y $\dim K^\perp = n-1$, entonces por hipótesis existe e_2, \dots, e_n base de K^\perp tal que

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ -1, 0, 1 & i = j \quad i, j = \{2, \dots, n\} \end{cases}$$

por lo tanto $\langle e_1, e_j \rangle = 0, \forall j \in \{2, \dots, n\}$. De esta forma la base ortonormal para E es e_1, e_2, \dots, e_n . ■

Teorema 1.3 (Sylvester) Sea e_1, \dots, e_n una base ortonormal para la forma cuadrática (E, Q) sobre \mathbb{R} . La cardinalidad de los conjuntos $\{i : \langle e_i, e_i \rangle = -1\}$ y $\{j : \langle e_j, e_j \rangle = 1\}$ es independiente de la base ortonormal considerada.

Demostración:

Sea s_1, \dots, s_n otra base ortonormal para (E, Q) , sea p el número de vectores e_i con $\langle e_i, e_i \rangle = -1$ y q el número de vectores e_j con $\langle e_j, e_j \rangle = 1$. Sea \tilde{E} el subespacio de E generado por los elementos s_i de la base para los cuales $\langle s_i, s_i \rangle = 0, -1$. Supongamos que s_{i_1}, \dots, s_{i_r} son los vectores que generan \tilde{E} , entonces $\forall e \in \tilde{E}, e = \lambda_1 s_{i_1} + \dots + \lambda_r s_{i_r}$, de donde $\langle e, e \rangle = \lambda_1^2 \langle s_{i_1}, s_{i_1} \rangle + \dots + \lambda_r^2 \langle s_{i_r}, s_{i_r} \rangle \leq 0$, de esta forma $q+s = n$, por lo que $\dim(\tilde{E}) = n-q$. Ahora para cualquier subespacio euclidiano F de E , como $Q(e) > 0$, si $e \in F - \{0\}$, tenemos $F \cap \tilde{E} = 0$. Por la fórmula de la dimensión tenemos que $\dim(F) + \dim(\tilde{E}) = \dim(F + \tilde{E}) + \dim(F \cap \tilde{E})$ entonces $\dim(F) + n - q \leq n$ es decir $\dim(F) \leq q$. Entonces cualquier subespacio euclidiano no tiene dimensión mayor que q , así $\sup\{\dim(F) : F \subset E \text{ euclidiano}\} = q$, entonces el número de elementos tales que $\langle s_i, s_i \rangle = 1$ es q , por lo que q es independiente de la base ortonormal escogida. Aplicando el mismo argumento a $(E, -Q)$ concluimos que p también es independiente de la base escogida. ■

Como hemos visto que p, q no dependen de la base, podemos hablar de la forma cuadrática de tipo Sylvester $(-p, q)$. Así el tipo $(-3, 1)$ para \mathbb{R}^4 es el modelo espacio tiempo en física. Un resultado inmediato que obtenemos, es que si $(E, Q), (F, R)$ son dos formas cuadráticas tales que $\dim(E) = \dim(F)$ y con el mismo tipo Sylvester entonces son isomorfas, para convencerlos bastará tomar una función que mande una base ortonormal de E a una base ortonormal de F .

Proposición 1.5 (Desigualdad del Discriminante) Sea (E, Q) una forma cuadrática no singular de tipo Sylvester $(-s, r)$. Entonces para cualquier base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E , $\text{sign det}[\langle e_i, e_j \rangle] = (-1)^s$.

Demostración:

Sea h_1, h_2, \dots, h_n una segunda base de E y sea B la matriz de cambio de base con respecto a la base e_1, \dots, e_n . Si

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

entonces $h_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} e_j$, luego

$$\langle h_i, h_j \rangle = \langle \sum_r b_{ir} e_r, \sum_s b_{js} e_s \rangle = \sum_{r,s} b_{ir} b_{js} \langle e_r, e_s \rangle = b_{ij}$$

y de aquí concluimos que

$$\det[\langle h_i, h_j \rangle] = \det B \det[\langle e_r, e_s \rangle] \det B^T = \det B^2 \det[\langle e_i, e_j \rangle]$$

por lo que $\text{sign det}[\langle e_i, e_j \rangle]$ es independiente de la base considerada, entonces tomando una base ortonormal c_1, \dots, c_n , tal que c_{i1}, \dots, c_{is} cumplan que $\langle c_{ij}, c_{ij} \rangle = -1$, $j \in \{1, \dots, s\}$, tenemos que $\det[\langle c_i, c_j \rangle] = (-1)^s$. ■

1.4 Espacios Vectoriales Euclidianos

Cuando tenemos E un espacio vectorial euclidiano podemos definir una norma en E por $\|e\| = (\langle e, e \rangle)^{\frac{1}{2}}$ para $e \in E$. En esta sección trabajaremos con este tipo de espacios vectoriales.

Proposición 1.6 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) Sean $e, f \in E$ entonces $|\langle e, f \rangle| \leq \|e\| \|f\|$. La igualdad se da si e, f son linealmente dependientes.

Demostración:

Supongamos que e, f son linealmente independientes, entonces generan un plano euclidiano (E', Q) , pues $Q(e), Q(f) > 0$. Por la desigualdad del discriminante para (E', Q)

$$\text{sign det} \begin{pmatrix} \langle e, e \rangle & \langle e, f \rangle \\ \langle f, e \rangle & \langle f, f \rangle \end{pmatrix} = (-1)^0 = 1$$

por lo que $(\langle e, e \rangle \langle f, f \rangle - \langle e, f \rangle^2) > 0$, de donde se sigue la afirmación. ■

De esta última proposición se sigue inmediatamente la desigualdad del triángulo: $\forall e, f \in E \quad \|e + f\| \leq \|e\| + \|f\|$. También podemos definir el ángulo entre dos vectores de E como $\cos \angle(e, f) = \frac{\langle e, f \rangle}{\|e\| \|f\|}$ con $e, f \in E$.

Un ejemplo básico de una transformación en el grupo ortogonal $O(E)$ es la reflexión τ en un hiperplano lineal H . Si $n \in E$ es un vector unitario normal para H , $\tau(x) = x - 2 \langle x, n \rangle n$, $x \in E$.

Teorema 1.4 Una transformación ortogonal σ de un espacio vectorial euclidiano E de dimensión n , es el producto de a lo más n reflexiones en hiperplanos de E .

Demostración:

Vamos a proceder por inducción sobre $\dim(E)$. Si $\dim(E) = 1$, como las únicas transformaciones ortogonales de E son la identidad y la reflexión por cero, tenemos el resultado. Supongamos que la $\dim(E) = n$, sea $f \in E$ unitario. Tenemos dos casos:

Si $\sigma(f) = f$, consideremos $F = f^\perp$, entonces como σ es ortogonal $\sigma(F) = F$, con $\dim(F) = n - 1$, por hipótesis de inducción $\sigma|_F$ se descompone en el producto de a lo más $n - 1$ reflexiones en hiperplanos de F , es decir $\sigma|_F$ con $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_s$ con $s \leq n - 1$, donde τ_i es la reflexión en el hiperplano $S_i \subset F$ de F . Entonces consideremos $U_i = S_i \oplus f$, de esta forma $\dim(U_i) = n - 1$; sea σ_i la reflexión a lo largo de un vector unitario ortogonal a U_i , así $\sigma_i|_{S_i} = \tau_i$. De esta forma $\sigma = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_s$, por lo que es el producto de a lo más n reflexiones (de hecho de a lo más $n - 1$ reflexiones) en hiperplanos de E .

Si $\sigma(f) \neq f$, definamos $\tau(x) = x - \frac{2 \langle x, \sigma(f) - f \rangle}{\langle \sigma(f) - f, \sigma(f) - f \rangle} (\sigma(f) - f)$, además $\langle \sigma(f) - f, \sigma(f) + f \rangle = 0$ ya que σ cumple que $\langle f, f \rangle = \langle \sigma(f), \sigma(f) \rangle$. Evaluando τ en $\sigma(f) + f$ y $\sigma(f) - f$ tenemos que $\tau(\sigma(f) + f) = \sigma(f) + f$ y $\tau(\sigma(f) - f) = f - \sigma(f)$, y sumando obtenemos $2\tau(\sigma(f)) = 2f$, por lo que $\tau\sigma$ fija f , entonces por el caso anterior $\tau\sigma$ es el producto de a lo más $n - 1$ reflexiones en hiperplanos de E , con lo que concluimos que σ es el producto de a lo más n reflexiones en hiperplanos de E . ■

Designamos a $SO(E) = \{\sigma \in O(E) : \det \sigma = 1\}$ como el **grupo especial ortogonal** el cual es un subgrupo de $O(E)$ y sus elementos son llamados **rotaciones**. Como los elementos de $O(E)$ tienen determinante 1 ó -1 se sigue que $SO(E)$ es un grupo de índice 2, por tanto un subgrupo normal.

Sabemos por la proposición 1.3, que $O(E)$ actúa transitivamente en la esfera $S(E) = \{e \in E : Q(e) = \langle e, e \rangle = 1\}$. Veamos que también $SO(E)$ actúa transitivamente en este conjunto. Para ver esto note que si $x, y \in S(E)$ son tales que $x + y \neq 0$ entonces $Q(x + y) \neq 0$ y el resultado se sigue de la misma forma que en la proposición 1.3. Ahora si $Q(x + y) = 0$, como Q es definida positiva entonces $x + y = 0$, por lo que $x = -y$, entonces tomando z ortogonal a x (y por lo tanto también a y) con $\langle z, z \rangle = 1$ tenemos que $z + x \neq 0$ (pues de lo contrario $z = -x$) entonces por el caso anterior existe $\sigma \in SO(E)$ tal que $\sigma(x) = z$ y $\tau \in SO(E)$ con $\tau(z) = y$. Así obtenemos que $\tau(\sigma(x)) = \tau(z) = y$ y $\tau\sigma \in SO(E)$.

Sea $\{e_i, e_j\} \subset E$ base ortonormal, entonces $\langle \sigma(e_i), \sigma(e_i) \rangle = \langle e_i, e_i \rangle = 1$ para toda $\sigma \in O(E)$, por lo que existe $\theta \in \mathbb{R}$ con $\sigma(e_i) = e_i \cos \theta + e_j \sin \theta$. Como $\sigma(e_j)$ es vector unitario ortogonal a $\sigma(e_i)$, es de la forma $-e_i \sin \theta + e_j \cos \theta$ o su negativo, por lo que la matriz para σ es una de las siguientes

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

En el primer caso su determinante es 1 (es decir una rotación) y en el segundo caso es -1, y en ese caso es llamada una reflexión. Además con la forma de la primera matriz podemos definir un isomorfismo entre el grupo "circular" $SO(E)$ y el grupo aditivo $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Proposición 1.7 (Euler) Sea E un 3-espacio euclidiano y sea $\sigma \in SO(E)$. Entonces existe una recta L (llamada el eje de rotación de σ) tal que σ fija puntualmente a L y la transformación inducida por σ en L^\perp es una rotación. Una transformación ortogonal $\sigma \in O(E)$ con $\det \sigma = -1$, tiene la forma $\rho\tau$ donde ρ es una rotación con eje L y τ es una reflexión en el plano L^\perp .

Demostración:

Consideremos el polinomio característico de $\sigma \in O(E)$, es decir $p(t) = \det(tI - \sigma)$, el cual es un polinomio de grado 3 por lo que tiene una raíz real λ , es decir un valor propio real. Sea $e \neq 0$ el vector propio correspondiente a λ , $\sigma(e) = \lambda e$ entonces $\langle e, e \rangle = \langle \sigma(e), \sigma(e) \rangle = \lambda^2 \langle e, e \rangle$, por lo que $\lambda^2 = 1$ es decir, $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$. Si $\sigma \in SO(E)$, entonces $p(0) = \det(-\sigma) = -1$, además como $p(t)$ es un polinomio $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = +\infty$, por lo que $\lambda = 1$ es raíz de $p(t)$. Consideremos la recta L con valor propio 1, es decir generada por e como vector propio, entonces σ fija puntualmente a L ($\sigma(te) = t\sigma(e) = te$). Ahora consideremos el plano L^\perp y sean e_2 y e_3 vectores en E que generan L^\perp , con lo cual tenemos las siguientes relaciones para $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$

$$\sigma(e) = \lambda_{11}e + \lambda_{12}e_2 + \lambda_{13}e_3 = e$$

$$\sigma(e_2) = \lambda_{21}e + \lambda_{22}e_2 + \lambda_{23}e_3$$

$$\sigma(e_3) = \lambda_{31}e + \lambda_{32}e_2 + \lambda_{33}e_3$$

por lo que la matriz de σ es

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ 0 & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ 0 & \lambda_{23} & \lambda_{33} \end{pmatrix}$$

Calculando el determinante de λ obtenemos que $\lambda_{22}\lambda_{33} - \lambda_{23}\lambda_{32} = 1$, por lo que σ restringida a L^\perp tiene determinante 1 es decir es una rotación.

Si $\det(\sigma) = -1$ entonces $p(0) = \det(-\sigma) = 1$ y como $\lim_{t \rightarrow -\infty} p(t) = -\infty$ obtenemos que $\lambda = -1$ es el valor propio. Consideremos la recta L generada

por e , el vector propio asociado a $\lambda = -1$, es decir $\sigma(e) = -e$. Sean e_2 y e_3 base para L^\perp entonces

$$\sigma(e) = \lambda_{11}e + \lambda_{12}e_2 + \lambda_{13}e_3 = -e$$

$$\sigma(e_2) = \lambda_{21}e + \lambda_{22}e_2 + \lambda_{23}e_3$$

$$\sigma(e_3) = \lambda_{31}e + \lambda_{32}e_2 + \lambda_{33}e_3$$

por lo que la matriz de σ es

$$\begin{pmatrix} -1 & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ 0 & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ 0 & \lambda_{23} & \lambda_{33} \end{pmatrix}$$

Nuevamente analizando el determinante concluimos que $\lambda_{22}\lambda_{33} - \lambda_{23}\lambda_{32} = 1$, es decir σ es una rotación en L^\perp . Consideremos τ la reflexión a través de e que fija L^\perp , entonces $\tau(e) = -e$. Ahora sea ρ la restricción de σ en L^\perp , es decir la rotación con eje L y $\rho(e) = e$. Como ρ fija puntualmente a L , entonces tenemos las siguientes igualdades:

$$\sigma(e) = -e = \rho(-e) = \rho\tau(e)$$

$$\sigma(e_2) = \rho(e_2) = \rho\tau(e_2)$$

$$\sigma(e_3) = \rho(e_3) = \rho\tau(e_3)$$

Ya que $E = L \oplus L^\perp$ y e, e_2, e_3 es una base donde σ y $\rho\tau$ coinciden, tenemos que $\sigma = \rho\tau$. ■

Lema 1.2 Sea E un espacio vectorial real de dimensión finita y $\sigma : E \rightarrow E$ un isomorfismo lineal. Entonces existe un subespacio $R \subset E$ de dimensión 1 o 2 invariante bajo σ .

Demostración:

Usemos una construcción conocida como **complejificación** de un espacio. Al espacio $E_{\mathbb{C}} = E \oplus E$ se le da una estructura de espacio vectorial sobre \mathbb{C} ; la suma es coordenada a coordenada y el producto por escalares está dado por

$$(x + iy) \cdot (e, f) = (xe - yf, xf + ye) \quad x, y \in \mathbb{R}, e, f \in E$$

Vamos a identificar a $e \in E$ con $(e, 0) \in E_{\mathbb{C}}$, y a (e, f) con $e + if$, para $e, f \in E$. Estamos listos para complejificar también a σ . Definamos el isomorfismo \mathbb{C} -lineal $\sigma_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \rightarrow E_{\mathbb{C}}$ por $\sigma_{\mathbb{C}}(e + if) = \sigma(e) + i\sigma(f)$, conocido como la complejificación de σ , la comprobación de que es isomorfismo lineal se da enseguida:

$$\sigma_{\mathbb{C}}((e + if) + (c + id)) = \sigma(e + c) + i\sigma(f + d) = \sigma(e) + \sigma(c) + i\sigma(f) + i\sigma(d) = \sigma_{\mathbb{C}}(e + if) + \sigma_{\mathbb{C}}(c + id)$$

$$\sigma_C((x + iy) \cdot (e, f)) = \sigma_C(xe - yf, xf + ye) = \sigma(xe - yf) + i\sigma(xf + ye) = (x\sigma(e) - y\sigma(f), x\sigma(f) + y\sigma(e)) = (x + iy) \cdot \sigma_C(e, f)$$

Por el teorema fundamental del álgebra σ_C tiene un valor propio $\lambda = a + ib$. Sea $e + if$ el vector propio correspondiente a λ , entonces $\sigma_C(e + if) = (a + ib)(e + if)$, es decir $\sigma_C(e, f) = (a + ib)(e, f) = (ae - bf, af + be)$, entonces concluimos que $\sigma(e) = ae - bf$ y $\sigma(f) = af + be$, por lo tanto e, f generan un subespacio de E invariante bajo σ de dimensión 1 ó 2 dependiendo si son o no linealmente independientes. ■

Teorema 1.5 Sean E espacio euclidiano de dimensión n y σ un elemento de $O(E)$. Entonces existe una descomposición de E en una suma ortogonal de rectas y planos invariantes bajo σ .

Demostración:

Vamos a utilizar inducción sobre n . Si $\dim E = 1$, entonces E es invariante bajo σ .

Sea E de dimensión n . Por el lema anterior existe un subespacio lineal $R \subset E$ de dimensión 1 ó 2 invariante bajo σ , así $\dim R^\perp < n$ y es invariante bajo σ . Por hipótesis de inducción existe una descomposición de R^\perp en suma ortogonal de rectas y planos invariantes bajo σ , de donde tenemos el resultado. ■

1.5 Formas Parabólicas

Ahora estudiemos un espacio vectorial F sobre \mathbb{R} con otro tipo de forma cuadrática Q .

Definición Una forma cuadrática Q sobre un espacio vectorial F es positiva si $Q(f) \geq 0$ para todo $f \in F$.

Lema 1.3 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

$$\langle e, f \rangle^2 \leq \langle e, e \rangle \langle f, f \rangle \quad e, f \in E$$

Demostración:

Si e, f son linealmente dependientes claramente se da la igualdad. Sean e, f linealmente independientes, por la proposición 1.2 el signo del determinante no cambia si tomamos una base ortonormal de este plano e_1, e_2 , pues es conjugada a la matriz original. entonces como

$$\det \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle \end{pmatrix} \geq 0$$

tenemos que

$$\det \begin{pmatrix} \langle e, e \rangle & \langle e, f \rangle \\ \langle f, e \rangle & \langle f, f \rangle \end{pmatrix} \geq 0$$

por lo tanto $\langle e, f \rangle^2 \leq \langle e, e \rangle \langle f, f \rangle$. ■

Corolario 1.1 Sea (F, Q) forma cuadrática positiva, $f \in F$ es isotrópico si y sólo si $f \in F^\perp$ (es decir $\langle e, f \rangle = 0 \forall e \in F$).

Demostración:

$f \in F$ isotrópico si y sólo si $0 = \langle f, f \rangle \langle e, e \rangle \geq \langle f, e \rangle^2$ para toda $e \in F$ si y sólo si $f \in F^\perp$. ■

Notamos también que si τ es una reflexión de F , entonces para cualquier $f \in F$ isotrópico se tiene que $\tau(f) = f$.

Teorema 1.6 Sea Q forma cuadrática positiva en un espacio vectorial real F de dimensión n . Si $\sigma \in O(F)$ es la identidad en F^\perp entonces σ puede ser escrita como el producto de a lo más n reflexiones.

Demostración:

Procederemos por inducción sobre m . Tenemos dos casos:

1) $\text{Im}(\sigma - id)$ no está contenida en F^\perp . De esta forma existe $f \in F$ tal que $(\sigma - id)(f) = \sigma(f) - f \notin F^\perp$, por lo que $p = \sigma(f) - f$ es no isotrópico, entonces $\sigma(f) \neq f$. Sea τ_p la reflexión a través de p , es decir

$$\tau_p(x) = x - \frac{2 \langle x, p \rangle}{\langle p, p \rangle} p$$

entonces

$$\tau_p(\sigma(f) - f) = f - \sigma(f) \quad \tau_p(\sigma(f) + f) = \sigma(f) + f$$

por lo tanto $\tau_p(\sigma(f)) = f$. Notemos que f es no isotrópico, pues de lo contrario $f \in F^\perp$ y entonces como σ es la identidad en F^\perp , se tendría que $\sigma(f) = f$ lo cual no es posible. Consideremos la transformación $\tau_p \sigma : F \rightarrow F$, ésta nos induce la transformación $\tau_p \sigma|_{f^\perp} : f^\perp \rightarrow f^\perp$, la cual es la identidad en $(f^\perp)^\perp = f$ y $\dim f^\perp = n - 1$. De esta manera por hipótesis de inducción $\tau_p \sigma|_{f^\perp}$ puede ser escrita como el producto de a lo más $n - 1$ reflexiones en f^\perp .

Ahora seguiremos la misma idea que en la demostración del teorema 1.4. Tenemos que $\tau_p \sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_s$ con $s \leq n - 1$, donde τ_i es la reflexión en un hiperplano $S_i \subset f^\perp$ y consideremos $U_i = S_i \oplus f$, de esta forma $\dim(U_i) = n - 1$. Sea σ_i la reflexión a través de un vector unitario ortogonal a U_i así $\sigma_i|_{S_i} = \tau_i$. De esta forma $\tau_p \sigma = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_s$ por lo que $\sigma = \tau_p \circ \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_s$ es el producto de a lo más n reflexiones.

2) $\text{Im}(\sigma - id) \subset F^\perp$. Podemos descomponer a $F = E \oplus F^\perp$ donde E es la parte euclidiana de F . Restringamos σ a E , entonces $\sigma|_E = \rho_1 \rho_2 \cdots \rho_s$, donde ρ_1, \dots, ρ_s son reflexiones en hiperplanos de E y $s \leq \dim(E)$ (Teorema 1.4). Sea S_i el hiperplano fijo de ρ_i en E , consideremos $C_i = S_i \oplus F^\perp$, el cual es hiperplano de F y sea σ_i la correspondiente reflexión en C_i con vector normal, el correspondiente a la transformación ρ_i , el cual está en E y es ortogonal a F^\perp . Así tenemos que $\sigma|_E = \rho_1 \cdots \rho_s = \sigma_1 \cdots \sigma_s$ y $\sigma|_{F^\perp} = \sigma_1 \cdots \sigma_s|_{F^\perp} = id$ por lo que $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_s$. ■

Diremos que (F, Q) es un espacio parabólico si Q es positiva y el espacio F^\perp es de dimensión 1. Así en estos espacios, la recta isotrópica F^\perp es invariante bajo transformaciones ortogonales.

Consideremos el siguiente homomorfismo de grupos

$$\mu : O(F) \rightarrow \mathbb{R}^*$$

donde $\mu(\sigma)$ denota el valor propio de $\sigma \in O(F)$ correspondiente a la recta isotrópica F^\perp . Sea $O_\infty(F) = \{\sigma \in O(F) : \mu(\sigma) > 0\}$ el cual es un subgrupo normal de $O(F)$ por ser de índice 2. Ahora consideremos el mapeo antípoda $\bar{\iota} : F \rightarrow F$ dado por $\bar{\iota}(x) = -x$, que cumple que

$$\bar{\iota}(\sigma(x)) = -\sigma(x) = \sigma(-x) = \sigma\bar{\iota}(x)$$

por lo que está en el centro de $O(F)$, así obtenemos una descomposición del grupo ortogonal $O(F)$ de un espacio parabólico como

$$O(F) = O_\infty(F) \times \mathbb{Z}_2$$

Ahora estudiaremos los espacios parabólicos, de una manera tal, que la geometría euclidiana sea útil en este estudio; para esto construyamos un espacio parabólico que será de suma importancia en el resto de la sección. Sea E un espacio euclidiano de dimensión n , consideremos $F = E \oplus \mathbb{R}$ y la forma bilineal

$$\langle (e, a), (f, b) \rangle = \langle e, f \rangle - ab \quad e, f \in E \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Claramente esta forma bilineal es positiva además

$$F^\perp = \{(e, a) \in F : \langle (e, a), (f, b) \rangle = \langle e, f \rangle = 0, \forall (f, b) \in F\}$$

es decir

$$(e, a) \in F^\perp \Leftrightarrow \langle e, f \rangle = 0, \forall f \in F$$

en particular $\langle e, e \rangle = 0$, entonces $e = 0$ pues E es euclidiano, así $F^\perp = \{(0, a) \in F : a \in \mathbb{R}\}$ está generado por $(0, 1)$, es decir es de dimensión 1, entonces (F, Q) es parabólico y a F^\perp le llamaremos la recta al infinito.

1.5.1 SIMILARIDADES

Definición Una *similaridad* de un espacio euclidiano E es una transformación afín Φ de E , es decir de la forma $\Phi(x) = \lambda\phi(x) + f$ donde $\phi \in O(E)$, $f \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Denotaremos el grupo de las similaridades por $\text{Siml}(E)$.

Ahora definamos la función evaluación

$$ev : F \times E \rightarrow \mathbb{R} \quad ev((x, r), y) = \langle x, y \rangle + r \quad x, y \in E \quad r \in \mathbb{R}$$

Proposición 1.8 Dada una transformación ortogonal σ del espacio parabólico $F = E \oplus \mathbb{R}$, existe una única similaridad $\tilde{\sigma} \in \text{Siml}(E)$ tal que:

$$ev(\sigma(f), \tilde{\sigma}(e)) = \mu(\sigma)ev(f, e) \quad f \in F, e \in E$$

La correspondencia $\sigma \rightarrow \tilde{\sigma}$ induce un isomorfismo de grupos:

$$O_\infty(F) \xrightarrow{\sim} \text{Siml}(E)$$

en donde la similaridad $\lambda\phi + v$, $\phi \in O(E)$, $\lambda > 0$, $v \in E$ es la imagen de $\Phi \in O_\infty(F)$ dada por

$$\Phi(z, \varsigma) = (\phi(z), -\langle \phi(z), v \rangle + \lambda\varsigma)$$

Demostración:

Dada $e \in E$, definimos una forma lineal $\varphi : F \rightarrow \mathbb{R}$ por $\varphi(f) = ev(f, e)$ y tenemos que $\varphi(0, 1) = ev((0, 1), e) = \langle 0, e \rangle + 1 = 1$. Ahora cualquier forma lineal ϕ en F con $\phi(0, 1) = 1$ se puede representar de esta forma ya que $\phi(x, r) = \phi(x, 0) + \phi(0, r) = \phi(x, 0) + r$, de donde $\phi(x) |_E = \phi(x, 0)$, es decir $\phi |_E \in E^*$ y por el Lema 1.1 existe un único $e \in E$ tal que $q(e) = \phi |_E$ es decir $\phi(x, r) = \langle x, e \rangle + r$, así $\phi(x, r) = \langle x, e \rangle + r = ev((x, r), e)$.

Ahora tomando $\sigma \in O(F)$, tenemos $\mu(\sigma)^{-1}\sigma : F \rightarrow F$ un automorfismo lineal tal que $\mu(\sigma)^{-1}\sigma(0, 1) = \mu(\sigma)^{-1}\mu(\sigma)(0, 1) = (0, 1)$, de esta forma $ev(\mu(\sigma)^{-1}\sigma(f), e)$ es una forma lineal que evaluada en el vector $(0, 1)$ es 1. Entonces por el análisis anterior debe existir una única $\tilde{\sigma}(e) \in E$ tal que

$$ev(\mu(\sigma)^{-1}\sigma(f), e) = ev(f, \tilde{\sigma}(e)) \quad \forall f \in F$$

$$ev(\sigma(f), e) = \mu(\sigma)ev(f, \tilde{\sigma}(e))$$

Luego variando $e \in E$ obtenemos la transformación $\tilde{\sigma} : E \rightarrow E$, así para $\sigma, \tau \in O(F)$ mostremos que

$$(\tilde{\sigma\tau}) = \tilde{\tau}\tilde{\sigma}, \quad \tilde{id} = id$$

Veamos la primera igualdad; por hipótesis si $f \in F$ y $e \in E$, para todo $\sigma \in O(F)$ se tiene

$$ev(\sigma(f), e) = \mu(\sigma)ev(f, \tilde{\sigma}(e)) \dots (*)$$

Primero observemos que si tomamos $f = s+r$ con $s \in E$, $r \in \mathbb{R}$ obtenemos que

$$\begin{aligned} ev(\sigma\tau(f), e) &= ev((\sigma\tau(s), \sigma\tau(r)), e) \\ &= \langle \sigma\tau(s), e \rangle + \sigma\tau(r) \\ &= \mu(\sigma\tau)ev(f, (\tilde{\sigma}\tau)(e)) \\ &= \mu(\sigma\tau)ev((s, r), (\tilde{\sigma}\tau)(e)) \\ &= \mu(\sigma\tau)(\langle s, (\tilde{\sigma}\tau)(e) \rangle + r) \end{aligned}$$

así $\sigma\tau(r) = \mu(\sigma\tau)r$, y $\langle \sigma\tau(s), e \rangle = \mu(\sigma\tau) \langle s, (\tilde{\sigma}\tau)(e) \rangle$.

Demostremos ahora que para todo $e \in E$, $(\tilde{\sigma}\tau)(e) = \tilde{\tau}\tilde{\sigma}(e)$, para esto calculemos $\mu(\sigma\tau) \langle s, \tilde{\tau}\tilde{\sigma}(e) \rangle$; como μ es un homomorfismo de grupos tenemos que

$$\begin{aligned} \mu(\sigma\tau) \langle s, \tilde{\tau}\tilde{\sigma}(e) \rangle &= \mu(\sigma)\mu(\tau) \langle s, \tilde{\tau}(\tilde{\sigma}(e)) \rangle \\ &= \mu(\sigma) \langle \tau(s), \tilde{\sigma}(e) \rangle = \langle \sigma\tau(s), e \rangle \\ &= \mu(\sigma\tau) \langle s, (\tilde{\sigma}\tau)(e) \rangle \end{aligned}$$

donde las igualdades se siguen de (*), de esto concluimos que $(\tilde{\sigma}\tau) = \tilde{\tau}\tilde{\sigma}$.

Tenemos entonces que $id = \tilde{id} = (\sigma\tilde{\sigma}^{-1}) = (\sigma)^{-1}\tilde{\sigma}$, es decir $\tilde{\sigma}$ es invertible con inversa $\tilde{\sigma}^{-1}$.

Haciendo $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}^{-1}$ y sustituyendo en

$$ev(\sigma(f), e) = \mu(\sigma)ev(f, \tilde{\sigma}(e))$$

obtenemos el resultado

$$ev(\sigma(f), \tilde{\sigma}(e)) = \mu(\sigma)ev(f, e)$$

Veamos ahora que $\tilde{\sigma}$ es una similitud, para esto consideremos tres casos:

1. Un vector $v \in E$ induce una transformación $\theta_v \in O(F)$ dada por $\theta_v(z, \zeta) = (z, \zeta - \langle v, z \rangle)$, $z \in E$, $\zeta \in \mathbb{R}$. Consideremos $\tilde{\theta}_v(e) = e + v$ para $e \in E$, es claro que $\tilde{\theta}_v \in Siml(E)$. Entonces obtenemos

$$\begin{aligned} ev(\theta_v(z, \zeta), \tilde{\theta}_v(e)) &= ev((z, \zeta - \langle v, z \rangle), e + v) \\ &= \langle z, e + v \rangle + \zeta - \langle v, z \rangle \\ &= \langle z, e \rangle + \zeta \\ &= ev((z, \zeta), e) \end{aligned}$$

porque $\mu(\theta_v) = 1$, pues $\theta_v(0, 1) = (0, 1)$.

2. Un escalar $\lambda \in \mathbb{R}^*$ induce una transformación $s_\lambda \in O(F)$ dada por $s_\lambda(z, \zeta) = (z, \lambda\zeta)$ $z \in E$ $\zeta \in \mathbb{R}$, y $s_\lambda(0, 1) = (0, \lambda)$, por lo que $\mu(s_\lambda) = \lambda$. Sea $\bar{s}_\lambda(e) = \lambda e$ para todo $e \in E$, entonces

$$\begin{aligned} ev(s_\lambda(z, \zeta), \bar{s}_\lambda(e)) &= ev((z, \lambda\zeta), \lambda e) \\ &= \langle z, \lambda e \rangle + \lambda\zeta \\ &= \lambda \langle z, e \rangle + \lambda\zeta \\ &= \mu(s_\lambda) ev((z, \zeta), e) \end{aligned}$$

3. Sea $\sigma \in O(E)$, entonces induce a $\bar{\sigma} \in O(F)$ dada por $\bar{\sigma}(z, \zeta) = (\sigma(z), \zeta)$, así $\bar{\sigma}(0, 1) = (0, 1)$ y por tanto $\mu(\bar{\sigma}) = 1$. Sea $\bar{\sigma} = \sigma$

$$\begin{aligned} ev(\bar{\sigma}(z, \zeta), \bar{\sigma}(e)) &= ev(\bar{\sigma}(z, \zeta), \sigma(e)) \\ &= \langle \sigma(z), \sigma(e) \rangle + \zeta \\ &= \langle z, e \rangle + \zeta \\ &= \mu(\bar{\sigma}) ev((z, \zeta), e) \end{aligned}$$

Y como cualquier transformación en $O(F)$ se puede descomponer como producto de transformaciones de los tres tipos considerados, hemos encontrado que a cada $\sigma \in O(F)$ le asociamos la transformación $\bar{\sigma} \in Siml(E)$.

Ahora dado un elemento en $Siml(E)$ de la forma $\lambda\phi + \nu$ con $\phi \in O(E)$ y $\lambda > 0$, asociémosle la transformación $\Phi \in O_\infty(F)$, dada por

$$\Phi(z, \zeta) = (\phi(z), -\langle \phi(z), \nu \rangle + \lambda\zeta);$$

primeramente vemos que $\Phi(\bar{0}, 1) = (\phi(\bar{0}), -\langle \phi(\bar{0}), \nu \rangle + \lambda 1) = (0, \lambda) = \lambda(0, 1)$, es decir $\mu(\Phi) = \lambda > 0$ por lo que $\Phi \in O_\infty(F)$, entonces

$$\begin{aligned} ev(\Phi(z, \zeta), \lambda\phi(e) + \nu) &= ev((\phi(z), -\langle \phi(z), \nu \rangle + \lambda\zeta), \lambda\phi(e) + \nu) \\ &= \langle \phi(z), \lambda\phi(e) + \nu \rangle - \langle \phi(z), \nu \rangle + \lambda\zeta \\ &= \lambda \langle \phi(z), \phi(e) \rangle + \lambda\zeta \\ &= \lambda \langle z, e \rangle + \lambda\zeta \\ &= \mu(\Phi) ev((z, \zeta), e) \end{aligned}$$

lo cual nos da el resultado. ■

1.6 Grupo de Lorentz

Sea F un espacio vectorial de dimensión $n + 1$ sobre \mathbb{R} , con una forma cuadrática de tipo Sylvester $(-n, 1)$, también conocida como **hiperbólica**. Por ejemplo en el caso de $n = 3$ con $F = \mathbb{R}^4$ tenemos el modelo espacio-tiempo utilizado en la teoría de la relatividad, como mencionamos antes.

Más adelante veremos que una forma cuadrática con este tipo Sylvester es no singular. Analicemos primero la acción de $O(F)$ en el **Hiperboloide o Pseudoesfera**

$$S(F) = \{f \in F : \langle f, f \rangle = 1\}$$

Lema 1.4 (Lema del Discriminante) Sea R un plano en F generado por dos vectores e y f . El tipo Sylvester de R está determinado por el discriminante

$$\Delta = \langle e, e \rangle \langle f, f \rangle - \langle e, f \rangle^2$$

de acuerdo a la siguiente tabla

$$\begin{array}{c|c|c} \Delta < 0 & \Delta = 0 & \Delta > 0 \\ \hline (-1, 1) & (-1, 0) & (-2, 0) \end{array}$$

Demostración:

Consideremos una base ortonormal de F y construyamos el hiperplano E con tipo Sylvester $(-n, 0)$. Por la fórmula de Dimensión, tenemos que $\dim(R) + \dim(E) = \dim(R \cap E) + \dim(R + E)$ y como $\dim(R + E) \leq n + 1$, tenemos que $n + 2 \leq \dim(R \cap E) + (n + 1)$, entonces $\dim(R \cap E) \geq 1$, así R contiene vectores de norma negativa, por lo que los únicos tipos Sylvester posibles para R son $(-1, 1)$, $(-1, 0)$, $(-2, 0)$. Tomemos una base ortonormal e_1, e_2 para R .

Si es de tipo $(-1, 1)$, $\text{sign det} \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle \end{pmatrix} = (-1)^1 = -1$ por lo que $\Delta < 0$.

Si es de tipo $(-1, 0)$, entonces para alguna $i \in \{1, 2\}$, digamos $i = 1$, tenemos que $\langle e_1, e_1 \rangle = -1$, $\langle e_2, e_2 \rangle = 0$ y $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$. De forma que $\text{det}[\langle e_i, e_j \rangle] = 0$, por lo que $\Delta = 0$.

Si es de tipo $(-2, 0)$, $\text{sign det} \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle \end{pmatrix} = (-1)^2 = 1$, de donde $\Delta > 0$. ■

Lema 1.5 Cualesquiera dos puntos $x, u \in S(F)$ cumplen:

$$1 \leq |\langle x, u \rangle|$$

y la igualdad se da si x y u son linealmente dependientes.

Demostración:

Cuando x, u son linealmente dependientes existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $x = \lambda u$, entonces como $\langle x, x \rangle = \langle \lambda u, \lambda u \rangle = \lambda^2 \langle u, u \rangle = \lambda^2 = 1$ tenemos que $\lambda = \pm 1$, de donde $x = u$ o $x = -u$ y se da la igualdad.

En el caso que son linealmente independientes, generan un plano R de tipo Sylvester $(-1, 1)$, $(-1, 0)$ ó $(-2, 0)$ por el lema anterior. Como R contiene vectores de norma positiva (por ejemplo x), su tipo Sylvester es $(-1, 1)$, entonces $\Delta = \langle u, u \rangle \langle x, x \rangle - \langle x, u \rangle^2 < 0$, de donde

$$\langle u, u \rangle \langle x, x \rangle < \langle u, x \rangle^2$$

es decir $1 < |\langle u, x \rangle|$. ■

Por un argumento similar al usado en la demostración del lema del discriminante vemos que cualquier hiperplano R en F tiene tipo $(-n+1, 1)$, $(-n, 0)$ ó $(-n+1, 0)$ ya que por medio de la fórmula de la Dimensión obtendremos que $\dim(R \cap E) \geq n-1$, por lo que R contiene a lo más un generador de norma positiva.

Proposición 1.9 *El Hiperboloide $S(F)$ tiene dos componentes conexas.*

Dos elementos $x, u \in S(F)$ están en la misma componente conexa si y sólo si $\langle x, u \rangle > 0$.

Demostración:

Sea $u \in S(F)$, el hiperplano ortogonal E a u tiene tipo Sylvester $(-n, 0)$, además $S(F)$ consta de los conjuntos $H = \{x \in S(F) : \langle x, u \rangle > 0\}$ y $H^- = \{x \in S(F) : \langle x, u \rangle < 0\}$ los cuales son intercambiados por la reflexión $\tau_u(x) = x - 2\langle x, u \rangle u$, ya que si $x \in H$ entonces $\langle \tau_u(x), u \rangle = \langle x - 2\langle x, u \rangle u, u \rangle = \langle x, u \rangle - 2\langle x, u \rangle \langle u, u \rangle = \langle x, u \rangle - 2\langle x, u \rangle = -\langle x, u \rangle < 0$.

Veamos que H es convexo (para H^- se procede de manera similar). Sean $a, b \in H$ y $0 \leq t \leq 1$, entonces

$$\langle (1-t)a + tb, u \rangle = [(1-t)\langle a, u \rangle + t\langle b, u \rangle] > 0$$

por lo tanto es convexo y entonces conexo.

Ahora sean $x, u \in S(F)$, y supongamos que están en la misma componente conexa, como u puede ser el punto que fijamos al principio para obtener H y H^- y $\langle u, u \rangle = 1 > 0$ entonces $\langle u, x \rangle > 0$. Recíprocamente si $\langle u, x \rangle > 0$ entonces $x \in H$ por lo que están en la misma componente conexa. ■

Lema 1.6 *Existe un homeomorfismo entre la componente H y el conjunto $D = \{y \in E : -\langle y, y \rangle < 1\}$.*

Demostración:

Consideremos $g : H \rightarrow E$, la proyección estereográfica desde el punto $-u$ de H sobre el disco unitario $D = \{y \in E : -\langle y, y \rangle < 1\}$.

Consideremos la recta que pasa por $x \in H$ y $-u$, la cual parametrizamos por $(x+u)t - u$, $t \in \mathbb{R}$ y sea $g(x)$ la intersección de esta recta con E ; para calcular $g(x)$ tenemos que encontrar t de tal forma que $\langle (x+u)t - u, u \rangle = 0$, es decir $1 = t(\langle x, u \rangle + 1)$, así $t = \frac{1}{\langle x, u \rangle + 1}$ y como $x, u \in H$, $\langle x, u \rangle$ es positivo luego $\langle x, u \rangle + 1 \neq 0$, entonces

$$g(x) = \frac{x+u}{\langle x, u \rangle + 1} - u = \frac{x - \langle x, u \rangle u}{1 + \langle x, u \rangle}$$

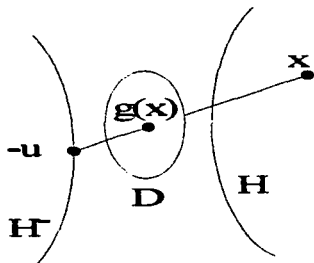


FIGURA 1.1. La proyección estereográfica de H sobre D

Ahora veamos que $g(x) \in H$

$$\begin{aligned} \langle g(x), g(x) \rangle &= \frac{1}{(1 + \langle x, u \rangle)^2} (\langle x, x \rangle + \langle x, u \rangle^2 - 2\langle x, u \rangle^2) \\ &= \frac{1 - \langle x, u \rangle^2}{1 + \langle x, u \rangle^2} = \frac{1 - \langle x, u \rangle}{1 + \langle x, u \rangle} \end{aligned}$$

por el Lema 1.5 y por la definición de H tenemos que $\langle x, u \rangle \geq 1$ de donde $1 - \langle x, u \rangle \leq -1 - \langle x, u \rangle$ por tanto $\frac{1 - \langle x, u \rangle}{1 + \langle x, u \rangle} < -1$, es decir $-\langle g(x), g(x) \rangle < 1$ y $g(x) \in D$.

Ahora parametricemos la recta, que pasa por un punto $z \in D$ y $-u$, por $(z+u)t - u$, $t \in \mathbb{R}$ y sea $f(z)$ el punto de la intersección de esta recta y H ; para calcular esta intersección debemos encontrar t de tal forma que $\langle (z+u)t - u, (z+u)t - u \rangle = 1$, es decir

$$t^2 \langle z+u, z+u \rangle - 2t \langle z+u, u \rangle + \langle u, u \rangle = 1 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 t^2 < z, z \rangle + 2t \langle u, z \rangle + t^2 - 2t \langle z, u \rangle - 2t &= 0 \Rightarrow \\
 t^2 (\langle z, z \rangle + 1) - 2t &= t(t(\langle z, z \rangle + 1) - 2) = 0 \Rightarrow \\
 t = 0 \text{ o } t &= \frac{2}{\langle z, z \rangle + 1}
 \end{aligned}$$

por lo que obtenemos que

$$f(z) = 2 \frac{z + u}{\langle z, z \rangle + 1} - u$$

Calculando $\langle f(z), f(z) \rangle$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
 \langle f(z), f(z) \rangle &= \left\langle s \frac{z + u}{1 + \langle z, z \rangle} - u, s \frac{z + u}{1 + \langle z, z \rangle} - u \right\rangle \\
 &= \frac{4 \langle z, u \rangle (1 + \langle z, z \rangle) + (1 + \langle z, z \rangle)^2}{(1 + \langle z, z \rangle)^2} = 1
 \end{aligned}$$

donde la última igualdad se tiene ya que $z \in D \subset E$ y entonces $\langle z, u \rangle = 0$, con lo que se concluye que $f(z) \in S(F)$. Ahora veamos que $f(z) \in H$

$$\begin{aligned}
 \langle f(z), u \rangle &= \frac{2}{1 + \langle z, z \rangle} \langle z + u, u \rangle - 1 \\
 &= \frac{2}{1 + \langle z, z \rangle} - 1 = \frac{1 - \langle z, z \rangle}{1 + \langle z, z \rangle} > 0
 \end{aligned}$$

ya que $-\langle z, z \rangle < 1$, por lo que $1 + \langle z, z \rangle > 0$ y como $z \in D$, $\langle z, z \rangle < 0$ entonces $1 - \langle z, z \rangle > 0$.

Calculando $g(f(z))$ tenemos que

$$\begin{aligned}
 g(f(z)) &= \frac{f(z) - \langle f(z), u \rangle u}{1 + \langle f(z), u \rangle} \\
 &= \frac{2 \frac{z+u}{1+\langle z, z \rangle} - u - \langle 2 \frac{z+u}{1+\langle z, z \rangle} - u, u \rangle u}{1 + \langle 2 \frac{z+u}{1+\langle z, z \rangle} - u, u \rangle} \\
 &= \frac{2z}{1 - \langle z, z \rangle} = z
 \end{aligned}$$

entonces $g(f(z)) = z$; de la misma manera obtenemos que $f(g(w)) = w$, de donde $f: D \rightarrow H$ es un homeomorfismo. ■

Definición Una transformación ortogonal $\sigma \in O(F)$ es de Lorentz, si preserva las componentes conexas de $S(F)$. El grupo de transformaciones de Lorentz se denota por $Lor(F)$.

