



01173

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

**FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

TESIS

**ANALISIS DEL FENOMENO DE LICUEFACCION EN REGIONES PROXIMAS
A UNA PARED EN MOVIMIENTO; LECHOS DE POLIMEROS GRANULARES**

PRESENTADA POR:

JORGE LUIS NAUDE DE LA LLAVE

PARA OBTENER EL GRADO DE:

**MAESTRO EN INGENIERIA
(MECANICA, TERMOFLUIDOS)**

DIRIGIDA POR:

DR. FEDERICO MENDEZ LAVIELLE

Ciudad Universitaria,

Enero de 1997.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

DEDICATORIA:

A la memoria de mi padre Jorge Naude Amparán, quién siempre procuró una buena educación y un buen sustento para mí.

A mi madre María Magdalena de la Llave de bolaños quién me otorgó la vida.

A mi novia Josie Karina (Fatima) Törnquist Mendoza que me ha brindado todo su amor.

A mi abuelita Lupita por todos sus ratos de comprensión y dicha que nos ha brindado.

A la memoria de mi abuelita Ernestina por todos los años que me permitió disfrutar de su alegría.

A la memoria de mi abuelo Miguel Angel.

A mi hermano Miguel Angel por su amistad y cariño.

A mi hermanita Ma. Emilia por dejarnos cuidarla y educarla.

A Araceli y su hijo Israel quienes acompañaron a mi padre sus últimos años.

A mi tía Socorro por brindarme un hogar hermoso y cálido junto con todos sus hijos y nietos.

A todos mis tíos hermanos y primos de la Llave.

A mi maestro Sh. Sefer Dal Muhib Cerrahi Efendi, quién me ha brindado la bendición de una Tariqa al servicio de Dios.

Al Granti Nij Gar Singh Khalsa y su comunidad por brindarme siempre su apoyo.

A todos los miembros de mi pequeña Tariqa.

A Ibrahim Baba por su ayuda y paciente guía como intérprete personal.

A toda la banda de mecánicos (T. Mike, V. Mike, Jorge, Memo, Bernardo y Joelito).

A mis amigos de toda la vida (Tocayo, Javier, El Q, El Queco, Memo y Raúl).

A mis amigos de siempre (Pepo, Sergio y Luis).

A mi amigo Juan Carlos Romero y a toda su linda familia (Carlitos y Tere).

A mi amigo Nestor Luna por su apreciable apoyo durante todo el Posgrado.

NOMENCLATURA :

- Br número de Brinkman, $V_0^2 \nu_0 / (Cp_1 T_m \alpha_1)$;
Cp calor específico a presión constante;
k conductividad térmica;
 L_m entalpía de fusión;
h espesor donde se encuentran confinados el líquido y el sólido;
T temperatura;
b constante de proporcionalidad para la viscosidad;
Pr número de Prandtl;
u velocidad en la coordenada x;
v velocidad en la coordenada y;
x coordenada cartesiana vertical;
y coordenada cartesiana horizontal;
X(t) espesor de la interfase;
t tiempo;
p presión.

Símbolos griegos

- α difusividad térmica;
 β coeficiente de temperatura normalizado;
 ρ densidad;
 τ tiempo adimensional;
 σ espesor adimensional;
 ξ longitud adimensional, referida al líquido;
 η longitud adimensional, referida al sólido;
 ϕ temperatura adimensional para el líquido;
 θ temperatura adimensional para el sólido;
 ϵ número de Stefan, $Cp_1 (T_0 - T_m) / L_m$;

μ viscosidad;
 θ tiempo en la zona interna, $\tau\epsilon$;
 γ relación de conductividad sólido líquido;
 ζ relación entre el calor generado por disipación viscosa y el calor sin efecto viscoso.

Subíndices

l líquido;
s sólido;
o en la pared;
m fusión;
i estado sólido inicial;
R referencia;
c constante;
o, ... n ordenes de perturbación.
g solución global
I en la interfase;

Superíndices

zona interna en el tiempo.

I N D I C E

CAPITULO I.....	1
INTODUCCION.....	1
I. 1. PROCESOS DE EXTRUSION.....	1
I. 1. 1. Partes fundamentales de las extrusoras.....	1
I. 2. TIPOS DE EXTRUSION.....	4
I. 2. a. Extrusión de película delgada.....	4
I. 2. b. Extrusión de láminas.....	4
I. 2. c. Extrusión de cable aislado.....	4
I. 2. c. Extrusión de tubos.....	5
I. 2. c. Extrusión de perfiles.....	5
I. 2. c. Extrusión de recubrimientos.....	5
I. 3. CONSIDERACIONES FISICAS APLICADAS EN LOS PROCESOS DE EXTRUSION.....	5
CAPITULO II.....	9
DEDUCCION DEL MODELO.....	9
II. 1. FORMULACION.....	9
CAPITULO III.....	14
ADIMENSIONALIZACION.....	14
III. 1. ADIMENSIONALIZACION.....	14
CAPITULO IV.....	19
IV. ANALISIS DE PERTURBACION, SOLUCION Y ACOPLAMIENTO.....	19
IV. 1. INTRODUCCION.....	19
IV. 2. PLANTEAMIENTO DE LA SERIE DE PERTURBACION (ZONA EXTERNA).....	20
IV. 3. PLANTEAMIENTO DE LA SERIE DE PERTURBACION (ZONA INTERNA).....	23

IV. 5. <i>ACOPLAMIENTO ASINTOTICO</i>	26
CAPITULO V.....	30
V. RESULTADOS Y CONCLUSIONES.....	30
V. 1. <i>RESULTADOS</i>	30
V. 2. <i>CONCLUSIONES</i>	33
CAPITULO VI.....	36
REFERENCIAS.....	36
APENDICE A.....	37
APENDICE B.....	38

CAPITULO I

INTRODUCCION

I.1. PROCESOS DE EXTRUSION.

El proceso de extrusión de polímeros generalmente consiste en transformar continuamente un material termoplástico en alguna forma determinada. Las formas son muy variadas, destacando entre ellas, las de tubos, láminas, fibras, perfiles y todo tipo de recubrimientos como para cables, papel, etc. Las máquinas extrusoras se usan también para alimentar las máquinas sopladoras. La secuencia es la siguiente Miles [1]:

- a) Plastificación del material granular.
- b) Dosificación del polímero licuado.
- c) Solidificación a la forma y tamaño deseados.
- d) Rolado o corte de las piezas finales.

La extrusora básicamente consiste en un tornillo sinfin de pasos múltiples envuelto por un cilindro calentado (ver fig 1 ref [1]). En un extremo se alimenta el polímero, que se conduce a lo largo del cilindro por medio del tornillo. Mientras se transporta el material, este cambia de sólido a líquido debido al contacto con las paredes calientes y al calor generado por la fricción de la mezcla viscosa. Al final el líquido es forzado a través de un dado a un molde que le da su forma final.

I. 1. 1. *Partes fundamentales de las extrusoras.* La pieza principal en una extrusora es el tornillo, que se diseña para un tipo específico de material. El tornillo se divide en tres secciones fundamentales, cada una con una función particular. La primera, es la de alimentación que se encarga de llevar los granulos desde la boca de alimentación hasta la segunda que es la zona de

compresión. En la zona de compresión cambia el claro entre cuerdas (paso) disminuyéndolo para provocar la compresión del material que en este momento comienza a licuarse. El objetivo de comprimir es expulsar todo el aire hacia la zona de alimentación evitando la porosidad en el material. Por otro lado, la compresión volumétrica así producida, incrementa los esfuerzos en el líquido debido a la velocidad relativa de las superficies del tornillo respecto de la pared fija. Al mejorar la mezcla al mismo tiempo que se genera calor por fricción, se espera tener una distribución uniforme de temperatura en el líquido extrudido. La tercera sección tiene como finalidad homogenizar el líquido para después extruirlo a través de un dado de manera uniforme y continua. El tornillo normalmente es hueco para enfriarlo o calentarlo con agua o vapor, respectivamente.

Al hablar de las contra presiones generadas aguas arriba por la compresión hacia la parte posterior, resulta lógico que si la salida del extrusor estuviera abierta, habría una presión muy pequeña a velocidades normales, ya que el material extruido pasaría libremente. La sola presencia del dado provoca una restricción grande; sin embargo, convencionalmente se suele agregar una placa de orificios finos o gruesos, para evitar cualquier contaminación por partículas no deseadas, que pudiesen producir defectos en la pieza final. Por desgracia, esta placa incrementa las contra presiones, dando como resultado un mayor consumo de energía y una disminución en la potencia de extrusión. Sin embargo la contrapresión es necesaria ya que ayuda a homogenizar el polímero.

Otra factor fundamental es el motor y el sistema mecánico. Debido a la generación de contra presiones es indispensable tener motores que mantengan la velocidad normal de extrusión constante, algunas veces mediante variadores de velocidad hidráulicos o trenes de engranes. De igual forma es necesario el uso de baleros y/o chumaceras de empuje para equilibrar el desplazamiento del

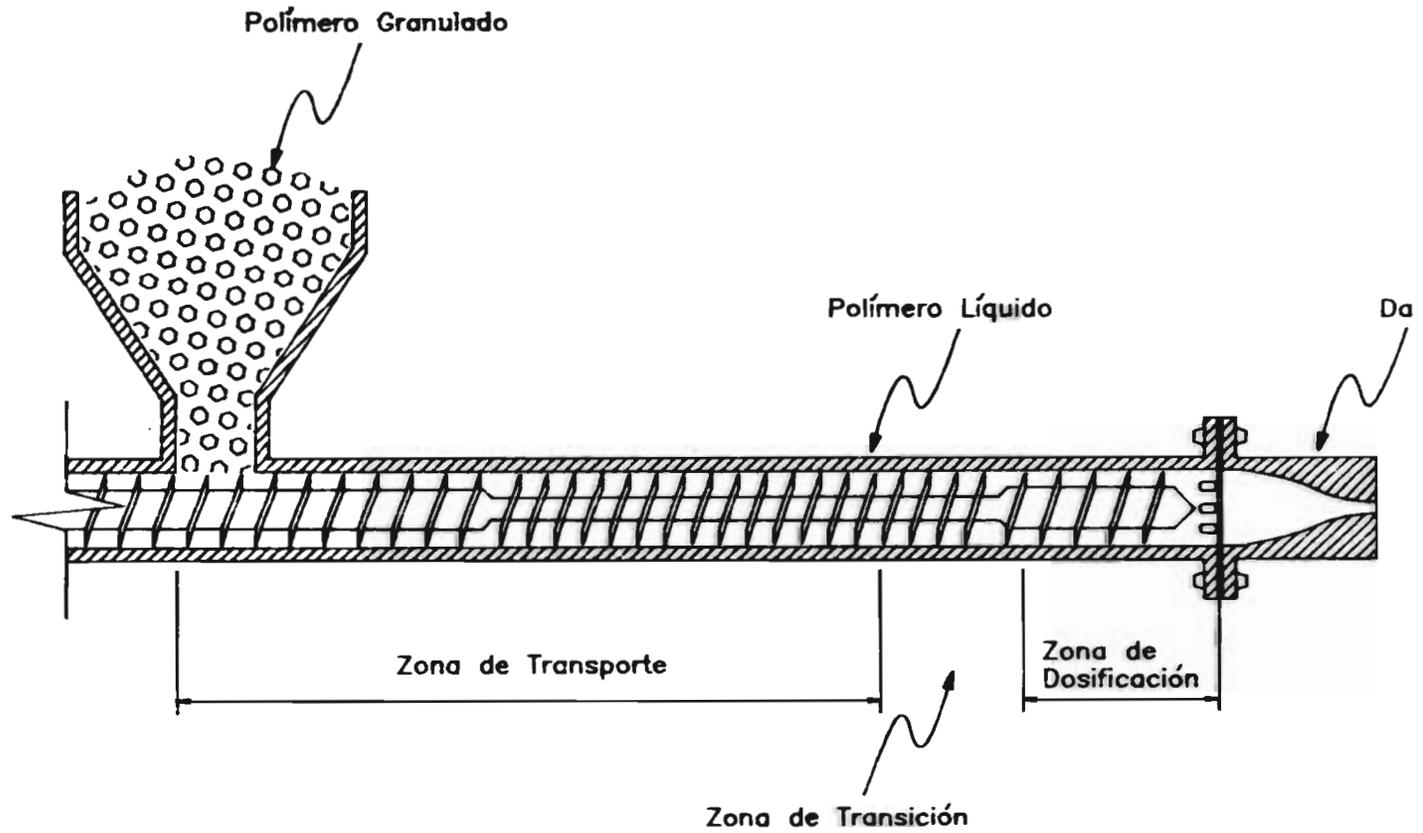


Fig. 1 Arreglo típico de un tornillo de extrusión.

tornillo debido a las fuerzas generadas por las contra presiones.

Otra pieza fundamental es la tolva de alimentación, para ello es esencial que la alimentación del polímero granular ocurra de manera ininterrumpida, mediante algún tipo de vibrador, o un tornillo adicional, etc. En algunas ocasiones, es necesario secar el material, mediante la inyección de aire caliente.

El sistema de calentamiento es fundamental, debido a que un control de temperatura adecuado conduce a una buena calidad en la pieza extruida. Normalmente se suministra el calor externamente ya sea por vapor, aceite o resistencias eléctricas siendo esta última la más común por su facilidad de control e instalación. La otra forma de suministrar calor es internamente. Este calor es producto de la fricción que generan los esfuerzos y la compresión del material. El uso de esta técnica es tan apreciable que algunas de la más modernas máquinas no requieren suministro de calor externo.

En máquinas de baja velocidad o máquinas pequeñas, el calentamiento externo proporciona casi la totalidad del calor necesario, pero de cualquier forma en todos los casos, es indispensable regular la temperatura así como el calentamiento y el enfriamiento deben ser balanceados cuidadosamente. Para esto, se pueden usar tanto agua como aire para enfriar y en ambos casos deberán controlarse automáticamente. El barril se divide en tres a cuatro zonas de calentamiento siendo la de más alta temperatura la de salida.

El enfriamiento en el tornillo es necesario en la parte de compresión ya que esto aumenta la capacidad de compresión e incrementa la calidad de la mezcla.

El dado debe diseñarse de manera que no contenga puntos de estancamiento del material, ya que esto suele provocar defectos superficiales en la pieza final. Existen vapores volátiles en el líquido en el momento de la extrusión, se eliminan mediante perforaciones en el barril o mediante una zona de degasificación en el tornillo, pero en ambos casos se aplica vacío. Otra forma

es mediante un tornillo auxiliar o degasificador.

1. 2. Tipos de extrusión.

I. 2. a. Extrusión de película delgada.

Suele comúnmente utilizarse para piezas de hasta 10mm de espesor, mas de esta medida se conoce como lámina. Existen dos tipos de extrusión de película:

a) Soplado, en este caso el líquido sale por un extremo del dado, y por el otro se inyecta aire a presión. Una vez en el dado el líquido se hace pasar por un mandril y emerge por un dado anular con la forma de un tubo. El tubo se expande como una burbuja por medio de la inyección del aire. Para mantener la calidad del producto final la presión del aire se mantiene cerrando la pieza.

b) Película plana, se extruye el polímero en un dado de sección plana y se enfría al salir casi de inmediato. El enfriamiento se realiza ya sea por medio de un baño de agua o rodillos enfriados internamente, pero en ambos casos el proceso finaliza con un juego de rodillos que enrollan la película.

I. 2. b. Extrusión de láminas.

Se extruye por un dado de sección variable más grande que el de película plana (puede ser un tubo o un cilindro), posteriormente se le lamina por medio de un tren de rodillos de laminación.

I. 2. c. Extrusión de cable aislado.

El extrusor alimenta a un cabezal que tiene una entrada por donde se alimenta el alambre que se quiere recubrir es alimentado. Posteriormente ambos materiales se encuentran en un dado que termina de formar el cable.

I. 2. d. Extrusión de tubos.

El líquido se extruye a través de un dado anular, para mantener las dimensiones adecuadas y la estabilidad del tubo, este se presuriza al salir del dado o al estar siendo extruido. Se puede dejar presurizado el tiempo que sea necesario.

I. 2. e. Extrusión de perfiles.

Igualmente el líquido se extruye por un dado que alimenta un molde con un perfil determinado, que es de hecho la pieza final.

I. 2. f. Extrusión de recubrimientos.

Existen muchos materiales que se protegen mediante una película de polímero que se debe aplicar sin pegamentos. Las temperaturas que proporciona la extrusión más la presencia de recalentadoras hacen ideal la aplicación de este proceso. El proceso es igual que el de película delgada solo que antes de enfriar se aplica sobre la superficie a recubrir (cartón, papel o metal). Posteriormente ambos materiales se enfrían en un tren de rodillos.

I.3. *Consideraciones físicas aplicadas en los procesos de extrusión.*

Debido a lo expuesto anteriormente, la física involucrada en el proceso de extrusión es muy compleja, un aspecto de vital importancia para la ingeniería es el ahorro de energía. Analizando cuidadosamente el proceso de extrusión, la parte que consume la mayor cantidad de energía es el tornillo. Como se expuso anteriormente el objetivo es cambiar de fase un polímero granular a líquido. De acuerdo con el balance de energía presentado por Tadmor [2], el cambio de fase resulta de en un 45% proveniente de la energía térmica aplicada por los calentadores y el otro 55% lo provoca la fricción generada por el movimiento del tornillo. Sin embargo, la energía térmica total aplicada es en realidad de

un 55% y la mecánica de un 45%, esto se debe a que las pérdidas de energía térmica son mayores que las mecánicas. En extrusores pequeños las pérdidas térmicas son muy elevadas debido a los malos aislamientos que presentan. Estas consideraciones son muy generales y dependiendo del material usado pueden invertirse las estimaciones, sin embargo es correcto afirmar que en promedio la participación es 50-50% globalmente.

Al observar la extrusora (del tipo que sea) la zona de interés del presente trabajo, se encuentra en la región final de la zona de transporte, la zona de transición (donde inicia el cambio de fase) y una pequeña parte de la zona de dosificación. Esto y lo expuesto en el párrafo anterior lleva a las siguientes consideraciones.

Primero, la transferencia de calor combinada con disipación viscosa es la causa principal del cambio de fase. Los mecanismos de transferencia de calor involucrados principalmente son la conducción en primer término, y cuando aparece la fase líquida desde luego la convección incluyendo la disipación viscosa.

Segundo, en la zona de interés, se tiene un perfil de temperatura lineal, una velocidad de sustancia constante y tanto el líquido como el sólido no presentan impurezas. El espacio entre el claro del tornillo y el barril es pequeño y puede aproximarse a una geometría cartesiana. Estas consideraciones pueden llevar a formular un modelo físico simplificado.

Dentro de la literatura existen un buen número de trabajos que plantean diversos modelos y diversas formas de solución con cambio de fase, tipificando con ello el ya conocido problema de Stefan. Entre los trabajos que han tomado en cuenta el análisis de transferencia de calor, el análisis de Huang [3], presenta un modelo unidimensional no estacionario en el que la viscosidad es constante, con gradiente de presión cero. La solución propuesta es mediante semejanza aplicando la función de Green. Entre los resultados más relevantes

son que el perfil de temperatura depende fuertemente de los números de Brinkman y Stefan, los esfuerzos cortantes en la capa delgada de líquido son suficientemente grandes para modificar la tasa de licuefacción aún a velocidades moderadas y por encima de un valor de Brinkman crítico, la temperatura en el líquido puede ser mayor que la de pared.

