UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
A C A T L A N

"LA TEORIA DE LOS JUEGOS COOPERATIVOS N-PERSONALES CON UTILIDAD TRANSFERIBLE Y SUS APLICACIONES A TRES EMPRESAS DE CALZADO QUE PUEDEN FORMAR UN MONOPOLIO"

T E S I S

QUE PARA OPTAR EL TITULO DE

LICENCIADO EN MATEMATICAS APLICADAS Y COMPUTACION

P R E S E N T A :

GUILLERMO MENDOZA CUAUTLA

DIRECTOR DE TESIS: MAT. HECTOR ARGUELLEZ TEJEDA

ACATLAN, ESTADO DE MEXICO 1997

A mis padres por sus ejemplos,
paciencia y esfuerzos.

A mis hermanos por
la gratificación de serlo.

A quienes me alentaron
en todo momento cuando
las cosas salían mal.

A aquellas personas que por
motivos de espacio, tiempo u
olvido no menciono.

PROLOGO

Las ideas son incestuosas se entremezclan unas con otras. Danzan y copulan entre si. Por lo mismo, no hay forma de decir: estas ideas son de tal o cual persona, estas otras de aquel y el resto es obra personal. No hay un punto exacto para desenmarañar la madeja.

Antes de continuar le advertimos que la tesis es rigurosa y áspera (si no gusta de las matemáticas). Pero estas características no sólo son útiles y esenciales para el estudio de toda técnica en ciencias exactas, sino que resulta ser un entrenamiento maravilloso, bueno aun para aquellos que quizá nunca empleen la teoría de los juegos como herramienta cotidiana.

Para poder entender las definiciones necesitará tener conocimientos previos de: estadística, probabilidad, álgebra, cálculo, teoría de gráficas e investigación de operaciones. Si su interés no se encuentra en la fundamentación matemática y ha trabajado con la teoria de los juegos puede pasar al capítulo III. En caso contrario , en los capítulos I y II se exponen las definiciones y ejemplos necesarios para empaparlos de las técnicas en cuestión.

Durante el transcurso del tiempo, el roce con muchas personas ha sido benéfico para escribir este trabajo de titulación. Son tantas que no terminaria de dar gracias a todas. Sin embargo, deseo expresar mi gratitud a aquellos con los que me encuentro más especialmente en deuda. A mis compañeros y amigos Zaharina Sánchez y Ernesto Ramos por su interés y amistad. A Edna por la inmensidad de una sonrisa en ratos amargos. Mi más profundo agradecimiento a los revisores, por sus comentarios y críticas; ellos hicieron magníficas sugerencias. Gracias a mi asesor. Su apoyo en mi tesis y mi capacidad demuestra que es un hombre no sólo compasivo y comprensivo, sino también muy inteligente.

CONTENIDO

Página

INTRODUCCION

OBJETIVO

Existe cierta renuencia por parte de los analistas y tomadores de decisiones a emplear la teoría de los juegos como una herramienta potencial para analizar , describir y explicar fenómenos (por lo general de tipo económico) bajo riesgo. Muchas veces la renuencia no es por que la teoría sea mala , muy por el contrario , la desconfianza proviene de un desconocimiento total del método empleado o de la oposición natural que algunas personas proyectan hacia el empleo de "nuevas" herramientas.

Aún más dañino , es que las personas que poseen los conocimientos no hacen lo posible por transmitirlos. Por eso , ahora es necesario dar a conocer los beneficios que tienen las diversas técnicas de simulación y en especial la teoría de juegos para n-individuos , donde la base del problema radica en obtener mejores resultados por medio de la cooperación.

En realidad , existen pocos estudios efectuados en México sobre la teoria de los juegos cooperativos para n individuos con utilidad transferible y aún más pobre es su difusión. En la búsqueda por ampliar y aportar conocimientos actualizados y aplicables , surge como objetivo específico de este proyecto de investigación precisamente exponer los métodos de solución de la teoría mencionada , estudiando los conceptos básicos y sus propiedades para obtener resultados en las aplicaciones realizadas a tres empresas de calzado que pueden formar un monopolio.

INTRODUCCION

"Después de todo, de lo que se trata es de abordar problemas nuevos y de resolverlos por métodos nuevos si es necesario, y no de regalarse las neuronas repitiendo *ad infinitum* las demostraciones de Euclides".

Dr. Santiago López de Medrano.

De cara al fin del milenio, ya no se puede cerrar los ojos ante los avances tecnológicos de nuestra época. Con el advenimiento de las redes computacionales ahora es posible tener acceso a todo el mundo mediante una computadora personal. Una de las ventajas inherentes a las redes es que todas las principales corporaciones del mundo, decenas de miles de compañías pequeñas, medianas y grandes comienzan a hacer negocios a través de la red. Para enfrentar estas situaciones se debe estar preparado con toda la información disponible estimando las ventajas y desventajas generadas.

Las negociaciones efectuadas en la red permiten mayores alcances y mejores beneficios. Pero en los procesos de negociación derivados de arreglos mutuos a que llegan las partes (aún en la red), muchas veces un grupo de individuos tiene que hacer una decisión única conjunta. Es inverosímil esperar que las decisiones empresariales caigan del cielo por mandato divino. Así, la decisión del grupo depende de las resoluciones de sus miembros aunque no siempre en la misma forma. Si alguno de los miembros no se encuentra bien informado puede causar serios problemas a su grupo (compañía o empresa). Por eso la gente encargada de la toma de decisiones debe ampliar su visión y explorar "nuevas" técnicas aprovechando las ventajas que estas les proporcionan.

Por lo general al tomar decisiones es necesario utilizar modelos de teoría de los juegos, ya que se requiere echar mano de un conjunto de posibles acciones y consecuencias de comportamiento de las personas involucradas en la negociación. Cualquier empresa por pequeña que esta sea, necesita estimar los efectos de una resolución tomada bajo riesgo. Las decisiones pueden llegar a tomar gran importancia en cuanto a sus consecuencias. Para evitar que estas decisiones puedan afectar a la compañía deben preveerse los alcances con mayor exactitud, esto es, debe contarse con una técnica que simule los procesos de negociación en la realidad y que permita una visión confiable del procedimiento.

Surge de aquí la oportunidad de internarse en la teoría de los juegos con fines de predicción y entre ésta, los juegos cooperativos para n-personas con utilidad transferible. Hasta hace unos pocos años, la teoría de los juegos se situaba en lugares poco privilegiados (en cuanto a técnicas de simulación se refiere) pero finalmente está siendo aceptada y su campo de acción ha ido expandiéndose despertando el interés de los teóricos por sus propiedades matemáticas y sus diversas aplicaciones a los problemas económicos, políticos y sociales. Tal desarrollo ha generado una ola creciente de investigaciones al respecto.

Se han hecho grandes esfuerzos para explicar con rigor los argumentos pero en términos lo más sencillo posible con el fin explicito de facilitar la comprensión de la teoria y motivar su utilización en los distintos procedimientos de solución que se expondrán. La presentación de lemas, teoremas, axiomas y demás recursos matemáticos proporcionan la credibilidad suficiente a la teoría, armando el esqueleto básico que la sostiene. Para la gente poco familiarizada con la teoría se brinda una excelente oportunidad para enriquecer sus conocimientos y profundizar en el tema.

Primero, se hará una recopilación histórica sobre las aportaciones a la teoría de los juegos cooperativos para n-personas. Después de exponer algunos conceptos básicos (capitulo I) en el capítulo II se examinarán diversos juicios de solución como son: el núcleo, los conjuntos estables, el conjunto de negociación, el Valor de Shapley y el índice de poder de Banzhaf-Coleman entre otros. El tercer capitulo incluye algunas aplicaciones reales referentes a los procesos de negociación exhibiendo las posibles soluciones por algunos de los métodos descritos en el segundo capitulo. De aquí en adelante se denotará a la teoría de los juegos cooperativos n-personales con utilidad transferible solamente como teoría de los juegos. Finalmente, se proporcionan una serie de conclusiones y recomendaciones sobre todos los capitulos implicados en el presente trabajo de investigación.

CAPITULO I

GENERALIDADES

GENERALIDADES

"En el pasado el uso de las matemáticas se reducía a la aritmética y a la geometría elemental, que eran las únicas disciplinas matemáticas bien asimiladas"

Michel Luntz

1. ANTECEDENTES HISTORICOS

El conflicto de intereses entre dos o más individuos en donde no todas las decisiones están bajo el control directo de los sujetos involucrados, es y ha sido desde el inicio del siglo un tema de discusión importante. Muchas personas se han dado a la tarea de construir y fundamentar toda una teoría que represente situaciones de conflicto de intereses. Por eso para las personas interesadas en profundizar sobre los aspectos históricos y las aportaciones que cada autor hizo a la teoría de los juegos, a continuación se exponen los trabajos (registrados) sobre el tema.

El primer trabajo matemático sobre el conflicto de intereses (teoría de los juegos) fue escrito por Ernesto Zermelo en 1912, pero su aportación no causó gran revuelo en esa época. Nueve años más tarde (1921) Emile Borel expresó gran interés por el trabajo de Zermelo dando una interpretación clara a la clase de problemas teóricos de juegos, además introdujo mediante las probabilidades, los conceptos de estrategias puras y mixtas. Sin olvidar que fue el primero en proponer el teorema del minimax. Pero las conjeturas de Borel lo arrastraron a creer que el teorema del minimax era falso en general, más no previó que pudiera cumplirse en casos especiales por eso sus estudios tampoco trascendieron (en su época)

Algunas otras aportaciones de éste último pionero se remontan a 1924 y 1927, sin embargo es hasta 1937 que se conoce uno de sus trabajos gracias a las traducciones de Flecher. Y no sólo Flecher hizo traducciones de las teorías de Borel. Una persona con, tal vez "más visión" que Emile Borel también contribuyo a la traducción de sus escritos. Tal personaje es John Von Neumann que en 1928 retoma el teorema del minimax demostrándolo bajo condiciones generales, creando asi la base fundamental de la teoría de los juegos. Por este hecho se le llamó el padre de la teoría de los juegos. En el mismo año Von Neumann publica un trabajo en donde expone la conversión de un mercado mediante el conflicto de intereses dentro de un capitulo en un libro de matemáticas. Y es por casualidad que en 1937 estudiando en economía las ecuaciones y métodos de producción (ambos conceptos totalmente ajenos a la teoria de los juegos) llega a deducciones que le condujeron al mismo teorema del minimax. Años más tarde establece y difunde éste teorema con la publicación del libro "Theory of Games and Economic Behavior" escrito conjuntamente con Oscar Morgenstern en 1944. En su libro crean el ambiente conceptual de la teoría de los juegos extendiéndolo a n-personas.

Para seguir el orden cronológico de los hechos se exponen los autores y sus aportaciones en distintas partes del relato. En la rama de los juegos para n-personas existe un concepto interesante y básico en cooperatividad: la comunicación. Para abordar el concepto

Mackinsey (1952) propone una solución conceptual que simplifica la forma de establecer la comunicación prejuego en juegos cooperativos.

A pesar de que en 1944 Von Neumann propone el conjunto estable (o solución de Von Neumann) como una solución, es hasta 1953 que Gilles da una condición necesaria para lo que resulta el primer concepto de solución que trata de encontrar resultados a diversos juegos denominado el núcleo. Contribuciones interesantes en el mismo año, son: las de Kuhn quién manifestó que para cada estrategia de comportamiento puede haber muchas estrategias mixtas que lo induzcan. También en estrategias, Thompson asigna como una solución intuitivamente satisfactoria a las estrategias compuestas.

En la búsqueda de conceptos de solución también se encuentran: Richardson [1946,1953,1955] quién propone la existencia de soluciones bajo ciertas hipótesis pero sin embargo no llegó a ningún teorema que garantice la solución para cada juego. Nering fundamenta las soluciones para cinco personas en un juego de suma constante. Mientras que las soluciones a los juegos simétricos son presentadas por Gelbaum.

No menos interesantes y fructíferas son las investigaciones de Lloyd Shapley. Gran estudioso del juego de n-personas pero desde el punto de vista de los jugadores. A partir de sus investigaciones obtiene un concepto de solución que arroja un resultado único para una amplia clase de juegos, cosa que no había logrado nadie. Esta solución peculiar tiene por nombre el Valor de Shapley y desde su creación ha impulsado un sin número de investigaciones en torno a éste por considerarlo insatisfactorio.

Hacia 1965 una solución similar al Valor de Shapley es propuesta por Banzhaf con ayuda de Coleman. Y se le dió el nombre de Indice de poder de Banzhaf-Coleman o simplemente Valor de Banzhaf-Coleman, porque pondera las coaliciones de igual forma que el Valor de Shapley pero con un valor equitativo para cada una de las coaliciones (independientemente del tamaño que tenga la coalición) y para hacer honor a sus creadores.

Enfrascados con el relato acerca de la búsqueda de conceptos de solución en 1966 Shubik y Shapley encuentran un concepto en donde se produce un acuerdo que restringe el área del núcleo. Este arreglo es llamado núcleo-ε.

Cuando las discusiones en relación a si todos los juegos tenían solución o núcleos no vacios se encontraban en pleno apogeo, William F. Lucas (1967) estructura un juego de diez personas (3 628 800 combinaciones u opciones para formar grupos y jugar unidos) en donde no existía el conjunto estable y su núcleo era vacio o sea no tenía solución. Anteriormente Lucas y Trall en 1963 intentaron trabajar con algo denominado forma de la función particionada o forma coalicional generalizada, en donde la formación de grupos y la cooperación es imprescindible. Proponiendo que una coalición puede obtener ventaja de la forma en como se asigna a los jugadores en coaliciones o grupos. Kelley (1970) en la misma línea de investigación que Lucas y Trall, propone una situación de coalición derivada de los juegos de n personas.

Cuatro años más tarde, un trabajo resalta por su importancia teórica, es el de Aumann y Shapley que demuestran la unicidad del Valor de Shapley para distintos espacios de juegos conteniendo a un conjunto de jugadores. Retomando a Shapley, éste en conjunción con

Dubey (1979), proporcionan algunas de las propiedades que facilitan la comprensión del Valor de Banzhaf-Coleman. También en 1979, Mashler, Peleg y Shapley estipulan las relaciones existentes entre el conjunto de negociación, el nódulo, el nucléolo y algunas otras estructuras para dar solución a diversos juegos.

En la década de los ochenta, múltiples investigaciones en teoría de los juegos han surgido. Entre las más sobresalientes destacan los análisis efectuados por Dubey, Neyman y Weber (1981) sobre la caracterización de todos los valores sin eficiencia. Los de Lucas (1972) retomados por Guillermo Owen (1982) quienes encuentran un gran rango de conceptos de solución para un juego en forma coalicional o de función característica. Este mismo año Dubey, Samet y Tauman reformulan los axiomas de Shapley traduciéndolos a un lenguaje menos teórico y más accesible. En 1983 Bennet retoma el núcleo y estudia un concepto de solución más cerrado con respecto a él.

Como anteriormente se mencionó, el Valor de Shapley ha causado gran revuelo estimulando las investigaciones alrededor de éste. Así, una de las primeras personas en exhibir sus resultados a la luz pública fue Young que en 1985 hace caso omiso del axioma de aditividad. Inmediatamente después en el mismo año, Myerson lanza una propuesta de solución que depende únicamente del juego y los subjuegos que se formen de éste generalizando el Valor de Shapley. Una propuesta más reciente de la ponderación de los Valores de Shapley la llevan a cabo Kalai y Samet (1987)

Pero no sólo Shapley despertó el interés sobre su valor. Para Leher, la sugerencia de un índice de poder hecho por Banzhaf-Coleman fue motivación suficiente para axiomatizarlo en

1988. La axiomatización de Leher y las investigaciones de Mas-Colell (1989) son las últimas aportaciones de que se tiene razón. Sin mencionar algunas otras aisladas las cuales con el beneficio de las redes de computadoras (específicamente Internet) se harán más evidentes y accesibles a todo mundo.

2. CONCEPTOS BASICOS Y DEFINICIONES

La teoría de los juegos en sus inicios, fue pensada para proporcionar una herramienta que permitiera un nuevo acceso a los problemas de tipo económico. Con el transcurso del tiempo esta idea se ha ido convulsionando cada vez más, hasta llegar al punto de invadir otras áreas del conocimiento humano. Lo que permite enriquecer y ampliar la teoría original. Antes de entrar en materia es necesario tener presentes algunos conceptos básicos y ciertas definiciones que ayudan a comprender la teoría empleada.

2.1. JUEGO, JUGADOR Y MOVIDA

Probablemente muchas personas al escuchar la palabra juego o jugador piensen en un rato de entretenimiento o diversión. Quizá para un niño lo más común sea identificarse con esta última idea. Pero para las personas responsables de la toma de decisiones significa mucho más que un pasatiempo, para ellos un *juego* es cualquier situación de conflicto de intereses en donde intervienen n-personas (varios individuos) o grupos denominados jugadores cuya serie de movimientos sucesivos o acciones se realizan bajo un conjunto de reglas previamente establecidas. Todo el conjunto de movidas tiene cierta influencia sobre el resultado final del juego.

De la misma forma que en un juego recreativo, el ***jugador*** es parte activa, sin embargo tampoco tiene el significado que podría esperarse (al menos no en teoría de juegos). En algunas situaciones es útil considerar como un sólo jugador a un grupo de individuos con intereses idénticos con respecto al juego. Cada vez que a un jugador le toque actuar o le toque un evento o tirada de suerte (aleatoria) se tendrá una ***acción*** o ***movida***. En el primer caso se llama "acción o movida personal" y en el segundo "acción o movida aleatoria".

En la acción personal un jugador elige una posibilidad de entre todo el conjunto que se le presenta en esa acción. La movida aleatoria resulta de una elección aleatoria de los movimientos a través de un mecanismo aleatorio. Para este caso en específico a cada movimiento se le asocia una probabilidad mayor o igual a cero. La suma de probabilidades debe ser igual a uno por ser dichas probabilidades exhaustivas, es decir :

☞ 1) $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$,

☞ ☞ 2) $p_i \geq 0$.

En general un juego quedará representado por el símbolo o letra griega Γ.

2.2. JUEGOS EN FORMA EXTENSIVA

Cuando se intenta describir un juego una de las primeras estructuras que surgen para hacerlo es la de árbol que es un caso particular de una gráfica. Existe la posibilidad de explicar un juego por medio de otras estructuras como la forma normal, pero la más sencilla es la arbórea. Para entender mejor esta idea a continuación se mencionan algunas definiciones relacionadas con la teoría de gráficas.

Una *gráfica G* es un conjunto de *vértices, puntos o nodos V* no vacío y un conjunto *E* de *arcos* (lineas) que se encuentran relacionados de tal forma que a cada línea e se le asocia un par de vértices v_i y v_j llamados inicial y terminal respectivamente.

Una *trayectoria* es una secuencia alternante (v_0, e_1, v_1, e_2,...,v_{n-1},e_n, v_n) y finita de vértices y aristas, iniciando en un vértice y terminando en otro, tal que cada línea es incidente al vértice inmediato anterior y posterior, y donde todos los puntos en la sucesión son distintos. Relación descrita en el gráfico número 1.

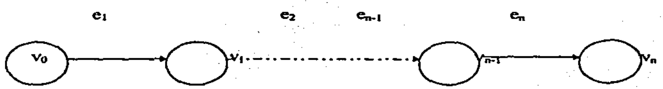

GRAFICO 1
SECUENCIA DE VERTICES Y ARISTAS

Un *paseo cerrado (ciclo)* es una sucesión en donde los vértices inicial v_0 y final v_n son iguales, es decir v_0=v_n.

Una *gráfica* se dice *conectada o conexa* si para todo par de vértices en G existe una trayectoria que los une. Entonces un *árbol* es una gráfica conexa que no tiene ciclos.

Al tomar un curso de acción, es decir, al realizar un movimiento o decisión (una cada vez a cada momento conforme avanza el juego) se describe una gráfica en forma de árbol y se irá agregando un vértice por cada elección. En el esquema de forma de árbol los vértices indican las posibles situaciones en todas las partidas factibles y las ramas que salen de ellos las diferentes alternativas a partir de cada situación. Todos los vértices a una misma altura corresponden a una posición del mismo orden y todas las ramas a una misma altura corresponden a una acción o movida del mismo orden. Cada juego tiene un número máximo de acciones v (cantidad de vértices totales en V) y por ende un número máximo de posiciones $v+1$: la posición inicial y la posición siguiente a cada movida. El número de vértices finales (ver gráfico 2, pág. 13) indican el número de partidas reales posibles.

2.2.1. Partida

Es común encontrar en la teoria de los juegos términos relacionados con diversas actividades de la vida. Citando como caso a los apostadores en los juegos de azar, ellos emplean muchas palabras comunes con diversas asignaturas escolares y considerando que de tales juegos parte la probabilidad y algunas otras materias relacionadas, no debe extrañarle la relación. Particularmente existe dentro de los juegos de cartas la palabra partida, la cual se retoma como un término de la teoria del conflicto de intereses. Para describir el término considere un árbol con vértice distinguido V_0. Antes de comenzar se reparten los vértices no terminales entre los jugadores y se asigna a cada punto terminal un pago para cada uno de los n jugadores ver el siguiente gráfico.

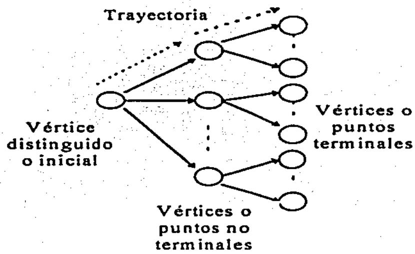

GRAFICO 2
REPRESENTACION DE UN JUEGO EN FORMA DE ARBOL

Se llamará ***partida*** a cualquier trayectoria desde V_0 (vértice inicial) hasta cualquier punto terminal. Una partida equivale a recorrer una sola vez el árbol sin pasar dos veces por una línea ni un vértice. Un algoritmo que permite observar el desarrollo de una partida es el siguiente :

Paso 1. El jugador al que se halla asignado el vértice distinguido V_0 elige una arista que incida en V_0.

Paso 2. La arista incidente en V_0 conduce a otro vértice (asignado a otro jugador o a él mismo) Este elige una opción de entre las disponibles.

Paso 3. Regresar al paso 2 y continuar hasta que se llegue al punto terminal. En cada vértice terminal se encuentra definido un pago para cada jugador.

Paso 4. Estando en el vértice terminal como no hay posibilidades de hacer más elecciones el juego termina.

2.2.2. Particiones, Subparticiones y Gráficas de Conjuntos

Si se tiene un conjunto E (conjunto de lineas y vértices) y un sistema P de conjuntos se dirá que P es una partición de E si :

- Cada elemento $P_i \in P$ pertenece a E y $P_i \neq \emptyset$.
- P es un sistema de conjuntos ajenos (sus elementos son diferentes entre sí)

Nota: No debe confundir el lector el conjunto E con el conjunto de arcos y tampoco el conjunto P con la letra que denota a las probabilidades.

Entonces, R es una subpartición de P si cada elemento $R_i \in R$ es subpartición de P sólo si cada elemento $R_i \in R$ es subconjunto de algún elemento $P_i \in P$. Una subpartición se forma al tomar unos cuantos elementos de todo el conjunto.

Utilizando estos conceptos en la representación de un juego para interpretarlo se considera a E la totalidad de las partidas realizables. Cada partida queda representada por un punto (vértice) y E por el área que contiene esos puntos. La primera acción constituye una partición de E y las siguientes movidas subparticiones sucesivas. Los conjuntos son ajenos puesto que una partida no puede comenzar en dos posiciones diferentes y así sucesivamente en las movidas subsecuentes, con cada decisión se genera una partida distinta de tal forma que corresponde a un subconjunto diferente. La última posición debe corresponder a conjuntos de un sólo elemento que forman las partidas razonables.

DEFINICIÓN 1.1. *Una partición $P=\{P_1,\ldots,P_n\}$ de E es una familia de subconjuntos $P_i \subseteq E$, $i=1,\ldots,n$ tal que $\bigcup_{i=1}^{n} P_i = E$ y si $i \neq j$ entonces $P_i \cap P_j = \varnothing$.*

La definición anterior dice que los diferentes subconjuntos de un juego $P=\{P_1,\ldots,P_n\}$ de E, deben ser iguales a todas las posibilidades de elección en el juego y que ninguna subpartición debe contener elementos de otra subpartición. Por ejemplo utilice el árbol del gráfico 2. Comience situándose en el vértice inicial, ahora recorra por una sola línea (arco) todos los vértices localizados en esa dirección (siguiendo la línea) hasta llegar al final, ese recorrido es una subpartición. Para formar otra subpartición realice el mismo procedimiento. Puede darse cuenta que las subparticiones no son nunca iguales a menos que recorra la misma partición nuevamente.

DEFINICIÓN 1.2. *La partición $R=\{R_1,\ldots,R_n\}$ es un refinamiento de las particiones $P=\{P_1,\ldots,P_n\}$ y $Q=\{Q_1,\ldots,Q_n\}$ si y sólo si cada vez que $R_i \cap (P_j \cap Q_k) \neq \varnothing$ se tiene que $R_i \subseteq (P_j \cap Q_k)$*

La interpretación de la definición 1.2 es sencilla, tome una subpartición P_1 (representa una sola trayectoria o recorrido) y elija un conjunto de elementos de esa subpartición asignándole el nombre de R_1 (refinamiento de la partición P_1) y ya esta.

Ahora considere un árbol con vértice distinguido o vértice inicial como el del gráfico 2. Recuerde que V denota al conjunto de vértices, entonces si se denota una partición $A_i = \{p \in V / i = \text{número de opciones o vértices en } p\}$ de V (A_i tiene la misma forma que la partición P_1 de la definición 1.2) como: $A = \{A_0, \ldots, A_m\}$. La partición $A = \{A_1, \ldots, A_m\}$ del conjunto de vértices V se llama partición de opciones y queda representado por $V \setminus A_0$ porque el conjunto A contiene a todos los vértices y A_0 es el conjunto de puntos terminales indicio de que se hizo un recorrido. Para entender mejor emplee el gráfico 2.

Con los elementos expuestos y regresando a la sección 2.2 lo único que resta es definir formalmente un juego finito de n-personas en forma extensiva.

DEFINICIÓN 1.3. *Un juego n-personal finito en forma extensiva se define como un árbol con vértice distinguido o inicial y las siguientes especificaciones :*

1) *Una partición $P = \{P_0, \ldots, P_n\}$ de $V \setminus A_0$.*
2) *Una partición $U = \{U_1, \ldots, U_n\}$ de $V \setminus A_0$ es un refinamiento de P y A de modo que ningún U_j contenga más de un vértice sobre una misma partida.*
3) *Una función de pagos $M: A_0 \to R^n$ que asigna pagos a los jugadores ,*
4) *Para cada $p \in P_0$ una función de probabilidades sobre las funciones incidentes en el vértice. Todas las alternativas deben seguir los axiomas de la probabilidad.*

El significado de cada componente asociada a la definición es :

P_i es el conjunto de vértices donde toma una decisión el jugador i. P_0 será el conjunto de vértices donde la elección se realiza al azar de acuerdo al punto 4 en la definición 1.3.

U es la información que posee cada jugador al tomar una decisión (el jugador i sabe que hace sus elecciones en algún punto de U, más no en cual de ellos) La familia de conjuntos de información del jugador i se denota por $U_i=\{U/U_i \subseteq P_i\}=\{U_i^1,\ldots,U_i^{m_i}\}$. Así, U es un refinamiento de las particiones P y A, $U_i^j \subseteq P_i \cap A_k$, todos los vértices de un conjunto de información tienen exactamente el mismo número de opciones M si $M(S)=(M_1(S),\ldots,M_n(S))$ para $S \in A_0$, entonces $M_i(S)$ es el pago para el jugador i en caso de realizar la partida S. Las funciones de pago M serán expuestas en la sección 2.5.

2.3. ESTRATEGIAS Y PUNTOS DE EQUILIBRIO

Como ya se mencionó existen términos en las actividades diarias de las personas que resultan similares en la teoría de los juegos. El caso que a continuación se describe es el de estrategia. Una ***estrategia*** es la enumeración completa de todos los movimientos que un jugador podrá usar (o de como se comportará) en cada situación que pueda surgir, ya sea por acciones aleatorias o por decisiones tomadas por otro jugador. Si se conocen todas las estrategias de cada jugador podrá predecirse el resultado del juego lo cual puede ser una ventaja o desventaja (el empleo de estrategias inadecuadas puede causar múltiples problemas)

La diferencia entre una estrategia y una partida estriba en que dentro de una partida el jugador puede considerar toda una amplia gama de estrategias. Así al finalizar la partida y entablar un nuevo juego (otra partida) el jugador contará con una nueva gama de estrategias para emplear. De las estrategias disponibles se pueden identificar dos tipos o clases: las estrategias puras y las estrategias mixtas.

2.3.1. Estrategias Puras

Una variante de los movimientos elegidos por un jugador son las estrategias puras. Para el jugador i, una ***estrategia pura*** es un plan previamente determinado que establece la secuencia de movimientos y contramovimientos que el contendiente i realizará durante un juego completo o una partida.

En un juego de n-personas las estrategias puras consisten de :

1) El conjunto $N=\{1,\ldots,n\}$ de jugadores para n-personas ,
2) Los n conjuntos de estrategias $S_1, S_2, \ldots, S_n$,
3) Los n valores reales para las funciones de pago $M_1, M_2, \ldots, M_n$, donde $M_i(S_1, S_2, \ldots, S_n)$ es la utilidad del pago para el jugador i cuando el jugador 1 usa la estrategia S_1, 2 usa S_2, . . ., y el jugador n usa la estrategia S_n.

DEFINICION 1.4. *Si $U_i = \{U_i^1, \ldots, U_i^{m_i}\}$ es la familia de conjuntos de información del jugador i, se define el espacio de estrategias puras S_i para el jugador i como :*

$$S_i = s_1 * \ldots * s_m \quad \textit{en donde} \quad s_j = \{1, \ldots, k\} \;\; \textit{si} \;\; U_i^j \subseteq P_i \cap A_k \, .$$

Se dirá que $\sigma_i \in S_i$ es una estrategia pura para el jugador i. También se dirá que el contendiente i elige una opción h en un vértice V en el conjunto de información U_i^j si $\sigma(U_i^j)=f(h)$[*1] $\in s_k$. Todas las opciones existentes en cada conjunto de información se ordenan progresivamente a partir del número uno; si en el j-ésimo conjunto de información para el jugador i, (U_i^j) se tienen k opciones $(U_i^j \subseteq P_i \cap A_k)$ al elegir una opción de σ_j se le asigna un número natural no mayor que k. Así, un elemento $\sigma_i \in S_i$, estará representado por un vector con tantas coordenadas como conjuntos de información tenga el jugador i, la coordenada σ_i representa la elección que el jugador i hace dentro del conjunto de información correspondiente en caso de que decida jugar con σ_i. Todo lo anterior queda resumido en el vector $\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$

Suponiendo que el juego no involucra jugadas de azar o aleatorias (sin probabilidades representadas por P_i con $P_0=\varnothing$) cada $\sigma \in S=S_1,S_2,\ldots,S_n$ determina una y sólo una partida. Así, si $\sigma(\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n))$ determina $w \in A_0$ (w es un elemento de los vértices terminales), entonces la función de pago $M:S \rightarrow R^n$ tal que $M(\sigma)=m(w)$[*2] está bien definida y $m(w)$ es el pago en cada vértice terminal. En términos menos estrictos, el espacio de estrategias puras del jugador i son todas las posibles elecciones o decisiones que pueda hacer en un vértice (en caso de tener un árbol) o todas las acciones (posibles movimientos) contempladas

*1 f (h) es una función de valores reales

*2 M es una función que proporciona el pago a los jugadores, en función de las estrategias empleadas para ese jugador y se representa por el vector $\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$. Al final del juego el contendiente i asegura un pago $M(\sigma)=m(w)$ resultado del empleo de sus estrategias.

En caso de existir jugadas de azar (probabilidades diferentes del conjunto vacío, $P_0\neq\varnothing$) las jugadas asociadas con los participantes se determinan por σ y las jugadas de azar se realizan bajo distribuciones preestablecidas. Con los elementos mencionados se construye una función de pago $M_i(\sigma)$ que es el pago esperado por el jugador i al emplear σ.

DEFINICION 1.5. *Se dirá que σ^* es un punto de equilibrio en estrategias puras si y sólo si :*

$$M_i(\sigma^*)\geq M_i(\sigma^*/\sigma_i) \text{ para } \sigma_i\in S_i,\ i=1,\ldots,n \text{ donde } \sigma^*/\sigma_i=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$$

Interpretando la definición 1.5, se dice que σ^* es un punto de equilibrio en estrategias puras si el pago que recibe el jugador i es mayor o igual al que recibiría con σ^*/σ_i. Note que en σ^*/σ_i el resto de los jugadores mantienen la misma estrategia pura σ^*_i y el jugador i cambia la suya de σ^*_i a σ_i, sin importar por cual $\sigma_i\in S_i$ hace el cambio, ni al jugador i que se refiera.

La definición no menciona los casos en que algún otro jugador o jugadores cambien su estrategia pura simultáneamente además del contendiente i. En este caso todos podrían salir beneficiados o todo lo contrario. Pero si el jugador i cambia su estrategia pura y el resto de los contendientes permanece igual, el jugador i no mejora permaneciendo con la misma cantidad aunque los demás jugadores podrían beneficiarse o empeorar.

La segunda variante de las estrategias es cuando existen jugadas de azar, es decir, cuando existen probabilidades, $P_0\neq\varnothing$ y se determinan por distribuciones preestablecidas. Esta rama de las estrategias es la que conduce al concepto de estrategias mixtas.

2.3.2. Estrategias Mixtas

Muchos acontecimientos de la vida diaria quedan regidos por las probabilidades, con ellas se intenta representar los sucesos que escapan a las manos del hombre. Y como las estrategias también son sucesos de la misma naturaleza (impredecibles en algunos casos) existe la posibilidad de representar una elección aleatoria mediante probabilidades.

Si a cada estrategia pura σ_i del jugador i se le asigna (o asocia) una probabilidad, entonces se dirá que ω_i es una estrategia mixta (o aleatoria) para el jugador i. La probabilidad asociada con la estrategia pura σ_i del jugador i se denota por $\omega_i(\sigma_i)$ Esta estrategia aleatoria debe cumplir con los axiomas de la probabilidad :

$$1)\quad \sum_{s_i \text{ en } S_i}^{n} \omega_i(\sigma_i) = 1.$$

$$2)\quad \omega_i(\sigma_i) \geq 0.$$

Para construir la función de pago esperado, denomínese a ω_i como el conjunto de todas las estrategias mixtas para el jugador i de igual modo que en estrategias puras: $\Omega=\Omega_1 * \ldots * \Omega_n$ es el producto cartesiano. Si el grupo de jugadores eligen sus estrategias conjuntamente formando al jugador i. Suponga que tiene una n-ada de estrategias mixtas $\omega=(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ las cuales están formadas por el vector de estrategias puras $\sigma_i=(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$

asociado con una probabilidad, esto es $\omega_i(\sigma_i)=(\omega_1(\sigma_1),\ldots,\omega_n(\sigma_n))$ Entonces el pago esperado para el jugador i cuando juega con la estrategia mixta ω_i queda como :

$$E_i(\omega)=\sum_{\sigma}\omega(\sigma)M_i(\sigma)=\sum_{\sigma_1}\ldots\sum_{\sigma_n}[\omega_1(\sigma_1)\ldots\omega_n(\sigma_n)]M_i(\sigma_1\ldots\sigma_n)$$

DEFINICION 1.6. ***Se dirá que ω^* es un punto de equilibrio en estrategias mixtas si y sólo si :***

$$E_i(\omega^*)\geq E_i(\omega^*/\omega_i)\quad \forall\ i\ \text{y}\ \omega_i\in\Omega_i\ \text{donde}\ \omega^*=(\omega^*_1,\ldots,\omega^*_n)\ \text{y}\ \omega^*/\omega_i=(\omega^*_1,\ldots,\omega^*_n)$$

TEOREMA 1. ***Todo juego de n-personas en forma extensiva tiene un punto de equilibrio en estrategias mixtas.***

Demostración. Por ser este teorema prácticamente un corolario del teorema de Nash, la demostración se llevará a cabo en la sección 2.4.1. ✓(La paloma indica: queda demostrado)

El lector se preguntará para que sirven los puntos de equilibrio, las estrategias puras y mixtas, y que tipo de estrategias emplear. Con las estrategias, ya sean puras (sin uso de probabilidades) o mixtas (aleatorias, con probabilidades) se contemplan todas las acciones, decisiones o movimientos (jugadas) que pudieran surgir. Además así, usted tiene una idea de que paso es el siguiente (como mover) El punto de equilibrio sirve para otorgar pagos equilibrados a los jugadores y como una ayuda para encontrar resultados equitativos.

El usar estrategias puras para describir un juego generalmente suele tener muchas desventajas. Tales desventajas son las que iniciaron la búsqueda de una alternativa más cómoda llamada las estrategias de comportamiento.

2.3.3. Estrategias de Comportamiento

Las estrategias puras presentan el inconveniente de ser muy extensas, aún para juegos sumamente sencillos. Esto se debe a que la decisión en cada movida (o nodo, desde el punto de vista de árbol) depende de todas las elecciones hechas anteriormente.

Una manera de salvar este inconveniente son las estrategias de comportamiento. Para hacerlo hay que entender primero las definiciones de información perfecta e imperfecta.

Cuando un jugador visualiza el juego en su forma extensiva y conoce los siguientes puntos:

1) El conjunto de jugadores $N = \{ 1, \ldots, n \}$,
2) Todas las acciones de que disponen los jugadores ,
3) Todos los resultados potenciales de que disponen los jugadores, entonces, se dice que el juego tiene ***información completa (o perfecta)*** En caso de adolecer de uno de los puntos tratados, el juego se dice de ***información parcialmente perfecta o incompleta*** y si no conoce 1, 2 y 3, el ***juego*** es ***sin información***.

Un ejemplo se obtiene del gráfico 2, si cada conjunto de información en el juego se compone de un sólo vértice es de información perfecta en caso contrario es de información incompleta.

Ahora, para una estrategia mixta arbitraria, un jugador puede asignar a cada uno de los conjuntos de información, U_i, una distribución de probabilidad sobre las alternativas del conjunto. Tales distribuciones son conocidas como la estrategia de comportamiento β del jugador.