De la proposición anterior tenemos que:

$$\sigma \in Lor(F) \Leftrightarrow \langle x, \sigma(x) \rangle > 0 \quad \forall x \in S(F)$$

La función antípoda $x \mapsto -x$ está en el centro de $O(F)$ pero claramente no pertenece a $Lor(F)$, así $Lor(F)$ tiene índice dos con respecto a $O(F)$ y entonces

$$O(F) = Lor(F) \times \mathbb{Z}_2$$

Un ejemplo de una transformación de Lorentz es una reflexión a través de $c \in F$ con $\langle c, c \rangle = -1$, es decir de la forma

$$\tau_c(x) = x + 2 \langle x, c \rangle c, \quad x \in F$$

$$\langle \tau_c(x), x \rangle = \langle x + 2 \langle x, c \rangle c, x \rangle = 1 + 2 \langle x, c \rangle^2 > 0 \quad x \in S(F)$$

Las transformaciones de Lorentz con $\det = 1$, son llamadas **pares o especiales** y forman el **grupo especial de Lorentz**, $Lor^+(F)$ que es de índice 2 en $Lor(F)$.

Ahora consideremos F de dimensión 2 con tipo Sylvester $(-1, 1)$, éste tiene una base e, f tal que $\langle e, e \rangle = 1, \langle f, f \rangle = -1$, entonces

$$xe + tf \in S(F) \Leftrightarrow \langle xe + tf, xe + tf \rangle = x^2 - t^2 = 1$$

si hacemos $e = (1, 0)$ y parametrizamos la parte de la hipérbola $x^2 - t^2 = 1$ que contiene a $(1, 0)$ por $(\cosh s, \sinh s)$, $s \in \mathbb{R}$, entonces para $\sigma \in Lor(F)$ se tiene que $\sigma(e) = e \cosh s + f \sinh s$. Ahora como $\sigma(f)$ tiene norma -1 y es ortogonal a $\sigma(e)$ tenemos que $\sigma(f) = \mp(e \sinh s + f \cosh s)$.

En el primer caso la matriz para σ es

$$\begin{pmatrix} \cosh s & -\sinh s \\ \sinh s & -\cosh s \end{pmatrix}$$

así $\det(\sigma) = -1, \text{tr}(\sigma) = 0$. Haciendo un cambio de base para que la matriz de σ sea $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, vemos que σ es una reflexión a través de un vector h de norma $\langle h, h \rangle = -1$.

En el segundo caso se puede comprobar que la matriz para σ es

$$L(s) = \begin{pmatrix} \cosh s & \sinh s \\ \sinh s & \cosh s \end{pmatrix}$$

y $\det(L(s)) = 1$. Las fórmulas de adición de las funciones trigonométricas hiperbólicas nos garantizan que $L(s+t) = L(s)L(t)$, de donde $L: \mathbb{R} \rightarrow Lor^+(F)$ es un isomorfismo del grupo $(\mathbb{R}, +)$ al grupo especial de Lorentz. Es decir, cuando $\dim(F) = 2$

$$Lor^+(F) \cong (\mathbb{R}, +)$$

Teorema 1.7 Sea F un espacio vectorial de dimensión $n+1$ con tipo Sylvester $(-n, 1)$. Entonces $\sigma \in \text{Lor}(F)$ es el producto de a lo más $n+1$ reflexiones τ_c con $c \in F$ y $\langle c, c \rangle = -1$.

Demostración:

Por inducción sobre n .

Si $n = 1$ el resultado se sigue de las observaciones anteriores.

Si $n \geq 2$ tomemos el hiperplano E de F de tipo Sylvester $(-n, 0)$, y consideremos la función $\phi: E \rightarrow F$ tal que $\phi(e) = \sigma(e) - e$, con $e \in E$.

Si esta función no es inyectiva existe $e \in E$ tal que $\sigma(e) = e$, como $\langle e, e \rangle = -t$ con $t > 0$, entonces $\langle \frac{1}{\sqrt{t}}e, \frac{1}{\sqrt{t}}e \rangle = \frac{1}{t}(-t) = -1$, por lo que existe un vector $s \in E$ de norma -1 que es fijado por σ ; además el espacio $D = s^\perp$ tiene tipo Sylvester $(-n+1, 1)$. Analicemos $\sigma|_D: D \rightarrow F$; sea $x \in S(F) \cap D$ entonces $\langle \sigma(x), x \rangle > 0$, por lo que $\sigma|_D$ es de Lorentz y como $\dim(D) < n+1$ el resultado se sigue por hipótesis de inducción, ya que $\sigma(s) = s$.

Si el mapeo es inyectivo interseca a E pues es lineal y como la dimensión de E es n , la dimensión de la imagen es n . Luego la imagen contiene vectores de norma negativa y entonces contiene un vector $c \in E$ con $\langle c, c \rangle = -1$. Supongamos que $c = \sigma(e) - e$, $e \in F$, $\langle e, e \rangle < 0$, como $\langle e, e \rangle = \langle \sigma(e), \sigma(e) \rangle$, por la proposición 1.3 existe τ_c reflexión tal que $\tau_c(e) = \sigma(e)$, de donde $\tau_c \sigma(e) = e$, regresando al caso anterior que ya hemos resuelto. ■

Ahora consideremos el cono isotrópico.

$$C(F) = \{x \in F : \langle x, x \rangle = 0\}$$

El grupo multiplicativo \mathbb{R}^* actúa sobre $C(F) \setminus \{0\}$ de manera natural. El espacio de órbitas es llamado el **Cono Projectivizado** de F y se denota por $PC(F)$ (al cual lo podemos pensar como el conjunto de rectas isotrópicas de F).

Proposición 1.10 Sea F un espacio vectorial de dimensión $n+1$ con una forma cuadrática de tipo Sylvester $(-n, 1)$. El Cono Projectivizado $PC(F)$ es homeomorfo a la esfera S^{n-1} .

Demostración:

Sean $u \in S(F)$, E el hiperplano ortogonal a u y

$$D = \{y \in E : -\langle y, y \rangle < 1\}$$

por lo que $S^{n-1} = \partial D = \{y \in E : \langle y, y \rangle = -1\}$.

Definamos $\phi: E \rightarrow F$ por $\phi(z) = 2z + u - \langle z, z \rangle u$ $z \in E$; como $\phi(\partial D) \subset C(F) \setminus \{0\}$, ϕ induce un mapeo $\hat{\phi}: \partial D \rightarrow PC(F)$, pues si $z \in \partial D$ entonces

$$\langle \phi(z), \phi(z) \rangle = (\langle z, z \rangle + 1)^2 = 0$$

es decir $\phi(z) \in C(F)$.

Observamos también que $z \in \partial D$ y u generan un plano tipo Sylvester $(-1, 1)$. Ahora usando el hecho de que $\phi(z)$ es isotrópico, vemos que

$$\langle \phi(-z), \phi(-z) \rangle = \langle \phi(z), \phi(z) \rangle = 0$$

por lo que también $\phi(-z)$ es isotrópico, además

$$\phi(z) + \phi(-z) = 2(u - \langle z, z \rangle u) = 2(1 - \langle z, z \rangle)u$$

$$\phi(z) - \phi(-z) = 4z$$

por lo que $\phi(z), \phi(-z)$ generan a z y u , es decir generan el mismo plano, entonces son vectores isotrópicos linealmente independientes; también $\phi(z), u$ generan el mismo plano pues $2 - 2 \langle z, z \rangle u - \phi(z) = \phi(-z)$.

Para ver que ϕ es inyectiva, sean $z_1, z_2 \in \partial D$, con $\phi(z_1) = \phi(z_2)$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\phi(z_1) = \lambda\phi(z_2)$. pues $\phi(z_1), \phi(z_2) \in PC(F)$.

$$\begin{aligned} \phi(z_1) = \lambda\phi(z_2) &\Rightarrow 2z_1 + u - \langle z_1, z_1 \rangle u = \lambda(2z_2 + u - \langle z_2, z_2 \rangle u) \\ &\Rightarrow 2z_1 + 2u = \lambda(2z_2 + 2u) \\ &\Rightarrow z_1 = \lambda z_2 + u(\lambda - 1) \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} -1 &= \langle z_1, z_1 \rangle \\ &= \langle \lambda z_2 + u(\lambda - 1), \lambda z_2 + u(\lambda - 1) \rangle \\ &= -\lambda^2 + (\lambda - 1)^2 \\ &= -2\lambda + 1 \end{aligned}$$

de donde obtenemos que $\lambda = 1$, por lo que $z_1 = z_2$, es decir ϕ es inyectiva.

Veamos que es suprayectiva. Sea L una recta isotrópica en F , si $v \in L$ entonces $\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle^2 = -\langle u, v \rangle^2 < 0$ por lo que u y v generan un plano R tipo Sylvester $(-1, 1)$. Como E tiene tipo Sylvester $(-n, 0)$ entonces $E \cap R$ tiene dimensión 1 y es generado por un vector $z \in \partial D$ de norma -1. Sabemos que u y z generan R y vimos que también lo generan $u, \phi(z)$ así como $\phi(z), \phi(-z)$, por lo tanto $\phi(z)$ o $\phi(-z)$ generan a L . Así $\phi: \partial D \rightarrow PC(F)$ es biyectiva y continua, entonces $\partial D \cong PC(F)$. ■

Corolario 1.2 Cuando $\dim(F) \geq 3$, $Lor(F)$ actúa fielmente en $PC(F)$

Demostración:

Llamemos Φ a la acción de $Lor(F)$ sobre $PC(F)$. Recordemos que la acción es fiel si es inyectiva, o equivalentemente si

$$\Phi(s) = id_{PC(F)} \Leftrightarrow s = id_{Lor(F)}$$

Tomemos $\sigma \in \text{Lor}(F)$ que actúa trivialmente en $PC(F)$, demos demos que σ es la identidad en $\text{Lor}(F)$. Consideremos la función introducida en la proposición anterior $\phi: S^{n-1} \rightarrow PC(F)$ y sea $z \in S^{n-1}$, como σ actúa trivialmente en $PC(F)$, $\sigma(\phi(z)) \in \{r\phi(z) : r \in \mathbb{R}\}$. Sea $\lambda(z)$ el correspondiente valor propio del vector isotrópico $\phi(z)$ bajo σ .

La función $\lambda: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ satisface, para $z \in S^{n-1}$

$$\begin{aligned} \langle \sigma\phi(z), u \rangle &= \langle \lambda(z)\phi(z), u \rangle \\ &= \lambda(z) \langle \phi(z), u \rangle \\ &= \lambda(z) \langle 2z + u - \langle z, z \rangle u, u \rangle \\ &= \lambda(z) 2 \langle z + u, u \rangle \\ &= 2\lambda(z) \end{aligned}$$

por lo que obtenemos la expresión $\lambda(z) = \frac{\langle \sigma\phi(z), u \rangle}{2}$, que muestra que $\lambda(z)$ es continua.

El conjunto de valores que toma λ es finito, porque es un subconjunto del conjunto de valores propios de σ . Ahora como $n \geq 2$, S^{n-1} es conexo y como λ es continua, $\lambda(S^{n-1})$ es conexo, entonces λ es constante.

Por un plano hiperbólico entenderemos un espacio vectorial de dimensión 2 generado por dos vectores e_1, e_2 isotrópicos tales que $\langle e_1, e_2 \rangle \neq 0$. Sea $f \in F$, vamos a demostrar que f está contenido en un plano hiperbólico, para lo cual tenemos dos casos:

i) $\langle f, f \rangle < 0$. Entonces f^\perp tiene tipo Sylvester $(-n+1, 1)$, $f^\perp \cap E$ tiene dimensión $n-1$ y $f^\perp \cap T \neq \emptyset$, donde T es el generado por $u \in S(F)$. Así podemos seleccionar un vector e ortogonal a f con $\langle e, e \rangle > 0$, de esta forma $\Delta = \langle e, e \rangle \langle f, f \rangle - \langle e, f \rangle^2 < 0$, es decir el plano generado por e, f es de tipo $(-1, 1)$. Escogamos una base ortogonal u, v para este plano, con $\langle u, u \rangle = 1$ y $\langle v, v \rangle = -1$, así $u+v, u-v$ son isotrópicos y generan un plano hiperbólico pues $\langle u+v, u-v \rangle = 2 \neq 0$. Además si $f = \lambda u + \beta v$ entonces $f = \frac{\lambda-\beta}{2}(u+v) + \frac{\lambda+\beta}{2}(u-v)$, por lo que f está contenido en un plano hiperbólico.

ii) $\langle f, f \rangle > 0$. Entonces el espacio f^\perp tiene tipo $(-n, 0)$, por lo que podemos encontrar un vector e ortogonal a f con $\langle e, e \rangle < 0$, y el resultado se sigue igual que en i).

Con estas observaciones hemos demostrado que $C(F)$ genera F . Como σ actúa trivialmente en $PC(F)$ y $C(F)$ genera F , entonces σ actúa así en F : $\sigma(f) = \lambda f$; pero la multiplicación por λ no es una transformación ortogonal, a menos de que $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$, y como hemos visto que el mapeo antipodal intercambia las componentes conexas, entonces $\lambda = 1$ porque $\sigma \in \text{Lor}(F)$; de lo que se concluye que $\sigma = \text{id}_{\text{Lor}(F)}$. ■

Algunas observaciones útiles (de hecho algunas de las siguientes ya las hemos utilizado):

i) Si $\langle f, f \rangle < 0$ entonces f^\perp tiene tipo Sylvester $(-n + 1, 1)$.

ii) Si $\langle f, f \rangle > 0$ entonces f^\perp tiene tipo Sylvester $(-n, 0)$.

iii) Si $\langle f, f \rangle = 0$, f no puede estar en el subespacio generado por un u tal que

$\langle u, u \rangle = 1$. Pero tampoco puede estar en un subespacio del tipo $(-k, 0)$, pues en ese caso $\langle f, f \rangle < 0$, por lo que f está en el subespacio generado por dos vectores e_1, e_2 tal que $\langle e_1, e_1 \rangle = 1$ y $\langle e_2, e_2 \rangle = -1$, de donde f^\perp tiene tipo Sylvester $(-n + 1, 0)$.

Proposición 1.11 *El cono isotrópico truncado $C^*(F) = C(F) \setminus \{0\}$ tiene dos componentes conexas si $\dim(F) \geq 3$. Las componentes conexas son preservadas por $Lor(F)$.*

Demostración:

Fijemos un vector $u \in S(F)$, entonces para toda $c \in C(F)$ su hiperplano ortogonal tiene tipo $(-n + 1, 0)$, por lo que $\langle c, u \rangle \neq 0$. Así tenemos que

$$C^*(F) = C^+(F) \cup C^-(F)$$

donde

$$C^+(F) = \{c \in C(F) : \langle c, u \rangle > 0\}$$

$$C^-(F) = \{c \in C(F) : \langle c, u \rangle < 0\}$$

Para ver que son conexas, demosremos que son convexas: sean $x, y \in C^+(F)$ y sea $\lambda \geq 0$, entonces

$$\langle \lambda x + (1 - \lambda)y, u \rangle = \lambda \langle x, u \rangle + (1 - \lambda) \langle y, u \rangle > 0$$

Veamos ahora que $C^+(F)$ y $C^-(F)$ son preservadas por $Lor(F)$. Primero veamos que las dos componentes no cambian si reemplazamos el punto de referencia u con otro punto v de la misma hoja del hiperboloide $S(F)$, es decir cuando $\langle u, v \rangle > 0$. Sea $c \in C^+(F)$ y consideremos la función $g : S(F) \rightarrow \mathbb{R}$ con $x \mapsto \langle x, c \rangle$ (que por las observaciones hechas antes de la proposición no toma el valor cero). Además si u, v están en la misma hoja del hiperboloide, digamos en H , como la función g es continua y H es conexo, $g(H)$ es conexo y no toma el valor cero, así los valores de $g(u)$ y $g(v)$ tienen el mismo signo, es decir $\langle u, c \rangle$ y $\langle v, c \rangle$ tienen el mismo signo.

Si $x \in C^*$ entonces $\sigma(x) \in C^*$, con $\sigma \in Lor(F)$, además $\sigma(u)$ y u están en la misma hoja del hiperboloide. De lo que se concluye que $\langle \sigma(x), u \rangle$ y $\langle \sigma(x), \sigma(u) \rangle$ tienen el mismo signo.

En particular para $x \in C^+(F)$

$$\langle \sigma(x), \sigma(u) \rangle = \langle x, u \rangle > 0 \text{ entonces } \langle \sigma(x), u \rangle > 0 \text{ y } \sigma(x) \in C^+(F)$$

y para $x \in C^-(F)$

$$\langle \sigma(x), \sigma(u) \rangle = \langle x, u \rangle < 0 \text{ entonces } \langle \sigma(x), u \rangle < 0 \text{ y } \sigma(x) \in C^-(F)$$

de lo que se concluye que $Lor(F)$ preserva las componentes conexas. ■

Ahora es momento de ver que en un espacio vectorial F de dimensión $n+1$ una forma cuadrática de tipo Sylvester $(-n, 1)$ es no singular. Si existe $s \in F^\perp$, entonces $\langle s, s \rangle = 0$ y para $u \in F$ tenemos que $\langle u, s \rangle \neq 0$, lo cual es una contradicción a menos de que $s = 0$.

Proposición 1.12 Sea L una recta isotrópica en F . Sea $Lor_L(F)$ el grupo de Lorentz que estabiliza L . La restricción de F a L^\perp define un isomorfismo $Lor_L(F) \cong O_\infty(L^\perp)$, donde $O_\infty(L^\perp)$ denota el subgrupo de $O(L^\perp)$, de las transformaciones ortogonales que tienen valor propio positivo en la recta isotrópica L .

Demostración:

Antes de la demostración hagamos un recuento de los grupos introducidos en esta proposición.

$$O_\infty(L^\perp) = \{\sigma \in O(L^\perp) : \mu(\sigma) > 0\}$$

donde μ es el valor propio correspondiente.

$O(L^\perp)$ son las transformaciones ortogonales de L^\perp .

$O_L(F)$ es el subgrupo de $O(F)$ que estabiliza la recta L .

Entonces

$$Lor(F) < O(F), Lor_L(F) < O_L(F), Lor_L(F) < Lor(F), O_\infty(L^\perp) < O(L^\perp)$$

Primero veremos que la restricción $\sigma \mapsto \sigma|_{L^\perp}$ de las transformaciones ortogonales de F , define un isomorfismo $O_L(F) \cong O(L^\perp)$.

Sea $\sigma \in O_L(F)$ tal que restringida a L^\perp es la identidad. Sea E subespacio de L^\perp de dimensión $(n-1)$ con tipo Sylvester $(-n+1, 0)$. Como σ tiene restricción trivial en E , podemos escribir $\sigma = id \oplus \alpha$, donde α es una transformación ortogonal de E^\perp con tipo $(-1, 1)$. Al igual que en la demostración del corolario 1.2, E^\perp es plano hiperbólico, por lo que lo podemos escribir como $E^\perp = L \oplus K$ donde K es la otra recta isotrópica. Como α es ortogonal, preserva K y L . Sea $m + s \in L \oplus K$, con $m \in L$ y $s \in K$, entonces

$$\begin{aligned} \langle m, m \rangle + 2\langle m, s \rangle + \langle s, s \rangle &= \langle m + s, m + s \rangle \\ &= \langle \sigma(m + s), \sigma(m + s) \rangle \\ &= \langle \alpha(m + s), \alpha(m + s) \rangle \\ &= \langle \lambda m + \nu s, \lambda m + \nu s \rangle \\ &= 2\lambda\nu \langle m, s \rangle \end{aligned}$$

pues $\langle m, m \rangle = \langle s, s \rangle = 0$ ya que L y K son isotrópicos, de donde

$$2 \langle m, s \rangle = 2\lambda\nu \langle m, s \rangle$$

y entonces $\lambda = \nu^{-1}$. Además como $\sigma|_{L^\perp} = id$ y $K \subset L^\perp$, concluimos que $\lambda = 1 = \nu$, así $\sigma|_L = id$, de donde $\sigma = id$, por lo que la restricción de F a L^\perp es inyectiva.

Veamos la suprayectividad, sea $\sigma \in O(L^\perp)$, como F es no singular, por el Teorema de Witt σ se puede extender a una transformación $\tilde{\sigma} : F \rightarrow F$ tal que $\tilde{\sigma}|_{L^\perp} = \sigma$, luego $\tilde{\sigma}$ estabiliza L , es decir $\tilde{\sigma} \in O_L(F)$, entonces la restricción es suprayectiva, y tenemos el primer resultado $O_L(F) \cong O(L^\perp)$.

Si $\dim(F) \geq 3$. Sea $\sigma \in O_L(F)$ transformación de Lorentz, entonces preserva las componentes conexas de $C^*(F)$ y estabiliza L , además por lo anterior la podemos pensar como elemento de $O(L^\perp)$, entonces sólo nos falta ver que su valor propio en L es positivo. Para esto tomemos $c \in C^*(F)$ un generador de L , digamos que $c \in C^+(F)$ (el otro caso es similar), obtenemos:

$$\langle c, u \rangle > 0 \text{ entonces } 0 < \langle \sigma(c), u \rangle = \langle \lambda c, u \rangle = \lambda \langle c, u \rangle$$

lo que implica que $\lambda > 0$, por lo que $\sigma \in O_\infty(L^\perp)$. Recíprocamente si $\tau \in O_\infty(L^\perp)$ entonces $\tau \in O(L^\perp)$ y por ende $\tau \in O_L(F)$. Sólo nos falta ver que $\tau \in Lor(F)$. Sea $c \in C^*(F)$ generador de L , entonces $\tau(c) = \lambda c$ con $\lambda > 0$, así si $\langle c, u \rangle > 0$ entonces $\langle \tau(c), u \rangle = \langle \lambda c, u \rangle = \lambda \langle c, u \rangle > 0$, igualmente si $\langle c, u \rangle < 0$ entonces $\langle \tau(c), u \rangle = \lambda \langle c, u \rangle < 0$, por lo que preserva las componentes conexas de $C^*(F)$. Del hecho de que $O(F) = Lor(F) \times \mathbb{Z}_2$, se concluye que $\tau \in Lor(F)$ y por lo tanto $\tau \in Lor_L(F)$, y tenemos el resultado

Si $\dim(F) = 2$, sea $\sigma \in Lor_L(F)$, entonces σ estabiliza a L^\perp también, por las observaciones precedentes del Teo. 1.7, el valor propio de L^\perp , $t = e^\theta > 0$ resuelve la ecuación

$$(t - \cosh s)^2 - \sinh^2 s = 0$$

por lo que $\sigma \in O_\infty(F)$. ■

Proposición 1.13 Si la $\dim(F) \geq 3$, entonces el grupo especial de Lorentz, $Lor^-(F)$ actúa transitivamente en el espacio

$$N(F) = \{x \in F : \langle x, x \rangle = -1\}$$

Demostración:

Por la proposición 1.3, sabemos que $O(F)$ actúa transitivamente en $N(F)$. Definimos el estabilizador de $m \in N(F)$ en $O(F)$, como

$$O(F)_m = \{\sigma \in O(F) : \sigma(m) = m\}.$$

Mostremos primero que $Lor(F)$ actúa transitivamente en $N(F)$. Para esto veamos que $O(F)_m$ no está contenido en $Lor(F)$; simplemente tomemos $\sigma \in O(F)$ con $\sigma(m) = m$ y $\sigma(x) = -x$ en m^\perp .

Ahora sean $n, m \in N(F)$, entonces existe $\tau \in O(F)$ tal que $\tau(n) = m$, y supongamos que $\tau \notin Lor(F)$, entonces $-\tau \in Lor(F)$. También existe $\sigma \in$

$O(F) \setminus Lor(F)$ tal que $\sigma(m) = m$, entonces $-\sigma \in Lor(F)$, de esta manera obtenemos que

$$-\sigma(-\tau(n)) = -\sigma(-m) = -(-m) = m$$

además $-\sigma \circ -\tau \in Lor(F)$, por lo tanto $Lor(F)$ actúa transitivamente en $N(F)$. Ahora, para terminar la demostración, únicamente falta demostrar que $Lor(F)_m = \{\sigma \in Lor(F) : \sigma(m) = m\}$ no está contenido en $Lor^+(F)$. Para esto, sea s un vector ortogonal a m con $\langle s, s \rangle = -1$, como $\langle m, m \rangle = -1$, m^\perp tiene tipo Sylvester $(-n+1, 1)$, entonces

$$\tau_s(x) = x + 2 \langle x, s \rangle s$$

es una transformación tal que $\tau_s(m) = m$, $\det(\tau_s) = -1$, por lo que $\tau_s \in Lor(F)_m$, $\tau_s \notin Lor^+(F)$. ■

Hagamos algunas observaciones antes de concluir este capítulo, sobre subespacios proyectivizados de F .

El cono proyectivizado $PC(F)$ es subconjunto del espacio proyectivo $P(F)$, el conjunto de rectas en F . Sea $PS(F) \subset P(F)$, el conjunto de rectas de F generadas por vectores norma positiva, entonces

$$\partial PS(F) = PC(F)$$

que se sigue de $\partial D = S^{n-1} \cong PC(F)$.

Sea H una de las hojas del hiperboloide $S(F)$. Tenemos el homeomorfismo natural: $H \rightarrow PS(F)$, $x \mapsto L$ donde L es generada por x , así $\partial H = PC(F)$.

2 Grupo de Möbius

Enseguida vamos a estudiar el grupo de transformaciones de un espacio vectorial euclidiano E de dimensión n generado por reflexiones en hiperplanos e inversiones en esferas denominado $Möb(E)$. Este estudio lo haremos en espacios de dimensión finita arbitraria pues la geometría inversa no es más difícil en dimensión n que en dimensión 2. Este grupo resulta isomorfo a las transformaciones de Lorentz de cierto espacio que depende de E , este hecho será de utilidad en el momento de estudiar a los espacios hiperbólicos.

Como en $Möb(E)$ juega un papel importante el concepto de esfera, haremos un breve tratamiento de la geometría de estas, también introduciremos una operación entre esferas, invariante bajo $Möb(E)$ llamada el producto inverso de esferas.

Finalmente hablaremos del conocido grupo $PGl_2(\mathbb{C})$ de transformaciones generado por un número par de reflexiones o inversiones en esferas de $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, el cual consta de las transformaciones fraccionales lineales de la forma $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$. Estas incluyen las similitudes euclidianas, las isometrías de la esfera de Riemann y las isometrías del modelo de Poincaré del plano hiperbólico, que conservan la orientación.

2.1 Transformaciones de Möbius

Sean E un espacio vectorial euclidiano de dimensión n y Σ la esfera con centro c y radio $r > 0$ (es decir $\Sigma = \{x \in E : |x - c| = \sqrt{\langle x - c, x - c \rangle} = r\}$), ésta da lugar a una transformación σ en $E - \{c\}$ dada por

$$\sigma(x) = c + r^2 \frac{x - c}{|x - c|^2}, x \in E - \{c\}$$

que cumple $\sigma\sigma = id$, σ es llamada la **inversión en la esfera** Σ .

De la definición de σ , observamos que $\tau(x)$ es un punto en la recta que va con c , además cualquier punto $x \in \Sigma$ es punto fijo de σ .

Ahora consideremos la compactación por un punto \hat{E} , añadiendo a E el punto ∞ . La inversión o reflexión en la esfera Σ puede ser extendida a \hat{E} involiución de \hat{E} , simplemente aplicando ∞ al centro c . Es conocido que así definida es una transformación continua y biyectiva por lo que es un homeomorfismo.

Consideremos ahora un hiperplano afín H de E , que pase por $u \in E$, es decir de la forma $H = u + V$, donde V es un subespacio lineal de dimensión $n - 1$ de E . Consideremos un vector unitario $n \in E$ normal a H , la función $\tau : E \rightarrow E$ definida por

$$\tau(x) = x - 2 \langle x - u, n \rangle n$$

es la **reflexión euclidiana** en H o a través de n , la cual se puede extender como $\bar{\tau}: \hat{E} \rightarrow \hat{E}$ al hacer $\bar{\tau}(\infty) = \infty$.

Para unificar definiciones, entenderemos por una esfera en \hat{E} , a una esfera euclidiana en E o bien a un subconjunto de la forma $H \cup \infty$ donde H es un hiperplano afín en E . Los dos tipos de transformaciones de \hat{E} que introducidos son llamadas inversiones en esferas de \hat{E} y el subgrupo del grupo de homeomorfismos de \hat{E} generados por inversiones en esferas en \hat{E} , es llamado el **grupo de Möbius** de E , denotado como $Möb(E)$. Nuestro objetivo en esta sección es identificar el grupo de Möbius con algún grupo de Lorentz.

Para esto consideremos la suma directa $F = E \oplus \mathbb{R}^2$, con la siguiente forma bilineal

$$\langle (x, a, b), (y, c, d) \rangle_F = -\langle x, y \rangle_E + \frac{1}{2}(ad + bc), \quad x, y \in E \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Una base para F es $(e_1, 0, 0), \dots, (e_n, 0, 0), (\bar{0}, 1, 1), (\bar{0}, -1, 1)$, donde e_1, \dots, e_n es una base ortonormal de E y $(1, 1), (-1, 1)$ es base de \mathbb{R}^2 , por lo que F tiene tipo Sylvester $(-n-1, 1)$.

Una función importante en el estudio que haremos es $\eta: E \rightarrow C(F)$ dada por:

$$\eta(x) = (x, \langle x, x \rangle, 1)$$

la cual es inyectiva; comprobemos que $\eta(x) \in C(F) \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \langle \eta(x), \eta(x) \rangle &= \langle (x, \langle x, x \rangle, 1), (x, \langle x, x \rangle, 1) \rangle \\ &= -\langle x, x \rangle + \frac{1}{2}2 \langle x, x \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

ésta, induce un mapeo $\eta: E \rightarrow PC(F)$ que transforma E biyectivamente al complemento de la recta representada por el punto $(0, 1, 0)$ en $PC(F)$, por lo que la extendemos a una biyección de \hat{E} en $PC(F)$, cubriendo esta recta por medio del punto ∞ , es decir $\eta(\infty) = (0, 1, 0)$

Teorema 2.1 *La acción del grupo $Lor(E \oplus \mathbb{R}^2)$ en el cono proyectivizado $PC(E \oplus \mathbb{R}^2)$ y el homeomorfismo*

$$\eta: \hat{E} \rightarrow PC(E \oplus \mathbb{R}^2)$$

transforma de manera biyectiva el grupo $Möb(E)$ en el grupo $Lor(E \oplus \mathbb{R}^2)$.

Demostración:

Sea Σ una esfera con centro c y radio $r > 0$, si $C = (c, \langle c, c \rangle - r^2, 1)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle C, C \rangle &= \langle (c, \langle c, c \rangle - r^2, 1), (c, \langle c, c \rangle - r^2, 1) \rangle \\ &= -\langle c, c \rangle + \frac{1}{2}2(\langle c, c \rangle - r^2) \\ &= -r^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 \langle C, \eta(x) \rangle &= 2 \langle (c, \langle c, c \rangle - r^2, 1), (x, \langle x, x \rangle, 1) \rangle \\
 &= \langle c, c \rangle - r^2 + \langle x, x \rangle - 2 \langle c, x \rangle \\
 &= |x - c|^2 - r^2
 \end{aligned}$$

para $x \in E$, de esta forma tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \hat{E} & \xrightarrow{\eta} & PC(E \oplus \mathbb{R}^2) \\
 \sigma \downarrow & & \downarrow \tau_C \\
 \hat{E} & \xrightarrow{\eta} & PC(E \oplus \mathbb{R}^2)
 \end{array}$$

donde σ es la inversión en Σ y τ_C la reflexión a través del vector C , de donde

$$\eta\sigma(x) = (\sigma(x), \langle \sigma(x), \sigma(x) \rangle, 1),$$

por lo que necesitamos calcular

$$\begin{aligned}
 \langle \sigma(x), \sigma(x) \rangle &= \langle c + r^2 \frac{x - c}{|x - c|^2}, c + r^2 \frac{x - c}{|x - c|^2} \rangle \\
 &= |c + r^2 \frac{x - c}{|x - c|^2}|^2.
 \end{aligned}$$

Ahora hagamos la composición

$$\begin{aligned}
 \tau_C \eta(x) &= \tau_C(x, \langle x, x \rangle, 1) \\
 &= (x, \langle x, x \rangle, 1) - 2 \frac{\langle (x, \langle x, x \rangle, 1), C \rangle C}{\langle C, C \rangle} \\
 &= (x, \langle x, x \rangle, 1) + \frac{|x - c|^2 - r^2}{r^2} (c, \langle c, c \rangle - r^2, 1)
 \end{aligned}$$

entonces

$$r^2 |x - c|^{-2} \tau_C \eta(x) = (\sigma(x), \langle \sigma(x), \sigma(x) \rangle, 1) = \eta\sigma(x)$$

por lo que obtenemos la primera fórmula importante

$$\eta\sigma(x) = r^2 |x - c|^{-2} \tau_C \eta(x), \quad x \in E - \{c\}$$

Regresamos a la reflexión τ a través de n , consideremos el vector $N = (n, 2 \langle n, n \rangle, 0)$, de donde tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \dot{E} & \xrightarrow{\eta} & PC(E \oplus \mathbb{R}^2) \\
 \downarrow \tau & & \downarrow \tau_N \\
 \dot{E} & \xrightarrow{\eta} & PC(E \oplus \mathbb{R}^2)
 \end{array}$$

Verifiquemos que $\tau_N \eta = \eta \tau$

$$\eta \tau(x) = \eta(x - 2 \langle x, u \rangle u) = (\tau(x), \langle \tau(x), \tau(x) \rangle, 1)$$

$$\begin{aligned}
 \tau_N \eta(x) &= \tau_N(x, \langle x, x \rangle, 1) \\
 &= (x, \langle x, x \rangle, 1) + 2(\langle n, u \rangle - \langle n, x \rangle)(n, 2 \langle n, u \rangle, 0) \\
 &= (\tau(x), \langle \tau(x), \tau(x) \rangle, 1) \\
 &= \eta \tau(x)
 \end{aligned}$$

Ahora, por el teorema 1.7 podemos escribir una transformación de Lorentz como producto de transformaciones de la forma τ_N donde $N \in E \oplus \mathbb{R}^2$ con $\langle N, N \rangle < 0$.

Sea $T = \{x \in E : \langle \eta(x), N \rangle = 0\}$, demostremos que es una esfera o un hiperplano afín:

Caso 1: $N = (z, a, 1)$.

Sea $r = \sqrt{-\langle N, N \rangle}$, de donde $r^2 = -\langle N, N \rangle = -(\langle z, z \rangle + a)$ entonces $a = \langle z, z \rangle - r^2$. Para $x \in E$,

$$\begin{aligned}
 2 \langle \eta(x), N \rangle &= 2 \langle (x, \langle x, x \rangle, 1), (z, a, 1) \rangle \\
 &= 2(-\langle x, z \rangle + \frac{1}{2}(\langle x, x \rangle + a)) \\
 &= -2 \langle x, z \rangle + \langle x, x \rangle + \langle z, z \rangle - r^2 \\
 &= |x - z|^2 - r^2
 \end{aligned}$$

por lo que

$$\langle \eta(x), N \rangle = 0 \Leftrightarrow |x - z|^2 - r^2 = 0$$

es decir T es una esfera de centro z y radio r .

Caso 2: $N = (z, a, 0)$.

En este caso tenemos que $\langle N, N \rangle = -\langle z, z \rangle$, en particular $z \neq 0$, por lo que podemos multiplicar por una constante a N para obtener z como vector unitario. Sea $u \in E$ tal que $\langle u, z \rangle = \frac{1}{2}a$, así tenemos que

$$\langle \eta(x), N \rangle = \langle (x, \langle x, x \rangle, 1), (z, a, 0) \rangle = -\langle x, z \rangle + \frac{1}{2}a = \langle u - x, z \rangle$$

por lo que para todo $x \in E$

$$\langle \eta(x), N \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle u - x, z \rangle = 0 \Leftrightarrow \tau_z(x) = x - 2 \langle x - u, z \rangle z = x$$

de donde T es un hiperplano con vector normal z .

Sabemos que $Lor(E \oplus \mathbb{R}^2)$ actúa fielmente en $PC(E \oplus \mathbb{R}^2)$, lo que nos va a permitir hacer la correspondencia que buscamos. Sea $\sigma \in Lor(E \oplus \mathbb{R}^2)$, entonces existen $\tau_{c_1}, \dots, \tau_{c_n}$ reflexiones de $E \oplus \mathbb{R}^2$, con $s \leq n+2$ y $\langle c_i, c_i \rangle = -1$, tales que $\sigma = \tau_{c_1} \cdots \tau_{c_n}$. Entonces para cada $c_i = (z_i, a_i, \pi)$ donde $\pi \in \{0, 1\}$, formemos el conjunto $T_i = \{x \in E : \langle \tau(x), c_i \rangle = 0\}$ que es una esfera o un hiperplano.

Si T_i es una esfera de centro z_i y radio r_i , tomemos $S_i = (z_i, \langle z_i, z_i \rangle > -r_i^2, 1)$, y obtenemos

$$\eta \sigma_i(x) = r_i^2 |x - z_i|^{-2} \tau_{S_i} \eta(x)$$

donde σ_i es la reflexión en la esfera T_i .

Si T_i es un hiperplano con vector unitario normal z_i , vector director u_i y τ_i la reflexión en T_i , para $N_i = (z_i, 2 \langle z_i, u_i \rangle, 0)$ obtenemos que:

$$\tau_{N_i} \eta = \eta \tau_i$$

En cualquiera de los dos casos a τ_{c_i} le asociamos σ_i o τ_i , por lo que a $\sigma \in Lor(E \oplus \mathbb{R}^2)$ se le asocia la composición de las transformaciones asociadas a las τ_{c_i} , la cual es una transformación de Möbius de E . Que la asociación es inversiva se sigue de que $Lor(E \oplus \mathbb{R}^2)$ actúa fielmente en $PC(E \oplus \mathbb{R}^2)$.

Para ver que es suprayectiva, bastará considerar $\varphi \in Möb(E)$ que sea una inversión o una reflexión. Si φ es la inversión en la esfera de centro c y radio r tomemos el vector $N = (c, \langle c, c \rangle > -r^2, 1)$, por lo que a φ le asociamos $\tau_N \in Lor(E \oplus \mathbb{R}^2)$, de la misma manera si σ es la reflexión en un hiperplano con dirección u y vector normal n tomemos $N = (n, 2 \langle n, u \rangle, 0)$ y le asociamos τ_N . ■

Corolario 2.1 Cada transformación de Möbius del espacio euclidiano E de dimensión n puede escribirse como el producto de a lo más $n+2$ inversiones.

Demostración:

Todo elemento de $Möb(E)$ tiene su correspondiente transformación en $Lor(E \oplus \mathbb{R}^2)$ que puede ser escrita como el producto de a lo más $n+2$ reflexiones, lo que nos da $n+2$ inversiones en E . ■

De manera natural, diremos que una transformación de Möbius de E es impar o par dependiendo del signo del determinante de la correspondiente transformación de Lorentz. Así una transformación de Möbius es par si puede ser escrita como el producto de un número par de inversiones.

Corolario 2.2 El subgrupo de $Möb(E)$ cuyos elementos fijan ∞ es el grupo $Siml(E)$.

Demostración:

Primero mostraremos que una similitud es una transformación de Möbius. Como una similitud es de la forma $\lambda\phi + v$, con $\phi \in O(E)$, $v \in E$ y $\lambda > 0$ analicémosla por separado, primero las homotecias $\sigma(x) = \lambda x$, después las traslaciones $x \mapsto x + v$ y finalmente las ortogonales $\sigma(x) = \phi(x)$ con $\phi \in O(E)$

i) A $\sigma(x) = \lambda x$ con $\lambda > 0$, asociémosle la transformación $(x, a, b) \mapsto (x, \lambda a, \lambda^{-1}b)$, ésta es Lorentz pues si $(x, a, b) \in S(E \oplus \mathbb{R}^2)$ entonces $-\langle x, x \rangle + ab = 1$; como

$$\begin{aligned} \lambda > 0 &\Rightarrow \lambda + \lambda^{-1} \geq 2 \\ &\Rightarrow ab \leq \frac{1}{2}ab(\lambda + \lambda^{-1}) \end{aligned}$$

luego

$$1 = -\langle x, x \rangle + ab \leq -\langle x, x \rangle + \frac{1}{2}ab(\lambda + \lambda^{-1}) = \langle (x, a, b), (x, \lambda a, \lambda^{-1}b) \rangle.$$

ii) a la transformación $t_v(x) = x + v$ con $v \in E$ le asociamos $\varphi: E \oplus \mathbb{R}^2 \rightarrow E \oplus \mathbb{R}^2$ dada por $\varphi(x, a, b) = (x + bv, a + b\langle v, v \rangle + 2\langle x, v \rangle, b)$, la cual es de Lorentz, ya que si $(x, a, b) \in S(E \oplus \mathbb{R}^2)$ entonces $\langle (x, a, b), \varphi(x, a, b) \rangle = ab - \langle x, x \rangle + \frac{1}{2}b^2\langle v, v \rangle > 0$.

iii) $\sigma \in O(E)$ induce en $E \oplus \mathbb{R}^2$ la transformación de Lorentz $\varphi(x, a, b) = (\sigma(x), a, b)$, con $(x, a, b) \in S(E \oplus \mathbb{R}^2)$; es de Lorentz pues

$$\langle (\sigma(x), a, b), (x, a, b) \rangle = \langle x, x - \sigma(x) \rangle > 1 > 0$$

Ahora como cada transformación de Lorentz en $E \oplus \mathbb{R}^2$ está asociada a una de Möbius de E , tenemos que a cualquier similitud de E se le asocia una transformación de Möbius de E , entonces $Siml(E) \subset Möb(E)$.

Para la otra contención, veamos primero que estos tres tipos de transformaciones de Lorentz generan el grupo $Lor_L(E \oplus \mathbb{R}^2)$ de las transformaciones de Lorentz que estabilizan la recta L generada por $(0, 1, 0)$. Usemos el mapeo $(z, \zeta) \mapsto (-z, 2\zeta, 0)$ para identificar $E \oplus \mathbb{R}$ con $L^\perp \subset E \oplus \mathbb{R}^2$, lo cual nos permite expresar el mapeo evaluación como producto interior

$$\begin{aligned} ev: (E \oplus \mathbb{R}) \times E &\rightarrow \mathbb{R}, \quad ev((z, \zeta), x) = \\ &\langle z, x \rangle + \zeta = \langle (-z, 2\zeta, 0), (x, \langle x, x \rangle, 1) \rangle \end{aligned}$$

Por las proposiciones 1.8 y 1.12 tenemos que

$$Lor_L(E \oplus \mathbb{R}^2) \cong O_\infty(L^\perp) \cong O_\infty(E \oplus \mathbb{R}) \cong Siml(E)$$

pero $Lor_L(E \oplus \mathbb{R}^2)$ son las transformaciones que fijan L , por lo que las correspondientes transformaciones de Möbius fijan ∞ , de donde toda transformación de Möbius que fija ∞ es una similitud. ■

Recordamos la definición de $N = N(E \oplus \mathbb{R}^2)$ como los vectores de norma -1 . Un vector $u \in N$ define una esfera $S = \{x \in E : \langle \eta(x), u \rangle = 0\}$ como vimos anteriormente y descompone el complemento de S en dos componentes conexas

$$D = \{x \in E : \langle \eta(x), u \rangle > 0\}$$

$$D^- = \{x \in E : \langle \eta(x), u \rangle < 0\}$$

que son llamados los discos separados por la esfera S y el conjunto D es llamado el disco con vector normal u .

Corolario 2.3 Sean $\varphi \in M\ddot{o}b(E)$ y S una esfera en \hat{E} . Entonces $\varphi(S)$ es una esfera, además la inversión en $\varphi(S)$ esta dada por $\varphi\sigma\varphi^{-1}$, donde σ es la inversión en la esfera S .

Demostración:

Sin pérdida de generalidad vamos a suponer que φ es una inversión en una esfera o reflexión en un hiperplano, por el teorema 2.1 tenemos que a la transformación φ le corresponde una transformación $\tilde{\varphi}$ en $Lor(E \oplus \mathbb{R}^2)$. Sea S la esfera definida por $u \in N(E \oplus \mathbb{R}^2)$, así u es el vector normal para $D = \{x \in \hat{E} : \langle \eta(x), u \rangle > 0\}$ y sea $D' = \{x \in \hat{E} : \langle \eta(x), \tilde{\varphi}(u) \rangle > 0\}$, entonces si $x \in D$ tenemos dos posibilidades

$$\langle \eta\varphi(x), \tilde{\varphi}(u) \rangle = r^2|x - c|^2 < \langle \eta(x), u \rangle > 0$$

$$\langle \eta\varphi(x), \tilde{\varphi}(u) \rangle = \langle \tilde{\varphi}\eta(x), \tilde{\varphi}(u) \rangle = \langle \eta(x), u \rangle > 0$$

por lo que identificamos D con D' , de la misma manera podemos identificar D^- con D'^- ; finalmente si $x \in S$ tenemos que $\langle \eta\varphi(x), \tilde{\varphi}(u) \rangle = k < \langle \eta(x), u \rangle = 0$ donde k puede ser 1 ó $r^2|x - c|^2$, con lo que identificamos S con $\varphi(S)$, la esfera con vector normal $\tilde{\varphi}(u)$. Observamos también que a σ le corresponde la transformación de Lorentz $\tilde{\sigma} = \tau_u$ y como $\tau_{\tilde{\varphi}(u)} = \tilde{\varphi}\tau_u\tilde{\varphi}^{-1}$ entonces $\tau_{\tilde{\varphi}(u)}$ corresponde a la inversión en $\varphi(S)$, por lo que la inversión en $\varphi(S)$ es $\varphi\sigma\varphi^{-1}$. ■

La acción de $M\ddot{o}b(E)$ sobre el conjunto de discos en \hat{E} , puede ser identificada con la acción de $Lor(E \oplus \mathbb{R})$ en el espacio $N(E \oplus \mathbb{R})$, la cual es transitiva (prop. 1.13), entonces:

Corolario 2.4 El grupo de $M\ddot{o}b(E)$ actúa transitivamente en el conjunto de discos en \hat{E} .

Corolario 2.5 Sea S una esfera en \hat{E} y sea $\varphi \in M\ddot{o}b(E)$ que fija a S puntualmente. Entonces φ es la identidad o la inversión en S .