Griffin [4] propone un modelo bidimensional estacionario aplicado en los extrusores de plástico y lo resuelve mediante el método de balance de energía integral de Polhausen. Sus resultados se comparan con dos experimentos de Vermeulen [5] comparando el espesor del sólido a lo largo del tornillo. El primer experimento toma en cuenta los efectos viscosos como función de la temperatura y la generación viscosa, mientras el segundo da mayor importancia a las altas temperaturas a través de la película de líquido, en ambos casos existe una buena aproximación con los experimentos.

Lo importante en los experimentos de Vermeulen [5] y [6] es la delimitación de los parámetros involucrados tales como el número de Prandtl y el número de Brinkman principalmente, a pesar del pobre desarrollo teórico presentado.

Pearson [7] propone un modelo bidimensional considerando a la interfase fija en el espacio, esto lleva a suponer que el sólido se deformará mientras se licúa. Otro aspecto es que si la viscosidad del líquido es lo suficientemente grande, es posible generar calor por disipación viscosa. Se considera un número de Reynolds pequeño que conduce a representar el gradiente de presión como función del esfuerzo viscoso, el resultado importante es que obtiene una solución heurística aplicando varios métodos simples de solución. El trabajo de Jiji [8] analiza un modelo unidimensional no estacionario resuelto por medio de teoría de perturbación singular. Parte del análisis teórico de este autor se utiliza como metodología para el desarrollo del presente trabajo de tesis, con la salvedad de que no toma en cuenta la variación de la viscosidad con la temperatura.

El objetivo del trabajo presente es analizar teóricamente el fenómeno transitorio con cambio de fase y transferencia de calor en la pared exterior del sistema con ayuda de la teoría de perturbación, incluyendo la influencia de la disipación viscosa en el cambio de fase. Como resultados esperados se encuentra la obtención del perfil de temperatura, la relación de la evolución de la interfase y las correspondientes tasas de transferencia de calor en la pared y la interfase.

CAPITULO II

DEDUCCION DEL MODELO

II. 1. *Formulación.*

Considérese una región finita (ver fig.2) de espesor h , y para todo tiempo $t > 0$ en la frontera $x = 0$ se localiza una placa que se mueve a una velocidad uniforme. La placa además está a una temperatura T_0 uniforme, mayor que la temperatura de fusión T_m . Dentro de esta región, que se encuentra un sólido a una temperatura inicial uniforme T_1 menor, a la temperatura de fusión T_m . Desde luego en la realidad el que está en movimiento es el sólido, pero se puede fijar el sistema de referencia inercial en él. Como resultado del efecto de la temperatura en la pared se forma líquido, que al estar en contacto con la pared en movimiento y por ser viscoso produce un esfuerzo cortante. El esfuerzo viscoso producido contribuye a facilitar el cambio de fase. La fase líquida se forma en la región $0 < x < X(t)$. Para facilitar el análisis se supone lo siguiente:

- a) El proceso es unidimensional $u=u(x,t)$, $v=v(x,t)$, $T_s=T_s(x,t)$, $T_l=T_l(x,t)$, debido a que el espesor h donde ocurre el cambio de fase es muy pequeño comparado con la longitud horizontal.
- b) La viscosidad es función de la temperatura según la forma simplificada de la ecuación de Arrhenius $\mu=\mu_c \exp(b(T_1-T_m))$, donde μ_c es la viscosidad del fluido a T_1-T_m y b es una constante que depende del inverso de la diferencia de temperatura mínima necesaria para obtener la fase líquida a partir de la fase sólida. Citando a Martelli [9], la ecuación es válida para fluidos Newtonianos de bajo peso molecular y siempre que la diferencia de temperatura T_1-T_m no sea muy grande. En [7] se presentan correlaciones adicionales para

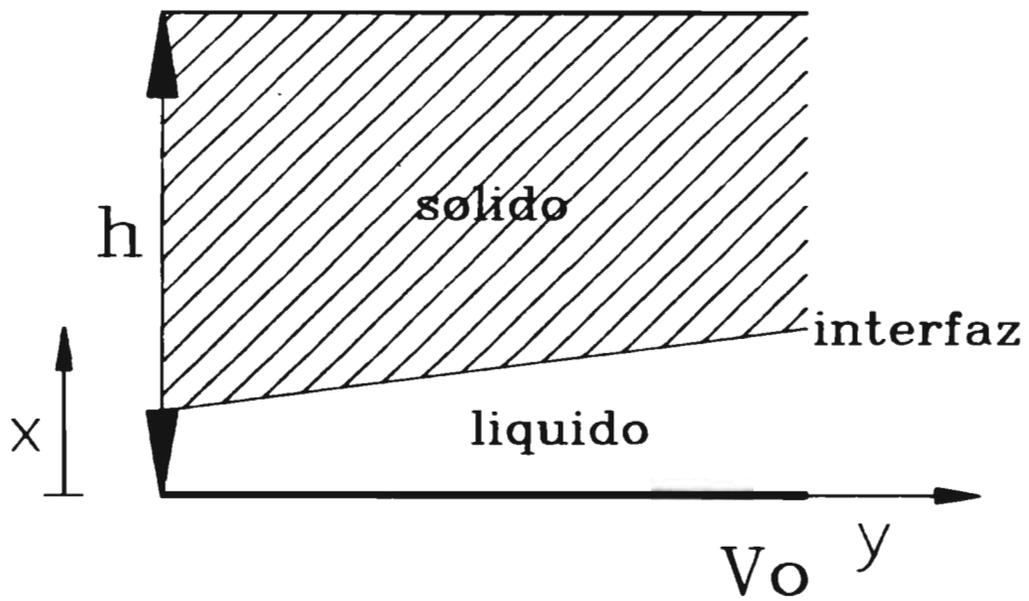


Fig. 2

obtener el parámetro b y varias expresiones linealizadas para la viscosidad como función de la temperatura.

c) La conductividad térmica y la densidad se suponen constantes en la misma fase pero diferente entre cada fase. Esto es válido cerca de la interfase tanto para el sólido como para el líquido, otra razón es que el cambio de fase ocurre en un tiempo en que las propiedades mencionadas se mantienen prácticamente constantes.

d) El gradiente de presión en la dirección " y " es cero en primera aproximación, ya que los esfuerzos normales que se presentan en la interfase son muy pequeños comparados con los cortantes, que son responsables de sostener al sólido, además por ser unidimensional la presión no es función de " y ".

e) La fuerza de flotación debida al gradiente de temperatura comparada con los esfuerzos cortantes es despreciable.

Utilizando la aproximación de la capa límite número de Reynolds pequeño, consecuentemente las ecuaciones que gobiernan el fenómeno son las siguientes:

LIQUIDO

Ecuación de continuidad.

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \quad (11.1)$$

Las ecuaciones de cantidad de movimiento, en las direcciones x e y respectivamente son:

$$\rho_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (11.2)$$

$$\rho_1 \left(\frac{\partial}{\partial t} v_1 + u_1 \frac{\partial}{\partial x} v_1 \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \frac{\partial}{\partial x} v_1 \right] \quad (II.3)$$

Ecuación de la energía

$$\rho_1 C p_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) = k_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 \quad (II.4)$$

PARA EL SOLIDO

$$\rho_s C p_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = k_s \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} \quad (II.5)$$

INTERFAZ

Aquí se aplica un balance de energía en la interfaz (ver apéndice A) obteniéndose la siguiente ecuación:

$$k_s \frac{\partial T_s}{\partial x} - k_l \frac{\partial T_l}{\partial x} = \rho_s L_m \frac{dX(t)}{dt} \quad (II.6)$$

Donde u_1 y v_1 son las velocidades del líquido en la dirección "y" y x respectivamente, μ es la viscosidad del líquido definida en el inciso b) anterior. La densidad, el calor específico a presión constante y la conductividad térmica de ambas fases están expresadas por ρ , C_p y k respectivamente, distinguiéndose con los subíndices l para el líquido y s para el sólido en todos los casos. La entalpia de licuefacción se expresa por L_m ,

la temperatura se expresa por T , el tiempo por t y la posición de la interfaz es $X(t)$.

II. 1. Condiciones inicial y de contorno.

Por simplicidad se hacen las siguientes consideraciones

$$\text{en } t = 0 : \begin{cases} T_s = T_i \\ X(t) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

En el tiempo cero la temperatura inicial es la temperatura del sólido, y como aún no existe la fase líquida, el espesor de la interfaz $X(t)$ es igual a cero.

$$x = 0 ; t > 0 : \begin{cases} T_l = T_0 \\ v = V_0 \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

En $x = 0$ y para el tiempo mayor que cero se presenta la fase líquida cuya temperatura es igual a la temperatura uniforme T_0 y la velocidad V_0 es la velocidad de la pared.

$$x = h ; t > 0 : \begin{cases} \frac{\partial T_s}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

En $x = h$ y para todo tiempo mayor que cero el flujo de calor es cero. Se considera aislada la sección que está en contacto con el tornillo.

$$x = X(t) : \left\{ v = 0, T_l = T_m \right. \quad (II.10)$$

En la interfaz la velocidad en la dirección "y" es cero y la temperatura del líquido corresponde a la de fusión.

CAPITULO III

ADIMENSIONALIZACION

III. 1. *Adimensionalización.*

La adimensionalización es un técnica que se utiliza ampliamente en la mecánica de fluidos y en la transferencia de calor. Consiste en cambiar las variables originales a unas variables sin dimensión física o sea adimensionales. Las variables adimensionales cambian con el problema en estudio. Las ecuaciones adimensionales generalmente permanecen normalizadas, lo que facilita su manejo además el proceso lleva a la obtención de parámetros adimensionales. Estos parámetros colapsan varias propiedades de las sustancias permitiendo que, con pocos, valores se consideren una infinidad de variaciones en los valores de estas propiedades. Para el caso de las ecuaciones (II.1-10), las variables adimensionales son:

$$\phi = \frac{T_1 - T_m}{TR_1} \quad ; \quad \theta = \left(\frac{T_m - T_s}{TR_s} \right) \frac{k_s}{k_l} \quad ; \quad \xi = \frac{x - X(t)}{h - X(t)} \quad ; \quad v = \frac{v_1}{V_0}$$

$$\tau = \frac{t}{t_R} \quad ; \quad \sigma = \frac{X(t)}{h} \quad ; \quad \eta = \frac{x}{X(t)} \quad ; \quad u = \frac{u_1}{V_0}$$

Donde TR_1 es una temperatura de referencia en el líquido que para este caso particular es $TR_1 = T_0 - T_m$, la diferencia entre la temperatura T_0 del líquido en la pared y T_m la temperatura de fusión del sólido. Para la temperatura de referencia del sólido TR es la diferencia $T_m - T_1$, donde T_m es la temperatura de

fusión del sólido y T_1 es la temperatura inicial del sólido menor pero cercana a la temperatura de fusión.

La velocidad V_0 es la velocidad de la placa que es constante en el tiempo; el tiempo de referencia t_R se obtendrá del proceso de adimensionalización. Las ϕ y θ son las temperaturas adimensionales del líquido y sólido respectivamente, h es el espesor de la sustancia a fundirse y β es el coeficiente viscoso de temperatura normalizado definido por $\beta = b(T_0 - T_m)$. η es la distancia adimensional en el líquido.

Por otro lado de la ecuación de continuidad (II. 1) la velocidad u es función únicamente del tiempo. Al aplicar un balance de masa en la interfase (ver apéndice A) y considerando por simplicidad que las densidades son iguales para ambas fases, se tiene que:

$$u_1 = -(\rho_s/\rho_l - 1) \frac{V_0 d\sigma}{t_R d\tau} = 0 \quad (\text{III.1})$$

Al aplicar la regla de la cadena en cada una de las ecuaciones y en cada término, se tiene finalmente para la ecuación de cantidad de movimiento:

$$\frac{h^2}{t_R \alpha_l} \left\{ \sigma^2 \frac{\partial v}{\partial \tau} - \eta \sigma \frac{d\sigma}{d\tau} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right\} = \frac{\mu_c}{(\rho_l \alpha_l)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ e^{-\beta \phi} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right\} \quad (\text{III.2})$$

donde $Pr = \mu_c / (\rho_l \alpha_l)$ es el número de Prandtl, que mide la competencia entre la difusión viscosa y la difusión térmica de la sustancia y σ es la evolución de la interfase. El parámetro β es la relación entre el calor que se le puede suministrar al líquido entre el calor mínimo necesario para que exista la fase líquida.

Similarmente para la ecuación de la energía:

$$\frac{\alpha_1 h^2}{t_R} \left\{ \sigma \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} - \eta \sigma \frac{d\sigma}{d\tau} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right\} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + Br \cdot e^{-\beta \phi} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^2 \quad (III.3)$$

Donde Br es el número de Brinkman definido más adelante.

La ecuación de la interfase adimensionalizada es:

$$\left. -\gamma \sigma \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} - (1-\sigma) \left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = \frac{\sigma(1-\sigma)h^2}{\epsilon \alpha_1 t_R} \frac{d\sigma}{d\tau} \quad (III.4)$$

donde

$$\gamma = \frac{k_s(T_m - T_1)}{k_l(T_0 - T_m)} \quad (III.5)$$

es un parámetro que mide la relación de energía disipada por cada fase, y el tiempo de referencia t_R se obtiene como sigue. Los términos de la izquierda en (III.3) son de orden la unidad, así como el segundo término de la derecha, por lo tanto para que la ecuación quede balanceada todos los términos deben ser del mismo orden, esto conduce a que $t_R = h^2/\epsilon \alpha_1$.

Del proceso de adimensionalización se obtienen los parámetros de perturbación Br y ϵ que son los números de Brinkman y Stefan definidos como:

$$Br = \epsilon Pr = \frac{V_0^2 \nu_0}{Cp_l T_m \alpha_1} \quad (III.6)$$

$$\text{Número de Stefan} = \epsilon = Cp_l (T_0 - T_m) / L_m \quad (III.7)$$

Donde el número de Brinkman Br físicamente representa el cociente del calor disipado por el efecto viscoso al calor por conducción. El número de Stefan es la relación del calor sensible entre la entalpia de licuefacción de la sustancia.

Al sustituir el tiempo de referencia τ en las ecuaciones (III.1-4) se tiene:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} = \frac{\epsilon \alpha_1}{\alpha_s} \left\{ (1-\sigma) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau} - (1-\xi)(1-\sigma) \frac{d\sigma}{d\tau} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right\} \quad (III.8)$$

$$\epsilon \left\{ \sigma \frac{\partial^2 v}{\partial \tau} - \eta \sigma \frac{d\sigma}{d\tau} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right\} = Pr \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ e^{-\beta \phi} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right\} \quad (III.9)$$

$$\epsilon \left\{ \sigma \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau} - \eta \sigma \frac{d\sigma}{d\tau} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right\} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + Bre^{-\beta \phi} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^2 \quad (III.10)$$

$$\left. -\gamma \sigma \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right]_{\xi=0} \left. - (1-\sigma) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_{\eta=1} = \sigma (1-\sigma) \frac{d\sigma}{d\tau} \quad (III.11)$$

Las condiciones inicial y de contorno se transforman en:

$$\tau = 0 : \theta = 1, v = 0, \sigma = 0 \quad (III.12)$$

$$\eta = 0 : v = 1, \phi = 1 \quad (III.13)$$

$$\eta = 1 : v = 0, \phi = 0 \quad (III.14)$$

$$\xi = 0 : \theta = 0 \quad (III.15)$$

$$\xi = 1 : \theta = 1 \quad (III.16)$$

El sistema de ecuaciones (III.8-11) sujeto a las condiciones (III.12-16) constituye un problema altamente no lineal debido principalmente a la

evolución de la interfase σ y por otro lado al efecto de la viscosidad como función de la temperatura. Este último acopla fuertemente las ecuaciones de cantidad de movimiento y la de la energía, además de provocar no linealidades en la temperatura y en la velocidad. El problema es además no estacionario y aunado a lo anterior, hace que la solución analítica directa sea complicada. En virtud de lo anterior el objetivo del trabajo es obtener una solución analítica mediante técnicas asintóticas.

CAPITULO IV

IV. ANALISIS DE PERTURBACION, SOLUCION Y ACOPLAMIENTO.

IV. 1. INTRODUCCION

Las técnicas de perturbaciones consisten en obtener la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales por medio de una serie en potencias de uno o varios parámetros pequeños y relevantes en la física de las ecuaciones. Para el caso particular de las ecuaciones (III.14-22) se distinguen como tales el número de Stefan y el número de Brinkman. Al aplicar los métodos de perturbación en el sistema de ecuaciones, se esperaría que simplificara las ecuaciones de alguna forma, como por ejemplo eliminar términos no lineales o no estacionarios entre otros. Un problema singular se presenta cuando al aplicar el análisis de perturbación, quedan eliminadas las derivadas de mayor orden o las derivadas temporales obligando en el primer caso a perder una condición de frontera o en el segundo caso la condición inicial. Por lo tanto un problema es singular en el espacio si se pierde alguna condición de frontera y es singular en el tiempo si se pierde la condición inicial, que es el caso del presente trabajo.

Los parámetros de perturbación escogidos ϵ y Br , son pequeños. El número de Stefan es la relación entre el entalpía sensible y la de fusión. En este caso el número de Stefan es pequeño (alrededor de 0.1), de acuerdo con Özişik [11], por que el calor sensible es muy pequeño en comparación con el calor latente necesario para licuar el material. Al aplicar el método de perturbación en ϵ la derivada temporal desaparece, siendo la ecuación singular en el tiempo. Esta singularidad quiere decir que existen dos escalas de tiempo, una de ellas es el tiempo físico representado en las ecuaciones por τ , conociéndose esto

como zona externa del problema. La otra escala es un tiempo que físicamente es muy breve en comparación con τ .

Esta nueva escala de tiempo es del orden de Stefan en virtud de que en esa escala se puede retener el transitorio. La nueva escala de tiempo es $\tau = \epsilon\theta$, que se conoce como zona interna y que requiere una nueva expansión en series de potencias ahora como función de la nueva escala de tiempo θ .

Por otro lado el número de Brinkman es pequeño en el caso de tener calentamiento externo, como se ha planteado en este trabajo, el calor producido por disipación viscosa es menor que el producido por conducción. Los valores usados en [5] suelen ser convencionales y caen en el rango de $10^{-3} < Br < 2.5$. Por ejemplo para el polietileno de baja densidad usado en [4] se tiene el siguiente ejemplo:

$$V_0 = 0.2 \frac{m}{s}; \mu = 4770 \frac{Ns}{m^2}; \rho_1 = 800 \text{ kg/m}^3; \alpha_1 = 0.03125 \text{ m}^2/s;$$

$$(T_0 - T_m) = 43 \text{ K y } C_{p1} = 0.8 \text{ KJ/kgK}$$

Al sustituir en el número de Brinkman se tiene que:

$$Br = \frac{V_0^2 \mu}{\rho_1 C_{p1} (T_0 - T_m) \alpha_1} = 0.221$$

El procedimiento a seguir es resolver por separado tanto la zona interna como la externa, para después acoplar ambas soluciones mediante lo que se conoce en teoría de perturbación como acoplamiento asintótico.

