

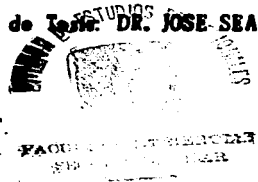


UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTONOMA DE MEXICO  
FACULTAD DE CIENCIAS

Cohomología de  $d'$  Rham  
y Foliaciones

T E S I S  
Que para obtener el título de  
M A T E M A T I C O  
p r e s e n t a  
RICARDO CASTAÑO BERNARD

Director de Tesis: DR. JOSE SEADE KURI



México, D. F.

1997

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENENCIA DE  
MÉXICO

**M. en C. Virginia Abrín Batule**  
**Jefe de la División de Estudios Profesionales de la**  
**Facultad de Ciencias**  
**P r e s e n t e**

**Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:**

**Cohomología de d'Rham y Foliaciones**

**realizado por Ricardo Castaño Bernard**

**con número de cuenta 9251755-6 , pasante de la carrera de Matemáticas**

**Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.**

**Atentamente**

**Director de Tesis**  
**Propietario**

**Dr. José A. Seade Kuri**

**Propietario**

**Dr. Omegar Calvo Andrade**

**Propietario**

**Dr. Alberto Verjovski**

**Suplente**

**Dr. Marcelo Aguilar**

**Suplente**

**Dr. Javier Elizondo**

**Consejo Departamental de Matemáticas**

*A mi hermano Carlos*

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

***Cohomología de de Rham  
y Foliaciones***

**Ricardo Castaño Bernard**

Typeset by  $\LaTeX$

## INTRODUCCIÓN

La teoría de foliaciones, aunque nacida en el ámbito de los sistemas dinámicos, resulta ya difícil catalogarla dentro de un área específica de las matemáticas.

Ya sea por requerir el uso de herramientas diversas para resolver sus problemas, o por el simple pretexto de utilizar las matemáticas más ricas, bellas y novedosas, las foliaciones han aglutinado áreas como la geometría diferencial, la geometría y topología algebraicas, los sistemas dinámicos y la teoría de singularidades, por mencionar algunas, dando como resultado una fuente de matemáticas de la mejor calidad.

En esta tesis estudiaremos algunos temas relativos a la geometría de foliaciones sobre variedades diferenciables reales. Una foliación  $\mathfrak{F}$  sobre una variedad diferenciable  $M$  es, a grandes rasgos, su descomposición en variedades inmersas de una dimensión fija llamadas *hojas* o *variedades integrales*. Sin embargo se pueden presentar conjuntos donde dicha descomposición no se da, o donde las hojas tienen alguna propiedad *especial*, por ejemplo la presencia de una hoja compacta. Estos conjuntos singulares son el objeto de estudio de la teoría de foliaciones. Se busca, por ejemplo, entender el comportamiento de las hojas cercanas a una singularidad y obtener información con la cual poder aspirar a removerla.

El problema que trataremos aquí es el siguiente: ¿Bajo que condiciones una variedad diferenciable acepta una foliación sin singularidades? Localmente, la respuesta la da el Teorema de Frobenius, al que podemos considerar como una generalización del teorema de existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales.

El principal objetivo de esta tesis es dar una respuesta a la pregunta formulada arriba pero desde el punto de vista *global*. Para ello nos basaremos en el trabajo de Raoul Bott realizado al inicio de los años '70. Con éste resultado, conocido como el *Teorema de anulamiento de Bott*, se da una obstrucción topológica en  $M$  para aceptar alguna foliación no singular.

El desarrollo de herramienta geométrica y algebraica necesaria para la demostración del teorema, la desarrollaremos a lo largo de toda la tesis. En el capítulo I, daremos los fundamentos de la teoría de formas diferenciales. El capítulo II se enfoca al desarrollo de la teoría de gavillas y se prueba el teorema de de Rham usando cohomología de gavillas. Este teorema nos da la pauta para poder usar la cohomología de de Rham y pretender obtener información topológica de la variedad (lo cual es fundamental, pues eso precisamente es el objetivo final de esta tesis).

Probar el teorema de de Rham usando gavillas pareciera ser innecesario para nuestros requerimientos, sin embargo, ya que el estudio de foliaciones singulares

demanda el uso de gavillas, se les ha incluido como parte sustancial de esta tesis, con la presepectiva de seguir estudiando en esa dirección.

El capítulo III se enfoca hacia una introducción geométrica a la teoría de foliaciones y el IV es una traducción de éstas ideas a un terreno más abstracto: el de haces vectoriales integrables, en el cual el teorema de Bott tiene sentido. Aquí se usarán clases características en la cohomología de de Rham, contruídas en base al haz normal a  $\mathfrak{F}$ . La integrabilidad del haz tangente a  $\mathfrak{F}$  se traduce en el anulamiento de las clases de Pontryagin del haz normal, a partir del doble de la codimensión de la foliación.

### ***Agradecimientos.***

Este trabajo es el resultado de la formación y ayuda que me brindaron varias personas. Quisiera agradecer especialmente a José Seade, director de esta tesis, por la confianza que depositó en mí desde el principio. También agradezco a Alberto Verjovski, Marcelo Aguilar y Javier Elizondo por sus valiosas sugerencias y comentarios. De manera especial agradezco a Omegar Calvo ya que con su ayuda este trabajo adquirió forma y consistencia.

No podría dejar de mencionar a la maestra Ana Irene Ramírez por el papel determinante que jugó en mi formación como matemático.

## CONTENIDO

<b>Introducción</b>	<b>i</b>
<b>Contenido</b>	<b>iii</b>
<b>Capítulo I. Formas Diferenciales</b>	<b>1</b>
1 Algebra tensorial	1
2 Algebra exterior	2
3 Formas diferenciales	5
4 Integración en variedades diferenciales	10
<b>Capítulo II. Cohomología en Variedades Diferenciales</b>	<b>13</b>
1 Cohomología	13
2 Gavillas	19
<i>Gavillas de módulos</i>	19
<i>El espacio étalé</i>	21
<i>Gavillas suaves</i>	26
3 Cohomología de gavillas	28
<i>El teorema de de Rham</i>	32
<i>La cohomología de de Rham</i>	33
<i>La cohomología singular</i>	34
<b>Capítulo III. Foliaciones</b>	<b>37</b>
1 Estructuras foliadas	37
2 Formas Diferenciales y foliaciones	41
3 El Teorema de Frobenius	45
4 Frobenius con formas	50
<b>Capítulo IV. Clases Características en Foliaciones</b>	<b>55</b>
1 Haces vectoriales	55
2 Conexiones en haces vectoriales	60
3 Clases características	65
4 El teorema de anulamiento de Bott	68
<b>Apéndice A. Integración de formas diferenciales</b>	<b>73</b>
<b>Apéndice B. La sucesión de Mayer-Vietoris</b>	<b>77</b>
<b>Apéndice C. Conexiones (versión vectorial)</b>	<b>83</b>
<b>Referencias</b>	<b>87</b>

Typeset by *AAS-TEX*



## FORMAS DIFERENCIALES

En este capítulo introduciremos las nociones básicas de formas diferenciales, herramienta que se utilizará en el resto de la tesis. Desarrollaremos dicha teoría para el caso de variedades diferenciales de clase  $C^r$  (en general supondremos  $r = \infty$ ). Las referencias para esta parte son: [Wa], [Ma] y [Sp].

## 1. Algebra Tensorial

Consideremos  $V_1, \dots, V_p$  espacios vectoriales sobre  $\mathbb{R}$ . A partir de ellos podemos construir varios objetos relativos al álgebra lineal:

**1.1 Ejemplo.** El producto de  $p$  espacios vectoriales  $V_1 \times \dots \times V_p$  es un espacio vectorial con las operaciones de suma y producto por escalar definidos entrada a entrada.

**1.2 Ejemplo.** Dado  $V$ , el conjunto  $V^*$  de las funciones lineales  $V \rightarrow \mathbb{R}$  con las operaciones usuales entre funciones es un espacio vectorial.

**1.3 Definición.** Sean  $A, B$  son módulos sobre un dominio entero  $K$  y sea  $F(A \times B)$  el módulo libre generado por  $A \times B$ . Se define el **producto tensorial** de  $A$  y  $B$  como el cociente:

$$A \otimes B := \frac{F(A \times B)}{I(A \times B)}$$

donde  $I(A \times B) \subset F(A \times B)$  es el ideal generado por elementos de la forma

$$\begin{aligned} &(a, b_1 + b_2) - (a, b_1) - (a, b_2) \\ &(a_1 + a_2, b) - (a_1, b) - (a_2, b) \\ &(\lambda a, b) - \lambda(a, b) \\ &(a, \lambda b) - \lambda(a, b) \quad \lambda \in K \end{aligned}$$

Si  $F(A \times B) \xrightarrow{\pi} A \otimes B$  es la aplicación cociente, cada pareja  $(a, b)$  define una clase  $a \otimes b := \pi(a, b)$  en el producto tensorial.

Si  $V_1, V_2$  son espacios vectoriales sobre  $\mathbb{R}$ , su producto tensorial  $V_1^* \otimes V_2^*$  es posible identificarlo con el espacio de las aplicaciones bilineales  $(V_1 \times V_2) \rightarrow \mathbb{R}$ , gracias a la *propiedad universal* del producto tensorial (ver [La]).

Similantemente, producto tensorial de  $p$  espacios vectoriales  $V_1^* \otimes \dots \otimes V_p^*$  podemos identificarlo con el espacio de las funciones  $p$ -lineales

**1.4 Proposición.** Si  $\dim V_i = n_i < \infty$ , entonces  $\dim \bigotimes^p V_i^* = n_1 n_2 \cdots n_p$ .

*Prueba.* [Ma], III.1, p.124

Para nosotros será necesario considerar solamente el caso  $V_i = V$ ,  $i = 1, \dots, p$ . A los elementos de  $\bigotimes^p V^*$  los llamaremos funciones  $p$ -lineales o  $p$ -tensores en  $V$ .

**1.5 Definición.** Si  $f$  es un  $p$  tensor y  $g$  es un  $q$ -tensor se define su **producto tensorial**  $f \otimes g$ , que es un  $p+q$  tensor dado por:

$$f \otimes g(v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q) = f(v_1, \dots, v_p)g(w_1, \dots, w_q)$$

para toda  $p$ -ada  $(v_1, \dots, v_p)$ , y toda  $q$ -ada  $(w_1, \dots, w_q)$ .

Las siguientes propiedades se heredan del producto en  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}(\lambda f_1 + \mu f_2) \otimes g &= \lambda(f_1 \otimes g) + \mu(f_2 \otimes g) \\ f \otimes (\lambda g_1 + \mu g_2) &= \lambda(f \otimes g_1) + \mu(f \otimes g_2) \\ (f \otimes g) \otimes h &= f \otimes (g \otimes h)\end{aligned}$$

Notemos que en general  $\otimes$  no es conmutativo.

**1.6 Definición.** Definimos  $\bigotimes^0 V^* = \mathbb{R}$ . La suma directa  $\sum_{p=0}^{\infty} \bigotimes^p V^*$  junto con el producto  $\otimes$  es una  $\mathbb{R}$ -álgebra graduada llamada **álgebra tensorial asociada** a  $V^*$ .

**1.7 Proposición.** Sea  $\{e_1, \dots, e_n\}$  base de  $V$  y  $\{\phi^1, \dots, \phi^n\}$  la base dual, entonces  $B = \{\phi^{j_1} \otimes \cdots \otimes \phi^{j_p} \mid j_k = 1, \dots, n; k = 1, \dots, p\}$  es base de  $\bigotimes^p V^*$ .

*Prueba.* Como la cardinalidad de  $B$  es igual a  $\dim \bigotimes^p V^*$ , basta verificar la independencia lineal:

Sea  $f = \sum_{j_1, \dots, j_p} a_{j_1, \dots, j_p} \phi^{j_1} \otimes \cdots \otimes \phi^{j_p} = 0$ , en particular  $0 = f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) = a_{i_1, \dots, i_p}$  para toda colección de índices  $i_1, \dots, i_p$ .  $\square$

## 2. Algebra Exterior

**2.1 Definición.** Consideremos  $\mathfrak{S}_p$  el grupo de permutaciones de  $p$  elementos. Una permutación  $\sigma \in \mathfrak{S}_p$  puede actuar en los elementos  $f \in \bigotimes^p V^*$  intercambiando el orden de las entradas de  $(v_1, \dots, v_p)$ :

$$\sigma f(v_1, \dots, v_p) = f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)})$$

Se dirá que

$f$  es **simétrica** si  $\sigma f = f$ .

$f$  es **antisimétrica o alternante** si  $\sigma f = \epsilon_{\sigma} f$

para toda  $\sigma \in \mathfrak{S}_p$

$$\varepsilon_\sigma = \begin{cases} +1 & \text{si } \sigma \text{ es par} \\ -1 & \text{si } \sigma \text{ es impar} \end{cases}$$

recordar que  $\sigma$  es par (impar) si es producto de un número par (impar) de transposiciones, entonces  $f$  es alternante si y sólo si

$$f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_p) = -f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_p)$$

Se verifica inmediatamente que la suma de dos funciones alternantes es alternante. El producto por escalar de una función alternante es alternante y forman un subespacio vectorial de  $\otimes^p V^*$ .

**2.2 Definición.** En  $\otimes^p V^*$  definimos el operador lineal  $A_p$ :

$$A_p(f) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon_\sigma \sigma f$$

llamado **alternador**. Observemos que si  $\tau \in \mathfrak{S}_p$ , entonces  $\tau A_p(f) = \varepsilon_\tau A_p(f)$ , es decir, el operador  $A_p$  hace alternante a cualquier  $f \in \otimes^p V^*$ .

**2.3 Definición.** El espacio vectorial de las funciones  $p$ -lineales alternantes lo denotaremos  $\wedge^p V^*$ . Si  $f \in \otimes^p V^*$  y  $g \in \otimes^q V^*$  definimos

$$f \wedge g = A_{p+q}(f \otimes g) \in \wedge^{p+q} V^*$$

denominado **producto exterior o producto 'wedge'**. La suma directa  $\wedge^{p \in \mathbb{N}} V^*$  junto con el producto  $\wedge$  es una  $\mathbb{R}$ -álgebra graduada no conmutativa denominada **álgebra exterior asociada a  $V^*$** .

Observemos que las propiedades (1.5) se satisfacen automáticamente para el producto  $\wedge$ .

**2.4 Observación.** Si  $\phi_1, \dots, \phi_k$ , son  $k$  funciones lineales y  $(v_1, \dots, v_k) \in V_1 \times \dots \times V_k$ , se tiene la siguiente identidad:

$$(\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \begin{vmatrix} \phi_1(v_1) & \phi_1(v_2) & \dots & \phi_1(v_k) \\ \phi_2(v_1) & \phi_2(v_2) & \dots & \phi_2(v_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_p(v_1) & \phi_p(v_2) & \dots & \phi_p(v_k) \end{vmatrix}$$

El cálculo se encuentra en [Ma], III.2.

**2.5 Observación.** Si  $\phi, \psi$  son funciones lineales, entonces

$$\phi \wedge \psi = -\psi \wedge \phi$$

$$\phi \wedge \phi = 0$$

lo que se verifica inmediatamente utilizando (2.4).

**2.6 Observación.** Si  $\phi_i \in V^*$ , ( $i = 1, \dots, p$ ), entonces

$$a) \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_p = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon_\sigma \phi_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \phi_{\sigma(p)}$$

$$b) \phi_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \phi_{\sigma(p)} = \varepsilon_\sigma \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_p$$

c) Si  $\phi_1, \dots, \phi_p, \psi_1, \dots, \psi_q \in V^*$  entonces

$$(\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_p) \wedge (\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_q) = (-1)^{pq} (\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_q) \wedge (\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_p)$$

*Prueba.* (a) y (b) se verifican directamente usando (2.4) y las propiedades de los determinantes, (c) se sigue de los anteriores.

**2.7 Observación.** Como  $B = \{\phi^{j_1} \otimes \dots \otimes \phi^{j_p} \mid j_k = 1, \dots, n\}$  genera a  $\otimes^p V^*$  y  $\wedge^p V^*$  es subespacio de  $\otimes^p V^*$  es claro que  $B$  es un conjunto generador, sin embargo debido a la anticonmutatividad de  $\wedge$  hay elementos en  $B$  que son linealmente dependientes. Por ejemplo, en  $\wedge^3 V^*$ ,

$$\phi^3 \wedge \phi^1 \wedge \phi^2 = -\phi^1 \wedge \phi^3 \wedge \phi^2$$

o bien  $\phi^1 \wedge \phi^1 \wedge \phi^3 = 0 \wedge \phi^3 = 0$

Para evitar esto, se toman elementos de  $B$  en orden estrictamente creciente. Por ejemplo, si  $\dim V^* = 4$ , una base para  $\wedge^3 V^*$  sería:

$$\{\phi^1 \wedge \phi^2 \wedge \phi^3; \phi^1 \wedge \phi^2 \wedge \phi^4; \phi^1 \wedge \phi^3 \wedge \phi^4; \phi^2 \wedge \phi^3 \wedge \phi^4\}$$

**2.8 Proposición.** Si  $\{\phi^1, \dots, \phi^n\}$  es base de  $V^*$ , entonces

$$\mathcal{E} = \{\phi_I = \phi^{i_1} \wedge \dots \wedge \phi^{i_p} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n\}$$

es base de  $\wedge^p V^*$ , y además  $\dim \wedge^p V^* = \binom{n}{p}$

*Prueba.* Veremos que  $\mathcal{E}$  genera:

Sea  $f$  una función alternante. En particular  $f \in \otimes^p V^*$  y (1.7) garantiza que  $f = \sum_{i_1, \dots, i_p} f_{i_1, \dots, i_p} \phi^{i_1} \otimes \dots \otimes \phi^{i_p}$  donde  $f_{i_1, \dots, i_p} = f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$  y como  $f$  es alternante,  $f_{i_1, \dots, i_p} = \varepsilon_\sigma f_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(p)}}$ . Si además tomamos en cuenta (2.6.a) y aplicamos  $A_p(f) = f$  se llega a que

$$f = \sum_{i_1, \dots, i_p} f_{i_1, \dots, i_p} \phi^{i_1} \wedge \dots \wedge \phi^{i_p}$$

$\mathcal{E}$  es linealmente independiente:

Sea  $\sum_{i_1, \dots, i_p} \lambda_{i_1, \dots, i_p} \phi^{i_1} \wedge \dots \wedge \phi^{i_p} = 0$ . Aplicando (2.6.a) tenemos

$$\sum_{i_1, \dots, i_p} \lambda_{i_1, \dots, i_p} \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon_\sigma \phi^{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes \phi^{i_{\sigma(p)}} = 0$$

Como  $\phi^{i_1} \otimes \dots \otimes \phi^{i_p}$ ,  $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$ , son linealmente independientes entonces  $\lambda_{i_1, \dots, i_p} = 0$ .

La manera de contruir  $\mathcal{E}$  es tomar elementos de  $B$  que no se repitan en cada secuencia  $\phi_I$ , es decir, se toman combinaciones de  $p$  elementos distintos de un total de  $n$ , de esta forma  $|\mathcal{E}| = \binom{n}{p}$ .  $\square$

**2.9 Corolario.** El producto  $\wedge$  es un producto graduado anticommutativo:

$$f \wedge g = (-1)^{pq} g \wedge f \in \bigwedge^{p+q} V^*$$

para cualesquiera  $f \in \bigwedge^p V^*$ ,  $g \in \bigwedge^q V^*$

*Prueba.* De (2.6) se sigue que  $\phi_I \wedge \phi_J = (-1)^{pq} \phi_J \wedge \phi_I$ . Como  $\mathcal{E}$  es base existen  $a_I, b_J$  tales que,  $f = \sum a_I \phi_I$  y  $g = \sum b_J \phi_J$  y

$$a_I b_J (\phi_I \wedge \phi_J) = (-1)^{pq} b_J a_I (\phi_J \wedge \phi_I)$$

sumando sobre  $I, J$  obtenemos

$$\sum a_I b_J (\phi_I \wedge \phi_J) = (-1)^{pq} \sum b_J a_I (\phi_J \wedge \phi_I) \quad \square$$

**2.10 Observación.** Sea  $T: V \rightarrow W$  transformación lineal entre espacios vectoriales. Se induce la transformación  $T^*: W^* \rightarrow V^*$  tal que  $f \mapsto f \circ T \in V^*$  que se extiende a nivel de las álgebras exteriores:

$$\begin{aligned} \bigwedge^p W^* &\longrightarrow \bigwedge^p V^* \\ g &\longmapsto T^*g \end{aligned}$$

**2.11 Definición.** Sea  $T: V \rightarrow W$  lineal y  $g$  una función  $p$ -lineal en  $\bigwedge^p W^*$ , entonces  $T^*g$  es una función  $p$ -lineal en  $\bigwedge^p V^*$ :

$$T^*g(v_1, \dots, v_p) = g(Tv_1, \dots, Tv_p)$$

$T^*g$  es conocida como el "pullback" de  $g$  hacia  $\bigwedge^p V^*$ .

### 3. Formas Diferenciales

A continuación daremos algunas nociones sobre variedades diferenciales con el fin de establecer la notación que utilizaremos en adelante.

Consideremos una variedad diferenciable  $M$  de dimensión  $n$  y sea  $\mathfrak{A}$  un atlas o sistema de coordenadas locales de  $M$ . Si  $(U, \phi)$  es una carta en  $\mathfrak{A}$ ,  $\phi = (x_1, \dots, x_n)$ . Las funciones  $x_i: U \rightarrow \mathbb{R}$ , son llamadas **funciones coordenadas de  $\phi$** . Las **coordenadas de  $q \in M$**  relativas a  $(U, \phi)$  son  $(x_1(q), \dots, x_n(q)) \in \mathbb{R}^n$ .

Una función  $f$  definida en un abierto  $V$  de  $M$  se dirá que es **diferenciable** en  $q \in V$  si existe una carta  $(U, \phi) \in \mathfrak{A}$  y una vecindad  $W$  de  $q$  tal que  $q \in W \subset U \cap V \neq \emptyset$ , donde la función

$$f \circ \phi^{-1}: \phi(W) \rightarrow \mathbb{R}$$

es diferenciable en  $\phi(q) \in \mathbb{R}^n$ . El conjunto de funciones diferenciables definidas en  $V$  se denotará por  $C^\infty(V)$ .

En términos de una carta  $(U, \phi)$ , se define la **derivada de  $f$  en  $q$**

$$Df(q) = D(f \circ \phi^{-1})(\phi(q))$$

y las derivadas parciales de  $f$  son entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(q) = \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial u_i}(\phi(q))$$

donde  $(u_1, \dots, u_n)$  son las coordenadas usuales en  $\mathbb{R}^n$ . Se prueba que la derivada de  $f$  es independiente de la carta en torno a  $q$  que se elija.

$M$  tiene asociado en cada punto  $q$  su **espacio tangente**  $T_q M$ . Dada una carta  $(U, \phi)$  podemos considerar a  $T_q M$  como el espacio vectorial generado por los operadores lineales:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_q, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_q \right\}$$

que actúan sobre el conjunto de las funciones  $C^\infty$  definidas en torno a  $q \in M$ . Se prueba que  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_q \right\}_{i=1}^n$  son linealmente independientes y forman una base para  $T_q M$ .

La **diferencial** de  $f$  en  $q$  es una aplicación lineal en  $(T_q M)^*$  que se define:

$$(df)_q(v) = v(f) \quad v \in T_q M$$

Al aplicar  $(df)_q$  al elemento básico  $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_q \in T_q M$ , obtenemos  $(df)_q \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_q \right) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(q)$ . En particular para la función coordenada  $x_j$ ,

$$(dx_j)_q \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_q \right) = \frac{\partial x_j}{\partial x_i}(q) = \delta_{ij}$$

por lo que  $\{(dx_1)_q, \dots, (dx_n)_q\}$  es la base dual de  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_q \right\}_{i=1}^n$ , es decir, es base de  $(T_q M)^*$ .

El espacio vectorial  $\wedge^p(T_q M)^*$  se define como en (2.3) y todos los resultados de §2 son válidos para este caso. Es de particular importancia la siguiente

**3.2 Proposición.** Si  $\{(dx_1)_x, \dots, (dx_n)_x\}$  es la base de  $(T_x M)^*$ , entonces

$$B = \{dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n\}$$

es base de  $\wedge^p(T_x M)^*$ , cuya dimensión es  $\binom{n}{p}$

**Prueba.** Se sigue directamente de (2.8)

**3.3 Definición.**  $\bigwedge(T_x M)^*$  representa la suma directa de los espacios vectoriales:

$$\mathbb{R}, (T_x M)^*, \bigwedge^2(T_x M)^*, \dots, \bigwedge^p(T_x M)^*, \dots$$

y tenemos una  $\mathbb{R}$ -álgebra graduada en cada punto  $x \in M$  llamada **álgebra exterior asociada a  $p \in M$** .

**3.4 Definición.** La unión ajena

$$\bigwedge^p TM := \bigsqcup_{x \in M} \bigwedge^p(T_x M)^*$$

es el **haz vectorial cotangente de orden  $p$  sobre  $M$** .

Si  $p = 1$  tendremos el haz cotangente  $TM^*$ . En el capítulo IV formalizaremos la definición de haz vectorial, donde veremos que un haz vectorial tiene estructura de variedad diferenciable. Bajo esta consideración, tiene sentido hacer la siguiente

**3.5 Definición.** Una **forma diferencial de orden  $p$  o  $p$ -forma** de clase  $C^r$  definida en un abierto  $U \subseteq M$  es una aplicación

$$\begin{aligned} \omega : U &\rightarrow \bigsqcup_{x \in U} \bigwedge^p(T_x M)^* \\ x &\mapsto \omega_x = \omega(x) \in \bigwedge^p(T_x M)^* \end{aligned}$$

de clase  $C^r$ , es decir, una  $p$ -forma es la asignación de una función  $p$ -lineal  $T_x M \times \dots \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$  a cada punto  $x \in U$ . El conjunto de las  $p$ -formas en  $U$  se denotará por  $\Omega^p(U)$ . En adelante trataremos solo el caso *suave* ( $r = \infty$ ).

**3.6 Definición.** Sean  $\omega, \theta$  dos  $p$ -formas en  $U \subset M$  y  $k \in \mathbb{R}$ , se define:

$$\begin{aligned} (\omega + \theta) &= \omega_x + \theta_x \\ (k\omega) &= k(x)\omega_x \end{aligned}$$

para todo punto  $x \in U$  y con ello  $\Omega^p(U)$  tiene estructura de  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial.

Si  $f \in C^\infty(U)$  podemos definir el producto

$$f\omega = f(x)\omega_x$$

para todo punto  $x \in U$ . Con ello,  $\Omega^p(U)$  es un  $C^\infty(U)$ -módulo.

**3.7 Definición.** Similarmente, si  $\omega \in \Omega^p(U)$  y  $\theta \in \Omega^q(U)$ , definimos su **producto exterior**

$$(\omega \wedge \theta) = \omega_x \wedge \theta_x \quad \text{para todo punto } x \in U$$

**3.8 Observación.** Sean  $\omega^1, \omega^2$   $p$ -formas y  $\theta^1, \theta^2$   $q$ -formas. Las siguientes identidades son consecuencia de los resultados de la sección anterior:

$$\begin{aligned} \omega \wedge \theta &= (-1)^{pq} \theta \wedge \omega \\ \omega \wedge \omega &= 0 \\ (\omega^1 + \omega^2) \wedge \theta &= \omega^1 \wedge \theta + \omega^2 \wedge \theta \\ \omega \wedge (\theta^1 + \theta^2) &= \omega \wedge \theta^1 + \omega \wedge \theta^2 \end{aligned}$$

**3.9 Observación.** Una  $p$ -forma  $\omega$ , puede escribirse en términos de coordenadas locales como una combinación lineal

$$\omega = \sum a_I dx_I$$

para algunas funciones suaves  $a_I = a_{i_1, \dots, i_p}$  y para algunos  $dx_I \in \mathcal{B}$ .

*Prueba.* Como  $\Omega^p(U)$  es  $C^\infty(U)$ -módulo y  $\{dx_I(x)\}_I$  es base de  $\wedge^p(T_x M)^*$  para todo  $x \in U$ , entonces  $\omega_x = \sum a_I(x) dx_I(x)$ . De (3.6) y (3.7) se concluye que  $\omega = \sum a_I dx_I$ .  $\square$

**3.10 Proposición.** Sean  $\omega^1, \dots, \omega^p$  1-formas y  $X_1, \dots, X_p \in \mathfrak{X}(U)$  campos vectoriales definidos en  $U$ , entonces

$$(\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^p)_x(X_1(x), \dots, X_p(x)) = \frac{1}{p!} \det |\omega_x^i(X_j(x))|$$

*Prueba.* Como  $X_1(x), \dots, X_p(x) \in T_x M$  y  $(\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^p)_x \in \wedge^p(T_x M)^*$  el resultado (2.4) se aplica.  $\square$

Se obtiene el siguiente

**3.11 Corolario.** Si  $\omega = \sum a_I dx_I$  y  $X_1, \dots, X_p$  son campos vectoriales entonces,

$$\omega(X_1, \dots, X_p) = \frac{1}{p!} \sum a_I \det |dx_I(X_j)|$$



**El operador derivada exterior.**

En (3.1) se definió  $(df)_x$ , la diferencial de  $f$  en  $x$ , y se le concibió como un elemento en  $(T_x M)^*$ . Alternativamente se puede interpretar la diferencial como un operador

$$C^\infty(U) = \Omega^0(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U) \\ f \longmapsto df_x \quad x \in U$$

de esta manera  $(df)_x$  es la imagen de  $f$  bajo el operador  $d$  que acabamos de definir.

Es fácil verificar la igualdad:

$$df_x = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big|_x dx_j(x)$$

donde  $\{dx_1(x), \dots, dx_n(x)\}$  es la base de  $(T_x M)^*$ .

De (3.9) podemos deducir el siguiente

**3.12 Corolario.** Si  $f \in C^\infty(U)$ , su diferencial es la 1-forma:

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$$

donde  $\frac{\partial f}{\partial x_j}: U \rightarrow \mathbb{R}$  es la función tal que  $p \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big|_p$  para todo  $p \in U$ .

**3.13 Definición.** Sea  $\omega = \sum a_I dx_I$  una  $p$ -forma. La *derivada exterior* de  $\omega$  es la  $(p+1)$ -forma:

$$d\omega = \sum da_I \wedge dx_I$$

donde  $da_I = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_I}{\partial x_j} dx_j$   $j = 1, \dots, n$ .

Es posible definir  $d\omega$  sin usar coordenadas locales. Ver [Ma], III.4, p.140.

**3.14 Proposición.**

1) La derivada exterior es una antiderivación:

$$d(\omega + \theta) = d\omega + d\theta \quad (\text{linealidad en la suma}) \\ d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge d\theta \quad (\text{si } \omega \text{ es } p\text{-forma})$$

2) Se cumple la condición de cociclo para toda  $p$ -forma:

$$d \circ d(\omega) = 0$$

*Prueba.* El inciso (1) es un cálculo directo. La propiedad (2) se desprende el hecho que localmente  $\omega$  está descrita por funciones suaves.

## 4. Integración en variedades diferenciales

La integración de formas tiene sentido sólo para aquellas cuyo orden sea igual a la dimensión de la variedad. Esta resulta una verdadera restricción, sin embargo puede salvarse. Para ello es necesario definir la integración de formas sobre cadenas. Para ello será necesario hablar un poco de homología. En el Apéndice 1 trataremos una manera alternativa de integrar formas de orden máximo sobre variedades, sin usar cadenas.