"Si un juego tiene información perfecta y si $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ son las estrategias de comportamiento inducidas por las estrategias mixtas $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ entonces para cada jugador i, $M_i(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = M_i(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$", Kuhn (1953). Esto es, para cada estrategia de comportamiento puede haber muchas estrategias mixtas que lo induzcan y el pago en ambas estrategias (de comportamiento y mixtas) será el mismo. Es indiferente el uso de estrategias mixtas o de comportamiento sólo que la segunda toma un punto de vista más restrictivo y plausible.

2.4. FORMA NORMAL

A medida que se avanza en la teoría los conceptos crecen y se hacen más generales. Una idea que destaca por su importancia teórica y su sencillez al describir un juego es la forma normal. Intuitivamente puede decirse que la ***forma normal*** de un juego es cuando, en una sola decisión (la elección de una estrategia) se incluye la secuencia total de movimientos que deben hacerse a lo largo del juego. Las componentes que deben identificarse en un juego en forma normal son :

1) El conjunto de n jugadores (finito) $N = \{1, \ldots, n\}$,

2) Los n conjuntos de estrategias puras σ_i, una para cada jugador, es decir, $\{S_i\}_{i=1}^{n}$ para cada $i \in N$,

3) N funciones lineales de pago M_i, una para cada jugador, cuyos valores dependen de las elecciones estratégicas de todos los jugadores o sea $M: S \rightarrow R^n$ donde $S = S_1 * \ldots * S_n$ es una función de pago.

El árbol de un juego es suficiente si se desea observar como se desarrollan las partidas en un juego. Sin embargo para realizar un seguimiento causa-efecto del juego basta emplear los conjuntos de estrategias y los pagos correspondientes por lo que la estructura de árbol resulta irrelevante. Resumiendo, para un juego en forma normal sólo se consideran conductas globales y no una descripción paso a paso como en la forma extensiva, sin analizar cada vértice. Tal y como se indica en la siguiente definición.

DEFINICION 1.7. *Un juego n-personal finito en forma normal, se define como una terna* $(N, \{S_i\}_{i=1}^n, M_i)$

Para entender el siguiente lema recurra a la sección 2.3.2 en donde se exponen las estrategias mixtas. Si $\omega \in \Omega$ y $\hat{\omega}_i \in \Omega_i$ son dos estrategias mixtas diferentes entre si, el pago esperado para el jugador i cuando emplea la estrategia $(\omega / \hat{\omega}_i)$ en donde el resto de los jugadores mantienen su estrategia mixta ω y el jugador i cambia la suya de ω a $\hat{\omega}_i$. El pago esperado se define como: $\sum_{\sigma_i} \hat{\omega}_i(\sigma_i) E_i(\omega / \sigma_i)$

LEMA 1. *Para toda* $\omega \in \Omega$ *y* $\hat{\omega}_i \in \Omega_i$ *se tiene que* $\sum_{\sigma_i} \hat{\omega}_i(\sigma_i) E_i(\omega / \sigma_i) = E_i\left(\omega / \hat{\omega}_i\right)$

PROPOSICION 1. *El punto* ω^* *es de equilibrio si y sólo si* $E_i\left(\omega^* / \sigma_i\right) \leq E_i\left(\omega^*\right)$ $\forall\ i \in N$ *y* $\sigma_i \in S_i$.

Demostración. Suponga que $E_i\left(\omega^* / \sigma_i\right) \leq E_i\left(\omega^*\right)$ $\forall$ $i \in N$ y $\sigma_i \in S_i$ y sea $\omega_i' \in \Omega_i$ arbitraria multiplicando ambos lados de la desigualdad correspondientes al jugador i por $\omega_i'(\sigma_i)$ y sumando sobre σ_i se tiene: $\sum_{\sigma_i} \omega_i'(\sigma_i) E_i\left(\omega^* / \sigma_i\right) \leq E_i \omega\left(x^*\right)$ y por el lema 1:

$E_i\left(\omega^* / \omega_i'\right) \leq E_i\left(\omega^*\right)$ ✓

El lema 1 y la proposición 1 indican la forma de encontrar ganancias esperadas equitativas para los jugadores que participen en el juego.

En lo sucesivo se denotará la k-ésima estrategia pura del jugador i como σ_{ik}. Escoja un vértice en el cual se emplea la estrategia mixta ω de entre todas sus estrategias posibles Ω, de la misma manera lo hace el resto de los jugadores. Existe una k-ésima estrategia pura que puede emplear el jugador i denominada σ_{ik} como una estrategia mixta (asociándole una probabilidad) mayor o igual a cero para que exista y pueda utilizarla el jugador i. El empleo de dicha estrategia asegura que sea un posible candidato para un punto de equilibrio y que se encuentre un pago equitativo para los jugadores.

LEMA 2. *Para todo punto $\omega \in \Omega$ y todo contendiente $i \in N$, existe $\sigma_{ik} \in S_i$ tal que:*

1) $\omega(\sigma_{ik}) \geq 0$,

2) $E_i(\omega / \sigma_{ik}) \leq E_i(\omega)$

Demostración. Si para algún jugador i existe una estrategia mixta $\omega_i(\sigma_{ik})$, tal que cada vez que $\omega_i(\sigma_{ik}) \geq 0$, se tiene $E_i(\omega/\sigma_i) > E_i(\omega)$, entonces multiplicando a ambos lados de la desigualdad por $\omega_i(\sigma_i)$ y sumando sobre σ_i por demostración al absurdo $E_i(\omega) > E_i(\omega)$ ✓

La finalidad del lema 2 es exponer que, si existen estrategias mixtas no todas cero para el jugador i, entonces puede llegarse a un pago equitativo entre los jugadores.

Un teorema de gran importancia que garantiza la existencia de un punto de equilibrio se expone en la sección 2.4.1.

2.4.1. Teorema de Nash

En la búsqueda por encontrar repartos equitativos de los bienes, Nash, propuso un teorema que asegura llegar a un punto de equilibrio en un juego de n-personas empleando estrategias mixtas.

TEOREMA 2. (Nash) *Todo juego finito de n-personas en forma normal tiene al menos un punto de equilibrio en estrategias mixtas.*

Demostración. Sea $\zeta_{ij}(\omega)=\max\{0,E_i(\omega/\sigma_{ij})-E_i(\omega)\}$ y $F:\Omega\rightarrow\Omega$ donde $F(\omega)=(f_1,\ldots,f_n)$ entonces f_i está definida por :

$$f_i(\sigma_{ij})=\frac{\omega(\sigma_{ij})+\zeta_{ij}(\omega)}{1+\sum_{l}\zeta_{il}(\omega)}\quad .$$

1) La función f_i es un estrategia mixta para el jugador i ,

2) El conjunto Ω es convexo y compacto[*3] ya que cada ω_i lo es y el producto cartesiano de conjuntos compactos es compacto ,

3) Como el operador esperanza es continuo la función f_i también lo es y a su vez ζ_{ij} es

[*3] Ver glosario

continua, por tanto, al ser F(ω) un cociente de dos funciones continuas cuyo denominador no se anula, también es continua.

Por el teorema del punto fijo de Brouwer[*4], existe ω^* tal que:

$$\omega_i = \frac{\omega_i^*(\sigma_{ij}) + \zeta_{ij}(\omega^*)}{1 + \sum_l \zeta_{il}(\omega^*)} \wedge (1)$$

por el lema 2, para ω^* y toda $i \in N$, existe σ_{ik} tal que $\omega_i^*(\sigma_{ik})>0$ y $\zeta_{ij}(\omega^*)=0$ sustituidos en la expresión (1): $\omega_i^*(\sigma_{ik}) \cdot \sum_l \zeta_{il}(\omega^*) = 0$, pero $\omega_i^*(\sigma_{ik})>0$, $\sum_l \zeta_{il}(\omega^*) = 0$ y como cada $\zeta_{ij}(\omega^*)$ es no negativa $\zeta_{ij}(\omega^*)=0$ para todo *l* y toda *i*, es decir $E_i(\omega^*/\sigma_i)-E_i(\omega^*)\leq 0$ para todo $i\in N$ y $\sigma_i \in S_i$ y por la proposición anterior, ω^* es un punto de equilibrio. ✓

El teorema del punto fijo de Brouwer garantiza la existencia de un punto pero en ningún momento plantea como encontrarlo. Aunque no se ha logrado encontrar un método que asegure la existencia de un punto de equilibrio en general, cuando se cuenta con un número pequeño de jugadores y sus correspondientes estrategias puras los movimientos pueden seguirse en forma directa tratando de encontrar alguno.

2.5. FUNCIONES DE UTILIDAD

Cuando un jugador elige una estrategia particular de su conjunto y los demás jugadores también eligen una estrategia particular de sus respectivos conjuntos, se aseguran una

[*4] El teorema de Brouwer dice que si $S \in R^n$ es un subconjunto convexo y compacto, y $f:S \rightarrow S$ es una función continua, entonces existe X_0 tal que $f(X_0)=X_0$

ganancia (positiva, negativa o nula) que es la cuantificación de las preferencias de una persona con respecto a ciertos objetos. Esta ganancia o cuantificación de las preferencias es llamada función de pago, ley de pago o ***función de utilidad***.

Las funciones de utilidad permiten encontrar procedimientos de puntuación idóneos que no sólo reflejan preferencias bajo certidumbre, sino que utilizan de una manera conveniente cálculos de probabilidades esperadas como lineamientos para realizar elecciones entre loterías probabilísticas[*5] bien especificadas.

Como ningún criterio de decisión puede aplicarse a menos que todas las consecuencias se cuantifiquen en las mismas unidades es posible emplear una primera aproximación analizando cualquier proceso de decisión y así determinar la utilidad de las consecuencias no numéricas.

Una utilidad común y que se emplea por todo el mundo es el valor monetario, entonces cada consecuencia puede reemplazarse por su respectivo valor en pesos. Sin embargo un valor monetario no siempre es apropiado. En el caso en que el peso no refleja el verdadero valor de una consecuencia en relación a otra o en donde el peso (como moneda) no es la misma unidad de cuantificación apropiada deberá adoptarse un sistema de valores distinto.

En los sistemas n-personales se suponen que los pagos recibidos (conforme a las reglas del juego) pueden transferirse. El suponer la utilidad transferible es una hipótesis desagradable que debe hacerse para muchas situaciones económicas. Es una hipótesis desagradable por la razón siguiente: si la utilidad del juego no es monetaria podría ser un

[*5] Ver Games and Decisions de Luce y Raiffa para ilustrar el concepto de loterías probabilísticas

bien material (objeto físico), en muchas ocasiones no se podrá dividir o partir para otorgar pagos a cada uno de los jugadores involucrados en el juego. Un ejemplo es un auto con dos propietarios, obviamente el coche no podrán utilizarlo ambas personas para ir a diferentes lugares al mismo tiempo y tampoco convendrían en partirlo por la mitad.

La suposición de ***utilidad transferible*** se basa en exigir que las ganancias alcanzables por un grupo (o individuo) estén conformados de todos los ingresos individuales cuya suma no sea superior a una cifra concreta.

Cabe hacer notar que una función de pago es una función lineal de valores reales denotada por M. Como las funciones de utilidad para todos los jugadores son lineales, las ganancias pueden separarse en un mismo bien X, es decir, mientras una persona incrementa sus utilidades en una unidad (gana una unidad) otra persona cede o pierde esa unidad. A esta manera de realizar los pagos se le denomina pagos laterales.

La hipótesis de utilidad transferible será razonable sólo bajo dos condiciones, suficientes y no necesarias. La primera es que la utilidad sea aproximadamente lineal en el rango de los pagos potenciales de los jugadores y la segunda es que los pagos laterales monetarios estén permitidos.

La única forma de establecer si las ganancias en un juegos pueden transferirse o no, o de saber si los jugadores llegarán a algún acuerdo que los obligue es mediante las reglas del juego. Para identificarlas, toda persona involucrada debe recapacitar sobre los siguientes cinco puntos:

a) Hasta que punto puede haber comunicación entre los jugadores ,

b) si los jugadores pueden hacer convenios que los obliguen o no ,

c) si las ganancias obtenidas en el juego pueden compartirse con otros jugadores (pagos laterales) ,

d) cuál es la relación formal, causal, entre las acciones de los jugadores y el resultado del juego ,

e) de qué información disponen los jugadores.

El estudio de las funciones de utilidad conducen a conceptos interesantes como son: los juegos de suma constante y de suma cero, ampliados y definidos en la siguiente sección.

2.6. JUEGOS DE SUMA CONSTANTE Y SUMA CERO

Un juego n-personal se dice de suma cero si se hace una elección de la utilidad para cada uno de los jugadores tal que, la suma numérica de las utilidades asociadas con cada n-tupla de estrategias sea igual con cero. Paso a paso, esto es, coloque los elementos desglosados y agregue uno a la vez: se cuenta con una función de utilidad y una n-tupla de estrategias, es posible elegir de la función de utilidad, las unidades (de utilidad) y los ceros para cada tupla de estrategias de modo que la suma de las ganancias sea igual con cero, ecuación 2.

$$\sum_{i=1}^{n} M_i(S_i,\dots,S_n) = 0 \wedge \ (2),$$

como el juego se supone de suma cero las funciones $M_1, M_2, \dots, M_n$ deben satisfacer la ecuación (2)

De igual manera es posible elegir los ceros de las funciones de utilidad y agregarles una constante arbitraria transformando así el juego de suma cero a suma constante (suma diferente de cero). Los juegos con suma constante son útiles cuando los beneficios obtenidos son monetarios.

En el juego, los participantes pueden encontrarse ante muchas situaciones. Cada individuo querrá incrementar sus propias utilidades (más aún si son monetarias), algunas de estas situaciones incitarán a unos cuantos con tendencia a competir hacia enfrentamientos y a los más racionales a cooperar.

2.7. ASPECTOS COOPERATIVOS, CONFLICTO Y COMPETENCIA

Dentro de esta sección es posible apreciar las ventajas que proporciona el intercambio de conocimientos entre las matemáticas y otras áreas, por ejemplo en el caso de la teoría de los juegos, la psicología y la sociología, cada materia contribuye a formar perfiles de comportamiento que se supone tomarán los individuos, es decir, con que grado tienden a competir ó cooperar entre ellos y lo más importante como identificar las situaciones y el carácter de los participantes en un juego.

En una situación de ***competencia*** las negociaciones rara vez son estrictamente competitivas, pero los jugadores pueden comportarse como si lo fueran: podrían considerarse a si mismos como contendientes estrictamente opuestos antes que como personas que resuelven problemas de manera conjunta a través de la cooperación.

Cuando un grupo o un individuo actúa en una forma no aceptada por otro se dice que está en ***conflicto.*** Un conflicto es un caso particular de competencia en donde todos los participantes buscan ganar, aunque sus intereses pueden ser comunes también pueden ser encontrados u opuestos. Sin embargo en este caso (conflicto) existe un interés común en llegar a soluciones que sean mutuamente ventajosas. Un medio muy común para dar solución a los conflictos es la negociación.

Un conflicto directo puede identificarse por que una de las partes pedirá un valor mayor para si, en tanto que la otra parte pedirá que ese valor sea menos alto. Contrariamente a la competencia en un conflicto es muy probable que las partes prefieran un acuerdo razonable a ninguno.

El grado en que los jugadores puedan mantener la comunicación (negociaciones) o el que exista un intercambio de ideas mutuo (***comunicar***) tiene un efecto profundo sobre el resultado del juego. Generalmente la facultad de entablar y mantener la comunicación toma más importancia cuanto más cooperativo se torne el juego. El profesor Tomas C. Schelling sugiere que los jugadores observen el comportamiento de sus compañeros como una guía de lo que podrían hacer después.

Para juegos con jugadores e intereses en conflicto la comunicación toma un papel mucho más complejo. Muchas personas opinan que la facultad de comunicarse es simplemente un estorbo ya que es posible comunicar amenazas y las complicaciones aumentarían.

Un juego se torna más cooperativo no sólo al incrementar el número de jugadores sino también por coincidencia de intereses entre los participantes. En un juego completamente cooperativo el problema es únicamente de cooperación y como se mencionó cuando menos en situaciones como ésta, la facultad para comunicar lo es todo.

En juegos cooperativos se asume bajo la experiencia práctica que: 1)Todos los mensajes formulados antes del juego por un contendiente se transmiten con distorsión por los otros participantes. 2)Todos los acuerdos se hacen conjuntamente y se cumplen conforme a las reglas del juego. 3)Las evaluaciones de los jugadores sobre los resultados del juego no se enturbian por las negociaciones anteriores al juego. De las tres hipótesis formuladas la tercera es la que en muchas aplicaciones reales no se lleva a cabo.

2.7.1. Normas del Grupo

Empleando algunas definiciones de las disciplinas sociales es posible clasificar a los individuos en distintos niveles de comportamiento. Por ejemplo, en primer lugar se localizan las personas en desacuerdo con el resto de los jugadores, debido a sus intereses tienden a cooperar, tales personas se denominan ***antagonistas cooperadores***, semejantes contendientes reconocen que tienen intereses opuestos o diferentes; les gustaría llegar a una transición, sin embargo tienen la confianza plena en que todas las partes mantengan centrada su preocupación en sus propios intereses. No tienen intenciones malévolas pero tampoco son hermanas de la caridad. Desconfían de todo, esperan un manejo estratégico de posturas en defensa de los intereses por cada jugador.

Un segundo estrato queda formado por individuos en desacuerdo total con las propuestas planteadas, ellos son los ***antagonistas estridentes***. Son personajes malévolos, no debe ni puede confiar en ellos. Hacen uso del poder al máximo y se valen de promesas sospechosas con frecuencia son tachados de traidores.

Las personas ***completamente cooperadoras*** son el último nivel y el más extraño. Tales negociadores podrían tener necesidades, valores y opiniones diferentes pero son abiertos el uno con el otro; cada uno espera honestidad total, apertura plena y ningún manejo estratégico de posturas. Se consideran a si mismos una entidad cohesiva y desean hacer siempre lo correcto para esa entidad.

Siempre es deseable que en un juego los participantes comiencen como antagonistas cooperadores (el caso más real) Si bien se inicia en está categoria es posible y muy factible que algunos se proyecten hacía la estridencia. En el capitulo tercero los intentos por encauzar las negociaciones a la categoria de cooperación plena serán la base.

En un ambiente de cooperación algunos o todos los jugadores pueden unirse y actuar como uno sólo (el ideal en todo juego) eligiendo sus estrategias conjuntamente tratando de obtener el máximo beneficio. Esta idea de cooperación es la que conduce al concepto de formación de coaliciones.

2.8. LAS COALICIONES

Una ***coalición*** se define en términos de los jugadores para coordinar su comportamiento y enfocarlo hacia un fin común. Kelley (1970) propone que una situación de coalición es aquella en la cual los jugadores compiten para aumentar sus ganancias. Es posible que algunos o todos los jugadores actúen juntos y cooperen para obtener mejores beneficios.

También en 1970, Groennings dijo que cualquier modelo del proceso de formación de coaliciones debe incorporar los siguientes cuatro elementos :

1) La condición en la que se encuentran los jugadores ,

2) La compatibilidad de un jugador con el resto ,

3) Que tanta motivación existe para ingresar en una coalición ,

4) La interacción entre los participantes.

Bajo cualquier situación siempre es posible predecir que aún existiendo muchas contrariedades los jugadores pueden agruparse en coaliciones y si estas se forman, tienen más posibilidades de alcanzar sus metas que los individuos que actúan solos.

Cuando se forma una coalición ésta posee propiedades particulares y específicas, algunas comunes y otras diferentes a las del resto. Pero en materia de negociación lo que realmente interesa es estudiar el comportamiento de una coalición para determinar el curso de acción propio. Para poder hacerlo debe identificar las siguientes propiedades de las coaliciones: el tamaño de las coaliciones formadas, quienes pertenecen actualmente a la coalición, cual es la coalición ganadora y cuando las coaliciones se agranden está exista.

Usando las propuestas de Groennings y Kelley acerca de la formación de coaliciones es posible estructurar una idea intuitiva de la definición de coalición para posteriormente exponerla de un modo más formal.

Suponga un conjunto $N=\{1,\dots,n\}$ de jugadores, a cualquier subconjunto no vacío de N se le llamará coalición y quedará representada por las letras mayúsculas K,L y así sucesivamente. Obviamente los elementos en cada coalición se representan por su respectiva letra minúscula ($K=\{k_1,\ldots,k_n\}$) La coalición consistente del resto de los jugadores exceptuando a los de K, denominada la coalición complementaria de K, queda representada por N\K o N-K. La notación K-L representa a los jugadores que están en K mas no en L, es decir, K-L = K\L = K⌒L.

DEFINICION 1.8. *Una coalición es un subconjunto de jugadores de N que es capaz de llegar a un acuerdo vinculante.*

La definición 1.8 implica que los jugadores que entren en una coalición o formen una coalición tendrán un pacto o manera preestablecida de distribuir el pago obtenido.

Evidentemente el interés de los jugadores al unirse en coalición es el de hacerse mas fuertes y ganar. Una ***coalición*** es ***ganadora*** si tiene la suficiente capacidad para tomar decisiones acertadas para todos los jugadores que estén dentro o fuera de la coalición. Es de esperar que una coalición que contenga a una mayoría de jugadores sea lo suficientemente capaz para modificar los resultados de un juego o una partida y por ende sea la coalición ganadora. Entonces, se supondrá que una coalición sin una mayoría no tiene los recursos necesarios, ni la capacidad adecuada para afectar los resultados del juego y se dice que es perdedora puesto que obtiene los resultados más bajos a que pueda ser conducido y sus contrarios los resultados más altos que puedan alcanzar.

HIPOTESIS 1. *Todo subconjunto de N, incluyendo también a N puede formar una coalición.*

La hipótesis 1 es muy clara, sin excepción todos y cada uno de los jugadores pueden formar o entrar en una coalición. Una coalición se considera formada no sólo cuando los jugadores que la constituyen han decidido jugar unidos sino que también estén de acuerdo en como repartir la ganancia conjunta v(K). Existe la posibilidad que una coalición se forme de un sólo jugador.

2.9. LAS FUNCIONES CARACTERISTICAS

Cuando se examinan los juegos cooperativos, las estrategias reales disponibles por el conjunto de contendientes pasan a segundo plano pues la atención queda centrada en los pagos que los participantes y las coaliciones serán capaces de conseguir. A cada coalición se le asocia un número· el valor de esa unión. Este valor es la cantidad mínima que la coalición puede obtener si todos sus miembros trabajan conjuntamente (emplean sus estrategias juntos). Del mismo modo, suponiendo que los jugadores que no se encuentran dentro de la coalición tienen un comportamiento hostil en contra de sus opositores, es posible calcular la máxima ganancia que la coalición K puede obtener denominada la coalición K de máximo pago o valor de la coalición K, esta cifra se representa por v(K)

2.9.1. Definición de Función Característica

El valor de cualquier coalición puede calcularse de la siguiente manera: Suponga un conjunto K de jugadores que deciden formar una coalición, la coalición K obtiene tanto como sea posible (los resultados individuales no importan) La peor situación estratégica posible es que el resto de jugadores se hallen fuera de K. La coalición opuesta a K será -K o

N-K. Si la coalición K se forma, los miembros en la fusión K pueden emplear la estrategia que les garantice el valor esperado v(K) prescindiendo de los miembros en la coalición N-K. De igual modo N-K puede emplear la estrategia que les garantice al menos v(-K) pero no más.

DEFINICIÓN 1.9. *Para un juego n-personal, la función característica con utilidad transferible es una función escalar v(K) que asocia* $v(K) \in R^n$ *a cada* $K \subset N$.

El valor de la función característica para la coalición vacía es cero o sea $v: K \rightarrow R^n$; $v(\emptyset) = 0$.

La definición 1.9 implica que la coalición K es un subconjunto de jugadores que potencialmente pueden jugar unidos en cuyo caso reciben una ganancia conjunta v(K), ingreso máximo que la coalición puede garantizarse a si misma. El juego Γ sólo especifica la ganancia que podria obtener cada una de las coaliciones en caso de formarse.

Una partida se realiza de la siguiente manera: conocida la función caracteristica v ó $v(K)$ por todos y cada uno de los contendientes, estos pueden negociar con toda libertad para formar coaliciones hasta obtener una partición P={K,L,...} de N donde K,L, etcétera, son coaliciones que han logrado formarse. La partida concluye con el pago de las ganancias. Como resultado de cada partida se obtiene un vector $m \in R^n$ en donde m_i es la ganancia o pago representado por m que obtuvo el jugador i en la negociación.

2.9.2. Las Funciones Características α y β

Existen dos caminos para deducir una función característica de un juego en forma estratégica. El primer camino se basa en lo que una coalición puede garantizarse a si misma cuando el resto de los contendientes tengan un comportamiento hostil para reducirle su ganancia. El segundo camino se fundamenta en el pago que el resto de los jugadores pueden o desean otorgar a un jugador (puede ser cero), o sea el máximo ingreso que el jugador i obtiene de la mínima cantidad que el resto de los jugadores están dispuestos a otorgarle (la idea de punto de equilibrio). Al primer caso se le llamará función característica-α y al segundo, función característica-β. La función característica α es la más común y difundida (tal vez porque muchas personas se identifican con ella), por eso se define primero.

Suponga un juego en forma estratégica representado por la triada Γ=(N,S,M) y suponga para la coalición K el espacio conjunto de estrategias (estrategias mixtas) denotado por $S_K=\Omega_{i\in K}(\sigma_i)$ en donde S_i son los elementos en S_K. La combinación estratégica para la que el jugador i está utilizando S_i si i$\in$K, se representa por $(s\backslash t_i)$ o $(s\backslash t_{\{i\}})$ En caso que el jugador i se encuentre en una situación tal que el resto de los jugadores N-{i} estén agrupados en una coalición para reducir la ganancia del jugador i al mínimo. Así, el máximo ingreso que el jugador i puede asegurarse será:

$$\underline{c}_{\alpha}i = \max_{t_i \in S_i} \min_{s_K \in S_K} M_i(s\emptyset\backslash t_i) \text{ para } K = N\text{-}\{i\}\ldots(3)$$

La ecuación (3) representa el valor maximin del jugador i para este juego. Piense en c^K

como un vector de pagos sobre R^n, el cual asigna pagos a los miembros en la coalición K y en $\underline{c}^K$ como un vector de pagos maximin para los miembros de la coalición K.

HIPOTESIS 2. *Si $c^K \in R^n$ puede ser alcanzado por cualquier coalición K, entonces K podrá conseguir cualquier c'^K que satisfaga:*

$$\sum_{i \in K} c'_i \le \sum_{i \in K} c_i \quad \Lambda\ (4)$$

La hipótesis 2 involucra dos condiciones:

1) *Condición de utilidad transferible.* Si la coalición K puede conseguir el pago máximo c^K, entonces K puede alcanzar cualquier otro pago c'^K, con el fin explícito que los pagos de los jugadores sumen la misma cantidad, o sea que la ecuación (4) se transforme de desigualdad a una igualdad.

2) *Condición de libre disposición.* Si c^K es alcanzable y suponiendo que $c'^K < c^K$, entonces con mayor razón c'^K puede ser conseguido.

La posibilidad para alcanzar los pagos por una coalición también se muestran en la hipótesis 2. En un juego particular cada coalición tendrá asociado el pago total más elevado que sea capaz de conseguir. Con la ecuación (3) y la hipótesis 2 es posible construir los pagos maximin de la función característica-α para la coalición K, como :

$$v_\alpha(K) = \max_{t_K \in S_K} \min_{s_K \in S_K} \sum_{t \in K} M_i(sO\backslash t_K)\ \Lambda\ (5)$$

Por definición, $v_\alpha(\{i\}) = c_{\alpha i}$ está definida para todos los jugadores i; sin embargo la ecuación (5) está definida para todas las coaliciones K. De la misma manera es posible construir ecuaciones paralelas a (3) y (5) para definir la función característica-β. Así,

$$\underline{c}_{\beta i} = \max_{s_K \in S_K} \min_{t_K \in S_i} M_i(sO\backslash t_i)\Lambda \quad (6)$$

$$v_\beta(K) = \max_{s_K \in S_K} \min_{t_K \in S_K} \sum_{i \in K} M_i(sO\backslash t_K)\Lambda \quad (7)$$

Realicemos el siguiente experimento: suponga que la coalición K para α ó N-K para β, hace el primer movimiento o acción (como en el ajedrez), sólo para contrastar las formas α y β. Cuando define v_α, la coalición K elige s^K y anuncia su decisión al resto de los jugadores en N-K, lógicamente N-K hace la elección s^{N-K}. Para cualquier s^K elegida por la coalición K será mantenida en :

$$\min_{s_K \in S_K} \sum_{i \in K} M_i(sO\backslash s_K)\Lambda \quad (8)$$

K se asegura el máximo pago para la estrategia s^K propuesta en la ecuación (8), observe que la ecuación (8) es su similar en (5). Análogamente para definir v_β, N-K elige su estrategia s_{N-K} suponiendo que K seleccione s_K y por supuesto hace participe de su elección a K. La coalición N-K logra que K se mantenga en

$$\max_{s_K \in S_K} \sum_{i \in K} M_i(sO\backslash s_K)\Lambda \quad (9)$$

La técnica para definir a v_α y v_β es tratar a K y N-K como a dos jugadores que participan en un juego de suma cero en el que el pago para el supuesto jugador K es $\sum_{i \in K} M_i(S)$ y el pago para el otro supuesto contendiente N-K es $-\sum_{i \in K} M_i(S)$, como se trata de un juego suma cero (el pago que el jugador K suma a sus utilidades es el monto que pierde el jugador

N-K) se igualan los pagos esperados como $\sum_{i\in K} M_i(S) = -\sum_{i\in K} M_i(S)$ Finalmente si despeja la ecuación anterior tendrá la ecuación (2)

Observando las ecuaciones (8) y (9) en general $v_\alpha(K) < v_\beta(K)$ para todo K.

2.9.3. La Forma de la Función Característica

En lo sucesivo se manejarán los juegos con funciones características de forma general, de modo que resulta indiferente el uso de la forma α o la forma β. Además, se utilizará la notación: $\underline{c}$ en lugar de $\underline{c}_\alpha$ y $\underline{c}_\beta$, al igual que v en lugar de v_α y v_β.

Como supuesto general, todas las coaliciones obtienen tanto como la suma de sus miembros puedan conseguir. Considere que K y L son coaliciones que no tienen jugadores comunes. Cuando se forma una coalición compuesta por todos los jugadores en K o en L; denotada por K∪L, el valor de la nueva coalición debe ser al menos tan grande como la suma de los valores de K y L para que sea atractiva a los jugadores. Los miembros en K pueden jugar la estrategia que les garantice v(K) y los jugadores en L, la estrategia que les garantice v(L), entonces K∪L puede obtener al menos v(K)+v(L). Esta condición se denomina ***superaditividad*** y está definida para toda partición de un subconjunto.

DEFINICION 1.10. *Se dirá que el juego Γ es superaditivo si y sólo si $v(K \cup L) \geq v(K) + v(L)$ cuando K y L son subconjuntos de N con $K \cap L = \varnothing$.*

PROPOSICION 2. *Si Γ es un juego superaditivo cumple que* $\sum_{i=1}^{n} v(K_i) \le v(N)$ *para toda partición* $P=\{K_1,\ldots,K_n\}$ *de N.*

Demostración. Para una partición arbitraria $P=\{K_1,\ldots,K_n\}$ se tiene que

$$v(N)=v\left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i\right) \ge v\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} K_i\right)+v(K_n) \ge \Lambda \ge v(K_1)+\Lambda+v(K_n) \checkmark$$

La proposición 2 indica que en juegos superaditivos no hay forma alguna de que los jugadores se agrupen para obtener más de lo que se aseguran al jugar todos unidos.

HIPOTESIS 3. ***La función característica** v(K) para un juego (N,S,M) es **superaditiva**. Es decir, para dos coaliciones disjuntas cualesquiera, K y L contenidas en N,* $v(K \cup L) \ge v(K)+v(L)$

Resulta conveniente referirse a la función característica v (no es un elemento de los vértices, es v(K)) y al conjunto de jugadores N, es decir (N,v), como a un juego porque Γ(N,v) contiene toda la información necesaria, en lugar de mencionar (N,S,M). A Γ(N,v) se le denomina la ***forma de la función característica*** o ***forma coalicional***, por que los jugadores en la coalición escogen sus estrategias conjuntamente.

DEFINICION 1.11. *Para los juegos n-personales con utilidad transferible, **la forma de la función característica** o **forma coalicional** de un juego determinada por Γ=(N,v), se caracteriza por el conjunto de jugadores N y la función característica v.*

Observe que en la definición 1.11 se integran los n jugadores, sus estrategias S y los pagos asociados con las funciones características.

2.9.4. Funciones Características para Juegos con Suma Constante y Suma Cero

Puesto que v(K) puede calcularse para cualquier coalición posible, la extensión de la función ν para juegos suma cero se da bajo las siguientes restricciones :

1) El valor para la gran coalición es: $v(N)=0$,
2) Para K: $v(K)= - v(- K)$ ó $v(K) = - v(N-K)$ para todos los subconjuntos de N ,
3) Para la coalición vacía es $v(\varnothing)=0$,
4) Si K y L son cualesquiera dos subconjuntos disjuntos, $v(K\cup L)\geq v(K)+v(L)$.

Note que las restricciones 1 y 3 son equivalentes a 2. Las dos primeras condiciones reflejan las características de un juego suma cero en donde los intereses son diametralmente opuestos. El punto 3 establece que un subconjunto mínimo de jugadores (contendientes perdedores) no obtienen ningún pago. Para la mayoria de los teóricos, la condición fuerte es la que involucra el punto 4 ó de superaditividad. Si un conjunto de funciones características ν, satisface las condiciones 1 a 4 propuestas en la sección 2.9.4 se dirá que son funciones características de juegos suma cero.

Para definir la función característica de juegos con suma constante, agregue un jugador ficticio al juego de suma cero para n-personas, tal jugador no es un agente libre en el juego (no elige una estrategia y no desempeña un papel definitivo en la formación de coaliciones), el pago en el juego suma cero se eligirá para (n+1)-personas.

En un juego de suma constante (no necesariamente suma cero, sin excluir el caso), la condición 3 se transforma en: $v(K) = v(N)-v(N-K)$ para todo subconjunto de N y las condiciones 1 y 2 son suficientes pero no necesarias. También si v(N)=0, la ecuación v(K)=v(N) - v(N-K) indica un juego suma cero.

2.10. EL CONJUNTO DE IMPUTACIONES Y LOS JUEGOS ESENCIALES

Por razones naturales, el interés fundamental de los jugadores se centra en ciertos vectores de pago, estos vectores son el conjunto que contiene todos los resultados razonables para un juego cooperativo. Se comenzará pues, por definir algunas propiedades que pueden poseer tales vectores.

Un vector de pagos x, es cualquier elemento de $\mathbb{R}^n$ y sus coordenadas se indexan con los miembros del conjunto N. Dado un vector de pagos x, se denotará por x(K) ó $x(K) = \sum_{i \in K} x_i$. Así, x(K) es el monto total para la coalición K.

Suele llamarse al conjunto de vectores de pago como *el conjunto de imputaciones*. Intuitivamente, una imputación es un vector de pago que otorga a cada jugador, al menos tanto como podría garantizarse a si mismo jugando individualmente y a la coalición de todos los jugadores v(N)

DEFINICION 1.12. *Un vector de pagos, $x \in \mathbb{R}^n$, es una imputación*[6] *en el juego $\Gamma=(N,v)$ si: x es individualmente racional o sea $x_i \geq v(\{i\})$* y *x es racional de grupo si* $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$

[6] Algúnos textos mencionan a una imputación también como una asignación

El conjunto de imputaciones será representado por I(N,v) Con un vector x que sea individualmente racional cada jugador obtiene al menos tanto como lo que puede lograr jugando aisladamente, mientras que con un vector x que sea racional de grupo cada coalición asegura al menos tanto como puede garantizarse por su cuenta.

Se dice que una imputación x es eficiente si y sólo si $x(N)=v(N)$ y también es factible, si y sólo si existe una partición $P=\{K_1,\ldots,K_n\}$ de N tal que $x(K_i)\leq v(K_i)$, $i=1,\ldots,n$. Para un vector x factible se dirá que es Optimo de Pareto[*7] (OP) si y sólo si no existe otra imputación denotada por $y\in R^n$ factible (las imputaciones se representan en letras itálicas), tal que la imputación y sea mayor o igual al vector de pagos x para ambas imputaciones distintas o sea $y\geq x$, $y\neq x$.

2.10.1. Dominio y Poder

El poder de un jugador se refiere a que tanta capacidad tiene un individuo o un grupo para trabajar por su cuenta y determinar o influir en el resultado del juego.

La dominancia se refiere al poder que una coalición puede ejercer mediante su capacidad para independizarse. Ya que I(N,v) se definió como el conjunto de imputaciones, suponga que x, y son dos imputaciones que pertenecen a I(N,v) Se dice que la imputación x es dominada por la imputación y vía la coalición K, si y da más a los miembros de K superando a x, siendo además y^K alcanzable por la coalición K.

[*7] Un pago Optimo de Pareto es cuando ya no existe ningún otro pago en donde otro jugador pueda mejorar la oferta.

DEFINICION 1.13. *Para las imputaciones x, y* $\in I(N,v)$, *y domina a x vía K si* $y^K > x^K$ y

$$\sum_{i \in K} y_i \leq v(K)$$

La noción de "domina a con respecto a la coalición K", implica que $v(K) = \sum_{i \in K} x_i$, esto es la asignación x es factible con respecto a la coalición K y como la imputación $y_i > x_i$ para toda las imputaciones y en K, la asignación y es mejor que la asignación x.

DEFINICION 1.14. *La imputación y domina a la imputación x, si para una cierta coalición* $K \subset N$, *y domina a x vía K.*

Si y domina a x vía K, se dirá a veces que K puede mejorar frente a x. Así mismo, las definiciones "x domina a y vía K" y la de "y es bloqueada por la coalición K" son casi las mismas. La diferencia entre una y otra es que cuando se trata de dominancia, se exige que todos los jugadores en la coalición K mejoren, mientras que para bloquear, basta que uno sólo lo haga y el resto no empeoren. Entonces, si x domina a y, la imputación y es bloqueada.

