23
21

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
ACATLAN

EL MODELO DEL INDICE UNICO EN LA FORMACION DE PORTAFOLIOS DE INVERSION

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A

RUBEN RODRIGUEZ LOPEZ

ASESOR: DR. JOSE LUIS A. UMAÑA YAÑEZ

NAUCALPAN DE JUAREZ, EDO. DE MEXICO; 1997

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

VNIVERSDAD NACIONAL AVPNMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLAN"
DIVISION DE MATEMATICAS E INGENIERIA
PROGRAMA DE ACTUARIA Y M.A.C.

SR. RUBEN RODRIGUEZ LOPEZ
Alumno de la carrera de Actuaria
Presente.

De acuerdo a su solicitud presentada con fecha 15 de enero de 1996, me complace notificarle que esta Jefatura tuvo a bien asignarle el siguiente tema de Tesis "EL MODELO DEL INDICE UNICO EN LA FORMACION DE PORTAFOLIOS DE INVERSION", el cual se desarrollará como sigue:

INTRODUCCION
CAP. I Generalidades
CAP. II Elementos de decisión bajo riesgo
CAP. III Teoría de la cartera
CAP. IV El modelo del índice único
CAP. V Caso Práctico
CONCLUSIONES
BIBLIOGRAFIA

Asimismo, fué designado como Asesor de Tesis el DR. JOSE LUIS A. UMAÑA YAÑEZ.

Ruego a usted tomar nota que en cumplimiento de lo especificado en la Ley de Profesiones, deberá presentar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito básico para sustentar examen profesional, así como de la disposición de la Coordinación de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la Tesis el título del trabajo realizado. Esta comunicación deberá imprimirse en el interior de la misma.

ATENTAMENTE
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Acatlán, Edo. Méx. Enero 20 de 1997

ACT. LAURA MA. [illegible] BECERRA
Jefe del Programa de Actuaria y M.A.C.

cg'

E.N.E.P. ACATLAN

JEFATURA DEL PROGRAMA DE ACTUARIA Y MATEMATICAS APLICADAS Y COMPUTACION

AGRADECIMIENTOS

A Dios :	**Por permitirme alcanzar una de mis principales metas en la vida.**
A mis padres : **Rubén Rodríguez L.** **Belem López F.**	**Quienes con amor e infinita comprensión me han legado el tesoro más preciado.** **Para ellos mi agradecimiento y admiración.**
A mis hermanos : **Rosa , Araceli y** **Julio César**	**Que en todo momento han estado a mi lado para impulsarme a lograr mis objetivos.**
A mi sobrina : **Dulce Areli**	**Que con su sonrisa ilumina mi vida.**
A mis amigos :	**Por su valiosa colaboración que me brindaron para realizar este trabajo , y en especial , a la familia Rodríguez Trejo.**

A mi escuela y profesores :	Quienes tuvieron el esmero de transmitirme sus conocimientos.
A mi asesor : Dr. José Luis A. Umaña Yañez	Por su apoyo brindado en el desarrollo de esta tesis.

INDICE

INTRODUCCION

Dos de los principales elementos que influyen en la toma de decisiones de los inversionistas son , el rendimiento y riesgo que pueda proporcionar la inversión. Es claro que el objetivo de todo inversionista es el de lograr el mayor rendimiento o ganancia , dado un nivel de riesgo mínimo. Específicamente , para las personas que desean invertir en acciones , su riesgo consiste en la incertidumbre que existe en cuanto al precio del título en una fecha futura.

Son varios los factores que pueden ocasionar un alza o baja en el precio de las acciones. La inversión en acciones lleva implícito el riesgo de fluctuaciones que se debe a la oferta y la demanda que existe en el mercado , así como diferentes aspectos económicos , políticos y sociales que afectan directamente a las mismas. Por ser el mercado accionario uno de los más rentables , pero también , uno de los que más riesgo tiene , se han llevado a cabo diferentes estudios para su mejor comprensión.

Harry Markowitz , a inicios de la década de los 50's , desarrolló los elementos esenciales de la Teoría de la Cartera en su artículo titulado "Portfolio Selection" , en el cual mostraba como formar una frontera de portafolios de inversión , que tuviera la mayor posible tasa de rendimiento , determinando su nivel de riesgo.

Posteriormente , William Sharpe en 1963 , desarrolló una versión simplificada llamada el Modelo del Indice Unico , la cual reduce el número de datos necesarios para realizar el análisis de portafolios y simplificar los cálculos requeridos para encontrar aquellos que son eficientes.

El objetivo de este trabajo es el de realizar un análisis del Modelo del Indice Unico , debido a la importancia que representa su utilización , ya que permite simplificar notablemente el problema de la selección de portafolios.

En el primer capítulo se dará una introducción general a los principales conceptos requeridos en la Teoría de la Cartera , así como los elementos de la teoría de la utilidad , con la finalidad de que el lector se empiece a familiarizar con el tema de inversiones.

En el segundo capítulo se presentarán los elementos necesarios para la toma de decisión en condiciones de riesgo e incertidumbre , para lo cual , será necesario el conocimiento básico de probabilidad y estadística.

El estudio a la teoría de la cartera estará comprendido en el tercer capítulo. Se presentará una introducción a la Teoría Moderna del Portafolio y , especialmente , a la Teoría de Markowitz.

El cuarto capítulo tiene por objetivo el estudio de uno de los modelos de la Teoría de la Cartera que permite simplificar sustancialmente el numero de datos y cálculos requeridos para el análisis de portafolios , éste es : el Modelo del Indice Unico.

Un caso práctico se presentará en el quinto capítulo con la finalidad de mostrar la aplicación real del modelo , para lo cual , se requerirá información de la Bolsa Mexicana de Valores.

Al finalizar este trabajo se pretende que el lector tenga los elementos necesarios para una mejor comprensión de un portafolios de inversión , y sobre todo , sea capaz de realizar una aplicación práctica de la Teoría de la Cartera utilizando el metodo simplificado de William Sharpe.

I. GENERALIDADES

1. INVERSION , RENDIMIENTO Y RIESGO

INVERSION

Existen diferentes formas de inversión , por tanto , es necesaria una definición práctica para una mejor comprensión del tema. Algunos diccionarios definen inversión como : " La colocación de dinero o capital para obtener ganancias favorables , específicamente interés o ingreso ".

Gonzalo Cortina Ortega , en su Prontuario Bursátil y Financiero , define a la inversión como : " Cualquier destino dado a unos medios financieros. También puede considerarse inversión a la adquisición de bienes y mercancías ; pero no así a los gastos y consumos. La inversión implica una idea de beneficio a futuro , por lo que los gastos o consumos son opuestos a la inversión ".

Para nuestro propósito , definiremos inversión como la colocación de una determinada suma de capital en el tiempo presente con la expectativa de recibir una mayor suma de éste en el futuro. Esta definición encierra dos importantes puntos. Primero , el proceso de inversión implica el cambiar algun ingreso presente por otro ingreso futuro. Segundo , el objeto de la inversión es recibir , en un futuro, mayor flujo de fondos que el que originalmente se invirtio. De esta manera , nuestra inversión tendra ganancia positiva.

Ciertamente , decisiones de inversión son basadas en la esperanza de recibir un rendimiento positivo en el futuro , y dado que el futuro es desconocido , la incertidumbre pasa a ser una parte integral de la inversión.

Timothy Heyman en su libro " Inversión contra inflación " , hace notar que existe una diferencia importante entre una inversión real y una inversión financiera. La primera es la que se hace en bienes tangibles , como planta y equipo , inventarios , terrenos o bienes raíces ; y la segunda , que es la que nos interesa , es la aportación de recursos líquidos para obtener un beneficio futuro.

RENDIMIENTO

Al beneficio que se deriva de una inversión se le ha denominado rendimiento. De esta manera, el primer objetivo de un inversionista, naturalmente, es lograr un rendimiento satisfactorio por lo invertido.

Existen diferentes definiciones de rendimiento. El Prontuario Bursátil y Financiero define al rendimiento como : " La ganancia o utilidad que produce una inversión o negocio. Usualmente se expresa en términos de porcentajes anuales sobre la inversión ".

Otra definición más simple define que rendimiento es la ganancia obtenida como proporción del capital invertido. [1]

El rendimiento se puede percibir por medio de intereses, ganancias de capital, dividendos o alguna combinación. Así se tiene que, en renta variable, el rendimiento que recibe un inversionista a través de una acción proviene tanto de los dividendos que paga el título, como de las ganancias de capital que obtiene por variaciones en su precio.

Un punto importante que debe de tomar en cuenta todo inversionista es que, el rendimiento que se percibe por una inversión debe rebasar la tasa de inflación del periodo correspondiente. Esta diferencia entre la tasa de rendimiento y la tasa de inflación (normalmente medida por el cambio en el índice de precios al consumidor), se llama "tasa real" y puede ser positiva o negativa, en su caso.

(1) Charles P. Jones " Investment Analysis and Management ",
John Wiley & Sons, INC 1991

RIESGO

Previamente hemos determinado inversión como la colocación de una suma de dinero en el tiempo presente , con la expectativa de recibir una mayor suma en el futuro. Esta definición destaca el hecho de que las decisiones de inversiones son basadas en el rendimiento esperado de la inversión. Básicamente , el riesgo que un inversionista asume por invertir en títulos incluye la posibilidad de que no se le realice el rendimiento esperado.

En el Prontuario Bursátil y Financiero esta definido el riesgo como : " La posibilidad de perder una inversión determinada. El riesgo suele asociarse a la incertidumbre. El riesgo no necesariamente es malo , ya que en la medida que aumenta se logra un premio. Así por ejemplo , los títulos de crédito que conllevan mayor riesgo , suelen tener una mejor tasa , como premio al inversionista que acepta el riesgo. En los instrumentos de renta fija , en que el riesgo es menor , no suele haber la posibilidad de ganancias de capital sustanciosas , mientras que en renta variable con riesgo , si hay ganacias de capital sustanciosas (o pérdida , de ahí el riesgo). El riesgo es un factor distintivo entre empresario y rentista. El empresario acepta el riesgo e ilimita sus ganancias ; el rentista prefiere ganar menos , en forma estable , pero no arriesgar ".

Para un inversionista , el riesgo de una acción se entiende como la incertidumbre que existe en cuanto al precio del título en una fecha futura.

El objetivo de todo inversionista es lograr un cierto rendimiento con los capitales que administra. Sin embargo , no tiene por adelantado la certidumbre de obtenerlo , en otras palabras , el rendimiento realizado difiere del esperado. Así , se puede identificar el riesgo de una inversión como la dispersión o la variabilidad de su rendimiento alrededor del valor esperado. Aunque se puedan concebir distintos metodos para calcular y medir la variabilidad , la medición mas utilizada es la desviación estandar (o desviación típica). [2]

En una inversión debidamente efectuada , el rendimiento esperado deberá estar en proporción con el riesgo asumido por el inversionista.

(2) Sul Mittra and Chris Gassen " Investment Analysis and Portfolio Management "
Harcourt Brace Javonovich INC pp 3 - 10

2. ELEMENTOS BASICOS DE LA TEORIA DE LA UTILIDAD

La Teoria de la Utilidad es un intento de estudiar racionalmente las decisiones humanas. En esta sección , se analizará la aplicabilidad de algunos criterios de decisión y la forma en que esta teoría permite resolver ciertos problemas que se presentan con los mismos , así como las distintas actitudes de los individuos frente al riesgo.

La Teoria de la Utilidad se refiere a un conjunto de paquetes , entre los que se define una relación de indiferencia y una relación de preferencia , para un individuo que debe tomar una decisión. Se define asimismo una función denominada "función de utilidad" tal que a cada alternativa le hace corresponder un número llamado "utilidad de esa alternativa" y tal que si un paquete es preferido a otro , entonces la utilidad del primero es mayor que la del segundo.

En estas condiciones se aceptan un conjunto de axiomas : uno de ellos dice que las alternativas son siempre comparables , es decir que una de ellas es preferida a la otra o bien ambas son indiferentes , para un individuo.

En términos de la función de utilidad , lo anterior se expresa :

$$U_{(A)} > U_{(B)} \quad \text{ó} \quad U_{(B)} > U_{(A)} \quad \text{ó} \quad U_{(A)} = U_{(B)}$$

donde

U = Utilidad
A , B , C = Posibles opciones de paquetes para un inversor.

Otro supuesto es el referente a la transitividad de las relaciones de preferencia e indiferencia :

$$\text{Si} \quad U_{(A)} \geq U_{(B)} \quad \text{y} \quad U_{(B)} \geq U_{(C)} \quad \text{entonces} \quad U_{(A)} \geq U_{(C)}$$

En base a estos y algunos otros supuestos , cuya enunciación es algo más complicada , se llega a probar que , en esas condiciones , el criterio óptimo de decisión es el de la máxima utilidad esperada.

Se entiende que la utilidad esperada de un paquete A que puede tener como resultados las n alternativas A_i, cada una de ellas con probabilidad p_i ($i = 1, 2, ..., n$; $\Sigma p_i = 1$), es

$$E\,U_{(A)} = \sum_{i=1}^{n} U(A_i)\, p_i$$

donde $E\,U_{(A)}$ = Utilidad esperada del paquete A

$U(A_i)$ = Utilidad asociada de los elementos que integran el paquete

p_i = La probabilidad de cada uno de los elementos que componen el paquete para obtener la utilidad esperada

Posibles actitudes de los individuos frente al riesgo

Para algunos inversores es preferible un rendimiento promedio bajo pero seguro , a otro alto pero inseguro , es decir , con probabilidad de tener pérdidas tambien altas. Para estos inversores el agregado de unidades adicionales de riqueza incrementa su satisfacción pero cada vez menos. Este tipo de preferencias permite precisar las posibles actitudes de los individuos frente al riesgo.

Actitud 1 : Un individuo es **adverso al riesgo** cuando su función de utilidad marginal es decreciente. Se ha comprobado que los individuos adversos al riesgo no son jugadores , ni aún de juegos equitativos. De allí se deduce que un inversor adverso al riego prefiere un rendimiento cierto a uno incierto con el mismo valor esperado

Los individuos dispuestos a correr riesgos para obtener mayores ganancias se caracterizan por tener una función de utilidad con la propiedad de que a incrementos iguales en la riqueza corresponden incrementos crecientes de su nivel de satisfacción .

Actitud 2 : Un individuo es **propenso al riesgo** cuando su función de utilidad marginal es creciente.

Finalmente , existe una tercera categoría de individuos, los que en sus decisiones no tienen en cuenta el riesgo. Estos individuos se rigen por el criterio del máximo rendimiento esperado.

Actitud 3 : Un individuo es **indiferente al riesgo** cuando su función de utilidad marginal es constante.

Dado que se ha comprobado que generalmente los individuos , en particular los inversores , prefieren mayores a menores rendimientos y son adversos al riesgo , haremos un análisis de las posibles características de esta actitud.

Las observaciones acerca del comportamiento del inversor promedio , parecen indicar que al aumentar su riqueza se reduce su adversión al riesgo. Para tratar rigurosamente esta cuestión es necesario definir una medida de dicha adversión , de modo tal de precisar el concepto. A dicho efecto , es conveniente tener presente que la actitud típica del que no desea correr riesgos es tomar seguros que permitan transferir ese riesgo a un tercero , pagando para ello una cantidad que varía en proporción directa con esa adversión.

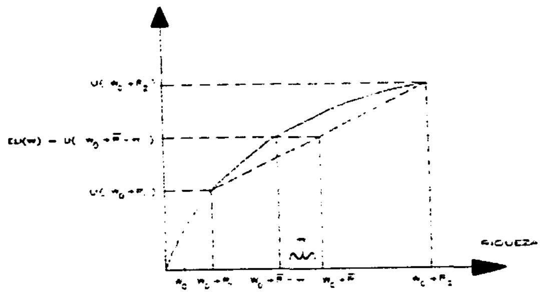
Dado que se ha supuesto que el inversor es adverso al riesgo , entonces su función de utilidad es cóncava. En la figura 1.1 se ha dibujado una curva de tal tipo ; suponiendo un capital inicial w_0 (riqueza inicial) y una inversión cuyos rendimientos aleatorios son R_1 y R_2 con probabilidad p_1 y $p_2 = 1 - p_1$, entonces según que ocurran estos resultados su riqueza final será $w_0 + R_1$ ó $w_0 + R_2$. Se han marcado las utilidades que corresponden a esos dos posibles niveles de riqueza originados por esta hipotética inversión (puntos A y B), cuyo rendimiento esperado es :[3]

$$\bar{R} = p_1 R_1 + p_2 R_2$$

(3) William Sharpe F " Portfolio Theory and Capital Markets ",
Mc Graw-Hill Cap 9 pp 226-235

La utilidad esperada de la riqueza despues de la inversion es la representada por $EU(w_0 + R)$ en la figura 1.1. El equivalente cierto de ese resultado aleatorio sera un valor de $w_0 + R$ cuya utilidad sera igual a $EU(w_0 + R)$. Para determinarlo, se traza una paralela por $EU(w_0 + R)$ al eje horizontal hasta cortar la curva de utilidad en el punto P, y luego se baja hasta el punto simbolizado por $w_0 + \bar{R} - \pi$. La cantidad π representa el importe máximo que estaría dispuesto a pagar el inversor por transferir su riesgo a otro y obtener un rendimiento cierto $\bar{R} - \pi$, que llevaría su riqueza a $w_0 + \bar{R} - \pi$. Este valor π recibe el nombre de " premio al riesgo " y es evidente que su magnitud depende de la forma de la curva de utilidad. En otras palabras, es propio de cada inversor y en consecuencia es razonable tomarlo como una medida de su adversión al riego.

Función de utilidad de un individuo adverso al riesgo



La riqueza del inversor (W) es igual al capital inicial (W_0) más el rendimiento de su inversión (R). El elemento al riesgo (π) es igual a la diferencia entre el valor esperado de la inversión ($W_0 + \bar{R}$) y su valor equivalente cierto ($W_0 + R - \pi$), definido como aquella riqueza cuya utilidad $U(W_0 + R - \pi)$ es igual a la utilidad esperada EU(W) de la inversión de resultado incierto

fig. 1.1

3. CURVAS DE INDIFERENCIA

Las curvas de indiferencia son normalmente usadas para representar preferencias de alguien. En la figura 1.2 se muestra un conjunto de tales curvas. Todos los puntos situados sobre una misma curva representan alternativas que resultan indiferentes para el inversionista. De allí el nombre de estas curvas. Así P_1 y P_4 representan sendas alternativas pertenecientes al conjunto de oportunidades , que son indiferentes para el inversor (no prefieren ninguna de ellas a la otra). Si como es habitual , se postula que el inversionista prefiere siempre un mayor a un menor consumo , resulta entonces que las alternativas pertenecientes a la curva I_1 son todas preferidas a cualquiera de las ubicadas sobre la curva I_2 y las de estas son preferidas a las de I_3 . En efecto , se puede verificar en la figura que la alternativa P_1 es preferida a la alternativa P_2 ya que , si bien en ambas el consumo inicial es C^*_0 , el consumo al fin del periodo es mayor para P_1 ($C^*_1 > C'_1$) Es suficiente realizar la prueba con un par de alternativas pertenecientes respectivamente a I_1 e I_2 por cuanto , en virtud de la definición del concepto de curva de indiferencia , se mantendrá el orden de preferencia para cualquier otro par , por ser las nuevas alternativas respectivamente indiferentes a P_1 y P_2 .

Gráfica de curvas de indiferencia

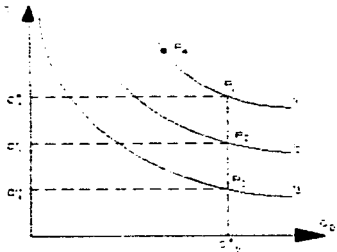


fig. 1.2

Puede mostrarse en forma análoga que P_2 será preferida a P_3 ; en consecuencia cualquier alternativa de I_2 será preferida a la de I_3 . También se supondrá que el inversor es coherente en sus preferencias , es decir , que si prefiere (o es indiferente entre) P_1 a P_2 y P_2 a P_3 , entonces deberá preferir (ser indiferente entre) P_1 a P_3 . De esto se deduce que las alternativas de I_1 son preferidas a las de I_3 .

La forma de la curva de indiferencia en lo que respecta a su carácter descendente de izquierda a derecha y a su tipo de concavidad dirigida hacia arriba obedece , respectivamente , a los supuestos que el inversor por cada incremento en su consumo inicial deberá sacrificar parte de su consumo futuro (si aumenta C_0 deberá disminuir C_1) y , además , la cantidad de consumo futuro que estará dispuesto a sacrificar por conseguir un incremento dado de su consumo inicial , será cada vez menor cuanto mayor sea el consumo en el principio del periodo. Esto puede observarse en la figura 1.3 donde i) a incrementos del consumo inicial ($\Delta C'_0 < \Delta C''_0 > 0$) corresponden disminuciones (sacrificios de consumo) en los respectivos consumos futuros ($\Delta C'_1 < 0$ y $\Delta C''_1 < 0$) y ii) a iguales incrementos en el consumo del principio del periodo , corresponden desiguales sacrificios de consumo del fin del periodo ($/ \Delta C'_1 / > / \Delta C''_1 /$) , siendo menor el sacrificio realizado cuando el consumo inicial es mayor .

Mapa de indiferencia para combinación de consumos.

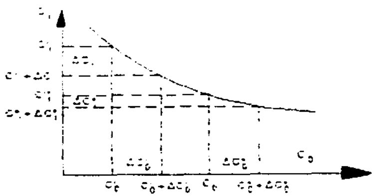


fig. 1.3

Otra importante propiedad de las curvas que conforman el mapa de indiferencia que describe las preferencias de un determinado individuo , es que las mismas no pueden cortarse entre sí. Si dos de las curvas de indiferencia de un individuo se cortasen en un punto , tal como se muestra en la figura 1.4 , entonces las alternativas P_1 y P serían consideradas indiferentes por estar localizadas en la misma curva I_1 y por análoga razón también serán consideradas las alternativas P y P_2 ubicadas en la curva I_2 . Luego entonces , deberán resultar indiferentes para el individuo las alternativas P_1 y P_2 . Pero este resultado es contradictorio con el supuesto acerca de la preferencia de aquellas alternativas que ofrezcan un consumo mayor , pues en virtud del mismo , el individuo debería de preferir P_2 a P_1 por ofrecer P_2 un consumo mayor tanto al principio como al final del periodo.