### El 'pullback' de formas.

Si tenemos una  $p$ -forma definida dentro de la imagen de una aplicación diferenciable entre variedades, se puede definir una  $p$ -forma en la imagen inversa.

Sea  $\varphi: M \rightarrow N$  aplicación diferenciable y  $\varphi_*: T_x M \rightarrow T_y N$ ,  $\varphi(x) = y$ , el morfismo entre los espacios tangentes correspondientes. Si  $\varphi^*: (T_y N)^* \rightarrow (T_x M)^*$  es el morfismo inducido en los duales, entonces si  $\omega_y \in \wedge^p (T_y N)^*$ , su pullback  $\varphi^* \omega_x \in \wedge^p (T_x M)^*$  queda descrito explícitamente por (2.11):

$$\varphi^* \omega_x(v_1, \dots, v_p) = \omega_y(\varphi_*(v_1), \dots, \varphi_*(v_p))$$

$$v_1, \dots, v_p \in T_x M.$$

**4.1 Observación.**  $\varphi^*$  es un morfismo de álgebras:

- 1)  $\varphi^*(\omega + \theta)_x = \varphi^* \omega_x + \varphi^* \theta_x$
- 2)  $\varphi^*(\omega \wedge \theta)_x = \varphi^* \omega_x \wedge \varphi^* \theta_x$

*Prueba.* Se sigue directamente de las definiciones.

**4.2 Definición.** Sea  $M \xrightarrow{\varphi} N$  diferenciable. Si  $V \subseteq N$  es un abierto contenido en la imagen de  $\varphi$  y  $\omega$  es una  $p$ -forma definida en  $V$ , se define  $\varphi^* \omega$  como el **pullback** de  $\omega$  hacia  $M$ :

$$x \mapsto \varphi^* \omega_x$$

$\varphi^* \omega$  es una  $p$ -forma definida en  $\varphi^{-1}(V)$ . Nótese que si  $f \in C^\infty(V)$  entonces  $\varphi^* f = f \circ \varphi$ .

**4.3 Proposición.** Con la notación de (4.2), si  $\omega \in \Omega^p(V)$  y  $\varphi^* \omega$  es su pullback, entonces

$$d(\varphi^* \omega) = \varphi^*(d\omega)$$

es decir, el operador derivada exterior y el pullback conmutan.

*Prueba.* Se prueba primero que si  $f \in C^\infty(V)$ ,  $d(\varphi^* f) = \varphi^*(df)$ . Al expresar  $\omega$  en términos de coordenadas locales, el resultado es inmediato.

**4.4 Corolario.** Si  $\omega = \sum a_I dx_I$ , su pullback queda descrito por

$$\varphi^* \omega = \sum (a_I \circ \varphi) \varphi^*(dx_I)$$

*Prueba.* Es inmediata

### Homología singular.

Comenzaremos con algunas definiciones básicas en las que no profundizaremos demasiado.

Sea  $\Delta_p$  el  $p$ -simplejo estandar en  $\mathbb{R}^p$ . Sea  $U \subset M$  abierto. Un  **$p$ -simplejo singular en  $U$**  es una aplicación continua  $\sigma: \Delta_p \rightarrow U$ .

Combinaciones lineales formales finitas de  $p$ -simplejos singulares en  $U$

$$\sum_i k_i \sigma_i \quad k_i \in \mathbb{R}$$

son llamadas  **$p$ -cadenas** y forman un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial, al que denotaremos  $S_p(U, \mathbb{R})$ .

Para cada  $p$ -simplejo singular  $\sigma$  está definida su **frontera**  $\partial\sigma$ , que se define como la suma alternada de sus caras  $\sigma^i$ :

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \sigma^i$$

donde  $\sigma^i$  es la imagen bajo  $\sigma$  de la  $i$ -ésima cara de  $\Delta_p$  y por lo tanto es una  $(p-1)$ -cadena. Se verifica también que

$$\partial \circ \partial\sigma = 0$$

para cualquier  $p$ -simplejo singular en  $U$ .

Podemos extender  $\partial$  a las cadenas linealmente y considerarlo como un operador

$$S_{p+1}(U, \mathbb{R}) \xrightarrow{\partial} S_p(U, \mathbb{R})$$

**4.5 Definición.** Tenemos los siguientes subespacios de  $S_p(U, \mathbb{R})$ :

$$\text{Los ciclos:} \quad Z_p(U, \mathbb{R}) = \ker\{S_p(U, \mathbb{R}) \xrightarrow{\partial} S_{p-1}(U, \mathbb{R})\}$$

$$\text{Las fronteras:} \quad B_p(U, \mathbb{R}) = \text{im}\{S_{p+1}(U, \mathbb{R}) \xrightarrow{\partial} S_p(U, \mathbb{R})\}$$

Dado que  $\partial^2 = 0$  entonces  $B_p(U, \mathbb{R}) \subseteq Z_p(U, \mathbb{R})$  y se puede formar el cociente

$$H_p(U, \mathbb{R}) = Z_p(U, \mathbb{R}) / B_p(U, \mathbb{R})$$

que se llama  **$p$ -ésimo espacio vectorial de homología de  $U$** . Si en lugar de tomar  $\mathbb{R}$  tomamos, por ejemplo  $\mathbb{Z}$  tendremos  $H_p(U, \mathbb{Z})$  y será el  $p$ -ésimo grupo de homología con coeficientes enteros. Si  $U = M$  entonces podremos hablar de la **homología de la variedad**, que resulta ser un invariante topológico, es decir, si  $M \rightarrow N$  es un homeomorfismo, entonces  $H^p(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} H^p(N, \mathbb{R})$  es un isomorfismo.

**Integración sobre cadenas.**

Un  $p$ -simplejo singular  $\sigma$  no es más que 'un elemento  $p$ -dimensional sobre  $M$ '. Si  $\omega$  es una  $p$ -forma cuyo soporte está contenido en  $\sigma(\Delta_p) \subset U$  entonces podemos aspirar a tener una integral de  $\omega$  'sobre  $\sigma$ '. Para ello debemos asumir que  $\sigma$  es una aplicación

$$\sigma: \Delta_p \rightarrow U \subset M$$

que se extiende diferenciablemente en una vecindad de  $\Delta_p$ . El espacio vectorial de las  $p$ -cadenas formadas con tales simplejos lo denotaremos como  $S_p(U, \mathbb{R})^\infty$ .

**4.6 Definición.** Sea  $\omega \in \Omega^p(U)$  con soporte compacto y sea  $\sigma$  un  $p$ -simplejo singular en  $S_p(U, \mathbb{R})^\infty$ . Se define la integral de  $\omega$  en  $\sigma$  en términos del pullback:

$$\int_\sigma \omega = \int_{\Delta_p} \sigma^* \omega$$

Si  $C = \sum_i k_i \sigma_i \in S_p(U, \mathbb{R})^\infty$  es una cadena, se define la integral de  $\omega$  sobre  $C$ :

$$\int_C \omega = \sum_i k_i \int_{\Delta_p} \sigma_i^* \omega$$

Ahora ilustraremos con un ejemplo la manera de calcular la integral de una  $p$ -forma sobre una  $n$ -variedad diferenciable  $n > p$ :

Sea  $\omega$  una 3-forma con soporte compacto sobre una  $n$ -variedad,  $n > 3$  y por simplicidad supongamos que dicho soporte está contenido en el dominio de una carta local  $(U, \varphi)$ . Supongamos que localmente  $\omega = f dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_5$ . Sea  $\sigma \in S_3(U, \mathbb{R})^\infty$  un simplejo singular. Entonces,

$$\sigma^*(\omega) = (f \circ \sigma) d(x_1 \circ \sigma) \wedge d(x_3 \circ \sigma) \wedge d(x_5 \circ \sigma)$$

y como  $x_i = \pi_i \circ \varphi$ , definiendo  $a_i := \pi_i \circ \varphi \circ \sigma$  obtenemos una función  $\Delta_3 \xrightarrow{a_i} \mathbb{R}$  y podemos calcular su diferencial explícitamente y expresarla en términos de las coordenadas canónicas  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$ . Como  $(f \circ \sigma) da_1 \wedge da_3 \wedge da_5$  es una 3-forma con soporte compacto en  $\Delta_3$  del tipo  $F dx \wedge dy \wedge dz$ , obtenemos

$$\int_\sigma \omega = \int_{\Delta_3} F dx \wedge dy \wedge dz$$

que es una integral que se calcula de manera usual. Para formas cuyo soporte no esté contenido en una carta local, es necesario 'partirla' con particiones de la unidad. El desarrollo de estas técnicas lo podemos encontrar en el apéndice A.

A continuación enunciamos un teorema de integración de formas, al que puede considerarse como el teorema fundamental del cálculo sobre variedades diferenciales.

**4.7 Teorema (Stokes).** Sea  $\omega$  una  $p-1$  forma con soporte compacto en  $U \subset M$  y sea  $C \in S_p(U, \mathbb{R})^\infty$  una  $p$ -cadena. Entonces,

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega$$

*Prueba.* La demostración podemos encontrarla por ejemplo en [Sp].

## COHOMOLOGÍA EN VARIETADES DIFERENCIABLES

Para resolver problemas en geometría y topología es conveniente su replanteamiento en un contexto algebraico. Para ello se han inventado la homotopía, la homología y la cohomología utilizando herramientas diversas: en términos de cadenas singulares se construyen las versiones clásicas de homología y cohomología de un espacio topológico. Usando formas diferenciales se obtiene la cohomología de de Rham de una variedad diferenciable.

Tanto la cohomología singular como la de de Rham nos proporcionan información valiosa de la variedad, pero ¿qué relación hay entre los datos arrojados por una y otra? La respuesta es que la información dada por ambas es "equivalente": el teorema de de Rham establece el isomorfismo entre ambas teorías de cohomología.

En este trabajo haremos el planteamiento de la cohomología de variedades utilizando gavillas y demostraremos el teorema de de Rham traducido a este contexto. Las referencias principales para este capítulo son: [Wa] [Go] y [We].

## 1. Cohomología

En esta sección se introducirá la idea de *complejos de cocadenas* (que llamaremos simplemente *complejos o cocadenas*), necesaria para la construcción de los  $q$ -ésimos módulos de cohomología, que se utilizarán las secciones siguientes.

**1.1 Definición.** Un *complejo*  $C^* = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} C^q$  es una sucesión de  $K$ -módulos,  $K$  un anillo ( $\mathbb{R}$  ó  $\mathbb{Z}$ ), relacionados por morfismos  $d^q$ :

$$\dots \longrightarrow C^{q-1} \xrightarrow{d^{q-1}} C^q \xrightarrow{d^q} C^{q+1} \longrightarrow \dots$$

tales que  $Im\ d^{q-1} \subseteq Ker\ d^q$  para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .

Se dirá que  $C^*$  es *exacta* si  $Im\ d^{q-1} = Ker\ d^q$ . A los morfismos  $d^q$  se les llama *q-ésimo operador cofrontera*.

El kernel de  $d^q$  se denota por  $Z^q(C^*)$  y a sus elementos se les llama *cociclos*. A la imagen de  $d^{q-1}$  se le denota por  $B^q(C^*)$  y sus elementos son las *cofronteras*. Dado que  $B^q(C^*) \subseteq Z^q(C^*)$  se deduce que  $d^q \circ d^{q-1} = 0$  y podemos realizar el cociente de ambos módulos:

$$\frac{Z^q(C^*)}{B^q(C^*)} = H^q(C^*)$$

llamado el *q-ésimo módulo de cohomología*.

$H^q(C^*)$  es un  $K$ -módulo cuyos elementos son clases de equivalencia dadas por la siguiente relación: dos cociclos  $\omega_1 \sim \omega_2 \Leftrightarrow \omega_1 - \omega_2 \in B^q(C^*)$ , es decir, las clases son cociclos que difieren por una cofrontera.

**1.2 Ejemplo. La cohomología de de Rham.** Sea  $E^* = \bigoplus^{p \in \mathbb{Z}^+} \Omega^p(M)$ . En  $E^*$  está definido el operador derivada exterior:

$$d: \Omega^{p-1} \rightarrow \Omega^p$$

que cumple la condición de cociclo, es decir,  $B^p(E^*) \subseteq Z^p(E^*)$ . En este caso, los  $p$ -cociclos son las  $p$ -formas **cerradas**, esto es, las que  $d\omega = 0$ ; y las  $p$ -cofronteras son las  $p$ -formas **exactas**, aquellas que  $d\theta = \omega$  para alguna  $(p-1)$ -forma  $\theta$ , y se tiene que toda forma exacta es cerrada. Planteamos el **complejo de de Rham**:

$$C^\infty(M) = \Omega^0(M) \rightarrow \Omega^1(M) \rightarrow \Omega^2(M) \rightarrow \dots$$

que tiene asociada la **cohomología de de Rham**

$$H_{D^R}^q(M) := H^q(\Omega^*(M)) \quad 0 \leq q \leq \dim M$$

Los elementos de  $H_{D^R}^q(M)$  son clases de equivalencia de  $p$ -formas cerradas dadas por la relación:  $\omega_1 \sim \omega_2 \Leftrightarrow \exists \theta \in \Omega^{p-1}(M)$  tal que  $d\theta = \omega_1 - \omega_2$ , es decir, cuya diferencia es exacta.

El caso más sencillo es calcular la  $q$ -cohomología a  $M = \mathbb{R}^1$ :

a) Si  $q = 0$ :

Como las 0-formas son funciones diferenciables en  $\mathbb{R}^1$  tenemos que  $f$  es cerrada si  $df = 0$  esto es, si  $f$  es constante, entonces  $Z^0(\mathbb{R}^1) = \mathbb{R}$ . Como la cohomología de de Rham no existen 0-formas exactas,

$$H_{D^R}^0(\mathbb{R}^1) = Z^0(\mathbb{R}^1) = \mathbb{R}$$

b) Si  $q = 1$ :

Si  $\omega = \sum f dx$  es 1-forma,  $d\omega = \sum \frac{\partial f}{\partial x} dx \wedge dx = 0$ , es decir, toda 1-forma es cerrada y  $Z^1(\mathbb{R}^1) = \Omega^1(\mathbb{R}^1)$ . Ahora bien, si  $\theta = f \omega$ , el teorema fundamental del cálculo asegura que  $d\theta = \omega$  con lo que  $B^1(\mathbb{R}^1) = \Omega^1(\mathbb{R}^1)$  y se tiene

$$H_{D^R}^1(\mathbb{R}^1) = 0$$

c) Si  $q > 1$ :

Si  $\omega$  es  $q$ -forma en  $\mathbb{R}^1$  se deduce de las propiedades del producto ' $\wedge$ ' que  $\omega = 0$ , por lo que  $H_{D^R}^q(\mathbb{R}^1) = 0$ .

El lema de Poincaré, que demostraremos más adelante, garantiza que

$$H^q(\mathbb{R}^n) \cong H^q(\mathbb{R}) \quad \text{para todo } q$$

En el Apéndice 2 damos una manera de calcular la cohomología de variedades más complicadas.

**1.3 Definición.** Un *mapeo de cocadenas*  $C^* \rightarrow D^*$  consiste de una colección de morfismos de módulos  $C^q \xrightarrow{f_q} D^q$  que conmutan con el operador cofrontera correspondiente, es decir,

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & D^{q-1} & \longrightarrow & D^q & \longrightarrow & D^{q+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & f_{q-1} \uparrow & & f_q \uparrow & & f_{q+1} \uparrow & & \\ \dots & \longrightarrow & C^{q-1} & \longrightarrow & C^q & \longrightarrow & C^{q+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

conmuta cuadro a cuadro.

Si  $D^* \rightarrow E^*$  es un mapeo de cocadenas, la composición

$$C^* \rightarrow D^* \rightarrow E^*$$

es un mapeo de cocadenas.

**1.4 Proposición.** Todo mapeo de cocadenas  $C^* \rightarrow D^*$  induce un morfismo entre  $q$ -cohomologías  $H^q(C^*) \rightarrow H^q(D^*)$ .

Con ello, un cuadrado conmutativo de mapeos de cocadenas

$$\begin{array}{ccc} C^* & \longrightarrow & D^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{C}^* & \longrightarrow & \tilde{D}^* \end{array}$$

induce un cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H^q(C^*) & \longrightarrow & H^q(D^*) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^q(\tilde{C}^*) & \longrightarrow & H^q(\tilde{D}^*) \end{array}$$

*Prueba.* Es fácil ver que  $f_q: C^q \rightarrow D^q$  manda cociclos en cociclos y cofronteras en cofronteras. El morfismo inducido en cohomología es

$$a + B^q(C^*) \mapsto f_q(a) + B^q(D^*)$$

**1.5 Definición.** Una composición de mapeos de cocadenas:

$$0 \longrightarrow C^* \longrightarrow D^* \longrightarrow E^* \longrightarrow 0$$

se le llama *sucesión exacta corta* si

$$0 \longrightarrow C^q \longrightarrow D^q \longrightarrow E^q \longrightarrow 0$$

es exacta para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .

**1.6 Definición.** Un diagrama conmutativo de mapeos de cocadena:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C^n & \longrightarrow & D^n & \longrightarrow & E^n & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \tilde{C}^n & \longrightarrow & \tilde{D}^n & \longrightarrow & \tilde{E}^n & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

se llamará *morfismo de sucesiones exactas cortas*.

**1.7 Proposición.** Toda sucesión exacta corta (1.5) induce una sucesión exacta larga de  $q$ -cohomologías:

$$(a) \quad \cdots \rightarrow H^{q-1}(E^n) \xrightarrow{d^n} H^q(C^n) \rightarrow H^q(D^n) \rightarrow H^q(E^n) \xrightarrow{d^n} H^{q+1}(C^n) \rightarrow \cdots$$

Por cada morfismo de sucesiones cortas exactas (1.6), se tiene un diagrama conmutativo

$$(b) \quad \begin{array}{ccc} H^q(E^n) & \xrightarrow{d^n} & H^{q+1}(C^n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^q(\tilde{E}^n) & \xrightarrow{\tilde{d}^n} & H^{q+1}(\tilde{C}^n) \end{array}$$

*Prueba.* La demostración podemos encontrarla en [Wa]. Reproduciremos la parte (a) ya que su construcción la emplearemos más adelante, cuando introduzcamos la sucesión de Mayer-Vietoris, en el Apéndice 2.

Procederemos a definir el morfismo  $d^n$ . Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C^{q+2} & \xrightarrow{\gamma} & D^{q+2} & \longrightarrow & E^{q+2} & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow c & & \uparrow d & & \uparrow e & & \\ 0 & \longrightarrow & C^{q+1} & \xrightarrow{\beta} & D^{q+1} & \longrightarrow & E^{q+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow c & & \uparrow d & & \uparrow e & & \\ 0 & \longrightarrow & C^q & \xrightarrow{\alpha} & D^q & \longrightarrow & E^q & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \end{array}$$

Como  $\alpha$  es suprayectiva, entonces para cualquier cociclo  $\sigma \in E^q$  existe  $\bar{\sigma} \in D^q$  tal que  $\alpha(\bar{\sigma}) = \sigma$ . Como el cuadro 1 conmuta, entonces  $\beta' \circ d(\bar{\sigma}) = e \circ \alpha(\bar{\sigma}) = e(\sigma) = 0$ ,



por lo tanto  $d(\tilde{\sigma}) \in \text{Ker } \beta' = \text{Im } \beta$ . Entonces debe existir  $\tilde{\sigma} \in C^{q+1}$  tal que  $\beta(\tilde{\sigma}) = d(\tilde{\sigma})$ . Como el cuadro 3 conmuta  $\gamma \circ c(\tilde{\sigma}) = d \circ \beta(\tilde{\sigma}) = d^2(\tilde{\sigma}) = 0$ . Pero  $\gamma$  es inyectiva, luego  $\text{Ker } \gamma = 0$ ,  $c(\tilde{\sigma}) = 0$  y se tiene que  $\tilde{\sigma} \in Z^{q+1}(C^*)$ .

Definimos el morfismo  $d^*$ :

$$\begin{aligned} H^q(E^*) &\rightarrow H^{q+1}(C^*) \\ \sigma + B^q(E^*) &\mapsto \tilde{\sigma} + B^{q+1}(C^*) \end{aligned}$$

y con ello la exactitud de (a) se verifica fácilmente.

**1.8 Lema.** Sea  $0 \xrightarrow{a} A' \xrightarrow{b} A \xrightarrow{c} A'' \xrightarrow{d} 0$  una sucesión exacta corta de  $K$ -módulos. Sea  $B$  un  $K$ -módulo.

Si  $A'$  ó  $B$  es libre de torsión<sup>1</sup>, la sucesión

$$0 \xrightarrow{a \otimes 1} A' \otimes B \xrightarrow{b \otimes 1} A \otimes B \xrightarrow{c \otimes 1} A'' \otimes B \xrightarrow{d \otimes 1} 0$$

es exacta.

*Prueba.* Puede encontrarse en [Spa].

**1.9 Definición.** Sean  $C^* \xrightarrow{f, g} D^*$  dos mapeos de cocadenas

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & C^{q-1} & \xrightarrow{d_{q-1}} & C^q & \xrightarrow{d_q} & C^{q+1} & \xrightarrow{d_{q+1}} & \dots \\ & & \sigma_{q-1} \downarrow f_{q-1} & \nearrow k_q & \sigma_q \downarrow f_q & \nearrow k_{q+1} & \sigma_{q+1} \downarrow f_{q+1} & & \\ \dots & \longrightarrow & D^{q-1} & \xrightarrow{d_{q-1}} & D^q & \xrightarrow{d_q} & D^{q+1} & \xrightarrow{d_{q+1}} & \dots \end{array}$$

Se dice que  $f, g$  son *homotópicos* si existen morfismos  $k_q: C^q \rightarrow D^{q-1}$  tales que

$$f_q - g_q = \delta_{q-1} \circ k_q + k_{q+1} \circ d_q.$$

**1.10 Proposición.** Si  $C^* \xrightarrow{f, g} D^*$  son dos mapeos de cocadenas homotópicos, entonces los morfismos inducidos en cohomología

$$H^q(C^*) \xrightarrow{f_*} H^q(D^*) \quad \text{y} \quad H^q(C^*) \xrightarrow{g_*} H^q(D^*)$$

coinciden.

*Prueba.* Basta demostrar que si  $g = 0$  entonces  $f_*$  coincide con la aplicación cero

$$H^q(C^*) \xrightarrow{f_*} H^q(D^*)$$

Consideremos el diagrama de (1.9) con  $g = 0$ , reescribiendo  $d_q = d$  y  $\delta_q = \delta$ , para  $q \in \mathbb{Z}$ . Tomemos una clase  $\sigma \in H^q(C^*)$  y un representante  $s$  en dicha clase. Como  $s$  es un cociclo, entonces  $f_q(s)$  es un cociclo en  $D^q$ . Como  $f_q(s) = \delta \circ k_q(s) + k_{q-1} \circ d(s) = \delta \circ k_q(s)$  se sigue que  $f_q(s)$  es una cofrontera. Se verifica que esto es independiente de la elección del representante en  $\sigma$ . Por lo tanto  $[f_q(s)] = 0 \in H^q(D^*)$  y se concluye que  $f_* = z$ .  $\square$

<sup>1</sup>Un  $K$ -módulo  $M$  es libre de torsión si para  $k \in K$ ,  $v \in M$ , el producto  $kv = 0$  implica que  $k = 0$  ó  $v = 0$ .

**1.11 Teorema (Lema de Poincaré).** Sea  $M$  una variedad diferenciable, entonces

$$H_{D_n}^q(M) \cong H_{D_n}^q(M \times \mathbb{R})$$

*Prueba.* Definimos aplicaciones  $M \xrightarrow{i_t} M \times \mathbb{R}$ ,  $i_t(x) = (x, t) \in M \times \mathbb{R}$ ,  $x \in M$ ,  $t \in \{0, 1\}$ , que son homotópicas en el sentido usual. Si  $M \times \mathbb{R} \xrightarrow{p} M$  es la proyección sobre el primer factor, la composición  $\pi \circ i_t = \text{id}_M$  y su diferencial es el morfismo identidad a nivel de formas diferenciales, conmuta con el operador derivada exterior y por lo tanto tenemos un mapeo de cocadenas

$$\Omega^*(M) \xrightarrow{(\pi \circ i_t)_*} \Omega^*(M) \quad \text{el cual induce} \quad H_{D_n}^q(M) \xrightarrow{(\pi \circ i_t)_*} H_{D_n}^q(M)$$

que en ambos casos es la identidad.

Resta verificar que  $(i_t \circ \pi)^*$  es la identidad en  $\Omega^*(M \times \mathbb{R})$ .

Observemos que si  $\{dx_I\}$  es una base de  $\Omega^q(U)$ ,  $U \subset M$  y  $t \in \mathbb{R}$ , entonces  $\{\pi^*(dx_I)\} \cup \{dt\}$  es base de  $\Omega^{q+1}(U \times \mathbb{R})$ . En general, si  $U = M$  y  $\omega$  es una forma en  $M$  podemos suponer que cualquier  $q$ -forma en  $M \times \mathbb{R}$  se puede representar en términos del pullback  $\pi^*$  como:

$$\begin{array}{ll} \pi^*(\omega) \wedge f(x, t) dt & \text{para alguna } \omega \in \Omega^{q-1}(M) \\ \pi^*(\omega) \cdot f(x, t) & \text{para alguna } \omega \in \Omega^q(M) \end{array}$$

Definimos los morfismos  $h_q: \Omega^q(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^{q-1}(M \times \mathbb{R})$  como sigue:

$$\begin{aligned} h_q(\pi^*(\omega) \cdot f(x, t)) &= 0 \\ h_q(\pi^*(\omega) \wedge f(x, t) dt) &= \pi^*(\omega) \cdot g \end{aligned}$$

donde  $g = \int_0^1 f(x, u) du$ . La homotopía buscada será  $(-1)^{q-1}(d \circ h_q - h_{q+1} \circ d)$ :

Por un lado se tiene,

$$\begin{aligned} d \circ h_q(\pi^*(\omega) \wedge f(x, t) dt) &= d(\pi^*(\omega) g) \\ &= d\pi^*(\omega) g + (-1)^{q-1} \pi^*(\omega) \wedge f(x, t) dt \end{aligned}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} h_{q+1} \circ d(\pi^*(\omega) \wedge f(x, t) dt) &= h_{q+1}(d\pi^*(\omega) \wedge f(x, t) dt \\ &\quad + (-1)^{q-1} \pi^*(\omega) \wedge df(x, t) \wedge dt) \\ &= h_{q+1}(d\pi^*(\omega) \wedge f(x, t) dt) = d\pi^*(\omega) \cdot g \end{aligned}$$

y de ambas se concluye que  $(-1)^{q-1}(d \circ h_q - h_{q+1} \circ d) = \text{id}_{\Omega^q(M \times \mathbb{R})}$  e induce la identidad en  $H_{D_n}^q(M \times \mathbb{R})$ .  $\square$

**1.12 Proposición.** Si  $M$  y  $N$  son variedades difeomorfas entonces

$$H_{DR}^*(N) \cong H_{DR}^*(M)$$

*Prueba.*

Sea  $g: M \rightarrow N$  diferenciable. Se induce un morfismo  $g^*: H_{DR}^*(N) \rightarrow H_{DR}^*(M)$ :

El pullback  $g^*: \Omega^p(N) \rightarrow \Omega^p(M)$  es un morfismo de espacios vectoriales que conmuta con el operador derivada exterior (ver I.4.3). Entonces  $g^*$  manda formas cerradas en cerradas y exactas en exactas e induce un morfismo de complejos  $\Omega^*(N) \rightarrow \Omega^*(M)$  y un morfismo a nivel cohomología.

Como  $g$  es difeomorfismo, la inversa  $g^{-1}$  induce  $(g^{-1})^*$  que es la inversa de  $g^*$  y  $(g^{-1})^* \circ g^* = id$  induce la identidad en cohomología.  $\square$

**1.13 Corolario.** Sea  $M$  una variedad diferenciable y sea  $\omega$  una  $p$ -forma cerrada definida en algún abierto  $U \subset M$ . Para todo  $x \in U$  existe una vecindad  $V$  tal que  $\omega$  es exacta en la restricción  $\omega|_V$ .

*Prueba.* Sea  $x \in M$  y elijamos una carta local  $(U, \phi)$  en torno a  $x$ . Expresemos  $\omega$  en términos de dicha carta. Podemos encontrar  $V \subset U$  una vecindad de  $x$  difeomorfa a un disco  $D \subset \phi(U)$ . Entonces  $H_{DR}^p(V) \cong H_{DR}^p(D) = 0$  y por lo tanto la restricción  $\omega|_V$  es exacta en  $V$ .  $\square$

## 2. Gavillas

En esta sección daremos los fundamentos de la teoría de gavillas y consta de tres partes: en la primera se dan las definiciones y propiedades básicas de *gavillas de módulos* sobre un dominio entero  $K$ . En la segunda daremos la construcción del *espacio étalé* pues a partir de él se contruyen las gavillas que se utilizan con más frecuencia. En la última parte introduciremos las *gavillas suaves*, las cuales son fácil encontrarlas en variedades diferenciales. Utilizaremos resoluciones suaves de gavillas para plantear teorías de cohomología en la siguiente sección.

En lo sucesivo asumiremos que  $M$  es una variedad diferenciable y paracompacta. Trabajaremos con gavillas de módulos sobre un dominio entero  $K$ . En nuestro caso bastará considerar  $K = \mathbb{R}$ .

### A) Gavillas de módulos.

**2.1 Definición.** Una *pregavilla de módulos sobre  $M$*  es un funtor contravariante

$$\begin{aligned} \text{Top}(M) &\rightarrow \text{Mod}_K \\ U &\mapsto \mathcal{E}_U \end{aligned}$$

donde los objetos en  $\text{Top}(M)$  son abiertos de  $M$  y los morfismos son las inclusiones y  $\text{Mod}_K$  es la categoría de módulos sobre  $K$ :

- 1)  $\mathcal{S}_\emptyset = 0$ .
- 2)  $V \hookrightarrow U$  induce  $\mathcal{S}_V \leftarrow \mathcal{S}_U$  (llamado *restricción* y denotado  $\rho_V^U$ ).
- 3)  $\mathcal{S}_U \leftarrow \mathcal{S}_U$  es la identidad.
- 4)  $W \hookrightarrow V \hookrightarrow U$  inducen  $\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$ .

Una *pregavilla* la denotaremos como  $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_U, \rho_V^U\}$ .

**2.1 Definición.** Una *gavilla* es una *pregavilla* que satisface lo siguiente:  
Para cada abierto  $U \subset M$  y para cada descomposición de  $U$  en abiertos:

$$U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha,$$

(G1) Dados  $f, g \in \mathcal{S}_U$

$$\rho_{U_\alpha}^U f = \rho_{U_\alpha}^U g \text{ para toda } \alpha \in A \text{ implica } f = g.$$

(G2) Para cualquier  $f_\alpha \in \mathcal{S}_{U_\alpha}$ ,

$$\rho_{U_\alpha \cap U_\beta}^{U_\alpha} f_\alpha = \rho_{U_\alpha \cap U_\beta}^{U_\beta} f_\beta \text{ implica que existe } f \in \mathcal{S}_U \text{ tal que } \rho_{U_\alpha}^U f = f_\alpha.$$

**2.3 Ejemplo.** Asignando a cada abierto  $U \subset M$  el conjunto de funciones diferenciables definidas en  $U$ :

$$U \mapsto C^\infty(U)$$

junto con las restricciones usuales de funciones, se tiene una *pregavilla* de  $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales. Además se satisface (G1) y (G2):

Sea  $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$ . Si  $f \in C^\infty(U)$  y  $f|_{U_\alpha} = 0$  para toda  $\alpha$ , entonces  $f = 0$ .