Regresando a la sección 2.10, un juego resulta interesante o no dependiendo de su análisis. El análisis, consiste en dividir a los juegos con función característica en dos clases: los juegos esenciales y los no esenciales.

DEFINICION 1.15. *Se dirá que un juego es no esencial si y sólo si, el pago total conjunto de la plenitud de jugadores v(N), es exactamente igual a la suma de todos los pagos de los jugadores individuales* $\sum_{i \in N} v(\{i\})$, *es decir,* $v(N) = \sum_{i \in N} v(\{i\})$

DEFINICION 1.16. *Un juego es esencial, si el pago conjunto de todos los jugadores es* *estrictamente mayor al pago de todos los jugadores individuales* $v(N) > \sum_{i \in N} v(\{i\})$

2.11. LA FORMA NORMALIZADA CERO-UNO Y LA S-EQUIVALENCIA

La única forma de saber si dos juegos idénticos en esencia tienen funciones características diferentes es mediante la forma normalizada cero-uno.

DEFINICIÓN 1.17. *Suponga un juego (N,v), la transformación de (N,v) en su forma normalizada se representa por* (N,v^*) *y queda determinada por la ecuación*

$$v^*(K) = \frac{v(K) - \sum_{i \in K} v(\{i\})}{v(N) - \sum_{i \in N} v(\{i\})}, K \subset N \wedge \ (10)$$

De la definición 1.17 se deduce que v es un conjunto de funciones características de valores reales no negativos con: el pago para la coalición vacía igual a cero, $v(\varnothing)=0$; el monto para un jugador individual es también cero, $v(\{i\})=0$; los beneficios obtenidos por la gran coalición deben ser igual a uno $v(N)=1$; si K y L son subconjuntos disjuntos de N, $v(K \cup L) \geq v(K) + v(L)$ y si el juego $\Gamma(N,v)$ es de suma constante $v(K)=1-v(N-K)$ para toda coalición K.

Los resultados generalizados para la normalización cero-uno se derivan de los puntos $v(\{i\})=0$ y $v(N)=1$. Aquellos juegos que poseen normalizaciones cero-uno idénticas se denominan S-equivalentes. Una relación de equivalencia-S es un caso especial de las relaciones de equivalencia. Para saber si dos juegos son S-equivalentes suponga las dos funciones características v y v' que difieren una de la otra por una constante multiplicativa b, es decir v(K)= b·v'(K) para todos los subconjuntos de N, cada jugador i agrega un monto a_i a la ganancia del juego v(K). Los montos agregados no alteran las consideraciones estratégicas del juego, tampoco tienen efecto sobre la elección natural de estrategias o los resultados del mismo.

El ingreso fijo de las coaliciones es $\sum_{i \in K} a_i$, así la ganancia para la coalición haciende a un total de $v(K) + \sum_{i \in K} a_i$.

DEFINICION 1.18. *Dos juegos n-personales con funciones características* v *y* v' *definidas sobre el conjunto de jugadores N, se dicen S-equivalentes si es posible encontrar constantes* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *además de una constante positiva* b, *tal que* $v'(K) = b \cdot v(K) + \sum_{i \in K} a_i$ *para todo subconjunto de N.*

DEFINICION 1.19. *Dos juegos,* $\Gamma=(N,v)$ *y* $\Gamma'=(N,v')$ *que tengan la misma forma normalizada cero-uno son S-equivalentes.*

Para demostrar que la equivalencia-S es un tipo especial de relación de equivalencia y que cumple con las mismas propiedades, se expone el siguiente lema.

LEMA 3. *La equivalencia-S cumple con las propiedades de la relación de equivalencia.*

Demostración. Las propiedades reflexiva y simétrica resultan obvias por que:

1) Reflexiva: Para todo juego Γ, Γ es S-equivalente a Γ.

2) Simétrica: Si Γ es S-equivalente a Γ', entonces Γ' es S-equivalente a Γ. Para la

transitividad observe que, si Γ y Γ' tienen la misma forma normalizada cero-uno y además Γ' y Γ'' también la poseen, Γ y Γ'' comparten la misma forma normalizada.

3) Transitividad: si Γ es S-equivalente a Γ' y si Γ' es equivalente-S a Γ'', entonces Γ equivalente-S a Γ''. ✓

Los conjuntos definidos por una relación de equivalencia son llamados **clases equivalentes.** La normalización cero-uno y la S-equivalencia o equivalencia-S sirven para fines de análisis. Es posible que dos juegos sean idénticos, mismos jugadores, iguales estrategias, igual desarrollo en el juego, etc. pero con la normalización cero uno y la equivalencia-S se determinará si los pagos para las coaliciones se producen de la misma forma.

2.12. TEORIA DE LOS JUEGOS COOPERATIVOS n-PERSONALES CON UTILIDAD TRANSFERIBLE

Las definiciones formales quedaron establecidas a lo largo del capítulo, en está sección se hace una recapitulación y las nociones se agrupan para centrar la idea de la presente tesis.

Como lo indica el título y el objetivo, el propósito principal es estudiar, analizar y desarrollar los elementos de la teoría de los juegos cooperativos con utilidad transferible para n-participantes. Esto seria estudiar situaciones dónde existe el conflicto de intereses. El conflicto de intereses puede resolverse por distintos métodos pero como aqui se tratan los casos cooperativos, se intentará dar solución por medio de la comunicación, negociación y la ayuda mutua, incitando a unos cuantos o a todos los jugadores si es posible para que

cooperen formando coaliciones. Cada unión de los contendientes tratará de tomar las mejores decisiones conjuntas que le lleven a obtener los máximos beneficios posibles.

Los beneficios obtenidos llamados montos serán cuantificables (no siempre) y podrán dividirse entre todos los miembros del grupo (coalición) que se formó dejando el resto del monto a las otras coaliciones o individuos participantes.

CAPITULO II

VALORES Y CONCEPTOS DE SOLUCION

VALORES Y CONCEPTOS DE SOLUCION

"En particular, conocemos las leyes básicas que subyacen bajo toda la química y la biología. Ciertamente, aún no hemos reducido estas disciplinas al estado de problemas resueltos; ¡ hemos tenido, hasta ahora, poco éxito prediciendo el comportamiento humano a partir de ecuaciones matemáticas !"

S.W. HAWKING, HISTORIA DEL TIEMPO

En el primer capítulo se presentaron sólo las nociones básicas necesarias para comprender la teoría de los juegos cooperativos con utilidad transferible para n personas, tales ideas se retoman para demostrar la valides de los juicios de solución. En el presente capítulo se examinarán diversos conceptos de solución que algunas veces, en casos especiales son llamados también valores. En realidad el término solución no tiene un significado universalmente aceptado, al menos no en la teoría de los juegos: en contextos diferentes tienen diferentes significados. Los valores son un tipo específico de solución debido a que son únicos.

Si desea llegar a una solución debe tomar en cuenta: las reglas del juego, la personalidad de los jugadores, sus preferencias subjetivas, etc.. Aunque muchas veces no es posible llegar a un resultado preciso, puede establecer un conjunto de resultados posibles que parezcan más meritorios que cualquier otro conjunto. El conjunto de resultados obtenidos puede ser más firme (en términos de Von Neumann-Morgenstern, más estable) que cualquier otro conjunto, en el sentido que ningún otro jugador o conjunto de jugadores tienen el poder y la motivación suficiente para reemplazarlos por uno de los resultados menos favorecidos.

Algunas de las soluciones tienden a alcanzar un punto de arbitraje basado en las fuerzas de los jugadores. Otras tratan de encontrar puntos de equilibrio como los Valores de Shapley y Banzhaf-Coleman. Pero todas intentan encontrar soluciones que sean satisfactorias y equitativas.

1. PANORAMA GENERAL DEL CAPITULO

Para comenzar, se vera el núcleo como el primer concepto de solución atribuido a Gilles (1953). Esta es una solución que resulta interesante pero adolece de dos defectos. El primero de ellos es que algunos juegos no tienen resultados en el núcleo. La segunda carencia radica en que algunos otros juegos tienen muchos resultados en el núcleo. Además, este tipo de solución no predice cuales serán las coaliciones a formarse.

Después del núcleo, se estudiará el conjunto estable o solución de Von Neumann. El conjunto estable es un tipo de solución desarrollado por John Von Neumann. En contraste con el núcleo, el conjunto estable si considera debidamente la formación de coaliciones. También posee la ventaja que muchos juegos con núcleos vacios poseen conjuntos estables.

En el apartado número cuatro aparece el conjunto de negociación el cual tiene ventajas similares a las del conjunto estable. El conjunto de negociación por su parte, considera la forma en que los jugadores se dividen en coaliciones. En la sección 4.1 se estudia la estructura de coaliciones que es un vector de pagos en conexión con una división de los jugadores en una coalición. Así, una estructura de coalición se halla en el conjunto de negociación si ningún subconjunto de jugadores que ya se encuentran en la misma coalición pueden encontrar una forma de mejorar sus pagos.

Cuando los jugadores son capaces de mejorar su situación con la ayuda de otros contendientes que también se benefician con el cambio, se dice que presentan una objeción. Una objeción es valedera cuando no existe ninguna contra-objeción, es decir, que no exista una manera en que los jugadores sean capaces de mejorar la objeción y obtener más.

Las objeciones y contra-objeciones serán empleadas para establecer los conceptos de nódulo y nucléolo. Si bien, el nódulo y el nucléolo pueden emplearse como conceptos de solución, aquí son utilizados para demostrar que se hallan íntimamente relacionados con el conjunto de negociación.

Posteriormente se analizará un concepto de solución que arroja un resultado único en una amplia clase de juegos, el Valor de Shapley (1953). Este tipo especial de solución se encuentra denotado por diversos axiomas. También se halla caracterizado por una función específica que otorga un pago a cada jugador como una función de la función característica del juego.

En última instancia se tiene una solución similar al Valor de Shapley propuesta por Banzhaf y Coleman en 1965, la cual es axiomatizada por Owen en 1978.

Resumiendo el resto del capítulo, se presenta el núcleo y algunas condiciones para la no vacuidad de éste. El conjunto estable aparece en la sección 3; junto con él, el conjunto de negociación, el nódulo y el nucléolo serán analizados. En la sección 5, se describe el Valor de Shapley demostrando su existencia y por último cierra el capitulo el Indice de poder de Banzhaf-Coleman.

2. EL NUCLEO

El primer intento por encontrar soluciones razonables se refiere al núcleo. Antes de comenzar con la definición de núcleo, centre su atención en los juegos esenciales que satisfacen las hipótesis 1 a 3 del capitulo I. Intuitivamente, una solución del juego $\Gamma=(N,v)$ es un vector de pagos o en su defecto, un conjunto de vectores de pagos asociados con el juego Γ.

DEFINICIÓN 2.1. *Se dirá que un vector de pagos, x, puede ser bloqueado por la coalición K, si y sólo si existe otro vector de pagos, y, tal que :*

1) $x_i \leq y_i$ *para todo* $i \in K$ y $x_i < y_i$ *para al menos un* $i \in K$,

2) $y(K) \leq v(K)$

La idea proporcionada por la definición 2.1 puede explicarse a continuación. El vector de pagos x puede ser bloqueado por la coalición K, si y sólo si K tiene un vector de pagos y_i (los incentivos descritos en el punto 1) que mejore la imputación x_i y el poder (punto 2) para cambiar la imputación x por y.

Entonces, una solución razonable será una imputación x que no puede ser bloqueada por ninguna coalición, así el núcleo de un juego estará conformado por el conjunto de imputaciones no dominadas.

DEFINICION 2.2. *Al conjunto de imputaciones que no pueden ser bloqueadas por alguna coalición se le llamará **núcleo** y queda denotado por C(N,v)*

La definición 2.2, manifiesta que una imputación y estará en el núcleo si $\sum_{i\in K} y_i \geq v(K)$, la suma de todas las imputaciones (vectores de pagos) es mayor o igual que el valor de la coalición K, para todas las coaliciones K, en donde K es cualquier coalición probable. Lo cual indica que los pagos en la imputación y son mayores que los pagos en la fusión K.

PROPOSICION 3. *El núcleo C(N,v) es un subconjunto de imputaciones no dominadas que poseen la propiedad de racionalidad de grupo, es decir, cada coalición asegura al menos tanto como puede garantizarse por su cuenta* y *$C(N,v)=\{x/x(K) \geq v(K)$ para toda $K\in C$* y *$x(N)=v(N)\}$.*

Demostración. De la definición 2.2, el vector de pagos x es una imputación en el núcleo. Si $x(K)<v(K)$, se define una imputación y_i como :

$$y_i = \begin{cases} x_i + \left[\dfrac{v(K)-x(K)}{|K|}\right] & \text{si } i \in K \\ x_i & \text{cualquier otro valor} \end{cases}$$

x es bloqueada por y vía K. Así, x es tal que $x(K) \geq v(K)$, además $x(N)=v(N)$, ya que x es una imputación. Suponiendo que x puede ser bloqueada por K vía y queda que $x(K)<y(K)\leq v(K)$ contrario a como se definió x. ✓

Considere las definiciones, proposiciones e hipótesis de la sección 2.9.3 a 2.10 del capítulo I, en donde se define la superaditividad, los juegos superaditivos y las funciones superaditivas. Recuerde que el conjunto de las imputaciones se representa por I(N,v) y que

OP(N,v) denota un juego óptimo de Pareto. Retomando algunos elementos descritos antes, a continuación se exponen las propiedades del núcleo.

PROPOSICION 4. *En general $C(N,v) \subseteq I(N,v)$, el núcleo es un subconjunto de las imputaciones, si además la función característica v es superaditiva, entonces $C(N,v) \subseteq OP(N,v)$*

La proposición 4 indica que por lo general se cumplen las dos condiciones siguientes: 1) Los vectores de pagos efectuados en el núcleo C(N,v) son un subconjunto de las imputaciones. Las imputaciones son vectores de pagos que contienen todos los resultados razonables y cumplen con la racionalidad de grupo y la racionalidad individual.

Condición 2) Si además la ganancia conjunta que recibe una coalición (función característica *v*) es superaditiva. O sea, suponga que K y L son coaliciones que no tienen jugadores comunes. A la coalición compuesta por K y L se denotará por $K \cup L$, entonces para que esa unión sea atractiva, los ingresos deben ser al menos tan grandes como la suma de las ganancias para K y L por separado. Esto es $v(K \cup L) \geq v(K)+v(L)$

Si el núcleo C(N,v) es un subconjunto del conjunto de las imputaciones I(N,v) y además la función característica *v* del juego es superaditiva, entonces los pagos efectuados en el núcleo serán óptimos de Pareto, es decir, no existirá ningún otro pago en el que algún jugador pueda mejorar la oferta propuesta.

DEFINICION 2.3. *El juego $\Gamma=(N,v)$ es de suma constante si y sólo si $v(K)+v(N-K)=v(N)$, la ganancia obtenida por la coalición K más la ganancia obtenida por el resto de los jugadores que no sean miembros de K, (N-K) es igual al valor de la gran coalición v(N)*

DEFINICION 2.4. *El juego $\Gamma=(N,v)$ es aditivo si y sólo si $v(K\cup L)=v(K)+v(L)$, el valor de la unión de las dos coaliciones K y L es igual a la suma de sus valores por separado cuando no tienen jugadores comunes, $k\cap L=\varnothing$.*

PROPOSICION 5. *Si Γ es un juego superaditivo entonces Γ es de suma constante.*

PROPOSICION 6. *Si Γ es un juego superaditivo entonces Γ es aditivo.*

Demostración. Sea $x\in C(N,v)$ una imputación que pertenece al núcleo, por la proposición 3 $x(K)\geq v(K)$ Suponga que $x(K)>v(K)$, la coalición K asegura más de lo que puede garantizar por su cuenta para alguna $K\in C(N,v)$ Entonces, $x(K)>v(K)$, si la coalición K obtiene más jugando separada, el resto de los jugadores podría hacer lo mismo.

$x(K)+x(N-K)>x(K)+v(N-K)$ y como $x(N)=v(N)$ contradice el hecho de que $x\in C(N,v)$ por que según la relación anterior $x(N)>v(N)$ Así, si $K,L\in C(N,v)$ con $k\cap L=\varnothing$ entonces $v(K\cup L)=x(K\cup L)=x(K)+ x(L)=v(K)+v(L)$ y $x=(v(\{1\}),\ldots,v(\{n\}))$, formado por la suma de los valores de cada jugador en su respectiva coalición y la imputación con pagos para cada contendiente es el único punto que debe contener el núcleo. ✓

La definiciones y proposiciones expuestas a lo largo de la sección (el núcleo), indican que los pagos efectuados en el núcleo serán óptimos de Pareto.

Una desventaja que presenta el núcleo como concepto de solución es que muchos juegos poseen núcleos vacíos. A continuación se indicará la forma de determinar si el núcleo es vacío o no.

2.1. NUCLEOS VACIOS Y NO VACIOS

En esta sección se exponen algunas condiciones suficientes y/o necesarias para la no vacuidad del núcleo.

DEFINICION 2.5. *Sea un juego Γ=(N,v), se dirá que el núcleo C(N,v), es no vacío si v(N) es lo suficientemente amplio con relación a los valores de v(K) para otras coaliciones K.*

Para comprender mejor la definición anterior, considere la familia de juegos idénticos en todos sus aspectos excepto en el valor de v(N), es decir, tome dos juegos cualesquiera: Γ=(N,v) y Γ'=(N',v')

1) Γ y Γ' tienen el mismo conjunto de jugadores (N=N')

2) v(K)=v'(K) para toda coalición K menor que n jugadores (K < n)

Si el valor de la coalición de todos los jugadores v(N), es pequeño en relación con v(K), los valores de la fusión K, entonces no existirá el núcleo.

Para señalar de una manera sencilla si un juego Γ=(N,v) posee un núcleo no vacío, debe resolver un problema de programación lineal (PPL), en el cuál la función objetivo es el valor mínimo de v(N) que permita un núcleo no vacío. El PPL queda representado de la siguiente manera:

$$\textit{minimizar} \sum_{i \in N} x_i \quad (2.3)$$

sujeto a

$$\sum_{i \in K} x_i \geq v(K) \text{ para todo } K \in N, K \neq N \quad (2.4)$$

De cumplirse las hipótesis 1 a 3 (capitulo I secciones 2.8 a 2.9.3) para el juego, existirá al menos una solución al PPL. Eligiendo el mínimo de los vectores de pagos x_i. Toda solución que encuentre tendrá como límite a $\sum_{i \in N} c_i$ (sección 2.9.2 capítulo I) y obviamente existirán numerosos valores finitos para las x_i que no violarán las ecuaciones (2.3) y (2.4) Suponiendo que Z sea la solución al PPL.

PREMISA 1. *Suponga un juego (N,v) el cuál satisface las hipótesis 1 a 3 del capítulo I. Entonces, el núcleo C(N,v) del juego será no vacío si y sólo si, la solución al PPL (Z) no excede el monto generado por la fusión de todos los jugadores v(N), $Z \leq v(N)$*

La premisa 1 indica que existirá una solución al juego, si y sólo si los pagos conseguidos por medio de las imputaciones x_i no exceden el monto alcanzado por la gran coalición (fusión de todos los jugadores) Hay muchas maneras de demostrar que el núcleo no es vacío entre las más destacadas se encuentra el núcleo-ε abordado a continuación.

2.2. EL NUCLEO-ε

En 1966, Martín Shubik y Lloyd Shapley introducen un nuevo concepto de solución denominado núcleo-ε. Aquí se emplea éste concepto para demostrar la no vacuidad del núcleo, pero nada impide que se utilice como un concepto de solución para obtener resultados a los juegos. Si le parece interesante el tema de núcleo-ε, existen documentos interesantes al respecto en la gran red (Internet)

El núcleo-ε está formado por todas las imputaciones o asignaciones que se encuentran dentro de un épsilon (ε), de hallarse en el núcleo. Una imputación que se halle en el núcleo debe dar al menos v(K) a cada coalición K pero una imputación dentro del núcleo-ε, sólo necesita aportar a la fusión K, v(K)-ε. Entonces se dirá que todo juego que satisfaga las hipótesis 1a 3 tendrá un núcleo-ε lo suficientemente amplio para encontrarse en un ε.

DEFINICION 2.6. *El núcleo-ε, $C_\varepsilon(N,v)$ de un juego $\Gamma=(N,v)$ es un subconjunto del conjunto de las imputaciones $I(N,v)$. La imputación $y\in I(N,v)$ es un elemento de $C_\varepsilon(N,v)$ si* $\sum_{i\in K} y_i \geq v(K)-\varepsilon$ *para todas las coaliciones K.*

La definición anterior indica que para que una imputación y perteneciente al conjunto de las imputaciones sea lo suficientemente buena para que todos los jugadores la acepten, la suma de las imputaciones por jugador $\sum_{i\in N} y_i$ debe otorgar al menos tanto como el valor de la coalición en la cual se encuentra, menos un cierto valor fijo ε para todas la coaliciones K que pudieran formarse, v(K)-ε.

La definición 2.6 no especifica que ε>0 y de admitirse valores negativos, existirá un único valor de ε^* tal que $C_\varepsilon(N,v) \neq \emptyset$ si y sólo si $\varepsilon \geq \varepsilon^*$.

LEMA 4. *Sea (N,v) un juego que satisface las hipótesis* 1 *a* 3. *Existirá un valor ε^* tal que el núcleo-ε del juego sea no vacío* y *además ε^* es único si* y *sólo si $\varepsilon \geq Z-v(N)$*

Demostración. Si existe un valor finito ε lo suficientemente amplio como para que el núcleo-ε sea no vacío (por definición), existe un valor finito tal vez negativo lo suficientemente pequeño como para que el núcleo-ε sea vacío. Eligiendo un valor ε', se deduce que si el núcleo-ε es vacio para ε', entonces para valores mayores a ε será no vacio, esto es para $\varepsilon' > \varepsilon$ $C_\varepsilon(N,v) \neq \emptyset$. En contraparte, existirá un ε^* estrictamente menor a ε en el cuál el núcleo-ε será no vacio ($\varepsilon > \varepsilon^*$) y para $\varepsilon^* > \varepsilon$ (ó $\varepsilon < \varepsilon^*$) el núcleo-ε será vacío.

Sólo resta demostrar que el núcleo-ε es no vacío para $\varepsilon=\varepsilon^*$. Así pues, es fácil ver que si $\varepsilon>\varepsilon^*$ y $\varepsilon<\varepsilon^*$ no son desigualdades estrictas, entonces el núcleo-ε no será vacío para $\varepsilon=\varepsilon^*$.✓

El núcleo-ε asociado con el valor ε^* del lema 4 se llama núcleo mínimo por que es el núcleo no vacío más pequeño asociado con el juego (N,v)

2.3. LOS JUEGOS SIMPLES

Los juegos simples son una categoría especial de juegos en los que una coalición es ganadora o perdedora. Este tipo de juegos se caracteriza por una ganancia fija que obtiene la coalición ganadora gracias a la formación de coaliciones. Para estudiar los juegos simples, la forma normalizada resulta especialmente conveniente.

DEFINICION 2.7. *Se dice que un juego $\Gamma=(N,v)$ es simple si* y *sólo si la normalización cero-uno de (N,v), representada por (N,v^*) satisface*

1) $v(K)=0$ *ó* $v(K)=1$ *para toda* $K\subseteq N$ y $v(N)=1$,

2) *K es una coalición ganadora si* y *sólo si* $v^*(K)=1$,

3) *K es una coalición perdedora si* y *sólo si* $v^*(K)=0$,

4) *(N,v) es superaditivo* ,

5) *Un jugador i es vetador (o dictador) si* y *sólo si, está en toda coalición ganadora.*

La noción de que una coalición es ganadora se expresa por v(K)=1, del mismo modo la noción de que una coalición es perdedora queda recogida por v(K)=0 condiciones que se indican en los puntos 1 y 2 de la definición 2.7, con el valor de la coalición de todos los jugadores igual a 1 por tratarse de un juego simple.

En el caso de un juego no normalizado cero-uno el pago obtenido por una coalición ganadora sería: la suma de los pagos individuales para cada uno de los miembros, es decir, $\sum_{i \in K} v(\{i\})$ más un pago fijo a. Así, el pago total para una coalición ganadora en un juego no normalizado cero-uno es: $v(K) = a + \sum_{i \in K} v(\{i\})$ en donde a es una constante positiva y el pago para la coalición perdedora es $v(K) = \sum_{i \in N-K} v(\{i\})$, condición obtenida por superaditividad. Estas dos condiciones de los juegos no normalizados cero-uno se retomarán en el capítulo III para indicar los pagos en las aplicaciones tratadas.

Analizando el punto 4 de la definición anterior significa que si K es una coalición ganadora, entonces al añadir miembros a K está seguirá siendo ganadora. Bajo el supuesto que exista una coalición ganadora K. Entonces, N-K debe ser la coalición perdedora lo cual se demuestra suponiendo a K y N-K como a dos coaliciones ganadoras, el valor de las fusiones(coaliciones) es v(K)=v(N-K)=1 una condición imposible por que viola la superaditividad.

Si existe una coalición ganadora y una coalición perdedora cuando menos se sobreentiende que el juego es esencial (capítulo I sección 2.10) Cabe destacar que el complemento de una coalición ganadora es una coalición perdedora, pero lo inverso no necesariamente debe cumplirse. La razón de dicha aseveración puede explicarse con el siguiente ejemplo. Suponga que tres representantes de diferentes partidos políticos compiten por una posición en la cámara de senadores y que sólo aquel que consiga la mayoria de los votos (50% +1) será electo. Analizando la situación, si el partido número 1 consigue el 40% de los votos, deja 60% a los otros dos partidos. Si el partido No. 2 sólo logra captar el 48% y el tercer partido un 12% de los votos, todos los partidos serán perdedores pues ninguno obtuvo una mayoria ganadora, el 50%+1 de los votos.

Para comprobar la quinta y última condición de la definición 2.7 es necesario introducir el núcleo de un juego simple.

2.3.1. El Núcleo de un Juego Simple

Los juegos simples con núcleos vacios carecen totalmente de interés (no hay coaliciones ganadoras o perdedoras), por esté motivo la atención se centrará en los juegos simples con alguna coalición perdedora (no vacía) y al menos dos coaliciones ganadoras.

Un jugador i se considera vetador (o dictador) si es imprescindible para todas las coaliciones ganadoras, esto es la coalición K no podrá ser ganadora sin el jugador i. Si N es la única coalición ganadora todos los jugadores de N serán vetadores. Aquel juego que no tenga jugadores vetadores tendrá un núcleo vacío. La demostración se lleva a cabo en los lemas 5 y 6.

LEMA 5. *Suponga que $\Gamma=(N,v)$ es un juego simple en forma normalizada cero-uno. Si $v(N-\{i\})$ es la coalición ganadora ($v(N-\{i\})=1$) para todo i en N, entonces el núcleo de (N,v) está vacío.*

Demostración. Si x pertenece al conjunto de imputaciones I(N,v), al menos un jugador tendrá un pago positivo para x. Sin perdida de generalidad suponga que $x_1>0$, el pago del jugador 1 es positivo. Entonces, la imputación x es dominada por la imputación x', en donde el pago para el jugador i con la imputación x', es el valor otorgado por la imputación x para cada jugador i, más el pago del contendiente 1 (x_i) entre el resto de los jugadores (n-1), como i >0 no se contempla el pago del jugador 1, ni en x_i ni en x'_i por ende $x'_1=0$ y el núcleo esta vacio, porque el jugador 1 excluido es el jugador vetador, matemáticamente: $x'_i = x_i + \frac{x_1}{(n-1)}$ para i >1 y $x'=0$. ✓

LEMA 6. *Suponga que (N,v) es un juego simple en el que* $v(N-\{i\}) = a + \sum_{i\in N} v(N-\{i\})$ *es la coalición ganadora para todo i∈N, entonces el núcleo C(N,v) del juego (N,v) está vacio.*

Demostración. Sin el jugador vetador i que es excluido, la coalición es perdedora $v(N-\{i\}) = \sum_{i\in N-\{i\}} v(N-\{i\})$, asegurando sólo el monto que aportó inicialmente. En caso contrario al unirse el jugador vetador i a la coalición N-{i} le asegura el pago que inicialmente aportó la coalición más un pago fijo a que otorga el participante vetador i. Para que la coalición N-{i} sea ganadora o sea $v(N-\{i\}) = a + \sum_{i\in N} v(N-\{i\})$, es necesario que contenga al jugador i, si en este caso el jugador excluido de la coalición N-{i} es el jugador vetador, implica que el núcleo esta vacío. ✓

3. CONJUNTOS ESTABLES

Algunas desventajas que presenta el núcleo como concepto de solución son: que para una gran variedad de juegos el núcleo puede ser vacío o simplemente no se encuentran soluciones satisfactorias o el núcleo del juego resulta muy "grande". Todo lo anterior indica que el núcleo no aporta la información suficiente para considerar que un juego esté resuelto, en casos como el descrito se emplea el conjunto estable también conocido como la solución de Von Neumann-Morgenstern.

El conjunto estable se halla íntimamente relacionado con el núcleo. Recuerde que el núcleo es el conjunto de imputaciones no dominadas. Entonces, por las propiedades de las asignaciones (imputaciones) una asignación en el núcleo no estará dominada por otra imputación que también se encuentre en el núcleo y mucho menos estará dominada por otra imputación que se halle fuera del núcleo. Esto es, las imputaciones de una misma jerarquía por así decirlo, no se dominan entre si y tampoco serán dominadas por imputaciones de menor jerarquía. Para relajar las condiciones del núcleo, Von Neumann y Morgenstern proponen no desechar las "soluciones aceptables", si la asignación que la domina es a su vez dominada.

La propuesta es que en general dentro del conjunto estable, hay muchas soluciones diferentes para un juego particular de n-personas, Neumann y Morgenstern intentan aislar una solución que sea la "mejor".

Suponga que I^* es un subconjunto del conjunto de imputaciones ($I^* \subset I(N,v)$) I^* será un conjunto estable, si ninguna asignación en I^* es dominada por cualquier otra imputación en I^*

y además para cada asignación que no pertenece a I^* es dominada por otra imputación en I^*. Como se indicaba con las jerarquias.

DEFINICION 2.8. *Un conjunto estable $C^*(N,v)$ es un subconjunto del conjunto de las imputaciones $I(N,v)$ que satisface*

1) Si una imputación, x, pertenece al conjunto estable, $x \in C^*(N,v)$, entonces no estará dominada por ninguna otra x' dentro de $C^*(N,v)$.

2) si la asignación, z, no pertenece al conjunto estable, $z \notin C^*(N,v)$, entonces existirá un vector de pagos en el conjunto estable, $x \in C^*(N,v)$, tal que x domine a z.

Refraseando las condiciones de la definición 2.8. La condición en 1 se denomina consistencia interna o sea, si las imputaciones x, $y \in C^*(N,v)$ entonces x no domina a y. Además, si $x \notin C^*(N,v)$ entonces existe $y \in C^*(N,v)$ tal que y domina a x, denominada condición de estabilidad que representa al punto 2. Ambas condiciones reflejan la intención de encontrar una solución que sea la "mejor".

PROPOSICION 7. *Si $x,y \in I(N,v)$, asignaciones en el conjunto de las imputaciones, entonces x no puede dominar a y ni con una coalición que contenga a un sólo jugador, ni con la gran coalición, N.*

Demostración. La demostración se llevará a cabo en dos pasos. Paso 1. Si la imputación x domina a y vía la coalición de un sólo jugador $\{i\}$, entonces lógicamente, la imputación x para el jugador i supera a la asignación y_i $(x_i > y_i)$ y el valor de la coalición $\{i\}$ será al menos tan bueno como la imputación x_i, $(x_i \leq v(\{i\})$ Por leyes de transitividad si $y_i < x_i \leq v(\{i\})$ entonces $y_i < v(\{i\})$ y $y \notin I(N,v)$ Paso 2. Si x domina a y vía la coalición N, entonces la imputación $x_i > y_i$ para todo $i \in N$ por lo cual la suma de todas las imputaciones x_i para todo jugador i en la fusión de todos los jugadores N, $\sum_{i \in N} x_i$, son estrictamente mayores que las imputaciones dominadas y_i para i en N, $\sum_{i \in N} y_i$, pero $\sum_{i \in N} y_i = v(N)$ o sea $\sum_{i \in N} x_i > \sum_{i \in N} y_i = v(N)$ y $x \notin I(N,v)$ desigualdad que viola los principios de superaditividad y la imputación x, no pertenece al conjunto de las imputaciones I(N,v), concluyendo la demostración.✓

PROPOSICION 8. *Si $C^*(N,v)$ es un conjunto estable, entonces el núcleo es un subconjunto del conjunto estable, $C(N,v) \subseteq C^*(N,v)$*

Demostración. Si la imputación x pertenece al conjunto estable, $x \in C^*(N,v)$, entonces x no es dominada por ninguna imputación, es decir, x no pertenece al conjunto de las imputaciones dominadas. Pero el conjunto de imputaciones no dominadas en el conjunto estable es un subconjunto propio del conjunto de imputaciones no dominadas en el juego. Así, x pertenece al conjunto de imputaciones no dominadas por el conjunto estable, $x \in C^*(N,v)$ ✓

Durante algún tiempo se planteo la cuestión de si todos los juegos tendrían conjuntos estables. La última proposición 8, dio lugar a la hipótesis de que el núcleo era la intersección de todos los conjuntos estables del juego; sin embargo, Lucas (1969) halló un juego de diez personas que no poseía conjuntos estables.

PROPOSICION 9. *Salvo por el caso trivial en que el conjunto de las imputaciones tiene sólo un elemento, cualquier conjunto estable contiene más de una imputación.*

Demostración. Suponga el conjunto estable $C^*(N,v)$ que posee un sólo elemento, x, y una imputación y, diferente del vector de pagos x.

1) Existe el jugador i tal que $x_i > v(\{i\})$, por que si $x_j = v(\{j\})$ para toda $j \in N$, entonces $y_j > x_j$ para toda $j \in N$ y la imputación x no puede dominar a la asignación y.

2) Con cualquier jugador i fijo para el cual se cumpla que $x_i > v(\{i\})$, definase a la imputación z como:

$$z_j = \begin{cases} x_j + \dfrac{x_i - v(\{i\})}{n-1} & \text{si } j \neq i \\ v(\{i\}) & \text{si } j = i \end{cases}$$

$z \in I(N,v)$ y $z \notin C^*(N,v)$, por lo que debe existir una coalición K tal que x domina a z via K, pero $x_j < z_j$ para $j \neq i$. Así, la única coalición con la que x puede dominar a z es con $K = \{i\}$ contrario a la proposición 7.✓

Las proposiciones 7, 8 y 9 son la base del conjunto estable. Reafirman las condiciones en la definición 2.7 haciendo de estas un filtro para aislar la mejor solución. Si se tiene un conjunto estable es importante saber cuando una imputación domina a otra y cuando no puede ser dominada (proposición 7) Además recuerde que el núcleo siempre esta contenido en el conjunto estable indicado en la proposición 8 y que no obtendrá una única solución (en el conjunto estable) aseveración hecha en la proposición 9.

Algunas diferencias entre el conjunto estable y el núcleo, son que en primer lugar el conjunto estable no es único y en segundo lugar, muchos juegos pueden poseer conjuntos estables con núcleos vacíos.

Cuando se trabaja con juegos en donde existe cooperación de los jugadores, es necesario considerar la formación de coaliciones y cuales se formarán en el curso de la negociación. La división de jugadores en grupos o coaliciones se llama **estructura de coaliciones**.

En el núcleo, parece ser que la estructura de coaliciones sería N en sí misma a diferencia del conjunto estable debido a que no toma en cuenta la gran coalición N. Sin embargo, parece que el conjunto estable tiene más argumentos para decidir que coaliciones podrían formarse.

4. EL CONJUNTO DE NEGOCIACION

El conjunto de negociación se halla íntimamente relacionado con lo que diversas coaliciones puedan conseguir, por que el conjunto de jugadores está particionado en varias coaliciones.

Una característica del conjunto de negociación consiste en que para excluir una imputación, la coalición K debe ser capaz de mejorar frente a esa imputación y debe resultar imposible que miembros en K, sean atraídos por otra coalición L con un vector de pagos que mejore el inicialmente propuesto. Además, sólo se permitirá a ciertas coaliciones mejorar con respecto a una imputación.

En las secciones 4.1 a 4.4 se exponen los conceptos necesarios que ayudan a definir el conjunto de negociación ubicado en la sección 4.5.

4.1. ESTRUCTURA DE COALICION

En los juegos cooperativos n-personales es muy difícil saber los movimientos que harán los jugadores para agruparse en coaliciones. Es válido suponer al menos una aproximación a la realidad en donde el conjunto de jugadores está particionado en varias coaliciones. Tal partición de jugadores en una coalición se denomina ***estructura de coalición***. Por ejemplo, la partición ({1,2,...,n-1},{n}) representa el caso en donde los primeros n-1 jugadores entran en coalición contra del jugador n.

El conjunto de negociación está en conexión con el pago que diversas coaliciones puedan asegurarse, es decir, será examinado un vector de pagos relacionado con una partición concreta de los jugadores en subconjuntos. Toda partición de este tipo se denomina estructura de coalición y su definición es la siguiente:

DEFINICION 2.9. *Una estructura de coalición* $\tau=(T_1,\ldots,T_m)$ *es una partición del conjunto de los jugadores en coaliciones. Con las siguientes condiciones:*

1) Cada conjunto T_K *es no vacío* ($T_K \neq \varnothing$).

2) Ningún elemento en el conjunto T_j *se encuentra en el conjunto* T_k y *viceversa (son mutuamente exclusivos)* $T_j \cap T_k = \varnothing$ *para todo* $j,k \in \{1,\ldots,m\}$, *además* $j \neq k$ y

$\bigcup_{K \in N} T_K = N$, *la unión de todos los conjuntos de jugadores es el espacio de todos los jugadores N.*

La noción que subyace bajo la sección 4.1 acerca de la estructura de coalición es determinar la forma en como los jugadores se agrupan en coaliciones (estructura de coalición) para alcanzar mejores ganancias denominadas configuración de pagos.