Demostración:

Sea D uno de los discos separados por S , y sea k un vector normal para D , es decir $S = \{e \in \hat{E} : \langle \eta(x), k \rangle = 0\}$. Sea ϕ la inversión en S , como $\varphi(S) = S$ tenemos que $\varphi(D) = D$ ó $\varphi(D) = \phi(D) = D^-$. Reemplacemos, si es necesario, φ por $\phi\varphi$ para obtener que $\varphi(D) = D$, es decir, la correspondiente transformación de Lorentz cumple que $\tilde{\varphi}(k) = k$. Sea $F = k^\perp$, ahora como $S = \{x \in E : \langle \eta(x), k \rangle = 0\}$ y $\varphi(S) = S$, tenemos que $\eta(x) \in k^\perp$ para todo $x \in S$; del homeomorfismo $E \cong PC(E \oplus \mathbb{R}^2)$ tenemos que $S \cong PC(F)$. De donde $\tilde{\varphi}$ actúa trivialmente en $PC(F)$ y como la acción es fiel obtenemos que $\tilde{\varphi} = id$ por lo tanto $\varphi = id$. ■

Definición Dos esferas S y T en \hat{E} son ortogonales si los vectores normales para los discos separados por las esferas son ortogonales.

Proposición 2.1 Sean φ la inversión en S y σ la inversión en T . Si $S \neq T$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- 1 S y T son ortogonales.
- 2 $\varphi\sigma = \sigma\varphi$
- 3 $\sigma(S) = S$
- 4 $\varphi(T) = T$

Demostración:

2 \Rightarrow 3. Tenemos que $\varphi\sigma(S) = \sigma\varphi(S) = \sigma(S)$, entonces por los corolarios anteriores, tenemos que $\sigma(S)$ es una esfera la cual es fijada puntualmente por φ , de donde φ es la inversión en $\sigma(S)$ luego $S = \sigma(S)$ pues φ también es la inversión en S .

2 \Rightarrow 4. El mismo argumento que el anterior.

3 \Rightarrow 2. φ es la inversión en $S = \sigma(S)$, por lo tanto $\varphi = \sigma\varphi\sigma^{-1}$ de donde $\varphi\sigma = \sigma\varphi$.

4 \Rightarrow 2. Mismo argumento que arriba.

1 \Leftrightarrow 3. Sean H, K vectores normales para S y T respectivamente. Por el teorema 2.1, a σ le corresponde la transformación τ_K , entonces

$$\tau_K(H) = H + 2 \langle H, K \rangle K$$

de donde $\tau_K(H) = \pm H \Leftrightarrow \langle H, K \rangle = 0$. De esta forma S y T son ortogonales $\Leftrightarrow \tau_K(H) = H \Leftrightarrow \tau_K$ fija H , es decir para $x \in S$ $\langle \tau_K(x), H \rangle = 0 \Rightarrow \sigma(S) = S$. ■

Proposición 2.2 Sean $A, B \in \hat{E}$ puntos conjugados respecto a la esfera S , es decir puntos no en S intercambiados por la inversión φ en S . Cualquier esfera a través de A, B es ortogonal a S .

Demostración:

Supongamos que a genera una recta isotrópica en $E \oplus \mathbb{R}^2$, representada por A , ($E \cong PC(E \oplus \mathbb{R}^2)$), es decir $\eta(A) = (A, \langle A, A \rangle, 1) = a$. Sea n el vector normal para S y sea $b = a + 2 \langle a, n \rangle n$, entonces tenemos las siguientes relaciones: si $x \in S$ entonces $\langle \eta(x), n \rangle = 0$, $\varphi(A) = B$ y $\tau_n(a) = b$, por lo que b representa a B . Como $A \neq B$, $\langle n, a \rangle = \langle n, \eta(A) \rangle \neq 0$, así $n = \frac{a - \beta}{2 \langle a, n \rangle}$, es decir n esta en el plano generado por a, b . Sea T una esfera a través de A y B con vector normal s , de donde $\langle \eta(A), s \rangle = \langle a, s \rangle = \langle n(B), s \rangle = \langle b, s \rangle = 0$, por lo tanto $\langle n, s \rangle = 0$ y T es ortogonal a S . ■

Proposición 2.3 Sea D un disco abierto en \tilde{E} . El grupo de transformaciones de Möbius que dejan D invariante, $Möb(D)$, es generado por inversiones en esferas ortogonales a ∂D .

Demostración:

Sea n vector normal de D , entonces $\sigma \in Möb(E)$ deja invariante D si y sólo si la correspondiente transformación de Lorentz fija n . Entonces $O_n(E \oplus \mathbb{R}^2) \cong O(n^+)$ por lo que $Lor_n(E \oplus \mathbb{R}^2) \cong Lor(n^+)$, de esta manera identificamos $Möb(D)$ con $Lor(n^+)$, y este último grupo está generado por las reflexiones τ_k con $\langle k, k \rangle = -1$ y $\langle k, n \rangle = 0$, por lo tanto $Möb(D)$ está generado por las inversiones en esferas ortogonales a ∂D . ■

Corolario 2.6 Sean L un hiperplano lineal de E y H uno de los semiespacios acotados por L . La restricción de \tilde{E} a L define un isomorfismo

$$Möb(H) \cong Möb(L)$$

2.2 Producto Inverso de Esferas

En esta sección estudiaremos con más profundidad el concepto de intersección de esferas. Sea E un espacio vectorial euclidiano de dimensión mayor o igual a 2 y sean S y T dos esferas dadas por las ecuaciones:

$$S: -2 \langle x, f \rangle + b \langle x, x \rangle + a = 0, n = (f, a, b), - \langle f, f \rangle + ab < 0$$

$$T: -2 \langle x, g \rangle + d \langle x, x \rangle + c = 0, m = (g, c, d), - \langle g, g \rangle + cd < 0$$

entonces el producto inverso de estas dos esferas, denotado por $S * T$, está definido por

$$S * T = \frac{|\langle f, g \rangle - \frac{1}{2}ad - \frac{1}{2}bc|}{\sqrt{\langle f, f \rangle - ab} \sqrt{\langle g, g \rangle - cd}}$$

Como este producto sólo depende de los vectores normales, tenemos que si $\varphi \in Möb(E)$ entonces

$$\varphi(S) * \varphi(T) = S * T$$

Lema 2.1 El tipo de intersección de dos esferas distintas S y T se caracteriza por el producto inverso como sigue:

$$\frac{S * T < 1}{\#(S \cap T) > 1} \quad \frac{S * T = 1}{\#(S \cap T) = 1} \quad \frac{S * T > 1}{\#(S \cap T) = 0}$$

Demostración:

Sean n, m vectores normales unitarios para discos separados por S y T respectivamente. Estos dos vectores generan un plano R y si hacemos la identificación $S \cap T = PC(R^\pm)$, entonces el discriminante cumple con

$$\Delta = \langle n, n \rangle \langle m, m \rangle - \langle n, m \rangle^2 = 1 - (S * T)^2$$

Si $S * T < 1$ entonces $\Delta > 0$, por lo tanto R tiene tipo Sylvester $(-2, 0)$, de donde R^\pm tiene tipo $(-n + 1, 1)$. Como $n \geq 2$ entonces $PC(R^\pm)$ tiene al menos dos puntos.

Si $S * T = 1$ entonces $\Delta = 0$, por lo que R tiene tipo Sylvester $(-1, 0)$ y R^\pm tiene tipo $(-n + 1, 0)$, de donde $\#PC(R^\pm) = 1$.

Si $S * T > 1$ entonces $\Delta < 0$, R tiene tipo $(-1, 1)$ y R^\pm tiene tipo $(-n, 0)$, es decir $PC(R^\pm) = \emptyset$ pues todos los vectores de R^\pm tienen norma negativa. ■

Sean S y T esferas, $x \in S \cap T$, D un disco separado por S y $n_x(D) \in E$ el vector unitario normal exterior a S en x . De la misma manera sean Q el disco separado por T y $n_x(Q) \in E$ el vector unitario normal exterior a T en x , así mostraremos que

$$S * T = | \langle n_x(D), n_x(Q) \rangle |$$

lo cual es consecuencia del siguiente resultado.

Proposición 2.4 Si $n(D), n(Q) \in N(E \oplus \mathbb{R}^2)$ son los correspondientes vectores normales para S y T entonces

$$\langle n(D), n(Q) \rangle = - \langle n_x(D), n_x(Q) \rangle$$

Demostración:

Supongamos que S es una esfera ordinaria en E y D su interior, así podemos tomar $n = (f, a, 1)$ con f como el centro de S y el centro que cumpla que $r^2 = \langle f, f \rangle - a$, por lo que $n_x(D) = \frac{x-f}{r}$ y $n(D) = -\frac{1}{r}(f, a, 1)$.

En el caso que T sea una esfera ordinaria con radio s y centro g , es decir $m = (g, c, d)$ con $c = \langle g, g \rangle - s^2$, podemos escribir $n_x(Q) = \frac{x-g}{s}$ y $n(Q) = -\frac{1}{s}(g, c, 1)$, haciendo $d = 1$. De esta forma tenemos que

$$\begin{aligned} \langle n(D), n(Q) \rangle &= \left\langle -\frac{1}{r}(f, a, 1), -\frac{1}{s}(g, c, 1) \right\rangle \\ &= - \langle f, g \rangle + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c \\ &= - \langle n_x(D), n_x(Q) \rangle \end{aligned}$$

Cuando T es un hiperplano a través de x con $n_x(Q) = n$ y $\tau_n(y) = y - 2 \langle y - n, n \rangle n$, entonces $n(Q) = (n, 2 \langle x, n \rangle, 0)$.

$$\begin{aligned} \langle n(D), n(E) \rangle &= \left\langle -\frac{1}{r}(f, a, 1), (n, 2 \langle x, n \rangle, 0) \right\rangle \\ &= \frac{1}{r}(-\langle f, n \rangle + \langle x, n \rangle) \\ &= -\langle n_x(D), n_x(Q) \rangle \end{aligned}$$

Y finalmente cuando S y T son hiperplanos, $n_x(D) = m$ y $n_x(Q) = n$

$$\begin{aligned} \langle n(D), n(Q) \rangle &= \langle (m, 2 \langle x, m \rangle, 0), (n, 2 \langle x, n \rangle, 0) \rangle \\ &= -\langle m, n \rangle = -\langle n_x(D), n_x(Q) \rangle. \end{aligned}$$

Ahora veamos un ejemplo del uso del producto inverso en el caso de dimensión 2.

Ejemplo 2.1 Cadena de circunferencias de Steiner. Sean A y B círculos en el plano euclidiano tales que B contiene a A en su interior. Entonces es posible encontrar una cadena de n círculos tangentes, cada uno tangente tanto a A en su exterior como a B en su interior (como en la figura) si y sólo si

$$A * B = 1 + 2 \tan^2 \frac{\pi}{n}$$

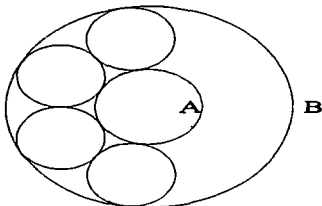


FIGURA 2.1. Cadena de circunferencias de Steiner

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que las circunferencias son concéntricas y con centro en el origen, pues dadas dos circunferencias que no

se cortan pueden invertirse en un par de circunferencias concéntricas. ([E], I, pag. 151)

Entonces supongamos que A y B son concéntricas con radios a y b respectivamente y $a < b$. La condición de la existencia de la cadena de n circunferencias es que $2\alpha = 180^\circ - \frac{2\pi}{n}$, por la ley de senos tenemos que:

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}}{b-a} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\frac{b-a}{2} + a} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}{\frac{a+b}{2}}$$

$$\frac{2\operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}}{b-a} = \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\frac{a+b}{2}} \Rightarrow \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} = \frac{b-a}{b+a},$$

de donde obtenemos

$$\frac{a}{b} = \frac{1 - \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}{1 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}.$$

Los vectores normales están dados por $n(A) = (0, -a^2, 1)$ y $n(B) = (0, -b^2, 1)$ con lo cual concluimos que

$$\begin{aligned} A * B &= \frac{|\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2|}{ab} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \\ &= \frac{1 - \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}{1 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}} + \frac{1 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}{1 - \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2 + 2\operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} \right) \\ &= \sec^2 \frac{\pi}{n} + \tan^2 \frac{\pi}{n} = 1 + 2 \tan^2 \frac{\pi}{n} \end{aligned}$$

Definición Un haz de círculos en el plano euclidiano E , determinado por un subespacio R de dimensión 2 de $E \oplus \mathbb{R}^2$, es el conjunto de círculos de E con vector normal en R .

Proposición 2.5 El haz de círculos en E determinado por un plano R puede ser descrito como sigue, dependiendo del tipo Sylvester de R :

(-2, 0): círculos a través de dos puntos distintos p y q .

(-1, 0): círculos a través de un punto p ortogonales a un círculo C que pasa por p .

(-1, 1): círculos que conjugan a dos puntos distintos p y q .

Demostración:

Caso (-2, 0). El espacio R^\perp tiene tipo (-1, 1) y tiene dos rectas isotrópicas p y q . Así R es el conjunto de vectores ortogonales a p y q . De esta forma un círculo S está en el haz si y sólo si tiene vector normal en R , por lo que pasa por p y q .

Caso $(-1, 1)$. R contiene dos rectas isotrópicas. Un círculo S con vector normal n conjugado p y q si y sólo si $n \in R$, es decir un círculo que pasa por p y q es ortogonal a S si y sólo si su vector normal está en R^\perp .

Caso $(-1, 0)$. R^\perp tiene el mismo tipo, por lo que $R \cap R^\perp = p$ es una recta isotrópica. Fijando un círculo C en el haz R^\perp , tenemos que los círculos en R son los círculos que pasan por p ortogonales a C . ■

Ejemplo 2.2 Consideremos la siguiente familia de círculos en \mathbb{R}^2

$$x^2 + y^2 - b + 2\lambda x = 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

o lo que es lo mismo

$$(x + \lambda)^2 + y^2 = b + \lambda^2$$

1. $b > 0$, todos los círculos pasan por $(0, \sqrt{b})$ y $(0, -\sqrt{b})$.
2. $b = 0$, todos los círculos son tangentes al eje x en el origen.
3. $b < 0$, haciendo $b = -k^2$ obtenemos

$$(x + \lambda)^2 + y^2 = \lambda^2 - k^2$$

si $\lambda = k$, entonces la única solución es $(-k, 0)$; y si $\lambda = -k$ la solución es $(k, 0)$. El sistema es ortogonal a la familia de círculos (haz) que pasa por $(k, 0)$ y $(-k, 0)$.

2.3 Esfera de Riemann

La esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ es la compactación por un punto de \mathbb{C} , esta compactación puede ser hecha de muchas maneras, aquí las usaremos indistintamente, recordemos por ejemplo que:

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \cong S^2$$

donde $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ es el espacio proyectivo complejo. Consideremos la acción escalar de \mathbb{C}^* sobre el espacio vectorial complejo $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, el espacio de órbitas es $\hat{\mathbb{C}}$. Las clases de equivalencia para $(z, w) \neq (0, 0)$ se denotan por $\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}$ por lo que $\begin{bmatrix} z\alpha \\ w\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{C}^*$. También tenemos la acción de $GL_2(\mathbb{C})$ en $\hat{\mathbb{C}}$ dada por la fórmula

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} az + bw \\ cz + dw \end{bmatrix}, ad - bc \neq 0,$$

además como una matriz escalar actúa trivialmente en $\hat{\mathbb{C}}$ tenemos que

$$PGL_2(\mathbb{C}) \cong GL_2(\mathbb{C}) / \{\lambda \text{id} : \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}.$$

Proposición 2.6 La acción de $PGl_2(\mathbb{C})$ sobre $\hat{\mathbb{C}}$ es triple transitiva.

Demostración:

Consideremos las ternas de puntos (A, B, C) y (P, Q, R) y supongamos que A, B, C están representados por los vectores $a, b, c \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Como son tres puntos distintos, dos son linealmente independientes, por lo que existen $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tales que $c = \lambda a + \mu b$, y podemos tomar representantes de manera que $c = a + b$. Así mismo P, Q, R los podemos representar por p, q y $r = p + q$. Sea σ un automorfismo lineal de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ tal que $\sigma(a) = p, \sigma(b) = q$ por lo que $\sigma(c) = r$, entonces la imagen de σ en $PGl_2(\mathbb{C})$ cumple los requerimientos.

Para ver la unicidad, notamos que si existiera otra $\tau \in PGL_2(\mathbb{C})$ con $\tau(a) = \sigma(a), \tau(b) = \sigma(b)$ y $\tau(c) = \sigma(c)$, entonces $\tau^{-1}\sigma$ fija los tres puntos, por lo que sólo basta demostrar que una transformación que fija tres puntos distintos es la identidad.

Sean $p, q, r \in \mathbb{C}$ y f automorfismo lineal de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ que fija los tres puntos. Escojamos representantes $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ tales que $\bar{q} + \bar{r} = \bar{p}$, entonces existen $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$ tales que

$$\bar{f}\bar{p} = \lambda\bar{p}, \bar{f}\bar{q} = \mu\bar{q}, \bar{f}\bar{r} = \nu\bar{r}$$

de donde

$$\lambda(\bar{q} + \bar{r}) = \lambda\bar{p} = \bar{f}\bar{p} = \bar{f}(\bar{q} + \bar{r}) = \mu\bar{q} + \nu\bar{r}$$

pero como \bar{q}, \bar{r} son independientes tenemos que $\lambda = \mu = \nu$, por lo tanto $\bar{f} = \lambda id$, y así $f = id$ en $PGl_2(\mathbb{C})$. ■

Definimos el punto al infinito por $\infty = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right]$ e identificamos \mathbb{C} con $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$ por medio de $z \mapsto \left[\begin{smallmatrix} z \\ 1 \end{smallmatrix} \right]$.

Sea $\sigma \in Gl_2(\mathbb{C})$ como

$$\sigma \left[\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right] \left[\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} az + bw \\ cz + dw \end{smallmatrix} \right], \quad ad - bc \neq 0$$

si $\sigma(\infty) = \infty$, es decir

$$\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right] \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right]$$

entonces $c = 0$.

Si $c \neq 0$ entonces $\sigma(\infty) = \frac{a}{c}$ y $\sigma^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}$ por lo que podemos escribir

$$\sigma(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad -\frac{d}{c} \neq z \in \mathbb{C}$$

Teorema 2.2 El grupo $Gl_2(\mathbb{C})$ actúa sobre $\hat{\mathbb{C}}$ como las transformaciones de Möbius pares. Es decir, esta acción induce un isomorfismo de grupos

$$PGl_2(\mathbb{C}) \cong Möb^+(\mathbb{C})$$

Demostración:

En primer lugar vemos que una matriz triangular cumple

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

entonces las matrices triangulares superiores fijan ∞ , y como $PGl_2(\mathbb{C}) \cong PSL_2(\mathbb{C})$, tenemos que son elementos del grupo de similitudes pares de \mathbb{C} .

Ahora teniendo en cuenta la siguiente identidad de matrices con $c \neq 0$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & b - \frac{ad}{c} \end{bmatrix}$$

donde $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ representa a la transformación $z \mapsto z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ que por ser la composición de la inversión en el círculo unitario seguida de la reflexión en el eje x , es una transformación par en $M\ddot{o}b(\mathbb{C})$, concluimos la primera parte de la afirmación, al ver que cada matriz en $Gl_2(\mathbb{C})$ es la composición de tres transformaciones pares de Möbius.

Ahora como $PGl_2(\mathbb{C})$ actúa transitivamente en $\hat{\mathbb{C}}$, podemos trabajar con el punto ∞ , ya que vimos en el corolario 2.2 que $M\ddot{o}b_\infty(\mathbb{C}) \cong Siml(\mathbb{C})$, de donde existe la respectiva correspondencia entre las transformaciones pares, luego $PGl_2(\mathbb{C})$ es isomorfo a $M\ddot{o}b^+(\mathbb{C})$. ■

RAZON CRUZADA.

Sean (P, Q, R, S) puntos distintos de $\hat{\mathbb{C}}$, los cuales seran representados por matrices de 2×1 p, q, r, s , definimos su razón cruzada como el punto de $\hat{\mathbb{C}}$ dado por

$$[P, Q, R, S] = \left[\frac{\det[p, r] \cdot \det[q, s]}{\det[p, s] \cdot \det[q, r]} \right]$$

donde el símbolo $[p, r]$ representa una matriz de 2×2 con columnas p y r .

Sea $\sigma \in M\ddot{o}b(\mathbb{C})$ con matriz asociada $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y sean $p = (p_1, p_2), q = (q_1, q_2)$ entonces

$$\sigma(p) = \begin{bmatrix} ap_1 + bp_2 \\ cp_1 + dp_2 \end{bmatrix}, \sigma(q) = \begin{bmatrix} aq_1 + bq_2 \\ cq_1 + dq_2 \end{bmatrix}$$

de donde

$$\begin{aligned} \det[\sigma(p), \sigma(q)] &= (ap_1 + bp_2)(cq_1 + dq_2) - (cp_1 + dp_2)(aq_1 + bq_2) = \\ &= (ad - bc)(p_1q_2 - p_2q_1) = \det(\sigma)\det[p, q] \end{aligned}$$

por lo que la razón cruzada es invariante bajo transformaciones de Möbius, es decir:

$$[\sigma(P), \sigma(Q), \sigma(R), \sigma(S)] = [P, Q, R, S]$$

Proposición 2.7 Sean P, Q, R tres puntos distintos de $\hat{\mathbb{C}}$. El mapeo $S \mapsto [P, Q, R, S]$ es una transformación de Möbius por la cual transforma P, Q, R en $\infty, 0, 1$ respectivamente.

Demostración:

Como arriba, representemos estos puntos de $\hat{\mathbb{C}}$ por p, q, r, s . Reescribamos la definición de razón cruzada como

$$[P, Q, R, S] = \begin{bmatrix} \det[p, r] \cdot \det[q, s] \\ \det[p, s] \cdot \det[q, r] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q_2 \det[p, r] & q_1 \det[p, r] \\ -p_2 \det[q, r] & p_1 \det[q, r] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$$

donde $s = (s_1, s_2)$, $q = (q_1, q_2)$, y $p = (p_1, p_2)$

$$[P, Q, R, S] = A \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix},$$

como $\det(A) = \det[p, r] \det[q, r] \det[p, q] \neq 0$, A está en $PGl_2(\mathbb{C})$; directamente calculando el valor en los puntos especificados obtenemos

$$[P, Q, R, P] = \begin{bmatrix} \det[p, r] \cdot \det[q, p] \\ \det[p, p] \cdot \det[q, r] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \end{bmatrix} = \infty$$

$$[P, Q, R, Q] = \begin{bmatrix} 0 \\ * \end{bmatrix} = 0 \text{ y } [P, Q, R, R] = \begin{bmatrix} * \\ * \end{bmatrix} = 1.$$

■

En particular tenemos que $[\infty, 0, 1, S] = S$, para toda $S \in \hat{\mathbb{C}}$, ya que la transformación $\varphi(S) = [\infty, 0, 1, S]$ fija tres puntos, por lo que es la identidad.

Proposición 2.8 Dos cuartetas de puntos distintos de la esfera de Riemann P, Q, R, S y X, Y, Z, W , pueden ser transformadas una en la otra por una transformación de Möbius por si y sólo si

$$[P, Q, R, S] = [X, Y, Z, W]$$

Demostración:

\Rightarrow Se sigue de la observación previa a la proposición anterior.

\Leftarrow Sean $\sigma, \tau \in PGL_2(\mathbb{C})$ tales que $\sigma(P, Q, R) = (\infty, 0, 1)$ y $\tau(X, Y, Z) = (\infty, 0, 1)$. Como

$$[P, Q, R, S] = [\sigma(P), \sigma(Q), \sigma(R), \sigma(S)] = [\infty, 0, 1, \sigma(S)] = \sigma(S)$$

de la misma manera

$$[X, Y, Z, W] = \tau(W)$$

tenemos entonces $\sigma(P) = \tau(X), \sigma(Q) = \tau(Y), \sigma(R) = \tau(Z)$ y $\sigma(S) = \tau(W)$ por lo que la transformación buscada es $\tau^{-1}\sigma$. ■

Proposición 2.9 Una transformación de Möbius σ impar, satisface que

$$[\sigma(P), \sigma(Q), \sigma(R), \sigma(S)] = [\overline{P}, \overline{Q}, \overline{R}, \overline{S}]$$

para puntos distintos de \mathbb{C} .

Demostración:

Para generar el grupo de $M\ddot{o}b(\mathbb{C})$ necesitamos $PGL_2(\mathbb{C})$ y una transformación de Möbius impar que puede ser β , la conjugación compleja $\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \bar{z} \\ \bar{w} \end{bmatrix}$, entonces como $[\beta(P), \beta(Q), \beta(R), \beta(S)] = [\overline{P}, \overline{Q}, \overline{R}, \overline{S}]$ tenemos el resultado. ■

Proposición 2.10 Cualquier $\sigma \in PGL_2(\mathbb{C})$, es conjugada a una transformación dada por alguna matriz de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{C}^*$$

Demostración:

Sea σ representada por $S \in GL_2(\mathbb{C})$: $v \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ es vector propio de S si y sólo si $[v] \in \mathbb{C}$ es punto fijo de σ , por lo que $\sigma \neq id$ tiene uno o dos puntos fijos en \mathbb{C} .

Caso 1. σ tiene dos puntos fijos A y B . Sea $\tau \in M\ddot{o}b(\mathbb{C})$ con $\tau(\infty) = A, \tau(0) = B$, así $\tau^{-1}\sigma\tau(0) = 0$ y $\tau^{-1}\sigma\tau(\infty) = \infty$. Por lo que la matriz de $\tau^{-1}\sigma\tau$ cumple

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

luego $b = c = 0$ y la matriz es de la forma $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Caso 2. Sea A el único punto fijo de σ . Sea $C \neq A$ y sea $\tau \in M\ddot{o}b(\mathbb{C})$ con $\tau(\infty) = A, \tau(0) = C, \tau(1) = \sigma(C)$. De esta manera tenemos que $\tau^{-1}\sigma\tau$ fija ∞ y transforma el 0 en el 1. Por lo que la matriz de esta composición debe cumplir

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

de donde la matriz tiene la forma $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Como sólo fija un punto, puede tener un único valor propio, y calculando su polinomio característico

$$\lambda^2 - \lambda(1 + a) + a = 0$$

tenemos que $a = 1$. ■

Introduzcamos un importante invariante de una transformación $\sigma \in PGL_2(\mathbb{C})$:

$$tr^2\sigma = \frac{(trS)^2}{detS}$$

donde $S \in GL_2(\mathbb{C})$ es un representante de la clase de σ . Finalmente enunciamos una proposición que puede verse en ([JS], pag. 34).

Proposición 2.11 Sean $\sigma, \tau \in PGL_2(\mathbb{C})$, diferentes de la identidad. Entonces σ es conjugada a τ en $PGL_2(\mathbb{C}) \Leftrightarrow tr^2\sigma = tr^2\tau$.

3 Tres Tipos de Geometrías

Vamos a estudiar los tres tipos de geometrías relacionadas con las formas cuadráticas del capítulo 1; la geometría euclidiana, la geometría esférica y la geometría hiperbólica, dando a cada una de estas una métrica. Utilizando el álgebra de los capítulos previos vamos a clasificar las isometrías de estos espacios, así como analizar las geodésicas respectivas.

Finalmente damos tres modelos para el espacio hiperbólico; el modelo del disco de Klein el cual tiene la ventaja de que sus geodésicas son líneas rectas usuales, pero la desventaja que sus ángulos no necesariamente son euclidianos; el modelo del disco de Poincaré cuyos ángulos son euclidianos por lo que también es llamado el modelo del disco conforme pero sus geodésicas son discos ortogonales; al disco de este modelo; y finalmente el semi-espacio de Poincaré que estudiaremos más a fondo en los siguientes dos capítulos.

3.1 Geodésicas

A través de esta sección trataremos con espacios métricos (X, d) , donde d es la función distancia $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$.

Una función $\sigma: X \rightarrow Y$ entre dos espacios métricos, **preserva distancias** si

$$d_Y(\sigma(a), \sigma(b)) = d_X(a, b), \quad a, b \in X$$

de donde deducimos que toda función que preserva distancias es inyectiva y continua.

Definición Una isometría es una función $\sigma: X \rightarrow Y$ que preserva distancias y es suprayectiva. Claramente la función inversa de una isometría, también es un isometría. El conjunto de isometrías de un espacio X en sí mismo forma un grupo al que llamaremos $\text{Isom}(X)$. También diremos que dos espacios X, Y son isométricos si existe una isometría de X sobre Y .

Ejemplo 3.3 Una isometría $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, es una traslación $x \mapsto x + a$ ó una reflexión $x \mapsto b - x$.

Demostración:

Sea σ una isometría de \mathbb{R} , sea τ la reflexión o traslación de \mathbb{R} que coincide con σ en 0 y 1, tenemos que si $\sigma(0) = a$ entonces $\sigma(1) = a \pm 1$, luego τ podría ser la traslación con desplazamiento a (si $\sigma(1) = a + 1$) o la reflexión por a (si $\sigma(1) = a - 1$). Supongamos que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\tau(c) \neq \sigma(c)$, como $a = \sigma(0) = \tau(0)$, tenemos

$$d(\sigma(c), a) = d(\sigma(c), \sigma(0)) = d(c, 0) = d(\tau(c), \tau(0)) = d(\tau(c), a)$$

de donde a es el punto medio de $\sigma(c)$ y $\tau(c)$; de la misma manera obtenemos que $b = \sigma(1) = \tau(1)$ es el punto medio de $\sigma(c)$ y $\tau(c)$, contradiciendo el hecho de que $a \neq b$, por lo que $\sigma = \tau$. ■

Definición Sean $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y X un espacio métrico. Una curva $\gamma: J \rightarrow X$, es una **curva geodésica** si para cada $c \in J$ existe una vecindad $U \subset J$ abierta, tal que $\gamma: U \rightarrow X$ es una función que preserva distancias.

Lema 3.1 Sea J un intervalo abierto de \mathbb{R} , $u \in J$ y $\gamma: J \rightarrow \mathbb{R}$, una curva geodésica con $\gamma(u) = 0$. Entonces $\gamma(t) = \pm(t - u)$, $t \in J$

Demostración:

Veamos que las funciones $\gamma(t)$ y $\pm(t - u)$ valen lo mismo en cualesquiera dos puntos de J . Sean $x, y \in J$, de donde $[x, y] \subset J$, para cada $z \in [x, y]$ existe $U_z \subset J$ vecindad abierta de z tal que la restricción de γ en U_z , preserva distancias, por lo que γ es una reflexión $t - b$ o una traslación $t + a$. Como $[x, y]$ es compacto, existe un número finito de $z_i \in [x, y]$ con $i = \{1, \dots, n\}$ tales que $[x, y] \subset \cup_{i=1}^n U_{z_i}$, entonces $\gamma(t) = t \pm a$ donde a puede tomar a lo más n valores; ahora si $U_{z_1} \cap U_{z_2} \neq \emptyset$ claramente γ coincide en estos dos abiertos, y como estos n abiertos se van "traslapando" tenemos que a es constante, de donde γ coincide en x, y , de hecho coincide en todo el intervalo $[x, y]$. Ahora como $\gamma(u) = 0$, entonces $\gamma(t) = \pm(t - u)$. ■

3.2 Espacio Euclidiano

Sea E un espacio vectorial euclidiano de dimensión n , la longitud de un vector en E está dada por $|c| = \sqrt{\langle c, c \rangle}$ y la distancia entre dos puntos A, B de E es $d(A, B) = |A - B|$. Con esta distancia E es un espacio métrico.

Sean $v, e \in E$, con e de norma 1. Sea $t \mapsto te + v$, $t \in \mathbb{R}$, entonces

$$d(te + v, se + v) = |te + v - se - v| = |te - se| = |t - s||e| = |t - s|$$

por lo que $\gamma(t) = te + v$ es una curva geodésica, y su imagen es llamada una **recta afín**.

Proposición 3.1 Cualquier curva geodésica $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow E$ tiene la forma $\gamma(t) = et + v$, $t \in \mathbb{R}$, donde $v \in E$ y $|e| = 1$.

Demostración:

Sean $a \in \mathbb{R}$ y J su correspondiente intervalo tal que $\gamma: J \rightarrow E$ preserva distancias. Si tomamos $r, s, t \in J$ con $r < s < t$, como

$$d(r, t) = d(r, s) + d(s, t)$$

tenemos, por ser γ geodésica, que

$$d(\gamma(r), \gamma(s)) = d(\gamma(r), \gamma(t)) + d(\gamma(t), \gamma(s))$$

es decir que $\gamma(r), \gamma(s), \gamma(t)$ están en una recta afín, por lo que $\gamma(J)$ está contenida en la recta afín a través de $\gamma(a), \gamma(t)$, de donde $\gamma(t) = \lambda(t)e + \gamma(a)$ con e de norma 1. De esta forma la función

$$\begin{aligned} \lambda: \mathbb{R} &\rightarrow E \rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \lambda(t)e + \gamma(a) \mapsto \lambda(t) \end{aligned}$$

preserva distancias pues

$$|\lambda(t) - \lambda(s)| = |\lambda(t)e + \gamma(a) - \lambda(s)e - \gamma(a)| = |t - s|$$

por el lema anterior

$$\lambda(t) = \pm(t - a)$$

pues $\lambda(a) = 0$, de donde $\gamma(t) = et + v$, con $|e| = 1$. ■

Ahora surge la pregunta de cuáles son las isometrías de E , para esto primero veamos un ejemplo básico de isometría. Sea τ la reflexión en un hiperplano afín H de E , si n es un vector unitario normal a H y $u \in H$, τ tiene la forma

$$\tau(x) = x - 2 \langle x - u, n \rangle n, \quad x \in E$$

y como:

$$d(\tau(x), \tau(y)) = |x - y + 2n \langle y - x, n \rangle| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} = d(x, y)$$

τ es isometría y además fija H . La imagen de un punto $x \notin H$ puede ser descrita geoméricamente observando que la recta afín que une x y $\tau(x)$ es perpendicular a H y H interseca a esa recta en el punto medio de x y $\tau(x)$.

Lema 3.2 Para dos sucesiones A_1, \dots, A_p y B_1, \dots, B_p de puntos de E tales que

$$d(A_i, A_j) = d(B_i, B_j); \quad i, j = 1, \dots, p$$

existe una isometría σ de E compuesta de a lo más p reflexiones con $\sigma(A_i) = B_i$, para $i = 1, \dots, p$.

La demostración de esta afirmación la daremos unas cuantas secciones después.

Por un **simplejo euclidiano** en E , entenderemos una sucesión A_0, \dots, A_n de puntos de E no contenidos en un hiperplano afín.

Lema 3.3 Sea A_0, \dots, A_n un simplejo de E . Si dos isometrías α, β de E coinciden en el simplejo, entonces $\alpha = \beta$.

Demostración:

Sean $\sigma = \beta^{-1}\alpha$ y $p \in E$ tal que $\sigma(p) \neq p$, entonces

$$d(\sigma(p), A_i) = d(\sigma(p), \sigma(A_i)) = d(p, A_i)$$

para $i = 0, \dots, n$, por lo que A_0, \dots, A_n pertenecen al hiperplano afín que bisecta p y $\sigma(p)$, lo cual es una contradicción. ■

Corolario 3.1 *Sea σ una isometría de E que fija un hiperplano afín H puntualmente, entonces σ es la reflexión en H o la identidad.*

Demostración:

Supongamos que $\sigma \neq id$, sea $p \in E$ con $\sigma(p) \neq p$ y consideremos el hiperplano bisector de p y $\sigma(p)$, $H' = \{x \in E : d(x, p) = d(x, \sigma(p))\}$. Demostremos que $H = H'$, sea $x \in H$ entonces $d(x, p) = d(\sigma(x), \sigma(p)) = d(x, \sigma(p))$, por lo que $x \in H'$, esto demuestra que $H \subset H'$ y como son hiperplanos, la dimensión es la misma, por lo que coinciden. Sea τ la reflexión en H , entonces $\tau\sigma$ fija p y los puntos de H , por lo que coinciden en un simplejo (n puntos en el hiperplano y p), por el lema 3.3 $\tau\sigma = id$, es decir $\sigma = \tau$. ■

Teorema 3.1 *Una isometría β en un espacio euclidiano de dimensión n puede descomponerse como el producto de a lo más $n+1$ reflexiones.*

Demostración:

Sea A_0, \dots, A_n un simplejo de E , por el lema 3.2 existe una isometría σ que es la composición de a lo más $n+1$ reflexiones con $\sigma(A_i) = \beta(A_i)$, $i = 0, \dots, n$, y por el lema 3.3 tenemos que $\sigma = \beta$. ■

Ahora vamos a describir todas las isometrías del espacio euclidiano E . Sea $e \in E$, definimos la **traslación** por e , $\tau_e(x) = e + x$, $x \in E$.

Lema 3.4 *Toda isometría ρ del espacio euclidiano E puede ser escrita como $\rho = \tau_e\sigma$ donde $e \in E$ y $\sigma \in O(E)$. La función σ es llamada la linealización de ρ y es denotada por $\bar{\rho}$.*

Demostración:

Sea $Isom'(E)$ el conjunto de isometrías de E que pueden ser escritas en la forma $\tau_e\sigma$ como en el enunciado de la proposición. Veremos que es un grupo que contiene a las reflexiones. Primero observamos que $\sigma\tau_e = \tau_{\sigma(e)}\sigma$ para $\sigma \in O(E)$ y $e \in E$. Luego si $\varphi, \phi \in Isom'(E)$ tenemos que

$$\varphi \circ \tau_e \circ \phi = \tau_e \circ \varphi \Rightarrow \varphi \phi = \tau_e \sigma \tau_e \rho = \tau_e \tau_{\sigma(e)} \sigma \rho = \tau_{e+\sigma(e)} \sigma \rho$$

por lo que $\varphi\phi \in \text{Isom}'(E)$, también si $\varphi = \tau_v\sigma \in \text{Isom}'(E)$, entonces $\varphi^{-1} = \sigma^{-1}\tau_v^{-1} = \sigma^{-1}\tau_{-v} = \tau_{\sigma^{-1}(-v)}\sigma^{-1} \in \text{Isom}'(E)$. Además $\text{Isom}'(E)$ contiene a las reflexiones en hiperplanos de E , pues

$$\tau(x) = x - 2 \langle x, u, n \rangle n = x - 2 \langle x, n \rangle n + 2 \langle u, n \rangle n = \tau_v\sigma(x)$$

donde $v = 2 \langle u, n \rangle n$ y $\sigma(x) = x - 2 \langle x, n \rangle n$ es una transformación ortogonal de E , pues

$$\langle \sigma(x), \sigma(x) \rangle = \langle x - 2 \langle x, n \rangle n, x - 2 \langle x, n \rangle n \rangle = \langle x, x \rangle$$

y como toda isometría puede ser escrita como el producto de reflexiones, tenemos que $\text{Isom}(E) = \text{Isom}'(E)$. ■

Es importante señalar aquí algunas observaciones acerca de la "linealización": $(\phi\varphi) = \bar{\phi}\bar{\varphi}$, $\varphi, \phi \in \text{Isom}(E)$, pues si $\phi = \tau_\rho\sigma$ y $\varphi = \tau_v\sigma$, entonces $\phi\varphi = \tau_{v+\sigma(\rho)}\rho\sigma$ por lo que, $\bar{\phi}\bar{\varphi} = \rho\sigma = \bar{\phi}\bar{\varphi}$.

Si $\phi \in \text{Isom}(E)$, $\bar{\phi} = id$ si y sólo si ϕ es una traslación, por lo que tenemos la sucesión exacta de grupos

$$0 \rightarrow T(E) \xrightarrow{i} \text{Isom}(E) \xrightarrow{g} O(E) \rightarrow 0$$

con i la inclusión y g la linealización, las cuales son inyectiva y suprayectiva respectivamente. Veamos entonces que $\text{Im}(i) = \ker(g)$: $\varphi \in \text{Im}(i)$ si y sólo si $\varphi \in T(E)$, por lo que $g(\varphi) = \bar{\varphi} = id$, si y sólo si $\varphi \in \ker(g)$.

Finalmente tenemos una fórmula importante relacionada con la linealización:

$$\sigma \in \text{Isom}(E), v \in E, \bar{\sigma}\tau_v\sigma^{-1} = \tau_{\bar{\sigma}(v)}$$

pues si $\sigma = \tau_\rho$ y como $\sigma^{-1} = \rho^{-1}$ por la conmutatividad de la suma del espacio vectorial, entonces

$$\bar{\sigma}\tau_v\sigma^{-1}(x) = \bar{\sigma}\tau_v\rho^{-1}(x) = \bar{\sigma}(v + \rho^{-1}(x)) = \rho(v) + x = \tau_{\bar{\sigma}(v)}(x)$$

Lema 3.5 *Cualquier $\sigma \in O(E)$ da lugar a la descomposición ortogonal $E = \ker(\sigma - id) \oplus \text{Im}(\sigma - id)$.*

Demostración:

Veamos primero que $\ker(\sigma - id)$ y $\text{Im}(\sigma - id)$ son ortogonales. Para esto notemos que si $x \in \ker(\sigma - id)$, $y \in E$ entonces

$$\langle x, \sigma(y) - y \rangle = \langle x, \sigma(y) \rangle - \langle x, y \rangle = \langle \sigma(x), \sigma(y) \rangle - \langle x, y \rangle = 0$$

por lo que son ortogonales, de donde $\ker(\sigma - id) \cap \text{Im}(\sigma - id) = 0$. Ahora tomemos el mapeo $\sigma - id$ el cual nos lleva a que $\dim(\ker(\sigma - id)) + \dim(\text{Im}(\sigma - id)) = n$, entonces tenemos el resultado. ■

Teorema 3.2 (Teorema de Clasificación) Una isometría ψ del espacio euclidiano E se descompone en un producto de dos isometrías que conmutan

$$\psi = \tau_v \phi = \phi \tau_v$$

donde τ_v es una traslación a lo largo del vector $v \in E$ y ϕ es una isometría con un punto fijo. Tal descomposición es única.

Demostración:

Sea $\psi \in \text{Isom}(E)$, por el lema 3.4 podemos escribirla como $\psi = \tau_e \sigma$ con $\sigma \in O(E)$ y por el lema anterior e puede ser descompuesto como $e = v + (u - \sigma(u))$, donde $v \in \ker(\sigma - id)$ y $u \in \text{Im}(\sigma - id)$, además $\sigma(v) = v$. Sea $\phi = \tau_u \sigma \tau_{-u}$, $u \in E$, ésta cumple con $\phi(u) = u$ y se tiene

$$\begin{aligned} \tau_v \tau_u \sigma \tau_u^{-1}(x) &= \tau_v \tau_u \sigma(x - u) \\ &= \sigma(x) - \sigma(u) + v + u \\ &= \sigma(x) + e \\ &= \tau_e \sigma(x) \\ &= \psi(x) \end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned} \phi \tau_v \phi^{-1}(x) &= \phi \tau_v \tau_u \sigma^{-1} \tau_u^{-1}(x) \\ &= \phi \tau_v \tau_u \sigma^{-1}(x - u) \\ &= \phi(u + v + \sigma^{-1}(x) - \sigma^{-1}(u)) \\ &= \tau_u(\sigma(v) + x - u) \\ &= \sigma(v) + x = v + x \\ &= \tau_v(x) \end{aligned}$$

de donde $\tau_v \tau_u \sigma \tau_u^{-1} = \tau_v \phi = \phi \tau_v$, por lo que $\psi = \phi \tau_v = \tau_v \phi$. La unicidad se sigue del lema anterior. ■

Del hecho de que τ_v y ϕ conmuten, tenemos que $\phi(x+v) = \phi(x) + v$, $x \in E$, lo que muestra que los puntos fijos de ϕ son estabilizados por la traslación τ_v .

Plano euclidiano

Una isometría par del plano euclidiano es una rotación o una traslación. Una isometría impar es llamada reflexión deslizada, es decir la composición de una reflexión en una recta L con una traslación a lo largo de esa recta.

Espacio euclidiano

Una isometría par, llamada "screw", es la composición de una rotación y una traslación a lo largo del eje de rotación. Las isometrías impares son:

- a) la reflexión rotada, es decir la composición de una reflexión en un plano y una rotación con eje perpendicular al mismo plano,
 b) reflexión trasladada, compuesta de una reflexión en un plano y una traslación a lo largo de este plano.

3.3 Espacio Esférico

Sea F un espacio euclidiano de dimensión $n+1$ y consideremos $S^n = S(F) = \{x \in F : \langle x, x \rangle = 1\}$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que para $p, q \in S^n$, $\langle p, q \rangle \in [-1, 1]$. Definimos entonces la **distancia esférica** entre dos puntos $p, q \in S^n$ como $d(p, q)$, de tal manera que cumpla $\cos d(p, q) = \langle p, q \rangle$, por lo que $d(p, q) \in [0, \pi]$.

Con esta definición, $d(p, q)$ es simétrica y es definida positiva por lo que falta ver que cumpla la desigualdad del triángulo, para tener realmente una métrica.

Definición Por un vector tangente a $p \in S^n$, entenderemos un vector $T \in F$ con $\langle T, p \rangle = 0$. Si $|T| = 1$ es llamado vector tangente unitario. El espacio de vectores tangentes a S^n en p es un hiperplano lineal $T_p(S^n)$ de F llamado el espacio tangente a la esfera S^n en p .

Lema 3.6 Sean $p, q \in S^n$. Un vector tangente unitario U de S^n en p puede ser escogido de manera que $q = p \cos d(p, q) + U \sin d(p, q)$.

Demostración:

Supongamos que p, q son linealmente independientes. Sea U vector unitario tangente a p en el plano generado por p, q , luego existen $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $q = xp + yU$. Como $\langle U, p \rangle = 0$ entonces $1 = \langle q, q \rangle = x^2 + y^2$, por lo que podemos encontrar $s \in [-\pi, \pi]$ tal que $q = p \cos s + U \sin s$, la fórmula no cambia si en lugar de la pareja (s, U) usamos la pareja $(-s, -U)$, por lo que s puede ser tomada en $[0, \pi]$. Ahora $\cos d(p, q) = \langle p, q \rangle = \cos s$, por lo tanto $s = d(p, q)$. En el caso de que p, q son linealmente dependientes, $p = q$ o $p = -q$, por lo que $d(p, q) = 0$ o π , entonces $\sin d(p, q) = 0$, así cualquier vector tangente U a S^n en p nos sirve en este caso. ■

Por un triángulo esférico $\triangle ABC$, entenderemos tres puntos $A, B, C \in S^n$ linealmente independientes en F con $a = d(B, C)$, $b = d(A, C)$, $c = d(A, B)$

Usando el lema anterior fijemos vectores tangentes U, V en A tales que

$$B = A \cos c + U \sin c, \quad C = A \cos b + V \sin b$$

con lo que introducimos $\angle A = \alpha$ como el ángulo entre U y V , es decir $\cos \alpha = \langle U, V \rangle$.