IV. 2. PLANTEAMIENTO DE LA SERIE DE PERTURBACION (ZONA EXTERNA)

Para las variables involucradas en la zona externa se plantean las siguientes

expansiones:

Temperatura en el líquido:

$$\phi = \phi_{00} + \epsilon^{1/2} \phi_{01} + Br(\phi_{11} + \frac{1}{\epsilon^{1/2}} \phi_{12}) \quad (IV.1)$$

Temperatura en el sólido:

$$\theta = \theta_{00} + \epsilon^{1/2} \theta_{01} + Br(\theta_{11} + \frac{1}{\epsilon^{1/2}} \theta_{12}) \quad (IV.2)$$

Desarrollo de la interfaz:

$$\sigma = \sigma_{00} + \epsilon^{1/2} \sigma_{01} + Br(\sigma_{11} + \frac{1}{\epsilon^{1/2}} \sigma_{12}) \quad (IV.3)$$

Velocidad:

$$v = v_{00} + \epsilon^{1/2} v_{01} + Br(v_{11} + \frac{1}{\epsilon^{1/2}} v_{12}) \quad (IV.4)$$

Al sustituir las ecuaciones anteriores en las ecuaciones originales (ver cap III.14-22), y al retener términos de iguales potencias de Br y ϵ se tiene para el orden cero.

Para la ecuación de la energía en el líquido:

Br^0 y ϵ^0 :

$$\frac{\partial^2 \phi_{00}}{\partial \eta^2} = 0 \quad (IV.5)$$

De la misma forma para la ecuación de velocidad:

Br^0 y ϵ^0 :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ e^{-\beta \phi_{00}} \frac{\partial v_{00}}{\partial \eta} \right\} = 0 \quad (\text{IV.6})$$

La ecuación de la energía en el sólido es:

Br^0 y ϵ^0 :

$$\frac{\partial^2 \theta_{00}}{\partial \xi^2} = 0 \quad (\text{IV.7})$$

En la interfaz:

Br^0 y ϵ^0 :

$$-\gamma \sigma_{00} \left. \frac{\partial \theta_{00}}{\partial \xi} \right]_{\xi=0} - (1 - \sigma_{00}) \left. \frac{\partial \phi_{00}}{\partial \eta} \right]_{\eta=1} = (\sigma_{00} - \sigma_{00}^2) \frac{d \sigma_{00}}{d \tau} \quad (\text{IV.8})$$

A las condiciones de contorno e inicial se les debe aplicar una expansión como a las ecuaciones y para que estas sean congruentes el primer término es el que lleva la condición de contorno planteada y los términos subsecuentes son cero así:

Para la condición inicial se tiene:

$$\theta(\xi, 0) = 1 + 0 ; v(\xi, 0) = 0 ; \sigma(0) = 0 \quad (\text{IV.9})$$

Para las condiciones de contorno en el sólido:

$$\theta(0, \tau) = 0 ; \theta(1, \tau) = 1 \quad (\text{IV.10})$$

En el líquido se tiene:

$$\phi(0, \tau) = 1 ; v(0, \tau) = 1 \quad (\text{IV.11})$$

$$\phi(1, \tau) = 0 ; v(1, \tau) = 0 \quad (\text{IV.12})$$

Los ordenes superiores para ϵ^0 y Br^1 , ϵ^1 y $Br^{1/2}$, ϵ^1 y $Br^{1/2}$ se encuentran en el apéndice B.

IV. 3. PLANTEAMIENTO DE LA SERIE DE PERTURBACION (ZONA INTERNA)

Dado que $\vartheta = \tau/\epsilon$, se proponen las siguientes expansiones:

Temperatura en el líquido:

$$\phi' = \phi'_{00} + \epsilon^{1/2} \phi'_{01} + Br(\phi'_{11} + \epsilon^{1/2} \phi'_{12}) \quad (IV.13)$$

Temperatura en el sólido:

$$\theta' = \theta'_{00} + \epsilon^{1/2} \theta'_{01} + Br(\theta'_{11} + \epsilon^{1/2} \theta'_{12}). \quad (IV.14)$$

Desarrollo de la interfaz:

$$\sigma' = \sigma'_{00} + \epsilon^{1/2} \sigma'_{01} + Br(\sigma'_{11} + \epsilon^{1/2} \sigma'_{12}) \quad (IV.15)$$

Velocidad:

$$v' = v'_{00} + \epsilon^{1/2} v'_{01} + Br(v'_{11} + \epsilon^{1/2} v'_{12}) \quad (IV.16)$$

al llevar estas a las ecuaciones (III.14-22) se tiene para la ecuación de la energía en el líquido:

Br^0 y ϵ^0 :

$$\frac{\partial^2 \phi'}{\partial \eta^2}{}_{00} = \sigma'_{00} \frac{\partial \phi'}{\partial \theta}{}_{00} - \eta \sigma'_{00} \frac{d \sigma'}{d \vartheta}{}_{00} - \frac{\partial \phi'}{\partial \eta}{}_{00} \quad (IV.17)$$

De la misma forma en la ecuación de la velocidad en el líquido:

Br^0 y ϵ^0 :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ e^{-\beta \phi'} \frac{\partial v'}{\partial \eta} \right\} = \frac{1}{Pr} \left[\sigma'_{00} \frac{\partial v'}{\partial \theta} - \eta \sigma'_{00} \frac{d \sigma'_{01}}{d \theta} \frac{\partial v'}{\partial \eta} \right]$$

(IV.18)

En la ecuación del sólido

Br^0 y ϵ^0

$$\frac{\partial^2 \theta'}{\partial \xi^2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_s} \left[-[1 - \sigma'_{00}]^2 \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} - (1 - \xi)(1 - \sigma'_{00}) \frac{d \sigma'_{00}}{d \theta} \frac{\partial \theta'}{\partial \xi} \right]$$

(IV.19)

De la misma forma para la interfaz

Br^0 y ϵ^0 :

$$\frac{d \sigma'_{00}}{d \theta} = 0$$

(IV.20)

En la zona interna se rigen las mismas condiciones que para la zona externa.

Para la condición inicial se tiene:

$$\theta'(\xi, 0) = 1 + 0 ; v'(\xi, 0) = 0 ; \sigma'(0) = 0$$

(IV.21)

Para las condiciones de contorno en el sólido:

$$\theta'(0, \tau) = 0 ; \theta'(1, \tau) = 1$$

(IV.22)

En el líquido se tiene:

$$\phi'(0, \tau) = 1 ; v'(0, \tau) = 1$$

(IV.23)

$$\phi'(1, \tau) = 0 ; v'(1, \tau) = 0$$

(IV.24)

Los ordenes superiores para ϵ^0 y Br^1 , ϵ^1 y $Br^{1/2}$, ϵ^1 y $Br^{1/2}$ se encuentran en

el apéndice B.

IV. 4. SOLUCION DE LAS ECUACIONES.

Para la zona externa se integran las ecuaciones (IV.5-8) y las ecuaciones que representan los ordenes superiores (ver Apéndice B) sujetas a las condiciones (IV.9-12), por lo que se obtiene:

$$\phi_{00} = 1 - \eta \quad (IV.25)$$

$$\phi_{01} = 0 \quad (IV.26)$$

$$\theta_{00} = 0 \quad (IV.27)$$

$$\theta_{01} = 0 \quad (IV.28)$$

$$\sigma_{00} = (2(C_1 + \tau))^{1/2} \quad (IV.29)$$

$$\sigma_{01} = 0 \quad (IV.30)$$

$$v_{00} = \frac{1 - e^{-\beta\phi_{00}}}{1 - e^{-\beta}} \quad (IV.31)$$

$$\phi_{11} = \frac{e^{\beta}(1 - e^{-\eta\beta})}{(1 - e^{\beta})^2} + \frac{\eta}{1 - e^{\beta}} \quad (IV.32)$$

$$\sigma_{11} = (\tau/2)^{1/2} \left(\frac{\beta}{(1 - e^{\beta})^2} + \frac{1}{1 - e^{\beta}} \right) \quad (IV.33)$$

De la misma forma, al resolver para la zona:

$$\sigma'_{00} = 0 \quad (IV.34)$$

$$\sigma'_{01} = (2\theta)^{1/2} = (2\tau/\epsilon)^{1/2} \quad (IV.35)$$

$$\sigma'_{11} = 0 \quad (IV.36)$$

$$\phi'_{00} = 1 - \eta \quad (IV.37)$$

$$\phi'_{01} = 0 \quad (IV.38)$$

$$v'_{00} = \frac{1 - e^{-\beta\phi'_{00}}}{1 - e^{-\beta}} \quad (IV.39)$$

$$\phi'_{11} = \frac{e^{\beta(1 - e^{-\eta\beta})}}{(1 - e^{-\beta})^2} + \frac{\eta}{1 - e^{-\beta}} \quad (IV.40)$$

$$\theta'_{00} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2}{(j+0.5)\pi} \text{sen}(j+0.5)\pi\xi \right) \exp -[(j+0.5)\pi]^2 \frac{\alpha s \tau}{\alpha_1 \varepsilon} \quad (IV.41)$$

IV. 5. ACOPLAMIENTO ASINTOTICO

Una vez obtenidas las soluciones de la zonas interna y externa por sí solas, es indispensable llevar a cabo el acoplamiento asintótico. La teoría del acoplamiento asintótico postula que el intervalo donde existe el problema se divide a su vez en varios intervalos de traslape. Después en cada subintervalo se usa la teoría de perturbación para hacer la aproximación asintótica a la solución de la ecuación diferencial válida en el intervalo. Finalmente para realizar el acoplamiento se requiere que las aproximaciones asintóticas tengan la misma forma funcional en el traslape de cada par de intervalos. Esto resulta en una secuencia de aproximaciones asintóticas a la solución; cada construcción satisface las condiciones de contorno a varios puntos del intervalo. Así el resultado final es una aproximación al problema válido en todo el intervalo. Como ya se estableció previamente la singularidad en el tiempo obliga a plantear el esquema de zona interna y externa y a perder la

condición inicial, lo que conduce a que existen constantes indeterminadas para cada intervalo. Estas constantes se llaman constantes de acoplamiento y se obtienen al acoplar las soluciones. De tal suerte que la solución global del problema puede constuirse mediante la siguiente expresión para cualquier variable física involucrada:

$$Sol = Sol_{ext} + Sol_{int} - Acopl$$

De forma general el acoplamiento asintótico es una región común tanto a la zona interna como a la externa. Para la evolución de la interfase se suman las ecuaciones (IV.29, 30, 33, 34, 35 y 36) y para obtener la constante C_1 se evalúan los límites cuando $\theta \rightarrow \infty$ y $\tau \rightarrow 0$ obteniéndose la siguiente solución global:

$$\sigma_g = (2(C_1 + \tau))^{1/2} - Br \left(\frac{\tau}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{\beta}{(1-e^\beta)^2} + \frac{1}{1-e^\beta} \right) + (2\epsilon\theta)^{1/2} - (2\theta)^{1/2} \quad (IV.42)$$

donde para acoplar se debe cumplir que $C_1 = 0$, obteniéndose finalmente:

$$\sigma_g = (\tau)^{1/2} \left(\sqrt{2} - \frac{Br}{2^{1/2}} \left(\frac{\beta}{(1-e^\beta)^2} + \frac{1}{1-e^\beta} \right) \right) \quad (IV.43)$$

En el análisis presentado por Huang [3], se propone una variable de semejanza que le llama parámetro de licuefacción definido como:

$$\lambda = \frac{X(t)}{\sqrt{2\alpha_1 \tau}} \quad (IV.43a)$$

Con el fin de comparar con este autor el parámetro de licuefacción, una vez obtenida la evolución de la interfase es posible obtener λ :

$$\lambda = \frac{\epsilon^{1/2} \sigma_g}{\sqrt{\tau}} = \epsilon^{1/2} \left[\sqrt{2} - \frac{Br}{2^{1/2}} \left(\frac{\beta}{(1-e^\beta)^2} + \frac{1}{1-e^\beta} \right) \right] \quad (IV.44)$$

Este parámetro revela la influencia de Br en la evolución de la interfase.

Así como para σ_g se acopla ϕ_g obteniéndose el perfil de temperatura:

$$\phi_g = 1 - \eta + Br \left[\frac{e^\beta}{(1-e^\beta)^2} (1 - e^{-\eta\beta}) + \frac{1}{1-e^\beta} \right] \quad (IV.45)$$

y el número de Nusselt en la pared y en la interfase resulta:

$$Nu_0 = \left. \frac{1}{\sigma_g} \frac{d\phi_g}{d\eta} \right]_{\eta=0} = \frac{1}{\sigma_g} \left\{ -1 + Br \left[\frac{\beta e^\beta}{(1-e^\beta)^2} + \frac{1}{1-e^\beta} \right] \right\} \quad (IV.47)$$

$$Nu_1 = \left. \frac{1}{\sigma_g} \frac{d\phi_g}{d\eta} \right]_{\eta=1} = \frac{1}{\sigma_g} \left\{ -1 + Br \left[\frac{\beta}{(1-e^\beta)^2} + \frac{1}{1-e^\beta} \right] \right\} \quad (IV.48)$$

El tiempo en el que el sólido se licúa totalmente, o sea cuando $\sigma_g=1$, se conoce como tiempo crítico y se define por:

$$\tau_{crit} = \frac{2}{4 - 4Br \left(\frac{\beta}{(1-e^\beta)^2} + \frac{1}{1-e^\beta} \right) + Br^2 \left(\frac{\beta}{(1-e^\beta)^2} + \frac{1}{1-e^\beta} \right)}$$

(IV.48)

La relación entre la tasa de transferencia de calor que se transfiere considerando el efecto de disipación viscosa entre el calor que se transfiere sin considerar los efectos de disipación viscosa es:

$$\zeta = \frac{1 - Br \left(\frac{\beta e^\beta}{(1-e^\beta)^2} + \frac{1}{1-e^\beta} \right)}{1 - Br \left(\frac{\beta}{(1-e^\beta)^2} + \frac{1}{1-e^\beta} \right)}$$

(IV.49)

relación que se genera a partir del cociente de los números de Nusselt.

CAPITULO V

V. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

V. 1. Resultados

Como exposición de los resultados se tienen las siguientes gráficas que simplifican el análisis de resultados:

La ecuación (IV.68) queda representada por las figs. 3, 4 y 5. En estas se tomaron valores de $\beta=0.00175$, 0.35 y 1.505 para todo η , con $Br=0.5$ y $Br=2$, para cada gráfica, los cuales resultan ser valores normalmente convencionales [4], sin embargo, hay que aclarar que el valor de $Br=2$, excede el presente análisis de perturbación ya que Br debe ser pequeño. El valor de $\beta=1.505$ es otro valor típico en la literatura [4].

La fig. 3 muestra el perfil de temperatura para $\beta=0.00175$, en la gráfica se puede apreciar que cuando la disipación viscosa es considerable ($Br=2$) la transferencia de calor es mayor que si ésta no es muy considerable ($Br=0.5$).

Las figs. 4 y 5 muestran una vez más el perfil de temperatura para valores de $\beta=0.35$ y $\beta=1.505$ respectivamente, observándose el efecto de disipación viscosa disminuido en $Br=2$ con respecto a la fig. 3. El incremento en β disminuye en magnitud los valores de la temperatura, este incremento en β tiende a que el perfil de temperatura presente una solución única, así debido a que la corrección que representa Br se ve disminuida por la presencia de β . Esto sólo se puede comprobar con las gráficas subsecuentes.

La fig. 5a es una comparación directa con el autor [4], en donde se puede apreciar la diferencia en magnitud de los perfiles de temperatura, desgraciadamente no existen otros trabajos para comparar. En el caso de este trabajo los perfiles tienen la misma forma pero la magnitud es menor.

La fig. 6 representa la evolución de la interfaz para los mismos valores de β que en las figuras anteriores pero para $Br=0$, 0.01 y 0.5. El valor de $Br=0$

• físicamente representa la ausencia de efectos viscosos y en la literatura coincide con la gráfica presentada por Jiji[8]. De esta figura se puede notar que mientras mayor sea Br , el tiempo de colapso del sólido es menor, indicando que la disipación viscosa es muy importante en el cambio de fase. Al aumentar β en las figs. 7 y 8 se puede ver que el tiempo de colapso aumenta sensiblemente con β , por lo tanto el incremento en β perjudicial ya que la disipación viscosa es suficiente para cambiar de fase. Como en las figuras anteriores al aumentar β los efectos producidos por Br se anulan produciendo una solución única.

La fig. 9, corresponde a la ecuación (IV.69), en este caso se puede ver que el Número de Nusselt cerca de la placa al iniciar el proceso (a tiempos cercanos a cero), tiene un valor tendiente a infinito, pero al avanzar el tiempo cae bruscamente hasta un valor constante. En esta gráfica se tomaron valores pequeños de Br , desde 0.5 hasta 0.01, que es el valor mínimo del experimento de Vermeulen [5], y que para el caso del presente análisis se considera un valor muy pequeño como se puede apreciar en la fig. 19. Para Brinkman pequeños el Nusselt es ligeramente mayor y así sucesivamente, estos valores han sido graficados hasta el tiempo τ en donde ocurre el colapso del sólido.

Las figs. 9, 10 y 11 se han graficado considerando valores de $\beta=0.00175$, 0.35 y 1.505 respectivamente. La diferencia notable es que a pesar de tender a un valor semejante, el incremento en β colapsa claramente las gráficas en una sola. Esto es porque al aparecer mayor cantidad de líquido el movimiento es mayor consecuentemente la viscosidad tiende a un valor único sin importar β y Br .

La fig. 12 es la representación gráfica de la ecuación (IV.70) que corresponde al Nusselt en la interfaz. Aquí se puede ver un efecto inverso del que ocurre en la placa. Ahora el Nusselt es ligeramente mayor para un Br menor (comparándose $Br=0.01$ y 0.5) y esto se debe a que la razón de cambio de la

transferencia de calor cerca de la interfase es menor para Br pequeños debido a que los efectos de disipación viscosa son menores en la interfaz que los que existen cerca de la placa en movimiento.

En las figs. 12, 13 y 14 se puede ver que la tendencia al mismo valor único que en las figuras anteriores es más lenta, pero para cualquier Br es igual. Sólomente se incluyen dos valores de Br porque no se pueden apreciar otros valores y esto ocasiona una débil dependencia en β .

La fig. 15 es la representación de la ecuación (IV.71), que es un parámetro de licuefacción λ presentado por Huang[3] para el valor de $\epsilon=1$ y para los tres valores de β ya estudiados. Como puede verse, al incrementarse Br se incrementa λ debido a que la transferencia de calor producida por los efectos viscosos es mayor, demostrando el impacto del incremento que tiene la disipación viscosa en el cambio de fase. También es de notarse que a mayor β menor es la tasa de cambio de fase.

La fig. 16 es una comparación directa del parámetro λ con el de Huang[3] que en un intervalo muy pequeño de Br coincide en pendiente mas no en valor. Se puede observar que para el valor de $Br=0$ existe un valor de λ , esto se debe a que existe un calentamiento externo en la pared a una temperatura mayor que T_m , la diferencia en los valores de λ se deben a que [3] considera una región infinita en donde además la temperatura se considera uniforme en toda esta región. Este análisis en cambio considera una cavidad finita y adiabática.

La fig. 17 representa la ecuación (IV.73) que se generó para poder observar la competencia entre Br y β , esta ecuación es la relación del calor generado por los efectos viscosos entre el calor sin considerar los efectos viscosos. Los valores escogidos son $Br=0.001$, 0.01 y 0.1 . Se debe aclarar que $\beta=0$ es un valor singular que dentro de las ecuaciones no puede aplicarse porque causa indeterminación. Se puede apreciar la física del problema considerando que, si Br es grande la relación ζ disminuye para el mismo valor de β , al aumentar el

calentamiento externo, o sea, β los efectos de generación viscosa desaparecen tendiendo al valor de $\zeta=1$ que representa la ausencia de los efectos de disipación viscosa.

