

23.
29



**UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO**

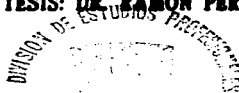
FACULTAD DE CIENCIAS

**FLUIDOS VISCOSOS NO
HOMOGENEOS**

T E S I S
Que para obtener el titulo de
F I S I C O
p r e s e n t a

ERNESTO GONZALEZ CANDELA

DIRECTOR DE TESIS: DR. RAMON PERALTA FABI



FACULTAD DE CIENCIAS

1997



**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
"Fluidos viscosos no homogéneos"

realizado por ERNESTO GONZALEZ CANDELA

con número de cuenta 9055880-3 , pasante de la carrera de Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

DR. RAMON PERALTA FABI

Ramon Peralta Fabi

Propietario

DRA. MARIA DEL CARMEN JORGE Y JORGE

pro. Carmen Jorge

Propietario

DR. STEVEN PETER CZITROM BAUS

Steven Citrom

Suplente

DR. ROSALIO FERNANDO RODRIGUEZ ZEPEDA

Rosalio Rodriguez Zepeda

Suplente

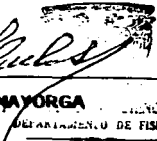
DR. CESAR TREVIÑO TREVIÑO

Cesar Treviño Treviño

Consejo Departamental de Física

Roberto Alejandro Ruelas Mayorga

DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORGA
Coordinador de Licenciatura



FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

FLUIDOS VISCOSOS NO HOMOGÉNEOS

Ernesto González Candela

... a mi madre, a mis hermanos Julia y Mariano, y a Eva.

NADA ES, TODO FLUYE.

Heráclito, siglo V antes de nuestra era.

Agradecimientos

A mi madre y mi hermana, por el apoyo y confianza que siempre recibí de ellas.

A Eva por estar conmigo durante los momentos más difíciles, por soportar todos los sube y bajas y ayudarme a superar las bajas.

A los cuates: Málaga, Paco, Paula, Julián, Iván, Rodrigo, Carlos, Leonel, Joaquín, Vanesa, Pablo, Ivette, Barberis, Chana, Blanca, Nico, Bárbara, Eli, etc. por todo lo que viví, compartí y aprendí con ellos durante estos años en la Facultad y por todos los momentos de "sana" diversión.

A Ramón Peralta-Fabi por todo lo que gracias a él he aprendido en estos años en sus clases (las mejores de la carrera) y en el Laboratorio de Fluidos como mi asesor y como amigo; por su gran capacidad de motivación y por ser un experto levantador de ánimos caídos.

A todos los integrantes del Laboratorio de Fluidos. En especial a Eduardo, que sin su ayuda este trabajo se pudo haber alargado muchos meses.

A los excelentes maestros con los que alguna vez tomé cursos: Eugenio Ley Koo, Jorge Ize, Juan Manuel Lozano, María del Carmen Jorge.

A los sinodales María del Carmen Jorge, Rosalío Rodríguez, Steven Czitrom y Cesar Treviño por hacer una buena revisión a pesar de las prisas

A Fundación UNAM por el apoyo económico que durante el último año me brindó.

Contenido

Resumen	7
Introducción	8
1 Ecuaciones de conservación	11
1.1 Conceptos básicos	12
1.2 Conservación de masa	13
1.3 Fuerzas	15
1.3.1 Fuerzas volumétricas	15
1.3.2 Fuerzas superficiales	16
1.3.3 La simetría del tensor de esfuerzos	19
1.3.4 Un fluido en reposo	20
1.4 Conservación de momento	22
1.5 Conservación de energía	23
1.6 Resumen	25
2 Ecuaciones constitutivas y condiciones a la frontera	27

2.1	Ecuaciones constitutivas	27
2.1.1	El tensor de esfuerzos	28
2.1.2	El flujo de calor	32
2.2	Casos particulares	33
2.2.1	Fluido Newtoniano (isótropo)	33
2.2.2	Fluido transversalmente isótropo de dos constantes	36
2.2.3	Fluido viscoelástico	40
2.3	Condiciones de frontera	43
2.4	Número de Reynolds	44
2.5	Resumen	45
3	La inhomogeneidad en la viscosidad	46
3.1	Argumentación física	46
3.2	Posibles aplicaciones	48
3.2.1	Fluido polimérico	48
3.2.2	Flujo turbulento	51
3.3	Forma de la inhomogeneidad	53
4	Soluciones para algunas geometrías	57
4.1	Flujo de Couette plano	57
4.2	Flujo de Poiseuille	66
4.3	Flujo de Couette-Taylor	74
4.4	Flujo uniforme alrededor de una esfera	77

4.4.1	Planteamiento del problema	77
4.4.2	Cambio de representación	80
4.4.3	Fórmula para el arrastre	83
4.4.4	Solución en series	84
4.5	Discusión	92
	Conclusiones y perspectivas	97
	Bibliografía	100

Resumen

En el primer capítulo de este trabajo se deducen las ecuaciones de conservación correspondientes a un medio continuo usando conceptos básicos ampliamente aceptados en la mecánica de fluidos.

El segundo capítulo está dedicado a la deducción de la forma lineal más general para las ecuaciones constitutivas, tomando en cuenta inhomogeneidad, anisotropía, efectos de memoria y no locales. A partir de estas ecuaciones generales se encuentran las expresiones correspondientes a los casos de un fluido newtoniano generalizado, de un fluido transversalmente isótropo y de un fluido viscoelástico.

En el tercer capítulo se dan las razones físicas por las cuales introducir una viscosidad dependiente de la posición puede ser útil. Se presentan dos casos en los cuales es justificable el uso de este tipo de inhomogeneidades. Con base en esto se propone la forma general para la viscosidad y su relación con las fronteras del sistema.

Haciendo uso de las ecuaciones de movimiento correspondientes a un fluido con viscosidad no homogénea, en el cuarto capítulo se encuentran soluciones para los casos estacionarios de flujo de Couette plano, Poiseuille, Couette-Taylor y el flujo uniforme alrededor de un esfera.

Introducción

A lo largo de la historia el hombre se ha maravillado e interesado por el comportamiento de los fluidos que lo rodean, ya que forman parte esencial de su medio ambiente y son indispensables para la vida. El entenderlos y poderlos manipular a gusto y conveniencia ha constituido uno de los grandes retos a lo largo de su existencia.

Muchos de los grandes físicos y matemáticos de la historia del pensamiento han dedicado gran parte de sus vidas a tratar de entender el rico y complejo mundo de la *dinámica de los fluidos*, que actualmente constituye uno de los campos más complicados y menos comprendidos de la física. Contribuir a la descripción y comprensión del comportamiento de los fluidos es, además de un fascinante juego, una imperiosa necesidad para manejar nuestro entorno.

En la dinámica de fluidos existen una gran cantidad de preguntas sin respuesta. Esto se debe principalmente a dos razones: La primera es que las ecuaciones no lineales que describen su comportamiento son extremadamente complicadas y encontrar soluciones exactas constituye un problema abierto; ni siquiera existen teoremas que garanticen la existencia y unicidad de dichas soluciones en el caso general. La segunda razón es que no se conocen con precisión las expresiones que determinan la manera en que cada medio responde a los diferentes tipos de estímulos, por ejemplo, cómo se deforma determinado fluido si se aplica sobre él un esfuerzo tangencial (cortante), o cómo reacciona ante un gradiente de temperatura. Estas expresiones son llamadas *relaciones constitutivas* y son necesarias para cerrar el sistema de ecuaciones que describe el comportamiento del fluido.

Es evidente que éstas son diferentes dependiendo de las propiedades de cada material.

Las relaciones constitutivas no se conocen bien debido a que la teoría, de la cual se deducen el resto de las ecuaciones, no dice nada sobre la forma que deben tener, por lo tanto, para obtenerlas se hace uso de modelos aproximados que, normalmente, implican suposiciones y simplificaciones fuertes sobre las propiedades de cada material y se apoyan siempre en la observación directa de los fenómenos que se desean describir. Algunos de estos modelos resultan sorprendentemente buenos para describir cierto tipo de fluidos bajo circunstancias particulares, pero en la mayoría de los casos no se tiene una teoría que prediga con exactitud los resultados experimentales.

Ya desde 1678, el científico inglés Robert Hooke había establecido que en una gran variedad de materiales la deformación elástica producida es proporcional al esfuerzo aplicado. No fue hasta 1775 cuando el matemático suizo Leonhard Euler propuso la primera relación constitutiva para un fluido, el llamado fluido ideal. Este es un fluido cuya fricción interna, o viscosidad, es nula. La primera relación constitutiva para un fluido viscoso incompresible la estableció Isaac Newton en 1687, al proponer que para estos fluidos el esfuerzo de corte aplicado y la deformación producida son proporcionales.

En este trabajo se estudia la forma más general de las ecuaciones constitutivas en el caso de un fluido cuya respuesta es lineal. Uno de los casos particulares de estas expresiones generales es el de un fluido newtoniano, cuyas propiedades son las mismas en todas direcciones, o sea, es isótropo. La ecuación constitutiva para los esfuerzos de un fluido con estas características, en el caso incompresible, sólo depende de un coeficiente, la viscosidad cortante o simplemente, viscosidad. Normalmente este coeficiente se toma como una constante independiente de la posición y del tiempo. Sin embargo, el propósito de este trabajo es hacer un estudio de sistemas donde la viscosidad es una función de la posición, encontrar la forma que toman las ecuaciones de movimiento e intentar resolverlas en diferentes casos particulares.

Esta inhomogeneidad en la viscosidad se introduce como un efecto producido por las

fronteras del sistema. La variación espacial de la viscosidad será diferente dependiendo de las propiedades particulares del fluido y de la geometría del sistema que se estudie.

El objetivo es, entonces, establecer si a través del modelo newtoniano con viscosidad no homogénea es posible dar una descripción macroscópica de cierto tipo de flujos, en los que las fronteras juegan un papel determinante, que normalmente son estudiados con modelos más complicados.

Capítulo 1

Ecuaciones de conservación

Hay dos caminos a seguir en la deducción de las ecuaciones que describen el movimiento de un fluido. Uno de los métodos ataca el problema desde un punto de vista molecular. Este método considera al fluido compuesto de moléculas cuyo movimiento está regido por las leyes de la dinámica. Esta teoría está bien desarrollada para gases ligeros y diluidos pero está incompleta para gases poliatómicos y líquidos.

En este capítulo se hará uso del método alternativo, que ignora la existencia de moléculas y considera al fluido como un medio continuo. Esta es conocida como *hipótesis del continuo*. Para que esta hipótesis sea válida se requiere que el camino libre medio de las moléculas sea muy pequeño en comparación con la mínima escala del problema. Este medio continuo debe obedecer las leyes de conservación de masa, momento y energía, mediante las cuales se obtiene un conjunto de ecuaciones diferenciales cuya solución describe el comportamiento de las variables de campo (velocidad, presión, densidad, etc.)[5].

1.1 Conceptos básicos

Para escribir las leyes de conservación de un medio continuo es necesario utilizar elementos de volumen, que en este caso no se consideran infinitesimales. Un elemento de volumen de fluido debe ser suficientemente grande para contener un número muy elevado de moléculas, pero muy pequeño en comparación con el volumen del sistema en consideración, de modo que las variables en ese elemento de volumen se pueden considerar continuas y la hipótesis del continuo válida. Cuando se habla de elementos de volumen en mecánica de fluidos, se refiere a aquellos que cumplen estas características y son llamados comúnmente *elementos de fluido*.

Existen dos sistemas de referencia básicos que pueden ser usados para formular las ecuaciones que describen la dinámica de un fluido, el lagrangiano y el euleriano. El sistema de referencia lagrangiano se refiere a un elemento de fluido y establece cuál es su posición al tiempo t_0 y sigue su evolución. Las variables independientes son el tiempo y las coordenadas iniciales x_0, y_0 y z_0 , al tiempo t_0 . Si es conocida la velocidad $\vec{u}(x_0, y_0, z_0, t)$, entonces su posición en cualquier tiempo posterior puede ser calculada. En esta descripción se determina la trayectoria de los elementos de fluido. La dificultad en este caso es que el sistema de referencia sigue a cada elemento de fluido, por lo que no es fácil determinar su estado de movimiento en una posición y tiempo dados. En el sistema de referencia euleriano todas las magnitudes que se manejan son funciones de las variables independientes x, y, z y del tiempo t . En este caso se considera un *volumen de control* que está fijo en el espacio y se analiza lo que sucede con el fluido que éste contiene. Es decir, se refiere a puntos fijos en el espacio y no a elementos fijos de fluido, por lo que $\vec{u}(x, y, z, t)$ es la velocidad en el punto (x, y, z) del espacio a un instante dado t . Esta es la descripción más utilizada para resolver problemas en dinámica de fluidos[2].

La relación entre las derivadas temporales lagrangianas y eulerianas es

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)f, \quad (1.1)$$

donde f es una variable de campo. Utilizando la convención de Einstein, donde los índices repetidos implican una suma, la ecuación puede reescribirse como

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_k \frac{\partial f}{\partial x_k}. \quad (1.2)$$

Esta ecuación representa el cambio temporal en el sistema lagrangiano $\frac{Df}{Dt}$ de la cantidad f , para un elemento de fluido dado, en términos de derivadas eulerianas $\frac{\partial f}{\partial t}$ y $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ [5]. A $\frac{Df}{Dt}$ se le conoce como derivada convectiva o derivada material.

Una relación extra que se necesita para el desarrollo ulterior, es la que da la derivada lagrangiana de una integral de volumen en términos de una integral de volumen que sólo contiene derivadas eulerianas. Esta está dada por el teorema de transporte de Reynolds, el cual dice que si conocemos el cambio de la integral de f en un volumen de control V que se mueve con el fluido, entonces la integral del cambio temporal de la cantidad f en un punto fijo está dado por

$$\frac{D}{Dt} \int_V f dV = \int_V \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (f u_k) \right] dV. \quad (1.3)$$

Esta relación es válida si f es un tensor de cualquier rango.

1.2 Conservación de masa

Para la deducción de la ecuación de conservación de masa se considera la masa de un elemento de fluido de volumen V , que es $\int_V \rho dV$, donde ρ es la densidad de masa. Si este elemento de fluido es seguido mientras se mueve, su tamaño y forma cambiarán, pero la masa permanecerá invariable. Por lo que la derivada material de esta cantidad es cero, es decir,

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = 0. \quad (1.4)$$

Este es el principio de conservación de la masa.

Esta ecuación se puede transformar, utilizando el teorema de transporte de Reynolds (ec. 1.3), en una integral de volumen cuyo integrando contiene únicamente derivadas eulerianas. De modo que

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) \right] dV = 0. \quad (1.5)$$

Debido a que el volumen V es arbitrario, esta ecuación es válida únicamente si el integrando es cero. Por lo que la ecuación de conservación de masa es

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) = 0. \quad (1.6)$$

La ec. (1.6) usualmente es llamada *ecuación de continuidad*. A lo largo de este trabajo se estudiará el caso particular de un fluido incompresible, es decir, aquel en el que la densidad ρ es una constante. Para poder decir cuándo es válida esta aproximación es necesario un breve análisis. Si se desarrolla a primer orden en serie de Taylor a la densidad, como una función de la presión, se tiene

$$\rho = \rho_o + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_S (p - p_o) + \dots, \quad (1.7)$$

donde ρ_o y p_o son la densidad y la presión del fluido en equilibrio y $\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_S$ es la variación de la densidad con respecto a la presión a entropía constante. Entonces

$$\frac{\rho}{\rho_o} = 1 + M^2 \frac{(p - p_o)}{\rho_o v^2} + \dots, \quad (1.8)$$

ya que $\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_S = \frac{1}{c^2}$, c es la velocidad de propagación del sonido en el medio, v es una velocidad característica del flujo y $M = \frac{v}{c}$ el número de Mach (cantidad adimensional que relaciona ambas velocidades). Substituyendo esta expresión para la densidad en la

ecuación de continuidad (1.6) se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(1 + M^2 \frac{(p - p_0)}{\rho_0 v^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(u_k + u_k M^2 \frac{(p - p_0)}{\rho_0 v^2} \right) = 0. \quad (1.9)$$

Si ahora se adimensionaliza la ecuación, introduciendo las siguientes variables: $\tilde{u}_k = \frac{u_k}{v}$, $\tilde{t} = \frac{t}{t_0}$, $\tilde{p} = \frac{(p - p_0)}{\rho_0 v^2}$ y $\frac{\partial}{\partial x_k} = \ell \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_k}$, donde t_0 es un tiempo característico del problema y ℓ una distancia característica, se llega a que

$$\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \tilde{x}_k} + M^2 \left[\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_k} (\tilde{u}_k \tilde{p}) \right] = 0. \quad (1.10)$$

Aquí se ve claramente que si el número de Mach es pequeño ($M \ll 1$), los cambios de presión no son significativos, por lo que un fluido que se mueve con velocidad v es, en una buena aproximación, incompresible y su ecuación de continuidad se reduce a

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0. \quad (1.11)$$

Esta es la ecuación que se utilizará de aquí en adelante como ecuación de continuidad.

1.3 Fuerzas

1.3.1 Fuerzas volumétricas

Es posible distinguir dos tipos de fuerzas que actúan sobre una masa de fluido. En primer lugar tenemos a las volumétricas, también conocidas como fuerzas másicas o de cuerpo, y que son de largo alcance, pues disminuyen lentamente conforme aumenta la distancia. Gracias a esto son capaces de penetrar al interior del fluido y actuar sobre cada uno de los elementos contenidos en un volumen. Entre este tipo de fuerzas podemos mencionar como las más importantes a la gravedad, las fuerzas inerciales y las electromagnéticas. Una consecuencia de su lenta variación con la posición del elemento de fluido sobre el

cual actúan, es que la fuerza es la misma para todo el elemento de fluido, siendo la fuerza total proporcional a la masa del elemento de volumen. Entonces, el total de todas las fuerzas volumétricas actuando al tiempo t , sobre un elemento de fluido centrado en el punto \vec{x} está dado por

$$\vec{f}(\vec{x}, t) \rho \delta V, \quad (1.12)$$

donde \vec{f} es la fuerza por unidad de masa y por unidad de volumen. De modo que la fuerza externa neta actuando sobre un elemento de fluido de volumen V y densidad ρ es

$$\int_V \vec{f}(\vec{x}, t) \rho dV. \quad (1.13)$$

1.3.2 Fuerzas superficiales

En segundo lugar tenemos a las fuerzas superficiales que son fuerzas de corto alcance que disminuyen extremadamente rápido conforme aumenta la distancia entre los elementos que interactúan. Por lo tanto, estas fuerzas pueden actuar solamente sobre una delgada capa adyacente a la frontera del elemento de fluido. La fuerza total sobre este elemento está determinada por el área superficial del elemento, siendo el volumen irrelevante. Entonces, como su nombre lo indica, son fuerzas que sólo actúan sobre la superficie de un elemento. La fuerza superficial es proporcional al área, y su valor al tiempo t para un elemento de fluido centrado en la posición \vec{x} está dado por

$$\vec{T}(\hat{n}, \vec{x}, t) \delta A, \quad (1.14)$$

donde \vec{T} es la fuerza por unidad de área y \hat{n} es la normal unitaria a la superficie del elemento. Por convención esta normal apunta hacia afuera de elemento de fluido. Una componente normal de \vec{T} con el mismo sentido de \hat{n} representa una tensión, si tiene el sentido contrario representa una compresión. La fuerza ejercida sobre el elemento de superficie del fluido en la cara hacia la que \hat{n} apunta es $-\vec{T}(\hat{n}, \vec{x}, t) \delta A$, pero como

también es la fuerza representada por $\vec{T}(-\hat{n}, \vec{x}, t) \delta A$ es claro que \vec{T} debe ser una función impar de \hat{n} [2].

Para determinar la dependencia de \vec{T} en la dirección de la normal se consideran todas las fuerzas superficiales actuando sobre un elemento de volumen δV con la forma de un tetraedro como se muestra en la figura (1-1).