Mapa de curvas de indiferencia que se cortan entre sí.

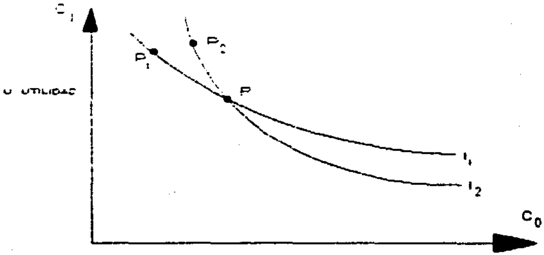


fig. 1.4

Es conveniente puntualizar que , por diferir generalmente los gustos y preferencias de cada inversor con los de otros inversores , a cada uno de ellos correspondera un particular y determinado mapa de indiferencia. Es por ello que , aun en el caso de que todos los inversores se enfrenten al mismo conjunto factible , es posible que difieran en la eleccion de la alternativa optima.[4]

4. RIESGO SISTEMATICO Y RIESGO ASISTEMATICO

RIESGO SISTEMATICO

No es raro encontrar que los precios de las acciones han bajado una que otra vez , mientras que las ganancias de una compañia estan aumentando , y viceversa. El precio de una acción puede fluctuar mucho dentro de un corto periodo de tiempo cuando las ganancias permanezcan sin cambio. Las causas de este fenómeno son varias , pero esto es debido principalmente ; a un cambio en las actitudes que tiene el inversor hacia valores en general , o hacia ciertos tipos o grupos de titulos en particular. La variabilidad en el rendimiento de las acciones más comunes , que es debido a cambios comprendidos en las expectativas del inversor , es conocido como el riesgo del mercado o riesgo sistematico , ya que es resultado de las condiciones generales de la economia y del mercado.

(4) William Sharpe F " Portfolio Theory and Capital Markets " ,
Mc Graw-Hill Cap 9 pp 226-235

Donald E. Fuher y Ronald J. Jordan , en su libro " Security Analysis and Portfolio Management ", exponen algunas de las causas que ocasionan tanto el riesgo sistemático con el riesgo asistemático.

El riesgo del mercado es causado por reacciones de los inversionistas a eventos tangibles así como a eventos intangibles. Expectaciones de una baja colectiva de ganancias en general puede causar que el grupo de acciones comunes sufra una caída de precio.

El fundamento para la reacción es un conjunto real de eventos políticos , sociales o económicos . Eventos intangibles son relacionados con la sicología de mercado. El riesgo del mercado es usualmente ocasionado por una reacción a eventos reales , pero la inestabilidad emocional de inversionistas actuan en conjunto llevandolo a una sobre-reacción más rapidamente.

La baja inicial en el mercado puede causar el temor de pérdida a inversionistas tranquilos , los cuales tratarán de asegurar todas sus inversiones. Esto generalmente culmina en ventas excesivas , con derrumbe de precios muy lejanos de su valor.

Con detonadores como el asesinato de un presidente , virtualmente todos los mercados son afectados adversamente. Del mismo modo , los mercados en un grupo industrial particular puede ser duramente golpeado cuando la industria esta "fuera de moda".

Esta discusión del riesgo del mercado contiene reacciones adversas. Ciertamente , compras de pánico también ocurren como reacciones a eventos reales. Ahora bien , los inversionistas no son dados a pensar en avances claros de precios como el del riesgo.

Otros dos factores , tasa de interés e inflación son una parte integral de las fuerzas reales que están detrás del riesgo del mercado y son parte de las mayores categorías sistemáticas o influencias incontrolables.

RIESGO ASISTEMATICO

El riesgo asistematico (tambien conocido como riesgo propio o diversificable) , es la porción del riesgo total que es unico o particular a una firma o a una industria , antes y mas alla de afectar los mercados de valores en general.

Tales factores como el de una administración eficiente , preferencias de los consumidores , huelgas laborales , y asi por el estilo , pueden causar variabilidad asistemática de rendimientos para los títulos de la compañía. Ya que estos factores afectan una industria y/o una firma , tendrán que ser examinados separadamente por cada compañía.

Dicho en otras palabras , el riesgo asistemático es la porcion del riesgo total que no tiene influencia del mercado o de factores externos a la empresa.

La incertidumbre gira alrededor de la capacidad en el problema para realizar pagos de títulos de dos fuentes :

1) el medio operacional de los negocios , y
2) el financiamiento de la firma

Estos riesgos son conocidos , respectivamente , como riesgo de negocio y riesgo financiero. Ellos tienen estrictamente una funcion en las condiciones de operacion de la firma y en la eleccion del financiamiento para su operación.

5. LIQUIDEZ Y BURSATILIDAD

Ante la necesidad de conocer las bondades de las inversiones , la gente toma en cuenta diferentes factores , tales como los recursos que posee y el plazo durante el cuál de ellos dispone , el rendimiento que la inversión ofrece , el periodo de espera para obtener dichos rendimientos y el riesgo que el invertir en si implica.

Todos estos factores regulan el comportamiento del inversionista segun sus diferentes necesidades ; asi , algunos darán mayor importancia al aspecto del rendimiento por encima del riesgo y el plazo de inversión , otros por su necesidad de mantener disponible su capital se fijarán más en el plazo , y algunos más conservadores tomarán la minimización del riesgo como la condición más relevante.

Cuando hablamos de la disponibilidad del capital invertido , intuitivamente lo ligamos con la idea de liquidez . Entiéndase por liquidez la facilidad de cambiar un bien por dinero en efectivo , siendo mínimo el riesgo de perdida. En la medida de la velocidad de dicho cambio , se habla de una mayor o menor liquidez .

Una definición, dada en el Prontuario Bursatil y Financiero , dice que liquidez es : " La posibilidad del mercado de absorber una cantidad significativa de acciones de una emisora sin sufrir por ello cambios significativos de precios. La posición de efectivo de una empresa o persona gracias a la cual puede hacer frente a sus obligaciones de corto plazo o invertir en el momento adecuado ".

Al colocar dinero en una inversión es imprescindible conocer el grado de liquidez de la misma , pues nos indica que tan fácilmente se podrá disponer de este capital , ya sea para fines de consumo o para invertirlo en otra opción que satisfaga mejor las necesidades de ese momento.

Dentro del contexto del mercado de valores , cuando se habla de bursatilidad , no es otra cosa sino la liquidez de las acciones ; esto es , que tan fácil sera comprar o vender una acción a los precios que impere en ese momento en el mercado.

De lo anterior se desprende algo muy importante , la determinación de la bursatilidad de una emisión se refiere a medir la fuerza o el dinamismo con que opera o negocia en el mercado accionario. Así se puede definir a la bursatilidad como : " la intensidad de operación y la velocidad de intercambio de las acciones de una emisión en el mercado de valores ". [5]

De acuerdo con lo expuesto hasta ahora , es de especial interés distinguir entre aquellas emisiones cuya operación puede calificarse de intensa , y aquellas que son objeto de negociaciones más bien esporádicas o poco comunes. Vale la pena hacer notar que con esta información disponible , el inversionista puede medir hasta que grado su inversión esta siendo líquida , de tal forma que tendrá una idea más clara de que tan fácil o difícil le será "salirse" o "entrar" a un determinado papel. En otras palabras , una falta de bursatilidad o liquidez , implica que el inversionista no pueda hacerse , o deshacerse , de una inversión en un corto plazo.

(5) Timothy Heyman " Inversión contra inflación ".
Editorial Milenio pp 121-123

II. ELEMENTOS DE DECISION BAJO RIESGO

1. ELEMENTOS ESTADISTICOS

Para poder entrar al análisis de decisión en condiciones de riesgo , será necesario tener conocimientos básicos de estadística , para lo cual , tomaremos algunas definiciones elementales del libro " Probabilidad y Estadística . Aplicaciones y Métodos " de George C. Canavos que nos serán de gran utilidad mas adelante.

Definición : La **media** de las observaciones $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ es el promedio aritmético de estas y se denota por

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} (x_i / n) \qquad (2.1)$$

La media (o media aritmética) es una medida de tendencia central para muchos conjuntos de datos.

Definicion : La **varianza** de las observaciones $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ es , en esencia , el promedio de las distancias entre cada observación y la media del conjunto de observaciones. La varianza se denota por

$$s^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 / (n - 1) \qquad (2.2)$$

La varianza es una medida razonablemente buena de la variabilidad o de la dispersión debido a que si muchas de las diferencias son grandes (o pequeñas) entonces el valor de la varianza s^2 será grande (o pequeña) .

Definicion : La raiz cuadrada positiva de la varianza recibe el nombre de **desviación estándar** y se denota por

$$s = [\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 / (n - 1)]^{1/2} \qquad (2.3)$$

La varianza y la desviación estándar no son medidas de variabilidad distintas , debido a que la última no puede determinarse a menos que se conozca la primera. A menudo se prefiere la desviación estándar en relación con la varianza , porque se expresa en las mismas unidades físicas de las observaciones.

Definición : Sea S un espacio muestral sobre el que se encuentra definida una función de probabilidad . Sea X una función del valor real definida sobre S , de manera que transforme los resultados de S en puntos sobre la recta de los reales. Se dice entonces que X es una **variable aleatoria.**

Definición : Sea X una variable aleatoria discreta. Se llamara **función de probabilidad** de la variable aleatoria X a

$$p(x) = P(X = x) \tag{2.4}$$

si satisface las siguientes propiedades :

1. $p(x) \geq 0$ para todos los valores x de X ;
2. $\Sigma\ p(x) = 1$

La función de probabilidad no es la única función que permite caracterizar una variable aleatoria ; también puede hacerselo mediante la denominada función de distribución.

Definición : La **función de distribución acumulativa** de la variable aleatoria X es la probabilidad de que X sea menor o igual a un valor específico de x y esta dado por

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i) \tag{2.5}$$

La función de probabilidad de una variable aleatoria es una función no decreciente que tiene la importante propiedad siguiente

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Esta propiedad permite calcular la probabilidad de que la variable aleatoria este comprendida entre los valores dados.

Definición : El valor esperado de una variable aleatoria X es el promedio o valor medio de X y esta dado por

$$E(X) = \sum x\, p(x) \qquad \text{si } x \text{ es discreta} \tag{2.6}$$

Es posible la descripción de ciertas caracteristicas de la distribución de probabilidad de una variable aleatoria mediante los denominados momentos de la misma. Los momentos de una variable aleatoria X son los valores esperados de ciertas funciones de X.

Definición : El momento de orden k de la variable aleatoria X es el número :

$$m_k = \sum x^k\, p(x) \tag{2.7}$$

El momento de primer orden recibe el nombre de esperanza matemática o valor esperado de la variable aleatoria. Simbólicamente se expresa :

$$m_1 = E(X) = \mu = \sum x\; p(x) \tag{2.8}$$

Dos propiedades de la esperanza matemática de una variable aleatoria serán de mucha utilidad.

1. La esperanza matemática de una suma de variables aleatorias es igual a la suma de las esperanzas matemáticas de esas variables aleatorias. Esto es :

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$$

2. La esperanza matemática del producto de una constante por una variable aleatoria es igual al producto de esa constante por la esperanza matemática de la variable aleatoria, es decir :

$$E(cX) = c\, E(X)$$

Los momentos definidos en (2.7) son un caso particular del concepto de momento central o momento con respecto a la media.

Definición : El momento central de orden k de la variable aleatoria X es el número

$$\mu_k = \Sigma [x - E(X)]^k \; p(x) \qquad (2.9)$$

Utilizando (2.9) y (2.8) se deduce que

$$\mu_k = E[(x - E(X))^k] \qquad (2.10)$$

El momento central de segundo orden es la varianza de la variable aleatoria X , y se obtiene haciendo k = 2 en (2.9)

$$\begin{aligned} Var(X) = \mu_2 = \sigma^2 &= E[(x - E(X))^2] \\ &= \Sigma (x - E(X))^k \; p(x) \qquad (2.11) \end{aligned}$$

que también puede expresarse $\sigma^2 = E(x^2) - [E(X)]^2$

Extrayendo la raíz cuadrada en (2.11) se obtiene el desvío típico o desvío estándar de la variable aleatoria X

$$\sigma = [\mu_2]^{1/2} \qquad (2.12)$$

Samuel A. Broverman en su libro " Mathematics of Investment and Credit " resume algunos otros términos de la siguiente manera :

- La varianza de X puede escribirse como

$$\begin{aligned} Var[X] &= E[(X - \mu_x)^2] \\ &= E[X^2] - \mu_x^2 \\ &= E[X^2] - (E[X])^2 \end{aligned}$$

- Covarianza de variables aleatorias X y Y : si X y Y tienen valores medios μ_x y μ_y respectivamente , y funcion de densidad conjunta $f(x, y)$, la covarianza de X y Y esta definida por

$$\mathrm{Cov}[X, Y] = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]$$

- Correlación de variables aleatorias X y Y

  a. Denotada por $\rho(X, Y)$ ó ρ_{xy}

  b. Definida por $\dfrac{\mathrm{Cov}[X, Y]}{\sigma_x \sigma_y}$ donde σ_x y σ_y son las desviaciones estandar de X y Y , respectivamente.

  c. Si $\rho_{xy} = 0$, la X y Y estan incorrelacionadas

  d. Si $E[Y \quad X = x]$ es una función lineal de x , entonces

  $$E[Y \quad X = x] = \mu_y + \rho_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x);$$

  la varianza condicional de Y dada $X = x$ es

  $$\mathrm{var}[Y \quad X] = k(X), \text{ donde } E[k(X)] = \sigma_y^2 (1 - \rho_{xy}^2)$$

- $\mathrm{Cov}[X, Y] = E[(X)(Y)] - \mu_x \mu_y = E[(X)(Y)] - E[X] E[Y]$

si X y Y son independientes , entonces

$$E[(X)(Y)] = E[X] E[Y] \text{ con } \mathrm{Cov}[X, Y] = 0$$

- $$\mathrm{Var}[X+Y] = E[(X+Y)^2] - (E[X+Y])^2$$

$$= E[X^2 + 2XY + Y^2] - (E[X] + E[Y])^2$$

$$= E[X^2] + E[2XY] + E[Y^2] - (E[X])^2$$

$$- 2E[X]E[Y] - (E[Y])^2$$

$$= \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] + 2\,\mathrm{Cov}[X, Y]$$

- $-1 < \rho_{xy} < 1$ para cualquier distribución conjunta X y Y

- Si X y Y son independientes

  a. $\mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y]$

  b. $\mathrm{Var}[aX+bY] = a^2\,\mathrm{Var}[X] + b^2\,\mathrm{Var}[Y] + 2ab\,\mathrm{Cov}[X, Y]$

Regresión y correlación lineal. [1]

En muchos casos en que es necesario estimar el valor medio de una variable aleatoria (v.a.) o pronosticar algún valor de la misma , es razonable suponer que ésta tiene cierta relación en alguna medida con otra u otras variables (que podrían llamarse variables predictorias o explicativas). En esas circunstancias es posible mejorar las estimaciones o los pronósticos mediante el uso de la información acerca de la dependencia de la v.a. respecto de las predictorias.

El análisis de regresión simple proporciona los recursos para estimar una ecuación que exprese de la mejor manera posible la relación entre una variable aleatoria Y y una variable predictoria X . Uno de los modelos mas utilizados que se ha diseñado para expresar esa relación es el modelo lineal , que supone que entre los valores de las variables existe una relación del tipo

$$y = \alpha + \beta x + \varepsilon \qquad (2.13)$$

donde " y " representa los valores observados , " $\alpha + \beta x$ " es la parte determinística del modelo que expresa la supuesta correlación lineal entre la variable aleatoria Y y la variable predictoria X en el caso en que ésta sea el único factor que determina aquella , mientras que ε es una variable aleatoria que refleja el efecto conjunto de todos los otros factores que contribuyen a determinar los valores de Y y que son captados por la parte determinística.

El modelo de regresión lineal supone además que la variable aleatoria ε tiene una distribución normal con valor esperado igual a cero , $E(\varepsilon) = 0$, y una varianza constante $\sigma(\varepsilon)^2$ que es independiente de X .

(1) Domingo Jorge Mesuti , Victor Adrián Alvarez y Hugo Romano Graffi,
" Selección de Inversiones Introducción a la teoría de la Cartera"
Ediciones Macchi Buenos Aires , Argentina pp 117-123

Asimismo se acepta que cualquier par de errores ε_i y ε_j correspondientes a observaciones distintas y_i e y_j, son estocásticamente independientes. Esta parte implica que la parte determinística del modelo representa el valor esperado de y para cada valor de x

$$E(Y/X) = \alpha + \beta x$$

y que las observaciones se desvían aleatoriamente alrededor de ese valor , pero que el promedio de esos desvíos es cero.

El problema consiste en encontrar la ecuación de una recta de regresión

$$\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x \tag{2.14}$$

que mejor ajuste a los datos que se poseen , donde $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son estimadores de los parámetros α y β del modelo realizadas de modo tal de lograr ese mejor ajuste , e $\hat{y}$ representa el valor estimado o pronosticado mediante el modelo para cada valor dado x .

La diferencia entre los valores observados y los pronosticados

$$e = y - \hat{y} \tag{2.15}$$

se denomina desvío y representa la discrepancia entre el valor previsto teóricamente y el realmente observado. Es una estimación del error aleatorio del modelo (2.13).

El criterio de bondad de ajuste que se elegirá para la determinación de los parámetros $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ que originen la recta de mejor ajuste , es el de los mínimos cuadrados. Este criterio implica escoger la recta que permita hacer mínima la suma de los cuadrados de los desvíos. El planteo matemático del problema es :

Determinar los valores de $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ que cumplan (2.14) y que hagan mínimo el valor de

$$\Sigma\, e^2 = \Sigma\, (y - \hat{y})^2 \tag{2.16}$$

Mediante técnicas del calculo diferencial puede demostrarse que los estimadores minimocuadráticos de $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ se obtienen con las fórmulas

$$\hat{\beta} = \frac{N \sum x\, y - \sum x \sum y}{N \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{N \sum x^2 \sum y - \sum x \sum x\, y}{N \sum x^2 - (\sum x)^2} = \overline{Y} - \hat{\beta}\,\overline{X} \qquad (2.17)$$

donde los pares (x ; y) representan las observaciones , N es el numero de estas , Y y X son las medias muestrales de X e Y .

Los desvios e , definidos en (2.15) , son estimaciones de los errores ε del modelo. Puede demostrarse que a partir de (2.16) se obtiene un buen estimador de $\sigma(\varepsilon)$, denominado desvio estándar del error corregido por la perdida de grados de libertad

$$\hat{\sigma}(\varepsilon) = S(e) = \left[\frac{\sum e^2}{N - 2} \right]^{1/2} \qquad (2.18)$$

Para el calculo de la suma de los cuadrados de los desvios es conveniente utilizar , en lugar de (2.16) , la siguiente formula

$$\sum e^2 = \frac{1}{N} \left[N \sum y^2 - (\sum y)^2 - \hat{\beta} \left(N \sum xy - \sum x \sum y \right) \right] \qquad (2.19)$$

donde $\hat{\beta}$ se calcula con (2.17)

El coeficiente de correlación lineal , definido a continuacion , permite cuantificar el grado en que el modelo explica , mediante una relación lineal , las variaciones de Y ; en otras palabras , el grado de ajuste de la recta de regresion a los puntos representativos de las observaciones.

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(X ; Y)}{\sigma(X)\, \sigma(Y)} \qquad (2.20)$$

donde cov (X ; Y) simboliza la denominada covarianza entre las variables de X e Y .

$$\operatorname{cov}(X;Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \tag{2.21}$$

Puede demostrarse que el coeficiente de correlación lineal es un número comprendido entre -1 y 1.

$$-1 \leq \rho \leq 1$$

Si $\rho = 1$, existe una correlación lineal perfecta positiva. Si $\rho = -1$, existe una correlación lineal perfecta negativa. Si $\rho = 0$, se dice que las variables están incorrelacionadas linealmente. La fórmula (2.22) permite calcular una estimación del coeficiente de correlación lineal en base a los datos muestrales.

$$r = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{\{[N \sum x^2 - (\sum x)^2]\ [N \sum y^2 - (\sum y)^2]\}^{1/2}} \tag{2.22}$$

El cuadrado del coeficiente de correlación lineal recibe el nombre de coeficiente de determinación y el mismo indica el porcentaje de la variación de Y , que es explicada por la parte determinística lineal del modelo.

2. RENDIMIENTO ESPERADO

Si el tipo de rentabilidad real de cada titulo pudiera predecirse exactamente , se podria calcular el tipo de rentabilidad real de cada cartera posible. Pero ni el tipo de rentabilidad del portafolio , ni el de los titulos respectivos que la componen pueden estimarse con certeza. La cuestión estriba en establecer predicciones sobre los titulos que pueden utilizarse con objeto de emitir pronósticos sobre las carteras , concretamente la E_p y σ_p de cada portafolio posible.

Se necesita una estimación del tipo de rentabilidad predicho o esperado de cada titulo. Tal estimación se puede proporcionar directamente , como resultado de perspectivas mas probables o como una estimación promediada. También puede obtenerse como el valor esperado de una distribución de probabilidad (subjetiva) del tipo de rentabilidad del titulo.[2]

Ademas del tipo de rentabilidad predicho , se necesita alguna medida de la incertidumbre : la probable divergencia entre el valor real y el previsto de ingresos. Este , también puede deducirse directamente o mediante una distribución de probabilidad. Teóricamente , se escoge , para esta medida , la desviación tipica de esta distribución.

Dicho lo anterior , una elección de inversión en condiciones de riesgo deberá tener en cuenta no solo el rendimiento de la misma , sino también la probabilidad de que ese rendimiento se concrete , lo que de alguna manera caracterizara el riesgo de la inversion.