La fig. 18 es la correspondiente a la ecuación (IV.72), esto es el tiempo crítico (cuando todo el sólido cambia de fase) graficado contra β para $Br=0.01, 0.5$ y 2 . Lo primero que se ve es que el tiempo crítico disminuye notablemente para Br grandes, esto reitera lo mencionado con anterioridad, que la disipación viscosa ayuda a la licuefacción y que al incrementarse β (calentamiento externo) el tiempo crítico aumenta.

La fig. 19 es un complemento de la anterior para valores muy pequeños de $Br=0.01, 0.05$ y 0.25 . Esta figura muestra el mismo comportamiento de la figura anterior aún para estos valores de Br se sigue observando la influencia de la disipación viscosa en la forma de las gráficas, aún a pesar de que el valor de Br es muy pequeño.

V. 2. Conclusiones

El método de solución empleado en el presente trabajo proporciona un esquema diferente del que tradicionalmente se presenta en la literatura [3] y [4]; esto es, la teoría de perturbación es otro punto de vista que permite obtener una solución analítica. Además como el problema físico lo demanda, es necesario reconocer al modelo matemático como un problema de perturbación singular. Esto permite separar al problema en una zona interna y una zona externa para las ecuaciones en el tiempo, permitiendo estudiar las características de cada régimen y posteriormente acoplarlo por el método de acoplamiento asintótico. Desde luego al iniciar el análisis global no se conoce a priori el parámetro de perturbación necesario, en el caso del presente trabajo se tienen 6 y son: $\gamma, \epsilon, Br, \beta, Pr$ y α_1/α_s , que cualesquiera

de ellos podría ser el parámetro de perturbación indispensable. En concordancia con la literatura [3], [4], [5] y [8], se escogieron el ϵ y el Br como parámetros de perturbación en virtud de que estos influyen en los aspectos físicos más relevantes del problema; el ϵ para los problemas de cambio de fase y el Br para problemas de transferencia de calor con disipación viscosa.

Otro problema muy común en los análisis de perturbación es conocer la forma de los exponentes de los parámetros de perturbación, que requiere de un análisis más profundo. Por ejemplo, en [8] se puede ver la forma de la serie empleada para el ϵ y que es la empleada en este trabajo. Los primeros términos del análisis de perturbación revelan aspectos importantes de la solución y los términos subsecuentes en potencias de ϵ y Br son correcciones de pequeña magnitud comparadas con los términos principales.

El método tiene limitantes como cualquier otra expresión matemática que se utilice como representación de un fenómeno físico, sin embargo las siguientes conclusiones exponen la bondad del método así como sus limitaciones.

La primera conclusión que se observa es que si el efecto de calentamiento por disipación viscosa es grande (Br grandes) la licuefacción requiere de menor energía por calentamiento externo (β grandes) y la presencia de esta es perjudicial. Y se puede observar en la disminución del tiempo de licuefacción figs. 6, 7, 8, 18 y 19. Sin embargo en los casos en los que no se puedan obtener Br grandes, debido a limitaciones mecánicas y de espacio, se recomienda la aplicación de un β considerable.

La presencia de la disipación viscosa obliga a refutar la hipótesis de los criterios de diseño convencionales en las extrusoras que suponen un perfil de temperatura lineal, lo cual se puede ver claramente las figuras 3, 4 y 5.

Los Nusselt calculados, están asociados al flujo de calor global siempre y cuando se considere la misma región, el mismo material a extruir, la misma

diferencia de temperatura entre el sólido y la placa y el mismo coeficiente convectivo. La particularidad de calcularlos tanto en la interfase como en la placa y que estos tiendan al mismo valor corrobora la hipótesis de que el flujo de calor es el mismo a lo largo del material, teniéndose para tiempos largos valores de los Nusselt promedio.

Cuando β es grande provoca la inmediata aparición de una pequeña capa de líquido y consecuentemente existe mayor movilidad de las partículas, esto requiere de un mayor flujo de calor ya que el tiempo de residencia de las partículas es menor, por lo tanto el tiempo necesario para licuar es mayor. Además la fricción con la placa y el resto del aparato disminuye, reduciendo el efecto de generación de calor por disipación viscosa.

El análisis de perturbación permite observar los efectos principales y las correcciones a estos. En el caso de las correcciones de Br se puede ver que estos términos llevan consigo los efectos viscosos y que como se vió para $Br=0$ estas soluciones recuperaban la forma lineal de las soluciones de la ecuación de Laplace.

En el caso del estado no estacionario el parámetro de c reveló la singularidad inherente del problema que existe en el tiempo. El esquema de las zona externa e interna revelan el comportamiento real del proceso, en donde existe un tiempo muy breve en el que ocurren fenomenos casi imperceptibles que tienen consecuencias importantes en el resto del proceso.

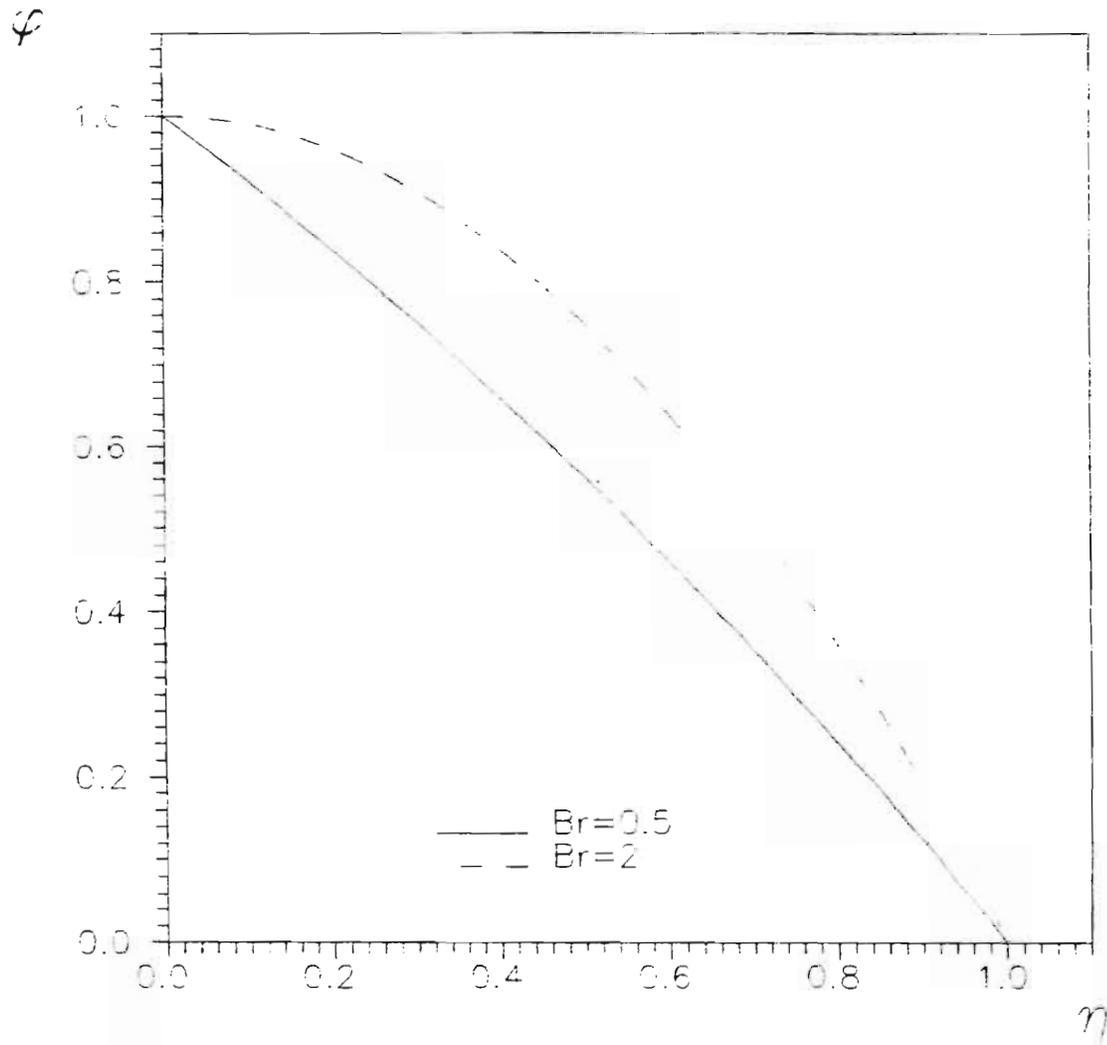


Fig. 3 Perfil de temperatura para $\beta = 0.00175$

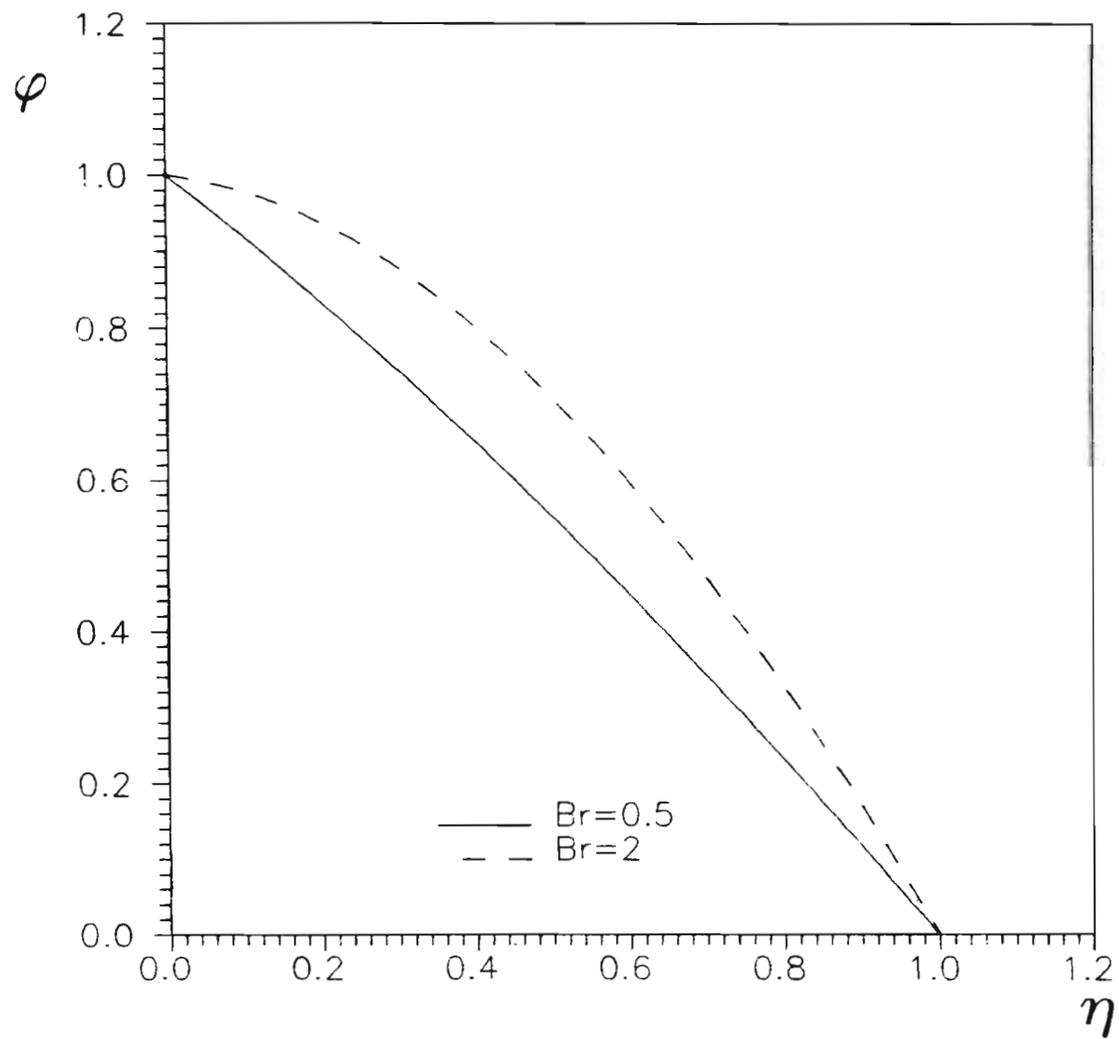


Fig. 4 Perfil de temperatura para beta=0.35

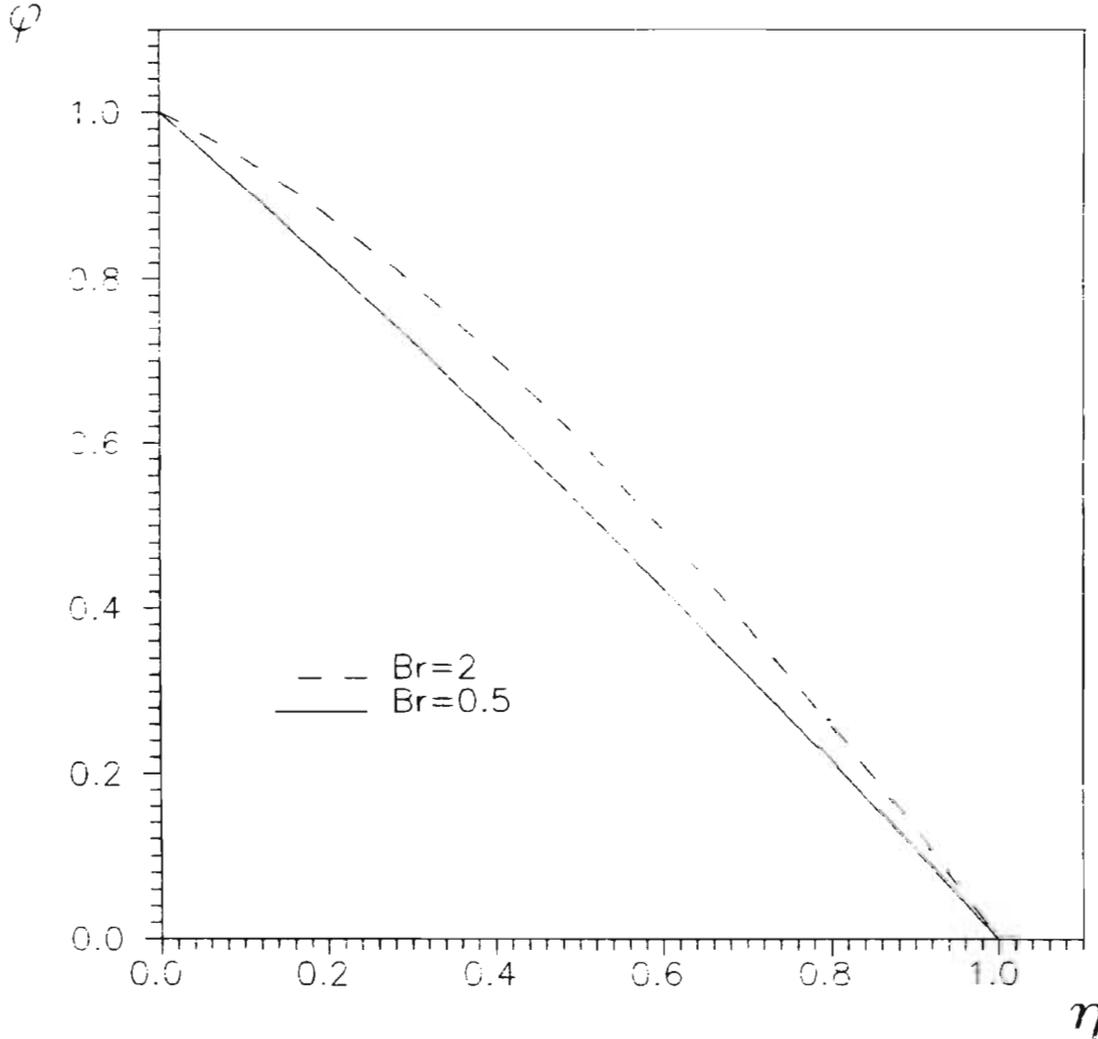


Fig. 5 Perfil de temperatura para beta=1.505

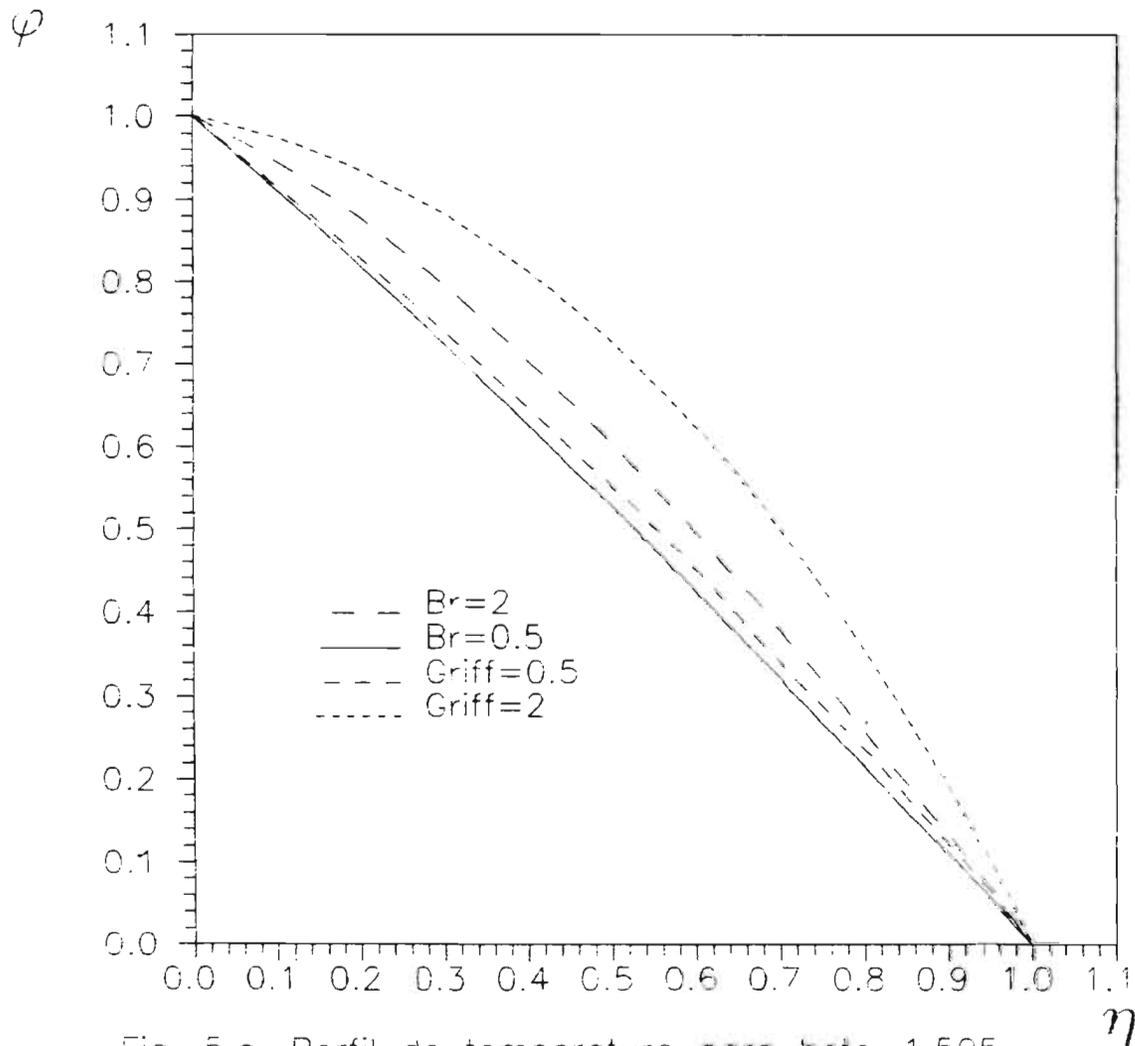


Fig. 5.a. Perfil de temperatura para $\beta=1.505$ comparado con el de Griffin, 4' para $Br=0.5$ y $Br=2$.