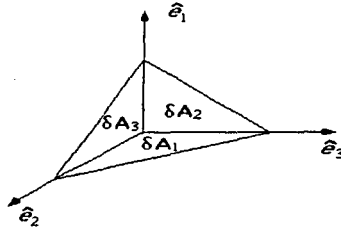


Figura 1-1: Elemento de volumen con forma de tetraedro

Las tres caras ortogonales tienen áreas $\delta A_1, \delta A_2, \delta A_3$, con normales unitarias $-\hat{e}_1, -\hat{e}_2$ y $-\hat{e}_3$, respectivamente. La cara inclinada tiene área δA con normal unitaria \hat{n} . La suma de las fuerzas superficiales que actúan sobre el fluido contenido en el tetraedro a través de cada una de sus cuatro caras es

$$\vec{T}(\hat{n}) \delta A + \vec{T}(-\hat{e}_i) \delta A_i; \quad (1.15)$$

aquí la dependencia en \vec{x} y t no es tomada en cuenta. Dada la ortogonalidad de las tres caras, se tiene que

$$\delta A_i = \hat{e}_i \cdot \hat{n} \delta A. \quad (1.16)$$

por lo tanto la suma de las fuerzas superficiales puede escribirse como

$$[\vec{T}(\hat{n}) - \vec{T}(\hat{e}_i) \hat{e}_i \cdot \hat{n}] \delta A. \quad (1.17)$$

Si se aplica la 2ª ley de Newton al tetraedro, se tiene que

$$\rho \vec{a} \delta V = \rho \vec{f} \delta V + [\vec{T}(\hat{n}) - \vec{T}(\hat{e}_i) \hat{e}_i \cdot \hat{n}] \delta A, \quad (1.18)$$

donde \vec{a} es la aceleración. Se observa que δV es proporcional a ℓ^3 , y δA es proporcional a ℓ^2 . Por lo tanto, si se divide entre ℓ^2 a la ecuación (1.18) y se toma el límite cuando $\ell \rightarrow 0$, conservando la forma del tetraedro, se tiene que la ecuación (1.17) es idénticamente cero:

$$\vec{T}(\hat{n}) = \{ \vec{T}(\hat{e}_i) \hat{e}_i \} \cdot \hat{n}. \quad (1.19)$$

Los vectores \hat{n} y \vec{T} no dependen en ningún sentido del sistema de referencia escogido, por lo que la expresión $\vec{T}(\hat{e}_i) \hat{e}_i$ debe representar la componente i, j de una cantidad que también es independiente del sistema de referencia escogido. En otras palabras $\vec{T}(\hat{e}_i) \hat{e}_i$ representa una componente de un tensor de segundo rango:

$$T_i(\hat{n}) = \sigma_{ij} n_j, \quad (1.20)$$

donde σ_{ij} representa la componente i de la fuerza por unidad de área ejercida sobre un elemento de superficie plano, normal a la dirección j , en la posición \vec{x} al tiempo t , y es conocido como el *tensor de esfuerzos*. Ahora, el vector de esfuerzo queda especificado por este tensor de esfuerzos, que es independiente de la dirección de la normal, en lugar de \vec{T} [2]. Así, la fuerza total actuando sobre la superficie S que contiene al volumen V es

$$\int_S T_i dA = \int_S \sigma_{ij} n_j dA. \quad (1.21)$$

1.3.3 La simetría del tensor de esfuerzos

En general el tensor de esfuerzos tiene nueve componentes independientes, pero es posible demostrar, con un argumento similar, que no todas esas componentes son independientes. Para esto se considera el momento angular total de un fluido de volumen V de forma arbitraria, centrado en el punto O . Entonces la componente i del momento angular total ejercida por todas las fuerzas sobre V es

$$N_i = \int_V \rho \varepsilon_{ijk} x_j f_k dV + \int_S \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} n_l dA, \quad (1.22)$$

donde $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ es el vector de posición del elemento de superficie $\hat{n} dA$ con respecto a O . La integral de superficie se puede transformar, usando el teorema de Gauss, en una integral de volumen

$$N_i = \int_v \left(\rho \varepsilon_{ijk} x_j f_k + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_l} (x_j \sigma_{kl}) \right) dV, \quad (1.23)$$

es decir,

$$N_i = \int_v \left(\rho \varepsilon_{ijk} x_j f_k + \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} + \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} \right) dV. \quad (1.24)$$

De los tres términos dentro del paréntesis, los primeros dos dependen de ℓ^4 y el último de ℓ^3 (ya que dV va como ℓ^3). Entonces, si se toma el límite cuando $\ell \rightarrow 0$ de tal modo que la forma de la frontera y el punto O permanezcan inalterados, el término que disminuye más lentamente es $\int_v \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} dV$. En consecuencia, éste debe de ser idénticamente cero. Dado que esto es cierto para cualquier forma de V centrado en un punto arbitrario O , se tiene que

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} = 0, \quad (1.25)$$

siempre y cuando σ_{ij} sea continuo en \vec{x} . La relación muestra que el tensor de esfuerzos es simétrico, esto es,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad (1.26)$$

por lo que únicamente tiene seis componentes independientes.

Las tres componentes diagonales de σ_{ij} son los *esfuerzos normales* ya que cada una de ellas da una componente normal de la fuerza superficial actuando sobre un elemento de superficie paralelo a uno de los planos coordenados. Las tres componentes fuera de la diagonal de σ_{ij} son los *esfuerzos tangenciales*, también llamados *esfuerzos de corte* [2].

Dado que el tensor de esfuerzos es simétrico, siempre es posible diagonalizarlo, es decir, escoger las direcciones de los ejes ortogonales de tal modo que las componentes fuera de la diagonal sean todas cero. A éstos se les conoce como ejes principales del tensor de esfuerzos en un punto dado \vec{x} . En general estos ejes principales son distintos en cada punto, excepto si el fluido es homogéneo e isótropo. Los elementos de la diagonal del tensor de esfuerzos diagonalizado se conocen como esfuerzos principales. Todo esto significa que siempre es posible representar a los esfuerzos que actúan en un elemento de fluido únicamente con esfuerzos normales, es decir, con tensiones y compresiones. Es bien sabido que la traza de un tensor de segundo rango es un invariante ante rotaciones. Por lo tanto, la suma de los esfuerzos principales $\sigma_{ii} = \alpha$ vale lo mismo sean cuales sean las direcciones de los ejes [2].

Es importante recordar que este resultado es válido para fluidos simples. Existen sistemas (fluidos complejos) en los que es necesario incluir otras variables hidrodinámicas para su descripción y que aquí no han sido usadas. En estos casos el tensor de esfuerzos no es necesariamente simétrico. Ejemplos de este fluidos complejos son los cristales líquidos, algunos polímeros y los fluidos nemáticos.

1.3.4 Un fluido en reposo

Si se consideran ahora las fuerzas superficiales ejercidas sobre un elemento de fluido esférico y escogemos a los ejes de modo que coincidan con los ejes principales de σ_{ij} , se

puede escribir al tensor de esfuerzos como la suma de dos tensores

$$\sigma_{ij} = \alpha \delta_{ij} + \check{\sigma}_{ij} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sigma'_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\sigma'_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\sigma'_{ii} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma'_{11} - \frac{1}{3}\sigma'_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_{22} - \frac{1}{3}\sigma'_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_{33} - \frac{1}{3}\sigma'_{ii} \end{pmatrix}, \quad (1.27)$$

donde σ'_{11} , σ'_{22} y σ'_{33} son los esfuerzos principales. El primero de estos tensores es esféricamente simétrico, o isótropo, y su contribución a la fuerza por unidad de área en un punto con normal n_i es $\frac{1}{3}\sigma'_{ii}$. Ésta es una compresión uniforme (ya que el signo de $\frac{1}{3}\sigma'_{ii}$ es negativo por convención) que tiende a cambiar el volumen, pero puede ser soportada por el fluido en reposo. El segundo tensor tiene traza cero, por lo que representa esfuerzos normales de los cuales al menos uno es una compresión y al menos uno una tensión. La contribución del segundo tensor tiende a deformar el elemento de fluido esférico y no puede ser balanceada con ninguna fuerza volumétrica, a diferencia de la compresión uniforme. Entonces, para que un fluido esté en equilibrio es necesario que el segundo tensor sea nulo. Por lo tanto, en un fluido en reposo el tensor de esfuerzos es isótropo, todos los sistemas de referencia ortogonales son ejes principales y sólo existen esfuerzos normales.

Los fluidos en reposo normalmente están en estado de compresión, por lo que es conveniente escribir al tensor de esfuerzos como

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}, \quad (1.28)$$

donde $p = -\frac{1}{3}\sigma'_{ii}$ es la presión hidrostática, que coincide con la presión termodinámica y es en general una función de \bar{x} [2].

1.4 Conservación de momento

La ecuación de conservación de momento resulta de aplicar la segunda ley de Newton a un elemento de fluido. Esto es, el cambio de momento de un elemento de fluido, en un sistema de referencia lagrangiano, es igual a la suma de las fuerzas externas que actúan sobre él (ecs. 1.13 y 1.21). Por lo que el cambio temporal de momento de la masa contenida en V es

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \tilde{u} dV = \int_V \rho \tilde{f} dV + \int_S \tilde{T} dS. \quad (1.29)$$

Aplicando el teorema de transporte de Reynolds (ec. 1.3), e introduciendo el tensor de esfuerzos, se tiene que la componente i de la ecuación (1.29) está dada por

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_i u_k) \right] dV = \int_V \rho f_i dV + \int_S \sigma_{ij} n_j dS. \quad (1.30)$$

Aplicando ahora el teorema de la divergencia al segundo término de la derecha, y acomodando se tiene que

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_i u_k) - \rho f_i - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right] dV = 0. \quad (1.31)$$

Si ahora se desarrollan las derivadas y se introduce la ecuación de continuidad, se llega a que

$$\int_V \left[\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} u_i - \rho f_i - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right] dV = 0. \quad (1.32)$$

Debido a que el volumen sobre el cual se integra es arbitrario, el integrando debe de ser cero, por lo tanto

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} u_i \right) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i, \quad (1.33)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \vec{f}. \quad (1.34)$$

La ecuación (1.33) representa el balance de momento lineal en la componente i y es llamada comúnmente *ecuación de momento*. El lado izquierdo representa el cambio de momento por unidad de volumen. El primer término es la aceleración temporal, mientras que el segundo representa la aceleración convectiva. Es importante hacer notar que en éste segundo término aparece el cuadrado de la velocidad y es el término que hace que estas ecuaciones sean no lineales y por ende mucho más complicadas de resolver. En el lado derecho de la ecuación se tienen a las fuerzas que provocan dicha aceleración.

1.5 Conservación de energía

Otro principio de conservación, que se debe satisfacer, es el principio de conservación de la energía. Para deducir la ecuación de balance correspondiente, se aplica la primera ley de la termodinámica a un elemento de fluido. Esto es, el cambio temporal total de la energía interna por unidad de masa debe ser igual a la suma del trabajo total por unidad de tiempo hecho sobre el sistema, menos el flujo de calor extraído al sistema. Sin embargo la termodinámica sólo es válida para sistemas en equilibrio. Entonces, para poder hacer uso de ella en la mecánica de fluidos, es necesario hacer la *hipótesis de equilibrio local*. Esta supone que en cada elemento de fluido que compone al sistema existe equilibrio termodinámico, por lo que *localmente* es posible definir las variables termodinámicas, que satisfacen todas las relaciones ya conocidas. De esta forma, un elemento de fluido en un sistema de referencia lagrangiano puede ser considerado como un sistema termodinámico.

La energía de un elemento de fluido de volumen V es la suma de la energía interna e , más la energía cinética $\frac{1}{2}u_i u_i$, ambas por unidad de masa y por unidad de volumen.

Entonces, la energía total contenida en V es $\int_V (\rho e + \frac{1}{2} \rho u_i u_i) dV$ y por ende, la variación temporal desde el sistema de referencia lagrangiano es

$$\frac{D}{Dt} \int_V (\rho e + \frac{1}{2} \rho u_i u_i) dV. \quad (1.35)$$

Por otro lado se tiene que la potencia hecha sobre el fluido por las fuerzas que actúan sobre él está dada por el producto de la velocidad con la componente paralela de cada una de las fuerzas. Es decir, la potencia es el producto escalar del vector velocidad con el vector fuerza. Por lo tanto, el trabajo por unidad de tiempo, realizado por las fuerzas superficiales y las fuerzas volumétricas sobre el elemento de fluido está dado por

$$\int_S u_j \sigma_{ij} n_j dS + \int_V u_i \rho f_i dV. \quad (1.36)$$

Si ahora denotamos como \vec{q} al flujo de calor que sale del elemento de fluido, entonces, la cantidad de calor que sale del elemento de fluido por unidad de tiempo y de área es $\vec{q} \cdot \hat{n}$, de manera que el calor cedido por unidad de tiempo es

$$\int_S q_i n_i dS. \quad (1.37)$$

Así, la ecuación de balance de energía, para un elemento de fluido en movimiento es

$$\frac{D}{Dt} \int_V (\rho e + \frac{1}{2} \rho u_i u_i) dV = \int_S u_i \sigma_{ij} n_j dS + \int_V u_i \rho f_i dV - \int_S q_i n_i dS. \quad (1.38)$$

Utilizando el teorema de transporte de Reynolds (ec.1.3) para la cantidad $(\rho e + \frac{1}{2} \rho u_i u_i)$, y el teorema de la divergencia para las integrales de superficie, la ecuación (1.38) se transforma en

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho e + \frac{1}{2} \rho u_i u_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho e + \frac{1}{2} \rho u_i u_i) \right] dV = \int_V \left[u_i \rho f_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i \sigma_{ij}) - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \right] dV, \quad (1.39)$$

por lo tanto, con el argumento usual

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho u_i u_i \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\rho e + \frac{1}{2} \rho u_i u_i \right) u_k \right] - u_i \rho f_i - \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i \sigma_{ij}) + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = 0.$$

Si se desarrollan las derivadas, y se identifican algunos términos con las ecuaciones ya deducidas, de continuidad (1.11) y de momento (1.33) se llega a que

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial e}{\partial x_k} = \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}. \quad (1.40)$$

Aquí se puede observar que el término debido al trabajo por unidad de tiempo realizado por las fuerzas volumétricas se canceló al considerar la ecuación de balance de momento (1.33), lo que nos indica que la contribución de las fuerzas volumétricas a la energía térmica es nula. La ecuación (1.40) expresa el principio de conservación de la energía y se le llama simplemente *ecuación de la energía*. El lado izquierdo representa el cambio de la energía interna, el primer término es el cambio temporal mientras que el segundo se debe a los cambios convectivos locales, causados por el flujo. El lado derecho de la ecuación representa la causa de ese cambio en la energía interna. El primero de estos términos representa la conversión de energía mecánica en energía térmica debido a la acción de los esfuerzos superficiales, mientras que el segundo representa el calor suministrado por conducción al elemento de fluido [5].

1.6 Resumen

En este capítulo se han deducido las ecuaciones de continuidad (1.6), momento (1.33) y energía (1.40), con base en los principios de conservación de masa, momento y energía. A lo largo de este trabajo se estudiarán únicamente fluidos incompresibles, por lo que la ecuación de continuidad que se usará es (1.11). Para deducir la forma de la ecuación de momento fue necesario hacer un análisis de las fuerzas volumétricas y superficiales

que actúan sobre un elemento de fluido. También se definió y se discutieron algunas propiedades del tensor de esfuerzos, el cual será estudiado con más detalle en el siguiente capítulo.

Capítulo 2

Ecuaciones constitutivas y condiciones a la frontera

2.1 Ecuaciones constitutivas

A partir de los principios básicos de conservación se han deducido las ecuaciones de balance de masa, momento lineal y energía. Estas representan un conjunto de cinco ecuaciones diferenciales parciales no lineales acopladas. Dos ecuaciones de estado deben ser añadidas al conjunto, por ejemplo $e = e(\rho, T)$ y $p = p(\rho, T)$, con lo que se llega a un total de siete ecuaciones. El problema aquí es que el número de variables desconocidas asciende a 16, a saber cuatro escalares ρ, e, p, T , dos vectoriales u_i, q_i (6 escalares) y una tensorial σ_{ij} (6 escalares). Si se está tratando con flujidos complejos en general es necesario tomar en cuenta más variables hidrodinámicas y las ecuaciones que dan el comportamiento de estas nuevas variables. Este tipo de sistemas no se estudiarán en el presente trabajo. Para tener un conjunto completo de ecuaciones, el tensor de esfuerzos σ_{ij} y el vector de flujo de calor q_i deben de ser especificados por medio de las llamadas *ecuaciones constitutivas*. Estas relaciones constitutivas indican la manera en que el medio responde a los gradientes de temperatura y a los gradientes de velocidad y dependen de

las características particulares del medio que se está estudiando. Es evidente que las ecuaciones constitutivas serán diferentes dependiendo de las propiedades de cada fluido, a diferencia de las ecuaciones de conservación, que son generales.

Si se está tratando con fluidos complejos, en general, es necesario tomar en cuenta más variables hidrodinámicas y las ecuaciones que dan el comportamiento de estas nuevas variables. Este tipo de sistemas no se estudiarán en el presente trabajo.

2.1.1 El tensor de esfuerzos

Para deducir la relación constitutiva del tensor de esfuerzos es necesario recordar primero que en un fluido en equilibrio todos los esfuerzos son normales y compresivos (Principio de Pascal). Por lo tanto la componente σ_{ij} de un fluido en reposo es

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}, \quad (2.1)$$

donde p es la presión hidrostática [13].

Tensores de rapidez de deformación y de viscosidad

Cuando el fluido se encuentra en movimiento hay que tomar en cuenta los esfuerzos tangenciales ya que ahora existen velocidades relativas entre diferentes elementos de fluido, y por ende, "fricción". Para lograr esto es necesario hacer un par de suposiciones adicionales. La primera es que los términos que se le añadan al tensor de esfuerzos dependerán únicamente de los gradientes de las velocidades y que esta dependencia será a través del *tensor de rapidez de deformación*:

$$\check{\epsilon}_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (2.2)$$

Por lo tanto el tensor de esfuerzos toma la forma

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}(\tilde{e}_{ij}), \quad (2.3)$$

donde τ_{ij} representa los esfuerzos internos debidos a la fricción (esfuerzos viscosos) y se llama tensor de esfuerzos viscosos.

La segunda suposición es que la dependencia de τ_{ij} con el tensor de rapidez de deformación sea lineal, es decir,

$$\tau_{ij} = \mu_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}, \quad (2.4)$$

donde μ_{ijkl} es un tensor de cuarto rango y es el llamado *tensor de viscosidad*. En esta operación tensorial, existe una doble contracción. En general τ_{ij} puede depender tanto de potencias mayores de \tilde{e}_{ij} diferentes a la unidad, como puede depender también de la velocidad [5]. Se encontrarán pues las ecuaciones constitutivas más generales para una dependencia lineal.

Para ello se escribe al tensor de rapidez de deformación separándolo en su parte simétrica y su parte antisimétrica

$$\tilde{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.5)$$

La parte antisimétrica de este tensor describe las rotaciones de "cuerpo sólido" de un elemento de fluido. Debido a que durante una rotación de cuerpo sólido no existen esfuerzos, τ_{ij} sólo puede depender de la parte simétrica del tensor de rapidez de deformación [5]. Sea $e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$, entonces

$$\tau_{ij} = \mu_{ijkl} e_{kl}. \quad (2.6)$$

Simetrías del tensor de las viscosidades

En general μ_{ijkl} es un tensor de cuarto rango, que tiene 81 componentes independientes. Se puede demostrar que el número de componentes independientes se reduce gracias a las simetrías propias del tensor [9]. Primero, utilizando el hecho de que τ_{ij} y e_{kl} son simétricos, es decir $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ y $e_{kl} = e_{lk}$, es claro que la ecuación (2.6) queda inalterada al intercambiar los índices i por j y k por l , por lo que el tensor de las viscosidades debe cumplir

$$\mu_{ijkl} = \mu_{jikl} = \mu_{jilk}. \quad (2.7)$$

Por otro lado, de la primera ley de la termodinámica se tiene que [9]

$$dE = TdS + \sigma_{ij}de_{ij}, \quad (2.8)$$

introduciendo la energía libre de Helmholtz ($F = E - TS$) se escribe la relación (2.8) en la forma

$$dF = -SdT + \tau_{ij}de_{ij}, \quad (2.9)$$

obteniéndose

$$\left(\frac{\partial F}{\partial e_{ij}} \right) = \tau_{ij}. \quad (2.10)$$

Esto conduce a que la energía libre de Helmholtz se puede escribir como

$$F = \frac{1}{2} \mu_{ijkl} e_{ij} e_{kl}. \quad (2.11)$$

Aquí se ve que el tensor de las viscosidades tampoco varía al intercambiar el par ij con el par kl , gracias a que e_{ij} es simétrico. Por lo tanto

$$\mu_{ijkl} = \mu_{lkji}. \quad (2.12)$$

Con un simple cálculo se muestra que el número de componentes independientes de

un tensor de cuarto rango con estas propiedades de simetría es, en general, de 21 [9]. Esto es cierto para un fluido completamente anisótropo. El valor numérico de dichas componentes depende del sistema de coordenadas y del fluido en cuestión. Si el fluido posee alguna simetría extra, el número de componentes independientes es menor a 21.

