



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

APLICACION DE LA TRANSFORMADA
DE FOURIER EN LA ESPECTROSCOPIA

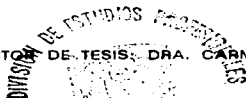
T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
M A T E M A T I C O
P R E S E N T A :

MARIA DEL SOCORRO NOVA COVARRUBIAS



DIRECCION DE TESIS: DRA. CARMEN CISNEROS GUDINO



MEXICO, D. FACULTAD DE CIENCIAS
ASOCIACION ESCOLAR

1997

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"APLICACION DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER EN LA ESPECTROSCOPIA"

realizado por MARIA DEL SOCORRO NOVA COVARRUBIAS

con número de cuenta 8053283-9 , pasante de la carrera de MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

Propietario

Propietario

Suplente

Suplente

DRA. CARMEN CISNEROS GUDIÑO

DR. PABLO BARRERA SANCHEZ

DR. ALVARO LORENZO SALAS BRITO

DRA. MA. EMILIA CABALLERO ACOSTA

DR. JAVIER PAEZ CÁRDENAS

Consejo Departamental de Matemáticas

M. EN C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA

[Handwritten signatures and initials]
ALVARO LORENZO SALAS BRITO
MA. EMILIA CABALLERO ACOSTA
JAVIER PAEZ CÁRDENAS

DEDICO ESTE TRABAJO A:

Mis padres con mí más sincero agradecimiento por su invaluable apoyo.

Fede con cariño por su comprensión y apoyo.

Mis hermanos :

Agustín.

Ana Bertha.

Patricia.

Teresa.

Javier.

Arturo.

QUIERO AGRADECER A:

La Universidad Nacional Autónoma de México, la formación académica que me ha brindado durante estos años.

CONACYT, por el apoyo otorgado para la realización de este trabajo.

DGAPA, por las facilidades concedidas para la elaboración de este trabajo.

Colegio de Ciencias y Humanidades, Plantel Sur por el tiempo concedido para la conclusión de este trabajo.

Dra. Carmen Cisneros Gudiño por la confianza depositada en mí durante todo este tiempo.

Dr. Alvaro Lorenzo Salas Brito por su dedicación y paciencia durante la elaboración y revisión de este trabajo.

Dr. Pablo Barrera Sánchez, a la Dra. Ma. Emilia Caballero, al Dr. Javier Paez Cárdenas, por sus valiosos comentarios y sugerencias para el mejoramiento de este trabajo.

Dr. Rodolfo Martínez por su valiosa cooperación para la impresión final de este trabajo.

INDICE

INTRODUCCIÓN	1
CAPITULO 1 TRANSFORMADA DE FOURIER	6
Introducción	6
1.1 Generalidades	6
1.2 Transformada de Fourier	8
1.3 Transformada Inversa de Fourier	9
1.4 Convolución	10
1.5 Correlación	12
1.6 La serie de Fourier	17
CAPITULO 2 TÉCNICAS DE FOURIER	22
Introducción	22
2.1 Discretización	22
2.2 Transformada discreta de Fourier	24
2.3 Transformada rápida de Fourier (FFT)	29
2.3.1 Factorización	34
2.4 Ejemplo ilustrativo	37
CAPITULO 3 ANÁLISIS DE DATOS	45
Introducción	45
3.1 Sobre los datos analizados	45
3.2 Comportamiento estadístico	47
3.3 Afirmación de la periodicidad	51
3.4 Análisis de características	52
3.5 Estabilidad	61
3.6 Caracterización de atractores	61
3.7 Caracterización fractal	66
CAPITULO 4 CONCLUSIONES	70
REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA	72

Introducción

La esencia del método científico es la aceptación del experimento como arbitro supremo de lo que se considera como verdadero. El producto del experimento es, en muchas ocasiones, un conjunto de datos que es necesario interpretar para situarlos en el contexto apropiado a la luz de los conocimientos científicos de la época. Por lo tanto, es fundamental contar con herramientas para el análisis y la interpretación de los resultados experimentales. Todo ello resulta necesario (mas nunca suficiente) para cumplir con la esencia del método científico.

En épocas no muy lejanas, los experimentos típicos realizados en institutos dedicados profesionalmente a la investigación, daban lotes de datos que, con relativa facilidad, podían manifestar su contenido. Casi siempre encontrar las reglas de correspondencia entre los conjuntos de datos que integraban la "acción-reacción" investigada, se lograba tras la aplicación de métodos más o menos simples; por ejemplo, graficando y ajustando por el método de mínimos cuadrados o calculando valores centrales y varianza, en suma, aplicando técnicas estadísticas de cierto calibre. En el presente, esta situación es cada vez menos frecuente: el análisis requiere de técnicas más complejas. Con esto no se quiere decir que estos métodos ya no se usen o que sean obsoletos, sino más bien se pretende dejar en claro, que estos métodos se han tenido que reforzar con herramientas más poderosas para enfrentar las dificultades actuales.

A medida que los experimentos se complican, a medida que el nivel de especialización aumenta, el investigador se enfrenta a la necesidad de contar con un mayor arsenal para realizar el análisis de los datos, pues cada vez esta tarea resulta más difícil de realizar. Esta dificultad tiene diferentes orígenes y manifestaciones y el objeto de este trabajo es proponer un método para el análisis y manejo de

datos, que permita determinar cualitativamente algunas propiedades del conjunto y poder atacar dos de los problemas que cada vez son más frecuentes:

- El manejo de cantidades abrumadoras de datos.
- La complejidad intrínseca del conjunto de datos.

El problema que significa la manipulación de conjuntos enormes de datos solo se puede resolver fácilmente a través del empleo ya generalizado de computadoras y de programas de cómputo que son cada vez es más eficientes. En el desarrollo del trabajo se empleó, además de las herramientas típicas de la matemática, como pueden ser las de la estadística y del análisis, una computadora PC-386 y diferentes programas: el recetario numérico en Pascal y el lenguaje de uso genérico para manipulación simbólica, y otros usos, Mathematica. Durante el desarrollo de este trabajo se emplearon constantemente los portentosos métodos desarrollados siguiendo la ruta que nos señaló Fourier: series, transformada directa e inversa, espectro de potencias, correlación, etc.

Es fundamental aclarar que las herramientas aquí utilizadas de la transformada de Fourier no son conceptos recientes. lo que si es reciente es la forma como se calcula. Ya que para calcular la transformada discreta de Fourier se realiza una cantidad enorme de operaciones y aún usando la computadora para calcularla se requería de algo que eficientara dicho cálculo. El algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT) nos permite calcular a la transformada discreta de Fourier con un mínimo de operaciones, aprovechando las propiedades de simetría asociadas.

El conjunto de datos analizado se seleccionó de tal manera que cumpla con las condiciones necesarias para lograr el objetivo del trabajo y que al mismo tiempo sea representativo de lo que típicamente es común en la investigación actual. El conjunto de datos esta integrado por 8192 valores que se registraron durante el

desarrollo de un experimento que tenía como objetivo estudiar el comportamiento caótico de un sistema aparentemente trivial, un grifo mal cerrado. Véase la representación esquemática del experimento en la caricatura que se encuentra al final de esta Introducción. Conjuntos similares de valores se podrían obtener al registrar el comportamiento de las descargas de un río en el océano, el comportamiento de la bolsa de valores, la distribución de neutrones en el núcleo de un reactor atómico, la concentración de algún contaminante en el agua de un río, la presión arterial de una persona enferma, etc. Sólo se presentan los resultados obtenidos al hacer uso de las técnicas propuestas para el análisis de los datos.

La idea central es comprender el comportamiento de un sistema que evoluciona desde condiciones estables a condiciones caóticas y tipificar los comportamientos característicos que se pueden observar al ocurrir esta transición.

Este trabajo se desarrollará analizando una serie de tiempos obtenida a partir de un experimento real realizado en el Laboratorio de Física Moderna de la Facultad de Ciencias durante 1990. El experimento consistió en registrar el tiempo que transcurría entre una gota que se desprendería y la siguiente al descargarse una bureta. La idea detrás de este experimento fué iniciar el estudio de fenómenos caóticos a nivel experimental (Núñez-Yépez *et al.* 1991), las variables como el nivel de líquido, abertura de la válvula, posición, temperatura, etc., se mantuvieron bajo control, entonces, por la información de que se disponía (Martien *et al.* 1985), era razonable esperar que el tiempo de descarga entre gota y gota tuviera un comportamiento caótico.

El conjunto de valores que se obtiene del experimento son el resultado de las mediciones efectuadas. Para medir se necesita comparar lo que se mide contra algo de la misma especie que sirve como unidad patrón y esta unidad patrón puede tener una influencia capital en las conclusiones que se pueden obtener a partir de la

información encerrada en el conjunto de valores. Un sistema caótico, por ejemplo, se caracteriza por una gran sensibilidad a las condiciones iniciales; esta enorme sensibilidad produce generalmente una apariencia compleja con una estructura geométrica no trivial. La complejidad se manifiesta por el comportamiento del sistema en el espacio de fases (por ejemplo, a nivel de exponentes de Liapunov o de valores para la entropía de Kolmogorov-Sinai) y en propiedades geométricas de sus atractores, como la existencia de autosimilaridad y una dimensión fraccionaria o fractal.

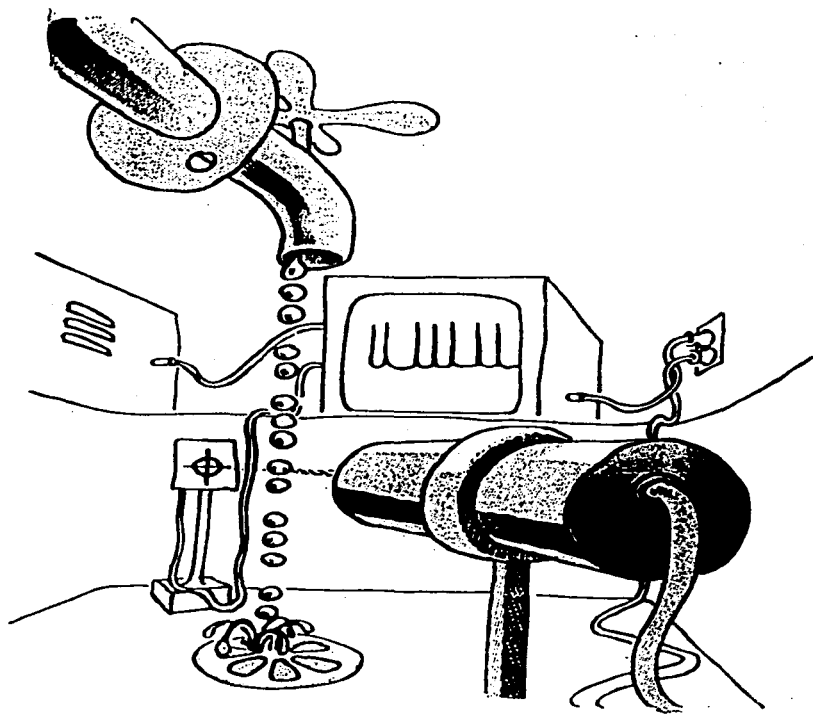
La organización del trabajo es la siguiente:

En el capítulo 1 se introducen y explican someramente las herramientas matemáticas que serán utilizadas.

En el capítulo 2 se introducen los conceptos necesarios para aplicar las herramientas de Fourier introducidas en 1 a un conjunto de datos experimentales. La herramienta crucial aquí es el algoritmo de Cooley-Tukey para calcular en forma eficiente transformadas discretas de Fourier. Este algoritmo, llamado comúnmente FFT, se introduce, se discute y se ejemplifica en este capítulo.

En el capítulo 3 se aplican los métodos mencionados en los capítulos 1 y 2 para analizar un conjunto de datos experimentales. Se determina cualitativamente su tipo de comportamiento y algunas características adicionales del conjunto.

Finalmente, en el capítulo 4 se presentan las conclusiones generales del análisis hecho en este trabajo.



Capítulo 1

Transformada de Fourier

Introducción

En este capítulo se definen los conceptos de señal, transformada de Fourier, transformada inversa de Fourier. Se relaciona a la transformada de Fourier con el cálculo de la convolución. Se relaciona a la transformada de Fourier con el cálculo de la correlación, la autocorrelación. Se definen los espectros de frecuencia y energía y se caracteriza a la serie de Fourier que integran las herramientas utilizadas en la elaboración de este trabajo.

1.1 Generalidades

En un sentido general, un sistema es un grupo de objetos que pueden interactuar y que están en el centro de la atención, esto es, un sistema no es más que todo aquello que es de interés en un momento dado. Un sistema puede ser a su vez, una porción de un sistema mayor.

Para los propósitos de este trabajo una señal se define como una función univaluada del tiempo, es decir a cada instante de tiempo asignado (la variable independiente) corresponde un único valor de la función (la variable dependiente). Este valor puede ser un número real, en cuyo caso se tiene una señal de valor real o puede ser complejo y se tendrá una señal de valor complejo. En cualquier caso la variable que supondremos como independiente, el tiempo, tiene siempre valor real. Se puede utilizar la notación compleja para describir señales que requieren de dos variables, por ejemplo $x(t)$ e $y(t)$. Por lo tanto, la notación compleja es conveniente para describir fenómenos bidimensionales *lineales* como el movimiento

circular, la propagación de ondas en el plano, etc, aunque todas las señales que correspondan a cantidades físicamente observables deben tener valor real. Sin embargo, ¿porqué usar notación compleja si las observaciones tienen valor real? En muchos análisis, los modelos y cálculos matemáticos son a menudo más simples e incluso parecen más obvios, si se usa notación compleja; la limitante principal de esta representación es que para sacar de ella todo el provecho posible, el fenómeno debe ser lineal.

Las señales sinusoidales desempeñan un papel primordial en el análisis de los sistemas eléctricos y de comunicación. Tales señales $f(t)$ se pueden representar por la función del tiempo, t :

$$f(t) = A \cos(\omega t + \theta)$$

donde A es la amplitud, θ es la fase y ω es la rapidez de cambio de fase o frecuencia de la señal en radianes por segundo. También se puede expresar a f en ciclos por segundo (Hz), donde $\omega = 2\pi f$.