Para no confundirlo observe el siguiente ejemplo, supongamos que se tienen las siguientes coaliciones K={1,2,5} y L={3,4,6}. La estructura de coalición que se forma al unir las coaliciones K y L es: $\tau=(T_1,\ldots,T_m)$ en donde $T_1=K$ y $T_2=L$. Por supuesto la estructura de coalición propuesta cumple con las condiciones de la definición 2.9. Cada conjunto T_K es diferente del conjunto vacío y no tienen elementos en común formando la unión total de jugadores cuando se combinan todos los conjuntos T_K. La configuración del pago ayudará a comprender los vectores de pago en presencia de una estructura de coalición propuesta.

4.2. CONFIGURACION DEL PAGO

Una configuración del pago es un vector específico con una estructura de coalición particular. En términos aproximados, la definición de la configuración del pago es tomar una estructura de coalición concreta. Claro esta que cada estructura de coalición tiene asociados diferentes vectores de pagos. De todos los vectores de pagos elija uno en específico que de a cada fusión en la estructura de coalición lo mismo que la coalición puede asegurarse a si misma.

DEFINICION 2.10. *Una configuración de pagos es un par (x,τ) en donde $x\in R^n$ es un vector de pagos, τ es una estructura de coalición* y $\sum_{i\in T_K} x_i = v(T_K)$ *para $K=1,\ldots,m$.*

La definición 2.10 implica que para una configuración del pago (x,τ), cada coalición perteneciente a τ recibirá un pago total que será igual a lo que la coalición podría conseguir antes de entrar en τ. Si recuerda esto se llama racionalidad de grupo. A un vector de pagos asociado con una estructura de coalición además de cumplir con la racionalidad de grupo es posible añadirle la racionalidad individual, extendiendo la definición 2.10 como sigue :

DEFINICION 2.11. *Una configuración de pagos individualmente racional, es una configuración de pagos (x, τ) para la que $x_i \geq v(\{i\})$ para todo i en N. Así, el conjunto de todas las configuraciones de pagos individualmente racionales para un juego (N,v), asociada con una estructura de coalición τ se denotará por $I_\tau(N,v)$*

Igual que en la definición 2.10, si cumple con la racionalidad individual, entonces cada jugador recibirá un pago al menos tan bueno como el que podría conseguir jugando sólo.

4.3. LA OBJECION

Como ya se vio, el conjunto de negociación está formado por las configuraciones de pagos individualmente racionales. Pero en ocasiones una coalición admisible puede no quedar muy conforme y presentar una queja efectiva frente a la configuración de pagos propuesta. Una coalición admisible es aquella formada por un subconjunto de una coalición K perteneciente a la estructura de coalición. Una queja efectiva es una objeción para la cual no hay contraobjeción.

La objeción de la coalición K frente a otra coalición L es simplemente una nueva propuesta de configuración del pago individualmente racional (y,υ) Con la configuración de pagos (y,υ) los jugadores pertenecientes a K obtendrán más de lo que obtenían con (x,τ) y todos los socios de la coalición K obtendrán al menos lo mismo que obtenían con (x,τ)

Los socios de la coalición K en la estructura de coalición τ serán todos aquellos jugadores pertenecientes a coaliciones L que contengan también a elementos de K.

DEFINICION. 2.12. *Para una estructura de coalición τ y una coalición K, los socios de K en τ serán los miembros del conjunto $P(K,\tau)=\{\, i \,/ i \in T_j,\ T_j \cap K \neq \varnothing \}$.*

Por ejemplo, supongamos que $\tau=(\{1,2,5\},\{3,6,9\},\{4,7,8\})$ y además que $K=\{1,2,6\}$. Entonces los socios de la coalición K en la estructura de coalición τ propuesta son: $P(K,\tau)=\{1,2,3,5,6,9\}$ Cuando se presenta una objeción por parte de la coalición K frente a la fusión L es porque los miembros en K creen estar recibiendo menos del pago justo destinado a su coalición (T_j) y que los miembros en L están obteniendo más de lo que K piensa se merecen. Ambas coaliciones K y L deben pertenecer a la estructura originaria o sea $K,L\subset T_j$ en donde $T_j \in \tau$. Y como se expuso anteriormente con la nueva propuesta (y,υ) los jugadores en K obtendrán más que con (x,τ) y los socios de K que lo apoyaron en su objeción, obtendrán al menos lo mismo que obtendrian con (x,τ)

DEFINICION 2.13. *Suponga la configuración de pagos individualmente racional (x,τ), que pertenece al conjunto de todas las configuraciones de pagos individualmente racionales asociado con una estructura de coalición $I_\tau(N,v)$, matemáticamente $(x,\tau)\in I_\tau(N,v)$. $K,L\subset T_j$ en donde $T_j \in \tau$* y que *$K\cap L=\varnothing$. Entonces, una objeción de K frente a L es $(y,\upsilon)\in I_\upsilon(N,v)$ tal que*

1) $P(K,\upsilon)\cap L=\varnothing$,

2) *Las imputaciones quedan como $y_i > x_i$ para todo i en K ,*

3) *Las asignaciones son $y_i \geq x_i$ para todo $i \in P(K, \upsilon)$*

La condición 1 propone que en la objeción de K frente a L, los socios de K con la estructura de coalición υ (P(K,υ)) no incluyen a ningún jugador de la coalición L. Las condiciones 2 y 3 implican que las imputaciones y_i, para los elementos en K y los socios de K con υ P(K,υ) dominan al vector de pagos x_i en la configuración del pago (x,τ) Los jugadores en coalición con los miembros de K deben ser lo suficientemente bien tratados para υ. La coalición K no está limitada a elegir una υ en donde $K \in \upsilon$ (es miembro) ó $K \subset \upsilon$. Si la objeción de K puede rebatirse por la coalición L se tendrá una contraobjeción.

4.4. LA CONTRA-OBJECION

Una contra-objeción es una propuesta de la coalición L similar a una objeción en respuesta a la objeción dirigida hacia ella por la coalición K.

Para que una contraobjeción sea válida los socios de la coalición L deben obtener al menos el mismo pago que obtendrían para (x, τ), y los socios de K para (y, υ) que eran socios de L para (z, ν), deberán obtener al menos tanto como obtendrian para (y, υ) En resumen, la contraobjeción deberá ser lo suficientemente buena para disuadir a algunos de los socios de K de que se unan a K en una objeción y lo bastante buena para mantener la fidelidad de los socios de L.

DEFINICION 2.14. *Suponga que $(x, \tau) \in I_\tau(N,v)$, $K,L \subset T_k$ en donde $T_k \in \tau$, $k \cap L = \varnothing$ y que $(y, \upsilon) \in I_\upsilon(N,v)$ sea una objeción de la coalición K frente a la coalición L. Se dirá que*

$(z, v) \in I_v(N, v)$ es una contra-objeción de L frente a K si cumple:

1) $K \not\subset P(L, v)$, algunos miembros en K pueden ser socios de L para (z, v) pero al menos un elemento de K será excluido.

2) $z_i \geq x_i$ para $i \in P(L, v)$ y $z_i \geq y_i$ para $i \in P(K, \upsilon) \cap P(L, v)$ Condición que indica dominio del vector de pagos z_i con respecto a x_i y a y_i. O sea z_i domina a las otras imputaciones otorgando más a los socios y miembros de L en la contraobjeción (z, v)

Las objeciones y contraobjeciones podrán efectuarse siempre y cuando un conjunto de jugadores (objetores) no estén conformes con la configuración de pagos propuesta. Además, cada objeción y cada contraobjeción debe ser al menos tan atractiva (otorgando pagos) como la configuración de pagos original para que no existan desertores. Las objeciones y contraobjeciones terminarán cuando no exista un grupo objetor o cuando no exista la posibilidad de mejorar la última configuración del pago propuesta.

4.5. DEFINICION FORMAL DEL CONJUNTO DE NEGOCIACION

El conjunto de negociación está constituido por todas las configuraciones de pagos que sean individualmente racionales de modo que para cada objeción exista al menos una contraobjeción. En un sentido más general es cuando un grupo de jugadores en desacuerdo con la configuración del pago intenta sobornar (atraer otorgando mejores o iguales pagos) a otros pocos jugadores para que se les unan en una segunda propuesta que beneficie a todos; otro grupo puede tener una tercera propuesta, privando al grupo objetor de alguno o algunos jugadores necesarios para realizar su objeción exitosamente.

DEFINICION 2.15. *El conjunto de negociación* $\mu_1^{(i)}$ *es el conjunto de todas las configuraciones de pagos individualmente racionales* $(x,\tau)\in I_\tau\ (N,v)$ *tal que siempre que exista una objeción de la coalición K frente a la coalición L, al menos un miembro en L tenga una contraobjeción.*

Para retomar los conceptos descritos en las secciones 4.1. a 4.4, considere una estructura de coalición particular τ y un vector de pagos particular, x, asociado con la estructura de coalición. El par (x,τ) forman una configuración de pagos individualmente racional. Si las coaliciones K y L son subconjuntos de $T_j\in\tau$ (un mismo elemento de la estructura de coalición), alguna fusión K puede tener una objeción frente a una coalición L. La razón proviene de la inconformidad de los miembros en K que creen estar obteniendo menos de lo que ellos piensan que deberian obtener y que los miembros en L obtienen más de lo que merecen.

Ahora, partiendo de la objeción de K frente a L, la objeción en si misma forma una nueva estructura de coalición υ y por supuesto una nueva configuración del pago individualmente racional (y,υ) con las siguientes propiedades :

a) Todos los miembros en la coalición K obtendrán un monto mayor que antes ,
b) Todos los socios de la fusión K obtendrán al menos lo mismo que antes de realizarse la objeción.

Observe que la nueva estructura de coalición formada es $\upsilon=(\upsilon_1,\ldots,\upsilon_n)$, entonces por la propiedad (b) el jugador i es un socio de la coalición K, si la fusión υ_j a la que el contendiente i pertenece contiene a uno o más jugadores de K. En otras palabras, los miembros de K no necesitan estar en la misma coalición para la nueva estructura υ, aunque tuvieran que estar en la misma fusión para la estructura original, τ. El pago para todos sus socios refleja la necesidad que tienen la coalición K de que todos los jugadores en coalición con miembros de K cooperen activamente para la nueva estructura de coalición, υ, propuesta por la fusión K.

Si bien K puede presentar una objeción frente a L también la coalición L puede presentar una contraobjeción frente a K. La contraobjeción da lugar a la estructura de coalición, ν, con una configuración de pagos (z,ν) con las siguientes características :

a) La imputación z debe dar a todos los miembros de L y a todos los socios de L, al menos lo que recibían para x ($z_i \geq x_i$ para los miembros y socios de L) ,

b) Todos los miembros de K que también sean socios de L deben recibir al menos tanto como lo que podrían recibir para y ($z_i \geq y_i$ para los socios de L que sean miembros de K)

El que L tenga una contraobjeción concreta para la objeción de K hace nula la objeción efectuada por la coalición K. La razón es que al contraobjetar, L, privará del apoyo de alguno de los jugadores que K necesita para su objeción. Claro esta que con una contraobjeción, los contraobjetores se encuentran en una situación lo suficientemente buena y por lo tanto, algunos miembros y/o socios de K quedarán interesados en ella como para abandonar a K en su objeción.

Teniendo una estructura de coalición τ y un vector de pagos específicos x, una objeción sólo podrá ser admitida por un jugador o jugadores dentro de la misma coalición y existirán contraobjeciones contra uno o más miembros de la misma coalición. En otras palabras sólo podrán objetar y contraobjetar los jugadores que se encuentren pactando o negociando en ese momento.

Es factible que al producirse una objeción, los objetores abandonen la coalición y proponer una nueva estructura de coalición con un vector de pagos nuevo. Para que la nueva propuesta tenga éxito no debe existir contraobjeción alguna que la mejore.

Si toma la idea del conjunto de negociación con todas sus condiciones encontrará una similitud con los procesos de negociación en la vida diaria.

A continuación se emplean las objeciones y contraobjeciones para definir al nódulo y el nucléolo. Los conceptos de nódulo y nucléolo serán utilizados para saber si todos los juegos de una amplia clase poseen un conjunto de negociación.

4.6. EL NODULO

Para definir el nódulo es necesario plantear algunas definiciones básicas con él relacionadas. Un concepto útil asociado con los beneficios obtenidos por la formación de coaliciones y con la importancia comparativa de los pares de jugadores en las coaliciones es el excedente. El excedente mide el potencial de pagos de una coalición en relación con un vector de pagos específico.

DEFINICION 2.16. *El excedente de una coalición K con respecto al vector de pagos x en un juego (N,v) es* $e(K,x) = v(K) - \sum_{i \in K} x_i \quad \Lambda \ (2.5)$

El excedente $e(K,x)$ puede explicarse como el grado en que los miembros en una coalición pueden mejorar su pago conjunto con respecto a un vector de pago x originalmente propuesto. La definición anterior sólo menciona el excedente de una coalición con respecto a un vector de pagos, pero también es posible definir el excedente de un jugador contra otro. El excedente de i contra j puede considerarse como la medida de la capacidad de negociación del jugador i contra el jugador j. Del mismo modo es posible definir el excedente del jugador j contra el jugador i.

DEFINICION 2.17. *El excedente del jugador i contra el jugador j en un juego (N,v) es* $s_{ij}(x) = max\{e(K,x) \mid K \subset N, i \in K, i \in K, j \notin K\}$

El excedente de i contra j es el mayor de los excedentes $e(K,x)$ con respecto a todas las coaliciones que incluyen al jugador i y que excluyen al jugador j. Tomando en cuenta a los jugadores i, j y al vector de pagos x, suponga que sólo interesa el valor del jugador i sin la ayuda del jugador j. Entonces, si el excedente de i contra j se relaciona con el vector de pagos x, (K es la coalición más provechosa que incluye al jugador i y excluye al jugador j), $s_{ij}(x)$ mide la mayor contribución a una coalición que puede asociarse con i, sin guardar relación con j.

Un ejemplo que muestra el excedente se expone a continuación. Supongamos una situación donde hay dos contendientes un vendedor y un comprador. El bien que deciden intercambiar es una computadora. El vendedor desea expender la computadora en un precio de H pesos que representa el mínimo pago que aceptará. Cualquier valor de un contrato final x^* que sea menor que H representa un monto peor que H. Si x^* es mayor que H, se tiene que el excedente del comprador como: $x^* - H$.

Si b es el máximo pago que el comprador esta dispuesto a otorgar por la computadora, entonces el excedente del comprador es b-x*. Si b es menor que H o sea el máximo excedente del comprador es menor que el precio mínimo del vendedor, no hay zona de acuerdo. El excedente para ambos jugadores puede verse en forma gráfica como se indica a continuación.

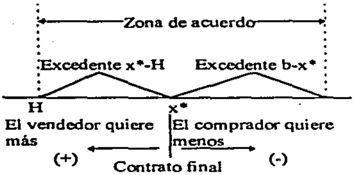

GRAFICO 3
EJEMPLO GRAFICO DE LOS EXCEDENTES

Los jugadores i, j están en una especie de equilibrio en relación con x, si $s_{ij}(x)=s_{ji}(x)$ el excedente del jugador i contra j es igual al excedente del jugador j contra el jugador i, está especie de equilibrio es la base del nódulo.

DEFINICION 2.18. *El nódulo, $\mathfrak{N}$, está formado por todas las configuraciones de pagos (x, τ) tales que si $i, j \in T_k \in \tau$, entonces*

1) *El excedente del jugador i contra j ($s_{ij}(x)$) iguala al excedente del jugador j contra el jugador i ($s_{ji}(x)$), $s_{ij}(x)=s_{ji}(x)$, o bien*

2) Si $s_{ij}(x)<s_{ji}(x)$, el jugador con el excedente más pequeño recibe el pago mínimo posible $x_i=v(\{i\})$, o bien ,

3) Si $s_{ij}(x)>s_{ji}(x)$ y $x_j=v(\{j\})$

Las tres condiciones en la definición 2.18 están formuladas para cada par de jugadores i, j que se encuentren en una misma coalición T_K dentro de la estructura de coalición τ. Razonando la primera condición, como los excedentes son iguales resulta imposible una objeción por parte de cualquier jugador. Ahora sobre la segunda condición, tome el excedente más pequeño (en éste caso el del jugador i) $s_{ij}(x)<s_{ji}(x)$ y $x_i>v(\{i\})$, entonces j se hallará en posición de realizar una objeción contra la que i no tendrá contraobjeción incrementando su pago (el contendiente j) a expensas del jugador i. Pero si $s_{ij}(x)<s_{ji}(x)$ y $x_i=v(\{i\})$, será imposible que una objeción de j tenga éxito por que el jugador i se encuentra en el resultado final más bajo a que puede ser conducido. En la condición tres se invierten los papeles para los jugadores participantes igual que en la condición dos.

El siguiente teorema demostrará que el nódulo está contenido en el conjunto de negociación. Introduciendo la idea que especifica que el conjunto de negociación existe para una amplia clase de juegos.

TEOREMA 3. *El nódulo está contenido en el conjunto de negociación para un juego (N,v)*

Demostración. Para establecer la demostración haga los siguientes supuestos:

1) (x,τ) se halla en el nódulo ,

2) $K, L \subset T_k$ con $K\neq L$ y $T_k\in\tau$, además K tiene una objeción contra L.

Una objeción puede llevarla a cabo cualquier miembro $\{i\}\subset K$ contra todo miembro $\{j\}\subset L$. Los jugadores $\{i\}$, $\{j\}$ están en el mismo T_k para un punto en el nódulo (x,τ) y para toda objeción de $\{i\}$ contra $\{j\}$; $\{j\}$ tiene una contraobjeción. Denotando la objeción de $\{i\}$ frente a $\{j\}$ como (y,υ) Los socios de $\{i\}$ coincidirán con los miembros del conjunto X_K al que pertenece el jugador i. En consecuencia $\sum_{l\in X_K}(y_l - x_l) < s_{ij}(x)$, la suma de la diferencia entre las imputaciones y_l y x_l, no podrá ser superior al excedente de i contra j. Si existe (z,ν), $\{j\}$ tendrá una contraobjeción para la que cada socio l de j reciba al menos x_l y los que fueran socios de i para la objeción reciban al menos y_l. La contraobjeción (z,ν) es posible llevarla a cabo si $s_{ij}(x)\geq s_{ji}(x)$ (la mayor cantidad de una coalición cuidadosamente escogida que se encuentra asociada con el jugador j o que contiene a j, pero sin guardar relación con el jugador i o no lo contiene), si recibe más que con la propuesta original (x,τ)

Esta cantidad debe ser al menos igual al pago que el jugador i reserva para aquellos que se unan a él en su objeción, j podrá ganarse a los jugadores necesarios y recompensar a aquellos jugadores que se necesiten para mantener la contraobjeción.

Observando el tercer caso de la definición 2.18, si se da que $s_{ij}(x)>s_{ji}(x)$ y se tiene que $x_j=v(\{j\})$ entonces, al objetar $\{i\}$, $\{j\}$ puede contraobjetar con (y,υ) para la que $y_i=v(\{i\})$ y $\{j\}\in\upsilon$. ✓

El nódulo está formulado en términos de pares de jugadores. Si ningún par de jugadores i, j en la misma coalición está en posición de hacer una objeción exitosa frente a el otro se dice que la configuración de pagos individualmente racional estará en el nódulo. Cuando se intente demostrar que el conjunto de negociación no está vacío resultará útil que el nódulo siempre esté en el conjunto de negociación y que el nucléolo se encuentre en el nódulo.

4.7. EL NUCLEOLO

El nódulo al igual que el conjunto de negociación puede tener muchos elementos pero en una amplia gama de juegos el nucléolo está constituido de un sólo punto. Un conjunto de vectores de pago (que podría ser un conjunto aleatorio) se encuentran relacionados con la definición de nucléolo a diferencia del nódulo y del conjunto de negociación. Entonces un vector de pagos estará en el nucléolo, si los excedentes de todas las coaliciones para ese vector de pagos se hacen lo más pequeños posible.

Para definir el nucléolo haga una comparación entre los excedentes asociados con diversos vectores de pagos. A continuación se indica el cotejo construyendo una función que tenga una coordenada para cada una de las 2^n coaliciones contenidas en N (incluyendo a N y a $\varnothing$) $\theta(x)=(e_1(x),\ldots,e_{2^n}(x))\in\mathbb{R}^{2^n}$. Para todo x en el conjunto X de vectores de pagos considerados se ordenan las 2^n coaliciones $K_1,K_2,\ldots,K_{2^n}$ de manera que $\theta_j(x)=e(K_j,x)$, el excedente de la coalición K_j con respecto a un vector de pagos x; y $\theta_j(x)\geq\theta_{j+1}(x)$ para $j=1,\ldots,2^{n-1}$ o sea que el excedente de la coalición j debe superar o igualar al excedente de la coalición que le sigue. Eligiendo $\theta_j(x)$ y $\theta_j(x')$ las cuales en general pueden asociarse con diferentes coaliciones. En ambos casos la coordenada j-ésima es el mayor excedente j-ésimo en relación con x y x', respectivamente.

Haciendo una comparación entre $\theta(x)$ y $\theta(x')$ mediante una ordenación lexicográfica. Tal ordenación propone que $\theta(x)$ es menor que $\theta(x')$ si $\theta_1(x)<\theta_1(x')$ o para $j>1$, $\theta_j(x)<\theta_j(x')$ y $\theta_i(x)=\theta(x')$ para $i=1,\ldots, j-1$. Esta relación se representa por $\theta(x)<_L\theta(x')$ Si $\theta_j(x)=\theta_j(x')$ para todo j, entonces $\theta(x)=_L\theta(x')$ y $\theta(x)\leq_L\theta(x')$ significa que $\theta(x)<_L\theta(x')$ o que $\theta(x)=_L\theta(x')$

Por ejemplo, supongamos que n=3 ($2^n=8$) y que cada vector $\theta(x^j)$ contiene exactamente 8 elementos.

$\theta(x^0) = (100,62,60,50,40,36,32,30)$,

$\theta(x^1) = (100,62,60,52,0,0,0,0)$

$\theta(x^2) = (99,98,97,96,95,94,93,92)$ y

$\theta(x^3) = (120,50,45,40,35,30,25,20)$

La ordenación lexicográfica de estos cuatro vectores seria $\theta(x^2)<_L\theta(x^0)<_L\theta(x^1)<_L\theta(x^3)$. La ordenación lexicográfica se deduce de la siguiente manera: tome dos vectores cualesquiera en este caso y para llevar un orden comencemos por los dos primeros ($\theta(x^0)$ y $\theta(x^1)$). La ordenación propone que si el primer elemento del vector $\theta(x^0)$ es menor que el primer elemento del vector $\theta(x^1)$ el vector será lexicográficamente menor. Aquí $\theta_1(x^0)=100$ y $\theta_1(x^1)=100$ no es menor entonces, compare con el siguiente vector $\theta(x^2)$; $\theta_1(x^0)=100>\theta_1(x^2)=99$ como $\theta_1(x^2)$ es menor que cualquiera otra primera coordenada de los 3 vectores restantes será el vector más pequeño lexicográficamente que se pueda encontrar. Prosiguiendo en la misma línea $\theta_1(x^3)$ es el mayor por su valor de 120 en la primera coordenada. Descartemos por un momento a $\theta(x^2)$ y $\theta(x^3)$ por que ya fueron ordenados, quedan $\theta(x^0)$ y $\theta(x^1)$ Tome el segundo elemento de cada vector pues el primer elemento ya fue comparado, así $\theta_2(x^0)=62$ y $\theta_2(x^1)=62$ son iguales, prosigue la ordenación con $\theta_3(x^0)$ y $\theta_3(x^1)$ y así sucesivamente. En el ejemplo, el elemento cuatro de $\theta(x^1)$ es mayor que el correspondiente elemento $\theta_4(x^0)$ terminando la ordenación de la siguiente forma: $\theta(x^2) <_L \theta(x^0) <_L \theta(x^1) <_L \theta(x^3)$

DEFINICION 2.19. *Para un conjunto de vectores de pago, X, el nucléolo sobre X es $nuc(X)=\{x \in X \,/\, x' \in X$ implica que $\theta(x) \leq_L \theta(x')\}$. Así pues el nucléolo sobre X está formado por aquellos vectores de pagos, $x \in X$, que posean los excedentes asociados lexicográficamente más pequeños.*

4.7.1. Existencia y Unicidad del Nucléolo

Toca el turno de demostrar la existencia y unicidad del nucléolo. Primero se demostrará que si X es compacto, entonces el nuc(X) será no vacio. En segundo lugar, si X es convexo así como compacto, implica que el nuc(X) es un punto único.

TEOREMA 4. *Suponga a X como un subconjunto compacto no vacío de $\mathbb{R}^n$. Entonces, el nuc(X) es no vacío.*

Demostración. Inicialmente suponga dos cosas: que $A_1=\{\theta(x) \in \mathbb{R}^{2^n} | x \in X\}$, significa que A_1 es el excedente de una coalición con respecto a un vector de pagos x, tal que x pertenece al conjunto X de vectores de pagos considerados y que z_1 es el inferior de los vectores de pagos y_1 en donde y es un miembro de A_1, $z_1 = \inf_{y \in A_1} y_1$. Como X es compacto deben existir elementos de A_1 que tengan a z_1 como primera coordenada. Suponiendo que

$X_2=\{x\in X \mid \theta_1(x)=z_1\}$ es el conjunto de vectores x que pertenecen a X tales que el excedente de una coalición con respecto a un vector de pagos x, sea igual al inferior de los vectores de pagos y_1 en donde y_1 es miembro de A_1. Para cada coalición K, el conjunto $B_1(K)=\{x\in X \mid e(K,x)\leq z_1\}$ es compacto comprobando que X_2 es compacto. X_2 está definido como $\underset{K}{Y}B_1(K)=X_2$, además de ser no vacío (algunos $B_1(K)$ pueden ser vacíos pero no todos) Definiendo $A_2=\{\theta(x)\in A_1 \mid x\in X_2\}$.

La demostración continua por inducción con n=i. Suponiendo que $X_i \subset X_{i-1}$ es compacto, no vacío y que está formado por todos los vectores de pago en X_{i-1} para los que $\theta_j(x)=\theta_j(x')$ para todo x, $x'\in X_{i-1}$ y todo $j < i$ y que si $x\in X_i$, entonces $\theta_{i-1}(x)=z_{i-1}$ en donde z_{i-1} es el valor mínimo de $\theta_{i-1}(x')$ para todo $x'\in X_{i-1}$.

1) Suponga que $A_i=\{\theta(x)\in R^{2^n} \mid x\in X_i\}$. Para $\theta(x)$, $\theta(x')\in A_i$, $\theta_j(x)=\theta_j(x')$, $j=1,\ldots, i-1$ y $\theta_j(x)$, $\theta_j(x')\leq\theta_{i-1}(x)$ para $j\geq i$

Para $\theta(x)$, $\theta(x')$ en A_i la ordenación lexicográfica de los excedentes con igual subíndice j es la misma para ambos excedentes, $\theta_j(x)=\theta_j(x')$ para $j=1,\ldots,i-1$ y que $\theta_j(x)$, $\theta_j(x')$ son menores o iguales que $\theta_{i-1}(x)$ para j mayor o igual que i, note que el subíndice varia.

2) Suponga ahora que $z_i=\inf_{y\in A_i} y_i$. Puesto que X_i es compacto deben existir elementos A_i que tengan a Z_i como i-ésima coordenada, si $x_{i+1}=\{x\in X_i \mid \theta_i(x)=z_i\}$. Al igual que X_2, X_{i+1} es compacto y no vacío. $A_{i+1}=\{\theta(x)\in R^{2^n} \mid x\in X_{i+1}\}$ es recursivo así que, para $y\in A_{i+1}, y_j=z_j$, $j=1,\ldots, i$.

Para dar fin a la demostración suponga que $X_1=X$ (X es compacto entonces, X_1 es compacto), lo cual implica que nuc(X) $\subset X_i$ para $i=1,\dots,2^n+1$ como x_i es compacto y no vacío el nucléolo de X también lo es, por inducción el nuc(X)=X_{2^n+1} es compacto y no vacío por contener al punto $\theta(x)=(z_1,z_2,\dots,z_{2^n})$ para $x\in$nuc(X)= X_{2^n+1}. ✓

COROLARIO 1. *Si X también es convexo, entonces el nuc(X) contiene exactamente un punto.*

Demostración. Suponga que x y x' sean elementos de nuc(X); por tanto $\theta(x)=_L\theta(x')$ Existen s valores distintos de las coordenadas del vector $\theta(x)$ con una frecuencia k_1 del número mayor, una frecuencia k_2 del segundo número mayor y así sucesivamente. Lógicamente, $\sum_{i=1}^{s} K_i = 2^n$, la suma de las frecuencias k_i para los s valores distintos es igual a 2^n ($\theta(x) \in R^{2^n}$). Para $\theta(x)$, se supone que el orden de las coaliciones es $K_1,K_2,\dots,K_{2^n}$ (es decir, $\theta_j(x)=e(K_j, x)$ para todo j), para $\theta(x')$ proceda de la misma manera ($K'_1,K'_2,\dots,K'_{2^n}$). Sea lambda un valor entre cero y uno, $\lambda\in(0\ ,1)$ y $x^\lambda=\lambda x+(1-\lambda)x'$ la frecuencia de $\theta_1(x)$ será k_1 en $\theta(x^\lambda)$ si y sólo si los dos conjuntos de coaliciones $\{K_1,\dots,K_{k_1}\}$ y $\{K'_1,\dots,K'_{k_1}\}$ tienen exactamente los mismos miembros, $\theta(x^\lambda)$ puede tener como máximo una frecuencia k_i de $\theta_{k+1+\dots+k_{i-1}+1}(x)$, $i=1,\ .\ .\ .\ j-1$. En el caso que los miembros de las dos coaliciones no sean idénticos existirá una coalición $K_i(i\ \le k_1)$, perteneciente a la primera lista tal que $e(K_i,x)>e(K_i, x')$. Note que en caso de cumplirse está desigualdad existirán menos de k_1 coordenadas de $\theta(x^\lambda)$ que tengan el valor de $\theta_1(x)$. No puede haber coordenadas de $\theta(x^\lambda)$ que tengan un valor superior a $\theta_1(x)$ por lo tanto $\theta(x^\lambda)<_L\theta(x)$

Si los dos conjuntos de coaliciones $\{K_1,\ldots,K_{k_1}\}$ y $\{K'_1,\ldots,K'_{k_1}\}$ son los mismos, el razonamiento para las coordenadas que consigan $\theta_{K_1+1}(x)$ es similar al descrito anteriormente. Dos situaciones pueden presentarse para los grupos de coaliciones: 1) que $K_{k_1+1},\ldots, K_{k_1+k_2}$ y $K'_{k_1+1},\ldots,K'_{k_1+k_2}$ sean exactamente los mismos o bien, 2) $\theta(x^\lambda)<_L\theta(x)$

Trabajando sobre la última desigualdad escrita (2) y procediendo por inducción se llega a la conclusión de que $\theta(x^\lambda)=_L\theta(x)$ si y sólo si $x=x'$ y en caso contrario $\theta(x^\lambda)<_L\theta(x)$ Esta desigualdad implica que ni x, ni x' son elementos del nuc(X) contrario al primer supuesto planteado al inicio de la demostración y al no pertenecer los vectores de pagos x y x' al nucléolo nuc(X), las frecuencias de k_i se reducen y se dice que el nuc(X) está formado por un sólo punto. ✓

4.7.2. El Nucléolo está Contenido en el Nódulo

Haciendo una recopilación de algunos elementos expuestos para demostrar que el nucléolo está contenido en el nódulo, considere las configuraciones de pagos individualmente racionales relacionadas con la estructura de coalición τ, para un juego (N,v) o sea I_τ(N,v). Además, los vectores de pagos asociados con I_τ (N,v) que son los elementos de $A_\tau(N,v)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid (x,\tau)\in I_\tau(N,v)\}$. Como A_τ (N,v) es compacto implica que nuc[A_τ(N,v)] se encuentra en el nódulo y también en el conjunto de negociación, indicio de que A_τ (N,v) es no vacio. Puesto que el nucléolo de A_τ (N,v) (nuc[A_τ(N,v)]) es no vacio, el nódulo y el conjunto de negociación son no vacíos.

TEOREMA 5. *Suponga que el nódulo, $\mathfrak{N}$, de un juego (N,v) es $\mathfrak{N}(N,v)$, además suponga que τ sea una estructura de coalición y suponga que $x \in nuc[A_\tau(N,v)]$. Entonces, $(x,\tau) \in \mathfrak{N}(N,v)$*

Demostración. Bajo el supuesto que las configuraciones de pagos individualmente racionales $(x,\tau) \in I_\tau(N,v)$ y que $(x,\tau) \notin \mathfrak{N}(N,v)$ Existirá entonces un par de jugadores i, $j \in N$ tal que $s_{ij}(x) > s_{ji}(x)$ y que $x_j > v(\{j\})$. Igualando un número δ con el menor de los excedentes $(s_{ij}(x)-s_{ji}(x)/2$ y $x_j-v(\{j\}))$ y definiendo a x' de la siguiente manera:

$$x'_i = x_i + \delta \qquad \cdots (2.6)$$

$$x'_j = x_j + \delta \qquad \cdots (2.7)$$

$$x'_K = x_K + \delta \quad \text{para } k \neq i, j \ (2.8)$$

Sea una coalición K^* en donde $i \in K^*$ y $j \notin K^*$ con el mayor excedente de entre todas las coaliciones que excluyen a j e incluyen a i. Ordenando cada una de las coordenadas en la función $\theta(x)$, suponga que toda coalición L es anterior a K^* para la que $e(K^*,x)=e(L,x)$ La coordenada que le corresponde a K^* en $\theta(x)$ es k^* $(\theta(x)=(1,\ldots, i, j, \ldots, k^*, \ldots))$

Ahora considere a $\theta(x)$ y $\theta(x')$: $\theta_k(x) \leq \theta_k(x')$ para $k < k^*$. Las coaliciones anteriores a K^* pueden caer en uno de estos tres incisos:

1) Contienen tanto al jugador i como al jugador j, (i, j pertenecen a K^*),

2) No contienen ni al jugador i ni al jugador j, (i, j no pertenecen a K^*),

3) Contienen al jugador i pero no al jugador j, (i pertenece a K^* y j no pertenecen a K^*)

.

Observe que ninguna de estas coaliciones puede excluir al jugador i y contener al jugador j consecuencia de la condición de que $s_{ij}(x)>s_{ji}(x)$ para todas las coaliciones que cumplan con las condiciones 1 y 2 de está sección, $\theta_k(x)=\theta_k(x')$ y para las coaliciones que sólo satisfagan la condición en 3, $\theta_k(x)<\theta_k(x')$ Para $k>k^*$, $\theta_k(x')<\theta^*_k(x)$; entonces $\theta_k(x')<_L\theta_k(x)$ y x no se encuentra contenida en el nucléolo. La asignación x no estará en el nucléolo si (x,τ) no está en el nódulo, lógicamente (x,τ) estará en el nódulo si x está en el nucléolo. ✓

El teorema 5 asegura que una configuración de pagos individualmente racional relacionada con una estructura de coalición τ, se encuentra en el nódulo si y sólo si el vector de pagos x se encuentra en el nucléolo. A continuación se demostrará que existe al menos un elemento en el conjunto de negociación relativo a cada estructura de coalición.

COROLARIO 2. *Suponga un juego en forma de función característica. (N,v) tiene un conjunto de negociación no vacio y para cada estructura de coalición τ, existe una configuración de pagos en el conjunto de negociación.*

Demostración. Para llevar a cabo la demostración tenga presentes los teoremas 3 a 5. Por el teorema 4 el nuc$[A_\tau(N,v)]$ es compacto y no vacio. Se dice compacto porque en primer lugar el espacio de pagos está limitado puesto que los $v(K)$ son finitos. En segundo lugar, $I_\tau(N,v)$ está definido como un espacio cerrado en consecuencia $A_\tau(N,v)$ será también cerrado. Por el teorema 5 $x\in$nuc$[A_\tau(N,v)]$ implica que la (x,τ) está en el nódulo y por el teorema 3, el nódulo se encuentra contenido en el conjunto de negociación. ✓

El corolario anterior concluye que el conjunto de negociación es no vacio y está relacionado con por lo menos un elemento relativo a la estructura de coalición. El conjunto de negociación es no vacio por que contiene al nódulo y a su vez el nódulo contiene al nucléolo.

4.7.3. El Nucléolo de los Juegos S-Equivalentes

El nucléolo quedo definido con respecto a un juego y a un conjunto de resultados X. Entonces, el nuc(X) es el nucléolo sobre el conjunto de resultados X que sean un subconjunto de los resultados que pueden conseguirse para un juego particular (N,v) Basta examinar el nucléolo sobre el conjunto de imputaciones del juego, I(N,v) Suponga que (N,v*) es un juego normalizado cero-uno y considere a su vez la clase de equivalencia-S de (N,v*) Esta clase es el conjunto de juegos que contengan a (N,v*) como su forma normalizada cero-uno. La ecuación (2.9) del lema siguiente se relaciona con el nucléolo de cada uno de los miembros de éste conjunto de juegos.

LEMA 7. *Suponga que (N,v) sea S-equivalente al juego normalizado cero-uno (N,v*) Entonces $x \in nuc[I(N,v^*)]$, en donde x y x^* se relacionan por la ecuación*

$$x_i^* = \frac{x_1 - v(\{i\})}{v(N) - \sum_{i \in N} v(\{i\})} \Lambda \quad (2.9)$$

Demostración. Partiendo de la definición de S-equivalencia. Para todo $x \in I(N,v)$, existe exactamente un $x^* \in I(N,v^*)$ que se relaciona con x por la ecuación (2.9) y a la inversa cada $x^* \in I(N,v^*)$, existirá exactamente un $x \in I(N,v)$ Para un par de éste tipo $e(K,x^*)$ viene determinado por (sustituyendo el valor de $e(K,x^*)$)

$$e\left(K,x^{*}\right)=\frac{v(K)-\sum_{i\in K}v(\{i\})-\sum_{i\in K}\left[x_i-v(\{i\})\right]}{v(N)-\sum_{i\in N}v(\{i\})}$$

$$=\frac{v(K)-\sum_{i\in K}v(\{i\})-\sum_{i\in K}x_i+\sum_{i\in K}v(\{i\})}{v(N)-\sum_{i\in N}v(\{i\})}$$

$$=\frac{v(K)-\sum_{i\in K}x_i}{v(N)-\sum_{i\in N}v(\{i\})}\ \Lambda \quad (2.10)$$

Suponga que $x, y\in I(N,v)$ y que $x^{*}, y^{*}\in I(N,v^{*})$ están relacionados por la ecuación 2.9. De la ecuación 2.10 se deduce que $\theta(x)\leq_L\theta(y)$ si y sólo si $\theta(x^{*})\leq_L\theta(y^{*})$, terminando asi la demostración.✓

El lema 7 propone que un juego es S-equivalente, si x y x^{*} se transforman en la misma forma normalizada cero-uno. Como los excedentes $\theta(x)$ y $\theta(x^{*})$ son lexicográficamente menores y con la misma forma normalizada cero-uno se dice que son S-equivalentes.