Inhomogeneidad, efectos no locales y de memoria

Para generalizar el tensor de esfuerzos para un fluido no homogéneo, simplemente hay que considerar que las propiedades del fluido son funciones de la posición y del tiempo. Por lo tanto la forma de μ_{ijkl} dependerá de la \vec{x} y de t . En general el tensor de esfuerzos viscosos para un fluido anisótropo y no homogéneo es

$$\tau_{ij}(\vec{x}, t) = \mu_{ijkl}(\vec{x}, t) e_{kl}^o(\vec{x}, t). \quad (2.13)$$

Ésta es una cantidad local, $\tau_{ij}(\vec{x}, t)$ sólo depende de lo que sucede en el punto \vec{x} al tiempo t , pero en un fluido real el estado de esfuerzos en un punto \vec{x} puede depender de lo que suceda en un dominio alrededor de \vec{x} , es decir, pueden existir *efectos no locales*. También pueden entrar en juego *efectos de memoria*, por lo que el estado de esfuerzos en tiempos previos debe ser tomado en cuenta. El fluido puede tener mecanismos para “recordar” sus anteriores estados, de modo que ésto afecte su comportamiento en el presente. En otras palabras, $\tau_{ij}(\vec{x}, t)$ depende en general de lo que sucede en un dominio más o menos grande del espacio (\vec{x}, t) [4]. La extensión de este dominio y el tipo de dependencia dependerá del fluido que se esté estudiando. El tensor de esfuerzos viscosos escrito como una cantidad no local es

$$\tau_{ij}(\vec{x}, t) = \int_V \mu_{ijkl}(\vec{x} - \vec{x}', t) e_{kl}(\vec{x}', t) d\vec{x}'. \quad (2.14)$$

Así mismo, para incluir efectos de memoria, se hace una manipulación similar con el tiempo, de modo que

$$\tau_{ij}(\bar{x}, t) = \int_{-\infty}^t \int_V \mu_{ijkl}(\bar{x} - \bar{x}', t - t') e_{kl}(\bar{x}', t') d\bar{x}' dt', \quad (2.15)$$

por lo que el tensor de esfuerzos más general para un fluido anisótropo, no homogéneo, con efectos no locales y de memoria es

$$\sigma_{ij}(\bar{x}, t) = -p(\bar{x}, t) \delta_{ij} + \int_{-\infty}^t \int_V \mu_{ijkl}(\bar{x} - \bar{x}', t - t') e_{kl}(\bar{x}', t') d\bar{x}' dt', \quad (2.16)$$

siempre y cuando la dependencia con el tensor de rapidez de deformación sea lineal.

2.1.2 El flujo de calor

Para el caso térmico también se supone que la relación entre los gradientes de temperatura y el flujo de calor es lineal, entonces

$$q_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i}. \quad (2.17)$$

El termino constante se ha hecho igual a cero para que cuando el gradiente de temperatura sea nulo no exista flujo de calor. La ecuación (2.17) es conocida como la ley de Fourier para la conducción del calor [5]. El signo negativo indica que el flujo de calor va en sentido contrario al gradiente de temperatura. El factor de proporcionalidad k es la conductividad térmica del fluido. Esta ley supone que la conductividad térmica es la misma en cualquier punto \bar{x} , a cualquier tiempo t y en cualquier dirección, es decir, es válida para un medio isótropo y homogéneo. Para generalizarla la constante k debe sustituirse por un tensor de segundo rango, k_{ij} , el tensor de conductividad térmica, que depende de la dirección del gradiente de temperatura, de la posición y del tiempo. Bajo estas consideraciones, la

ley generalizada de Fourier para un fluido anisótropo y no homogéneo es:

$$q_i(\vec{x}, t) = -k_{ij}(\vec{x}, t) \frac{\partial T(\vec{x}, t)}{\partial x_j}. \quad (2.18)$$

Para reducir esta ecuación a la ecuación (2.17) se escribe $k_{ij} = k\delta_{ij}$. En este caso no se incluirán efectos no locales y de memoria. A lo largo de este trabajo se estudiarán fluidos isotérmicos, por lo que esta relación no se estudiará más a fondo. Al usar la ecuación (2.18) se ha supuesto que el concepto de temperatura, válido en termodinámica, se aplica también para un fluido en movimiento con base en la hipótesis de equilibrio local.

2.2 Casos particulares

A partir de las ecuaciones constitutivas que se han propuesto (ec. 2.16 y ec. 2.18), se pueden encontrar muchos modelos particulares bien conocidos. A continuación se muestran algunos modelos que se obtienen simplificando estas ecuaciones.

2.2.1 Fluido Newtoniano (isótropo)

Para la ecuación constitutiva correspondiente a un fluido newtoniano se requiere, además de la relación lineal entre τ_{ij} y e_{kl} , que no existan direcciones preferenciales, es decir que se cumpla la condición de *isotropía*. Esta condición garantiza que los resultados obtenidos sean independientes de la orientación del sistema de coordenadas elegido. El tensor de cuarto rango más general que cumple la condición de isotropía tiene la forma

$$a\delta_{ij}\delta_{kl} + b(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + c(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}), \quad (2.19)$$

donde a, b y c son escalares que en general dependen de la posición y del tiempo. Recordando las propiedades de simetría que posee el tensor de las viscosidades se tiene que

$c = 0$. Entonces, para un medio isótropo

$$\mu_{ijkl}(\bar{x}, t) = a(\bar{x}, t) \delta_{ij} \delta_{kl} + b(\bar{x}, t) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (2.20)$$

Es decir, en un medio isótropo el número de componentes independientes se reduce de 21 a dos [5].

Como en un fluido newtoniano no se consideran efectos no locales ni de memoria, el tensor de esfuerzos puede entonces escribirse así:

$$\tau_{ij} = \frac{1}{2} [a \delta_{ij} \delta_{kl} + b (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})] \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right). \quad (2.21)$$

Por lo tanto, el tensor de esfuerzos es

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + a \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + b \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.22)$$

Es conveniente escribir esta ecuación en términos de coeficientes con un significado físico más claro, para esto a y b se sustituyen por η y ζ bajo la relaciones

$$\begin{aligned} a + \frac{2}{3}b &= \zeta, \\ b &= \eta, \end{aligned} \quad (2.23)$$

tomando la forma final

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \zeta \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right). \quad (2.24)$$

De modo que el tensor que va multiplicando a η es un tensor sin traza. Como la presión mecánica está incluida en la traza del tensor de esfuerzos, este término no contribuye a la presión mecánica. El segundo término únicamente contribuye a la traza del tensor, es decir, a la presión mecánica. Se ha separado al tensor en un término que sólo contribuye

a la traza y otro que no tiene traza. Los nuevos coeficientes coinciden con cantidades físicas más fácilmente reconocibles: η es el coeficiente de viscosidad cortante y ζ es el coeficiente de viscosidad volumétrica. Estos coeficientes no pueden ser determinados analíticamente, por lo que se determinan empíricamente o de teorías microscópicas. La ecuación (2.24) representa la relación constitutiva más general para un fluido isótropo, sin efectos no locales o de memoria.

Habiendo obtenido la expresión para el tensor de esfuerzos, el término $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ que aparece en la ecuación de conservación de momento (1.33) puede ser evaluado y al sustituirlo en esta ecuación se obtiene

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} u_i \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\zeta \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right] + \rho f_i. \quad (2.25)$$

Las ecuaciones (2.25) son conocidas como las *ecuaciones de Navier-Stokes*. Las magnitudes η y ζ son funciones de la presión y de la temperatura. En general, p y T , y por consiguiente, η y ζ , son funciones de \bar{x} y t , de modo que η y ζ no pueden extraerse del operador gradiente. En el caso de un fluido incompresible ($\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$), la ecuación constitutiva correspondiente es

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.26)$$

y las ecuaciones de movimiento se reducen a

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} u_i \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \eta}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \eta \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \right] + \rho f_i, \quad (2.27)$$

entonces

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} u_i \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \eta}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \eta}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho f_i, \quad (2.28)$$

ó bien

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} \right) = -\nabla p + \nabla \eta \cdot \nabla \bar{u} + \nabla \bar{u} \cdot \nabla \eta + \eta \nabla^2 \bar{u} + \rho \bar{f}. \quad (2.29)$$

Se ve que, para el caso incompresible, el coeficiente de viscosidad volumétrica ζ ya no aparece. La viscosidad en un fluido incompresible queda determinada sólo por un coeficiente, el de la viscosidad cortante. A lo largo del trabajo únicamente se manejará el caso incompresible, por lo que al coeficiente η se le llamará simplemente *viscosidad*.

Si la viscosidad es una constante (independiente de \bar{x} y t), es decir, si el fluido es homogéneo en la viscosidad, así como en la densidad, la ecuación (2.28) se reduce a

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} u_i \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho f_i. \quad (2.30)$$

Esta es la forma más conocida de las ecuaciones de Navier-Stokes. En el caso especial de que los efectos viscosos sean despreciables ($\eta = 0$) las ecuaciones (2.30) se reducen a las *ecuaciones de Euler* para fluido ideales.

2.2.2 Fluido transversalmente isótropo de dos constantes

Los materiales transversalmente isótropos son aquellos que están caracterizados por tener un eje de simetría. Hay una dirección especial en el fluido, diferente a las otras dos direcciones independientes. Esta propiedad es independiente de las fronteras del sistema. Para encontrar la ecuación constitutiva para estos materiales se requiere encontrar el tensor de cuarto rango que cumpla con las condiciones de simetría mencionadas.

Como ya se ha visto, el tensor de cuarto rango de la viscosidad debe cumplir las condiciones de simetría (2.7) y (2.12). Al igual que en el caso isótropo, un tensor transversalmente isótropo de cuarto orden puede ser contruido utilizando deltas de Kronecker y productos del vector unitario en la dirección especial \hat{n} , que en este caso será la del eje z ($\hat{n} = \hat{e}_3$). En base a esto pueden formarse sólo 5 tensores transversalmente isótropos que

satisfacen las condiciones (2.7) y (2.12), estos son [11]

$$\begin{aligned}
 T_{ijkl}^1 &= \delta_{ij}\delta_{kl} \\
 T_{ijkl}^2 &= \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} \\
 T_{ijkl}^3 &= \delta_{ij}\delta_{k3}\delta_{l3} + \delta_{i3}\delta_{j3}\delta_{kl} \\
 T_{ijkl}^4 &= \delta_{i3}\delta_{l3}\delta_{jk} + \delta_{i3}\delta_{k3}\delta_{jl} + \delta_{j3}\delta_{l3}\delta_{ik} + \delta_{j3}\delta_{k3}\delta_{il} \\
 T_{ijkl}^5 &= \delta_{i3}\delta_{j3}\delta_{k3}\delta_{l3}.
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

El tensor transversalmente isótropo más general es una combinación lineal de estos 5 tensores, es decir

$$T_{ijkl} = \sum_{\alpha=1}^5 c_{\alpha} T_{ijkl}^{\alpha}, \tag{2.32}$$

donde c_{α} son 5 coeficientes constantes arbitrarios. La ecuación representa la forma más general para el tensor de viscosidad de un fluido transversalmente isótropo. El tensor de esfuerzos viscosos asociado es

$$\begin{aligned}
 \tau_{ij} &= T_{ijkl} e_{kl}^{\circ} = \sum_{\alpha=1}^5 c_{\alpha} T_{ijkl}^{\alpha} e_{kl} = \\
 &= 2c_1 \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + 2c_2 e_{ij} + 2c_3 \left[\delta_{ij} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + n_i n_j \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right] + \\
 &\quad + 4c_4 \text{sim} \left[n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_3} + n_j \frac{\partial u_3}{\partial x_j} \right] + 2c_5 n_i n_j \frac{\partial u_3}{\partial x_3},
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

donde *sim* da la parte simétrica del tensor al cual se aplica. Las constantes c_1 y c_2 coinciden con las de un fluido isótropo, c_1 es el coeficiente de viscosidad volumétrica y c_2 es el coeficiente de viscosidad cortante. Las otras tres constantes están relacionadas con la anisotropía del fluido [11].

Fluido estratificado

Un fluido estratificado es un buen ejemplo de un material transversalmente isótropo de dos constantes. Dado que están constituidos por capas, los fluidos estratificados se caracterizan por tener respuestas diferentes dependiendo de la dirección del esfuerzo que actúa sobre ellos. Dichas respuestas están caracterizadas por viscosidades diferentes y, como tienen la propiedad de tener un eje de simetría, las componentes de tensor del esfuerzos deben de ser invariantes ante rotaciones alrededor de dicho eje.

Se definirá un fluido transversalmente isótropo de dos constantes como una generalización de un fluido estratificado, esto es, un fluido con el tensor de viscosidad correspondiente a un fluido transversalmente isótropo pero homogéneo, olvidando que las capas existen [11].

Para escribir la ecuación constitutiva de este fluido, en el caso incompresible, se considera un caso particular de la expresión (2.32). Esta es

$$T_{ijkl} = c_2 \left(T_{ijkl}^2 - \frac{2}{3} T_{ijkl}^1 \right) + c_4 \left(T_{ijkl}^4 - 4T_{ijkl}^5 \right) \quad (2.34)$$

$$= c_2 \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) + \\ + c_4 \left(\delta_{i3} \delta_{l3} \delta_{jk} + \delta_{i3} \delta_{k3} \delta_{jl} + \delta_{j3} \delta_{l3} \delta_{ik} + \delta_{j3} \delta_{k3} \delta_{il} - 4\delta_{i3} \delta_{j3} \delta_{k3} \delta_{l3} \right) \quad (2.35)$$

$$\equiv c_2 U_{ijkl} + c_4 H_{ijkl}, \quad (2.36)$$

donde U_{ijkl} es un tensor unitario isótropo (ver 2.24) y H_{ijkl} es un tensor unitario transversalmente isótropo [11]. Para esfuerzos en la dirección perpendicular al eje de simetría el fluido se comporta como isótropo, de modo que puede decirse que c_2 es la viscosidad en esa dirección y se le llamará $\frac{\mu}{2}$. Por otro lado, c_4 será la diferencia entre esta viscosidad y la que va en la dirección del eje de simetría, es decir, la perpendicular. Así, si estas viscosidades son iguales, el segundo término de la expresión (2.36) se anula y se recupera la expresión para un fluido isótropo. A la constante c_4 se le redefine como $\frac{\Delta\mu}{2}$.

Por lo tanto el tensor de esfuerzos viscosos es

$$\tau_{ij} = \frac{1}{2} (\mu U_{ijkl} + \Delta\mu H_{ijkl}) \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad (2.37)$$

$$= \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \Delta\mu \left(\delta_{i3} \frac{\partial u_j}{\partial x_3} + \delta_{i3} \frac{\partial u_3}{\partial x_j} + \delta_{j3} \frac{\partial u_i}{\partial x_3} + \delta_{j3} \frac{\partial u_3}{\partial x_i} - 4\delta_{i3}\delta_{j3} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right); \quad (2.38)$$

como se trata de un fluido incompresible el tensor de esfuerzos viscosos se reduce y la ecuación constitutiva correspondiente a un fluido estratificado es

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \Delta\mu \left(\delta_{i3} \frac{\partial u_j}{\partial x_3} + \delta_{i3} \frac{\partial u_3}{\partial x_j} + \delta_{j3} \frac{\partial u_i}{\partial x_3} + \delta_{j3} \frac{\partial u_3}{\partial x_i} - 4\delta_{i3}\delta_{j3} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right). \quad (2.39)$$

Como ya se mencionó esta ecuación constitutiva se reduce a la de un fluido isótropo cuando $\Delta\mu = 0$.

El término $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ que aparece en la ecuación de conservación de momento (1.33) se modifica y la ecuación de conservación para un fluido transversalmente isótropo de dos constantes o fluido estratificado homogéneo es

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} u_i \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \Delta\mu \left(\delta_{i3} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_i \partial x_3} - 4\delta_{i3} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial x_3} \right). \quad (2.40)$$

Dado que la dirección del eje de simetría coincide con el eje z , estas ecuaciones pueden ser escritas como

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \Delta\mu \left(\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial z^2} + \nabla \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right) + \Delta\mu \hat{e}_z \left(\nabla^2 u_z - 4 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right). \quad (2.41)$$

Estas ecuaciones han sido resueltas para varios casos particulares de rotación y traslación [11]. En este trabajo no se profundizará más en el análisis de este tipo de fluidos.

2.2.3 Fluido viscoelástico

Los modelos aquí estudiados resultan inapropiados para la descripción de cierto tipo de fluidos en los cuales la respuesta elástica juega un papel importante. La teoría lineal de fluidos viscoelásticos da una descripción reológica para movimientos dependientes del tiempo de fluidos macromoleculares. El fluido viscoelástico es aquel que combina las propiedades de un fluido viscoso newtoniano y la propiedades de un sólido de Hooke, es decir, es la combinación de un amortiguador con un resorte (2-1). Como se utilizan los modelos lineales de fluido newtoniano y sólido de Hooke, esta teoría es aplicable sólo para fluidos que nunca se mueven muy lejos o muy rápido a partir de su configuración inicial [4].

En el caso del resorte se tiene que la fuerza es proporcional desplazamiento. Desde este punto de vista, el comportamiento de un resorte exhibe efectos de memoria. Si el resorte es estirado y después se suelta, éste regresa a su posición original, como si "recordara" su posición inicial. Los efectos elásticos de un fluido son más dramáticos, ya que si la presión que produce el flujo en tubos se quita, el fluido se retrae en la dirección de la que venía, pero sin regresar a la posición original como un resorte, es decir, el fluido parece "olvidar" gradualmente de donde viene. Al combinar los efectos viscosos con los elásticos se pretende llegar a una ecuación constitutiva que describa este comportamiento [4].

El modelo más sencillo de un resorte con un amortiguador, colocados en serie es el siguiente (fig. 2-1).

A la combinación de estos dos elementos en serie se le llama elemento de Maxwell. La ecuación constitutiva correspondiente para un fluido newtoniano incompresible y de viscosidad homogénea es

$$\tau^N = \eta \dot{\gamma}^N, \quad (2.42)$$

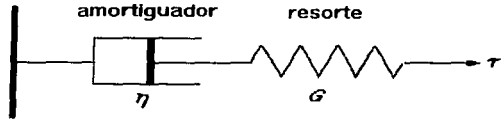


Figura 2-1: Elemento de Maxwell.

y la de un sólido de Hooke

$$\tau^H = G\gamma^H, \quad (2.43)$$

donde γ es el desplazamiento relativo de los elementos, $\dot{\gamma} = \frac{\partial \gamma}{\partial t}$ es la rapidez del desplazamiento. En el lenguaje que se ha estado manejando $\dot{\gamma} = \frac{\partial u}{\partial x}$. τ es la tensión, G es la constante del resorte y η es la viscosidad debida al amortiguador.