Matemáticamente, un sistema es una regla que se usa para asignar una función $g(t)$ como efecto de salida a la aplicación de una función $f(t)$ (llamada la entrada), esto es:

$$g(t) = F[f(t)]$$

donde $F[]$ es la regla. Esta regla puede estar en forma de operación algebraica, de ecuación diferencial, integral, funcional, etc. En dos sistemas conectados en cascada, la salida del primero es la entrada del segundo, formando así un nuevo sistema

$$g(t) = F_2[F_1[f(t)]] = (F_2 \circ F_1)(t)$$

en donde la función asociada es la composición de las funciones asociadas originalmente a los sistemas en cascada. Un sistema es lineal si vale el principio de superposición, esto es si:

$$g_1(t) = F\{f_1(t)\}$$

y

$$g_2(t) = F\{f_2(t)\}$$

entonces

$$F\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 g_1(t) + a_2 g_2(t)$$

donde a_1 y a_2 son constantes numéricas. Un sistema es lineal si satisface la ecuación anterior. Cualquier sistema que no lo haga no es lineal (Stremmer, 1990, p 8-13).

1.2 Transformada de Fourier

La Transformada de Fourier es una transformación lineal que cumple con la definición de un sistema. Iniciaremos por plantear las ecuaciones básicas y citar las condiciones de aplicabilidad de la Transformada de Fourier.

La Transformada de Fourier de una función $h(t)$ está definida por la expresión

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-2\pi i f t} dt \quad 1.1$$

Si la integral existe para cada valor del parámetro f , entonces la ecuación (1.1) define a $H(f)$, llamada la transformada de $h(t)$ (Brigham, 1974, p 11-12). En general la transformada de Fourier es una cantidad compleja.

$$H(f) = R(f) + iJ(f) = |H(f)|e^{i\theta(f)}$$

Donde $R(f)$ es la parte real de la transformada y $I(f)$ es la parte imaginaria de la transformada. $|H(f)|$ es la amplitud o espectro de Fourier de $h(t)$ que está definida simplemente por:

$$|H(f)| = \sqrt{R(f)^2 + I(f)^2}$$

$\theta(f)$ es el ángulo fase de la transformada de Fourier y esta dado por:

$$\tan^{-1} \left(\frac{I(f)}{R(f)} \right)$$

1.3 La Transformada Inversa de Fourier

La transformada inversa de Fourier se define así:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{i2\pi ft} df \quad 1.2$$

La transformada inversa permite determinar a una función que depende del tiempo de su Transformada de Fourier. Si las funciones $h(t)$ y $H(f)$ están relacionadas por las ecuaciones 1.1 y 1.2, entonces las dos funciones serán consideradas como una pareja de transformadas de Fourier.

$$h(t) \iff H(f)$$

Existencia de la Integral de Fourier.

Para que una función $h(t)$ posea una transformada de Fourier es suficiente y necesario que la función $h(t)$ sea una función generalizada. Puesto que la clase de las funciones generalizadas se puede construir para que incluya a todas las funciones localmente integrables, esto significa que cualquier función localmente integrable tendrá una transformada asignada, aunque la transformada no será necesariamente otra función ordinaria (Lighthill, 1962, p 15-29).

A continuación se incluyen varios teoremas importantes relacionados con la Transformada de Fourier.

1.4 Convolución

Se define a la convolución de dos funciones $x(t)$ y $h(t)$ como

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad 1.3$$

Una de las herramientas más importantes en el análisis científico es la correspondencia que hay entre la convolución y la transformada de Fourier. Esta correspondencia es conocida como el teorema de la convolución, el cual relaciona la convolución de dos funciones en el dominio del tiempo con la transformada de Fourier de su producto en el dominio de la frecuencia.

Teorema de Convolución. Si $x(t)$ tiene como transformada de Fourier a $X(f)$ y $h(t)$ tiene como transformada de Fourier a $H(f)$ entonces $x(t) * h(t)$ tiene la transformada de Fourier $X(f)H(f)$.

Demostración:

Como

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

entonces calculando la transformada de Fourier de ambos lados de la ecuación.

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)e^{-j2\pi ft}dt \right\} d\tau \quad 1.4$$

Realizando el cambio de variable $\sigma = t - \tau$ obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)e^{-j2\pi f(\sigma+\tau)}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)e^{-j2\pi f\sigma}e^{-j2\pi f\tau}d\sigma$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{-i2\pi f\tau} \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) e^{-j2\pi\sigma f} d\sigma \\
 &= e^{-i2\pi f\tau} H(f)
 \end{aligned}$$

y sustituyendo este resultado en la ecuación (1.4) tenemos

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i2\pi f t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-i2\pi f \tau} H(f) d\tau \\
 &= H(f) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-i2\pi f \tau} d\tau
 \end{aligned}$$

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

Existe un caso especial que se pondrá como ejemplo. Sea $x(t)$ una distribución delta de Dirac y $h(t)$ cualquier función de t . La convolución de $x(t)$ y $h(t)$ está definida por:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Proposición: Si $x(t)$ es la distribución $\delta(t)$ y $h(t)$ es cualquier función de t , entonces $y(t) = \delta(t) * h(t) = h(t)$, es decir la convolución de cualquier función, con la distribución $\delta(t)$ es ella misma.

Recordemos que la definición de la distribución impulso es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) x(t) dt = x(t_0)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) g(\tau) d\tau \\
 &= g(t)
 \end{aligned}$$

A esta propiedad de la funcional $\delta(t)$ de Dirac bajo la convolución, se le conoce como *tamizado*. Si vemos a la convolución como una operación binaria entonces la funcional $\delta(t)$ será el elemento identidad bajo tal operación.

1.5 Correlación

Se define a la correlación de dos funciones $x(t)$ y $h(t)$ como

$$z(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)h(t + \tau)dt \quad 1.5$$

La correlación $z(\tau)$ suministra una medida de la similitud o interdependencia entre las funciones $x(t)$ y $h(t)$ en función del parámetro τ (el desplazamiento de una función con respecto a la otra). Si la función de correlación es cero para todo valor de τ entonces se dice que las dos funciones no están correlacionadas.

Si $x(t)$ y $h(t)$ son idénticas, entonces la correlación

$$z(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t + \tau)dt$$

se denomina la autocorrelación de $x(t)$.

Otra relación de gran importancia es el teorema de correlación, el cual establece una conexión entre la correlación y la transformada de Fourier. El cual nos permite calcular la transformada de Fourier de la correlación por multiplicar a la transformada de Fourier de la primera función por el complejo conjugado de la transformada de Fourier de la otra.

Teorema de Correlación.

Si $h(t)$ y $x(t)$ tienen una transformada de Fourier $H(f)$ y $X(f)$ respectivamente, entonces la transformada de Fourier de la correlación, $Z(f)$, se puede calcular como:

$$Z(f) = H(f)X^*(f)$$

donde $X^*(f)$ denota al complejo conjugado de $X(f)$.

Demostración:

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t + \tau)d\tau$$

calculando la transformada de Fourier de ambos lados de la igualdad obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} z(t)e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t + \tau)d\tau \right] e^{-i2\pi ft} dt$$

Intercambiando el orden de integración, obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} z(t)e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t + \tau)e^{-i2\pi ft} dt \right] d\tau \quad 1.6$$

Haciendo el cambio de variable $\sigma = t + \tau$ en el término que esta en el corchete tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)e^{-i2\pi f(\sigma-\tau)} d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)e^{-i2\pi f\sigma} e^{i2\pi f\tau} d\sigma \\ &= e^{i2\pi f\tau} \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)e^{-i2\pi f\sigma} d\sigma \\ &= e^{i2\pi f\tau} H(f) \end{aligned}$$

y sustituyendo este resultado en la ecuación (1.6) tenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} z(t)e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{i2\pi f\tau} H(f)d\tau$$

$$= H(f) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{i2\pi f \tau} d\tau \quad 1.7$$

Por otro lado sabemos que la transformada de Fourier de $x(\tau)$ esta dada por

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-i2\pi f \tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau - i \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \sin 2\pi f \tau d\tau \\ &= R(f) - iI(f) \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned} X^*(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{i2\pi f \tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau + i \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \sin 2\pi f \tau d\tau \\ &= R(f) + iI(f) \end{aligned}$$

como estos términos son conjugados entonces la expresión se puede escribir como $X^*(f)$ y regresando a la ecuación (1.7) tenemos

$$Z(f) = H(f)X^*(f)$$

En forma análoga se puede tomar la ecuación siguiente como válida, ya que la función de autocorrelación es un caso especial de la correlación.

Sea $x(t)$ una función en el espacio tiempo cuya transformada de Fourier es $X(f)$. La autocorrelación de $x(t)$ en el espacio de frecuencias esta dada por

$$Z(f) = X(f)X^*(f)$$

$$= |X(f)|^2 \quad 1.8$$

pues la ecuación para el tiempo es:

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(t+\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)X^*(f)e^{i2\pi f t}df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 e^{i2\pi f t}df \end{aligned} \quad 1.9$$

que da:

$$z(t) = F^{-1}[Z(f)] = F^{-1}[F(z(t))] \text{ y } Z(f) = F[z(t)] \quad 1.10$$

que son equivalentes al resultado obtenido por el Teorema de Correlación.

Definición: La autocorrelación de $x(t)$ en el espacio de frecuencia se denomina Espectro de Energía de $x(t)$.

$$|X(f)|^2 \equiv \text{Espectro de Energía}$$

Definición: Se denomina Espectro de Frecuencia de $x(t)$ a la norma euclidiana de la transformada de Fourier de $x(t)$ es decir:

$$|X(f)| \equiv \text{Espectro de Frecuencia}$$

Si tomamos a la transformada de Fourier de $x(t)$ como una función compleja en general, se define el Espectro de Fase de $x(t)$ a la función de frecuencia como:

$$\text{Espectro de fase} \equiv \theta(f) \equiv \tan^{-1}\left\{\frac{X_i(f)}{X_r(f)}\right\}$$

en donde

$$X(f) = X_r(f) + iX_i(f)$$

donde X_r y X_i son funciones reales. De los puntos anteriores es importante subrayar que si se conoce el espectro de frecuencia de una función, su autocorrelación puede calcularse usando la transformada de Fourier inversa del espectro de energía ($|X(f)|^2$). Observemos que $|X(f)|$ es una función real.

Propiedades de la Autocorrelación:

1. La autocorrelación de una función $x(t)$ es real, ya sea en el espacio tiempo o frecuencia.

Demostración:

En el dominio del tiempo, se puede usar la ecuación (1.9) que define a $z(t)$ como real. En el dominio de la frecuencia, la autocorrelación esta dada por la ecuación (1.8); aunque $X(f)$ es compleja, $|X(f)|^2$ es real.

2. La función de autocorrelación es par.

Demostración:

Usando la definición (1.5) $z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t+\tau)d\tau$ y como en este caso $x(t) = h(t)$ entonces

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(t+\tau)d\tau$$

y como

$$z(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(-t+\tau)d\tau$$

haciendo el cambio de variable $v = \tau - t$ entonces $\tau = v + t$ y $dv = d\tau$ entonces:

$$z(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(v+t)x(v)dv$$

pero como z no depende de v , ya que es una variable muda de integración, entonces $z(-t) \equiv z(t)$ luego $z(t)$ es par.

La energía total de una señal es la misma si se calcula en el dominio del tiempo o en el dominio de la frecuencia. Este resultado es conocido como el Teorema de Parseval.

$$\text{Energía Total} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$$

1.6 La Serie de Fourier

Fourier planteó que si una función $y(t)$ es periódica con período T_0 , entonces se puede expresar como una serie de Fourier de la forma siguiente:

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos 2\pi n f_0 t + b_n \sin 2\pi n f_0 t] \quad 1.11$$

donde f_0 es la frecuencia fundamental la cual es igual a $f_0 = \frac{1}{T_0}$. La magnitud de los coeficientes esta dada por las integrales:

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(t) \cos 2\pi n f_0 t dt \quad 1.12$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(t) \sin 2\pi n f_0 t dt \quad 1.13$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Aplicando las identidades

$$\cos 2\pi n f_0 t = \frac{e^{i2\pi n f_0 t} + e^{-i2\pi n f_0 t}}{2}$$

$$\sin 2\pi n f_0 t = \frac{e^{i2\pi n f_0 t} - e^{-i2\pi n f_0 t}}{2i}$$

se puede reescribir a la ecuación (1.11) como

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(e^{i2\pi n f_0 t} + e^{-i2\pi n f_0 t}) + \frac{1}{i} b_n(e^{i2\pi n f_0 t} - e^{-i2\pi n f_0 t})] \\
 &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - i b_n) e^{i2\pi n f_0 t} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + i b_n) e^{-i2\pi n f_0 t}
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

Para simplificar esta expresión son introducidos los valores negativos de n en las ecuaciones (1.12) y (1.13). Como

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(t) \cos 2\pi n f_0 t dt \\
 n &= 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

entonces

$$a_{-n} = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(t) \cos(-2\pi n f_0 t) dt = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(t) \cos 2\pi n f_0 t dt$$

ya que $\cos x$ es una función par. Por tanto

$$a_n = a_{-n} \tag{1.15}$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(t) \sin 2\pi n f_0 t dt$$

entonces

$$b_{-n} = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(t) \sin(-2\pi n f_0 t) dt$$

entonces

$$b_{-n} = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(t) \sin(-2\pi n f_0 t) dt = -\frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt$$

de donde

$$b_{-n} = -b_n$$

1.16

Por lo cual podemos reescribir

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-i2\pi n f_0 t} = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n e^{i2\pi n f_0 t}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-i2\pi n f_0 t} = - \sum_{n=-1}^{-\infty} i b_n e^{i2\pi n f_0 t}$$

y sustituyendo en la ecuación (1.14) obtenemos:

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - i b_n) e^{i2\pi n f_0 t} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + i b_n) e^{-i2\pi n f_0 t}$$

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i2\pi n f_0 t} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} i b_n e^{i2\pi n f_0 t} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-i2\pi n f_0 t} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} i b_n e^{-i2\pi n f_0 t}$$

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i2\pi n f_0 t} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} i b_n e^{i2\pi n f_0 t} + \frac{1}{2} \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n e^{i2\pi n f_0 t} - \frac{1}{2} \sum_{n=-1}^{-\infty} i b_n e^{i2\pi n f_0 t}$$