Si usted es de las personas que se les dificulta entender la parte matemática tal vez el siguiente ejemplo le ayude a comprender mejor :

Ejemplo. Supongamos un juego en donde v(K) esta definido por v({i})=0, el valor para un jugador que actúe sólo (por su cuenta) será cero y que los valores por la coalición de dos jugadores se dan como: v({1,2})=2, v({2,3})=3 y el valor de la gran coalición N es v({1,2,3})=6.

El vector de pagos (2,3,1) es el único elemento del nucléolo sobre I(N,v) el conjunto de las imputaciones. Para obtener el vector de pagos considere el excedente de cada una de las coaliciones K con respecto a un vector de pagos x, e(K,x)=v(K) menos la suma de los pagos para el jugador i en la coalición K $e(K,x)=v(K)-\sum_{j\in K} x_j$

e({1,2})=4-0, el valor de la coalición K menos el valor del jugador individual. e({1,3})=2-0, e({2,3})=3-0, e({1,3})$<_L$e({2,3})$<_L$e({1,2})=2<3<4 como θ se forma de los excedentes θ(x)=(e$_1$(x),...,e$^{2^n}$(x)), x estará formado por los pagos que no rebasen el valor de la gran coalición así el vector (2,3,1) se llena con los valores de las coaliciones {1,3} y {2,3} para las coordenadas 1 y 2 respectivamente, la tercera coordenada se resta de la suma de los miembros anteriores y la coalición restante, v({1,2})-(v({1,3})+v({2,3}))=1.

Los excedentes de x=(2,3,1) son: e({1},x)=0-2, e({2},x)=0-3, e({3},x)=0-1 y para cada coalición de dos personas es -0.5 por que e({1,2},x)=4-(2+3)=-1, e({1,3},x)=2-3=-1, e({2,3},x)=3-4=-1 y -1 dividido por dos jugadores en la coalición es -0.5=e(K,x) y el exceso tanto para N, como para el conjunto vacío es cero.

Esto da θ(2,3,1)=(0,0,-0.5,-0.5,-0.5,-1,-2,-3), 8 coordenadas de 2^3. Para cualquier otra imputación, x', los excedentes de las coaliciones para tres personas seguirían sumando -1.5 (-0.5-0.5-0.5) pero al menos una de las coaliciones tendría un excedente superior a -0.5. Ello haría que la tercera coordenada de θ(x') sea superior a -0.5 sin modificar las dos primeras coordenadas haciendo a x lexicográficamente menor que x'.

Si consideramos el conjunto de todos los pagos individualmente racionales todo x' así definido que no fuera lexicográficamente superior a θ(2,3,1) por que e(N,x') sería estrictamente positivo. La configuración de pagos ((2,3,1),{1,2,3}) está en el nódulo y en el conjunto de negociación.

En las secciones anteriores se describieron los diferentes tipos de soluciones que en muchos de los juegos contienen diversos conjuntos de resultados pero a continuación se estudiarán dos soluciones llamadas valores que arrojan un resultado único en diversos tipos de juegos.

5. EL VALOR DE SHAPLEY

Lloyd Shapley estudió el juego de n-personas desde el punto de vista de los jugadores y llegó a un resultado que se denomina Valor de Shapley (1953). El Valor de Shapley puede calcularse para juegos superaditivos en forma de función característica con un número finito de jugadores. Este valor es único y tiene la propiedad de satisfacer tanto la racionalidad de grupo como la racionalidad individual, característica que motiva a los jugadores a participar en coaliciones y obtener mejores pagos o ganancias.

El pago para cada jugador involucra muchas variables como la personalidad de los jugadores, su entorno, ubicación, facilidad de comunicación y algunas más. Shapley formula el pago para cada jugador, como una media ponderada de las contribuciones que cada jugador hace a cada una de las coaliciones a las cuales pertenece, estás ponderaciones dependen directamente del número de jugadores n y del número de miembros en cada coalición. Para analizar mejor esta y otras características en la sección 5.1 se define el Valor de Shapley; la existencia y unicidad se demostrarán en la sección 5.2. En la sección 5.3 se extiende el Valor de Shapley a los juegos simples y a los juegos superaditivos en general.

5.1. DESCRIPCION DEL VALOR DE SHAPLEY

Los indicios que se tienen de como Shapley intento encontrar soluciones a los juegos de n-personas se puede mostrar de la siguiente manera: sea Γ el conjunto de los juegos superaditivos con n jugadores. Defínase un operador ϕ: $\Gamma \to R^n$ que "resuelva" todos los juegos en Γ. Entonces todo el problema se resume a una buena elección del operador ϕ.

El proceso se realiza bajo la satisfacción de esquemas razonables que posee el operador ϕ. A éste tipo de esquemas razonables, Shapley les dio el nombre de axiomas demostrando también que existe un único operador que los satisface. Tales axiomas se exponen en la definición 2.21.

Una de las ventajas que posee el Valor de Shapley es que no pide condiciones a la solución de un juego en particular. El monto total conseguido por la coalición se repartirá de acuerdo a "supuestos elementales" previamente fijados y aceptados por todos los jugadores que entraron en coalición. Por tanto el resultado que se desprenda de la solución del juego es inobjetable.

DEFINICION. 2.20. *Una solución ϕ sobre Γ es un operador que cumple ϕ:$\Gamma \to R^n$, el Valor de Shapley en si mismo se representa por $\phi(v)$ Para el i-ésimo jugador el pago en el Valor de Shapley queda como $\phi_i(v)$*

El valor de Shapley está definido por cuatro condiciones denominadas los axiomas de Shapley. Las condiciones implican que el Valor de Shapley está caracterizado por la fórmula de la ecuación 2.11 (descrita más adelante)

DEFINICION 2.21. *Para un juego (N,v) en Γ el Valor de Shapley $\phi(v)$ está definido por*

1) *Racionalidad de grupo,* $\sum_{i\in N}\phi_i(v) = v(N)$.

2) *Si para un cierto jugador, $i\in N$, tan sólo añade $v(\{i\})$ a cualquier coalición, entonces éste jugador sólo recibirá $v(\{i\})$, matemáticamente si $i\in N$* y *$v(K)=v(K-\{i\})+v(\{i\})$ para toda $K\subset N$ $i\in N$, entonces $\phi_i(v)= v(\{i\})$*

3) *Si dos juegos son idénticos excepto por el orden en que se relacionan los jugadores, entonces el Valor de Shapley será idéntico para todos los jugadores, en términos matemáticos, si (N,v) es una permutación simple de (N',v'), siendo i^*, j^* los jugadores permutados, entonces $\phi_i^*(v)=\phi_j^*(v')$, $\phi_i^*(v')=\phi_j^*(v)$* y *para todo i en $N-\{i^*, j^*\}$ cumple $\phi_i^*(v)= \phi_i^*(v')$.*

4) *Si (N,v)* y *(N,w) son dos juegos con el mismo conjunto de jugadores N* y *(N,z) está definido por $z(K)=v(K)+w(K)$ para todo $K\subset N$, entonces $\phi(z)=\phi(v)+\phi(w)$, si se forma un juego $z(K)$ mediante la adición de dos juegos (N,v)* y *(N, w), entonces el Valor de Shapley del nuevo juego será la suma de los valores de los dos juegos originales.*

La fórmula del Valor de Shapley queda como:

$$\phi_i(v) = \sum_{K\subset N}\left[v(K) - v(K - \{i\})\right]\left[\frac{(|K|-1)!\cdot(n-|K|)!}{n!}\right]\Lambda \quad (2.11)$$

La ecuación 2.11 es la llave que resuelve una gran clase de juegos, así que no la pase por alto. Todos los resultados se obtienen por medio de esta fórmula y la teoria descansa sobre la base de sus axiomas. En la siguiente sección se estudian los cuatro axiomas similarmente a como los propuso Shapley. El empleo de los axiomas permite demostrar la existencia y unicidad de una solución para cada uno de los juegos en Γ.

5.2. LA EXISTENCIA DEL VALOR DE SHAPLEY

La demostración de la existencia y unicidad del Valor de Shapley se llevará a cabo en varias etapas. Primero se comenzará proponiendo en la sección 5.2.1 los axiomas de Shapley. La sección 5.2.2 contiene la demostración del valor para los juegos simples, noción que resulta muy útil en la sección 5.2.3 en donde se extiende la definición del Valor de Shapley a los juegos superaditivos en general. Cabe hacer notar que los juegos superaditivos son los más representativos de la realidad.

5.2.1. Axiomas de Shapley

Como el conjunto Γ es un espacio vectorial sobre el campo de los números reales (por la definición 2.20), es posible definir la suma y el producto sobre Γ como:

1) $(v+w)(S)=v(S)+w(S)$ para todo $v, w\in\Gamma$,

2) $(cv)(S)=cv(S)$ para todo $v\in\Gamma$ y $c\in\mathbb{R}$, multiplicación por un escalar.

Los axiomas se formulan como sigue:

1) Axioma de eficiencia: $\sum_{i \in N} \phi_i(v) = v(N)$ para todo $v \in \Gamma$ en términos menos técnicos, el monto $\sum_{i \in N} \phi_i(v)$ que se reparte entre todos los jugadores bajo ϕ es exactamente el monto v(N) que pueda conseguir la gran coalición.

2) Axioma de nulidad: si un jugador es nulo (no participa en una coalición) en v entonces $\phi_i(v)=v(\{i\})$ En otras palabras, aquel jugador que sea sólo un espectador del juego debe ser excluido de la repartición otorgándole sólo su inversión inicial.

Para exponer formalmente el axioma de simetría es necesario indicar lo que se entiende por dos juegos que sólo se diferencien con respecto al orden de los jugadores.

DEFINICION 2.22. *Suponga que i^*, j^* sean un par específico de jugadores y suponga que los* juegos *(N,v)* y *(N',v') estén relacionados de la siguiente manera:*

a) Los juegos (N,v) y *(N,v*) tiene igual número de contendientes, $n=n'$.*

b) Para $v(K)=v'(K)$ si $i^*, j^* \in K$ o si $i^*, j^* \notin K$ y

c) Para $v(K \cup \{i\})=v'(K \cup \{j^*\}$ si $i^*, j^* \in K$.

Entonces, (N,v) es una permutación simple de (N',v'). Los jugadores i^*, j^* son los jugadores permutados.

Las condiciones en la definición 2.22 pueden explicarse como: Una característica razonable del axioma de simetría es que no depende de los atributos personales de los jugadores en otras palabras que sea anónima. Así, si los jugadores deciden intercambiar papeles en el juego (las permutaciones pueden tomarse como un intercambio de papeles) y además cada coalición logra hacer lo mismo que la coalición a la que suplanta, entonces lo que debe obtener cada jugador en el nuevo juego es lo que obtenía el jugador al cual sustituye.

3) Axioma de simetría: Si i^*, j^* son jugadores permutados en v (un juego (N,v) con función característica v) entonces $\phi_{i^*}(v) = \phi_{i^*}(v')$

La solución ϕ es simétrica si y sólo si para cualquier permutación simple (N,v) de (N',v') el monto que asigna ϕ a cada jugador i^* en (N,v) es el mismo que el asignado por ϕ al jugador que suplanta en (N',v')

El último axioma requiere una consistencia lógica entre las ternas de juegos (N,v), (N,w) y (N,z) Si la suma de las funciones características v, w es igual a la función característica z, entonces $\phi(z)=\phi(v)+\phi(w)$

4) Axioma de aditividad: $\phi(v+w)=\phi(v)+\phi(w)$ para toda v, w $\in\Gamma$ cada coalición es exactamente la suma de lo que obtiene en cada uno de los juegos originales. Observe que de está manera un jugador no obtienen ventaja adicional por jugar los dos juegos en serie.

5.2.2. El Valor de Shapley para los Juegos Simples (Unicidad)

Un concepto práctico a la hora de demostrar la existencia del Valor de Shapley es el de valor marginal de una coalición, el cual se define recursivamente y se describe a continuación.

El valor marginal de una coalición K es v(K) menos los valores marginales de todas las coaliciones que sean menores que K y que al mismo tiempo sean subconjuntos de K, ecuaciones 2.12 y 2.13.

$$C_{\{i\}}(v) = v(\{i\}) \text{ para todo } i \in N \cdots (2.12)$$

$$c_K(v) = v(K) - \sum_{\substack{L \subset K \\ L \neq K}} c_L(v) \text{ para todo } K \subset N \text{ con } K > 2 \wedge (2.13)$$

Para demostrar la existencia de un único Valor de Shapley, se tiene que un juego (N,v) puede considerarse como la suma ponderada de un número de juegos simples (N, v_K) definidos de la siguiente manera: Γ es un espacio vectorial de dimensión 2^n-1, si

$$v_K(L) = \begin{cases} 1 & si\ K \subset L \\ 0 & cualquier\ otro\ valor \end{cases} \cdots (2.14),$$

entonces $\mathbb{B} = \{v_K \mid K \subset N,\ K \neq \varnothing\}$ es una base para Γ. Así, para cualquier juego dado (N,v) existen escalares únicos $c \in \mathbb{R}^n$ con una función característica $cv(K)$ tales que $v = \sum_{\{K \mid \varnothing \neq K \subseteq N\}} cv_K$, la suma de los juegos con función característica $cv(K)$

Sea el operador ϕ para cualquier Valor de Shapley por aditividad $\phi(v) = \sum_{\{K \mid \varnothing \neq K \subseteq N\}} \phi(cv_K)$, el valor es único para cualquier (N, cv_K)

LEMA 8. *Para un juego (N, cv_K), el Valor de Shapley es $\phi_i(cv_K) = c/K$ si $i \in K$ y $\phi_i(cv_K) = 0$ si $i \notin K$.*

Demostración. Demostrando la unicidad del Valor de Shapley para cv_K, note que por la definición 2.22 punto 2: a) si $i \notin K$ entonces el jugador i es un jugador nulo en v_K. b) Así,

$(cv_K)(N)=c$, c) si $i^*j^* \in K$ y (N,v) es una permutación simple de (N',v') tal que $\phi_i^*(v)=\phi_j^*(v')$, $\phi_i^*(v')=\phi_j^*(v)$ por el axioma de simetría: $\phi_i(v)=\phi_i(v')$ Con lo cual si ϕ satisface los axiomas establecidos en la demostración, el único valor posible para cv_K es: $\phi_i(cv_K)=0$ si $i \notin K$ y $\phi_i(cv_K)=c/k$ si $i \in K$ por la condición 3. ✓

El lema 8 es un excelente resumen de la sección 5.2.2 (unicidad) demostrando que el Valor de Shapley para un juego (N,v) en caso de existir es único e inobjetable.

5.2.3. El Valor de Shapley para los Juegos Superaditivos (Existencia)

En está sección se demostrará que toda función característica puede representarse por una suma ponderada de juegos simples. La demostración que se pretende llevar a cabo es una extensión del lema 7 para los juegos superaditivos.

LEMA 9. *La función característica v de un juego (N,v) satisface*

$$v = \sum_{\substack{K \subset N \\ K \neq \varnothing}} c_K(v) v_K \quad \Lambda \; (2.15)$$

en donde la función $c_K(v)$ quedó definida por la ecuación 2.13 y los v_K se encuentran definidos por la ecuación 2.14.

Demostración. El lema requiere demostrar que

$$v(K) = \sum_{\substack{L \subset K \\ L \neq \varnothing}} c_L(v) v_L(K) \text{ para todo } K \subseteq N \cdots (2.16)$$

para facilitar el cálculo reconstruya la ecuación (2.13). Desarrollando la sumatoria y agrupando términos la ecuación queda como :

$$c_K(\nu) = \sum_{L \subset K} (-1)^{K-l} \nu(L) \text{ para todo } K \subseteq N \cdots (2.17)$$

ahora sustituyendo (2.14) y (2.17) en (2.16) $\nu(K) = \sum_{\substack{L \subset K \\ L \neq \varnothing}} \left[\sum_{M \subset L} (-1)^{l-m} \nu(M) \right] \nu_L(K)$ como $v_L(K)=1$ y por leyes de transitividad en el término inferior de la sumatoria, si $M \subset L$ y $L \subset K$, entonces $M \subset K$. Trabajando sobre la sumatoria interior queda que v(M) sale de la segunda sumatoria

$$\nu(K) = \sum_{M \subset K} \left[\sum_{l=m}^{k} (-1)^{l-m} \frac{(k-m)!}{(l-m)!(k-l)!} \right] \nu(M) \cdots (2.18)$$

Cualquier m<k hará que el término entre corchetes de la ecuación 2.18 sea cero transformando la ecuación como $\nu(K) = \sum_{M \subset K} \nu(M)$ indicando que v(K)=v(K). ✓

Para continuar con la demostración de la existencia para los Valores de Shapley observe el siguiente lema y el teorema.

LEMA 10. *Suponga los juegos (N,v), (N,w) y (N, z) en donde z = v-w. Entonces* $\phi(z)=\phi(v)-\phi(w)$

Demostración. La demostración se deduce a partir del axioma de aditividad. ✓

TEOREMA 6. *Un juegos superaditivo tiene un único Valor de Shapley determinado por*

$$\phi_i(v) = \sum_{K \subset N} \left[v(K) - v(K - \{i\})\right] \cdot \left[\frac{(|K| - 1)! \cdot (n - |K|)!}{n!}\right] i \in N \cdots (2.19)$$

Demostración. Usando los lemas 8 y 10 en la ecuación 2.16 se tiene que

$$\phi_i(v) = \sum_{\substack{K \subset N \\ i \in K}} \frac{c_K(v)}{K}, i \in N,\ i \in N \cdots (2.20)$$

En la ecuación 2.20 sustituya la ecuación 2.17 para que resulte que

$$\phi_i(v) = \sum_{\substack{K \subset N \\ i \in N}} \frac{1}{k} \left[\sum_{L \subset K} (-1)^{K-l} v(L)\right]$$

$$= \sum_{L \subset K} \frac{1}{k} \left[(-1)^{K-l} \sum_{\substack{K \subset N \\ i \in N}} v(L)\right]$$

$$= \sum_{L \subset K} \frac{(-1)^{K-l}}{k} \sum_{K \subset N} \left[v(L) - v(L - \{i\})\right]$$

$$= \sum_{L \subset K} \sum_{K \subset N} \frac{(-1)^{K-l}}{k} \left[v(L) - v(L - \{i\})\right]$$

$$= \sum_{L=0}^{n-k} \left[\frac{(-1)^{l} (n - |K|)!}{(|K| + |L|)! (n - |K| + |L|)!}\right] \cdot \left[v(K) - v(L - \{i\})\right] \wedge (2.21)$$

Para valorar el coeficiente de [v(K)-v(K-{i})] represente a $\frac{(n - |K|)!}{(n - |K| - |L|)! \cdot |L|!}$ por C_l^{n-k}

para obtener

$$=\sum_{l=0}^{n-k}\frac{(-1)^l}{k+l}C_l^{n-k}\ .$$

pasando a k+l (k y l son las respectivas cardinalidades de K y L) al numerador y completando el problema se tiene que

$$=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l C_l^{n-k}\int_0^1 x^{(k+l)-1}dx$$

desarrollando la suma, ordenando términos y para

$$=\int_0^1\sum_{l=0}^{n}(-1)^l C_l^{n-l}x^{k+l}dx$$

$$=\int_0^1 x^{k-1}\sum_{l=0}^{n}(-1)^l C_l^{n-k}x^l dx$$

$$=\int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{n-k}dx$$

$$=\int_0^1 x^{k-1}dx\int_0^1(1-x)^{n-k}dx$$

$$=\left[\frac{(k-1)\cdot x^{k-1+1}}{k-1+1}\right]_0^1\left[\frac{(n-k)\cdot(1-x)^{n-k+1}}{n-k+1}\right]_0^1$$

$$=\left[\frac{(k-1)\cdot 1^k}{k}\right]\left[\frac{(n-k)(1)^{n-k+1}}{n-k+1}\right]-0$$

$$=\frac{(k-1)!\cdot(n-k)!}{n!}\ \Lambda\ (2.22)$$

Al sustituir la ecuación 2.22 en 2.21 la demostración queda completa. ✓

La existencia y unicidad se exponen con el propósito de mostrar de donde proviene el

Valor de Shapley. El siguiente algoritmo (resumen del teorema 6) sirve para guiarlo en el empleo de la fórmula del Valor de Shapley.

Paso 1. Elija la cardinalidad de una coalición que no contenga al jugador i de acuerdo a una distribución uniforme sobre el conjunto $\{0, \ldots, n-1\}$.

Paso 2. Se elige aleatoriamente una coalición K con la cardinalidad del paso 1 de acuerdo a una distribución uniforme sobre las $\binom{n-1}{k}$ coaliciones posibles.

Paso 3. Otorgue al jugador i la utilidad marginal que aporta a v(N) cuando se incorpora a K, es decir $v(K)-v(K-\{i\})$

Así, el pago esperado para el jugador i en este proceso es $\phi_i(v)$ El empleo del algoritmo se efectuará en el capítulo III para calcular los Valores de Shapley en las aplicaciones planteadas.

6. EL VALOR DE BANZHAF-COLEMAN

El valor de Banzhaf-Coleman o Indice de poder de Banzhaf-Coleman (1965) se basa fundamentalmente en contar para cada jugador el número de coaliciones que necesitan de él para ganar.

Este índice de poder se define para juegos simples. Por eso suponga que (N,v) es un juego simple normalizado cero-uno en donde $v(K)=1$ es una coalición ganadora y $v(K)=0$ es la coalición perdedora. Cuando a una coalición le resulta crucial el jugador i para ganar, a éste hecho se llamará impulso del jugador i. Suponga que en un juego (N,v) el número de impulsos para i sea $\sigma_i(N,v)$ y suponga que $\sigma_0(N,v)=\sum_{i\in N}\sigma_i(N,v)$ sea el número de impulsos totales de todos los jugadores en el juego. Siendo el índice normalizado de Banzhaf:

$$b_i(N,v)=\frac{\sigma_i(N,v)}{\sigma_0(N,v)} \wedge \quad (2.23)$$

También puede interpretarse la ecuación 2.23 para el jugador i como: el número de coaliciones perdedoras que se vuelven ganadoras cuando se incorpora a sus filas el jugador i dividido entre el número de coaliciones que no lo contienen (incluyendo el conjunto vacío) El proceso se realiza con el fin de obtener un valor entre cero y uno.

El Valor de Banzhaf-Coleman puede generalizarse para los juegos no simples. Guillermo Owen (1978) aporta los axiomas para la axiomatización del valor, sin embargo se usará la axiomatización debida a Leher (1988). El conjunto de todos los juegos se denotará por Γ y para el conjunto de todos los juegos simples se empleará Γ_*.

DEFINICION 2.23. *Para $K\subseteq N$, con la cardinalidad de $|N|=n$, el juego K-unanimidad denotado por $\overset{n}{\underset{K}{u}}$ se define por*

$$\overset{n}{\underset{K}{u}}(L)=\begin{cases}1 & \text{si } K\subseteq L\\ 0 & \text{cualquier otro valor}\end{cases}$$

La definición anterior dice que para un juego (N,v), una mayoría de jugadores obtendrán el valor de 1 mientras que una minoría o cualquier otro conjunto de jugadores con menos de

50%+1 de participantes totales obtendrán sólo cero.

DEFINICION 2.24. *Para $K \subseteq N$ y $M \leq k$ el juego M-k simétrico denotado por* $\underset{K}{\overset{n}{W}}$ *se define por*

$$\underset{K}{\overset{M,n}{W}}(T) = \begin{cases} 1 & si\ |K \cap T| \geq M \\ 0 & cualquier\ otro\ valor \end{cases}$$

Como en el axioma de simetría no importa el orden de los jugadores, el pago será el mismo para cualesquiera dos juegos. Para cada coalición $K \subseteq N$ se deriva un juego v_K que los jugadores en la coalición K transforman en uno sólo a éste jugador se le denotará por k.

El espacio de jugadores para v_K es $N\text{-}K \cup \{k\}$ y se encuentra definido por

$$v_K(L)=v(L)\,;$$

$$v_K(L \cup \{k\})=v(L \cup K) \text{ en donde } L \subseteq N\text{-}K.$$

Axioma de reducción: $b_i(N,v)+ b_j(N,v) \leq b_k(N,v_k) \cdots (2.24)$, para cualquier coalición $K=\{i, j\}$ de dos jugadores. Interpretación a la ecuación 2.24, la unión de cualesquiera dos jugadores es productiva y el valor de k en el nuevo juego es mayor o igual a la unión de los valores que los contendientes i, j tienen en el juego original. La generalización del Indice de Poder de Banzhaf-Coleman para los juegos simples del jugador i correspondientes al juego v con *n* jugadores se lleva a cabo mediante la fórmula

$$b_i(N,v) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{K \subset N} \left[v(K) - v(K-\{i\}) \right] \wedge \ (2.25),$$

observe que el valor de un jugador en Banzhaf-Coleman, al igual que el valor de un jugador para Shapley se calcula como la suma ponderada de las contribuciones marginales a todas las coaliciones de las que es miembro; sin embargo para Banzhaf-Coleman todas las coaliciones tienen la misma ponderación (sin importar su tamaño), mientras que las ponderaciones del Valor de Shapley varían con el tamaño de la coalición.

7. RESUMEN DEL CAPITULO

Las soluciones a los juegos cooperativos de n-personas con utilidad transferible están situadas en diversas categorías que resultan interesantes. Los juegos descritos se han examinado bajo el supuesto que se hallan en forma de función característica. En primer lugar el núcleo está basado en criterios que resulta difícil criticar. Un punto estará en el núcleo si da a cada jugador y coalición al menos lo mismo que ese jugador o coalición podrían obtener por si mismos. El núcleo para muchos juegos puede ser muy amplio y para muchos otros juegos puede no existir. Sin embargo éste concepto de solución no permite apreciar de qué manera se producen los procesos de negociación y como podrían afectar al resultado.

Los aspectos indeseables del núcleo los remedia el conjunto estable (en cierta medida). El conjunto estable se haya más relacionado y con mayor frecuencia con los procesos de negociación que el núcleo. Una propiedad común a los dos conceptos de solución mencionados anteriormente es que pueden incluir muchos puntos o soluciones en una región de resultados posibles (conjuntos estables). Las características de éste concepto de solución son que: 1) Neumann y Morgenstern suponen que los jugadores pueden entablar comunicación libremente. 2) Para ellos todos los jugadores se comunican simultáneamente

(no es posible en la realidad)

Un supuesto implícito en el conjunto estable es el de la utilidad libremente transferible entre jugadores. La suposición de utilidad transferible en algunas ocasiones puede convertirse en una severa restricción y posiblemente el eslabón más débil de la teoría, debido a que si hay n-personas en un juego es improbable que puedan hacerse elecciones adecuadas de las funciones de utilidad que satisfagan la restricción.

Por ejemplo, suponga que la utilidad es un bien material, recuerde por un momento la historia de las dos madres con un hijo ante el sabio rey Salomón. De acuerdo con la historia, ambas madres peleaban por el hijo y sólo una tendría que quedarse con el, obviamente no pueden partir el niño por la mitad y darle una parte a cada mujer. Entonces, no existe una función de utilidad que satisfaga tal restricción.

Además, la evidencia experimental demuestra que la posición física de los jugadores afecta el regateo. Si bien, no es propósito del conjunto estable predecir cuál sería el resultado del juego, la intención es abarcar todos los posibles "estándares de comportamiento" que pudieran surgir en la negociación.

Un concepto que supera al conjunto estable, aproximándose aún más al proceso de negociación en la realidad es el conjunto de negociación. En éste concepto de solución se considera que los jugadores están divididos en coaliciones y el que un vector de pagos, x, en concreto sea una solución dependerá únicamente de la estructura de coalición τ (división específica de los jugadores en coaliciones) que le acompañe o sea (x,τ). Al igual que en el núcleo y el conjunto estable puede haber muchos posibles resultados en la solución.

Las desventajas a simple vista del conjunto de negociación son que: en la búsqueda de una solución ambos conceptos implican el salto de un pago a otro. Con cada salto, no se sabe si el pago siguiente será el final o si el regateo será interminable.

Dos ideas que están relacionadas con el conjunto de negociación son el nódulo y el nucléolo. El nódulo tiene mucho en común con el conjunto de negociación. Mientras que el nucléolo sugiere seleccionar un elemento de todos los elementos en el conjunto de negociación asociados con una determinada estructura de coalición, τ. El lector debe decidir si el criterio empleado para la elección de este elemento resulta relevante o no.

Obviamente el nódulo y el nucléolo no se emplearon para dar solución a las aplicaciones, pero si su interés es grande puede emplearlos como se describe arriba.

Aunque el Valor de Shapley en realidad tiene poco que decir acerca de los procesos de negociación. Es muy atrayente por su simplicidad. Se basa en condiciones que son y pretenden ser razonables. Como se vio, el valor existe y es único pero también interviene la decisión de usted con respecto a si las condiciones que lo definen son aceptables.

En muchos juegos el valor se mantiene o cae sobre la base de sus axiomas. Pero lo que no queda claro es que si los ordenes de formación de coaliciones son todos equiprobables. Similarmente como en el núcleo, el Valor de Shapley parece no tomar en cuenta las coaliciones menores que se formen, aunque estas afecten el resultado del juego, más bien se basa en las acciones emprendidas por la coalición global.

Los valores de Shapley son solamente promedios y se llega a ellos con muchos de los factores que determinan el resultado de un juego.

El Indice de Poder de Banzhaf-Coleman a diferencia del Valor de Shapley parece otorgar un pago más equitativo a las coaliciones que se formarán.

Cada uno de los métodos es diferente de la variedad, algunos parecen centrarse sobre un aspecto del juego y despreciar otros, existen también los que tratan de captar todos los rasgos sobresalientes del juego. A fin de cuentas ningún concepto de solución aquí empleado destaca más que otro, todos son de gran importancia y poseen características interesantes.

Si desea una gran variedad de soluciones de donde elegir (y dispone de tiempo), el conjunto de negociación, el conjunto estable, el núcleo (método gráfico) y el nódulo las proporcionan. Pero si su tiempo es limitado puede probar con el Valor de Shapley, el núcleo en su forma de problema de programación lineal (en algunos casos arroja resultados únicos) y el Indice de Poder de Banzhaf-Coleman.

CAPITULO III

APLICACIONES

(ESTUDIO DE UN CASO COOPERATIVO PARA TRES EMPRESAS DE CALZADO QUE PUEDEN FORMAR UN MONOPOLIO)

APLICACIONES

(ESTUDIO DE UN CASO COOPERATIVO PARA TRES EMPRESAS DE CALZADO QUE PUEDEN FORMAR UN MONOPOLIO)

"No habría negocios si no fueran ventajosos para las partes involucradas. Desde luego, lo mejor es lograr un trato más ventajoso que le permita a uno su posición de regateo. El peor resultado es cuando, como consecuencia de una voracidad excesiva, no se logra ningún trato, y no llega a realizarse una transacción que hubiera sido buena para los dos"

Benjamin Franklin

1. INTRODUCCION

En la presente década, los 90's, ante la apertura de los mercados internacionales (mediante tratados de libre comercio y negociaciones atraves de las redes computacionales), los comercios, industrias y empresas buscan ascender en un mercado competitivo bastante dificil para cualquiera o al menos mantenerse y no sucumbir frente a las crisis económicas que vivimos. Por esto mismo, no es extraño ver que diversas firmas realicen consorcios con otras empresas de igual, menor o mayor tamaño para hacer sus productos más atractivos.

Generalmente se presenta el conflicto de intereses como el actor principal en problemas de ésta índole, aunque los intereses no necesariamente deben ser opuestos. También existe un elemento de incertidumbre asociado a cualquier problema real. Es precisamente está falta de certeza lo que hace interesante y a la vez difícil la toma de decisiones económicas y de otras áreas.

Afortunadamente cada vez más personas toman conciencia sobre la importancia que los aspectos cooperativos tienen en los fenómenos bajo riesgo. Este tipo de personas conocedoras de la trascendencia que tiene la cooperación (y los que no lo saben pero lo intuyen), saben que al cooperar, un individuo (o empresa) tienen grandes probabilidades de alcanzar sus objetivos elevando así las probabilidades de que sus socios alcancen los propios. Tales nociones resultan muy atractivas y semejantes a las definiciones planteadas en la sección 4.3 del capítulo II.

Obviamente no es posible exponer cada uno de los conceptos de solución pues la extensión del trabajo se haría un poco más larga y monótona. Aquí se emplearán las técnicas más populares y una propuesta de reparto equitativo (propuesta personal de solución) desarrollada por el autor de ésta tesis. Para los conceptos de solución no empleados se expusieron ejemplos para orientarle en su uso.

La teoría y las respuestas a preguntas sobre la aplicación correcta de las fórmulas y conceptos de solución pueden asimilarse mejor y brindar mayores beneficios mediante la exposición de problemas prácticos. Por lo mismo, algunas aplicaciones basadas en la teoría descrita y sus relaciones se consideran en este capítulo. Además la teoría alcanza su punto máximo cuando puede plantearse en un modelo aplicado a la realidad.

A manera de advertencia: los conceptos y definiciones expuestos en los capítulos anteriores se retoman de forma aleatoria según se utilicen, toca al lector identificarlos y asociarlos con su correspondiente definición, comprobando que se emplean correctamente.

El motivo primordial que se presenta para emplear la teoría de los juegos como la técnica más adecuada para dar solución a las aplicaciones es el siguiente: por las características del problema y su orientación hacía la competencia, no existe otra manera (desde el punto de vista matemático) que se adapte mejor a tales condiciones.

Dado que ya se expuso el motivo inicial para desarrollar los ejemplos se procede a continuar con la definición y aplicación de los problemas. El capítulo actual monta el escenario para la exposición del regateo multipartita (de varios jugadores), introduciendo el problema que encaran tres compañías de calzado, las cuales pueden formar un monopolio comercial. El dilema planteado se divide en dos partes o juegos: el primero, en donde los jugadores pueden o no formar coaliciones unipersonales, bipersonales y tripersonales. El segundo juego es de coaliciones puro por que se necesita de una coalición para contender, si un jugador decide no incorporarse a una coalición y jugar sólo, el pago destinado para este jugador es cero. La segunda aplicación es más interesante desde un punto de vista didáctico. En esa aplicación a usted se le asignará el papel de un jugador y deberá intentar unirse a una coalición interactuando con el texto. Al final del capítulo se citarán otras áreas de aplicación en donde la teoría de los juegos puede ser de gran utilidad.

En un monopolio las únicas dos situaciones posibles que pueden presentarse son las ya explicadas (cooperación total y cooperación parcial), por consecuencia lógica sólo se exponen los dos ejemplos citados.

2. UN JUEGO SEMI-COOPERATIVO

En ésta, la primera aplicación se plantea un problema en donde los jugadores pueden integrarse en una coalición y jugar unidos si así lo desean o jugar por su cuenta (individualmente) y tratar de alcanzar un pago favorable.

2.1. ANALISIS INICIAL Y DEFINICION DEL PROBLEMA

Debido a la situación económica en que se encuentra sumergido el país, todas la empresas desean "sobrevivir" adoptando sus operaciones comerciales a la realidad de un mercado comprimido y formular sus estrategias de manera inteligente para mantener su participación en el mercado a un costo y con márgenes de utilidad razonables. Por estas razones, diversas industrias estiman que las fuentes provenientes de las ventas deben diversificarse o sea proponer alternativas para lanzar otros productos.

Bajo está primicia la empresa de zapatos para dama, Calzado Eco[*8] presenta su carta de intenciones ante la asociación de manufactureros y distribuidores de calzado mexicano. En

[*8] También conocida como Andrea, la cual se dedica a la venta y producción de calzado para dama exclusivamente.

la carta se describe el interés por producir, vender y distribuir una línea de calzado para hombres.

Cuando su oponente comercial más cercano (en ventas de calzado para dama), la firma Fama de México mejor conocida como Shadia se entera del proyecto (de Andrea) para no incurrir en un rezago comercial decide incursionar en el mercado lanzando también una línea propia de calzado masculino.

Tras diversos estudios de mercado para saber que compañía ocupaba la mayoría de las ventas (de zapato para hombre), se destacó la compañía de calzado Canadá como la principal productora y vendedora. Así pues se intentará que las tres empresas de calzado involucradas (Canadá, Andrea y Shadia) compartan el mercado formando un monopolio. El arreglo es posible y las tres firmas pueden considerar una fusión normal.

El conjunto N de jugadores queda entonces formado por N={Canadá, Andrea, Shadia} y la cardinalidad de N es n=3, por que son tres contendientes. Al término de las negociaciones las tres empresas deben decidir si jugarán unidos en una coalición o por su cuenta. La duración del proyecto es de 4 meses (una estación del año). Al final del proyecto, las firmas tienen la posibilidad de entablar nuevas negociaciones (un nuevo juego o partida) o continuar con la sociedad que se forme.

El juego planteado es una experiencia de simulación económica en un juego de tres contendientes. El tema central es simular la aparición de otras sociedades en un mercado establecido y determinar sus consecuencias. El problema que enfrentan los jugadores es ¿cómo deben repartir las sinergías (el valor de la unión de fuerzas) o el monto total esperado que crearían en el juego?. Recuerde que es un juego cooperativo y algunos o todos los jugadores se unirán a una coalición.

2.2. ESTADO ACTUAL Y OBTENCIÓN DE DATOS

Los parámetros económicos han sido analizados en el curso de dos experiencias anteriores (de la empresa Andrea): lanzar las líneas de calzado infantil y casual para dama. Cabe destacar que la fuente de información es el departamento de investigación de mercados de Calzado Eco. Para evitar fenómenos transitorios y comenzar inmediatamente con situaciones de interés, a continuación se expone un breve análisis de mercado para cada uno de los jugadores.