Sean  $f_\alpha$  y  $f_\beta$  definidas en  $U_\alpha$  y en  $U_\beta$  respectivamente. Si  $f_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = f_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$  podemos definir una función global

$$f(u) = f_\alpha(u) \quad \text{si } u \in U_\alpha$$

cumpléndose que  $f \in C^\infty(U)$  y  $f|_{U_\alpha} = f_\alpha$ . A esta *gavilla* se le llama *gavilla de funciones diferenciales* y la denotamos  $\mathcal{C}_M^\infty$ .

**2.4 Ejemplo.** Similarmente, las asignaciones

$$U \mapsto \Omega^p(U) \quad \nu \quad U \mapsto \mathcal{X}(U)$$

son *gavillas* de  $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales, llamadas *gavilla de  $p$ -formas* y *gavilla de campos vectoriales* sobre  $M$ . Las que denotaremos respectivamente  $\Omega^p$  y  $\mathcal{X}$ .

**2.5 Definición.** Sean  $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_U, \rho_U^V\}$ ,  $\mathcal{S}' = \{\mathcal{S}'_U, \rho'^V_U\}$  gavillas. Un *morfismo de gavillas* es una colección de morfismos  $\{\varphi_U\}$

$$\varphi_U: \mathcal{S}_U \rightarrow \mathcal{S}'_U$$

tales que

$$\rho'^V_U \circ \varphi_U = \varphi_V \circ \rho^V_U \quad \text{si } V \subset U$$

Un morfismo de gavillas es *inyectivo* (suprayectivo), si cada  $\varphi_U$  es inyectivo (suprayectivo).

**2.6 Ejemplo.** El operador derivada exterior es un morfismo de gavillas

$$\Omega^p \xrightarrow{d} \Omega^{p+1}$$

**El límite directo de una pregavilla.**

Sea  $\mathcal{S}$  una pregavilla de módulos sobre  $M$ . Tomemos un punto  $m$  en  $M$  y consideremos todos los abiertos  $U$  tales que  $m \in U$  y formemos la unión ajena de los módulos  $\mathcal{S}_U$  asociados a dichos abiertos:

$$\bigsqcup_{m \in U} \mathcal{S}_U = \mathcal{S}_m^*$$

En  $\mathcal{S}_m^*$  decimos que:

$$f \in \mathcal{S}_U \text{ y } g \in \mathcal{S}_V \text{ son equivalentes si y sólo si } f|_W = g|_W$$

para alguna  $W \subset U \cap V$  vecindad de  $m$ .

**2.7 Definición.** Al conjunto clases de equivalencia en  $\mathcal{S}_m^*$  se le denomina *tallo sobre  $m$*  y se denota por  $\mathcal{S}_m$ . La proyección  $\text{lim}_{\rightarrow} \mathcal{S}_U \rightarrow \mathcal{S}_m$  manda  $f$  a su clase  $f_m$  y se le conoce como *límite directo* de  $\mathcal{S}_U$  en  $m$ .

### B) El espacio étalé.

**2.8 Definición.** Un *espacio étalé de  $K$  módulos* es una terna

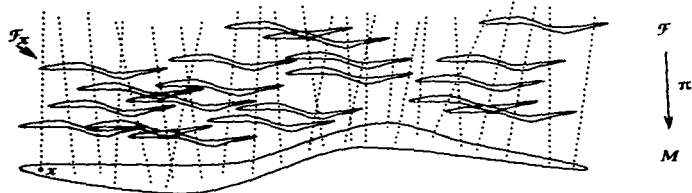
$$\mathcal{F} \xrightarrow{\pi} M$$

donde

- 1)  $\mathcal{F}$  y  $M$  son espacios topológicos
- 2)  $\pi$  es un homeomorfismo local (llamado frecuentemente proyección)
- 3) Para cada  $x \in M$ ,  $\pi^{-1}(x) := \mathcal{F}_x$  es un  $K$ -módulo (llamado fibra sobre  $x$ )
- 4) Las operaciones en  $\mathcal{F}_x$  son continuas respecto a la topología de  $\mathcal{F}$ .

Nosotros trabajaremos con espacios étalés sobre una variedad diferenciable  $M$ .

## ESPACIO ÉTALÉ, JUNTO CON SU PREGAVILLA DE SECCIONES



**2.9 Ejemplo.** Sea  $\mathcal{K} = M \times K$  con la topología producto y  $\pi: M \times K \rightarrow M$  la proyección sobre  $M$ . De esta forma cada punto  $x \in M$  tiene asociada una copia de  $K$ :

$$\mathcal{K}_x = \{x\} \times K$$

y podemos identificar a  $\mathcal{K}_x$  con  $K$ .

**2.10 Definición.** Una *sección* del espacio étalé  $\mathcal{F}$  es una aplicación continua  $U \subset M \xrightarrow{s} \mathcal{F}$  tal que  $\pi \circ s = 1_U$ . El conjunto de las secciones de  $\mathcal{F}$  definidas en un abierto  $U$  tiene estructura de  $K$ -módulo y lo denotaremos  $\Gamma(U, \mathcal{F})$  ó  $\Gamma(\mathcal{F}|_U)$ . Definiendo la restricción de secciones como la restricción de funciones continuas, se puede contruir una pregavilla de módulos  $\Gamma(\mathcal{F})$  llamada *pregavilla de secciones de  $\mathcal{F}$* .

**2.11 Proposición-Definición.** Toda gavilla  $\mathcal{S}$  tiene asociado un espacio étalé  $\varinjlim \mathcal{S}$  que se le llama *límite directo o espacio étalé de gérmenes*:

$$\varinjlim \mathcal{S} = \bigcup_{m \in M} \mathcal{S}_m$$

cuyas fibras son los tallos sobre  $m$ , y cuya proyección es  $\pi: \mathcal{S} \rightarrow M$ , tal que  $f_m \mapsto m$ .

*Prueba.* Se definen las operaciones en  $\varinjlim \mathcal{S}$  heredándolas de la gavilla original:

Sean  $f_m, g_m \in \mathcal{S}_m$  y sean  $f \in \mathcal{S}_U, g \in \mathcal{S}_V$  representantes de cada clase. Entonces existe una vecindad de  $m, W \subset U \cap V$ , donde las restricciones  $f|_W, g|_W \in \mathcal{S}_W$  son operables. Definimos la suma y producto por  $k \in K$ :

$$\begin{aligned} (b) \quad f_m + g_m &= \varinjlim P(f|_W + g|_W) \\ kf_m &= \varinjlim P(kf|_W) \end{aligned}$$

Se verifica fácilmente que esta definición no depende de los representantes elejidos.

Para darle una topología a  $\varinjlim \mathcal{S}$ . Tomemos  $f \in \mathcal{S}_U$  y su límite directo  $\mathfrak{f}_p$  en un punto  $p \in U$ . Definimos los abiertos  $O_f$  como el conjunto de clases que define  $f$  en  $\mathcal{S}_U$ , es decir,  $O_f = \{\mathfrak{f}_p \mid p \in U\}$ . La familia de abiertos

$$\{O_f \in \mathcal{S} \mid f \in \mathcal{S}_U, U \subset M\}$$

forma una base para la topología de  $\varinjlim \mathcal{S}$ , lo cual se verifica fácilmente.

Las operaciones en los tallos son continuas:

Sean  $s_p, t_p \in \mathcal{S}_p$  y supongamos que  $\varinjlim f = s_p + t_p$  para alguna  $f \in \mathcal{S}_p^*$ , entonces  $O_f$  es vecindad de  $s_p + t_p$ . Similarmente existen  $g, h \in \mathcal{S}_p^*$  tales que  $\varinjlim g = s_p$  y  $\varinjlim h = t_p$ . Existe una vecindad  $V$  de  $p$  en donde  $f|_V, g|_V, h|_V \in \mathcal{S}_V$  y se cumple que  $\varinjlim f|_V = \varinjlim g|_V + \varinjlim h|_V$ . Tomando  $O_{g|_V} \times O_{h|_V}$  como vecindad de  $(s_p, t_p)$  cumple con aplicarse dentro de  $O_f$  bajo la suma. La continuidad del producto por escalares se verifica similarmente.  $\square$

**2.12 Ejemplos.** Se tienen los espacios étalés de gérmenes de funciones, gérmenes de  $p$ -formas y gérmenes de campos vectoriales, los que denotaremos respectivamente

$$C^\infty, \mathcal{E}^p = \varinjlim \Omega^p, \mathcal{T} = \varinjlim \mathfrak{X}$$

**2.13 Definición.** Un *morfismo de espacios étalés* es una aplicación continua

$$\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$$

que cumple:

- 1) Si  $\pi$  y  $\pi'$  son las proyecciones en  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{F}'$  respectivamente, entonces

$$\pi' \circ \varphi = \pi$$

- 2) La restricción de  $\varphi$  a cada fibra es un morfismo de módulos  $\mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}'_x$ .

Un *isomorfismo de espacios étalés* es un morfismo tal que  $\mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}'_x$  es invertible. El morfismo  $\varphi$  es necesariamente un homeomorfismo local.

**2.14 Proposición.** *Un morfismo de espacios étalés*

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}'$$

induce un morfismo entre las pregavillas de secciones

$$\Gamma(\mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi} \Gamma(\mathcal{F}')$$

*Prueba.* Sea  $s$  una sección en  $\Gamma(\mathcal{F}|_U)$ . Definiendo  $f_U(s) = f \circ s$ , se tiene un morfismo  $\Gamma(\mathcal{F}|_U) \rightarrow \Gamma(\mathcal{F}'|_U)$  y la familia

$$\tilde{f} = \{f_U\}$$

conmuta con las restricciones inducidas por las inclusiones de abiertos en  $M$ .  $\square$

**2.15 Proposición.** *Un morfismo de pregavillas*

$$\mathcal{S} \xrightarrow{(\psi_U)} \mathcal{S}'$$

induce un morfismo de espacios étalés

$$\lim_{\rightarrow} \mathcal{S} \longrightarrow \lim_{\rightarrow} \mathcal{S}'$$

*Prueba.* Sea  $s \in \mathcal{S}$ , entonces  $s$  está en algún tallo  $\mathcal{S}_x$  y existe una vecindad  $U$  de  $x$  y  $f \in S_U$ , tal que  $\lim_{\rightarrow} f = s$ . Tomemos el límite  $\lim_{\rightarrow} \psi_U(f)$  en  $x$ . Si  $x \in V$  y  $g \in \mathcal{S}_V$  es otro representante de  $s$ , se verifica que  $\lim_{\rightarrow} \psi_V(g) = \lim_{\rightarrow} \psi_U(f)$ , y tenemos una aplicación bien definida:

$$\psi(s) = \lim_{\rightarrow} \psi_U(f)$$

Como en el lado derecho se toma el límite en  $x$ ,  $\psi$  manda  $\mathcal{S}_x$  en  $\mathcal{S}'_x$  por lo que conmuta con las proyecciones respectivas. La linealidad de  $\mathcal{S}_x \rightarrow \mathcal{S}'_x$  se hereda de la linealidad de las aplicaciones  $\{\psi_U\}$ . Resta entonces verificar la continuidad:

Sea  $O$  vecindad de  $\psi(s) \in \mathcal{S}'_x$ . Si  $f \in \mathcal{S}_U$  representa a  $s$ , entonces  $\psi_U(f)$  es representante de  $\psi(s)$  y  $O_{\psi_U(f)}$  es un abierto básico que lo contiene. Sea  $\pi'$  la proyección en  $\mathcal{S}'$  y tomemos  $V \subset \pi'(O \cap O_{\psi_U(f)})$  vecindad de  $x$  y sea  $W = U \cap V$ . La restricción  $f|_W$  define un abierto  $O_{f|_W}$  que contiene a  $s$  y que se aplica dentro de  $O$  bajo  $\psi$ , verificándose la continuidad de  $\psi$ .  $\square$

**2.16 Corolario.** *Un morfismo de gavillas  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$  es inyectivo (suprayectivo) si y sólo si el morfismo inducido  $\lim_{\rightarrow} \mathcal{S} \rightarrow \lim_{\rightarrow} \mathcal{S}'$  es inyectivo (suprayectivo).*

**2.17 Proposición.** *Sea  $\mathcal{S}$  una gavilla, entonces  $\mathcal{S}$  es isomorfa a la gavilla de secciones del espacio étalé de gérmenes de  $\mathcal{S}$ :*

$$\Gamma(\lim_{\rightarrow} \mathcal{S}) \cong \mathcal{S}$$

*Prueba.* Sea  $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_U, \rho_U^V\}$ . Definimos

$$\gamma_U: \mathcal{S}_U \rightarrow \Gamma((\lim_{\rightarrow} \mathcal{S})|_U) \text{ tal que } f \mapsto \sigma$$

donde  $\sigma$  es la sección  $p \mapsto \lim_{\rightarrow} f$ , tomando el límite en  $p \in U$ .

Se puede verificar que  $\{\gamma_U\}$  es un isomorfismo de gavillas. Para los detalles ver [Wa].  $\square$



**2.18 Observación.** En adelante no haremos distinción alguna entre la una gavilla  $\mathcal{S}$  sobre  $M$  y el espacio étalé  $\varinjlim \mathcal{S} \xrightarrow{\pi} M$  ya que ambos poseen exactamente la misma información, es decir, podemos identificar el módulo  $\mathcal{S}_U$  con las secciones  $\Gamma(U, \varinjlim \mathcal{S})$ .

Denotaremos con  $\Gamma(\mathcal{S})$  el  $K$ -módulo de secciones de  $\varinjlim \mathcal{S}$  definidas en  $M$  y  $\Gamma(\mathcal{S}|_U)$  serán las secciones de  $\varinjlim \mathcal{S}$  definidas sobre  $U$ . A ambas las llamaremos *secciones de  $\mathcal{S}$* .  $\mathcal{S}_x$  denotará el tallo sobre un punto  $x \in M$ , construido como en (2.11). Gracias al corolario (2.16) es posible verificar que un morfismo de gavillas  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$  es inyectivo o suprayectivo, verificándolo en cada tallo  $\mathcal{S}_x \rightarrow \mathcal{S}'_x$ ,  $x \in M$ .

**2.19 Definición.** Un subconjunto  $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$  es una *subgavilla* si  $\mathcal{S}_x \cap \mathcal{R}$  es un submódulo de  $\mathcal{S}_x$  para todo punto  $x \in M$ .

**2.20 Ejemplos.** Sea  $\varphi: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$  un morfismo de gavillas. El subconjunto de  $\mathcal{S}$  que se aplica al cero bajo el morfismo inducido en los tallos  $\mathcal{S}_x \xrightarrow{\varphi} \mathcal{T}_x$ :

$$\bar{\varphi}(\mathcal{S}_x) = 0 \quad \text{para todo } x \in M$$

es una subgavilla, que denotaremos  $\ker \varphi$  y llamaremos *subgavilla kernel*. Análogamente se define la *subgavilla imagen*, que denotaremos  $\text{im } \varphi \subset \mathcal{T}$ .

**2.21 Corolario.** Sea  $\mathcal{S}$  una gavilla y  $\mathcal{R}$  una subgavilla de  $\mathcal{S}$ . El cociente

$$\mathcal{S}/\mathcal{R} = \bigcup_{x \in M} \mathcal{S}_x/\mathcal{R}_x \quad \text{es una gavilla.}$$

*Prueba.* Sea  $\Omega = \mathcal{S}/\mathcal{R}$  y  $\varphi: \mathcal{S} \rightarrow \Omega$  la proyección sobre el cociente. Definimos  $V \subset \Omega$  abierto si y sólo si  $\varphi(V) \subset \mathcal{S}$  es abierto. Definimos  $\pi$  como la única aplicación tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{\varphi} & \Omega \\ & \searrow \pi & \downarrow \pi \\ & & M \end{array}$$

Necesariamente  $\pi$  es un homeomorfismo local y es fácil ver que las operaciones en  $\Omega_x$  son continuas.  $\square$

Es posible definir el cociente de dos gavillas  $\mathcal{S}/\mathcal{R}$  como la asignación:

$$U \mapsto \mathcal{S}_U/\mathcal{R}_U$$

para cada abierto  $U$  de  $M$ , pero resultaría más complicado verificar que en efecto se cumplen los axiomas (G1) y (G2).

**2.22 Ejemplo.** Sea  $\mathcal{S} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{S}'$  un morfismo de gavillas, y sean  $\mathcal{R} = \ker \varphi$  y  $\mathcal{R}' = \text{im } \varphi$ , es fácil ver que  $\mathcal{S}/\mathcal{R} \cong \mathcal{S}'/\mathcal{R}'$ .

**2.23 Definición.** Una composición de morfismos de gavillas de la forma

$$\dots \rightarrow \mathcal{S}^{i-1} \xrightarrow{\varphi^{i-1}} \mathcal{S}^i \xrightarrow{\varphi^i} \mathcal{S}^{i+1} \rightarrow \dots$$

tal que  $\text{im } \varphi^{i-1} = \ker \varphi^i$  se llamará **sucesión exacta** de gavillas. Si  $0 = M \times 0$  es la gavilla constante cuyas fibras son el módulo cero, una sucesión exacta de la forma

$$0 \rightarrow \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'' \rightarrow 0$$

se llamara sucesión **exacta corta** de gavillas.

**2.24 Ejemplo.** Si  $\mathcal{R}$  es subgavilla de  $\mathcal{S}$ , la sucesión

$$0 \rightarrow \mathcal{R} \hookrightarrow \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}/\mathcal{R} \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta, lo que se verifica directamente. Se puede probar que una toda sucesión exacta corta es isomorfa a una como ésta. Ver [Ha] II.1, p.66.

**2.25 Definición.** Una sucesión exacta de gavillas de la forma

$$0 \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}^0 \rightarrow \mathcal{C}^1 \rightarrow \dots$$

se le llama **resolución** de  $\mathcal{S}$  y la abreviaremos  $0 \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}^*$ .

### C) Gavillas suaves.

En lo sucesivo denotaremos con  $\Gamma(\mathcal{S})$  a las secciones globales de  $\mathcal{S}$  y con  $\Gamma(\mathcal{S}|_U)$ ,  $U \subset M$ , a las locales.

**2.26 Definición.** Una gavilla  $\mathcal{S}$  es **suave** si para todo cerrado  $U \subset M$  la restricción

$$\Gamma(\mathcal{S}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{S}|_U) \quad \text{es suprayectiva.}$$

**2.27 Observación.** La suavidad de una gavilla implica la posibilidad de extender secciones locales sobre cerrados a una sección global. En variedades diferenciables se tiene la capacidad de utilizar particiones de la unidad, con las cuales se pueden construir secciones globales suaves a partir de cualquier sección local.

**2.28 Definición.** Una gavilla  $\mathcal{S}$  es **fina** si para cualquier cubierta abierta localmente finita  $\{U_i\}$  de  $M$  existen endomorfismos  $\{l_i\}$  esto es, aplicaciones continuas  $l_i: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  que son endomorfismos en las fibras, tales que:

- 1) El soporte de  $l_i$  está contenido en  $U_i$ ,
- 2)  $\sum_i l_i = \text{id}$

es decir,  $\mathcal{S}$  es fina si acepta particiones de la unidad.

**2.29 Proposición.** Las gavillas de gérmenes de funciones  $C_M^\infty$  y de gérmenes de  $p$ -formas  $\mathcal{E}_M^p$ , son gavillas finas.

*Prueba.* Sea  $\{U_i\}$  cubierta abierta localmente finita de  $M$  y  $\{\phi_i\}$  partición de la unidad subordinada a ella. Sea  $\Omega^p(U)$  un módulo en la gavilla  $\Omega^p$  y definimos  $\tilde{l}_i: \Omega^p(U) \rightarrow \Omega^p(U)$  como

$$\tilde{l}_i(\omega) = \phi_i|_U \cdot \omega$$

que es un morfismo de módulos. Sea  $\omega \in \mathcal{E}_M^p$  y  $\omega \in \Omega^p(U)$  un representante. Consideremos el morfismo inducido por  $\tilde{l}_i$  en  $\mathcal{E}^p$  (ver 2.15):

$$l_i(\omega) = \lim_{\rightarrow} (\phi_i|_U \cdot \omega)$$

Se cumple que el soporte de  $l_i$  es el soporte de  $\phi_i$ , y en la restricción a un tallo sobre  $x \in U$

$$\sum_i l_i(\omega) = \lim_{\rightarrow} \left( \sum_i \phi_i|_U \cdot \omega \right) = \lim_{\rightarrow} (\omega) = \omega$$

lo que implica que  $\sum_i l_i = id$  en los tallos.  $\square$

**2.30 Proposición.** Toda gavilla fina es suave

*Prueba.* Sea  $\mathcal{S}$  una gavilla fina y  $s$  una sección en  $\Gamma(\mathcal{S}|_V)$ ,  $V$  cerrado en  $M$ . Sea  $\{U_i\}$  cubierta abierta de  $V$  y  $s_i$  secciones sobre  $U_i$  tales que  $s_i|_{U_i \cap V} = s|_{U_i \cap V}$ . Sea  $U_0 = M - V$  y podemos suponer que  $\{U_i\} \cup U_0$  es cubierta localmente finita de  $M$ . Tomando  $\{l_i\}$  partición de la unidad subordinada a dicha cubierta y definiendo

$$\tilde{s} = \sum_i l_i s_i$$

se tiene que  $\tilde{s}|_V = s$ .  $\square$

**2.31 Ejemplo.** Las gavilla de gérmenes de funciones y de  $p$ -formas son suaves. En cambio, las gavillas constantes no son suaves, y por ende, tampoco finas:

Sea  $\mathcal{X} = M \times \mathbb{R}$  la gavilla constante cuyos tallos  $\mathcal{X}_x = \mathbb{R}$  para todo punto  $x \in M$ . Sea  $U = \{\{x\} \cup \{y\}\}$  y  $s$  una sección en  $U$  tal que  $s(x) = 0$  y  $s(y) = 1$ . Naturalmente no existe sección alguna en  $\Gamma(\mathcal{X})$  (función constante global en  $M$ ) tal que su restricción a  $U$  sea  $s$ .

**2.32 Proposición.** Sea

$$0 \rightarrow \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'' \rightarrow 0$$

una sucesión exacta de gavillas. Si  $\mathcal{S}'$  es suave, entonces la sucesión de secciones globales

$$0 \rightarrow \Gamma(\mathcal{S}') \rightarrow \Gamma(\mathcal{S}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{S}'') \rightarrow 0$$

es exacta.

*Prueba.* Podemos encontrarla en [Go], II,3.5.2 o en [We], II.3.32

**3.33 Corolario.** Sea  $0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \xrightarrow{f} \mathcal{C} \rightarrow 0$  una sucesión exacta corta de gavillas. Si  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  es suave, entonces  $\mathcal{C}$  es suave.

*Prueba.* Sea  $S \subset M$  cerrado y  $s$  una sección de  $\mathcal{C}$  sobre  $S$ . La sucesión

$$0 \rightarrow \mathcal{A}|_S \rightarrow \mathcal{B}|_S \rightarrow \mathcal{C}|_S \rightarrow 0$$

sigue siendo exacta y por (3.2) la sucesión

$$0 \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}|_S) \rightarrow \Gamma(\mathcal{B}|_S) \rightarrow \Gamma(\mathcal{C}|_S) \rightarrow 0$$

es exacta. En particular existe una sección  $t$  de  $\mathcal{B}|_S$  que se aplica a  $s$ . Pero  $t$  se extiende a una sección global  $T$  de  $\mathcal{B}$ . La sección  $(f \circ T)|_V = s$ .  $\square$

**2.34 Proposición.** Sea

$$0 \rightarrow \mathcal{S}^0 \rightarrow \mathcal{S}^1 \rightarrow \dots$$

una sucesión exacta de gavillas suaves. La sucesión inducida en las secciones globales

$$(a) \quad 0 \rightarrow \Gamma(\mathcal{S}^0) \rightarrow \Gamma(\mathcal{S}^1) \rightarrow \dots$$

es exacta.

*Prueba.* Sea  $\mathcal{X}^i = \ker\{\mathcal{S}^i \rightarrow \mathcal{S}^{i+1}\}$ . La sucesión

$$0 \rightarrow \mathcal{X}^i \rightarrow \mathcal{S}^i \rightarrow \mathcal{X}^{i+1} \rightarrow 0$$

es exacta. Como  $\mathcal{X}^1 = \mathcal{S}^0$ , entonces por (3.33) la gavilla  $\mathcal{X}^2$  es suave. Repitiendo inductivamente este argumento,  $\mathcal{X}_i$  es suave y por (3.32) la sucesión

$$0 \rightarrow \Gamma(\mathcal{X}^i) \rightarrow \Gamma(\mathcal{S}^i) \rightarrow \Gamma(\mathcal{X}^{i+1}) \rightarrow 0$$

es exacta y con ello es fácil ver que la sucesión (a) es exacta.  $\square$

### 3. Cohomología de gavillas

A continuación daremos una caracterización axiomática de una teoría de cohomología de gavillas. Posteriormente veremos que es posible plantear teorías de cohomología en términos de resoluciones de gavillas suaves. Este será el caso de la cohomología de de Rham y de la singular, a partir de las cuales podemos contruir teorías de cohomología de gavillas. Se puede ver que cualesquiera dos teorías de cohomología de gavillas son isomorfas, a este resultado se le conoce como el Teorema de de Rham abstracto.

**3.1 Definición.** Una *Teoría de cohomología de gavillas*  $\mathcal{H}$  sobre  $M$  es un funtor covariante de la categoría de gavillas de  $K$ -módulos a la categoría de  $K$ -módulos:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}f(M) &\longrightarrow \mathcal{M}od_K \\ \mathcal{S} &\longmapsto H^q(M, \mathcal{S}) \end{aligned}$$

para cada  $q \in \mathbb{Z}$ , que cumple con I y II:

**I** (Las propiedades de la sección 1):

Por cada sucesión exacta corta de gavillas

$$0 \rightarrow \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'' \rightarrow 0$$

se tendrá una sucesión exacta larga de módulos

$$\dots \rightarrow H^q(M, \mathcal{S}') \rightarrow H^q(M, \mathcal{S}) \rightarrow H^q(M, \mathcal{S}'') \rightarrow H^{q+1}(M, \mathcal{S}') \rightarrow \dots$$

Por cada morfismo de sucesiones exactas cortas

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{S}' & \longrightarrow & \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{S}'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{T}' & \longrightarrow & \mathcal{T} & \longrightarrow & \mathcal{T}'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{el diagrama} & \begin{array}{ccc} H^q(M, \mathcal{S}'') & \longrightarrow & H^q(M, \mathcal{S}') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^q(M, \mathcal{T}'') & \longrightarrow & H^q(M, \mathcal{T}') \end{array} & \text{conmuta.} \end{array}$$

**II** Adicionalmente,

- $H^q(M, \mathcal{S}) = 0$  si  $q < 0$
- $H^0(M, \mathcal{S}) \cong \Gamma(\mathcal{S})$
- $H^q(M, \mathcal{S}) = 0$  si  $\mathcal{S}$  es suave.

**3.2 Definición.** Una resolución  $0 \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}^0$  tal que  $\mathcal{C}^q$  es suave para cualquier  $q \in \mathbb{N}$  se llamará *resolución suave* de  $\mathcal{S}$ .

**3.3 Proposición.** Para cada gavilla  $\mathcal{S}$  se puede construir una resolución suave

$$0 \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{S})$$

llamada *resolución canónica de  $\mathcal{S}$* .

*Prueba.* Sea  $\mathcal{S}$  una gavilla y consideremos su espacio étalé asociado. A los elementos del conjunto

$$\mathcal{C}^0(U, \mathcal{S}) = \{s: U \rightarrow \mathcal{S} \mid \pi \circ s = 1_U\}$$

se les llama *secciones discontinuas* sobre  $U \subset M$ . La asignación

$$U \mapsto \mathcal{C}^0(U, \mathcal{S})$$

para cada abierto  $U$  de  $M$  es una gavilla que denotaremos  $\mathcal{C}^0(\mathcal{S})$ . Trivialmente, cualquier gavilla de secciones discontinuas es suave.

Haciendo la identificación de  $\mathcal{S}_U$  con  $\Gamma(U, \mathcal{S})$  (ver 2.18), se sigue que  $\mathcal{S}_U$  es submódulo de  $\mathcal{C}^0(U, \mathcal{S})$  y se tiene la inclusión  $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{S})$ . Se construye también la sucesión exacta corta:

$$0 \rightarrow \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{S}) \rightarrow 0$$

donde  $\mathcal{F}(\mathcal{S}) = \mathcal{C}^0(\mathcal{S})/\mathcal{S}$ .

Pasemos ahora a construir una resolución de  $\mathcal{S}$  siguiendo inductivamente el procedimiento de arriba:

Definimos como antes  $\mathcal{C}^0(\mathcal{S})$  y  $\mathcal{F}^1(\mathcal{S}) = \mathcal{C}^0(\mathcal{S})/\mathcal{S}$ ,

$$\mathcal{C}^1(\mathcal{S}) = \mathcal{C}^0(\mathcal{F}^1(\mathcal{S}))$$

$$\mathcal{C}^2(\mathcal{S}) = \mathcal{C}^0(\mathcal{F}^2(\mathcal{S})), \quad \text{donde } \mathcal{F}^2(\mathcal{S}) = \mathcal{C}^1(\mathcal{S})/\mathcal{F}^1(\mathcal{S}).$$

⋮

$$\mathcal{C}^i(\mathcal{S}) = \mathcal{C}^0(\mathcal{F}^i(\mathcal{S})), \quad \text{donde } \mathcal{F}^i(\mathcal{S}) = \mathcal{C}^{i-1}(\mathcal{S})/\mathcal{F}^{i-1}(\mathcal{S}).$$

Las gavillas  $\mathcal{C}^j(\mathcal{S})$  son todas suaves pues son de secciones discontinuas. Además, las sucesiones

$$0 \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{F}^1(\mathcal{S}) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathcal{F}^{i-1}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{C}^i(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{F}^i(\mathcal{S}) \rightarrow 0$$

son exactas y a partir de ellas se construye una sucesión exacta: la resolución canónica de  $\mathcal{S}$ .  $\square$

**3.4 Corolario.** La resolución canónica de  $\mathcal{S}$  induce un complejo de gavillas  $\mathcal{C}^*(\mathcal{S})$ :

$$0 \rightarrow \Gamma(\mathcal{S}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{C}^0(\mathcal{S})) \rightarrow \Gamma(\mathcal{C}^1(\mathcal{S})) \rightarrow \dots$$

donde  $\Gamma(\cdot)$  representa las secciones globales.

Es fácil ver que  $\mathcal{C}^*(\mathcal{S})$  es efectivamente un complejo. Sin embargo puede darse que sea también una sucesión exacta (tal es el caso si  $\mathcal{S}$  es suave, (ver 2.34)). Sin embargo esto no es cierto en todos los casos y ello se desprende de la siguiente observación: Si  $\mathcal{S} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{S}'$  es un morfismo de gavillas suprayectivo no sucede necesariamente que el morfismo inducido  $\Gamma(\mathcal{S}) \xrightarrow{\varphi} \Gamma(\mathcal{S}')$  también lo sea.<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Por ejemplo, si  $\mathcal{S} = M \times \mathbb{R}$  y  $\mathcal{S}'_x = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{S}'_x = 0$  para  $x \neq x_0$ .

**3.5 Teorema.** *Los módulos de cohomología  $H^q(M, \mathcal{S}) := H^q(C^*(\mathcal{S}))$  definen una teoría de cohomología de gavillas*

$$\mathcal{S} \xrightarrow{F} H^q(M, \mathcal{S})$$

*Prueba.* Debemos verificar en primer lugar que  $F$  es un funtor covariante y ver que se satisfacen la parte I y II de (3.1).