Finalmente , la decisión óptima dependera tanto del posible rendimiento de la inversión como de las preferencias del inversor manifestadas en su actitud frente al riesgo que involucran los rendimientos inciertos.

(2) Domingo Jorge Messuti , Victor Adrián Alvarez y Hugo Romano Graffi,

" Selección de Inversiones Introducción a la teoria de la Cartera "

Ediciones Macchi Buenos Aires , Argentina pp 177-181

El símbolo p_{it} representa la probabilidad que se de el rendimiento R_{it}. Ahora bién, el rendimiento promedio esperado de una inversion en un activo i, cuyo rendimiento es aleatorio segun que se produzcan N eventos todos igualmente probables, puede expresarse mediante la fórmula

$$\bar{R}_i = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} R_{it} \tag{2.23}$$

donde

$\bar{R}_i$ es el rendimiento esperado del activo i.

R_{it} es el rendimiento del activo i en el tiempo t.

N es el número de eventos.

La fórmula (2.23) es un caso particular de otra mas general que permite calcular el parámetro que los estadísticos toman generalmente como medida del valor promedio de una variable aleatoria, cuando los N valores de la misma no son necesariamente igualmente probables.

Este parametro recibe el nombre técnico de " esperanza matemática ", " valor esperado " o simplemente " media " de la variable aleatoria y está definido por

$$E(R_i) = \bar{R}_i = \sum_{t=1}^{N} R_{it}\, p_{it} \tag{2.24}$$

En la fórmula (2.24) se indica que los símbolos $E(R_i)$ y $\bar{R}_i$ serán utilizados indistintamente y se les asignará el mismo significado.

Como habíamos visto anteriormente, dos propiedades de la esperanza matemática de una variable aleatoria que serán de suma importancia son :

1) La esperanza matemática de una suma de variables aleatorias es igual a la suma de los valores esperados de las mismas. Formalmente :

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) \tag{2.25}$$

2) La esperanza matemática del producto de una constante c por una variable aleatoria X es igual al producto de esa constante por la esperanza matemática de la variable aleatoria , es decir :

$$E(cX) = c\,E(X) \tag{2.26}$$

En forma sintética pueden expresarse conjuntamente las dos propiedades anteriores mediante la fórmula :

$$E(c_1 X_1 + c_2 X_2) = c_1 E(X_1) + c_2 E(X_2) \tag{2.27}$$

Mas generalmente , si se tienen n variables aleatorias , resulta :

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i E(X_i) \tag{2.28}$$

Esta última fórmula expresa que la esperanza matemática de una combinación lineal de variables aleatorias es igual a la misma combinación lineal entre las esperanzas matemáticas de esas variables fortuitas.

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las proporciones invertidas respectivamente en activos que tienen rendimientos aleatorios $R_1, R_2, \ldots, R_n$, entonces el rendimiento esperado de un portafolio o cartera P constituida por esos activos será , según (2.28)

$$E(R_p) = x_1 E(R_1) + \ldots + x_n E(R_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i E(R_i) \tag{2.29}$$

con la condición $x_1 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$

por cuanto x_i representa la proporción invertida en el activo i con respecto al total invertido en el portafolio , y la suma de todas esas proporciones debe ser igual al 100% de la inversión.

3. UNA MEDIDA DE DISPERSION

No unicamente es necesario tener una medida del rendimiento promedio , es también útil tener una medida de que tanto las observaciones difieren del promedio. Definiremos el menor o mayor riesgo de una inversión como la mayor o menor probabilidad de que el rendimiento de la misma difiera del rendimiento esperado.

Intuitivamente , un sensible camino para medir cuanto difieren las observaciones de su promedio es simplemente examinar estas diferencias directamente ; esto es , examinar $R_{it} - \bar{R}_i$.

Teniendo determinado esto para cada observación , uno podría obtener una completa medida para formar el promedio de sus diferencias. Aunque esto es intuitivamente sensible , existe un problema. Algunas de las diferencias serán positivas y algunas negativas y eso tenderá a cancelarlo. El resultado de la cancelación podría ser de tal modo que la variación promedio de un alto rendimiento necesite ser no mayor que la diferencia promedio para un título con un alto rendimiento estable. De hecho , puede mostrarse que el valor promedio de las mismas deberá ser siempre precisamente cero.

Se pueden dar dos soluciones a este problema. Primero , podemos tomar valores absolutos de la diferencia entre una observación y sus medias para ignorar signos negativos cuando determinemos la diferencia promedio. El segundo sería tomar como medida de la dispersión alrededor del valor medio , el promedio de los desvíos , ya que el cuadrado de cualquier numero es un numero positivo o nulo. Esta medida es más recomendable que la anterior. Este parámetro se denomina varianza o variancia y su expresion formal es :

$$\sigma^2(R_i) = \sigma_i^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} D_{it}^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} (R_{it} - \bar{R}_i)^2 \qquad (2.30)$$

donde

$\sigma^2(R_i)$ es la varianza del rendimiento en el activo i .

R_{it} es el rendimiento del activo i en el periodo t .

$\bar{R}_i$ es el rendimiento esperado del activo i .

N es el número de activos .

Generalmente , en lugar de tomar la varianza como indicador de variabilidad , se utiliza su raíz cuadrada que , siendo un valor proporcional , en la mayoría de los casos es un número más pequeño y además tiene las mismas unidades que la variable original.[3]

Se define así el desvío típico o coeficiente de dispersión :

$$\sigma(R_i) = \sigma_i = [\sigma_i^2]^{1/2} \tag{2.31}$$

La fórmula (2.30) solo es aplicable en el caso en que los eventos que originan los distintos eventos son todos igualmente probables. La expresión (2.32) permite calcular los mismos parámetros en el caso general en que no existe la restricción de que tengan igual probabilidad los eventos.

$$\sigma^2(R_i) = \sigma_i^2 = \sum_{t=1}^{N} D_{it}^2 \ p_{it} = \sum_{t=1}^{N} (R_{it} - \bar{R}_i)^2 \ p_{it} \tag{2.32}$$

Si los rendimientos esperados de los activos cuyo riesgo se desea comparar no son iguales , entonces es conveniente introducir una medida del riesgo relativo con respecto al rendimiento esperado. La teoría estadística proporciona un parámetro , denominado coeficiente de variacion , que mide la dispersión de una variable aleatoria relativa a su esperanza matemática o valor esperado.

$$V(R_i) = V_i = \frac{\sigma_i}{R_i} \tag{2.33}$$

V_i es una medida estandarizada de la variación con respecto a la media , especialmente útil para comparar dos distribuciones de probabilidad cuando la escala de medición difiere de manera apreciable entre éstas.

(3) Edwin J. Elton and Martin J. Gruber " Modern Portfolio Theory and Investment Analysis ", John Wiley and Sons , 1987 , pp. 18-20

4. COVARIANZA DE LOS RENDIMIENTOS

Un diferente valor promedio , que sera menos familiar , es tambien de gran importancia. La covarianza de dos variables aleatorias medirá la variación simultanea de las mismas alrededor de sus respectivas medias.

La covarianza de la tasa de rendimiento para valores i y j pueden ser definidos como sigue :

$$\mathrm{Cov}(R_i ; R_j) = \sigma_{ij} = \sum_{t=1}^{N} (R_{it} - \bar{R}_i)(R_{jt} - \bar{R}_j)\ p_t \qquad (2.34)$$

donde

σ_{ij}	es la covarianza entre los activos i y j .
R_{it}	es el rendimiento del activo i en el periodo t .
R_{jt}	es el rendimiento del activo j en el periodo t .
$\bar{R}_i$	es el rendimiento esperado para el activo i .
$\bar{R}_j$	es el rendimiento esperado para el activo j .
p_t	es la probabilidad de que ocurra el evento .
N	es el numero de observaciones .

que tambien puede expresarse .

$$\sigma_{ij} = \sum_{t=1}^{N} R_{it}\, R_{jt}\, p_t - \left[\left(\sum_{t=1}^{N} R_{it}\, p_t \right) \left(\sum_{t=1}^{N} R_{jt}\, p_t \right) \right] \qquad (2.35)$$

El producto que aparece al lado derecho de la expresión es llamado producto cruz. Si se analiza con detalle la formula (2.34) puede comprenderse el significado de la covarianza y su influencia en el riesgo de una cartera. Los terminos de la suma serán positivos si los desvios de los rendimientos de las dos inversiones con respecto a sus valores medios son ambos o positivos o negativos. En caso de que uno de los desvios sea positivo y el otro negativo , el correspondiente término es negativo. El hecho de que ambos desvios tomen el mismo signo significa que los rendimientos de las dos inversiones se mueven en igual dirección ante las distintas alternativas (crecen o decrecen conjuntamente) , mientras que si los desvios toman signos distintos, entonces los rendimientos covarian en forma opuesta (cuando uno crece el otro decrece).

Resulta entonces que un valor positivo de la covarianza se producirá toda vez que predominen los sumandos positivos en (2.34), lo que indicará que los rendimientos de ambas inversiones covarían en el mismo sentido en promedio. Un valor negativo de la covarianza indicará que la variación conjunta se produce en sentidos opuestos y un valor próximo a cero deberá interpretarse como indicador de que las fluctuaciones de los rendimientos no se producen en forma sistemática del tipo de las enunciadas. En síntesis, la covarianza es una medida del grado de correlación que existe entre los rendimientos de las dos inversiones consideradas.

Puede concluirse que la inclusión de activos cuya covarianza sea negativa contribuirá a la disminución del riesgo de una cartera que los contenga, pues estabilizará los rendimientos de la misma al disminuir la dispersión por la compensación entre las variaciones en la rentabilidad de uno de los activos por variaciones en sentido opuesto en la del otro. [4]

La fórmula para la varianza de una cartera construida invirtiendo las proporciones x_1 y x_2 en dos activos cualesquiera 1 y 2, es :

$$\sigma^2(R) = \sigma^2(x_1 R_1 + x_2 R_2) = x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + 2 x_1 x_2 \sigma_{12}$$

donde

$$x_1 + x_2 = 1$$

Esta fórmula puede disponerse en forma matricial de la siguiente manera .

$$\sigma_{(R)}^2 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

(4) Domingo Jorge Messuti , Victor Adrián Alvarez y Hugo Romano Graffi.

" Selección de Inversiones Introducción a la teoría de la Cartera"

Ediciones Macchi Buenos Aires , Argentina pp 189-192

En general , la fórmula que permite el cálculo de la varianza de los rendimientos de una cartera de n activos en los que se han invertido las proporciones x_i ($i = 1 , 2 , ..., n$) del capital , puede escribirse :

$$\sigma_{(R)}^2 = \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i R_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} \qquad (2.36)$$

donde : $\qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$

Es posible escribir (2.36) con notación matricial.

$$\sigma_{(R)}^2 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \ldots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \ldots & \sigma_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \ldots & \sigma_n^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{vmatrix}$$

Si se simboliza $X' = [x_1 \;\; x_2 \;\; \ldots \;\; x_n]$ al vector transpuesto de las proporciones , y

$$V = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \ldots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \ldots & \sigma_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \ldots & \sigma_{n}^{2} \end{vmatrix}$$

a la denominada matriz de varianzas y covarianzas, entonces la notación matricial la escribiríamos abreviadamente como sigue :

$$\sigma_{(R)}^2 = X' V X$$

5. CORRELACION DE LOS RENDIMIENTOS

Existe un indicador del grado de correlación (o relación) entre los rendimientos aleatorios de dos inversiones que superan técnicamente a la covarianza. Es el denominado coeficiente de correlación lineal , definido como sigue :

$$\rho_{(R_i, R_j)} = \frac{\operatorname{cov}(R_i ; R_j)}{\sigma(R_i)\,\sigma(R_j)} \qquad (2.37)$$

que sera simbolizado con la notación abreviada:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i\,\sigma_j} \qquad (2.37a)$$

donde

ρ_{ij} es el coeficiente de correlación de i y j .
σ_{ij} es la covarianza entre i y j .
σ_i es la desviación estándar de i .
σ_j es la desviación estándar de j .

Esta medida de correlación tiene algunas propiedades que la hacen preferida a la covarianza. Por ejemplo , toma valores comprendidos entre 1 y -1 exclusivamente. Si $\rho_{ij} = -1$ se dice que los rendimientos de las dos inversiones tienen una correlación perfecta negativa y significa que entre los mismos existe una dependencia funcional lineal tal que cuando uno de ellos crece , el otro decrece en una específica proporción. En caso de ser $\rho_{ij} = 1$ se tiene una correlación perfecta positiva y su dependencia lineal es tal que al crecer uno de ellos también lo hace el otro en determinada proporción. Si $\rho_{ij} = 0$ los rendimientos se dicen incorrelacionados linealmente y no existe entre los mismos ningun tipo de relación funcional lineal. Cuando más próximo a 1 sea el valor absoluto del coeficiente de correlación lineal , mayor sera la tendencia de los rendimientos a obedecer a una variación sistemática conjunta de tipo lineal. [5]

(5) Domingo Jorge Messuti , Victor Adrián Alvarez y Hugo Romano Graffi,
" Selección de Inversiones Introducción a la teoría de la Cartera"
Ediciones Macchi Buenos Aires , Argentina pp 192-194

De (2.37a) se deduce que la covarianza puede expresarse en función del coeficiente de correlación lineal mediante :

$$\sigma_{ij} = \rho_{ij}\,\sigma_i\,\sigma_j \tag{2.38}$$

Reemplazando (2.38) en (2.36) se obtiene otra fórmula para el cálculo de la varianza de los rendimientos de un portafolio :

$$\sigma_{(R)}^2 = \sigma^2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i R_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2\,\sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n} x_i\,x_j\,\rho_{ij}\,\sigma_i\sigma_j \tag{2.39}$$

siendo

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$

En resumen , las fórmulas (2.35) y (2.38) muestran que si el riesgo de una cartera de inversiones se mide por la varianza de sus rendimientos , entonces dicho riesgo queda determinado por el de cada una de las inversiones , el grado de correlación que existe entre todos los posibles pares de ellas y la cuantía del capital colocado en cada una de las mismas. Dado que las varianzas y desvíos típicos de los rendimientos de cada inversión son números no negativos , si se supone que también lo son todas las proporciones x_i , resulta que sólo las medidas de correlación (σ_{ij} ó ρ_{ij}) pueden tomar valores negativos que contribuyan a disminuir el monto de la varianza de la cartera.

III. TEORIA DE LA CARTERA

1. TEORIA MODERNA DEL PORTAFOLIO

Los primeros intentos de aplicar técnicas cuantitativas al problema de carteras aparecen a fines de la década de los años cincuenta y principios de los años sesenta. Durante el desarrollo de la teoría moderna del portafolio se pudo apreciar la dificultad que tenían aquellos interesados con el análisis de inversiones o toma de decisiones en portafolios , para expresar cuantitativamente sus opiniones concernientes al riesgo y las relaciones con la rentabilidad de la inversión. Rendimientos pasados podrían no ser comparados por el uso de un denominador común generalmente aceptado del riesgo. Y la incertidumbre futura del rendimiento esperado podría no ser expresada con mucha precisión cuantitativa.

La falta de una dimensión cuantitativa del riesgo creó gran confusión en cuanto que tuvo que ser realmente realizada en sentido de una administración de portafolio. Recíprocamente compañías de administración de fondos , por ejemplo , compararon sus resultados con los amplios promedios de mercado tomándolo como una regla pero no apropiada para objetivos de portafolios , técnicas administrativas , la variabilidad o volatibilidad de rendimiento , o la toma de riesgo. [1]

La teoría moderna del portafolio trata al riesgo en términos cuantitativos. Enfoca la atención más allá del tradicional análisis y evaluación exhaustiva del título individual emitido al problema de la composición total del portafolio manifestado en explícitos parámetros riesgo-rendimiento y en la identificación y cuantificación de los objetivos del portafolio. Después de muchos años de gradual desarrollo , esta teoría ahora recibe la debida atención de inversionistas de todo el mundo. Sus elementos básicos provienen de una serie de proposiciones concernientes al comportamiento racional del inversionista , expresadas brevemente por el Dr. Harry M. Markowitz en 1952 , y después en un completo trabajo patrocinado por la fundación Cowles. [2]

(1) Jerome B Cohen , Edward D Zinberg y Arthur Zeikel "Investment Analysis and Portfolio Management ", Irwin , Homewood , pp 129-136

(2) Harry M Markowitz "Portfolio Selection Efficient Diversification of Investment", Yale University Press

Markowitz proporcionó una base teórica para la composición sistemática de portafolios óptimos. El aplicó las matemáticas complejas de programación cuadrática para el problema de como seleccionar de entre ciertos de títulos individuales , teniendo cierta información para ser suministrada por analistas de títulos y administradores de portafolios , y que importancia tienen esas selecciones en la composición de portafolios.

El tema central de su trabajo es que inversionistas racionales se conducirán de una manera que refleje su inherente adversión a absorber incrementos de riesgo más allá de la compensación por un adecuado incremento en el rendimiento esperado. Esto significó , para Markowitz , que para alguna tasa esperada de rendimiento dada , muchos inversionistas preferirán un portafolio que contenga la mínima desviación esperada de rendimientos alrededor de la media.

De esta manera , el riesgo fue definido por Markowitz como la incertidumbre , o variabilidad de rendimientos , medido por la desviación estándar de los rendimientos esperados alrededor de la media. Esta fue una obra pionera por cuantificar el riesgo de inversión para planear portafolios propuestos. El uso la desviación estándar de rendimientos como una medida de riesgo , ademas , enfocó la atención en el momento horizontal de calculos de inversiones.

Partiendo del significado del riesgo y de las actitudes de los individuos frente al mismo , Harry Markowitz observó que los inversores tratarían de minimizar las desviaciones de la tasa de rendimiento esperada del portafolio tras diversificar sus títulos seleccionados , teniendo o diferentes tipos de títulos y/o títulos de diferentes compañías.

Pero principalmente , señaló que el hecho de tener diferentes emisoras no significaría reducir la variabilidad de la tasa de rendimiento esperada del portafolio , si el ingreso y precio de mercado de esas diferentes emisoras contienen un alto grado de covarianza positiva , esto es , si la periodicidad , dirección y magnitud de sus fluctuaciones son similares.

La diversificación efectiva es lograda solamente si el portafolio esta compuesto de títulos que no fluctuen en una forma similar , de modo que la variabilidad de la tasa de rendimiento del portafolio se haga significativamente menor que la variabilidad de los valores individuales (del portafolio) que lo forman. Este importante principio puede ser entendido más fácilmente si consideramos un portafolio simple de dos acciones con igual suma invertida en cada título.

Comenzaremos primero suponiendo que ambos valores estan perfecta y positivamente correlacionados con respecto a sus movimientos de precios. Cuando uno aumenta , el otro hace lo mismo en exactamente la misma proporción ; y una relación similar existe cuando disminuye.

Por la misma razón de simplicidad , iniciaremos tambien asumiendo que cada titulo fluctuara en una norma continua de alzas y bajas de iguales dimensiones. Obviamente , problemas practicos van más allá de considerar portafolios de dos titulos.

Por lo tanto , para cada titulo es necesario determinar una media del rendimiento esperado , una desviación estandar del rendimiento esperado y una covarianza del rendimiento con cada otro de los titulos. Teniendo esta información , Markowitz mostro en que forma la programación cuadrática podria ser usada para calcular un conjunto de portafolios óptimos (él se refirió a estos como portafolios eficientes) .

El trabajo de Markowitz tuvo que estar sujeto a criticas tanto de puntos de vista teóricos como practicos. Un serio problema relaciona la hipótesis de que inversionistas racionales son necesariamente adversos al riesgo.

Sin embargo , una cuestión terminantemente afin , y que seria tomada en cuenta como la más importante para el desarrollo de la teoria moderna del portafolio , es en si , la desviación estándar (o varianza) que es la medida mas apropiada del riesgo.

De igual manera , Markowitz frecuentemente utilizo la volatilidad de precios históricos como una guia para la probable variabilidad futura de una tasa de rendimientos de titulos alrededor de la media. Pero si un inversor no requiere de alta liquidez y es un gran poseedor de titulos , entonces la volatilidad de precios no le representara realmente un riesgo. Mejor dicho , en este caso , la cuestión del asunto es determinar el maximo precio alcanzado y no su provisional volatilidad.

Un inconveniente que se presento con esta teoria es que los administradores de inversiones tienen dificultad en comprender las matematicas complicadas. Tambien , mientras analistas de titulos y administradores de portafolios estan acostumbrados a pensar en tasas de rendimiento esperado , no lo estan para evaluar los posibles rangos de error de sus expectativas y en algunas ocasiones , menos acostumbrados a estimar covarianzas entre titulos.

Otra limitación en el uso de éste modelo es que en todo momento un cambio en el portafolio existente que consideremos , la completa población de posibles títulos serán mejor revaluadas en orden a preservar el deseado balance riesgo-rendimiento. Esta revaluación requerirá un mayor número de cálculos matemáticos. Harry M. dejó claro esto , al observar que un análisis de 100 títulos requiere de 100 rendimientos esperados , 100 varianzas y casi 5 000 covarianzas. [3]

El entonces sugirió un procedimiento simple , relacionar los rendimientos de cada título a los de un completo índice de precios de mercado y de este modo explícitamente relacionar los rendimientos de cada valor a cada otro valor. Esto fue algo que permitió un mejor desarrollo tanto en la teoría como en la práctica de la administración de portafolios.

(3) Harry M. Markowitz "Portfolio Selection Efficient Diversification of Investment". Yale University Press 1959 , p 96

Si por ejemplo el portafolio fuera a ser seleccionado por un universo de 1 000 acciones comunes emitidas , sería necesario computar 1 000 rendimientos esperados , 1 000 varianzas o desviaciones estándar , y 499 500 covarianzas

2. DIVERSIFICACION ALEATORIA

Cuando se forma un portafolio escogiendo aleatoriamente a las acciones que se van a incluir en el , es de esperarse que a medida que se aumenta el numero de acciones que lo componen , la variación (el riesgo) que habra en el rendimiento esperado del mismo se vera reducida debido a un efecto de cancelación que se presenta al contrarrestar las fluctuaciones individuales de los instrumentos.