Las empresas deben hacer una inversión en materia prima y equipo relacionado con el manejo de materiales. Se estima que el nuevo equipo tiene un valor en el mercado de \$195000 y representará para las compañías un ahorro en mano de obra y desperdicio de materiales del orden de \$150 000 el primer periodo (mes) y de 40 000 pesos cada uno de los siguientes tres periodos.

CUADRO 0. Inversión inicial y flujos de efectivo.

Periodo	Flujo de efectivo (en miles de pesos)
0	-\$195
1	150
2	40
3	40
4	40

Fuente: Calzado Eco, Depto. Investigación de Mercados, Diciembre de 1995

$$VPN = S_0 + \sum_{t=1}^{n} \frac{S_t}{(1+i)^t} ,$$

VPN= Valor presente neto ,

S_0= Inversión inicial (desembolso inicial) ,

S_t= Flujo de efectivo en el período t (Ahorros o ingresos) ,

n =Número de períodos de duración del proyecto ,

i=TREMA= Tasa de recuperación mínima.

Por el método del valor presente con tremas del 10%, 12.5% y 18% para Canadá, Andrea y Shadia respectivamente, los montos generados son: VPN(Canadá)=$32000, VPN(Andrea)=$23000, VPN(Shadia)=$6000. La inversión inicial (-$195 000) y los flujos de efectivo ($40 000) son iguales para todos los jugadores. Andrea y Shadia adquirirán nuevo equipo para internarse en el mercado. Canadá hace la inversión para enfrentar la intromisión (en caso de continuar fuera de una coalición, por su cuenta). A continuación se expone un informe sobre la situación de cada firma.

Empresa: Shadia. Una fábrica de diez mil unidades instalada al noroeste del Distrito Federal, en el cual la clientela es particularmente sensible a los costos de venta. Está compañía se caracteriza por su débil importancia con respecto a las otras dos. Nunca tuvo dificultades para despachar su producción. Durante el inicio del año se espera que haga grandes gastos comerciales que le traigan demandas superiores a su capacidad de producción. Corre el riesgo de fracasar si no entra en una coalición

Calzado Eco: Una fábrica de quince mil unidades instalada en el sector noreste de la ciudad, en éste sector la clientela es sensible al progreso técnico. Otra fábrica en proceso de construcción al sur. Está joven sociedad comienza a tomar posiciones en el mercado en forma satisfactoria. El "éxito" comercial se ha obtenido gracias al gran esfuerzo que pesa de forma considerable en su presupuesto. Dado que la lista de pedidos era poco densa al inicio del análisis, se ha construido una importante cantidad de productos terminados. Pero aún así debe luchar duro para mantenerse, peligra ante las otras dos sociedades, su capacidad de analizar y estimar riesgos será fundamental al tomar una decisión.

Canadá: Una fábrica de diez mil unidades instalada al poniente de la ciudad y otra de la misma capacidad en el sector sureste. La clientela de estos sectores es particularmente sensible al servicio comercial y de la publicidad, respectivamente. Esta sociedad ha ocupado hasta ahora un lugar preponderante en el mercado, gracias a su gran capacidad de producción y a los esfuerzos comerciales dosificados juiciosamente. Su situación privilegiada corre el riesgo de estar en desventaja si no se llega a un acuerdo de coalición.

La condición de las empresas pone al descubierto las variables sociales (posición en el gusto de la gente) y económicas mostrando la fuerza o poder que cada compañía tiene para contender. Se pueden identificar los siguientes elementos en un juego cooperativo de esta naturaleza. La función característica de utilidad transferible para cada jugador $v(\{i\})$=VPN con $\{i\}=K$, contendiendo individualmente es v(Canadá)=\$32000, v(Andrea)=\$23000 y v(Shadia)=\$6000. Se dice que la utilidad es transferible por que las ganancias son monetarias y los pagos laterales están permitidos. Además, por las reglas del juego implícitas, los contendientes pueden negociar entre ellos para llegar a acuerdos comunes de coalición.

2.3. ANALISIS DE COALICIONES

Debido a que el análisis de la fusión para las tres compañías se efectuará bajo la teoría de los juegos cooperativos n-personales con utilidad transferible, se supondrá que existe un acuerdo común de monopolio.

Cuando hablamos de coaliciones se involucran los aspectos cooperativos que puedan surgir en la partida (un juego). La aplicación que se analiza en este momento es una situación de conflicto pues todos los participantes buscan obtener los mejores beneficios, los contendientes tienen uno o más intereses en común. Ese interés común es lo que motiva a los jugadores a integrarse en coaliciones y formular estrategias conjuntas para llegar a soluciones que les sean ventajosas.

Desde el primer momento que las firmas Canadá, Andrea y Shadia entraron en una situación de conflicto de intereses buscando una ganancia mayor es posible situar a los tres contendientes como antagonistas cooperadores.

Con el arreglo actual (todas las firmas independientes pero con un entendimiento de monopolio) y bajo las hipótesis del capítulo I, sus ganancias $v(\{i\})$ hacienden a \$32 000, \$23 000 y \$6 000 en valor presente neto de unidades monetarias para Canadá, Andrea y Shadia, respectivamente. Si se reúnen en una fusión total, es decir, la gran coalición N={Canadá,Andrea,Shadia} pueden superar la suma de sus ganancias (61 000 pesos); se benefician de sinergías que ascienden a \$16 000, haciendo un total de 77 000 pesos. Pero también generarán sinergias, si se fusionan cualesquiera dos compañías; por ejemplo, Canadá y Andrea juntas pueden significar 59 000 pesos en lugar de 55 000 (32+23 más una cantidad adicional de 4 000 pesos que genera la unión de fuerzas) en tanto que, para este caso Shadia se vería reducida de 6 000 a 5 000 pesos. Perdida (equivalente al poder de la empresa) que todas las empresas sufririan en caso de contender fuera de una coalición o participando individualmente. Fuera de una coalición la participación del mercado referente a las ventas se reduce.

En el párrafo anterior se da una forma de calcular las coaliciones y sus pagos. Ahora, aplicando la proposición 2 y las hipótesis 1 a 3 del primer capítulo, se dice que la función caracteristica v(K) del juego es superaditiva y que el juego es de suma constante. Veamos por que:

Retome la definición de superaditividad. Si los jugadores se unen para formar la gran coalición N={Canadá,Andrea,Shadia}, puede superar la suma de todos sus pagos individuales $v(N)>\sum v(\{i\})$, (61 000 pesos) más una cantidad a=16000 pesos que genera la fusión tripartita, $v(\text{Canadá}\cup\text{Andrea}\cup\text{Shadia})\geq v(\text{Canadá})+v(\text{Andrea})+v(\text{Shadia})$ o sea $77000\geq 61\,000$ condición de superaditividad. El cuadro 2 resume el análisis realizado (se encuentra ubicado en la sección 2.4.1.2, un par de páginas adelante)

El juego es de suma constante por que si se aplican las restricciones de la sección 2.9.4, capítulo I vera que v(N) no es cero, indicio de que el problema no es de suma cero y si de suma diferente de cero. Pero se preguntará ¿de dónde sale la cantidad a que hace atractiva a la coalición?. La respuesta es simple todos los juegos reales tienen esa propiedad. Resulta claro que un jugador por si sólo ocupa un sector en el mercado (ventas), pero si se une con uno o más jugadores tendrán un alcance mayor incrementando su participación del mercado debido también a las ventas esto es sencillamente, a más territorio abarcado más ventas.

2.4. POSIBLES ESTRATEGIAS Y RESULTADOS DESEADOS (NEGOCIACIONES)

El representante de Canadá sostiene que la sinergia de 16 000 pesos generada por la fusión total debe repartirse en función del tamaño (Cuadro 1)

CUADRO 1. Monto proporcional para cada firma

Monto para cada una de las partes proporcional al tamaño de esa parte	
Canadá	$\frac{32}{32+23+16} * 16 = 8.393442623$
Andrea	$\frac{23}{32+23+16} * 16 = 6.032786885$
Shadia	$\frac{6}{32+23+16} * 16 = 1.573770492$

Esta división aunada al monto individual generaria las siguientes ganancias:

32+8.39 = 40.393442623 para Canadá

23+6.03 = 29.032786885 para Andrea

6 +1.57 = 7.573770492 para Shadia

La ganancias (sumadas) en general ascenderian a un total de 76 999 pesos.

La imputación creada cumple con la racionalidad de grupo y también la racionalidad individual. El vector de pagos (40.39,29.03,7.57) para Canadá,Andrea y Shadia respectivamente es mejor (domina a) que el valor obtenido por cada jugador contendiendo individualmente (32,23,6). Si suma 40.39+29.03+7.57 obtendrá la cantidad de 77 000 pesos, máximo valor otorgado a la gran coalición, N. El vector que se obtuvo aún no es óptimo de Pareto pues existen otros vectores de pago que pueden mejorarlo o bloquearlo.

2.4.1. El Conjunto de Negociación

2.4.1.1. Estructura de Coalición y la Configuración del Pago

La estructura de coalición, τ, esta formada por las particiones T_1={Canadá}, T_2={Andrea} y T_3={Shadia}. Así, $\tau=(T_1,T_2,T_3)$, la configuración de pagos (x,τ) asociada es ((40.39,29.03,7.57);{Canadá},{Andrea},{Shadia})

Para el representante de Shadia no parece razonable esta propuesta de división de la sinergía en función del tamaño. Sus aspiraciones hacienden a más de 7 537 pesos que es la tercera coordenada del vector de pagos en (x,τ). Shadia cree tener la suficiente capacidad (poder) para influir en el resultado del juego.

El representante de Canadá sigue firme en su propuesta, argumentando que todos obtienen un incremento de alrededor del 26% en el monto individual consecuencia de la fusión.

Exponiendo las razones de su inconformidad el representante de Shadia observa que de acuerdo con las cifras mostradas en el cuadro 2, si su firma (Shadia) entra en una coalición con Andrea las dos obtienen 39 000 pesos (23+6 y un valor *a* de 10 000 pesos por la sinergía), mucho más de lo que Canadá pretende darles en una fusión tripartita. En el caso de la coalición {Andrea,Shadia} la empresa Canadá terminaria con 30 000 pesos y no con los $40 393 que propone. Son 2 000 pesos menos (jugando individualmente) perdida que resiente por no integrarse en una coalición. La imputación (40,29,7) es dominada por la imputación (30,30,9) vía la coalición {Andrea,Shadia}.

Una caracteristica más que posee el juego semi-cooperativo es que por la forma de su función caracteristica (los pagos para v({i}), v(K) y v(N)) el juego se dice esencial es decir existe una coalición ganadora y una fusión perdedora. La ganancia de la gran coalición v(N)=77 000 es estrictamente mayor al ingreso de todos los jugadores individuales, $\sum v(\{i\})=61\ 000$, y=1,...3 ó i=Canadá, Andrea, Shadia.

2.4.1.2. Las Objeciones y las Contraobjeciones

Shadia objeta con Andrea por la coalición de $39 000 contra Canadá. Otorgando a la compañía Andrea 30 000 pesos y obteniendo para si, 9 000 pesos. Lo cual forma una nueva propuesta de configuración del pago individualmente racional por decir (y,υ), ((30,30,9),{Canadá},{Andrea,Shadia})). La firma Andrea será un socio de Shadia en su objeción. Ambas sociedades reciben un pago que mejora las ganancias inicialmente propuestas.

Pero Canadá contraobjeta tratando de conservar la coalición tripartita. Como la firma Shadia se sabe generadora de la sinergía que eleva el valor de la gran coalición hasta 77 000 pesos, podría intentar seguir sola y obtener únicamente 7 537.

El representante de Andrea entra en la negociación, conviene que el pago justo para Shadia es de 7537 pero de ningún modo (Andrea) aceptaría $29 000 pues es un poco bajo para sus pretensiones. Tratando de persuadir a Shadia, le recuerda que actuando fuera de una fusión terminaría con sólo 5 000 pesos, pues a todos los jugadores les conviene la gran coalición.

La contraobjeción por parte de Canadá muestra otra nueva configuración del pago (z,ν). Con la coalición {Canadá,Andrea} juntos obtienen sólo 59 000 pesos responde Shadia, si las cosas siguen de está manera es muy difícil que Andrea obtenga 29 000 pesos de Canadá. Para remediarlo el representante de Shadia lanza la siguiente oferta: al unirse como entidad Canadá y Andrea obtienen 59 000 mientras que su firma (Shadia) queda con 5 000, entonces conjuntamente totalizarían 64 000 pesos. Así que una unión de está manera generaría una sinergía de 13 000 pesos (77-64) y sería injusto compartir esa sinergía en cantidades iguales. Por lo mismo, Shadia ofrece dejar la mitad para la fusión Canadá, Andrea y quedarse con la otra mitad.

CUADRO 2. Valor presente neto de las ganancias para cada fusión

Tipo de fusión	Percepciones (En miles de pesos)	Suma de sinergías	Montos agregados por la fusión
Todas las empresas permanecen separadas			
Canadá	32		0
Andrea	23		0
Shadia	6	61	0
Dos se fusionan, la tercera sigue separada			
Canadá, Andrea	59		4
Shadia separada	5	64	-1
Canadá, Shadia	45		7
Andrea separada	22	67	-1
Andrea, Shadia	39		10
Canadá separada	30	69	-3
Fusión total			
Canadá, Andrea, Shadia	77	77	16

Esto otorgaría 11 500 pesos a Shadia lo cual, no están dispuestos a aceptar los otros dos jugadores. Y así continua el argumento en el conjunto de negociación, entre objeciones, contraobjeciones, estructuras de coalición y configuraciones del pago. Note que para el resto de las coaliciones es semejante la negociación. Finalmente, conviene más tomar un curso de acción más preciso para tratar de llegar a un acuerdo.

2.4.2. El NUCLEO

Para tratar de encontrar soluciones por medio del núcleo, inicialmente retomaremos los juegos simples. Resulta fácil observar que por definición un juego simple no normalizado cero-uno tiene como pago asignado a una coalición ganadora: $v(K) = a + \sum_{i \in K} v(\{i\})$ y el pago de la coalición perdedora es $v(K) = \sum_{i \in N-K} v(\{i\})$ Si observa el cuadro 2 vera que todas las coaliciones de dos y tres empresas tienen asociado un pago mayor que la suma de sus elementos individuales, es decir v({Canadá$\cup$Andrea})=59, v({Canadá,Andrea})=4+23+32. Los valores de cada coalición se estimaron pensando que la fusión de dos o más sociedades generan un participación del mercado mayor.

Retome el cuadro 2 será de gran utilidad para tratar de encontrar soluciones por medio del núcleo y otros tipo de soluciones también llamados valores.

Se comenzará por encontrar tres montos: denote a Canadá por x_1, a la firma Andrea por x_2 y a Shadia por x_3 que dividen el total de 77 000 pesos o sea

$$x_1 + x_2 + x_3 = 77 \quad \cdots (3.1)$$

Como mínimo, estos tres argumentos deben satisfacer también desigualdades adicionales:

$$x_1 \geq 30, \quad \cdots (3.2), \text{ Canadá}$$
$$x_2 \geq 22, \quad \cdots (3.3), \text{ Andrea}$$
$$x_3 \geq 5\ , \quad \cdots (3.4), \text{ Shadia}$$
$$x_1 + x_2 \geq 59, \quad \cdots (3.5), \text{ Canadá, Andrea}$$
$$x_1 + x_3 \geq 45, \quad \cdots (3.6), \text{ Canadá, Shadia}$$
$$x_2 + x_3 \geq 39, \quad \cdots (3.7), \text{ Andrea, Shadia}$$

Para plantear las desigualdades tome el valor más bajo obtenido por la fusión. Las desigualdades (3.2), (3.3) y (3.4) establecen lo que cada una de las firmas pueden obtener individualmente si actúa contra una de las otras dos compañías. Lo que obtienen un par de empresas al formar una coalición se estipula en las desigualdades (3.5), (3.6) y (3.7)

Primero se pretende encontrar tres números que satisfagan los requisitos (3.1) a (3.7). De ser así se intentará abarcar todas las conjeturas posibles para tres números adecuados. Finalmente del conjunto de ternas factibles podrá establecerse una solución, si es que la hay, demostrando que el núcleo no es vacío.

La gente que conoce los métodos de investigación de operaciones puede observar que los requisitos (3.1) a (3.7) constituyen un problema de programación lineal (PPL). Existen diversas técnicas para dar solución a éste tipo de problemas, entre las cuales destacan: simplex, dual simplex y método gráfico.

Si dispone de un paquete de computadora puede valerse de él para resolver el PPL, propuesto en las desigualdades 3.1 a 3.7, debe maximizar las ganancias. Pero primero hay que hacer una pequeña modificación a su problema porque en otro caso el PPL será no acotado y no existirá solución. Aquí, por motivos de análisis y demostrativos emplearemos el método gráfico en un principio y después el paquete manager versión 3.1 para resolver el problema de programación lineal.

Procediendo por método gráfico, use un eje horizontal para x_1, un eje vertical para x_2 y la ecuación (3.1) para representar a x_3. La representación gráfica del núcleo se hará en el plano y no en el espacio. Las desigualdades (3.2) y (3.3) se dibujan directamente. El requisito (3.4), al combinarlo con (3.1) implica que

$$x_1 + x_2 \leq 72, \cdots (3.4')$$

(3.5) pasa directo a la gráfica. La desigualdad (3.6) junto con (3.1) implica que

$$x_2 \leq 32, \cdots (3.6')$$

del mismo modo (3.7) con (3.1) queda

$$x_1 \leq 38, \cdots (3.7')$$

Replanteando las restricciones (3.3) a (3.7) se tiene que

$$x_1 \quad \geq 30, \cdots (3.2)$$

$$x_2 \geq 22, \cdots (3.3)$$

$$x_1 + x_2 \leq 72, \cdots (3.4')$$

$$x_1 + x_2 \geq 59, \cdots (3.5)$$

$$x_2 \leq 32, \cdots (3.6')$$

$$x_1 \quad \leq 38, \cdots (3.7')$$

las cuales forman la figura 1 y se muestra más adelante. Existe una región factible y acotada, indicio de que a simple vista el núcleo es no vacio.

Los puntos que satisfacen todas las desigualdades se encuentran en la zona sombreada y cada uno de los vértices en la frontera de esa región está etiquetado con tres números (en forma de vector): (x_1, x_2, x_3). Por ejemplo, el vértice v2 en x_1 tiene 38 por la restricción (3.7'), en x_2 tiene 32 debido a (3.6) y por diferencia (77-38+32) x_3 es igual a 7. Observe que muchas ternas de números son factibles en el sentido que satisfacen los requisitos (3.1) a

(3.7) del PPL original o sea son imputaciones que satisfacen racionalidad de grupo y racionalidad individual.

Si realiza los cálculos gráficamente la exactitud y precisión numéricas se verán limitadas por lo cual en éste momento se trabajará con números enteros.

Una posibilidad para encontrar una terna consiste en tomar algún punto cerca de la región viable. Y haciendo un cálculo aproximado, x_1 debe ser mayor o igual a treinta y menor que treinta y ocho (restricciones 3.2 y 3.7'), x_2 puede tomar valores desde 22 a 32 (restricciones 3.3 y 3.6') y x_1+x_2 no debe ser mayor que 72, ni menor que 59 (restricciones 3.4' y 3.5). El valor de x_3 se obtiene despejando x_3 de la ecuación 3.1, $x_3 = 77-(x_1+x_2)$. Si x_1 se iguala con 35 y x_2 con 29, x_3 debe ser igual a 13.

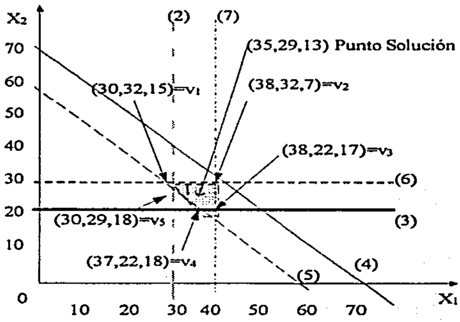

FIGURA 1
El CONJUNTO DE TERNAS VARIABLES QUE SATISFACEN LAS ECUACIONES (3.1) a (3.7)

Obviamente a Canadá no le interesa está sugerencia porque siendo la empresa más fuerte obtiene un incremento de 3 000 pesos en tanto que Shadia termina con un incremento de 7000 pesos.

El núcleo resuelto por método gráfico da el punto solución (35,29,13) y utilizando un paquete se obtiene la terna (38,32,7)[*9]

Ahora con la sugerencia original de la firma Canadá y la sugerencia del problema de programación lineal (método gráfico), Andrea obtiene $29 000 en cada caso. Pero si se promedian ambos resultados, es decir que Canadá llegue a la mitad entre 40.39 y 35 (en miles de pesos), Andrea alcanza 29.01 y Shadia obtendrá 10.28. El siguiente cuadro (3) resume la información.

CUADRO 3. Promedio de los resultados propuestos

Empresa	División de sinergía	Método gráfico	Promedio
Canadá	40.39344623	35	37.6967231150
Andrea	29.032786885	29	29.0163934425
Shadia	7.573770492	13	10.2868852460

2.4.3. EL VALOR DE SHAPLEY

Investigando otras soluciones arbitradas para el problema. Observe al cuadro 4 que resume los resultados obtenidos por el método de Shapley, también mostrado un par de páginas adelante. Para llenar el cuadro 4, siga las indicaciones: la primera columna

[*9] Los problemas y resultados por el método simplex se encuentran como anexo.

contiene todas las coaliciones posibles. El valor de v(K) en la segunda columna se obtuvo considerando las restricciones (3.1) a (3.7) del problema de programación lineal original. Para llenar la columna tres proceda a realizar las combinaciones :

$$C_k^n = \frac{(k-1)!\cdot(n-k)!}{n!}, \cdots (3.8)$$

en donde los elementos k representan la cardinalidad de la coalición y n el número de jugadores.

En la columna etiquetada con v(K-{i}) se consideran los elementos en la coalición K sin el jugador i. La quinta y última columna se llena haciendo referencia a las columnas 2 y 4. El proceso de efectúa basados en el algoritmo del capitulo II para los valores de Shapley.

Por ejemplo para llenar la columna etiquetada con v(K) (segunda columna), vacie los valores de la columna de percepciones, cuadro 2. El valor correspondiente a Canadá es 30. En la tercera columna utilice la ecuación 3.8 para calcular sus combinaciones que para la firma Canadá es:

$$C_1^3 = \frac{(1-1)!\cdot(3-1)!}{3!} = \frac{1}{3}$$

Ahora calculemos el valor marginal de la coalición K sin el jugador i ubicado en las columnas 4 a 9 del cuadro 4, v(K)-v(K-{i}). Claro esta que para i=1 la coalición Canadá sin el jugador {Canadá} (que es él mismo) es el conjunto vacío. Para i=2,3, no es posible restar del conjunto algo inexistente por tanto no se calcula y se coloca un guión para indicar que no se tomó en cuenta.

Si v(K)-v(K-{i}) entonces, v(Canadá)-v(Canadá-{Canadá})=v(Canadá)-v({∅})=30-0, sucede lo mismo para i=2,3 pero con excepción que sus valores no se toman en cuenta.

Otro ejemplo, para la coalición {Canadá,Andrea}={1,2}, v(K)=v({Canadá,Andrea})=59, sus combinaciones son :

$$C_2^3 = \frac{(2-1)!\cdot(3-2)!}{3!} = \frac{1}{6}$$

v(K)-v(K-{i}):

Para el jugador i=1=Canadá ,

v({Canadá,Andrea})-v({Canadá,Andrea}-{Canadá})=

v({Canadá,Andrea})-({Andrea})=59-22 =37,

Para el jugador i=2 = Andrea,

v({Canadá, Andrea})-v({Canadá, Andrea}-{Andrea}) =

v({Canadá, Andrea}-v({Canadá})=59-30 =29, y así consecutivamente.

CUADRO 4. Valores de Shapley

			v(K-{i})			*v(K)-v(K-{i})*			Σ
Coalición K	**V(K)**	$C_k^n = \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}$	**i=1**	**i=2**	**i=3**	**i=1**	**i=2**	**i=3**	
{1}=Canadá	30	1/3	∅	-	-	30	-	-	
{2}=Andrea	22	1/3	-	∅	-	-	22	-	
{3}=Shadia	5	1/3	-	-	∅	-	-	5	
{1,2}	59	1/6	{2}	{1}	-	37	29	-	
{1,3}	45	1/6	{3}	-	{1}	40	-	15	
{2,3}	39	1/6	-	{3}	{2}	-	34	17	
{1,2,3}	77	1/3	{2,3}	{1,3}	{1,2}	38	32	18	
					$\phi_i(v)$	*35.5*	*28.5*	*13*	*77*

Para calcular el Valor de Shapley integre todos los elementos del cuadro 4 y utilice la siguiente fórmula para obtener el valor correspondiente a cada jugador:

$$\phi_i(\nu) = \sum_{j=1}^{n} \nu_j(K) \cdot C_{j,k}^{n}$$

$$\phi_1(v) = (1/3)*30 + (1/6)*37 + (1/6)*40 + (1/3)*38 = 35.5$$

$$\phi_2(v) = (1/3)*22 + (1/6)*29 + (1/6)*34 + (1/3)*32 = 28.5$$

$$\phi_3(v) = (1/3)*5 + (1/6)*15 + (1/6)*17 + (1/3)*18 = 13.0$$

$$\Sigma(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) = 77$$

La fórmula empleada para calcular los Valores de Shapley es la misma fórmula (pero desglosada e integrada con el cuadro 4) descrita en 2.11, sección 5, capítulo II o sea:

$$\phi_i(\nu) = \sum_{K \subset N} \left[\nu(K) - \nu(K - \{i\})\right] \cdot \left[\frac{(k-1)! \cdot (n-k)!}{n!}\right]$$

Para comprender mejor como realiza los procesos de negociación el Valor de Shapley centre su atención en el cuadro 5, el cual muestra la forma en como se realizan las jugadas.

CUADRO 5. Proceso de negociación del Valor de Shapley

Orden de jugadas que forman la gran coalición	**Valor incremental agregado por la compañía**			
	Canadá	Andrea	Shadia	Total
Canadá, Andrea, Shadia	30	29	18	77
Canadá, Shadia, Andrea	30	32	15	77
Andrea, Shadia, Canadá	37	22	18	77
Andrea, Canadá, Shadia	38	22	17	77
Shadia, Canadá, Andrea	40	32	5	77
Shadia, Andrea, Canadá	38	34	5	77
Promedio	35.5	28.5	13	77

El cuadro 5 muestra el proceso de negociación efectuado por el Valor de Shapley. El orden de jugadas comienza de izquierda a derecha. Por ejemplo en la primera línea la firma Canadá por si sola (sin formar parte de una coalición) obtiene $30 000, al entrar en una fusión con Andrea, esta última agrega sus $29 000 para que el monto total de la coalición bipartita {Canadá,Andrea} hacienda a $59 000. Finalmente Shadia se une para incrementar el valor de la coalición {Canadá,Andrea,Shadia} a 77 000 pesos, con la generación de $18000 como sinergia. Del mismo modo se llena todo el cuadro 5.

2.4.4. ALTERNATIVAS CONSIDERADAS (PROPUESTA PERSONAL DE SOLUCION)

Una sugerencia personal de solución arbitrada es la siguiente. Considere la información del cuadro 2 cuando dos empresas se fusionan y la tercera sigue separada. Si suma la coalición con la empresa individual obtendrá un monto para la coalición tripartita. Esto es tomando la fusión {Canadá,Andrea} que generan percepciones por $59 000, si Shadia se adhiere a la coalición obtendrán un monto de $64 000 (59+6) para una coalición tripartita. La sinergía creada seria de 13 000 pesos y debe repartirse de la siguiente manera: la mitad de la sinergía (6 500) para la coalición bipartita {Canadá,Andrea} y la otra mitad (6 500) para la empresa generadora de la sinergía en éste caso Shadia.

Ahora, fijando un valor para Canadá (éste valor fijo debe caer en la región sombreada) por ejemplo 32.5, los datos restantes se obtienen por sumas y restas.

De igual modo se procede con las fusiones {Canadá,Shadia} y {Andrea,Shadia}. El cuadro 6 resume los cálculos mostrando la solución arbitrada (34.916,28.416,13.66), sumando los totales y dividiendo entre tres para cada una de las sociedades.

CUADRO 6. Propuesta personal de solución

Ganancias "razonables" (en millones de pesos)				
Coalición bipartita inicial	Canadá	Andrea	Shadia	Total
Canadá, Andrea	32.5	26.5	**5.0**	64
Sinergía (unión de fuerzas)	3.25	3.25	6.5	13
Total	35.75	29.75	11.5	77
Canadá, Shadia	32.5	**22.0**	12.5	67
Sinergía	2.5	5.0	2.5	10
Total	35.0	27.0	15.0	77
Andrea, Shadia	**30.0**	26.5	12.5	69
Sinergía	4.0	2.0	2.0	8
Total	34.0	28.5	14.5	77
Promedio	34.9167	28.2167	13.6667	77

Los cuadros sombreados son los valores que puede obtener la compañía sola quedando fuera de la coalición bipartita.

2.5. LA DECISIÓN FINAL

A continuación se expone el cuadro 7 con un resumen de las soluciones arbitradas que se obtuvieron a lo largo del desarrollo. No es posible darle una solución única como lo hace el Valor de Shapley. Usted debe inclinarse por alguna basándose en los méritos, ganancias y la teoría que la apoya o simplemente la que a usted más le convenza. contiene un resumen de todas las soluciones arbitradas. Observe que las soluciones caen dentro de la región sombreada de la figura 1, algunas muy cerca del centro indicando un posible punto de equilibrio en el núcleo.

CUADRO 7. Resumen de soluciones arbitradas

Método de Solución	*Canadá*	*Andrea*	*Shadia*
Problema de Programación Lineal (Núcleo)	38	32	7
Promedio entre división de sinergias y método gráfico	37.6967213	29.0163934	10.2868852
Valor de Shapley	35.5	28.5	13
Propuesta personal	34.9167	28.4167	13.6667

2.6. CONCLUSION AL JUEGO SEMI-COOPERATIVO

El núcleo, es decir el conjunto de ternas que satisface las demandas individuales y las de cada coalición tal y como se muestran en los requisitos (3.1) a (3.7), contienen a la terna x_i ($x_1=38, x_2=32, x_3=7$). Sin embargo está propuesta carece de valor predictivo obligatorio. Observe que los valores de x_1, x_2 y x_3 fueron obtenidos resolviendo el problema de programación lineal de dos variables, x_1 y x_2, porque procediendo por simplex para las variables x_1, x_2 y x_3 resulta un problema no acotado.

Las deducciones que pueden hacerse para este problema en particular son que: obviamente si todos los contendientes deciden jugar separados obtendrán el pago mínimo que cada uno pueda alcanzar. En el caso de una coalición bipartita puede observarse que la coalición más fuerte (la que obtiene mejores ganancias) es {Canadá,Andrea} dejando a Shadia con el valor minimo que puede alcanzar.

Si se diera una coalición tripartita (caso ideal), todos los jugadores obtendrían con cualquier método ya descritos un promedio de todas y cada una de sus contribuciones con influencia de su poder o fuerza para contender.

Para Shadia, los precios de venta unitarios deberán incrementarse en caso que decidan actuar sola, si entra en alguna coalición los beneficios para está compañía no cesaran de crecer.

Con la elección de una fusión el porvenir de Andrea parece seguro y el efecto de la competencia al introducirse al mercado masculino seria poco sensible. En caso contrario tendrían que esforzarse mucho (no tanto como Shadia) para no perder posiciones en el mercado.

La firma Canadá en el caso que decidan no incorporarse a una coalición tendrá efectos comerciales suplementarios (ventas bajas, perdida de posiciones en el mercado, etc.) y habrá que reducir los precios en los costos para conservar las posiciones adquiridas.

3. UN JUEGO DE COALICIONES PURO

Prosiguiendo en la misma línea y analizando el problema original ahora como un juego de coaliciones puro. La aplicación se convierte en un juego sencillamente explicado (no es lo mismo que decir que es un juego sencillo) en el cual no se puede encontrar ninguna solución a las contrapartes de las ecuaciones (3.1) a (3.7). Note que en el juego de coaliciones puro las ganancias de cada coalición se ven afectadas por el giro que da el problema.

El juego de coaliciones puro requiere que antes de hacer cualquier inversión, primero exista una negociación entre las empresas para unirse a una coalición, pues sólo aquellos jugadores que estén en un fusión recibirán un pago positivo, mientras que los jugadores que no participen en una coalición recibirán un pago de cero pesos.

Cuando los contendientes se encuentren en coaliciones podrán realizar su inversión pero actuando como un sólo jugador. La inversión inicial que cada fusión hará sigue siendo $195000. También, durante los periodos 1, 2 y 3 el ahorro es de 150 000 pesos, $40 000 y $40 000 respectivamente. Al final de la vida del proyecto (cuarto mes), según la coalición que se forme tendrá un ahorro proporcional a su tamaño. El ahorro extra proporcional al tamaño, se hace porque cualquier coalición de un sólo jugador obtendrá una ganancia de cero pesos dejando más ganancias al resto de los contendientes. La tabla de inversiones y flujos de efectivo evaluados por el método del valor presente se muestran en el cuadro 8.

CUADRO 8. Inversiones y flujos de efectivo por coalición

Periodo	*Coaliciones, inversiones y flujos de efectivo*			
	Canadá, Andrea (TREMA) i=0.1	*Canadá, Shadia (TREMA) i=0.125*	*Andrea, Shadia (TREMA) i=0.18*	*Canadá, Andrea, Shadia (TREMA) i=0.1*
0	-195	-195	-195	-195
1	150	150	150	150
2	40	40	40	40
3	40	40	40	40
4	166	139	126	171

Fuente: Calzado Eco S.A. de C.V., Depto. de Investigación de Mercados

Empleando la fórmula del Valor Presente Neto igual que en la primera aplicación :

VPN(Canadá, Andrea)=$118

VPN(Canadá, Shadia)=$84

VPN(Andrea, Shadia)=$50

VPN(Canadá, Andrea, Shadia)=$121.

3.1. INSTRUCCIONES Y REGLAS DEL JUEGO

Para hacer de éste juego una aplicación más cercana a los procesos reales, ya no se le indicará el teorema, la definición, la hipótesis, etc., del cual parte la idea. Sólo se mencionará cuando es una imputación o un conjunto de negociación y así por el estilo. El juego tiene tres jugadores Canadá, Andrea y Shadia. A usted se le asignará uno de estos papeles. Su objetivo es unirse a alguna coalición que disponga de una ganancia positiva (véase el cuadro 9 que contiene las funciones características). Para negociar como deben repartirse las ganancias conjuntas y para que trate de maximizar su propia ganancia, se le calificará de acuerdo a su desempeño: su ganancia se comparará con la ganancia de otras personas que desempeñarán un papel similar.

Por ejemplo, las funciones características v(K) para los jugadores se dan a continuación. Si se forma la coalición Canadá y Shadia éstas dispondrán de un rendimiento conjunto de 84 unidades. Podrían convenir en otorgarle 50 a Canadá y 34 a Shadia. Como es de esperarse, Canadá podría querer más de la coalición {Canadá,Shadia} y así amenazar a su similar cortejando a Andrea. Después de todo, si Andrea no se une a ninguna coalición y actúa sola obtiene una ganancia nula. Por está sencilla razón Andrea tratará desesperadamente de unirse a Canadá y Shadia en una gran coalición {Canadá,Andrea,Shadia} (disponiendo de 121) o por el contrario romper la coalición {Canadá,Shadia} y unirse a una de las firmas individuales.

La idea del juego es que usted aprenda a maniobrar y con el pasar del tiempo se una a una coalición que le ofrezca el mayor rendimiento. Por supuesto, lo que usted podría demandar de una coalición depende de lo que pueda brindarle a esa coalición y de lo que usted pudiera obtener potencialmente por otro lado. No debe haber comunicación previa con los otros dos jugadores (excepto para ponerse de acuerdo en un lugar de reunión) antes de que se inicien las negociaciones. En un lapso de 30 minutos debe completar las negociaciones o antes de ser posible. Los tres jugadores deben colocarse en posiciones simétricas al principio. Si dos jugadores cualesquiera requieren concertar una reunión en privado, el tercero no debe interrumpirlos por espacio de dos minutos cuando menos.

3.2. ACUERDOS

Para empezar, usted con los otros jugadores analicen el cuadro de posibles ganancias y diseñen los principios de una estrategia. Antes de discutir el juego con los otros dos contendientes y después de que les sean asignados sus papeles, describan sus estrategias por escrito. Durante el transcurso del juego registren el resultado de las negociaciones y la secuencia de las decisiones realizadas a lo largo del mismo. Una vez concluidas las negociaciones, los tres jugadores deben comentar lo que paso exactamente durante el juego.

CUADRO 9. Ganancias en un juego de coaliciones puro

Coalición	*Ganancia (en miles de pesos)*
Canadá sola	0
Andrea sola	0
Shadia sola	0
Canadá, Andrea	118
Canadá, Shadia	84
Andrea, Shadia	50
Canadá, Andrea, Shadia	121

3.3. NEGOCIACIONES (CONJUNTO DE NEGOCIACION)

Existen diversas formas en que usted y los otros jugadores podrían intentar unirse en una coalición (estructura de coalición). En caso de que Canadá inicie haciéndole una oferta privada a Andrea, si entran en coalición podrían repartirse 118 000 pesos (configuración del pago). Obviamente Shadia es excluida. Un reparto razonable sería $78 000 para Canadá (por ser más fuerte) y 40 000 pesos para Andrea.

Suponiendo que las aspiraciones de Andrea están por encima de 40 (en miles de pesos), no le importará quién sea su socio mientras le de más (Andrea tendría una objeción). Entonces, si recurre a Shadia (para hacerlo su socio) quién no está en una coalición puede darle 4 solamente y así tomar 46 para sí mismo.

Canadá podría advertir la situación y alejar a Shadia de las manos de Andrea con una oferta (contraobjeción) de 8. Pero si Canadá hace eso terminaría con sólo 76, dos unidades menos que en una coalición {Canadá,Andrea}.