Sea  $\mathcal{S} \xrightarrow{h} \mathcal{T}$  un morfismo de gavillas. A partir de las resoluciones

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{C}^*(\mathcal{S}) & & \\ & & \searrow & & \downarrow h & & \\ & & & & \mathcal{T} & \longrightarrow & \mathcal{C}^*(\mathcal{T}) \end{array}$$

construiremos un morfismo entre los complejos:

$$C^*(\mathcal{S}) \xrightarrow{h^*} C^*(\mathcal{T})$$

ya que con ello, las propiedades functoriales y las requeridas en el grupo de axiomas (I) se satisfacen, gracias a los resultados de la sección 1.

El morfismo  $h$  induce un morfismo entre las secciones

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0(\mathcal{S}) & \xrightarrow{h^0} & \mathcal{C}^0(\mathcal{T}) \\ s & \mapsto & h \circ s \end{array}$$

que su vez induce un morfismo entre los cocientes:

$$\mathcal{F}^1(\mathcal{S}) = \mathcal{C}^0(\mathcal{S})/\mathcal{S} \xrightarrow{\bar{h}^0} \mathcal{C}^0(\mathcal{T})/\mathcal{T} = \mathcal{F}^1(\mathcal{T}).$$

y éste induce otro en las secciones:

$$\mathcal{C}^1(\mathcal{S}) = \mathcal{C}^0(\mathcal{F}^1(\mathcal{S})) \xrightarrow{h^1} \mathcal{C}^0(\mathcal{F}^1(\mathcal{T})) = \mathcal{C}^1(\mathcal{T}).$$

Podemos proceder como arriba y definir inductivamente morfismos

$$\mathcal{C}^i(\mathcal{S}) \xrightarrow{h^i} \mathcal{C}^i(\mathcal{T})$$

para cada  $i \in \mathbb{Z}$  y los morfismos inducidos en las secciones globales

$$\Gamma(\mathcal{C}^1(\mathcal{S})) \xrightarrow{h^1} \Gamma(\mathcal{C}^1(\mathcal{T}))$$

forman el morfismo  $h^*$  que buscamos.

Ahora, si  $\mathcal{S}$  es suave (2.34) garantiza que la resolución  $0 \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}^*(\mathcal{S})$  induce una sucesión exacta en las secciones globales, lo que en este contexto se traduce a que  $C^*(\mathcal{S})$  es una sucesión exacta, luego  $H^q(M, \mathcal{S}) = 0$  para  $q > 0$ . Con ello (II.c) se cumple. Resta verificar (II.b):

En el complejo  $C^*(\mathcal{S})$ , el segmento  $0 \rightarrow \Gamma(\mathcal{S}) \hookrightarrow \Gamma(\mathcal{C}^0(\mathcal{S}))$  es exacto y se sigue que

$$\Gamma(\mathcal{S}) = \ker\{\Gamma(\mathcal{C}^0(\mathcal{S})) \rightarrow \Gamma(\mathcal{C}^1(\mathcal{S}))\} = H^0(M, \mathcal{S}). \quad \square$$

**3.6 Definición.** Una resolución de  $\mathcal{S}$

$$0 \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{A}^*$$

es *acíclica* si  $H^q(M, \mathcal{A}^p) = 0$  para toda  $q > 0$  y  $p \geq 0$ .

Una resolución suave es acíclica.

A continuación daremos un resultado que nos permite, por un lado, plantear teorías de cohomología de gavillas en términos de resoluciones acíclicas, y por otro establecer la igualdad de cualesquiera dos teorías.

**3.7 Teorema (de Rham).** Sea  $\mathcal{S}$  una gavilla sobre  $M$  y sea

$$0 \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{A}^*$$

una resolución acíclica de  $\mathcal{S}$ . Existe un isomorfismo

$$H^i(\Gamma(\mathcal{A}^*)) \xrightarrow{\gamma^i} H^i(M, \mathcal{S}).$$

*Prueba.* De la resolución podemos extraer las siguientes sucesiones exactas cortas:

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{X}^{i-1} \rightarrow \mathcal{A}^{i-1} \rightarrow \mathcal{X}^i \rightarrow 0$$

donde  $\mathcal{X}^i = \ker\{\mathcal{A}^i \rightarrow \mathcal{A}^{i+1}\}$  y  $\mathcal{X}^0 = \mathcal{S}$ . Por (3.5) se induce una sucesión exacta larga, que por ser la resolución acíclica, es de la forma

$$0 \rightarrow \Gamma(\mathcal{X}^{i-1}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}^{i-1}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{X}^i) \rightarrow H^1(M, \mathcal{X}^{i-1}) \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

En el complejo  $\Gamma(\mathcal{A}^*)$ , observemos que  $\Gamma(\mathcal{X}^i) = \ker\{\Gamma(\mathcal{A}^i) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}^{i+1})\}$ . A partir de la sucesión exacta larga, se deduce el isomorfismo:

$$H^i(\Gamma(\mathcal{A}^*)) = \frac{\Gamma(\mathcal{X}^i)}{\text{im}\{\Gamma(\mathcal{A}^{i-1}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{X}^i)\}} \xrightarrow{\gamma_i^i} H^i(M, \mathcal{X}^{i-1})$$

Procederemos inductivamente. Consideremos ahora las sucesiones exactas cortas:

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{X}^{i-j} \rightarrow \mathcal{A}^{i-j} \rightarrow \mathcal{X}^{i-j+1} \rightarrow 0$$

para  $2 \leq j \leq i$ , que inducen sucesiones exactas largas en cohomología:

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow H^{j-1}(M, \mathcal{X}^{i-j+1}) \xrightarrow{\gamma_j^{j-1}} H^j(M, \mathcal{X}^{i-j}) \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

y se sigue que  $\gamma_j^j$  son isomorfismos y tenemos una composición de isomorfismos

$$\gamma^i = \gamma_i^i \circ \gamma_{i-1}^i \circ \gamma_{i-2}^i \circ \dots \circ \gamma_2^i \circ \gamma_1^i$$

$H^i(\Gamma(\mathcal{A}^*)) \rightarrow H^1(M, \mathcal{X}^{i-1}) \rightarrow H^2(M, \mathcal{X}^{i-2}) \rightarrow \dots \rightarrow H^i(M, \mathcal{X}^0) = H^i(M, \mathcal{S})$   
que es el isomorfismo buscado.  $\square$

Este teorema garantiza la existencia de un isomorfismo. Sin embargo es posible darlo explícitamente en algunos casos particulares. Más adelante lo daremos para establecer la equivalencia entre la cohomología de de Rham y la singular.



**La cohomología de de Rham.**

Veremos que la cohomología de de Rham es una teoría de cohomología de gavillas.

Sea  $\mathcal{E}^p$  el espacio étalé sobre la gavilla de  $p$ -formas. El operador derivada exterior es un morfismo de gavillas que induce un morfismo

$$\mathcal{E}_x^{p-1} \xrightarrow{d} \mathcal{E}_x^p$$

para cada  $x \in M$ , que actúa sobre gérmenes de  $p$ -formas, por lo que cumple  $d^2 = 0$  y se tiene una sucesión

$$\mathcal{E}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2 \xrightarrow{d} \dots$$

que cumple la condición de cociclo en los tallos. Veremos que la sucesión

$$(a) \quad 0 \rightarrow \mathcal{R} \xrightarrow{i} \mathcal{E}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2 \xrightarrow{d} \dots$$

es exacta:

Consideremos  $\mathcal{E}^0 = \mathcal{C}^\infty$ , la gavilla de gérmenes de funciones. Definiendo  $\mathcal{R} \xrightarrow{i} \mathcal{E}^0$  como  $a \mapsto f = a$  la función constante  $a$ , el morfismo  $i$  es inyectivo y la exactitud se verifica en  $\mathcal{R}$ . Similarmente se verifica en  $\mathcal{E}^0$ . La exactitud en el resto de la sucesión es consecuencia de (1.13), que dice que toda forma cerrada es localmente exacta (en una vecindad de  $x \in M$ , homeomorfa a un disco) y como los elementos de  $\mathcal{E}^q$  son gérmenes de formas. Para  $x \in M$ , la sucesión

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}_x^0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_x^1 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_x^2 \xrightarrow{d} \dots$$

es exacta y por lo tanto (a) es una resolución, que de hecho es suave, ya que cada término es suave.

**3.8 Corolario.** *La cohomología de de Rham es una teoría de cohomología de gavillas, además*

$$H_{DR}^q(M) \cong H^q(M, \mathcal{R})$$

*Prueba.* La resolución

$$0 \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{E}^0$$

es acíclica pues  $\mathcal{E}^p$  es fina para  $0 \leq p \leq \dim M$ . Por (3.7) se tiene el isomorfismo

$$H^q(M, \mathcal{R}) \cong H^q(\Gamma(\mathcal{E}^0)) = H_{DR}^q(M)$$

para  $0 \leq p \leq \dim M$ .  $\square$

### La cohomología singular.

Veremos que la cohomología singular es posible plantearla, al igual que la de de Rham, en términos de una resolución suave.

Al final del capítulo I se introdujo el espacio vectorial generado por los simplejos singulares suaves en  $U \subset M$  y se les denotó como  $S_p(U, \mathbb{R})^\infty$  y a sus elementos de les llamó cadenas, que son combinaciones lineales finitas de dichos simplejos. Podemos ahora considerar el espacio dual:

$$(S_p(U, \mathbb{R})^\infty)^* \quad \text{denotado simplemente por} \quad S^p(U, \mathbb{R})$$

El operador frontera  $S_{p+1}(U, \mathbb{R})^\infty \xrightarrow{\partial} S_p(U, \mathbb{R})^\infty$  inducirá un operador en los duales:

$$\begin{aligned} S^p(U, \mathbb{R}) &\xrightarrow{\delta} S^{p+1}(U, \mathbb{R}) \\ f &\longmapsto f \circ \partial \end{aligned}$$

al que llamaremos *cofrontera*. Dado que  $\partial^2 = 0$  entonces  $\delta^2 = 0$  y podemos formar el cociente

$$H^p(U, \mathbb{R}) = \frac{\ker \{S^p(U, \mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} S^{p+1}(U, \mathbb{R})\}}{\text{im} \{S^{p-1}(U, \mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} S^p(U, \mathbb{R})\}}$$

denominado  $p$ -ésimo grupo de cohomología con coeficientes en  $\mathbb{R}$ , que es de hecho un espacio vectorial.

**3.9 Observación.** Para cada  $p \in \mathbb{Z}^+$  se puede construir una gavilla de espacios vectoriales cuyos elementos son los espacios  $S^p(U, \mathbb{R})$  para cada abierto  $U$  de  $M$ .

*Prueba.* Por cada inclusión de abiertos  $U \leftarrow V$  podemos definir un operador lineal

$$S^p(U, \mathbb{R}) \xrightarrow{|\nu} S^p(V, \mathbb{R})$$

que manda  $f$  a su restricción al subespacio generado por los  $p$ -simplejos singulares en  $V$ . Con ello tenemos una gavilla de  $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales,  $\{S^p(U, \mathbb{R}); |\nu\}$  y podemos aplicar los resultados de las secciones anteriores.  $\square$

**3.10 Proposición.** Si  $\mathcal{E}^p(\mathcal{R})$  es el espacio étalé asociado a  $\{S^p(U, \mathbb{R}); |\nu\}$ , la sucesión

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{R} \xrightarrow{\delta} \mathcal{S}^*(\mathcal{R})$$

es una resolución suave de  $\mathcal{R} = M \times \mathbb{R}$ .

*Prueba.* El operador cofrontera es un morfismo de gavillas ya que de manera obvia conmuta con la restricción  $|\nu$ . Entonces se induce un operador entre las gavillas de gérmenes correspondientes; éstos serán precisamente los operadores de la sucesión (1) que actúan sobre representantes de clases de equivalencia en

$\{S^p(U, \mathbb{R}); \nu\}$  (por eso los denotamos igual que el operador cofrntera). Como son gavillas de gérmenes de funciones (lineales y con dominios muy particulares), se construyen particiones de la unidad exactamente igual a como se hizo en el caso de  $\mathcal{C}_M^{\infty}$ . Resta entonces verificar que la sucesión es exacta. Sabemos que  $\delta^2 = 0$  y por lo tanto (1) es un complejo. Para ver que es exacta, consideremos el mapeo de complejos

$$(2) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & S^0(U, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\delta} & S^1(U, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\delta} & S^2(U, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\delta} & \dots \\ & & \downarrow id & & \downarrow id & & \downarrow id & & \\ 0 & \longrightarrow & S^0(U, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\delta} & S^1(U, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\delta} & S^2(U, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\delta} & \dots \end{array}$$

donde  $S^p(U, \mathbb{R})$  es un elemento en la gavilla de  $p$ -cocadenas sobre  $M$  y  $U$  es homeomorfo a un disco en  $\mathbb{R}^n$ . Para cada  $p = 0, 1, \dots$  se pueden construir morfismos de módulos  $h_p: S^p(U, \mathbb{R}) \rightarrow S^{p-1}(U, \mathbb{R})$  tales que

$$\delta \circ h_p + h_{p+1} \circ \delta = id$$

es decir  $id$  es un mapeo de complejos homotópico al mapeo cero  $z$ . Consideremos el diagrama que induce (2) en las pregavillas de gérmenes en el que los morfismos son los mismos pero actuando sobre representantes. Se tiene entonces un mapeo de complejos  $S^*(\mathbb{R}) \xrightarrow{id} S^*(\mathbb{R})$  homotópico a  $z$ . De ello se sigue que el morfismo inducido en cohomología  $id_*: H^p(S^*(\mathbb{R})) \rightarrow H^p(S^*(\mathbb{R}))$  es el morfismo cero. Es decir  $i_*([f]) = [f] = 0$  y por lo tanto si  $f$  es un germen de  $p$ -cocadena tal que  $\delta f = 0$  existe una  $p-1$  cocadena tal que  $\delta g = f$  y el germen que define  $g$  se aplica a  $f$ . Para los detalles de la construcción de los morfismos  $h_p$ , ver [Wa] 5.31, p.194.  $\square$

**3.11 Corolario.** *La cohomología singular induce una teoría de cohomología de gavillas. Además,*

$$H^q(\Gamma(S^*(\mathbb{R}))) \cong H^q(M, \mathcal{R}) \cong H_{\mathbb{Z}}^q(M).$$

Es posible dar un morfismo explícito entre ambas teorías de cohomología y éste se deduce del morfismo clásico por medio del cual se prueba la equivalencia de la cohomología de de Rham y la singular.

**3.12 Proposición.** *Sea  $\Omega^p$  la gavilla de  $p$ -formas y  $S^p(\mathbb{R})$  la gavilla de  $p$ -cocadenas. La aplicación*

$$\begin{aligned} \Omega^p(U) &\xrightarrow{h_p} S^p(U, \mathbb{R}) \\ \omega &\longmapsto \int \omega \end{aligned}$$

donde  $\int \omega: S_p(U, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  es tal que  $C \mapsto \int_C \omega$ , es un morfismo de gavillas. A su vez tenemos un morfismo (que denotamos igual):

$$\mathcal{E}^p \xrightarrow{k_p} S^p(\mathbb{R})$$

*Prueba.* Para cada inclusión de abiertos  $V \hookrightarrow U$ , el operador  $\int \omega|_V$  tiene sentido solamente sobre cadenas generadas por simplejos en  $V$  y por lo tanto  $k_p$  conmuta con las restricciones y es morfismo de gavillas.  $\square$

**3.13 Corolario.** El morfismo  $\mathcal{E}^p \xrightarrow{k_p} S^p(\mathbb{R})$  induce un morfismo entre las resoluciones

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{R} & \longrightarrow & \mathcal{E}^* \\ & & \downarrow 1 & & \downarrow k_* \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{R} & \longrightarrow & S(\mathbb{R})^* \end{array}$$

y por lo tanto un isomorfismo

$$H_{D,R}^q(M) \rightarrow H^q(\Gamma(S^*(\mathbb{R})))$$

para cada  $q \leq \dim M$ .

*Prueba.* Basta considerar los morfismos inducidos por  $k_p$  en las secciones globales. Por el teorema de Stokes, estos morfismos conmutan con la derivada exterior  $d$  y con el operador cofrontera  $\delta$  e inducen un mapeo de complejos  $\Omega^* \rightarrow \Gamma(S^*(\mathbb{R}))$  y morfismos entre los módulos de cohomología asociados. Por el teorema (3.7) son isomorfismos.  $\square$

Con esto terminamos los fundamentos de la teoría de cohomología de gavillas. En el capítulo IV retomaremos la cohomología de de Rham para determinar la capacidad que tiene una variedad diferenciable de descomponerse en subvariedades de una dimensión dada es decir, cuando acepta una foliación.

El teorema de de Rham asegura que la cohomología de una variedad diferenciable, construida a partir de formas, es un invariante topológico. Valiéndonos de ciertos elementos de la cohomología de de Rham podremos aspirar a dar obstrucciones topológicas para foliar una variedad diferenciable.

CAPÍTULO III  
FOLIACIONES

Una foliación de una  $m$ -variedad diferenciable  $M$  es una descomposición en variedades inmersas inyectivamente, llamadas hojas, de la misma dimensión, salvo conjuntos singulares. Por ejemplo, el conjunto

$$S^2(r) = \{x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \mid r \in \mathbb{R}, r > 0\}$$

es una foliación de  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  con esferas de radio  $r \neq 0$ . Si permitimos que  $r = 0$  y tomamos todo  $\mathbb{R}^3$ . Entonces  $S^2(r)$  tendría una singularidad en  $0 \in \mathbb{R}^3$ .

Un ejemplo típico de foliación (con singularidades casi siempre) de dimensión 1 es un sistema dinámico sobre  $M$ , donde las hojas son las curvas integrales, es decir, las soluciones de la ecuación diferencial  $\frac{dx}{dt} = X(x)$ , donde  $x \in M$  y  $X \in \mathfrak{X}(M)$  es un campo vectorial. Así como el Teorema de Existencia y Unicidad establece las condiciones para la existencia de foliaciones definidas por campos de vectores, el Teorema de Frobenius es su equivalente para foliaciones de dimensión  $n < m$  y podemos considerarlo como una generalización. De esta forma, una foliación es el conjunto de soluciones de una ecuación diferencial en varias variables sobre  $M$ . En este trabajo nos enfocaremos al estudio cualitativo de dichas soluciones y en el capítulo IV daremos una condición para la existencia foliaciones sin singularidades.

## 1. Estructuras Foliadas

Una foliación de dimensión  $n < m$  sobre  $M^m$  sin singularidades se ve localmente como planos paralelos de dimensión  $n$ . De manera un poco más precisa,  $M^m$  ( $m = n + s$ ) es localmente homeomorfa a un abierto de  $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ .

Notemos que el conjunto

$$\mathfrak{F} = \{(x, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \mid x \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}^s \text{ de.}\}$$

es una foliación de  $\mathbb{R}^m$  con planos  $P$  (espacios afines) de  $\dim = n$ . A  $\mathfrak{F}$  la llamaremos *foliación básica* de  $\mathbb{R}^m$ . Una variedad foliada es localmente homeomorfa a  $\mathfrak{F}$ .

**1.1 Definición.** Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $m = n + s$ . Una **foliación** de dimensión  $n$  y clase  $C^r$  es un atlas maximal  $\mathfrak{F}$  que satisface:

1) Si  $(U, \phi) \in \mathfrak{F}$  entonces

$\phi: U \rightarrow U_1 \times U_2$  donde  $U_1 \subset \mathbb{R}^n$  y  $U_2 \subset \mathbb{R}^s$  son bolas abiertas.

2) Si  $(U, \phi), (V, \psi) \in \mathfrak{F}$  son cartas tales que  $U \cap V \neq \emptyset$ , entonces los mapeos  $h = \psi \circ \phi^{-1}$  son difeomorfismos de clase  $C^r$ :

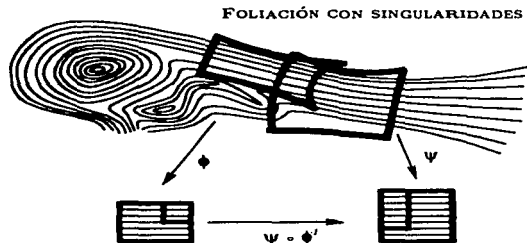
$$h: \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

que cumplen con la propiedad:

$$h(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y)) \quad (f)$$

donde  $(x, y) \in \phi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ .

A los elementos de  $\mathfrak{F}$  se les llama **cartas de foliación**.



**1.2 Observación.** La propiedad (2) hace que la foliación sea de clase  $C^r$  y el que  $f$  se satisfaga implica que los cambios de coordenadas locales preserven las hojas.

### Las hojas.

**1.3 Definición Placas.**

Sea  $\phi: U \rightarrow U_1 \times U_2$  carta de  $\mathfrak{F}$ . Las aplicaciones  $\phi^{-1}|_{U_1 \times \{c\}}: U_1 \times \{c\} \rightarrow U$ ,  $c \in U_2$ , son encajes. A sus imágenes  $\alpha = \phi^{-1}(U_1 \times \{c\})$  se les llama **placas de**  $(U, \phi)$  y son discos encajados en  $U$ .

**1.4 Observación.** Para cada  $c \in U_2$  se obtienen placas de  $U$  ajenas.

*Prueba.* Sean  $\alpha, b \in U_2$  distintos y  $\alpha, \beta$  las placas que definen en  $U$ . Supongamos que  $\gamma = \alpha \cap \beta \neq \emptyset$ , entonces

$$\begin{aligned}\phi(\gamma) &= U_1 \times \{a\} && \text{pues } \gamma \subset \alpha \\ &= U_1 \times \{b\} && \text{pues } \gamma \subset \beta\end{aligned}$$

pero  $U_1 \times \{a\} \neq U_1 \times \{b\}$  (!), por lo tanto  $\alpha \neq \beta$ .  $\square$

**1.5 Definición.** Un *camino de placas* es una sucesión  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$  de placas tales que  $\alpha_i \cap \alpha_{i+1} \neq \emptyset$ .

**1.6 Definición Hojas.**

Sean  $x, y \in M$ , se dirá que  $x \sim y \Leftrightarrow \exists \{\alpha_i\}_{i=1}^k$  camino de placas tal que  $x \in \alpha_1$  y  $y \in \alpha_k$ , es decir, si hay un camino de placas entre  $x$  y  $y$ .

A las clases de equivalencia se les llamará *hojas* de la foliación y al conjunto  $M/\sim$  el *espacio de hojas*.

El conjunto  $F_x = \{y \in M \mid x \sim y\}$  es la hoja que pasa por  $x \in M$ .

**1.7 Corolario.** *Por cada punto pasa una y sólo una hoja.*

**1.8 Corolario.** *Las hojas son conjuntos conectables por trayectorias.*

**1.9 Proposición.** *Las hojas son  $n$ -variedades de clase  $C^r$ , cuya estructura diferenciable se hereda del atlas  $\mathfrak{F}$ .*

*Prueba.* Sea  $x \in M$  y  $(U, \phi) \in \mathfrak{F}$ ,  $\phi: U \rightarrow U_1 \times U_2$  la carta que lo contiene. Para algún punto  $c \in U_2$ ,  $\alpha = \phi^{-1}(U_1 \times \{c\})$  es la placa de  $U$  que contiene a  $x \in M$ . Si reescribimos  $\phi$  como  $(\phi_1, \phi_2)$  donde  $\phi_1(U) = U_1$  y  $\phi_2(U) = U_2$  podemos definir  $\tilde{\phi} = \phi_1|_\alpha$  tal que

$$\tilde{\phi}: \alpha \rightarrow U_1 \subset \mathbb{R}^n$$

es un homeomorfismo, ya que  $\phi|_\alpha$  y  $\tilde{\phi}$  coinciden (módulo una translación) y el primero es la restricción de un homeomorfismo. La colección

$$\mathfrak{B} = \{(\alpha, \tilde{\phi}) \mid \alpha \text{ es placa de } F_x\}$$

es un atlas de la hoja  $F_x$ :

Debemos probar que para dos cartas cualesquiera  $(\alpha, \tilde{\phi})$ ,  $(\beta, \tilde{\psi})$  tales que  $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ , el mapeo  $\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}^{-1}: \tilde{\phi}(\alpha \cap \beta) \rightarrow \tilde{\psi}(\alpha \cap \beta)$  es un difeomorfismo. Para ello debemos verificar primero que el dominio de  $\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}^{-1}$  es abierto. Tanto  $\tilde{\phi}$  como  $\tilde{\psi}$  son homeomorfismos, entonces basta checar que  $\alpha \cap \beta$  es abierto en  $\alpha$  y en  $\beta$ :

Sean  $(U, \phi)$ ,  $(V, \psi) \in \mathfrak{F}$  las cartas que definen a  $\bar{\phi}$  y a  $\bar{\psi}$  respectivamente y sean  $a, b \in \mathbb{R}^n$  las constantes que definen a las placas  $\alpha$  y  $\beta$ . Como las cartas en  $\mathfrak{F}$  satisfacen (f) y  $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$  se tiene que  $h = \psi \circ \phi^{-1}$  restringido a  $W \times \{a\} \subset U_1 \times U_2$  cumple que

$$(a) \quad h(x, a) = (h_1(x, a), h_2(a)) = (h_1(x, a), b)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \phi(\alpha \cap V) &= \phi(U \cap V \cap \alpha) = \phi(U \cap V) \cap (\mathbb{R}^n \times \{a\}) \\ \psi(\beta \cap U) &= \psi(U \cap V \cap \beta) = \psi(U \cap V) \cap (\mathbb{R}^n \times \{b\}) \end{aligned}$$

Utilizando (a) se obtiene:

$$\begin{aligned} \psi(\alpha \cap V) &= \psi \circ \phi^{-1} \circ \phi(\alpha \cap V) = h(\phi(U \cap V) \cap (\mathbb{R}^n \times \{a\})) \\ &\subset \psi(U \cap V) \cap (\mathbb{R}^n \times \{b\}) \\ &= \psi(\beta \cap U) \end{aligned}$$

es decir  $\alpha \cap V \subset \beta \cap U$  y análogamente se obtiene que  $\beta \cap U \subset \alpha \cap V$  y se obtiene la igualdad

$$\begin{array}{ll} \alpha \cap \beta = \alpha \cap V & \text{abierto en } \alpha \\ & = \beta \cap U \quad \text{abierto en } \beta \end{array}$$

Ahora bien, si  $x \in \bar{\phi}(\alpha \cap \beta)$  el mapeo  $\bar{\psi} \circ \bar{\phi}^{-1}(x) = h_1(x, a)$  es de clase  $C^r$  y similarmente su inversa  $\bar{\phi} \circ \bar{\psi}^{-1}$  es de clase  $C^r$  y se satisface que los mapeos de transición son difeomorfismos en  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

### **Foliaciones definidas por campos vectoriales.**

Un campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ , tal que  $X(x) \neq 0 \forall x \in M$  define una foliación  $\mathfrak{F}$  de dim 1 y clase  $C^r$  sin singularidades:

El Teorema de Existencia y Unicidad de Ecuaciones Diferenciales asegura con estas hipótesis que:

- 1) Para todo  $p \in M$  existe una curva  $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  tal que

$$\gamma(0) = p \text{ y } \gamma'(0) = X(p) \neq 0$$

- 2)  $\gamma$  es única (módulo el dominio de  $\gamma$ ).

Las curvas que cumplen con dicha propiedad se llaman curvas integrales del campo  $X$ , y forman las hojas de la foliación:

- i) Dichas curvas definen un flujo local  $\varphi: W \subset (M \times \mathbb{R}) \rightarrow M$

$$\varphi(x, t) = \gamma_x(t)$$



donde  $\gamma_x$  es la curva integral definida cierto tiempo  $t \in (-\epsilon_x, \epsilon_x)$ .

ii) Para todo  $p \in M$  existe una vecindad  $U_p \subset M$  y un intervalo suficientemente pequeño  $I \subset \mathbb{R}$  tal que si  $x \in U_p$  entonces  $\varphi(x, t) = \gamma_x(t)$  es una curva integral para  $t \in I$ .

$M$  puede ser cubierta con vecindades  $U_p$ , más aun,  $\{U_p\}_p \subset M$  forma una base. Estas vecindades servirán para construir los dominios de las cartas de foliación.

iii) Sea  $D^{m-1}$  un disco centrado en  $0 \in \mathbb{R}^m$  y  $i: D^{m-1} \rightarrow M$  un encaje tal que  $i(0) = p$  y  $i$  sea transversal<sup>1</sup> a  $X(U_p)$ . El mapeo

$$\begin{aligned} \Phi: D^{m-1} \times I &\longrightarrow M \\ (d, t) &\longmapsto \varphi(i(d), t) \end{aligned}$$

es no singular en  $(0, 0)$ , ya que

$$\Phi(0, 0) = \varphi(i(0), 0) = \varphi(p, 0) = \gamma_p(0)$$

y su diferencial

$$\Phi_*(0, 0) = \gamma'_p(0) = X(p) \neq 0$$

pues  $X$  no tiene singularidades. Entonces existe una vecindad  $V_p \subset U_p$  tal que

$$\Phi^{-1}: V_p \longrightarrow (D^{m-1} \times I)' \subset D^{m-1} \times I$$

es un difeomorfismo local.

Definimos el atlas de la foliación como  $\mathfrak{F} = \{(V_p, \Phi^{-1})\}_{p \in M}$ .

## 2. Formas diferenciales y foliaciones

En esta sección veremos que se pueden definir foliaciones en términos de formas diferenciales. Como una primera aproximación, trataremos el caso de 1-formas. Así como un campo vectorial no singular define una foliación de dimensión 1, una 1-forma no nula definirá una foliación de codimensión 1 sobre  $M$ .

**2.1 Definición.** Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $m = n + s$  y sea  $\{U_i, f_i\}_{i \in I}$  un conjunto que satisface:

- 1)  $\{U_i\}$  es una cubierta abierta de  $M$
- 2) Cada  $f_i$  es una submersión  $f_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^s$
- 3) Si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , existe un difeomorfismo  $C^r$ ,  $g_{ij}$  en  $\mathbb{R}^s$  tal que  $f_i = g_{ij} \circ f_j$  en  $U_i \cap U_j$ .

A los elementos  $\{f_i\}_{i \in I}$  se les llama **mapeos distinguidos**.

<sup>1</sup>Esto es siempre posible ya que la transversalidad es una propiedad genérica. Ver [Bro] para la definición y propiedades de transversalidad.

**2.2 Proposición.** Sea  $M$  una  $(n + s)$ -variedad diferenciable junto con una colección de mapeos distinguidos  $\{(U_i, f_i)\}_{i \in I}$ , entonces  $M$  tiene una foliación  $\mathfrak{F}$  de clase  $C^r$  y codimensión  $s$ .

*Prueba.* La existencia de las submersiones  $\{f_i\}$  garantizan la existencia de cartas de foliación:

Las submersiones  $f_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^s$  se ven localmente como proyecciones<sup>2</sup>, es decir,  $\forall p \in U_i$  y  $f_i(p) \in \mathbb{R}^s$  existen cartas  $(V, \phi) \in \mathfrak{A}$ ,  $(V_2, id)$  respectivamente con  $V \subset U_i$  y  $V_2 \subset f_i(V)$  tales que

$$\phi: V \longrightarrow V_1 \times V_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$$

y se satisface que la aplicación

$$id \circ f_i \circ \phi^{-1}: V_1 \times V_2 \longrightarrow V_2$$

coincide con una proyección. En este caso,  $f_i \circ \phi^{-1}(x, y) = \pi_2(x, y) = y$ .