Ahora veremos una fórmula básica de la trigonometría esférica.

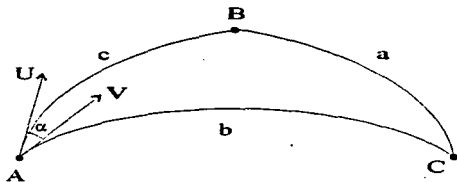


FIGURA 3.1. Triángulo esférico con vectores tangentes en un vértice

Proposición 3.2 (Relación del Coseno)

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos \alpha$$

Demostración:

Sean como antes $a = d(B, C)$, $b = d(C, A)$, $c = d(A, B)$ y U, V vectores tangentes en A tales que:

$$B = A \cos c + U \operatorname{sen} c, \quad C = A \cos b + V \operatorname{sen} b$$

y sea α el ángulo entre U y V , por lo que $\cos \alpha = \langle U, V \rangle$. Ahora

$$\begin{aligned} \cos a &= \langle B, C \rangle = \langle A \cos c + U \operatorname{sen} c, A \cos b + V \operatorname{sen} b \rangle \\ &= \langle A \cos c, A \cos b \rangle + \langle A \cos c, V \operatorname{sen} b \rangle + \\ &\quad \langle U \operatorname{sen} c, A \cos b \rangle + \langle U \operatorname{sen} c, V \operatorname{sen} b \rangle \\ &= \cos b \cos c \langle A, A \rangle + \cos c \operatorname{sen} b \langle A, V \rangle + \\ &\quad \operatorname{sen} c \cos b \langle U, A \rangle + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \langle U, V \rangle \\ &= \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos \alpha. \end{aligned}$$

Lema 3.7 (Desigualdad del Triángulo) Sean $A, B, C \in S^n$ entonces

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$$

y la desigualdad es estricta cuando los tres vectores son linealmente independientes.

Demostración:

Cuando son linealmente independientes tenemos que $\cos \alpha < 1$, donde α es el ángulo en A , entonces usando la relación del coseno obtenemos que

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos \alpha \\ &< \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \\ &= \cos(c - b)\end{aligned}$$

es decir $\cos a < \cos(c - b)$. Si $c - b > 0$ entonces debemos tener $a > c - b$ luego $c < a + b$; cuando $c - b < 0$, como $a > 0$ llegamos a la misma desigualdad, es decir en los dos casos tenemos que $c < a + b$, por lo tanto $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$. Para el caso en que sean linealmente dependientes, deducimos la desigualdad usando $\cos \alpha \leq 1$. ■

La métrica inducida en la esfera S^n define la misma topología que la heredada del espacio euclidiano F donde se encuentra S^n . Basta observar la siguiente relación entre la distancia euclidiana y la métrica d : $|P - Q| = \sqrt{P^2 - Q^2}$, $P - Q > = \sqrt{2 - 2 \cos d(P, Q)}$.

Proposición 3.3 *Cualquier curva geodésica $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow S^n$ puede ser escrita en la forma $\gamma(t) = A \cos t + T \operatorname{sen} t$, $t \in \mathbb{R}$, donde $A \in S^n$ y T es un vector tangente unitario a S^n en A .*

Demostración:

Sea J un intervalo alrededor de $u \in \mathbb{R}$ de longitud menor que π , tal que la restricción de γ a J preserve distancias. Por la desigualdad del triángulo para cualesquiera $r, s, t \in J$, con $r < s < t$, los puntos $\gamma(r), \gamma(s), \gamma(t)$ son linealmente dependientes por lo que están en el plano R generado por $\gamma(r) - \gamma(s)$ y $\gamma(t) - \gamma(s)$, en donde $\gamma(J)$ está contenido.

Sea $A = \gamma(u)$ y T un vector unitario tangente contenido en R , es decir $T \in T_A(S^n)$. Consideremos la curva $\theta(s) = A \cos s + T \operatorname{sen} s$, por lo que tenemos $\cos d(\theta(s), \theta(t)) = \langle \theta(s), \theta(t) \rangle = \cos(s - t)$ es decir una isometría $\theta : (-\pi, \pi) \rightarrow R \cap S^n \cap E$ donde E es el conjunto de puntos con $d(A, x) < \pi$. Luego la demostración es similar a la proposición 3.1 usando el lema 3.6. ■

Isometrías de la Esfera

Una transformación $\sigma \in O(F)$ induce una isometría de la esfera S^n . Mostraremos el recíproco, es decir que cualquier isometría de la esfera proviene de una transformación ortogonal del espacio ambiente.

Lema 3.8 *Dadas dos sucesiones A_1, \dots, A_p y B_1, \dots, B_p de puntos de S^n tales que*

$$d(A_i, A_j) = d(B_i, B_j) \quad ; i, j = 1, \dots, p$$

existe una isometría σ de E compuesta de a lo más p reflexiones tal que $\sigma(A_i) = B_i$.

Este es el mismo lema 3.2, pero para el caso esférico y nuevamente posponemos la prueba.

Teorema 3.3 Toda isometría β de S^n es inducida por una transformación ortogonal del espacio euclidiano ambiente.

Demostración:

Sea $A_0, \dots, A_n \in S^n$ un simplejo esférico, por lo que son linealmente independientes en F . Por el lema anterior existe $\sigma \in O(F)$ tal que es la composición de a lo más $n+1$ reflexiones en hiperplanos con $\sigma(A_i) = \beta(A_i)$, $i = 0, \dots, n$, por la prueba del lema 3.3 se sigue que $\sigma = \beta$. ■

3.4 Espacio Hiperbólico

Ahora consideremos un espacio vectorial real F de dimensión $n+1$ con una forma cuadrática tipo Sylvester $(-n, 1)$ y recordemos que $S(F)$ (los vectores de norma 1) consiste de dos hojas (componentes conexas); denotemos por \mathbb{H}^n a alguna de las dos hojas e introduzcamos aquí una métrica. Sabemos que si $P, Q \in \mathbb{H}^n$ entonces $|\langle P, Q \rangle| \geq 1$ y como están en la misma hoja $\langle P, Q \rangle \geq 1$. Definimos la **distancia hiperbólica** entre P y Q como el número $d(P, Q)$ tal que $\cosh d(P, Q) = \langle P, Q \rangle$, la cual es simétrica y definida positiva por las observaciones anteriores.

Lema 3.9 (Desigualdad del triángulo) Para $A, B, C \in \mathbb{H}^n$ se cumple que

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$$

La desigualdad es estricta cuando los tres vectores son linealmente independientes.

Demostración:

Consideremos $A, B, C \in \mathbb{H}^n$ y sea $d(B, C) = a, d(C, A) = b, d(A, B) = c$. Calculemos el determinante de la matriz de Gram de A, B, C

$$\begin{aligned} \Delta &= \det \begin{bmatrix} \langle C, C \rangle & \langle B, C \rangle & \langle C, A \rangle \\ \langle B, C \rangle & \langle B, B \rangle & \langle A, B \rangle \\ \langle C, A \rangle & \langle A, B \rangle & \langle A, A \rangle \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} 1 & \cosh a & \cosh b \\ \cosh a & 1 & \cosh c \\ \cosh b & \cosh c & 1 \end{bmatrix} \\ &= 1 - \cosh^2 a - \cosh^2 b - \cosh^2 c + 2 \cosh a \cosh b \cosh c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\cosh^2 b - 1)(\cosh^2 c - 1) - (\cosh b \cosh c - \cosh a)^2 \\
 &= \sinh^2 b \sinh^2 c - (\cosh b \cosh c - \cosh a)^2 \\
 &= (\cosh a - \cosh(b - c))(\cosh(c + b) - \cosh a) \\
 &= 4 \sinh \frac{1}{2}(p - c) \sinh \frac{1}{2}(p - b) \sinh \frac{1}{2}(p) \sinh \frac{1}{2}(p - a)
 \end{aligned}$$

con $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ es decir

$$\Delta = 4 \sinh p \sinh(p - a) \sinh(p - b) \sinh(p - c) \dots (*)$$

Supongamos que A, B, C son linealmente independientes en F , así generan un subespacio de F de tipo Sylvester $(-2, 1)$ y el signo del determinante de la matriz formada con los productos interiores es $(-1)^2 = 1$, es decir $\Delta > 0$. Analizaremos solamente el caso en que $c \geq a$ y $c \geq b$, (pues los otros casos son inmediatos) entonces $p - a = \frac{1}{2}(c - a) + \frac{1}{2}b > 0$, lo mismo que $p - b = \frac{1}{2}(c - b) + \frac{1}{2}a > 0$; como $\Delta > 0$ y $p > 0$ de (*) obtenemos que $p - c > 0$, de donde $a + b - c = 2(p - c) > 0$, por lo tanto $a + b > c$.

Si los vectores son linealmente dependientes entonces $\Delta = 0$, con $p \neq 0$ entonces de (*) obtenemos que $p - a = 0, p - b = 0$ ó $p - c = 0$; en cualquiera de estos casos obtenemos la igualdad. ■

Definición Un vector tangente T en un punto $A \in \mathbb{H}^n$ es un punto $T \in F$ con $\langle T, A \rangle = 0$. Un vector tangente de norma -1 es llamado vector tangente unitario. El espacio de vectores tangentes a \mathbb{H}^n en A forma un hiperplano de F de tipo $(-n, 0)$ llamado el espacio tangente a \mathbb{H}^n en A y es denotado por $T_A(\mathbb{H}^n)$.

Lema 3.10 Sean $A, B \in \mathbb{H}^n$, entonces es posible escoger un vector tangente unitario U de \mathbb{H}^n en A tal que

$$B = A \cosh d(A, B) + U \sinh d(A, B)$$

Demostración:

Si $A = B$, cualquier $U \in \mathbb{H}^n$ unitario sirve. Si $A \neq B$, entonces son linealmente independientes y el plano R que generan tiene tipo $(-1, 1)$. Sea U unitario tangente a A en R , de esta manera tenemos que $B = xA + yU$, $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $\langle A, U \rangle = 0$ lo que implica que $1 = \langle B, B \rangle = \langle xA + yU, xA + yU \rangle = x^2 - y^2$ así podemos encontrar $s \in \mathbb{R}$ tal que $B = A \cosh s + U \sinh s$, cuyo valor no cambia si tomamos $(-U, -s)$ por (U, s) , por lo que podemos escoger $s \geq 0$. Así obtenemos que $\cosh d(A, B) = \langle A, B \rangle = \cosh s$, y $s = d(A, B)$. ■

GEODÉSICAS.

Empezando de un punto $A \in \mathbb{H}^n$, con un vector tangente unitario T a \mathbb{H}^n en A , construimos la curva $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^n$ dada por $\gamma(s) = A \cosh s + T \sinh s$, $s \in \mathbb{R}$, la cual cumple que $\cosh d(\gamma(t), \gamma(s)) = \langle \gamma(t), \gamma(s) \rangle = \cosh(t-s) = \cosh|t-s|$ de donde $d(\gamma(t), \gamma(s)) = |t-s|$, por lo que es una curva geodésica. La imagen de la curva está contenida en el plano R generado por A y T , además la imagen es $\mathbb{H}^n \cap R$.

Proposición 3.4 *Cualquier curva geodésica $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^n$ puede ser escrita en la forma $\gamma(t) = A \cosh t + T \sinh t$, $t \in \mathbb{R}$, donde $A \in \mathbb{H}^n$ y T es el vector unitario tangente a \mathbb{H}^n en A .*

Demostración:

La demostración es similar a la de la proposición 3.1, usando el lema 3.10. ■

ISOMETRÍAS.

Sea $\sigma \in \text{Lor}(F)$ la cual preserva las hojas de $S(F)$, de hecho induce una isometría del espacio hiperbólico \mathbb{H}^n , mostremos entonces que existe un isomorfismo entre $\text{Lor}(F)$ y $\text{Isom}(F)$.

Lema 3.11 *Dadas dos sucesiones A_1, \dots, A_p y B_1, \dots, B_p de puntos de \mathbb{H}^n tales que*

$$d(A_i, A_j) = d(B_i, B_j) \quad ; i, j = 1, \dots, p$$

existe una isometría σ de F compuesta de a lo más p reflexiones de Lorentz con $\sigma(A_i) = B_i$.

Demostración:

Haremos la demostración por inducción sobre p .

Veamos la demostración del Lema 3.2. El hiperplano que bisecta dos puntos A, B de E el espacio euclidiano, está dado por $\{x \in E : d(x, A) = d(x, B)\}$, por lo que la reflexión en este hiperplano intercambia A y B , esto demuestra el caso $p = 1$.

Supongamos que tenemos ρ una isometría compuesta de a lo más $p-1$ reflexiones en hiperplanos tal que $\rho(A_i) = B_i$, $i = 1, \dots, p-1$. Si $\rho(A_p) = (B_p)$ tomamos $\rho = \sigma$. Cuando $\rho(A_p) \neq B_p$ tenemos que

$$d(\rho(A_p), B_i) = d(\rho(A_p), \rho(A_i)) = d(A_p, A_i) = d(B_p, B_i), \quad i = 1, \dots, p-1$$

es decir B_1, \dots, B_{p-1} están en el plano que bisecta a $\rho(A_p)$ y B_p . Si τ denota la reflexión en este hiperplano, entonces $\sigma = \tau\rho$ es la transformación que sirve.

Para la demostración del lema 3.8, simplemente observemos que si $A, B \in S^n$, entonces el conjunto $\{p \in S^n : d(A, p) = d(B, p)\}$ es la intersección de un hiperplano lineal K ortogonal a $A - B$ y S^n , entonces $\langle p, A - B \rangle = 0$, es decir $\langle p, A \rangle = \langle p, B \rangle$ y $d(A, p) = d(B, p)$, así la reflexión ortogonal en K intercambia A y B , ahora el resultado se sigue como en la prueba anterior.

Y finalmente para este lema, tomemos dos puntos distintos $A, B \in \mathbb{H}^n$ y analicemos la bisectriz perpendicular para A y B , $\{p \in \mathbb{H}^n : d(A, p) = d(B, p)\}$, que es la intersección de \mathbb{H}^n con el hiperplano ortogonal al vector $N = A - B$, con $\langle N, N \rangle = 2 - 2 \langle A, B \rangle < 0$, así la reflexión a través de N es de Lorentz e intercambia A y B . La prueba se concluye como las anteriores. ■

Teorema 3.4 Toda β isometría de \mathbb{H}^n es inducida por una transformación de Lorentz de F .

Demostración:

Una sucesión A_0, \dots, A_n de puntos de \mathbb{H}^n linealmente independientes en F es un simplejo hiperbólico. Por el lema anterior existe σ isometría que es la composición de a lo más $n+1$ reflexiones de Lorentz tal que $\sigma(A_i) = \beta(A_i)$, $i = 0, \dots, n$, por lo que $\sigma = \beta$, como se sigue del Lema 3.3. ■

Finalmente diremos que una isometría σ del espacio hiperbólico \mathbb{H}^n es llamada par o impar si la correspondiente transformación de Lorentz lo es. Ahora veremos varios modelos para el espacio hiperbólico \mathbb{H}^n .

3.5 Modelo del disco de Klein

En esta sección vamos a construir un modelo del n -espacio hiperbólico basado en el disco unitario D^n del espacio euclidiano E de dimensión n .

Tomemos el espacio $E \oplus \mathbb{R}$ con la forma bilineal $\langle (A, a), (B, b) \rangle = -\langle A, B \rangle + ab$, $A, B \in E$, $a, b \in \mathbb{R}$ que tiene tipo Sylvester $(-n, 1)$.

Para el espacio hiperbólico \mathbb{H}^n considere la hoja de la hipérbola unitaria en $E \oplus \mathbb{R}$ que consiste de los puntos (A, a) con $-\langle A, A \rangle + a^2 = 1$ y $a > 0$. Sea $p: D^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ dada por

$$p(A) = \frac{(A, 1)}{\sqrt{1 - \langle A, A \rangle}}, \quad A \in D^n$$

con $p(A) \in \mathbb{H}^n$ pues

$$\begin{aligned} \langle p(A), p(A) \rangle &= \left\langle \frac{(A, 1)}{\sqrt{1 - \langle A, A \rangle}}, \frac{(A, 1)}{\sqrt{1 - \langle A, A \rangle}} \right\rangle \\ &= \frac{1}{1 - \langle A, A \rangle} (-\langle A, A \rangle + 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Geoméricamente, $p(A)$ es la intersección de \mathbb{H}^n y la recta a través de $(A, 1)$ y $\bar{0}$.

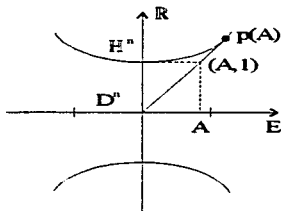


FIGURA 3.2. Proyección desde el origen de D^n en \mathbb{H}^n

El modelo del n -espacio hiperbólico de Klein es D^n equipado con la métrica inducida por la función $p: D^n \rightarrow \mathbb{H}^n$, es decir la métrica en el modelo de Klein esta dada para $A, B \in D^n$ por

$$\begin{aligned} \cosh d(A, B) &= \langle p(A), p(B) \rangle \\ &= \left\langle \frac{(A, 1)}{\sqrt{1 - \langle A, A \rangle}}, \frac{(B, 1)}{\sqrt{1 - \langle B, B \rangle}} \right\rangle \\ &= \frac{1 - \langle A, B \rangle}{\sqrt{1 - \langle A, A \rangle} \sqrt{1 - \langle B, B \rangle}}. \end{aligned}$$

Las rectas geodésicas en el modelo de Klein son trazas sobre D^n de rectas afines en E , esto por la forma de las geodésicas en \mathbb{H}^n y la descripción geométrica de la función p . La frontera de \mathbb{H}^n , puede ser parametrizada por la frontera euclidiana de ∂D^n asignando a $A \in \partial D^n$ la recta isotrópica en $E \oplus \mathbb{R}$ a través de $(A, 1)$.

3.6 Modelo del disco de Poincaré

Igual que en la sección anterior consideremos $E \oplus \mathbb{R}$, D^n y \mathbb{H}^n la hoja del hiperboloide que pasa a través de $(0, 1)$. Ahora sea la parametrización $f: D^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ dada por

$$f(p) = \frac{(2p, 1 + \langle p, p \rangle)}{1 - \langle p, p \rangle}, \quad p \in D^n$$

entonces tenemos que $\langle f(p), f(p) \rangle = \langle \frac{(2p, 1 + \langle p, p \rangle)}{1 - \langle p, p \rangle}, \frac{(2p, 1 + \langle p, p \rangle)}{1 - \langle p, p \rangle} \rangle = 1$ por lo que $f(p) \in \mathbb{H}^n$. Geométricamente, es la proyección estereográfica con centro $(0, -1)$, para ver esto parametrizamos la recta que pasa por $(0, -1)$ y el punto $p \in D^n$; esta recta es $t((p, 0) - (0, -1)) + (0, -1)$, $t \in \mathbb{R}$, es decir está parametrizada como $(tp, t - 1)$. Debemos encontrar $t \in \mathbb{R}$ de tal forma que $(tp, t - 1)$ esté en \mathbb{H}^n , es decir $\langle (tp, t - 1), (tp, t - 1) \rangle = -t^2 \langle p, p \rangle + (t - 1)^2 = 1$ entonces $t(t(1 - \langle p, p \rangle) - 2) = 0$, $t \neq 0$, por lo tanto $t = \frac{2}{1 - \langle p, p \rangle}$ y tenemos que f tiene esa forma. Nuevamente transportamos la métrica de \mathbb{H}^n por medio de f para obtener que

$$\begin{aligned} \cosh d(P, Q) &= \langle f(P), f(Q) \rangle \\ &= \left\langle \frac{(2P, 1 + \langle P, P \rangle)}{1 - \langle P, P \rangle}, \frac{(2Q, 1 + \langle Q, Q \rangle)}{1 - \langle Q, Q \rangle} \right\rangle \\ &= 1 + 2 \frac{|P - Q|^2}{(1 - |P|^2)(1 - |Q|^2)}, P, Q \in \mathbb{H}^n \end{aligned}$$

El disco unitario D^n con esta métrica es llamado el disco de Poincaré.

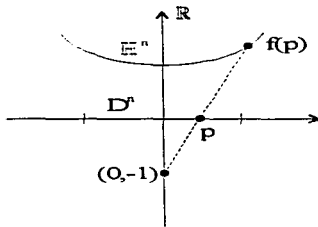


FIGURA 3.3. Proyección estereográfica desde $(0, -1)$ de D^n en \mathbb{H}^n

Definición El subgrupo de $Möb(E)$ de transformaciones que dejan invariante D^n es denotado por $Möb(D^n)$.

Lema 3.12 Si $\sigma \in Möb(D^n)$ es la inversión en la esfera $S(a, r)$ de centro a y radio r , entonces para $x, y \in D^n$ se tiene

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| = \frac{r^2|x - y|}{|x - a||y - a|}$$

Demostración:

Observemos que

$$\begin{aligned}
 |\sigma(x) - \sigma(y)| &= r^2 \left| \frac{(x-a)}{|x-a|^2} - \frac{(y-a)}{|y-a|^2} \right| \\
 &= r^2 \left[\frac{1}{|x-a|^2} - \frac{2(x-a) \cdot (y-a)}{|x-a|^2 |y-a|^2} + \frac{1}{|y-a|^2} \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{r^2 |x-y|}{|x-a||y-a|}.
 \end{aligned}$$

Lema 3.13 Si $\phi \in \text{Möb}(D^n)$ y $x, y \in D^n$, entonces

$$\frac{|\phi(x) - \phi(y)|^2}{(1 - |\phi(x)|^2)(1 - |\phi(y)|^2)} = \frac{|x-y|^2}{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)}$$

Demostración:

Como $\phi \in \text{Möb}(D^n)$ entonces deja invariante D^n , por lo que es la inversión en una esfera $S(c, r)$, ortogonal a S^{n-1} , de donde sus vectores normales cumplen que $\langle (0, -1, 1), (c, |c|^2 - r^2, 1) \rangle = 0$ y obtenemos que $r^2 = |c|^2 - 1$. Como

$$\phi(x) = c + r^2 \frac{x-c}{|x-c|^2}$$

entonces

$$|\phi(x)|^2 = |c|^2 + 2r^2 \frac{\langle c, x-c \rangle}{|x-c|^2} + r^4 \frac{1}{|x-c|^2}$$

$$|\phi(x)|^2 - 1 = r^2 \frac{(|x|^2 - 1)}{|x-c|^2}$$

así

$$\frac{1 - |\phi(x)|^2}{1 - |x|^2} = \frac{r^2}{|x-c|^2}$$

y usando el lema 3.12 concluimos que

$$\frac{|\phi(x) - \phi(y)|^2}{|x-y|^2} = \frac{(1 - |\phi(x)|^2)(1 - |\phi(y)|^2)}{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)}$$

Teorema 3.5 El grupo de Möb(D^n), que deja invariante D^n , actúa como el grupo de isometrías del disco de Poincaré D^n . En particular cualquier isometría de D^n se extiende a una transformación de Möb(E).

Demostración:

Primero calculemos $f^{-1} : \mathbb{H}^n \rightarrow D^n$, para esto sea $(A, a) \in \mathbb{H}^n, a > 0$, parametrizando la recta que pasa por este punto y por $(0, -1)$, obtenemos que $((A, a) - (0, -1))t + (0, -1) = (tA, ta + t - 1)$ y queremos $t \in \mathbb{R}$ tal que $(tA, ta + t - 1) = (tA, 0)$, es decir $t = \frac{1}{a+1}$, por lo tanto $f^{-1}(A, a) = \frac{A}{a+1}$, además $\langle \frac{A}{a+1}, \frac{A}{a+1} \rangle = \frac{\langle A, A \rangle}{(a+1)^2} \leq 1$, esto se sigue del hecho de que $-\langle A, A \rangle + a^2 = 1$, por lo que $f^{-1}(A, a) \in D^n$.

Sea τ la reflexión a lo largo del vector $(N, n) \in E \oplus \mathbb{R}$ de norma -1 . Tenemos la siguiente fórmula para $p \in D^n$

$$\begin{aligned} f^{-1}\tau f(p) &= f^{-1}(f(p) + 2\langle (N, n), f(p) \rangle (N, n)) \\ &= \frac{p + (n + n\langle p, p \rangle - 2\langle p, N \rangle)N}{|N - np|^2} \end{aligned}$$

y tenemos dos casos:

Cuando $n = 0$, entonces $\langle N, N \rangle = 1$ por lo que

$$f^{-1}\tau f(p) = \frac{p - 2\langle p, N \rangle N}{|N|^2} = p - 2\langle p, N \rangle N$$

que es una reflexión euclidiana a través de N .

Cuando $n \neq 0$, entonces $1 + n^2 = \langle N, N \rangle > y$

$$f^{-1}\tau f(p) = \frac{p + (|np - N|^2 - 1)Nn^{-1}}{|np - N|^2} = Nn^{-1} + n^{-2} \frac{P - Nn^{-1}}{|P - Nn^{-1}|^2}, p \in D^n$$

por lo que es una inversión en la esfera euclidiana C con centro Nn^{-1} y radio n^{-1} , además $\langle Nn^{-1}, Nn^{-1} \rangle = n^{-2} + 1$. Sea $y \in C$, es decir $|y - Nn^{-1}| = n^{-2}$ por lo que el vector normal para C está dado por

$$S = (Nn^{-1}, \langle Nn^{-1}, Nn^{-1} \rangle - n^{-2}, 1) = (Nn^{-1}, 1, 1)$$

mientras que el vector normal para $S^{n-1} = \partial D^n$ está dado por $M = (0, -1, 1)$ y $\langle M, S \rangle = 0$, por lo que C es ortogonal $S^{n-1} = \partial D^n$.

Hemos visto anteriormente que el grupo $Möb(D^n)$ es generado por inversiones en esferas ortogonales a S^{n-1} . Ahora cualquier isometría de \mathbb{H}^n es inducida por transformaciones de Lorentz de $E \oplus \mathbb{R}$ y toda transformación de Lorentz es el producto de a lo más $n + 1$ reflexiones $\tau_c, c \in E \oplus \mathbb{R}$ y $\langle c, c \rangle = -1$.

Tomemos entonces una isometría φ de D^n , como f es una isometría entonces la imagen de φ bajo f es una isometría de \mathbb{H}^n , por lo que es inducida por una transformación de Lorentz del espacio $E \oplus \mathbb{R}$, la cual podemos ver como producto de reflexiones de Lorentz y bajo f^{-1} cada reflexión es una reflexión euclidiana o una inversión en una esfera ortogonal a S^{n-1} , por lo que es de Möbius de E

La primera parte del teorema se sigue de la fórmula de distancia de este modelo y el lema anterior. ■

Lema 3.14 Una isometría ϕ del disco de Poincaré $D^n \subset E$, es inducida por una transformación ortogonal de $E \Leftrightarrow \phi(0) = 0$.

Demostración:

\Rightarrow] Es claro.

\Leftarrow] Por el lema anterior una isometría de D^n puede ser representada por una transformación de Möbius ϕ de E la cual conmuta con la inversión σ en la esfera unitaria S^{n-1} pues son esferas ortogonales. Como $\phi(0) = 0$ entonces $\sigma\phi(\infty) = \phi\sigma(\infty) = \phi(0) = 0$, como $\sigma(\infty) = 0$ tenemos que $\phi(\infty) = \infty$, por lo que ϕ es una similitud de E , es decir tiene la forma $\phi(x) = \lambda\varphi(x) + f$ con $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $f \in E$ y $\varphi \in O(E)$, entonces $\phi(0) = \lambda\varphi(0) + f = f = 0$, por lo que $\phi(x) = \lambda\varphi(x)$ y como ϕ es isometría concluimos que $\lambda = \pm 1$. ■

Proposición 3.5 Una isometría ϕ del disco de Poincaré $D^n \subset E$ puede ser escrita como $\rho\mu$ donde $\mu \in O(E)$ y ρ es una reflexión en una esfera ortogonal a S^{n-1}

Demostración:

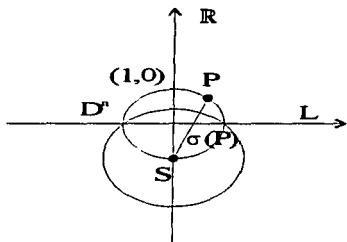
Sea $p \in D^n$ tal que $\phi(0) = p$; si $p = 0$ entonces por el lema anterior ϕ es ortogonal y terminamos con $\rho = id$. Si $p \neq 0$, sea $r = \sigma(p)$ donde σ es la inversión en la esfera S^{n-1} y sea S el círculo con centro r ortogonal a S^{n-1} . Sea ρ la inversión en S entonces tenemos que $\rho\sigma = \sigma\rho$. Tenemos algunas relaciones: $\rho(\infty) = r$, de donde $\rho(0) = \rho\sigma(\infty) = \sigma\rho(\infty) = \sigma(r) = p$ por lo que $\rho(p) = 0$ de donde obtenemos $\rho\phi(0) = \rho(p) = 0$, como ρ es la inversión en una esfera ortogonal a S^{n-1} entonces $\rho \in \text{Möb}(D^n)$ por lo que es una isometría de D^n , entonces tenemos que $\rho\phi$ es una isometría de D^n que fija 0, por lo que es ortogonal de E , es decir $\rho\phi = \mu \in O(E)$ entonces $\phi = \rho\mu$. ■

3.7 Semi-Espacio de Poincaré

Sea L un espacio euclidiano de dimensión $n - 1$ y formemos el espacio euclidiano $E = L \oplus \mathbb{R}$. Fijemos nuestra atención en el semi-espacio superior E^+ dado por el conjunto de puntos (p, h) con $h > 0$ y $p \in L$.

Consideremos la inversión $\sigma : E^- \rightarrow D^n$ en la esfera de radio $\sqrt{2}$ y centro el polo sur $s = (0, -1)$, ésta transforma a E^+ de manera suprayectiva al disco D^n ; σ tiene la forma:

$$\sigma(x) = (0, -1) + 2 \frac{x - (0, -1)}{|x - (0, -1)|^2} = (0, -1) + 2 \frac{(p, h + 1)}{|p|^2 + (1 + h)^2}, \quad x = (p, h), h > 0$$

FIGURA 3.4. La inversión σ que transforma E^+ en D^n

También vemos que σ induce una proyección estereográfica de ∂D^n a la frontera de L . Usaremos σ para llevar la métrica del disco de Poincaré al semi-espacio superior E^+ , es decir para $P = (p, h), Q = (q, k) \in E^+$, definamos

$$\cosh d_{E^+}(P, Q) = \cosh d(\sigma(P), \sigma(Q)) = \langle \sigma(P), \sigma(Q) \rangle$$

y usando que $\cosh d(\sigma(P), \sigma(Q)) = 1 + 2 \frac{|\sigma(P) - \sigma(Q)|^2}{(1 - |\sigma(P)|^2)(1 - |\sigma(Q)|^2)}$ obtenemos que

$$\cosh d_{E^+}(P, Q) = 1 + \frac{|P - Q|^2}{2hk}$$

El semi-espacio E^+ con esta métrica es llamado el semi-espacio de Poincaré.

Teorema 3.6 *El grupo de Möbius (E^+), es decir las transformaciones de Möbius que dejan invariante E^+ , actúa como el grupo de isometrías del semi-espacio de Poincaré. En particular cualquier isometría de E^+ puede ser extendida a una transformación de Möbius de E .*

Demostración:

Sea σ la inversión considerada al inicio de esta sección (que por la manera de definir la métrica es una isometría), entonces la conjugación por σ en $Möb(E)$ transforma el subgrupo $Möb(D^n)$ en el grupo $Möb(E^+)$, así transformamos este teorema en el teorema 3.5. ■

Corolario 3.2 *El grupo de isometrías del semi-espacio E^+ de Poincaré es isomorfo al grupo de Möbius de $L = \partial E^+$.*

Demostración:

El grupo de isometrías del semi-espacio E^+ de Poincaré es $Möb(E^+)$ y está generado por inversiones en esferas ortogonales a ∂E^- por lo que fijan a ∂E^+ . ■

3.8 Semi-Plano de Poincaré

El semiplano abierto superior \mathbb{H}^2 de \mathbb{C} es un modelo para el plano hipérbolico, cuando especificamos la métrica dada en la sección anterior

$$\cosh d(z, w) = 1 + \frac{|w - z|^2}{2\operatorname{Im}z\operatorname{Im}w}, \quad z, w \in \mathbb{H}^2$$

También podemos deducir algunas otras fórmulas con la ayuda de la trigonometría hiperbólica como

$$\sinh \frac{1}{2}d(z, w) = \frac{|w - z|}{2\sqrt{\operatorname{Im}z\operatorname{Im}w}}$$

$$\cosh \frac{1}{2}d(z, w) = \frac{|w - \bar{z}|}{2\sqrt{\operatorname{Im}z\operatorname{Im}w}}$$

Para describir las isometrías de \mathbb{H}^2 en este modelo, recordemos que $Gl_2(\mathbb{R})$ actúa en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ a través de la fórmula

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} z = \frac{az + b}{cz + d}$$

y es útil calcular la parte imaginaria de estas transformaciones

$$\operatorname{Im} \left[\frac{az + b}{cz + d} \right] = \frac{\operatorname{Im}z}{|cz + d|^2} \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Definimos la acción de $Gl_2(\mathbb{R})$ sobre \mathbb{H}^2 por

$$\sigma z = \begin{cases} \frac{az + b}{cz + d} & \text{si } \det \sigma > 0 \\ \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} & \text{si } \det \sigma < 0 \end{cases} \quad \sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Proposición 3.6 La acción de $Gl_2(\mathbb{R})$ en \mathbb{H}^2 , identifica $PGl_2(\mathbb{R})$ y el grupo $\operatorname{Isom}(\mathbb{H}^2)$.

Demostración:

La acción definida anteriormente preserva \mathbb{H}^2 por la fórmula de la parte imaginaria. Por el teorema 3.6 sabemos que el grupo $Möb(\mathbb{H}^2)$ actúa como el grupo de isometrías de \mathbb{H}^2 , además sabemos que $PGl_2(\mathbb{C}) \cong Möb^+(\mathbb{C})$. Por

lo que sólo nos falta ver que cualquier transformación de Möbius de \mathbb{C} que preserva \mathbb{H}^2 tiene esta forma. Por el corolario 3.2 sabemos que $Möb(\mathbb{H}^2) \cong Möb(\mathbb{R})$, por lo que es suficiente identificar $Möb(\mathbb{R})$ el grupo de Möbius de \mathbb{R} subespacio de \mathbb{C} , con $PGl_2(\mathbb{R})$, lo cual se hace de la misma forma que en la sección de la esfera de Riemann. ■

Proposición 3.7 Las geodésicas en \mathbb{H}^2 son trazas de círculos en $\hat{\mathbb{C}}$ ortogonales a \mathbb{R} . Es decir las geodésicas son trazas de círculos euclidianos con centros en el eje x y rectas euclidianas perpendiculares al eje x .

Demostración:

La curva $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ dada por $\gamma(s) = ie^s$, $s \in \mathbb{R}$ preserva distancias

$$\cosh(s-t) = \frac{1}{2}(e^{s-t} + e^{t-s}) = \frac{e^{2t} + e^{2s}}{2e^t e^s} = 1 + \frac{(e^t - e^s)^2}{2e^t e^s} = \cosh d(ie^s, ie^t)$$

de esta manera el eje imaginario positivo es una geodésica. Ahora como la acción de $PGl_2(\mathbb{R})$ es tres transitiva tenemos el resultado. ■

Otra forma de expresar la distancia entre dos puntos $z, w \in \mathbb{H}^2$ esta dada por

$$\cosh d(z, w) = 1 + 2[z, \bar{w}, w, \bar{z}]$$

para ver esto simplemente calculemos la razón cruzada de estos puntos

$$[z, \bar{w}, w, \bar{z}] = \left[\det \begin{bmatrix} z & w \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} \bar{w} & \bar{z} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right] \Bigg/ \left[\det \begin{bmatrix} z & \bar{z} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} w & \bar{w} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right] = \frac{-(w_1 - z_1)^2 - (z_2 - w_2)^2}{4z_2 w_2} = \frac{|z - w|^2}{4ImzImw}$$

de donde obtenemos el resultado.

Lema 3.15 Sea S el círculo a través de $z, w \in \mathbb{H}^2$ ortogonal a \mathbb{R} y sean z^*, w^* la intersección entre S y \mathbb{R} , entonces

$$d(z, w) = \log [z, w, w^*, z^*]$$

Demostración:

Bajo una transformación de Möbius podemos transformar S en el eje imaginario mandando z^* al 0 y w^* al ∞ ; supongamos que $Imz < Imw$, por lo que $[z, w, \infty, 0] = \frac{w}{z}$ con $z = ie^s$ y $w = ie^t$ ($s < t$). Por la proposición anterior tenemos que $d(z, w) = t - s$, de donde $\log [z, w, \infty, 0] = \log \frac{w}{z} = \log e^{t-s} = t - s = d(z, w)$. ■

Utilizando el invariante que definimos antes, $\text{tr}^2\sigma$, podemos clasificar las transformaciones de $Sl_2(\mathbb{R})$.

elípticas (rotaciones): $\text{tr}^2\sigma < 4$, con un punto fijo en \mathbb{H}^2 .

hiperbólicas (traslaciones): $\text{tr}^2\sigma > 4$, con dos puntos fijos en $\partial\mathbb{H}^2$.

parabólicas (horolaciones): $\text{tr}^2\sigma = 4$, con un solo punto fijo en $\partial\mathbb{H}^2$.

4 Plano Hiperbólico

Antes de estudiar a los grupos Fuchsianos necesitamos analizar con detalle el plano hiperbólico \mathbb{H}^2 , especialmente la clasificación de isometrías y su trigonometría. Para esto clasificaremos las isometrías pares de acuerdo a como se dividen las geodésicas en tres haces distintos. Esto lo haremos con un modelo específico de \mathbb{H}^2 : el espacio de matrices de dos por dos con traza cero. Este tiene la ventaja de que es fácil realizar los cálculos de la trigonometría hiperbólica, además de contar con gran riqueza algebraica, pues daremos varias operaciones en este espacio que servirán para estudiar el plano hiperbólico.

4.1 El espacio $sl_2(\mathbb{R})$

Vamos a construir un espacio vectorial de dimensión 3 con producto interior de tipo Sylvester $(-2, 1)$. Para esto consideremos el espacio vectorial $sl_2(\mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \text{tr}A = 0\}$ de matrices de 2×2 con traza cero; estas matrices tienen la característica de que sus cuadrados son matrices escalares, en efecto, si

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \in sl_2(\mathbb{R}), \text{ entonces}$$
$$A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & cb + a^2 \end{bmatrix}$$

por lo que $A^2 = -\text{Id} \det A$.

Definamos una forma bilineal simétrica en $sl_2(\mathbb{R})$ por

$$\langle R, S \rangle = -\frac{1}{2} \text{tr}(RS), \quad R, S \in sl_2(\mathbb{R})$$

Observemos que:

(1) $\langle R, R \rangle = \det R$

(2) por la fórmula de Polarización $\langle R, S \rangle = \frac{1}{2}(\langle R+S, R+S \rangle - \langle R, R \rangle - \langle S, S \rangle)$ entonces $-2 \langle R, S \rangle = \langle R+S, R+S \rangle - \langle R, R \rangle - \langle S, S \rangle$ entonces $-2 \langle R, S \rangle = -\text{Id} \det(R+S) + \text{Id} \det R + \text{Id} \det S = (R+S)^2 - R^2 - S^2$ para obtener la identidad

$$RS + SR = -2 \langle R, S \rangle I, \quad R, S \in sl_2(\mathbb{R})$$

Para ver que este espacio tiene tipo Sylvester $(-2, 1)$, notemos simplemente que $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ es una base ortonormal de $sl_2(\mathbb{R})$ cuyos determinantes son respectivamente $-1, -1, 1$.

Para nuestro estudio en este espacio es conveniente introducir una forma trilíneal, denominada *vol*, dada por:

$$\text{vol}(K, L, M) = -\frac{1}{2}\text{tr}(KLM) \quad K, L, M \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$$

la cual es una forma alternante, es decir es cero en cualquier terna de vectores si dos vectores son iguales, por ejemplo si $K = M$ entonces tenemos que

$$\text{tr}(KLM) = \text{tr}(K L K) = \text{tr}(L K^2) = -\text{tr}((\det K)L) = 0$$

También tenemos que $\text{vol}(K, L, M) = -\text{vol}(L, K, M)$, ya que $\text{tr}(LKM) + \text{tr}(KLM) = \text{tr}((KL + KL)M) = 0$.

Introducimos una tercera operación en $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, el producto cuña de dos vectores $K, L \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, dado por

$$K \wedge L = \frac{1}{2}(KL - LK)$$

y tenemos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \langle K \wedge L, M \rangle &= -\frac{1}{4}\text{tr}(KLM - LKM) \\ &= \frac{1}{2}\text{vol}(K, L, M) - \frac{1}{2}\text{vol}(L, K, M) \\ &= \text{vol}(K, L, M) \end{aligned}$$

y la identidad

$$A \wedge (B \wedge C) = \langle A, C \rangle B - \langle A, B \rangle C, \quad A, B, C \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$$

la cual se sigue de la igualdad

$$4(\langle A, C \rangle B - \langle A, B \rangle C) = ABC - ACB + CBA - BCA = 4(A \wedge (B \wedge C))$$

Además tenemos, para $A, B, C, D \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$

$$\langle A \wedge B, C \wedge D \rangle = \langle A, C \rangle \langle B, D \rangle - \langle A, D \rangle \langle B, C \rangle$$

pues

$$\begin{aligned} \langle A \wedge B, C \wedge D \rangle &= \text{vol}(A, B, C \wedge D) \\ &= -\text{vol}(A, C \wedge D, B) \\ &= \text{vol}(B, C \wedge D, A) \\ &= \langle B \wedge (C \wedge D), A \rangle \\ &= \langle \langle B, D \rangle C - \langle B, C \rangle D, A \rangle \\ &= \langle A, C \rangle \langle B, D \rangle - \langle A, D \rangle \langle B, C \rangle \end{aligned}$$

Una ecuación útil que relaciona al *vol* y al *det* esta dada por

$$\text{vol}(A_1, A_2, A_3)\text{vol}(B_1, B_2, B_3) = \det_{ij} \langle A_i, B_j \rangle$$

la cual se sigue de una simple evaluación.

4.2 Haces de Geodésicas

Consideremos al plano hiperbólico \mathbb{H}^2 , como una de las hojas del hiperboloide en el espacio $sl_2(\mathbb{R})$, definido por la ecuación $\langle A, A \rangle = \det A = 1$, es decir si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces $\det A = -a^2 - bc = 1$, por lo que $c \neq 0$; el signo de c distingue la hoja del hiperboloide \mathbb{H}^2 , tomaremos la hoja determinada por $c > 0$.

4.2.1 VECTORES NORMALES.

Hemos visto que una curva geodésica $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ tiene parametrización $\gamma(t) = A \cosh t + T \sinh t$, $t \in \mathbb{R}$ con $\gamma(0) = A$ y $T = \gamma'(0)$ vector ortogonal a A con $\langle T, T \rangle = -1$. Con esta notación definimos el vector normal a γ como

$$N = \gamma'(t) \wedge \gamma(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

además este vector N es independiente de t como veremos a continuación:

$$N = (A \sinh t + T \cosh t) \wedge (A \cosh t + T \sinh t) = \frac{1}{2}(TA - AT) = T \wedge A$$

Otra observación es que

$$\langle N, A \rangle = \langle T \wedge A, A \rangle = \text{vol}(T, A, A) = 0, \quad \langle N, T \rangle = \text{vol}(T, A, T) = 0$$

además N tiene norma -1 pues

$$\langle N, N \rangle = \langle T \wedge A, T \wedge A \rangle = \langle T, T \rangle \langle A, A \rangle - \langle A, T \rangle \langle A, T \rangle = -1$$

y finalmente $\gamma'(t)$ puede ser recuperado ya que

$$\gamma'(t) \wedge N = (A \cosh t + T \sinh t) \wedge \gamma'(t) \wedge \gamma(t) = \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle \gamma'(t) = \gamma'(t)$$

Proposición 4.1 *El complemento de una geodésica h en \mathbb{H}^2 tiene dos componentes conexas. La reflexión τ a lo largo del vector normal N para h , fija h puntualmente e intercambia las dos componentes conexas del complemento.*

Demostración:

Sea N el vector normal para h , consideremos la función $X \mapsto \langle X, N \rangle$, $X \in \mathbb{H}^2$ la cual es cero en h y es distinta de cero para cualquier otro punto de \mathbb{H}^2 , por lo que divide al complemento de h en dos conjuntos U, V donde la función es positiva o negativa respectivamente. De esta manera U, V son

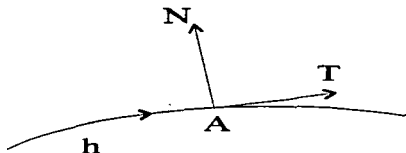


FIGURA 4.1. Vectores tangente y normal a una geodésica en un punto

intercambiados por τ ya que $\langle X, N \rangle = \langle \tau(X), \tau(N) \rangle = \langle \tau(X), -N \rangle = -\langle \tau(X), N \rangle, X \in \mathbb{H}^2$.

Solo falta probar que U, V son conexos, lo cual haremos para U , pues el otro caso es similar. Consideremos dos puntos $A, B \in U$ y escojamos un vector tangente unitario $T \in \mathbb{H}^2$ a A tal que $B = A \cosh d + T \sinh d$ donde $d = d(A, B)$. Ahora consideremos $\gamma(t) = A \cosh t + T \sinh t$ para obtener que $\langle \gamma(t), N \rangle = \langle A \cosh t + T \sinh t, N \rangle = \cosh t \langle A, N \rangle + \sinh t \langle T, N \rangle$, $t \in \mathbb{R}$, por definición de U tenemos que $\langle A, N \rangle > 0$. Tenemos dos casos:

Si $\langle T, N \rangle \geq 0$, entonces $\langle \gamma(t), N \rangle > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ por lo tanto $\gamma(t) \in U$.