3.3.1. Conjuntos Estables

Con los antecedentes anteriores, se investigarán las "ofertas que no pueden rechazarse fácilmente" o conjuntos estables (véase cuadro 10). Si por ejemplo, Shadia (S) ofrece 42 a la firma Andrea (A), guardando 8 para ella y Andrea amenaza (tiene una objeción) con recurrir a Canadá para pedir 44 (dejando a Canadá 47), entonces Shadia a su vez podría recurrir (contraobjetar con) a Canadá y ofrecerle 75, lo cual permite a Shadia conservar 9 (una mejoría respecto a su 8 original)

CUADRO 10. Ofertas que no pueden rechazarse fácilmente

	Ganancia			
Oferta	*C*	*A*	*S*	*Total*
De Canadá a Andrea	76	42	-	118
De Canadá a Shadia	76	-	8	84
De Andrea a Canadá	76	42	-	118
De Andrea a Shadia	-	42	8	50
De Shadia a Canadá	76	-	8	84
De Shadia a Andrea	-	42	8	50

76+42+8=126 es mayor que 121, cantidad que no puede demandar la gran coalición

Así, la oferta de Shadia para Andrea de 42 no es fácilmente vulnerable. En caso de que Andrea se sienta atraída por Canadá que le ofrece más, Shadia puede ofrecer más a Canadá y Andrea terminaría en cero, mientras Shadia terminaría con 8.

Una táctica que Andrea puede emplear es: hacer ofertas ya sea a Canadá o a Shadia que no puedan rechazar fácilmente. Aún así en cada uno de los casos Andrea obtendría 42. Pero Canadá puede hacer ofertas similares y obtener 76 del mismo modo Shadia puede hacer ofertas que le producirían 8. Sin embargo todos juntos no pueden disponer de 76+42+8 o sea 126. Pues como gran coalición sólo pueden conseguir 121. Así que el punto principal de Andrea es evitar una coalición entre Canadá y Shadia.

Andrea se encuentra en mejor posición si hace coalición con Shadia; para hacer que Shadia entre en coalición con Andrea debe ofrecer 10 unidades, dos unidades más de lo que Shadia espera de una coalición bipartita que la incluya a ella. Si Shadia entiende realmente lo que hace Andrea y si existe lealtad por su parte, entonces pueden muy bien abordar a Canadá como una entidad de regateo firme. En el problema de regateo con Canadá habría 71 puntos que compartir (121-50) y por ende la coalición firme {Andrea,Shadia} debería obtener 35.5 unidades de eso. Repartiendo por igual las 35.5 unidades, Shadia terminaría con 27.75 o sea 10+17.75 que superan con mucho sus aspiraciones razonables y Andrea alcanzaría un monto de 57.75 (40+17.75)

Canadá podría no estar de acuerdo y abordar a Shadia confidencialmente ofreciéndole 30 unidades, lo cual implica perder los 17.75 adicionales. Pero si Canadá puede hacer coalición con Shadia también puede hacerlo con la firma Andrea y obtener 118 de una coalición bipartita {Canadá,Andrea}. De las 118 unidades Andrea podría alcanzar 45. Y la danza de la negociación (la lucha por obtener posiciones) continua tanto como lo desee.

3.4. SOLUCIONES ARBITRADAS

Usando un método más preciso para obtener soluciones de manera más rápida y sencilla, el Valor de Shapley puede emplearse como una de las llamadas soluciones equitativas.

3.4.1. Valores de Shapley

Considere un sistema hipotético de la dinámica de formación de coaliciones en el cual un jugador comienza sólo, luego se le une un segundo contendiente y posteriormente un tercero. Con tres jugadores hay seis posibles formaciones dinámicas de la gran coalición.

CUADRO 11. Valores de Shapley para el juego de coaliciones puro

			$v(K-\{i\})$			$v(K)-v(K-\{i\})$			Σ
Coalición K	*V(K)*	$c_i = \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}$	*i=1*	*i=2*	*i=3*	*i=1*	*i=2*	*i=3*	
{1}=Canadá	0	1/3	∅	-	-	0	-	-	
{2}=Andrea	0	1/3	-	∅	-	-	0	-	
{3}=Shadia	0	1/3	-	-	∅	-	-	0	
{1,2}	118	1/6	{2}	{1}	-	118	118	-	
{1,3}	84	1/6	{3}	-	{1}	84	-	84	
{2,3}	50	1/6	-	{3}	{2}	-	50	50	
{1,2,3}	121	1/3	{2,3}	{1,3}	{1,2}	71	37	3	
					$\phi_i(v)$	*57.33*	*40.33*	*23.33*	*120.99*

En la primera línea del cuadro 11 (Valores de Shapley) observe como se forma la gran coalición en la secuencia: Canadá después Andrea y finalmente Shadia. En esta secuencia, Canadá jugando individualmente dispondrá de cero; cuando Andrea se une a Canadá, la primera compañía mencionada aporta los 118; cuando Shadia se une a las otras dos agrega 3 unidades para elevar el total a 121. En la última línea del cuadro, Shadia comienza con cero; Andrea se le une para agregar 50, posteriormente llega Canadá y agrega 71.

La solución arbitrada de Shapley promedia las contribuciones agregadas por cada jugador. Así de acuerdo al esquema de Shapley, Canadá obtendria una parte equitativa (o valor arbitrado) de 57.3333, Andrea obtendria 40.3333 y Shadia 23.3333. Los Valores de Shapley para éste problema quedan resumidos en el cuadro 11.

3.4.2. Propuestas Personales de Solución

Una vez más se presenta una sugerencia personal de solución la cual retoma algunas ideas anteriormente expuestas. Empecemos por el análisis del cuadro 10 que explota la idea de las ofertas que no pueden rechazarse de inmediato (imputaciones en el conjunto estable) Agregue la posibilidad de que cualquier coalición bipartita pueda regatear con la parte restante y dividir esa sinergia a la mitad; tome la mitad recibida por la coalición bipartita existente y divida el resultado por la mitad. Promedie los resultados de las tres diferentes coaliciones que iniciaron el juego.

Todo lo anterior se lleva a cabo de manera sistemática en el cuadro 12. Suponga por ejemplo que comenzamos con la coalición {Canadá,Shadia} que dispone de 84 unidades (las unidades son miles de pesos). Si Canadá recibe 76 y Shadia recibe 8 unidades, entonces está descomposición no es fácilmente vulnerable a las ofertas hechas por parte de Andrea hacía las firmas Canadá o Shadia. Esta idea se remonta a las "ofertas que no pueden rechazarse fácilmente" (domina a). La coalición {Canadá,Shadia} dispone únicamente de 84, mientras que Andrea no tiene nada. No obstante, si se unen pueden crear una sinergia de 37 unidades o de 37 000 pesos.

Para éste esquema de arbitraje, imagine que a la empresa Andrea se le dan 18.5 de está sinergia y que la coalición {Canadá,Shadia} comparte por igual sus 18.5. De éste modo, si la coalición {Canadá,Shadia} se forma primero las 121 unidades se dividen del modo siguiente: 85.25 para Canadá, 18.5 para Andrea y 17.25 para Shadia. La solución que aparece en el cuadro 12 promedia las participaciones del total de las 121 unidades. Observe que en éste caso Shadia obtiene 14 840 pesos. Si continua haciendo los cálculos de igual manera encontrará todos los pagos descritos en el cuadro 12.

CUADRO 12. Otra solución arbitrada del juego de coaliciones puro

Coalición bipartita inicial	*Ganancia "razonable" (en miles de pesos)*			
	C	*A*	*S*	*Total*
Canadá, Andrea	76	42	-	118
Sinergia	0.75	0.75	1.5	3
Total	76.75	42.75	1.5	121
Canadá, Shadia	76	-	8	84
Sinergia	9.25	18.5	9.25	37
Total	85.25	18.5	17.25	121
Andrea, Shadia	-	42	8	50
Canadá	35.5	17.75	17.75	71
Total	35.5	59.75	25.75	121
Promedio	65.83	40.33	14.84	121

Nota: Las "ganancias razonables" para cada firma, se describen por la primera letra de su nombre respectivamente.

4. OTRAS AREAS DE APLICACION

La teoria de los juegos (en general) tiene un vasto campo de aplicación. A continuación se exhiben otras áreas que permiten aplicaciones reales.

Compras :

- Costos de materia prima.
- Comparación de costos con los principales competidores.
- Comparación de costos contra el más viable o un promedio de costos.

Publicidad: Campañas publicitarias

Personal: Rangos de disputa.

Finanzas :

- Ganancias de reparto.
- Beneficios comparados contra los principales competidores.

Para las empresas (en la firma de nuevas adquisiciones o contratos comerciales) será de gran ayuda en los procesos de negociación, estimar los posibles acuerdos a que se pueda llegar. En la política, la teoría de los juegos encuentra sus principales aplicaciones dentro de los procesos electorales, específicamente en votaciones. También existe evidencia de aplicaciones en la milicia, en la experimentación espacial, en la división de herencias y conflictos ambientales. Y la lista puede extenderse tanto como lo desee, sólo necesita muchas ganas y poner a trabajar un poco la imaginación.

Como tarea para el lector emplee la ecuación 2.25 del capítulo II para calcular el Valor de Banzhaf-Coleman. Una pista para que no se tarde tanto en calcularlo: utilice el cuadro 11 y su información contenida, sólo modifique la tercera columna (de combinaciones) y sustitúyalos por los valores de $1/(2^{n-1})$

5. CONCLUSION A LAS APLICACIONES

Se planteó un problema de regateo tripartita mediante el problema que enfrentan las compañías de calzado Canadá, Andrea y Shadia que pueden formar un monopolio.

El conflicto planteado se dividió en dos juegos: uno semi-cooperativo y el otro de coaliciones puro. La intensión de la segunda aplicación expuesta pretende internar al lector en un ambiente de negociación.

Para ambas aplicaciones puede concluirse que cuando las personas tratan de estimar resultados en situaciones como las descritas no deben poner todo su esfuerzo en sus predicciones: el comportamiento humano está involucrado, así que todo puede ocurrir y ocurre siguiendo las filosofías de Murphy.

Si se juega cooperativamente desde el principio es posible inducirse una respuesta cooperativa, sin embargo la evidencia experimental prueba que existe tendencia de los jugadores a perder el sentimiento cooperativo a medida que se repiten los juegos. Aunque la mayor parte de la gente desea ser equitativa y en alguna medida se les puede convencer con argumentos de equidad.

No siempre existe solución para un juego en particular o tal vez no haya manera de lograr una solución, incluso si es que existe alguna. Hasta ahora, no se ha logrado encontrar un principio que divida adecuada y equitativamente las ganancias obtenidas, al menos no uno que sea aceptado por todas las personas como la solución única y arbitrada.

Ante está restricción las habilidades personales son decisivas en el intercambio de ideas en la negociación pero la capacidad de análisis también lo es. Afortunadamente el problema básico en los juegos cooperativos es la coordinación de las estrategias de cada jugador para su ventaja mutua.

Se emplearon para dar solución a los juegos expuestos las técnicas más difundidas. A pesar de que el Valor de Shapley tiene algunas deficiencias como el axioma de aditividad, sus méritos son muy convincentes, otorgando más a la coalición más fuerte a diferencia del núcleo. El núcleo existe para cualquier división de la recompensa, mientras ninguna de las partes obtenga un monto negativo.

Los pagos en el conjunto de negociación y el conjunto estable son inestables. Parecerá una contradicción, pero sólo de palabras. Cada pago es inestable en el sentido de que independientemente del pago considerado, hay siempre dos jugadores que tienen la fuerza (poder) y motivación para pasar a otro pago mejor, haciendo interminable el regateo. La propuesta personal de solución es sólo un promedio ponderado de las contribuciones, otorgando mejores pagos a la empresa generadora de la sinergia y repartiendo las ganancias equitativamente.

Cuando inicialmente la compañía de calzado Canadá y su similar Shadia están decidiendo como deben repartir sus botines (el valor presente neto de sus utilidades futuras), debe detenerse a pensar que si formarán una coalición bipartita, ambas firmas se estarian enfrascando en un regateo distributivo de dos partes. El regateo distributivo de dos partes resulta interesante porque ninguno de los dos conoce el precio reservado del otro jugador es más tendrá que luchar duro para determinar el suyo propio. Es la presencia de un tercer jugador lo que brinda una riqueza de detalle a esta situación.

En alguna medida la complejidad real suaviza la intensidad de la dinámica del regateo. Las partes no tienen muy claro lo que les conviene y su conocimiento de los intereses de otras personas es igualmente vago. De hecho en el mundo real es muy difícil apreciar con claridad cuales son los propios intereses personales. En otras cuestiones, cada jugador involucrado en el juego es vetador, esto dependiendo de la coalición que se forme. Si se forma la gran coalición todos los jugadores serán vetadores.

El proceso para obtener soluciones pone de manifiesto los elementos clave que se han de considerar. Además de estimular el flujo de las ideas capacita para encontrar soluciones o identificarlas de una manera más sencilla.

De todas la soluciones arbitradas propuestas puede tomar la que más convenga a sus necesidades o se acerque a los objetivos planteados. Las técnicas utilizadas son todas muy semejantes (aproximadas) y viables. Usted determina cual es la mejor, si es que desea llegar a un punto de equidad.

6. RECOMENDACIONES

Los mayores pagos son evidentemente para los jugadores cooperativos (aún si el juego es no cooperativo), si todos los jugadores mantienen altas sus ofertas el beneficio conjunto será el máximo posible.

A continuación se presenta una lista*[10] que define un modo de comportamiento ideal para el logro de intercambios civilizados, equitativos, coadyuvantes y constructivos.

*[10] Del libro "The Rule of Reason" por Milton R. Wessel

a) No se retendrán datos porque puedan ser "negativos" o "poco útiles"

b) No se practicará el ocultamiento en aras del ocultamiento

c) No se empleará la demora como una táctica para evitar un resultado no deseado

d) No se emplearán "trucos" injustos ideados para engañar a fin de ganar una lucha

e) No se practicará la mala fe de ética dudosa

f) No se impugnará de manera innecesaria o con ligereza la motivación de los adversarios

g) A menos que sea pertinente, no se cuestionarán los hábitos ni las costumbres personales de los adversarios

h) Siempre que sea posible, se dará a los oponentes la oportunidad de retirarse ordenadamente y de "salir con honor"

i) El extremismo puede ser opuesto con energía y con emotividad siempre que se justifique, pero no se combatirá ni se contendrá con extremismo

j) Se evitará el dogmatismo

k) Los conceptos complejos se simplificarán lo más posible a fin de lograr la máxima comunicación y establecer el entendimiento

l) Se hará un esfuerzo por identificar y aislar las consideraciones subjetivas implicadas en la obtención de una conclusión técnica

m) Los datos pertinentes se revelarán cuando estén listos para el análisis y escudriñamiento (incluso ante una oposición externa y sin obligación legal)

n) La revelación profesional socialmente conveniente no se pospondrá por razones de ventaja práctica ñ) La hipótesis, la incertidumbre y el conocimiento inadecuados se estipularán afirmativamente (no se ocultarán de manera renuente o bajo presión)

o) Se evitarán los supuestos injustificados y los comentarios improvisados

p) El interés en un resultado, la relación con un oponente y el sesgo, el prejuicio, y la proclividad de cualquier clase, se revelarán de manera voluntaria como algo natural

q) La indagación y la investigación se conducirán de acuerdo con el problema de que se trate. A pesar de que el grado preciso de esfuerzo variará de acuerdo con la naturaleza de los temas, será congruente con la responsabilidad global estipulada para la solución del problema

r) La integridad recibirá siempre la primera prioridad.

Claro que el comportamiento humano sólo permite observar y practicar unos cuantos puntos de la lista distando mucho del ideal, pero si alguien se preocupa por acatar la mayoría de las indicaciones se acercará en un grado muy alto recordando el ideal. Las siguientes recomendaciones fueron tomada de la conferencia sobre "Las 22 leyes inmutables del marketing" dictada por Al Ries:

La ley de la escalera: Qué estrategia vaya a utilizar depende del escalón que ocupe en la escalera.

La ley de lo opuesto: Si opta por el segundo puesto, su estrategia está determinada por el líder.

La ley del sacrificio: Tiene que renunciar a algo para conseguir algo.

La ley de la singularidad: En cada situación, sólo una jugada producirá resultados substanciales.

La ley de lo impredecible: Salvo que usted escriba los planes de sus competidores no podrá predecir el futuro.

Las 5 leyes seleccionadas reflejan las tendencias que existen en el mundo de los negocios acercándose más a la realidad. Nada le limita a fijarse metas e intentar alcanzarlas, pero primero evalúe todos los caminos posibles. Si cada persona que emprende una negociación observa los puntos expuestos en las recomendaciones, se tendrán cada vez mejores resultados y beneficios.

CONCLUSION

CONCLUSION

"La tarea más importante de un ejecutivo es hacer e implantar decisiones. Muchas decisiones, triviales e importantes, deberán ser hechas día con día para encaminar o dirigir la organización hacia el logro de sus metas....y el buen desarrollo de la compañia requiere que muchas de estas decisiones sean hechas correctamente"

R. C. Bu, Análisis y evaluación de proyectos de inversión

Finalmente, puede concluirse la gran utilidad de estos métodos para la toma de decisiones, especialmente si se trata de situaciones bajo riesgo o un análisis predictivo de lo que sucederá en tales situaciones.

El objetivo que desato las investigaciones de la presente tesis fue cubierto ampliamente, pues implicaba exponer la teoria básica, desarrollarla, difundirla, explicarla y aplicarla. Uno de los grandes logros de la teoría de los juegos es despertar el interés de la gente encargada de la toma de decisiones empresariales. Sin mencionar la proliferación de investigaciones a que ha dado lugar está teoría.

Por otra parte, el monopolio seria una situación extraña pero si se logra podría ser la plataforma de un nuevo sistema de producción y mercadeo. Pues la fuerza de los contendientes unidos (capitales, técnicas de proceso, etc.) conlleva a darle un impulso mayor a la industria del calzado no sólo en nuestro pais, también en el mundo entero.

Realmente no importa que tan grande sea la situación de conflicto o de competencia a que estén sometidos los participantes. Los jugadores siempre estarán involucrados en una tarea analitica dificil en la cual hay mucho espacio para cooperar.

Si busca algún paquete de computadora que le permita realizar cálculos de Valores de Shapley o Banzhaf-Coleman se llevará una gran sorpresa. En realidad los paquetes computacionales disponibles sobre la teoria de los juegos son casi inexistentes (o nulos) y dificiles de conseguir. Pero con el advenimiento de las redes de computo se estima que no sólo habrá una proliferación de investigaciones teóricas de toda indole, sino que también estarán disponibles paquetes que ayuden a la toma de decisiones.

Como contribución personal se muestra en el anexo A1 un programa que calcula los Valores de Shapley, además de las propuestas personales de solución expuestas en el capítulo III.

Las ventajas apreciables de los juegos cooperativos para n-personas con utilidad transferible son pocas a simple vista en comparación con otras técnicas de simulación existentes, pero en manos de un analista o un tomador de decisiones (con visión potencial) puede llegar a ser una gran herramienta y de mucha utilidad. En casos extremos, para personas que no confian mucho en la teoria de los juegos y encuentran más desventajas que ventajas, aquí hay una ventaja irrefutable que puede asimilarse de la siguiente manera: es mejor disponer de una herramienta con bases bien fundamentadas que no poseer ninguna.

No cabe duda que tomar una decisión a cara o cruz es mucho más rápido, dejarlo todo a la suerte es mucho más fácil que asignar valores numéricos a cada opción. Si la elección carece de verdadera importancia, no hay ningún interés en efectuar un análisis cuidadoso de las consecuencias.

Cada compañía tendrá que hacer lo necesario para sobrevivir. Pero, sobrevivir simplemente es una mediocre aspiración. Cualquiera puede sobrevivir de una u otra forma, incluso un vagabundo. El truco consiste en sobrevivir decorosamente no sólo experimentar el dulce aroma del éxito, sino sentir visceralmente la sensación de grandeza.

Se requiere motivar a las personas involucradas con la toma de decisiones (empresarios, negociadores, comerciantes, analistas, etcétera) y estimular a la gente con los conocimientos a hacer un uso creativo del pensamiento analítico, el cual explote las técnicas de simulación y de otras áreas.

Para finalizar, se hace un llamado a las empresas mexicanas, necesitan apuntalar su capacidad de análisis de riesgo, regenerar sus técnicas por medio de nuevas investigaciones. Y que mejor si comienzan por la teoría de los juegos y otras técnicas de simulación (investigación de operaciones), pues deben considerar que la economía del país seguirá enfrentando dificultades por un largo periodo.

GLOSARIO

✓.Queda demostrado.

Acuerdos vinculantes. Limitaciones que dos o más jugadores realizan en mutuo acuerdo.

Amenazas. Aseveración de que se actuará de un cierto modo bajo determinadas condiciones. El propósito es cambiar el comportamiento de las personas.

Compromiso. Limitaciones unilaterales, es decir una acción adoptada por un jugador particular.

Conjuntos ajenos. Aquellos conjuntos que no contienen elementos en común.

Conjunto compacto. Sólo contiene elementos del mismo tipo.

Conjunto convexo. Si todo par de puntos en una región puede unirse mediante una línea sin que está abandone el área establecida.

Incidente. Una línea es incidente a V_i y V_j si estos son vértices terminales de la línea.

Filosofía de Murphy. Si algo puede salir mal saldrá.

Línea o arco. Segmento de recta que une dos vértices.

Optimo. Conjunto solución más favorable.

Optimo factible. Conjunto de solución más favorable y que satisface todas las condiciones del problema.

Punto de equilibrio. El máximo de sus mínimas ganancias para el jugador A y el mínimo de sus máximas ganancias para el jugador B o viceversa.

Minimax. Cuando el pago del jugador A es igual al pago del jugador B.

Sinergía. Unión de fuerzas.

Vértice distinguido o inicial. Primer vértice que se encuentra en una gráfica.

Vértice no terminal. Vértice intermedio o inicial en una gráfica.

Vértice terminal. Elemento de una gráfica asociado por una línea.