Las cartas  $(V, \phi) \in \mathfrak{A}$  definen a  $\mathfrak{F}$ :

Si  $(V, \phi)$ ,  $(W, \psi) \in \mathfrak{A}$  son cartas inducidas por los mapeos distinguidos  $(U_i, f_i)$ ,  $(U_j, f_j)$  tales que  $V \cap W \neq \emptyset$ , entonces los cambios de coordenadas  $\phi \circ \psi^{-1}$  son difeomorfismos en  $\mathbb{R}^n$  de la forma

$$\phi \circ \psi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(x, y))$$

Veremos que  $h_2$  depende solamente de  $y \in \mathbb{R}^s$ :

$$h_2 = \pi_2 \circ \phi \circ \psi^{-1} = f_i \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \psi^{-1} = f_i \circ \psi^{-1}$$

pero  $f_i = g_{ij} \circ f_j$  entonces

$$h_2(x, y) = g_{ij} \circ f_j \circ \psi^{-1}(x, y) = g_{ij} \circ \pi_2(x, y) = g_{ij}(y)$$

es decir,  $h_2$  depende solamente de  $y$ .

Como además  $V$  es homeomorfo a  $V_1 \times V_2$  por medio de  $\phi$ , entonces las cartas  $(V, \phi)$  forman un atlas de  $\mathfrak{F}$ .  $\square$

**2.3 Proposición.** Sea  $\mathfrak{F}$  una foliación de clase  $C^r$  y codimensión  $s$  sobre  $M^{n+s}$ . Existe una familia de mapeos distinguidos inducida por las cartas de  $\mathfrak{F}$ .

Para la demostración de esta proposición necesitamos el siguiente

<sup>2</sup>Forma local de submersiones, ver [Br]

**Lema.** Sea  $\mathfrak{F}$  un atlas de foliación. Existe un conjunto de cartas  $\{(U_i, \phi_i)\}$  en  $\mathfrak{F}$ , tales que si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  entonces  $U_i \cup U_j \subset V$ , donde  $V$  es también dominio de carta de  $\mathfrak{F}$ .

*Prueba.* Ver [Ca-Li] II.3.1.

*Prueba (2.3).* Tomemos un subconjunto de cartas  $\{(U_i, \phi_i)\}$  de  $\mathfrak{F}$  que cubran a  $M$  y que satisfagan la propiedad del Lema anterior.

Como  $\phi_i: U_i \rightarrow U_i^1 \times U_i^2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$  es un difeomorfismo, si  $\pi_2: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$  es proyección, entonces

$$f_i = \pi_2 \circ \phi_i: U_i \rightarrow U_i^2 \quad \text{es una submersión}$$

El conjunto  $\{(U_i, f_i)\}$  serán los mapeos distinguidos.

Como  $\pi_2^{-1} = i_2: \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$  tal que  $c \mapsto \mathbb{R}^n \times \{c\}$  entonces,

$$f_i^{-1} = \phi_i^{-1} \circ i_2(c) = \phi_i^{-1}(U_i^1 \times \{c\}) \quad \text{es una placa de } U_i.$$

Es decir, las placas de la foliación pueden obtenerse como  $f_i^{-1}(c)$  con  $c \in \mathbb{R}^s$ .

Ahora falta construir los difeomorfismos  $g_{ij}$ . Para ello tomaremos en cuenta la propiedad requerida al principio de la prueba: si  $(U_i, \phi_i)$ ,  $(U_j, \phi_j)$  son cartas tales que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  entonces  $U_i \cup U_j \subset V$ , donde  $(V, \phi)$  es otra carta de  $\mathfrak{F}$ . Con esto se garantiza que si  $\alpha$ ,  $\beta$  son placas de  $U_i$  y  $U_j$  respectivamente, y  $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ , entonces  $\alpha \cup \beta \subset \gamma$  placa de  $V$ , lo que implica que  $U_i \cap \beta \subset \alpha$  y  $\phi_i(U_i \cap \beta) = \{p\} \in \mathbb{R}^s$ .

Con esta idea podemos tomar  $y \in f_j(U_i \cap U_j)$  y  $f_j^{-1}(y) = \beta$  es una placa de  $U_j \subset V$  y  $\beta \cap U_i \neq \emptyset$  y se asegura que el mapeo  $f_i \circ f_j^{-1}(y) = g_{ij}(y)$  está bien definido en  $f_j(U_i \cap U_j)$ . Además  $g_{ij} = \pi_2 \circ \phi_i \circ \phi_j^{-1} \circ i_2$  es una composición de aplicaciones  $C^\infty$  y su inversa  $g_{ij}^{-1} = g_{ji}$  es también lo es, satisfaciéndose que sea difeomorfismo local en  $\mathbb{R}^s$  y que  $f_i = f_i \circ f_j^{-1} \circ f_j = g_{ij} \circ f_j$ .  $\square$

Los dos resultados anteriores los resumimos en el siguiente

**2.4 Corolario.** El atlas  $\mathfrak{F}$  existe si y sólo si los mapeos distinguidos existen.

**2.5 Corolario.** Sea  $\omega \in \Omega^1(M)$  cerrada y tal que  $\omega_x \neq 0$  para todo  $x \in M$ . Entonces  $M$  acepta una foliación  $\mathfrak{F}(\omega)$  de codimensión 1.

*Prueba.* Localmente  $\omega$  es exacta, es decir para cada  $x \in M$  hay una vecindad  $V$  donde  $\omega|_V$  es exacta. Tomemos una cubierta abierta  $\{V_i\}$  de  $M$  tal que  $\omega|_{V_i}$  es exacta y sean  $\{f_i\}$  las funciones tales que  $df_i = \omega_i \neq 0$ . Tenemos pues que  $f_i$  son submersiones y se checa fácilmente que de  $V_i \cap V_j$ , las submersiones  $f_i$  y  $f_j$  difieren por un difeomorfismo local de  $\mathbb{R}$  (una traslación seguida de una contracción). Por lo tanto  $\{(V_i, f_i)\}$  define una familia de mapeos distinguidos.  $\square$

**2.6 Ejemplo.** En  $\mathbb{R}^3$  tenemos las coordenadas canónicas  $(x, y, z)$ . Sea  $\omega$  la 1-forma en  $\mathbb{R}^3$  dada por

$$\omega = adx + bdy + cdz$$

con  $a, b, c \neq 0$  funciones suaves.  $\omega$  define una foliación por superficies sin singularidades. Si los coeficientes de  $\omega$  fueran, por ejemplo, polinomios en  $\mathbb{R}[x, y, z]$ , las singularidades de la foliación están dadas por la ecuación  $a = b = c = 0$ .

**2.7 Ejemplo.** Sean  $M, N$  variedades y  $M \xrightarrow{f} N$  una submersión. Como para cada  $x \in M$

$$(f_*)_x: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$$

es suprayectiva, entonces  $f^{-1}(y) = F_y$  es una subvariedad para cada  $y \in \text{im}(f)$ . Con la forma local de submersiones (ver [Br]) se construye una familia de mapeos distinguidos y por lo tanto una foliación. Por ejemplo,  $\mathbb{R}^3 - \{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ ,

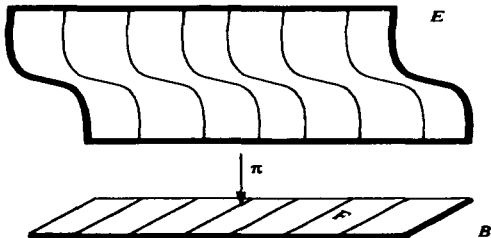
$$f(x, y, z) = ax^2 + by^3 + cz^2, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

define una foliación de  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  por cuádricas.

**2.8 Ejemplo. Fibración.** Una fibración es una terna  $(E, \pi, B)$  donde  $E, B, F$  son variedades diferenciables,  $E \xrightarrow{\pi} B$  es una submersión y para cada  $x \in B$ ,  $\pi^{-1}(x) = F_x$  es difeomorfa a  $F$ . Más aún, para cada punto  $x \in B$ , existe una vecindad  $U \subset B$  y un difeomorfismo  $\varphi_U$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} U \times F & \xrightarrow{\varphi_U} & \pi^{-1}(U) \\ & \searrow F_x & \downarrow \pi \\ & & U \end{array}$$

A  $E$  se le llama el *espacio total*, a  $B$  la *base* y a  $F$  la *fibra*. A  $\pi$  se le llama proyección y a  $F_x$  la *fibra sobre  $x$* . Como  $\pi$  es una submersión, las componentes conexas de las fibras son las hojas de una foliación de  $E$ . El haz tangente  $TM$  a una variedad  $M$  es una fibración por espacios vectoriales (ver cap IV).



### 3. El Teorema de Frobenius

A continuación daremos la demostración del teorema de Frobenius. Para ello se introducirá la idea de distribución, que resulta ser una generalización de los campos de líneas generados por un campo vectorial, a campos de planos: así como un campo vectorial no singular  $X$  sobre  $M$  define en cada punto un subespacio vectorial de dimensión 1 del tangente, una colección de campos  $X_1, \dots, X_r$ , linealmente independientes en cada punto, definirá un subespacio vectorial del tangente de dimensión  $r$  en cada punto. Localmente, daremos condiciones necesarias y suficientes para que el espacio generado por  $X_1(p), \dots, X_r(p)$  sea el espacio tangente de una subvariedad de  $M$  de dimensión  $r$  y que pase por  $p$ , es decir cuando un campo de planos define una foliación.

Como es de esperarse existe una versión dual de este problema, establecida en términos de formas. Veremos que toda distribución de codimensión  $k$  puede concebirse como el espacio que genera el anulamiento simultáneo de  $k$  1-formas linealmente independientes en cada punto.

En este capítulo  $M$  será una  $d$ -variedad de clase  $C^r$ .  $\mathfrak{X}(M)$  denotará los campos vectoriales sobre  $M$  de clase  $C^k$ ,  $k \leq r$ , y si  $(U, \varphi) \in \mathfrak{A}$  es una carta en torno a  $m \in M$  y  $\varphi = (x_1, \dots, x_d)$  son sus coordenadas locales, entonces cualquier campo  $X \in \mathfrak{X}(U)$  lo consideraremos una combinación lineal  $\sum_{i=1}^d a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  para algunas funciones  $a_i \in C^k(U)$ . Si  $k = \infty$  hablaremos entonces de *campos suaves*, naturalmente  $M$  será en este caso una variedad suave.

**3.1 Definición.** Sean  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Su *corchete de Lie*  $[X, Y]$  se define como el operador en  $C^\infty(M)$ :

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

#### 3.2 Observaciones.

- 1)  $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$
- 2) Si  $f, g \in C^\infty(M)$ ,  $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$
- 3)  $[X, Y] = -[Y, X]$

*Prueba.* Dado que  $X, Y$  son campos vectoriales suaves si y sólo si  $X(f)$  y  $Y(f)$  son funciones suaves (ver [Wa]) es directo que  $[X, Y]$  es un campo suave. Los incisos 2 y 3 se verifican haciendo el cálculo directamente.  $\square$

**3.3 Definición.** Sea  $\phi: M \rightarrow N$  suave y  $(\phi_*)_p$  su diferencial en  $p \in M$ . Dos campos  $X \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $Y \in \mathfrak{X}(N)$  se dirá que están  $\phi$ -relacionados si para todo punto  $p \in M$

$$(\phi_*)_p(X_p) = Y_{\phi(p)}$$

**3.4 Lema.** Sean  $X, X' \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $Y, Y' \in \mathfrak{X}(N)$ . Si  $X$  y  $Y$  están  $\phi$ -relacionados y  $X'$  y  $Y'$  también lo están, entonces  $[X, X']$  y  $[Y, Y']$  están  $\phi$ -relacionados.

*Prueba.* Recordando que si  $v \in T_p M$ ,  $(\phi_*)_p(v)$  es un vector en  $T_{\phi(p)} N$  y que por definición  $(\phi_*)_p(v)(f) = v(f \circ \phi)$  para cualquier función  $f \in C^\infty(N)$ . Haciendo  $v = [X, X']$  y usando (3.3) se verifica tras un cálculo directo.  $\square$

**3.5 Definición.** Sea  $m \in M$  y  $\varphi = (x_1, \dots, x_d)$  un sistema de coordenadas en  $U$  vecindad de  $m$ . Al conjunto

$$H_k = \{p \in U \mid (x_1(p), \dots, x_c(p), k) \in \mathbb{R}^d; k = (k_{c+1}, \dots, k_d) \in \mathbb{R}^{d-c}\}$$

lo llamaremos *hipersuperficie de dimensión c*.

**3.6 Observación.**  $H_k \neq \emptyset$ :

Tomemos una foliación básica de dimensión  $c$  en  $\mathbb{R}^d$  (ver §1):

$$\mathfrak{F} = \{(x, k) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^{d-c} \mid x \in \mathbb{R}^c, k \in \mathbb{R}^{d-c} \text{ cte.}\}$$

y  $F$  un hoja de  $\mathfrak{F}$  tal que  $\Sigma = F \cap \varphi(U) \neq \emptyset$ .  $\Sigma$  está descrita en términos de  $(x_1, \dots, x_d)$  y como  $\Sigma \subset F$  entonces  $x_{c+1}, \dots, x_d$  son constantes. De esta manera  $H = \varphi^{-1}[\Sigma]$  es una hipersuperficie en  $U$ .

Si  $\pi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^{d-c}$  es la proyección sobre  $\mathbb{R}^c$ , entonces  $H \xrightarrow{\pi \circ \varphi} \pi(\Sigma)$  es un homeomorfismo y  $\pi \circ \varphi = (x_1, \dots, x_c)$  son coordenadas locales en  $H$ .

**3.7 Ejemplo.** Las placas de una foliación  $\mathfrak{F}$  son hipersuperficies de dimensión igual a  $\dim \mathfrak{F}$ .

**3.8 Lema.** Sea  $H_k$  una hipersuperficie en una vecindad coordinada  $U \subset M$  definida como en (3.5) y sea  $X \in \mathfrak{X}(U)$ , entonces

$$X \in \mathfrak{X}(H_k) \text{ si y sólo si } X(x_j) = 0$$

para  $j = c+1, \dots, d$

*Prueba.* Podemos suponer que  $X = \sum_{i=1}^d a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  para algunas  $a_i \in C^\infty(U)$ . Si  $X(x_j) = 0$  para  $j = c+1, \dots, d$  entonces necesariamente  $a_j = 0$ . Así que podemos expresar a  $X$  solamente en términos de  $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_c}\}$ , que es precisamente una base de  $\mathfrak{X}(H_k)$ .

La otra implicación se satisface trivialmente pues cualquier campo en  $H_k$  se escribe como  $\sum_{i=1}^c a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  y y se tiene que  $X(x_j) = \delta_{ij} = 0$  pues  $i \neq j$  para  $j = c+1, \dots, d$ .  $\square$

**3.9 Definición.** Una *c-distribución*  $\mathcal{D}$  sobre  $M$  es una asignación  $x \mapsto \mathcal{D}(x)$ , donde  $\mathcal{D}(x)$  es un subespacio vectorial de  $T_x M$  de dimensión fija  $1 \leq c < d$ . Diremos que  $\mathcal{D}$  es de clase  $C^r$  si está generada por campos  $X_1, \dots, X_c$  todos de clase  $C^r$ .

Como al principio de esta sección asumimos que  $r = \infty$ , trataremos solamente con distribuciones suaves, salvo que se indique lo contrario. Como  $X_1(x), \dots, X_c(x)$  generan un hiperplano de dimensión  $c$ , es común llamar a  $\mathcal{D}$  un *campo de c-planos* o simplemente campo de planos.

**3.10 Definición.** Sea  $\mathcal{D}$  una  $c$ -distribución y  $N \xrightarrow{i} M$  una inmersión inyectiva. Si para cada punto  $p \in N$

$$(i_*)_p(T_p N) = \mathcal{D}(p)$$

se dirá que  $\mathcal{D}$  es *integrable* y  $N$  se llamará *variedad integral* de  $\mathcal{D}$ .

**3.11 Definición.** Sea  $\mathcal{D}$  generada localmente por  $\{X_1, \dots, X_c\}$ . Diremos que  $\mathcal{D}$  es *involutiva* si

$$[X_i(p), X_j(p)] \in \mathcal{D}(p)$$

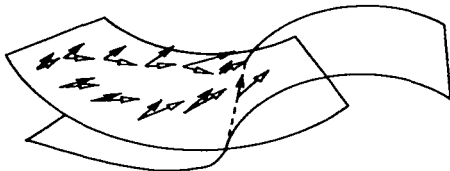
para todo  $p \in M$ ;  $i, j = 1, \dots, c$ .

**3.12 Teorema (Frobenius).**

*Una  $c$ -distribución  $\mathcal{D}$  es integrable si y sólo si es involutiva.*

*Prueba.* La demostración será consecuencia de los resultados (3.13) y (3.15).

DISTRIBUCIÓN NO INVOLUTIVA



**3.13 Lema.** *Sea  $\mathcal{D}$  integrable, entonces  $\mathcal{D}$  es involutiva.*

*Prueba.* Supongamos que para cada punto  $p \in M$  existe una variedad integral  $N$ . Sea  $i: N \rightarrow M$  la inclusión. Como por hipótesis  $T_p N = \mathcal{D}(p)$ , entonces  $(i_*)_p: T_p N \rightarrow \mathcal{D}(p)$  es un isomorfismo. En particular, para cualesquiera campos  $X, Y$  que generen a  $\mathcal{D}$  existen  $\tilde{X}, \tilde{Y}$  campos en  $N$  tales que

$$(i_*)_p(\tilde{X}_p) = X_{i(p)}$$

$$(i_*)_p(\tilde{Y}_p) = Y_{i(p)}$$

es decir  $\tilde{X}$  y  $X$ ,  $\tilde{Y}$  y  $Y$  están  $i$ -relacionados respectivamente. Por (3.2.1)  $[\tilde{X}, \tilde{Y}]_p \in T_p N$  y entonces  $(i_*)_p([\tilde{X}, \tilde{Y}]_p) \in \mathcal{D}(p)$ . Pero por (3.4),

$$[X, Y]_p = (i_*)_p([\tilde{X}, \tilde{Y}]_p)$$

y se concluye que  $\mathcal{D}$  es involutiva.  $\square$

**3.14 Lema.** Sea  $X_1$  un campo sobre  $M$  sin singularidades y  $\mathfrak{F}$  la foliación que define (ver §1). Si  $(U, \varphi)$  es una carta de  $\mathfrak{F}$  y  $\varphi = (y_1, \dots, y_d)$  sus coordenadas, entonces

$$(1) \quad X_1 = a \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad a \in C^\infty(U)$$

*Prueba.* Tenemos que  $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$ . Si  $g$  es una curva integral de  $X_1$  que pase por  $p \in U$ , entonces  $g \cap U$  esta contenida en alguna placa  $\alpha$  en  $U$  y  $\varphi(\alpha) = (y_1, k)$  para alguna  $k \in U_2$  y definimos  $\tilde{\varphi} = \varphi|_\alpha$  y se tiene que

$$(\tilde{\varphi}_*)_p: T_p\alpha \rightarrow (\mathbb{R} \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^d$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Por otro lado, en  $(U, \varphi)$ ,  $X_1 = \sum_{i=1}^d a_i \frac{\partial}{\partial y_i}$ . Es fácil verificar que para  $i = 2, \dots, d$

$$(\tilde{\varphi}_*)_p \left( \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_p \right) = 0$$

y entonces  $(\tilde{\varphi}_*)_p(X_1(p)) = (\tilde{\varphi}_*)_p(a_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \Big|_p)$  y dado que  $(\tilde{\varphi}_*)_p$  es inyectiva entonces

$$X_1(p) = a_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \Big|_p \quad \text{para } p \in U$$

y se concluye que  $X_1 = a_1 \frac{\partial}{\partial y_1}$ . En adelante supondremos que  $a = 1$  para simplificar los cálculos.  $\square$

**3.15 Proposición.** Sea  $\mathcal{D}$  una  $c$ -distribución involutiva. Para todo  $m \in M$ , existe un abierto  $V$  y un sistema de coordenadas  $\varphi = (x_1, \dots, x_d)$  en  $V$  tal que las hipersuperficies  $H_k$  definidas por  $(x_{c+1}, \dots, x_d) = k \in \mathbb{R}^{d-c}$  son las placas de una foliación  $\mathfrak{F}$  y  $(V, \varphi)$  es precisamente una carta de foliación.

*Prueba.* Procederemos a demostrar esto por inducción sobre  $c$ . Para el caso de 1-distribuciones, es decir, un campo de líneas, se puede generar con un campo vectorial  $X_1$ . Naturalmente  $[X_1, X_1] = 0 \in \mathcal{D}$  y como vimos en §1, se define una foliación. Sean que  $(y_1, \dots, y_d)$  las coordenadas tales que  $y_2 = k_2, \dots, y_d = k_d$  definen las placas de  $\mathfrak{F}$ .

Supongamos ahora que (3.15) se satisface para  $c-1$  y demostraremos el caso de  $c$ -distribuciones. Tomemos  $X_1, \dots, X_{c-1}$  campos linealmente independientes definidos en un abierto  $U \subset M$  y por (3.14) podemos asumir que  $X_1 = \frac{\partial}{\partial y_1}$ . Definimos otros campos en  $U$ :

$$(2) \quad \begin{aligned} Y_1 &= X_1 = \frac{\partial}{\partial y_1} \\ Y_i &= X_i - X_i(y_1)X_1 \quad \text{para } i = 2, \dots, c \end{aligned}$$



es fácil verificar que  $Y_1, \dots, Y_c$  son linealmente independientes y por lo tanto generan a  $\mathcal{D}$  en  $U$ . Sea  $S$  la hipersuperficie definida por  $y_1 = 0$ . Si consideramos la restricción de  $Y_i$  a  $S$

$$Z_i = Y_i|_S \quad i = 2, \dots, c$$

se tiene que  $Z_i(y_1) = 0$  y por (3.8),  $Z_2, \dots, Z_d$  son campos tangentes a  $S$ .

También se verifica directamente que  $[Y_j, Y_k](y_1) = 0$  para  $j, k = 2, \dots, c$ , es decir  $[Y_j, Y_k]$  es un campo tangente a  $S$ , y como  $Z_j$  y  $Y_j$  están  $i$ -relacionados,

$$(i\cdot)_p([Z_j, Z_k]_p) = [Y_j, Y_k]_p \in T_p S$$

De manera que  $[Y_j, Y_k]|_S = [Z_j, Z_k]$  y por lo tanto la  $(c-1)$ -distribución que definen  $Z_2, \dots, Z_c$  es involutiva en  $S$ .

Aplicando la hipótesis de inducción, para cada  $m \in S$  existen coordenadas  $w_2, \dots, w_d$  en  $S$  tales que las hipersuperficies  $H_k$  definidas por  $(w_{c+1}, \dots, w_d) = (k_{c+1}, \dots, k_d) = k$  son las placas de una foliación en  $S$ .

En torno a  $m$  definimos las siguientes coordenadas:

$$(3) \quad \begin{aligned} x_1 &= y_1 \\ x_j &= w_j \quad j = 2, \dots, d \end{aligned}$$

definidas en algún abierto  $V \subset M$ .

Si probamos que

$$(4) \quad Y_i(x_j) = 0 \quad \text{para cada } i = 1, \dots, c \\ j = c+1, \dots, d$$

gracias a (3.8) se sigue que  $Y_1, \dots, Y_c \in \mathfrak{X}(H_k)$  y se define una  $c$ -distribución  $\mathcal{D}$  generada por  $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_c}\}$  tal que  $H_k$  son las variedades integrales de  $\mathcal{D}$  y (3.15) sería demostrado.

Para ello notemos que en  $V$  y en términos de  $(x_1, \dots, x_d)$ ,  $Y_1 = \sum_{i=1}^d a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ . Las ecuaciones 2 y 3 implican que  $Y_1(x_1) = 1$ , entonces  $a_1 = 1$  y  $a_j = 0$  si  $j = 2, \dots, d$ , es decir

$$(5) \quad Y_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \text{ en } V$$

y por lo tanto  $Y_i(x_j) = 0$  para  $i = 1$  y  $j = c+1, \dots, d$ . Resta ahora verificar (4) para  $i = 2, \dots, c$ :

Por (5) se tiene que

$$\frac{\partial Y_i(x_j)}{\partial x_1} = Y_1(Y_i(x_j)) = [Y_1, Y_i](x_j).$$

Como  $\mathcal{D}$  es involutiva entonces existen funciones  $b_{ir} \in C^\infty(V)$  tales que  $[Y_1, Y_i] = \sum_{r=1}^c b_{ir} Y_r$ , entonces

$$(6) \quad \frac{\partial Y_i(x_j)}{\partial x_1} = \sum_{r=1}^c b_{ir} Y_r(x_j)$$

Consideremos una hipersuperficie  $\tilde{S}$  dada por las ecuaciones  $x_2 = \text{const}, \dots, x_d = \text{const}$ . En ella,  $Y_i(x_j)$  es una función que depende exclusivamente de  $x_1$  y por lo tanto (6) se transforma en un sistema de ecuaciones diferenciales lineales en  $x_1$

$$(7) \quad \frac{dY_i(x_j)}{dx_1} - \sum_{r=1}^c b_{ir} Y_r(x_j) = 0$$

que tiene solución única para valores iniciales dados. Como (7) es homogéneo, las funciones constantes  $Y_i(x_j) = 0$  satisfacen (7). Si ésta fuera la única solución para cualquier condición inicial, habríamos terminado. Veremos que eso se cumple:

Observemos que  $S \cap \tilde{S} = \{\text{punto}\}$  y todas las posibles condiciones iniciales de (7) se obtienen al tomar distintas  $\tilde{S}$  así que podemos tomar los puntos de  $S$  como condiciones iniciales y las soluciones de (7) deben coincidir con su restricción a  $S \cap \tilde{S}$ . Pero en  $S$

$$Y_i(x_j) = Z_i(w_j) = 0$$

la primera igualdad sigue de la definición de los  $Z_i$ 's y de (3). La segunda de la hipótesis de inducción aplicada a  $S$  y el lema (3.8). De esta manera las soluciones de (7) son siempre nulas, y (4) ha sido demostrado.  $\square$

#### 4. Frobenius con formas

Hemos visto que una  $c$ -distribción involutiva define una foliación  $\mathfrak{F}$  en  $M$  y toda distribución puede ser generada localmente por  $c$  campos linealmente independientes no nulos. Alternativamente se puede definir un campo de planos en términos de  $d - c$  1-formas linealmente independientes. Esto junto con cierta condición equivalente a la involutividad definirá una foliación de codimensión  $k = d - c$ . Naturalmente el hecho se desprende de la dualidad 1-formas-campos de vectores.

Al igual que antes  $M$  será una  $d$ -variedad diferenciable y  $\mathcal{P}$  un campo de planos de codimensión  $k = d - c$ . Tanto las formas como los campos con los que trabajaremos serán siempre de clase  $C^r$ , ( $r \geq 0$ ).

Sea  $p \in M$  y  $U \subset M$  una vecindad de  $p$ . Sean  $\omega^1, \dots, \omega^k \in \Omega^1(U)$  linealmente independientes y que no se anulen idénticamente en  $U$ .

En cada  $q \in U$  definimos:

$$\mathcal{P}(q) = \{v \in T_q M \mid \omega_q^1(v) = \dots = \omega_q^k(v) = 0\}$$

Dado que  $\omega_q^i : T_q M \rightarrow \mathbb{R}$  es supreyectiva,  $\text{Ker}(\omega_q^i)$  es subespacio vectorial de codimensión 1 en  $T_q M$ , como  $\omega_q^i$  son linealmente independientes, se tiene que  $\mathcal{P}(q)$  es un subespacio vectorial de codimensión  $k$  en  $T_q M$ .

Podemos definir un campo de planos de dimensión  $d - k = c$  en  $M$  como

$$\sigma: M \rightarrow TM; \quad q \mapsto P(q) \subset T_q M$$

Tomemos una carta  $(V, \varphi) \in \mathfrak{A}$  tal que  $q \in V$ . Si  $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ , se tiene que  $B'(q) = \{dx_1(q), \dots, dx_n(q)\}$  es una base de  $(T_q M)^*$ . Como  $\omega_\sigma^i$  son linealmente independientes podemos tomar algunos  $dx_j(q) \in B'(q)$  de manera que

$$B'(q) = \{\omega_\sigma^1, \dots, \omega_\sigma^k; dx_{j_1}(q), \dots, dx_{j_{d-k}}(q)\}$$

sea base de  $(T_q M)^*$ . Renombramos  $\omega_\sigma^{k+1} = dx_{j_1}(q), \dots, \omega_\sigma^n = dx_{j_{d-k}}(q)$ , así  $B'(q) = \{\omega_\sigma^1, \dots, \omega_\sigma^d\}$ . Por continuidad, si  $W \subset V$ , entonces  $B'(x)$  seguirá siendo base de  $(T_x M)^*$  para todo  $x \in W$ .

Ahora consideremos campos vectoriales  $X^1, \dots, X^d$  en  $W$  tales que puntualmente sean la base dual de  $B'(x)$ . Entonces  $\omega_\sigma^i(X^j(x)) = \delta_{ij}$ . En particular si  $i = 1, \dots, k$  y  $j = k+1, \dots, d$ , entonces  $\omega_\sigma^i(X^j(x)) = 0$ , es decir  $X^j(x) \in \mathcal{P}(x)$  para  $j = k+1, \dots, d$  y como son  $d - k$  elementos básicos de  $T_x M$ , entonces

$$\langle X^j(x) \rangle = \mathcal{P}(x) \quad j = k+1, \dots, d \quad x \in W$$

y  $\mathcal{P}(x)$  puede ser generado por  $d - k = c$  campos vectoriales linealmente independientes.

Ahora bien, si tenemos una  $c$ -distribución  $\mathcal{P}$  (de codimensión  $k$ ), es posible encontrar un sistema de  $k$  1-formas que la definan:

$\mathcal{P}$  está generado por  $X^{k+1}, \dots, X^d$  los que asumimos como  $c$  campos vectoriales linealmente independientes puntualmente y no nulos definidos en un abierto  $U$  vecindad de  $p \in M$ . Podemos encontrar  $k$  campos vectoriales en  $U$ , tales que  $\{X^1(q), \dots, X^d(q)\}$  sea base de  $T_q M$  para todo  $q \in U$ . Si consideramos ahora la base dual  $\{\omega_\sigma^1, \dots, \omega_\sigma^d\}$ , se verifica que  $\omega_\sigma^i(X^j(q)) = 0$  si  $i = 1, \dots, k$  y  $j = k+1, \dots, d$ . Probándose entonces que

$$\langle X^{k+1}, \dots, X^d \rangle = \text{Ker}(\omega^i), \quad \text{si } i = 1, \dots, k$$

con lo que se demuestra la siguiente

**4.1 Proposición.** *Toda distribución  $\mathcal{P}$  de codimensión  $k$  en  $M$  se define localmente como el kernel de  $k$  1-formas linealmente independientes y no nulas. Similarmemente, si  $\omega^1, \dots, \omega^k$  son 1-formas linealmente independientes, entonces*

$$\mathcal{P}(q) = \{v \in T_q M \mid \omega_\sigma^1(v) = \dots = \omega_\sigma^k(v) = 0\}$$

La proposición anterior motiva al planteamiento una nueva versión del teorema de Frobenius, que resulta ser una traducción de la condición de involutividad al contexto de formas.

**4.2 Teorema.** Sea  $\mathcal{P}$  una distribución de codimensión  $k$  en  $M$ , definida localmente por  $\omega^1, \dots, \omega^k \in \Omega^1(U)$ , linealmente independientes en cada  $p \in U$ . Entonces, son equivalentes

1)  $\mathcal{P}$  es integrable

2)  $d\omega^j \wedge \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k = 0$  para toda  $j = 1, \dots, k$

La demostración es consecuencia directa del siguiente par de lemas.