O sea , que el inversor típico procura estabilizar el rendimiento de sus inversiones disminuyendo el riesgo (o sea , la variabilidad del rendimiento) de las mismas , mediante una diversificación que podria calificarse , desde un tipo de vista teorico , como intuitiva o aleatoria.

Este contexto implica el convencimiento de que una cartera compuesta por 20 activos tiene aproximadamente la mitad del riesgo de otra constituida por 10 activos. Lo caracteristico de este enfoque es ignorar el efecto de la correlación entre los pares de activos que componen el portafolio en la obtención de ganancias de riesgo por diversificación.

Sin embargo , no es posible reducir el riesgo de un portafolio hasta un valor de cero a traves de un simple incremento en el número de acciones que lo conforman. Existe un limite inferior por debajo del cual no puede reducirse dicha varianza por medio de la diversificacion aleatoria. Este limite inferior es el nivel del riesgo sistemático (o de mercado) , el cual no puede diversificarse ya que afecta a todas las empresas por igual. Por lo tanto , el valor de la variabilidad del rendimiento que puede tomar el portafolio es el riesgo sistemático.

Por otro lado , el riesgo asistematico si puede diversificarse (reducirse) mediante una estructuración aleatoria de un portafolio. Conforme se van añadiendo acciones al portafolio , se puede reducir hasta llegar practicamente a cero.

Cuando se trata exclusivamente con valores cuyos rendimientos estan incorrelacionados , entonces cuanto mayor sea el número de activos que conformen un portafolio , menor será el riesgo del mismo. Es más , puede deducirse que , en esta hipótesis de incorrelación , el riesgo se aproxima a cero al incrementar el número de activos.

Sin embargo , la situación planteada es más teórica e ideal , al menos en los mercados de capitales , donde es prácticamente imposible encontrar un número grande de activos cuyos rendimientos estén incorrelacionados , ya que en los hechos la mayor parte de ellos están correlacionados positivamente entre sí , o con algún indicador del rendimiento promedio del mercado. Surge entonces la cuestión acerca de si aún , en el caso de que no se verifique la hipótesis de incorrelación , el aumento del número de títulos trae aparejada una disminución en el riesgo de los correspondientes portafolios y además si este riesgo tiende a anularse. La respuesta a esta cuestión es parcialmente afirmativa ya que , de acuerdo a lo que indica el sentido común , efectivamente disminuye el riesgo al aumentar el número de activos. Sin embargo , puede mostrarse que mediante el sólo arbitrio de incrementar el número de títulos que componen el portafolio , es imposible disminuir su riesgo debajo de un nivel que representa el promedio de las covarianzas entre los pares de activos que lo constituyen. Esto significa que la eficacia marginal del incremento en el número de activos para reducir el riesgo de un portafolio , es decreciente.[4]

La diversificación intuitiva , que atiende solamente al incremento del número de títulos , tiene resultados acotados por el incremento de las covarianzas en lo que a reducción de riesgo se refiere. Además , es cada vez menor la reducción adicional de riesgo que proporciona cada título que se incorpora a la cartera. Esta diversificación llevaría , por consiguiente , a formar portafolios ineficientes , debido a que :

- La diversificación aleatoria origina excesivos costos de mantenimiento de información actualizada de una multitud de títulos , lo que disminuye el rendimiento de la cartera.
- Una política de inversión que preste atención solamente a incrementar la cantidad de títulos que componen un portafolio , necesariamente implicará la incorporación de títulos con rendimientos pobres , lo que finalmente derivará en la disminución del rendimiento esperado de la cartera.
- Implica una severa restricción el colocar 1 / N del capital en cada título.

(4) Edwin J. Elton & Martin J. Gruber "Modern Portfolio Theory and Investment Analysis" , John Wiley and Sons, 1987 pp 27-34

3. DIVERSIFICACION DE MARKOWITZ

En los inicios de 1950, Harry Markowitz, dio origen al modelo básico del portafolio que sería la base de la teoría moderna del portafolio. Antes, tuvo que entender ampliamente los conceptos de rendimiento y riesgo. El fué el primero en desarrollar formalmente el concepto de diversificación de portafolio. Mostró cuantitativamente por qué y de qué manera, la diversificación de portafolios trabaja para reducir el riesgo de una cartera para un inversor.

Markowitz determinó el concepto de portafolio eficiente como aquel que tiene el menor riesgo para un determinado rendimiento, o el que ofrece el mayor rendimiento esperado dado un nivel de riesgo.

Los inversionistas podrían identificar un portafolio eficiente para especificar su rendimiento esperado y minimizar su riesgo con este nivel de rendimiento. Alternativamente, podrían especificar un nivel de riesgo de portafolio que estarían dispuestos a aceptar y maximizar el rendimiento esperado en el portafolio para este nivel de riesgo.

Harry Markowitz hizó algunos supuestos básicos en el desarrollo de su modelo : El inversionista

1) Acepta el rendimiento y es adverso al riesgo ,
2) Actua racionalmente en decisiones de mercado , y
3) Toma decisiones basadas en maximizar su utilidad esperada.

Esto es , la utilidad del inversor es una función de rendimiento esperado y riesgo , los dos mejores parámetros de decisión de inversión. El modelo mismo esta basado en ecuaciones para el rendimiento esperado y el riesgo de un portafolio. [5]

(5) Charles P. Jones "Investment Analysis and Management",
John Wiley & Sons 1991 pp 626-634

3.1 PORTAFOLIOS CONSTITUIDO POR DOS ACCIONES

Como podemos entender , las carteras constan de títulos , y por lo tanto , nos interesaran los efectos que se obtengan al combinarlos.

La diversificación eficiente de Markowitz incluye combinar títulos con menor correlación positiva a fin de reducir el riesgo en el portafolio sin sacrificar algún rendimiento del mismo. En general , entre más baja sea la correlación de títulos en el portafolio , menos riesgosa será la cartera. [6]

Considerese una cartera que contenga dos títulos , A y B , ninguno de los cuales aporte una rentabilidad cierta. Entonces , su rendimiento esperado estará dado , utilizando la ecuación (2.29) , por :

$$\bar{R}_p = X_A \bar{R}_A + X_B \bar{R}_B \qquad (3.1)$$

donde

- $\bar{R}_p$ es el rendimiento esperado en el portafolio .
- X_A es la fracción del portafolio invertido en el valor A .
- X_B es la fracción del portafolio invertido en el valor B .
- $\bar{R}_A$ es el rendimiento esperado en el valor A .
- $\bar{R}_B$ es el rendimiento esperado en el valor B .

En adición , como requerimos tener una inversión al cien por ciento , entonces la fracción de A y la fracción de B sumadas serán igual a uno , o sea :

$$X_A + X_B = 1$$

Que podemos escribirla como :

$$X_B = 1 - X_A \qquad (3.2)$$

(6) Donald E. Fischer y Ronald J. Jordan. "Security Analysis and Portfolio Management", Prentice Hall 1991. pp. 642- 646

Sustituyendo la ecuación (3.2) en (3.1), podemos expresar el rendimiento esperado en un portafolio de dos títulos como :

$$\bar{R}_p = X_A \bar{R}_A + (1 - X_A)\bar{R}_B$$

Notese que el rendimiento esperado en el portafolio es un promedio simple ponderado de los rendimientos esperados en los títulos individuales , y que las ponderaciones suman uno. Lo mismo no es necesariamente propio del riesgo (desviación estándar del rendimiento) del portafolio. Definiremos el riesgo de una cartera con dos títulos como :

$$\sigma_p = (X_A^2 \sigma_A^2 + X_B^2 \sigma_B^2 + 2 X_A X_B \sigma_{AB})^{1/2}$$

donde

- σ_p es la desviación estándar del rendimiento en el portafolio .
- σ_A^2 es la varianza del rendimiento en el título A .
- σ_B^2 es la varianza del rendimiento en el título B .
- σ_{AB} es la covarianza entre los rendimientos en el título A y el título B .

Si sustituimos la ecuación (3.2) dentro de nuestra última expresión , obtendremos

$$\sigma_p = [X_A^2 \sigma_A^2 + (1 - X_A)^2 \sigma_B^2 + 2 X_A (1 - X_A) \sigma_{AB}]^{1/2} \quad (3.3)$$

Recuerdese de (2.37), que $\sigma_{AB} = \rho_{AB} \sigma_A \sigma_B$ donde ρ_{AB} es el coeficiente de correlación entre los títulos A y B, entonces la ecuación (3.3) quedara :

$$\sigma_p = [X_A^2 \sigma_A^2 + (1 - X_A)^2 \sigma_B^2 + 2 X_A (1 - X_A) \rho_{AB} \sigma_A \sigma_B]^{1/2} \quad (3.4)$$

La desviación estandar del portafolio no es , en general , un promedio simple ponderado de la desviación estándar de cada título. Los términos del producto cruz estan relacionados y las ponderaciones no estan , en general , sumando uno. Para un mejor entendimiento acerca de esta relación , veremos tres casos específicos de co-movimiento entre valores.

Sabemos que un coeficiente de correlación tiene valor máximo de +1 y valor mínimo de -1 . Un valor de +1 significa que dos títulos siempre se moverán en perfecta armonía , mientras que un valor de -1 significa que sus movimientos serán exactamente opuestos uno a otro. Haremos un breve estudio de estos casos extremos , así como también el caso en que el coeficiente de correlación es cero. Consideraremos dos acciones , C y S , donde C tiene un mayor rendimiento esperado y un mayor riesgo que S .[7]

Caso 1. **Correlación perfecta positiva** $(\rho = +1)$

Si el coeficiente de correlación es +1 , entonces la ecuación para el riesgo del portafolio , ecuación (3.4) , se simplifica a

$$\sigma_p = [\, X_C^2 \sigma_C^2 + (1 - X_C)^2 \sigma_S^2 + 2\, X_C (1 - X_C)\, \sigma_C \sigma_S \,]^{1/2} \quad (3.5)$$

Notese que los términos dentro de los corchetes tienen la forma del binomio cuadrado $X^2 + 2XY + Y^2$ y , puede escribirse como :

$$[\, X_C \sigma_C + (1 - X_C) \sigma_S \,]^2$$

Ya que la desviación estándar del portafolio es igual a la raíz cuadrada positiva de esta expresión , sabemos que

$$\sigma_p = X_C \sigma_C + (1 - X_C) \sigma_S$$

(7) Edwin J. Elton & Martin J. Gruber "Modern Portfolio Theory and Investment Analysis",
John Wiley and Sons , 1987 pp 38-48

Mientras que el rendimiento esperado en el portafolio , de (3.1) es :

$$\bar{R}_p = X_C \bar{R}_C + (1 - X_C)\bar{R}_S$$

De este modo , con el coeficiente de correlación igual a +1 , el riesgo y el rendimiento del portafolio serán simplemente combinaciones lineales del riesgo y rendimiento de cada título.

Mostraremos que la forma de estas dos ecuaciones significa que todas las combinaciones de dos títulos que estan perfectamente correlacionadas se encontrarán en una linea recta en el espacio coordenado XY (riesgo y rendimiento respectivamente) .

En este caso de valores perfectamente correlacionados , el rendimiento y riesgo del portafolio es un promedio ponderado del rendimiento en los valores individuales. No hay reducción en el riesgo por comprar ambos titulos.

Resolviendo para X_C en la expresión para desviaciones estándar dadas

$$X_c = \frac{\sigma_p - \sigma_S}{\sigma_C - \sigma_S}$$

Sustituyendo esto dentro de la expresión para un rendimiento esperado dado

$$R_p = \frac{\sigma_p - \sigma_S}{\sigma_C - \sigma_S}(R_C) + 1 - \frac{\sigma_p - \sigma_S}{\sigma_C - \sigma_S}(R_S)$$

$$R_p = R_S - \frac{R_C - R_S}{\sigma_C - \sigma_S}(\sigma_S) + \frac{R_C - R_S}{\sigma_C - \sigma_S}(\sigma_p)$$

que es la ecuación de una linea recta relacionando al título C y al título S en un espacio rendimiento esperado-desviación estándar.

Caso 2. Correlación perfecta negativa ($\rho = -1$)

Ahora examinaremos el otro extremo : dos títulos que se mueven perfectamente al mismo tiempo pero en direcciones opuestas. En este caso la desviación estándar del portafolio es (de la ecuación (3.4) con $\rho = -1$).

$$\sigma_p = [\, X_C^2\,\sigma_C^2 + (1 - X_C)^2\,\sigma_S^2 - 2\,X_C\,(1 - X_C)\,\sigma_C\,\sigma_S\,]^{1/2} \quad (3.6)$$

Nuevamente la ecuación para la desviación estándar puede ser simplificada. El término dentro de los corchetes es equivalente a cualquiera de las dos expresiones siguientes :

$$[\, X_C\sigma_C - (1 - X_C)\,\sigma_S\,]^2$$

ó

$$[\, -X_C\,\sigma_C + (1 - X_C)\,\sigma_S\,]^2 \quad (3.7)$$

Después tomamos la raíz cuadrada para obtener una expresión para σ_p y como la raíz cuadrada de un número negativo es imaginaria , alguna de las anteriores ecuaciones será válida solamente cuando el lado derecho de la igualdad sea positiva.

Así , cada ecuación es válida únicamente cuando su lado derecho es positivo. Ya que uno es positivo cuando el otro es negativo (excepto cuando ambas ecuaciones son igual a cero) , hay una solución única para el rendimiento y riesgo de alguna combinación de títulos C y S . Estas ecuaciones son muy similares a las primeras que obtuvimos cuando existía una correlación de +1.

Esto también se mostrará como una línea recta cuando σ_p es trazada junto a X_C. Al examinar el rendimiento en el portafolio de dos valores como una función de la desviación estándar darán dos líneas rectas , una para cada expresión de σ_p.

Caso 3. No relación entre rendimientos de los títulos ($\rho = 0$)

La expresión para rendimiento en el portafolio permanecerá sin cambios ; pero notese que el término de la covarianza se anula , entonces la expresión para la desviación estandar quedará

$$\sigma_p = [\, X_C^2 \sigma_C^2 + (1 - X_C)^2 \sigma_S^2 \,]^{1/2}$$

El portafolio que tiene el mínimo riesgo puede ser encontrado en general al examinar la ecuación para el riesgo :

$$\sigma_p = [\, X_C^2 \sigma_C^2 + (1 - X_C)^2 \sigma_S^2 + 2\, X_C (1 - X_C)\, \sigma_C \sigma_S\, \rho_{CS} \,]^{1/2}$$

Para encontrar el valor de X_C que minimice esta ecuación , tomaremos la derivada de esta con respecto a X_C , haciendo la derivada igual a cero , y resolviendo para X_C . Entonces la derivada es :

$$\frac{\delta \sigma_p}{\delta X_C} = \frac{1}{2}\, \frac{[\, 2 X_C \sigma_C^2 - 2 \sigma_S^2 + 2 X_C \sigma_S^2 + 2\, \sigma_C \sigma_S\, \rho_{CS} + 4 X_C \sigma_C \sigma_S \rho_{CS} \,]}{[\, X_C^2 \sigma_C^2 + (1 - X_C)^2 \sigma_S^2 + 2\, X_C (1 - X_C)\, \sigma_C \sigma_S\, \rho_{CS} \,]^{1/2}}$$

Haciendo esto igual a cero y resolviendo para X_C dada

$$X_C = \frac{\sigma_S^2 - \sigma_C \sigma_S\, \rho_{CS}}{\sigma_C^2 + \sigma_S^2 - 2 \sigma_C \sigma_S\, \rho_{CS}} \qquad (3.9)$$

En este presente caso ($\rho = 0$) esto se reduce a

$$X_C = \frac{\sigma_S^2}{\sigma_C^2 + \sigma_S^2}$$

Este es el mínimo riesgo del portafolio.

Del análisis de los tres casos anteriores podemos resumir lo siguiente. Con correlación perfecta positiva , los rendimientos tienen una relación perfecta directa. Entendiendo que la utilidad en un valor permitirá a un inversionista pronosticar perfectamente que hará el otro. Con correlación perfecta negativa , los rendimientos de los valores tienen una relación lineal perfecta inversa con cada otro ; por consiguiente , sabiendo el rédito de un título , tendremos completo conocimiento acerca del rendimiento en el segundo título. Cuando la ganancia del valor es alto , el del otro es bajo. Con correlación cero , no hay relación entre los rendimientos en los dos valores. El saber la utilidad en un título no permitirá predecir el del segundo valor.

En la figura 3.1 se mostrará gráficamente los tres casos de correlación de rendimientos para un portafolio de dos títulos.

Relación entre rendimiento esperado y desviación estándar de rendimiento para varios coeficientes de correlación

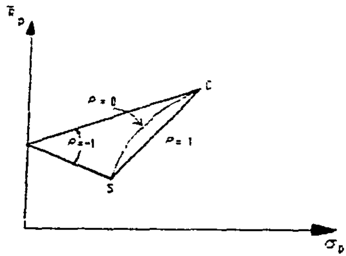


fig. 3.1

Combinar títulos con correlación perfecta positiva no asegura el reducir el riesgo en el portafolio. Esta eventualidad del portafolio resultante es simplemente un promedio ponderado de la desviación estándar de los títulos. Como más valores estan añadidos a la cartera , su riesgo puede ser reducido , pero no eliminado.

Finalmente , combinar dos valores con correlación perfecta negativa podría eliminar el riesgo completamente. Pero en el mundo real , estas correlaciones extremas son raras. Por el contrario , los valores típicamente tienen alguna correlación positiva con cada otro.[8]

(8) Charles P. Jones "Investment Analysis and Management" . John Wiley & Sons 1991. pp. 635-637 .

3.2 PORTAFOLIOS CONSTITUIDO POR TRES ACCIONES

Ahora analizaremos un portafolio formado por tres acciones. En la figura 3.2 representamos la gráfica para el problema de un portafolio de tres título. Los puntos A , B y C representan juntos el 100% invertido en cada una de las acciones A , B y C . El lugar geométrico AB representa todos los portafolios compuestos de alguna proporción de A y B , el lugar geométrico AC representa todos los portafolios compuestos de A y C y así sucesivamente. La forma general de las líneas AB , AC y BC sugieren que esos pares de títulos tienen coeficiente de correlación menor que +1 .

Portafolio con tres títulos

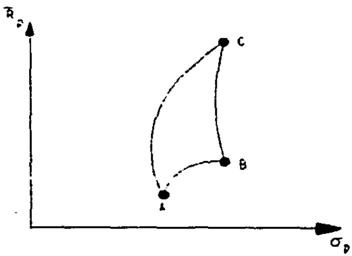


fig. 3.2

El caso para tres títulos usa la misma fórmula para el rendimiento esperado del portafolio indicada en la ecuación (2.29)

$$\bar{R}_p = \sum_{i=1}^{n} X_i \bar{R}_i$$

La desviación estándar del portafolio dependerá , como antes , de la desviación estándar de sus componentes , sus coeficientes de correlación y las proporciones invertidas. Definiremos el riesgo de una cartera con tres títulos (1 , 2 , 3) como :

$$\sigma_p = [\, X_1^2 \sigma_1^2 + X_2^2 \sigma_2^2 + X_3^2 \sigma_3^2 + 2 X_1 X_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 + 2 X_2 X_3 \rho_{23} \sigma_2 \sigma_3 + 2 X_1 X_3 \rho_{13} \sigma_1 \sigma_3 \,]^{1/2} \qquad (3.10)$$

donde

- σ_p - desviación estándar del portafolio
- X_1 - proporción del portafolio total invertido en la acción 1
- X_2 - proporción del portafolio total invertido en la acción 2
- X_3 - proporción del portafolio total invertido en la acción 3
- σ_{ij} - coeficiente de correlación entre las acciones i y j
- σ_1 - desviación estándar de la acción 1
- σ_2 - desviación estándar de la acción 2
- σ_3 - desviación estándar de la acción 3

recuérdese que $\rho_{ij} \sigma_i \sigma_j = \mathrm{cov}_{ij} = \sigma_{ij}$

Se nota claramente que el aumento en el número de títulos que conforman un portafolio implicará mayor cantidad de datos y cálculos para su estudio.

Para realizar el análisis de un portafolio compuesto por N títulos será necesario contar con :

1) N rendimientos esperados ,
2) N desviaciones estándar de los rendimientos , y
3) $(N^2 - N)/2$ covarianzas (entre los posibles pares de activos de la cartera) .

lo que implicará un gran obstáculo para cualquier inversionista. Utilizando el modelo de Markowitz para la constitución de portafolios , se requerirán un número de estimaciones equivalentes a $(N^2 + 3N)/2$. [9]

Número de activos que integran el portafolio	Número de parámetros a estimar $(N^2 + 3N)/2$
10	65
50	1 325
100	5 150
1 000	501 500

(9) Donald E Fischer & Ronald J Jordan "Security Analysis and Portfolio Management",
Prentice Hall 1991 pp 646-652

4. CALCULO DE LA FRONTERA EFICIENTE

Una cartera (o portafolio) es eficiente cuando de todas las que tienen su rendimiento esperado es la de menor riesgo o bien , entre las de su clase de riesgo es la de mayor rendimiento esperado. El construir un portafolio eficiente implica determinar que proporción del capital debe asignarse a cada uno de los activos que componen ese portafolio para lograr esa eficiencia.[10]

La frontera eficiente es el conjunto de portafolios que ofrecen el mayor rendimiento esperado dada una cantidad de riesgo , o el menor riesgo para un determinado rendimiento esperado. Esto se desprende del principio que domina en la teoría del portafolio que dice que dado un nivel de riesgo , el inversor prefiere la cartera con el mayor rendimiento esperado ; o que dado un nivel de rendimiento esperado , el inversionista prefiere el portafolio con el mínimo riesgo. O sea que , la frontera eficiente de portafolios es el conjunto óptimo de portafolios para el inversor. [11]

La formación del portafolio que tenga el mínimo riesgo dado un nivel de rendimiento esperado se puede plantear en forma general como sigue :

Dado el rendimiento esperado del portafolio $E(R_p)$, calcular las proporciones x_i que hacen σ_p^2 mínimo.

