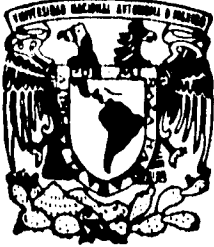


21  
25j



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**ARREGLOS DE LINEAS EN EL PLANO  
PROYECTIVO**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

**M A T E M A T I C O**

**P R E S E N T A :**

**RODRIGO ALONSO PEREZ BLACKALLER**



MEXICO, D. F.

**FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR**

1996.

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule  
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente.

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

ARREGLOS DE LINEAS EN EL PLANO PROYECTIVO

realizado por RODRIGO ALONSO PEREZ BLACKALLER

con número de cuenta 9251981-1, pasante de la carrera de MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	DR. LUIS MONTEJANO PEIMBERT
Propietario	DR. JAVIER BRACHO CARPIZO
Propietario	DR. VICTOR NEUMANN-LARA
Suplente	DR. JORGE LUIS AROCHA PEREZ
Suplente	DR. FRANCISCO LARRION RIVEROLI

Consejo Departamental de Matemáticas  
M. en C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA

Facultad de Ciencias  
Consejo Departamental de  
Matemáticas

# ARREGLOS DE LINEAS EN EL PLANO PROYECTIVO

Rodrigo Alonso Pérez Blackaller

Director de Tesis:  
Dr. Luis Montejano Peimbert

*A mis padres,  
a mi hermana,  
a mis abuelas.*

# AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar en particular mi gratitud al Dr. Luis Montejano. Desde el inicio de mi carrera su trato me ha sido fundamental para aprender a querer las Matemáticas.

La elaboración de este trabajo no hubiera sido posible sin el apoyo de gran cantidad de personas que me ayudaron y con quienes conviví durante este tiempo:

- Mi familia.
- Los asistentes del Seminario de Convexidad y Combinatoria.
- Los becarios del Instituto de Matemáticas.
- El personal del laboratorio de cómputo.

Quiero también agradecer en particular a las siguientes personas: Edgar Acosta, Paz Álvarez, Felipe Contreras, Miyoko Fujiyoshi, Eurídice Rioja y César Vélez.

Su trato dentro y fuera de la Facultad me ha ayudado en este trabajo, pero también me ha enseñado a vivir y a aprender.

A todos, muchas gracias.

# Índice

<b>1</b>	<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
1.1	Arreglos . . . . .	1
1.2	Estructura del trabajo . . . . .	3
<b>2</b>	<b>INVARIANTES</b>	<b>5</b>
2.1	Propiedades globales . . . . .	5
2.2	Propiedades locales . . . . .	7
2.3	El método del miope . . . . .	9
<b>3</b>	<b>PSEUDO-LINEAS</b>	<b>13</b>
3.1	Matroides . . . . .	13
3.2	pseudo-líneas . . . . .	16
3.3	Rectificabilidad . . . . .	17
<b>4</b>	<b>PROBLEMAS</b>	<b>21</b>
4.1	Relaciones entre $t_j$ y $p_k$ . . . . .	21
4.1.1	Teorema de Sylvester . . . . .	21
4.1.2	Otra fórmula sobre adyacencias . . . . .	23
4.1.3	Teorema de Eberhard . . . . .	24
4.2	Casi una dualidad . . . . .	24
4.3	Número mínimo de triángulos . . . . .	25
4.4	Número máximo de triángulos . . . . .	28
4.5	Cuadriláteros . . . . .	29
4.5.1	Cota superior . . . . .	30
4.5.2	Cota inferior . . . . .	30
4.5.3	Resultados nuevos . . . . .	30
4.5.4	Ejemplos nuevos . . . . .	32

4.6	Número de vértices por línea . . . . .	33
4.6.1	El problema de $r^*$ . . . . .	33
4.6.2	Una familia de arreglos con $r^*$ pequeña. . . . .	35
4.6.3	Conjetura . . . . .	35
<b>A</b>	<b>Catálogo</b>	<b>39</b>
	<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>53</b>