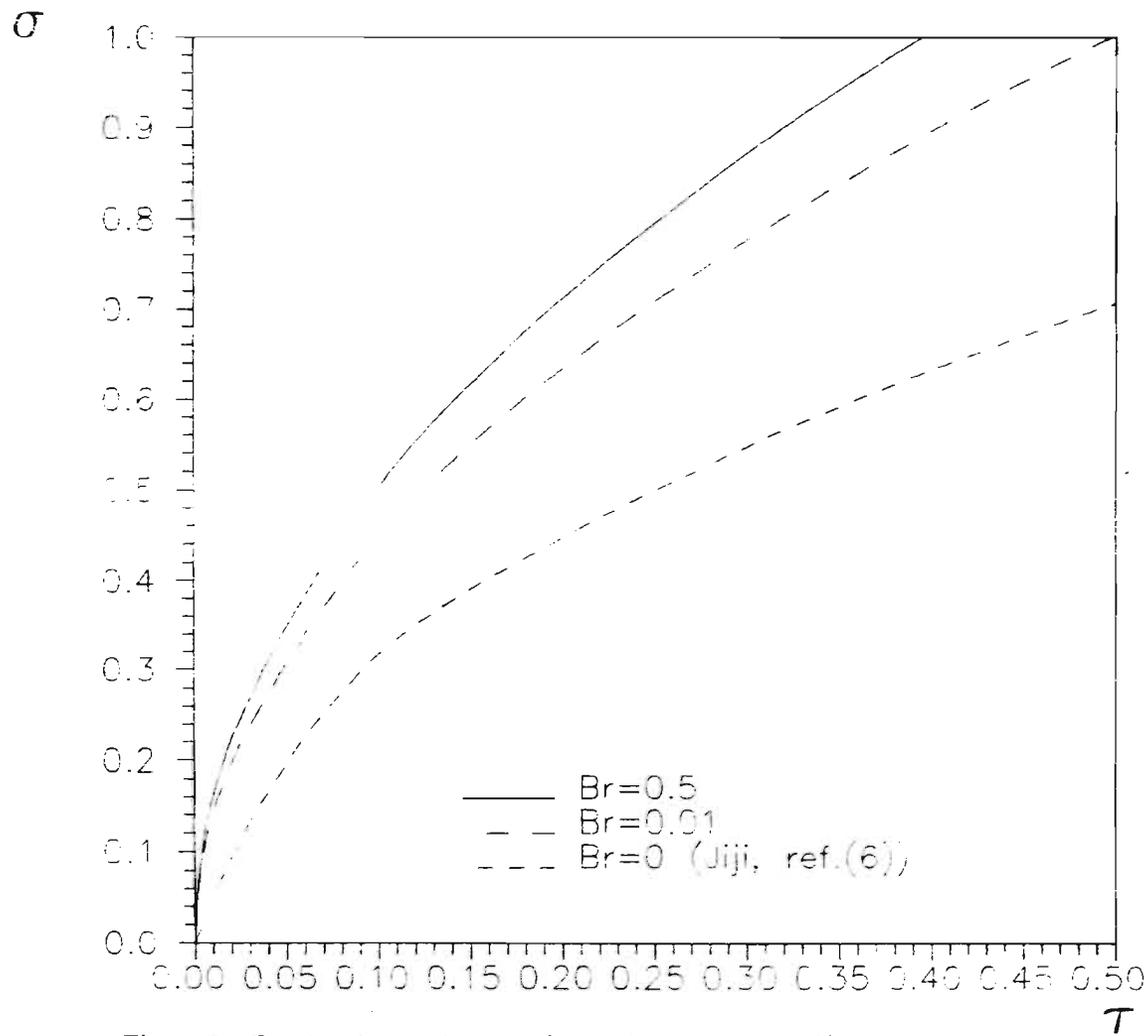


Fig. 6 Evolucion de la interfaz en el tiempo para $\beta=0.00175$

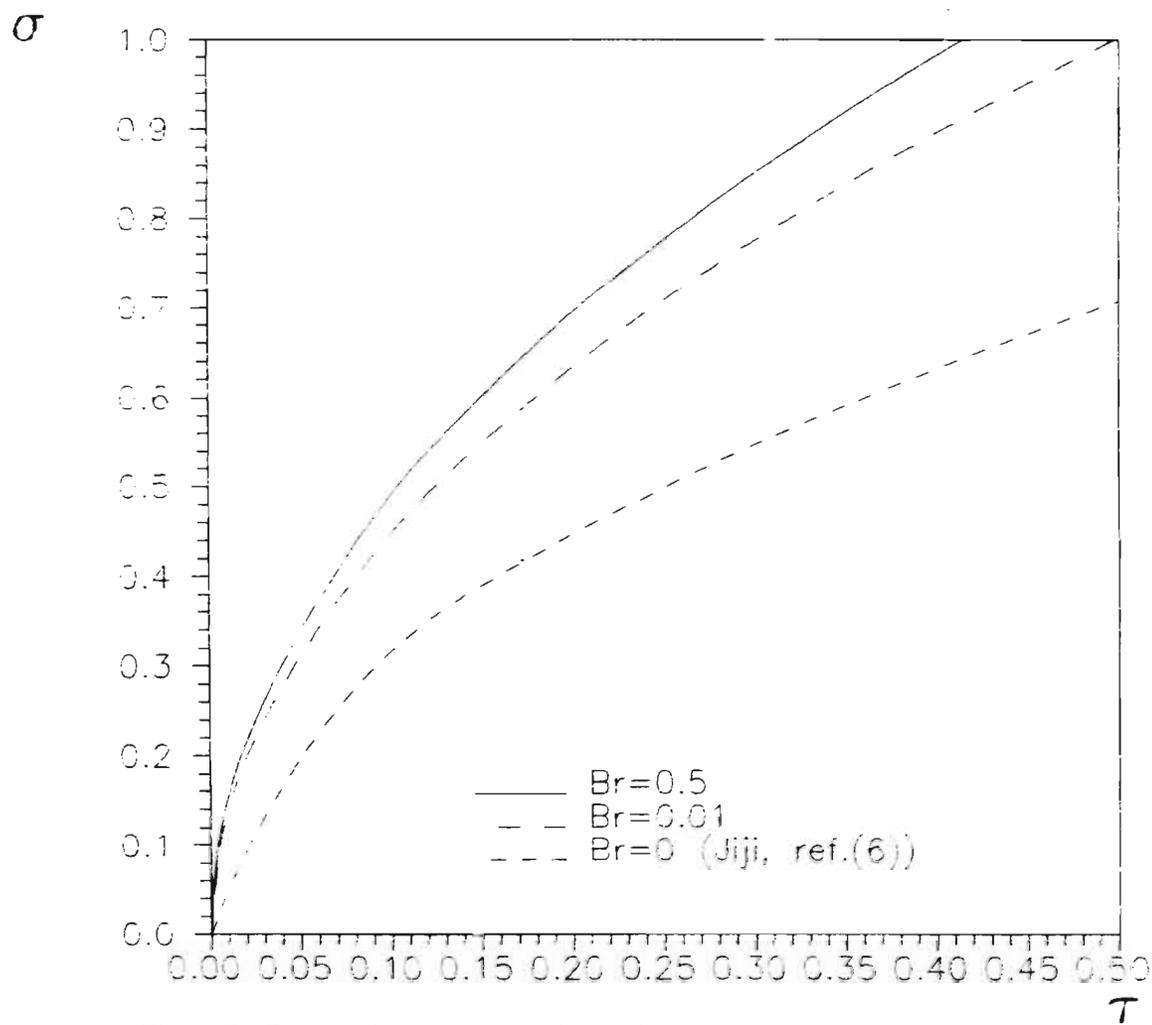


Fig. 7 Evolucion de la interfaz en el tiempo para $\beta=0.35$

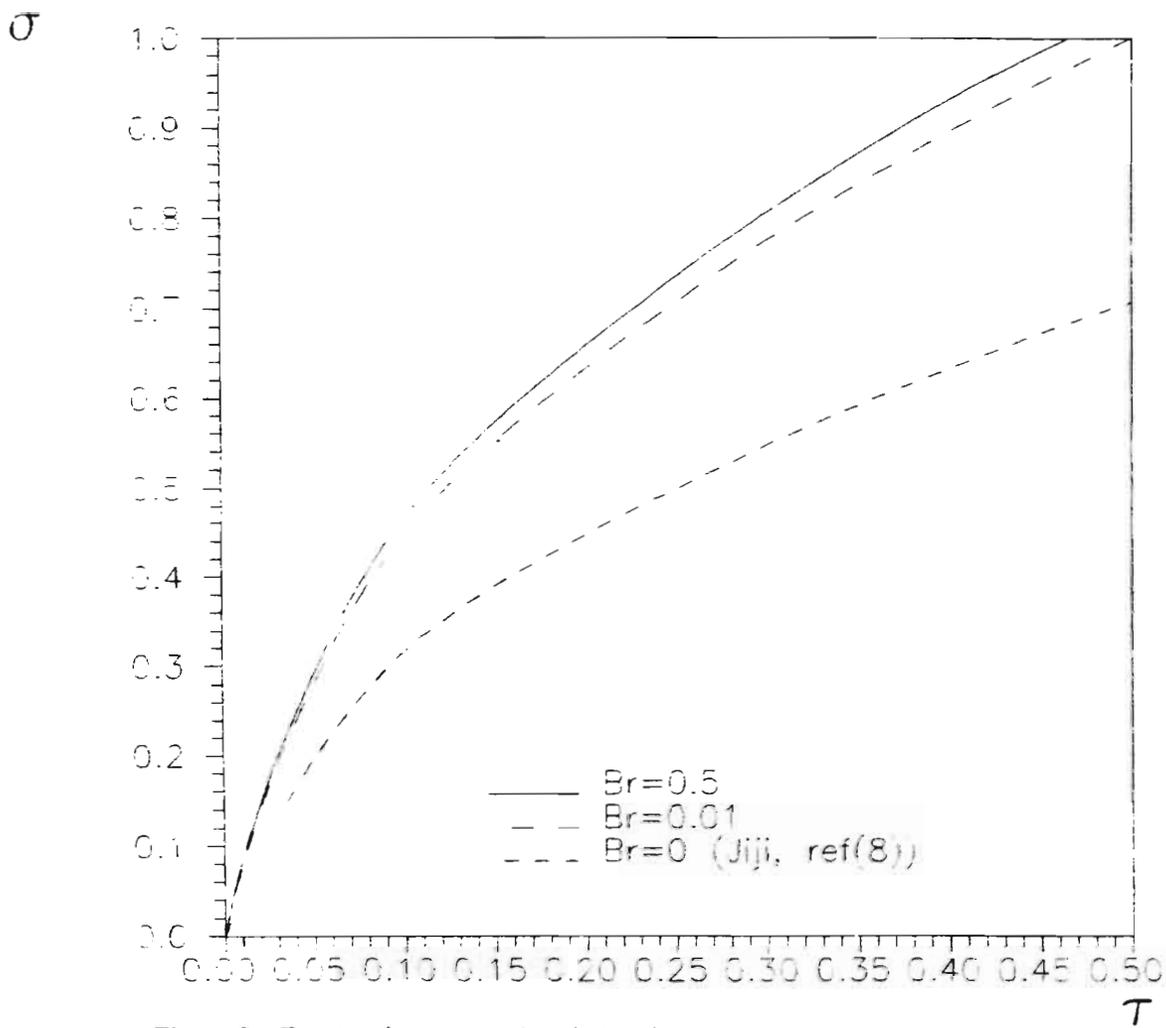


Fig. 8 Evolucion de la interfaz en el tiempo para $\beta = 1.505$

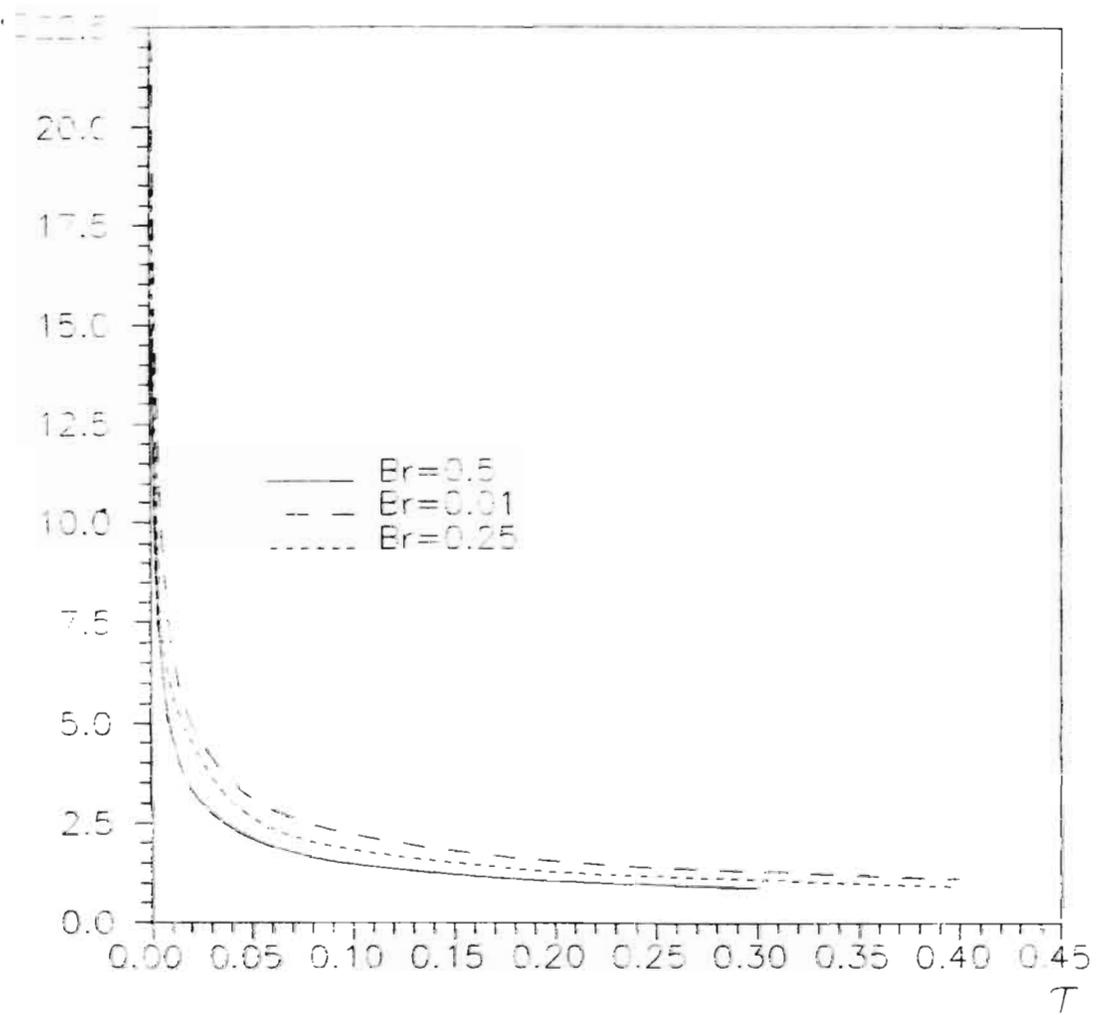


Fig. 9 Evolucion del No. de Nusselt en la placa con el tiempo para $\beta = 0.00175$

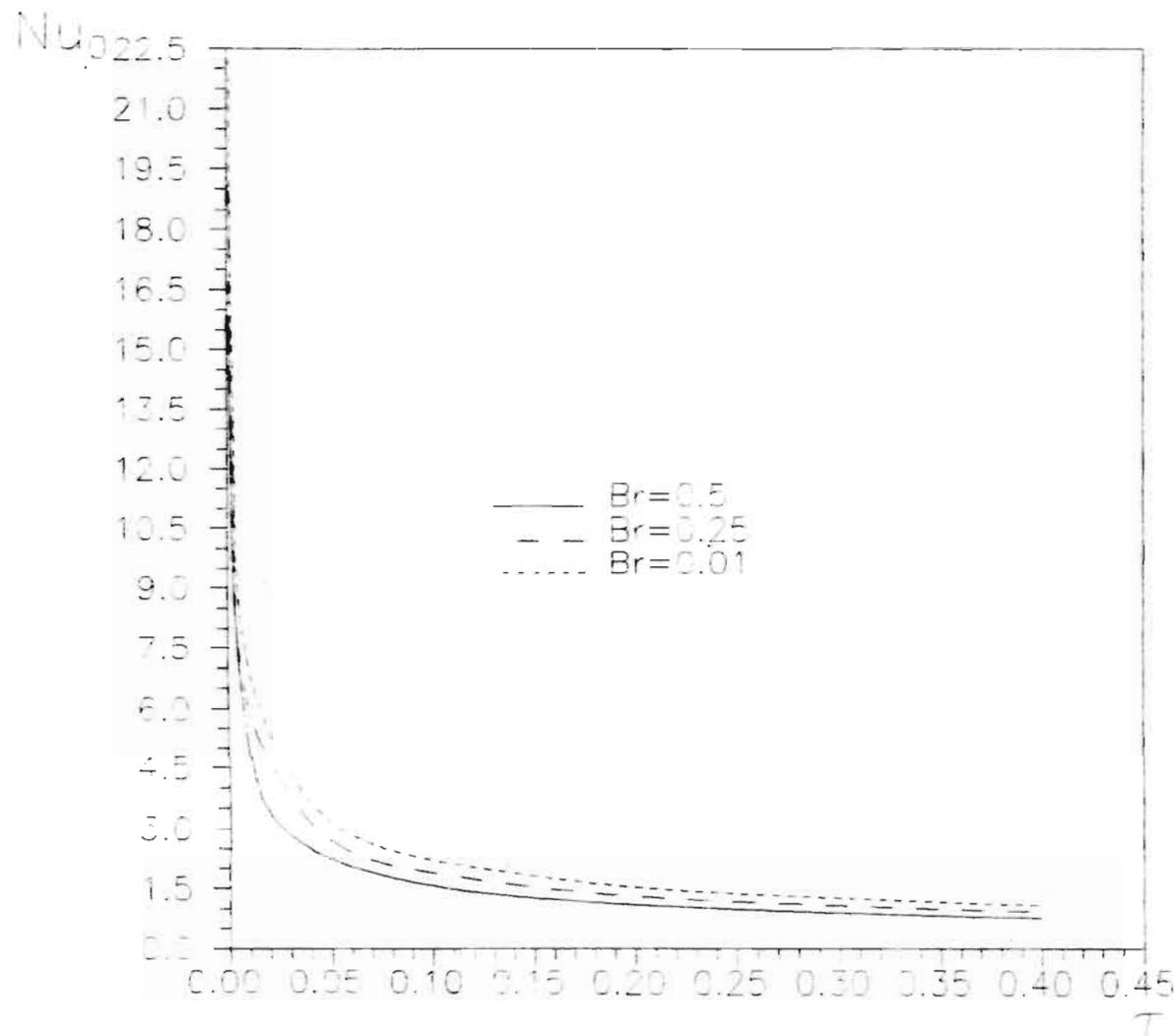


Fig. 10 Evolución del no. de Nusselt en la placa con el tiempo para $\beta = 0.35$