Cuando $\langle T, N \rangle < 0$ por las propiedades de la función $\tanh t$ podemos encontrar $r \in \mathbb{R}$ tal que $\cosh r \langle A, N \rangle + \sinh r \langle T, N \rangle = 0$, de donde $\langle \gamma(t), N \rangle < 0 \forall t > r$ y $\langle \gamma(t), N \rangle > 0 \forall t < r$, con lo que concluimos que $\gamma(t) \in U$ para todo $t < r$ y por un cambio de variable obtenemos que el arco $[A, B]$ esta contenido en U . ■

Las dos componentes conexas del complemento de h son llamados los lados de h , y una vez que la geodésica h es orientada por el vector normal N , se pueden distinguir los lados de h : una curva geodésica a través de $A \in h$ con vector tangente N en A pasa del lado negativo de h al lado positivo de h .

4.2.2 ANGULOS ORIENTADOS

El espacio tangente de \mathbb{H}^2 en A es $T_A(\mathbb{H}^2)$, dos vectores X, Y en este espacio se dicen positivamente orientados si $\text{vol}(A, X, Y) > 0$. Dado $S \in T_A(\mathbb{H}^2)$ tenemos que $\langle S \wedge A, A \rangle = \text{vol}(S, A, A) = 0$ y $\langle S \wedge A, S \wedge A \rangle = \langle S, S \rangle \langle A, A \rangle = -\langle S, A \rangle \langle S, A \rangle$ por lo que $S \wedge A \in T_A(\mathbb{H}^2)$ además se tiene $\text{vol}(A, S, S \wedge A) = \langle A \wedge S, A \wedge S \rangle = \langle A, S \rangle \langle A, S \rangle - \langle A, A \rangle \langle S, S \rangle =$

1, por lo tanto $S, S \wedge A$ es una base ortonormal positivamente orientada para $T_A(\mathbb{H}^2)$.

Ahora consideremos dos vectores tangentes unitarios S, T a \mathbb{H}^2 en A , definimos el ángulo orientado $\angle_{or}(S, T)$ de manera que:

$$T = S \cos \angle_{or}(S, T) + S \wedge A \sin \angle_{or}(S, T), \quad \angle_{or}(S, T) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

De acuerdo a la geometría euclidiana usaremos otro tipo de ángulo entre dos vectores, el ángulo interior $\angle_{int} A \in (0, 2\pi)$ del polígono Δ en el vértice A .

4.2.3 INTERSECCIÓN DE GEODÉSICAS

Sean h, k dos geodésicas orientadas que se intersectan en $A \in \mathbb{H}^2$. El ángulo direccional α de h a k , es $\alpha = \angle_{or}(V, -U)$, es decir $-U = V \cos \alpha + V \wedge A \sin \alpha$

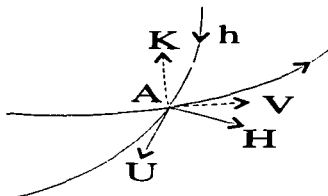


FIGURA 4.2. Intersección de dos geodésicas con sus respectivos vectores tangentes y normales

calculando obtenemos que

$$\begin{aligned} \langle U, V \rangle &= \langle -V \cos \alpha - V \wedge A \sin \alpha, V \rangle \\ &= -\langle V, V \rangle \cos \alpha - \langle V \wedge A, V \rangle \sin \alpha \\ &= \cos \alpha - \text{vol}(V, A, V) \sin \alpha \\ &= \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U \wedge V &= (-V \cos \alpha - V \wedge A \sin \alpha) \wedge V \\ &= -\cos \alpha V \wedge V - \sin \alpha (V \wedge A) \wedge V \\ &= -\sin \alpha (\langle V, V \rangle A - \langle V, A \rangle V) \\ &= A \sin \alpha \end{aligned}$$

En la figura los correspondientes vectores normales son $H = U \wedge A$ y $K = V \wedge A$, por lo que

$$\begin{aligned} \langle H, K \rangle &= \langle U \wedge A, V \wedge A \rangle = \langle U, V \rangle \langle A, A \rangle - \langle U, A \rangle \langle A, V \rangle = \cos \alpha \\ H \wedge K &= A \operatorname{sen} \alpha \end{aligned}$$

de donde $|\langle H, K \rangle| < 1$.

Proposición 4.2 *Dos curvas geodésicas h y k en \mathbb{H}^2 se intersectan si y sólo si sus vectores normales H y K cumplen $|\langle H, K \rangle| < 1$*

Demostración:

\Rightarrow Del análisis anterior.

\Leftarrow Sea E el plano generado por H y K entonces $\Delta = \langle H, H \rangle \langle K, K \rangle - \langle H, K \rangle^2 = 1 - \langle H, K \rangle^2 > 0$, así E tiene tipo Sylvester $(-2, 0)$ y E^\perp tiene tipo $(0, 1)$, de donde obtenemos que si $A \in E^\perp \cap \mathbb{H}^2 \neq \emptyset$ entonces $\langle A, H \rangle = \langle A, K \rangle = 0$, por lo tanto A esta en h y k . ■

Decimos que dos geodésicas h y k en \mathbb{H}^2 son **perpendiculares** si se intersectan en un punto A de \mathbb{H}^2 con un ángulo $\frac{\pi}{2}$.

Corolario 4.1 *Las geodésicas h y k en \mathbb{H}^2 son perpendiculares si y sólo si sus vectores normales H y K satisfacen $\langle H, K \rangle = 0$.*

Demostración:

Por el análisis en el caso en que se intersectan dos geodésicas, obtenemos que $\langle H, K \rangle = \cos \frac{\pi}{2} = 0$. Recíprocamente si $\langle H, K \rangle = 0$ entonces por la proposición anterior se intersectan y lo hacen en ángulo recto. ■

4.2.4 GEODÉSICAS CON UNA PERPENDICULAR COMÚN.

Sean h y k geodésicas perpendiculares a otra geodésica ℓ . Sean A, B los puntos de intersección respectivamente y sea L el vector normal para ℓ correspondiente a la orientación de ℓ de A a B .

Sea $H = A \wedge L$ vector normal para h y $K = -B \wedge L$ vector normal para k entonces tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \langle H, K \rangle &= \langle A \wedge L, -B \wedge L \rangle \\ &= \langle A, L \rangle \langle L, B \rangle - \langle A, B \rangle \langle L, L \rangle \\ &= \langle A, B \rangle \\ &= \cosh d(A, B) \end{aligned}$$

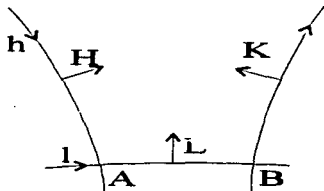


FIGURA 4.3. Geodésicas con una perpendicular en común

$$L \wedge K = L \wedge (-B \wedge L) = \langle L, L \rangle (-B) - \langle L, -B \rangle L = B$$

luego $\langle H, B \rangle = \langle H, L \wedge K \rangle = \langle L \wedge K, H \rangle = \text{vol}(L, K, H) = -\text{vol}(L, H, K) = -(-\text{vol}(H, L, K))$. Ahora A, B generan un plano y H es un vector tangente a A por lo que $B = A \cosh d(A, B) + H \sinh d(A, B)$, de esta forma obtenemos que $\langle H, B \rangle = \langle H, A \cosh d(A, B) + H \sinh d(A, B) \rangle = -\sinh d(A, B) = \text{vol}(H, L, K)$.

Teorema 4.1 *Dos geodésicas h y k son perpendiculares a la misma geodésica si y sólo si sus vectores normales H, K satisfacen $|\langle H, K \rangle| > 1$. La geodésica perpendicular común es única si existe*

Demostración:

Tenemos que h y k generan un plano E , así $\Delta = \langle H, H \rangle \langle K, K \rangle - \langle H, K \rangle^2 = 1 - \langle H, K \rangle^2$, $\Delta < 0$ pues $|\langle H, K \rangle| > 1$, es decir E tiene tipo Sylvester $(-1, 1)$, entonces E^\perp tiene tipo $(-1, 0)$ por lo que contiene un vector L de norma -1 , así la geodésica ℓ con vector normal L es perpendicular a h y k .

Recíprocamente sea ℓ una geodésica perpendicular a h y k , sea L un vector normal para ℓ entonces es ortogonal a H y K , es decir $L \in E^\perp$, con $\langle L, L \rangle = -1$, entonces E tiene tipo $(-1, 1)$ de donde $\Delta < 0$, por lo que $|\langle H, K \rangle| > 1$. ■

4.2.5 RECTAS CON FINAL COMÚN.

Una geodésica h en \mathbb{H}^2 genera un plano lineal de tipo $(-1, 1)$ pues es de la forma $h(t) = A \cosh t + T \sinh t$ con $\langle A, A \rangle = 1$ y $\langle T, T \rangle = -1$, de esta forma genera dos rectas isotrópicas que son llamadas las terminaciones de h . Un vector normal H para h es ortogonal a las dos terminaciones de h .

Proposición 4.3 *Dos geodésicas distintas h y k en \mathbb{H}^2 tienen terminación común si y sólo si sus vectores normales H, K satisfacen $|\langle H, K \rangle| = 1$.*

Demostración:

Sea E el plano que generan H y K , su discriminante es $\Delta = \langle H, H \rangle \langle K, K \rangle - \langle H, K \rangle^2 = 1 - \langle H, K \rangle^2$. Si h y k tienen final común S entonces $S \in E^\perp$, como cada una de las geodésicas h y k generan planos del tipo $(-1, 1)$, E^\perp es recta isotrópica, es decir E tiene tipo $(-1, 0)$, con $\Delta = 0$ y $|\langle H, K \rangle| = 1$.

Recíprocamente si $|\langle H, K \rangle| = 1$, entonces E tiene tipo $(-1, 0)$, pues $\Delta = 0$ así E^\perp es recta isotrópica y es terminación común de h y k . ■

4.2.6 HACES DE GEODÉSICAS

Un conjunto \mathcal{P} de geodésicas en \mathbb{H}^2 es llamado un haz si existe un plano lineal P en $sl_2(\mathbb{R})$, tal que \mathcal{P} es el conjunto de geodésicas con vectores normales en P . Como P es un plano, puede tener tipo Sylvester $(-2, 0)$, $(-1, 1)$ o $(-1, 0)$, en cualquier caso P esta generado por vectores de norma -1 , es decir es generado por vectores normales de geodésicas en el haz que determina. Examinemos las distintas posibilidades:

Tipo $(-2, 0)$. La recta P^\perp tiene tipo $(0, 1)$ e intersecciona a \mathbb{H}^2 en un vector digamos A . El haz \mathcal{P} es el conjunto de geodésicas a través de A .

Tipo $(-1, 1)$. La recta P^\perp tiene tipo $(-1, 0)$ y es generado por el vector normal de una geodésica h . El haz \mathcal{P} es el conjunto de geodésicas perpendiculares a h .

Tipo $(-1, 0)$. En este caso la recta $S = P^\perp$ es isotrópica. El haz \mathcal{P} es el conjunto de geodésicas con final común S .

Ahora analizaremos la intersección de dos haces. Por las observaciones anteriores dos haces distintos no pueden tener más de una geodésica en común.

Teorema 4.2 *i) A través de dos puntos dados A y B pasa una geodésica h .*

ii) A través de un punto dado A pasa una geodésica perpendicular a una geodésica ℓ dada.

iii) *A través de un punto A pasa una geodésica con una terminación dada.*

iv) *Hay una única geodésica con una terminación dada S perpendicular a una geodésica h dada siempre y cuando la terminación de h sea distinta de S.*

v) *Hay una única geodésica con terminaciones dadas R y S.*

Demostración:

Sea A un punto de \mathbb{H}^2 y \mathcal{A} el haz de geodésicas que pasan por A . Como A^\perp tiene tipo $(-2, 0)$, entonces para cualquier otro plano P , $A^\perp \cap P$ es una recta de tipo $(-1, 0)$. Esto prueba los tres primeros enunciados:

i) Escogamos T en A^\perp , tangente unitario tal que $B = A \cosh t + T \sinh t$, entonces $\gamma(s) = A \cosh s + T \sinh s$ es la geodésica buscada.

ii) Sea P el subespacio generado por un vector normal a ℓ , entonces P^\perp tiene tipo Sylvester $(-1, 1)$, por lo que el haz de geodésicas con vectores normales en P^\perp es el conjunto de geodésicas perpendiculares a ℓ , después escogamos $T \in A^\perp \cap R^\perp$ y consideremos la geodésica con vector normal T , la cual es la geodésica buscada.

iii) Sea S la terminación dada, una recta isotrópica por lo que tomemos $P = S^\perp$ que tiene tipo $(-1, 0)$ y el haz que genera es el conjunto de geodésicas con final común S ; nuevamente tomemos $T \in A^\perp \cap P$ vector normal a la geodésica buscada.

iv) Sea N vector normal a h , así $R = N^\perp$ tiene tipo $(-1, 1)$, $L = S^\perp$ tiene tipo $(-1, 0)$ y la intersección $R \cap L$ es de tipo $(-1, 0)$ o es isotrópica. Como S no es terminación de h la intersección es de tipo $(-1, 0)$, entonces considerando la geodésica con vector normal en la intersección $R \cap L$ terminamos.

v) En este caso R^\perp y S^\perp tienen tipo $(-1, 0)$, su intersección es una recta de tipo $(-1, 0)$ o es isotrópica, usando el hecho de que la forma es no singular, tenemos que la intersección tiene tipo $(-1, 0)$, entonces un vector en esta intersección es normal a la geodésica buscada. ■

4.3 Clasificación de Isometrías

Una isometría de \mathbb{H}^2 es el producto de a lo más 3 reflexiones en \mathbb{H}^2 como se demostró en el capítulo anterior.

Teorema 4.3 (Teorema de las tres reflexiones) *Sean α, β, γ reflexiones en tres geodésicas a, b, c que pertenecen al mismo haz \mathcal{P} . El producto $\alpha\beta\gamma$ es una reflexión en una geodésica del haz \mathcal{P} .*

Demostración:

Sea $S \neq 0$ vector ortogonal al plano generado por los vectores normales a las geodésicas de \mathcal{P} y sea $\sigma \in \text{Lor}(sl_2(\mathbb{R}))$ que fija S . Veamos que σ es el

producto de una o dos reflexiones en geodésicas de \mathcal{P} . Por la proposición 1.12 σ induce una transformación ortogonal del plano $P = S^\perp$.

Cuando $\langle S, S \rangle > 0$ el plano P tiene tipo $(-2, 0)$, es decir lo podemos ver como un subespacio euclidiano de dimensión 2, por el teorema 1.4 σ es el producto de a lo más dos reflexiones en hiperplanos (geodésicas).

Cuando $\langle S, S \rangle = 0$, P tiene tipo $(-1, 0)$, es decir es parabólico, por el Teorema 1.6, σ es la identidad en S , de donde es el producto de a lo más 2 reflexiones en geodésicas.

Cuando $\langle S, S \rangle < 0$, P tiene tipo $(-1, 1)$, es decir es hiperbólico y por el Teorema 1.7, σ es el producto de a lo más 2 reflexiones en geodésicas.

Tenemos también que S es fijado por α, β, γ , como son reflexiones entonces $\alpha\beta\gamma \in \text{Lor}(sl_2(\mathbb{R}))$, por lo que es el producto de a lo más 2 reflexiones. Ahora $\alpha\beta\gamma$ es una isometría impar de \mathbb{H}^2 pues su determinante es -1 , por lo que no puede ser la composición de dos reflexiones, por lo tanto $\alpha\beta\gamma$ es la reflexión en una geodésica de \mathcal{P} . ■

Sea el $\triangle ABC$ y sean m_a, m_b, m_c las mediatrices para BC, CA y AB .

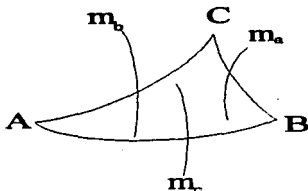


FIGURA 4.4. Mediatrices de un triángulo hiperbólico

Corolario 4.2 Las mediatrices m_a, m_b, m_c para un $\triangle ABC$ están en el mismo haz.

Demostración:

Sea \mathcal{P} el haz que contiene a m_b y m_a y sea $a \in \mathcal{P}$ la geodésica a través de A . Las reflexiones en las geodésicas m_a, m_b, a son denotadas por μ_a, μ_b, α respectivamente. Por el teorema anterior tenemos que $\mu_a\mu_b\alpha$ es una reflexión en una geodésica $h \in \mathcal{P}$, $\mu_a\mu_b\alpha(A) = \mu_a\mu_b(A) = \mu_a(C) = B$, por lo que $h = m_c$, pues a cualquier punto que equidiste de A, B la reflexión h lo deja fijo, entonces $m_c \in \mathcal{P}$. ■

4.3.1 HOROLACIONES

Definición Sea S una recta isotrópica en $sl_2(\mathbb{R})$. Una horolación con centro S es una isometría de la forma $\alpha\beta$ donde α y β son reflexiones en geodésicas h y k con terminación S . El conjunto de horolaciones con centro S forman un grupo.

Corolario 4.3 El grupo de horolaciones con centro S es abeliano.

Demostración:

Dadas tres reflexiones, ρ, σ, τ , con terminación S , por el Teorema 4.3 su composición es una reflexión en una geodésica con terminación S , de donde obtenemos que

$$\rho\sigma\tau = (\rho\sigma\tau)^{-1} = \tau^{-1}\sigma^{-1}\rho^{-1} = \tau\sigma\rho$$

por lo que concluimos que

$$(\alpha\beta)(\gamma\delta) = (\alpha\beta\gamma)\delta = (\gamma\beta\alpha)\delta = \gamma(\beta\alpha\delta) = \gamma(\delta\alpha\beta) = (\gamma\delta)(\alpha\beta)$$

es decir conmutan. ■

Las órbitas en \mathbb{H}^2 para el grupo de horolaciones con centro S son llamados horociclos con centro S .

Corolario 4.4 Dos puntos distintos A, B pertenecen al mismo horociclo con centro S si y sólo si la mediatriz m para A y B tiene terminación S .

Demostración:

⇐] Supongamos que la mediatriz m tiene terminación S . Sea μ la reflexión en m y sea α la reflexión en la geodésica a través de A con terminación S . De esta manera tenemos que la horolación $\mu\alpha$ transforma A en B , por lo que A y B pertenecen al mismo horociclo con centro S .

⇒] Sea σ una horolación con $\sigma(A) = B$, sea α la reflexión en la geodésica a través de A con terminación S , por el teorema 4.3 $\sigma\alpha$ es una reflexión en una geodésica η con terminación S . Notemos que $\sigma\alpha(A) = B$, además si C es un punto que equidista de A y B entonces

$$d(C, \sigma\alpha(A)) = d(C, B) = d(C, A) = d(\sigma\alpha(C), \sigma\alpha(A))$$

por lo que η es la bisectriz perpendicular para A y B . ■

Proposición 4.4 *El grupo de horolaciones con centro S actúa en el conjunto de geodésicas con terminación S de manera transitiva.*

Demostración:

Sean h, k geodésicas con terminación S y sean M, N vectores normales para h y k respectivamente. Sea σ el automorfismo lineal del plano $P = S^1$ (tipo $(-1, 0)$) tal que $\sigma(S) = S$ y $\sigma(M) = N$, el cual es ortogonal. Por el teorema 1.6, σ puede ser escrito como el producto de una o dos reflexiones. Reemplazando si es necesario N por $-N$ podemos asumir que σ es el producto de dos reflexiones, por lo que podemos extender σ a una horolación con centro S .

Si σ fija la geodésica h , entonces para $A \in h$ tenemos que $\sigma(A) = A$ pues de lo contrario la mediatriz para A y $\sigma(A)$ tiene terminación S , contradiciendo el hecho de que dos rectas perpendiculares no pueden tener la misma terminación. ■

Corolario 4.5 *Un horociclo \mathcal{H} con centro S y una geodésica h con terminación S se intersectan en un punto.*

Demostración:

Si \mathcal{H} y h tienen dos puntos distintos en común A, B , entonces la mediatriz η para A, B tiene terminación S , llegando a una contradicción. Veamos ahora que se intersectan, sea $b \in \mathcal{H}$ y sea σ una horolación que transforma la geodésica k a través de b con terminación S en la geodésica h , de esta forma $\sigma(b)$ es un punto de intersección entre \mathcal{H} y h . ■

4.3.2 ROTACIONES

Por una rotación alrededor de un punto $A \in \mathbb{H}^2$ entenderemos una isometría de la forma $\alpha\beta$ donde α y β son reflexiones en geodésicas h y k que pasan por A . Por el teorema de las tres reflexiones, forman un grupo y las órbitas de la acción de este grupo son círculos con centro A . El ángulo de rotación θ de una rotación σ esta dado por $\theta = \angle_{or}(t, \sigma(t))$, $t \in T_A(\mathbb{H}^2)$ con $\langle t, \sigma(t) \rangle = -1$. Una rotación con ángulo π es llamada un "medio-giro" o simétrica con respecto a A . Un medio-giro se puede expresar como $\kappa\lambda$ donde κ y λ son reflexiones en geodésicas perpendiculares a través de A .

4.3.3 TRASLACIONES

Sea k una geodésica en \mathbb{H}^2 , una traslación σ a lo largo de k es una isometría de la forma $\alpha\beta$ donde α y β son reflexiones en geodésicas perpendiculares a k . Las órbitas de este grupo son llamados hiperciclos y k es llamado el eje de traslación de σ . La longitud de traslación T esta dada por $T = d(A, \sigma(A))$, $A \in k$.

Si κ es la reflexión en k , entonces la podemos descomponer como $\alpha\beta = (\alpha\kappa)(\kappa\beta)$, es decir como composición de dos semi-giros con respecto a puntos de k ; recíprocamente la composición de dos semi-giros alrededor de puntos de k es una traslación a lo largo de k .

Para clasificar las isometrías impares tenemos el siguiente teorema:

Teorema 4.4 Las isometrías impares de \mathbb{H}^2 son de la forma $\phi = \tau\kappa$ donde τ es una traslación a lo largo de una geodésica h y κ es una reflexión en h , es decir son reflexiones trasladadas.

Demostración:

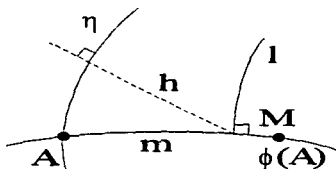


FIGURA 4.5. Las isometrías impares son reflexiones trasladadas

Sea ϕ una isometría par y sea $A \in \mathbb{H}^2$, si $\phi(A) = A$ entonces ϕ es una reflexión en una geodésica por A ; si $\phi(A) \neq A$ consideremos m la geodésica por A y $\phi(A)$ y ℓ la mediatriz de A y $\phi(A)$. Al punto de intersección entre m y ℓ lo denotamos por M mientras que μ y λ denotan las reflexiones en esas geodésicas. Así tenemos que $\lambda\phi$ es par y fija A , de esta manera $\lambda\phi$ es una rotación alrededor de A . Tenemos también que $\mu\lambda\phi = \nu$ es una reflexión en una geodésica η que pasa por A , por lo que $\lambda\phi = \mu\nu$.

Ahora sea k la reflexión en la geodésica h que pasa por M perpendicular a η por lo que tenemos que

$$\phi = \lambda(\mu\nu) = (\lambda\mu)(\nu k)k$$

y como $\lambda\mu$ y νk son semi-giros su composición es una traslación a lo largo de h . ■

4.4 El Grupo Especial Lineal

Como hemos visto anteriormente el grupo de isometrías del plano hiperbólico \mathbb{H}^2 es el grupo de $Lor(sl_2(\mathbb{R}))$, vamos a usar esto para identificar este grupo de isometrías con el grupo $PGL_2(\mathbb{R})$. Para esto usaremos la acción de $GL_2(\mathbb{R})$ en $sl_2(\mathbb{R})$ dada por

$$\sigma(X) = \text{sign}(\sigma)\sigma X\sigma^{-1}, \quad \sigma \in GL_2(\mathbb{R}), \quad X \in sl_2(\mathbb{R})$$

donde $\text{sign}(\sigma)$ es la función signo del determinante. Veamos ahora que una transformación $\sigma \in GL_2(\mathbb{R})$, es una transformación ortogonal del espacio en el que actúa, es decir $\sigma \in O(sl_2(\mathbb{R}))$, para esto sea $X \in sl_2(\mathbb{R})$ entonces

$$\begin{aligned} \langle \sigma X, \sigma X \rangle &= \langle \text{sign}(\sigma)\sigma X\sigma^{-1}, \text{sign}(\sigma)\sigma X\sigma^{-1} \rangle \\ &= \text{sign}(\sigma)^2 \det(\sigma X\sigma^{-1}) \\ &= \det(X) \\ &= \langle X, X \rangle \end{aligned}$$

por lo que es ortogonal; ahora veamos que es de Lorentz, supongamos que

$$\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ entonces}$$

$$\begin{aligned} \left\langle \sigma \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \sigma^{-1}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle &= -\frac{1}{2}(\det\sigma) \text{tr} \begin{bmatrix} -a^2 - b^2 & -ac - bd \\ -ac - bd & -c^2 - d^2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \det(\sigma)^{-1} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \end{aligned}$$

ahora si $X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, tenemos que

$$\sigma \in Lor(sl_2(\mathbb{R})) \text{ si y sólo si } \langle \sigma X, X \rangle > 0$$

$$\langle \sigma X, X \rangle = \langle \text{sign}(\sigma)\sigma X\sigma^{-1}, X \rangle = \text{sign}(\sigma) \frac{1}{2} \det(\sigma)^{-1} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) > 0$$

por lo que $\sigma \in Lor(sl_2(\mathbb{R}))$.

Teorema 4.5 La acción de $GL_2(\mathbb{R})$ en $sl_2(\mathbb{R})$, induce un isomorfismo entre $PGL_2(\mathbb{R}) \rightarrow Lor(sl_2(\mathbb{R}))$

Demostración:

Sea $\tau_K(X) = X + 2 \langle K, X \rangle K$, la reflexión a través del vector $K = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \in sl_2(\mathbb{R})$ de norma -1 ; al principio del capítulo observamos que $KX + XK = -2 \langle K, X \rangle I$ con $X \in sl_2(\mathbb{R})$, multiplicando por $K = K^{-1}$, obtenemos que

$$KXK^{-1} + X = -2 \langle K, X \rangle K$$

entonces

$$\tau_K(X) = X + 2 \langle K, X \rangle K = -KXK^{-1} = \text{sign}(K)KXK^{-1}$$

entonces como $Lor(sl_2(\mathbb{R}))$ es generado por este tipo de reflexiones tenemos que la función $GL_2(\mathbb{R}) \rightarrow Lor(sl_2(\mathbb{R}))$ es suprayectiva.

Tenemos además que $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a+d}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a-d}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & -\frac{a-d}{2} \end{bmatrix}$, por lo que $M_2(\mathbb{R})$ es generado por $sl_2(\mathbb{R})$ y $I \dots (*)$

Ahora mostraremos que el kernel de esta función son precisamente las matrices escalares.

Sea $\sigma \in GL_2(\mathbb{R})$ con $\det(\sigma) > 0$ la cual actúa trivialmente en $sl_2(\mathbb{R})$, entonces por $(*)$, $\sigma(X) = \sigma X \sigma^{-1} = X$, $\forall X \in M_2(\mathbb{R})$, es decir $\sigma X = X \sigma$. Si tomamos $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ tenemos

$$\sigma X = \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = X \sigma$$

entonces $c = b$ y $a = d$ y si ahora tomamos $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\sigma X = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = X \sigma$$

de donde $b = c = 0$ por lo que σ es una matriz escalar.

Ahora sea $\sigma \in GL_2(\mathbb{R})$ con $\det(\sigma) < 0$ que actúa trivialmente, es decir $\sigma(X) = -\sigma X \sigma^{-1}$ entonces $-\sigma X = X \sigma$, $\forall X \in sl_2(\mathbb{R})$; para $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ concluimos que $\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & -a \end{bmatrix}$, luego si tomamos $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ entonces $b = 0$ y finalmente con $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ tenemos que $\sigma = 0$. Entonces el kernel de la función es $\{\lambda I : \lambda \in \mathbb{R}\}$, por lo que tenemos el resultado. ■

Corolario 4.6 La acción de $Sl_2(\mathbb{R})$ en $sl_2(\mathbb{R})$ identifica el grupo $PSl_2(\mathbb{R})$ con el grupo $Lor^+(sl_2(\mathbb{R}))$.

Demostración:

Vamos a demostrar que la acción de $\sigma \in Gl_2(\mathbb{R})$, dada por

$$\sigma X = \text{sign}(\sigma)\sigma X\sigma^{-1}$$

es un transformación de Lorentz par en $sl_2(\mathbb{R})$ si y sólo si $\det(\sigma) > 0$.

Como $\sigma \in Lor(sl_2(\mathbb{R}))$ existen τ_1, \dots, τ_s reflexiones a lo largo de vectores k_1, \dots, k_s de norma -1 tales que $\sigma = \tau_1 \dots \tau_s$, por la definición de la acción obtenemos que

$$\tau_1 \dots \tau_s(X) = \tau_1 \dots \tau_{s-1}(-k_s X k_s^{-1}) = (-1)^s k_1 \dots k_s X k_s^{-1} \dots k_1^{-1}$$

y como $PGl_2(\mathbb{R}) \cong Lor(sl_2(\mathbb{R}))$, entonces existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\sigma = rk_1 \dots k_s$ así $\det(\sigma) = r^2(-1)^s$ por lo que $\det(\sigma) > 0$ si y sólo si σ es par. Al hacer la identificación con $Sl_2(\mathbb{R})$, la condición $\det > 0$ se convierte en $\det = 1$. ■

Teorema 4.6 La acción de $\sigma \in Sl_2(\mathbb{R})$ en \mathbb{H}^2 puede ser descompuesta como $\alpha\beta$ donde α y β son reflexiones en geodésicas h y k . Si H y K denotan los vectores normales para h y k entonces $\text{tr}^2(\sigma) = 4 < H, K >^2$.

Demostración:

Si $\sigma \in Sl_2(\mathbb{R})$, entonces $\det(\sigma) = 1$ por lo que σ es el producto de a lo más dos reflexiones α y β en geodésicas h y k . Así $\sigma = \epsilon HK$ por la parte final de la demostración del corolario anterior, donde $\epsilon = \pm 1$, entonces

$$\text{tr}\sigma = \epsilon \text{tr}(HK) = -2\epsilon < H, K > \Rightarrow (\text{tr}\sigma)^2 = 4 < H, K >^2$$

Resumimos nuestro estudio en la siguiente tabla:

Posición de h y k	$\text{tr}^2(\sigma)$	Notación Klein	Notación Geométrica
Intersección	$(0, 4)$	elíptica	rotación
Perpendicular común	$(4, +\infty)$	hiperbólica	traslación
Terminación común	4	parabólica	horolación

4.5 Trigonometría Hiperbólica

Relaciones del coseno y seno

$$\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cos \alpha$$

$$\frac{\sinh a}{\sen \alpha} = \frac{\sinh b}{\sen \beta} = \frac{\sinh c}{\sen \gamma}$$

Demostración:

Por 4.2.3 tenemos que $B = A \cosh c + V \sinh c$, $C = A \cosh b - U \sinh b$ donde $\langle U, V \rangle = \cos a$ por lo que

$$\cosh \alpha = \langle B, C \rangle = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cos a$$

y tenemos la primera igualdad.

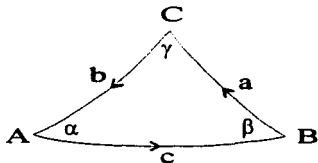


FIGURA 4.6. Relaciones del seno y coseno

Para probar la segunda identidad observemos primero que $\text{vol}(A, B, C)$ es simétrico en A, B, C ; además tenemos la siguiente relación

$$\begin{aligned} \text{vol}(A, B, C) &= \langle A \wedge B, C \rangle \\ &= \langle A \wedge (A \cosh c + V \sinh c), C \rangle \\ &= \langle \frac{1}{2}(A(A \cosh c + V \sinh c) - (A \cosh c + V \sinh c)A), C \rangle \\ &= \langle \frac{1}{2}(AV \sinh c - VAsen h c), C \rangle \\ &= \langle A \wedge V \sinh c, C \rangle \\ &= \text{vol}(A, V \sinh c, C) \\ &= -\text{vol}(A, C, V \sinh c) \\ &= -\text{vol}(A, A \cosh b - U \sinh b, V \sinh c) \\ &= -\langle A \wedge (A \cosh b - U \sinh b), V \sinh c \rangle \\ &= -\langle \frac{1}{2}(A(-U \sinh b) - (-U \sinh b)A), V \sinh c \rangle \\ &= -\langle A \wedge (-U \sinh b), V \sinh c \rangle \\ &= \sinh b \sinh c \langle A \wedge U, V \rangle \end{aligned}$$

es decir

$$\text{vol}(A, B, C) = \text{vol}(A, U, V) \sinh b \sinh c$$

y del hecho de que $U \wedge V = A \text{ sen } \alpha$ tenemos que

$$\begin{aligned} \text{vol}(A, B, C) &= \text{vol}(A, U, V) \sinh b \sinh c \\ &= \langle U \wedge V, A \rangle \sinh b \sinh c \\ &= \text{sen } \alpha \sinh b \sinh c \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \text{vol}(A, B, C) &= \text{sen } \alpha \sinh b \sinh c \\ &= \frac{\text{sen } \alpha}{\text{senh } a} \text{senh } a \sinh b \sinh c \end{aligned}$$

y como vol es simétrico entonces

$$\begin{aligned} \text{vol}(B, A, C) &= \text{sen } \beta \sinh c \sinh a \\ &= \frac{\text{sen } \beta}{\text{senh } b} \text{senh } b \sinh c \sinh a \end{aligned}$$

de donde obtenemos la segunda identidad. ■

Segunda relación del coseno

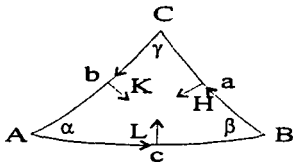


FIGURA 4.7. Segunda relación del coseno

$$\cosh a = \frac{\cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha}{\text{sen } \beta \text{ sen } \gamma}$$

Demostración:

Sean H, K, L vectores normales a los lados del triángulo, entonces tenemos que $\langle H \wedge K, L \wedge H \rangle = \langle H, L \rangle \langle K, H \rangle - \langle H, H \rangle \langle K, L \rangle = \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha$, $H \wedge K = C \operatorname{sen} \alpha$ y $L \wedge H = B \operatorname{sen} \beta$ para obtener que

$$\langle H \wedge K, L \wedge H \rangle = \langle B, C \rangle \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \beta = \cosh a \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \beta$$

de donde se obtiene la relación. ■

Corolario 4.7 *Los ángulos del triángulo $\triangle ABC$ satisfacen que*

$$\alpha + \beta + \gamma < \pi$$

Demostración:

Spongamos que $\alpha \geq \beta$ y $\alpha \geq \gamma$, del hecho de que $\cosh a > 1$ entonces

$$\cosh a = \frac{\cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha}{\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma} > 1$$

de donde obtenemos que

$$\cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha > \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma$$

entonces

$$\cos \beta \cos \gamma - \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma = \cos(\beta + \gamma) > -\cos \alpha = \cos(\pi - \alpha)$$

es decir tenemos que

$$\cos(\pi - \alpha) < \cos(\beta + \gamma) \dots (*)$$

Cuando $\beta + \gamma \leq \pi$ entonces $\pi - \alpha > \beta + \gamma$ por la relaciones entre el coseno y los ángulos, por lo que tenemos que $\alpha + \beta + \gamma < \pi$.

Cuando $\pi \leq \beta + \gamma$ podemos reescribir la desigualdad (*) como $\cos(\alpha + \pi) < \cos(\beta + \gamma)$, lo cual implica que $\alpha + \pi < \beta + \gamma$ entonces $\pi < \alpha$ lo cual es una contradicción. ■

Teorema 4.7 *Sean $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi]$ números reales con $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ entonces existe un triángulo $\triangle ABC$ en \mathbb{H}^2 con $\angle A = \alpha, \angle B = \beta, \angle C = \gamma$.*

Demostración:

Como $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ entonces $\beta + \gamma < \pi - \alpha$, por lo tanto $\cos(\pi - \alpha) < \cos(\beta + \gamma)$ luego $\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma < \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha$, y podemos encontrar $a \in (0, +\infty)$ tal que

$$\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma \cosh a = \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \dots (*)$$

Fijemos dos puntos B, C con $d(B, C) = a$ y tomemos la geodésica ℓ que pase por B formando un ángulo β con el lado BC y una geodésica k por C formando un ángulo γ con la geodésica h ; y sean H, K, L vectores normales dirigidos al interior de esas geodésicas.

Procediendo como en la demostración de la segunda relación del coseno, obtenemos que

$$\cosh a \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma = \cos \beta \cos \gamma + \langle K, L \rangle \dots (**)$$

y por (*) tenemos que $\langle K, L \rangle = \cos \alpha$, por lo tanto $|\langle K, L \rangle| < 1$, entonces por la proposición 4.2 tenemos que las geodésicas ℓ y k se intersectan y el ángulo de intersección es α . ■

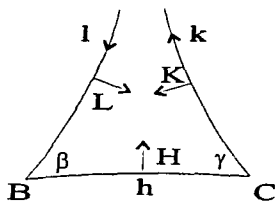


FIGURA 4.8. Construcción de un triángulo hiperbólico con los ángulos dados

Ahora analizaremos las funciones trigonométricas para un cuadrilátero $ABCD$ con tres ángulos rectos.

Cuadrángulo de Lambert

Lema 4.1 En un cuadrángulo de Lambert, es decir uno con tres ángulos rectos, se tienen las siguientes relaciones.

$$\cosh d(A, D) = \cosh d(B, C) \operatorname{sen} \gamma$$

$$\operatorname{senh} d(A, B) \operatorname{senh} d(D, A) = \cos \gamma$$

Demostración:

Sean H, K, L, M vectores normales, sustituyamos $\beta = \frac{\pi}{2}$ en (**) para obtener que $d(B, C) \operatorname{sen} \gamma = \langle K, L \rangle$, por 4.2.4 tenemos que $\langle K, L \rangle = \cosh d(A, B)$, por lo tanto $\cosh d(A, D) = \cosh d(B, C) \operatorname{sen} \gamma$.

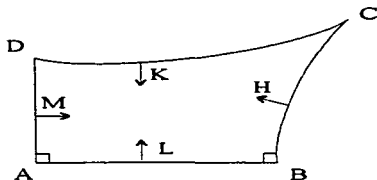


FIGURA 4.9. Cuadrángulo de Lambert

Para la segunda igualdad utilizemos la relación entre vol y det para tener que

$$\text{vol}(K, M, L)\text{vol}(M, L, H) = \det \begin{bmatrix} 0 & \langle K, L \rangle & \langle K, H \rangle \\ -1 & 0 & \langle H, H \rangle \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \langle K, H \rangle$$

y el resultado se sigue de 4.2.3. ■

Angulo de paralelismo

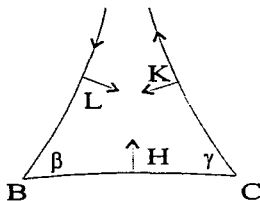


FIGURA 4.10. Angulo de paralelismo

Terminamos nuestro estudio de la trigonometría hiperbólica considerando

un triángulo $\triangle ABC$, en donde B y C son puntos ordinarios de \mathbb{H}^2 y A un punto al infinito (terminación), es decir el ángulo $\angle A = 0$. En este tipo de triángulos tenemos la siguiente relación

$$\cosh a \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma = \cos \beta \cos \gamma + 1$$

Para ver esto observemos que (**) es válida en este caso, entonces como dos de los lados del triángulo son dos geodésicas con terminación común, entonces $\langle K, L \rangle = \pm 1$, pero $\cosh a \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma > 0$, entonces $\langle K, L \rangle = 1$. En particular si $\angle C$ es recto tenemos que $\cosh a \operatorname{sen} \beta = 1$.

4.6 Cono de Luz

Se estudiará el espacio $PC(sl_2(\mathbb{R}))$ de rectas isotrópicas en $sl_2(\mathbb{R})$, es decir las rectas generadas por matrices de determinante cero. A cada vector $e \in \mathbb{R}^2$ le asignamos la matriz

$$L(e) = \begin{bmatrix} zw & -z^2 \\ w^2 & -zw \end{bmatrix}, \text{ si } e = \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

de esta manera $\det L(e) = 0$ por lo que $e \in \ker(T)$, donde T es la función lineal con matriz $L(e)$, esto nos define una función $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow PC(sl_2(\mathbb{R}))$ la cual es inyectiva.

Lema 4.2

$$L(\sigma(e)) = \sigma L(e) \sigma^{-1} \quad ; \sigma \in GL_2(\mathbb{R}), e \in \mathbb{R}^2$$

Demostración:

Si $\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ entonces $\sigma^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ y la demostración es un cálculo directo, ya que es fácil comprobar que

$$L(e) = \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} [z, w] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y también que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

entonces tenemos que

$$L(\sigma(e)) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} [z, w] \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \sigma L(e) \sigma^{-1}.$$

■

Ahora daremos otra asociación: dado un par ordenado (Z, U) de distintos puntos de \mathbb{R} le asignamos el vector $L(Z, U) \in sl_2(\mathbb{R})$ de determinante -1 dado por

$$L(Z, U) = \frac{1}{wu - zv} \begin{bmatrix} zv + wu & -2zu \\ 2wv & -zv - wu \end{bmatrix}, \text{ si } Z = \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} \text{ y } U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

o de otra forma utilizando el producto cuña

$$L(Z, U) = \frac{2}{d^2} L \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} \wedge L \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad d = \det \begin{bmatrix} z & u \\ w & v \end{bmatrix}.$$

Tenemos una relación más

$$\sigma L(Z, U) \sigma^{-1} = L(\sigma(Z), \sigma(U)) \quad ; \sigma \in Gl_2(\mathbb{R})$$

la cual se sigue de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} L(\sigma(Z), \sigma(U)) &= \frac{2}{d_1^2} L(\sigma(Z)) \wedge L(\sigma(U)) \\ &= \frac{2}{d_1^2} \sigma L(Z) \sigma^{-1} \wedge \sigma L(U) \sigma^{-1} \\ &= \frac{2}{d_1^2} \sigma L(Z) \wedge L(U) \sigma^{-1} \\ &= \sigma L(Z, U) \sigma^{-1} \end{aligned}$$

donde $d_1 = \det[\sigma(Z)\sigma(U)]$.

Lema 4.3 Sean $A, B, P, Q \in \mathbb{R}$ puntos distintos, entonces

$$\langle L(A, B), L(P, Q) \rangle = \frac{[A, B, P, Q] + 1}{[A, B, P, Q] - 1}$$

Demostración:

Por la relación anterior y como la razón cruzada es invariante bajo transformaciones de Möbius, ambos lados son invariantes bajo $Sl_2(\mathbb{R})$, pero como la acción es triple transitiva, verificaremos la fórmula para el caso $A = \infty, B = 0, P = 1, Q = q, q \in \mathbb{R}$. Sabemos que $[\infty, 0, 1, q] = q$ de donde solo falta verificar que $\langle L(\infty, 0), L(1, q) \rangle = \frac{q+1}{q-1}$.

Tenemos que $\infty = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, 1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} q \\ 1 \end{bmatrix}$ por lo que $L(\infty, 0) = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, L(1, q) = \frac{1}{q-1} \begin{bmatrix} 1+q & -2q \\ 2 & -1-q \end{bmatrix}$, por lo tanto

$$\langle L(\infty, 0), L(1, q) \rangle = -\frac{1}{2} \text{tr} L(\infty, 0) L(1, q)$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2(1-q)} \operatorname{tr} \begin{bmatrix} 1+q & -2q \\ -2 & 1+q \end{bmatrix} \\
 &= \frac{q+1}{q-1}
 \end{aligned}$$

4.7 De Poincaré a $sl_2(\mathbb{R})$

Finalmente mostremos que existe una isometría del semiplano de Poincaré \mathbb{H}^2 al espacio de matrices $sl_2(\mathbb{R})$. Recordemos que la métrica del semiplano de Poincaré esta dada por

$$\cosh d(z, w) = 1 + \frac{|z-w|^2}{2\operatorname{Im}z\operatorname{Im}w}, \quad z, w \in \mathbb{H}^2$$

Sea la función $F: \mathbb{H}^2 \rightarrow sl_2(\mathbb{R})$ tal que a $z = x + iy \in \mathbb{H}^2$ le asocia la matriz $F(z) = \frac{1}{y} \begin{bmatrix} x & -|z|^2 \\ 1 & -x \end{bmatrix} \in sl_2(\mathbb{R})$. Sean $z = x + iy$, $w = s + it \in \mathbb{H}^2$ entonces

$$\begin{aligned}
 \cosh d_{\mathbb{H}^2}(z, w) &= 1 + \frac{|z-w|^2}{2\operatorname{Im}z\operatorname{Im}w} \\
 &= 1 + \frac{|(x-s) + i(y-t)|^2}{2yt} \\
 &= \frac{x^2 + y^2 + s^2 + t^2 - 2xs}{2yt},
 \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}
 \cosh d_{sl_2(\mathbb{R})}(F(z), F(w)) &= \langle F(z), F(w) \rangle \\
 &= -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(F(z)F(w)) \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{yt} \begin{bmatrix} xs - |z|^2 & * \\ * & -|w|^2 + xs \end{bmatrix} \right) \\
 &= \frac{x^2 + y^2 + s^2 + t^2 - 2xs}{2yt},
 \end{aligned}$$

por lo que preserva distancias.

Además esta función F es $GL_2(\mathbb{R})$ -equivariante en el sentido de que relaciona la acción dada en la sección 3.8 con la acción dada en la sección 4.4 ya que

$$F(\sigma(z)) = \operatorname{sign}(\sigma)\sigma F(z)\sigma^{-1}$$

la cual se sigue por simple sustitución.

5 Grupos Fuchsianos

En este capítulo tratamos el tema principal de esta tesis, grupos discretos de isometrías del plano hiperbólico \mathbb{H}^2 , haremos un análisis de estos grupos por medio de la geometría dada por los conmutadores de las isometrías del plano hiperbólico, para llegar a una caracterización de los grupos elementales y de los grupos no elementales, ésta última debida a Nielsen.