La expresión matemática del enunciado anterior es :

Minimizar $$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} \qquad (3.11)$$

(Riesgo)

(10) Donald E. Fischer y Ronald J. Jordan. "Security Analysis and Porfolio Management" .
Prentice Hall , 1991 pp 649-650

(11) Charles P. Jones "Investment Analysis and Management" .
John Wiley & Sons , 1991 pp 641-642

sujeto a $$E_{(R_p)} = \sum_{i=1}^{n} x_i \, E_{(R_i)} \qquad (3.12)$$
(Rendimiento esperado)

y $$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \qquad (3.13)$$
(Restricción presupuestaria)

donde las incógnitas son las proporciones x_i a invertir en cada uno de los activos. Los datos que deben disponerse para poder calcular el valor de las incógnitas son $E(R_i)$, σ_i^2 y σ_{ij}, es decir, el rendimiento esperado y la varianza de los rendimientos de cada uno de los activos, así como las covarianzas de los rendimientos entre todos los pares de activos que componen el portafolio. El problema, desde el punto de vista matemático, es un problema de mínimos condicionados que puede resolverse por el método de los Multiplicadores de Lagrange. [12]

El problema a resolver implica minimizar (3.11), sujeto a las dos restricciones (3.12) y (3.13). La función de Lagrange es :

$$F = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} + \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i E_i - E_p \right)$$
$$+ \lambda_2 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1 \right) \qquad (3.14)$$

donde, para abreviar, se ha reemplazado $E(R_i)$ por E_i.

(12) Domingo Jorge Messuti, Víctor Adrián Alvarez y Hugo Romano Graffi, "Selección de Inversiones. Introducción a la teoría de la Cartera" Ediciones Macchi Buenos Aires, Argentina pp. 367-376

A efectos de facilitar la derivación de F , es conveniente desarrollar todas las sumatorias que aparecen en (3.14)

$$F = x_1^2 \sigma_1^2 + \ldots + x_n^2 \sigma_n^2 + 2(x_1 x_2 \sigma_{12} + \ldots + x_1 x_n \sigma_{1n}$$

$$+ x_2 x_3 \sigma_{23} + \ldots + x_2 x_n \sigma_{2n} + \ldots + x_{n-1} x_n \sigma_{n-1,n})$$

$$+ \lambda_1 (x_1 E_1 + \ldots + x_n E_n - E_p) + \lambda_2 (x_1 + \ldots + x_n - 1) \qquad (3.15)$$

Condición necesaria para la existencia de un extremo local o relativo es que se anulen todas las derivadas parciales

$$\frac{\delta F}{\delta x_1} = 2 x_1 \sigma_1^2 + 2 (x_2 \sigma_{12} + \ldots + x_n \sigma_{1n}) + \lambda_1 E_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\delta F}{\delta x_2} = 2 x_2 \sigma_2^2 + 2 (x_1 \sigma_{12} + \ldots + x_n \sigma_{2n}) + \lambda_1 E_2 + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\delta F}{\delta x_n} = 2 x_n \sigma_n^2 + 2 (x_1 \sigma_{1n} + \ldots + x_{n-1} \sigma_{n-1,n}) + \lambda_1 E_n + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\delta F}{\delta \lambda_1} = x_1 E_1 + x_2 E_2 + \ldots + x_n E_n - E_p = 0$$

$$\frac{\delta F}{\delta \lambda_2} = x_1 + x_2 + \ldots + x_n - 1 = 0$$

Dividiendo miembro a miembro entre 2 todas las ecuaciones excepto las dos últimas y ordenando sus términos , resulta el siguiente sistema de n + 2 ecuaciones lineales con n + 2 incógnitas :

$$
\begin{array}{l}
\sigma_1^2 x_1 + \sigma_{12} x_2 + \dots + \sigma_{1n} x_n + E_1 (\lambda_1/2) + (\lambda_2/2) = 0 \\
\sigma_{12} x_1 + \sigma_2^2 x_2 + \dots + \sigma_{2n} x_n + E_2 (\lambda_1/2) + (\lambda_2/2) = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sigma_{1n} x_1 + \sigma_{2n} x_2 + \dots + \sigma_n^2 x_n + E_n (\lambda_1/2) + (\lambda_2/2) = 0 \\
E_1 x_1 + E_2 x_2 + \dots + E_n x_n = E_p \\
x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1
\end{array}
\qquad (3.16)
$$

Este sistema puede escribirse matricialmente así :

$$
\begin{vmatrix}
\sigma_1^2 & \sigma_{12} \dots & \sigma_{1n} & E_1 & 1 \\
\sigma_{21} & \sigma_2^2 \dots & \sigma_{2n} & E_2 & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\sigma_{n1} & \sigma_{n2} \dots & \sigma_n^2 & E_n & 1 \\
E_1 & E_2 \dots & E_n & 0 & 0 \\
1 & 1 \dots & 1 & 0 & 0
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix}
x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \\ \lambda_1/2 \\ \lambda_2/2
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ E_p \\ 1
\end{vmatrix}
\qquad (3.17)
$$

y aún más brevemente :

$$C\ X = B$$

Es factible que si el determinante de la matriz de los coeficientes del sistema lineal es distinto de cero ($C \neq 0$), entonces este sistema tiene una única solución que puede calcularse mediante la fórmula

$$X = C^{-1} B \qquad (3.18)$$

El vector solución X, cuyas primeras n componentes son las proporciones x_i que deben invertirse en cada uno de los activos para conformar una cartera cuyo rendimiento esperado prefijado es E_p y cuyo riesgo es mínimo, se calcula realizando el producto de la inversa de la matriz de los coeficientes por el vector columna de los términos independientes. Es necesario determinar el punto que representa el portafolio de mínimo riesgo (independientemente del rendimiento esperado), pues el mismo separa el subconjunto de la frontera eficiente que se desea construir. Entonces el problema adicional a resolver es :

Calcular las proporciones x_i que hacen σ_p^2 mínimo, independientemente de $E(R_p)$

Matemáticamente la solución involucra minimizar (3.11) sujeta a (3.13) (nótese que no se tiene en cuenta a (3.12)).

La correspondiente función de Lagrange es :

$$F = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} + \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1 \right) \qquad (3.19)$$

Como se sabe , la condición necesaria de extremos , es la anulación de todas las derivadas parciales

$$\frac{\delta F}{\delta x_1} = 2 x_1 \sigma_1^2 + 2(x_2 \sigma_{12} + \dots + x_n \sigma_{1n}) + \lambda = 0$$

$$\frac{\delta F}{\delta x_2} = 2 x_2 \sigma_2^2 + 2(x_1 \sigma_{12} + \dots + x_n \sigma_{2n}) + \lambda = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\delta F}{\delta x_n} = 2 x_n \sigma_n^2 + 2(x_1 \sigma_{1n} + \dots + x_{n-1} \sigma_{n-1,n}) + \lambda = 0$$

$$\frac{\delta F}{\delta \lambda} = x_1 + x_2 + \dots + x_n - 1 = 0$$

Dividiendo miembro a miembro entre 2 todas las ecuaciones , excepto la última , y ordenándolas convenientemente queda :

$$\begin{aligned}
&\sigma_1^2 x_1 + \sigma_{12} x_2 + \dots + \sigma_{1n} x_n + \lambda/2 = 0 \\
&\sigma_{12} x_1 + \sigma_2^2 x_2 + \dots + \sigma_{2n} x_n + \lambda/2 = 0 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\sigma_{1n} x_1 + \sigma_{2n} x_2 + \dots + \sigma_n^2 x_n + \lambda/2 = 0 \\
&\quad x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1
\end{aligned} \qquad (3.20)$$

La representación matricial de este sistema de n + 1 ecuaciones lineales con n + 1 incógnitas es :

$$
\begin{vmatrix}
\sigma_1^2 & \sigma_{12} \; \ldots \; \sigma_{1n} & 1 \\
\sigma_{21} & \sigma_2^2 \; \ldots \; \sigma_{2n} & 1 \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\sigma_{n1} & \sigma_{n2} \; \ldots \; \sigma_n^2 & 1 \\
1 & 1 \; \ldots \; 1 & 0
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix}
X_1 \\ X_2 \\ \ldots \\ X_n \\ \lambda / 2
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1
\end{vmatrix}
\qquad (3.21)
$$

que puede expresarse brevemente

$$C^* \, X = B^*$$

supuesto que $C^* \neq 0$, el sistema anterior tiene solución única que puede calcularse en función de la inversa de la matriz C^* y del vector columna de los terminos independientes B^*, según la siguiente formula :

$$X^* = C^{*-1} B^* \qquad (3.22)$$

Los datos requeridos para el cálculo de la frontera eficiente son los rendimientos esperados y desvíos típicos de todos los activos que componen la cartera, más las covarianzas entre todos los pares de activos. En total se requieren

$$(N^2 + 3N) / 2$$

datos para construir la frontera eficiente correspondiente a portafolios que contengan n activos.

IV. EL MODELO DEL INDICE UNICO

1. EL MODELO DEL INDICE UNICO

La formación de portafolios eficientes utilizando el modelo de Markowitz implicaría realizar un considerable número de calculos. El número de parámetros que serían necesario estimar , como se vio en la página 55 , es de :

$$(N^2 + 3N)/2$$

El grueso del trabajo estaría dedicado al cálculo de las covarianzas y el mismo se incrementaría sustancialmente al aumentar el número N de activos considerados. En otras palabras , el número de datos que se requerirían manejar , aun para portafolios no muy grandes , serían de una cuantía considerable. Este fué uno de los principales problemas que motivó a William Sharpe a implementar un método , siguiendo el modelo de Markowitz , que reduce notablemente la cantidad de trabajo necesario para calcular la frontera eficiente.

El Modelo del Indice Unico (MIU) se sustenta en la idea básica de que el precio de los títulos que cotizan en un mercado , en promedio , crecen o decrecen junto con un indicador económico.[1] De ello se deduce que una razón por la cual los rendimientos de distintos activos están correlacionados es que existe una respuesta común a cambios en el indicador económico.

El tipo de rentabilidad de cada título se supone relacionando con el nivel del índice o indicador económico. Entonces , la ecuación fundamental del modelo es :

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + e_i \tag{4.1}$$

(1) Sharpe , W. F. "A simplified model for portfolio analysis " , Management Science (January , 1963) pp. 277-293 .

donde el significado de los símbolos es el siguiente :

R_i	variable aleatoria que representa la tasa de rendimiento del activo i .
R_m	variable aleatoria que representa la tasa de rendimiento de un índice representativo del mercado
α_i ; β_i	parámetros del modelo correspondientes al activo i .
e_i	desvío aleatorio entre el rendimiento real del activo i y su valor teórico (variable aleatoria).

El valor del parámetro α_i es la componente del rendimiento del activo i que es independiente del rendimiento del índice del mercado.

El valor de β_i es una medida de la sensibilidad de respuesta del rendimiento del activo i ante las variaciones en el rendimiento del índice tomado como representativo del mercado.

El modelo supone que , si no obraran causas aleatorias ajenas al comportamiento del índice del mercado , entonces el valor R_i quedaría determinado funcionalmente a través de $\alpha_i + \beta_i R_m$. En consecuencia el valor de e_i refleja la influencia de esas perturbaciones aleatorias.

El modelo no supone ningún tipo especial de indicador , pero sí se basa en supuestos acerca de la relación estocástica entre los rendimientos del índice y los desvíos e_i (recuérdese que tanto R_m como e_i son variables aleatorias).

Detallaremos a continuación los supuestos en que está basado el MIU :

1) El proceso generador de los rendimientos R_i de cada activo está determinado por la ecuación (4.1):

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + e_i$$

2) La variable aleatoria e_i tiene esperanza matemática igual a cero :

$$E(e_i) = 0$$

3) Las variables aleatorias R_m y e_i estan incorrelacionadas :

$$\mathrm{Cov}\,(e_i\,;\,R_m) = 0$$

4) Los errores aleatorios correspondientes a activos distintos están incorrelacionados entre si

$$\mathrm{Cov}\,(e_i\,;\,e_j) = 0 \qquad i \neq j$$

En 1) se establece que las tasas de rendimiento de los activos de riesgo pueden expresarse como la suma de varias componentes , y que en el MIU esto es así simplemente por hipótesis. El supuesto 2) implica aceptar que en promedio la influencia de las perturbaciones es nula. En el tercero se supone que los desvios e_i no tienen ningun tipo de dependencia lineal , con respecto a los rendimientos R_m del indicador económico. El supuesto fundamental es el cuarto , ya que el origina que el MIU tenga las caracteristicas básicas que lo distinguen como un modelo simplificador.

La incorrelación entre las perturbaciones aleatorias de titulos distintos implica que la unica razón por la cual sus rendimientos pueden tener variaciones concomitantes y sistemáticas es su dependencia comun (a traves de (4.1)) de las variaciones del indice del mercado.

Se esta ahora en condiciones de determinar las fórmulas que permitan el cálculo de todos los parametros necesarios para la construcción de portafolios eficientes , en la hipótesis que el proceso generador de los rendimientos esta de acuerdo a los supuestos del MIU .

i) Los rendimientos esperados :

$$E_i = E(R_i) = E(\alpha_i + \beta_i R_m + e_i)$$

utilizando las propiedades (2.25) y (2.26) de la esperanza matemática y teniendo en cuenta el supuesto 2) , resulta

$$E_i = \overline{R}_i = \alpha_i + \beta_i \overline{R}_m \qquad (4.2)$$

ii) Las varianzas de rendimientos de algun titulo es

$$\sigma_i^2 = E\,(R_i - \bar{R}_i)^2$$

sustituyendo por R_i y $\bar{R}_i$ tenemos que

$$\sigma_i^2 = E[(\alpha_i + \beta_i R_m + e_i) - (\alpha_i + \beta_i \bar{R}_m)]^2$$

reordenando y notando que las α's se cancelan

$$\sigma_i^2 = E[\beta_i (R_m - \bar{R}_m) + e_i]^2$$

$$= E[\beta_i^2 (R_m - \bar{R}_m)^2 + 2\beta_i (R_m - \bar{R}_m)\, e_i + (e_i)^2]$$

$$= \beta_i^2 E(R_m - \bar{R}_m)^2 + 2\beta_i E[e_i (R_m - \bar{R}_m)] + E(e_i)^2$$

Por la incorrelación entre e_i y R_m, $E[e_i (R_m - \bar{R}_m)] = 0$, entonces :

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 E(R_m - \bar{R}_m)^2 + E(e_i)^2]$$

Si se define

varianza de $e_i = E(e_i)^2 = \sigma_{e_i}^2 = Q_i^2$

y varianza de $R_m = E(R_m - \bar{R}_m)^2 = \sigma_m^2$

Entonces puede escribirse

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + Q_i^2 \tag{4.3}$$

iii) La covarianza entre dos titulos puede escribirse como

$$\sigma_{ij} = E[(R_i - \bar{R}_i)(R_j - \bar{R}_j)]$$

Sustituyendo por R_i , $\bar{R}_i$, R_j y $\bar{R}_j$, se tiene que

$$\sigma_{ij} = E\{[(\alpha_i + \beta_i R_m + e_i) - (\alpha_i + \beta_i \bar{R}_m)]$$

$$[(\alpha_j + \beta_j R_m + e_j) - (\alpha_j + \beta_j \bar{R}_m)]\}$$

$$= E\{[\beta_i (R_m - \bar{R}_m) + e_i]\ [\beta_j (R_m - \bar{R}_m) + e_j]\}$$

Efectuando la multiplicación

$$\sigma_{ij} = E\ [\beta_i \beta_j (R_m - \bar{R}_m)^2 + \beta_j (R_m - \bar{R}_m) e_i$$

$$+ \beta_i (R_m - \bar{R}_m) e_j + e_i e_j]$$

$$= \beta_i \beta_j E(R_m - \bar{R}_m)^2 + \beta_j E[e_i (R_m - \bar{R}_m)]$$

$$+ \beta_i E[e_j (R_m - \bar{R}_m)] + E(e_i e_j)$$

los últimos tres terminos se anulan en virtud de los supuestos 3) y 4), quedando

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_m^2 \qquad (4.4)$$

Es importante destacar algunas características del MIU que se deducen de las fórmulas anteriores. La expresión (4.2) muestra que el rendimiento esperado de cada activo de riesgo puede descomponerse en dos partes : α_i que es propia de cada activo e independiente del índice del mercado y ($\beta_i\ \bar{R}_m$) relacionada con el rendimiento esperado del índice.

Análogamente (4.3) permite advertir en la varianza las mismas dos componentes : Q_i^2 como una medida del riesgo propio del activo y ($\beta_i^2\ \sigma_m^2$) que es la parte del riesgo relacionada con el índice del mercado. En la fórmula (4.4) se infiere que la covarianza entre los rendimientos de dos activos sólo dependen de la varianza (riesgo) de los rendimientos del índice del mercado.

2. CARACTERISTICAS DEL MODELO

Determinados los rendimientos esperados y varianzas de cada activo , así como la covarianza entre dos cualquiera de ellos , requerimos obtener el rendimiento esperado y varianza de cada portafolio construido por los mismos.

El rendimiento esperado de algún portafolio esta dado por

$$\bar{R}_p = \sum_{i=1}^{N} x_i \bar{R}_i$$

donde

$\bar{R}_p$ es una variable aleatoria que representa la tasa de rendimiento del portafolio P .
$\bar{R}_i$ es una variable aleatoria que representa la tasa de rendimiento del activo i que integra el portafolio.
x_i es la proporción de capital invertido en el activo i con respecto al total del capital.

Sustituyendo $\bar{R}_i$ de (4.2) , tenemos que

$$\bar{R}_p = \sum_{i=1}^{N} x_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{N} x_i \beta_i \bar{R}_m \qquad (4.5)$$

De la comparación de las fórmulas (4.5) y (4.2) , surge que

$$\alpha_p = \sum_{i=1}^{N} x_i \alpha_i \qquad \text{y} \qquad \beta_p = \sum_{i=1}^{N} x_i \beta_i$$

expresiones que indican que los parámetros que permiten determinar el rendimiento esperado de un portafolio en función del rendimiento esperado del índice del mercado , son promedios ponderados de los respectivos parámetros de los activos que componen el portafolio . O sea que

$$\bar{R}_p = E_p = \alpha_p + \beta_p \bar{R}_m \qquad (4.6)$$

Ahora bien , tomando en cuenta las mismas consideraciones para deducir la formula (4.3) y utilizando el cuarto supuesto , resulta que

$$Var\ (R_p) = \sigma_p^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\, \beta_i\right)^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{N} x_i^2\, \sigma_{ei}^2$$

o lo que es igual

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2\, \sigma_m^2 + \sigma_{ep}^2 \qquad (4.7)$$

siendo

$$\sigma_{ep}^2 = Q_p^2 = \sum x_i^2\, \sigma_{ei}^2$$

Podemos ahora determinar el numero de parametros que deben calcularse para el modelo del indice unico. De las ecuaciones (4.5) y (4.7) es claro que el rendimiento esperado y riesgo pueden ser pronosticados para algun portafolio si tenemos estimados los valores de α_i, β_i y σ_{ei} para cada uno de los activos que lo forman , asi como tambien , una estimación tanto para el rendimiento esperado (R_m) y la varianza (σ_m^2) para el mercado. Esto hace un total de $3N + 2$ estimaciones. Para alguien que tuviera entre 150 y 250 titulos , el modelo del indice unico requerirá entre 452 a 752 estimaciones. Comparado con las 11 475 a 31 625 estimaciones totales requeridas cuando se aplica directamente el modelo de Markowitz que vimos en el capitulo tres. La diferencia del numero de parametros necesarios al utilizar el MIU y el modelo de Markowitz se puede ver en las siguientes columnas :

No. de activos del portafolio	No. de parametros a estimar	
	Modelo de Markowitz $(N^2 + 3N)/2$	MIU $3N + 2$
2	5	8
5	20	17
10	65	32
50	1 325	152
150	11 475	452
250	31 625	752

Se puede ver claramente que al utilizar el MIU , disminuye considerablemente el cálculo de parámetros y , por consiguiente , el trabajo.

Este modelo también puede ser empleado si se cuenta con el rendimiento esperado , varianza del rendimiento y la beta (β_i) de cada título , así como de los parámetros del indicador del mercado* (rendimiento esperado $\bar{R}_m$ y varianza del rendimiento σ_m^2). Esto es el mismo número de estimaciones , 3N + 2 , como se vio anteriormente. Ahora bién , este conjunto de alternativas de estimaciones tiene la ventaja que estan en terminos más familiares. La unica variable nueva es Beta. La Beta es simplemente una medida de la sensibilidad de una acción a los movimientos del mercado.

Ya que será necesario calcular los coeficientes beta de cada uno de los títulos que integran la cartera , resulta pertinente conocer las características de este parámetro , en particular su relación con el riesgo de los activos y carteras. A tal efecto considérese la fórmula (4.7) , la que puede escribirse :

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{N} x_i^2 Q_i^2$$

donde

$$\sigma_{ei}^2 = Q_i^2$$

Supongase por un momento que un inversionista forma un portafolio invirtiendo cantidades iguales en cada uno de los titulos , es decir $x_i = 1 / N$ para todo i . Entonces el riesgo del portafolio puede escribirse como :

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_m^2 + \frac{1}{N} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 Q_i^2 \right]$$

$$= \beta_p^2 \sigma_m^2 + \frac{1}{N} Q_p^2$$

donde Q_p^2 es la varianza promedio (media aritmetica) de las perturbaciones aleatorias e_i . Observese que si se incrementa el número de N activos que componen el portafolio P , entonces el termino $(1 / N)\ Q_i^2$ se hace cada vez más pequeño y tiende a anularse.

Entonces , para carteras suficientemente grandes , resulta que su varianza es aproximadamente igual a :

$$\sigma_p^2 \cong \beta_p^2 \sigma_m^2 \quad \text{lo que equivale a} \quad \sigma_p \cong \beta_p \sigma_m$$

Puesto que σ_m es el mismo , sin considerar la accion que examinemos , la medida de la contribucion de un titulo a el riesgo de un portafolio grande es β_i .