ANEXOS

A.1. Programa de los Valores de Shapley

El programa fue hecho en Turbo Pascal 7.0, pero corre en versiones anteriores. Aqui se muestra un programa sencillo, si desea observar un programa más completo consulte el programa anexo en el disco.

```
Program XS(i,o);
Uses  Crt,Dos;
Const Esc=#27;
Type
  vectorzito=array[1..31] of real;
  vectorzote=array[1..31] of longint;
  matrizon=array[1..31,1..5] of real;
Var
  codigo,Xplayers,Xmen,kXm,kX,i,w,j,mm,nn:integer;
  cXn,factX,valorX,elevX,doX,kmu,nMenk,nFX,Xcombi,nmink,nfactoX,multX,v:longint;
  valX:string;
  vK,divX,fi,X:vectorzito;
  vXmarg:matrizon;
  K,km1,nMk,combiX,ksi:vectorzote;
  cnk,vXm,montX,Xmonto,Xvalm,r:real;
  respX,kk,c:char;
(************************ Eleva 2 a la n-1 ************************)
function elevadoX(doX:longint):longint;
begin
 doX:=1;
 for Xmen:=1 to Xplayers do
  begin
   doX:=doX*2;
  end;
  cXn:=doX-1;
  writeln;  writeln(' Combinaciones posibles: ',cXn);
end;
(************************ Calcula el factorial ********************)
function factorX(valorX:integer):longint;
begin
 if valorX<0 then writeln(^g,^g,'No puede tomar el factorial un valor negativo')
 else if (valorX=0) or (valorX=1) then factorX:=1
 else factorX:=valorX*factorX(valorX-1);
end;
(************************ (K - 1)! ****************************)
function Kmenos1(kmu:longint):longint;
```

```
begin
 for Xmen:=1 to cXn do
 begin
  kXm:=k[Xmen];
  km1[Xmen]:=factorX(kXm-1);
 end;
end;
(************************* (n-k)! ******************************)
function nMenoXk(nMenk:longint):longint;
begin
 for Xmen:=1 to cXn do
 begin
  kXm:=k[Xmen];
  nMk[Xmen]:=factorX(Xplayers-kXm);
 end;
end;
(*********** v(k) - v(k-{i}) valores marginales************)
function valXmarg(vXm:real):real;
var j,res:integer; st:string; c:char; f:real;
begin
 f:=0;
 for i:=1 to Xplayers do
  begin
   for Xmen:=0 to cXn do
    begin
     vXmarg[Xmen,i]:=0;
     fi[Xmen]:=0;
    end;
  end;
 case Xplayers of
  2: begin
      for i:=1 to Xplayers do
       begin
        for Xmen:=1 to Xplayers do
         begin
          j:=j+5;
          if Xmen=i then
           begin
            vXmarg[Xmen,i]:=vK[Xmen];
           end
          else vXmarg[Xmen,i]:=0;
         end;
        vXmarg[3,i]:=vk[3]-vk[3-i];
```

```
      for Xmen:=1 to cXn do
       begin
        fi[Xmen]:=fi[Xmen-1]+(divX[Xmen]*vXmarg[Xmen,i]);
       end;
     end;
   end;
3: begin
    for i:=1 to Xplayers do
     begin
      for Xmen:=1 to Xplayers do
       begin
        j:=j+10;
        if Xmen=i then
         begin
          vXmarg[Xmen,i]:=vk[Xmen];
         end
         else vXmarg[Xmen,i]:=0;
       end;
      case i of
       1: begin
           vXmarg[4,1]:=vk[4]-vk[2];
           vXmarg[5,1]:=vk[5]-vk[3];
           vXmarg[6,1]:=0;
           for Xmen:=1 to cXn do
            begin
             fi[Xmen]:=fi[Xmen-1]+(divX[Xmen]*vXmarg[Xmen,1]);
            end;
           f:=fi[i+1];
          end; {caso 1}
       2: begin
           vXmarg[4,2]:=vk[4]-vk[1];
           vXmarg[5,2]:=0;
           vXmarg[6,2]:=vk[6]-vk[3];
           for Xmen:=1 to cXn do
            begin
             fi[Xmen]:=fi[Xmen-1]+(divX[Xmen]*vXmarg[Xmen,2]);
            end;
           f:=fi[i+1];
          end; {caso 2}
       3: begin
           vXmarg[4,3]:=0;
           vXmarg[5,3]:=vk[5]-vk[1];
           vXmarg[6,3]:=vk[6]-vk[2];
```

```
          for Xmen:=1 to cXn do
           begin
            fi[Xmen]:=fi[Xmen-1]+(divX[Xmen]*vXmarg[Xmen,3]);
           end;
          end; {caso 3}
      end;
     res:=7-i;
     vXmarg[7,i]:=vk[7]-vk[res];
     for Xmen:=1 to cXn do
      begin
       fi[Xmen]:=fi[Xmen-1]+(divX[Xmen]*vXmarg[Xmen,i]);
      end;
    end;
   end;
 4: begin
    for i:=1 to Xplayers do
     begin
      for Xmen:=1 to Xplayers do
       begin
        j:=j+15;
        if Xmen=i then
         begin
          vXmarg[Xmen,i]:=vk[Xmen];
         end
        else vXmarg[Xmen,i]:=0;
       end;
      case i of
       1: begin
           vXmarg[5,1]:=vk[5]-vk[2];
           vXmarg[6,1]:=vk[6]-vk[3];
           vXmarg[7,1]:=vk[7]-vk[4];
           vXmarg[8,1]:=0;
           vXmarg[9,1]:=0;
           vXmarg[10,1]:=0;
           vXmarg[11,1]:=vk[11]-vk[8];
           vXmarg[12,1]:=vk[12]-vk[9];
           vXmarg[13,1]:=vk[13]-vk[10];
           vXmarg[14,1]:=0;
          end;
       2: begin
           vXmarg[5,2]:=vk[5]-vk[1];
           vXmarg[6,2]:=0;
           vXmarg[7,2]:=0;
```

```
          vXmarg[8,2]:=vk[8]-vk[3];
          vXmarg[9,2]:=vk[9]-vk[4];
          vXmarg[10,2]:=0;
          vXmarg[11,2]:=vk[11]-vk[6];
          vXmarg[12,2]:=vk[12]-vk[7];
          vXmarg[13,2]:=0;
          vXmarg[14,2]:=vk[14]-vk[10];
         end;
      3: begin
          vXmarg[5,3]:=0;
          vXmarg[6,3]:=vk[6]-vk[1];
          vXmarg[7,3]:=0;
          vXmarg[8,3]:=vk[8]-vk[2];
          vXmarg[9,3]:=0;
          vXmarg[10,3]:=vk[10]-vk[4];
          vXmarg[11,3]:=vk[11]-vk[5];
          vXmarg[12,3]:=0;
          vXmarg[13,3]:=vk[13]-vk[7];
          vXmarg[14,3]:=vk[14]-vk[9];
         end;
      4: begin
          vXmarg[5,4]:=0;
          vXmarg[6,4]:=0;
          vXmarg[7,4]:=vk[7]-vk[1];
          vXmarg[8,4]:=0;
          vXmarg[9,4]:=vk[9]-vk[2];
          vXmarg[10,4]:=vk[10]-vk[3];
          vXmarg[11,4]:=0;
          vXmarg[12,4]:=vk[13]-vk[5];
          vXmarg[13,4]:=vk[13]-vk[6];
          vXmarg[14,4]:=vk[14]-vk[8];
         end;
     end;
     vXmarg[15,i]:=vk[15]-vk[15-i];
     for Xmen:=1 to cXn do
      begin
       fi[Xmen]:=fi[Xmen-1]+(divX[Xmen]*vXmarg[Xmen,i]);
      end;
   end;
  end;
5: begin
   for i:=1 to Xplayers do
    begin
```

```
for Xmen:=1 to Xplayers do
 begin
  j:=j+15;
  if Xmen=i then
   begin
    vXmarg[Xmen,i]:=vk[Xmen];
   end
   else vXmarg[Xmen,i]:=0;
 end;
case i of
 1: begin
     for Xmen:=6 to 9 do
      begin
       vXmarg[Xmen,1]:=vk[Xmen]-vk[Xmen-4];
      end;
     for Xmen:=10 to 15 do
      begin
       vXmarg[Xmen,1]:=0;
      end;
     for Xmen:=16 to 21 do
      begin
       vXmarg[Xmen,1]:=vk[Xmen]-vk[Xmen-6];
      end;
     for Xmen:=22 to 25 do
      begin
       vXmarg[Xmen,1]:=0;
      end;
    end;
 2: begin
     vXmarg[6,2]:=vk[6]-vk[1];
     for Xmen:=7 to 9 do
      begin
       vXmarg[Xmen,2]:=0;
      end;
     for Xmen:=10 to 12 do
      begin
       vXmarg[Xmen,2]:=vk[Xmen]-vk[Xmen-7];
      end;
     for Xmen:=13 to 15 do
      begin
       vXmarg[Xmen,2]:=0;
      end;
     for Xmen:=16 to 18 do
```

```
      begin
       vXmarg[Xmen,2]:=vk[Xmen]-vk[Xmen-9];
      end;
     for Xmen:=19 to 21 do
      begin
       vXmarg[Xmen,2]:=0;
      end;
     for Xmen:=22 to 24 do
      begin
       vXmarg[Xmen,2]:=vk[Xmen]-vk[Xmen-9];
      end;
       vXmarg[25,2]:=0;
    end;
  3: begin
     vXmarg[6,3]:=0;
     vXmarg[7,3]:=vk[7]-vk[1];
     vXmarg[8,3]:=0;
     vXmarg[9,3]:=0;
     vXmarg[10,3]:=vk[10]-vk[2];
     vXmarg[11,3]:=0;
     vXmarg[12,3]:=0;
     for Xmen:=13 to 14 do
      begin
       vXmarg[Xmen,3]:=vk[Xmen]-vk[Xmen-9];
      end;
     vXmarg[15,3]:=0;
     vXmarg[16,3]:=vk[16]-vk[6];
     vXmarg[17,3]:=0;
     vXmarg[18,3]:=0;
     for Xmen:=19 to 20 do
      begin
       vXmarg[Xmen,3]:=vk[Xmen]-vk[Xmen-11];
      end;
     vXmarg[21,3]:=0;
     for Xmen:=22 to 23 do
      begin
       vXmarg[Xmen,3]:=vk[Xmen]-vk[Xmen-11];
      end;
     vXmarg[24,3]:=0;
     vXmarg[25,3]:=vk[25]-vk[15];
    end;
  4: begin
     vXmarg[6,4]:=0;
```

```
      vXmarg[7,4]:=0;
      vXmarg[8,4]:=vk[8]-vk[1];
      vXmarg[9,4]:=0;
      vXmarg[10,4]:=0;
      vXmarg[11,4]:=vk[11]-vk[2];
      vXmarg[12,4]:=0;
      vXmarg[13,4]:=vk[13]-vk[3];
      vXmarg[14,4]:=0;
      vXmarg[15,4]:=vk[15]-vk[5];
      vXmarg[16,4]:=0;
      vXmarg[17,4]:=vk[17]-vk[6];
      vXmarg[18,4]:=0;
      vXmarg[19,4]:=vk[19]-vk[7];
      vXmarg[20,4]:=0;
      vXmarg[21,4]:=vk[21]-vk[9];
      vXmarg[22,4]:=vk[22]-vk[10];
      vXmarg[23,4]:=0;
      vXmarg[24,4]:=vk[24]-vk[12];
      vXmarg[25,4]:=vk[25]-vk[14];
     end;
   5: begin
      vXmarg[6,5]:=0;
      vXmarg[7,5]:=0;
      vXmarg[8,5]:=0;
      vXmarg[9,5]:=vk[9]-vk[1];
      vXmarg[10,5]:=0;
      vXmarg[11,5]:=0;
      vXmarg[12,5]:=vk[12]-vk[2];
      vXmarg[13,5]:=0;
      vXmarg[14,5]:=vk[14]-vk[3];
      vXmarg[15,5]:=vk[15]-vk[4];
      vXmarg[16,5]:=0;
      vXmarg[17,5]:=0;
      vXmarg[18,5]:=vk[18]-vk[6];
      vXmarg[19,5]:=0;
      vXmarg[20,5]:=vk[20]-vk[7];
      vXmarg[21,5]:=vk[21]-vk[8];
      vXmarg[22,5]:=0;
      vXmarg[23,5]:=vk[23]-vk[10];
      vXmarg[24,5]:=vk[24]-vk[11];
      vXmarg[25,5]:=vk[25]-vk[13];
     end;
   end;
```

```
    for Xmen:=26 to 30 do
     begin
      res:=elevX-i;
      if Xmen=res then vXmarg[Xmen,res]:=0
      else vXmarg[Xmen,res]:=vk[Xmen]-vk[i+1];
     end;
    vXmarg[31,i]:=vk[31]-vk[31-i];
    for Xmen:=1 to cXn do
     begin
      fi[Xmen]:=fi[Xmen-1]+(divX[Xmen]*vXmarg[Xmen,i]);
     end;
   end;
 end;
end;
elevX:=0;
Xmen:=0;
clrscr;
gotoxy(18,1);writeln('Cuadro de valores de Shapley Calculados');
gotoxy(18,2);writeln('ÉÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍËÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍ»');
gotoxy(18,3);writeln('º  # Jugador º  Valor Shapley º');
gotoxy(18,4);writeln('º            º                º');
textcolor(15);
case Xplayers of
 2: begin
    for Xmen:=1 to Xplayers do
     begin
      gotoxy(18,5+j);writeln('         º ',Xmen,'      º  ',fi[Xmen+1]:5:2,'      º');
     end;
    end;
 3: begin
    for i:=1 to Xplayers do
     begin
      for Xmen:=1 to cXn do
       begin
        fi[Xmen]:=fi[Xmen-1]+(divX[Xmen]*vXmarg[Xmen,i]);
        if Xmen< 7 then write
        else
         begin
          gotoxy(18,5+j);writeln('         º ',i,'      º  ',fi[7]:5:2,'      º');
         end;
       end;
     end;
    end;
```

```
    4: begin
       for i:=1 to Xplayers do
        begin
         for Xmen:=1 to cXn do
          begin
           fi[Xmen]:=fi[Xmen-1]+(divX[Xmen]*vXmarg[Xmen,i]);
           if Xmen<15 then write
           else
            begin
             gotoxy(18,5+j);writeln('              ° ',i,'       ° ',fi[15]:5:2,'     °');
            end;
          end;
        end;
      end;
   5: begin
      for i:=1 to Xplayers do
       begin
        for Xmen:=1 to cXn do
         begin
          fi[Xmen]:=fi[Xmen-1]+(divX[Xmen]*vXmarg[Xmen,i]);
          if Xmen<31 then write
          else
           begin
            gotoxy(18,5+j);writeln('              ° ',i,'       ° ',fi[31]:5:2,'     °');
           end;
         end;
       end;
     end;
  end;
  writeln('              ÈÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÊÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍ¼');
 gotoxy(18,23);writeln(' ~Acci¢n:~ Presione una tecla para Terminar ...');
 repeat until keypressed;
end;
(*********************** Cardinalidades ****************)
procedure coalX2(Xplayers:integer);
var
 c:char; bbb:boolean; j,i,h:integer;
(************ interna en coalX2 Combinaciones de n en k ***************)
function ComboX(Xcombi:longint):longint;
begin
 kXm:=kmenos1(kmu);
 nmink:=nMenoXk(nMenK);
 nFX:=factorX(Xplayers);
```

```
 for Xmen:=1 to cXn do
  begin
   multX:=km1[Xmen]*nmk[Xmen];
   divX[Xmen]:=multX/nFX;
  end;
 Xmen:=0;
 j:=0;
end;
(*********************** Shapley 4J ********************)
procedure cX4;
begin
 cnK:=comboX(Xcombi);
 j:=0;
 textcolor(0);
 While Xmen<(cXn-Xplayers) do
  begin
   inc(Xmen);
    if (j mod 12 = 0) then
     begin
      if Xmen>1 then
       begin
        writeln('Mas datos...Cualquier tecla Continua');
        c:=readkey;
        j:=0;
       end;
     end;
   for Xmen:=5 to 10 do
    begin
     k[Xmen]:=2;
     case Xmen of
      5: begin
          textcolor(0);
          writeln(' {1,',Xmen-3,'}            ',k[Xmen]);
          gotoxy(20,6+Xmen);writeln(' ',divX[Xmen]:5:2);
          repeat
           textcolor(11);gotoxy(32,i+Xmen);write(Xmen,'    v(',Xmen,')=');
           readln (valX);
           val(valX,vK[Xmen],codigo);
           if codigo=1 then
            begin
             write(^g,'-Error!.De nuevamente los datos');delay(3000);
             gotoxy(32,wherey);write('                                    ');
            end;
```

```
      until codigo=0;
     end;
   6: begin
      textcolor(0);
      writeln(' {1,',Xmen-3,'}            ',k[Xmen]);
      gotoxy(20,6+Xmen);writeln(' ',divX[Xmen]:5:2);
      repeat
       textcolor(11);gotoxy(32,i+Xmen);write(Xmen,'    v(',Xmen,')=');
       readln(valX);
       val(valX,vK[Xmen],codigo);
       if codigo=1 then
        begin
         write(^g,'-Error!.De nuevamente los datos');delay(3000);
         gotoxy(32,wherey);write('                                        ');
        end;
      until codigo=0;
     end;
   7: begin
      textcolor(0);
      writeln(' {1,',Xmen-3,'}            ',k[Xmen]);
      gotoxy(20,6+Xmen);writeln(' ',divX[Xmen]:5:2);
      repeat
       textcolor(11);gotoxy(32,i+Xmen);write(Xmen,'    v(',Xmen,')=');
       readln(valX);
       val(valX,vK[Xmen],codigo);
       if codigo=1 then
        begin
         write(^g,'-Error!.De nuevamente los datos');delay(3000);
         gotoxy(32,wherey);write('                                        ');
        end;
      until codigo=0;
     end;
   8: begin
      textcolor(0);
      writeln(' {2,',Xmen-5,'}            ',k[Xmen]);
      gotoxy(20,6+Xmen);writeln(' ',divX[Xmen]:5:2);
      repeat
       textcolor(11);gotoxy(32,i+Xmen);write(Xmen,'    v(',Xmen,')=');
       readln(valX);
       val(valX,vK[Xmen],codigo);
       if codigo=1 then
        begin
         write(^g,'-Error!.De nuevamente los datos');delay(3000);
```

```
      gotoxy(32,wherey);write('                                   ');
     end;
    until codigo=0;
   end;
 9: begin
    textcolor(0);
    writeln(' {2,',Xmen-5,'}            ',k[Xmen]);
    gotoxy(20,6+Xmen);writeln(' ',divX[Xmen]:5:2);
    repeat
    textcolor(11);gotoxy(32,i+Xmen);write(Xmen,'    v(',Xmen,')=');
    readln(valX);
    val(valX,vK[Xmen],codigo);
    if codigo=1 then
     begin
      write(^g,'-Error!.De nuevamente los datos');delay(3000);
      gotoxy(32,wherey);write('                                   ');
     end;
    until codigo=0;
   end;
 10: begin
    textcolor(0);
    writeln(' {2,',Xmen-5,'}            ',k[Xmen]);
    gotoxy(20,6+Xmen);writeln(' ',divX[Xmen]:5:2);
    repeat
     textcolor(11);gotoxy(32,i+Xmen);write(Xmen,'   v(',Xmen,')=');
     readln(valX);
     val(valX,vK[Xmen],codigo);
     if codigo=1 then
      begin
       write(^g,'-Error!.De nuevamente los datos');delay(3000);
       gotoxy(32,wherey);write('                                   ');
      end;
    until codigo=0;
   end;
 end;
end;
for Xmen:=11 to 14 do
 begin
  k[Xmen]:=3;
  case Xmen of
   11: begin
      textcolor(0);
      writeln(' {1,2,',Xmen-8,'}           ',k[Xmen]);
```

```
        gotoxy(20,6+Xmen);writeln(' ',divX[Xmen]:5:2);
        repeat
         textcolor(11);gotoxy(32,i+Xmen);write(Xmen,'   v(',Xmen,')=');
         readln(valX);
         val(valX,vK[Xmen],codigo);
         if codigo=1 then
          begin
           write(^g,'-Error!.De nuevamente los datos');delay(3000);
           gotoxy(32,wherey);write('                                    ');
         end;
       until codigo=0;
      end;
    12: begin
       textcolor(0);
       writeln(' {1,2,',Xmen-8,'}          ',k[Xmen]);
       gotoxy(20,6+Xmen);writeln(' ',divX[Xmen]:5:2);
       repeat
        textcolor(11);gotoxy(32,i+Xmen);write(Xmen,'   v(',Xmen,')=');
        read(valX);
        val(valX,vK[Xmen],codigo);
        if codigo=1 then
         begin
          write(^g,'-Error!.De nuevamente los datos');delay(3000);
          gotoxy(32,wherey);write('                                    ');
        end;
      until codigo=0;
     end;
   13: begin
      textcolor(0);
      write(' {1,3,',Xmen-9,'}          ',k[Xmen]);
      gotoxy(20,6+Xmen);writeln(' ',divX[Xmen]:5:2);
      repeat
       textcolor(11);gotoxy(32,i+Xmen);write(Xmen,'   v(',Xmen,')=');
       readln(valX);
       val(valX,vK[Xmen],codigo);
       if codigo=1 then
        begin
         write(^g,'-Error!.De nuevamente los datos');delay(3000);
         gotoxy(32,wherey);write('                                    ');
       end;
     until codigo=0;
    end;
  14: begin
```

```
        textcolor(0);
        write(' {2,3,',Xmen-10,'}          ',k[Xmen]);
        gotoxy(20,6+Xmen);writeln(' ',divX[Xmen]:5:2);
        repeat
         textcolor(11);gotoxy(32,i+Xmen);write(' ',Xmen,'   v(',Xmen,')=');
         readln(valX);
         val(valX,vK[Xmen],codigo);
         if codigo=1 then
          begin
           write(^g,'-Error!.De nuevamente los datos');delay(3000);
           gotoxy(32,wherey);write('                          ');
          end;
        until codigo=0;
       end;
    end;
   end;
   textcolor(0);
   k[15]:=Xplayers;
   write(' {',Xmen-13,',',Xmen-12,',',Xmen-11,',',Xmen-10,'}        ',k[15]);
   inc(j);
   gotoxy(20,6+Xmen);writeln(' ',divX[15]:5:2);
   repeat
    textcolor(11);gotoxy(32,i+Xmen);write(' ',15,'   v(',15,')=');
    readln(valX);
    val(valX,vK[15],codigo);
    if codigo=1 then
     begin
      write(^g,'-Error!.De nuevamente los datos');delay(3000);
      gotoxy(32,wherey);write('                          ');
     end;
   until codigo=0;
  end;
end;
(*********************** Shapley 5J ********************)
procedure cX5;
begin
 cnK:=comboX(Xcombi);
 Xmen:=0;
 j:=0;
 textcolor(0);
 While Xmen<(cXn-Xplayers) do
  begin
   inc(Xmen);
```

```
    if(j mod 12 = 0) then
     begin
      if Xmen>1 then
       begin
        writeln('Mas datos...Cualquier tecla Continua');
        c:=readkey;
       j:=0;
      end;
    end;
for Xmen:=6 to 15 do
 begin
  k[Xmen]:=2;
  case Xmen of
   6: begin
       textcolor(0);
       writeln(' {1,',Xmen-4,'}          ',k[Xmen]);
       gotoxy(20,6+Xmen);writeln(' ',divX[Xmen]:5:2);
       repeat
        textcolor(11);gotoxy(32,i+Xmen);write(Xmen,'    v(',Xmen,')=');
        readln(valX);
        val(valX,vK[Xmen],codigo);
        if codigo=1 then
         begin
          write(^g,'-Error!.De nuevamente los datos');delay(3000);
          gotoxy(32,wherey);write('                                          ');
         end;
      until codigo=0;
     end;
 7: begin
     textcolor(0);
     writeln(' {1,',Xmen-4,'}          ',k[Xmen]);
     gotoxy(20,6+Xmen);writeln(' ',divX[Xmen]:5:2);
     repeat
      textcolor(11);gotoxy(32,i+Xmen);write(Xmen,'    v(',Xmen,')=');
      readln(valX);
      val(valX,vK[Xmen],codigo);
      if codigo=1 then
       begin
        write(^g,'-Error!.De nuevamente los datos');delay(3000);
        gotoxy(32,wherey);write('                                          ');
       end;
    until codigo=0;
  end;
```

```
 8: begin
     textcolor(0);
     writeln(' {1,',Xmen-4,'}            ',k[Xmen]);
     gotoxy(20,6+Xmen);writeln(' ',divX[Xmen]:5:2);
     repeat
      textcolor(11);gotoxy(32,i+Xmen);write(Xmen,'    v(',Xmen,')=');
      readln(valX);
      val(valX,vK[Xmen],codigo);
      if codigo=1 then
       begin
        write(^g,'-Error!.De nuevamente los datos');delay(3000);
        gotoxy(32,wherey);write('                                    ');
       end;
    until codigo=0;
   end;
 9: begin
     textcolor(0);
     writeln(' {1,',Xmen-4,'}            ',k[Xmen]);
     gotoxy(20,6+Xmen);writeln(' ',divX[Xmen]:5:2);
     repeat
      textcolor(11);gotoxy(32,i+Xmen);write(Xmen,'    v(',Xmen,')=');
      readln(valX);
      val(valX,vK[Xmen],codigo);
      if codigo=1 then
       begin
        write(^g,'-Error!.De nuevamente los datos');delay(3000);
        gotoxy(32,wherey);write('                                    ');
       end;
    until codigo=0;
   end;
10: begin
     textcolor(0);
     writeln(' {2,',Xmen-7,'}            ',k[Xmen]);
     gotoxy(20,6+Xmen);writeln(' ',divX[Xmen]:5:2);
    repeat
     textcolor(11);gotoxy(32,i+Xmen);write(Xmen,'   v(',Xmen,')=');
     readln(valX);
     val(valX,vK[Xmen],codigo);
     if codigo=1 then
      begin
       write(^g,'-Error!.De nuevamente los datos');delay(3000);
       gotoxy(32,wherey);write('                                    ');
      end;
```

```
    until codigo=0;
    end;
 11: begin
     textcolor(0);
     write(' {2,',Xmen-7,'}          ',k[Xmen]);
     gotoxy(20,6+Xmen);writeln(' ',divX[Xmen]:5:2);
     repeat
      textcolor(11);gotoxy(32,i+Xmen);write(Xmen,'   v(',Xmen,')=');
      readln(valX);
      val(valX,vK[Xmen],codigo);
      if codigo=1 then
       begin
        write(^g,'-Error!.De nuevamente los datos');delay(3000);
        gotoxy(32,wherey);write('                                    ');
       end;
     until codigo=0;
    end;
 12: begin
     textcolor(0);
     write(' {2,',Xmen-7,'}          ',k[Xmen]);
     gotoxy(20,6+Xmen);writeln(' ',divX[Xmen]:5:2);
     repeat
      textcolor(11);gotoxy(32,i+Xmen);write(Xmen,'   v(',Xmen,')=');
      readln(valX);
      val(valX,vK[Xmen],codigo);
      if codigo=1 then
       begin
        write(^g,'-Error!.De nuevamente los datos');delay(3000);
        gotoxy(32,wherey);write('                                    ');
       end;
     until codigo=0;
    end;
 13: begin
     textcolor(0);
     write(' {3,',Xmen-9,'}          ',k[Xmen]);
     gotoxy(20,6+Xmen);writeln(' ',divX[Xmen]:5:2);
     repeat
      textcolor(11);gotoxy(32,i+Xmen);write(Xmen,'   v(',Xmen,')=');
      readln(valX);
      val(valX,vK[Xmen],codigo);
      if codigo=1 then
       begin
        write(^g,'-Error!.De nuevamente los datos');delay(3000);
```

```
        gotoxy(32,wherey);write('                                    ');
       end;
      until codigo=0;
     end;
   14: begin
      textcolor(0);
      write(' {3,',Xmen-9,'}           ',k[Xmen]);
      gotoxy(20,6+Xmen);writeln(' ',divX[Xmen]:5:2);
      repeat
       textcolor(11);gotoxy(32,i+Xmen);write(' ',Xmen,'   v(',Xmen,')=');
       readln(valX);
       val(valX,vK[Xmen],codigo);
       if codigo=1 then
        begin
         write(^g,'-Error!.De nuevamente los datos');delay(3000);
         gotoxy(32,wherey);write('                                    ');
        end;
      until codigo=0;
     end;
   15: begin
      textcolor(0);
      write(' {4,',Xmen-10,'}           ',k[Xmen]);
      gotoxy(20,6+Xmen);writeln(' ',divX[Xmen]:5:2);
      repeat
       textcolor(11);gotoxy(32,i+Xmen);write(' ',Xmen,'   v(',Xmen,')=');
       readln(valX);
       val(valX,vK[Xmen],codigo);
       if codigo=1 then
        begin
         write(^g,'-Error!.De nuevamente los datos');delay(3000);
         gotoxy(32,wherey);write('                                    ');
        end;
      until codigo=0;
     end;
 end;
end;
for Xmen:=16 to 25 do
 begin
  k[Xmen]:=3;
  case Xmen of
   16: begin
      textcolor(0);
      write(' {1,2,',Xmen-13,'}          ',k[Xmen]);
```

```
      gotoxy(20,6+Xmen);writeln(' ',divX[Xmen]:5:2);
      repeat
       textcolor(11);gotoxy(32,i+Xmen);write(' ',Xmen,'   v(',Xmen,')=');
       readln(valX);
       val(valX,vK[Xmen],codigo);
       if codigo=1 then
        begin
         write(^g,'-Error!.De nuevamente los datos');delay(3000);
         gotoxy(32,wherey);write('                                  ');
        end;
      until codigo=0;
     end;
  17: begin
      textcolor(0);
      write(' {1,2,',Xmen-13,'}          ',k[Xmen]);
      gotoxy(20,6+Xmen);writeln(' ',divX[Xmen]:5:2);
      repeat
       textcolor(11);gotoxy(32,i+Xmen);write(' ',Xmen,'   v(',Xmen,')=');
       readln(valX);
       val(valX,vK[Xmen],codigo);
       if codigo=1 then
        begin
         write(^g,'-Error!.De nuevamente los datos');delay(3000);
         gotoxy(32,wherey);write('                                  ');
        end;
      until codigo=0;
      textcolor(0);
     end;
 18: begin
     write(' {1,2,',Xmen-13,'}          ',k[Xmen]);
     gotoxy(20,6+Xmen);writeln(' ',divX[Xmen]:5:2);
     repeat
      textcolor(11);gotoxy(32,i+Xmen);write(' ',Xmen,'   v(',Xmen,')=');
      readln(valX);
      val(valX,vK[Xmen],codigo);
      if codigo=1 then
       begin
        write(^g,'-Error!.De nuevamente los datos');delay(3000);
        gotoxy(32,wherey);write('                                  ');
       end;
     until codigo=0;
     textcolor(0);
    end;
```

```
19: begin
    write(' {1,3,',Xmen-15,'}        ',k[Xmen]);
    gotoxy(20,6+Xmen);writeln(' ',divX[Xmen]:5:2);
    repeat
     textcolor(11);gotoxy(32,i+Xmen);write(' ',Xmen,'   v(',Xmen,')=');
     readln(valX);
     val(valX,vK[Xmen],codigo);
     if codigo=1 then
      begin
       write(^g,'-Error!.De nuevamente los datos');delay(3000);
       gotoxy(32,wherey);write('                              ');
      end;
    until codigo=0;
    textcolor(0);
   end;
20: begin
    write(' {1,3,',Xmen-15,'}        ',k[Xmen]);
    gotoxy(20,6+Xmen);writeln(' ',divX[Xmen]:5:2);
    repeat
     textcolor(11);gotoxy(32,i+Xmen);write(' ',Xmen,'   v(',Xmen,')=');
     readln(valX);
     val(valX,vK[Xmen],codigo);
     if codigo=1 then
      begin
       write(^g,'-Error!.De nuevamente los datos');delay(3000);
       gotoxy(32,wherey);write('                              ');
      end;
    until codigo=0;
    textcolor(0);
   end;
21: begin
    write(' {1,4,',Xmen-16,'}        ',k[Xmen]);
    gotoxy(20,6+Xmen);writeln(' ',divX[Xmen]:5:2);
    repeat
     textcolor(11);gotoxy(32,i+Xmen);write(' ',Xmen,'   v(',Xmen,')=');
     readln(valX);
     val(valX,vK[Xmen],codigo);
     if codigo=1 then
      begin
       write(^g,'-Error!.De nuevamente los datos');delay(3000);
       gotoxy(32,wherey);write('                              ');
      end;
    until codigo=0;
```

```
      textcolor(0);
     end;
  22: begin
      write(' {2,3,',Xmen-17,'}          ',k[Xmen]);
      gotoxy(20,6+Xmen);writeln(' ',divX[Xmen]:5:2);
      repeat
       textcolor(11);gotoxy(32,i+Xmen);write(' ',Xmen,'   v(',Xmen,')=');
       readln(valX);
       val(valX,vK[Xmen],codigo);
       if codigo=1 then
        begin
         write(^g,'-Error!.De nuevamente los datos');delay(3000);
         gotoxy(32,wherey);write('                              ');
        end;
      until codigo=0;
      textcolor(0);
     end;
  23: begin
      write(' {2,3,',Xmen-19,'}          ',k[Xmen]);
      gotoxy(20,6+Xmen);writeln(' ',divX[Xmen]:5:2);
      repeat
       textcolor(11);gotoxy(32,i+Xmen);write(' ',Xmen,'   v(',Xmen,')=');
       readln(valX);
       val(valX,vK[Xmen],codigo);
       if codigo=1 then
        begin
         write(^g,'-Error!.De nuevamente los datos');delay(3000);
         gotoxy(32,wherey);write('                              ');
        end;
      until codigo=0;
      textcolor(0);
     end;
  24: begin
      write(' {2,4,',Xmen-19,'}          ',k[Xmen]);
      gotoxy(20,6+Xmen);writeln(' ',divX[Xmen]:5:2);
      repeat
       textcolor(11);gotoxy(32,i+Xmen);write(' ',Xmen,'   v(',Xmen,')=');
       readln(valX);
       val(valX,vK[Xmen],codigo);
       if codigo=1 then
        begin
         write(^g,'-Error!.De nuevamente los datos');delay(3000);
         gotoxy(32,wherey);write('                              ');
```

```
        end;
      until codigo=0;
      textcolor(0);
     end;
  25: begin
      write(' {3,4,',Xmen-20,'}          ',k[Xmen]);
      gotoxy(20,6+Xmen);writeln(' ',divX[Xmen]:5:2);
      repeat
       textcolor(11);gotoxy(32,i+Xmen);write(' ',Xmen,'   v(',Xmen,')=');
       readln(valX);
       val(valX,vK[Xmen],codigo);
       if codigo=1 then
        begin
         write(^g,'-Error!.De nuevamente los datos');delay(3000);
         gotoxy(32,wherey);write('                              ');
        end;
      until codigo=0;
      textcolor(0);
     end;
  end;
 end;
 for Xmen:=26 to 30 do
  begin
   k[Xmen]:=4;
   case Xmen of
    26: begin
        write(' {1,2,3,',Xmen-22,'}        ',k[Xmen]);
        gotoxy(20,6+Xmen);writeln(' ',divX[Xmen]:5:2);
        repeat
         textcolor(11);gotoxy(32,i+Xmen);write(' ',Xmen,'   v(',Xmen,')=');
         readln(valX);
         val(valX,vK[Xmen],codigo);
         if codigo=1 then
          begin
           write(^g,'-Error!.De nuevamente los datos');delay(3000);
           gotoxy(32,wherey);write('                              ');
          end;
         until codigo=0;
        textcolor(0);
       end;
    27: begin
        write(' {1,2,3,',Xmen-22,'}        ',k[Xmen]);
        gotoxy(20,6+Xmen);writeln(' ',divX[Xmen]:5:2);
```

```
      repeat
       textcolor(11);gotoxy(32,i+Xmen);write(' ',Xmen,'   v(',Xmen,')=');
       readln(valX);
       val(valX,vK[Xmen],codigo);
       if codigo=1 then
       begin
        write(^g,'-Error!.De nuevamente los datos');delay(3000);
        gotoxy(32,wherey);write('                                    ');
       end;
      until codigo=0;
      textcolor(0);
     end;
 28: begin
      write(' {1,2,4,',Xmen-23,'}        ',k[Xmen]);
      gotoxy(20,6+Xmen);writeln(' ',divX[Xmen]:5:2);
      repeat
       textcolor(11);gotoxy(32,i+Xmen);write(' ',Xmen,'   v(',Xmen,')=');
       readln(valX);
       val(valX,vK[Xmen],codigo);
       if codigo=1 then
        begin
         write(^g,'-Error!.De nuevamente los datos');delay(3000);
         gotoxy(32,wherey);write('                                    ');
        end;
      until codigo=0;
      textcolor(0);
     end;
 29: begin
      write(' {1,3,4,',Xmen-24,'}        ',k[Xmen]);
      gotoxy(20,6+Xmen);writeln(' ',divX[Xmen]:5:2);
      repeat
       textcolor(11);gotoxy(32,i+Xmen);write(' ',Xmen,'   v(',Xmen,')=');
       readln(valX);
       val(valX,vK[Xmen],codigo);
       if codigo=1 then
        begin
         write(^g,'-Error!.De nuevamente los datos');delay(3000);
         gotoxy(32,wherey);write('                                    ');
        end;
      until codigo=0;
      textcolor(0);
     end;
 30: begin
```

```
        write(' {2,3,4,',Xmen-25,'}       ',k[Xmen]);
        gotoxy(20,6+Xmen);writeln(' ',divX[Xmen]:5:2);
        repeat
         textcolor(11);gotoxy(32,i+Xmen);write(' ',Xmen,'   v(',Xmen,')=');
         readln(valX);
         val(valX,vK[Xmen],codigo);
         if codigo=1 then
          begin
           write(^g,'-Error!.De nuevamente los datos');delay(3000);
           gotoxy(32,wherey);write('                                    ');
          end;
         until codigo=0;
         textcolor(0);
        end;
    end;
   end;
   k[31]:=Xplayers;
   write(' {',Xmen-29,',',Xmen-28,',',Xmen-27,',',Xmen-26,',',Xmen-25,'}     ',k[31]);
   inc(j);
   gotoxy(20,6+Xmen);writeln(' ',divX[31]:5:2);
   repeat
    textcolor(11);gotoxy(32,i+Xmen);write(' 31   v(31)=');
    readln(valX);
    val(valX,vK[31],codigo);
    if codigo=1 then
     begin
      write(^g,'-Error!.De nuevamente los datos');delay(3000);
      gotoxy(32,wherey);write('                                    ');
     end;
   until codigo=0;
  end;
 end;
 begin (**** coalX2*****)
  clrscr;
  elevX:=0;
  elevX:=elevadoX(Xplayers);
  textcolor(4);
  writeln;
  gotoxy(25,1);writeln('Valor de Shapley para ',Xplayers,' jugadores');
  gotoxy(3,6);writeln('Coalici¢n     ³K³');
  gotoxy(22,6);writeln('nCk');
  textcolor(0);
  gotoxy(32,5);writeln(' Montos  ');
```

```
 gotoxy(32,6);writeln('#    v(K)');
 if c<>#27 then
 i:=6;
 textcolor(0);
 for Xmen:=1 to Xplayers do
  begin
   if Xmen in [1..Xplayers] then
    begin
     k[Xmen]:=1;
     gotoxy(3,Xmen+6);writeln(' {',Xmen,'}            ',k[Xmen]);
    end;
  end;
case Xplayers of
 2: begin
     textcolor(0);
     k[3]:=2;
     gotoxy(3,9);writeln(' {1,2}          ',K[3]);
    end;
 3:begin
    textcolor(0);
    for Xmen:=4 to 6 do
     begin
      k[Xmen]:=2;
      if Xmen=6 then write
      else begin
           for j:=1 to 3 do
            begin
             if j=1 then writeln(' {',j,',',Xmen-2,'}           ',K[Xmen]);
            end;
           if (Xmen-3)=1 then write
           else writeln(' {',Xmen-3,',',Xmen-2,'}           ',k[Xmen]);
          end;
     end;
    textcolor(0);
    k[7]:=Xplayers;
    writeln(' {',Xmen-5,',',Xmen-4,',',Xmen-3,'}          ',k[7]);
   end;
 4: begin
     for Xmen:=5 to 10 do
      begin
       k[Xmen]:=2;
      end;
     for Xmen:=11 to 14 do
```

```
    begin
     k[Xmen]:=3;
    end;
   k[15]:=Xplayers;
  end;
 5: begin
   for Xmen:=6 to 15 do
    begin
     k[Xmen]:=2;
    end;
   for Xmen:=16 to 25 do
    begin
     k[Xmen]:=3;
    end;
   for Xmen:=26 to 30 do
    begin
     k[Xmen]:=4;
    end;
   k[31]:=Xplayers;
  end;
end;
 cnK:=comboX(Xcombi);
 for Xmen:=1 to cXn do
  begin
   vK[Xmen]:=0;
  end;
if Xplayers in [2,3] then
 begin
  cnK:=comboX(Xcombi);
  Xmen:=0;
  j:=0;
  textcolor(0);
  While Xmen<cXn do
   begin
   inc(Xmen);
   gotoxy(20,7);writeln(' ',divX[Xmen]:5:2);
    if (j mod 12 = 0) then
     begin
      if Xmen>1 then
       begin
        writeln('Mas datos...Cualquier tecla Continua');
        c:=readkey;
        j:=0;
```

```
      end;
     end;
  inc(j);
  gotoxy(20,6+Xmen);writeln(' ',divX[Xmen]:5:2);
  repeat
   textcolor(11);gotoxy(32,i+Xmen);write(Xmen,'    v(',Xmen,')=');
   readln(valX);
   val(valX,vK[Xmen],codigo);
   if codigo=1 then
    begin
     write(^g,'-Error!.De nuevamente los datos');delay(3000);
     gotoxy(32,wherey);write('                                     ');
    end;
 until codigo=0;
 end;
end
else if Xplayers in [4,5] then
 begin
  cnK:=comboX(Xcombi);
  Xmen:=0;
  j:=0;
  textcolor(0);
  While Xmen<Xplayers do
   begin
   inc(Xmen);
    if (j mod 12 = 0) then
     begin
      if Xmen>1 then
       begin
        writeln('Mas datos...Cualquier tecla Continua');
        c:=readkey;
       j:=0;
      end;
    end;
inc(j);
gotoxy(20,6+Xmen);writeln(' ',divX[Xmen]:5:3);
repeat
 textcolor(11);gotoxy(32,i+Xmen);write(Xmen,'    v(',Xmen,')=');
 readln(valX);
 val(valX,vK[Xmen],codigo);
 if codigo=1 then
  begin
   write(^g,'-Error!.De nuevamente los datos');delay(3000);
```

```
   gotoxy(32,wherey);write('                                        ');
  end;
 until codigo=0;
 end;
  case Xplayers of
   4: cX4;
   5: cX5;
  end;
 end;
 gotoxy(25,i+Xmen+2);writeln('" Los datos son correctos (s/n) ?');
 readln(respX);
 gotoxy(25,wherey-1);write('                                        ');
 Xvalm:=valXmarg(vXm);
end;

(*********************** Recibe el n£mero de jugadores **************)
procedure Cualn(r:real);
var
 k:integer; code:byte; bb,crear:boolean; X:vectorzito;
begin
 textcolor(11);
 textbackground(6);
 gotoxy(1,1);  write('ÉÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍ»');
 gotoxy(1, 2); write('º "Cuantos jugadores participan en el juego?    º');
 gotoxy(1,3);  write('ÈÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍ¼');
 repeat
 gotoxy(50,3); read(Xplayers);
 until Xplayers in [0..5];
 textbackground(3);
 textcolor(0);
 case Xplayers of
  0: begin
     clrscr;
     textbackground(6);
     textcolor(11);
     gotoxy(1,1);  write('ÉÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍ»');
     gotoxy(1, 2); write(^g,^g,'ºSe necesitan 2 o m s jugadores para iniciar        º');
     gotoxy(1,3);  write('ÈÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍ¼');
     gotoxy(12,4); write(' Cualquier tecla continua ...');
     c:=readkey;
     if c=Esc then exit;
    end;
  1: begin
```

```
      clrscr;
      textbackground(6);
      textcolor(11);
      gotoxy(1,1);  write('ÉÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍ»');
      gotoxy(1, 2); write(^g,^g,'ºSe necesitan 2 o m s jugadores para iniciar       º');
      gotoxy(1,3);  write('ÈÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍ¼');
      gotoxy(12,4); write(' Cualquier tecla continua ...');
      repeat until keypressed;
      c:=readkey;
      if c=Esc then exit;
     end;
  2: coalX2(Xplayers);
  3: coalX2(Xplayers);
  4: coalX2(Xplayers);
  5: coalX2(Xplayers);
 end;
 X[1]:=Xplayers;
end;
begin {******** principal*******}
 clrscr;
 textmode(bw80);
 Xplayers:=0;
 valorX:=0;
 X[1]:=0;
 c:=' ';
 clrscr;
 textbackground(7);
 textcolor(9);
 gotoxy(1,2);
 for i:=1 to 1840 do write(#177);
 for i:=1 to 80 do
  begin
   gotoxy(i,1);write(' ');
   gotoxy(i,24);write(' ');
  end;
 window(1,1,80,24);
 textcolor(4);
 gotoxy(28,1);writeln('C lculo de los Valores de Shapley');
 gotoxy(1,24);write(' Acci¢n: ');
 gotoxy(59,24);write('³ Esc 2 veces -Salir');
 textcolor(0);gotoxy(12,24);write(' Introduzca un valor entre 2 y 5');
 while c<> Esc do
 begin
```

```
 window(2,2,80,23);
 textcolor(0);
 if c<>Esc then
 begin
  cualn(r);
  c:=readkey;
  if c=Esc then exit;
 end
 else
 begin
  clrscr;
  textbackground(7);
  textcolor(9);
  gotoxy(1,2);
  for i:=1 to 1840 do write(#177);
  window(1,1,80,25);
  textbackground(0);
  textcolor(7);
  clrscr;
 end;
end;
 textbackground(9);
 textcolor(11);
 gotoxy(12,1);  write('ÉÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍ»');
 gotoxy(12, 2); write('º Consulte el disco anexo para ver el paquete completoº');
 gotoxy(12, 3); write('º este programa s¢lo presenta el valor de Shapley sin º');
 gotoxy(12, 4); write('º ventanas                                             º');
 gotoxy(12,5);  write('ÈÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍ¼');
 gotoxy(12,7);write('Cualquier tecla termina ...');
 repeat until keypressed;
end.
```

A.2. Hoja de cálculo para los Valores de Shapley

La hoja de cálculo fue escrita en excel 5, se expone a continuación para que usted la introduzca. La hoja es para dos jugadores. Para juegos de 2 a 5 jugadores consulte la aplicación en el disco anexo (Shapley.XLS)

En la columna A, renglón 1 ponga el título *Jugador*.

En B1, escriba *Coalición K*; en B2, B3 y B4 *coloque los números {1},{2} y {1,2} respectivamente*

C1.Escriba *Cardinalidad de K*, en C2,C3 y C4 *coloque los números 1,1y2 respectivamente.*

D1.Escriba Combinaciones, de D2 ponga la fórmula :

= (fact($c2-1) * fact($a $2-$c$2))/fact($a$2)) copie el contenido de las celdas a D3 y D4

E1.Escriba *Monto v(K),* en E2,E3 y E4 ponga sus montos o llene las celdas de ceros.

F1. Escriba *i=1*,en F2 escriba: *=si($F2<>0,$E2,"-")*, en F3 ponga un guión "-", en F4 copie la fórmula de F2

G1.Escriba *i=2*,en G2 ponga un guión "-",en G3 y G4 copie la formula de F2

A.3. Problema de Programación Lineal (Núcleo)

MANAGER I

PROGRAM : Linear Programming II

***** PROGRAM OUTPUT *****

Optimal solution is obtained in 5 iterations

Optimal z = 70.00000

Optimal solution in row order

Number	Basis	Solution
1.	x1	38.00000
2.	x2	32.00000
3.	S3	2.00000
4.	S4	8.00000
5.	S5	10.00000
6.	S6	11.00000

F1 LOOK F2 PRINT F3 STORE F4 RERUN F5 EXIT COMMAND

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

LIBROS

1.BACHARACH, M. "*Economics and The Theory Of Games*". The Macmillan Press LTD, 1976, pp. 118-134.

2.BLACKWELL AND GIRSHICK, M. A."*Theory Games And Statistical Decisions*". John Wiley & Sons, 1954, pp. 1-60.

3.BURGER, E. and FREUND J. "*Introduction to The Theory of Games*". Prentice Hall , 1963, pp. 156-193.

4.CANZONERI, M. B. AND DALE W. H. "*Monetary Policy in Independent Economies: A Game Theoretic Approach*". Cambridge Massachusetts, 1991.

5.COSS, B.R."*Análisis y Evaluación de Proyectos deInversión*" .Limusa, 1991,pp.61-69

6.DAVIS, M. D."*Introducción a la Teoría de Juegos*". Alianza Universitaria ,1990, pp.173-231.

7.EROLES, G. A. "*Creatividad Efectiva*". Panorama, 1994, pp.132-141,153-168 205-227.

8.EPPEN, G. D. / GOULD, F. J. "*Investigación de operaciones en la ciencia administrativa*". Prentice Hall Hipanoamericana, 1987, pp. 783-785

9.FRIEDMAN, J. "*Teoría de los Juegos con Aplicaciones a la Economía*". Alianza Universitaria 1990, pp. 283-237.

10.FRYER, M. J. "*An Introduction to Linear Programming and Matrix Game Theory*". Edward Arnold, 1978, pp. 34-39.

11.GALE, D. "*The Theory of Linear Economic Models*". Mc Graw Hill, 1960.

12.GERES Y GRIJALVA. "*El Enfoque de Sistemas*". Limusa, 1983, pp. 251-459.

13.GIBBS G. I. "*Handbook of Games and Simulation Exercises*". E. & F. N. Spon Limited, 1974.

14.GUIASU S. AND MALITZA A. "*Coalition and Connection in Games*". Pergamon Press, 1ª Edición, 1980, pp. 10-62.

15.HADLEY, G. "*Probabilidad y estadística una introducción a la teoría de la decisión*". Fondo de Cultura Económica, 1981, pp. 97-142.

16.JONES, A. J. "*Game Theory: Mathematical Models of Conflict*". E. Horwood 1980.

17.KAUFMAN A./ LE GARFF A./ FAURER R. / EUDEBA."*Los Juegos de Empresa*". Alianza Universitaria, 1990, pp. 111-117.

18.LUCE DUNCAN AND RAIFFA HOWARD. "*Games and Decisions*". John Wiley & Sons, 1957.

19.McKINSEY, J."*Introduction to The Theory of Games*".The RAND series, 1960 pp.303-353.

20.MITCHELL, G. "*The Practice of Operational Research*". John Wiley & Sons ,1993.

21.MYERSON, B. R. "*Game Theory: Analysis of Conflict*". Harvard University Press 1991, pp. 415-482.

22.PRAWDA, W. J. "*Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones,Vol.II;Modelos Estocásticos*". Limusa, 2ª Edición, 1994, pp. 725-744.

23.RAIFFA, H. "*The Art and Science of Negotiation*". Harvard Univesity Press, 1982.

24.RIKER, W. H. "*The Theory of Political Coalitions*". Yale University Press, 1962.

25.RIVETT, P. "*Principles of Modeling Building the Construction of Models for Decision Analysis*". John Wiley and Sons, 1972, pp. 15-35.

26.ROSENMÜLLER."*The Theory of Games and Markets*". North Holland, 1960, pp. 215-332, 500-507.

27.SANCHES, S. F. "*Introducción a la Teoría Matemática de los Juegos*". Siglo XXI 1ª Edición, 1993.

28.SCHELLING, C. T. "*The Strategy of Conflict*". Oxford University Press, 1960.

29.SHUBIK, M. "*A Game-Theoretic Approach to Political Economy: Volume 2 of Game Theory in the Social Science*". Cambridge, Massachusetts, 1969.

30.SHUBIK, M. "*Estrategia y Estructura de Mercado*". Omega Barcelona, 1964.

31.SINGLETON, R. R. AND TYNDALL, F. W. "*Games and Programs Mathematics for Modeling*". Freeman and Company, 1974.

32.SZÉP, J. AND FORGÓ, F. "*Introduction to the Theory of Games*". D. Reidel Publishing Company, 1985, pp. 18-84, 249-357.

33.TAHA, H. A. "*Investigación de Operaciones*". Alfaomega, 1991, pp. 204-217.

34.THIE, R. P. "*An Introduction to Linear Programming and Game Theory*". Jhon Wiley and Sons, 2ª Edición, 1988.

35.THOMPSON, G. "*Game Theory*". Mc Graw Hill, 1990.

36.VON NEUMANN, J & MORGENSTERN, O. "*Theory of Games and Economic Behavior*". Princeton University, 1944.

37.WILLOUGHBY, S. S. "*Probabilidad y Estadística*". Publicación Cultural, 12ª segunda reimpresión, 1984, pp. 163-181.

TESIS

38.MORALES, J. M. "*Solución a los Juegos Estadísticos Bipersonales de Suma Cero con Descuento utilizando Programación Dinámica*". Enep Acatlán, UNAM, 1995.

39.TELLEZ, S. R. "*Relación entre la Teoría de Decisiones Estadísticas, la Teoría de los Juegos y la Programación Lineal*". Facultad de Ciencias, UNAM ,1969,pp.18-68.

40.SANTANDER, R.M. "*Fundamento Matemático del juego Tachtli*". Enep Acatlán, UNAM, 1996

DIRECCIONES EN INTERNET

41.hhtp: / / www . c3 . / anl . gov / mega-math /

42.ftp htaha @ fsysb . uark . edu .

APUNTES

43.ARGUELLEZ, T. H. "*Teoría de los juegos*". Enep Acatlán, UNAM, 1994.

44.MUÑOZ, R. J. "*Teoría de los juegos*" . Enep Acatlán, UNAM, 1995.

45.SUAREZ, M. J. L. "*Teoría de los juegos*". Enep Acatlán, UNAM, 1995.

CONFERENCIAS

46.RIES, A. "*Las 22 leyes inmutables del marketing*". Marzo 7, 1996.

REVISTAS

47.DE ARAMBURO, J. y ALMYR GARDORDONI., "*Muy Interesante, Edición especial Juegos*". México: Editora Cinco S.A. y Provenemex S.A. de C.V