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i2\pi n f_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n e^{i2\pi n f_0 t} - \sum_{n=1}^{\infty} i b_n e^{i2\pi n f_0 t} - \sum_{n=-1}^{-\infty} i b_n e^{i2\pi n f_0 t} \right]$$

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n) e^{i2\pi n f_0 t} - i \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=-1}^{-\infty} b_n \right) e^{i2\pi n f_0 t} \right]$$

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n - ib_n) e^{i2\pi n f_0 t}$$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{i2\pi n f_0 t} \quad 1.17$$

y esta es la Serie de Fourier expresada en forma exponencial donde los coeficientes α_n son en general complejos, (Brigham 1974, p 75-77) puesto que

$$\alpha_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$$

$$\text{con } n = -\infty \dots \infty$$

$$\alpha_n^* = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

Al combinar las ecuaciones (1.12), (1.13), (1.15) y (1.16) obtenemos:

$$\alpha_n = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(t) \cos 2\pi n f_0 t dt - i \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(t) \sin 2\pi n f_0 t dt \right]$$

$$\alpha_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt \quad (1.18)$$

Estas relaciones se desarrollan para $y(t)$ con período T_0 . Usando el teorema integral de Fourier, se puede partir de las ecuaciones (1.17) y (1.18) para generalizar estas consideraciones a funciones no periódicas. Sea $\omega_0 = 2\pi f_0$ y si $n\omega_0$ es un múltiplo de ω_0 (la frecuencia de $y(t)$) y se hace tender T a ∞ (con ello se tendería la no periodicidad de $y(t)$), $n\omega_0$ (el incremento de la frecuencia tendería a cero, pues son recíprocos y en ese caso las α_n se convierten en una función continua de ω

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-i\omega t} dt$$

y de la misma forma la ecuación (1.17) si hacemos tender a T a ∞ se convertiría en una integral cuyos límites son $-\infty$ a $+\infty$ y las α_n se transforman en $\alpha(\omega)$ y el intervalo de separación entre el punto n y $n + 1$ se ha hecho diferencial de modo que $(n\omega_0, (n + 1)\omega_0)$ tiende a $d\omega$ y se tiene:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

que son nada menos que el par de transformadas de Fourier dadas por las ecuaciones (1.1) y (1.2) entre $y(t)$ y $\alpha(\omega)$ (Baker, et al. 1990 p 20-31).

Capítulo 2

Técnicas de Fourier

Introducción

En este capítulo se particularizan aspectos muy específicos de la transformada de Fourier como son los conceptos de función de banda limitada, frecuencia crítica de Nyquist, tasa de muestreo, transformada discreta de Fourier, transformada inversa de Fourier discreta, se introduce el teorema de Parseval discreto y se discute el algoritmo de la transformada rápida de Fourier que posibilita muchos de los cálculos de este trabajo. Para mostrar que las herramientas de análisis utilizadas en el capítulo III, conducen a conclusiones confiables, se ilustra a través de un ejemplo, la técnica de análisis cualitativo propuesta en este trabajo. Para ello se digitalizó a una función armónica conocida y se obtuvo un conjunto de datos. El análisis de éstos se realizó suponiendo que se desconocían sus propiedades y las conclusiones a las que se llega respecto de las propiedades del conjunto de datos son congruentes con las características de antemano conocidas.

2.1 Discretización

El incremento en la utilización de métodos digitales para ayuda en los cálculos y para aplicaciones de procesamiento de señales, ha provocado interés en la versión discreta de la Transformada de Fourier. Es necesario plantear una relación o conexión entre la forma continua usada hasta ahora y la forma discreta. Este tema se analiza aquí en forma breve, con particular interés en la relación entre las transformadas de Fourier discreta y continua.

Si $f(t)$ es un tren de ondas finito estará representado por una expresión de la

forma:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\frac{T}{2} < t \text{ o } \frac{T}{2} > t \\ h(t) & \text{si } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

esto define un intervalo $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ que está centrado en el origen de coordenadas (esto es en $t = 0$). La Transformada de Fourier de $f(t)$ es

$$F(f) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

sea $\omega = 2\pi f$ entonces

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

y de manera similar

$$f(t) = \int_{-\omega_0}^{\omega_0} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Con $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Lo cual significa que tomar a $f(t)$ como un tren de ondas finito equivale a decir que $F(\omega)$ esta limitada.

Definición: Una función $f(t)$ cuya transformada de Fourier $F(\omega)$ está definida de manera que $F(\omega) = 0$ si $|\omega| > \omega_0$, se dice que es una función de banda limitada. A ω_0 se le llama la frecuencia límite (Stremier, 1990 p 135-136).

Es necesario determinar las condiciones necesarias para convertir una señal analógica en discreta y viceversa sin perder información. El enlace entre la señal analógica y la señal discreta correspondiente es proporcionado por lo que se conoce como el teorema de muestreo, el cual se enunciará más adelante. Sea Δ el intervalo de tiempo entre dos muestras consecutivas, así la sucesión de valores muestreados es:

$$h_n = h(n\Delta)$$

2.1

para $n = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

Al recíproco del intervalo del tiempo Δ se le llama la tasa de muestreo. Por ejemplo, si Δ se mide en segundos, entonces la tasa de muestreo es el número de muestras registradas en un segundo. Para cualquier intervalo muestreado, Δ , existe una frecuencia especial f_c , llamada la frecuencia crítica de Nyquist, la cual esta dada por:

$$f_c = \frac{1}{2\Delta} \quad 2.2$$

El muestreo crítico de una onda son dos puntos muestra por ciclo. Frecuentemente se elige para medir el tiempo en unidades del intervalo de muestreo Δ . En este caso la frecuencia crítica de Nyquist es exactamente $\frac{1}{2}$. La frecuencia crítica de Nyquist es importante por el teorema de muestreo el cual nos dice:

Si una función $h(t)$ es muestreada en un intervalo Δ y si la transformada de Fourier de $h(t)$ es $H(f) = 0$ para toda $|f| > f_c$, entonces la función $h(t)$ está completamente determinada por sus muestras $h(n\Delta)$ (Press et al. 1989, p 427-428). De hecho

$$h(t) = \Delta \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n\Delta) \frac{\sin 2\pi f_c(t - n\Delta)}{\pi(t - n\Delta)} \quad 2.3$$

2.2 Transformada Discreta de Fourier

Ahora estimaremos la transformada discreta de Fourier de una función de un número finito de puntos muestreados. Supongamos que tenemos N valores muestreados en forma consecutiva

$$h_k \equiv h(t_k) \quad t_k = k\Delta \quad 2.4$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Así que el intervalo muestreado es Δ . Para simplificar las cosas supongamos que N es par. Si la función $h(t)$ es diferente de cero solamente en un intervalo finito del tiempo, entonces suponemos que todo el intervalo del tiempo está contenido en la gama de los N puntos dados. Con N números de entrada, evidentemente no se puede producir más de N números independientes de salida. Así que en lugar de tratar de estimar la transformada de Fourier $H(f)$ en todos los valores de la f en el intervalo de $-f_c$ a f_c buscaremos estimar solamente en el conjunto de valores discretos siguientes:

$$f_n \equiv \frac{n}{N\Delta} \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} \quad 2.5$$

los valores extremos de N en la ecuación anterior corresponden exactamente a los límites superior e inferior del intervalo de frecuencias críticas de Nyquist. La integral (1.1) se calcula por la suma discreta:

$$H(f_n) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i2\pi f_n t} dt \approx \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-i2\pi f_n t_k} \Delta = \Delta \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-i2\pi \frac{k n}{N}}$$

(ya que $f_n = \frac{n}{N\Delta}$ y $t_k = k\Delta$ entonces $f_n t_k = \frac{k n}{N}$) por lo tanto

$$H(f_n) \approx \Delta \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-i2\pi \frac{k n}{N}} \quad 2.6$$

y esta ecuación es la transformada discreta de Fourier de los N puntos h_k . Sea H_n definida por

$$H_n \equiv \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-i2\pi \frac{k n}{N}} \quad 2.7$$

La transformada discreta de Fourier mapea N números complejos (las h_k) en N números complejos (las H_n). No dependen de ningún parámetro dimensional tales como la escala de tiempo Δ . La relación entre la transformada discreta de

Fourier de un conjunto de valores y su transformada continua se puede visualizar como muestras de una función continua, muestreada en un intervalo Δ y se puede reescribir como

$$H(f_n) \approx \Delta H_n \quad 2.8$$

Hasta ahora hemos considerado que el índice n en (2.6) varía de $-\frac{N}{2}$ a $\frac{N}{2}$. Sin embargo podemos ver que la función (2.6) es periódica en n con período N , es decir

$$\begin{aligned} H_{-n} &= \Delta \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{i2\pi k n} \\ H_{N-n} &= \Delta \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-i2\pi k (N-n)} \\ &= \Delta \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-i2\pi k N + i2\pi k n} \\ &= \Delta \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{i2\pi k n} \end{aligned}$$

Ya que $e^{-i2\pi k N} = e^{-i2\pi k} = 1$ para todo valor de k . Por lo tanto

$$H_{-n} = H_{N-n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Con esta convención en mente haremos que la n varíe de 0 a $N-1$ (un período completo). Entonces n y k en (h_k) varían exactamente sobre el mismo intervalo, así el mapeo de N números en N números es manifiesto. Cuando está convención se sigue, debemos de recordar que la frecuencia cero corresponde a $n = 0$, las frecuencias positivas $0 < f < f_c$ corresponden a los valores $1 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1$, las frecuencias negativas $-f_c < f < 0$ corresponden a $\frac{N}{2} + 1 \leq n \leq N-1$. El valor de $n = \frac{N}{2}$ corresponde a ambas frecuencias $f = -f_c$ y $f = f_c$.

Una comparación con la transformada de Fourier continua muestra que las dos transformadas son análogas si (1) la señal se trunca en el intervalo $(0, N\Delta)$, (2) dentro de este intervalo la señal $h(t_k)$ esta disponible como una sucesión de N valores igualmente espaciados, (3) el intervalo se extiende en forma periódica dando lugar a frecuencias armónicas discretas $\frac{n^2\pi}{N\Delta}$.

La fórmula para la transformada discreta inversa de Fourier, la cual rescata el conjunto de las h_k de las H_n es

$$h_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H_n e^{i\frac{2\pi kn}{N}} \quad 2.9$$

Observemos que las únicas diferencias entre la ecuación (2.7) y (2.9) son el signo de la exponencial y que una está multiplicada por $\frac{1}{N}$ (Press et al. 1989, p 428-431).

Entonces la forma discreta del teorema de Parseval es:

$$\sum_{k=0}^{N-1} |h_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |H_n|^2 \quad 2.10$$

Por conveniencia de cálculo usamos la identidad de Euler para cambiar la exponencial compleja de la ecuación (2.7) y (2.9) para obtener la transformada discreta de Fourier y su transformada inversa como

$$H_n = \sum_{k=0}^{N-1} [h(t_k) \cos \frac{2\pi kn}{N} - ih(t_k) \sin \frac{2\pi kn}{N}] \quad 2.11$$

$$h_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [H_n \cos \frac{2\pi kn}{N} + iH_n \sin \frac{2\pi kn}{N}] \quad 2.12$$

Por ejemplo si tenemos 4 puntos muestra ($N = 4$) y les calculamos su transformada discreta de Fourier tendríamos:

$$H_n = \sum_{k=0}^3 [h(t_k) \cos \frac{2\pi kn}{4} - ih(t_k) \sin \frac{2\pi kn}{4}]$$

$$H_0 = \sum_{k=0}^3 [h(t_k) \cos \frac{2\pi k0}{4} - ih(t_k) \sin \frac{2\pi k0}{4}]$$

$$H_0 = \sum_{k=0}^3 [h(t_k) \cos 0 - ih(t_k) \sin 0]$$

$$H_0 = h(t_0) + h(t_1) + h(t_2) + h(t_3)$$

$$H_1 = \sum_{k=0}^3 [h(t_k) \cos \frac{2\pi k}{4} - ih(t_k) \sin \frac{2\pi k}{4}]$$

$$H_1 = h(t_0) \cos 0 - ih(t_0) \sin 0 + h(t_1) \cos \frac{\pi}{2} - ih(t_1) \sin \frac{\pi}{2}$$

$$+ h(t_2) \cos \pi - ih(t_2) \sin \pi + h(t_3) \cos \frac{3\pi}{2} - ih(t_3) \sin \frac{3\pi}{2}$$

$$H_1 = h(t_0) - ih(t_1) - h(t_2) + ih(t_3)$$

$$H_2 = \sum_{k=0}^3 [h(t_k) \cos \frac{2\pi k2}{4} - ih(t_k) \sin \frac{2\pi k2}{4}]$$

$$H_2 = h(t_0) \cos 0 - ih(t_0) \sin 0 + h(t_1) \cos \pi - ih(t_1) \sin \pi$$

$$+ h(t_2) \cos 2\pi - ih(t_2) \sin 2\pi + h(t_3) \cos 3\pi - ih(t_3) \sin 3\pi$$

$$H_2 = h(t_0) - h(t_1) + h(t_2) - h(t_3)$$

$$H_3 = \sum_{k=0}^3 [h(t_k) \cos \frac{2\pi k3}{4} - ih(t_k) \sin \frac{2\pi k3}{4}]$$

$$H_3 = h(t_0) \cos 0 - ih(t_0) \sin 0 + h(t_1) \cos \frac{3\pi}{2} - ih(t_1) \sin \frac{3\pi}{2} \\ + h(t_2) \cos 3\pi - ih(t_2) \sin 3\pi + h(t_3) \cos \frac{\pi}{2} - ih(t_3) \sin \frac{\pi}{2}$$

$$H_3 = h(t_0) + ih(t_1) - h(t_2) - ih(t_3)$$

De los cálculos anteriores observamos que para calcular la transformada discreta de Fourier para $N = 4$ fué necesario realizar 32 multiplicaciones y 12 sumas, es decir de acuerdo al tamaño de la muestra tendríamos que realizar $2N^2$ multiplicaciones y $N(N-1)$ sumas para calcular a la transformada discreta de Fourier. Y el tiempo de cálculo resultante se vuelve excesivo cuando N es muy grande.