Hacemos también un estudio especial de las cúspides o puntos fijos parabólicos, estas cúspides junto con \mathbb{H}^2 definen un espacio $(\mathbb{H}^2)^*$, consideraremos al espacio cociente $(\mathbb{H}^2)^*/\Gamma$, con Γ grupo discreto de isometrías y veremos como al darle la topología horocíclica a este cociente, se obtiene una superficie de Riemann.

Cuando tratamos subgrupos discretos de isometrías del plano hiperbólico es difícil estudiar la acción sobre todo \mathbb{H}^2 , por esto se identificán ciertos subconjuntos del plano hiperbólico donde es más fácil estudiar esta acción, además de que si sabemos como actúa en estos subconjuntos, tendremos información de la acción en el espacio total; estos conjuntos son llamados Dominios o Regiones Fundamentales. Haremos un estudio de algunos tipos de regiones fundamentales así como de algunas de sus propiedades.

El modelo $sl_2(\mathbb{R})$ será usado en las demostraciones más técnicas.

5.1 Subgrupos Discretos

Consideremos un espacio X localmente compacto, es decir uno que es Hausdorff (T_2) y donde cada punto tiene una vecindad compacta. Un subconjunto $S \subset X$ es discreto si S es localmente finito en X , es decir para toda $x \in X$, existe vecindad la cual tiene a lo más un número finito de puntos de S .

Si $S \subset X$ es un subconjunto discreto, entonces es cerrado, lo cual se sigue de que el espacio es Hausdorff; también en un espacio discreto cada punto es aislado y recíprocamente un cerrado con solo puntos aislados es discreto.

Proposición 5.1 *Un subconjunto S de un espacio localmente compacto X es discreto si y sólo si S interseca cada conjunto compacto de X en un conjunto finito.*

Demostración:

\Rightarrow] Sea K un compacto de X , entonces para cada $x \in K$ existe una vecindad U_x de x tal que interseca a S en un conjunto finito, y el resultado se sigue por la compacidad de K , pues a K lo podemos cubrir con un número finito de estas vecindades U_x .

\Leftarrow] Supongamos que no es discreto, entonces existe $x \in X$ tal que para toda vecindad U de x , $U \cap S$ es infinito; ahora como X es localmente compacto

existe una vecindad V de x tal que $V \subset K$ con K compacto de X , entonces $V \cap S \subset K \cap S$ es finito lo cual contradice la hipótesis, por lo tanto S es discreto. ■

Definición Un subgrupo discreto Γ de un grupo localmente compacto G es una subgrupo de G el cual es un subconjunto discreto de G

Proposición 5.2 Sea Γ un subgrupo de un grupo topológico localmente compacto G . Si existe una vecindad V de id en G tal que $V \cap \Gamma = \{id\}$ entonces Γ es un subgrupo discreto de G .

Demostración:

Sea V vecindad de id tal que $V \cap \Gamma = \{id\}$. Sea $\sigma \in G$ y consideremos dos posibilidades:

Si $\sigma V^{-1} \cap \Gamma = \emptyset$, entonces como V^{-1} es vecindad de id tenemos que σV^{-1} es una vecindad abierta de σ disjunta de Γ .

Si existe $\gamma \in \sigma V^{-1} \cap \Gamma$, entonces existe $t \in V^{-1}$ tal que $\gamma = \sigma t$, de donde $\sigma = \gamma t^{-1}$ por lo que $\sigma \in \gamma V$ entonces $\gamma^{-1}(\gamma V \cap \Gamma) = V \cap \gamma^{-1}\Gamma = V \cap \Gamma = \{id\}$, es decir $\gamma V \cap \Gamma = \gamma$; de esta manera γV es una vecindad abierta de σ que intersecta a Γ en el punto γ , por lo que es discreto. ■

Corolario 5.1 Sea G un grupo localmente compacto actuando continuamente en el espacio topológico X y sea Γ un subgrupo de G . Si existe $x \in X$, aislado en su órbita Γx y tal que su estabilizador Γ_x es un subgrupo discreto en G , entonces Γ es subgrupo discreto de G .

Demostración:

Sea U una vecindad abierta de $x \in X$ tal que $U \cap \Gamma x = \{x\}$. Sea $\tau_x : G \rightarrow X$, dada por $\tau_x(g) = gx$, notemos que $\tau_x^{-1}(U) \cap \Gamma = \Gamma_x$. Sea V vecindad abierta de la identidad en G tal que $V \cap \Gamma_x = \{id\}$, por lo que $V \cap \tau_x^{-1}(U)$ es vecindad abierta de id que la aisla en Γ , es decir $V \cap \tau_x^{-1}(U) \cap \Gamma = V \cap \Gamma_x = \{id\}$ entonces por la proposición anterior concluimos nuestra afirmación. ■

Sea $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la compactación por un punto de \mathbb{C} , y consideremos la acción sobre este espacio del grupo $M\ddot{o}b^+(\mathbb{C})$, de los homeomorfismos $\gamma : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ de la forma $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ad - bc \neq 0$. Es de nuestro particular interés restringirnos al subgrupo de elementos de $M\ddot{o}b(\mathbb{C})$ que dejan invariante al conjunto

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}[z] > 0\}$$

es decir $\gamma \in M\ddot{o}b(\mathbb{C})$ con $\gamma(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^2$. Un cálculo muestra que estas transformaciones son de la forma $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, además podemos

suponer que $ad - bc = 1$, y cada elemento lo podemos representar por una matriz de la forma $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Sl_2(\mathbb{R})$ en forma única salvo por la multiplicación de la matriz $-I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, de donde tenemos que

$$Sl_2(\mathbb{R})/\{\pm I\} = PSl_2(\mathbb{R})$$

es el grupo de transformaciones de Möbius que actúa en \mathbb{H}^2 .

La topología en $PSl_2(\mathbb{R})$ es la topología cociente del grupo topológico $Sl_2(\mathbb{R})$ cuya topología es la inducida por la función inyectiva

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$$

Entonces hemos hecho de $PSl_2(\mathbb{R})$ un grupo topológico con la métrica inducida de \mathbb{R}^4 , por lo que podemos hablar de los subgrupos discretos.

Definición Un grupo G de homeomorfismos de un espacio topológico X en si mismo actúa discontinuamente en X si cada $x \in X$ tiene una vecindad V tal que $V \cap g(V) = \emptyset$ para todo $g \neq id$.

Definición Un grupo G de homeomorfismos de un espacio topológico X en si mismo actúa propiamente discontinuamente en X si cada $x \in X$ tiene una vecindad V tal que si $g(V) \cap V \neq \emptyset$ con $g \in G$ entonces $g(x) = x$.

Es hora de definir un grupo Fuchsiano, para esto daremos una definición así como dos resultados que dan condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir un grupo para ser Fuchsiano.

Definición ([JS]) Un grupo Fuchsiano es un subgrupo discreto de $PSl_2(\mathbb{R})$

Sea Γ subgrupo de $PSl_2(\mathbb{R})$ Fuchsiano y consideremos la acción natural de este subgrupo dada por

$$\Gamma \times \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$$

$$\gamma(z) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} z = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \gamma \in \Gamma, \quad ad - bc = 1$$

Así se tienen los siguientes resultados:

Teorema 5.1 Un subgrupo Γ de $PSl_2(\mathbb{R})$ es Fuchsiano si y sólo si Γ actúa propiamente discontinuamente en \mathbb{H}^2 .

Demostración:

\Rightarrow] Sea $w \in \mathbb{H}^2$ y sea $W = \overline{B_\epsilon(w)}$ el disco cerrado con centro w y radio $\epsilon > 0$, como la topología inducida por la métrica hiperbólica en \mathbb{H}^2 coincide con la

topología euclidiana, entonces W es compacto luego $\{\gamma \in \Gamma : \gamma(w) \in W\}$ es finito por lo que podemos encontrar $0 < \delta < \epsilon$ tal que $B_\delta(w)$ no contiene puntos de la órbita de w , haciendo $V = \overline{B_\delta(w)}$, tenemos que si existe $\varphi \in \Gamma$ tal que $\varphi(V) \cap V \neq \emptyset$, es decir existe $z \in V$ tal que $\varphi(z) \in V$, entonces $d(z, w) < \frac{\delta}{2}$, $d(\varphi(z), w) < \frac{\delta}{2}$ y luego

$$\begin{aligned} d(w, \varphi(w)) &\leq d(w, \varphi(z)) + d(\varphi(z), \varphi(w)) \\ &= d(w, \varphi(z)) + d(z, w) < \delta \end{aligned}$$

entonces $\varphi(w) = w$, es decir Γ actúa propiamente discontinuamente.

⇐ Supongamos que p es punto fijo para $\gamma \in \Gamma \setminus \{id\}$, entonces existe W vecindad de p tal que si $W \cap \gamma(W) \neq \emptyset$ entonces $\gamma(p) = p$; si existe $q \in W$ tal que es punto fijo para otro elemento $\phi \in \Gamma$, entonces $\phi(p) = p$ y esto pasa sólo si $q = p$. Supongamos que Γ no es discreto y escogamos un punto $w \in \mathbb{H}^2$ tal que no es punto fijo por ningún elemento de Γ distinto de id , entonces existe una sucesión (T_n) de elementos de Γ tal que $T_n \rightarrow id$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces $T_n(w) \rightarrow w$ cuando $n \rightarrow \infty$, luego $(T_n(w))$ es una sucesión de puntos distintos. Entonces cada vecindad de w contiene otros puntos de su órbita y Γ no actúa propiamente discontinuamente. ■

Teorema 5.2 *Un subgrupo Γ de $PSL_2(\mathbb{R})$ es Fuchsiano si y sólo si para toda $z \in \mathbb{H}^2$, Γz es un subgrupo discreto de \mathbb{H}^2 .*

Demostración:

Supongamos que Γz es discreto en \mathbb{H}^2 , entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(z)$ no contiene otros puntos de Γz .

Entonces si $V \subset B_\epsilon(z)$, por el teorema anterior $V \cap S(V) \neq \emptyset$ implica que $S(z) = z$, entonces Γ es Fuchsiano. Recíprocamente si Γ es Fuchsiano entonces actúa propiamente discontinuamente en \mathbb{H}^2 y cada órbita es discreta. ■

Además para $PGL_2(\mathbb{R})$ tenemos los siguientes resultados:

Teorema 5.3 *Para cada punto $z \in \mathbb{H}^2$ y $\epsilon > 0$, el conjunto $\mathcal{R}(z, \epsilon) = \{\sigma \in PGL_2(\mathbb{R}) : d(z, \sigma z) \leq \epsilon\}$ es una vecindad compacta de la identidad en $PGL_2(\mathbb{R})$.*

Demostración:

Introducimos la norma $\|\sigma\|$ de la matriz $\sigma \in PGL_2(\mathbb{R})$ definida por

$$\|\sigma\|^2 = \|\mathcal{A}\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

donde $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es un representante de σ . Esta define una función continua

$$\|\cdot\| : PGL_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+$$

por lo que el conjunto $\{\sigma \in PGL_2(\mathbb{R}) : \|\sigma\| \leq r\}$ con $r > \sqrt{2}$ es una vecindad de *id* en $PGL_2(\mathbb{R})$, por lo que sólo falta ver que es compacta. Tenemos que este conjunto es la imagen bajo una función continua del conjunto $\{\sigma \in GL_2(\mathbb{R}) : \|\sigma\| \leq r, |\det \sigma| = 1\}$ el cual es cerrado y acotado en $M_2(\mathbb{R})$ por lo que es compacto.

Como la acción de $PGL_2(\mathbb{R})$ es transitiva en \mathbb{H}^2 solo basta ver el caso cuando $z = i \in \mathbb{H}^2$ que en $sl_2(\mathbb{R})$ esta dado por $i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y la acción de $PGL_2(\mathbb{R})$ esta dada por

$$\sigma(i) = \frac{1}{|ad - bc|} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

luego la traza de $\sigma(i) \cdot i$ es

$$\text{tr}(\sigma(i) \cdot i) = -|ad - bc|^{-1}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

por lo que

$$2 < \sigma(i), i > = |ad - bc|^{-1}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \Rightarrow 2 \cosh d(i, \sigma(i)) = \|\sigma\|^2$$

Ahora sabemos que $\{\sigma \in PGL_2(\mathbb{R}) : \|\sigma\| \leq r\}$ es una vecindad compacta de *id* en $PGL_2(\mathbb{R})$, pero este conjunto es igual al conjunto $\{\sigma \in PGL_2(\mathbb{R}) : (\cosh d(i, \sigma(i)))^{\frac{1}{2}} \leq \frac{r}{\sqrt{2}}\}$ y el resultado se sigue. ■

Corolario 5.2 Sea Γ un subgrupo de $PSL_2(\mathbb{R})$. Si Γ es Fuchsiano, entonces para $z \in \mathbb{H}^2$ y $\epsilon > 0$ el siguiente conjunto es finito $\{\sigma \in \Gamma : d(\sigma(z), z) \leq \epsilon\}$. Recíprocamente si para alguna $z \in \mathbb{H}^2$ y $\epsilon > 0$ el conjunto es finito, entonces Γ es un subgrupo Fuchsiano de $PSL_2(\mathbb{R})$.

Demostración:

Observemos primero que $\{\sigma \in \Gamma : d(\sigma(z), z) \leq \epsilon\} = \mathcal{R}(z; \epsilon) \cap \Gamma$. Si Γ es discreto, como $\mathcal{R}(z; \epsilon)$ es compacto, entonces $\mathcal{R}(z; \epsilon) \cap \Gamma$ es finito.

Recíprocamente si para alguna $\epsilon > 0$ y un punto $z \in \mathbb{H}^2$ el conjunto $\{\sigma \in \Gamma : d(\sigma(z), z) \leq \epsilon\}$ es finito, podemos tomar ϵ suficientemente pequeña de tal modo que el conjunto sea sólo la identidad de donde Γ es discreto. ■

Un ejemplo clásico de este tipo de grupos, es el **grupo modular**: consideremos el espacio $PSL_2(\mathbb{Z})$, es decir el grupo de matrices de 2×2 con entradas enteras y $\det = 1$, el cual es un subgrupo discreto de $PSL_2(\mathbb{R})$ ya que el número de posibles matrices $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ con a, b, c, d enteros tal que $\|A\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \leq n$ es finito.

Proposición 5.3 Un grupo discreto Γ de $PGL_2(\mathbb{R})$ actúa en el plano hiperbólico con órbitas discretas.

Demostración:

Sea \mathcal{A} una órbita para Γ y fijemos un punto $z \in \mathcal{A}$, por el corolario anterior un disco D con centro z tiene sólo un número finito de puntos de \mathcal{A} entonces podemos encontrar $\epsilon > 0$, tal que $D(z; \epsilon) \cap \mathcal{A} = \{z\}$.

Sean $u, v \in \mathcal{A}$, $u \neq v$, escojamos $\sigma \in \Gamma$ tal que $\sigma(u) = z$, entonces $\sigma(v) \notin D(z; \epsilon)$ por lo que $d(u, v) = d(\sigma(u), \sigma(v)) \geq \epsilon$ de esta forma cada punto en \mathcal{A} es aislado. Sea $w \notin \mathcal{A}$, y consideremos el disco abierto $D(w; \frac{\epsilon}{2})$, por lo anterior contiene a lo más dos puntos de \mathcal{A} , luego podemos encontrar un disco abierto con centro w que no intersecta a \mathcal{A} , entonces \mathcal{A} es cerrado; y vimos que todos sus puntos eran aislados por lo que es discreto, así las órbitas son discretas. ■

Lema 5.1 Sea Γ un grupo Fuchsiano, para cada $z \in \mathbb{H}^2$ existe una vecindad U de z tal que $\{\sigma \in \Gamma : \sigma(U) \cap U \neq \emptyset\} = \{\sigma \in \Gamma : \sigma(z) = z\} = \Gamma_z$.

Demostración:

Sea V una vecindad compacta de z en \mathbb{H}^2 ya que es localmente compacto, entonces el conjunto $\{\sigma \in \Gamma : \sigma(V) \cap V \neq \emptyset\}$ es finito, digamos $\sigma_1, \dots, \sigma_r$. Suponga que $\sigma_i(z) = z$ ó $\neq z$ de acuerdo a que $1 \leq i \leq s$ ó $s < i \leq r$. Para cada $i > s$, considere la vecindad V_i de z y una vecindad W_i de $\sigma_i(z)$ tal que $V_i \cap W_i = \emptyset$, entonces considere la vecindad $V \cap \{\bigcap_{i>s} (V_i \cap \sigma_i^{-1}(W_i))\}$, la cual tiene la propiedad requerida. ■

Teorema 5.4 Sea Γ un grupo Fuchsiano en $PSL_2(\mathbb{R})$. Para K y L subconjuntos compactos del plano hiperbólico \mathbb{H}^2 , $\sigma(K)$ y L son ajenos para casi todo $\sigma \in \Gamma$.

Demostración:

Sea K un compacto, $z \in \mathbb{H}^2$ y $r > 0$. Vamos a demostrar primero que $D(z; r)$ y $\sigma(K)$ son ajenos para excepto un número finito de $\sigma \in \Gamma$. Sea $s > 0$ tal que $K \subset D(z; r+s)$, entonces el conjunto $S = \{\gamma \in \Gamma : \gamma(z) \in D(z; r+s)\}$ es finito. Además observemos que $\gamma D(z; r) = D(\gamma(z), r)$, por lo que $K \cap \gamma D(z; r) = \emptyset$ para todo $\gamma \in \Gamma - S$. Entonces dado el otro compacto L , escojamos $z \in L$ y $r > 0$ tal que $L \subset D(z; r)$, entonces $\sigma(K)$ y L son ajenos excepto para un número finito de $\sigma \in \Gamma$. ■

Corolario 5.3 Sea Γ grupo Fuchsiano en $PSL_2(\mathbb{R})$ y K subconjunto compacto de \mathbb{H}^2 , entonces solo un número finito de elementos de Γ tienen puntos fijos en K .

Demostración:

Por el teorema anterior, tenemos que $\sigma(K)$ y K son disjuntos si $\sigma \in \Gamma$ excepto para un número finito de σ , por lo que sólo un número finito de elementos de Γ puede tener puntos fijos en K . ■

Definición Por un punto fijo elíptico para Γ en \mathbb{H}^2 entenderemos un punto $z \in \mathbb{H}^2$ que es fijado por un elemento elíptico de Γ .

Corolario 5.4 Sea Γ grupo Fuchsiano en $PSL_2(\mathbb{R})$. El conjunto P de puntos fijos elípticos para Γ en \mathbb{H}^2 es un subconjunto discreto de \mathbb{H}^2 .

Demostración:

Sea K cualquier compacto de \mathbb{H}^2 , si vemos que $K \cap P$ es finito terminamos. Como Γ es discreto existe sólo un número finito de elementos de Γ que tienen puntos fijos en K y como cada elemento de $PSL_2(\mathbb{R})$ tiene a lo más dos puntos fijos, tenemos el resultado. ■

5.2 Subgrupos Elementales

En esta sección comenzamos el estudio de subgrupos particulares de $PGl_2(\mathbb{R})$, en especial los subgrupos elementales.

Definición Un subgrupo de $PGl_2(\mathbb{R})$ es elemental, si fija un punto de \mathbb{H}^2 , fija un punto de $\partial\mathbb{H}^2$ o estabiliza una geodésica en \mathbb{H}^2 .

Definición Sea $z \in \mathbb{H}^2$, entonces el estabilizador de z es el conjunto $S_z = \{\sigma \in Gl_2(\mathbb{R}) : \sigma(z) = z\}$.

Proposición 5.4 El estabilizador de un punto $z \in \mathbb{H}^2$ bajo la acción del grupo $Gl_2(\mathbb{R})$ es conjugado al grupo de matrices de la forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}, \quad a^2 + b^2 \neq 0.$$

$PGl_2(\mathbb{R})$ actúa en \mathbb{H}^2 con estabilizadores conjugados a $PO_2(\mathbb{R}) = O_2(\mathbb{R})/\{\pm id\}$.

Demostración:

Sea $i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, entonces

$$\sigma(i) = \text{sign}(\sigma)\sigma i \sigma^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} 0 & -a^2 - b^2 \\ a^2 + b^2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = i$$

por lo que σ estabiliza a i , de la misma manera podemos ver que $\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$ también estabiliza a i .

Ahora un elemento $\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ estabiliza a i si

$$\sigma(i) = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ac+bd & -a^2-b^2 \\ c^2+d^2 & -ac-bd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

lo cual pasa si y sólo si $-|ad-bc| = -a^2-b^2$, $|ad-bc| = d^2+c^2$, y $db = -ac$ por lo que tenemos la condición $2|ad-bc| = a^2+b^2+c^2+d^2$; cuando $ad-bc > 0$ entonces $(a-d)^2 + (b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2 - 2(ad-bc)$, por lo que $a = d$ y $b = -c$. En el otro caso, cuando $ad-bc < 0$ tenemos la igualdad $(b-c)^2 + (a+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2 - 2(bc-ad)$ de donde $b = c$ y $a = -d$, por lo que el estabilizador de i en $Gl_2(\mathbb{R}) = \{\sigma \in Gl_2(\mathbb{R}) : \det \sigma = \pm 1\}$ es $O_2(\mathbb{R})$ entonces $S_i = O_2(\mathbb{R}) / \{\pm id\}$ es el estabilizador en $PGl_2(\mathbb{R})$; ya que la acción de $Gl_2(\mathbb{R})$ es transitiva, existe σ tal que $\sigma(z) = i$, por lo que el estabilizador de z es conjugado a S_i . ■

Proposición 5.5 *El estabilizador en $Gl_2(\mathbb{R})$ de una geodésica k en \mathbb{H}^2 , es conjugado al subgrupo de $Gl_2(\mathbb{R})$ representado por las matrices*

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix}; \quad ad \neq 0, \quad bc \neq 0$$

Demostración:

Sea h la geodésica con vector normal $N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, vamos a mostrar que las matrices de la proposición son el conjunto de transformaciones que actúan en $sl_2(\mathbb{R})$ con vector propio N . La acción está dada por

$$\frac{1}{|ad-bc|} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{|ad-bc|} \begin{bmatrix} ad+bc & -2ab \\ 2cd & -ad-bc \end{bmatrix}$$

entonces tenemos que $X \in h$ si y sólo si

$$\langle X, N \rangle = \langle \begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \rangle = -\frac{1}{2} \text{tr} \begin{bmatrix} x & -y \\ z & x \end{bmatrix} = -x = 0$$

por lo que $X = \begin{bmatrix} 0 & y \\ z & 0 \end{bmatrix}$; entonces si $\sigma = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$

$$\sigma \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{|ad|} \begin{bmatrix} ad & 0 \\ 0 & -ad \end{bmatrix} = \frac{(ad)^2}{|ad|} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

y cuando $\sigma = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$

$$\sigma \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{|bc|} \begin{bmatrix} bc & 0 \\ 0 & -bc \end{bmatrix} = \frac{(bc)^2}{|bc|} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

por lo que $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$ actúan con vector propio N , es decir fijan h , de donde el estabilizador en $Gl_2(\mathbb{R})$ de h son estos dos tipos de matrices, y el resultado se sigue para cualquier geodésica por conjugación. ■

Proposición 5.6 *El estabilizador en $Gl_2(\mathbb{R})$ de una terminación de \mathbb{H}^2 es conjugado al subgrupo de las matrices de la forma*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}; \quad ad \neq 0$$

Demostración:

Consideremos la terminación $\infty = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, para una matriz de la forma $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$ tenemos que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{|ad|} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ 0 & a \end{bmatrix} = \frac{a^2}{|ad|} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por lo que este subgrupo estabiliza ∞ .

Recíprocamente sea $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Gl_2(\mathbb{R})$ que estabiliza ∞ entonces

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{|ad-bc|} \begin{bmatrix} -ac & a^2 \\ -c^2 & ac \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de donde $c = 0$. ■

Grupos discretos elementales

A continuación queremos describir los grupos discretos elementales. Por los resultados anteriores vemos que un grupo Γ que fija un punto es discreto si y sólo si es finito; si estabiliza una geodésica k es discreto si y sólo si el subgrupo de traslación es finito.

Proposición 5.7 *Sea Γ un subgrupo de $PSL_2(\mathbb{R})$ el cual fija un punto de $\partial\mathbb{H}^2$. El grupo es Fuchsiano si y sólo si es cíclico.*

Demostración:

Como Γ fija un punto de la frontera podemos suponer que este punto es $\infty = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, luego Γ consiste, por la última proposición, de las matrices de la forma $\sigma = \begin{bmatrix} u & r \\ 0 & u^{-1} \end{bmatrix}$. Si $\sigma = \begin{bmatrix} u & r \\ 0 & u^{-1} \end{bmatrix}$, $\tau = \begin{bmatrix} v & s \\ 0 & v^{-1} \end{bmatrix}$, $u < 1, v < 1$, están en Γ , conjugando con la matriz $\begin{bmatrix} 1 & \frac{r-u^{-1}r}{1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ podemos suponer que $r = 0$. Ahora estudiemos el grupo generado por $\sigma = \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{bmatrix}$ y el conmutador $\gamma = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, como estos dos elementos están contenidos en Γ , entonces

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \sigma^n \gamma \sigma^{-n} = \begin{bmatrix} 1 & cu^{2n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \Gamma$$

Sea $z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ y $T = \sigma^n \gamma \sigma^{-n}$ entonces

$$T(z) = \begin{bmatrix} 1 & cu^{2n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & cu^{2n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -cu^{2n} & c^2 u^{4n} + 1 \\ -1 & cu^{2n} \end{bmatrix}$$

por lo que $\langle T(z), z \rangle = -\frac{1}{2} \text{tr}(T(z)z) = \frac{c^2 u^{4n}}{2} + 1$ entonces $\cosh d(T(z), z) = \langle Tz, z \rangle = \frac{c^2 u^{4n}}{2} + 1$ por lo que existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{c^2 u^{4n}}{2} + 1 < 2$, ya que $u < 1$, de donde para toda $m \in \mathbb{Z}, n \leq m$, $d(\sigma^m \gamma \sigma^{-m}) \leq \cosh^{-1}(2)$, pero como Γ es discreto, esto podrá ser cierto si y sólo si $u = 1$ o $c = 0$.

Si $u = 1$ tenemos que $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ entonces Γ esta generado por τ .

Si $c = 0$ entonces $\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y el conmutador es la *id* de donde $\sigma\tau = \tau\sigma$ por lo que $u^2 vs = vs, s \neq 0 \Rightarrow u^2 = 1$ lo cual es una contradicción, por lo tanto $s = 0, \tau = \begin{bmatrix} v & 0 \\ 0 & v^{-1} \end{bmatrix}$ y Γ es generado por σ . ■

Lema 5.2 Sea X un conjunto en donde actúa un grupo G . Para cualquier subgrupo normal N de G el conjunto de puntos fijos X^N es estable bajo G .

Demostración:

Tenemos que demostrar que si $x \in X^N$ y $g \in G$ entonces $gx \in X^N$ donde $X^N = \{x \in X : hx = x, \forall h \in N\}$, es decir debemos demostrar que $\forall h \in N, hgx = gx$. Sea $v \in N$ entonces $v(gx) = g(g^{-1}vg)x$ y como N es normal tenemos que $g^{-1}vg \in N$, entonces tenemos que $g^{-1}vgx = x$ por lo tanto

$v(gx) = gx$, es decir $gx \in X^N$. ■

Terminamos con el teorema principal de esta sección. Veamos algunas definiciones que nos serán útiles en la proposición siguiente. Una serie normal de un grupo G es una sucesión finita (A_0, \dots, A_r) de subgrupos de G tal que $\langle id \rangle = A_0 \triangleleft A_1 \triangleleft \dots \triangleleft A_r = G$. Un grupo G es soluble si y sólo si tiene una serie normal cuyos factores A_{i+1}/A_i son abelianos.

Definimos el subgrupo conmutador $D^1(G)$ de G como el subgrupo generado por elementos de la forma $a^{-1}b^{-1}ab$. La serie derivada de G es la sucesión $(G = D^0(G), D^1(G), D^2(G), \dots)$ donde $D^{n+1}(G) = D(D^n(G))$, con esta definición tenemos que un grupo G es soluble si y sólo si $D^n(G) = id$ para alguna $n \in \mathbb{Z}$.

Proposición 5.8 *Un subgrupo G de $PGL_2(\mathbb{R})$ es elemental si y sólo si G es un grupo soluble.*

Demostración:

\Rightarrow) Los grupos elementales que fueron mostrados en las primeras tres proposiciones de esta sección son solubles como veremos a continuación. Los cálculos son fáciles, así que solo se indicarán; hacemos la siguiente convención:

$\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rangle$ denotará el grupo generado por matrices de esa forma.

Cuando un subgrupo fija un punto de \mathbb{H}^2 es conjugado al grupo de matrices de la forma

$$\left[\begin{array}{cc} a & b \\ -b & a \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} a & b \\ b & -a \end{array} \right], a^2 + b^2 \neq 0$$

entonces tenemos la siguiente serie con factores abelianos

$$\langle id \rangle \triangleleft \left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \right\rangle \triangleleft \left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \right\rangle$$

Cuando un subgrupo estabiliza una geodésica de \mathbb{H}^2 es conjugado a un grupo de matrices de la forma

$$\left[\begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & d \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} 0 & b \\ c & 0 \end{array} \right]; ad \neq 0, bc \neq 0$$

entonces tenemos que

$$\langle id \rangle \triangleleft \left\langle \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \right\rangle \triangleleft \left\langle \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Y finalmente cuando un subgrupo estabiliza una terminación de \mathbb{H}^2 entonces es conjugado a un grupo de matrices de la forma

$$\left[\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & d \end{array} \right]; ad \neq 0$$

y en este caso tenemos que

$$\langle id \rangle \triangleleft \left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \right\rangle \triangleleft \left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \right\rangle$$

\Leftarrow] Sea G un grupo soluble, $G \neq \emptyset$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $G = D^0(G) \supseteq D^1(G) \supseteq \dots \supseteq D^n(G) \supseteq D^{n+1}(G) = \langle id \rangle$, $D^n(G) \neq id$. Supongamos primero que G consiste de transformaciones pares.

1. $D^n(G)$ contiene una rotación σ con centro A , por lo que el conjunto de puntos fijos para σ en \mathbb{H}^2 sólo consiste de A . Como $D(D^n(G)) = D^{n+1}(G) = \langle id \rangle$ entonces $D^n(G)$ es abeliano, por lo que todo subgrupo es normal. Sea N el subgrupo de $D^n(G)$ generado por σ , entonces por el principio del normalizador tenemos que $(\mathbb{H}^2)^N = \{A\}$ por lo que $D^n(G)(A) = \{A\}$, es decir $D^n(G)$ sólo tiene como punto fijo a A . Vamos a usar inducción decreciente, para demostrar que si $D^i(G)$ tiene como conjunto de puntos fijos a A en \mathbb{H}^2 también $D^{i-1}(G)$. Tenemos que $D^{i-1}(G) \supseteq D^i(G)$, y que $D^{i-1}(G)/D^i(G)$ es abeliano, por lo que $D^i(G) \triangleleft D^{i-1}(G)$ de donde

$$(sl_2(\mathbb{R}))^{D^i(G)}|_{\mathbb{H}^2} = (\mathbb{H}^2)^{D^i(G)} = \{A\}$$

que es estabilizado por $D^{i-1}(G)$, es decir A es fijado por todos los elementos de $D^{i-1}(G)$ con lo que concluimos que G fija A en \mathbb{H}^2 , por lo que es elemental.

2. $D^n(G)$ contiene una horolación σ con centro $p \in \partial\mathbb{H}^2$, por lo que el conjunto de puntos fijos para σ en $\partial\mathbb{H}^2$ es $\{p\}$. Entonces procediendo como arriba, concluimos que el conjunto de puntos fijos para G en $\partial\mathbb{H}^2$ es $\{p\}$, por lo que es elemental.

3. $D^n(G)$ contiene una traslación $\sigma \neq id$ a lo largo de la geodésica k . Consideremos \mathcal{G} el conjunto de geodésicas en \mathbb{H}^2 . Demostremos que $\mathcal{G}^\sigma = \{k\}$. Supongamos que σ estabiliza otra geodésica h por lo que sus terminaciones $\{A, B\}$ son estabilizadas por σ , entonces σ^2 fija A y B además como $\sigma^2 \neq id$, y tiene dos puntos fijos en $\partial\mathbb{H}^2$, A y B tienen que ser las terminaciones de k , es decir $k = h$, y procediendo como antes llegamos a que G es elemental.

Ahora veamos el caso general de G un grupo soluble. Sea G^- el conjunto de transformaciones pares, el cual es normal en G por lo que es soluble también. Cuando $G^- \neq id$ podemos asumir que G^+ tiene precisamente un punto fijo en \mathbb{H}^2 o en $\partial\mathbb{H}^2$ o en \mathcal{G} , por el principio del normalizador obtenemos que G es elemental. ■

Ahora estudiemos como deben de ser los subgrupos de $PGL_2(\mathbb{R})$ que tienen tener cierto tipos de transformaciones.

Proposición 5.9 Todo G subgrupo de $PGL_2(\mathbb{R})$ no elemental contiene una traslación.

Demostración:

Sean σ y τ dos rotaciones con centros A y B respectivamente. Sea β la reflexión en la geodésica que pasa a través de A y B . Como σ, τ son composición de dos reflexiones, usando el teorema de las tres reflexiones obtenemos que $\sigma\beta = s$ donde s es una reflexión en una geodésica que pasa por A , por lo que $\sigma = s\beta$. De la misma forma obtenemos que $\beta\tau = m$ donde m es una reflexión en una geodésica que pasa por B y $\tau = \beta m$ entonces

$$\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1} = s\beta\beta m\beta s m\beta = s m\beta s m\beta = (sm\beta)^2$$

y como $sm\beta$ es impar es una reflexión deslizada, por lo que su cuadrado $(\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1})$ es una traslación.

El mismo argumento muestra que el conmutador de dos horolaciones es una traslación y el conmutador de una rotación y una horolación es también una traslación. Si no pasa lo anterior y si suponemos que G no tiene traslaciones, tenemos que G^+ es abeliano entonces G^+ es soluble, por lo que G es soluble, y entonces es elemental lo cual es una contradicción. ■

Lema 5.3 Si $\sigma \in Gl_2(\mathbb{R})$ actúa en \mathbb{H}^2 como una reflexión en una geodésica entonces $\det(\sigma) < 0$ y $tr\sigma = 0$.

Demostración:

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la geodésica es el eje y . Como es reflexión tenemos que $\det\sigma < 0$ y actúa de la forma

$$\sigma(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

entonces como $\sigma(i) = \frac{a\bar{i} + b}{c\bar{i} + d} = i$ entonces $ai + b = c - id$ por lo que $b = c, a = -d$, entonces $tr\sigma = 0$. ■

Lema 5.4 Sea τ una reflexión en una geodésica k y σ una isometría par de \mathbb{H}^2 . Si $\tau\sigma$ es una reflexión, entonces σ es una rotación alrededor de un punto de k o una horolación con centro en una de las terminaciones de k o una traslación con eje perpendicular a k .

Demostración:

Nuevamente suponemos que k es el eje y . Observamos que por el lema anterior $tr^2(\tau\sigma) = 0$ por lo que esa composición es una rotación, luego fija sólo un punto de \mathbb{H}^2 ; entonces si σ es una rotación su centro debe estar en k , para que la composición sea una rotación; el mismo argumento usamos si σ es una horolación (pues su punto fijo debe ser una terminación de k) o una traslación. ■

Proposición 5.10 Sea G un subgrupo no elemental de $PGL_2(\mathbb{R})$. Si $G \neq G^+$ entonces G contiene una reflexión deslizada.

Demostración:

Supongamos que todas las transformaciones impares de G son reflexiones. Sea $\sigma \in G^+$, $\sigma \neq id$; si σ es rotación alrededor de un punto A entonces $\forall \tau \in G \setminus G^+$, $\tau\sigma$ es una reflexión, entonces por el lema anterior tenemos que todos los ejes de reflexión de elementos de G pasan por A , por lo que es un punto fijo para G . Si σ es una horolación con centro S , entonces por el lema anterior todos los ejes de reflexión de G pasan por S , entonces G fija S . Si σ es una traslación, nuevamente los ejes de reflexión de G son perpendiculares al eje de traslación de S para σ , entonces S es estabilizado por G , en todos los casos G resulta elemental. ■

5.3 Geometría de Conmutadores

En esta sección estudiaremos la relación entre los conmutadores de $PSL_2(\mathbb{R})$ y la geometría de \mathbb{H}^2 ; lo interesante de esto es que veremos dos tipos de demostraciones, la algebraica en esta sección y la geométrica en la siguiente sección.

Lema 5.5 Dadas dos matrices $A, B \in M_2(\mathbb{R})$.

Los vectores transformación $U = \frac{1}{2}(A^+ - A)$ y $V = \frac{1}{2}(B^- - B)$ satisfacen

$$\frac{1}{2}tr(AB) = \frac{1}{2}trA \frac{1}{2}trB - \langle U, V \rangle$$

Demostración:

Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ entonces

$$A + A^- = \begin{bmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (a+d)$$

de esta manera tenemos que $U = \frac{1}{2}(A^+ - A) = \frac{1}{2}(A + A^- - 2A) = \frac{1}{2}(I trA - 2A)$ y $V = \frac{1}{2}(I trB - 2B)$ entonces tenemos que

$$-2 \langle U, V \rangle = tr(UV) = \frac{1}{4}tr[(I trA - 2A)(I trB - 2B)] =$$

$$\frac{1}{4}tr(I trA trB) + trAB - \frac{1}{4}trA tr(2B) - \frac{1}{4}tr(2A)trB$$

lo que implica que

$$\frac{1}{2}tr(AB) = 2 \frac{1}{4}trA trB - \frac{1}{4}trA trB - \langle U, V \rangle = \frac{1}{2}trA \frac{1}{2}trB - \langle U, V \rangle$$

Proposición 5.11 Sean α, β traslaciones cuyos ejes a, b tiene una perpendicular en común. Si α y β tienen la misma longitud de traslación T , pero con dirección opuesta, entonces si $d = d(a, b)$, tenemos que

$$\operatorname{tr}^2(\alpha\beta) - 4 = 16 \sinh^2\left(\frac{1}{2}T\right) \sinh^2\left(\frac{1}{2}d\right) [\sinh^2\left(\frac{1}{2}T\right) \sinh^2\left(\frac{1}{2}d\right) - 1]$$

Demostración:

Representemos α por la matriz $A \in Sl_2(\mathbb{R})$ con $\operatorname{tr}A > 0$, y su correspondiente vector transformación U , por lo que $\operatorname{tr}U = 0$, es decir $U \in sl_2(\mathbb{R})$. El eje a de la traslación α tienen la orientación natural y sea M su correspondiente vector normal.

Veamos que $U = \sinh\left(\frac{1}{2}T\right)M \dots (1)$, $\frac{1}{2}\operatorname{tr}A = \cosh\left(\frac{1}{2}T\right) \dots (2)$. Sea $P \in a$, con $\alpha(P) \in a$ y Q su punto medio y sean H y K vectores unitarios positivamente dirigidos tangentes a a en P y Q respectivamente. Ya que a la podemos parametrizar como $P \cosh s + H \sinh s$, $s \in \mathbb{R}$ entonces $Q = P \cosh\left(\frac{1}{2}T\right) + H \sinh\left(\frac{1}{2}T\right)$ y $K = P \sinh\left(\frac{1}{2}T\right) + H \cosh\left(\frac{1}{2}T\right)$ pues $\langle K, Q \rangle = 0$; de esta forma tenemos que $H \wedge K = H \wedge P \sinh\left(\frac{1}{2}T\right) + \langle H, K \rangle = -\cosh\left(\frac{1}{2}T\right)$. Como α es una traslación es la composición de dos reflexiones en geodésicas ortogonales a a , es decir con vectores normales tangentes a a , por lo que α la podemos representar por $A = KH$, de donde obtenemos que $U = H \wedge K$ y $\frac{1}{2}\operatorname{tr}A = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(KH) = -\langle K, H \rangle = \cosh\left(\frac{1}{2}T\right)$; por 4.2.3 tenemos que $M = H \wedge P$, es decir $U = M \sinh\left(\frac{1}{2}T\right)$.

Similarmente para β tenemos que $B \in Sl_2(\mathbb{R})$ con $\frac{1}{2}\operatorname{tr}B = \cosh\left(\frac{1}{2}T\right)$ y si N es el vector normal para el eje b para β , entonces como M, N tienen direcciones opuestas $\langle M, N \rangle = \cosh d(a, b) = \cosh d$, por 4.2.4.

Sustituyendo en la fórmula del lema anterior tenemos que

$$\frac{1}{2}\operatorname{tr}(AB) = \cosh\left(\frac{1}{2}T\right) \cosh\left(\frac{1}{2}T\right) - \langle M \sinh\left(\frac{1}{2}T\right), N \sinh\left(\frac{1}{2}T\right) \rangle =$$

$$\cosh^2\left(\frac{1}{2}T\right) - \sinh^2\left(\frac{1}{2}T\right) \langle M, N \rangle = \cosh^2\left(\frac{1}{2}T\right) - \sinh^2\left(\frac{1}{2}T\right) \cosh d$$

utilizando las igualdades

$$\cosh^2\left(\frac{1}{2}T\right) = 1 + \sinh^2\left(\frac{1}{2}T\right), \quad \cosh d = 1 + 2 \sinh^2\left(\frac{1}{2}d\right)$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\operatorname{tr}(AB) &= 1 + \sinh^2\left(\frac{1}{2}T\right) - \sinh^2\left(\frac{1}{2}T\right)(1 + 2 \sinh^2\left(\frac{1}{2}d\right)) \\ &= 1 - 2 \sinh^2\left(\frac{1}{2}T\right) \sinh^2\left(\frac{1}{2}d\right) \end{aligned}$$

entonces elevando al cuadrado obtenemos el resultado

$$\operatorname{tr}^2(\alpha\beta) - 4 = 16 \operatorname{senh}^2\left(\frac{1}{2}T\right) \operatorname{senh}^2\left(\frac{1}{2}d\right) \left[\operatorname{senh}^2\left(\frac{1}{2}T\right) \operatorname{senh}^2\left(\frac{1}{2}d\right) - 1 \right]$$

Corolario 5.5 Sean α, β traslaciones con la misma longitud de traslación T cuyos ejes a y b tienen perpendicular común. Si ninguno de $\alpha\beta$ o $\alpha\beta^{-1}$ es rotación entonces

$$\operatorname{senh}\left(\frac{1}{2}T\right) \operatorname{senh}\left(\frac{1}{2}d\right) \geq 1, \quad d = d(a, b)$$

Demostración:

Como ninguno de $\alpha\beta$ o $\alpha\beta^{-1}$ es una rotación tenemos que $\operatorname{tr}(\alpha\beta) \geq 4$ por lo tanto $\operatorname{tr}^2(\alpha\beta) - 4 \geq 0$, entonces por la proposición anterior tenemos que $\operatorname{senh}\left(\frac{1}{2}T\right) \operatorname{senh}\left(\frac{1}{2}d\right) \geq 1$.

Ahora es tiempo de analizar los conmutadores, para esto remarcamos que

$$\operatorname{tr}(\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1})$$

esta bien definida como función de α y β en $PSl_2(\mathbb{R})$, pues la traza $\operatorname{tr}(ABA^{-1}B^{-1})$ es independiente de los representantes A, B de α y β .

Lema 5.6 Cualesquiera dos transformaciones $\alpha, \beta \in PSl_2(\mathbb{R})$ satisfacen

$$\frac{1}{2} \operatorname{tr}(\beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}) = \frac{1}{4} \operatorname{tr}^2\alpha + \langle U, \beta(U) \rangle$$

donde $U = \frac{1}{2}(A^{-1} - A)$ es el vector transformación para $A \in Sl_2(\mathbb{R})$ un representante de α .

Demostración:

Sean A y $B \in Sl_2(\mathbb{R})$ que representan a α y β . Como el vector transformación para A es U entonces el de BAB^{-1} es

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}((BAB^{-1})^{-1} - BAB^{-1}) &= \frac{1}{2}((BAB^{-1})^{-1} - BAB^{-1}) \\ &= \frac{1}{2}(BA^{-1}B^{-1} - BAB^{-1}) \\ &= B\left(\frac{1}{2}(A^{-1} - A)\right)B^{-1} \\ &= BUB^{-1} \end{aligned}$$

y el vector transformación para A^{-1} es $-U$. Sustituimos esto en el lema 5.4 para obtener

$$\frac{1}{2} \operatorname{tr}(BAB^{-1}A^{-1}) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(BAB^{-1}) \frac{1}{2} \operatorname{tr}(A^{-1}) + \langle BUB^{-1}, U \rangle$$

entonces

$$\frac{1}{2} \text{tr}(\beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}) = \frac{1}{2} \text{tr}(\alpha) \frac{1}{2} \text{tr}(\alpha) + \langle U, \beta(U) \rangle = \frac{1}{4} \text{tr}^2(\alpha) + \langle U, \beta(U) \rangle$$

ya que $\text{tr}(\beta A \beta^{-1}) = \text{tr} A = \text{tr} A^{-1}$. ■

Proposición 5.12 Sean α, β dos traslaciones con la misma longitud de traslación T . Si los ejes a y b para α y β se intersectan en un ángulo $\theta \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ entonces

$$\text{tr}^2(\beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}) - 4 = 16 \sinh^4\left(\frac{1}{2}T\right) \sin^2\theta \left[\sinh^4\left(\frac{1}{2}T\right) \sin^2\theta - 1 \right]$$

Demostración:

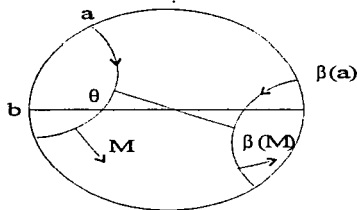


FIGURA 5.1. Ejes de traslaciones que se intersectan

Por las fórmulas de la proposición 5.11 y el lema 5.5 tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{tr}(\beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}) &= \frac{1}{2} \text{tr} \alpha \frac{1}{2} \text{tr} \alpha + \langle U, \beta(U) \rangle \\ &= \cosh^2\left(\frac{1}{2}T\right) + \langle \sinh\left(\frac{1}{2}T\right)M, \beta(U) \rangle \\ &= \cosh^2\left(\frac{1}{2}T\right) + \sinh\left(\frac{1}{2}T\right) \langle M, \beta(M) \rangle + \dots * \end{aligned}$$

donde M es el vector normal a a , por lo que $\beta(M)$ es vector normal para $\beta(a)$.