# Lista de Figuras

1.1	Cuasi-haces . . . . .	2
2.1	Número de caras alrededor de una vecindad en arreglos trivial y simple. . . . .	9
2.2	El método del miope. . . . .	10
3.1	Tres objetos geométricos distintos con el mismo matroide asociado. . . . .	14
3.2	Un arreglo de pseudo-líneas no rectificable. . . . .	18
3.3	Cómo obtener un arreglo simple, no rectificable. . . . .	19
4.1	El conjunto de valores $p_k$ no determina el número de líneas ( $p_k = 12$ ). . . . .	26
4.2	El único arreglo que satisface $t_2 = \frac{3}{7}n$ . . . . .	27
4.3	Configuraciones no permitidas en un arreglo simple. . . . .	28
4.4	Arreglos de tres y seis líneas sin cuadriláteros. . . . .	31
4.5	Arreglos de diez y dieciseis líneas sin cuadriláteros. . . . .	32
4.6	Un arreglo con número máximo de triángulos no tiene cuadriláteros. . . . .	33
4.7	Ejemplo reciente de arreglo sin cuadriláteros ( $n = 18$ ). . . . .	34
4.8	$r^* = \frac{4}{9}n$ . El arreglo mas pequeño de la familia que desmiente la conjetura de Dirac. (Contiene la línea al $\infty$ ) . . . . .	36
4.9	Arreglo con $r^* < \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ . . . . .	38



# Capítulo 1

## INTRODUCCIÓN

### 1.1 Arreglos

A finales de los años sesenta, como parte de un programa para revivir la vena geométrica en las matemáticas, Branko Grünbaum comenzó el estudio de varias estructuras geométricas discretas, entre las que se encuentran los arreglos de líneas. En 1971 publicó un resumen de los trabajos existentes sobre el tema, encontrándose con una gran sorpresa pues, a pesar de la sencillez de los enunciados, los problemas que surgen han sido suficientemente complicados como para llamar la atención de matemáticos tan conocidos como Erdős, Sylvester, Coxeter, Dirac, Canham, Moser y Levi entre muchos otros.

Los arreglos de líneas aparecen al considerar colecciones finitas de líneas en el plano proyectivo. Las propiedades métricas de este espacio, juegan un papel relevante y que no ha sido estudiado en detalle; en particular, la característica de Euler para el proyectivo es un dato imprescindible en la demostración del teorema de Sylvester y de otros resultados. Sin embargo la estructura combinatoria (que es la que vamos a estudiar) es consecuencia del modo en que dichas líneas separan en polígonos al plano. El conjunto de vértices, aristas y caras resultantes, junto con sus relaciones de adyacencia, es lo que conocemos como un complejo celular.

Más formalmente, tenemos la siguiente

**Definición 1.1** Una configuración de líneas es un conjunto finito de rectas en el plano proyectivo. Podemos separar las configuraciones en clases de equivalencia, si establecemos que dos configuraciones son equivalentes cuando los complejos celulares que éstas generan son isomorfos en el sentido de que existe una biyección entre sus vértices, aristas y caras que preserve las adyacencias. A cada una de estas clases de equivalencia la llamaremos un arreglo de líneas.

Para los fines de este trabajo, un arreglo queda definido con solo un dibujo de las líneas que lo conforman y en el que quede clara la ubicación de cada vértice con respecto a la configuración total. Por ejemplo, en la figura (4.9) del capítulo 4, queda entendido que las intersecciones no dibujadas pertenecen a la línea al infinito. Esta aclaración es esencial ya que al considerar nuestro arreglo como un objeto proyectivo, algunas de la caras deben aparecer representadas como dos sectores infinitos prolongados en direcciones opuestas (ver figura (1.1)).

Existen algunos tipos de arreglos que, por sus características intrínsecas, reciben una denominación especial. Dos clases de arreglos importantes, en éste sentido, son los simples y los simpliciales; un arreglo es simple si cada vértice pertenece exactamente a dos rectas; un arreglo simplicial es aquel en que todas las caras son triángulos. Si existe un punto común a todas las líneas de un arreglo, decimos que éste es trivial. En particular, si  $A$  es un arreglo con  $n - 1$  líneas concurrentes y una externa,  $A$  es simplicial y recibe el nombre de cuasi-haz (figura 1.1). El único arreglo que es, al mismo tiempo, simple y simplicial es el cuasi-haz de tres líneas de la figura (1.1).

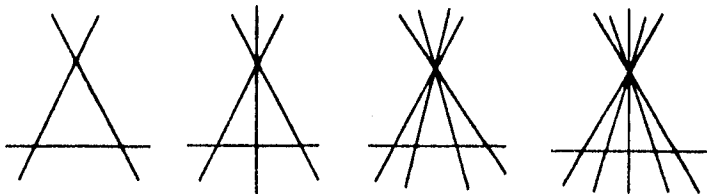


Figura 1.1: Cuasi-haces

## 1.2 Estructura del trabajo

El problema fundamental en la teoría de arreglos es el de clasificación. Este consiste en desarrollar métodos para distinguir dos arreglos que están dados por su dibujo o simplemente por las relaciones de adyacencia entre sus componentes; en particular, es importante determinar la cantidad de distintos arreglos que es posible formar con un número dado de líneas.