2.3 Transformada Rápida de Fourier

La transformada rápida de Fourier FFT es un algoritmo que nos permite calcular con un mínimo de operaciones la transformada discreta de Fourier (Brigham, 1974, p 148-153). A la ecuación (2.7) la podemos escribir

$$H(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h_0(k) e^{-i2\pi kn} \quad 2.13$$

en donde N es el número de puntos de la muestra, $H(n)$ son los puntos transformados de los $h_0(k)$ puntos muestreados y dados por

$$h_0(k) = \sum_{n=0}^{N-1} H(n) e^{i2\pi kn} \quad 2.14$$

Para mostrar como funciona el algoritmo es muy útil la notación matricial.

Sea $\omega = e^{-\frac{i2\pi}{N}}$, entonces la ecuación (2.13) se transforma en:

$$H(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h_0(k) \omega^{nk} \quad 2.15$$

Si $N = 4$ la ecuación (2.14) nos genera el sistema de ecuaciones.

$$H(0) = h_0(0)\omega^0 + h_0(1)\omega^0 + h_0(2)\omega^0 + h_0(3)\omega^0$$

$$H(1) = h_0(0)\omega^0 + h_0(1)\omega^1 + h_0(2)\omega^2 + h_0(3)\omega^3$$

$$H(2) = h_0(0)\omega^0 + h_0(1)\omega^2 + h_0(2)\omega^4 + h_0(3)\omega^6$$

$$H(3) = h_0(0)\omega^0 + h_0(1)\omega^3 + h_0(2)\omega^6 + h_0(3)\omega^9$$

o bien

$$\begin{pmatrix} H(0) \\ H(1) \\ H(2) \\ H(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 \\ \omega^0 & \omega^1 & \omega^2 & \omega^3 \\ \omega^0 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 \\ \omega^0 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0(0) \\ h_0(1) \\ h_0(2) \\ h_0(3) \end{pmatrix} \quad 2.16$$

y escribiendo en forma compacta

$$H(n) = W^{nk} h_0(k) \quad 2.17$$

En donde W es la matriz y $H(n)$ y $h_0(k)$ son vectores de dimensión n y k respectivamente. El algoritmo que ahora enunciaremos reduce considerablemente el número de operaciones requeridas para calcular a la transformada discreta de Fourier. Este algoritmo requiere que el número de puntos de la muestra sea una potencia de 2, si éste no fuera el caso, se debe de completar con ceros hasta que $N = 2^\gamma$ con γ entero.

Continuando con el ejemplo haremos uso de las propiedades de simetría de las raíces enésimas de la unidad, lo cual se puede ver como una reducción para aplicar $\omega^{nk} = \omega^{[nk \bmod N]}$ es el residuo de la división $\frac{nk}{N}$. Por ejemplo si $N = 4$

$$nk = 9 \text{ y } 9 \bmod 4 \text{ es } 1 \text{ entonces } \omega^9 = \omega^1$$

$$nk = 8 \text{ y } 8 \bmod 4 \text{ es } 0 \text{ entonces } \omega^8 = \omega^0$$

$$nk = 7 \text{ y } 7 \bmod 4 \text{ es } 3 \text{ entonces } \omega^7 = \omega^3$$

$$nk = 6 \text{ y } 6 \bmod 4 \text{ es } 2 \text{ entonces } \omega^6 = \omega^2$$

$$nk = 5 \text{ y } 5 \bmod 4 \text{ es } 1 \text{ entonces } \omega^5 = \omega^1$$

$$nk = 4 \text{ y } 4 \bmod 4 \text{ es } 0 \text{ entonces } \omega^4 = \omega^0$$

por lo cual la matriz W se transforma en

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^1 & \omega^2 & \omega^3 \\ 1 & \omega^2 & 1 & \omega^2 \\ 1 & \omega^3 & \omega^2 & \omega^1 \end{pmatrix} \quad 2.18$$

pero esta no es la reducción principal, el paso siguiente es factorizar a la matriz de la ecuación (2.18) como sigue

$$\begin{pmatrix} H(0) \\ H(2) \\ H(1) \\ H(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \omega^0 & 0 & 0 \\ 1 & \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \omega^1 \\ 0 & 0 & 1 & \omega^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \omega^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \omega^0 \\ 1 & 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0(0) \\ h_0(1) \\ h_0(2) \\ h_0(3) \end{pmatrix} \quad 2.19$$

El método de la factorización esta basado en la teoría del algoritmo de la FFT. Si desarrolláramos el producto de las matrices obtenemos

$$\begin{pmatrix} H(0) \\ H(2) \\ H(1) \\ H(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 \\ 1 & \omega^2 & \omega^0 & \omega^2 \\ 1 & \omega^1 & \omega^2 & \omega^3 \\ 1 & \omega^3 & \omega^2 & \omega^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0(0) \\ h_0(1) \\ h_0(2) \\ h_0(3) \end{pmatrix} \quad 2.20$$

lo cual nos muestra que $W = W_1 W_2$ con la excepción de que los renglones 1 y 2 se han intercambiado. Y esta factorización es la clave de la eficiencia del algoritmo.

Ahora realicemos las operaciones marcadas en la ecuación (2.19)

$$\begin{pmatrix} h_1(0) \\ h_1(1) \\ h_1(2) \\ h_1(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \omega^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \omega^0 \\ 1 & 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0(0) \\ h_0(1) \\ h_0(2) \\ h_0(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_0(0) + h_0(2)\omega^0 \\ h_0(1) + h_0(3)\omega^0 \\ h_0(0) + h_0(2)\omega^2 \\ h_0(1) + h_0(3)\omega^2 \end{pmatrix} \quad 2.21$$

Los elementos $h_1(0)$ y $h_1(1)$ son calculados por una multiplicación compleja y una suma compleja. Sólo una suma compleja se requiere para calcular el elemento $h_1(2)$, ya que $\omega^0 = -\omega^2$, de la misma forma se calcula $h_1(3)$. Por lo que podemos afirmar que para calcular el vector intermedio $h_1(k)$ se requirió de dos sumas complejas y dos multiplicaciones complejas. Ahora completemos el cálculo.

$$\begin{pmatrix} H(0) \\ H(2) \\ H(1) \\ H(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_2(0) \\ h_2(1) \\ h_2(2) \\ h_2(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \omega^0 & 0 & 0 \\ 1 & \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \omega^1 \\ 0 & 0 & 1 & \omega^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1(0) \\ h_1(1) \\ h_1(2) \\ h_1(3) \end{pmatrix} \quad 2.22$$

de donde

$$\begin{pmatrix} H(0) \\ H(2) \\ H(1) \\ H(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_2(0) \\ h_2(1) \\ h_2(2) \\ h_2(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(0) + h_1(1)\omega^0 \\ h_1(0) + h_1(1)\omega^2 \\ h_1(2) + h_1(3)\omega^1 \\ h_1(2) + h_1(3)\omega^3 \end{pmatrix} \quad 2.23$$

El elemento $h_2(0)$ es determinado por una multiplicación compleja y una suma. El elemento $h_2(1)$ es determinado por una suma compleja ya que $\omega^0 = -\omega^2$. El elemento $h_2(2)$ es determinado por una multiplicación compleja y una suma. El elemento $h_2(3)$ es únicamente una suma ya que $\omega^1 = -\omega^3$. Sea

$$\tilde{H}(n) = \begin{pmatrix} H(0) \\ H(2) \\ H(1) \\ H(3) \end{pmatrix} \quad 2.24$$

El cálculo de $\tilde{H}(n)$ por medio de la ecuación (2.19) requiere de un total de 4 multiplicaciones complejas y ocho sumas complejas. Observemos que el proceso de factorización de matrices introduce ceros dentro de las matrices factorizadas y por lo tanto reduce el número requerido de multiplicaciones por un factor de 2. Puesto que el tiempo de cálculo depende de la cantidad de multiplicaciones requeridas, vemos la razón de la eficiencia del algoritmo de la FFT.

Para $N = 2^7$ el algoritmo de la FFT es entonces un procedimiento para factorizar una matriz de $N \times N$ en γ matrices (cada una de $N \times N$), tales que

cada una de las matrices factorizadas tiene la propiedad especial de minimizar el número de multiplicaciones y sumas complejas. Si extendemos el resultado del ejemplo anterior observamos que la FFT requiere de $\frac{N^2}{2} = 4$ multiplicaciones complejas y $N\gamma = 8$ sumas complejas. Mientras que el método directo requiere de N^2 multiplicaciones complejas y $N(N-1)$ sumas complejas.

El procedimiento de factorización de matrices introduce una discrepancia. Se produce un vector $\tilde{H}(n)$ en vez de $H(n)$; esto es

$$\tilde{H}(n) = \begin{pmatrix} h(0) \\ h(2) \\ h(1) \\ h(3) \end{pmatrix} \text{ en vez de } H(n) = \begin{pmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ h(3) \end{pmatrix} \quad 2.25$$

Este rearrreglo esta inherente en el proceso de la factorización de matrices y es un pequeño problema ya que hay una técnica directa para reordenar a $\tilde{H}(n)$ y obtener a $H(n)$. Reescribamos a $\tilde{H}(n)$ reemplazando el argumento n por su equivalencia en binario.

$$\begin{pmatrix} H(00) \\ H(10) \\ H(01) \\ H(11) \end{pmatrix} \text{ se convierte en } \begin{pmatrix} H(00) \\ H(10) \\ H(01) \\ H(11) \end{pmatrix} \quad 2.26$$

Observemos que los argumentos binarios de (2.22) están invertidos (es decir 01 se convierte en 10, el 10 se convierte en 01), etc. entonces

$$\tilde{H}(n) = \begin{pmatrix} H(00) \\ H(10) \\ H(01) \\ H(11) \end{pmatrix} \text{ se cambia a } \begin{pmatrix} H(00) \\ H(01) \\ H(10) \\ H(11) \end{pmatrix} = H(n) \quad 2.27$$

Esta es la técnica para desarrollar un resultado generalizado para reordenar la FFT.

2.3.1 Factorización

Consideremos la ecuación (2.15) de la transformada discreta de Fourier los índices n y k los representaremos como números binarios; esto es si suponemos que $N = 4$ entonces $\gamma = 2$ y podemos representar a k y a n como números binarios.

$$k = 0, 1, 2, 3 \quad \circ \quad k = (k_1, k_0) = 00, 01, 10, 11$$

$$n = 0, 1, 2, 3 \quad \circ \quad n = (n_1, n_0) = 00, 01, 10, 11$$

Un método compacto que nos permite escribir a n y k es

$$k = 2k_1 + k_0 \quad n = 2n_1 + n_0$$

donde k_1 , k_0 , n_1 y n_0 pueden tomar solamente los valores de 0 y 1. Usando la representación (2.15) podemos reescribir la ecuación (2.15) para el caso $N = 4$ como

$$H(n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 h_0(k_1, k_0) \omega^{(2n_1+n_0)(2k_1+k_0)} \quad 2.28$$

Ahora consideremos el término ω^P

$$\begin{aligned} \omega^{(2n_1+n_0)(2k_1+k_0)} &= \omega^{(4n_1k_1+2n_0k_0+(2n_1+n_0)k_0)} \\ &= \omega^{4n_1k_1} \omega^{2n_0k_0} \omega^{(2n_1+n_0)k_0} \\ &= \omega^{2n_0k_1} \omega^{(2n_1+n_0)k_0} \end{aligned}$$

Observemos que

$$[\omega^4]^{n_1, k_1} = [e^{-i\frac{2\pi}{4}}]^{n_1, k_1} = [e^{-i2\pi}]^{n_1, k_1} = 1^{n_1, k_1} = 1$$

Por lo tanto la ecuación (2.28) se puede reescribir como

$$H(n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \left\{ \sum_{k_1=0}^1 h_0(k_1, k_0) W^{2n_0k_1} \right\} W^{(2n_1+n_0)k_0} \quad 2.29$$

Esta ecuación representa el fundamento del algoritmo de la FFT. Para demostrar este punto, consideremos cada una de las sumatorias de (2.29) por separado. Primero reescribamos la sumatoria que esta dentro de los corchetes como

$$h_1(n_0, k_0) = \sum_{k_1=0}^1 h_0(k_1, k_0) W^{2n_0 k_1} \quad 2.30$$

Enumerando las ecuaciones representadas por (2.30) tenemos

$$h_1(n_0, k_0) = h_0(0, k_0) + h_0(1, k_0) \omega^{2n_0}$$

por lo cual

$$\begin{aligned} h_1(0, 0) &= h_0(0, 0) + h_0(1, 0) \omega^0 \\ h_1(0, 1) &= h_0(0, 1) + h_0(1, 1) \omega^0 \\ h_1(1, 0) &= h_0(0, 0) + h_0(1, 0) \omega^2 \\ h_1(1, 1) &= h_0(0, 1) + h_0(1, 1) \omega^2 \end{aligned} \quad 2.31$$

y reescribiendo este sistema en notación matricial

$$\begin{pmatrix} h_1(0, 0) \\ h_1(0, 1) \\ h_1(1, 0) \\ h_1(1, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \omega^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \omega^0 \\ 1 & 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0(0, 0) \\ h_0(0, 1) \\ h_0(1, 0) \\ h_0(1, 1) \end{pmatrix} \quad 2.32$$

de manera similar si escribimos la suma exterior de la ecuación (2.29) como:

$$\begin{aligned} h_2(n_0, n_1) &= \sum_{k_0=0}^1 h_1(n_0, k_0) W^{(2n_1 + n_0)k_0} \\ h_2(n_0, n_1) &= h_1(n_0, 0) \omega^0 + h_1(n_0, 1) \omega^{(2n_1 + n_0)} \\ h_2(0, 0) &= h_1(0, 0) + h_1(0, 1) \omega^0 \\ h_2(0, 1) &= h_1(0, 0) + h_1(0, 1) \omega^2 \\ h_2(1, 0) &= h_1(1, 0) + h_1(1, 1) \omega^1 \end{aligned} \quad 2.33$$

$$h_2(1, 1) = h_1(1, 0) + h_1(1, 1)\omega^3$$

y reescribiendo este sistema en notación matricial

$$\begin{pmatrix} h_2(0, 0) \\ h_2(0, 1) \\ h_2(1, 0) \\ h_2(1, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \omega^0 & 0 & 0 \\ 1 & \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \omega^1 \\ 0 & 0 & 1 & \omega^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1(0, 0) \\ h_1(0, 1) \\ h_1(1, 0) \\ h_1(1, 1) \end{pmatrix} \quad 2.34$$

de las ecuaciones (2.22) y (2.28) tenemos:

$$H(n_1, n_0) = h_2(n_0, n_1) \quad 2.35$$

Este resultado final $h_2(n_0, n_1)$ de la suma exterior están en orden invertido con respecto a los valores descados $H(n_1, n_0)$. Esto se debe a la mezcla que resulta del algoritmo de la FFT (Brigham, 1974, p 172-174). Si combinamos las ecuaciones

$$\begin{aligned} h_1(n_0, k_0) &= \sum_{k_1=0}^1 h_0(k_1, k_0)\omega^{2n_0k_1} \\ h_2(n_0, n_1) &= \sum_{k_0=0}^1 h_1(n_0, k_0)\omega^{(2n_1+n_0)k_0} \\ H(n_1, n_0) &= h_2(n_0, n_1) \end{aligned}$$

entonces ellas representan al algoritmo original de Cooley-Tukey de la FFT para $N = 4$. Estas ecuaciones son recursivas ya que la segunda se calcula en función de la primera. Y es de esta manera como trabaja el algoritmo de la FFT.