Dado que los sistemas se encuentran colocados en serie $\tau^N = \tau^H = \tau$ y $\gamma^N + \gamma^H = \gamma$. Es decir que en todo momento el esfuerzo que siente una parte es el mismo que siente la otra e igual al esfuerzo total en el sistema, y la suma de los desplazamientos es el desplazamiento total. Por lo tanto

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\tau}{\eta} + \frac{1}{G} \frac{\partial \tau}{\partial t}. \quad (2.44)$$

y ya que

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = G \frac{\partial \gamma^H}{\partial t} = G\dot{\gamma}^H, \quad (2.45)$$

se sigue que

$$\eta \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \tau + \lambda \frac{\partial \tau}{\partial t}, \quad (2.46)$$

donde $\lambda = \frac{\eta}{G}$, que tiene unidades de tiempo, es llamado tiempo de relajación. Esta expresión representa el acoplamiento de ambos sistemas, ya que si $\frac{\partial \tau}{\partial t}$ es pequeño, com-

parado con τ , se recupera la expresión para un fluido newtoniano, y si τ es pequeño comparado con $\frac{\partial \tau}{\partial t}$ se recupera la expresión para el sólido elástico de Hooke. Para una generalización se relaciona a la tensión τ con el tensor de esfuerzos τ_{ij} y a la derivada de los desplazamientos $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$ con el tensor de rapidez de deformación e_{ij} . Así la ecuación diferencial toma la forma

$$\eta e_{ij} = \tau_{ij} + \lambda \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t}, \quad (2.47)$$

cuya solución para τ_{ij} es

$$\tau_{ij}(t) = A_{ij} e^{-\frac{t}{\lambda}} + \int_{-\infty}^t \left\{ \frac{\eta}{\lambda} e^{-\frac{(t-t')}{\lambda}} \right\} e_{ij}(t') dt'. \quad (2.48)$$

Si se impone la condición de que $\tau_{ij}(-\infty) = 0$, entonces $A_{ij} = 0$. Todos los valores del tensor de rapidez de deformación en el intervalo $(-\infty, t)$ influyen sobre el valor del tensor de esfuerzos τ_{ij} a través de la función de peso $\left\{ \frac{\eta}{\lambda} e^{-\frac{(t-t')}{\lambda}} \right\}$, llamada *módulo de relajación*, que decae exponencialmente conforme t' tiende a $-\infty$. Este es un modelo integral para el tensor de esfuerzos viscosos con memoria y muestra que el valor presente de $\tau_{ij}(t)$ depende de lo que haya sucedido en tiempos pasados ($t' < 0$). Mientras t' esté más cerca de cero la dependencia será más fuerte. El fluido recuerda lo que sucedió en tiempos recientes y casi no recuerda lo que sucedió en tiempos distantes.

La ecuación constitutiva más sencilla para un fluido viscoelástico es entonces

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \int_{-\infty}^t \left\{ \frac{\eta}{\lambda} e^{-\frac{(t-t')}{\lambda}} \right\} \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t'} dt'. \quad (2.49)$$

Es importante recordar que todo esto es válido únicamente para fluidos que cumplan la condición de isotropía y en los que la ley de Hooke es válida, esto es, que el comportamiento elástico corresponda al de un resorte lineal.

2.3 Condiciones de frontera

Dadas las ecuaciones constitutivas se tiene un sistema de ecuaciones completo. Como ya se ha dicho a lo largo del desarrollo de este trabajo, se manejarán únicamente fluidos incompresibles. Esto desacopla las ecuaciones de conservación de masa y de momento de la ecuación para la energía. Si además suponemos flujos isotérmicos, es posible olvidar la ecuación de la energía y resolver sólo las ecuaciones de momento y de continuidad para los campos de velocidad y presión.

Las ecuaciones de movimiento son, matemáticamente hablando, un conjunto de tres ecuaciones diferenciales parciales de tipo parabólico, no lineales y de segundo orden. Para resolverlas junto con la ecuación de continuidad es necesario un conjunto de condiciones iniciales y de frontera determinadas por la geometría y propiedades del fluido. Se estudiarán únicamente flujos estacionarios, por lo que a lo largo del trabajo no serán necesarias las condiciones iniciales. Dadas las características de las ecuaciones de movimiento, las condiciones de frontera apropiadas son entonces las condiciones de Dirichlet, Neumann o una combinación de ellas en una frontera cerrada. Físicamente esto se reduce a especificar la velocidad y la presión sobre todas las fronteras cerradas del sistema.

Dentro del marco de la hipótesis del continuo, la condición de frontera determinada experimentalmente es que no existe deslizamiento en la intercara entre fluido y frontera sólida; el fluido se adhiere al sólido, heredando su velocidad. A ésta se le llama condición de frontera de adherencia. Entonces, si \vec{U}_o representa la velocidad de la frontera sólida, la condición de frontera que debe imponerse al campo de velocidades es

$$\vec{u} = \vec{U}_o \tag{2.50}$$

en la superficie [5].

En el caso de un fluido infinitamente extendido en alguna dirección, es necesario dar la velocidad y la presión en el infinito.

Cuando se tienen fronteras fluidas, por la condición de frontera de adherencia, la velocidad de ambos fluidos es la misma en la frontera. En este caso la fuerza a través de la intercara entre ambos fluidos es discontinua. La discontinuidad se debe a la existencia de la tensión superficial α . La condición de frontera es en general [14]

$$\hat{n} \cdot \sigma^{(1)} + \hat{n} \cdot \sigma^{(2)} = \hat{n} \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \nabla \alpha, \quad (2.51)$$

donde R_1 y R_2 son los radios principales de curvatura de la superficie. Si la tensión superficial es la misma a lo largo de la superficie ($\alpha = cte$), el segundo término del lado derecho es cero.

2.4 Número de Reynolds

Al estudiar fluidos es posible obtener resultados importantes a partir de razonamientos sencillos referidos a las dimensiones de diversas magnitudes físicas. Consideremos un tipo particular de movimiento, por ejemplo, el movimiento de un cuerpo de forma definida en un fluido viscoso e incompresible. En el caso estacionario, la velocidad de la corriente principal debe ser constante, esto determina una velocidad característica del flujo u . De los parámetros propios del fluido, en las ecuaciones de momento y de continuidad que determinan el comportamiento del flujo, aparecen la viscosidad η y la densidad ρ . Además el flujo depende, a través de las condiciones de frontera, de la forma y las dimensiones del cuerpo. Puesto que se supone que la forma del cuerpo es conocida, sus propiedades geométricas quedan determinadas por una dimensión lineal l . Entonces un flujo con estas características está especificado por los parámetros, η , ρ , u y l . Con estos tres parámetros sólo puede formarse una cantidad adimensional, que es $\frac{\rho ul}{\eta}$ [8]. Esta se denomina número de Reynolds y se designa por R_e , esto es

$$R_e = \frac{\rho ul}{\eta}. \quad (2.52)$$

Cualquier otro parámetro adimensional puede escribirse es función de R_e [8]. El número de Reynolds hace una comparación entre las fuerzas viscosas y las cinéticas. Así, $R_e < 1$ implica que las fuerzas viscosas dominan sobre las cinéticas y $R_e > 1$, lo contrario.

2.5 Resumen

En este capítulo se han deducido las ecuaciones constitutivas generales para un fluido cuya respuesta es lineal. Éstas toman en cuenta inhomogeneidad, anisotropía, efectos de memoria y no locales. Partiendo de estas ecuaciones se han encontrado las expresiones para el tensor de esfuerzos correspondientes a tres casos particulares. El primero es el de un fluido newtoniano. Usando la ecuación constitutiva obtenida se han escrito las ecuaciones de movimiento, llamadas ecuaciones de Navier-Stokes, para el caso general de un fluido incompresible y no homogéneo en la viscosidad. El segundo caso es el de un fluido transversalmente isótropo de dos constantes (fluido estratificado). El tercero corresponde a un fluido viscoelástico. Por otra parte se han analizado las condiciones de frontera que serán usadas, en particular la condición de adherencia. En la última sección se ha definido el número de Reynolds para su uso en los siguientes capítulos.

Capítulo 3

La inhomogeneidad en la viscosidad

En este capítulo se hará un estudio de las inhomogeneidades producidas por la presencia de fronteras sólidas o intercara en un sistema. Se expondrán las justificaciones para la existencia de este tipo de inhomogeneidades y su comportamiento. Se discutirá también por qué los efectos producidos por éstas se le pueden atribuir a una viscosidad no homogénea. Se estudian dos ejemplos donde este modelo puede aplicarse. Finalmente, se discute la forma que puede adoptar la función que representa la dependencia de la viscosidad con la posición.

3.1 Argumentación física

Supóngase que un fluido llena todo el espacio, con una distribución molecular homogénea de manera que se tenga una densidad uniforme. Ahora se introduce una placa infinita de material sólido. Lejos de la placa, el fluido debe encontrarse exactamente en el mismo estado en el que se encontraba antes de que la placa fuera introducida, es decir, homogéneo. Cerca de la placa las cosas deben haber cambiado, pues necesariamente las moléculas muy cercanas a la placa deben percibir la presencia de la placa. Las propiedades del fluido en la zona donde este *efecto de orilla* o *efecto de frontera* se presenta ya no pueden ser las

mismas que antes, ahí la homogeneidad se habrá perdido.

El hecho de que este cambio en la estructura molecular del fluido sólo haya sido producido por la presencia de la placa, implica que la magnitud del cambio sólo puede depender de la distancia a la que se encuentre el fluido de la placa. Así, las propiedades del sistema serán las mismas en planos paralelos a la placa. Si la placa no es plana, el fluido será homogéneo en las superficies paralelas a la placa cualquiera que sea su forma y existirán cambios en las propiedades del fluido sólo al desplazarse perpendicularmente a estas superficies.

Obviamente la forma, magnitud y alcance de la inhomogeneidad dependerá también del fluido en cuestión, de las características físicas de la placa y de las características de flujo que imperen en el sistema.

Es bien sabido que los coeficientes de transporte dependen directamente de la estructura molecular del fluido. El introducir una frontera o pared sólida al sistema que modifique esta estructura molecular provocará que los coeficientes de transporte se vean alterados precisamente en la zona en donde el fenómeno se da. De modo que la inhomogeneidad del fluido se hará presente a través de los coeficientes de transporte.

A lo largo de este trabajo se supondrá que el único coeficiente de transporte afectado es la viscosidad. Además, sólo se trabajará con fluidos incompresibles e isotérmicos por lo que los otros coeficientes de transporte no jugarán ningún papel importante. Entonces, el efecto de haber introducido la placa en el fluido se reflejará en una viscosidad no homogénea que dependerá únicamente de la distancia a la placa.

Con base en las afirmaciones hechas, este tipo de inhomogeneidad se debe presentar siempre que exista un fluido cercano a una frontera sólida o intercara. Es evidente que para muchos de los casos el efecto existe sólo a distancias muy pequeñas de la placa (del orden de algunas veces el camino libre medio), es decir, en general es un efecto tan pequeño que si se desprecia no se pierde mucha información y los resultados concuerdan muy bien con los experimentos. Pero para cierto tipo de fluidos la inhomogeneidad

puede ser muy importante y su efecto puede llegar a ser macroscópicamente notorio. Además puede ser un método alternativo y sencillo de atacar problemas de fluidos con características estructurales más complejas, siempre y cuando las fronteras del sistema jueguen un papel determinante, sin necesidad de construir modelos complicados para el tensor de esfuerzos, que es lo que normalmente se hace [3].

3.2 Posibles aplicaciones

Antes de intentar resolver problemas y con el objeto de estudiar la forma que puede tomar la función de la viscosidad, se mostrarán un par de sistemas en los cuales la hipótesis de una viscosidad no homogénea dependiente de la distancia a las paredes puede ser aplicable. En dado caso se estudiará la forma que esta viscosidad puede tomar.

3.2.1 Fluido polimérico

Los polímeros son cadenas moleculares constituidas por compuestos básicos llamados monómeros. Es decir, son moléculas que normalmente tienen una forma alargada. Esta estructura de las moléculas hace que un fluido constituido por polímeros tenga un comportamiento poco habitual comparado con el resto de los fluidos más comunes.

Se ha visto que las moléculas de un fluido al estar en contacto con una frontera se acomodan en forma ordenada (como un cristal). Si se piensa en un fluido polimérico que se encuentra cerca de una frontera sólida y en un estado de movimiento tangencial a dicha frontera, es posible imaginar que las moléculas más cercanas tenderán a orientarse paralelamente a la frontera. Así, el flujo mismo, ayudado por la frontera, puede orientar a las moléculas. Conforme uno se aleje de la frontera esa orientación se irá perdiendo, hasta que después de cierta distancia las moléculas estarán totalmente desordenadas (ver fig. 3-1).

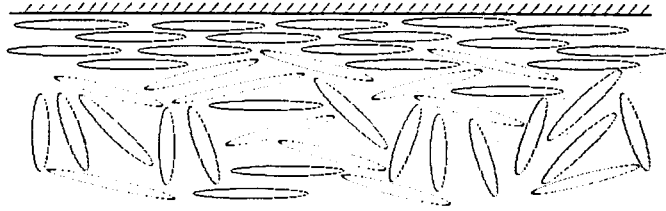


Figura 3-1: Moléculas de polímeros cerca de una pared.

Esta orientación preferencial provocará que las condiciones de flujo no sean las mismas que en el fluido que se encuentra más alejado de la frontera. Claramente la presencia de la frontera ha introducido una inhomogeneidad que depende de la distancia a la que el fluido se encuentre de la frontera.

Si las moléculas tienen una orientación preferencial, en lo primero que se piensa es que la magnitud de algunas componentes de los esfuerzos serán menores que cuando están totalmente desordenadas. Habrá un menor intercambio de momento entre las moléculas y al fluido le será más fácil fluir si estas moléculas alargadas están orientadas. Este efecto puede ser interpretado consistentemente como una viscosidad variable. En la pared la viscosidad tendrá un valor mínimo que irá aumentando conforme uno se aleja y las moléculas pierden la orientación, hasta que se llega a la zona en donde las moléculas están desordenadas y la viscosidad toma su valor máximo. A partir de ese punto las condiciones del fluido ya no cambian y ese valor máximo de la viscosidad se mantendrá en el resto del medio que puede considerarse homogéneo.

En las figuras (3-2) y (3-3), se muestran algunos perfiles típicos de polímeros en tubos de sección transversal circular.

Al resolver las ecuaciones correspondientes a un fluido newtoniano, incompresible y

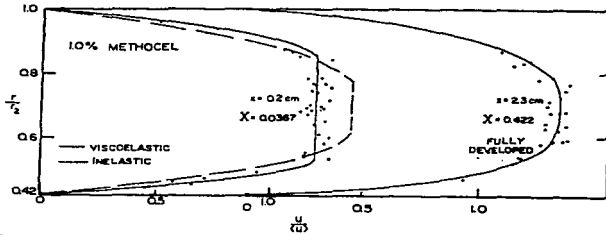


Figura 3-2: Perfiles de velocidad de un fluido polimérico [7].

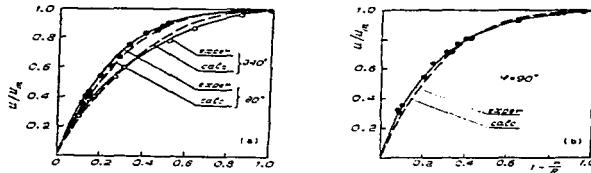


Figura 3-3: Perfiles de velocidad de un fluido polimérico [19].

homogéneo en un tubo de sección transversal circular se obtiene un perfil parabólico. Se ve cómo en ninguno de los casos que se muestran (??) el perfil corresponde a una parábola. Los perfiles son más bien chatos y los gradientes de velocidades son mucho más grandes cerca de la pared comparados con un perfil parabólico. Esto puede entenderse si se piensa que la viscosidad cerca de la pared es menor que en el resto del medio. De modo que existe una alta probabilidad de encontrar perfiles de velocidad parecidos a éstos si se resuelven las mismas ecuaciones pero utilizando una viscosidad que disminuya al aproximarse a las paredes. Es decir, un fluido polimérico es un buen candidato para ser descrito como un fluido no homogéneo.

3.2.2 Flujo turbulento

Con el objeto de determinar si el campo medio de velocidad de un flujo turbulento puede ser descrito como un fluido con viscosidad no homogénea, se hará un análisis de las ecuaciones de movimiento correspondientes a un fluido newtoniano e incompresible. Consideremos en principio que la viscosidad es una constante, por lo tanto las ecuaciones de movimiento, deducidas en el capítulo anterior (ec. 2.30), son

$$\rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial}{\partial x_j} U_i \right) = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho f_i. \quad (3.1)$$

en este caso se usa una notación distinta, donde \bar{U} es la velocidad y P es la presión. Estas ecuaciones se aplican tanto para flujos no turbulentos como para flujos turbulentos. Para mostrar los movimientos turbulentos y su interferencia con flujos medios más explícitamente se seguirá el procedimiento de Reynolds [6]. Se escribe a las variables de campo como la suma del promedio mas las fluctuaciones alrededor de ese promedio. Es decir,

$$U_i = \bar{U}_i + u_i \quad P = \bar{P} + p \quad (3.2)$$

donde las cantidades promedio se definen como $\bar{A} = \frac{1}{T} \int_0^T A(t + \tau) d\tau$, con T muy grande comparado con la escala de tiempo de los movimientos turbulentos.

Sustituyendo las expresiones (3.2) en la ecuación (3.1), promediando con respecto al tiempo, haciendo uso de la ecuación de continuidad (1.11) y recordando que el promedio de las fluctuaciones es cero se obtiene que

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{U}_i + \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \right) = - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho \bar{f}_i, \quad (3.3)$$

donde la densidad por ser constante es igual a su promedio. El efecto de la turbulencia está determinado por la correlación $\overline{u_i u_j}$ en el término no lineal. La ecuación (3.3) puede escribirse en otra forma en la cual se ve más claramente el significado físico del término

turbulento.

Gracias a la incompresibilidad se tiene que

$$0 = \overline{U_i \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j}} = \bar{U}_i \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} + \overline{u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j}} = \overline{u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j}}. \quad (3.4)$$

Entonces si se suma el término $-\overline{u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j}} = 0$, la ecuación toma la forma

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\eta \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u_i u_j} \right) + \rho \bar{f}_i - \rho \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}. \quad (3.5)$$

A partir de esta expresión se llega a la conclusión de que los términos turbulentos pueden ser interpretados como esfuerzos sobre un elemento de fluido, además de los esfuerzos viscosos y los debidos a la presión. Si se incluyen estos esfuerzos turbulentos, llamados esfuerzos de Reynolds, en el tensor de esfuerzos

$$\sigma'_{ij} = -\bar{P} \delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{u_i u_j}. \quad (3.6)$$

Los esfuerzos de Reynolds tienen, al igual que los viscosos, componentes tangenciales y normales. Las componentes normales se obtienen poniendo $i = j$, y las tangenciales $i \neq j$. Si se comparan los esfuerzos turbulentos con los viscosos se ve que, al menos, ambos son directamente proporcionales a los gradientes de velocidad [6]. Con base en ésto puede hacerse la fuerte suposición, algunas veces corroborada por experimentos, de que los esfuerzos de Reynolds pueden escribirse como

$$-\overline{u_i u_j} = \epsilon_m \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.7)$$

Esta afirmación fue hecha por Boussinesq, quien introdujo el concepto de *viscosidad turbulenta* o *viscosidad de eddy* ϵ_m . Así, el tensor puede escribirse como

$$\sigma_{ij} = -\bar{P} \delta_{ij} + (\eta + \rho \epsilon_m) \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.8)$$

Se ha obtenido entonces una ecuación constitutiva para un flujo turbulento medio. La viscosidad turbulenta no es necesariamente una constante y en general depende de la posición. Por lo tanto, a pesar de que la viscosidad η es constante, la ecuación constitutiva (3.8) es exactamente la misma que la correspondiente a un fluido con viscosidad no homogénea (ec. 2.26), con una viscosidad efectiva $\eta + \rho\epsilon_m$. En este caso la inhomogeneidad "corre a cargo" de la viscosidad turbulenta. Pero además de eso se ha visto que esta viscosidad turbulenta depende de la distancia a las fronteras sólidas del sistema, que son las que producen la turbulencia.

Como conclusión, aplicar el modelo de viscosidad no homogénea dependiente de la distancia puede resultar un método efectivo y sencillo para reproducir los perfiles de flujos turbulentos medios.