Haciendo la convención $d = d(a, \beta(a))$ tenemos $-\langle M, \beta(M) \rangle = \cosh d = 1 + 2 \sinh^2\left(\frac{1}{2}d\right)$ por 4.2.4, entonces en el triángulo rectángulo formado tenemos que

$$\frac{\sinh\left(\frac{1}{2}d\right)}{\sin \theta} = \frac{\sinh\left(\frac{1}{2}T\right)}{\sin 90^\circ}$$

$$\sinh\left(\frac{1}{2}d\right) = \sin \theta \sinh\left(\frac{1}{2}T\right)$$

sustituyendo en (*) obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}) &= \cosh^2\left(\frac{1}{2}T\right) - \sinh^2\left(\frac{1}{2}T\right)(1 + 2\sinh^2\theta \sinh^2\left(\frac{1}{2}T\right)) \\ &= 1 - 2\sinh^2\theta \sinh^4\left(\frac{1}{2}T\right) \end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado. \blacksquare

Corolario 5.6 Sean α, β dos traslaciones con la misma longitud de traslación T y cuyos ejes a y b se intersectan en un ángulo $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Entonces el conmutador $\beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}$ no es rotación si y sólo si $\sinh^2\left(\frac{1}{2}T\right) \sinh^2\theta \geq 1$.

Demostración:

Se sigue inmediatamente del hecho de que el conmutador no es una rotación, entonces su traza es mayor o igual a cuatro. \blacksquare

5.4 Teorema de Jacob Nielsen

En esta sección clasificaremos los grupos discretos de transformaciones no elementales, por medio del teorema más importante del capítulo, el cual se debe a Nielsen.

Antes de comenzar hagamos algunas observaciones y convenciones que nos serán útiles para la demostración del teorema. Para esto es conveniente representar el plano hiperbólico por el interior E del círculo unitario del plano complejo \mathbb{C} , aquí los puntos al infinito son los puntos del círculo unitario. Los dos puntos al infinito de una geodésica serán llamados **puntos finales**. Dos geodésicas que se intersectan en E son llamadas concurrentes, dos geodésicas que tienen un punto final común son llamadas paralelas y dos geodésicas sin puntos en común, es decir con una geodésica normal común son llamadas divergentes.

Los tres tipos de curvas análogas a los círculos euclidianos, en esta geometría son conocidas como: círculos (con centro en E), horociclos (con centro en el infinito) e hiperciclos (los puntos equidistantes a una geodésica).

Algo acerca de las isometrías σ de este modelo: las rotaciones son determinadas por su centro c_σ en E y su ángulo de rotación φ_σ , las horolaciones son determinadas por su centro c_σ en ∂E , un punto $x \neq c_\sigma$ y su imagen $\sigma(x)$ y una traslación es determinada por su eje A_σ y el desplazamiento λ_σ , es decir la distancia en que un punto del eje es desplazado. Además si σ es una de las transformaciones anteriores y τ cualquier isometría entonces $\tau\sigma\tau^{-1}$ es del mismo tipo que σ , y en el caso de una rotación o una traslación tenemos que

$$\varphi_{\tau\sigma\tau^{-1}} = \varphi_\sigma, \quad \lambda_{\tau\sigma\tau^{-1}} = \lambda_\sigma$$

En los primeros dos casos el punto común p de r, s es el centro de $\sigma\tau$; el vector normal de N en m , el punto medio de ab bisecta el ángulo en p que es la mitad del ángulo de rotación $\varphi_{\sigma\tau}$, el cual es cero en el caso de una horolación. Entonces $azpm$ es un cuadrángulo con tres ángulos rectos y el cuarto ángulo es $\frac{1}{4}\varphi_{\sigma\tau}$ y dos lados son $\frac{1}{2}\delta$ y $\frac{1}{2}\lambda$. La trigonometría hiperbólica nos da

$$\sinh\left(\frac{1}{2}\delta\right) \sinh\left(\frac{1}{2}\lambda\right) = \cos\left(\frac{1}{4}\varphi_{\sigma\tau}\right) \leq 1$$

con igualdad sólo cuando es una horolación.

Si r, s son divergentes, la normal común es el eje $A_{\sigma\tau}$ y el segmento entre r y s es la mitad del desplazamiento $\lambda_{\sigma\tau}$. Las geodésicas $N, A_{\sigma}, r, A_{\sigma\tau}$ y la normal bisectora de ab forman un pentágono con cinco ángulos rectos y tres de sus lados son $\frac{1}{4}\lambda_{\sigma\tau}, \frac{1}{2}\delta, \frac{1}{2}\lambda$, nuevamente la trigonometría hiperbólica nos da que

$$\sinh\left(\frac{1}{2}\delta\right) \sinh\left(\frac{1}{2}\lambda\right) = \cosh\left(\frac{1}{4}\lambda_{\sigma\tau}\right) > 1$$

lo que completa la prueba del lema. ■

Lema 5.8 Sean σ y τ dos traslaciones con ejes concurrentes A_{σ} y B_{τ} , con igual desplazamiento λ . Si denotamos por φ el ángulo entre los ejes, entonces el conmutador $k = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$ es una rotación, una horolación, o una traslación de acuerdo a que

$$\text{sen } \varphi \sinh^2\left(\frac{1}{2}\lambda\right)$$

sea menor, igual o mayor a 1.

Demostración:

Sea s la intersección de A_{σ} y B_{τ} y sean r, t puntos sobre A_{σ} y B_{τ} que están a distancia $\frac{1}{2}\lambda$ de s tales que las direcciones de s a r y de t a s coinciden con las direcciones de las traslaciones σ y τ respectivamente. Ahora si r, s, t también denotan las reflexiones en esas geodésicas, tenemos

$$\sigma = rs, \quad \tau = st \Rightarrow \sigma\tau = rt, \quad \sigma^{-1}\tau^{-1} = srt s = s\sigma\tau s^{-1}$$

por lo que $\sigma\tau$ es una traslación cuyo eje es la geodésica a través de r y t y cuyo desplazamiento $\lambda_{\sigma\tau}$ es dos veces la distancia entre esos puntos. Como $\sigma^{-1}\tau^{-1}$ es obtenida de $\sigma\tau$ por conjugación tiene el mismo desplazamiento y $A_{\sigma^{-1}\tau^{-1}}$ es obtenida de $A_{\sigma\tau}$ por un semi-giro s , por lo que los ejes son divergentes y las traslaciones tienen direcciones opuestas, entonces el lema anterior puede ser aplicado a $\sigma\tau$ y $\sigma^{-1}\tau^{-1}$, lo cual nos da que k es rotación, horolación o traslación de acuerdo a que

$$\sinh \eta \sinh\left(\frac{1}{2}\lambda_{\sigma\tau}\right)$$

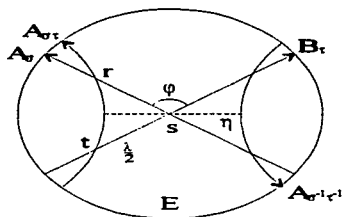


FIGURA 5.3. Traslaciones con ejes concurrentes

sea menor, igual o mayor a 1, donde η denota la altura de s en el triángulo Δrst ; por un análisis trigonométrico obtenemos que

$$\sinh \eta \sinh \left(\frac{1}{2} \lambda_{\sigma\tau} \right) = \sin \varphi \sinh^2 \left(\frac{1}{2} \lambda \right)$$

con lo que se completa la demostración. ■

Lema 5.9 Sean σ y τ dos horolaciones con centros diferentes c y d . Entonces el conmutador $k = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$ es una traslación.

Demostración:

Sea s la línea que une c y d y al mismo tiempo la reflexión en esa geodésica. Como σ y τ son horolaciones, existen r, t reflexiones tal que $\sigma = rs$ y $\tau = st$, entonces $k = rtsrts = (rts)^2$; como rts es impar tenemos que es una reflexión o una reflexión deslizada por lo que el cuadrado es la identidad o una traslación, pero el primer caso es imposible pues σ y τ no conmutan. ■

Lema 5.10 Sean σ y τ traslaciones, cuyos ejes tienen un sólo punto final en común u , una terminación. Entonces el conmutador $k = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$ es una horolación con centro u

Demostración:

Tenemos que $\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$ es una traslación con el mismo desplazamiento que σ pero en sentido opuesto, y con la misma terminación u . Los horociclos con centro u cortan iguales segmentos de los dos ejes, entonces cada horociclo con centro u es llevado en si mismo por k , pero una transformación par que lleva

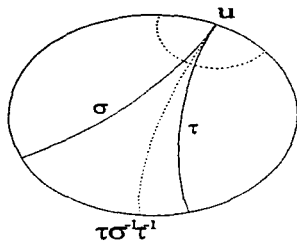


FIGURA 5.4. El conmutador de dos traslaciones con una terminación en común es una horolación

un horociclo en si mismo es una horolación con centro el del horociclo, por lo que k es una horolación con centro u . ■

Lema 5.11 Si en un grupo no elemental Γ de transformaciones pares dos ejes de traslación son paralelos, entonces el grupo contiene rotaciones.

Demostración:

Sean γ_1 y γ_2 las traslaciones que tienen ejes paralelos, es decir un punto final en común, entonces por el lema anterior el grupo contiene horolaciones. Sea k un horociclo con centro u , en donde una horolación con centro u manda k en si mismo y todos sus puntos son desplazados la misma magnitud. Sea S_u el subgrupo de Γ que consiste de todas las horolaciones con centro u y sea $x \in K$, entonces $S_u x \in K$, por lo que $S_u x$ es una sucesión de puntos equidistantes o denso en k de acuerdo a que S_u sea discreto o no en D .

En el primer caso, tomemos $g_o \in S_u$ la que tiene el menor desplazamiento con respecto a k , sea σ una traslación en Γ tal que su eje A_σ tiene a u como terminación, entonces $\sigma g_o \sigma^{-1}$ es una horolación con centro u contenido en S_u entonces $\sigma g_o \sigma^{-1}(A_\sigma) = \sigma g_o(A_\sigma)$ por lo que la geodésica $\sigma g_o(A_\sigma)$ está entre A_σ y $g_o(A_\sigma)$, entonces el desplazamiento de $\sigma g_o \sigma^{-1}$ es menor que el de g_o , lo cual es una contradicción, por lo tanto $S_u x$ es denso en k , es decir hay en S_u horolaciones con centro u con desplazamientos arbitrariamente pequeños con respecto a k .

Como Γ no tiene puntos invariantes, sea $g \in \Gamma$, tal que $g(u) \neq u$ entonces al menos una de las dos traslaciones $g\gamma_1 g^{-1}, g\gamma_2 g^{-1}$ no deja a u invariante. Así existe en Γ una traslación τ tal que $\tau(u) \neq u$.

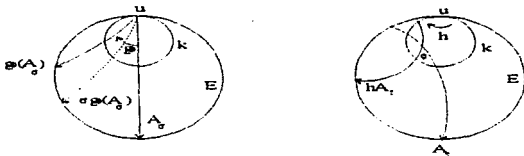


FIGURA 5.5. Demostración del lema 5.11

Sea $h \in S_u$, para un desplazamiento suficientemente pequeño de h con respecto a k , los ejes A_τ y hA_τ de las traslaciones τ y $\beta = h\tau h^{-1}$ se intersectan en un ángulo ϕ . En particular, escogemos h tal que $\sin \phi \sinh^2(\frac{1}{2}\lambda_\tau) < 1$ entonces por el lema 5.7, $\tau\beta\tau^{-1}\beta^{-1}$ es una rotación. ■

Teorema 5.5 (Nielsen) *Un subgrupo no elemental Γ de $PGL_2(\mathbb{R})$ es Fuchsiano si y sólo si el conjunto P de puntos fijos elípticos en \mathbb{H}^2 es discreto.*

Demostración:

Si Γ es grupo Fuchsiano, el resultado ya fue demostrado anteriormente.

Por la proposición 5.3 un subgrupo Γ de $PGL_2(\mathbb{R})$ es elemental si y sólo si Γ^+ lo es, por lo que podemos suponer que Γ consta solamente de transformaciones pares. Tenemos dos casos: cuando Γ tiene rotaciones y cuando Γ es libre de rotaciones.

Supongamos primero que en Γ hay rotaciones, es decir $P \neq \emptyset$ y escogamos $z \in P$; como Γ es no elemental existe $g \in \Gamma$ tal que $g(z) = w$ con $w \neq z$ y sea h la rotación con centro z , como $h(z) = z$, también $ghg^{-1}(w) = w$, por lo que $w \in P$ pues ghg^{-1} es una rotación.

La órbita $\Gamma z = \{gz : g \in \Gamma\}$ es discreta desde que es un subconjunto de P que lo es, por lo que z es aislado en su órbita. Tomemos $\Gamma_z(w) = \{g(w) : g \in \Gamma_z\}$ la órbita de w bajo Γ_z , este es un conjunto finito ya que es subconjunto discreto del círculo C con centro z que pasa por w y el cual es compacto, además $\Gamma_z(w) = \Gamma_z$ pues si $g, h \in \Gamma_z(w)$ tal que $g(w) = h(w)$, entonces $gh^{-1}(w) = w$ lo cual no puede pasar a menos de que $h = g$, luego Γ_z es finito por lo que Γ es discreto.

Ahora supongamos que Γ no tiene rotaciones; después de las reducciones que hemos hecho al teorema, tenemos que mostrar que:

Un grupo no elemental de transformaciones pares Γ sin rotaciones es discreto en \mathbb{H}^2 .

Un grupo que satisface estas condiciones no puede ser abeliano, ya que los grupos abelianos que constan de horolaciones y traslaciones, son o grupos de horolaciones con un centro en común o grupos de traslaciones con un eje en común, entonces son grupos elementales; además debe contener traslaciones, pues de lo contrario tendría sólo horolaciones, que por hipótesis no tendrían el mismo centro y el lema 5.9 nos llevaría a que contiene traslaciones.

Sea $\sigma \in \Gamma$ traslación, sea A_σ su eje y λ_σ su desplazamiento, sea $g \in \Gamma$ tal que g no conmuta con σ , por lo que $\tau = g\sigma^{\pm 1}g^{-1}$ es una traslación con el mismo desplazamiento λ_σ y con eje $A_\tau = gA_\sigma$ distinto de A_σ , por el lema 5.11 no pueden ser paralelos, pues habría rotaciones por lo que los ejes son divergentes o se intersectan

Si son divergentes, sea δ su distancia, y escojamos $+1$ ó -1 en el exponente de σ de manera que σ y τ tengan desplazamiento opuesto, y como $\sigma\tau$ no es rotación tenemos por el lema 5.7 o corolario 5.5

$$\sinh\left(\frac{1}{2}\delta\right) \sinh\left(\frac{1}{2}\lambda_\sigma\right) \geq 1 \dots (*)$$

Si son concurrentes, con φ el ángulo de intersección, como el conmutador no es rotación, por el lema 5.8 o corolario 5.6 tenemos que

$$\sin \varphi \sinh^2\left(\frac{1}{2}\lambda_\sigma\right) \geq 1 \dots (**)$$

y primero apliquemos las desigualdades para una g fija y variando σ : sea A un eje para una traslación de Γ y consideremos el subgrupo abeliano de Γ de traslaciones con eje A , denotemoslo por S_A ; sea $g \in \Gamma \setminus S_A$, por lo que g no conmuta con estos elementos, entonces $gA \neq A$, así tienen una distancia δ o se intersectan en un ángulo φ , por lo que las desigualdades (*), (**) se aplican.

Ahora cuando σ varía en S_A , donde δ o φ permanecen constantes, nos da una cota inferior positiva para los desplazamientos de elementos de S_A distintos de la identidad, entonces S_A es discreto, y tomemos λ_0 el menor desplazamiento de S_A .

Las mismas desigualdades las vamos a aplicar para σ fijo de S_A y g variando en Γ/S_A , es decir en los representantes g_1, g_2, \dots de las clases laterales de S_A en G . Sea $\sigma_\nu = g_\nu \sigma g_\nu^{-1}$ una traslación con eje variando en todos los ejes de las clases de equivalencia de ΓA de A y los desplazamientos de σ_ν son λ_σ , por lo que las desigualdades se aplican, es decir existe una cota inferior positiva para la distancia δ de dos ejes divergentes o para el ángulo φ de intersección de dos ejes concurrentes, por lo que estos ejes no se acumulan en D .

Sea $x \in A$, los puntos de la órbita Γx están en los ejes $g_\nu(A)$; sea $\sigma \in S_A$ tal que el desplazamiento de σ es λ_0 , entonces sobre cada uno de esos ejes $g_\nu(A)$, los puntos de Γx forman una sucesión de puntos con distancias iguales a λ_0 .

De esta manera, el círculo C con centro x y radio $\frac{1}{2}\lambda$ no puede contener más que un punto de tal sucesión en su interior. Así el número de puntos de Γx dentro de este círculo es a lo más igual al número de ejes $g_\nu(A)$ que cortan al

círculo, este número es finito ya que no se acumulan en D , por lo que x no es punto de acumulación de Γx , y entonces Γ es discreto. ■

5.5 Cúspides

En esta última sección del capítulo estudiaremos la acción de un grupo Fuchsiano Γ en $\partial\mathbb{H}^2$. Veamos antes un resultado preliminar.

Lema 5.12 Sean $A, B \in GL_2(\mathbb{R})$ con $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $c \neq 0$, $\det B = \pm 1$. Si A y B generan un grupo Fuchsiano de $PGl_2(\mathbb{R})$ entonces $|c| \geq 1$

Demostración:

Vamos a suponer que $|c| < 1$ y consideremos la siguiente sucesión de matrices $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por $B_0 = B$ y $B_{n+1} = B_n A B_n^{-1}$. Entonces tenemos para $B_n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$, las siguientes relaciones con $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - a_n c_n & a_n^2 \\ -c_n^2 & 1 + a_n c_n \end{bmatrix}$$

con lo que obtenemos $|c_n| = |c_0|^{2^n}$ y $|a_n| \leq n + |a_0|$, $n \in \mathbb{N}$ y como $|c| < 1$ tenemos que $c_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Ahora como $h(z) = \sum z^n$ converge para $|z| < 1$, tenemos que su derivada $h'(z) = \sum n z^{n-1}$ también converge para $|z| < 1$, por lo que $n|z|^{n-1} \rightarrow 0$ para $|z| < 1$.

Luego como $|c_0| < 1$, entonces $n|c_0|^{n-1} \rightarrow 0$ y como $|c_0|^{2^n} < |c_0|^{n-1}$

$$|a_n c_n| \leq |c_n| |n + |a_0|| \leq |c_0|^{2^n} (n + |a_0|) \leq n|c_0|^{n-1} + |c_0|^{n-1} |a_0| \rightarrow 0$$

por lo tanto $a_n c_n \rightarrow 0$, de donde $a_{n+1} = 1 - a_n c_n \rightarrow 1$ y $d_{n+1} = 1 + a_n c_n \rightarrow 1$, de donde $B_n \rightarrow A$.

Si α y β son los representantes de A y B que generan el subgrupo discreto de $PGl_2(\mathbb{R})$, entonces $\beta_n = \alpha$ para alguna n grande, por lo que β_n fija ∞ , entonces

$$\infty = \alpha(\infty) = \beta_{n-1} \alpha \beta_{n-1}^{-1}(\infty) \Rightarrow \alpha \beta_{n-1}(\infty) = \beta_{n-1} \alpha(\infty) = \beta_{n-1}(\infty)$$

entonces α fija $\beta_{n-1}(\infty)$, por lo tanto $\beta_{n-1}(\infty) = \infty$, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ tenemos que β_n fija ∞ por lo que también lo hace β implicando que $c = 0$ lo cual es una contradicción, por lo tanto $|c| \geq 1$. ■

Definición Un elemento $\gamma \in \Gamma$ es parabólico si $\gamma \neq id$ y $tr^2(\gamma) = 4$ o equivalentemente si γ tiene un único punto fijo $s \in \partial\mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Los puntos fijos de los elementos parabólicos son llamados cúspides.

El estabilizador de una cúspide está formado por horolaciones y reflexiones en geodésicas con terminación esa cúspide.

Un horodisco es una región en \mathbb{H}^2 acotada por un horociclo, es decir por órbitas en \mathbb{H}^2 del grupo de horolaciones con centro s .

Proposición 5.13 Para una cúspide $s \in \partial\mathbb{H}^2$ de un grupo Fuchsiano Γ existe un horodisco D con centro $s \in \partial\mathbb{H}^2$ tal que $\gamma(D) \cap D = \emptyset$, $\forall \gamma \in \Gamma - \Gamma_s$.

Demostración:

Trabajaremos en el semiplano superior de Poincaré y tomaremos $s = \infty$, por lo que el estabilizador Γ_s^+ es generado por $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Sea $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ que represente a $\beta \in \Gamma - \Gamma_s$, entonces $c \neq 0$. Como $A, B \in \Gamma$, el subgrupo generado por estos dos elementos es discreto, por el lema anterior concluimos que $|c| \geq 1$.

Tenemos para $z \in \mathbb{H}^2$ y $\beta \in \Gamma \setminus \Gamma_\infty$ que $\beta z = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d}$ por lo que $\beta(x+iy) = \frac{a(x+iy)+b}{c(x+iy)+d}$, entonces $Im(\beta z) = \frac{y}{(cx+d)^2 + (cy)^2} \leq yc^{-2}y^{-2} \leq y^{-1}$, por tanto $ImzIm(\beta z) \leq 1$.

Consideremos entonces $D = \{z : Imz > 1\}$ el horodisco acotado por el horociclo generado por $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, entonces si $y \in D, y > 1$, por lo tanto $y^{-1} < 1$ y entonces $Im(\beta z) \leq 1$ con $\beta \in \Gamma - \Gamma_\infty$. ■

Proposición 5.14 Sea $s \in \partial\mathbb{H}^2$ una cúspide para un grupo Fuchsiano Γ de isometrías de \mathbb{H}^2 . Para cualquier subconjunto compacto K de \mathbb{H}^2 existe un horodisco D con centro $s \in \partial\mathbb{H}^2$ tal que $\gamma(D) \cap K = \emptyset$ para $\gamma \in \Gamma$.

Demostración:

Nuevamente trabajaremos en el semiplano de Poincaré y con $s = \infty$; como K es compacto existe $r > 1$ tal que K está contenido en la región acotada por $Imz = r$ y $Imz = r^{-1}$. Para $\gamma \in \Gamma_s$ tenemos que $\gamma(D) = D$ con $D = \{z \in \mathbb{H}^2 : Imz > r\}$ por lo que $\gamma(D) \cap K = \emptyset$ y para $\gamma \in \Gamma - \Gamma_s$, tenemos que $Im(\gamma(z)) \leq y^{-1}$ donde $y = Imz$, por lo tanto $y^{-1} \leq r^{-1}$ y entonces $\gamma(D) \cap K = \emptyset$. ■

Corolario 5.7 Dadas dos cúspides $s, t \in \partial\mathbb{H}^2$ en diferentes órbitas, para cualquier horodisco E con centro t existe un horodisco D con centro s tal que $\gamma(D) \cap E = \emptyset$, para toda $\gamma \in \Gamma$.

Demostración:

Supongamos que $s = \infty$ y sea K compacto de ∂E (K puede ser todo ∂E) tal que $\Gamma_s K = \partial E$. Por la proposición anterior existe un horodisco D con centro s tal que $D \cap \Gamma K = \emptyset$ luego $\gamma(D) \cap K = \emptyset$ por lo que $\gamma(D) \cap \partial E = \emptyset$.

Sea $\gamma \in \Gamma$, como D es conexo, $\gamma(D)$ es conexo por lo que $\gamma(D) \subset E$ o $\gamma(D) \cap E = \emptyset$. Supongamos que tenemos el primer caso, como $D = \{z \in \mathbb{H}^2 : \text{Im}[z] > r\}$ para alguna $r > 0$ y E es un círculo euclidiano tangente al eje x en t , $\gamma(\infty) = t$ pues $\gamma(\infty)$ debe ser una cúspide en E , lo cual es absurdo pues s, t están en diferentes órbitas, luego para toda $\gamma \in \Gamma$, $\gamma(D) \cap E = \emptyset$. ■

Corolario 5.8 Si Γ es un grupo Fuchsiano de $PSL_2(\mathbb{R})$ entonces para cada compacto K de \mathbb{H}^2 , el conjunto $\{\gamma \in \Gamma : \gamma(K) \cap K \neq \emptyset\}$ es finito.

Sea C el conjunto de cúspides de Γ , es decir los puntos fijos de elementos parabólicos en Γ . Si $\infty \in C$, existe $k > 0$ tal que $\gamma(z) = z + k$ pertenece a Γ , pues $\gamma(\infty) = \infty$. Si $s \in C \cap \mathbb{R}$, entonces una transformación $\gamma \in \Gamma$ que fija a s tiene la forma

$$\gamma(z) = \frac{(1 + ks)z - ks^2}{kz + (1 - ks)}$$

Si $s \in C$ existe $\gamma \in \Gamma$ con $\gamma(s) = s$, entonces para cualquier otro elemento $\sigma \in \Gamma$ se tiene que $\sigma(s) \in C$, ya que $\sigma\gamma\sigma^{-1}$ es un elemento parabólico de Γ (la traza es invariante bajo conjugación) que fija a $\sigma(s)$.

Ahora consideremos el espacio

$$(\mathbb{H}^2)^* = \mathbb{H}^2 \cup C$$

es decir \mathbb{H}^2 unión las cúspides de Γ el cual depende de Γ y acordamos que $(\mathbb{H}^2)^* = \mathbb{H}^2$ si $C = \emptyset$, es decir cuando Γ no tiene elementos parabólicos. Además por la invariancia de la traza bajo conjugación, tenemos una acción bien definida de Γ en $(\mathbb{H}^2)^*$ inducida de la de Γ en \mathbb{H}^2 .

Ahora demos una topología a $(\mathbb{H}^2)^*$, llamada la topología **Horocíclica**, definiendo una base local de vecindades abiertas para cada punto:

- para un punto $z \in \mathbb{H}^2$, consideremos las vecindades usuales de z en \mathbb{H}^2 , como subespacio de \mathbb{C} ,
- si $\infty \in C$ definimos las vecindades abiertas básicas de $s = \infty$ como los conjuntos $\{\infty\} \cup U$ con $U = \{z \in \mathbb{H}^2 : \text{Im}z > k > 0\}$ para todo $k > 0$,
- si $s \in C$ y $s \neq \infty$, las vecindades abiertas básicas de s serán de la forma $\{s\} \cup U$ con U disco abierto contenido en \mathbb{H}^2 tangente a \mathbb{R} en el punto s .

Claramente la topología generada por este sistema de vecindades locales es Hausdorff, además observamos que $(\mathbb{H}^2)^* \setminus \{\infty\}$ es un subespacio del Plano de Moore, de donde $\mathbb{R} \cap C$ es subespacio discreto de $(\mathbb{H}^2)^*$.

A pesar de que \mathbb{H}^2 es localmente compacto, tenemos que $(\mathbb{H}^2)^*$ no lo es, pues ninguna cúspide tiene una vecindad compacta. Para esto basta ver que

la cerradura de una vecindad básica de $s \in C$ nunca es un compacto. Consideremos U vecindad básica de $s \in \mathbb{R}$, es decir un disco abierto de radio $r > 0$ union s , y consideremos V el disco abierto de radio $\frac{1}{2}r$ tangente a \mathbb{R} en s unión s , entonces $C \setminus (U \cap V)$ es un conjunto no cerrado de \mathbb{H}^2 por lo que no es compacto.

Considerando la acción Γ en \mathbb{H}^2 , tenemos el espacio \mathbb{H}^2/Γ de órbitas y la proyección natural

$$\pi : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2/\Gamma$$

con la cual dotamos al espacio de órbitas con la topología cociente por π , con esta topología π resulta ser una función abierta; de la misma forma consideremos la proyección natural de

$$\pi : (\mathbb{H}^2)^* \rightarrow (\mathbb{H}^2)^*/\Gamma$$

Lema 5.13 *Dados dos puntos $z, w \in \mathbb{H}^2$ no Γ -equivalentes, entonces existen vecindades U de z y V de w tal que $g(U) \cap V = \emptyset, \forall g \in \Gamma$.*

Demostración:

Sean K, L vecindades compactas de z y w respectivamente, por el teorema 5.4 el conjunto $B = \{g \in \Gamma : g(K) \cap L \neq \emptyset\}$ es finito digamos g_1, \dots, g_n . Como z, w no son equivalentes, tenemos que $\forall i$ $g_i(z) \neq w$ y como \mathbb{H}^2 es un espacio Hausdorff, podemos encontrar vecindades ajenas U_i de $g_i(z)$ y V_i de w con $U_i \cap V_i = \emptyset$, entonces $U = K \cap g_1^{-1}(U_1) \cap \dots \cap g_n^{-1}(U_n)$ y $V = L \cap V_1 \cup \dots \cup V_n$, son las vecindades que resuelven el problema. ■

Una consecuencia de la proposición 5.14 es la siguiente:

Corolario 5.9 *Si \mathbb{H}^2/Γ es compacto, entonces Γ no contiene horolaciones.*

Demostración:

Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una cubierta abierta de discos de \mathbb{H}^2 , entonces como \mathbb{H}^2/Γ es compacto existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tal que $\mathbb{H}^2/\Gamma \subset \cup_{i=1}^n \pi(U_{\alpha_i})$. De esta manera obtenemos que un conjunto finito de discos abiertos de \mathbb{H}^2 que intersectan a todas las órbitas, por lo que existe un compacto que intersecta a todas las órbitas, por la proposición 5.14 el grupo no puede tener horolaciones. ■

Por los resultados anteriores \mathbb{H}^2/Γ es Hausdorff y si \mathbb{H}^2/Γ es compacto entonces $C = \emptyset$. Ahora nos interesaremos en el caso $C \neq \emptyset$. Siempre podemos suponer que $\infty \in C$, pues en caso contrario se puede considerar el grupo conjugado $\Sigma = \sigma_0 \Gamma \sigma_0^{-1}$ con s_0 cúspide de Γ y con $\sigma_0 = \frac{z-s_0}{z-\bar{s}_0}$, entonces si $\gamma \in \Gamma$ es parabólico con cúspide en s_0 , tenemos que $\gamma_1 = \sigma_0 \gamma \sigma_0^{-1}$ es un elemento parabólico del grupo conjugado Σ con $\gamma_1(\infty) = \infty$. Para $\infty \in C$ existe $\tau_k \in \Gamma$ de la forma $\tau_k(z) = z + k$ para alguna $k > 0$ y τ_k genera al grupo estabilizador Γ_∞ del ∞ .

Lema 5.14 *Para cada cúspide s de Γ existe vecindad U de $(\mathbb{H}^2)^*$ tal que $\Gamma_s = \{\sigma \in \Gamma : \sigma(U) \cap U \neq \emptyset\}$.*

Demostración:

Sean $s = \infty$ y $V = \{z \in \mathbb{H}^2 : Imz > 1\}$ entonces si $\sigma \in \Gamma \setminus \Gamma_\infty$ y $z \in V$ implica $Im(\sigma(z)) < 1$ luego existe $r > 1$ tal que $U = \{z \in \mathbb{H}^2 : Imz > r\}$ tiene tal propiedad. ■

Teorema 5.6 *El espacio cociente $(\mathbb{H}^2)^*/\Gamma$, con la topología definida anteriormente, es un espacio de Hausdorff.*

Demostración:

Se sabe que \mathbb{H}^2/Γ es de Hausdorff, entonces basta separar dos cúspides no Γ -equivalentes o un punto en \mathbb{H}^2 y una cúspide. Para un punto en \mathbb{H}^2 y una cúspide tenemos el resultado por la proposición 5.14.

Entonces consideremos el caso de dos cúspides $s, t \in C$, no Γ -equivalentes, y supongamos que $s = \infty$, entonces Γ_∞ es generado por matrices de la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ con } h \in \mathbb{R}.$$

Consideremos los conjuntos

$$L = \{z \in \mathbb{C} : Imz = u\}$$

$$K = \{z \in L : 0 \leq Rez \leq |h|\}$$

$$V = \{z \in (\mathbb{H}^2)^* : Imz > u\}$$

con $u > 0$. Como K es compacto existe U vecindad de t tal que $K \cap \Gamma U = \emptyset$ y supongamos que ∂U es un círculo tangente al eje real \mathbb{R} . Supongamos que existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma(U) \cap V \neq \emptyset$, como $\gamma(t) \neq \infty$ la frontera de $\gamma(U)$ es un círculo tangente al eje real, de donde $\gamma(U) \cap L \neq \emptyset$, entonces $\gamma(U)$ interseca a alguna traslación de K por un elemento de Γ_∞ , es decir existe $\delta \in \Gamma_\infty$ tal que $\gamma(U) \cap \delta(K) \neq \emptyset$, de donde $\delta^{-1}\gamma(U) \cap K \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción, por lo tanto $\forall \gamma \in \Gamma, \gamma(U) \cap V = \emptyset$. Y el resultado se sigue tomando las imágenes de estas vecindades bajo π . ■

Proposición 5.15 *El espacio cociente $(\mathbb{H}^2)^*/\Gamma$ es localmente compacto.*

Demostración:

Nuestro propósito es mostrar que si s es una cúspide de Γ , entonces $\pi(s)$ tiene una vecindad compacta, tomemos $s = \infty$. Por el lema 5.14, existe vecindad $U = \{z \in (\mathbb{H}^2)^* : Imz \geq r\}$ tal que U/Γ_∞ lo podemos identificar con $\pi(U)$. Si $\begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ es un generador de Γ_∞ , vemos que $\pi(U)$ coincide con la imagen del conjunto $\{z \in U : z = \infty, 0 \leq Rez \leq h\}$ bajo π , y este conjunto es compacto por lo que $\pi(U)$ es un compacto. ■

Proposición 5.16 Si $(\mathbb{H}^2)^*/\Gamma$ es compacto entonces el número de cúspides no Γ -equivalentes es finito.

Demostración:

Por el lema 5.1, para cada $z \in \mathbb{H}^2$, existe U_z vecindad de z en \mathbb{H}^2 tal que ningún punto de esta vecindad, excepto tal vez z es fijado por algún elemento de Γ . Por el lema 5.14 para cada $s \in C$ podemos encontrar vecindad U_s de s tal que ningún elemento de Γ fija algún elemento de esta vecindad excepto s . Considerando π la proyección canónica, como $(\mathbb{H}^2)^*/\Gamma$ es compacto, podemos cubrirlo con un número finito de vecindades de la forma $\pi(U_z) \circ \pi(U_s)$, entonces el número de puntos en $\pi(C)$ es a lo más el número de vecindades $\pi(U_s)$, que es finito, es decir el número de cúspides no Γ -equivalentes es finito. ■

Y en el caso que $(\mathbb{H}^2)^*/\Gamma$ es compacto, se dice que es la compactación Horocflica del espacio cociente \mathbb{H}^2/Γ .

Teorema 5.7 El espacio $X = (\mathbb{H}^2)^*/\Gamma$ es compacto si y sólo si existe K subconjunto compacto de \mathbb{H}^2 y un número finito de vecindades básicas D_1, \dots, D_r de cúspides s_1, \dots, s_r para Γ tal que cualquier Γ -órbita en \mathbb{H}^2 interseca a $K \cup D_1 \cup \dots \cup D_r$.

Demostración:

⇐ Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una cubierta abierta de $(\mathbb{H}^2)^*/\Gamma$ con $(\mathbb{H}^2)^* = \bigcup_{\alpha \in I} \pi^{-1}(U_\alpha)$. Como K es compacto solo existe un número finito de elemento s de $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$ tal que $\gamma_i(K) \cap K \neq \emptyset$, consideremos entonces $x_i \in \gamma_i(K)$, entonces es claro que si tomamos las vecindades U_{α_i} para $i = \{1, \dots, m\}$, tal que $\pi(x_i) \in U_{\alpha_i}$ y las vecindades U_{α_j} tal que $\pi(s_j) \in U_{\alpha_j}$ tenemos que

$$(\mathbb{H}^2)^*/\Gamma = \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} \cup \bigcup_{j=1}^r U_{\alpha_j}$$

por lo que el cociente es compacto.

⇒ Sea U_x una vecindad básica de x (disco abierto) en $(\mathbb{H}^2)^*$, es decir $(\mathbb{H}^2)^* = \bigcup_{x \in (\mathbb{H}^2)^*} U_x$. Como $\pi : (\mathbb{H}^2)^* \rightarrow (\mathbb{H}^2)^*/\Gamma$ es abierta, tenemos una cubierta abierta del cociente. Por hipótesis es compacto por lo que existen $w_1, \dots, w_n \in (\mathbb{H}^2)^*$ tal que

$$(\mathbb{H}^2)^*/\Gamma = \bigcup_{i=1}^n \pi(U_{w_i})$$

De estos puntos sean w_1, \dots, w_r con $r < n$, cúspides, con sus correspondientes vecindades básicas $U_{w_i} = D_i$; además podemos encontrar un compacto que contenga a las vecindades de w_{r+1}, \dots, w_n , pues son un número finito de discos abiertos en \mathbb{H}^2 . ■

Ejemplo 5.4 Consideramos el grupo modular $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z})$ que es subgrupo de $PSL_2(\mathbb{R})$, el cual es discreto y tiene la propiedad de que sus cúspides son $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. Claramente $s = \infty$ es cúspide pues es punto fijo del elemento parabólico $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ de Γ .

Ahora si $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es un elemento parabólico, con punto fijo $s \in \mathbb{R}$, tenemos que $cs^2 + (d-a)s - b = 0$ con $c \neq 0$ y como el discriminante se anula tenemos que $s \in \mathbb{Q}$. Ahora considerando $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, con $p, q \in \mathbb{Z}$ y $(p, q) = 1$, entonces existen $u, t \in \mathbb{Z}$, tal que $pt - qu = 1$, de donde $\begin{bmatrix} p & u \\ q & t \end{bmatrix} \in \Gamma$ y cumple que $\sigma(\infty) = \frac{p}{q}$ de donde todas las cúspides son equivalentes al punto $s = \infty$.

Entonces $(\mathbb{H}^2)^*$ tiene un número infinito de cúspides, con $\mathbb{C} \setminus \{\infty\}$ un subespacio discreto. El espacio cociente

$$(\mathbb{H}^2)^*/PSL_2(\mathbb{Z})$$

es compacto por el teorema anterior.

5.6 El espacio cociente como superficie de Riemann

Sea \mathbb{H}^2/Γ el espacio cociente, es decir el espacio de Γ -órbitas en \mathbb{H}^2 y consideremos la proyección natural $\pi: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2/\Gamma$ dada por $\pi(z) = \Gamma z$.

Teorema 5.8 Sea Γ un grupo Fuchsiano de $PSL_2(\mathbb{R})$, entonces \mathbb{H}^2/Γ es una superficie de Riemann conexa.

Demostración:

Sean $w \in \mathbb{H}^2$ y $\delta(w) = \min\{d(w, gw) : g \in \Gamma \setminus \{id\}\}$, $\delta(w) > 0$ ya que Γ actúa de forma discreta en la órbita Γw . Sea W_w el disco hiperbólico de centro w y radio $\frac{\delta(w)}{2}$, como Γ actúa propiamente discontinuamente en \mathbb{H}^2 , entonces si para alguna $T \in \Gamma$, $W_w \cap T(W_w) \neq \emptyset$ se deberá tener que $T(w) = w$, además para cualquier $S \in \Gamma$ isometría de \mathbb{H}^2 y para $y = S(w)$ es claro que $W_y = S(W_w)$.

Luego tenemos que si $W_w \cap T(W_w) \neq \emptyset$ para alguna $T \in \Gamma$, entonces tenemos que $T(w) = w$, por lo que $T = id$ o bien w es punto fijo elíptico de Γ y entonces W_w no contiene puntos fijos elípticos de Γ diferentes de w .

Sea π_w la restricción de π a W_w , entonces π_w es continua y abierta por ser π continua, abierta y W_w abierto.

Si $m(w)$ el orden del estabilizador de w en Γ , entonces $m(w) = 1$ a menos de que w sea un punto fijo elíptico de Γ .

Definamos

$$f_w: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{C}, f_w(z) = \left(\frac{z-w}{z-\bar{w}} \right)^{m(w)}$$

como $h(z) = \frac{z-w}{z-\bar{w}} \in \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ transforma de manera homeomorfa y analítica \mathbb{H}^2 sobre D el disco unitario, tenemos $f_w(z)$ es analítica, abierta y $f_w(w) = 0$, por lo que $f_w(W_w)$ es un abierto de D con $0 \in f_w(W_w)$.

Sea T una transformación elíptica con punto fijo w en \mathbb{H}^2 y sea $\varphi(z) = \frac{z-w}{z-\bar{w}} \in \text{PSL}_2(\mathbb{C})$, entonces $\varphi T \varphi^{-1}$ es una transformación elíptica que fija 0 y ∞ , por lo que es de la forma $U_\alpha(z) = \alpha z$ con $\alpha^{m(w)} = 1$, es decir

$$\varphi T(z) = U_\alpha(\varphi(z))$$

y entonces

$$\frac{T(z) - w}{T(z) - \bar{w}} = \alpha \frac{z - w}{z - \bar{w}}$$

donde α es una $m(w)$ -ésima raíz de la unidad.

Ahora podemos ver que $f_w(z_1) = f_w(z_2)$ si y sólo si $z_2 = V_1(z_1)$ donde $V_1 \in \Gamma$ es un elemento elíptico que fija w , esto ya que $\left(\frac{z_2 - w}{z_2 - \bar{w}}\right)^{m(w)} = \left(\frac{z_1 - w}{z_1 - \bar{w}}\right)^{m(w)}$ entonces $\left(\frac{z_2 - w}{z_2 - \bar{w}}\right) = \alpha \left(\frac{z_1 - w}{z_1 - \bar{w}}\right) = \left(\frac{V(z_1) - w}{V(z_1) - \bar{w}}\right)$ con $V(w) = w$ es decir $V(z_1) = z_2$.

Ahora estamos listos para construir el atlas, para cada $w \in \mathbb{H}^2$, tomemos W_w el disco hiperbólico de centro w y radio $\frac{\delta(w)}{2}$ con $\delta(w)$ definida anteriormente y las cartas del atlas serán $\{\pi_w(W_w), \Phi_w = f_w \circ \pi_w^{-1}\}$. Ya vimos por ser π_w abierta que $\pi_w(W_w)$ es un abierto en \mathbb{H}^2/Γ . Veamos ahora que $\Phi_w : \pi_w(W_w) \rightarrow f_w(W_w)$ es homeomorfismo para cada $w \in \mathbb{H}^2$.

Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} W_w & \xrightarrow{f_w} & f_w(W_w) \\ \pi_w \downarrow & \nearrow \Phi_w & \\ \pi_w(W_w) & & \end{array}$$

Si suponemos que w es un punto fijo elíptico de Γ , y si $T \in \Gamma$ con $W_w \cap T(W_w) \neq \emptyset$, entonces $T(w) = w$, así $\pi_w(z_1) = \pi_w(z_2)$ si y sólo si $z_2 = V_1(z_1)$ para algún elemento $V_1 \in \Gamma$ con $V_1(w) = w$ y esto si y sólo si $f_w(z_1) = f_w(z_2)$, de donde tenemos que la función $\Phi_w = f_w \pi_w^{-1}$ está bien definida, ya que $\Phi_w[z] = f_w \pi_w^{-1}[z] = f_w(z)$.

Veamos que Φ_w es inyectiva. Si $\Phi_w[z_1] = \Phi_w[z_2]$, entonces $f_w(z_1) = f_w(z_2)$, es decir $z_2 = V_1(z_1)$ con $V_1 \in \Gamma$ que fija a w , un elemento elíptico, entonces $[z_2] = [V_1(z_1)] = [z_1]$, para obtener que Φ_w es inyectiva, además como π_w

y f_w son abiertas y continuas, tenemos que $\Phi_w : \pi_w(W_w) \rightarrow f_w(W_w)$ es un homeomorfismo.

Si w no es un punto fijo elíptico tenemos que $\pi_w^{-1} : \pi_w(W_w) \rightarrow W_w$, es un homeomorfismo, ya que la restricción π_w de π en W_w es inyectiva, pues si $x, y \in W_w$ con $\Gamma x = \Gamma y$ implica que existe $\sigma \in \Gamma$ tal que $\sigma(x) = y$, por lo que $\sigma(W_w) \cap W_w \neq \emptyset$, entonces $\sigma(w) = w$ y esto si y sólo si $\sigma = id$; ahora como $m(w) = 1$, tenemos que f_w es también un homeomorfismo, entonces la composición Φ_w lo es. Así \mathbb{H}^2/Γ es una superficie y $\{\pi_w(W_w), \Phi_w\}$ es un atlas definido en \mathbb{H}^2/Γ .

Solo nos falta ver que el atlas es analítico.

Supongamos que $\pi_q(W_q) \cap \pi_r(W_r) \neq \emptyset$ y considere el homeomorfismo

$$\Phi_r \Phi_q^{-1} : \Phi_q(\pi_q(W_q) \cap \pi_r(W_r)) \rightarrow \Phi_r(\pi_q(W_q) \cap \pi_r(W_r))$$

dado por $\Phi_r \Phi_q^{-1} = (f_r \pi_r^{-1} \pi_q) f_q^{-1}$ entonces

$$(f_r \pi_r^{-1} \pi_q)(z) = f_r \pi_r^{-1}[z] = f_r T(z)$$

para alguna $T \in \Gamma$, así $f_r \pi_r^{-1} \pi_q : \mathbb{H}^2 \rightarrow D$ es analítica. Ahora f_q^{-1} es analítica excepto en 0 cuando $m(q) > 1$. Salvo esta excepción $\Phi_r \Phi_q^{-1}$ es analítica. Entonces la función es continua y analítica excepto en 0, de donde es una singularidad removible y por lo tanto también es analítica en este punto. ■

Aun más interesante, podemos hacer lo anterior no sólo para puntos elípticos sino también para puntos fijos parabólicos.

Corolario 5.10 Sea Γ un grupo Fuchsiano de $PSL_2(\mathbb{R})$, entonces $(\mathbb{H}^2)^*/\Gamma$ es una superficie de Riemann.