El riesgo de un titulo individual es $[\beta_i \sigma_m + \sigma_{ei}^2]$. Ya que el efecto de σ_{ei}^2 en el riesgo del portafolio puede hacerse aproximadamente a cero a medida que el portafolio se haga mas grande , es comun referirse a σ_{ei}^2 como riesgo diversificable. El efecto de $[\beta_i^2 \sigma_m^2]$ en el riesgo del portafolio no disminuye conforme N se hace mas grande. Puesto que σ_m^2 es una constante con respecto a todos los titulos , β_i es la medida del riesgo no diversificable de un titulo.

Como el riesgo diversificable puede ser eliminado por tener un portafolio suficientemente grande , β_i es a menudo usado como la medida de riesgo de un titulo.[2]

De acuerdo a la formula (4.4) y teniendo en cuenta que $\beta_m = 1$, segun se deduce fácilmente del modelo (4.1)

$$\sigma_{im} = \beta_i \sigma_m^2 \qquad (4.8)$$

En virtud de la formula que define el coeficiente de correlación lineal , es

$$\rho_{im} = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_i \sigma_m} \qquad (4.9)$$

(2) Edwin J. Elton and Martin J. Gruber "Modern Portfolio Theory and Investment Analysis" . John Wiley and Sons , 1987 pp 105-107

Entonces resulta de (4.8) y (4.9) que

$$\rho_{im} = \frac{\beta_i \, \sigma_m}{\sigma_i} \tag{4.10}$$

Elevando al cuadrado

$$\rho_{im}^2 = \frac{\beta_i^2 \, \sigma_m^2}{\sigma_i^2} \tag{4.11}$$

Este valor es el cuadrado del coeficiente de correlación lineal entre los rendimientos del título i y del índice del mercado , y recibe el nombre de coeficiente de determinación.

3. ESTIMACION DE LOS PARAMETROS

Para utilizar practicamente el modelo (4.1) deben realizarse estimaciones de los parametros α_i y β_i. Si bien a veces los analistas realizan estimaciones subjetivas de ambos parametros, lo usual es la obtención de esas estimaciones a partir de los datos históricos de las tasas de rendimientos del activo considerado y de un indice representativo del mercado. Generalmente se utiliza el método de los minimos cuadrados para determinar la ecuación :

$$\hat{R}_{it} = \alpha_i + \beta_i R_{mt} \tag{4.12}$$

donde

$\hat{R}_{it}$ es la tasa de rendimiento del activo i en el periodo t estimada de acuerdo al modelo.

α_i es la estimación de la componente de la tasa de rendimiento del activo i que es independiente de la tasa de rendimiento del indice del mercado (ordenada en el origen de la recta de regresión minimo-cuadrática).

β_i es la estimación del correspondiente parametro del modelo MIU para el activo i (pendiente de la recta de regresión minimo-cuadrática).

R_{mt} es la tasa de rendimiento del indice del mercado en el periodo t .

Los parametros α_i y β_i se pueden calcular mediante las formulas

$$\alpha_i = \frac{\sum_{t=1}^{n} R_{it} \sum_{t=1}^{n} (R_{mt})^2 - \sum_{t=1}^{n} R_{mt} \sum_{t=1}^{n} R_{mt} R_{it}}{\Delta}$$

$$\beta_i = \frac{n \sum_{t=1}^{n} R_{mt} R_{it} - \sum_{t=1}^{n} R_{mt} \sum_{t=1}^{n} R_{it}}{\Delta} \tag{4.13}$$

donde

$$\Delta = n \sum_{t=1}^{n} (R_{mt})^2 - \left(\sum_{t=1}^{n} R_{mt} \right)^2$$

Las fórmulas de los parámetros anteriores también pueden escribirse como :

$$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} = \frac{\sum_{t=1}^{n} [(R_{it} - \overline{R}_{it})(R_{mt} - \overline{R}_{mt})]}{\sum_{t=1}^{n} (R_{mt} - \overline{R}_{mt})^2} \qquad (4.13\ \text{bis})$$

y

$$\alpha_i = \overline{R}_{it} - \beta_i \overline{R}_{mt}$$

4. EL COEFICIENTE BETA

El coeficiente beta es un indicador estadístico que en el modelo clásico de regresión lineal simple, mide la pendiente de la línea de regresión entre la variable dependiente y la independiente. En este contexto de cobertura en la emisión de productos derivados con valores correlacionados, este indicador difiere un tanto del concepto generalizado del coeficiente beta en el medio bursátil y financiero, en el cual dicho coeficiente es utilizado para medir el riesgo sistemático o no diversificable de un portafolio o valor individual. Aquí la beta tiene como objetivo el medir la contribución de un valor correlacionado a la cuenta especial de cobertura.[3]

En otras palabras, el parámetro β_i correspondiente al título i, puede interpretarse como una medida de la contribución de ese título al riesgo total de un portafolio suficientemente grande que lo contenga. Más precisamente, el parámetro β_i puede tomarse como una medida no diversificable del riesgo total del título i.

El uso del modelo del índice único requiere la estimación de la Beta de cada título que sea un potencial candidato para incluirse en un portafolio. Analistas podrían ser cuestionados al proveer estimaciones subjetivas de Betas para una acción o un portafolio. Por otro lado, estimaciones de beta futura podría ser lograda al estimar beta de datos pasados y usando esta beta histórica como una estimación de la beta futura. Hay evidencias de que betas históricas proporcionan información útil acerca de betas futuras. Además, algunas interesantes técnicas de pronóstico han sido desarrolladas al incrementar la información que puede ser extraída de datos históricos. Para esto, aun la firma que desee usar estimaciones subjetivas de betas futuras de analistas, comenzarán con la mejor estimación de beta disponible de datos históricos. El analista puede concentrarse entonces en la examinación de influencias que serían capaces de cambiar al beta en el futuro.[4]

(3) Bolsa Mexicana de Valores Indicadores Bursátiles
Nota Técnica

(4) Edwin J. Elton and Martin J. Gruber "Modern Portfolio Theory and Investment Analysis", John Wiley and Sons, 1987 pp. 107-111

La utilización frecuente de beta que se realiza en el campo de las finanzas como un índice del riesgo de las inversiones , motivó el esfuerzo de los estudiosos en profundizar en los temas relacionados con su estimación y aplicaciones. La eficiente utilización de beta requiere una estimación lo mas precisa posible de sus valores futuros , los que podrían pronosticarse subjetivamente por analistas entrenados para ello , o bien mediante la utilización de la serie cronológica de las tasas de rendimiento del título considerado en un periodo previo dado.

Como podemos notar , la fórmula de la ecuación (4.13) es la que se utiliza para el calculo de la beta histórica , o sea ,

$$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} = \frac{\sum_{t=1}^{n} [(R_{it} - \bar{R}_{it})\ (R_{mt} - \bar{R}_{mt})]}{\sum_{t=1}^{n} (R_{mt} - \bar{R}_{mt})^2}$$

y para la alfa histórica es

$$\alpha_i = \bar{R}_{it} - \beta_i\ \bar{R}_{mt}$$

Dado que al transcurrir el tiempo pueden producirse cambios en las características fundamentales de la firma o activo i , resulta que los mismos se verán reflejados en correspondientes cambios de los parámetros α_i y β_i.

Esto dio origen a que diferentes personas investigaran mas sobre las betas históricas. Los primeros estudios fueron dirigidos a determinar la relación que existe entre betas calculados en un cierto periodo y los calculados en el siguiente. Blume M.[5] estimó los coeficientes de correlación lineal entre los betas correspondientes a varios periodos sucesivos de 7 años cada uno , para portafolios integrados por distinta cantidad de títulos. Parte de esos resultados se muestran a continuación.

(5) Blume, M "On the assessment of risk ", Journal of Finance , XXVI , No 1

No. de títulos que integran el portafolio	Coeficiente de correlación lineal entre betas de periodos sucesivos	
	7 / 45 - 6 / 54 y 7 / 54 - 6 / 61	7 / 54 - 6 / 6 y 7 / 61 - 6 / 68
1	0.65	0.60
2	0.76	0.73
4	0.84	0.84
7	0.87	0.88
10	0.92	0.92
20	0.95	0.97
35	0.97	0.97
50	0.98	0.98

Se advierte que cuanto mayor es el número de títulos que integran el portafolio , mayor es la correlación que existe entre el beta de un periodo y el del siguiente. Esto indicaría que los betas ex-post de portafolios suficientemente grandes son razonablemente buenos estimadores de los betas futuros de esos portafolios. No ocurre lo mismo con los betas ex-post de acciones individuales o de pequeñas carteras.

Otro resultado empírico de relevancia es la verificación de una aparente tendencia de los betas en el tiempo hacia el valor promedio , que podría estimarse en 1 . Esto es que en general , un beta superior a 1 será seguido en el tiempo por otro menor y mas cercano a 1 , sucediendo lo contrario con los betas inferiores.

Mostraremos ahora una parte de los resultados del trabajo de Blume . Algunas acciones de la Bolsa de Comercio de Nueva York (NYSE) fueron clasificadas en portafolios de cien acciones cada uno , de modo tal que las del primer portafolio tienen los betas mas bajos ; las del segundo las cien betas subsiguientes y así sucesivamente de tal forma que las cien acciones del portafolio número 8 son las de betas más altos.

Para cada grupo se calculó el beta promedio correspondiente a los periodos 7 / 54 - 6 / 61 y 7 / 61 - 6 / 68 . Puede observarse que los resultados son consistentes con la mencionada tendencia de los valores de beta hacia la unidad (o sea , tienden a llegar a 1). Esta inestabilidad de los betas de títulos individuales no se refleja con intensidad en los portafolios , cuyos betas , segun se ha visto , son relativamente estables.[6]

Portafolio	Betas promedio	
	Primer periodo 7 / 54 - 6 / 61	Periodo subsiguiente 7 / 61 - 6 / 68
1	0.37	0.62
2	0.56	0.68
3	0.72	0.85
4	0.86	0.85
5	0.99	0.95
6	1.11	0.98
7	1.23	1.07
8	1.43	1.25

(6) Blume , M "Betas and their regressions tendencies " , Journal of Finance , XXX , No 3

Ajuste de estimaciones históricas

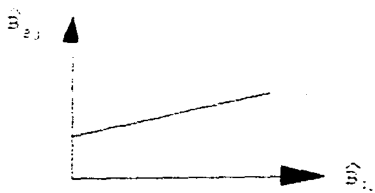
A fin de efectuar en las betas históricas las correcciones necesarias , Blume diseñó una técnica que se desarrolla en las siguientes etapas :

i) Se consideran los datos históricos de los rendimientos del conjunto de acciones en estudio , correspondientes a dos periodos inmediatamente a aquél sobre el que se va a realizar el pronóstico. Con esos datos se calcula el beta de cada acción para cada uno de los periodos. Si se designa β_{ij} al beta estimado de la acción j en el periodo i se obtendrá lo siguiente :

Acción j / Periodo i	1	2	...	N
1	β_{11}	β_{12}		β_{1N}
2	β_{21}	β_{22}		β_{2N}

ii) Si se representa en un sistema de coordenadas el par de betas (β_{1j} ; β_{2j}) correspondientes a cada acción j , resultaría un diagrama de dispersión como el siguiente :

Diagrama para dos betas



Puede entonces ajustarse al conjunto de datos una recta por el metodo de los minimos cuadrados , obteniendose los parámetros a y b que determinan una relacion del tipo :

$$\beta_{2j} = a + b\ \beta_{1j}$$

iii) Si se supone que la relación anterior se mantiene en el tiempo , entonces puede pensarse que el beta de una acción j correspondiente a cualquier periodo futuro , esta relacionada con el periodo anterior mediante

$$\beta_{t+1,j} = a + b\ \beta_{t,j}$$

lo que permite corregir el beta histórico de un periodo t para captar la tendencia.

Vasicek , O. [7] propone otra tecnica para ajustar los betas ex-post. Utilizando el análisis bayesiano llega a la siguiente fórmula de ajuste :

$$\beta_{t+1,j} = \frac{\sigma_{\beta t_j}^{2}\ \beta_{t} + \sigma_{\beta t}^{2}\ \beta_{tj}}{\sigma_{\beta t}^{2} + \sigma_{\beta t_j}^{2}}$$

donde :

$\beta_{t+1,j}$ es el beta estimado del titulo j , corregido , que se usará para pronosticar el beta correspondiente al periodo t + 1 ;

β_{tj} es el beta estimado del titulo j calculado en base a datos historicos del periodo t , por tecnicas de regresión lineal ;

β_{t} es el promedio de las betas históricas del conjunto de titulos considerados ; correspondientes al periodo t :

$$\beta_t = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \beta_{tj}$$

(7) Vasicek , Oldrich "A note on using cross-sectional information in Bayesian Estimation of Security Betas" , Journal of Finance , VIII , No 5

$\sigma_{\beta_{jt}}^2$ es la varianza de la estimación del beta del título j, correspondiente al período t;

$\sigma_{\bar{\beta}_t}^2$ es la varianza de la estimación del promedio de los betas históricos del período t.

que se trata de un promedio ponderado entre el beta histórico del título considerado y el beta promedio de todos los títulos bajo consideración, siendo las ponderaciones proporcionales al error de estimación del otro parámetro.

Klemkosky y Martin [8] examinaron las dos técnicas anteriores y comprobaron que en los casos analizados los betas ajustados permitieron efectuar pronósticos más precisos de los betas futuros, que aquéllos realizados mediante betas sin ajustar.

Los betas pueden utilizarse también para pronosticar la estructura de correlación entre los títulos que se consideran candidatos a integrar una cartera, ya que según (4.4) las covarianzas pueden estimarse mediante la fórmula:

$$\sigma_{ij} = \beta_i \, \beta_j \, \sigma_m^2$$

Elton, Gruber y Urich [9] compararon la aptitud de los cálculos directos, en base a datos históricos del período previo y la que tienen la estimación de las covarianzas en base a beta según (4.4), para pronosticar la futura matriz de varianzas y covarianzas. Observaron que los pronósticos de las varianzas y covarianzas realizadas, utilizando el coeficiente beta en la fórmula (4.4), eran significativamente mejores que los pronósticos hechos en base a datos históricos directamente.

La sorprendente conclusión que se deriva es que, en lo relativo a los pronósticos de las correlaciones entre los rendimientos de un conjunto de activos, es más apto el MIU que el cálculo directo de las covarianzas a partir de los datos, a pesar que aquel está basado en una cantidad de supuestos simplificadores que casi con seguridad no se corresponden con la realidad.

(8) Klemkosky, R. y Martin, J. "The adjustment of Betas forecast".
Journal of Finance, X, No 4

(9) Elton, E., Gruber, M. y Urich "Are beta best ?"
Journal of Finance, XIII, No 5

5. CONSTRUCCION DE LA FRONTERA EFICIENTE

La construccion de la frontera eficiente , ya sea para determinar un portafolio de minimo riesgo , como el de otros portafolios eficientes, requiere el cálculo de la matriz de varianzas y covarianzas. Ahora bien , si estos calculos se realizan en base al MIU , el ahorro de trabajo es considerable como se vio en la sección dos de este capitulo.

Como el calculo de la matriz de varianzas y covarianzas se hara de acuerdo al MIU , se usaran las fórmulas (4.3) y (4.4) , las cuales son , respectivamente :

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + Q_i^2$$

y

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_m^2$$

Los datos necesarios serán :

i) El beta de cada titulo (β_i) .
ii) La varianza de los rendimientos del indice del mercado (σ_m^2) , y
iii) La varianza de los desvios o varianza residual (Q_i^2) .

Los valores de i) , ii) y iii) se calculan a partir de los datos históricos por técnicas de regresión , aunque generalmente se puede tener acceso a ellos a traves de la información que se proporciona en la bolsa de valores mediante resumenes periodicos.

De cualquier modo daremos nuevamente las fórmulas para el calculo de dichos datos , con la finalidad de tenerlas más presentes , y poder acceder a ellas con mayor facilidad para realizar los cálculos requeridos en la formación de portafolios.

El coeficiente beta de cada titulo sera :

$$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} = \frac{\sum_{t=1}^{n} [(R_{it} - \bar{R}_{it})\ (R_{mt} - \bar{R}_{mt})]}{\sum_{t=1}^{n} (R_{mt} - \bar{R}_{mt})^2}$$

El coeficiente alfa de cada titulo se calcula con :

$$\alpha_i = \bar{R}_{it} - \beta_i \bar{R}_{mt}$$

La varianza del rendimiento del indice del mercado es :

$$\sigma_m^2 = \sum_{t=1}^{n} (R_{mt} - \bar{R}_{mt})^2$$

Los desvios correspondientes a los titulos se calculan :

$$e_{it} = R_{it} - \hat{R}_{it}$$

donde

$$\hat{R}_{it} = \alpha_i + \beta_i R_{mt}$$

que es el rendimiento estimado y R_{it} es el rendimiento real del titulo.

Con los desvios de cada titulo se puede calcular la varianza de los desvios , esto es :

$$Q_i^2 = \sigma_{ei}^2 = E(e_i)^2$$

que es igual a :

$$\sigma_{ei}^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{n} [R_{it} - (\alpha_i + \beta_i R_{mt})]^2$$

recuerdese que σ_m^2 y Q_i^2 se definieron en el segundo supuesto del modelo del indice único. Las fórmulas para la alfa y beta se dieron en (4.12).

Teniendo los datos anteriores , y utilizando las formulas (4.3) y (4.4) se calcula la matriz de varianzas y covarianzas que sera :

$$V = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \dots & \sigma_{2n} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 & \dots & \sigma_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_{n3} & \dots & \sigma_n^2 \end{vmatrix}$$

La construccion del portafolio de minimo riesgo requiere el resolver el sistema de ecuaciones (3.21), que es :

$$\begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \dots & \sigma_{1n} & 1 \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \dots & \sigma_{2n} & 1 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 & \dots & \sigma_{3n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_{n3} & \dots & \sigma_n^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \dots \\ X_n \\ 1/2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

dando el vector solución de proporciones nos permitirá calcular los parámetros del portafolio de mínimo riesgo :

$$E^*_{(R_p)} = E^*_p = \sum_{i=1}^{n} x_i E_{(R_i)}$$

$$\sigma^{*2}_p = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}$$

$$\sigma^*_p = [\sigma^{*2}_p]^{1/2}$$

A fin de encontrar otros portafolios eficientes se resuelve el sistema lineal (3.17)

$$\begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \dots \sigma_{1n} & E_1 & 1 \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \dots \sigma_{2n} & E_2 & 1 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 \dots \sigma_{3n} & E_3 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_{n3} \dots \sigma_n^2 & E_n & 1 \\ E_1 & E_2 & E_3 \dots E_n & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \dots 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \\ \lambda_1/2 \\ \lambda_2/2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ E_p \\ 1 \end{vmatrix}$$

Los rendimientos esperados para el sistema lineal anterior se calculan con la fórmula (4.2) , que es :

$$E_i = \bar{R}_i = \alpha_i + \beta_i \bar{R}_m$$

Al vector solución en funcion del rendimiento esperado del portafolio se le asignarán distintos valores a E_p .

Lo anterior nos permitirá encontrar los correspondientes desvíos típicos de los rendimientos de carteras pertenecientes a la frontera eficiente a través , nuevamente , de las fórmulas de varianza y desvío típico del portafolio que son :

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}$$

y

$$\sigma_p = [\sigma_p^2]^{1/2}$$

respectivamente.

Los rendimientos que se propongan para E_p deberán ser mayores que E^*_p .

V. CASO PRACTICO

En nuestro caso práctico tomaremos 23 acciones que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores , para lo cual , necesitamos los datos históricos de sus respectivos rendimientos mensuales , que comprenderán el periodo de Enero de 1994 a Diciembre de 1995 , así como también los de sus coeficientes betas de cada uno de los títulos. Cabe hacer notar que dichos datos históricos fueron adquiridos de información , tanto mensual como anual , que publica la BMV a través de sus indicadores bursátiles .

El índice representativo que utilizaremos para nuestro trabajo será el Indice de Precios y Cotizaciones (IPC) , del cual también es necesario conocer su rendimiento mensual para el mismo periodo de tiempo que el de las acciones.

El IPC es un promedio ponderado de los precios de las principales acciones que se negocian en el mercado , por lo que es reflejo del comportamiento del mismo en su conjunto.

Este es el principal indicador del comportamiento del mercado en general , ya que muestra su tendencia y es el que permite medir los avances o retrocesos , que en promedio experimentan los precios de las acciones. Este índice se publica todos los días. [1]

De igual manera , será importante tener presente lo que son las ventas en corto , o como se le conoce en inglés , " short sale ". Las ventas en corto generalmente se realizan en un mercado accionario a la baja. La operación implica la venta de una acción que no se tiene. Lo que hace el vendedor en corto es pedir prestado a otro inversionista la acción que vende , para entregarla al comprador. Luego , en una fecha posterior , compra la acción para devolverla al inversionista que se la prestó. El vendedor en corto se queda con el diferencial entre su precio de venta y su precio de compra , y el prestamista del título recibe una pequeña comisión por su servicio de préstamo. [2]

(1) Díaz Mata , Alfredo " Invierta en la Bolsa Guía para inversiones seguras y productivas " ,
Grupo Editorial Iberoamérica pp 210-214

(2) Timothy Heyman " Inversión contra Inflación " ,
Editorial Milenio pp 123-124

La tabla siguiente mostrará los rendimientos mensuales de las 23 acciones y del IPC . Debido a su tamaño , se presentara en 4 bloques , como se indica .