**4.3 Lema.** Sea  $\theta \in \Omega^2(U)$  tal que  $\theta \wedge \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k = 0$ . Para todo  $p \in U$  existe una vecindad  $V \subset U$  y  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Omega^1(V)$  tales que

$$\theta = \alpha_1 \wedge \omega^1 + \dots + \alpha_k \wedge \omega^k$$

*Prueba.* Como  $\omega^1, \dots, \omega^k$  son linealmente independientes en cada  $p \in U$ , es posible encontrar  $d-k-1$  formas en  $V$  de manera que  $\{\omega^1, \dots, \omega^d\}$  sea base de  $\Omega^1(V)$ , y escribir  $\theta$  en términos de ella como  $\theta = \sum_{i < j} a_{ij} \omega^i \wedge \omega^j$ .

Como  $\theta \wedge \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k = 0$ , entonces

$$\theta = \sum_{i < j} a_{ij} \omega^i \wedge \omega^j \wedge \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k = 0 \quad \text{implica que } a_{ij} = 0 \text{ si } k < i < j$$

Entonces, si hacemos  $\alpha_i = -\sum_{i < j} a_{ij} \omega^j$ , podemos reescribir a  $\theta$  como

$$\theta = \sum_{i=1}^k \alpha_i \wedge \omega^i \quad \square$$

**4.4 Lema.** Sean  $\omega \in \Omega^1(U)$  y sean  $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$ , entonces

$$d\omega(X, Y) = d(\omega(X)) \cdot Y - d(\omega(Y)) \cdot X + \omega([X, Y])$$

donde  $\omega(X)$  es la función:  $p \mapsto \omega_p(X(p))$

*Prueba.* Sea  $\{e_1, \dots, e_n\}$  base de  $\mathbb{R}^n$  y  $\{dx_1, \dots, dx_n\}$  la base dual. Entonces podemos escribir

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i \quad X = \sum_{i=1}^n b_i e_i \quad Y = \sum_{i=1}^n c_i e_i$$

donde  $a_i, b_i, c_i \in C^r(U)$ .

Con lo que obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$(1) \quad \omega(X) = \sum_{i=1}^n a_i b_i, \quad \omega(Y) = \sum_{i=1}^n a_i c_i$$

$$(2) \quad \omega([X, Y]) = \sum_{i=1}^n a_i \left( \sum_{j=1}^n (b_j \frac{\partial c_i}{\partial x_j} - c_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j}) \right) = \sum_{i,j} a_i \left( b_j \frac{\partial c_i}{\partial x_j} - c_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} \right)$$

Por otro lado  $d\omega = \sum_{i < j} a_{ij} dx_i \wedge dx_j$  donde  $a_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$ , por lo que se tiene que:

$$d\omega(X, Y) = \sum_{i < j} a_{ij} (b_i c_j - b_j c_i)$$

De (1) se obtienen las ecuaciones:

$$d\omega(X) \cdot Y = \sum_{i,j} \frac{\partial(a_i b_i)}{\partial x_j} \cdot c_j = \sum_{i,j} c_j (a_i \frac{\partial b_i}{\partial x_j} + b_i \frac{\partial a_i}{\partial x_j})$$

$$d\omega(Y) \cdot X = \sum_{i,j} \frac{\partial(a_i c_i)}{\partial x_j} \cdot b_j = \sum_{i,j} b_j (a_i \frac{\partial c_i}{\partial x_j} + c_i \frac{\partial a_i}{\partial x_j})$$

$$\begin{aligned} d\omega(X) \cdot Y - d\omega(Y) \cdot X &= \sum_{i,j} a_i (c_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial c_i}{\partial x_j}) \\ &+ \sum_{i,j} \frac{\partial a_i}{\partial x_j} (b_i c_j - b_j c_i) \end{aligned}$$

Sumando ésta última a (2) se tiene que:

$$d\omega(X) \cdot Y - d\omega(Y) \cdot X + \omega([X, Y]) = \sum_{i,j} \frac{\partial a_i}{\partial x_j} (b_i c_j - b_j c_i)$$

ahora podemos reordenar los índices del lado derecho de la ecuación, y dado que  $a_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$ , reescribirlo como

$$\sum_{i < j} \left( \frac{\partial a_j}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) (b_i c_j - b_j c_i) = d\omega(X, Y) \quad \square$$

Podemos ahora proseguir fácilmente en la demostración del Teorema:

*Prueba (Frobenius).* Sean  $X, Y \in \mathcal{P}$  campos vectoriales de clase.

Suponiendo que  $d\omega^j \wedge \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k = 0$ , podemos aplicar (4.3) y obtener

$$d\omega^j = \sum_{i=1}^k \alpha_i^j \wedge \omega^i$$

y al aplicar los campos  $X$  y  $Y$  se obtiene:

$$d\omega^j(X, Y) = \sum_{i=1}^k (\alpha_i^j(X)\omega^i(Y) - \alpha_i^j(Y)\omega^i(X)) = 0$$

ya que  $\omega^i(X) = \omega^i(Y) = 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, k$ . Aplicando la identidad demostrada en (4.4), se llega a que

$$0 = d\omega^j(X, Y) = d(\omega^j(X))(Y) - d(\omega^j(Y))(X) + \omega^j([X, Y])$$

y como  $\omega^j(X) = \omega^j(Y) = 0$ , entonces  $\omega^j([X, Y]) = 0$ , con lo que se prueba que  $[X, Y] \in \mathcal{P}$ , es decir,  $\mathcal{P}$  es involutiva, luego  $\mathcal{P}$  es integrable.

Ahora bien, si  $\mathcal{P}$  es integrable,  $[X, Y] \in \mathcal{P}$  y se tiene que  $\omega^j([X, Y]) = 0$ ,  $\forall j = 1, \dots, k$ . Utilizando la identidad de (4.4), se verifica que  $d\omega^j(X, Y) = 0$  para cualesquiera campos en  $\mathcal{P}$ .

Se sigue que  $d\omega^j \wedge \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k = 0$ .  $\square$

**4.5 Ejemplo.** Una 1-forma  $\omega$  define una foliación de codimensión 1 en  $M$  si:

- 1)  $\omega_x \neq 0$  en todo punto  $x \in M$ .
- 2)  $d\omega \wedge \omega = 0$

Si  $\omega$  es cerrada y no se anula en  $M$ , entonces define una foliación de codimensión 1 (ver 2.5) y esto se generaliza a foliaciones de codimensión  $k$ .

Hasta aquí hemos visto que dada una distribución sobre  $M$  podemos determinar si es integrable o no, pero ¿será siempre posible encontrar una distribución integrable sobre  $M$ ? En lo que resta de la tesis desarrollaremos la herramienta necesaria para responder a esta pregunta.

Nuestro objetivo inmediato es traducir la integrabilidad de un campo de planos a un contexto más abstracto, en el cual podremos determinar la imposibilidad de montar una distribución integrable sobre  $M$ . Para ello será necesario introducir la idea de haz vectorial sobre  $M$ . Veremos que una distribución es un subhaz vectorial del tangente  $TM$  y su integrabilidad dependerá de la naturaleza topológica de  $M$ .

## CLASES CARACTERÍSTICAS EN FOLIACIONES

En este capítulo daremos una condición necesaria para la existencia de foliaciones sin singularidades en una variedad diferenciable  $M$  de clase  $C^r$ ,  $r \geq 2$  y no necesariamente compacta. Para ello haremos un replanteamiento del concepto de foliación en el contexto de haces vectoriales: una foliación será un subhaz vectorial integrable  $E$  del haz tangente  $TM$ .

La integrabilidad local de  $E$  queda de antemano resuelta por el teorema de Frobenius traducido en términos de las secciones de  $E$ . Sin embargo la presencia de singularidades en una foliación es un problema de índole global. Para resolver este problema será necesario introducir el concepto de *curvatura de  $E$*  con la cual se definen clases de cohomología en  $H_{\mathbb{R}}^{2n}(M)$  llamadas *clases características*. La naturaleza de dichas clases determinará la no existencia de foliaciones sin singularidades y eso dependerá exclusivamente de la naturaleza topológica de  $M$ .

El trabajo que aquí se recopila se basa principalmente en el trabajo de [Bo1] "On a topological obstruction to integrability" modificado ligeramente para el caso de foliaciones diferenciables reales. Una línea más prolífica de investigación se cimenta en el caso complejo. Haciendo una traducción de ésta tesis para el caso de variedades complejas, puede servir como introducción al estudio de foliaciones holomorfas siguiendo [Ba-Bo] "Singularities of Holomorphic Foliations".

## 1. Haces Vectoriales

**1.1 Definición.** Un *haz vectorial* (o fibrado vectorial) de dimensión  $n$  sobre un espacio  $M$  es una aplicación continua y suprayectiva  $E \xrightarrow{\pi} M$  que satisface:

- 1) Para cada punto  $x \in M$ ,  $E_x = \pi^{-1}(x)$  tiene estructura de espacio vectorial de dimensión  $n$ .
- 2) Existe una cubierta abierta  $\{U_\alpha\}$  y homeomorfismos  $\phi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$  tal que el diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\phi_\alpha} & \pi^{-1}(U_\alpha) \\ & \searrow \tilde{\phi}_\alpha & \downarrow \pi \\ & & U_\alpha \end{array}$$

- 3)  $\phi_\alpha|_x : \{x\} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(x)$  es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Si  $E$ ,  $M$  y  $\pi$  son suaves,  $\phi_\alpha$  son difeomorfismos, diremos que el haz es suave. En ocasiones se requiere la siguiente condición:

Si  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , las aplicaciones  $\phi_\beta^{-1} \circ \phi_\alpha : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$  son de la forma

$$\phi_\beta^{-1} \circ \phi_\alpha(x, v) = (x, g_{\beta\alpha}(x) \cdot v) \quad x \in U_\alpha \cap U_\beta, v \in \mathbb{R}^n$$

donde la asignación  $x \mapsto g_{\beta\alpha}(x) \in GL(n, \mathbb{R})$  es diferenciable.

El haz vectorial  $E \xrightarrow{\pi} M$  se denotará por  $(E, \pi, M)$  o simplemente  $E$ . En adelante trabajaremos solamente con haces suaves.

**1.2 Observación.**  $E$  es una variedad diferenciable de dimensión  $n + \dim M$ .

*Prueba.* Tomemos el atlas maximal  $\mathfrak{A} = \{(V_i, \psi_i)\}$  de  $M$ ,  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$  un sistema de trivializaciones locales como en (1.1) y s.p.g. supongamos que  $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\} \subset \mathfrak{A}$ , es decir, que los dominios de las cartas y de las trivializaciones locales coinciden y cubren a  $M$ .<sup>1</sup>

Construimos homeomorfismos  $h_\alpha = (\psi_\alpha, id) \circ \phi_\alpha^{-1}$ :

$$h_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow \psi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n$$

donde las aplicaciones

$$\begin{aligned} h_\beta \circ h_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n \\ (\psi_\alpha(x), v) &\mapsto (\psi_\beta(x), g_{\beta\alpha}(x) \cdot v) \end{aligned}$$

es fácil verificar que son difeomorfismos en  $\mathbb{R}^{n+\dim M}$ .  $\square$

**1.3 Definición.** Una *sección local* en  $E$  es una aplicación  $U \xrightarrow{s} E$  suave tal que  $\pi \circ s = id_{U \subset M}$ . De esta forma todo haz vectorial tiene asociada su pregavilla de secciones  $\Gamma(E)$ . A las secciones locales las llamaremos simplemente *secciones* salvo que el contexto haga necesario ser más explícitos.

**1.4 Observación.** Como  $\Gamma(E)$  son secciones suaves, podemos considerar a  $\Gamma(E)$  como una pregavilla de  $C^\infty$ -módulos. Suponiendo esto, los elementos  $\Gamma(E|_{U_\alpha})$  son  $C^\infty(U)$ -módulos finitamente generados:

*Prueba.* Consideremos  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$  el sistema de trivializaciones locales de  $E$  formado por la unión de todas las trivializaciones que cumplen con (1.1). Basta entonces considerar elementos de la forma  $\Gamma(E|_{U_\alpha})$  y ver que son finitamente generados.

Dado que  $E_x \cong \pi^{-1}(x)$  por medio del isomorfismo  $\phi_\alpha|_x$  y tomando una base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$ , podemos construir secciones  $s_i^\alpha(x) = \phi_\alpha|_x(x, e_i)$ , que forman una base de  $E_x$  para todo punto  $x \in U_\alpha$  y si  $\sigma \in \Gamma(E|_{U_\alpha})$  es una sección arbitraria,  $\sigma(x)$  se expresa en términos de dicha base.  $\square$

<sup>1</sup>Si no, tomemos  $\{(V_i, \psi_i)\} \subset \mathfrak{A}$  tal que  $\{V_i\}$  cubra a  $M$  y tomamos  $\{(V_i \cap U_\alpha, \psi_i|_{V_i \cap U_\alpha})\}$ , en donde la intersección  $V_i \cap U_\alpha$  tenga sentido.



**1.5 Definición.** Al conjunto  $\{s_1^\alpha, \dots, s_n^\alpha\}$  lo llamaremos *marco local* de  $\Gamma(E)$ .

**1.6 Ejemplo. Producto tensorial de haces**

Sean  $(E, \pi, M)$ ,  $(F, \pi', M)$  haces vectoriales sobre  $M$ . Se define

$$E \otimes F = \bigcup_{x \in M} E_x \otimes E_x$$

Es posible ver que  $(E \otimes F, \pi \otimes \pi', M)$  es un haz vectorial de dimensión  $\dim E \cdot \dim F$ .

**1.7 Observación.** Sean  $E, F$  haces vectoriales sobre  $M$ ,  $\Gamma(E)$  y  $\Gamma(F)$  sus pregavillas de secciones. Entonces,

$$\Gamma(E) \otimes_{C^\infty(M)} \Gamma(F) \cong \Gamma(E \otimes_{\mathbb{R}} F)$$

*Prueba.* El isomorfismo basta demostrarlo en las restricciones  $E|_U, F|_U$  y  $(E \otimes F)|_U$ , donde  $U \subset M$  es un abierto arbitrario. Dichas restricciones las denotaremos simplemente por  $E, F$  y  $E \otimes F$  respectivamente. Definiendo

$$\begin{aligned} A: \Gamma(E) \otimes \Gamma(F) &\longrightarrow \Gamma(E \otimes F) \\ \sigma \otimes \tau &\longmapsto x \longmapsto \sigma(x) \otimes \tau(x) \end{aligned}$$

es decir,  $A(\sigma \otimes \tau) = \Sigma$  es la sección en  $E \otimes F$ , tal que  $\Sigma(x) = \sigma(x) \otimes \tau(x)$ . Se verifica que  $A$  es isomorfismo de módulos. Que  $A$  conmute con las restricciones se verifica trivialmente.  $\square$

**1.8 Ejemplo. El haz tangente**

$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$  es un haz vectorial  $TM \xrightarrow{\pi} M$ , cuyas trivializaciones locales son inducidas el atlas  $\mathfrak{A}$  de  $M$ :

Sea  $\pi: TM \rightarrow M$  definido como  $v_p \mapsto p$  para todo  $v_p \in T_p M$ . La trivialidad local se verifica:

Sea  $\mathfrak{A}$  atlas de  $M$ ,  $(U, \phi) \in \mathfrak{A}$  y  $\phi = (x_1, \dots, x_n)$ . En términos de esta carta,  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right\}$  es base de  $T_p M$  y  $\{d(x_1)_p, \dots, d(x_n)_p\}$  es la base dual  $\forall p \in U$ .

Si tomamos  $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{p \in U} T_p M$  y definimos

$$\begin{aligned} \psi^{-1}: \pi^{-1}(U) &\longrightarrow U \times \mathbb{R}^n \\ v_p &\longmapsto (p, d(x_1)_p(v_p), \dots, d(x_n)_p(v_p)) \\ \psi: U \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \pi^{-1}(U) \\ (p, a_1, \dots, a_n) &\longmapsto \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \end{aligned}$$

tenemos que  $\psi$  es trivialización local de  $TM$ , es invertible y si  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$ ,  $(U_\beta, \phi_\beta)$  son cartas  $\phi_\alpha = (x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha)$ ,  $\phi_\beta = (x_1^\beta, \dots, x_n^\beta)$  tales que  $p \in U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , entonces

$$\psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha(p, a_1, \dots, a_n) = (p, g_{\alpha\beta} \cdot (a_1, \dots, a_n))$$

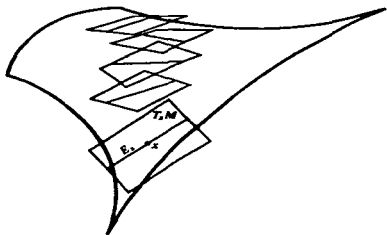
donde  $g_{\alpha\beta}(x) = \left( \frac{\partial x_i^\beta}{\partial x_i^\alpha} \Big|_x \right) \in GL(n, \mathbb{R})$ .

Antes de dar el siguiente ejemplo, sobre el cual se trabajará más adelante, debemos introducir el concepto de subhaz.

**1.9 Definición.** Sea  $(E, \pi, M)$  un haz vectorial de dimensión  $n$ , y  $F$  un subconjunto de  $E$ . Si para cada  $x \in M$  existe una trivialización local  $(U, \phi)$  de  $E$  que cumple

$$\phi^{-1}(F \cap \pi^{-1}(U)) = (U \times \mathbb{R}^k) \subset U \times \mathbb{R}^n$$

se tendrá un haz vectorial  $(F, \pi|_F, M)$  que es llamado un **subhaz de  $E$** .



### 1.10 Ejemplo. El haz tangente a una foliación

Sea  $M$  una  $m$ -variedad diferenciable y sea  $\mathfrak{F}$  una foliación de dimensión  $n$  sobre  $M$ . Definimos el haz tangente a la foliación como  $T\mathfrak{F} = \bigcup_{x \in M} T_x F$  para toda  $F$  hoja de  $\mathfrak{F}$ . Veremos que  $T\mathfrak{F}$  es un subhaz vectorial del tangente.

Observemos que  $T_x F$  es subespacio vectorial de  $T_x M$  pues  $F$  es subvariedad de  $M$  y además  $\dim T_x F = n$ . Sea  $x \in M$  arbitrario y  $(U, \phi)$  una trivialización local de  $TM$  tal que  $x \in U$ . Tenemos que  $\phi|_x$  es un isomorfismo entre  $T_x M$  y  $\mathbb{R}^m$ , en particular es inyectiva, por lo que también es un isomorfismo entre  $T_x F$  y su imagen. Dado que  $\dim T_x F = n$ , identificamos  $\phi|_x(T_x F) \subset \mathbb{R}^m$  como  $\mathbb{R}^n$ . De esta forma

$$\phi|_x: \{x\} \times \mathbb{R}^n \rightarrow T_x F$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Como  $T_x F \subseteq T_x M$  entonces  $\bigcup_{x \in U} T_x F \subseteq \pi^{-1}(U)$  y se verifica también que  $T\mathfrak{F} \cap \pi^{-1}(U) = \bigcup_{x \in U} T_x F$  y dado que  $\phi^{-1}: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^m$  es un homeomorfismo entonces

$$\phi^{-1}: \bigcup_{x \in U} T_x F \rightarrow \phi^{-1}\left(\bigcup_{x \in U} T_x F\right) = (U' \times V) \subset U \times \mathbb{R}^m$$

es también un homeomorfismo. Pero por la propiedad (1.1.1), se tiene que

$$U = \pi\left(\bigcup_{x \in U} T_x F\right) = P_1(U' \times V) = U'$$

donde  $P_1$  es la proyección sobre el primer factor. Además puntualmente,  $\phi^{-1}(T_x F) = \{x\} \times \mathbb{R}^m$  por lo que necesariamente  $V = \mathbb{R}^m$ , y se completa la verificación de que  $T\mathfrak{F}$  es subhaz de  $TM$ .  $\square$

Notemos que  $\mathfrak{F}$  es un haz vectorial que cumple una propiedad muy singular, la integrabilidad, que en el contexto de haces vectoriales se traduce como sigue: Un subhaz  $E$  del tangente  $TM$  es **integrable localmente** si  $\Gamma(E)$  es una pregavilla cerrada bajo el corchete de Lie de cualesquiera de sus elementos. Es decir, si  $X, Y \in \Gamma(E|_U)$ , entonces  $[X, Y] \in \Gamma(E|_U)$ .

Es de particular interés formar un nuevo haz en términos de los que acabamos de construir. Tomemos  $T_x F \subset T_x M$  y formemos el cociente  $\nu_x = T_x M / T_x F$ . Este nuevo espacio está formado por clases de equivalencia  $[v]$  de vectores en  $T_x M$ , donde  $v \sim v'$  si  $v - v' \in T_x F$ . Notemos que  $\forall w \in T_x F$ , la aplicación cociente

$$\begin{aligned} T_x M &\longrightarrow \nu_x \\ w &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

Si  $M$  es una variedad riemanniana, entonces podemos interpretar  $\nu_x$  como el complemento ortogonal de  $T_x F$  en  $T_x M$ , respecto a la métrica riemanniana dada.

**1.20 Definición.** Llamaremos **haz normal a la foliación** al haz

$$\nu = \bigcup_{x \in M} \nu_x$$

**1.21 Definición.** Sea  $(E, \pi, M)$  y sea  $g: M' \rightarrow M$  diferenciable. Se induce un haz vectorial  $(g^*E, g^*\pi, M')$  que construiremos a continuación:

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ & \swarrow & \downarrow \pi \\ M' & \xrightarrow{g} & M \end{array}$$

definiendo la fibra  $(g^*E)_x := E_{g(x)}$ . El haz inducido será el subconjunto de  $M' \times E$ :

$$g^*E = \{(x', e) \mid g(x') = \pi(e)\}$$

**1.22 Lema.** Sean  $g: M' \rightarrow M$  diferenciable,  $E' = g^*E$  el haz inducido por  $g$  y  $\Omega^1(M)$  las 1-formas definidas en  $M$ . Se induce un morfismo

$$\Omega^1(M) \otimes \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(M') \otimes \Gamma(E')$$

*Prueba.* Si  $\sigma \in \Gamma(E|_{g^{-1}(U)})$ , se induce una sección  $g^*\sigma = \sigma \circ g$  definida en  $M'$ . Como  $E|_{g^{-1}(U)}$  y  $E'$  son haces isomorfas, se induce un morfismo de pregavillas. En particular el morfismo

$$g^*: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E')$$

Por otro lado, si  $\omega \in \Omega^p(M)$  su pullback  $g^*\omega \in \Omega^p(M')$  está definido y es a su vez un morfismo de módulos. El morfismo requerido será  $g^* \otimes g^*$ .  $\square$

## 2. Conexiones en haces vectoriales

En lo sucesivo  $\tau$  denotará el haz tangente  $TM$ ,  $\tau^*$  su dual. Consideremos el complejo de de Rham  $\Omega^*(M)$ . Sea  $E$  un haz vectorial y  $\Gamma(E)$  su pregavilla de secciones.

Utilizaremos el hecho de que  $d: \Omega^{p-1}(M) \rightarrow \Omega^p(M)$  es una derivación en el complejo de de Rham, para construir una 'derivación de secciones' en  $\Gamma(E)$ . Para ello será necesario introducir las formas diferenciales con valores en un haz vectorial  $E$ :

$$\omega^p(M; E) = \Gamma(\wedge^p \tau^* \otimes_{\mathbb{R}} E)$$

que debemos pensar como funciones  $p$ -lineales alternantes

$$\omega_x: \tau_x \times \cdots \times \tau_x \rightarrow E_x$$

y para el caso del haz trivial  $M \times \mathbb{R}$  se tienen las formas diferenciales usuales. Es posible probar el isomorfismo

$$\Omega^p(M; E) \cong \Omega^p \otimes_{C^\infty(M)} \Gamma(E)$$

con el cual podemos ver que toda  $p$ -forma en  $\Omega^p(M; E)$  se puede escribir localmente como  $\sum \omega_i \otimes e_i$ , donde  $\omega_i$  son  $p$ -formas y  $\{e_i\}$  es un marco local de  $E$ .

Es deseable tratar de generalizar el complejo de de Rham para  $\Omega^*(M; E)$ , esto no es del todo posible ya que no se tiene una derivación exterior 'canónica'. Nuestro primer objetivo es estudiar la sucesión

$$\Gamma(E) \cong \Omega^0 \otimes \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1 \otimes \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^2 \otimes \Gamma(E) \longrightarrow \cdots$$

que resulta no ser un complejo y por eso mismo podremos definir *segundas derivadas de secciones* en  $E$  y asignarle su curvatura. En principio trabajaremos localmente y salvo se especifique lo contrario  $\Gamma(E)$  denotará las secciones de  $E$  definidas en un abierto  $U$  de  $M$  y similarmente  $\Omega^p$  serán  $p$ -formas definidas en  $U$ . Las referencias para ésta y las siguientes secciones son [Bro], [Bo-Tu] y [Mi].

**2.1 Definición.** Una conexión en  $E$  es un operador lineal

$$\nabla: \Gamma(E) \rightarrow \Omega^1 \otimes \Gamma(E)$$

$$\text{tal que} \quad \nabla(f \cdot s) = df \otimes s + f \cdot \nabla s;$$

$\nabla$  se expresa localmente en términos de un marco:

**2.2 Proposición.**  $\nabla$  queda completamente determinada por  $\nabla s_1, \dots, \nabla s_n$  donde  $\{s_1, \dots, s_n\}$  es un marco local de  $E$ . Además existe una matriz de  $n \times n$ ,  $(\omega_{ij})$  con  $\omega_{ji} \in \Omega^1$  tal que

$$\nabla s_i = \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \otimes s_j$$

*Prueba.* Cualquier sección  $s \in \Gamma(E)$  se escribe de manera única  $s = \sum_{i=1}^n f_i s_i$ . De la definición se sigue que:

$$\nabla s = \sum_{i=1}^n (df_i \otimes s_i + f_i \cdot \nabla s_i)$$

por lo que la imagen de  $s$  bajo  $\nabla$  queda determinada solamente por  $\nabla s_i$ , y éstas son dadas a priori.

Supongamos que  $\nabla s_i = \eta_i \otimes \sigma_i \in \Omega^1 \otimes \Gamma(E)$ . Además  $\eta_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} dx_j$  y  $\sigma = \sum_{j=1}^n b_{ij} s_j$  para algunas funciones  $a_{ij}$ ,  $b_{ij} \in C^\infty(M)$ . Entonces

$$\nabla s_i = \sum_{j=1}^n (a_{ij} b_{ij} dx_j) \otimes s_j$$

definimos  $\omega_{ij} = a_{ij} b_{ij} dx_j$ . A la matriz  $(\omega_{ij})$  se le llama *matriz de conexión*.  $\square$

**2.3 Ejemplo.** Si definimos  $\nabla s_i = 0$  para toda  $i = 1, \dots, n$  y si  $s = f_1 s_1 + \dots + f_n s_n$  entonces

$$\nabla s = df_1 \otimes s_1 + \dots + df_n \otimes s_n$$

y se le llama *conexión localmente plana*. Naturalmente  $\nabla$  plana equivale a que la matriz de conexión se anule:  $\omega_{ij} = 0$ .

**2.4 Proposición.**  $E$  tiene al menos una conexión global.

*Prueba.* Se toma  $\{U_\alpha\}$  cubierta abierta de  $M$  y  $\nabla^\alpha$  conexiones locales definidas en términos de un marco local  $\{s_1^\alpha, \dots, s_n^\alpha\}$ . Se toma una partición de la unidad  $\{\lambda^\alpha\}$  subordinada a la cubierta y se define  $\nabla = \lambda_\alpha \nabla^\alpha$ .  $\square$

**2.5 Proposición.** Sea  $\nabla$  una conexión en  $(E, \pi, M)$  y  $E' = g^*E$  el haz inducido hacia  $M'$  por  $g$  (ver 1.21). Existe una única conexión  $\nabla'$  en  $E'$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(E) & \xrightarrow{\nabla} & \Omega^1(M) \otimes \Gamma(E) \\ \downarrow g^* & & \downarrow g^* \otimes g^* \\ \Gamma(E') & \xrightarrow{\nabla'} & \Omega^1(M') \otimes \Gamma(E') \end{array}$$

*Prueba.* Tomaremos en cuenta el lema (1.22). Como  $\nabla$  queda determinada por su matriz de conexión  $(\theta_{ij})$ , basta ver que sucede en un marco local  $\{s_1, \dots, s_n\}$  de  $E|_U$ ,  $U \subset g(M') \subset M$ .

Si  $\nabla s_i = \sum_j \theta_{ij} \otimes s_j$ ,  $\theta'_{ij} = g^* \theta_{ij}$  y  $s'_j = g^* s_j$ , entonces

$$g^* \otimes g^*(\nabla s_i) = \sum_j \theta'_{ij} \otimes s'_j$$

Por otro lado, si  $\nabla'$  existe entonces  $\nabla' s'_i = \sum_j \omega_{ij} \otimes s'_j$  para alguna matriz de conexión  $(\omega_{ij})$ . Pero para que el diagrama conmute es necesario que

$$\sum_j \theta'_{ij} \otimes s'_j = \sum_j \omega_{ij} \otimes s'_j$$

es decir, que  $\theta'_{ij} = \omega_{ij}$  y se sigue la unicidad de  $\nabla'$  en  $E'|_{g^{-1}(U)}$ .

Como  $g^*$  es un morfismo entre  $\Omega^1(U)$  y  $\Omega^1(g^{-1}(U))$  y  $(\theta'_{ij})$  está determinada unívocamente,  $g^* \theta_{ij}$  verifica la existencia de la matriz de conexión y por lo tanto  $\nabla'$  existe. La globalidad de la conexión se hace a partir de  $\nabla'$  usando particiones de la unidad.  $\square$

En base a  $\Omega^1 \otimes \Gamma(E) \cong \Gamma(\tau^* \otimes E)$  hemos construido una derivación en  $E$

$$\nabla: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(\tau^* \otimes E)$$

que esta determinada localmente por una matriz de 1-formas.

Nuestro objetivo inmediato será definir la 'segunda derivada' en  $E$ . Para ello definiremos un análogo de conexión en el haz vectorial  $\tau^* \otimes E$ :

Consideremos el segundo segmento del complejo planteado al inicio de esta sección:

$$\longrightarrow \Gamma(\tau^* \otimes E) \longrightarrow \Gamma(\wedge^2 \tau^* \otimes E)$$

**2.6 Definición.** Definimos un operador lineal  $\widehat{\nabla}: \Gamma(\tau^* \otimes E) \rightarrow \Gamma(\wedge^2 \tau^* \otimes E)$  tal que

$$\widehat{\nabla}(\omega \otimes s) = d\omega \otimes s - \omega \wedge \nabla s.$$

**2.7 Observación.** Dada  $\nabla$  conexión en  $E$ , se determina de manera única a  $\widehat{\nabla}$ .

*Prueba.* Supongamos que  $\widehat{\nabla}$  existe. Si  $\widetilde{\nabla}$  es otra conexión en  $\tau^* \otimes E$  dada por  $\nabla$  entonces  $\widehat{\nabla}(\omega \otimes s) = \widetilde{\nabla}(\omega \otimes s)$  y por lo tanto coinciden.