La siguiente tabla presenta los resultados conocidos con respecto a esta última pregunta:

$n$	3	4	5	6	7	8
$a_n$	1	2	4	17	?	?
$s_n$	1	1	1	4	11	135

Aquí  $a_n$  y  $s_n$  representan, respectivamente, los números de arreglos y de arreglos simples con  $n$  líneas. Tanto el valor exacto de  $a_n$  y  $s_n$  como la cuestión de proporcionar cotas (inferiores y superiores) para su crecimiento, son problemas abiertos. La situación con respecto a los arreglos simpliciales es distinta, aunque permanece también abierta. Se conjetura que a partir de cierta  $n$ , el número de arreglos simpliciales con  $n$  líneas es, exactamente, dos.

La presente tesis tiene como objetivo presentar los conceptos básicos de la teoría de arreglos; introducir las nuevas herramientas, tanto combinatorias como geométricas que han sido usadas para atacar los problemas y, a través de algunos problemas típicos, mostrar cual es el estado actual de conocimiento. Las demostraciones son originales, excepto cuando se hace mención de la fuente; asimismo, en el camino, presentaré algunos resultados propios.

En el capítulo 2 se presentan los invariantes básicos. Éstos proporcionan toda la información numérica de los arreglos, tanto a nivel global, como a nivel local; es decir, cómo se ve el arreglo en su totalidad y cómo se ve en torno a cada una de sus componentes. Sin embargo, dichos valores no son suficientes para determinar por completo al arreglo. De hecho, ésta es la razón por la que surge la mayor parte de los problemas planteados.

Se presenta también una discusión de lo que llamo el método del miope;

éste permite obtener información de un arreglo cualquiera, asociándolo con un arreglo simple. Así, doy una segunda demostración de una de las igualdades presentadas. Este método es utilizado con éxito en [Roud 2] para resolver una de las conjeturas planteadas por Grünbaum en su monografía.

El capítulo 3 introduce la noción de arreglo de pseudo-líneas y su relación con los arreglos de líneas via el concepto de matroides.

Mediante la teoría de matroides, es posible obtener información útil para el problema de clasificación; en particular, el último valor de la tabla anterior, fue determinado recientemente gracias a una técnica de clasificación de arreglos simples de pseudo-líneas que utiliza ideas de matroides.

El capítulo 4 plantea los problemas más conocidos en conexión con los arreglos y los resultados más recientes en torno a sus soluciones.

Éste capítulo constituye el núcleo del presente trabajo. Casi todas las soluciones son recientes y no han sido recopiladas (hasta donde alcanza la información del autor) en ningún trabajo previo.

En este capítulo demuestro que las fórmulas relativas a los teoremas de Sylvester y Eberhard completan el sistema de identidades combinatorias; además, en la sección relativa al problema sobre cotas inferiores para el número máximo de vértices en una línea, presento una familia de arreglos que reponde en negativo una conjetura de Dirac.

Por último, el apéndice consta de una tabla en la que aparecen todos los arreglos con 6 líneas o menos. Para cada uno de ellos se incluyen, como referencia, los valores de todos los invariantes estudiados.

# Capítulo 2

## INVARIANTES

A menos que se especifique lo contrario, se asumirá en este trabajo que todos los arreglos estudiados son no triviales; la ventaja inmediata de esta suposición es que, para un arreglo no trivial, todas las caras son polígonos. Teniendo en cuenta esta observación, podemos asociar a cada arreglo cuatro magnitudes básicas.

### 2.1 Propiedades globales

**Definición 2.1** *Dado un arreglo  $A$ ,  $n(A)$  es el número de líneas que lo conforman y  $f_0(A)$ ,  $f_1(A)$  y  $f_2(A)$  denotan, respectivamente, el número de vértices, aristas y caras del complejo celular generado por  $A$ .*

Estos valores determinan propiedades numéricas del arreglo que nos permiten entender la estructura a gran escala. Como los arreglos están inmersos en  $\mathbb{RP}^2$ , el complejo celular que determinan debe satisfacer la condición de Euler:

$$f_0(A) - f_1(A) + f_2(A) = \chi(\mathbb{RP}^2) = 1 \quad (2.1)$$

La primera consecuencia de esta igualdad es que los números de vértices y caras no pueden crecer más rápido que una función lineal del número de aristas. Esta observación puede extenderse de inmediato ya que, no solo cada  $f_i$  está acotada linealmente por las demás, sino que es posible dar las cotas exactas.