Rendimiento mensual

BLOQUE A	BLOQUE B	BLOQUE C	BLOQUE D

Mes	ALFA A	APASCO A	ATY	BANACCI L	CEMEX CPO	CIFRA B
Ene-94	17,52	3,10	26,68	15,90	7,66	8,96
Feb-94	-7,87	-12,01	2,13	-8,11	-7,11	-17,81
Mar-94	5,45	-8,87	-14,17	-11,80	-9,60	18,22
Abr-94	-2,28	6,12	11,17	0,45	-11,50	-5,66
May-94	7,45	-2,14	0,87	5,19	18,45	1,78
Jun-94	4,57	-7,85	-1,96	-9,87	-10,54	-10,27
Jul-94	4,21	7,33	17,78	5,71	14,55	14,88
Ago-94	20,03	22,51	5,66	15,09	18,75	3,40
Sep-94	24,06	5,12	0,00	-8,41	3,57	3,68
Oct-94	-1,98	-8,31	-5,36	-2,56	2,62	-2,98
Nov-94	17,23	2,03	1,89	0,88	3,99	1,84
Dic-94	-12,89	-24,04	7,41	-37,39	-24,42	1,85
Ene-95	8,33	-19,81	-31,03	-20,14	-17,07	-20,95
Feb-95	-16,15	-21,20	-20,00	-54,29	-31,37	-21,25
Mar-95	11,93	17,09	50,00	50,60	-0,57	34,92
Abr-95	18,46	18,32	-8,33	30,95	32,76	1,18
May-95	22,51	0,71	-0,14	-7,07	3,80	-9,30
Jun-95	8,12	16,43	7,34	8,42	12,65	10,26
Jul-95	7,64	-8,06	13,25	33,26	12,50	-6,98
Ago-95	5,65	21,93	1,89	-1,11	13,84	0,00
Sep-95	-3,49	-8,60	-4,81	-4,95	-10,13	-5,00
Oct-95	-1,81	3,57	-10,12	-1,68	-12,91	-0,26
Nov-95	9,20	16,86	15,80	-8,55	7,29	12,14
Dic-95	11,24	3,61	6,92	7,10	11,84	-5,65

Fuente: Bolsa Mexicana de Valores

Mes	COMERCI B	FEMSA B	GCARSO A1	GCC B	GSERFIN LCP	ICA
Ene-94	10,43	-2,69	5,90	4,84	27,07	14,68
Feb-94	-13,81	0,50	-9,47	2,17	-14,26	-12,00
Mar-94	-6,77	-11,40	-3,38	-3,19	-6,20	-4,55
Abr-94	-1,38	-14,22	3,50	10,23	-16,57	-5,93
May-94	4,95	2,46	4,28	5,02	7,66	14,52
Jun-94	-11,45	-12,86	-7,81	-4,35	-20,62	-9,34
Jul-94	11,07	18,01	13,84	10,61	-3,90	9,69
Ago-94	7,19	12,14	11,02	33,33	31,76	12,19
Sep-94	15,65	-2,47	-1,29	1,03	-1,03	9,07
Oct-94	-13,54	-17,03	-4,57	2,03	-11,92	-6,31
Nov-94	-3,83	-3,31	5,88	-0,33	-17,06	4,98
Dic-94	-29,24	-12,74	-5,68	8,33	-28,37	-28,58
Ene-95	-20,00	-8,16	-6,85	-13,23	-7,92	-32,28
Feb-95	-28,13	-23,25	-35,29	-46,81	-46,88	-39,63
Mar-95	27,09	26,73	34,77	23,33	55,87	23,84
Abr-95	13,95	14,41	7,93	42,16	10,39	28,13
May-95	-12,70	10,60	-10,31	-11,43	-12,94	-13,07
Jun-95	24,34	1,95	19,16	10,82	-2,70	46,24
Jul-95	0,00	12,33	12,57	-0,39	25,00	-9,35
Ago-95	9,36	5,49	4,68	8,63	-11,11	28,87
Sep-95	-3,31	-6,47	-6,20	-6,14	-2,50	-0,80
Oct-95	-17,51	-8,78	-1,32	-3,85	-8,97	-7,39
Nov-95	12,20	17,75	12,06	3,60	21,13	13,93
Dic-95	10,87	-0,23	-0,48	10,81	0,00	1,78

Fuente: Bolsa Mexicana de Valores

Mes	KIMBER A	KOF L	MASECA B	MODERNA ACP	POSADAS L	SIDEK B
Ene-94	7,90	8,42	20,33	30,64	9,00	4,92
Feb-94	-4,62	-9,41	-8,62	-16,70	5,50	9,31
Mar-94	3,19	-5,24	-2,26	-4,73	-7,25	-5,02
Abr-94	3,36	10,64	4,63	1,42	-1,56	-0,56
May-94	13,50	0,00	2,86	12,31	-3,49	3,92
Jun-94	-9,57	-16,35	-7,27	-11,32	-3,06	-0,13
Jul-94	7,50	20,45	3,92	-3,55	4,29	-5,80
Ago-94	4,60	14,20	16,60	16,42	1,90	15,25
Sep-94	0,71	3,36	1,29	1,05	21,12	3,18
Oct-94	-3,94	-13,01	-10,54	-0,83	-8,21	-9,37
Nov-94	-1,76	2,24	-5,36	2,73	-1,96	0,00
Dic-94	-12,99	9,51	1,13	-12,07	9,40	-25,17
Ene-95	-4,29	-12,35	-2,24	-3,26	-15,63	-42,36
Feb-95	-16,13	-16,35	-25,00	-26,92	-29,63	-51,10
Mar-95	19,44	42,05	6,36	16,97	-17,54	34,19
Abr-95	9,15	-5,44	17,67	5,51	19,68	41,83
May-95	5,95	-11,17	-15,08	3,41	-18,22	-18,64
Jun-95	12,01	27,62	1,70	21,39	11,41	16,67
Jul-95	11,47	7,63	8,85	6,58	37,56	0,36
Ago-95	9,69	2,79	8,57	5,98	1,06	-0,36
Sep-95	2,06	-15,99	1,21	1,32	-14,04	-20,86
Oct-95	5,08	3,55	-11,20	1,21	-14,69	-14,04
Nov-95	6,45	19,94	6,31	10,00	-3,83	9,47
Dic-95	18,74	-7,79	-0,42	8,00	49,25	-10,00

Fuente: Bolsa Mexicana de Valores

Mes	TELMEX L	TLEVISA CPO	TRIBASA CP	TTOLMEX B2	VITRO	IPC
Ene-94	9,09	1,20	6,94	1,73	22,84	6,87
Feb-94	-5,44	-6,85	-2,56	0,68	0,41	-7,04
Mar-94	-7,24	-14,71	-21,23	-4,81	-3,70	-6,77
Abr-94	-4,20	-1,15	-10,47	-7,09	-7,05	-4,82
May-94	7,72	12,50	13,18	-2,28	11,09	8,27
Jun-94	-6,79	-10,67	-16,48	-9,74	-6,52	-8,90
Jul-94	9,05	10,21	31,58	18,95	2,56	8,83
Ago-94	2,12	5,17	15,00	15,32	16,10	9,77
Sep-94	0,57	-0,90	8,52	9,46	13,28	1,61
Oct-94	-9,96	-23,08	-13,14	-2,91	-17,07	-7,07
Nov-94	-1,75	3,03	6,46	0,20	1,46	1,54
Dic-94	10,34	0,51	-28,08	-16,17	-5,94	-8,32
Ene-95	-1,95	-15,92	-23,13	-46,67	-5,88	-11,86
Feb-95	-17,13	-22,46	-48,59	-15,18	-12,13	-25,99
Mar-95	15,38	12,55	15,85	-18,53	1,48	18,26
Abr-95	-6,19	1,92	31,58	29,20	6,18	6,97
May-95	-3,12	-13,68	-19,00	17,19	4,15	-0,79
Jun-95	7,76	26,73	31,85	6,09	1,83	12,90
Jul-95	9,98	8,59	-18,73	18,85	9,55	8,15
Ago-95	0,99	5,18	15,21	23,79	-3,08	5,97
Sep-95	-0,20	-13,13	-8,40	-10,31	-8,89	-4,96
Oct-95	-21,43	0,20	-0,20	-13,13	-8,40	-3,77
Nov-95	28,91	31,66	13,45	14,02	-3,45	16,81
Dic-95	-0,96	11,66	14,62	13,77	-20,53	3,33

Fuente Bolsa Mexicana de Valores

A continuación se mostrarán los diferentes parámetros de cada uno de los títulos. Debe tenerse presente que el coeficiente beta , se obtuvo de información de la Bolsa Mexicana de Valores , y los demás parámetros se calcularon por medio de sus respectivas fórmulas que se vieron en el capítulo IV .

TITULOS	COEFICIENTE BETA β	COEFICIENTE ALFA α	VARIANZA RESIDUAL Q_i^2	RENDIMIENTO ESPERADO R_i
ALFA A	0,789	5,45	70,50	6,54
APASCO A	1,096	0,13	62,72	0,99
ATY	0,735	2,45	133,71	3,04
BANACCI L	0,844	-0,77	232,22	-0,10
CEMEX CPO	1,253	0,22	84,73	1,21
CIFRA B	1,020	-0,52	78,02	0,29
COMERCI B	0,937	-1,35	70,10	-0,61
FEMSA B	1,304	-1,08	46,63	-0,05
GCARSO A1	1,048	0,96	28,93	1,79
GCC B	1,032	2,82	133,12	3,63
GSERFIN LCP	0,796	-2,05	240,58	-1,42
ICA	1,018	0,81	156,71	1,61
KIMBER A	0,771	3,04	25,54	3,65
KOF L	0,893	1,76	98,38	2,47
MASECA B	1,000	-0,23	60,33	0,56
MODERNA ACP	0,524	2,32	71,44	2,73
POSADAS L	0,278	1,07	275,82	1,29
SIDEK B	0,878	-3,37	210,45	-2,68
TELMEX L	0,942	-0,10	54,12	0,65
TLEVISA CPO	0,946	-0,39	56,48	0,36
TRIBASA CP	1,137	-1,14	161,31	-0,24
TTOLMEX B2	1,228	-0,04	205,07	0,93
VITRO	1,002	-1,28	99,28	-0,49

El rendimiento del mercado y su varianza son :

$$R_m = 0,79125$$
$$\sigma_m^2 = 99,82161$$

Los resultados de la tabla anterior se pueden interpretar de la siguiente manera :

La Beta es un parámetro que cuantifica cómo cambia el rendimiento de una acción en particular al variar el rendimiento del IPC. En otras palabras , la Beta es una medida de la sensibilidad de las fluctuaciones del precio de dicha acción con respecto a las del IPC. Entre mayor sea esa sensibilidad , mayor será el riesgo de invertir en esa acción y , a su vez , mayor el rendimiento esperado.

El coeficiente Alfa es el rendimiento esperado de la acción i cuando el IPC no varía. Se interpreta como el rendimiento mensual promedio que proporciona una acción independientemente del comportamiento del mercado.

La varianza residual es el riesgo diversificable (también conocido como riesgo asistemático o propio) y carece de influencia relevante en la cuantía del riesgo del portafolio.

El rendimiento esperado es el promedio real de ganancia que tuvieron cada una de las acciones durante el periodo de tiempo estudiado.

Con la información obtenida hasta ahora , calculamos la matriz de varianzas y covarianzas , utilizando para ello las fórmulas (4.3) y (4.4) , como se explicó en el capítulo anterior. Nuevamente , debido al tamaño de la matriz , se presentará en 4 bloques de la siguiente manera.

Matriz de varianzas y covarianzas

BLOQUE A	BLOQUE B	BLOQUE C	BLOQUE D

	ALFA A	APASCO A	ATY	BANACCI L	CEMEX CPO	CIFRA B
ALFA A	132,64	86,32	57,89	66,47	98,69	80,33
APASCO A	86,32	182,62	80,41	92,34	137,08	111,59
ATY	57,89	80,41	187,64	61,92	91,93	74,84
BANACCI L	66,47	92,34	61,92	303,33	105,56	85,93
CEMEX CPO	98,69	137,08	91,93	105,56	241,45	127,58
CIFRA B	80,33	111,59	74,84	85,93	127,58	181,88
COMERCI B	73,80	102,51	68,75	78,94	117,20	95,40
FEMSA B	102,70	142,66	95,67	109,86	163,10	132,77
GCARSO A1	82,54	114,66	76,89	88,29	131,08	106,71
GCC B	81,28	112,91	75,72	86,95	129,08	105,08
GSERFIN LCP	62,69	87,09	58,40	67,06	99,56	81,05
ICA	80,18	111,37	74,69	85,77	127,33	103,65
KIMBER A	60,72	84,35	56,57	64,96	96,43	78,50
KOF L	70,33	97,70	65,52	75,23	111,69	90,92
MASECA B	78,76	109,40	73,37	84,25	125,08	101,82
MODERNA ACP	41,27	57,33	38,45	44,15	65,54	53,35
POSADAS L	21,90	30,41	20,40	23,42	34,77	28,31
SIDEK B	69,15	96,06	64,42	73,97	109,82	89,40
TELMEX L	74,19	103,06	69,11	79,36	117,82	95,91
TLEVISA CPO	74,51	103,50	69,41	79,70	118,32	96,32
TRIBASA CP	89,55	124,39	83,42	95,79	142,21	115,77
TTOLMEX B2	96,72	134,35	90,10	103,46	153,59	125,03
VITRO	78,92	109,62	73,52	84,42	125,33	102,02

	COMERCI B	FEMSA B	GCARSO A1	GCC B	GSERFIN LCP	ICA
ALFA A	73,80	102,70	82,54	81,28	62,69	80,18
APASCO A	102,51	142,66	114,66	112,91	87,09	111,37
ATY	68,75	95,67	76,89	75,72	58,40	74,69
BANACCI L	78,94	109,86	88,29	86,95	67,06	85,77
CEMEX CPO	117,20	163,10	131,08	129,08	99,56	127,33
CIFRA B	95,40	132,77	106,71	105,08	81,05	103,65
COMERCI B	157,74	121,97	98,02	96,53	74,45	95,22
FEMSA B	121,97	216,37	136,42	134,33	103,61	132,51
GCARSO A1	98,02	136,42	138,56	107,96	83,27	106,50
GCC B	96,53	134,33	107,96	239,44	82,00	104,87
GSERFIN LCP	74,45	103,61	83,27	82,00	303,83	80,89
ICA	95,22	132,51	106,50	104,87	80,89	260,15
KIMBER A	72,11	100,36	80,66	79,43	61,26	78,35
KOF L	83,52	116,24	93,42	91,99	70,96	90,75
MASECA B	93,53	130,17	104,61	103,02	79,46	101,62
MODERNA ACP	49,01	68,21	54,82	53,98	41,64	53,25
POSADAS L	26,00	36,19	29,08	28,64	22,09	28,25
SIDEK B	82,12	114,29	91,85	90,45	69,76	89,22
TELMEX L	88,11	122,62	98,55	97,04	74,85	95,72
TLEVISA CPO	88,48	123,14	98,96	97,45	75,17	96,13
TRIBASA CP	106,35	148,00	118,95	117,13	90,34	115,54
TTOLMEX B2	114,86	159,85	128,46	126,50	97,57	124,79
VITRO	93,72	130,43	104,82	103,22	79,62	101,82

	KIMBER A	KOF L	MASECA B	MODERNA ACP	POSADAS L	SIDEK B
ALFA A	60,72	70,33	78,76	41,27	21,90	69,15
APASCO A	84,35	97,70	109,40	57,33	30,41	96,06
ATY	56,57	65,52	73,37	38,45	20,40	64,42
BANACCI L	64,96	75,23	84,25	44,15	23,42	73,97
CEMEX CPO	96,43	111,69	125,08	65,54	34,77	109,82
CIFRA B	78,50	90,92	101,82	53,35	28,31	89,40
COMERCI B	72,11	83,52	93,53	49,01	26,00	82,12
FEMSA B	100,36	116,24	130,17	68,21	36,19	114,29
GCARSO A1	80,66	93,42	104,61	54,82	29,08	91,85
GCC B	79,43	91,99	103,02	53,98	28,64	90,45
GSERFIN LCP	61,26	70,96	79,46	41,64	22,09	69,76
ICA	78,35	90,75	101,62	53,25	28,25	89,22
KIMBER A	84,88	68,73	76,96	40,33	21,40	67,57
KOF L	68,73	177,98	89,14	46,71	24,78	78,27
MASECA B	76,96	89,14	160,15	52,31	27,75	87,64
MODERNA ACP	40,33	46,71	52,31	98,85	14,54	45,93
POSADAS L	21,40	24,78	27,75	14,54	283,54	24,36
SIDEK B	67,57	78,27	87,64	45,93	24,36	287,40
TELMEX L	72,50	83,97	94,03	49,27	26,14	82,56
TLEVISA CPO	72,81	84,33	94,43	49,48	26,25	82,91
TRIBASA CP	87,51	101,35	113,50	59,47	31,55	99,65
TTOLMEX B2	94,51	109,46	122,58	64,23	34,08	107,63
VITRO	77,12	89,32	100,02	52,41	27,81	87,82

	TELMEX L	TLEVISA CPO	TRIBASA CP	TTOLMEX B2	VITRO
ALFA A	74,19	74,51	89,55	96,72	78,92
APASCO A	103,06	103,50	124,39	134,35	109,62
ATY	69,11	69,41	83,42	90,10	73,52
BANACCI L	79,36	79,70	95,79	103,46	84,42
CEMEX CPO	117,82	118,32	142,21	153,59	125,33
CIFRA B	95,91	96,32	115,77	125,03	102,02
COMERCI B	88,11	88,48	106,35	114,86	93,72
FEMSA B	122,62	123,14	148,00	159,85	130,43
GCARSO A1	98,55	98,96	118,95	128,46	104,82
GCC B	97,04	97,45	117,13	126,50	103,22
GSERFIN LCP	74,85	75,17	90,34	97,57	79,62
ICA	95,72	96,13	115,54	124,79	101,82
KIMBER A	72,50	72,81	87,51	94,51	77,12
KOF L	83,97	84,33	101,35	109,46	89,32
MASECA B	94,03	94,43	113,50	122,58	100,02
MODERNA ACP	49,27	49,48	59,47	64,23	52,41
POSADAS L	26,14	26,25	31,55	34,08	27,81
SIDEK B	82,56	82,91	99,65	107,63	87,82
TELMEX L	142,70	88,95	106,91	115,47	94,22
TLEVISA CPO	88,95	145,81	107,37	115,96	94,62
TRIBASA CP	106,91	107,37	290,35	139,37	113,72
TTOLMEX B2	115,47	115,96	139,37	355,60	122,83
VITRO	94,22	94,62	113,72	122,83	199,50

Con la matriz de varianzas y covarianzas formamos el sistema de ecuaciones como el (3.21), el cual al resolverlo, nos da el vector solución de proporciones siguiente :

$$
\begin{vmatrix} X_{1} \\ X_{2} \\ X_{3} \\ X_{4} \\ X_{5} \\ X_{6} \\ X_{7} \\ X_{8} \\ X_{9} \\ X_{10} \\ X_{11} \\ X_{12} \\ X_{13} \\ X_{14} \\ X_{15} \\ X_{16} \\ X_{17} \\ X_{18} \\ X_{19} \\ X_{20} \\ X_{21} \\ X_{22} \\ X_{23} \\ \lambda / 2 \end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix} 0{,}1500 \\ -0{,}0473 \\ 0{,}0968 \\ 0{,}0351 \\ -0{,}1167 \\ 0{,}0050 \\ 0{,}0578 \\ -0{,}2603 \\ -0{,}0294 \\ -0{,}0011 \\ 0{,}0427 \\ 0{,}0030 \\ 0{,}4449 \\ 0{,}0608 \\ 0{,}0210 \\ 0{,}3115 \\ 0{,}1200 \\ 0{,}0316 \\ 0{,}0707 \\ 0{,}0646 \\ -0{,}0296 \\ -0{,}0428 \\ 0{,}0119 \\ -45{,}366 \end{vmatrix}
$$

Estas proporciones permiten el cálculo de los parámetros del portafolio de mínimo riesgo, que son :

$$E^{*}_{p} = 3{,}62$$

$$\sigma^{*}_{p}{}^{2} = 45{,}20$$

$$\sigma^{*}_{p} = 6{,}72$$

Para encontrar otros portafolios eficientes , se resuelve un sistema lineal como el (3.17) , que nos dara el siguiente vector solución en función del rendimiento esperado del portafolio.

$$
\begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \\ X_9 \\ X_{10} \\ X_{11} \\ X_{12} \\ X_{13} \\ X_{14} \\ X_{15} \\ X_{16} \\ X_{17} \\ X_{18} \\ X_{19} \\ X_{20} \\ X_{21} \\ X_{22} \\ X_{23} \\ \lambda_1/2 \\ \lambda_2/2 \end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
0{,}0715\ Ep - 0{,}1087 \\
-0{,}0036\ Ep - 0{,}0342 \\
0{,}0094\ Ep + 0{,}0627 \\
-0{,}0095\ Ep + 0{,}0694 \\
0{,}0054\ Ep - 0{,}1361 \\
-0{,}0162\ Ep + 0{,}0636 \\
-0{,}0365\ Ep + 0{,}1900 \\
-0{,}0197\ Ep - 0{,}1892 \\
0{,}0208\ Ep - 0{,}1046 \\
0{,}0207\ Ep - 0{,}0761 \\
-0{,}0162\ Ep + 0{,}1014 \\
0{,}0020\ Ep - 0{,}0041 \\
0{,}0817\ Ep + 0{,}1492 \\
0{,}0102\ Ep + 0{,}0240 \\
-0{,}0165\ Ep + 0{,}0808 \\
0{,}0046\ Ep + 0{,}2948 \\
-0{,}0074\ Ep + 0{,}1468 \\
-0{,}0247\ Ep + 0{,}1209 \\
-0{,}0193\ Ep + 0{,}1404 \\
-0{,}0244\ Ep + 0{,}1530 \\
-0{,}0098\ Ep + 0{,}0060 \\
0{,}0003\ Ep - 0{,}0438 \\
-0{,}0226\ Ep + 0{,}0937 \\
-1{,}1949\ Ep + 4{,}3243 \\
4{,}3243\ Ep - 61{,}015
\end{vmatrix}
$$

Asignándole distintos valores a E_p en el vector anterior encontramos los correspondientes desvíos típicos de los rendimientos de carteras pertenecientes a la frontera eficiente , como se muestra a continuación :

E_p / X_i	4,00	5,50	7,50	9,00	10,00
X_1	0,1773	0,28455	0,42755	0,5348	0,6063
X_2	-0,0486	-0,0540	-0,0612	-0,0666	-0,0702
X_3	0,1003	0,1144	0,1332	0,1473	0,1567
X_4	0,0314	0,01715	-0,00185	-0,0161	-0,0256
X_5	-0,1145	-0,1064	-0,0956	-0,0875	-0,0821
X_6	-0,0012	-0,0255	-0,0579	-0,0822	-0,0984
X_7	0,0440	-0,01075	-0,08375	-0,1385	-0,1750
X_8	-0,2680	-0,29755	-0,33695	-0,3665	-0,3862
X_9	-0,0214	0,0098	0,0514	0,0826	0,1034
X_{10}	0,0067	0,03775	0,07915	0,1102	0,1309
X_{11}	0,0366	0,0123	-0,0201	-0,0444	-0,0606
X_{12}	0,0039	0,0069	0,0109	0,0139	0,0159
X_{13}	0,4760	0,59855	0,76195	0,8845	0,9662
X_{14}	0,0648	0,0801	0,1005	0,1158	0,126
X_{15}	0,0148	-0,00995	-0,04295	-0,0677	-0,0842
X_{16}	0,3132	0,3201	0,3293	0,3362	0,3408
X_{17}	0,1172	0,1061	0,0913	0,0802	0,0728
X_{18}	0,0221	-0,01495	-0,06435	-0,1014	-0,1261
X_{19}	0,0632	0,03425	-0,00435	-0,0333	-0,0526
X_{20}	0,0554	0,0188	-0,0300	-0,0666	-0,0910
X_{21}	-0,0332	-0,0479	-0,0675	-0,0822	-0,092
X_{22}	-0,0426	-0,04215	-0,04155	-0,0411	-0,0408
X_{23}	0,0033	-0,0306	-0,0758	-0,1097	-0,1323
varianza	45,6	49,67	63,45	80,05	91,10
desv. estándar	6,75	7,05	7,97	8,95	9,54

Nótese que tanto en el vector solución para el portafolio de mínimo riesgo como en la tabla de carteras de su frontera eficiente ; existen varias proporciones negativas , las cuales son posibles basado en el concepto de ventas en corto. O sea que , la proporción negativa indica que de cada $ 100 de capital inicial , se ha vendido en corto dicho activo por esa cantidad , y se han invertido los fondos de esas ventas en los activos con proporciones positivas , de modo tal que el saldo neto es siempre $ 100. En consecuencia , las proporciones negativas reflejan la deuda de dichas acciones.