Se presentan algunos puntos que son útiles al procesar funciones de tiempo continuas con el algoritmo de la FFT.

- 1) Para N muestras en el tiempo, existen N frecuencias discretas.
- 2) Como resultado de la extensión periódica los puntos de muestra 0 y N son idénticos en ambos dominios.
- 3) Se considera que las componentes de frecuencia positiva están en $(0, N/2)$; las componentes de las frecuencias negativas se hallan en $(N/2, N)$.

4) Para funciones de variable real, las componentes de frecuencia positiva son conjugadas complejas de las componentes de frecuencia negativa.

2.4 Ejemplo ilustrativo

Por último se presenta el siguiente ejemplo con el objeto de ilustrar el análisis cualitativo que se realiza en el capítulo III. A través de este ejemplo se pretende aclarar el significado que tienen cada uno de los resultados a los que se llega en el capítulo siguiente. El conjunto de valores que aquí se analiza corresponden a la digitalización de una función periódica conocida, sumada con una función de ruido aleatorio. La función digitalizada es:

$$y(t) = \cos f_1 2\pi t + \cos f_2 2\pi t + \cos f_3 2\pi t + \omega(t) \quad 2.36$$

por lo tanto el conjunto de datos es periódico, resultado de la sobreposición de tres ondas y con ruido aleatorio aportado por la función $\omega(t)$. Con estos valores se realizaron cálculos cuyos resultados son analizados a través de la técnica propuesta, buscando mostrar que las conclusiones del análisis son congruentes con las propiedades que de antemano sabemos que tiene el conjunto. El conjunto de datos que se analiza consta de 256 valores. Estos se grafican y se muestran en la figura No. 1.

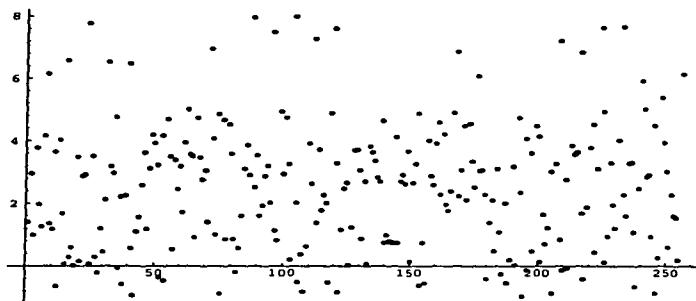


Figura 1

Se graficó tratando de encontrar algún orden, información o en general detectar algún patrón de comportamiento en ellos. A simple vista parece que no hay orden, aunque se observan algunas simetrías. Lo único que si queda fuera de duda es que los valores están acotados entre un valor máximo que es 7.98497 y un valor mínimo de -0.969801. Basados en lo anterior es razonable construir el histograma de los datos para explorar la posibilidad de comportamiento aleatorio. Aplicando la regla empírica de Sturges se determinó la necesidad de utilizar diez intervalos de clase y el resultado obtenido se muestra en la figura No. 2.

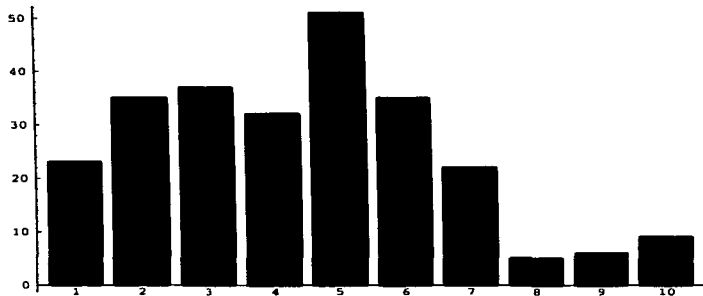


Figura 2

Del análisis de este histograma se obtienen conclusiones vagas pues no se muestra un comportamiento definitivamente aleatorio pues no hay campana de Gauss nítida. Sin embargo ignorando las últimas barras a la derecha del histograma entonces aparece una figura que si sugiere que hay un comportamiento estadístico.

Se necesita analizar la posibilidad de que estos datos encierren un comportamiento periódico pues es otra opción que surge del análisis del histograma dado que también este se puede interpretar como una meseta más o menos sinétrica, ligeramente más alta en el centro y con muy poco desvanecimiento en los extremos lo cual es resultado probable cuando se analizan datos que correspondan a una onda. La búsqueda de comportamiento periódico se hace a través de calcular la transformada de Fourier al conjunto de datos.

Para efectuar la aplicación de las ecuaciones (2.11) y (2.12) hay que preparar al conjunto de datos que se analiza siguiendo esta secuencia:

Para identificar a cada una de los datos les asignamos un índice n . Del conjunto de datos se puede tomar una fracción o al total de ellos, el tamaño del lote seleccionado constituirá un conjunto que se denomina tamaño de ventana que se identifica con la variable N . Así para los 256 datos, $N = 256$ si se toman todos los datos o tomará un valor menor si la ventana es menor. Simultáneamente habrá $n = 1, 2, 3, \dots, 256$. Se define otra variable k que toma valores similares a los de n y que permite identificar a los diferentes coeficientes de Fourier h_k de la ecuación (2.12). Estos coeficientes permiten identificar las propiedades del comportamiento del conjunto de valores.

Se define un intervalo de muestreo, digamos Δt , que se puede interpretar como el intervalo que hay entre la generación de un cierto $T(n)$ y su sucesor $T(n+1)$. Así entre el valor de índice n y el de $n+1$ hay un espacio Δt .

$$\Delta t = [T(n+1) - T(n)] \quad 2.37$$

El valor de Δt depende del significado que se le asigne a n . Por ejemplo lo típico es considerar al tiempo como el espacio transcurrido entre el evento n cuya cualidad medida es $T(n)$ y el evento $(n+1)$ que dió origen al valor $T(n+1)$.

Se define una longitud de registro o intervalo de variación del experimento así:

$$T = n\Delta t \quad 2.38$$

del cual se puede seleccionar la ventana N . Los coeficientes h_k constituyen cierta propiedad asociada a los valores H_n , las cuales, para el caso de comportamientos armónicos corresponden con la frecuencia. Se calculó la transformada de Fourier y el espectro de energía al conjunto de datos y los resultados aparecen en la figura No. 3.

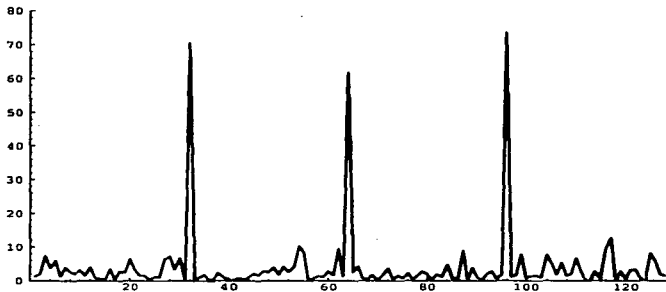


Figura 3

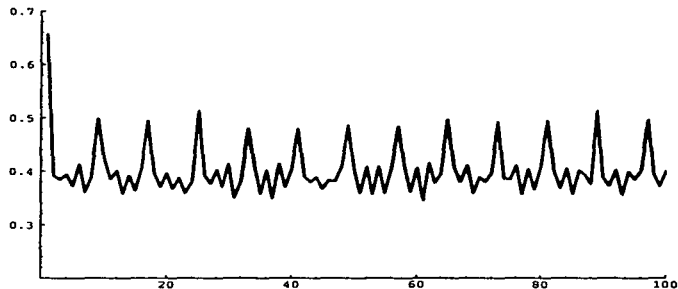


Figura 4

Analizando este espectro se puede afirmar que el conjunto de datos corresponde a una señal periódica. Para dar contundencia a esta conclusión se calcula la autocorrelación del conjunto de datos y el resultado obtenido se muestra en la figura No. 4. Si el conjunto de datos tuviera comportamiento caótico la autocorrelación tendería a cero y como esto no ocurre se afirma que el conjunto de valores

tiene comportamiento periódico.

Establecido que hay comportamiento periódico se procede a analizar con más detalle los datos para identificar las propiedades características de este comportamiento periódico en especial el número de ondas involucradas y sus frecuencias. Para eso se seleccionan diferentes ventanas, diferentes longitudes de registro y diferentes Δt y así por "prueba y error" se llega a determinar las características de cada una de las variables que nos permiten encontrar "picos" en las figuras que nos muestran al espectro de Fourier.

Para ilustrar lo hecho considerense los siguientes casos:

Se tomo un tamaño de ventana de 21 valores, se les calculó el espectro de Fourier y los resultados se muestran en la figura No. 5. Se observan varios picos.

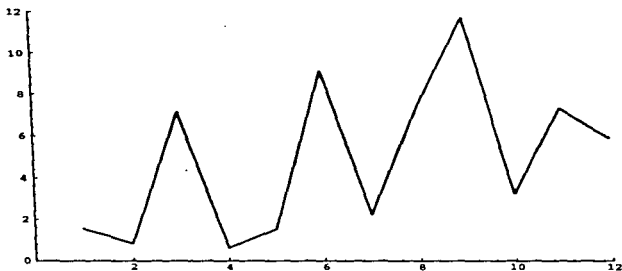


Figura 5

Se toma un tamaño de ventana de 64 valores y se observan picos en las posiciones 4, 8 y 16 de la figura No. 6. Esto se debe interpretar en el sentido de que hay 4, 8 y 16 ondas completas en la ventana de 64 y así, si esta ventana corresponde a una longitud de registro de 4 segundos entonces las frecuencias de

las ondas identificadas serán 1, 2 y 4 ciclos por segundo.

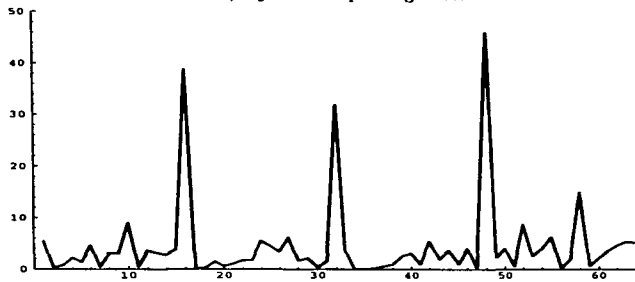


Figura 6

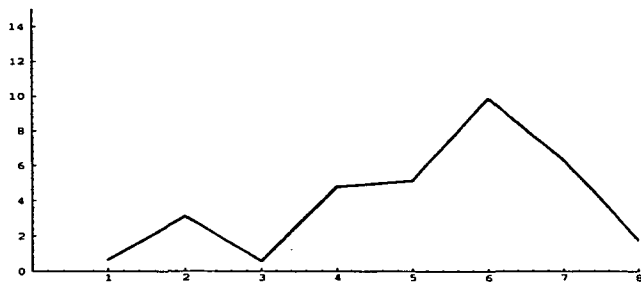


Figura 7

Para afirmar lo anterior se reduce el tamaño de ventana al mínimo posible apoyándose en la conclusión del párrafo anterior y en la figura No. 7 se muestra el espectro de Fourier para el tamaño de ventana igual a 16. Y ahora los picos aparecen en las posiciones 2, 4 y 6 con lo que se ilustra el efecto provocado al reducir la ventana.

Se calcula el diagrama de fases para el mínimo número de datos determinado en el párrafo anterior y el resultado se presenta en la figura No. 8.

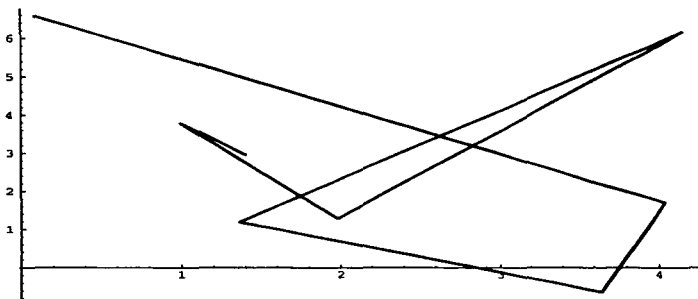


Figura 8

Este diagrama se construye iterativamente localizando al evento n en el eje horizontal y al evento $n + 1$ en el eje vertical, se observan tres curvas las cuales se asocian con los puntos atractores (Baker, 1990, p 24-27), en este caso con las ondas sobrepuestas alrededor de las cuales se manifiestan los diferentes valores. Finalmente si comparamos la conclusión cualitativa que dan las últimas figuras en el sentido de que hay comportamiento periódico y de que éste es el resultado de la sobreposición de tres ondas con lo propuesto al inicio del ejemplo se observa una completa congruencia entre lo que se propuso y lo que se concluyó y por lo tanto la técnica de análisis propuesta da resultados confiables.