**Teorema 2.1** *Para todo arreglo de rectas en el plano proyectivo se dan las siguientes desigualdades:*

$$\begin{aligned} 1 + f_0 &\leq f_2 \leq 2f_0 - 2, \\ 2f_0 &\leq f_1 \leq 3f_0 - 3, \\ \frac{f_1 + 2}{2} &\leq f_2 \leq \frac{2f_1}{3}. \end{aligned}$$

*Más aún, las igualdades en la izquierda caracterizan a los arreglos simples mientras que las igualdades en la derecha caracterizan a los simpliciales.*

*Demostración:* Dado un valor fijo de  $f_0$ , el número mínimo de aristas se alcanza cuando todos los vértices son simples, es decir, cuando cada vértice es extremo de tan solo cuatro aristas; en este caso el número de aristas es  $4f_0/2$  pues cada arista es contada dos veces. Por lo tanto se cumple  $2f_0 \leq f_1$  y la igualdad es característica de los arreglos simples. De la misma manera, si fijamos un valor de  $f_2$ , el mínimo de aristas solo puede alcanzarse cuando todas las caras son triángulos, de manera que cada cara sea adyacente a sólo tres aristas; el número total de aristas es  $3f_2/2$  en el caso extremo, por lo que se cumple  $3f_2/2 \leq f_1$  y la igualdad caracteriza a los arreglos simpliciales.

Hasta ahora hemos obtenido una desigualdad izquierda y una derecha; el resto se obtiene fácilmente haciendo substituciones mediante 2.1. Por ejemplo, como  $f_1 = f_0 + f_2 - 1$  obtenemos  $2f_0 \leq f_0 + f_2 - 1$ , o sea  $f_0 \leq f_2 - 1$  y la igualdad se da en los mismos casos que la anterior; es decir, cuando el arreglo es simple. ■

La razón principal para que el estudio de los arreglos sea interesante, es que su número es mucho mayor del que pueden predecir los valores  $f_i$ . Para valores  $f_i$  dados, puede haber una gran cantidad de arreglos; por ejemplo, todos los arreglos simples con  $n$  líneas.

La situación es aún más complicada, ya que el rango de variación para las  $f_i$  está esencialmente comprendido en el intervalo  $(n, n^2)$ .

**Teorema 2.2** *Para todos los arreglos con  $n$  líneas, se cumplen las siguientes desigualdades:*

$$\begin{aligned} n &\leq f_0 \leq \binom{n}{2}, \\ 3n - 3 &\leq f_1 \leq 2\binom{n}{2}, \\ 2n - 2 &\leq f_2 \leq \binom{n}{2} + 1, \end{aligned}$$



donde las igualdades de la izquierda caracterizan a los cuasi-haces y las de la derecha caracterizan a los arreglos simples.

*Demostración:* Solo demostraremos las desigualdades de la derecha. Cada línea puede contener como máximo  $(n - 1)$  vértices (provenientes de  $(n - 1)$  intersecciones ajenas con las demás líneas) y  $(n - 1)$  aristas: de tal manera que el número de aristas está acotado por  $n(n - 1)$ , caso que se alcanza cuando no hay intersecciones múltiples (i.e. el arreglo es simple). Como cada vértice pertenece al menos a dos aristas, el número de vértices está acotado por  $n(n - 1)/2$  y este valor se alcanza cuando cada vértice se halla en exactamente dos líneas, es decir, cuando el arreglo es simple. Por (2.1) deducimos también la cota para  $f_2$  ■

## 2.2 Propiedades locales

Las desigualdades de la sección anterior nos indican que todos los arreglos simples con  $n$  líneas tienen los mismos valores de  $f_i$ . Para determinar cuándo dos arreglos simples son diferentes, es necesario recurrir a las propiedades locales del arreglo; el primer paso, consiste en dotar a los elementos del arreglo (vértices, aristas, caras y líneas) con valores que indiquen cómo es la estructura en sus vecindades.