CONCLUSIONES

Como es sabido , los dos últimos años han sido de los mas dificiles por los que ha atravesado México. Su cambio de gobierno, aunado a diversos escandalos politicos , de corrupción , asesinatos , devaluación del peso frente al dolar , etc. , han llevado al país a una de las peores crisis económicas , sino es que la peor , de que se tenga memoria.

Esta situación se ha reflejado fielmente en el comportamiento del mercado bursatil , el cual se mide a través del Indice de Precios y Cotizaciones (IPC) , con rendimientos sumamente pobres y en muchas ocasiones con tendencia negativa. Si observamos los rendimientos mensuales de las acciones en el periodo de Enero de 1994 a Diciembre de 1995 , podremos ver que aunque la variación en sus rendimientos es constante , las mayores pérdidas se presentan de Octubre de 1994 a Febrero de 1995.

La formación de carteras utilizando el Modelo del Indice Unico (MIU) , es un metodo relativamente sencillo en comparación con el Modelo de Markowitz , ya que requiere un menor numero de calculos para desarrollarlo. Se utiliza frecuentemente por un gran numero de instituciones basandose en el razonamiento de que las fluctuaciones de los precios de las acciones se debe a la influencia del mercado accionario en general y a causas específicas para cada uno de los titulos.

Por experiencia , los inversionistas conocen dos hechos fundamentales :

- Las variaciones de cada acción estan ligadas en cierto grado a las del mercado accionario. Pocos son los valores que suben en un mercado a la baja e inversamente.

- Algunas acciones son mas volátiles , mas sensibles que otras a los movimientos del mercado accionario. La volatilidad de un titulo describe su grado de sensibilidad a los movimientos del mercado.

Tomando en cuenta lo anterior se puede tener una mejor idea de la importancia que tiene la utilización del Modelo del Indice Unico en la formación de portafolios , ya que aparte de práctico , utiliza un índice representativo del mercado , el IPC , el cual influye directamente en cada una de las acciones que cotizan en la bolsa. Siempre que el IPC tiene una variación , arrastra a los títulos. Se entiende entonces que con el MIU se tiene una idea mas real del portafolio debido a la relación que guarda el índice con los títulos.

En el caso práctico pude ver que la formación de portafolios de inversiones mediante la utilización del Modelo del Indice Unico , es un proceso relativamente sencillo , ya que el número de calculos que se tuvieron que realizar fueron sumamente menor a los que se hubieran tenido que calcular con el modelo de Markowitz. De hecho , la mayor dificultad que hubo en el quinto capítulo fue la captura de datos. Debe tomarse en cuenta que el MIU es un método simplificado del modelo de Markowitz .

Las inversiones es un tema al que se le ha dado poca difusion en Mexico , siendo que tenemos un mercado bursátil en constante movimiento , el cual deberiamos explotarlo mas ampliamente. Un estudio adecuado en el área de inversiones , podría generar una aplicación mas práctica y eficiente de los recursos financieros , tomando en cuenta el rendimiento y riesgo que proporcionaría la inversión.

El actuario como conocedor de la importancia del riesgo, bien podría ser uno de los profesionista que se encargara del estudio de portafolios , donde encontraría un ambiente propicio para poner en práctica sus conocimientos adquiridos durante su carrera. Un adecuado enfoque en el estudio de las inversiones daría la pauta para que surgiera el interes entre los alumnos en desarrollarse profesionalmente en ésta área .

Durante el desarrollo de este trabajo pude ver que la mayoría de las publicaciones o libros que existen sobre el tema de inversiones son de procedencia extranjera , mas específicamente , de los Estados Unidos , lo cual me hace pensar en el gran atraso en que nos encontramos los mexicanos respecto al mismo. Tomando en cuenta que la teoría de la cartera es tan amplia y la gran importancia que tienen los mercados bursátiles en economías de países como México ; sería necesario que se le diera mayor difusión al estudio de las inversiones en las escuelas de nivel superio , así como en instituciones financieras , para su mejor conocimiento.

ANEXO UNICO

RESUMEN DE ALGUNAS DE LAS FORMULAS MAS REPRESENTATIVAS.

- **Media**

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} (x_i / n) \qquad (2.1)$$

- **Varianza**

$$s^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 / (n-1) \qquad (2.2)$$

- **Desviación estandar**

$$s = [\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 / (n-1)]^{1/2} \qquad (2.3)$$

- **Funcion de probabilidad**

$$p(x) = P(X = x) \qquad (2.4)$$

si satisface las siguientes propiedades :

1. $p(x) \geq 0$ **para todos los valores** x **de** X ;
2. $\Sigma \; p(x) = 1$

- **Función de distribución acumulativa**

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} p(x_i) \tag{2.5}$$

- **Promedio o valor medio**

$$E(X) = \sum x\, p(x) \qquad \text{si } x \text{ es discreta} \tag{2.6}$$

- **Momento de orden k**

$$m_k = \sum x^k\, p(x) \tag{2.7}$$

- **Esperanza matemática o valor esperado**

$$m_1 = E(X) = \mu = \sum x\, p(x) \tag{2.8}$$

- **Momento central de orden k**

$$\mu_k = E[(x - E(X))^k] \tag{2.10}$$

- **Varianza o momento central de segundo orden**

$$\begin{aligned} Var(X) = \mu_2 = \sigma^2 &= E[(x - E(X))^2] \\ &= \sum (x - E(X))^k\, p(x) \end{aligned} \tag{2.11}$$

- **Modelo lineal**

$$y = \alpha + \beta x + \varepsilon \qquad (2.13)$$

- **Valor estimado del modelo lineal**

$$\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x \qquad (2.14)$$

- **Error aleatorio del modelo**

$$e = y - \hat{y} \qquad (2.15)$$

- **Suma de los cuadrados de los errores**

$$\Sigma e^2 = \Sigma (y - \hat{y})^2 \qquad (2.16)$$

- **Beta y Alfa estimados**

$$\hat{\beta} = \frac{N \Sigma x y - \Sigma x \Sigma y}{N \Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{N \Sigma x^2 \ \Sigma y - \Sigma x \Sigma x y}{N \Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} = \overline{Y} - \hat{\beta} \overline{X} \qquad (2.17)$$

- **Desvio estándar del error**

$$\hat{\sigma} (\varepsilon) = S (e) = \left[\frac{\Sigma e^2}{N - 2} \right]^{1/2} \qquad (2.18)$$

- **Coeficiente de correlación lineal**

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(X;Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)} \tag{2.20}$$

- **Covarianza entre variables**

$$\operatorname{cov}(X;Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \tag{2.21}$$

- **Rendimiento esperado del activo i**

$$\overline{R}_i = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} R_{it} \tag{2.23}$$

donde

$\overline{R}_i$	**es el rendimiento esperado del activo i.**
R_{it}	**es el rendimiento del activo i en el tiempo t.**
N	**es el número de eventos.**

- **Rendimiento esperado (caso general)**

$$E(R_i) = \overline{R}_i = \sum_{t=1}^{N} R_{it}\, p_{it} \tag{2.24}$$

- **Rendimiento esperado de un portafolio**

$$E(R_p) = x_1 E(R_1) + \ldots + x_n E(R_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i E(R_i) \qquad (2.29)$$

con la condición $\quad x_1 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$

- **Varianza del rendimiento en el activo i**

$$\sigma^2(R_i) = \sigma_i^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} D_{it}^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} (R_{it} - \bar{R}_i)^2 \qquad (2.30)$$

donde

$\sigma^2(R_i)$ es la varianza del rendimiento en el activo i .
R_{it} es el rendimiento del activo i en el periodo t .
$\bar{R}_i$ es el rendimiento esperado del activo i .
N es el numero de activos .

- **Desvio típico del rendimiento en el activo i**

$$\sigma(R_i) = \sigma_i = [\sigma_i^2]^{1/2} \qquad (2.31)$$

- **Varianza del rendimiento con diferente probabilidad**

$$\sigma^2(R_i) = \sigma_i^2 = \sum_{t=1}^{N} D_{it}^2\, p_{it} = \sum_{t=1}^{N} (R_{it} - \bar{R}_i)^2\, p_{it} \qquad (2.32)$$

- **Coeficiente de variación**

$$V(R_i) = V_i = \frac{\sigma_i}{R_i} \qquad \textbf{(2.33)}$$

- **Covarianza de los rendimientos**

$$Cov(R_i; R_j) = \sigma_{ij} = \sum_{t=1}^{N} (R_{it} - \overline{R}_i)(R_{jt} - \overline{R}_j)\; p_t \qquad \textbf{(2.34)}$$

donde

σ_{ij}	**es la covarianza entre los activos i y j.**
R_{it}	**es el rendimiento del activo i en el periodo t.**
R_{jt}	**es el rendimiento del activo j en el periodo t.**
$\overline{R}_i$	**es el rendimiento esperado para el activo i.**
$\overline{R}_j$	**es el rendimiento esperado para el activo j.**
p_t	**es la probabilidad de que ocurra el evento.**
N	**es el número de observaciones.**

- **Varianza de los rendimientos de una cartera**

$$\sigma_{(R)}^2 = \sigma^2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i R_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} \qquad \textbf{(2.36)}$$

donde: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$

- **Matriz de varianzas y covarianzas**

$$V = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{n2} \end{vmatrix}$$

- **Correlación de los rendimientos**

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \, \sigma_j} \qquad \textbf{(2.37a)}$$

donde

ρ_{ij} **es el coeficiente de correlación de i y j.**
σ_{ij} **es la covarianza entre i y j.**
σ_i **es la desviación estándar de i.**
σ_j **es la desviación estándar de j.**

- **Covarianza en función del coeficiente de correlación**

$$\sigma_{ij} = \rho_{ij} \, \sigma_i \, \sigma_j \qquad \textbf{(2.38)}$$

- **Varianza de los rendimientos de un portafolio**

$$\sigma_{(R)}^2 = \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i R_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} x_i \, x_j \, \rho_{ij} \, \sigma_i \sigma_j \qquad \textbf{(2.39)}$$

- **Rendimiento esperado de un portafolio de dos títulos (A y B)**

$$\bar{R}_p = X_A \bar{R}_A + X_B \bar{R}_B \qquad (3.1)$$

donde

$\bar{R}_p$	es el rendimiento esperado en el portafolio .
X_A	es la fracción del portafolio invertido en el valor A .
X_B	es la fracción del portafolio invertido en el valor B .
$\bar{R}_A$	es el rendimiento esperado en el valor A .
$\bar{R}_B$	es el rendimiento esperado en el valor B .

- **Desviación estándar del rendimiento de un portafolio de dos títulos**

$$\sigma_p = (X_A^2 \sigma_A^2 + X_B^2 \sigma_B^2 + 2 X_A X_B \sigma_{AB})^{1/2}$$

donde

σ_p	es la desviación estándar del rendimiento en el portafolio .
σ_A^2	es la varianza del rendimiento en el título A .
σ_B^2	es la varianza del rendimiento en el título B .
σ_{AB}	es la covarianza entre los rendimientos en el título A y el título B .

- **Desviación estándar de un portafolio de dos títulos (C y S) con correlación perfecta positiva**

$$\sigma_p = [X_C^2 \sigma_C^2 + (1 - X_C)^2 \sigma_S^2 + 2 X_C (1 - X_C) \sigma_C \sigma_S]^{1/2} \qquad (3.5)$$

- **Desviación estandar de un portafolio de dos títulos (C y S) con correlación perfecta negativa**

$$\sigma_p = [X_C^2 \sigma_C^2 + (1 - X_C)^2 \sigma_S^2 - 2 X_C (1 - X_C) \sigma_C \sigma_S]^{1/2} \qquad (3.6)$$

- Desviación estándar de un portafolio de dos títulos (C y S) incorrelacionados

$$\sigma_p = [\, X_C^2 \sigma_C^2 + (1 - X_C)^2 \sigma_S^2 \,]^{1/2}$$

- Desviacion estándar de un portafolio con tres títulos (1 , 2 , 3)

$$\sigma_p = [\, X_1^2 \sigma_1^2 + X_2^2 \sigma_2^2 + X_3^2 \sigma_3^2 + 2 X_1 X_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 + 2 X_2 X_3 \rho_{23} \sigma_2 \sigma_3 + 2 X_1 X_3 \rho_{13} \sigma_1 \sigma_3 \,]^{1/2} \tag{3.10}$$

donde

σ_p = desviación estándar del portafolio
X_1 = proporción del portafolio total invertido en la acción 1
X_2 = proporción del portafolio total invertido en la acción 2
X_3 = proporción del portafolio total invertido en la acción 3
σ_{ij} = coeficiente de correlación entre las acciones i y j
σ_1 = desviación estándar de la acción 1
σ_2 = desviación estándar de la acción 2
σ_3 = desviación estándar de la acción 3

- Formación de portafolios de mínimo riesgo

Minimizar $$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}$$ (3.11) (Riesgo)

sujeto a $$E_{(Rp)} = \sum_{i=1}^{n} x_i E_{(Ri)}$$ (3.12) (Rendimiento esperado) y $$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \qquad (3.13)$$

(Restricción presupuestaria)

- **Función de Lagrange**

$$F = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} + \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i E_i - E_p \right) + \lambda_2 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1 \right) \qquad (3.14)$$

- **Ecuación del Modelo del Indice Unico**

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + e_i \qquad (4.1)$$

donde el significado de los símbolos es el siguiente :

R_i	variable aleatoria que representa la tasa de rendimiento del activo i .
R_m	variable aleatoria que representa la tasa de rendimiento de un índice representativo del mercado
α_i ; β_i	parámetros del modelo correspondientes al activo i .
e_i	desvío aleatorio entre el rendimiento real del activo i y su valor teórico (variable aleatoria) .

- **Rendimiento esperado**

$$E_i = \bar{R}_i = \alpha_i + \beta_i \bar{R}_m \qquad (4.2)$$

- **Varianza de los rendimientos**

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + Q_i^2 \tag{4.3}$$

- **Covarianza entre dos títulos**

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_m^2 \tag{4.4}$$

- **Rendimiento del portafolio P**

$$\bar{R}_p = \sum_{i=1}^{N} x_i \bar{R}_i$$

donde

$\bar{R}_p$	**es una variable aleatoria que representa la tasa de rendimiento del portafolio P.**
$\bar{R}_i$	**es una variable aleatoria que representa la tasa de rendimiento del activo i que integra el portafolio.**
x_i	**es la proporción de capital invertida en el activo i con respecto al total del capital.**

- **Rendimiento del portafolio P sustituyendo (4.2)**

$$\bar{R}_p = \sum_{i=1}^{N} x_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{N} x_i \beta_i R_m \tag{4.5}$$

- **Alfa y Beta del portafolio**

$$\alpha_p = \sum_{i=1}^{N} x_i \alpha_i \qquad y \qquad \beta_p = \sum_{i=1}^{N} x_i \beta_i$$

- **Rendimiento del portafolio P**

$$\bar{R}_p = E_p = \alpha_p + \beta_p \bar{R}_m \qquad (4.6)$$

- **Varianza de los rendimientos**

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_m^2 + \sigma_{ep}^2 \qquad (4.7)$$

siendo

$$\sigma_{ep}^2 = Q_p^2 = \Sigma x_i^2 \sigma_{ei}^2$$

donde

$$\sigma_{ei}^2 = Q_i^2 = \frac{1}{N} \Sigma \left[R_{it} - (\alpha_i + \beta_i R_{mt}) \right]^2$$

- **Covarianza entre el título i y el índice del mercado m**

$$\sigma_{im} = \beta_i \sigma_m^2 \qquad (4.8)$$

- **Coeficiente de correlación lineal entre título i e índice del mercado m**

$$\rho_{im} = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_i \sigma_m} \qquad (4.9)$$

- **Coeficiente de correlación entre título e índice de mercado**

$$\rho_{im} = \frac{\beta_i \sigma_m}{\sigma_i} \qquad (4.10)$$

- Coeficiente de determinación

$$\rho_{im}^2 = \frac{\beta_i^2 \ \sigma_m^2}{\sigma_i^2} \qquad (4.11)$$

- Rendimiento del activo i en el periodo t

$$\hat{R}_{it} = \alpha_i + \beta_i R_{mt} \qquad (4.12)$$

donde

$\hat{R}_{it}$ es la tasa de rendimiento del activo i en el periodo t estimada de acuerdo al modelo.

α_i es la estimación de la componente de la tasa de rendimiento del activo i, que es independiente de la tasa de rendimiento del índice del mercado (ordenada en el origen de la recta de regresión mínimo-cuadrática).

β_i es la estimación del correspondiente parámetro del modelo MIU para el activo i (pendiente de la recta de regresión mínimo-cuadrática).

R_{mt} es la tasa de rendimiento del índice del mercado en el periódo t .

- Parámetros α y β para el activo i

$$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} = \frac{\sum_{t=1}^{n} [(R_{it} - \bar{R}_{it}) \ (R_{mt} - \bar{R}_{mt})]}{\sum_{t=1}^{n} (R_{mt} - \bar{R}_{mt})^2}$$

(4.13 bis)

y

$$\alpha_i = \bar{R}_{it} - \beta_i \bar{R}_{mt}$$

- **Varianza del rendimiento del índice del mercado**

$$\sigma_m^2 = \sum_{t=1}^{n} (R_{mt} - \overline{R}_{mt})^2$$

BIBLIOGRAFIA

1. *Modern Investment Theory*
Robert A. Haugen. Segunda Edición.
Prentice Hall.

2. *Prontuario bursátil y financiero.*
Gonzalo Cortina Ortega . Primera Edición.
Editorial Trillas. 1986.

3. *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis.*
Edwin J. Elton & Martin J. Gruber. Fourth Edition.
John Wiley and Sons. 1981

4. *Carteras de Inversión.*
Marquez Diez-Canedo Javier. Primera Edición.
Editorial Limusa. 1981

5. *Portfolio Analysis.*
Francis Jack Clark & Archer Stephen H. Second Edition.
Prentice Hall. 1979.

6. *Anuarios Bursatiles.*
Bolsa Mexicana de Valores.

7. *Indicadores Bursatiles.*
Bolsa Mexicana de Valores.

8. *Inversión contra inflación.*
Timothy Heyman.
Editorial Milenio.

9. *Portfolio Theory and Capital Markets.*
William Sharpe F.
Mc.Graw-Hill. 1971.

10. *Probabilidad y Estadística. Aplicaciones y Métodos.*
George C. Canavos.
Mc.Graw-Hill.

11. *Mathematics of Investment and Credit.*
Samuel A. Broverman.
University of Toronto , ACTEX , 1991 .

12. *Investment . Analysis and Management*
Charles P. Jones .
John Wiley & Sons , INC. 1991.

13. *Investment . Analysis and Portfolio Management.*
Sid Mittra and Chris Gassen.
Harcourt Brace Jovanovich.

14. *Selección de Inversiones. Introducción a la teoría de la cartera.*
Domingo Jorge Messuti , Victor Adrián Alvarez y Hugo Romano Graffi.
Ediciones Macchi . Buenos Aires , Argentina.

15. *Investment, Analysis and Portfolio Management.*
Jerome B. Cohen, Edward D. Zinbarg y Arthur Zeikel.
Irwin, Homewood.

16. *Security Analysis and Porfolio Management.*
Donald E. Fischer y Ronald J. Jordan.
Prentice Hall. 1991.

17. *Invierta en la Bolsa. Guía para inversiones seguras y productivas.*
Alfredo Díaz Mata.
Grupo Editorial Iberoamérica.