Capítulo 3

Análisis de datos

Introducción

En este capítulo se analiza un conjunto de datos obtenido en un experimento realizado en la Facultad de Ciencias, sobre el sistema caótico conocido como grifo goteante. El análisis se hizo siguiendo esta secuencia:

Sobre los datos analizados, a través de gráficas se visualiza algún posible comportamiento en los datos. Comportamiento estadístico, se analiza posible comportamiento aleatorio. Análisis de periodicidad, por medio de la transformada de Fourier se buscan indicios de periodicidad. Afirmación de la periodicidad, mediante la autocorrelación se analiza la memoria del conjunto. Investigación de características, variando los tamaños de ventana y las tasas de muestreo, se determina el número de ondas involucradas y la frecuencia de éstas. Estabilidad, analizando el espacio de fases se identifican atractores. Caracterización de atractores, se calcula la media aritmética y desviación estándar para cada atractor. Caracterización final del conjunto de datos, se dan argumentos para clasificar el comportamiento de los datos como movimiento Browniano y al conjunto como proceso fractal.

3.1 Sobre los datos analizados

Algunos experimentos dan como producto un conjunto de datos que es necesario analizar para obtener la información que contienen. Estos datos son consecuencia de los valores que toman las variables involucrada en el experimento y de la forma como se interrelacionan. Teóricamente siempre será posible realizar el análisis si se aplican las técnicas adecuadas para este fin. En la actividad científica es algunas veces importante emplear al tiempo como variable independiente, o bien

analizar datos que dependen unicamente de una sola variable; a estos conjuntos de datos se les llama genericamente *series de tiempos* (Chatfield, 1980 p 1-30).

Este trabajo se desarrollará analizando una serie de tiempos obtenida a partir de un experimento real realizado en el Laboratorio de Física Moderna de la Facultad de Ciencias durante 1990. El experimento consistió en registrar el tiempo que transcurría entre una gota que se desprendía y la siguiente al descargarse una bureta. La idea detrás de este experimento fué iniciar el estudio de fenómenos caóticos a nivel experimental (Núñez-Yépez *et al.* 1991), las variables como el nivel de líquido, abertura de la válvula, posición, temperatura, etc., se mantuvieron bajo control, entonces, por la información de que se disponía (Martien *et al.* 1985), era razonable esperar que el tiempo de descarga entre gota y gota tuviera un comportamiento caótico.

Así pues, el análisis de estos datos se hizo con el objeto de tener argumentos para aceptar o rechazar la hipótesis de que el comportamiento del tiempo de descarga no sigue ningún patrón definido es decir que tiene un comportamiento caótico.

Cabe señalar que es imprescindible respetar en el análisis el orden en que se generaron los datos, pues de otra manera las conclusiones obtenidas reflejarían el manipuleo de los datos y no el comportamiento de éstos. Es necesario recordar que el conjunto de valores que aquí se analiza, corresponde a datos que se generaron en un experimento real con todo lo que ello implica sobre influencias no controladas en los resultados. Para tener una visión global de los datos, se graficaron los valores tomando al número de evento n como variable independiente y a los datos (tiempo entre gota y gota o intervalo de goteo), como la variable dependiente. El resultado se muestra en la figura No. 1. Como se puede observar de la figura, no aparece ninguna tendencia que permita señalar el comportamiento del conjunto.

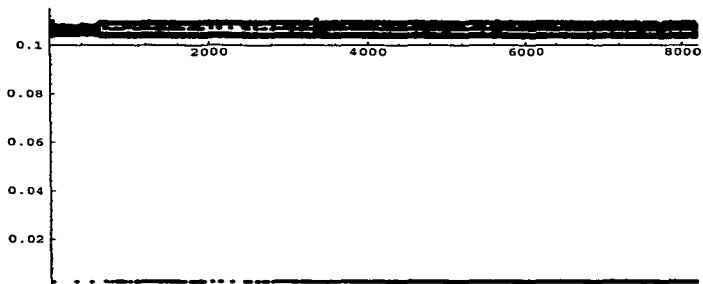


Figura 1

Se graficó n vs t_n . Se observa que estos datos no presentan ninguna tendencia que permita asignarles algún comportamiento definido. La única conclusión que se puede obtener, observando la figura No. 1, es que, los valores se mantienen oscilando entre ciertos límites que, de la misma figura, podemos fijar entre 0.002546 y 0.110457. Lo anterior podría significar que los datos corresponden a un comportamiento lineal, es decir, podría suponerse que los valores están distribuidos a uno y otro lado de una línea recta, cuyas características se podrían encontrar haciendo un ajuste por mínimos cuadrados. Esto se puede hacer, pero antes, habrá que demostrar que los datos se distribuyen aleatoriamente en la vecindad de la recta asociada, es decir, los datos deben presentar un comportamiento gaussiano cuyo valor central pueda ajustarse a la recta. En la siguiente sección se demuestra que esto no es posible.

3.2 Comportamiento Estadístico

Para comprobar si los datos se comportan aleatoriamente se agruparon los

8192 datos de la serie de tiempos $T(n)$, en 15 intervalos de clase que dieron el histograma de frecuencias mostrado en la figura No 2. Se seleccionaron 15 intervalos porque, de acuerdo con la regla empírica de Sturges:

$$p = E \left[\frac{3}{2} + \frac{\log n}{\log 2} \right] \quad 3.1$$

donde $E[x]$ representa la parte entera de x , n es el tamaño de la muestra y p es el número de clases recomendable. Por lo tanto los datos debían agruparse, al menos en 15 intervalos de clase, cuyos límites son de 0.002546 a 0.110457 en pasos de 0.00719398 (Bendat, 1971, p 119-121), con lo cual se obtiene el histograma mostrado en la figura No. 2.

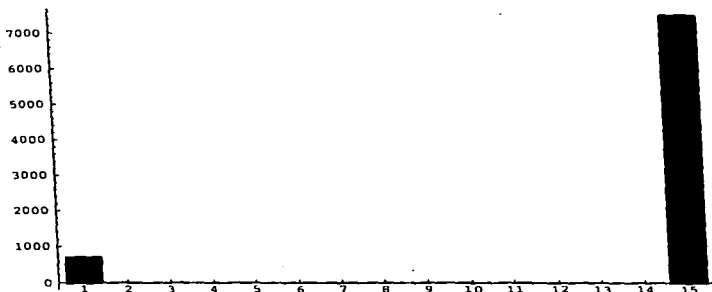


Figura 2

Analizando el histograma de la figura, se concluyó que no hay comportamiento aleatorio, pues no es posible encontrar correspondencia entre la imagen del histograma de los datos $T(n)$ con la imagen que correspondería a una distribución gaussiana. De este análisis preliminar se concluye que no es posible asociar al comportamiento de los datos alguna ecuación lineal, como se propuso antes, por lo que

habrá que buscar otras posibilidades: así por ejemplo, la serie de tiempos podría ser caótica, como ya se dijo, o tener un comportamiento periódico oscurecido por el ruido experimental. Analizando esta segunda posibilidad, se puede observar que los datos se mantienen entre ciertos límites (ya señalados) y alternándose a uno y otro lado de una cierta recta paralela al eje de las $T(n)$, como se ve en la figura No. 1.

Si esta suposición es correcta, será posible analizar a los datos de la serie de tiempo, transformándolos en una serie de frecuencias, (dado que la variable conjugada con el tiempo es la frecuencia) y este análisis nos mostrará si los datos son o no periódicos. Para transformar los datos correspondientes a la serie de tiempo a sus valores correspondientes a la serie de frecuencia se aplicó la Transformada de Fourier y se obtuvieron los resultados que se describen a continuación. Como ya se dijo en el capítulo anterior, se puede demostrar la periodicidad transformando los datos de la serie de tiempo al espacio de frecuencias a través de la transformada de Fourier y así, se pueden identificar los parámetros fundamentales que tienen los datos de esta serie, con lo que se puede demostrar si se comportan o no en forma periódica. Así, por ejemplo, se puede determinar la frecuencia de la onda asociada al conjunto de datos, o las características de las ondas armónicas que se superponen para dar la onda resultante, o encontrar las características de cada onda independiente superpuesta, etc.

Al graficar en el dominio de las frecuencias aparecen picos que corresponden, cada uno, a la frecuencia de cada onda involucrada. La frecuencia de la onda que corresponde a cada pico se puede determinar directamente de la gráfica. Para construir ésta hay necesidad de seleccionar una ventana, es decir, hay que seleccionar entre que valores de la serie que se analiza se desea aplicar la transformada de Fourier. Al mismo tiempo, hay que establecer cuantas divisiones va a tener

esta ventana y así el período correspondiente al pico se obtiene dividiendo el valor correspondiente a la división señalada por el pico entre el tamaño de la ventana (Ramirez, 1985, p 70).

Cada división en que se partió la ventana, lleva asociado un intervalo de tiempo, Δt , cuya magnitud se puede conocer, siempre y cuando, se conozca el tiempo que corresponde al tamaño de la ventana. A éste se le denomina tiempo máximo, t_{max} . En caso de no conocerse el tiempo máximo se puede suponer que Δt tiene un valor igual al de la unidad de medida de los datos (en el caso analizado aquí la unidad de medida es un milisegundo) y así se puede establecer la siguiente relación:

$$\frac{\pi}{\Delta t} = t_{max} \quad 3.2$$

Se calculó la transformada de Fourier para los 8192 datos y se graficaron, en el eje vertical, la norma de $X(f)$ y en el eje horizontal, la frecuencia f , obteniéndose los resultados que están ilustrados en la figura No. 3, los cuales están en escala logarítmica.

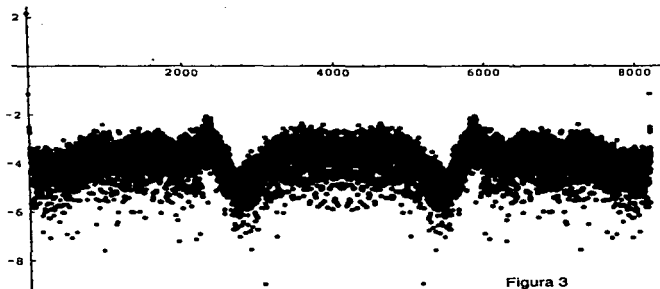


Figura 3

El espectro de energía se muestra en la figura No. 4. La apariencia del espectro de energía depende claramente de la forma en que la señal $T(n)$ evoluciona con el tiempo. Lo importante de obtener el espectro de energía es que, manejado apropiadamente revela propiedades o información que de otra manera permanecen indetectables.

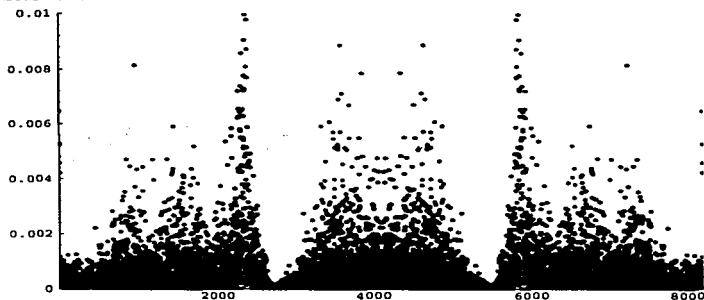


Figura 4

La conclusión que se obtiene de la observación de las figuras 3 y 4 es que el comportamiento de los datos corresponde a una señal aperiódica. Esto se concluye dado que, la gráfica correspondiente al espectro de frecuencias y al espectro de energía presentan demasiados picos y sería muy aventurado proponer, sin tener otras evidencias, que el comportamiento es periódico.

3.3 Afirmación de la periodicidad

Para reforzar la afirmación de que el comportamiento de la serie de tiempo es periódico se calculó y gráfico la autocorrelación de $T(n)$. Los resultados se muestran en la figura No. 5. Se tuvo que rechazar la conclusión anterior, en el sentido de que la señal es aperiódica o caótica, debido a que, si esta hubiese sido

correcta, la autocorrelación debería tender a cero a medida que transcurría el tiempo.

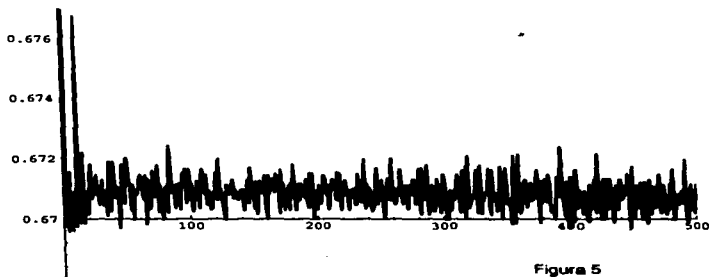


Figura 5

La función de autocorrelación constituye la memoria del conjunto de datos. con esto se quiere decir que la función de autocorrelación hace evidente, al analista, la influencia que tiene, en un cierto valor, el valor que le antecede. Así, por ejemplo, en un conjunto de datos distribuidos en forma aleatoria, un cierto valor originado en un momento dado, no presenta ningún efecto que lo relacione con el valor que le antecede, es decir, los valores no tienen memoria o la tienen de muy corto alcance. Por el contrario, si el conjunto de datos es periódico, un cierto valor debe de ir precedido por otro valor que ejerce toda su influencia y por eso se dice que el conjunto tiene memoria (Berge, 1984, p 44-45).

3.4 Análisis de Características

En este momento se presentan dos argumentos con posiciones antagónicas: uno indica que la señal es aperiódica y el otro que no. Para encontrar cual es el argumento correcto se procedió a analizar con más detalle el método de cálculo

y el significado de la información obtenida en el espectro de energía. Al analizar una señal que supuestamente tiene comportamiento periódico o casi-periódico, debe tenerse muy en cuenta que la ventana seleccionada para analizar los valores, guarda una estrecha relación con el período de la, o de las ondas, que reflejan el comportamiento de los datos y que pueden producir "bandas anchas" en el espectro de energía, si la ventana no es seleccionada adecuadamente. Esto, evidentemente, conduciría a conclusiones erróneas.

Simultáneamente, el número de intervalos en que se divide la ventana, n así como el tamaño del intervalo de tiempo, Δt , que hay entre cada una de estas divisiones, esta íntimamente relacionada con el punto k en donde aparece cada uno de los picos que nos indica el número de crestas y valles encerradas en este tamaño de ventana y que corresponden a cada una de las ondas involucradas en la señal original. La frecuencia de cada onda se puede obtener si se conoce la equivalencia en tiempo que tiene el tamaño de ventana usado. Existe entonces, una total y específica relación entre cinco variables que condicionan la apariencia del espectro de frecuencia y del espectro de energía: n , k , Δt , T , y t_{\max} . Según se manipulen éstas para construir la ventana se tendrán diferentes apariencias en las imágenes obtenidas. Se considera que una mala selección en las variables anteriores fue la causa de que se obtuvieran "bandas anchas" en las figuras 3 y 4. Por lo anterior, se procedió a analizar la serie de datos, a través de seleccionar diferentes ventanas y teniendo en consideración que se presentarían las siguientes posibilidades:

— El período es exactamente igual a la duración de la medida. En este caso, si la señal es sinusoidal, aparecerá en el espectro de Fourier un solo pico, en la posición correspondiente al primer Δt en relación con el tamaño de la ventana. Es decir, la frecuencia se calcula dividiendo $\frac{k}{n}$, siendo en este caso $k = 1$ pues hay un

solo pico en el intervalo de tiempo t_{\max} .