Demostración:

Sólo tenemos que definir el atlas para las cúspides de Γ . Sean s una cúspide de Γ , U la vecindad de s tal que $\Gamma_s = \{\gamma \in \Gamma : \gamma(U) \cap U\}$ y $\rho \in PSL_2(\mathbb{R})$ tal que $\rho(s) = \infty$ entonces

$$\rho \Gamma_s \rho^{-1} = \left[\begin{array}{cc} 1 & h \\ 0 & 1 \end{array} \right]^m : m \in \mathbb{Z}$$

donde $h > 0$, entonces podemos definir un homeomorfismo p de U/Γ en un subconjunto abierto de \mathbb{C} por $p(\varphi(z)) = e^{\frac{2\pi i \rho(z)}{h}}$, luego incluimos $(U/\Gamma, p)$ en nuestro atlas. ■

5.7 Dominios Fundamentales

Definición Un dominio fundamental para un grupo Γ de isometrías de \mathbb{H}^2 es un conjunto abierto U de \mathbb{H}^2 tal que U y $\sigma(U)$ son ajenos para todo elemento $\sigma \in \Gamma$ diferente de la identidad y tal que cada Γ -órbita interseca a \bar{U} .

Por ejemplo tenemos que el dominio fundamental para el grupo modular $PSL_2(\mathbb{Z})$, es la región acotada por las tres geodésicas $Re[z] = \frac{1}{2}$, $Re[z] = -\frac{1}{2}$ y $|z| = 1$ en \mathbb{H}^2 .

5.7.1 DOMINIOS LOCALMENTE FINITOS

Definición Sea Γ un grupo Fuchsiano de isometrías de \mathbb{H}^2 . Decimos que $P \subset \mathbb{H}^2$ es un dominio fundamental localmente finito si para cada $z \in \mathbb{H}^2$ existe vecindad de z que interseca a $\sigma(P)$ solo para un número finito de $\sigma \in \Gamma$.

Proposición 5.17 Sea $P \subset \mathbb{H}^2$ dominio fundamental localmente finito para Γ grupo Fuchsiano de \mathbb{H}^2 . La proyección canónica

$$p: \bar{P}/\Gamma \rightarrow \mathbb{H}^2/\Gamma$$

inducida por la inclusión $\iota: \bar{P} \rightarrow \mathbb{H}^2$, es un homeomorfismo.

Demostración:

Como $\bar{P}/\Gamma = \{\Gamma x \cap \bar{P} : x \in \bar{P}\}$, la función p está definida por $p(\Gamma x \cap \bar{P}) = \Gamma x$; si $x, y \in \bar{P}$ y $\Gamma x = \Gamma y$ entonces $\Gamma x \cap \bar{P} = \Gamma y \cap \bar{P}$ de donde p es inyectiva. Como P es dominio fundamental, cada órbita lo interseca por lo que p es sobre, entonces p es biyección.

Ahora veamos que la función p es continua y abierta; para esto consideremos $\pi_*: \bar{P} \rightarrow \bar{P}/\Gamma$ la proyección canónica, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \bar{P} & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{H}^2 \\ \pi_* \downarrow & & \downarrow \pi \\ \bar{P}/\Gamma & \xrightarrow{p} & \mathbb{H}^2/\Gamma \end{array}$$

Sea $U \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ abierto, entonces $\pi^{-1}(U)$ es abierto en \mathbb{H}^2 , por lo tanto $\iota^{-1}(\pi^{-1}(U))$ es abierto en $\bar{P} \dots (*)$.

Queremos ver que $p^{-1}(U)$ es abierto en \tilde{P}/Γ , para esto basta ver que $\pi_*^{-1}(p^{-1}(U))$ es abierto en \tilde{P} , pero

$$\pi_*^{-1}(p^{-1}(U)) = (p\pi_*)^{-1}(U) = (\pi\iota)^{-1}(U) = \iota^{-1}(\pi^{-1}(U))$$

es abierto en \tilde{P} por (*), de donde p es continua.

Sea $U \subset \tilde{P}/\Gamma$ abierto, como π_* es sobre y continua existe V abierto de \mathbb{H}^2 tal que $\pi_*(\tilde{P} \cap V) = U$. Sea $W = \cup_{g \in \Gamma} g(\tilde{P} \cap V)$, entonces $\pi(W) = \pi(\tilde{P} \cap V) = \pi(\tilde{P} \cap V) = p\pi_*(\tilde{P} \cap V) = P(U)$ entonces como π es una función abierta sólo basta ver que W es abierto en \mathbb{H}^2 .

Sea $w \in W$, como W es Γ -invariante podemos suponer que $w \in \tilde{P} \cap V$. Como P es localmente finito, existe B vecindad abierta de w tal que intersecta sólo a un número finito de Γ -imágenes de \tilde{P} , digamos $g_1(\tilde{P}), \dots, g_m(\tilde{P})$, de donde obtenemos que $B \subset g_1(\tilde{P}) \cup \dots \cup g_m(\tilde{P})$ y notamos que si $w \notin g_i \tilde{P}$ entonces $B \cap (g_i \tilde{P})^c$ es una vecindad abierta de w por lo que podemos quitar todos los $g_i \tilde{P}$ que no contengan a w , entonces $g_i^{-1}w \in \tilde{P}$, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$.

$$\pi_*(g_i^{-1}w) = \Gamma(g_i^{-1}w) \cap \tilde{P} = \Gamma w \cap \tilde{P} = \pi_*(w) \in U = \pi_*(\tilde{P} \cap V)$$

por lo que $g_i^{-1}w$ y w van a la misma órbita y $w \in g_i V$, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$, por lo que podemos suponer que $B \subset g_i V \cap \dots \cap g_m V$. Si $x \in B$ entonces $x \in g_i \tilde{P} \cap g_i V$ para alguna i , por lo tanto $x \in g_i(\tilde{P} \cap V) \subset W$, de donde $B \subset W$ por lo que W es abierto y p es un homeomorfismo. ■

Corolario 5.11 *Sea $P \subset \mathbb{H}^2$ un dominio fundamental localmente finito para Γ subgrupo discreto. \mathbb{H}^2/Γ es compacto si y sólo si P es acotado.*

Demostración:

⇐] Como P es acotado, entonces \tilde{P} es compacto. Como p es un homeomorfismo, \tilde{P} es Hausdorff y π_* es continua y sobre, obtenemos que \tilde{P}/Γ es compacto lo que implica que \mathbb{H}^2/Γ es compacto.

⇒] Tenemos que $p\pi_*$ es una función abierta, que transforma abiertos de P en abiertos de \mathbb{H}^2/Γ de manera sobre, de donde podemos encontrar un conjunto finito de discos abiertos D_1, \dots, D_r con centros en \tilde{P} tal que cada Γ -órbita intersecta a $\tilde{P} \cap D_1, \dots, \tilde{P} \cap D_r$, de donde P está contenido en la unión de estos conjuntos, por lo tanto P es acotado. ■

Proposición 5.18 *Sea $P \subset \mathbb{H}^2$ dominio fundamental localmente finito para Γ un grupo Fuchsiano de isometrías de \mathbb{H}^2 , entonces Γ es generado por $\Psi = \{\gamma \in \Gamma : \gamma(\tilde{P}) \cap \tilde{P} \neq \emptyset\}$.*

Demostración:

Sea H el subgrupo de Γ generado por Ψ . Para $z \in \mathbb{H}^2$ existe $g \in \Gamma$ tal que $gz \in \tilde{P}$, supongamos que existe otro $h \in \Gamma$ tal que $hz \in \tilde{P}$, entonces

$gz \in \tilde{P} \cap gh^{-1}\tilde{P}$ pues $(gz \in gh^{-1}\tilde{P} \Leftrightarrow (gh^{-1})^{-1}gz = hg^{-1}gz = hz \in \tilde{P})$, entonces $gh^{-1} \in \Psi$ de donde $gh^{-1} \in H$ es decir $Hg = Hh$, por lo que podemos definir la función $\theta: \mathbb{H}^2 \rightarrow \Gamma/H$ dada por $\theta(z) = Hg$ donde $gz \in \tilde{P}$.

Como P es localmente finito existe B bola abierta centrada en z que intersecciona solo a $g_1\tilde{P}, \dots, g_m\tilde{P}$ y podemos suponer que cada $g_i\tilde{P}$ contiene a z , así $B \subset g_1\tilde{P} \cup \dots \cup g_m\tilde{P}$. Si $y \in B$ existe $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que $y \in g_i\tilde{P}$ por lo que $g_i^{-1}y \in \tilde{P}$ entonces $\theta(y) = H(g_i)^{-1} = \theta(z)$ luego θ es constante en B , por lo que $\theta(B)$ es abierto pues es constante en cada fibra, como \mathbb{H}^2 es conexo tenemos que θ es constante. Sea $g \in \Gamma, u \in P, v \in g^{-1}P$ entonces $\theta(u) = H = H \circ \text{id} = \theta(v) = Hg$, por lo que $g \in H$ de donde $H = \Gamma$. ■

Concluiremos esta sección con resultados acerca de dominios no acotados, con un tratamiento de las cúspides y de la frontera de una región fundamental.

Definición Sea P una región fundamental para un grupo Fuchsiano de isometrías. La frontera horocíclica $\partial_h P$ es el conjunto de puntos $s \in \partial\mathbb{H}^2$ tal que cualquier horodisco con centro s intersecciona P .

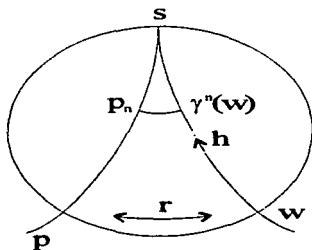


FIGURA 5.6. Demostración de la proposición 5.19

Proposición 5.19 Sean P un dominio fundamental localmente finito para Γ grupo Fuchsiano y $s \in \partial\mathbb{H}^2$ para el cual existe un punto $p \in \tilde{P}$ tal que el segmento geodésico $[p, s]$ está contenido en \tilde{P} . Una transformación $\gamma \in \Gamma^+$ con $\gamma(s) = s$ es parabólica.

Demostración:

Como toda transformación γ es elíptica, hiperbólica o parabólica y como las transformaciones elípticas no tienen puntos fijos en $\partial\mathbb{H}^2$, vamos a suponer que

γ es una transformación hiperbólica con eje de traslación h ; reemplazando, si es necesario, γ por γ^{-1} podemos suponer que la dirección de traslación es hacia s . Sea w el punto de intersección de h y el horociclo con centro s a través de p , y sea $r = d(p, w)$. Para $n \geq 1$, sea p_n el punto de intersección entre $[p, s]$ y el horociclo con centro s a través de $\gamma^n(w)$, luego $d(p_n, \gamma^n(w)) < d(p, w)$, por lo que $\gamma^{-n}(p_n) \in D(w; r)$, por lo tanto $\gamma^{-n}(p_n) \cap D(w; r) \neq \emptyset$, para $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ lo que contradice que P es localmente finito. ■

Ejemplo 5.5 Sea Γ un grupo de isometrías del semi-plano de Poincaré generado por $\gamma(z) = 2z$, $z \in \mathbb{H}^2$. La región P acotada por las dos curvas

$$x + i(2|x| + 1), \quad x + i(2|x| + 2), \quad x \in \mathbb{R}$$

es dominio fundamental localmente finito. Observe que $\gamma(\infty) = \infty$ y cualquier horodisco con centro ∞ interseca a P , es decir $\infty \in \partial_h(P)$ pero ∞ no es una cúspide para Γ pues todos los elementos de Γ son hiperbólicos.

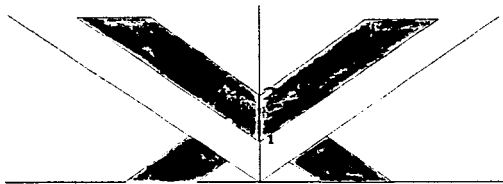


FIGURA 5.7. Dominio fundamental para el grupo generado por $\gamma(z) = 2z$

Proposición 5.20 Sea $s \in \partial\mathbb{H}^2$ una cúspide para el grupo Fuchsiano Γ y D un horodisco con centro s . Un dominio fundamental localmente finito P para Γ interseca en al menos un punto y en a lo más en un número finito de Γ -trasladados de D .

Demostración:

Supongamos que el horodisco D es cerrado y fijaremos un horodisco abierto U contenido en D tal que existe una Γ -órbita completa fuera de \bar{U} . Sea $\gamma \in \Gamma$ un elemento parabólico que fija A y tomemos una geodésica h que termina en A y C un subconjunto compacto de $D - U$ acotado por h y $\gamma(h)$. Observamos que $D - U$ es la unión de los trasladados de C por potencias de γ .

Sean $\sigma_1(P), \dots, \sigma_n(P)$ los Γ -trasladados de P que intersectan a C y supongamos que $\sigma(P)$ intersecta a D ; si suponemos que $\sigma(P) \subset U$, entonces $\sigma(P) \subset \bar{U}$, lo cual contradice la existencia de una Γ -órbita completa fuera de \bar{U} . Por lo tanto $\sigma(P)$ intersecta a $D - U$, por lo que existe $s \in \mathbb{Z}$ tal que $\gamma^s \sigma(P)$ intersecta a C , entonces $\gamma^s \sigma = \sigma_i$ para alguna $i = 1, \dots, n$ así $\sigma(D) = \sigma_i \gamma^{-s}(D) = \sigma_i(D)$, de donde P intersecta a lo más a un número finito de Γ -trasladados de D . ■

Corolario 5.12 Sean Γ un grupo Fuchsiano y P un dominio fundamental localmente finito para Γ . La Γ -órbita de una cúspide intersecta a la frontera horocflica $\partial_h P$.

Demostración:

Sea K un horodisco con centro en la cúspide s y sean

$$K, \sigma_1(K), \dots, \sigma_n(K), \quad \sigma_1, \dots, \sigma_n \in \Gamma$$

los Γ -trasladados de K que intersectan a P . Para cualquier horodisco D contenido en K , tenemos que al menos uno de los horodiscos

$$D, \sigma_1(D), \dots, \sigma_n(D), \quad \sigma_1, \dots, \sigma_n \in \Gamma$$

intersecta a P , de esto se sigue que al menos uno de los puntos $s, \sigma_1(s), \dots, \sigma_n(s)$ pertenece a $\partial_h P$. ■

5.8 Dominios Convexos

En esta sección estudiaremos regiones fundamentales localmente finitas y convexas.

Teorema 5.9 (Principio de Hahn-Banach) Sea U un subconjunto abierto, convexo de \mathbb{H}^2 . A través de cualquier punto $z \in \mathbb{H}^2$ fuera de U pasa una geodésica que no intersecta a U .

Demostración:

Sea D el círculo unitario en el espacio tangente $T_z(\mathbb{H}^2)$; sea $q \in U$, h la geodésica orientada de q a z y $p(q) \in D$ su vector tangente unitario, por lo que hemos definido una función $p : U \rightarrow D$, entonces es fácil ver que esta función es continua, además $V = P(U)$ es un abierto de D y no contiene puntos antipodos. Sea $\mathcal{A} : D \rightarrow D$ la función antipoda, entonces V y $\mathcal{A}(V)$ son abiertos ajenos no vacíos de D . Como D es convexo existe $d \in D$ tal que $d \notin V \cup \mathcal{A}(V)$, de donde la geodésica por z con vector tangente d no intersecta a U . ■

Corolario 5.13 Sea $U \subset \mathbb{H}^2$ abierto, convexo y sean $a \in U$ y $b \in \partial U$, entonces el segmento geodésico $[a, b] \subset U$.

Demostración:

Si existe $q \in [a, b]$ tal que $q \notin U$, podemos encontrar una geodésica h a través de q que no intersecta a U . Sea H el semi-plano cerrado con $\partial H = h$ y $a \in H$, el cual contiene a U pero no a b , pues de lo contrario, como H es convexo contendría al segmento geodésico $[a, b]$, pero este intersecta a h en q lo cual es absurdo. Por lo tanto b es un punto exterior de U , lo cual es una contradicción. ■

Corolario 5.14 Si U es abierto y convexo de \mathbb{H}^2 , entonces \bar{U} es un subconjunto convexo de \mathbb{H}^2 .

Demostración:

Primero veamos que $\bar{U} = \bigcap_{H \in S} H$ donde $S = \{H : H \text{ semiplano cerrado en } \mathbb{H}^2, U \subset H\}$, es claro que se da una de las contenciones. Para ver la otra, sea $w \notin \bar{U}$ y sea $u \in U$ tal que $z \in (u, w)$ este fuera de U , entonces por el teorema 5.9 existe geodésica h a través de z que no intersecta a U . Consideremos el semiplano cerrado H con $\partial H = h$ y $u \in H$, entonces $U \subset H$ y $w \notin H$, por lo que $\bigcap_{H \in S} H \subset \bar{U}$. La convexidad de \bar{U} se sigue ahora de que la intersección de convexos es convexo. ■

Corolario 5.15 Si $U \subset \mathbb{H}^2$ es abierto y convexo entonces $\text{Int}(\bar{U}) = U$.

Demostración:

Sabemos que $\text{Int}(\bar{U})$ es el máximo abierto contenido en \bar{U} , por lo que $U \subset \text{Int}(\bar{U})$. Para la otra contención consideremos que $\bar{U} = U \cup \partial U$ y sea $z \in \partial U$, entonces existe geodésica h que pasa por z que no intersecta a U ; ahora como U es convexo, esta contenido en un semiplano cerrado H acotado por h , entonces $\bar{U} \subset H$, pero cualquier vecindad de z intersecta al complemento de H , por lo que intersecta al complemento de \bar{U} , es decir $z \notin \text{Int}(\bar{U})$, de donde obtenemos que si $z \in \text{Int}(\bar{U})$ entonces $z \in U$. ■

Lema 5.15 Sea P un dominio fundamental localmente finito y convexo de un grupo Fuchsiano Γ . Un conjunto de la forma $\bar{P} \cap \sigma(\bar{P})$ con $\sigma \in \Gamma \setminus \{id\}$ es o vacío o un segmento geodésico cerrado.

Un conjunto de la forma $\bar{P} \cap \sigma(\bar{P}) \cap \tau(\bar{P})$ con $\sigma, \tau \in \Gamma \setminus \{id\}$, $\sigma \neq \tau$ es o bien vacío o bien un punto.

Demostración:

Primeramente tenemos que $\bar{P} \cap \sigma(\bar{P})$ es convexo. También sabemos que $\sigma(P) \cap P = \emptyset$ y que $\partial P \cap \sigma(P) = \emptyset$.

Como $\tilde{P} = P \cup \partial P$ y $\sigma(\tilde{P}) = \sigma(P) \cup \sigma(\partial P)$ obtenemos que

$$\tilde{P} \cap \sigma(\tilde{P}) = (P \cup \partial P) \cap (\sigma(P) \cup \sigma(\partial P)) = \partial P \cap \sigma(\partial P)$$

por lo que $\tilde{P} \cap \sigma(\tilde{P})$ es subconjunto convexo de ∂P . Ahora veamos que esta intersección esta contenida en una recta geodésica, para esto supongamos que no, es decir existen tres puntos en $\tilde{P} \cap \sigma(\tilde{P}) = \partial P \cap \sigma(\partial P)$ no contenidos en una geodésica. Sean x, y, w tales puntos y sea z un punto interior del triángulo formado por estos tres puntos, de esta forma z sería un punto interior de ∂P lo cual es una contradicción, por lo tanto $\tilde{P} \cap \sigma(\tilde{P})$ esta contenido en una geodésica, por lo que es un segmento geodésico cerrado.

Sea z punto interior de $S = \tilde{P} \cap \sigma(\tilde{P})$. Sean $x, y \in S$ tal que $z \in (x, y)$ y sea $u \in P$; el interior del triángulo Δ_{xu} de vértices x, y, u esta contenido en P , de la misma manera el interior del $\Delta_{\sigma u}$ de vértices $x, y, \sigma(u)$ esta contenido en $\sigma(P)$. Entonces existe D disco abierto con centro z , tal que $D \cap S$ es un diámetro que divide a D en dos semidiscos E y F contenidos en P y $\sigma(P)$ respectivamente, estos semidiscos son ajenos a $\tau(P)$ y la demostración es similar a la de la primera parte, ya que $\tilde{P} \cap \sigma(\tilde{P}) \cap \tau(\tilde{P})$ es convexo, y como es la intersección de dos segmentos geodésicos, es o vacío o un punto. ■

Definición Sea P dominio fundamental convexo localmente finito para Γ grupo Fuchsiano. Por un lado de P entenderemos un segmento geodésico cerrado, diferente de un punto, de la forma $\tilde{P} \cap \sigma(\tilde{P})$ con $\sigma \in \Gamma \setminus \{id\}$.

Por un vértice de P , entenderemos un punto el cual puede ser presentado en la forma $\tilde{P} \cap \sigma(\tilde{P}) \cap \tau(\tilde{P})$, con $\sigma, \tau \in \Gamma \setminus \{id\}$.

Proposición 5.21 La frontera ∂P de un dominio fundamental P convexo y localmente finito es la unión de sus lados.

Demostración:

Sea $w \in \partial P$, entonces cada disco suficientemente pequeño con centro w , debe contener puntos de P y puntos que no son de P , entonces podemos encontrar una sucesión de puntos w_n en ∂P que tienden a w . Una vecindad compacta w intersecciona sólo a un número finito de Γ -trasladados de \tilde{P} , por lo que existe $\sigma \in \Gamma$ y un número infinito de $w_n \in \tilde{P} \cap \sigma(\tilde{P})$, lo que implica que $\tilde{P} \cap \sigma(\tilde{P})$ es un lado que contiene a w . ■

Un lado s de P genera una geodésica h . Los puntos frontera para s en $h \cap \partial P$ son llamados puntos finales para el lado s y el número de puntos finales para s es 0, 1 ó 2.

Proposición 5.22 Sea s un lado de un dominio fundamental localmente finito y convexo P . Un punto $z \in s$ es un vértice de P si y sólo si z es un punto final de s .

Demostración:

\Rightarrow) El lema 5.16 garantiza que un punto interior de s no puede ser un vértice de P .

\Leftarrow) Sea $z \in s = \bar{P} \cap \sigma(\bar{P})$ tal que no sea vértice de P , entonces existe D disco abierto con centro z tal que $D \subset \bar{P} \cup \sigma(\bar{P})$, así $D = (D \cap P) \cup (D \cap \sigma(P)) \cup (D \cap s)$; como $D - D \cap s$ es disconexo y $D \cap s$ es un arco geodésico a través del centro z de D , entonces $D \cap s$ es un diámetro de D , luego z es un punto interior de S por lo que no es un punto final de s . ■

Algunas observaciones útiles son que:

1) P sólo tiene un número a lo más numerable de lados y vértices.

2) Sólo un número finito de lados y vértices pueden intersectar a un compacto de \mathbb{H}^2

Corolario 5.16 *Un vértice s de P esta contenido en exactamente dos lados de P .*

Demostración:

Consideremos D un disco abierto con centro s que sólo intersecta los lados que tienen vértice s , demostremos que no puede haber tres lados con vértice en s , para esto supongamos que l_1, l_2, l_3 son lados con vértice comun s . Ahora P es convexo, por lo que tambien lo es \bar{P} y $l_1, l_2, l_3 \subset \bar{P}$, sean x, y, z puntos en estos tres lados respectivamente; entonces $[z, y], [y, x], [z, x], [s, x], [s, y], [s, z] \subset \bar{P}$, y sea T la región acotada por estos segmentos geodésicos, de donde T es convexo contenido en \bar{P} , entonces tomando dos puntos r y s en diferentes lados de $[s, y]$, tenemos que están en P pero su segmento geodésico no esta contenido, lo cual es una contradicción.

Sólo nos falta ver que son exactamente dos. Por ser s un vértice, es un punto final para un lado l , entonces supongamos que ningun otro lado de P tiene vértice s . Sea D un disco abierto alrededor de s tal que no intersece a ningun lado de P , sólo a l . Como $s \in \partial P$ existe $y \in D \cap P$, además $D \cap \partial P \subset l$, y si h es la geodésica generada por l tenemos que $\bar{P} \cap h = l$; también existe $x \in D$ tal que $x \in h - l$ y como $\bar{P} \cap h = l$ entonces $x \notin \bar{P}$. Sea $[x, y]$ el segmento geodésico que conecta x a y , como $x \in \text{Ext}P$ y $y \in P$ tenemos que $[x, y] \cap \partial P \neq \emptyset$, pues de lo contrario tendríamos que $[x, y] = [x, y] \cap P \cup [x, y] \cap \text{Ext}P$ contradiciendo la conexidad. Sea $w \in [x, y] \cap \partial P$, entonces $x, w \in h \Rightarrow y \in h \Rightarrow y \in h \cap \bar{P} = l$ por lo que $y \in l$ lo cual es una contradicción pues $y \in P$, por lo tanto existe otro lado con vértice A de donde tenemos el resultado. ■

Ahora vamos a identificar dos lados de la siguiente manera: sea G^* el conjunto de elementos $g \in \Gamma$ tal que $\bar{P} \cap g(\bar{P})$ es un lado de P y sea S el conjunto de lados de P . Es claro que cada $g \in G^*$ produce un único lado s en S , es decir $s = \bar{P} \cap g(\bar{P})$ y cada lado surge de esta manera, por lo que tenemos que la función $\Theta : G^* \rightarrow S$ dada por $\Theta(g) = \bar{P} \cap g(\bar{P})$ es suprayectiva y de hecho es una biyección pues si $\Theta(g) = \Theta(h)$ entonces $\bar{P} \cap g(\bar{P}) = \bar{P} \cap h(\bar{P})$ y esto

implica que $g = h$. Así la existencia de $\Theta^{-1} : S \rightarrow G^*$ muestra que cada lado s tiene asociado un único g_s en G^* con $s = \bar{P} \cap g(\bar{P})$, entonces

$$g_s^{-1}(s) = \bar{P} \cap g_s^{-1}(\bar{P}) = s'$$

también es un lado de P . Ahora vemos que si $s' = (g_s)^{-1}(s)$ entonces $g_{s'} = (g_s)^{-1}$, así hemos construido una función $s \mapsto s'$ de S en si mismo y es llamada **apareadora de lados de P** ya que

$$(s')' = (g_{s'})^{-1}(s') = g_s(s) = s$$

y las correspondientes g_s son llamadas transformaciones laterales.

Teorema 5.10 Sea P un dominio fundamental convexo para Γ localmente finito. Entonces el grupo Γ es generado por las transformaciones laterales g_s cuando s varía en los lados de P .

Demostración:

En la proposición 5.18 vimos que Γ es generado por $\{\gamma \in \Gamma : \gamma(\bar{P}) \cap \bar{P} \neq \emptyset\}$, por lo que es suficiente probar que si $\bar{P} \cap h(\bar{P}) \neq \emptyset$ entonces h está en el grupo generado por las transformaciones laterales.

Sea $w \in \bar{P} \cap h(\bar{P})$, entonces existe disco abierto D con centro w y elementos $h_0 (= id), h_1, \dots, h_l \in \Gamma$ tal que $h = h_j$ para algun $j \neq 0$, $w \in h_0(\bar{P}) \cap \dots \cap h_l(\bar{P})$ y $D \subset h_0(\bar{P}) \cup \dots \cup h_l(\bar{P})$ ya que P es localmente finito. Decreciendo el radio de D podemos asumir que D no contiene vértices de ningún $h_j(\bar{P})$ excepto posiblemente w y ningún lado de $h_j(\bar{P})$ excepto los que contienen a w . Como ∂P es la unión de los lados de P , la frontera de P en D consiste de sólo un lado o dos distintos lados con vértice en w . Lo mismo es cierto para cada uno de los otros $h_j(\bar{P})$, reordenado los índices podemos suponer que $h_0(P), \dots, h_l(P)$ son polígonos consecutivos en la lista con un lado en común, por lo que $\bar{P} \cap h_j^{-1}h_{j+1}(\bar{P})$ es un segmento geodésico de longitud positiva, luego es un lado para toda j , además $h_{j+1} = h_j g_s$ para alguna transformación lateral g_s , por lo que h esta en el grupo generado por las transformaciones laterales. ■

Definición i) Un ciclo $C = \{z_1, \dots, z_n\}$ en \bar{P} es la intersección de una Γ -órbita con \bar{P} y la longitud $|C|$ de C es n .

ii) Si $C = \{z_1, \dots, z_n\}$ es un ciclo entonces los estabilizadores Γ_{z_j} son conjugados entre si y son subgrupos cíclicos finitos de Γ . El orden de un ciclo C , $\text{Ord}(C)$ es el orden común de los Γ_{z_j} .

iii) Sea $C = \{z_1, \dots, z_n\}$ un ciclo tal que ∂P subtiende un ángulo θ_j en z_j . La suma de los ángulos $\theta(C)$ del ciclo C es definido por $\theta_1 + \dots + \theta_n$.

Teorema 5.11 Sea P un polígono fundamental convexo del grupo Fuchsiano Γ . Entonces para un ciclo C , se tiene que

$$\text{Ord}(C) \theta(C) = 2\pi$$

Demostración:

Sea $C = \{z_1, \dots, z_n\}$ el ciclo, entonces para algún $g_1 (= id), g_2, \dots, g_n$, tenemos que $g_j(z_j) = z_1$. Entonces $g_j(P)$ tiene a z_1 como un vértice y el ángulo de $g_j(P)$ en z_1 es θ_j .

Ahora $z_1 \in h(\tilde{P})$ si y sólo si $h^{-1}(z_1)$ es algún z_j y esto si y sólo si para algún j , $h(g_j)^{-1}$ fija z_1 . Sea Γ_1 el estabilizador de z_1 , entonces $z_1 \in h(\tilde{P})$ si y sólo si para alguna j , $h \in \Gamma_1 g_j$.

Entonces tenemos que $z_1 \in h(\tilde{P}) \Leftrightarrow h \in \Gamma_1 g_j$ para alguna j , de donde

$$\{h_0, \dots, h_m\} = \Gamma_1 g_1 \cup \dots \cup \Gamma_1 g_n$$

donde h_i son tales que $z_1 \in h_i(\tilde{P})$, es decir las imágenes de \tilde{P} que contienen a z_1 , además $m = \text{ord } \Gamma_1 \cdot n$. Como los elementos de Γ_1 son rotaciones con centro z_1 , entonces cada $\sigma \in \Gamma_1 g_j$ es tal que $\sigma(\tilde{P})$ subtende un ángulo θ_j en z_1 , es decir

$$2\pi = [\text{ord}(\Gamma_1)](\theta_1 + \dots + \theta_n) = \text{ord}(C)(\theta_1 + \dots + \theta_n)$$

5.9 Dominios de Dirichlet

Sea Γ un grupo Fuchsiano de isometrías de \mathbb{H}^2 . Como Γ es a lo más numerable, podemos encontrar un punto w que no es punto fijo de ningún elemento de Γ , es decir $\Gamma_w = \{id\}$.

Sean $\sigma \in \Gamma \setminus \{id\}$, $L_\sigma(w)$ la mediatriz para w y $\sigma(w)$, y sea $H_\sigma(w)$ el semiplano acotado por $L_\sigma(w)$ que contiene a w .

Entonces definimos el **dominio de Dirichlet con centro w** como el conjunto

$$P(w) = \bigcap_{\sigma \in \Gamma \setminus \{id\}} H_\sigma(w)$$

Proposición 5.23 *El dominio de Dirichlet $P(w)$ es un dominio fundamental para Γ en \mathbb{H}^2 . Además su cerradura esta dada por*

$$\overline{P(w)} = \bigcap_{\sigma \in \Gamma \setminus \{id\}} \overline{H_\sigma(w)}$$

Demostración:

Primeramente veamos que $P(w)$ es abierto. Sean $r > 0$ cualquiera y $S = \{\sigma \in \Gamma \setminus \{id\} : \sigma(w) \in D(w; 2r)\}$, el cual es un conjunto finito pues Γ es discreto. Consideremos los conjuntos $K_\sigma = \mathbb{H}^2 \setminus H_\sigma(w)$ con $\sigma \in \Gamma \setminus \{id\}$ en Γ , estos conjuntos son cerrados en \mathbb{H}^2 .

Si $D(w; r)$ es tal que $D(w; r) \cap K_\sigma \neq \emptyset$, entonces para $x \in D(w; r) \cap K_\sigma$, es decir con $d(w, x) < r$ y $d(x, w) \geq d(x, \sigma(w))$ tenemos que

$$d(w, \sigma(w)) \leq d(w, x) + d(x, \sigma(w)) \leq d(w, x) + d(x, w) < 2r$$

entonces $D(w; 2r)$ contiene a $\sigma(w)$, pero como S es finito $D(w, 2r)$ sólo contiene un número finito de elementos de Γw , por lo que $D(w; r)$ sólo intersecta a un número finito de K_σ . Es decir tenemos que la familia de $\{K_\sigma\}_{\sigma \in \Gamma \setminus \{id\}}$ es una familia de cerrados, localmente finita, de donde obtenemos que

$$\mathbb{H}^2 \setminus P(w) = \cup \{K_\sigma : \sigma \in \Gamma \setminus \{id\}\}$$

es cerrado, por lo que $P(w)$ es abierto.

Como $z \in H_\sigma(w) \Leftrightarrow d(z, w) \leq d(z, \sigma(w)) \Leftrightarrow d(z, w) \leq d(z, \sigma(w)) = d(\sigma^{-1}(z), w) \Leftrightarrow w \in H_{\sigma^{-1}(z)}$, tenemos que $z \in P(w) \Leftrightarrow w \in P(z)$.

Ahora si h es una isometría de \mathbb{H}^2 , veamos que

$$h(H_\sigma(w)) = H_{h\sigma h^{-1}}(h(w)).$$

Sea $z \in h(H_\sigma(w))$, es decir existe $x \in H_\sigma$ con $h(x) = z$ entonces

$$\begin{aligned} d(x, w) \leq d(x, \sigma(w)) &\Rightarrow d(h(x), h(w)) \leq d(h(x), h\sigma(w)) \\ &\Rightarrow d(z, h(w)) \leq d(z, h\sigma(w)) = d(z, h\sigma h^{-1}h(w)) \\ &\Rightarrow z \in H_{h\sigma h^{-1}}(h(w)) \end{aligned}$$

por lo que $h(P(w)) = P(h(w))$ para toda h isometría de \mathbb{H}^2 .

Ahora demosetremos que $P(w)$ y $\gamma(P(w)) = P(\gamma(w))$ son ajenos para $\gamma \in \Gamma \setminus \{id\}$. Supongamos que existe $z \in P(w) \cap P(\gamma(w))$ de donde $d(z, w) < d(z, \sigma(w)) \forall \sigma \in \Gamma \setminus \{id\}$ y $d(z, \gamma(w)) < d(z, \mu\gamma(w)) \forall \mu \in \Gamma \setminus \{id\}$ por lo que haciendo $\sigma = \gamma$, $\mu = \gamma^{-1}$ concluimos que $d(z, w) < d(z, \gamma(w)) < d(z, w)$, lo cual es imposible, por lo tanto $P(w) \cap \gamma(P(w)) = \emptyset \forall \gamma \in \Gamma \setminus \{id\}$.

Hagamos una pausa para ver la segunda parte de la proposición. Por una parte tenemos que

$$P(w) = \bigcap_{\sigma \in \Gamma \setminus \{id\}} H_\sigma(w) \text{ entonces } \overline{P(w)} = \overline{\bigcap_{\sigma \in \Gamma \setminus \{id\}} H_\sigma(w)} \subset \bigcap_{\sigma \in \Gamma \setminus \{id\}} \overline{H_\sigma(w)}$$

y para la otra contención tomemos $z \in \mathbb{H}^2$ tal que $z \in \overline{H_\sigma(w)} \forall \sigma \in \Gamma \setminus \{id\}$ entonces la recta geodésica entre w y z pertenece a $\overline{H_\sigma(w)} \forall \sigma \in \Gamma$ por lo que $[w, z] \in P(w)$, pues $w \in P(w)$ y $z \in \partial P(w)$ de donde obtenemos que $z \in \overline{P(w)}$ por el corolario 5.14, por lo tanto $\overline{P(w)} = \overline{\bigcap_{\sigma \in \Gamma \setminus \{id\}} H_\sigma(w)}$.

Falta ver que cualquier órbita Γz intersecta a $\overline{P(w)}$. Escogemos $gz \in \Gamma z$ con la menor distancia a w , lo cual es posible pues cualquier bola compacta de w sólo contiene un número finito de elementos de Γz , pues las órbitas

son discretas, de donde obtenemos que $d(gz, w) \leq d(h(gz), w)$ para $h \neq id$, entonces

$$d(gz, w) \leq d(gz, h^{-1}(w)) \forall h \neq id \Rightarrow gz \in \overline{H_{h^{-1}(w)}}$$

de donde $gz \in \overline{P(w)} = \bigcap_{\sigma \in \Gamma \setminus \{id\}} \overline{H_{\sigma(w)}}$, por lo tanto $\Gamma z \cap \overline{P(w)} \neq \emptyset$ y concluimos que $P(w)$ es un dominio fundamental. ■

Proposición 5.24 Sea Γ un grupo de isometrías de \mathbb{H}^2 y sea $w \in \mathbb{H}^2$ tal que $\Gamma w = \{id\}$. El dominio de Dirichlet $P(w)$ es un dominio fundamental convexo localmente finito.

Demostración:

Ya hemos visto que $P(w)$ es un dominio fundamental, además es conexo por ser la intersección de conexos.

Sea $r > 0$ y $D(w; r)$, veamos $D(w; r) \cap \sigma(P) \neq \emptyset$ solo para un número finito de $\sigma \in \Gamma$. Si $D(w; r) \cap \sigma(P) \neq \emptyset$, entonces existe $z \in P$ tal que $\sigma(z) \in D(w, ; r) \Rightarrow d(w, \sigma(w)) \leq d(w, \sigma(z)) + d(\sigma(z), \sigma(w)) < r + d(z, w)$ y si $z \in P \Rightarrow d(z, w) \leq d(z, \sigma^{-1}(w)) = d(\sigma(z), w) < r$ por lo que $d(\sigma(w), w) \leq 2r$ y esto sólo pasa para un número finito de $\sigma \in \Gamma$. ■

Hace frío en el scriptorium,

Dejo este texto, no sé para quién,
este texto, que ya no sé de qué habla;
stat rosa pristina, nomina nuda tenemus

Bibliografía

- [B] A. F. Beardon, *The geometry of discrete groups*. Springer Verlag, New York Inc. 1983.
- [Be] M. Berger, *Geometry I y II*. Springer Verlag, Berlin 1987.
- [E] H. Eves, *Estudio de las Geometrías I y II*. UTEHA, México DF 1969.
- [F] W. Fenchel, *Elementary geometry in hyperbolic space*. Walter de Gruyter, Berlin 1989.
- [FN] W. Fenchel, J. Nielsen, *On discontinuous groups of isometric transformations of the non-euclidean plane*. Studies and Essays R. Courant. Collected Mathematical Papers. 2 Vols. pags. 117-128 Birkhäuser, Basel 1948.
- [I] H. Iversen, *Hyperbolic Geometry*. London Mathematical Society, Student Texts 25. Cambridge University Press 1992.
- [JS] G. A. Jones, D. Singerman, *Complex functions*. Cambridge University Press, Cambridge 1987.
- [L] J. Lehner, *A short course in automorphic functions*. Holt, Rinehart & Winston, New York 1966.
- [M] J. Milnor, *Hyperbolic geometry: The first 150 years*. Bull. Amer. Math. Soc. 6 pags 9-24. 1982.
- [R] G. Ratcliffe, *Foundations of hyperbolic manifolds*. Springer Verlag, New York 1994.
- [Re] E. G. Rees, *Notes on geometry*. Universitext. Springer Verlag, Berlin 1983.
- [S] G. Shimura, *Introduction to the arithmetic theory of modular forms*. Iwanami Shoten and Princeton University Press, Princeton 1971.
- [W] J. B. Wilker, *Inversive geometry*. The geometric vein, edited by C. Davies, B. Grünbaum, F. A. Scher. Springer Verlag, Heidelberg 1981.

1. The first part of the document is a list of names and addresses of the members of the committee. The names are listed in alphabetical order, and the addresses are given in full.

2. The second part of the document is a list of the names and addresses of the members of the committee who have been elected to the office of Chairman. The names are listed in alphabetical order, and the addresses are given in full.

3. The third part of the document is a list of the names and addresses of the members of the committee who have been elected to the office of Secretary. The names are listed in alphabetical order, and the addresses are given in full.

4. The fourth part of the document is a list of the names and addresses of the members of the committee who have been elected to the office of Treasurer. The names are listed in alphabetical order, and the addresses are given in full.

5. The fifth part of the document is a list of the names and addresses of the members of the committee who have been elected to the office of Auditor. The names are listed in alphabetical order, and the addresses are given in full.

6. The sixth part of the document is a list of the names and addresses of the members of the committee who have been elected to the office of Assessor. The names are listed in alphabetical order, and the addresses are given in full.

7. The seventh part of the document is a list of the names and addresses of the members of the committee who have been elected to the office of Collector. The names are listed in alphabetical order, and the addresses are given in full.

8. The eighth part of the document is a list of the names and addresses of the members of the committee who have been elected to the office of Marshal. The names are listed in alphabetical order, and the addresses are given in full.

9. The ninth part of the document is a list of the names and addresses of the members of the committee who have been elected to the office of Sheriff. The names are listed in alphabetical order, and the addresses are given in full.

Lista de Símbolos

\mathbb{C}	1	\mathbb{P}	45
\mathbb{R}	1	$GL_2(\mathbb{C})$	45
$Q(z)$	2	$PGl_2(\mathbb{C})$	45
\langle, \rangle	2	$M\ddot{ö}b^+(E)$	46
(E, Q)	2	$[P, Q, R, S]$	47
K^\perp	2	$tr^2\sigma$	50
E^*	3	$Isom(X)$	51
$O(E)$	3	\bar{p}	54
\oplus	4	$T_p(S^n)$	57
T_m	5	∂D^n	65
$(-p, q)$	9	$M\ddot{ö}b(D^n)$	66
$signdet$	10	$M\ddot{ö}b(E^+)$	70
$\ \cdot \ $	10	$PGl_2(\mathbb{R})$	71
$\cos \angle(e, f)$	11	\mathbb{H}^2	71
$SO(E)$	11	$\partial \mathbb{H}^2$	72
E_c	13	$sl_2(\mathbb{R})$	73
id	15	I	73
$O_\infty(F)$	16	$vol(K, L, M)$	73
$Siml(E)$	17	$K \wedge L$	74
$S(F)$	20	\angle_{or}	76
Δ	20	$\triangle ABC$	82
$Lor(F)$	24	σ^-	94
$Lor^+(F)$	24	$L(e)$	94
$C(F)$	25	$L(Z, U)$	94
$PC(F)$	25	T_2	97
S^{n-1}	25	Γx	98
$C^*(F)$	28	Γ_x	98
$O_L(F)$	29	$M_2(\mathbb{R})$	99
$Lor_L(F)$	29	$O_2(\mathbb{R})$	102
$O(F)_m$	30	\triangleleft	105
$N(F)$	30	$D^i(G)$	105
$P(F)$	31	X^N	105
$PS(F)$	31	$PSl_2(\mathbb{R})$	108
$\partial PS(F)$	31	\mathbb{H}^2/Γ	122
\dot{E}	33	$(\mathbb{H}^2)^*$	122
$M\ddot{ö}b(E)$	33	$PSl_2(\mathbb{Z})$	125
$S * T$	41	$\partial_h P$	131
		$Ord(C)$	138

Índice

A

- Acción
 - discontinua, 99
 - fiel, 26
 - propiamente discontinuamente, 99
 - transitiva, 5
- Atlas, 128

C

- Complejificación, 13
- Completación no singular, 8
- Conmutador, 106
- Cono
 - de luz, 94
 - isotrópico, 25
 - isotrópico truncado, 28
 - proyectivizado, 31
- Cuadrángulo de Lambert, 92
- Curva geodésica, 52
- Cúspide, 121

D

- Distancia hiperbólica, 60
- Dominio
 - de Dirichlet, 139
 - fundamental, 129
 - lado de un, 136
 - vértice de un, 136

E

- Equivariante, 96
- Esfera, 11, 34
 - de Riemann, 45
 - ortogonales, 40

Espacio

- Hausdorff, 97
- localmente compacto, 97
- parabólico, 16

- vectorial euclidiano, 8
- Estabilizador, 30

F

- Forma
 - cuadrática, 1
 - definida positiva, 8
 - hiperbólica, 19
 - no singular, 2
 - parabólica, 14
 - positiva, 14
- Fórmula de Polarización, 2
- Frontera Horocíclica, 132
- Función
 - apareadora de lados, 138
 - que preserva distancias, 51

G

- Grupo
 - de Lorentz, 23
 - de Möbius, 34
 - discreto, 98
 - elemental, 103
 - especial de Lorentz, 24
 - especial ortogonal, 11
 - no elemental, 114
 - ortogonal, 3
 - soluble, 106

H

- Haces de geodésicas, 80
- Hiperplano afín, 33
- Horociclos, 114
- Horodisco, 122
- Horolación, 83

I

- Inversión, 33
- Isometría, 51

I
Isomorfismo
de formas cuadráticas, 3

L
Linealización, 54

M
Matriz de Gram, 3
Modelo
disco de Klein, 63
disco de Poincaré, 65
semi-espacio de Poincaré, 69
semi-plano de Poincaré, 70

N
Nielsen, Jacob, 114
Norma, 10

O
Orbita, 98
Orden de un ciclo, 138

P
Plano hiperbólico, 27
Producto inverso de esferas, 41
Pseudoesfera, 20

R
Razón cruzada, 47
Recta afín, 52
Reflexión
a través de m , 5
Rotación, 11

S
Serie normal, 106
Similaridad, 17
Simplejo
euclidiano, 53
hiperbólico, 63
Subespacio
total ortogonal, 2
Sucesión exacta, 55
Superficie de Riemann, 127

T
Tipo Sylvester, 9
Topología horocíclica, 123
Transformaciones
de Lorentz, 23
elípticas, 72
hiperbólicas, 72
parabólicas, 72
Traslación por un vector, 54
Traza, 50

V
Vector
no isotrópico, 5
normal, 75
tangente, 57
transformación, 110

W
Witt, Teorema de, 5