En la figura (??) se muestran datos experimentales del flujo medio entre dos placas paralelas planas variando el número de Reynolds [16].

La figura (3-5) corresponde al flujo medio en un tubo de sección transversal circular variando el número de Reynolds [16].

En ambos casos se observa cómo los perfiles difieren por mucho de los correspondientes a un flujo con viscosidad homogénea. Tomando en cuenta que la viscosidad turbulenta disminuye al aproximarse a las paredes, al igual que con polímeros, es posible reproducir los perfiles utilizando una viscosidad que disminuya al aproximarse a ellas.

3.3 Forma de la inhomogeneidad .

A partir de la discusión anterior y de los ejemplos vistos, es de esperarse que la inhomogeneidad se manifieste al acercarse a las fronteras sólidas del sistema. De modo que la función de la viscosidad debe tomar un valor en la frontera distinto al del resto del fluido y partiendo de ese valor debe aproximarse asintóticamente a una constante, que es el valor que tomará en el resto del medio. Si existe más de una frontera se supondrá

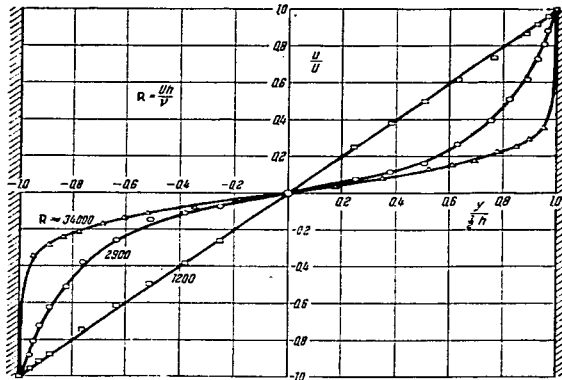


Figura 3-4: Perfil de velocidades de un flujo turbulento medio entre placas paralelas planas que se mueven en direcciones opuestas, obtenidos por H.Reichardt [16].

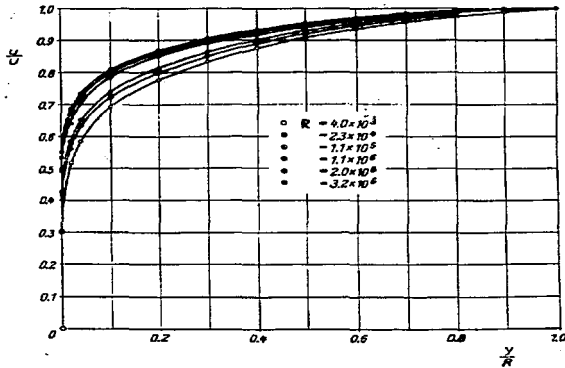


Figura 3-5: Distribución de velocidades en tubos para diferentes números de Reynolds, obtenidos por Nikuradse [16].

que la forma de la inhomogeneidad es la misma en todas las fronteras presentes en el sistema. Así la manera en que cambie la función viscosidad al acercarse a cada frontera será la misma.

Se ha visto en los dos ejemplos discutidos que la viscosidad disminuye al acercarse a la frontera. Pero eso depende del sistema, el cambio también puede reflejarse como un aumento de la viscosidad. Así, el orden producido por la presencia de una frontera puede provocar tanto un aumento como una disminución en la viscosidad.

Para modelar este comportamiento pueden usarse funciones exponenciales, funciones racionales y polinomios. Como se requiere un cambio abrupto, las funciones racionales y los polinomios deben depender de potencias grandes de la distancia a las paredes, de modo que la convergencia al valor asintótico sea rápida. Todas estas funciones contarán con parámetros ajustables. Para determinar el valor de los parámetros es necesario utilizar

una teoría molecular que prediga la forma de la inhomogeneidad en cada caso y, si esto no es posible, la alternativa es hacer una comparación con experimentos y así obtener la información necesaria para ajustar el modelo.

Capítulo 4

Soluciones para algunas geometrías

En el capítulo dos han sido planteadas las ecuaciones de movimiento correspondientes a un fluido incompresible, isótropo y no homogéneo en la viscosidad (2.29). En este capítulo se intenta, haciendo uso de estas ecuaciones, encontrar la solución de los problemas de flujo de Couette plano, flujo de Poiseuille, flujo de Couette-Taylor y el flujo uniforme alrededor de una esfera dura, todos en el caso estacionario y libre de fuerzas externas. No en todos los casos es posible encontrar soluciones generales para cualquier forma de la función viscosidad. Cuando esto sucede, se proponen expresiones para la viscosidad que sean muy generales, de modo que las soluciones encontradas se puedan aplicar a problemas con diferentes comportamientos de la viscosidad. Estas expresiones deben además estar de acuerdo con lo discutido en el capítulo anterior.

4.1 Flujo de Couette plano

Este primer caso consiste en el flujo entre un par de placas paralelas separadas por una distancia h . Se escoge un sistema cartesiano de coordenadas de tal manera que el eje y es perpendicular a las placas y los ejes x y z paralelos a éstas. Las dimensiones de las placas en las direcciones x y z se suponen mucho mayores que la separación h , de modo

que se pueden despreciar los efectos de orilla y considerar a las placas como infinitas. Gracias a esto es posible suponer al problema independiente de la coordenada z , esto es, un problema en dos dimensiones. Se supone que la placa superior se mueve a lo largo del eje x con una velocidad constante V_0 con respecto al otro plano y que existe un gradiente de presión constante que actúa sobre el fluido en la dirección x , es decir

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\Delta p}{L}, \quad (4.1)$$

con $\Delta p > 0$. La geometría del problema se ilustra en figura (4-1).

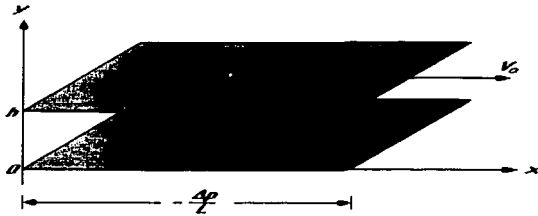


Figura 4-1: Geometría del flujo entre placas paralelas.

El gradiente de presión y el arrastre debidos al movimiento de la placa superior, provocarán que el fluido se mueva a lo largo del eje x . Si se supone que se tiene un flujo estrictamente laminar, la única componente de la velocidad distinta de cero es la componente x , y ésta sólo puede depender de y , es decir,

$$\vec{u} = \hat{i} u(y). \quad (4.2)$$

La suposición de flujo laminar es válida siempre y cuando el número de Reynolds del flujo sea pequeño, donde esto significa mucho menor a la unidad.

Se utilizan condiciones a la frontera de adherencia, por lo tanto

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ u(h) &= V_0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Se supondrá a la viscosidad como una función dependiente de la distancia a las placas, por lo tanto $\eta = \eta(y)$. Esta función tiene un valor constante en el bulto del fluido (η_0) y cambia abruptamente muy cerca de las paredes. La manera en que cambia es la misma en la dos paredes ya que ambas producen el mismo efecto en el fluido. Por lo tanto, la viscosidad debe de ser una función simétrica con respecto al punto medio entre las dos placas ($\frac{h}{2}$). Es decir,

$$\eta\left(\frac{h}{2} + y\right) = \eta\left(\frac{h}{2} - y\right), \tag{4.4}$$

para $y \in \left[0, \frac{h}{2}\right]$.

Las ecuaciones que describen la dinámica de un fluido incompresible con una viscosidad dependiente de la posición, para el caso estacionario y libre de fuerzas externas son

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \\ \rho(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} &= -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{u} + \nabla \eta \cdot \nabla \vec{u} + \nabla \vec{u} \cdot \nabla \eta \end{aligned} \tag{4.5}$$

Debido a que $\vec{u} = \hat{i} u(y)$ la ecuación de continuidad se satisface idénticamente y los términos no lineales de las ecuaciones de movimiento son céro.

Por otro lado se tiene que

$$\nabla \eta = (0, \eta', 0) \tag{4.6}$$

$$y \quad \nabla \bar{u} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ u' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

entonces,

$$(\nabla \eta \cdot \nabla \bar{u}) = (\eta' u', 0, 0) \quad (4.8)$$

$$y \quad (\nabla \bar{u} \cdot \nabla \eta) = (0, 0, 0). \quad (4.9)$$

Como el problema es en dos dimensiones sólo hay dos ecuaciones de movimiento. La correspondiente a la componente y es

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (4.10)$$

Esta ecuación sólo sirve para confirmar el hecho de que el gradiente de presión sólo actúa en la dirección x . La ecuación correspondiente a la componente x es

$$\eta u'' + \eta' u' = \frac{\Delta p}{L} \quad (4.11)$$

La solución a esta ecuación diferencial es el campo de velocidades que se busca. De modo que las ecuaciones de movimiento se han reducido a una ecuación ordinaria de segundo orden. Esta se adimensionaliza con los parámetros V_o , h y η_o haciendo $\bar{u} = \frac{u}{V_o}$, $\bar{y} = \frac{y}{h}$ y $\bar{\eta} = \frac{\eta}{\eta_o}$. Quitando la tilde a las nuevas variables, la ecuación 4.11 toma la forma

$$\eta u'' + \eta' u' = \frac{h^2}{V_o \eta_o} \frac{\Delta p}{L} \equiv k, \quad (4.12)$$

donde k es una constante adimensional. Las condiciones de frontera en variables adimensionales son

$$u(0) = 0, \quad (4.13)$$

$$y \quad u(1) = 1. \quad (4.14)$$

La solución a esta ecuación puede ser obtenida haciendo $\frac{du}{dy} = f(y)$. Entonces

$$f' + \frac{\eta'}{\eta} f = \frac{k}{\eta}. \quad (4.15)$$

Ahora se considera la ecuación homogénea adjunta

$$f'_o - \frac{\eta'}{\eta} f_o = 0, \quad (4.16)$$

que tiene como solución

$$f_o = A\eta, \quad (4.17)$$

siendo A la constante de integración. Entonces es claro que

$$(f f_o)' = \frac{k}{\eta} f_o, \quad (4.18)$$

integrando e introduciendo el valor de f_o se llega a que

$$f = k \frac{y}{\eta} + B \frac{1}{\eta} = \frac{du}{dy}. \quad (4.19)$$

Integrando una vez más se encuentra que

$$u(y) = k \int_0^y \frac{\xi d\xi}{\eta(\xi)} + B \int_0^y \frac{d\xi}{\eta(\xi)} + C. \quad (4.20)$$

Las constantes de integración B y C se obtienen usando las condiciones de frontera, así

$$u(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0, \quad (4.21)$$

y

$$u(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1 - k \int_0^1 \frac{\xi d\xi}{\eta(\xi)}}{\int_0^1 \frac{d\xi}{\eta(\xi)}}. \quad (4.22)$$

De modo que el campo de velocidad toma la forma

$$u(y) = k \left[\int_0^y \frac{\xi d\xi}{\eta(\xi)} - \frac{\int_0^1 \frac{\xi d\xi}{\eta(\xi)}}{\int_0^1 \frac{d\xi}{\eta(\xi)}} \int_0^y \frac{d\xi}{\eta(\xi)} \right] + \frac{\int_0^y \frac{d\xi}{\eta(\xi)}}{\int_0^1 \frac{d\xi}{\eta(\xi)}}. \quad (4.23)$$

El término entre paréntesis es el flujo producido por el gradiente de presión, mientras que el último término es producido por el deslizamiento de la placa superior. Se observa que ambos flujos son afectados por la inhomogeneidad en la viscosidad.

Hasta aquí no se ha dicho nada de la forma en que la viscosidad depende de y . De modo que se ha encontrado una solución muy versátil, en forma de una cuadratura, que permite encontrar el campo de velocidades para cualquier modelo de viscosidad.

Para confirmar la validez de la solución es necesario encontrar la solución cuando la viscosidad es una constante y compararlo con la solución del caso homogéneo. Cuando la viscosidad es 1 la velocidad es

$$u(y) = \frac{k}{2} (y^2 - y) + y, \quad (4.24)$$

que coincide con la solución conocida del flujo de Couette plano con viscosidad constante.

La definición de velocidad media de un perfil de velocidades dado u es

$$\langle u \rangle = \frac{1}{A} \int_S u ds, \quad (4.25)$$

donde A es el área de la superficie S donde se quiere promediar el flujo.

En este caso la velocidad media es

$$\langle u \rangle = \left[\int_0^1 u(y) dy \int_0^1 dz \right], \quad (4.26)$$

entonces,

$$\langle u \rangle = k \int_0^1 \left(\int_0^y \frac{\xi d\xi}{\eta(\xi)} - \frac{\int_0^y \frac{\xi d\xi}{\eta(\xi)}}{\int_0^y \frac{d\xi}{\eta(\xi)}} \int_0^y \frac{d\xi}{\eta(\xi)} \right) dy + \int_0^1 \left(\frac{\int_0^y \frac{d\xi}{\eta(\xi)}}{\int_0^1 \frac{d\xi}{\eta(\xi)}} \right) dy. \quad (4.27)$$

El gasto se define como la masa que pasa por unidad de tiempo a través de una superficie S de área A (adimensionalizada con h^2).

$$Q = \rho \int_S u ds, \quad (4.28)$$

donde ρ es la densidad adimensional. Para este caso $Q = \rho A \langle u \rangle$.

Como ya se ha mencionado, la viscosidad es una función simétrica con respecto al punto medio entre las placas (ec. 4.4). Tomando en cuenta este hecho y para el caso particular en que el gradiente de presión es cero, se puede demostrar que

$$\langle u \rangle = u(1/2) = \frac{1}{2}. \quad (4.29)$$

Para demostrarlo se escribe el campo de velocidad con $k = 0$

$$u(y) = \frac{\int_0^y \frac{d\xi}{\eta(\xi)}}{\int_0^1 \frac{d\xi}{\eta(\xi)}}, \quad (4.30)$$

entonces, por la simetría de $\eta(y)$

$$u(1/2) = \frac{\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d\xi}{\eta(\xi)}}{\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d\xi}{\eta(\xi)}} = \frac{\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d\xi}{\eta(\xi)}}{2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d\xi}{\eta(\xi)}} = \frac{1}{2}. \quad (4.31)$$

Para la velocidad media se tiene que

$$\begin{aligned} \langle u \rangle &= \int_0^1 \left(\frac{\int_0^y \frac{d\xi}{\eta(\xi)}}{\int_0^1 \frac{d\xi}{\eta(\xi)}} \right) dy = \frac{1}{2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d\xi}{\eta(\xi)}} \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d\xi}{\eta(\xi)} + \int_{\frac{1}{2}}^y \frac{d\xi}{\eta(\xi)} \right) dy \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d\xi}{\eta(\xi)}} \int_0^1 \left(\int_{\frac{1}{2}}^y \frac{d\xi}{\eta(\xi)} \right) dy \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d\xi}{\eta(\xi)}} \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^y \frac{d\xi}{\eta(\xi)} \right) dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_{\frac{1}{2}}^y \frac{d\xi}{\eta(\xi)} \right) dy \right], \end{aligned} \quad (4.32)$$

pero, otra vez por la simetría de la función viscosidad, es claro que

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^y \frac{d\xi}{\eta(\xi)} \right) dy = - \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_{\frac{1}{2}}^y \frac{d\xi}{\eta(\xi)} \right) dy. \quad (4.33)$$

Por lo tanto la ecuación (4.29) queda demostrada. Y, por lo tanto

$$Q = \frac{1}{2} \rho A.$$

Este resultado muestra que para el caso en que no hay gradiente de presión y la viscosidad es simétrica con respecto al punto medio entre las placas, el efecto global de la

inhomogeneidad en la viscosidad se anula. Entonces la velocidad media, la velocidad del punto medio entre las dos placas y el gasto no se ven afectados por la inhomogeneidad y son exactamente los mismos que en el caso de viscosidad constante. Esto se debe a que las placas se mueven en sentido contrario, de modo que las desviaciones del campo de velocidad con respecto al producido con la viscosidad homogénea cerca de una placa, son iguales pero de sentido contrario cerca de la otra placa. Como consecuencia de esto si se hace un experimento en el cual se mida el gasto, el efecto de la inhomogeneidad en la viscosidad no se observaría.

Para visualizar la forma en que el campo de velocidades se modifica al introducir la inhomogeneidad en la viscosidad cerca de las paredes, se propone un modelo en el que la viscosidad es constante en el bulto del fluido y aumenta exponencialmente cerca de las paredes. El cambio cerca de las paredes se exagerará para hacer más evidente el efecto, ya que sabemos que en general este efecto debe ser pequeño muy cercano a las paredes. El modelo es

$$\eta(y) = \eta_o + \eta_f \left(e^{-\frac{y}{\lambda}} + e^{\frac{y}{\lambda}-1} \right), \quad (4.34)$$

donde η_o es la viscosidad del bulto, η_f es la viscosidad en la pared y λ es un parámetro que determina qué tanto se aleja de la pared el efecto. Con los valores, $\lambda = 0.04$, $\eta_f = 30$ y $\eta_o = 1$ el modelo se ve como en la figura (4-2).

Integrando se encuentra la forma explícita del campo de velocidad. La gráfica se muestra en la figura (4-3)

La línea recta corresponde a la solución con viscosidad homogénea. La otra curva representa la solución para el modelo de viscosidad escogido. Éstas se cruzan en tres puntos: en las placas, por las condiciones de frontera, y en el punto medio entre las placas. Se nota claramente el efecto de la inhomogeneidad cerca de las paredes y su simetría con respecto al punto medio. También se puede observar cómo el efecto neto en la parte central del campo es equivalente a haber disminuido la distancia entre las paredes utilizando la misma diferencia de velocidades entre las placas. De haber usado

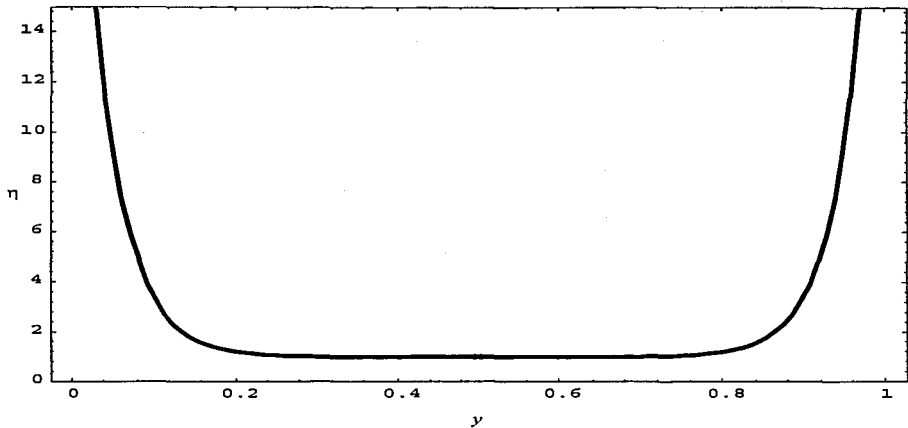


Figura 4-2: Función viscosidad para el flujo de Couette plano.

un modelo en el cual la viscosidad disminuyera al acercarse a las placas, la solución sería una reflexión de esta solución con respecto a la solución homogénea, es decir, a la línea recta.

4.2 Flujo de Poiseuille

El flujo de Poiseuille consiste en el flujo dentro un tubo de sección transversal circular de radio a . Este flujo es producido por una diferencia de presión constante ($\frac{dp}{dz} = -\frac{\Delta p}{L}$) a lo largo del tubo, con $\Delta p > 0$. Se utiliza un sistema de coordenadas cilíndricas R, θ, z , de modo que el eje z coincida con el eje del cilindro, como se muestra en la figura (4-4).