— Si la señal es periódica, aparecerán en el espectro de Fourier, cada uno de los picos correspondientes a los armónicos contenidos. Nuevamente la relación entre las posiciones de los picos y el tamaño de ventana nos dará la frecuencia de cada armónico. Cabe enfatizar que la posición de cada pico k indica el número de ondas completas que caben en esa ventana.

— Se puede distinguir entre picos que corresponden a armónicos y picos que corresponden a ondas que indican casi-periodicidad, porque los picos armónicos están simétricamente espaciados, dado que cada onda, es de frecuencia múltiplo de la principal. En cambio, las ondas que producen la casi-periodicidad, no necesariamente presentan picos en posición simétrica, puesto que, dichas ondas no son armónicos de la principal.

— La duración de la medida es un múltiplo entero del período. Se tienen las mismas condiciones dadas anteriormente, sólo que, en este caso, la resolución de las frecuencias es tantas veces mejor como sea la magnitud del múltiplo entero.

En estos casos, se cumple la siguiente relación entre las variables involucradas en el tamaño de ventana:

$$\frac{t_{\max}}{T} = \frac{k}{n} \quad 3.3$$

Cuando esta relación no se cumple, suceso que se puede representar con la siguiente expresión:

$$\psi = \frac{t_{\max}}{T} - \frac{k}{n} \quad 3.4$$

la consecuencia que se obtiene, en el espectro energfa, es la típica imagen de un comportamiento casi-periódico (Berge, 1984, p 43-62). Como ya se dijo, la figura 3, es decir la imagen correspondiente al Espectro de frecuencia de los 8192 datos no muestra ninguna información que permita concluir nada respecto a la periodicidad

del conjunto. Dado que la imagen esta muy compactada, es conveniente dividir los 8192 datos en intervalos menores. En la figura No. 6 se muestran los resultados que se obtienen al abrir el espacio en el eje horizontal, los valores van de 1 a 1018 en vez de 1 a 8192 y se observan, más claramente, las variaciones en el comportamiento del espectro de Fourier y estas variaciones sirven de guía para establecer el tamaño de ventana que conviene utilizar en la búsqueda de las ondas que se ajustan a los datos analizados.

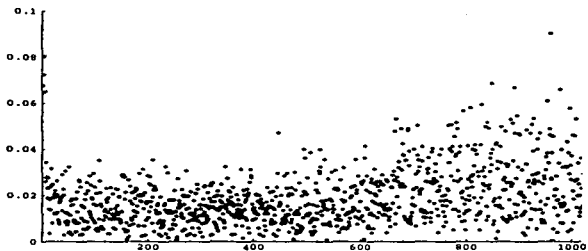


Figura 6

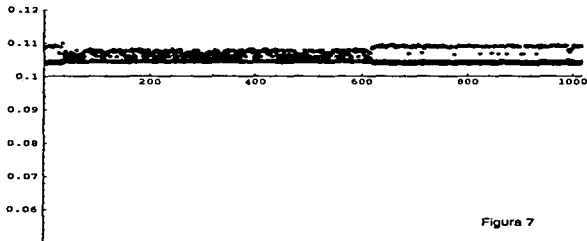


Figura 7

Tentativamente se pueden separar a los 8192 datos en 10 intervalos: de 1

a 1018, de 1019 a 1600, de 1601 a 2200, de 2201 a 3600, de 3601 a 4096, de 4097 a 4800, de 4801 a 6200, de 6201 a 6800, de 6801 a 7400, de 7400 a 8192. Esta división se ha propuesto porque, después de haber realizado una exploración, se encontraron algunas regularidades en los intervalos antes enunciados. Para ilustrar este proceso, se tomaron los datos correspondientes al primer intervalo, es decir los que estaban entre 1 y 1018 y se graficaron en la figura No. 7, como se observa un comportamiento más o menos regular, se decidió fijar el primer tamaño de ventana en 1018, y se calculó la transformada de Fourier para buscar los armónicos involucrados, es decir buscar el tamaño de ventana apropiado para eliminar la "banda ancha" que nos presenta el espectro de Fourier. El ajuste más apropiado se encontró para una ventana de $542 \Delta t$ en lugar de los 1018 iniciales y el resultado es mostrado en la figura No. 8, en la que sobresale el hecho que aparece un solo pico, en la posición 257. Nótese que $\frac{257}{542} = 0.47417$ es la frecuencia que se obtiene al dividir la posición señalada por el pico $k = 257$ entre el tamaño de la ventana $n = 542$.



Figura 8

Se continuó la búsqueda en torno a la periodicidad del conjunto de datos y se encontró nuevamente un solo pico en la gráfica del espectro de energía (ver figura No. 9), en la posición $k = 33$ para un tamaño de ventana de 72. Es decir, la frecuencia de la onda asociada a los primeros 72 datos tiene un valor de 0.45833. El 542 es múltiplo de 1626 así que, se consideró conveniente investigar tamaños de ventana múltiplos del 542 o tamaños en la vecindad de éstos.

Los resultados más sobresalientes se sintetizan en la tabla No. 1 de la cual, es importante resaltar lo siguiente:

- La primera columna indica el tamaño de ventana ($n\Delta t$ número de puntos).
- La segunda columna muestra las posiciones en las que aparecen los picos.
- Una vez que se ha aplicado la transformada de Fourier al conjunto de valores involucrado en un cierto tamaño de ventana, se les aplicó la Transformada Inversa, la cual permite regresar al conjunto de valores originales.
- Analizando la información de la tabla No. 1, se notan varios tamaños de ventana, para los cuales corresponden 3 picos.

Tabla No.1

Tamaño ventana	Posición de los picos
288	129
542	257
1626	257, 513, 769
2168	1025
3252	513, 1025, 1537
4878	2049

— Es importante la observación siguiente: Los 8192 datos se agruparon en dos intervalos. El primero lo constituyen los primeros 4878 valores y el siguiente los 3314 valores restantes. Para buscar la frecuencia de oscilación de estos datos se

investigaron diferentes tamaños de ventana, encontrándose en los tamaños de éstas correspondientes a 542, 1626, 2168, 3252 picos, como se mostró en la tabla No. 1. A partir del dato 4879 se analizó el segundo intervalo, tomándose nuevamente tamaños de ventana de 542, 1626, 2168, 3252 y nuevamente se encontraron picos en posiciones iguales a las del primer intervalo con lo que se demuestra que se repite el comportamiento con las mismas características de periodicidad a través del intervalo completo.

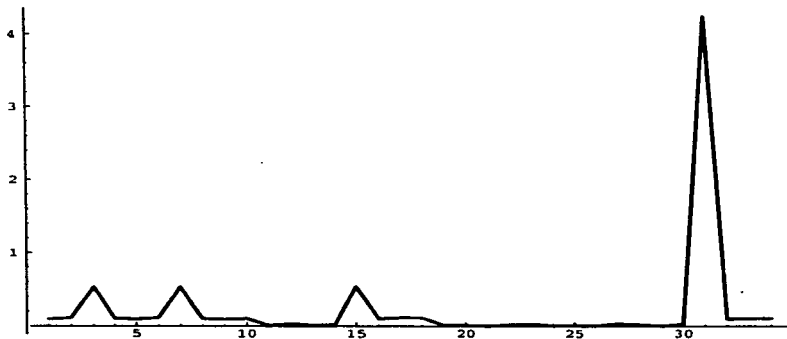


Figura 9

Las figuras 11, 12, 13, y 14 muestran los resultados obtenidos para los tamaños de ventana 1626, 2168, 3252 y 4878 respectivamente.

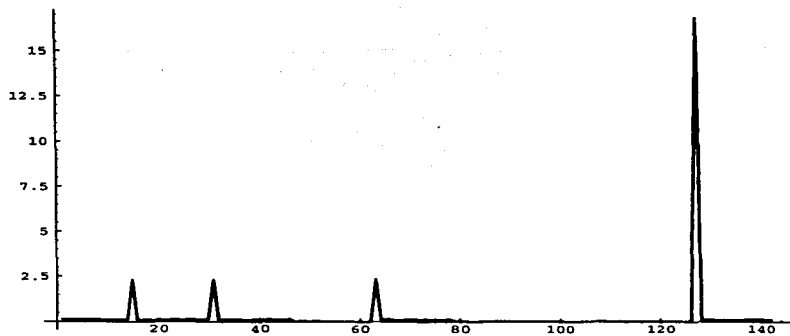


Figura 10

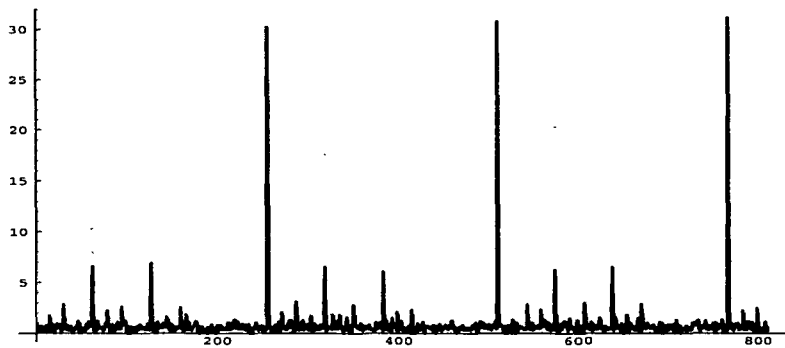


Figura 11

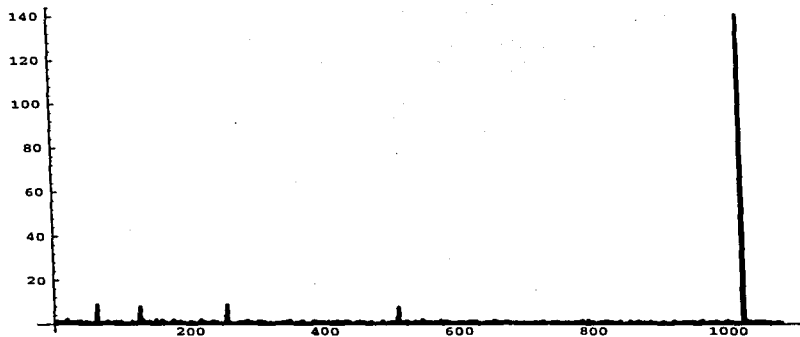


Figura 12



Figura 13

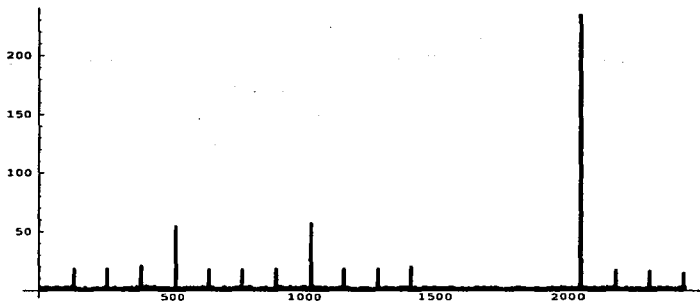


Figura 14

3.5 Estabilidad

Para concluir definitivamente que la señal analizada es periódica, se deben considerar otras condiciones. Así, por ejemplo, el conjunto de datos que constituyen la señal deben tener, cuando menos, un atractor. Si la señal efectivamente es periódica, debe mostrar estabilidad que se manifiesta de muchas maneras, por ejemplo, con amplitud constante, con frecuencia y por lo tanto, también periodo constante, etc. y todo esto implica un equilibrio que, geoméricamente, es representado por un atractor.

La apariencia del atractor depende de las variables implicadas en la señal. Así, puede representarse por un punto, por una curva cerrada, por una superficie, por un volumen, etc.

Si el sistema es periódico, al transcurrir el tiempo repetirá eventualmente estados que ya visitó con anterioridad, entonces, el atractor será una solución que se representará por un punto o un conjunto discreto de puntos.

Si el sistema evoluciona cíclicamente al transcurrir el tiempo, manteniéndose dentro de ciertos límites bien definidos en el espacio de fases, su solución será un atractor conocido como "ciclo límite." Su espectro de Fourier contiene picos para su frecuencia fundamental y sus armónicos pero, conociendo la señal en momento dado, siempre será posible predecir su condición en cualquier momento posterior; ello no ocurriría en un sistema caótico.

Un tercer tipo de atractor es el "toroide" que corresponde a una señal casi-periódica. La dimensión del toroide dependerá del número de frecuencias fundamentales independientes involucradas en la señal.

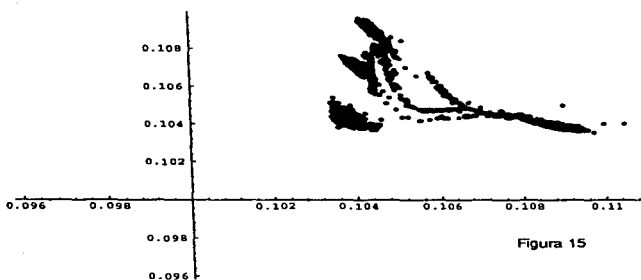
El espectro de Fourier característico de una señal casi-periódica, como en el caso del sistema periódico, también está formado por una combinación de picos de las frecuencias fundamentales y de sus armónicos y su solución también será dada como una serie de Fourier. Así mismo, será posible predecir como será la condición futura del sistema, apoyándose en información actual.

3.6 Caracterización de atractores

Una forma de visualizar al, o los atractores, es a través de gráficas con retraso temporal, las cuales se obtienen graficando a los elementos de la señal contra otros, tomados de la misma señal, pero a tiempos diferentes, para poner en evidencia la forma en que se van transformando al avanzar, desde un punto al siguiente.