**Definición 2.2** Dado un arreglo  $A$ , sean respectivamente  $V$ ,  $F$  y  $L$  un vértice, una cara y una línea arbitrarios; llamamos:

$$t(V) = \text{número de líneas que contienen a } V,$$

$$p(F) = \text{número de vértices de } F \text{ y}$$

$$r(L) = \text{número de aristas en } L.$$

Los valores anteriores, en su conjunto, están sujetos a ciertas restricciones globales.

**Teorema 2.3** Para todo arreglo  $A$  se cumplen las siguientes igualdades:

$$2 \sum_{V \in A} t(V) = 2 \sum_{L \in A} r(L) = \sum_{F \in A} p(F) = 2f_1 \quad (2.2)$$

*Demostración:* Basta contar el número de aristas adyacentes a cada vértice, línea o cara respectivamente. Solo hay que recordar que cada arista es adyacente a dos vértices y a dos caras y que el número de líneas por  $V$  es la mitad del número de aristas. ■

Una vez definidos estos valores, es claro que una forma de medir la complejidad de un arreglo, es determinar la complejidad en cada componente: por lo que tiene sentido introducir los siguientes invariantes:

**Definición 2.3** Dado un arreglo  $A$ , sean:

$$r_i(A) = \#\{L \in A | r(L) = i\} \quad \forall i \geq 2$$

$$t_j(A) = \#\{V \in A | t(V) = j\} \quad \forall j \geq 2$$

$$p_k(A) = \#\{F \in A | p(F) = k\} \quad \forall k \geq 3$$

De hecho, si  $n(A) = n$ , los rangos en que las funciones tienen sentido son:  $2 \leq i \leq (n-1)$ ,  $2 \leq j \leq (n-1)$  y  $3 \leq k \leq n$ .

De esta manera, podemos decir que un arreglo  $A$  es simple si y solo si  $t_2(A) = f_0$ ; simplicial si y solo si  $p_3(A) = f_2$  o cuasi-haz si y solo si  $r_2(A) = n-1$ .

El primer resultado relevante consiste en que a partir de la recolección de los valores locales resulta posible recuperar la información global del arreglo.

**Teorema 2.4** Para todo arreglo, son válidas las siguientes igualdades:

$$\sum_{i \geq 2} r_i = n, \quad \sum_{j \geq 2} t_j = f_0, \quad \sum_{k \geq 3} p_k = f_2$$

$$2 \sum_{i \geq 2} i r_i = 2 \sum_{j \geq 2} j t_j = \sum_{k \geq 3} k p_k = 2 f_1$$

$$\sum_{j \geq 2} j^2 t_j = f_1 + n(n-1)$$

*Demostración:* El primer renglón es obvio, ya que solo implica separar las líneas, vértices y caras respectivamente, en componentes ajenos. Las igualdades del segundo renglón son las mismas de (2.2) con los

términos reordenados.

La última igualdad se obtiene notando que:

$$\sum_{j \geq 2} j^2 t_j = \sum_{L \in A} \sum_{V \in L} t(V) =$$

$$\sum_{L \in A} (r(L) + (n - 1)) = f_1 + n(n - 1)$$

■

## 2.3 El método del miope

La última igualdad de la sección anterior es de particular importancia ya que, a diferencia de la fórmula de Euler (2.1), que relaciona los valores  $f_i$ , no existe una igualdad que involucre estos valores con  $n(A)$ . En este sentido, los invariantes locales proporcionan más información que los  $f_i$  y, en consecuencia, permiten una clasificación menos burda. En esta sección se presenta un método de demostración de la igualdad anterior y que aparece a lo largo del trabajo.

En primer lugar calculamos las diferencias entre el número de vértices,

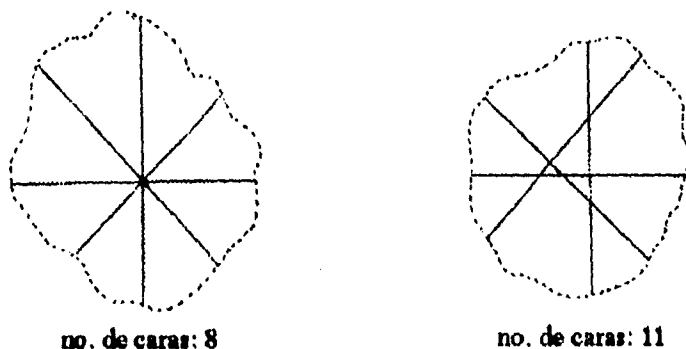


Figura 2.1: Número de caras alrededor de una vecindad en arreglos trivial y simple.