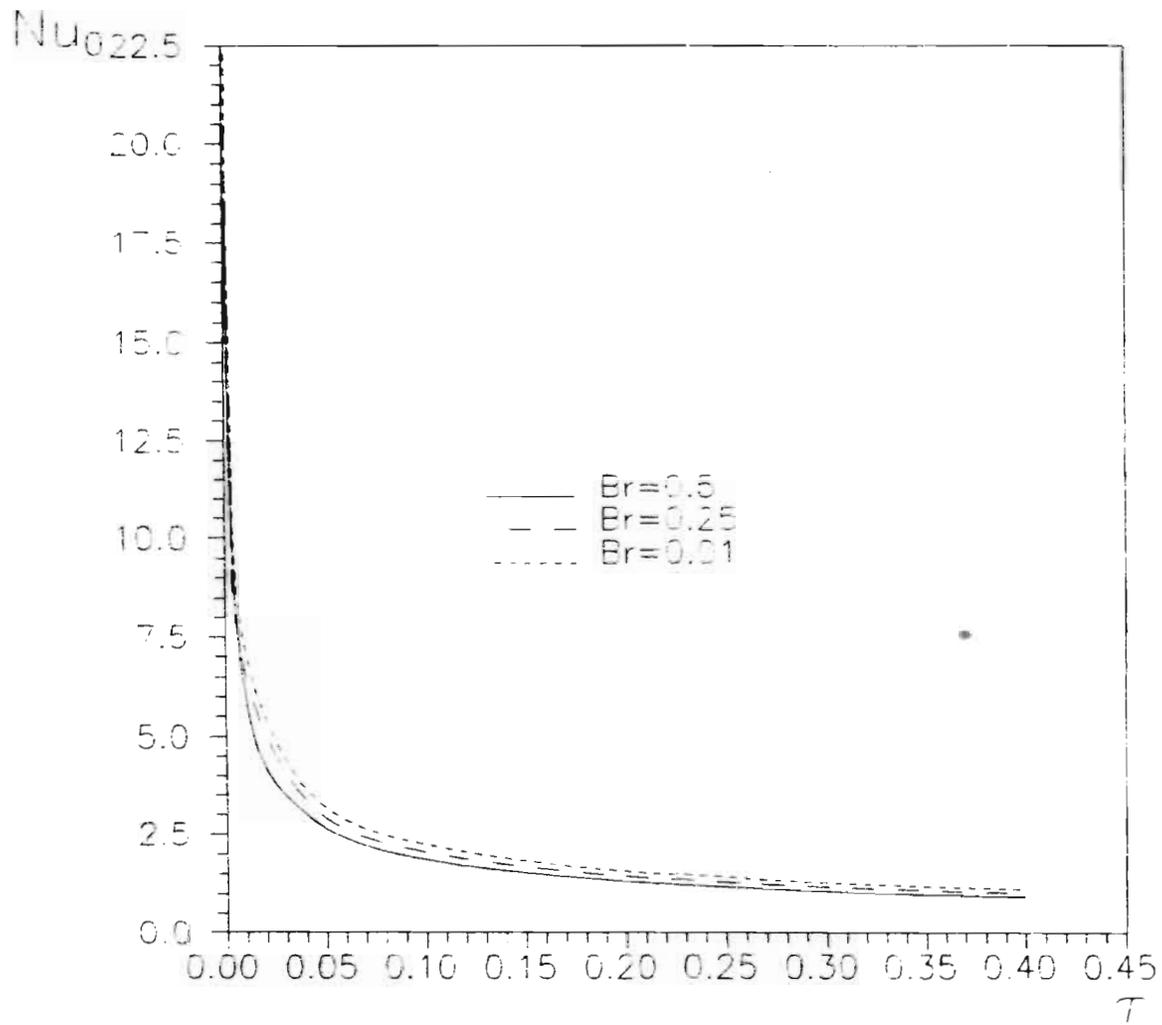


Fig. 11 Evolucion del No. de Nusselt en la placa con el tiempo para $\beta = 1.505$

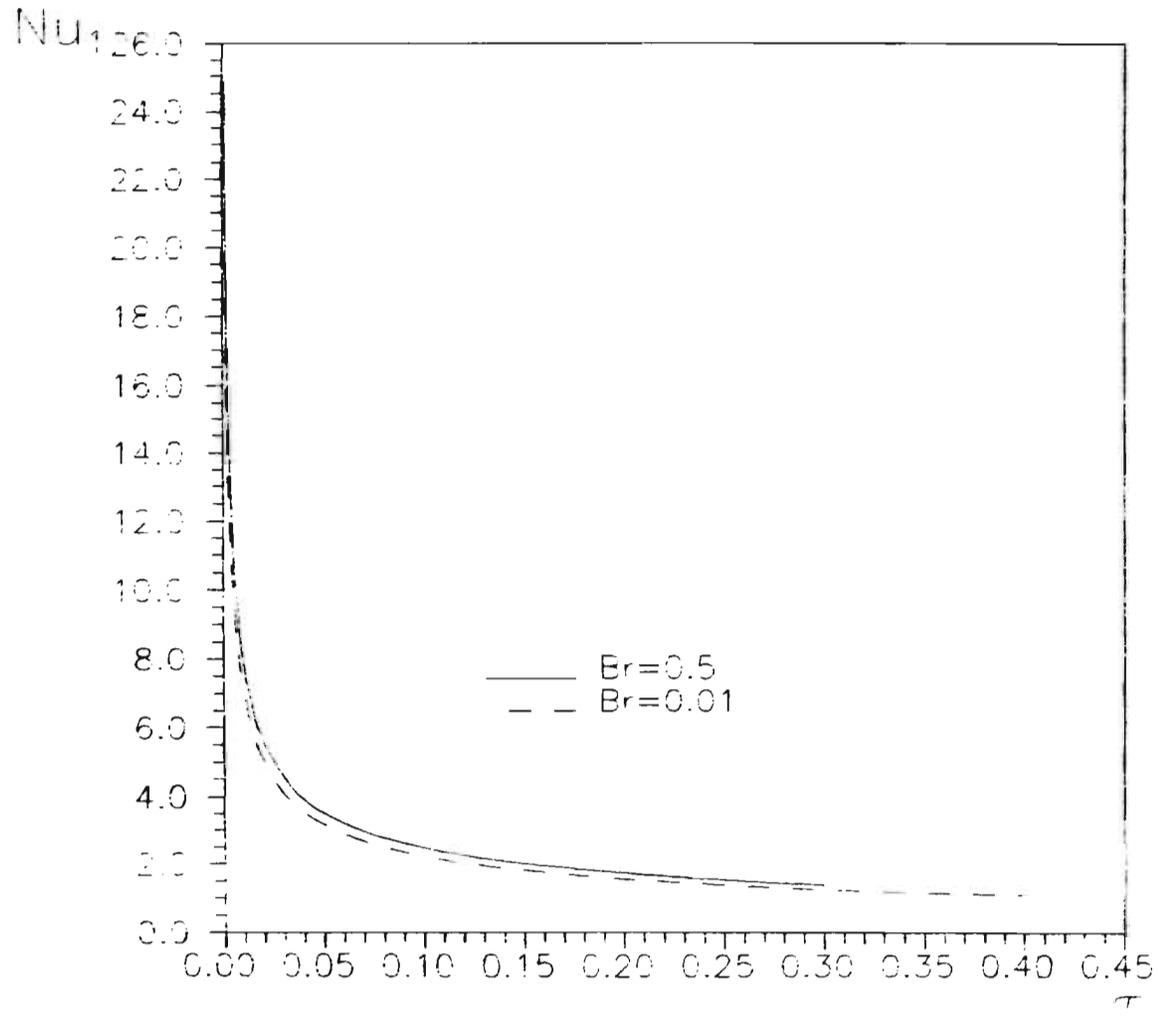


Fig. 12 Evolucion del Nusselt en la interfaz con el tiempo para $\beta = 0.00175$

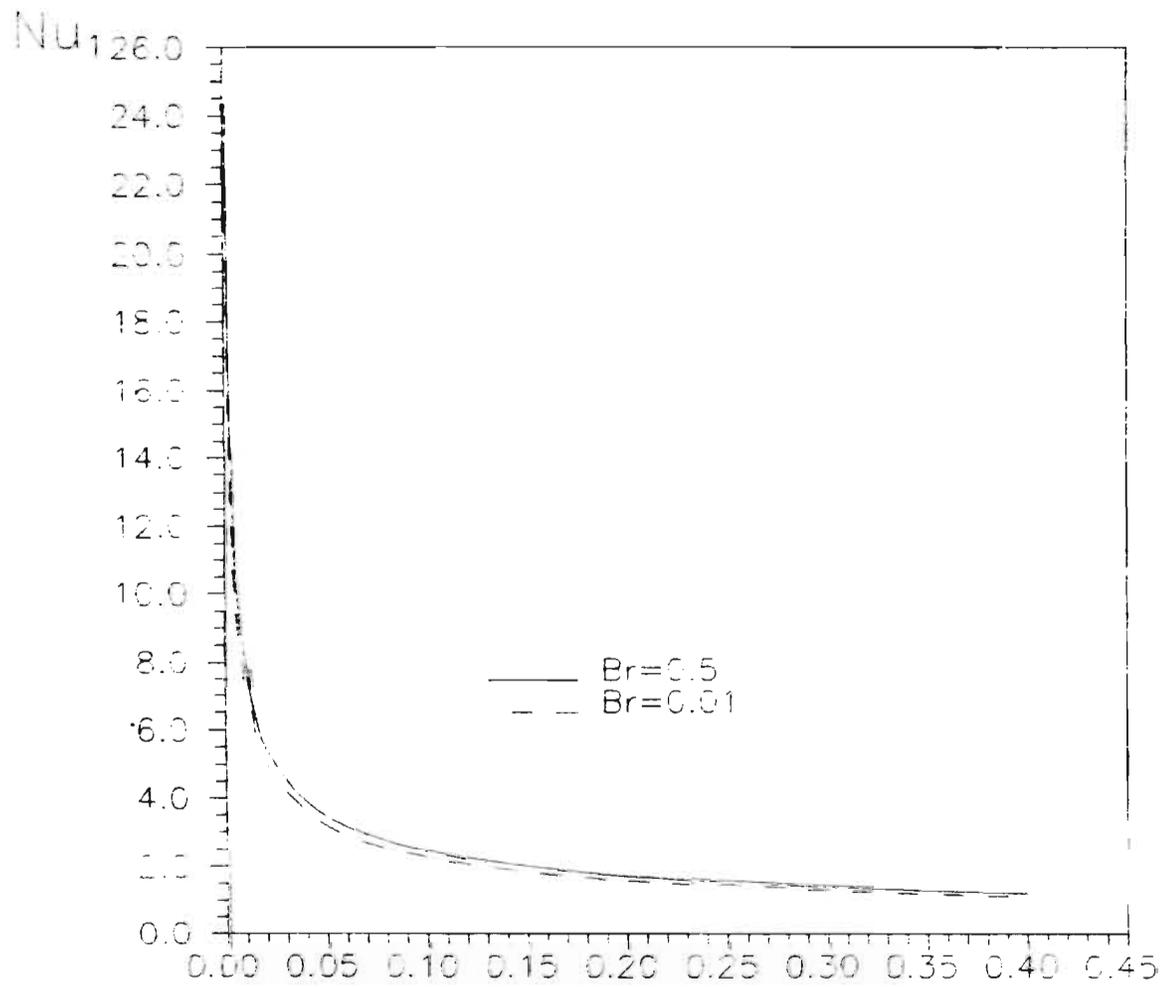


Fig. 13 Evolucion del Nusselt en la interfaz con el tiempo para $\beta=0.35$

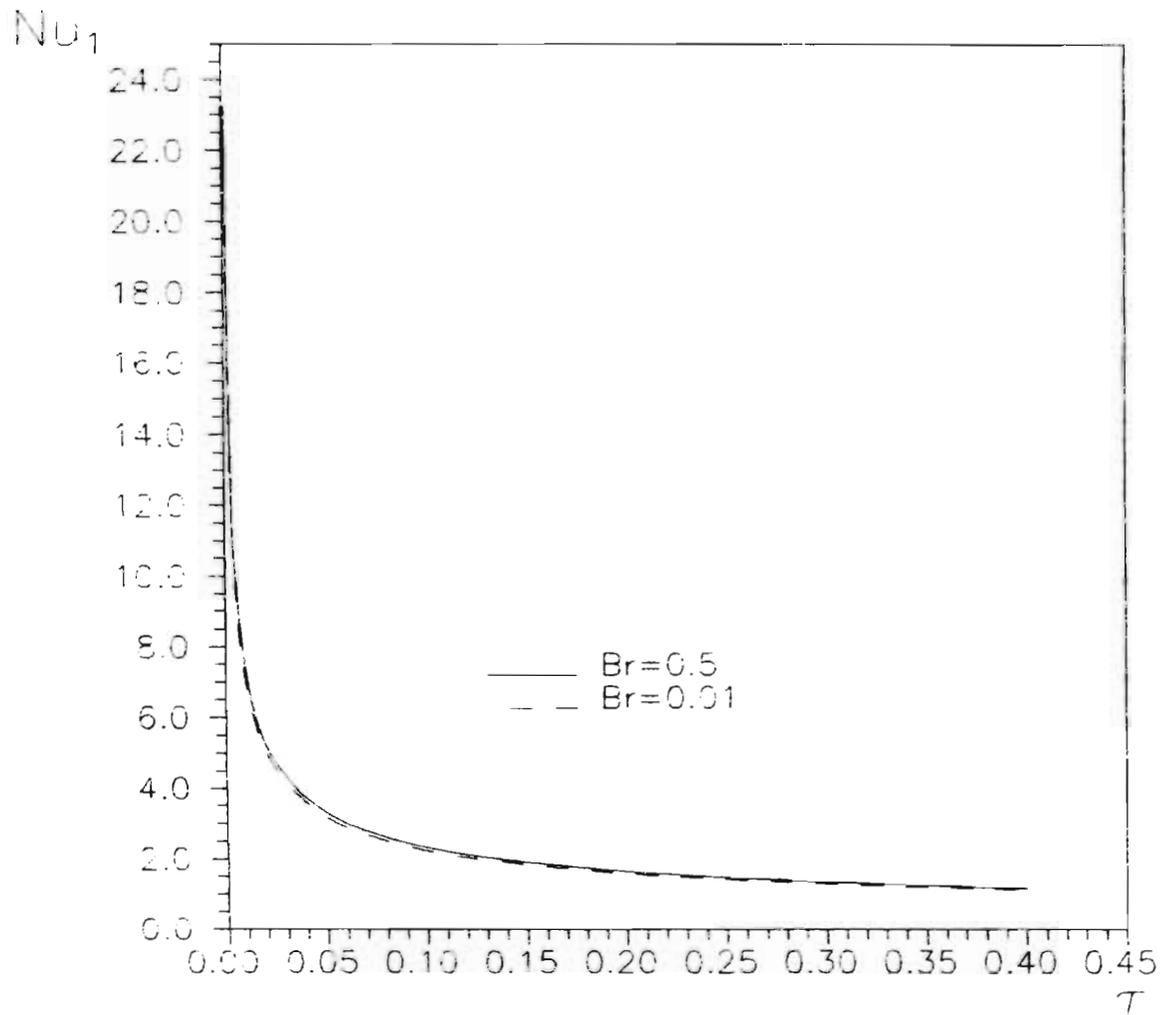


Fig. 14 Evolucion del Nusselt en la interfaz con el tiempo para $\beta=1.505$

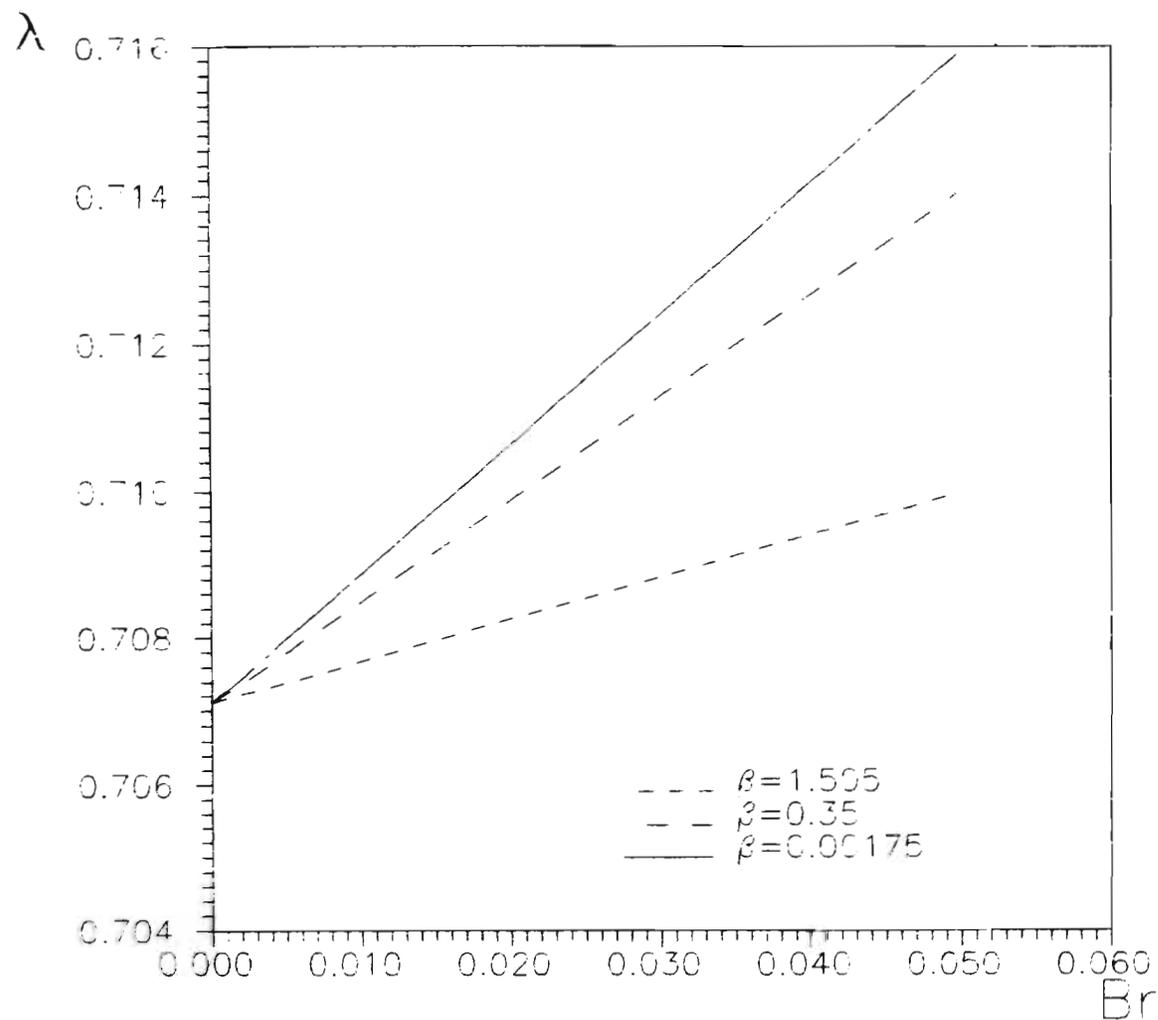


Fig. 15 Evolucion del parametro de licuefaccion con el numero de Brinkman.