La existencia basta verificarla en un marco local  $\{s_1, \dots, s_n\}$  en  $\Gamma(E|U)$ . Tomando elementos de la forma  $\omega_i \otimes s_i$  con  $\omega_i \in \Omega^1(U)$  generadores, se obtiene

$$\widehat{\nabla}\left(\sum_i \omega_i \otimes s_i\right) = \sum_i d\omega_i \otimes s_i - \omega_i \wedge \nabla s_i$$

es una conexión bien definida y la imagen de cualquier elemento  $\eta \otimes \sigma \in \tau^* \otimes E$  se expresa en términos de ella.  $\square$

**2.8 Observación.**  $\widehat{\nabla}$  satisface la siguiente identidad:

$$\widehat{\nabla}(f \omega \otimes s) = df \wedge (\omega \otimes s) + f \widehat{\nabla}(\omega \otimes s)$$

para  $f \in C^\infty$ .

*Prueba.* En  $\Omega^1 \otimes_{C^\infty} \Gamma(E)$ , entonces  $f(\omega \otimes s) = f\omega \otimes s$  y se tiene

$$\begin{aligned} \widehat{\nabla}f\omega \otimes s &= d(f\omega) \otimes s - f\omega \wedge \nabla s \\ &= (df \wedge \omega + f d\omega) \otimes s - f\omega \wedge \nabla s \\ &= df \wedge \omega \otimes s + f \widehat{\nabla}(\omega \otimes s) \quad \square \end{aligned}$$

**2.9 Definición.** La composición  $K = \widehat{\nabla} \circ \nabla$ :

$$\Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(\tau^* \otimes E) \longrightarrow \Gamma(\wedge^2 \tau^* \otimes E)$$

se le llama *tensor de curvatura asociado a  $\nabla$* .

**2.10 Observación.** El tensor de curvatura es un operador  $C^\infty$ -lineal.

*Prueba.* Sea  $f \in C^\infty(U)$  y  $s \in \Gamma(E|U)$ ,  $U \subset M$  abierto. Utilizando (3.11) y las propiedades de  $\widehat{\nabla}$  tenemos:

$$\begin{aligned} K(fs) &= \widehat{\nabla} \circ \nabla(fs) = \widehat{\nabla}(df \otimes s + f \nabla s) \\ &= \widehat{\nabla}(df \otimes s) + \widehat{\nabla}(f \nabla s) \\ &= d^2 f \otimes s - df \wedge \nabla s + df \wedge \nabla s + f \widehat{\nabla}(\nabla s) \\ &= fK(s) \quad \square \end{aligned}$$

**La representación matricial del tensor de curvatura.**

Sea  $\omega = (\omega_{ji})$  la matriz de  $\nabla$  relativa al marco local  $\{s_1, \dots, s_n\}$  y  $\hat{\nabla}$  el operador en  $\tau^* \otimes E$  inducido por  $\nabla$ . Como  $\nabla s_i = \sum_j \omega_{ij} \otimes s_j$  entonces

$$K(s_i) = \sum_j d\omega_{ij} \otimes s_j - \sum_j \omega_{ij} \wedge \nabla s_j$$

Tomemos el segundo término del lado derecho de la ecuación y lo reescribimos como:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \omega_{i\alpha} \wedge \nabla s_{\alpha} &= \sum_{\alpha} \omega_{i\alpha} \wedge \sum_j \omega_{\alpha j} \otimes s_j \\ &= \sum_j \sum_{\alpha} (\omega_{i\alpha} \wedge \omega_{\alpha j}) \otimes s_j \end{aligned}$$

retomando la ecuación original obtenemos,

$$\begin{aligned} K(s_i) &= \sum_j (d\omega_{ij} - \sum_{\alpha} \omega_{i\alpha} \wedge \omega_{\alpha j}) \otimes s_j \\ &= \sum_j \Omega_{ij} \otimes s_j \end{aligned}$$

Donde  $\Omega_{ij} = d\omega_{ij} - \sum_{\alpha} \omega_{i\alpha} \wedge \omega_{\alpha j}$  es una matriz de 2-formas.

**2.11 Definición.** La matriz  $\Omega = (\Omega_{ij})$  es llamada matriz de curvatura relativa al marco local  $\{s_1, \dots, s_n\}$ .

Podemos reunir todo esto en el siguiente

**2.12 Corolario.** Sea  $\omega$  la matriz de conexión y  $\Omega$  la matriz de curvatura asociadas ambas a  $\{s_1, \dots, s_n\}$ , marco local de  $E$ . Se satisface la ecuación

$$\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega$$

llamada **ecuación estructural**.

**2.13 Corolario.**  $\Omega$  y  $\omega$  satisfacen la siguiente identidad

$$d\Omega = \omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \omega$$

conocida como **identidad de Bianchi**.

*Prueba.* Se verifica substituyendo  $d\omega = \Omega + \omega \wedge \omega$  despues de haber derivado exteriormente la ecuación estructural.  $\square$



**2.14 Proposición.** Sean  $\Omega^\alpha, \Omega^\beta$  las matrices de curvatura relativas a los marcos locales  $\{s^\alpha\}$  y a  $\{s^\beta\}$ , entonces existe una matriz invertible  $A = (a_{ji})$  con coeficientes en  $C^\infty(U_\alpha \cap U_\beta)$  tal que

$$A^{-1}\Omega^\beta A = \Omega^\alpha$$

*Prueba.* Para todo  $p \in U_\alpha \cap U_\beta$  existe una matriz de funciones  $(a_{ji})$  tal que  $s_i^\beta(p) = \sum_j a_{ij}(p)s_j^\alpha(p)$ .<sup>2</sup> La matriz  $A = (a_{ij})$  es conocida como la matriz de cambio del marco  $\{s^\alpha\}$  al marco  $\{s^\beta\}$  y  $A$  es invertible. Si  $\omega^\alpha$  y  $\omega^\beta$  son las matrices de conexión descritas en términos de los marcos correspondientes, entonces en  $U_\alpha \cap U_\beta$

$$\begin{aligned}\nabla^\beta A s^\alpha &= \nabla^\beta s^\beta \\ dA \otimes s^\alpha + A \omega^\alpha s^\alpha &= \omega^\beta s^\beta = \omega^\beta A s^\alpha \\ (dA \otimes 1 + A \omega^\alpha) s^\alpha &= (\omega^\beta A) s^\alpha\end{aligned}$$

y por lo tanto las matrices de conexión se relacionan en  $U_\alpha \cap U_\beta$  como

$$dA + A \omega^\alpha = \omega^\beta A$$

Ahora bien, derivando ésta expresión y sustituyendo  $dA$  en la obtenida:

$$A(d\omega^\alpha - \omega^\alpha \wedge \omega^\alpha) = (d\omega^\beta - \omega^\beta \wedge \omega^\beta)A$$

Tomando en cuenta que se satisface  $\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega$  se concluye lo propuesto.  $\square$

Este último resultado, es fundamental para definir formas globales en términos de las matrices de curvatura.

### 3. Clases Características

**3.1 Definición.** Una función polinomial  $P: M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  se llamará *invariante* si para toda matriz  $B \in GL(n, \mathbb{R})$ ,

$$P(B^{-1}AB) = P(A)$$

**3.2 Ejemplo.** La función determinante y la traza de una matriz son lineales respecto al producto de matrices. Vistos como polinomios,  $\det(\cdot)$  y  $\text{traza}(\cdot)$  son invariantes. Notemos que en general la suma y el producto de cualesquiera dos polinomios invariantes es invariante. Por lo que forman un álgebra y se prueba que está generada por las funciones polinomiales  $\{\Sigma_0, \dots, \Sigma_n, \dots\}$  donde  $\Sigma_r(A) = \text{traza}(A^r)$  (ver [Bo2]).

<sup>2</sup>Esto se puede siempre que tomemos dos trivializaciones locales de  $E$  con dominios comunes. Por ejemplo, en  $E = \tau$ , las funciones  $a_{ij}$  serían  $x \rightarrow g_{\alpha\beta}(x)$  (ver ejemplo 1.8)

**3.3 Proposición.** *Existen  $2r$ -formas globales  $P(\Omega)$  donde  $0 \leq 2r \leq \dim M$ .*

*Prueba.* Sea  $\nabla$  una conexión en  $E$  y  $\{U_\alpha\}$  cubierta abierta de  $M$ . Sea  $P$  un polinomio invariante de grado  $1 \leq r \leq \frac{1}{2} \dim M$  (podemos tomar a  $\Sigma_r$  si se quiere) y sean  $\Omega^\alpha, \Omega^\beta$  las matrices de curvatura en  $E|_{U_\alpha}$  y  $E|_{U_\beta}$ . Por (3.17), en  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , se cumple que  $A\Omega^\alpha A^{-1} = \Omega^\beta$  para alguna matriz  $A$  invertible. Evaluando en  $P$

$$P(\Omega^\beta) = P(A\Omega^\alpha A^{-1}) = P(\Omega^\alpha)$$

y se tienen una  $2r$ -forma  $P(\Omega^\beta) = P(\Omega^\alpha) =: P(\Omega)$  definida en  $U_\alpha \cap U_\beta$ .

Llevando a cabo este proceso para cada intersección no vacía de  $\{U_\alpha\}$  se tiene que  $P(\Omega) \in \Sigma^{2r}(M)$ . De esta manera, las matrices de curvatura se 'pegan' por medio del polinomio  $P$  y dan lugar a una forma global de grado par.  $\square$

**3.4 Proposición.**  *$P(\Omega)$  define clases en  $H_{2r}^{2r}(M)$ .*

*Prueba.* Demostraremos que  $dP(\Omega) = 0$ , lo cual se deduce de la siguiente construcción:

Sea  $P: M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  un polinomio invariante, al que consideraremos como una función real en  $n^2$  variables  $A_{ij} = A$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ . De esta manera  $\frac{\partial P(A)}{\partial A_{ij}}$  representa la derivada parcial formal de  $P(A)$  respecto a la variable  $A_{ij}$ . Resulta útil formar un arreglo matricial  $(\frac{\partial P(A)}{\partial A_{ij}})$  y tomar su transpuesta, a la que denotaremos por  $P'(A)$ . Observemos que si  $dP(A) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial P(A)}{\partial A_{ij}} dA_{ij}$  es la diferencial de  $P(A)$  como función, entonces en términos matriciales:

$$dP(A) = \text{traza}(P'(A)(dA))$$

lo cual se verifica directamente tomando  $(dA) = (dA_{ij})$ .

**3.5 Observación.** Las matrices  $P'(A)$  y  $A$  conmutan.

*Prueba.* Sea  $E \in M(n, \mathbb{R})$  una matriz que tenga todas sus entradas nulas excepto la entrada  $E_{rs} = 1$  y sea  $t \in \mathbb{R}$ . Como  $P$  es invariante se cumple la igualdad:

$$P(A(I + tE)) = P((I + tE)A)$$

que es una igualdad entre funciones reales. Si derivamos ambos lados respecto a  $t$  se preserva la igualdad. Reescribamos el lado izquierdo como  $P \circ A(t)$  donde  $A(t) = A(I + tE)$  es una función  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ . La derivada  $D(P \circ A(t))$  se calcula utilizando regla de la cadena:

$$\frac{d}{dt}(P \circ A(t)) = \sum_i A_{is} \frac{\partial P}{\partial A_{is}}$$

que se obtiene tras considerar las matrices  $D(P)$  y  $\frac{d}{dt}A(t)$ , una vez 'desdobladas por renglones', como vectores con  $n^2$  entradas.

Similarmente, si definimos  $B(t) = (I + tE)A$  entonces  $\frac{d}{dt}(P \circ B(t)) = \sum_i A_{ri} \frac{\partial P}{\partial A_{ri}}$  y se obtiene la igualdad

$$\sum_i A_{is} \frac{\partial P}{\partial A_{is}} = \sum_i A_{ri} \frac{\partial P}{\partial A_{ri}}$$

que se traduce en la igualdad entrada a entrada de  $P'(A)A$  y  $AP'(A)$ .  $\square$

*Demostración de (3.4).* Sea  $A = \Omega$ . Considerando (4.5), la identidad de Bianchi y haciendo  $X := P'(\Omega) \wedge \omega$  se tiene

$$\begin{aligned} dP(\Omega) &= \text{traza}(P'(\Omega)(d\Omega)) \\ &= \text{traza}(P'(\Omega) \wedge \omega \wedge \Omega - \Omega \wedge P'(\Omega) \wedge \omega) \\ &= \text{traza}(X \wedge \Omega - \Omega \wedge X) \\ &= \sum_{ij} (X_{ij} \wedge \Omega_{ji} - \Omega_{ji} \wedge X_{ij}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

pues  $\Omega_{ji}$  es una forma par, y conmuta con cualquier  $p$ -forma. De esta manera  $P(\Omega)$  es cerrada y define clases de cohomología.  $\square$

**3.6 Definición.** Las clases  $P(\Omega)$  son llamadas *clases características*.

Es posible ver que las clases definidas por todos los polinomios invariantes de grado  $0 \leq r \leq \frac{1}{2} \dim M$ , forman un álgebra graduada. Esto se desprende del hecho que

$$M(n, \mathbb{R}) \rightarrow H_{\mathbb{R}}^{2n}(M)$$

es un homomorfismo de álgebras, conocido como el *homomorfismo de Weil*. Es posible ver también que todas las clases  $P(\Omega)$  están generadas por las *clases de Pontryagin*  $\sigma_i(\Omega)$ , dadas por el polinomio

$$\det(I - k\Omega) = 1 + k\sigma_1(\Omega) + k^2\sigma_2(\Omega) + \dots$$

donde  $k$  es cierto factor. A esta álgebra la llamaremos *álgebra de Pontryagin* del haz  $E$  y la denotaremos

$$\text{Pont}^*(E) \subset H_{\mathbb{R}}^*(M)$$

el desarrollo de esta teoría podemos encontrarla en [Mi].

**3.7 Proposición.** Las clases de cohomología en  $\text{Pont}^*(E)$  son independientes de  $\nabla$ .

*Prueba.* La demostración se sigue del lema de Poincaré y de (2.5):

Sea  $M \times \mathbb{R} \xrightarrow{\pi} M$  la proyección usual,  $E \rightarrow M$  un haz vectorial sobre  $M$  y  $\pi^*E = E'$  el haz inducido sobre  $M \times \mathbb{R}$ .

Definimos  $M \xrightarrow{t} M \times \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto (x, \varepsilon)$ ,  $\varepsilon = 0, 1$ . Tenemos una aplicación inducida  $i_0^*: H_{DR}^*(M \times \mathbb{R}) \rightarrow H_{DR}^*(M)$  que resulta ser una biyección y además  $i_0^* = i_1^*$  en cohomología (ver cap. II.1).

Sean  $\nabla_0$  y  $\nabla_1$  conexiones en  $E$  y  $\nabla'_0$  y  $\nabla'_1$  las conexiones inducidas en  $E'$  como se hizo en (3.8) y construimos una nueva conexión  $\nabla = t\nabla'_1 + (1-t)\nabla'_0$  en  $E'$ . Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(E) & \xrightarrow{\nabla_*} & \Gamma(\tau^* \otimes E) \\ \downarrow \pi^* & & \downarrow \pi^* \\ \Gamma(E') & \xrightarrow{\nabla} & \Gamma(\tau^* \otimes E') \\ \downarrow i_0^* & & \downarrow i_1^* \\ \Gamma(E) & \xrightarrow{\nabla_*} & \Gamma(\tau^* \otimes E) \end{array}$$

Observemos que  $i_0^*(\nabla) = \nabla_*$ :

Si  $\omega'$  y  $\theta'$  son las matrices de conexión de  $\nabla'_0$  y  $\nabla'_1$  respectivamente, por (3.8) necesariamente  $\omega' = \pi^*\omega$  y  $\theta' = \pi^*\theta$  donde  $\omega$  y  $\theta$  son las matrices de  $\nabla_0$  y  $\nabla_1$ . Si  $\eta$  es la matriz de conexión de  $\nabla$ ,  $\eta$  se escribe en términos de  $\omega'$  y  $\theta'$  y se cumple que  $i_0^*(\eta) = \omega$  y  $i_1^*(\eta) = \theta$ .

Sea  $\Omega_\nabla$  la matriz de curvatura de  $E'$  asociada a  $\nabla$ . Como la curvatura se expresa en términos de la matriz de conexión (ecuación estructural) y el pullback de formas es un morfismo de álgebras que conmuta con  $d$ , luego

$$i_0^*(\Omega_\nabla) = \Omega_{\nabla_0}, \quad i_1^*(\Omega_\nabla) = \Omega_{\nabla_1}$$

y al evaluar  $P$ ,

$$i_0^*P(\Omega_\nabla) = P(\Omega_{\nabla_0}), \quad i_1^*P(\Omega_\nabla) = P(\Omega_{\nabla_1})$$

en cohomología

$$i_0^*[P(\Omega_\nabla)] = i_1^*[P(\Omega_\nabla)] \quad \text{implica} \quad [P(\Omega_{\nabla_0})] = [P(\Omega_{\nabla_1})] \quad \square$$

#### 4. El teorema de anulamiento de Bott

En esta sección daremos una obstrucción para foliar una variedad  $M$  de clase  $C^r$ ,  $r \geq 2$ , compacta o no, cuya dimensión sea 'suficientemente alta'. Las referencias para esta sección son [Bo1] y [Bo2].

Para ello utilizaremos el álgebra  $Pont^*(\nu)$ , donde  $\nu = \tau/T\mathfrak{F}$  es el haz sobre  $M$  normal a  $\mathfrak{F}$  (ver 1.10). Gracias al teorema de Frobenius, podemos olvidarnos de la foliación y tomar en cuenta sólo a su haz tangente. Entonces basta considerar subhaces integrables  $E \subset \tau$ .

La propiedad de integrabilidad se traduce en el anulamiento de ciertas clases de cohomología en  $Pont^*(\nu)$ ,  $\nu = \tau/E$ . Si por el contrario, dichas clases no se anularan, entonces  $E$  no será integrable. Si  $E'$  es un haz isomorfo a  $E$ , la teoría de clases características asegura que las clases de  $\nu$  son iguales a las clases de  $\nu'$ . Para ver esto la referencia es [Mi]. Con ello,  $E'$  tampoco es integrable y en verdad tenemos una obstrucción topológica.

Para el caso de una foliación dada por una fibración (ver III.2.8), este fenómeno se observa fácilmente:

Sea  $\mathfrak{F}$  una foliación sobre  $M$  dada por la fibración  $M \xrightarrow{\pi} X$ , cuyas hojas son  $\pi^{-1}(x) = F_x$ . Se puede ver que

$$\nu = \tau/T\mathfrak{F} \cong TX$$

$\pi$  induce  $H_{2q,n}^*(X) \xrightarrow{\pi^*} H_{2q,n}^*(M)$  y la teoría de clases características garantiza que las clases de Pontryagin de  $\nu$  y las de  $TX$  coinciden. Pero  $H_{2q,n}^*(X) = 0$  para  $q > \dim X = \text{codim } \mathfrak{F}$ . Por lo tanto, las clases Pontryagin de  $\nu$  se anulan trivialmente a partir de  $q > \text{codim } \mathfrak{F}$ , pues eso sucede para las de  $TX$ .

Veremos que este resultado puede generalizarse: Si  $E \subset \tau$  es integrable entonces las clases de Pontryagin de su haz normal  $\nu$  se anulan a partir de  $2 \text{ codim } \mathfrak{F}_E$ .

La demostración del teorema está sustentada en el siguiente resultado elemental de álgebra lineal:

**Lema fundamental.** *Sea  $V$  espacio vectorial de dimensión finita y  $W$  subespacio de  $V$ . Se tiene el siguiente isomorfismo entre los duales:*

$$W^\circ \cong V^\circ/A(W)$$

donde  $A(W) = \{f \in V^\circ \mid f(w) = 0 \text{ para todo } w \in W\}$ .

Naturalmente este isomorfismo se extiende a nivel de haces. Nosotros lo haremos para el caso del tangente  $\tau$ :

**4.1 Proposición.** *Sea  $\tau$  el haz tangente sobre  $M$  de dimensión  $n$  y sea  $E$  un subhaz de  $\tau$ . Entonces  $m(E)$  es subhaz de  $\tau^\circ$  y se tiene el isomorfismo*

$$E^\circ \cong \tau^\circ/m(E)$$

donde  $m(E) = \{\omega \in \tau^\circ \mid \omega(E) = 0\}$

*Prueba.* Como  $E$  es un subhaz de  $\tau$ , podemos considerarlo como una distribución. En la demostración de la versión dual del teorema de Frobenius (III.4), se vio que cualquier distribución  $E$  de codimensión  $k$  puede verse como el kernel de  $k$  1-formas linealmente independientes. Es fácil verificar que aquella noción coincide con  $m(E)$  y se tiene como corolario que  $\dim m(E) = k$ , i.e. cada fibra tiene dimensión constante y  $m(E)$  es efectivamente subhaz de  $\tau^\circ$ .

Para todo  $x \in M$ , el morfismo

$$\begin{aligned} \tau_x^* &\longrightarrow E_x^* \\ \omega &\longmapsto \omega|_{E_x} \end{aligned}$$

es suprayectivo y su kernel es precisamente  $m(E)_x$  con lo que se induce el isomorfismo buscado, que se extiende a los haces.  $\square$

Se tiene la aplicación cociente  $\tau^* \xrightarrow{\rho} E^*$ , tal que a nivel de secciones su imagen es:

$$\rho(\omega) = \{\theta \in \Omega^* \mid (\omega - \theta)(v) = 0 \text{ para todo } v \in \Gamma(E)\}$$

De manera que podemos interpretar los elementos de  $\Gamma(E^*)$  ya sea como formas restringidas a valuarse en ciertos subespacios de  $\tau_x$ , o como clases de equivalencia bajo la relación recién descrita. Como hasta ahora hemos utilizado 1-formas para determinar conexiones en haces, tiene sentido hablar de conexiones restringidas a subhaces. Esto motiva la siguiente

**4.2 Definición.** Sea  $H$  un haz vectorial arbitrario sobre  $M$  y sea  $E$  subhaz de  $\tau$ . Una **conexión parcial**  $\delta_E$  en  $H$  es una aplicación lineal

$$\delta: \Gamma(H) \rightarrow \Gamma(E^* \otimes H)$$

tal que  $\delta(f \cdot s) = \rho(df) \otimes s + f\delta(s)$  para toda  $f \in C^\infty(M)$

**4.3 Observación.**  $\delta_E$  puede construirse en la restricción  $E|_U$ ,  $U$  abierto en  $M$  y por medio de una partición de la unidad lograr una conexión parcial en  $E|_M$ , tal y como se hizo anteriormente.

**4.4 Definición.** Una conexión parcial  $\delta_E$  en  $H$  se **extiende a una conexión** en  $H$  si existe  $\nabla$  tal que el diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(H) & \xrightarrow{\nabla} & \Gamma(\tau^* \otimes H) \\ & \searrow \delta_E & \downarrow \rho \otimes 1 \\ & & \Gamma(E^* \otimes H) \end{array}$$

**4.5 Observación.** Toda conexión parcial  $\delta_E$  se puede extender a una conexión.

**Prueba.** Sea  $C$  cubierta abierta de  $M$ ,  $U \subset C$  y  $\{s_U\}$  marco local de  $H$ . Entonces  $\delta(s_i) = \sum \gamma_{ij} \otimes s_j$  para algunos  $\gamma_{ij} \in \Gamma(E^*|_U)$  tomando representantes  $\omega_{ij} \in \Omega(U)$  tales que  $\rho(\omega_{ij}) = \gamma_{ij}$  y definiendo  $\nabla(s_i) = \sum \omega_{ij} \otimes s_j$ , se tiene una extensión local. Para lograr la globalidad se considera una partición de la unidad subordinada a  $C$  y se procede como siempre.  $\square$

Antes de entrar a la demostración del teorema de Bott, es necesario reformular el concepto de integrabilidad de un haz vectorial. Como se vió en (III.4), un subhaz  $E \subset \tau$  siempre se puede describir como el kernel de 1-formas linealmente independientes  $\{\omega_1, \dots, \omega_k\}$  y la condición de integrabilidad de  $E$  quiere decir que

$$d\omega_j \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k = 0$$

**4.6 Lema.** Sea  $E \subset \tau$  subhaz y  $\mathfrak{m}(E) = \{\omega \in \tau^* \mid \omega(E) = 0\}$ , entonces

1) Existen  $\omega_1, \dots, \omega_k$  1-formas linealmente independientes que generan localmente a  $\mathfrak{m}(E)$ .

2)  $E$  es integrable si y sólo si  $\dim(E) \subset \mathfrak{m}(E)$

*Prueba.* La primera parte es directa, ya que  $E$  es una distribución generada por  $\omega_1, \dots, \omega_k \in \mathfrak{m}(E)$ , que son linealmente independientes y  $\dim \mathfrak{m}(E) = k$ .

Sea  $\theta \in \mathfrak{m}(E)$  una  $p$ -forma y supongamos que  $d\theta \in \mathfrak{m}(E)$ . En particular  $d\omega_j \in \mathfrak{m}(E)$  y podemos escribir  $d\omega_j = \sum_{i=1}^k \theta_i^j \wedge \omega_i$  para algunas 1-formas  $\theta_i^j$  y por lo tanto  $d\omega_j \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k = 0$ .

Supongamos ahora que  $E$  es integrable, es decir,  $d\omega_j \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k = 0$  para  $j = 1, \dots, k$  y demostraremos que  $\dim(E) \subset \mathfrak{m}(E)$ . Basta verificar que  $d\omega_j \in \mathfrak{m}(E)$ : Como  $\omega_1, \dots, \omega_k$  son linealmente independientes, existen  $\omega_{k+1}, \dots, \omega_m$  1-formas tales que  $\{\omega_1, \dots, \omega_m\}$  es base de  $\tau^*$ . En general se tiene que  $d\omega_j \in \wedge^2 \tau^*$  y en términos de ésta base

$$d\omega_j = \sum_{l < m} a_{lm} \omega_l \wedge \omega_m$$

Pero por hipótesis  $\sum_{l < m} a_{lm} \omega_l \wedge \omega_m \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k = 0$ , entonces para  $l > k$ ,  $a_{lm} = 0$  necesariamente. Por lo tanto

$$d\omega_j = \sum_{l < m \leq k} a_{lm} \omega_l \wedge \omega_m \in \mathfrak{m}(E) \quad \square$$

**4.7 Teorema.** Sea  $E$  subhaz integrable de  $\tau$ ,  $\text{codim}(E) = k$  y sea  $\nu = \tau/E$  el correspondiente haz normal, entonces

$$\text{Pont}^s(\nu) = 0 \quad \text{para todo } s > 2k$$

*Prueba.* Para cada punto de  $M$  es posible encontrar una vecindad  $U_\alpha$  y  $k$  1-formas linealmente independientes  $\omega_1^\alpha, \dots, \omega_k^\alpha$  tales que generan a  $E|_{U_\alpha}$ . Sea  $\mathfrak{m}(E|_{U_\alpha})$  el ideal generado por dichas 1-formas. Definimos una conexión  $\nabla^\alpha$  en  $E|_{U_\alpha}$  tal que su matriz  $\omega^\alpha$  tenga entradas 1-formas en  $\mathfrak{m}(E|_{U_\alpha})$ . Hacemos esta construcción en cada elemento de una cubierta  $\{U_\alpha\}$  cuyos elementos son los dominios de las formas que nos proporciona el teorema de Frobenius y la que podemos suponer localmente finita. Usando una partición de la unidad  $\{\lambda_\alpha\}$  construimos una conexión en  $E$ :  $\nabla = \sum \lambda_\alpha \nabla^\alpha$  y con ayuda de (4.1) y (4.5) puede verse también que  $\nabla$  extiende a una conexión parcial localmente plana:  $\delta_E|_{U_\alpha} = 0$ .

Consideremos ahora las matrices de curvatura  $\Omega^\alpha = d\omega^\alpha - \omega^\alpha \wedge \omega^\alpha$ . Como  $E$  es integrable

$$\Omega^\alpha \in \mathfrak{m}(E|_{U_\alpha})$$

y definimos  $P(\Omega) = P(\Omega^\alpha)$  que coincide con  $P(\Omega^\beta)$ , para cualquier  $\beta$ .

Notemos que  $\Omega^r$  depende fuertemente de una conexión muy especial. Pero esto es intrascendente, pues como se vió en (3.7),  $[P(\Omega)]$  es independiente de la conexión con la que se construyó.

Observemos que  $m^r(E|U_\alpha) = 0$  para todo  $r > k$ . Esto se sigue del hecho que  $m(E|U_\alpha)$  está generado por 1-formas  $\omega_1, \dots, \omega_k$  y cualquier elemento  $\theta \in m^k(E|U_\alpha)$  es combinación lineal de elementos de la forma  $\omega_1^{n_1} \wedge \dots \wedge \omega_k^{n_k}$  con  $n_1 + \dots + n_k = k$ . Como  $\{\omega_i\}$  son linealmente independientes, si  $\sum n_i > k$  entonces  $\omega_1^{n_1} \wedge \dots \wedge \omega_k^{n_k} = 0$ .

Sea  $\Phi \in \text{Pont}^r(\nu)$ . Entonces existe un polinomio invariante  $P$  de grado  $\frac{r}{2}$  tal que  $P(\Omega) = \Phi$  pero como las entradas de  $\Omega$  son combinaciones lineales de elementos de la forma  $\omega_i \wedge \omega_j$  entonces

$$P(\Omega) = 0 \quad \text{para toda } r > 2k \quad \square$$



## INTEGRACIÓN DE FORMAS DIFERENCIALES

La integración en variedades tiene sentido solamente para formas cuyo orden sea  $n = \dim M$ . Trataremos ese problema, suponiendo que  $(M, g)$  es una  $n$ -variedad riemanniana. La integración de formas de orden  $p < n$  es posible realizarla sobre cadenas singulares, para ello ver el capítulo I.

**A.1 Definición.** La integral de una  $n$ -forma definida en el dominio de una carta local  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$  se define como:

$$\int_{u_\alpha} \omega = \int_U \varphi^* \omega$$

donde  $\varphi^* = (\phi_\alpha^{-1})^*$  y  $\phi_\alpha(U_\alpha) = U \subset \mathbb{R}^n$ .

**A.2 Ejemplo.** Sea  $C$  una curva en  $\mathbb{R}^3$  dada por la parametrización

$$\begin{aligned} \gamma : I &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) \end{aligned}$$

En este caso  $C$  es cubierta por una sola carta  $(\phi, C)$ , donde  $\phi^{-1} = \gamma$ . Si  $\omega = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3$  es una 1-forma en  $\mathbb{R}^3$  restringida a  $C$ , su pullback hacia  $I$  es:

$$\gamma^* \omega = \sum_{i=1}^3 (a_i \circ \gamma) d(x_i \circ \gamma)$$

pero  $x_i \circ \gamma = \gamma_i$ , entonces  $d\gamma_i = \frac{d\gamma_i(t)}{dt} dt$ , y la integral de  $\omega$  en  $C$  es:

$$\int_C \omega = \sum_{i=1}^3 \int_I (a_i \circ \gamma) \gamma_i'(t) dt$$

que se conoce como la integral de línea  $\int_C \omega$ .

**A.3 Ejemplo. Volumen de una variedad riemanniana**

Sea  $(M, g)$  una variedad riemanniana y sea  $G = |\det(g_{ij})|$ , donde  $(g_{ij})$  es la matriz cuyas entradas  $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$  son producto interior de los vectores básicos de  $T_p M$  según la métrica riemanniana  $g$ . Se define la **forma canónica de volúmenes** respecto a la métrica riemanniana  $g$ :

$$\psi = \sqrt{G} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Considerando una partición de la unidad subordinada a una cubierta adecuada, puede definirse una forma global de volumen  $\Psi$  y calcularse:

$$\text{Vol}_M(g) = \int \Psi$$

que dependerá de la métrica utilizada.