aristas y caras de un arreglo simple  $A$  y uno trivial  $B$  en una vecindad

afín que incluya a todos los vértices (figura 2.1):

$$f_0(A) - f_0(B) = \binom{n}{2} - 1$$

$$f_1(A) - f_1(B) = n(n-1) + n - 2n$$

$$f_2(A) - f_2(B) = \binom{n}{2} + n + 1 - 2n$$

Ahora consideramos un arreglo  $A$  cualquiera y construimos un arreglo simple  $B$  de tal modo que "visto de lejos" se confunda con  $A$  (figura 2.2). Como se ve en la figura, podemos aplicar las fórmulas anteriores en cada

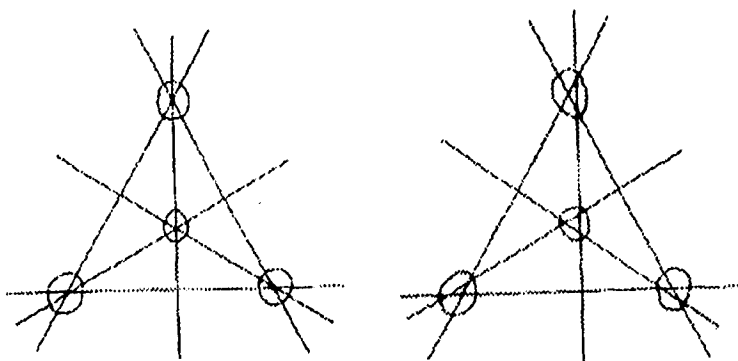


Figura 2.2: El método del miope.

vértice múltiple del arreglo  $A$  y obtener  $f_0(A)$ ,  $f_1(A)$  y  $f_2(A)$  a partir de los valores proporcionados por el arreglo  $B$  en las vecindades marcadas. Tenemos entonces que las  $f_i$  pueden expresarse como funciones de  $n$  y de  $t_j(A)$

$$f_0(A) = \binom{n}{2} - \sum_{j \geq 3} \left( \binom{j-1}{2} - 1 \right) t_j$$

$$f_1(A) = 2\binom{n}{2} - \sum_{j \geq 3} (j^2 - 2j) t_j$$

$$f_2(A) = \binom{n}{2} + 1 - \sum_{j \geq 3} \binom{j-1}{2} t_j$$

Si sustituimos  $\sum 2jt_j = 2f_1$  en la segunda igualdad, se obtiene

$$f_1 = 2\binom{n}{2} - \sum j^2 t_j + 2f_1,$$

y de ahí el resultado buscado.

Para todo arreglo simple de  $n$  líneas los valores de cada  $f_i$  son los mismos. La utilidad del método del miope radica en que podemos calcular dichos valores para el arreglo simple asociado sin saber cual es este. Por ello, la determinación de métodos para distinguir arreglos simples es de particular interés, ya que sería factible extenderlos para distinguir arreglos en general.



## Capítulo 3

# PSEUDO-LINEAS

### 3.1 Matroides

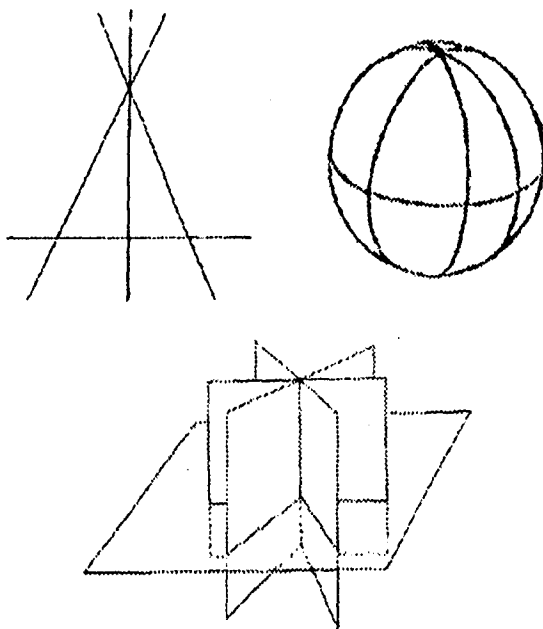
Considerese un arreglo de líneas  $A$ . Como  $\mathbb{RP}^2$  es un espacio cociente de  $S^2$ , podemos visualizar nuestra configuración en la esfera unitaria de  $\mathbb{R}^3$ . En lugar de rectas, tenemos ahora una colección de círculos máximos, cuyas intersecciones corresponden por parejas antípodas a los vértices del arreglo.