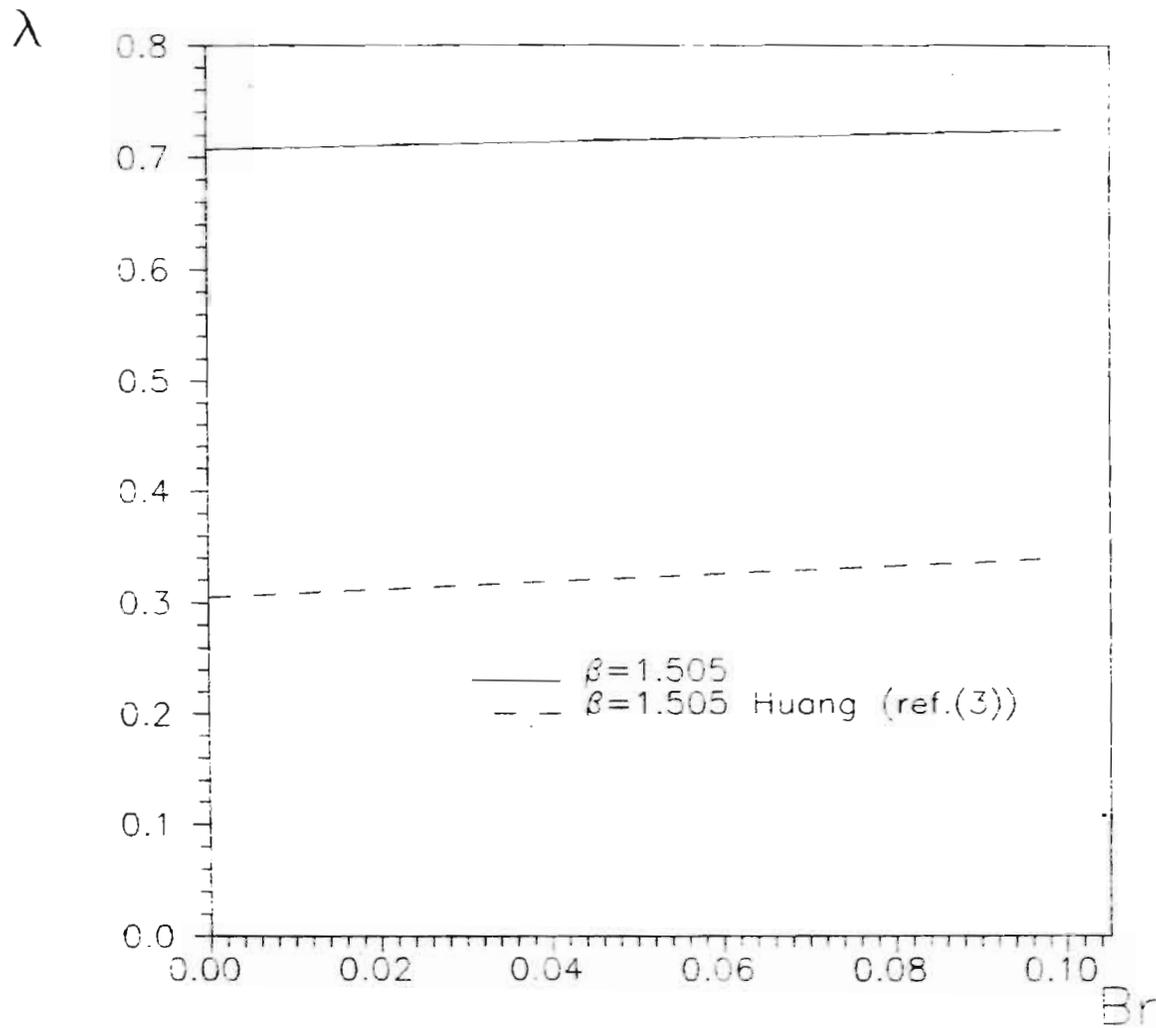


Fig. 16 Evolucion del parametro de licuefaccion comparada con la de Huang (ref. (3)) para beta=1.505 y Stefan=i

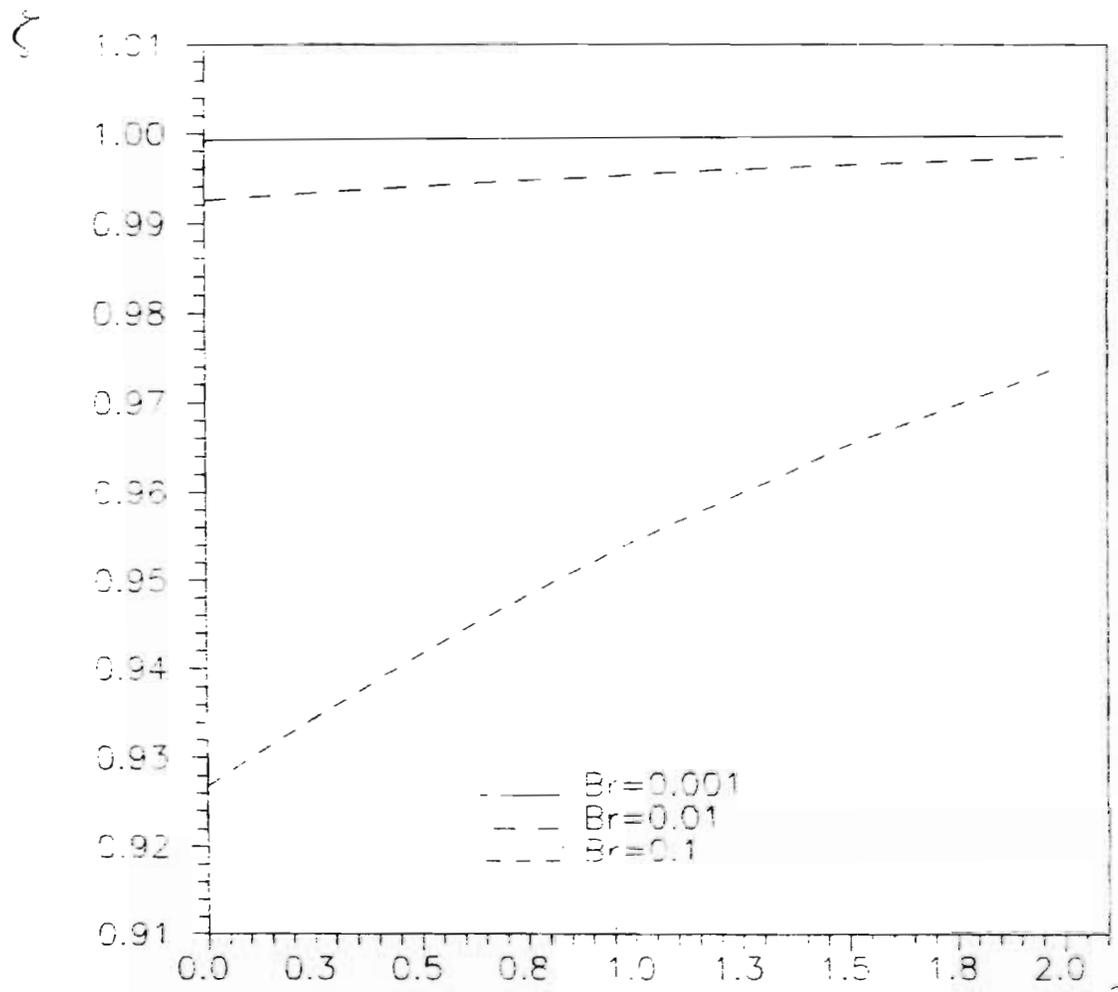


Fig. 17 Eficiencia del proceso contra la diferencia de temperatura para varios números de Brinkman

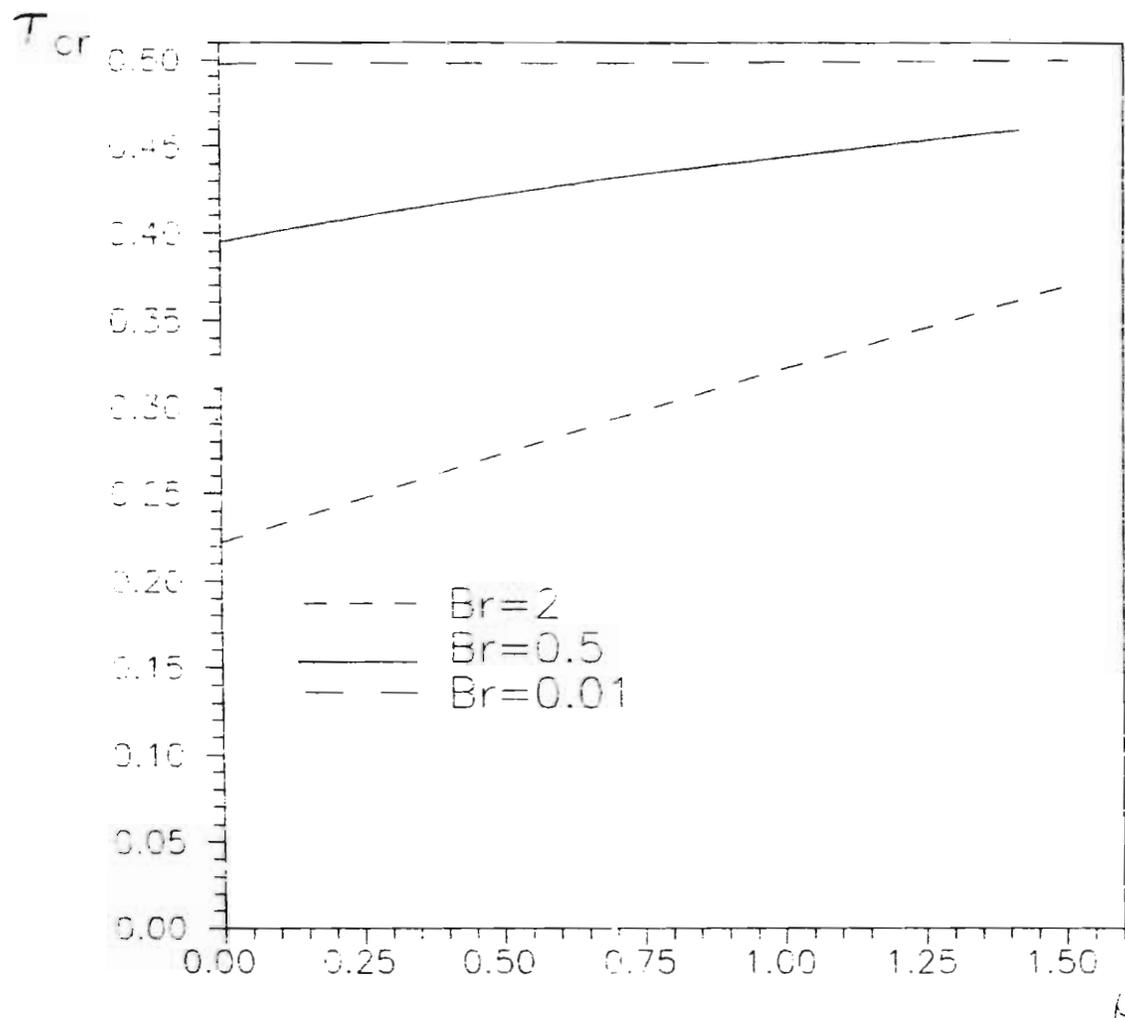


Fig. 18 Evolución del Numero de Brinkman al acercarse a la licuefacción total medida por el tiempo crítico.

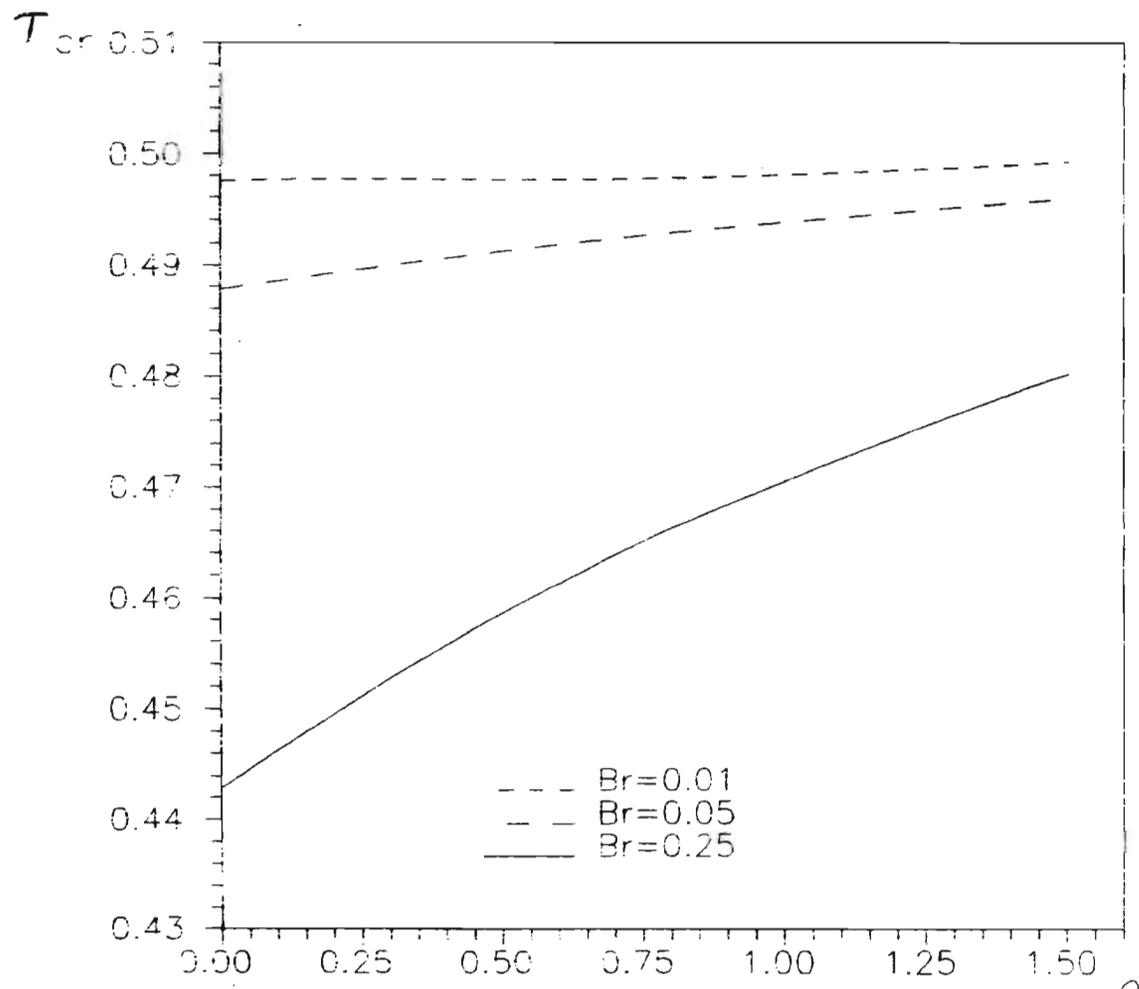


Fig. 19 Evolucion del tiempo critico con beta para Br pequeno.

CAPITULO VI

REFERENCIAS

1. D. C. Miles, J. H. Briston, Polymer Technology, *Chemical Publishing Company, Inc. N. York*. Chapter 24, 1965.
2. Z. Tadmor and I. Klein, Engineering Principles of Plasticating Extrusion, *R. E. Krieger*, 1971.
3. S. C. Huang, Melting of semi-infinite region with viscous heating, *Int. J. of Heat and Mass Transfer*. Vol. 27, No. 8, pp.1337-1343, 1984.
4. Owen M. Griffin, An integral energy-balance model for the melting of solids on a hot moving surface, with application to the transport processes during extrusion, *Int. J. of Heat and Mass transfer*. Vol. 20, pp. 675-683, 1977.
5. J. R. Vermeulen, Gerson and J. Beek, The melting of a bed of polymer granules on a hot moving surface, *Chem. Eng. Science*. Vol. 26, pp. 1445-1455. Pergamon Press, 1971.
6. J. R. Vermeulen, Gerson and J. Beek, The melting of a crystalline polymer in a screw extruder, *Chem. Eng. Science*. Vol. 26, pp. 1457-1465. Pergamon Press, 1971.
7. J. R. A. Pearson, On the melting of solids near a hot moving interface, with particular reference to beds of granular polymers, *Int. J. of Heat and Mass Transfer*. Vol. 19, pp, 405-411, 1976.
8. S. Weinbaum, L. M. Jiji, Singular perturbation theory for melting or freezing in finite domains initially not at the fusion temperature, *J. of Applied Mechanics*. March 1977, pp, 25-30.
9. Martelli Fabrizio G., Twin-Screw Extruders A Basic Understanding, *Van Nostrand Reinhold Company*. 1983.
10. W. Micheli, Extrusion Dies for Plastics and Rubber, Design and Engineer Computations, *Hanser*. 1992.
11. M. Necati Özisick, Heat Conduction, *Wiley Interscience Publication* 1993.

APENDICE A

Balance de masa en la interfase, necesario para obtener la velocidad u_1 .

Sea el siguiente balance de masa en la interfase para una area A:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho_l dv + \int_{S_c} \rho(v \cdot n) dA = 0 \quad (\text{A.1})$$

donde la integral del volumen de control corresponde únicamente al liquido:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho_l dv = \rho_l A \frac{d}{dt} X(t) \quad (\text{A.2})$$

y la integral de la superficie de control es:

$$\int_{S_c} \rho(v \cdot n) dA = \rho_s \frac{d}{dt} X(t) + \rho_l u_1 \quad (\text{A.3})$$

Finalmente al igualar y despejar u_1

$$u_1 = (1 - \rho_s / \rho_l) \frac{d}{dt} X(t) \quad (\text{A.4})$$

A P E N D I C E B

Expansiones asintóticas correspondientes a los órdenes Br^0 , $\epsilon^{1/2}$, Br^1 , ϵ^0 y Br^1 y $\epsilon^{1/2}$. Sean las siguientes ecuaciones diferenciales para la zona externa e interna.