Se supone al flujo con simetría axial, es decir, simétrico con respecto a la coordenada

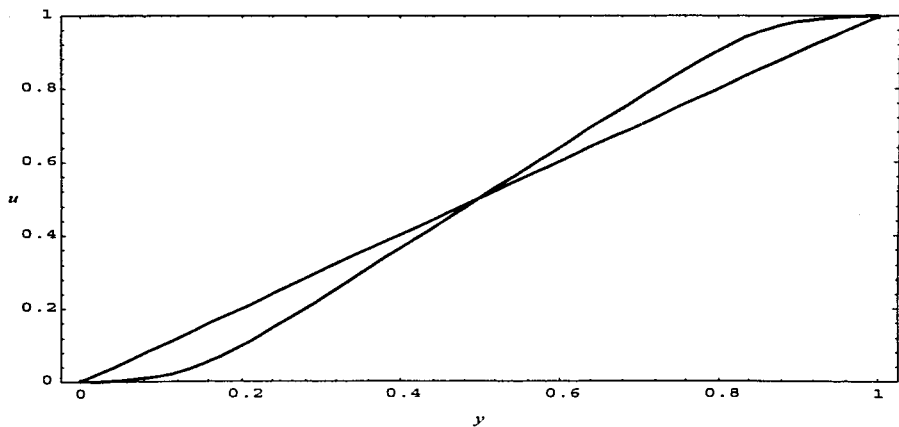


Figura 4-3: Perfil de velocidades del flujo de Couette plano con $k = 0$ y viscosidad inhomogénea (Fig. 4-2).

θ . Además, como la diferencia de presión es a lo largo del eje z , se supondrá que la velocidad radial es nula. Así se tiene un flujo laminar, con velocidad únicamente en la componente z y que sólo depende de R , esto es

$$\vec{u} = (0, 0, u(R)). \quad (4.35)$$

Estas suposiciones de flujo tubular son válidas siempre y cuando el número de Reynolds del flujo sea pequeño. En el caso de Poiseuille para tener un flujo laminar estable es suficiente que el número de Reynolds sea menor a mil.

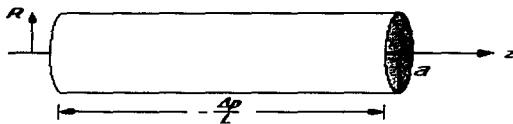


Figura 4-4: Geometría del flujo de Poiseuille.

Como condiciones de frontera se tiene que

$$u(a) = 0 \quad (4.36)$$

$$\text{y } \frac{du}{dR} \text{ finita en } R = 0. \quad (4.37)$$

De nuevo, la viscosidad es una función de la distancia a la pared sólida con un valor asintótico en el bulto (η_o), entonces $\eta = \eta(R)$.

Dado que el fluido es incompresible y con viscosidad dependiente de la posición, el caso estacionario y libre de fuerzas externas es descrito por las ecuaciones (4.5). La ecuación de continuidad se satisface idénticamente, los términos no lineales de la ecuación de movimiento son cero. Por otro lado se tiene que

$$\begin{aligned} \nabla \eta &= (\eta', 0, 0) \\ \text{y } \nabla \vec{u} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & u' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

entonces

$$\begin{aligned} \nabla\eta \cdot \nabla\bar{u} &= (0, 0, \eta'u') \\ \text{y} \quad \nabla\bar{u} \cdot \nabla\eta &= (0, 0, 0), \end{aligned} \quad (4.39)$$

y además

$$\nabla^2\bar{u} = \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{du}{dR} \right) = \frac{1}{R} \frac{du}{dR} + \frac{d^2u}{dR^2}. \quad (4.40)$$

De modo que las componentes R y θ de la ecuación de movimiento dan

$$\frac{\partial p}{\partial R} = \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \quad (4.41)$$

es decir, la presión es constante en cada sección recta del tubo. La ecuación correspondiente a la componente z es

$$u'' + u' \left(\frac{\eta'}{\eta} + \frac{1}{R} \right) = -\frac{\Delta p}{L}, \quad (4.42)$$

que es una ecuación ordinaria de segundo orden. Se adimensionaliza introduciendo los parámetros a , η_o y U_o , donde U_o es la velocidad en $R = 0$ (velocidad máxima dentro del tubo). Entonces

$$\frac{d^2u}{dR^2} + \frac{du}{dR} \left(\frac{1}{\eta} \frac{d\eta}{dR} + \frac{1}{R} \right) = -\frac{a^2 \Delta p}{U_o \eta_o L} \frac{1}{\eta} = -\frac{k}{\eta}, \quad (4.43)$$

donde $k = \frac{a^2 \Delta p}{U_o \eta_o L}$ es una constante adimensional. Las condiciones de frontera (ecs. 4.36 y 4.37) son ahora

$$u(1) = 0, \quad (4.44)$$

$$\text{y} \quad \frac{du}{dR} \text{ finita en } R = 0. \quad (4.45)$$

Para resolver esta ecuación se hace $f(R) = \frac{du}{dR}$, entonces

$$f' + f \left(\frac{\eta'}{\eta} + \frac{1}{R} \right) = -\frac{k}{\eta}. \quad (4.46)$$

Multiplicando por el factor integrante $R\eta$ e integrando se llega a que

$$f(R) = -\frac{kR}{2\eta} + \frac{B}{R\eta}, \quad (4.47)$$

donde B es la constante de integración. Aquí se introduce la condición (4.45), entonces $B = 0$. Integrando una vez más se tiene que

$$u(R) = -\frac{k}{2} \int_0^R \frac{\xi d\xi}{\eta} + C. \quad (4.48)$$

Tomando en cuenta la otra condición de frontera (4.44) se encuentra que

$$C = \frac{k}{2} \int_0^1 \frac{\xi d\xi}{\eta}, \quad (4.49)$$

por lo tanto, la solución es

$$u(R) = -\frac{k}{2} \int_1^R \frac{\xi d\xi}{\eta}. \quad (4.50)$$

De nuevo se ha obtenido una solución en forma de una cuadratura, donde es posible encontrar la solución para cualquier forma de la viscosidad.

El límite cuando $\eta = 1$ en variables adimensionales es .

$$u(R) = \frac{k}{4} (1 - R^2), \quad (4.51)$$

que representa un perfil parabólico, resultado conocido para el caso homogéneo.

Dadas las simetrías del problema, la velocidad media del flujo es

$$\langle u \rangle = -\frac{k}{2} \int_0^1 dR \int_1^R \frac{\xi d\xi}{\eta}, \quad (4.52)$$

y el gasto

$$\begin{aligned} Q &= -\frac{\rho k}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\int_1^R \frac{\xi d\xi}{\eta} \right) R dR d\theta, \\ \Rightarrow Q &= -\pi \rho k \int_0^1 \left(\int_1^R \frac{\xi d\xi}{\eta} \right) R dR, \end{aligned} \quad (4.53)$$

donde ρ es una cantidad adimensional. Haciendo una vez más el límite cuando η es uno se llega a que

$$\langle u \rangle = \frac{k}{6}, \quad (4.54)$$

y a que

$$Q = \frac{\pi \rho k}{4}. \quad (4.55)$$

Estas cantidades coinciden también con las conocidas para el caso homogéneo.

Para observar gráficamente cómo se modifica el campo de velocidades se propone un modelo para la viscosidad bajo las mismas suposiciones que en el caso de Couette plano. El modelo es

$$\eta = \eta_0 + (\eta_f - \eta_0) e^{\frac{R-1}{s}} \quad (4.56)$$

Aquí se incluirán los casos cuando la viscosidad aumenta y cuando disminuye al acercarse a las paredes. En todos los casos $\eta_0 = 5$, y

caso (a) $\eta_f = 30$ y $s = 0.07$,

caso (b) $\eta_f = 0.5$ y $s = 0.07$,

caso (c) $\eta_f = 0.5$ y $s = 0.15$.

Con estos valores el modelo toma las formas que se muestran en la figura (4-5).

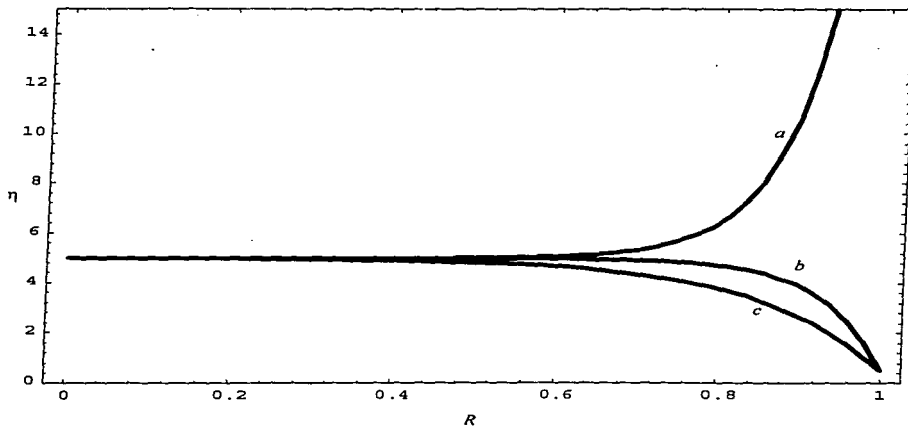


Figura 4-5: Tres modelos para la viscosidad en el flujo de Poiseuille.

Dados estos modelos se hacen las integrales, y para $k = \frac{\mu^2 \Delta p}{U_0 \eta_0 L} = 20$ se obtienen los campos de velocidad que se muestran en la gráfica (??).

La curva con la etiqueta (c) corresponde a la solución con viscosidad homogénea. En el caso (a) el perfil de velocidad, en el bulto del fluido, es muy parecido al caso homogéneo. Pero al acercarse a la frontera aparece, como consecuencia del aumento en la viscosidad, un cambio de curvatura en el perfil y una disminución muy importante en la velocidad. En esa zona la disipación de energía es grande, el arrastre sobre el fluido es mayor y el fluido es frenado produciendo un perfil de velocidades siempre por debajo del homogéneo y, por lo tanto, un gasto menor. En los casos (b) y (c) donde la viscosidad disminuye cerca de las paredes, los perfiles son más chatos en comparación con el caso homogéneo.

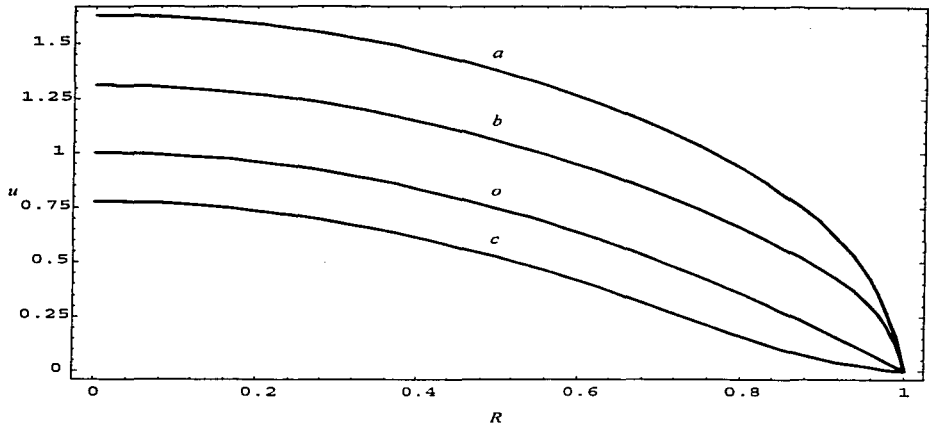


Figura 4-6: Perfiles de velocidades para los modelos de viscosidad (a), (b) y (c) ilustrados en la figura (4-5) y para viscosidad homogénea (o).

Las paredes del sistema conjuntamente con la condición de frontera de adherencia y la viscosidad frenan al fluido y le dan la forma de parábola al perfil de velocidades del fluido homogéneo. Si la viscosidad cerca de las paredes disminuye se presentará una disminución en el arrastre producido por las paredes y el perfil de velocidades tenderá a parecerse más al de un flujo uniforme. En el caso extremo de que la velocidad en la frontera sea estrictamente cero, el campo de velocidades será uniforme y la condición de frontera de adherencia habrá perdido sentido.

Se observa también cierta semejanza entre el campo de velocidades correspondiente a una viscosidad que disminuye cerca de las paredes y los campos de velocidades típicos de flujos turbulentos medios y de polímeros en tubos de sección circular.

4.3 Flujo de Couette-Taylor

Se considera ahora el movimiento de un fluido entre dos cilindros coaxiales infinitos de radios a y b ($a < b$), girando alrededor del eje de simetría con velocidades angulares ω_a y ω_b , respectivamente. Se toman coordenadas cilíndricas R, θ, z , con el eje z a lo largo del eje de los cilindros, con $a \leq R \leq b$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$. En el caso de flujo laminar (número de Reynolds menor a 40 [16]), se tiene que

$$\vec{u} = (0, u(R), 0), \quad (4.57)$$

Las condiciones de frontera son

$$u(a) = a\omega_a \quad \text{y} \quad u(b) = b\omega_b. \quad (4.58)$$

De nuevo, como en el caso de Couette plano, la viscosidad es una función de la distancia a las paredes sólidas, es decir, del radio, tomando un valor de η_0 en el bulbo. Es también una función simétrica con respecto al radio medio de los cilindros ($R_m = \frac{a+b}{2}$).

Se supone que el fluido es incompresible y que la viscosidad depende de la distancia a los cilindros ($\eta = \eta(R)$), que el flujo es estacionario y no hay fuerzas externas. Este flujo está descrito por las ecuaciones (4.5). La ecuación de continuidad se satisface idénticamente y los términos no lineales son cero.

De las componentes r y z de la ecuación de movimiento, sólo se obtiene que

$$\frac{u^2}{R} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dR}, \quad (4.59)$$

la otra ecuación no da información.

Por otro lado se tiene que

$$\nabla\eta = (\eta', 0, 0), \quad (4.60)$$

y

$$\nabla\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 & u' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.61)$$

Por lo tanto, la ecuación correspondiente a la componente θ es

$$R^2 u'' + \left(1 + R \frac{\eta'}{\eta}\right) R u' - u = 0. \quad (4.62)$$

Esta ecuación ordinaria de segundo orden no se pudo resolver para una función de viscosidad en general. Se propuso el modelo más sencillo que consta de una constante en el bulto y rectas inclinadas cerca de las paredes. Para este modelo simplificado de viscosidad tampoco fue posible encontrar una solución cerrada a la ecuación (4.62). Se procedió entonces a resolver numéricamente el problema, introduciendo ahora un modelo menos restringido. Para este propósito se utilizó un programa desarrollado para encontrar soluciones numéricas a ecuaciones diferenciales ordinarias por el método de Runge-Kutta de orden cuarto [18]. El modelo utilizado para este efecto es

$$\eta(R) = \eta_o + \alpha (R - R_m)^{2n}. \quad (4.63)$$

Se escogió un polinomio ya que es numéricamente más conveniente. La potencia n debe ser grande para que la función sufra un cambio abrupto cerca de las paredes y tome el valor η_o en el resto del fluido. El parámetro α determina la apertura del polinomio, es decir, el valor de la viscosidad en las paredes (puntos a y b). La ecuación diferencial que resulta de introducir el modelo es

$$u'' + \left(\frac{1}{R} + \frac{2n\alpha(R - R_m)^{2n-1}}{\eta_o + \alpha(R - R_m)^{2n}}\right) u' - \frac{u}{R^2} = 0. \quad (4.64)$$

En la figura (4-7) se muestra la forma de la solución para los valores:

$$\begin{aligned} a &= 3, \\ b &= 7, \\ \alpha &= 2 \times 10^{-2}, \\ \eta_o &= 1 \quad \text{y} \quad n = 5. \end{aligned} \tag{4.65}$$

Con condiciones de frontera:

$$u(a) = 1 \quad \text{y} \quad u(b) = 8. \tag{4.66}$$

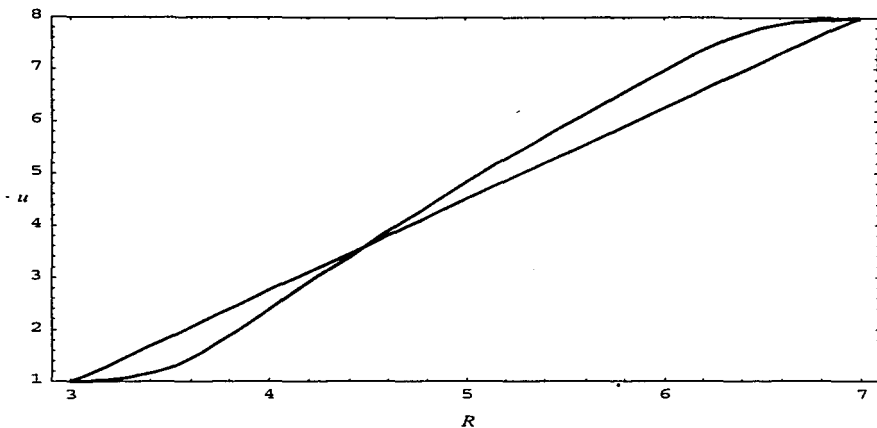


Figura 4-7: Solución numérica al problema de Couette-Taylor con viscosidad no homogénea. La línea recta representa la solución para el caso homogéneo.

La línea recta corresponde a la solución con viscosidad constante. Se observa que

el perfil de velocidades es muy parecido al obtenido en el caso de Couette plano (ver fig. 4-3). Esto se debe a que en ambos problemas el movimiento del fluido es originado por una diferencia de velocidades entre las paredes que lo contienen. Pero existe una diferencia muy clara, en este caso el perfil no tiene las mismas propiedades de simetría que posee el caso plano. La explicación tiene que ver con el hecho de que en el caso de los cilindros, el fluido está rotando alrededor de un eje. Esto hace que aparezcan fuerzas inerciales que rompen las simetrías que hay en el caso plano.

4.4 Flujo uniforme alrededor de una esfera

4.4.1 Planteamiento del problema

Este problema consiste en una esfera sólida de radio a , fija en el espacio e inmersa en un flujo uniforme U_0 . Se usan coordenadas esféricas con el origen en el centro de la esfera y con el eje axial en dirección del flujo. Entonces

$$\vec{r} = (r, \theta, \phi) \quad \text{y} \quad \vec{u} = (u_r, u_\theta, u_\phi). \quad (4.67)$$

Si se supone simetría axial, el flujo es invariante ante cambios en la coordenada ϕ . Entonces $u_\phi = 0$, y cualquier derivada con respecto a ϕ es nula. Dada esta simetría, el problema se reduce a uno en dos dimensiones.

La viscosidad es inhomogénea y depende de la distancia a la esfera, es decir, sólo depende de la coordenada radial $\eta = \eta(r)$.

En el caso estacionario de un fluido incompresible con viscosidad inhomogénea y libre de fuerzas externas la ecuación de movimiento es

$$(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} (\eta \nabla^2 \vec{u} + \nabla \eta \cdot \nabla \vec{u} + \nabla \vec{u} \cdot \nabla \eta). \quad (4.68)$$

El término $(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$ es del orden de magnitud de $\frac{u^2}{a}$. La magnitud de los tres últimos términos de la derecha es del orden de $\frac{\eta u}{\rho a^2}$. El cociente entre el término de la izquierda y cualquiera de los otros tres es precisamente el número de Reynolds. Si se supone que $R_e \ll 1$, el término no lineal puede despreciarse siempre y cuando se consideren distancias pequeñas a la esfera. Ya que para distancias del orden del $\frac{a}{R_e}$ el término no lineal es del mismo orden de magnitud de los otros términos y la aproximación ya no es válida (paradoja de Whitehead). Para $r \ll \frac{a}{R_e}$ la ecuación de movimiento se reduce a

$$-\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{u} + \nabla \eta \cdot \nabla \vec{u} + \nabla \vec{u} \cdot \nabla \eta = 0, \quad (4.69)$$

que junto con la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (4.70)$$

determina por completo el comportamiento del fluido.