Cada círculo determina un plano por el origen; tres (o más) de estos planos son dependientes (en el sentido de intersectarse en una recta) si y solo si los círculos correspondientes tienen una pareja de puntos en común.

Podemos ahora asociar un vector normal a cada plano. Una caracterización de la dependencia entre planos es el hecho de que tres planos contienen una línea común si y solo si los vectores normales están contenidos en un plano; es decir, cuando los vectores son linealmente dependientes.

De esta manera resulta claro que las relaciones de adyacencia entre las líneas de nuestro arreglo  $A$  pueden estudiarse como relaciones de dependencia lineal en cierto conjunto de vectores (figura 3.1). La idea de relacionar los conceptos de dependencia e incidencia está en la base del concepto de Matroide. La motivación reside en proporcionar un mismo tipo de estructura combinatoria a conceptos tan disímiles como:

- Relaciones de dependencia lineal entre vectores,
- Intersecciones de líneas (o círculos máximos) ó
- Ciclos en una gráfica.



**Figura 3.1:** Tres objetos geométricos distintos con el mismo matroide asociado.

De manera formal, un matroide es un conjunto  $E$  junto con una estructura combinatoria dada por una familia de subconjuntos que satisfacen alguno de los siguientes grupos de axiomas:

**Definición 3.1** (*Axiomas de conjuntos independientes*) Una familia  $I$  de subconjuntos de  $E$  se llama una familia de conjuntos independientes para  $E$  si satisface:



(i1)  $\mathbf{I} \neq \emptyset$  (no trivialidad)

(i2) Para todos  $X, Y \subseteq E$  con  $X \subseteq Y$ , se tiene  $Y \in \mathbf{I} \Rightarrow X \in \mathbf{I}$

(i3) Para todos  $I_1, I_2 \in \mathbf{I}$ , si  $|I_1| < |I_2|$ , entonces existe  $x \in I_2 - I_1$  tal que  $I_1 \cup x \in \mathbf{I}$  (aumentación)

**Definición 3.2** (Axiomas de conjuntos maximalmente independientes)

Una familia  $\mathbf{B}$  de subconjuntos de  $E$  se llama una familia de bases para  $E$ , y sus conjuntos se llaman bases, si se cumplen los axiomas:

(b1)  $\mathbf{B} \neq \emptyset$  (no trivialidad)

(b2)  $\mathbf{B}$  es una anticadena; es decir  $X, Y \in \mathbf{B}$  y  $X \subseteq Y \Rightarrow X = Y$  (incomparabilidad)

(b3) Para todos  $X, Y \subseteq E$  con  $X \subseteq Y$ , si existen  $B_1, B_2 \in \mathbf{B}$  tales que  $X \subseteq B_1$  y  $B_2 \subseteq Y$  entonces existe  $B_3 \in \mathbf{B}$  de tal modo que  $X \subseteq B_3 \subseteq Y$  (axioma de base intermedia)

**Definición 3.3** (Axiomas de conjuntos mínimamente dependientes)

Una familia  $\mathbf{C}$  de subconjuntos de  $E$  se llama una familia de circuitos para  $E$  si satisface los axiomas:

(c1)  $\emptyset \notin \mathbf{C}$  (no trivialidad)

(c2)  $\mathbf{C}$  es una anticadena (incomparabilidad)

(c3) Para todos  $C_1, C_2 \in \mathbf{C}$  tales que  $C_1 \neq C_2$ , y para todo  $x \in E$ , existe  $C_3 \in \mathbf{C}$  tal que  $C_3 \subseteq (C_1 \cap C_2) - x$  (eliminación)

Una vez dado un matroide con alguna de las estructuras anteriores, las demás estructuras quedan automáticamente forzadas. Los conjuntos maximalmente independientes son la subfamilia de  $\mathbf{I}$  a los que no se les puede agregar un elemento de  $E$  sin perder la propiedad de independencia; a su vez, los conjuntos mínimamente dependientes son justo aquellos que se vuelven independientes al quitarles un solo elemento. Por ejemplo, las relaciones de dependencia líneal en un conjunto  $E$  de vectores forman un matroide, y éste queda determinado tan pronto como quede determinado cuales subconjuntos son:

- línealmente independientes,
- bases del espacio,
- mínimamente línealmente dependientes ó
- línealmente dependientes.