Los elementos a graficar se pueden escoger de diferentes maneras, por ejemplo, t_{n+1} vs t_n . La figura No.15 se construyó tomando el valor de los datos, función de n , y se localizó en el eje horizontal. Se tomó, estrictamente, el siguiente valor del archivo, función de $n + 1$, y se localizó en el eje vertical. Así se localizó cada punto en la gráfica. Explicado en forma simplista se puede decir que la figura No. 15 se construyó relacionando el valor 1 con el valor 2, el valor 3 con el valor 4, el valor

5 con el valor 6, etc. y se obtiene el espacio de fases o gráfica de retraso temporal.



Resulta evidente que hay tres zonas en donde se concentran los puntos, es decir, existen tres atractores. Estos puntos atractores, hacia los cuales tienden todos los valores que conforman la señal, encierran información útil, entre la cual, cabe destacar la siguiente:

Tres puntos atractores, en una señal periódica, pueden explicarse como la sobreposición de un número impar de ondas senusoidales (Berge, 1984, p 63-72).

La frecuencia de estas ondas que se sobreponen tienen que ser múltiplos enteros entre sí. Es decir, el primer armónico debe tener frecuencia doble que la principal, el segundo armónico debe tener frecuencia doble que la del primer armónico. Si no se cumple esta condición no es posible obtener el espectro para la transformada de Fourier, que se muestra en figura No. 13.

La presencia de tres atractores obliga a que, al menos, se sobrepongan dos ondas, la principal y un armónico. De no ser así, la figura No.15 no tendría la apariencia de "vértices de un rectángulo" sino que mostraría apariencia "trian-

gular". Los diagramas de retardo muestran que los datos no están concentrados exactamente en los puntos, sino que más bien, se distribuyen estos, en la vecindad de un valor central que corresponde en sí, a cada punto atractor.

Apoyándose en la información global que muestra figura No.15 es posible proponer límites aproximados a las fronteras de la vecindad de cada atractor. Los límites se fijaron arbitrariamente, dibujando un círculo, con un radio tal que permitiera agrupar al mayor número de puntos posibles dentro de él.

Dado que el proceso de graficación fue iterativo (el primer valor con el segundo, luego el tercer valor con el cuarto, etc.), los límites establecidos para las abscisas no pueden ser, como se propuso antes, los mismos límites usados para las ordenadas. De esta manera los límites para las ordenadas se fijaron analizando la figura No. 15 quedando cada zona de atractor en:

a) $0.103 \leq x \leq 0.105$ y $0.103 \leq y \leq 0.105$

b) $0.108 \leq x \leq 0.110$ y $0.103 \leq y \leq 0.105$

c) $0.104 \leq x \leq 0.106$ y $0.107 \leq y \leq 0.109$

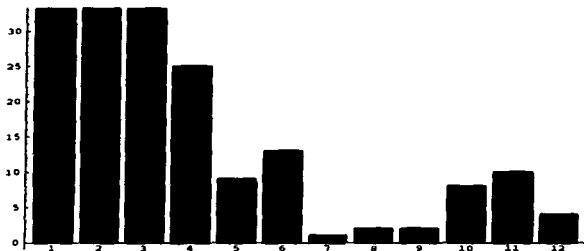


Figura 16

Estos límites permitieron agrupar a los 8192 datos en tres lotes, uno por cada zona de atracción. Las figuras No.16, 17 y 18 presentan los histograma de las frecuencias de los datos, en relación con cada intervalo de agrupación. Comparese con la figura No. 2.

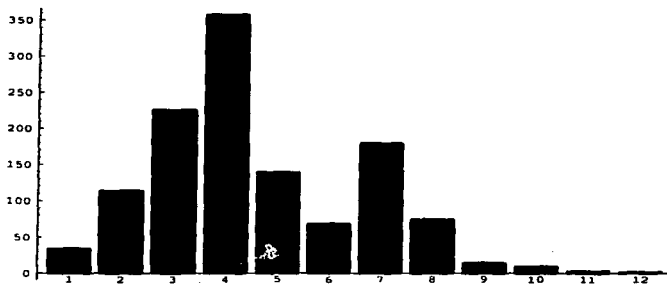


Figura 17

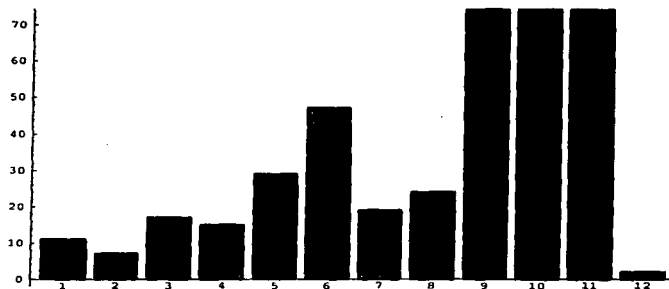


Figura 18

Con los datos agrupados, se puede calcular la media aritmética para todas las $f(n)$ y la media aritmética para todas las $f(n+1)$ y así se obtienen las coordenadas del punto atractor. La dispersión de los puntos alrededor del punto atractor, se determinó calculando la distancia promedio que existe entre cada uno de los puntos y el atractor y después se calculó la desviación estándar de cada distancia con el valor central. Los resultados fundamentales se presentan en la tabla No. 2.

Tabla 2

Atractor	Coordenadas promedio	Desviación estándar
a)	$\bar{x} = 0.103783 \quad \bar{y} = 0.104346$	0.0002541
b)	$\bar{x} = 0.104365 \quad \bar{y} = 0.10829$	0.0004260
c)	$\bar{x} = 0.104398 \quad \bar{y} = 0.108397$	0.00077694

3.7 Caracterización fractal

El conjunto de datos analizado exhibe ciertas propiedades que son características de los fractales, de las que sobresalen las siguientes:

Como se pudo ver en las figuras anteriores, en especial en la No. 9, al variar la longitud de la ventana con ciertos incrementos regulares, bien definidos, se repiten las propiedades mostradas por el conjunto, en cuanto a sus características fundamentales y cuando cambia la escala con que se estudia, presenta autosimilaridad.

El conjunto se puede escribir como la unión de ondas reescaladas, es decir por ondas similares que varían en cuanto a su frecuencia. Se obtiene mayor aproximación, en cuanto al ajuste de la unión de ondas reescaladas con el conjunto de datos, a medida que se emplean ondas de frecuencia más corta.

La figura No. 1 corresponde completamente con el denominado movimiento

Browniano. Por lo anterior se propuso la siguiente hipótesis: El conjunto de datos corresponde a un fractal aleatorio.

Esta hipótesis se considera correcta dado que:

Los incrementos entre $f(n)$ y $f(n + 1)$ son aleatorios. Para la construcción de la figura No. 15 se calcularon los valores correspondientes a $f(n)$ y $f(n + 1)$ y a partir de estos, se construyeron las figuras No. 16, 17 y 18 que prueba que los incrementos $\Delta y(n) = f(n + 1) - f(n)$ son gaussianos.

Si en la figura No. 1 se trasladan los ejes, de tal manera que coincida el eje horizontal con el valor central promedio de las figuras No. 16, 17 y 18 entonces, se verá claramente que el valor central, es decir la media aritmética de los desplazamientos a uno y otro lado del valor central vale cero. Característico del movimiento Browniano.

El nivel de dispersión se va incrementando a medida que se incrementa el valor de n , que a su vez está relacionado con el incremento del tiempo. Y finalmente, el argumento más importante de porque la hipótesis se considera correcta es debido a que el exponente de Hurts (Hasting, 1993. p 56-58), para el conjunto de datos oscila alrededor de 0.503.

Denominando *proceso* a los cambios que experimenta un sistema al pasar de un estado a otro, se puede hablar de dos tipos de procesos:

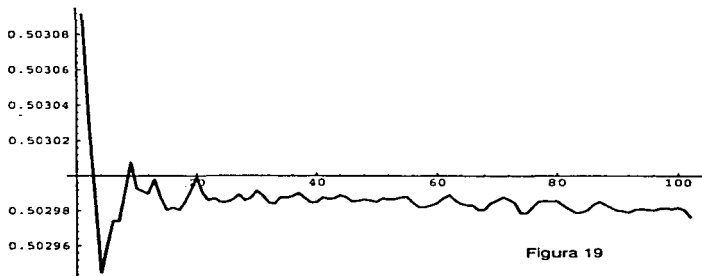
a) Los que son deterministas, es decir, aquellos que se desarrollan cumpliendo leyes bien precisas.

b) Los que son estocásticos, es decir, aquellos en los que la transición de una etapa a la siguiente conduce a estados que solo se pueden prever en forma aleatoria.

En un proceso fractal, las condiciones del sistema se mantienen dentro de

ciertos límites, aún cuando la transición de una etapa a otra, se de en forma aleatoria. La evolución podrá ser aleatoria pero, la magnitud del cambio, esta regulada por la condición del sistema antes de que se produzca el cambio.

El exponente de Hurst sirve para cuantificar la influencia del estado que tiene un sistema al inicio del cambio, con las condiciones que tendrá el sistema, al producirse la evolución. Si este coeficiente de Hurst vale 0.5, el proceso será fractal.



En todo proceso fractal, los incrementos sucesivos entre las etapas de dicho proceso, están correlacionados. En consecuencia es a través del coeficiente de correlación ya calculado y presentado en la gráfica No. 5 como se puede obtener el coeficiente de Hurst para la señal analizada mediante la aplicación de la siguiente relación:

$$H = \frac{\log(2 + 2\rho)}{\log(4)}$$

3.5

Donde ρ es el coeficiente de correlación, es decir el valor que nos permite

cuantificar el nivel de influencia que se establece entre las condiciones iniciales del sistema con las condiciones finales. Realizados los cálculos de la constante de Hurst para cada uno de los coeficientes de correlación utilizados en la elaboración de la gráfica No. 5 se obtuvieron los resultados que se presentan en la figura No. 19. Se observa claramente que los valores de la constante de Hurst oscila alrededor del valor 0.5, lo cual demuestra que el conjunto de datos corresponde a un proceso fractal.

**ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

Capítulo 4

Conclusiones

A través del análisis realizado al conjunto de datos experimentales motivo de este trabajo, se ha concluido que el comportamiento de dicho conjunto de datos es periódico y no caótico como habían creído los experimentadores. Es importante recalcar que las herramientas de cálculo utilizadas en este trabajo, permiten detectar algunas propiedades asociadas al conjunto aún cuando no sean evidentes en una simple visualización. Es de notarse que la conclusión obtenida estuvo en contra aún de la intuición de los experimentadores. Esto es, los datos muestran un comportamiento periódico a pesar de que la información publicada hacía fácil el presuponer su naturaleza caótica. Con ello no se afirma que los análisis reportados estuviesen equivocados, hay evidencia amplia de que un grifo gotea caoticamente en ciertos regímenes, pero parece que ello no es así en el que corresponde al caso que aquí se analizó.

Aunque originalmente se había programado incluir un estudio completo para la determinación de los exponentes de Liapunov y otras propiedades métricas de los datos bajo la suposición de que el conjunto era caótico, no fué necesario llevarlo a cabo, dado que el conjunto de datos resultó periódico.

Tener imágenes parciales o estáticas acerca del evento que se estudia no ha sido nunca satisfactorio para el investigador. Sin embargo hasta la fecha ésta ha sido la situación más común debido entre otras cosas a que contar con una imagen dinámica acerca de como evolucionan los eventos a estudiar implican problemas difíciles de resolver, entre los que sobresale la necesidad de manejar cantidades

significativas de datos. Estos problemas conllevan, por una parte, la realización del experimento que implica el control de algunas variables a través del tiempo y por otra la recopilación y estudio de los datos obtenidos.

En este trabajo se busca ilustrar que con las herramientas y técnicas con las que se cuenta en la actualidad, es posible realizar análisis que en otras épocas, aún cuando se contaba con algo de la base teórica, resultaba casi imposible llevarlas a cabo por la ardua tarea que representaban. Del trabajo que se presenta aquí sobresale:

1. Que las herramientas de cálculo utilizadas ahora se pueden aplicar sin enfrentar la enorme tarea que en otras épocas tuvieron.

2. Que estas herramientas son tan poderosas que nos permiten escudriñar profundamente en los comportamientos no accesibles de la naturaleza que antes eran poco evidentes al investigador. Así por ejemplo el conjunto de datos que aquí se analiza originalmente se pensó que tenía comportamiento aleatorio y tal vez en cierto nivel caótico y sin embargo después del análisis realizado se descubrió comportamiento periódico que sin este análisis habría pasado desapercibido.

3. Con la aplicación de la teoría disponible se puede llegar a determinar detalles tan delicados como los puntos atractores, sus grados de desviación, el comportamiento de sus ciclos, etc. que son fundamentales para lograr el conocimiento de los eventos que se estudian.

4. El potencial de aplicación que tienen las herramientas usadas en este trabajo, son de aplicación muy amplia en todos los campos del conocimiento.

Referencia bibliográfica

- Baker G. L. and Gollub J.P. Chaotic Dynamics: and introduction. Cambridge University Press, 1990.
- Bendat Julius S. and Piersol Allan G. Measurement and Analysis of Random Data. John Wiley and Sons, Inc., USA, 1971.
- Berge P. Pomeaud and Vidal C. Order within chaos, John Wiley and Sons, Inc., N.Y., 1984.
- Brigham E. Oran. The Fast Fourier Transform. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.
- Chatfield C. The analysis of time series: an introduction. Chapman and Hall Ltd. Bristol, England 1980.
- Hastings Harold M. and Sugihara George. Fractals, a user's guide for the natural sciences. Oxford University Press, 1993.
- Lighthill M.J. Introduction to Fourier analysis and generalised functions. Cambridge at the University Press, 1962.
- Martien P, S. C. Pope, P.L. Scott and R.S. Shaw, Phys. Lett 110 A (1985) 399.
- Núñez-Yépez H.N., C. Carbajal, A. L. Salas Brito, C.A. Vargas and L. Vicente, Elvevier Science Publishers B.V., 1991 467-475.
- Press William H., Flannery Brian P. Teukolsky Saul A. and Vetterling Williams T. Numerical Recipes in Pascal, The art of scientific computin, Cambridge University Press, 1989.

Ramirez Robert W. The FFT fundamentals and concepts. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1985.

Stremler, F.G. Introduction to communication systems. Addison-Wesley Publishing Company Inc. Massachussetts, USA, 1990.