Tomando en cuenta la simetría axial, la ecuación de continuidad en coordenadas esféricas es

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) = 0. \quad (4.71)$$

Por otro lado, el laplaciano en coordenadas esféricas es, en su parte radial

$$\nabla^2 u_r - \frac{2}{r^2} u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} u_\theta \cot \theta, \quad (4.72)$$

y en su parte polar

$$\nabla^2 u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (4.73)$$

Ahora

$$\nabla \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} & \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y $\nabla \eta = (\eta', 0, 0),$ (4.74)

entonces

$$\nabla \eta \cdot \nabla \vec{u} = \left(\eta' \frac{\partial u_r}{\partial r}, \eta' \frac{\partial u_\theta}{\partial r}, 0 \right),$$

y $\nabla \vec{u} \cdot \nabla \eta = \left(\eta' \frac{\partial u_r}{\partial r}, \frac{\eta'}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}, 0 \right).$ (4.75)

En cuanto al gradiente de presión se tiene que

$$\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}, 0 \right). \quad (4.76)$$

Tomando las expresiones (4.72)-(4.76), y usando que

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \quad (4.77)$$

se encuentra que las componentes radial y polar de las ecuaciones de conservación de momento son

$$\eta \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) - \frac{2}{r^2} \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_\theta \cot \theta \right) \right] +$$

$$+ 2\eta' \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (4.78)$$

y

$$\eta \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] +$$

$$+\eta' \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}. \quad (4.79)$$

Se tiene entonces un conjunto de tres ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden acopladas (4.71), (4.78) y (4.79). Las incógnitas son u_r , u_θ y p , que dependen de las coordenadas r y θ . Como condiciones de frontera se tiene que lejos de la esfera el campo uniforme U_o debe dominar, así

$$\vec{u} = \vec{U}_o \text{ cuando } r \rightarrow \infty, \quad (4.80)$$

y

$$p = p_o \text{ cuando } r \rightarrow \infty, \quad (4.81)$$

siendo p_o la presión cuando el campo de velocidad es \vec{U}_o . Se considera la condición de adherencia en la esfera entonces

$$u_\theta = 0 \text{ en } r = a, \quad (4.82)$$

y, como la esfera no es porosa,

$$u_r = 0 \text{ en } r = a. \quad (4.83)$$

4.4.2 Cambio de representación

Ahora, gracias a que las ecuaciones son lineales, se supondrá que la solución está dada por el producto interno entre el campo uniforme \vec{U}_o y un tensor con simetría esférica. De modo que

$$\vec{u} = \underline{\mathbb{T}}(r) \cdot \vec{U}_o, \quad (4.84)$$

siendo

$$\underline{\mathbb{T}}(r) = f(r) \underline{\mathbb{I}} + g(r) \hat{e}_r \hat{e}_r, \quad (4.85)$$

donde I es el tensor identidad. Dada esta forma del campo de velocidades se tiene que

$$u_r = \bar{u} \cdot \hat{e}_r = \left(T(r) \cdot \bar{U}_o \right) \cdot \hat{e}_r, \quad (4.86)$$

por lo tanto

$$u_r = [f(r) + g(r)] (\bar{U}_o \cdot \hat{e}_r). \quad (4.87)$$

Del mismo modo, la componente polar es

$$u_\theta = \bar{u} \cdot \hat{e}_\theta = \left(T(r) \cdot \bar{U}_o \right) \cdot \hat{e}_\theta, \quad (4.88)$$

entonces

$$u_\theta = f(r) (\bar{U}_o \cdot \hat{e}_\theta). \quad (4.89)$$

Finalmente la presión se escribe

$$p = p_o + \frac{\eta_o}{\alpha} h(r) (\bar{U}_o \cdot \hat{e}_r), \quad (4.90)$$

donde p_o y η_o son la presión y la viscosidad en infinito. Como ya se ha mencionado, el flujo uniforme va en la dirección del eje axial. Por lo tanto

$$\begin{aligned} (\bar{U}_o \cdot \hat{e}_r) &= U_o \cos \theta, \\ \text{y} \quad (\bar{U}_o \cdot \hat{e}_\theta) &= -U_o \sin \theta. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Entonces las tres incógnitas tienen ahora la forma

$$u_r = U_o (f(r) + g(r)) \cos \theta, \quad (4.92)$$

$$u_\theta = -U_o f(r) \sin \theta, \quad (4.93)$$

$$\text{y} \quad p = p_o + \frac{U_o \eta_o}{\alpha} h(r) \cos \theta. \quad (4.94)$$

Sustituyendo las relaciones (4.92)-(4.94) en las ecuaciones (4.71), (4.78) y (4.79), simplificando las expresiones y adimensionalizándolas con los parámetros a y η_0 , se encuentra un nuevo conjunto de ecuaciones. Este es

$$f' + g' + \frac{2}{r}g = 0, \quad (4.95)$$

$$\eta \left(f'' + g'' + \frac{2}{r}(f' + g') - \frac{4}{r^2}g \right) + 2\eta'(f' + g') = h', \quad (4.96)$$

$$\eta \left(f'' + \frac{2}{r}f' + \frac{2}{r^2}g \right) + \eta' \left(f' + \frac{f+g}{r} \right) = \frac{h}{r}, \quad (4.97)$$

donde las cantidades f , g , h , η y r no tienen dimensiones. La ecuación (4.95) corresponde a la ecuación de continuidad, mientras que las ecs. (4.96) y (4.97) corresponden a las componentes radial y polar de la ecuación de momento, respectivamente. Si se transforman las condiciones de frontera (4.80-4.83), usando las relaciones (4.84), (4.85) y (4.92)-(4.94), éstas toman la forma

$$g(r) \rightarrow 0 \quad (4.98)$$

$$f(r) \rightarrow 1 \text{ cuando } r \rightarrow \infty. \quad (4.99)$$

$$h(r) \rightarrow 0 \text{ cuando } r \rightarrow \infty. \quad (4.100)$$

Y, dado que en $r = 1$, $u_r = u_\theta = 0$, entonces

$$f(1) = g(1) = 0. \quad (4.101)$$

Haciendo este cambio de representación se ha transformado el conjunto de ecuaciones parciales, a uno de ecuaciones ordinarias, donde las incógnitas son f , g y h , que sólo dependen de la coordenada r .

4.4.3 Fórmula para el arrastre

El objetivo de este problema, además de encontrar los campos de velocidad y presión, es encontrar la expresión que toma el arrastre dada la suposición de que la viscosidad no es homogénea. El arrastre es la fuerza que siente la esfera debida al flujo del fluido viscoso en el que está inmersa. Es importante conocer esta cantidad ya que es la que normalmente se mide en los experimentos y por medio de la cual se pueden comparar los resultados experimentales con los teóricos. Se deducirá ahora la fórmula para el arrastre en términos de las funciones f , g y h , y de la función para la viscosidad, que es una función dada.

La fuerza de arrastre sobre la esfera es

$$\begin{aligned} F &= \int_V \vec{U}_o \cdot \rho \vec{F} dV = \int_S \vec{U}_o \cdot \sigma \cdot \hat{n} ds, \\ &= 2\pi a^2 \int_0^\pi d\theta [(\tau_{rr} - p) \sin \theta \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin^2 \theta], \end{aligned} \quad (4.102)$$

donde

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= 2\eta \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \text{y } \tau_{r\theta} &= \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right). \end{aligned} \quad (4.103)$$

Sustituyendo la ecuaciones (4.92)-(4.94) en (4.103), se llega a que

$$\begin{aligned} ((\tau_{rr} - p) \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta) \sin \theta &= \left(2\eta U_o (f' + g') - \frac{U_o \eta_o}{a} h \right) \cos^2 \theta \sin \theta - p_o \cos \theta \sin \theta + \\ &+ U_o \eta \left(\frac{1}{r} g + f' \right) \sin^3 \theta. \end{aligned} \quad (4.104)$$

Se evalúan las integrales obteniendo

$$\begin{aligned}
 F &= 2\pi a^2 U_o \eta (a) \left[\frac{4}{3} (f'(a) + g'(a)) - \frac{2}{3} \left(\frac{\eta_o h(a)}{a \eta(a)} \right) + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{a} g(a) + f'(a) \right) \right] \\
 &= \frac{8}{3} \pi a U_o \eta (a) \left[2a f'(a) + a g'(a) + g(a) - \frac{\eta_o h(a)}{2 \eta(a)} \right]. \quad (4.105)
 \end{aligned}$$

Si ahora se sustituye la ecuación de continuidad (4.95) evaluada en $r = a$, se llega que la fuerza de arrastre sobre la esfera está dada por

$$F = -\frac{8}{3} \pi a U_o \eta (a) \left[a g'(a) + 3g(a) + \frac{\eta_o h(a)}{2 \eta(a)} \right]. \quad (4.106)$$

Esta ecuación escrita en variables adimensionales es

$$\bar{F} = \frac{F}{a \eta_o U_o} = -\frac{8}{3} \pi \eta (1) \left[g'(1) + 3g(1) + \frac{1}{2} \frac{h(1)}{\eta(1)} \right]. \quad (4.107)$$

De modo que ya se tienen las cantidades u_r , u_θ , p y \bar{F} , en términos de las funciones f , g y h . Para el caso de esfera dura $g(1) = 0$.

4.4.4 Solución en series

El siguiente paso es resolver las ecuaciones (4.95), (4.96) y (4.97). Desafortunadamente no fue posible resolverlas en general para cualquier función de la viscosidad. Se intentará entonces encontrar una solución en serie de potencias de r , introduciendo una función para la viscosidad en forma de serie

$$\eta(r) = \eta_o + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n r^{-n}. \quad (4.108)$$

El desarrollo se hizo alrededor del cero, ya que es un punto fuera del dominio, por lo que no importa que la función tenga una singularidad ahí. Esta función cumple con el requisito de tender a la constante η_o para valores grandes de r . Además, los coeficientes

η_n son libres, de modo que se puede hacer que la función cambie tan abruptamente como se quiera al acercarse a la esfera y que ese cambio sea un aumento o una disminución, dependiendo del fluido que se quiera modelar. Escrita en variables adimensionales la ec. (4.108) toma la forma

$$\eta(r) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n r^{-n}. \quad (4.109)$$

Dada esta forma de la viscosidad las ecuaciones (4.95), (4.96) y (4.97) sólo tienen puntos singulares regulares, por lo tanto existe una solución en serie convergente [17].

Antes de seguir se hará una simplificación que consiste en transformar las ecuaciones (4.96) y (4.97) en una ecuación ordinaria de tercer orden. Esto se hace derivando una vez la ec. (4.97) y sustituyéndola en la ec. (4.96), eliminando así la función h de las ecuaciones. La ecuación resultante es

$$\eta(-r^3 g''' - 5r^2 g'' + 2r g' + 6g) + r \eta'(-2r^2 g'' - 7r g' + 2g) + r^2 \eta''(-r g' - g + f) = 0 \quad (4.110)$$

Esta ecuación junto con la ecuación de continuidad (4.95) forman el nuevo sistema de ecuaciones acopladas.

Supongamos ahora una solución en series de potencias de r para la función g . Dada la condición de frontera (4.98), se tiene que

$$g = \sum_{\alpha=1}^{\infty} g_{\alpha} r^{-\alpha}. \quad (4.111)$$

Se sustituye ésta en la ecuación de continuidad (4.95), entonces

$$f' = \sum_{\alpha=1}^{\infty} (\alpha r^{-(\alpha+1)} - 2r^{-(\alpha+1)}) g_{\alpha}, \quad (4.112)$$

por lo tanto

$$f = \sum_{\alpha=1}^{\infty} g_{\alpha} (\alpha - 2) \int r^{-(\alpha+1)} dr,$$

$$= f_o + \sum_{\alpha=1}^{\infty} g_{\alpha} (\alpha - 2) \frac{r^{-\alpha}}{-\alpha}. \quad (4.113)$$

Por la condición de frontera (4.99) $f_o = 1$, entonces

$$f = 1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} g_{\alpha} \left(\frac{2}{\alpha} - 1 \right) r^{-\alpha}. \quad (4.114)$$

Se sustituyen ahora f , g y η , con sus derivadas, en la ecuación (4.110) resultando

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n r^{-n} \left[\sum_{\alpha=1}^{\infty} g_{\alpha} (\alpha^3 - 2\alpha^2 - 5\alpha + 6) r^{-\alpha} \right] - \\ & \sum_{n=1}^{\infty} n \eta_n r^{-n} \left[\sum_{\alpha=1}^{\infty} g_{\alpha} (-2\alpha^2 + 5\alpha + 2) r^{-\alpha} \right] + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \eta_n r^{-n} \left[\sum_{\alpha=1}^{\infty} g_{\alpha} \left(\alpha - 2 + \frac{2}{\alpha} \right) r^{-\alpha} \right] + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \eta_n r^{-n} = 0. \end{aligned} \quad (4.115)$$

Si se definen

$$a(\alpha) = \alpha^3 - 2\alpha^2 - 5\alpha + 6, \quad (4.116)$$

$$b(\alpha) = -2\alpha^2 + 5\alpha + 2 \quad (4.117)$$

$$\text{y } c(\alpha) = \alpha - 2 + \frac{2}{\alpha}. \quad (4.118)$$

Entonces, la ecuación (4.115) puede reescribirse como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \{ g_{\alpha} a(\alpha) r^{-\alpha} + \eta_n g_{\alpha} [a(\alpha) - nb(\alpha) + n(n+1)c(\alpha)] r^{-n+\alpha} + n(n+1) \eta_n r^{-n} \} = 0. \quad (4.119)$$

Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Pi_i r^{-i} = 0, \quad (4.120)$$

donde

$$\Pi_i = g_i a(i) + i(i+1)\eta_i + \sum_{j=1}^{i-1} g_j \eta_{i-j} [a(i) - (i-j)b(i) + (i-j)(i-j+1)c(i)]. \quad (4.121)$$

Pero por unicidad de expansión en serie $\Pi_i = 0, \forall i$. Entonces, para $i = 1, \dots, 4$ se tiene que

$$\Pi_1 = (0)g_1 + 2\eta_1 = 2\eta_1 = 0, \Rightarrow \eta_1 = 0, \quad (4.122)$$

$$\Pi_2 = -4g_2 + 6\eta_2 = 0, \Rightarrow g_2 = \frac{3}{2}\eta_2, \quad (4.123)$$

$$\Pi_3 = (0)g_3 + 12\eta_3 - 4g_1\eta_2 = 0, \Rightarrow g_1 = 3\frac{\eta_3}{\eta_2}, \quad (4.124)$$

$$\Pi_4 = -6g_4 + 20\eta_4 - 3g_1\eta_3 - 6g_2\eta_2 = 0, \Rightarrow g_4 = \frac{20}{6}\eta_4 - \frac{1}{2}g_1\eta_3 - g_2\eta_2,$$

y, en general, para $i > 2$ se tiene que

$$g_i = -\frac{i(i+1)\eta_i + \sum_{j=1}^{i-1} g_j \eta_{i-j} [a(i) - (i-j)b(i) + (i-j)(i-j+1)c(i)]}{a(i)}. \quad (4.125)$$

Esta última es una fórmula de recurrencia para los coeficientes de g en términos de los coeficientes de orden menor y de los coeficientes η_j con $j < i$, que son conocidos. Aquí es importante observar que la relación (4.122), muestra que el coeficiente η_1 debe ser necesariamente cero, además de que no da información sobre g_1 . Del mismo modo, la relación (4.124) no da información sobre g_3 , aunque sí da la forma de g_1 , siempre y cuando $\eta_2 \neq 0$. Esto se debe a que $a(1) = a(3) = 0$. Es fácil observar que ninguna de las relaciones subsecuentes dará información extra sobre los coeficientes g_1 y g_3 . Por lo tanto, en general, estos coeficientes están indeterminados. Pero se necesita que estén indeterminados ya que hay dos condiciones de frontera que se deben satisfacer. Entonces, para tener esas dos constantes libres, se hará en general $\eta_2 = 0$, y por ende $\eta_3 = 0$ (4.124). Esto introduce restricciones sobre el modelo, nos dice que η no es todo lo flexible que se

esperaba. Pero esto no molesta a nuestros propósitos ya que nos interesa un modelo que conste de uno o dos términos a lo sumo (además del término η_0) y que tengan potencias negativas grandes ($n > 5$, en la ec. 4.108).

Para calcular explícitamente la función $g(r)$ es necesario calcular los coeficientes g_i , pero estos dependen de los coeficientes η_i , por lo que es necesario decir algo sobre la forma de la serie para η . Es decir, hay que dar la forma explícita de η .

Se propone que de la infinidad de coeficientes libres η_i sólo η_{10} sea distinto de cero, es decir, el modelo en su forma adimensional es

$$\eta = 1 + \eta_{10}r^{-10}. \quad (4.126)$$

Esta función cumple con las características deseadas. Toma el valor asintótico uno lejos de la esfera y al aproximarse a la esfera cambia rápidamente. La manera en que cambia es controlada por el signo y la magnitud del coeficiente η_{10} . La viscosidad, al acercarse a la esfera, aumentará si η_{10} es positivo y disminuirá si es negativo.

Dada esta forma de la viscosidad, los coeficientes g_i que no se anulan son g_1 y g_3 , que serán determinados a partir de las condiciones de frontera, y los que dependen sólo de η_{10} , g_1 y g_3 ($g_{10}, g_{11}, g_{13}, g_{20}, g_{21}, g_{23}, g_{30}, g_{31}, g_{33}, \dots, etc$). La función g escrita sólo en términos de η_{10} , g_1 y g_3 es

$$g(r) = \frac{g_1}{r} + \frac{g_3}{r^3} - \frac{55}{378} \frac{\eta_{10}}{r^{10}} - \frac{3}{52} g_1 \frac{\eta_{10}}{r^{11}} - \frac{29}{270} g_3 \frac{\eta_{10}}{r^{13}} + \frac{2615}{40698} \frac{\eta_{10}^2}{r^{20}} + \frac{5}{184} g_1 \frac{\eta_{10}^2}{r^{21}} \\ + \frac{3277}{58500} g_3 \frac{\eta_{10}^2}{r^{23}} - \frac{14013785}{339909696} \frac{\eta_{10}^3}{r^{30}} - \frac{95185}{5355504} g_1 \frac{\eta_{10}^3}{r^{31}} - \frac{28552501}{753480000} g_3 \frac{\eta_{10}^3}{r^{33}} + (4.127)$$

Los primeros dos términos corresponden a la función $g(r)$ para el caso homogéneo, que es recuperado en todo momento al hacer $\eta_{10} = 0$.

En general la serie de g es infinita, incluso para el modelo (4.126). Para hacer cálculos explícitos hay que cortar la serie en algún punto. Se sabe que la serie converge, pero no

se sabe la forma de la convergencia. Para tener una idea de la forma de la convergencia y saber que error se comete al cortar la serie se hace un cálculo de la función justo en la frontera de la esfera ($r = 1$), que es donde pueden existir más dificultades, ya que dadas las potencias de r en la función g la convergencia para $r > 1$ es extremadamente rápida. Ahora $g(1)$ sólo depende de los coeficientes g_1, g_3 y η_{10} . Para el cálculo se usarán $g_1 = \frac{3}{4}$ y $g_3 = -\frac{3}{4}$, que son los valores que éstos toman en el caso homogéneo [14],[8], y que, como se verá más adelante, son los términos más importantes en el caso no homogéneo. Al coeficiente η_{10} se le dará el valor de uno. Con base en esto la suma de los primeros 17 términos de la función g es la que se ilustra en la figura (4-8).

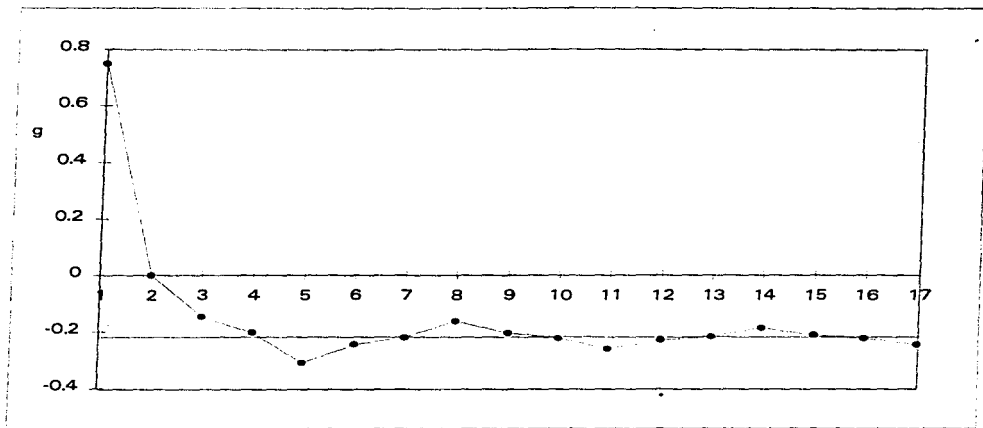


Figura 4-8: Suma de los primeros 17 términos de la serie para g en $r = 1$ y con $g_1 = 0.75$, $g_3 = -0.75$ y $\eta_{10} = 1$.