**Integración global.**

**A.4 Observación.** En integración en  $\mathbb{R}^n$  juega un papel importante:

1) La **orientación** del dominio. Por ejemplo, si  $\omega = f dx$  es 1-forma en  $I \subset \mathbb{R}$ , su integral es tal que

$$\int_I \omega = \int_a^b f dx = - \int_b^a f dx$$

2) La **compacidad** del dominio de los integrandos. Por ejemplo, en  $\mathbb{R}$  se pide que los integrandos estén sobre intervalos cerrados.

Para la integración global en  $n$ -variedades, es recomendable que

1)  $M$  sea orientable. Esto se establece en términos de sus coordenadas: Se dirá que  $M$  es orientable si posee un atlas orientado<sup>1</sup> y  $\mathfrak{A}$  es orientado si para cada  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$ ,  $(U_\beta, \phi_\beta) \in \mathfrak{A}$  tales que  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , los difeomorfismos  $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$  tienen matriz jacobiana con determinante positivo. Si  $M$  no posee un tal atlas, se dirá que no es orientable.

2) Los **integrandos**, es decir, las  $n$ -formas deben tener soporte compacto, es decir,  $\{\mathbf{x} \in M \mid \omega_{\mathbf{x}} \neq 0\} = \text{Supp } \omega$  debe ser compacto. Las  $p$ -formas con soporte compacto se denotarán por  $\Omega_c^p$ .

En la integración sobre variedades, supondremos que  $M$  es orientable y está orientada y que  $\omega \in \Omega_c^n(M)$ . Para definir la integral de  $\omega$  en  $M$  debemos 'partirla' para poder hacer su pullback via las cartas de la variedad. Para ello nos auxiliamos de  $\{\rho_\alpha\}$  partición de la unidad subordinada a  $\{U_\alpha\}$ , donde  $U_\alpha$  es dominio de carta en  $\mathfrak{A}$ :

<sup>1</sup>Una manera de caracterizar a las  $n$ -variedades orientables es la siguiente:  $M$  es orientable  $\Leftrightarrow$  existe una  $n$ -forma global  $\omega \in \Omega^n(M)$  tal que  $\omega_{\mathbf{x}} \neq 0 \forall \mathbf{x} \in M$ . Ver [Bo-Tu]J.3.2

**A.5 Definición.** Sea  $\omega$  una  $n$ -forma con soporte compacto sobre una  $n$ -variedad orientada  $M$  entonces:

$$\int_M \omega = \sum_{\alpha} \int_{U_{\alpha}} \rho_{\alpha} \omega$$

**A.6 Ejemplo.** Consideremos  $S^1 = \{s = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ , junto con el atlas usual  $\{(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2), (U_3, \phi_3), (U_4, \phi_4)\} = \mathfrak{A}$  y sea  $\omega = f(s)dx + g(s)dy$  una 1-forma en  $\mathbb{R}^2$  con soporte compacto en  $S^1$ . Para calcular  $\int \omega$ , consideremos  $\{\rho_i\}_{i=1}^4$  partición de la unidad relativa a  $\mathfrak{A}$ , tal que  $\sum_{i=1}^4 \rho_i \omega = \omega$ . En este caso se tiene

$$\rho_i \omega = \rho_i f dx + \rho_i g dy$$

que es una 1-forma que se anula en el complemento de  $U_i$  y cuya integral es

$$\begin{aligned} \int_M \rho_i f dx + \rho_i g dy &= \int_{\phi_i(U_i)} \varphi_i^*(\rho_i f dx + \rho_i g dy) \\ &= \int_{\phi_i(U_i)} (\rho_i f \circ \phi_i^{-1}) \cdot (x \circ \phi_i^{-1})' dt \\ (a) \quad &+ \int_{\phi_i(U_i)} (\rho_i g \circ \phi_i^{-1}) \cdot (y \circ \phi_i^{-1})' dt \end{aligned}$$

Ahora bien, las parametrizaciones correspondientes a las proyecciones  $\phi_i$  son:

$$\phi_1^{-1}: (-1, 1) \rightarrow U_1$$

$$\begin{aligned} \phi_1^{-1}(t) &= (t, \sqrt{1-t^2}) \\ \phi_2^{-1}(t) &= (t, -\sqrt{1-t^2}) \\ \phi_3^{-1}(t) &= (\sqrt{1-t^2}, t) \\ \phi_4^{-1}(t) &= (-\sqrt{1-t^2}, t) \end{aligned}$$

puediendo reescribir las integrales (a) como sigue

$$\begin{aligned} \int_M \rho_1 \omega &= \int_{-1}^1 \rho_1 f(t, \sqrt{1-t^2}) dt - \int_{-1}^1 \rho_1 g(t, \sqrt{1-t^2}) \cdot (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt \\ \int_M \rho_2 \omega &= \int_{-1}^1 \rho_2 f(t, -\sqrt{1-t^2}) dt + \int_{-1}^1 \rho_2 g(t, -\sqrt{1-t^2}) \cdot (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt \\ \int_M \rho_3 \omega &= - \int_{-1}^1 \rho_3 f(\sqrt{1-t^2}, t) \cdot (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt + \int_{-1}^1 \rho_3 g(\sqrt{1-t^2}, t) dt \\ \int_M \rho_4 \omega &= \int_{-1}^1 \rho_4 f(-\sqrt{1-t^2}, t) \cdot (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt + \int_{-1}^1 \rho_4 g(-\sqrt{1-t^2}, t) dt \end{aligned}$$

cuya suma es una integral en el intervalo  $(-1, 1) \in \mathbb{R}$  que representa a  $\int_{S^1} \omega$ .

**A.7 Ejemplo.** Si  $\omega$  es 1-forma exacta<sup>2</sup>, entonces para cualquier curva cerrada  $\gamma$  en  $M$ ,  $\int_{\gamma} \omega = 0$ .

*Prueba.* Si  $\gamma: I \rightarrow M$ ,  $I \in \mathbb{R}$  compacto, es la parametrización de  $\gamma$  tal que  $\gamma(a) = p = \gamma(b)$  entonces

$$\int_{\gamma} \omega = \int_I \gamma^* \omega$$

pero  $d\gamma = \omega$  y  $d$  conmuta con  $\gamma^*$ , así que

$$\int_{\gamma} \omega = \int_I d(f \circ \gamma) = f(p) - f(p) = 0 \quad \square$$

En este mismo contexto se puede probar que si  $\int_{\gamma} \omega = 0$  para cualquier curva cerrada  $\gamma \in M$ , entonces  $\omega$  es exacta. Además, el teorema de Stokes del capítulo II, garantiza este resultado. Sin embargo, para el caso de  $p > 1$ , la caracterización de las  $p$ -formas exactas es más fácil cuando se inventa el concepto de *cohomología*, el cual nos permite decir cuando una forma cerrada es exacta, y eso dependerá de la topología de la variedad.

<sup>2</sup>Es decir, existe  $f \in C^{\infty}(M)$  tal que  $df = \omega$

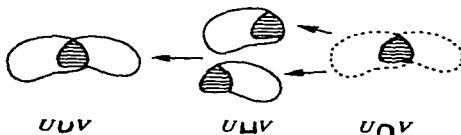
LA SUCESIÓN DE MAYER-VIETORIS

*La manera de calcular la cohomología de  $M$ .*

La sucesión de Mayer-Vietoris resulta ser una sucesión exacta corta de cocadenas cuyos módulos son formas definidas en abiertos  $U, V \in M$ ,  $U \cap V \neq \emptyset$ , y en la que los mapeos que la constituyen son las restricciones usuales de formas. La simplicidad de la sucesión de Mayer-Vietoris hace posible el cálculo de la cohomología en variedades 'pegando' las cohomologías definidas en abiertos de la variedad. Si los abiertos que tomemos son difeomorfos a abiertos en  $\mathbb{R}^n$  (por ejemplo dominios de cartas), su cohomología se expresa en términos de la cohomología de dichos abiertos en  $\mathbb{R}^n$ . En esta sección nos basaremos en el libro [Bo-Tu].

**B.1.** Sea  $M$  y  $\Omega^*$  el complejo de de Rham. Supongamos que  $M = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$  y tomemos dos abiertos  $U, V \in \{U_{\alpha}\}$  tales que  $U \cap V \neq \emptyset$ . Se da lugar a las inclusiones:

$$U \cup V \leftarrow U \cup V \rightleftarrows U \cap V$$



que induce la sucesión de restricciones:

$$(a) \quad \begin{aligned} \Omega^*(U \cup V) &\rightarrow \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \rightrightarrows \Omega^*(U \cap V) \\ \omega &\mapsto (\omega|_U, \omega|_V) \end{aligned}$$

Se define la sucesión de **Mayer-Vietoris**:

$$(b) \quad 0 \rightarrow \Omega^*(U \cup V) \xrightarrow{\rho_1} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow{\rho_2} \Omega^*(U \cap V) \xrightarrow{\rho_3} 0$$

$$(\omega, \tau) \mapsto \omega|_{U \cap V} - \tau|_{U \cap V}$$

tomando la diferencia de las últimas dos restricciones de (a) para definir  $\rho_2$ .

**B.2 Proposición.** *La sucesión de Mayer-Vietoris es exacta*

*Prueba.*

a)  $\text{Ker } \rho_1 = 0$ :

Si  $\omega \in \text{Ker } \rho_1$  entonces  $\omega|_U$  y  $\omega|_V$  se anulan. Además,  $0 \in \Omega^*(U) \cap \Omega^*(V)$  cumple que  $\omega|_U = 0|_U$  y  $\omega|_V = 0|_V$ . Pero  $\Omega^p$  es pregavilla completa  $\forall p = 0, \dots, \dim M$ , lo que implica que  $\omega = 0$ .

b)  $\text{Im } \rho_1 = \text{Ker } \rho_2$ :

Sea  $(\omega|_U, \omega|_V) \in \text{Im } \rho_1$ , al aplicar  $\rho_2$  se obtiene  $\rho_2(\omega|_U, \omega|_V) = 0$  por lo tanto  $\text{Im } \rho_1 \subseteq \text{Ker } \rho_2$ .

Sea  $(\omega, \tau) \in \text{Ker } \rho_2$ , entonces  $\omega|_{U \cap V} - \tau|_{U \cap V} = 0$  es decir,  $\text{Ker } \rho_2$  está constituido por formas que coinciden en  $U \cap V$ . Pero la estructura de pregavilla completa asegura que existe una forma 'global'  $\theta \in \Omega^*(U \cup V)$  tal que  $\theta|_U = \omega$  y  $\theta|_V = \tau$ . Si se define  $(\theta|_U, \theta|_V) \in \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V)$  es un elemento en la imagen de  $\rho_1$  que se anula bajo  $\rho_2$  por lo tanto  $\text{Im } \rho_1 \supseteq \text{Ker } \rho_2$ .

c)  $\rho_2$  es suprayectiva:

Sea  $\tau \in \Omega^*(U \cap V)$ . Debemos mostrar que  $\tau \in \text{Im } \rho_2$ . Para ello consideremos  $\{\varphi_U, \varphi_V\}$  partición de la unidad subordinada a  $\{U, V\}$  para construir  $\varphi_V \tau, -\varphi_U \tau$  que son formas en  $U$  y en  $V$  respectivamente que satisfacen  $\varphi_V \tau - (-\varphi_U \tau) = \tau$ , cumpliéndose la suprayectividad de  $\rho_2$ .  $\square$

Como consecuencia de (II.1.7) tenemos el siguiente

**B.3 Corolario.** *La sucesión de cohomología*

$$(c) \quad \dots \xrightarrow{d^*} H_{D^n}^q(U \cup V) \rightarrow H_{D^n}^q(U) \oplus H_{D^n}^q(V) \rightarrow H_{D^n}^q(U \cap V) \xrightarrow{d^*} H_{D^n}^{q+1}(U \cup V) \rightarrow \dots$$

es exacta.

**B.4 Observación.** La aplicación  $d^*$  construida en (II.1.7) queda descrita explícitamente en la sucesión de cohomología de Mayer-Vietoris como veremos a continuación:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^{q+1}(U \cup V) & \longrightarrow & \Omega^{q+1}(U) \oplus \Omega^{q+1}(V) & \longrightarrow & \Omega^{q+1}(U \cap V) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^q(U \cup V) & \xrightarrow{d^*} & \Omega^q(U) \oplus \Omega^q(V) & \xrightarrow{d^*} & \Omega^q(U \cap V) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

# ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA

Sea  $\omega \in \Omega^q(U \cap V)$  cerrada. Como  $\rho'$  es suprayectiva, existe  $\eta \in \Omega^q(U) \oplus \Omega^q(V)$ , a saber  $(\varphi_U \eta, -\varphi_V \eta)$ , que es su preimagen. Como el cuadrado de la derecha conmuta,  $d\eta \in \text{Ker } \rho$ , esto es,  $d(\varphi_U \eta)$  y  $-d(\varphi_V \eta)$  coinciden en  $U \cap V$ . Además  $d\eta \in \text{Im } \rho'$ , es decir, existe una forma cerrada  $\tilde{\omega} \in \Omega^{q+1}(U \cup V)$  que es su preimagen:

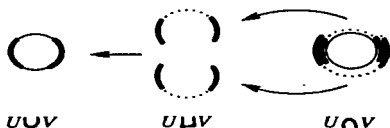
$$\rho'(\tilde{\omega}) = (\tilde{\omega}|_U, \tilde{\omega}|_V) = (d(\varphi_U \eta), -d(\varphi_V \eta))$$

y todos los elementos que sean cohomólogos a  $d(\varphi_U \eta)$  y todos los que lo sean a  $-d(\varphi_V \eta)$  definirán a  $\tilde{\omega}$ . De manera que

$$d^*[\omega] = \begin{cases} [d(\varphi_U \eta)] & \text{en } U \\ [-d(\varphi_V \eta)] & \text{en } V \end{cases}$$

### B.5 Ejemplo La cohomología del círculo.

Construyamos  $S^1$  como la unión de dos abiertos no ajenos  $U$  y  $V$ :



y planteamos la sucesión de Mayer-Vietoris

$$0 \rightarrow \Omega^*(S^1) \xrightarrow{\rho_1} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow{\rho_2} \Omega^*(U \cap V) \rightarrow 0$$

que tiene asociada una sucesión exacta de cohomología para  $S^1$ , que es calculable en términos de  $H_{D^n}^*(U)$  y  $H_{D^n}^*(V)$ :

a)  $H_{D^n}^0(U) = \{f \in C^\infty(U) \mid df = 0\}$  es decir, está constituido por las funciones constantes  $f \circ \psi_\alpha^{-1} = k \in \mathbb{R}$ , por lo que  $H_{D^n}^0(U) = H_{D^n}^0(V) = \mathbb{R}$

b) Como  $U \cap V$  consta de dos componentes, cada una difeomorfa a un intervalo en  $\mathbb{R}$ , por el mismo argumento de (a) se tiene que  $H_{D^n}^0(U \cap V) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$

c)  $H_{D^n}^1(U) \cong H_{D^n}^1(V) = 0$ ,  $H_{D^n}^1(U) \cong H_{D^n}^1(V) = 0$  y  $H_{D^n}^1(U) \oplus H_{D^n}^1(V) = 0$  pues toda 1-forma en  $\mathbb{R}$  es también exacta.

Toda esta información se condensa en la sucesión de cohomología de Mayer-Vietoris para  $S^1$ :

$$0 \rightarrow H_{D^n}^0(S^1) \xrightarrow{\rho_1} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\rho_2} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{d^*} H_{D^n}^1(S^1) \rightarrow 0$$

Debemos observar que  $(a, b) \xrightarrow{\rho_2} (a-b, a-b)$  y se deduce que  $\dim(\text{Im } \rho_2) = 1$ ; por lo que  $\text{Im } \rho_2 = \mathbb{R}$  necesariamente, y que  $\text{Ker } \rho_2 = \mathbb{R} = \text{Im } \rho_1$ . Planteamos los diagramas siguientes

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & H_{D,n}^0(S^1) & \xrightarrow{\rho_1} & \mathbb{R} = \text{Ker } \rho_2 & \xrightarrow{\rho_2} & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \xrightarrow{d^*} & H_{D,n}^1(S^1) \\
 & & \downarrow & \nearrow & & & \downarrow & \nearrow & \\
 & & \frac{H_{D,n}^0(S^1)}{\text{Ker } \rho_1} & & & & \frac{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}}{\text{Ker } d^*} & & 
 \end{array}$$

como  $\text{Ker } \rho_1 = 0$ , se sigue que

$$H_{D,n}^0(S^1) \cong \text{Ker } \rho_2 = \mathbb{R}$$

y como  $\text{Ker } d^* = \text{Im } \rho_2$ , entonces

$$H_{D,n}^1(S^1) \cong \text{Coker } \rho_2 = \mathbb{R}$$

d) Con el resultado de (B.4) podemos encontrar un generador para  $H_{D,n}^1(S^1)$ : Si  $\alpha$  es 0-forma cerrada definida en  $U \cap V$  y  $\alpha \in \text{Coker } \rho_2$ , entonces  $d^*\alpha$  es un generador de  $H_{D,n}^1(S^1)$  (Si  $\alpha$  estuviera en la imagen de  $\rho_2$ , que es el kernel de  $d^*$ , entonces  $d^*\alpha = 0$  y no generaría  $H_{D,n}^1(S^1)$ ). Si definimos  $\alpha$  como 0 en una de las componentes de  $U \cap V$  y 1 en la otra, entonces  $(\varphi_V \alpha, -\varphi_U \alpha) \mapsto \alpha$  y la 1-forma  $d^*\alpha$  definida por  $d(\varphi_V \alpha)$  en  $U$  y  $-d(\varphi_U \alpha)$  en  $V$  está definida en todo  $S^1$ .

**B.6 Observación.** Los diagramas planteados en (B.5) son válidos para cualquier sucesión exacta de cohomología de la forma

$$0 \rightarrow H^0(A) \rightarrow H^0(B) \rightarrow H^0(C) \xrightarrow{d^*} H^1(A) \rightarrow 0$$

donde  $A, B, C$  son módulos cualesquiera.

### B.7 Ejemplo. Cohomología del cilindro.

Tomemos un cilindro  $C = S^1 \times I$ , donde  $I$  es un intervalo, construido al pegar dos abiertos  $U$  y  $V$ , cada uno difeomorfo a un abierto de  $\mathbb{R}^2$ . Se tiene que  $H_{D,n}^0(U) = H^0(V) = \mathbb{R}$  y  $H_{D,n}^0(U \cap V) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$

También se tiene que  $H_{D,n}^1(U)$  y  $H_{D,n}^1(V)$  son isomorfos a  $H_{D,n}^1(\mathbb{R}^2) = 0$  y  $H_{D,n}^1(U \cap V) = 0$  y lo mismo sucede en la 2-cohomología. Recopilando esta información se plantea:

$$0 \rightarrow H_{D,n}^0(C) \xrightarrow{\rho_1} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\rho_2} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{d^*} H_{D,n}^1(C) \rightarrow 0$$

cuya solución es exactamente igual a la realizada en (B.5.c)

$$\therefore H_{D,n}^0(C) = \mathbb{R}$$

$$H_{D,n}^1(C) = \mathbb{R}$$

$$H_{D,n}^p(C) = 0 \quad p \geq 2$$

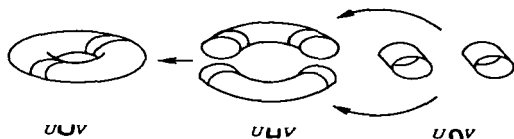
Con este ejemplo damos una verificación del lema de Poincaré para el caso

$$H_{D,n}^0(S^1) \cong H_{D,n}^1(C).$$



**B.8 Ejemplo. La cohomología del toro.**

$T^1$  puede construirse como la unión de dos cilindros, cuya intersección es otra pareja de cilindros:



Dado que  $H_{DR}^p(U) = \mathbb{R} = H_{DR}^p(V)$  y  $H_{DR}^p(U \cap V) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$  para  $p \in \{0, 1\}$  y  $H_{DR}^2(U) = 0$ , la secuencia de cohomología de Mayer-Vietoris queda:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H_{DR}^2(T^1) & \xrightarrow{r_2} & 0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & H_{DR}^1(T^1) & \xrightarrow{r_1} & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \xrightarrow{\delta_1} & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & H_{DR}^0(T^1) & \xrightarrow{r} & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \xrightarrow{\delta} & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}
 \end{array}$$

a) Como  $\text{Ker } r = 0$ , se tiene que  $H_{DR}^0(T^1) \cong \text{Im } r = \text{Ker } \delta$ , pero el morfismo

$$\begin{array}{ll}
 \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\delta} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \text{indica que } \text{Ker } \delta = \text{Im } \delta = \mathbb{R} \\
 (a, b) \longmapsto (a - b, a - b) & \therefore H_{DR}^0(T^1) = \mathbb{R}
 \end{array}$$

b) De la subsucesión  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{d^*} H_{DR}^1(T^1) \xrightarrow{r_1} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\delta_1} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$  se obtiene la siguiente información: como  $\mathbb{R} = \text{Im } \delta = \text{Ker } d^*$ , entonces  $\text{Im } d^* = \mathbb{R} = \text{Ker } r_1$ ; como nuevamente  $\text{Im } \delta_1 = \text{Ker } \delta_1 = \mathbb{R}$ , entonces  $\text{Im } r_1 = \mathbb{R}$  y se concluye que  $H_{DR}^1(T^1) = \mathbb{R}^2$ .

c) De  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{d^*} H_{DR}^2(T^1) \rightarrow 0$  se obtienen los siguientes datos: dado que  $\mathbb{R} = \text{Im } \delta_1 = \text{Ker } d^*$  debe cumplirse necesariamente que  $\text{Im } d^* = \mathbb{R}$  y como  $d^*$  es suprayectiva,  $H_{DR}^2(T^1) = \mathbb{R}$ .

En conclusión

$$\begin{aligned} H_{DR}^0(T^1) &= \mathbb{R} \\ H_{DR}^1(T^1) &= \mathbb{R}^2 \\ H_{DR}^2(T^1) &= \mathbb{R} \\ H_{DR}^p(T^1) &= 0 \quad \text{si } p \geq 3 \end{aligned}$$

### B.9 Observaciones.

- La dimensión de  $H_{DR}^0(M)$  indica el número de componentes conexas de  $M$ .
- La dimensión de  $H_{DR}^1(M)$  indica el número de 'agujeros' que determina  $M$ .
- Se puede verificar que si  $M = U \cap V$  abiertos no ajenos, y

$$\cdots \rightarrow H_{DR}^{q-1}(U \cap V) \xrightarrow{d^*} H_{DR}^q(M) \xrightarrow{\tau} H_{DR}^q(U) \oplus H_{DR}^q(V) \rightarrow \cdots$$

es el  $q$ -ésimo nivel de la sucesión de Mayer-Vietoris, entonces

$$H_{DR}^q(M) \cong \text{Im } d^* \oplus \text{Im } \tau$$

CONEXIONES (VERSIÓN VECTORIAL)

Nuestro objetivo será definir un operador  $\nabla$  en  $\Gamma(E)$  que nos permita "derivar" secciones. Podemos considerar a  $\nabla$  como una generalización de las conexiones afines, en las que se deriva un campo vectorial con respecto a otro (ver [DoC]). Con el fin de satisfacer a la intuición, daremos una definición de  $\nabla$  en términos de campos vectoriales.

**C.1 Definición.** Sea  $TM$  el haz tangente a  $M$  y  $\mathfrak{X}$  el conjunto de campos vectoriales sobre  $M$ . Una *conexión* en un haz vectorial  $E$  es un operador bilineal

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X} \times \Gamma(E) &\longrightarrow \Gamma(E) \\ (X, s) &\longmapsto \nabla_X(s) \end{aligned}$$

que cumple con las siguientes propiedades

- 1)  $\nabla_X(fs) = X(f) \cdot s + f \cdot \nabla_X(s)$
- 2)  $\nabla_{fX}(s) = f \cdot \nabla_X(s)$

para toda  $f \in C^\infty(M)$

Notemos que  $\mathfrak{X}$  es una pregavilla cuyos elementos son  $C^\infty(M)$ -módulos, y al mismo tiempo  $X \in \mathfrak{X}$  es una derivación en  $C^\infty(M)$ .

**C.2 Ejemplo.** El morfismo  $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \xrightarrow{\nabla} \mathfrak{X}$  definido por  $\nabla_X(Y) = X(Y)$  es una conexión. Notemos que si definimos  $\widehat{\nabla}_X(Y) = [X, Y]$  resulta no ser conexión ya que la propiedad (2) no se satisface.

**C.3 Observación.** En los ejemplos, para un  $X \in \mathfrak{X}$  fijo, se tiene que

$$\nabla_X(\cdot) = X(\cdot) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i}$$

es un operador en  $C^\infty(M)$ . En general podemos considerar las conexiones como operadores

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X} &\longrightarrow \text{Hom}(\Gamma(E), \Gamma(E)) \\ X &\longmapsto \nabla_X \end{aligned}$$

Esto es consecuencia directa del siguiente resultado puramente algebraico:

Dados  $V, W, Z$  módulos libres sobre un dominio  $k$ , se cumple

$$\text{Bil}(V \times W, Z) \cong \text{Hom}(V, \text{Hom}(W, Z))$$

La demostración es sencilla y puede encontrarse en [La].

**C.4 Proposición.**  $(E, \pi, M)$  tiene al menos una conexión global.

*Prueba.* Veremos primero que existe una conexión  $\nabla^\alpha$  en  $\Gamma(E|_{U_\alpha})$  donde  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$  es una trivialización local de  $E$ . Cualquier sección  $s^\alpha \in \Gamma(E|_{U_\alpha})$  se expresa en términos del marco local  $\{s_1^\alpha, \dots, s_n^\alpha\}$  como  $\sum_{i=1}^n f_i s_i^\alpha$ , así que el valor de  $\nabla^\alpha$  en el marco local la determina completamente.

Definiendo  $\nabla^\alpha(s_i^\alpha) \in \Gamma(E|_{U_\alpha})$ ,  $i = 1, \dots, n$ , como la sección idénticamente cero, se tiene que

$$\nabla_X^\alpha(s^\alpha) = \sum_{i=1}^n X(f_i) s_i^\alpha$$

y tomando esto como definición de  $\nabla_X^\alpha$  se tiene una conexión en  $E|_{U_\alpha}$ , dependiente solamente del marco local.

Para lograr la globalidad, consideremos  $\{\lambda_\alpha\}$  partición de la unidad subordinada a  $\{U_\alpha\}$ , de manera que

$$\sum_\alpha \lambda_\alpha \nabla^\alpha(s_\alpha)$$

es una sección global en  $E$  dada por la conexión  $\sum_\alpha \lambda_\alpha \nabla^\alpha$ .  $\square$

A este tipo de conexiones se les denomina *conexiones localmente planas*.

**C.5 Observación.**  $\nabla$  queda localmente determinada por un marco local  $\{s_1, \dots, s_n\}$  de  $E$  y por  $\{\partial_{x_1}^2, \dots, \partial_{x_m}^2\}$  base de  $\mathfrak{X}$  de la siguiente forma:

$$\nabla_{\partial_{x_k}^2}(s_i) = \sum_{j=1}^n f_{ij}^k \cdot s_j$$

para algunas funciones  $f_{ij}^k$ ,  $k = 1, \dots, m$ . Esto se desprende del hecho que  $\Gamma(E)$  es un módulo sobre  $C^\infty(M)$ . Además,  $\nabla_X(s)$  se puede escribir en términos de esta expresión.

Ahora veremos la equivalencia de esta definición de conexión y la que se hizo en el capítulo IV en términos de 1-formas

**C.6 Observación.** Dado un marco local  $\{s_1, \dots, s_n\}$  de  $E$ , tenemos que

$$\nabla_{\partial_{x_k}^2}(s_i) = \sum_{j=1}^n f_{ij}^k \cdot s_j \quad \text{vectorial}$$

$$\nabla s_i = \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \otimes s_j \quad \text{tensorial}$$

Demostremos su equivalencia para las bases  $\{s_i\}$ ,  $\{dx_i\}$ ,  $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$  de  $\Gamma(E)$ ,  $\Omega^1$  y  $\mathfrak{X}$  respectivamente. La prueba es consecuencia del siguiente lema.

**C.7 Lema.** Sean  $V$ ,  $E$   $k$ -módulos finitamente generados,  $k$  un dominio. Entonces

$$V^* \otimes E \cong \text{Hom}(V, E)$$

*Prueba.* Definimos

$$\begin{aligned} \varphi : V^* \otimes E &\longrightarrow \text{Hom}(V, E) \\ f \otimes s &\longmapsto f(v) \cdot s \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

La inversa la daremos en términos de  $\beta = \{v_i\}$  base de  $V$ ,  $\{f_i\}$  la base dual y  $\{s_i\}$  base de  $E$ .

Sea  $T : V \rightarrow E$  lineal y  $[T]_\beta = (\mu_{ij})$  su representación matricial, es decir,  $Tv_i = \sum_j \mu_{ji} s_j$ . La aplicación

$$T \longmapsto \sum_j f_j \otimes \mu_j,$$

es la inversa de  $\varphi$ , lo cual se verifica directamente.  $\square$

**C.8 Proposición.** La conexión vectorial y la tensorial son equivalentes.

*Prueba.* Tomando los módulos  $\mathfrak{X}$ ,  $\Gamma(E)$ ,  $\Omega^1$  y aplicando el lema tenemos que

$$\nabla s_i = \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \otimes s_j \longmapsto \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \cdot s_j =: \nabla_{s_k} s_i$$

y por otro lado

$$\nabla_{s_k} s_i = \sum_{j=1}^n f_{ij}^k \cdot s_j \longmapsto \sum_j f_{ij}^k dx_k \otimes s_j =: \nabla$$

y a su vez

$$\nabla = \sum_j f_{ij}^k dx_k \otimes s_j \longmapsto \sum_j f_{ij}^k dx_k \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \otimes s_j = \nabla_{s_k} s_i$$

coincidiendo ambas definiciones.  $\square$

## REFERENCIAS

- [Ba-Bo] Baum, Bott, R., *Singularities of holomorphic foliations*, J. Differential Geometry **7** (1972), 279–342.
- [Bo1] Bott, R., *On a topological obstruction to integrability*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **XVI** (1970), 127–131.
- [Bo2] Bott, R., *Lecture notes on algebraic and differential topology*, Springer Verlag, Berlin, 1972.
- [Bo-Tu] Bott R.; Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Springer Verlag, New York, 1982.
- [Br] Bredon, G. A., *Topology and geometry*, Springer Verlag, New York, 1993.
- [Bro] Brücker; Jänich, *Introduction to differentiable topology*, Cambridge University Press, England, 1982.
- [Ca-Li] Camacho, C.; Lins A., *Teoria geometrica das folheacoes*, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.
- [DoC] Do Carmo, M., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, New York, 1976.
- [Go] Godement, R., *Topologia algebrique et teorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1958.
- [Ha] Hartshorne R., *Algebraic Geometry*, Springer, New York, 1977.
- [La] Lang, S., *Algebra*, Addison Wesley, Mass., 1965.
- [Ma] Matsushima, Y., *Differentiable manifolds*, M. Dekker, New York, 1972.
- [Mi] Milnor, J., *Lectures on characteristic classes*, University of Princeton, U.S.A., 1950.
- [Spa] Spanier, *Algebraic topology*, Springer Verlag, New York, 1966.
- [Sp] Spivak, M., *Calculus on Manifolds*, Addison-Wesley, Redwood City, 1965.
- [We] Wells, R.O., *Differential Analysis on Complex Manifolds*, Springer, New York, 1980.
- [Wa] Warner, F., *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Springer, New York, 1983.