Ecuación de la energía en el líquido:

Br^0 y $\epsilon^{1/2}$:

$$\frac{\partial^2 \phi_{01}}{\partial \eta^2} = 0 \quad (B.1)$$

Br^1 y ϵ^0 :

$$\frac{\partial^2 \phi_{11}}{\partial \eta^2} + e^{-\beta \phi_{00}} \left[\frac{\partial v_{00}}{\partial \eta} \right]^2 = 0 \quad (B.2)$$

Br^1 y $\epsilon^{1/2}$:

$$\frac{\partial^2 \phi_{12}}{\partial \eta^2} + \beta \phi_{01} e^{-\beta \phi_{00}} \left[\frac{\partial v_{00}}{\partial \eta} \right]^2 + 2e^{-\beta \phi_{00}} \left[\frac{\partial v_{00}}{\partial \eta} \frac{\partial v_{01}}{\partial \eta} \right] = 0 \quad (B.3)$$

Ecuación de la cantidad de movimiento en el líquido

Br^0 y $\epsilon^{1/2}$:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ e^{-\beta \phi_{00}} \left[\frac{\partial v_{01}}{\partial \eta} - \phi_{01} \frac{\partial v_{01}}{\partial \eta} \right] \right\} = 0 \quad (B.4)$$

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

Br¹ y ε⁰:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ e^{-\beta\phi_{00}} \left(\frac{\partial v_{11}}{\partial \eta} - \beta\phi_{11} \frac{\partial v_{00}}{\partial \eta} \right) \right\} = 0 \quad (\text{B.5})$$

Br¹ y ε^{1/2}:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ e^{-\beta\phi_{00}} \left(\beta^2 \phi_{01} \phi_{11} \frac{\partial v_{00}}{\partial \eta} - \beta\phi_{11} \frac{\partial v_{01}}{\partial \eta} + \phi_{12} \frac{\partial v_{00}}{\partial \eta} + \frac{\partial v_{12}}{\partial \eta} - \beta\phi_{01} \frac{\partial v_{11}}{\partial \eta} \right) \right\} = 0 \quad (\text{B.6})$$

Ecuación de la energía en el sólido:

Br⁰ y ε^{1/2}:

$$\frac{\partial^2 \theta_{01}}{\partial \xi^2} = 0 \quad (\text{B.7})$$

Br¹ y ε⁰:

$$\frac{\partial^2 \theta_{11}}{\partial \xi^2} = 0 \quad (\text{B.8})$$

Br¹ y ε^{1/2}:

$$\frac{\partial^2 \theta_{11}}{\partial \xi^2} = 0 \quad (\text{B.9})$$

Ecuación de la interfaz:

Br^0 y $\epsilon^{1/2}$.

$$\begin{aligned}
 & -\gamma \left[\sigma_{00} \frac{\partial \theta_{01}}{\partial \xi} + \sigma_{01} \frac{\partial \theta_{00}}{\partial \xi} \right] \Big|_{\xi=0} - \left\{ (1-\sigma_{00}) \frac{\partial \phi_{01}}{\partial \eta} + \sigma_{01} \frac{\partial \phi_{00}}{\partial \eta} \right\} \Big|_{\eta=1} = \\
 & = (\sigma_{00} - \sigma_{00}^2) \frac{d}{d\tau} \sigma_{01} + (1-\sigma_{00}) \sigma_{01} \frac{d}{d\tau} \sigma_{00} - \sigma_{00} \sigma_{01} \frac{d}{d\tau} \sigma_{00} \quad (B.10)
 \end{aligned}$$

Br^1 y ϵ^0 :

$$\begin{aligned}
 & -\gamma \left[\sigma_{00} \frac{\partial \theta_{11}}{\partial \xi} + \sigma_{11} \frac{\partial \theta_{00}}{\partial \xi} \right] \Big|_{\xi=0} - \left\{ (1-\sigma_{00}) \frac{\partial \phi_{11}}{\partial \eta} - \sigma_{11} \frac{\partial \phi_{00}}{\partial \eta} \right\} \Big|_{\eta=1} = \\
 & = (\sigma_{00} - \sigma_{00}^2) \frac{d}{d\tau} \sigma_{11} + (1-\sigma_{00}) \sigma_{11} \frac{d}{d\tau} \sigma_{00} - \sigma_{00} \sigma_{11} \frac{d}{d\tau} \sigma_{00} \quad (B.11)
 \end{aligned}$$

Br^1 y $\epsilon^{1/2}$:

$$\begin{aligned}
 & -\gamma \left[\sigma_{01} \frac{\partial \theta_{11}}{\partial \xi} + \sigma_{00} \frac{\partial \theta_{12}}{\partial \xi} + \sigma_{12} \frac{\partial \theta_{00}}{\partial \xi} + \sigma_{11} \frac{\partial \theta_{01}}{\partial \xi} \right] \Big|_{\xi=0} - \\
 & - \left\{ (1-\sigma_{00}) \frac{\partial \phi_{12}}{\partial \eta} - \sigma_{11} \frac{\partial \phi_{01}}{\partial \eta} - \sigma_{12} \frac{\partial \phi_{00}}{\partial \eta} - \sigma_{01} \frac{\partial \phi_{11}}{\partial \eta} \right\} \Big|_{\eta=1} = \\
 & = (\sigma_{00} - \sigma_{00}^2) \frac{d}{d\tau} \sigma_{12} + (1-\sigma_{00}) \sigma_{11} \frac{d}{d\tau} \sigma_{11} - \sigma_{00} \sigma_{01} \frac{d}{d\tau} \sigma_{11} + \\
 & + \sigma_{00} \sigma_{12} \frac{d}{d\tau} \sigma_{00} + \sigma_{11} \sigma_{01} \frac{d}{d\tau} \sigma_{00} + \sigma_{00} \sigma_{11} \frac{d}{d\tau} \sigma_{01} - \sigma_{11} \sigma_{01} \frac{d}{d\tau} \sigma_{00} + \\
 & + (1-\sigma_{00}) \sigma_{11} \frac{d}{d\tau} \sigma_{01} + (1-\sigma_{00}) \sigma_{12} \frac{d}{d\tau} \sigma_{00} \quad (B.12)
 \end{aligned}$$

Para la zona externa se tiene la ecuación de la energía en el líquido:

Br^0 y $\epsilon^{1/2}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial \eta^2}{}_{01} = 2\sigma'_{00} \sigma'_{01} \frac{\partial \phi'}{\partial \theta}{}_{00} + \sigma'_{00} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial \theta^2}{}_{01} - \eta \left(\sigma'_{00} \left[\frac{d}{d\theta} \sigma'_{00} \frac{\partial \phi'}{\partial \eta}{}_{00} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{d}{d\theta} \sigma'_{01} \frac{\partial \phi'}{\partial \eta}{}_{00} \right] + \sigma'_{01} \frac{d}{d\theta} \sigma'_{00} \frac{\partial \phi'}{\partial \eta}{}_{00} \right) \end{aligned} \quad (B.13)$$

Br^1 y ϵ^0 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial \eta^2}{}_{11} + e^{-\beta \phi'}{}_{00} \frac{\partial}{\partial \eta} v'{}_{01}{}^2 = 2\sigma'_{00} \sigma'_{11} \frac{\partial \phi'}{\partial \theta}{}_{00} + \sigma'_{00} \frac{\partial \phi'}{\partial \theta}{}_{11} - \\ - \eta \left(\sigma'_{00} \left[\frac{d}{d\theta} \sigma'_{11} \frac{\partial \phi'}{\partial \eta}{}_{00} + \frac{d}{d\theta} \sigma'_{00} \frac{\partial \phi'}{\partial \eta}{}_{11} \right] + \sigma'_{11} \frac{d}{d\theta} \sigma'_{00} \frac{\partial \phi'}{\partial \eta}{}_{00} \right) \end{aligned} \quad (B.14)$$

Br^1 y $\epsilon^{1/2}$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 \phi'}{\partial \eta^2} + e^{-\beta \phi'} \left\{ \left[2 \frac{\partial v'}{\partial \eta} \frac{\partial v'}{\partial \eta} \right] - \beta \phi' \frac{\partial v'}{\partial \eta} \right\} = \\
 & = 2\sigma'_{00} \sigma'_{12} \frac{\partial \phi'}{\partial \theta} + 2\sigma'_{01} \sigma'_{11} \frac{\partial \phi'}{\partial \theta} + 2\sigma'_{00} \sigma'_{11} \frac{\partial \phi'}{\partial \theta} + \\
 & + \sigma'_{00} \frac{2\partial \phi'}{\partial \theta} + 2\sigma'_{01} \sigma'_{00} \frac{\partial \phi'}{\partial \theta} - \eta \left\{ \sigma'_{00} \frac{d\sigma'_{11}}{d\theta} \frac{\partial \phi'}{\partial \eta} + \right. \\
 & + \sigma'_{01} \left(\frac{d\sigma'_{11}}{d\theta} \frac{\partial \phi'}{\partial \eta} + \frac{d\sigma'_{00}}{d\theta} \frac{\partial \phi'}{\partial \eta} \right) + \sigma'_{12} \frac{d\sigma'_{00}}{d\theta} \frac{\partial \phi'}{\partial \eta} + \\
 & + \sigma'_{00} \left(\frac{d\sigma'_{00}}{d\theta} \frac{\partial \phi'}{\partial \eta} + \frac{d\sigma'_{01}}{d\theta} \frac{\partial \phi'}{\partial \eta} + \frac{d\sigma'_{12}}{d\theta} \frac{\partial \phi'}{\partial \eta} \right) + \\
 & \left. + \sigma'_{11} \left(\frac{d\sigma'_{00}}{d\theta} \frac{\partial \phi'}{\partial \eta} + \frac{d\sigma'_{01}}{d\theta} \frac{\partial \phi'}{\partial \eta} \right) \right\} \quad (B.15)
 \end{aligned}$$

La ecuación de cantidad de movimiento en el líquido:

Br^0 y $\epsilon^{1/2}$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ e^{-\beta \phi'} \left(\frac{\partial v'}{\partial \eta} - \phi' \frac{\partial v'}{\partial \eta} \right) \right\} = \frac{1}{Pr} \left[2\sigma'_{00} \sigma'_{01} \frac{\partial v'}{\partial \theta} + \right. \\
 & + \sigma'_{00} \frac{2\partial v'}{\partial \theta} - \eta \left\{ \sigma'_{00} \left(\frac{d\sigma'_{01}}{d\theta} \frac{\partial v'}{\partial \eta} + \frac{d\sigma'_{00}}{d\theta} \frac{\partial v'}{\partial \eta} \right) + \right. \\
 & \left. \left. + \sigma'_{00} \frac{d\sigma'_{00}}{d\theta} \frac{\partial v'}{\partial \eta} \right\} \right] \quad (B.16)
 \end{aligned}$$

Br¹ y ε⁰:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ e^{-\beta \phi'}_{00} \left(\frac{\partial v'_{11}}{\partial \eta} - \beta \phi'_{11} \frac{\partial v'_{00}}{\partial \eta} \right) \right\} &= \frac{1}{Pr} \left[2\sigma'_{00} \sigma'_{11} \frac{\partial v'_{00}}{\partial \theta} + \right. \\
 &+ \sigma'_{00} \frac{\partial v'_{11}}{\partial \theta} - \eta \left\{ \sigma'_{00} \left(\frac{d\sigma'_{00}}{d\theta} \frac{\partial v'_{11}}{\partial \eta} + \frac{d\sigma'_{11}}{d\theta} \frac{\partial v'_{00}}{\partial \eta} \right) + \right. \\
 &\left. \left. + \sigma'_{11} \frac{d\sigma'_{00}}{d\theta} \frac{\partial v'_{00}}{\partial \eta} \right\} \right] \quad (B.16)
 \end{aligned}$$

Br¹ y ε^{1/2}:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ e^{-\beta \phi'}_{00} \left(\phi'_{12} \frac{\partial v'_{00}}{\partial \eta} - \beta \phi'_{11} \frac{\partial v'_{01}}{\partial \eta} - \beta \phi'_{01} \frac{\partial v'_{11}}{\partial \eta} + \frac{\partial v'_{00}}{\partial \eta} + \right. \right. \\
 \beta^2 \phi'_{01} \phi'_{11} \frac{\partial v'_{00}}{\partial \eta} \left. \right\} &= \frac{1}{Pr} \left[2 \left(\frac{\partial v'_{00}}{\partial \theta} \left(\sigma'_{00} \sigma'_{12} + \sigma'_{01} \sigma'_{11} \right) + \right. \right. \\
 &+ \sigma'_{00} \sigma'_{01} \frac{\partial v'_{01}}{\partial \eta} \left. \right) + \sigma'_{00} \frac{\partial v'_{12}}{\partial \theta} + \sigma'_{01} \frac{\partial v'_{11}}{\partial \theta} - \eta \left\{ \right. \\
 &\sigma'_{11} \left(\frac{d\sigma'_{01}}{d\theta} \frac{\partial v'_{00}}{\partial \eta} + \frac{d\sigma'_{00}}{d\theta} \frac{\partial v'_{01}}{\partial \eta} \right) + \sigma'_{12} \frac{d\sigma'_{00}}{d\theta} \frac{\partial v'_{00}}{\partial \eta} + \\
 &+ \sigma'_{00} \left(\frac{d\sigma'_{11}}{d\theta} \frac{\partial v'_{01}}{\partial \eta} + \frac{d\sigma'_{12}}{d\theta} \frac{\partial v'_{00}}{\partial \eta} \right) + \sigma'_{01} \frac{d\sigma'_{11}}{d\theta} \frac{\partial v'_{00}}{\partial \eta} + \\
 &\left. \left. + \sigma'_{00} \left(\frac{d\sigma'_{00}}{d\theta} \frac{\partial v'_{12}}{\partial \theta} + \frac{d\sigma'_{01}}{d\theta} \frac{\partial v'_{11}}{\partial \theta} \right) + \sigma'_{01} \frac{d\sigma'_{00}}{d\theta} \frac{\partial v'_{01}}{\partial \eta} \right\} \right] \quad (B.17)
 \end{aligned}$$

Ecuación de la energía en el sólido:

Br^0 y $\epsilon^{1/2}$:

$$\frac{\partial^2 \theta'_{01}}{\partial \xi^2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_s} \left[-2 \left[1 - \sigma'_{00} \right] \frac{\partial \theta'_{00}}{\partial \theta} + \left[1 - \sigma'_{00} \right]^2 \frac{\partial \theta'_{01}}{\partial \theta} - (1 - \xi) \left\{ (1 - \sigma'_{00}) \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \left(\frac{d \sigma'_{00}}{d \theta} \frac{\partial \theta'_{01}}{\partial \xi} + \frac{d \sigma'_{01}}{d \theta} \frac{\partial \theta'_{00}}{\partial \xi} \right) - \sigma'_{00} \frac{d \sigma'_{00}}{d \theta} \frac{\partial \theta'_{00}}{\partial \xi} \right\} \right] \quad (B.18)$$

Br^1 y ϵ^0 :

$$\frac{\partial^2 \theta'_{11}}{\partial \xi^2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_s} \left[-2 \left[1 - \sigma'_{00} \right]^2 \sigma'_{11} \frac{\partial \theta'_{00}}{\partial \theta} + \left[1 - \sigma'_{00} \right]^2 \frac{\partial \theta'_{11}}{\partial \theta} - (1 - \xi) \cdot \right. \\ \left. \cdot \left\{ (1 - \sigma'_{00}) \left(\frac{d \sigma'_{00}}{d \theta} \frac{\partial \theta'_{11}}{\partial \xi} + (1 - \sigma'_{00}) \frac{d \sigma'_{11}}{d \theta} \frac{\partial \theta'_{00}}{\partial \xi} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + (1 - \sigma'_{11}) \left(\frac{d \sigma'_{00}}{d \theta} \frac{\partial \theta'_{00}}{\partial \xi} \right) \right\} \right] \quad (B.19)$$

Br^1 y $\epsilon^{1/2}$:

$$\frac{\partial^2 \theta'_{12}}{\partial \xi^2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_s} \left[\left[1 - \sigma'_{00} \right]^2 \left(-2 \left(\sigma'_{12} \frac{\partial \theta'_{00}}{\partial \theta} + \sigma'_{11} \frac{\partial \theta'_{01}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial \theta'_{12}}{\partial \theta} \right) - \right. \\ \left. - 2 \sigma'_{01} \sigma'_{00} \frac{\partial \theta'_{11}}{\partial \theta} - 2 \sigma'_{01} \sigma'_{11} \frac{\partial \theta'_{01}}{\partial \theta} - (1 - \xi) \cdot \left\{ (1 - \sigma'_{00}) \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \left(\frac{d \sigma'_{12}}{d \theta} \frac{\partial \theta'_{00}}{\partial \xi} + \frac{d \sigma'_{11}}{d \theta} \frac{\partial \theta'_{01}}{\partial \xi} + \frac{d \sigma'_{00}}{d \theta} \frac{\partial \theta'_{12}}{\partial \xi} + \frac{d \sigma'_{01}}{d \theta} \frac{\partial \theta'_{11}}{\partial \xi} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + (1 - \sigma'_{11}) \left(\frac{d \sigma'_{00}}{d \theta} \frac{\partial \theta'_{01}}{\partial \xi} + \frac{d \sigma'_{01}}{d \theta} \frac{\partial \theta'_{00}}{\partial \xi} \right) - \sigma'_{12} \frac{d \sigma'_{00}}{d \theta} \frac{\partial \theta'_{00}}{\partial \xi} - \right. \right. \\ \left. \left. - \sigma'_{01} \left(\frac{d \sigma'_{00}}{d \theta} \frac{\partial \theta'_{11}}{\partial \xi} + \frac{d \sigma'_{11}}{d \theta} \frac{\partial \theta'_{00}}{\partial \xi} \right) \right\} \right] \quad (B.20)$$

La ecuación de la interfaz es:

Br^0 y $\epsilon^{1/2}$:

$$\sigma'_{00} \frac{d}{d\theta} \sigma'_{00} - 2\sigma'_{00} \sigma'_{01} \frac{d}{d\theta} \sigma'_{00} + (\sigma'_{00} - \sigma'_{00}{}^2) \frac{d}{d\theta} \sigma'_{01} = 0 \quad (B.21)$$

En este caso la ecuación no ofrece solución para σ'_{01} , entonces se busca en el siguiente término de la expansión para ϵ^1 , esto es:

Br^0 y ϵ^1 :

$$-\gamma \sigma'_{00} \left. \frac{\partial \theta'_{00}}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} - \left. \frac{\partial \phi'_{00}}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = \sigma'_{01} \frac{d}{d\theta} \sigma'_{01} \quad (B.22)$$

Br^1 y ϵ^0 :

$$\sigma'_{01} \frac{d}{d\theta} \sigma'_{00} - 2\sigma'_{00} \sigma'_{11} \frac{d}{d\theta} \sigma'_{00} + (\sigma'_{00} - \sigma'_{00}{}^2) \frac{d}{d\theta} \sigma'_{11} = 0 \quad (B.23)$$

El siguiente orden permite obtener la solución de σ'_{11} que corresponde a $\epsilon^{1/2}$ se tiene:

Br^1 y $\epsilon^{1/2}$

$$\sigma'_{01} \frac{d}{d\theta} \sigma'_{11} + \sigma'_{12} \frac{d}{d\theta} \sigma'_{00} - 2\sigma'_{00} \left(\sigma'_{01} \frac{d}{d\theta} \sigma'_{11} + \sigma'_{11} \frac{d}{d\theta} \sigma'_{12} + \sigma'_{12} \frac{d}{d\theta} \sigma'_{00} \right) - 2\sigma'_{01} \sigma'_{11} \frac{d}{d\theta} \sigma'_{00} = 0 \quad (B.24)$$

$$\begin{aligned}
& \text{Br}^1 y e^1 \\
& - \gamma \sigma'_{00} \left. \frac{\partial \theta'_{11}}{\partial \xi} \right]_{\xi=0} - \gamma \sigma'_{11} \left. \frac{\partial \theta'_{00}}{\partial \xi} \right]_{\xi=0} - (1 - \sigma'_{00}) \left. \frac{\partial \phi'_{11}}{\partial \eta} \right]_{\eta=1} + \\
& + \sigma'_{11} \left. \frac{\partial \phi'_{00}}{\partial \eta} \right]_{\eta=1} = \sigma'_{01} \left(\frac{d \sigma'_{12}}{d\theta} - \sigma'_{01} \frac{d \sigma'_{11}}{d\theta} \right) + \sigma'_{12} \frac{d \sigma'_{01}}{d\theta} - \\
& - 2\sigma'_{00} \left(\sigma'_{01} \frac{d \sigma'_{12}}{d\theta} + \sigma'_{12} \frac{d \sigma'_{11}}{d\theta} + \sigma'_{11} \frac{d \sigma'_{11}}{d\theta} \right) - \\
& - 2\sigma'_{01} \left(\sigma'_{11} \frac{d \sigma'_{01}}{d\theta} + \sigma'_{12} \frac{d \sigma'_{00}}{d\theta} \right) \tag{B.25}
\end{aligned}$$