Se ve en la figura cómo la serie se aproxima alternadamente al valor de convergencia (~ -0.219). Cada tres términos hay un cambio de signo, de manera que la serie oscila

alrededor del valor de convergencia. Esto asegura una convergencia más rápida.

Como una primera aproximación se tomarán los primeros tres términos de la serie, es decir, sólo el primer término que contribuye a la inhomogeneidad lo que implica un error. Es claro de la figura (4-8) que tomar hasta el cuarto término hubiera sido una excelente aproximación, pero los cálculos son extremadamente largos y tediosos. En el resto ($r > 1$) del medio la convergencia será más rápida y por ende el error más pequeño.

De modo que

$$g(r) = \frac{g_1}{r} + \frac{g_3}{r^3} - \frac{55}{378} \frac{\eta_{10}}{r^{10}}. \quad (4.128)$$

Sustituyendo ésto en la ec. (4.114), se tiene que

$$f(r) = 1 + \frac{g_1}{r} - \frac{1}{3} \frac{g_3}{r^3} + \frac{22}{189} \frac{\eta_{10}}{r^{10}}. \quad (4.129)$$

Para determinar los valores de g_1 y g_3 se usan las condiciones de frontera (4.101). Por lo tanto

$$g_1 = -1 + \frac{1}{3} g_3 - \frac{22}{189} \eta_{10} \quad (4.130)$$

$$y \quad g_3 = \frac{3}{4} + \frac{11}{56} \eta_{10}, \quad (4.131)$$

entonces,

$$\begin{aligned} g(r) &= -\frac{3}{4r} - \frac{11}{216r} \eta_{10} + \frac{3}{4r^3} + \frac{11}{56r^3} \eta_{10} - \frac{55}{378} \frac{\eta_{10}}{r^{10}} \\ y \quad f(r) &= 1 - \frac{3}{4r} - \frac{11}{216r} \eta_{10} - \frac{1}{4r^3} - \frac{11}{168r^3} \eta_{10} + \frac{22}{189} \frac{\eta_{10}}{r^{10}}. \end{aligned} \quad (4.132)$$

Para el cálculo de h se recurre a la ecuación (4.97), obteniendo

$$h(r) = -\frac{3}{2r^2} - \frac{11}{108r^2} \eta_{10} + \frac{5}{27} \frac{\eta_{10}}{r^{11}} + 6 \frac{\eta_{10}}{r^{12}} + \frac{11}{27} \frac{\eta_{10}^2}{r^{12}} + \frac{4180}{189} \frac{\eta_{10}^2}{r^{21}} - \frac{25}{2} \frac{\eta_{10}}{r^{14}} - \frac{275}{84} \frac{\eta_{10}^2}{r^{14}}. \quad (4.133)$$

Como originalmente en la función g sólo se tomó en cuenta hasta el término con r^{-10} , y la máxima potencia de h es una menor que la de g , por consistencia, sólo se tomarán en cuenta los primeros tres términos. Entonces

$$h(r) = -\frac{3}{2r^2} - \frac{11}{108r^2}\eta_{10} + \frac{5}{27}\frac{\eta_{10}}{r^{11}}. \quad (4.134)$$

Ahora, ya se tiene una expresión explícita para las funciones f , g y h . Haciendo uso de las fórmulas (4.92)-(4.94) es posible calcular los campos de velocidad y presión. El campo de velocidades escrito, en variables adimensionales ($u_i = \frac{u_i}{U_0}$), está dado por

$$u_r(r, \theta) = \left(1 - \frac{3}{2r} - \frac{11}{108r}\eta_{10} + \frac{1}{2r^3} + \frac{11}{84r^3}\eta_{10} - \frac{11}{378}\frac{\eta_{10}}{r^{10}}\right) \cos \theta \quad (4.135)$$

$$y \quad u_\theta(r, \theta) = -\left(1 - \frac{3}{4r} - \frac{11}{216r}\eta_{10} - \frac{1}{4r^3} - \frac{11}{168r^3}\eta_{10} + \frac{22}{189}\frac{\eta_{10}}{r^{10}}\right) \sin \theta. \quad (4.136)$$

y la presión es

$$p(r, \theta) - p_o = \left(-\frac{3}{2r^2} - \frac{11}{108r^2}\eta_{10} + \frac{5}{27}\frac{\eta_{10}}{r^{11}}\right) \cos \theta. \quad (4.137)$$

Finalmente el arrastre, según la fórmula (4.107), es

$$\bar{F} = 6\pi + \frac{13}{9}\pi\eta_{10} - \frac{22}{9}\pi\eta_{10}^2. \quad (4.138)$$

En las últimas cuatro expresiones el caso homogéneo es recuperado si se hace $\eta_{10} = 0$ [10][2]. En el caso de la fuerza, se recupera el arrastre de Stokes, que con todas sus unidades es $F_s = 6\pi a\eta_o U_o$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{F}{F_s} &= 1 + \frac{13}{54}\eta_{10} - \frac{11}{27}\eta_{10}^2, \\ &\cong 1 + 0.2407\eta_{10} - 0.4074\eta_{10}^2. \end{aligned} \quad (4.139)$$

Hay que recordar que estos resultados han sido obtenidos a partir de cortar la serie para la función g de un infinidad de términos a solamente tres. Pero estos resultados dan la

primera aproximación para el comportamiento del fluido en caso de que se tenga una viscosidad que cambie cerca de la esfera, con la virtud de que todos éstos se reducen al caso conocido de viscosidad constante. Si se desea obtener un resultado más preciso, simplemente hay que incluir más términos en la serie correspondiente a la función g . El único problema es de trabajo, el aumentar un término a la serie hace el desarrollo mucho más tedioso y los resultados tendrán más términos, pero el procedimiento es exactamente el mismo. El hecho de haber escogido η_{10} como el único coeficiente distinto de cero en el modelo fue completamente arbitrario y de conveniencia ya que con dos términos se logra reproducir la forma deseada para la inhomogeneidad. Se puede tomar cualquier otro coeficiente (excepto η_1, η_2 o η_3) o varios si se desea; el procedimiento será el mismo. Dada la forma general de la viscosidad (4.108) es posible formar una gran variedad de funciones analíticas con un comportamiento semejante al deseado y encontrar una solución al problema. De modo que una vez más se ha obtenido una forma de resolver el problema de viscosidad no homogénea con una gran flexibilidad sobre la función de la viscosidad.

4.5 Discusión

En el capítulo tres se muestran algunos de los perfiles típicos en flujos turbulentos medios. En el capítulo siguiente se encontró la solución analítica para el flujo de Couette plano y de Poiseuille con viscosidad no homogénea. En esta sección se hará un comparación entre los resultados experimentales y las soluciones analíticas. Con este propósito se tratará de ajustar estas últimas a los resultados experimentales por medio los parámetros libres de la función para la viscosidad.

Para el flujo de Couette plano se utiliza el mismo modelo del capítulo anterior, de modo que la función para la viscosidad es

$$\eta(y) = \eta_o + \eta_f \left(e^{-\frac{y}{\lambda}} + e^{\frac{y-1}{\lambda}} \right). \quad (4.140)$$

Como se ha visto, en el caso de flujos turbulentos la inhomogeneidad va a cargo de la viscosidad turbulenta o viscosidad de eddy. Ésta disminuye conforme se aproxima a las fronteras. Para poder encontrar un perfil semejante al del flujo turbulento se necesita que $\eta_o > \eta_f$. Con los valores $\eta_o = 5$, $\eta_f = -4.9995$ y $\lambda = 0.108$, la función para la viscosidad toma la forma que se muestra en la gráfica (4-9).

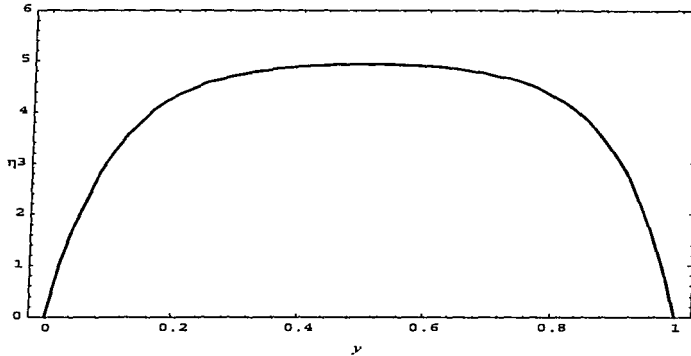


Figura 4-9: Función viscosidad entre dos placas paralelas para modelar un flujo turbulento medio.

Utilizando este modelo para la viscosidad se obtiene el perfil que se muestra en la gráfica (4-10).

Los puntos en la gráfica representan los datos experimentales para flujos turbulentos medios entre placas paralelas, con número de Reynolds de 3.4×10^4 [16]. Se observa cómo el perfil obtenido analíticamente se ajusta muy bien a los datos experimentales.

En el caso de flujo dentro de tubos se utiliza también el mismo modelo que se manejó en la sección (4.2) que es

$$\eta = \eta_o + (\eta_f - \eta_o) e^{\frac{\eta-1}{s}}. \quad (4.141)$$

Aquí también se trabajará con viscosidades que disminuyen al aproximarse a las paredes. Se presentan dos casos distintos. Los valores de η_o y s fueron los mismos en ambos casos y son $\eta_o = 5$ y $s = 0.14$. El único parámetro que es diferente es el de la viscosidad en la frontera, y es

$$(a) \eta_f = 2.5 \times 10^{-3},$$

$$(b) \eta_f = 3 \times 10^{-7}.$$

Con estos valores se obtienen los perfiles de velocidad que se muestran en la gráfica (4-11).

Los puntos sobre la gráfica representan datos experimentales de flujos turbulentos medios en tubos [16], para números de Reynolds de:

$$(a) R_e = 4 \times 10^3,$$

$$(b) R_e = 3.2 \times 10^{-6}.$$

Se observa que cada curva se ajusta bastante bien a uno de los conjuntos de datos. Lo interesante de esto es que el número de Reynolds de cada conjunto de datos coincide exactamente con el inverso del valor de la viscosidad en la frontera de la curva correspondiente. Esto es, mientras más pequeño sea el valor de la viscosidad en la frontera, el modelo representará un flujo con un número de Reynolds mayor. Lo importante es que ha sido posible hacer coincidir uno de los parámetros libres del modelo con el número de Reynolds del flujo que se quiere describir, dejando el otro parámetro (s) fijo. Así el modelo propuesto, además de ajustarse muy bien a los datos experimentales puede servir, refinando el procedimiento, para predecir esas distribuciones medias de velocidad simplemente encontrando el valor preciso de s en cada caso.

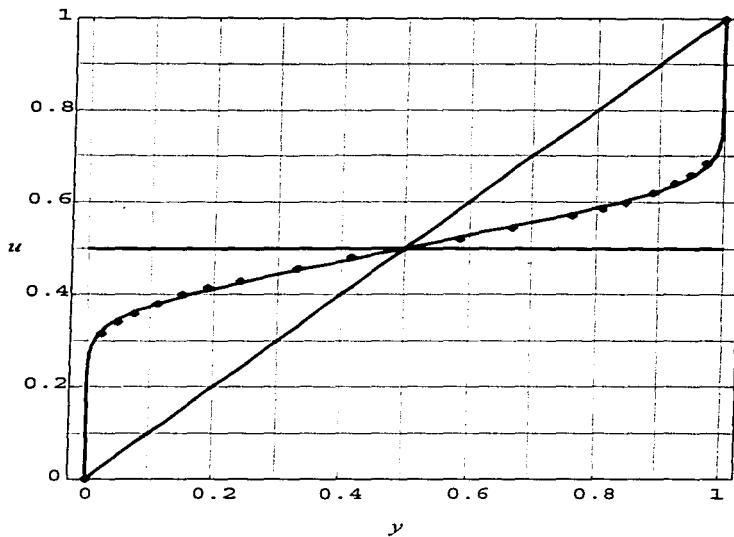


Figura 4-10: Perfil de velocidad en el flujo de Couette plano con una viscosidad no homogénea. Los puntos representan datos experimentales obtenidos por H.Reichardt [16].

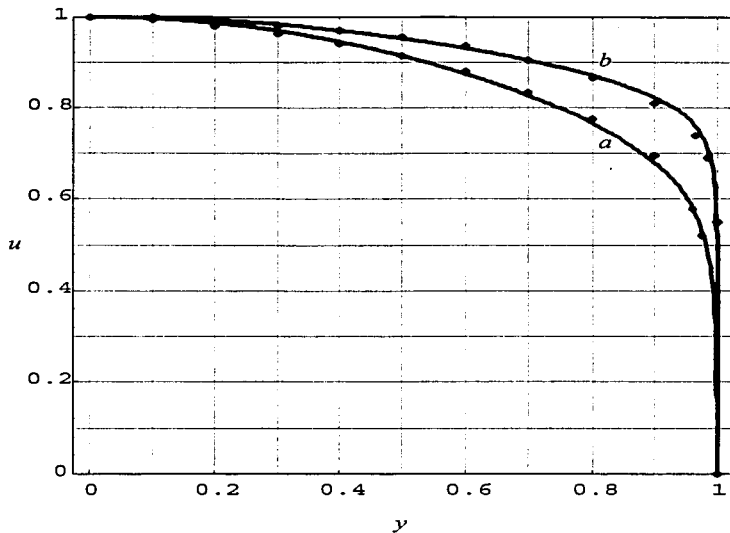


Figura 4-11: Distribución de velocidades en tubos variando el parámetro η_f . Los puntos representan datos experimentales obtenidos por Nikuradse para diferentes números de Reynolds [16].

Conclusiones y perspectivas.

En principio se ha visto que es posible escribir en forma muy general a las ecuaciones constitutivas, en particular para el tensor de esfuerzos, con la única restricción de que su dependencia con el tensor de rapidez de deformación sea lineal. Estas ecuaciones incluyen efectos tan complejos como efectos de memoria, efectos no locales y cualquier anisotropía u homogeneidad. Trabajando los casos particulares de estas ecuaciones se puede llegar a describir y entender una gran cantidad de comportamientos poco usuales presentes en la naturaleza.

Además de las breves discusiones y la deducción de las ecuaciones constitutivas para los casos de fluidos transversalmente isótropos y viscoelásticos, el análisis de fluidos con viscosidad no homogénea indica que introducir este tipo de efectos puede ser un buen método para describir a una gran variedad de fluidos en los cuales los efectos de las fronteras sean importantes. El hecho de atribuirle a la viscosidad la totalidad de los efectos producidos por la presencia de paredes sólidas parece funcionar muy bien, además de ser una manera fácil de trabajar las inhomogeneidades.

Las ecuaciones obtenidas a partir de estas suposiciones para los casos estudiados son evidentemente más complicadas que en el caso homogéneo. En todos los casos se obtuvieron soluciones con una gran flexibilidad en la forma de la inhomogeneidad, ya sea que esas soluciones hayan sido obtenidas en forma exacta, aproximada, o numérica. Esto significa que es posible encontrar soluciones a los problemas planteados para muy distintos comportamientos de la viscosidad, es decir, para sistemas muy diferentes. Una

virtud de todos los resultados encontrados es que, si se hace tender a la viscosidad a una constante (independiente de la posición), éstos se reducen a los conocidos, para fluidos homogéneos.

En las posibles aplicaciones presentadas, se vió que efectivamente son sistemas en los que el uso de este tipo de modelos puede dar muy buenos dividendos, por lo menos a nivel descriptivo. En el caso de flujos turbulentos medios, que fue en el único en el que se hizo un ajuste de la teoría con experimentos, se tuvo éxito en reproducir los perfiles de velocidad en las dos geometrías estudiadas. Además se encontró una coincidencia entre el número de Reynolds del flujo con el inverso de uno de los parámetros del modelo utilizado para describirlo. Esto hace pensar que mediante este método es posible llegar a predecir la forma de los perfiles conociendo las características del flujo y del fluido, que es el objetivo primordial.

Se puede concluir que la ecuación constitutiva de un fluido newtoniano generalizada puede ser aplicada a sistemas que a primera vista parecen muy complejos y que históricamente han sido estudiados con ecuaciones constitutivas muy complicadas [3].

En este trabajo han quedado varias cosas pendientes. En primer lugar la parte de fluidos anisótropos no se ha estudiado como en un principio se pretendía. En el capítulo dos se dedujeron las ecuaciones constitutivas correspondientes a un fluido transversalmente isótropo de dos constantes. El siguiente paso es tratar de resolver las ecuaciones correspondientes a casos particulares con diferentes geometrías y hacer un estudio de las aplicaciones que este tipo de resultados pudiera tener.

En cuanto a la parte de fluidos no homogéneos hay mucho trabajo por delante. Se pretende hacer un estudio minucioso sobre las aplicaciones. Primero a los flujos turbulentos, trabajo que no fue terminado por completo, y luego hacer lo mismo para fluidos poliméricos, al grado que se puedan determinar los valores de los parámetros del modelo para cada tipo de polímero. Se pretende también buscar nuevos sistemas susceptibles de ser descritos del mismo modo.

El problema de una esfera sólida en un flujo uniforme con viscosidad no homogénea fue resuelto, pero también se atacó el problema de una gota de fluido con viscosidad no homogénea inmersa en un flujo uniforme. Este último no se concluyó, y se tiene como perspectiva terminarlo y comparar ambos con datos experimentales.

Otro punto que sería bueno desarrollar es el del enfoque molecular. Un estudio sobre la forma de la inhomogeneidad utilizando funciones de distribución radial próximas a fronteras daría un sustento teórico fuerte al modelo. También permitiría tener la información completa para la descripción de un fluido, sin necesidad de construir modelos ad hoc y ajustar parámetros.

Bibliografía

- [1]
- [2] Batchelor G. K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, (Cambridge University Press, 1967).
- [3] Bird, R.B., R.C. Armstrong, O. Hassager, *Dynamics of polymeric liquids*, (Vol 1, John Wiley & Sons., 1987).
- [4] Chevray R. , J. Matthieu, *Topics in Fluid Mechanics*, (Cambridge University Press, 1993).
- [5] Currie I. E., *Fundamental Mechanics of Fluids*, (McGraw-Hill, 1974).
- [6] Hinze J.O., *Turbulence* (McGraw-Hill, 1975).
- [7] Khabakhpasheva E.M., V.I. Popov, A.N Kekalov, E.S. Mikhailova, *Flow of viscoelastic fluids in tubes*, J. of Non Newtonian Fluid Mechanics Vol. 33 N.3, 1989.
- [8] Landau L.D. ,E.M. Lifshitz, *Curso de Física Teórica, Mecánica de Fluidos* (Editorial Reverté, 1991).
- [9] Landau L.D. ,E.M. Lifshitz, *Curso de Física Teórica, Teoría de la Elasticidad* (Editorial Reverté, 1969).
- [10] Levich V.G., *Physicochemical Hydrodynamics*, (Prentice Hall, 1962).

- [11] Mendoza Blanco, A., *Fluidos no homogéneos y no isotrópicos*, Tesis doctoral, Facultad de Ciencias 1995.
- [12] Nadeau G. , *Introduction to Elasticity*, (Holt Rinehart and Winston, Inc. 1964).
- [13] Peralta-Fabi R. , *On the foundations of the Navier-Stokes equations*, Rev.Mex. Fís. 37-1 (1991).
- [14] Peralta-Fabi, R., *Mecánica de fluidos*, Notas de clase 1994.
- [15] Santamaría Holek, I., *Flujos con Simetría Axial*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias 1995.
- [16] Schlichting H., *Boundary-Layer Theory*, (McGraw-Hill, 1968).
- [17] Sneddon I.N. *Special functions of mathematical physics and chemistry*, (Interscience Publishers, 1956).
- [18] Soto, R., Programa para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias por medio del método de Runge-Kutta de cuarto orden, 1992.
- [19] Tan, K.L., C. Tiu. *Entry Flow behaviour of viscoelastic fluids in an annulus*, J. of Non Newtonian Fluid Mechanics Vol. 3 N.2, 1980.