Una ventaja importante de los axiomas de bases es que se puede demostrar que en cada matroide, todas las bases tienen la misma cardinalidad.

## 3.2 pseudo-líneas

Sea  $M$  el matroide dado por la pareja  $(E, \mathbf{I})$  y supongamos que  $X \subseteq E$ . Si  $\mathbf{I}|X = \{I \subseteq X \mid I \in \mathbf{I}\}$ . Entonces es fácil probar que la pareja  $(X, \mathbf{I}|X)$  forma un matroide, llamado la restricción de  $M$  a  $X$  y que se denota por  $M|X$ .

Podemos definir ahora la función rango que actúa sobre los subconjuntos  $X$  de  $E$ , como  $r(X) = |B|$  donde  $B$  es una base del matroide  $M|X$ . En particular, el rango de un matroide  $M$  se define como  $r(M)$ , es decir, el tamaño de sus bases.

De la discusión al principio del capítulo, es fácil ver que un arreglo de líneas corresponde a un matroide de rango 3; sin embargo, existen matroides de rango 3 que no provienen de un arreglo de líneas. Una familia de objetos geométricos que contiene a los arreglos de líneas y que sí está en relación biunívoca con los matroides de rango 3 es la de arreglos de pseudo-líneas.

**Definición 3.4** *Una pseudo-línea es una curva esencial en  $\mathbb{RP}^2$ ; es decir, una curva cerrada que no separa al plano en dos regiones.*

*Una configuración de pseudo-líneas es un conjunto finito de pseudo-líneas tal que cada pareja se interseca en exactamente un punto. A semejanza de la definición de arreglos de líneas podemos separar las configuraciones en clases si establecemos que dos configuraciones son equivalentes cuando los complejos celulares que generan son isomorfos. A cada una de estas clases la llamaremos un arreglo de pseudo-líneas.*

De la condición de intersección se puede deducir que las pseudo-líneas no pueden ser tangentes entre sí, sino que deben cruzarse transversalmente en el punto común. En caso contrario, por las propiedades del proyectivo, existiría un segundo punto en el que se cruzan.

En particular, las rectas son pseudo-líneas y por lo tanto todo arreglo

de líneas es también un arreglo de pseudo-líneas.

La mayoría de los conceptos definidos para arreglos de líneas, son válidos también en esta familia más amplia. Podemos hablar de arreglos simples y simpliciales de pseudo-líneas. También podemos definir, de igual modo a como hicimos en el capítulo 2, los invariantes globales  $n$ ,  $f_i$  y los locales  $t_j$ ,  $p_k$  y  $r_i$ . Asimismo, todas las fórmulas y desigualdades presentadas, siguen siendo válidas.

### 3.3 Rectificabilidad

Desafortunadamente, el matroide asociado, no preserva toda la información geométrica del arreglo. En particular, existen arreglos de pseudo-líneas que no son isomorfos a algún arreglo de líneas. Resulta imposible determinar, sin argumentos geométricos, si un arreglo dado es o no rectificable; es decir, si puede realizarse como arreglo de líneas. De hecho, la afirmación anterior depende intrínsecamente de las propiedades métricas del plano proyectivo como veremos en la sección relativa al teorema de Sylvester en el siguiente capítulo.

Consideremos, por ejemplo, el arreglo de la figura (3.2). Por el teorema de Pappus, una línea por  $A$  y  $B$  debe pasar necesariamente por  $C$ . Por lo tanto, el arreglo formado por las ocho líneas sólidas y la pseudo-línea punteada no puede ser isomorfo a un arreglo de líneas.

Si la novena línea pasara (en el dibujo) por arriba de  $A$  y  $C$ , pero por debajo de  $B$ , resulta claro que el arreglo tampoco puede ser rectificable. No obstante, en este caso, el número de vértices múltiples ha disminuido.

Usando de esta manera los teoremas de Pappus y Desargues, es posible demostrar que el arreglo de nueve líneas de la figura (3.3) no es rectificable; si perturbamos ligeramente el vértice triple del centro mediante el método del miope, obtenemos un arreglo simple, no rectificable.

Es importante observar que los dos ejemplos presentados de arreglos no rectificables tienen nueve líneas. En [Good-Pol] Goodman y Pollack prueban que son ejemplos óptimos; es decir, todo arreglo  $A$  de pseudo-líneas con  $n(A) \leq 8$  es rectificable.

Este resultado permite llenar el último espacio de la tabla presentada en la introducción. En sus tesis doctorales, Canham [Canh] y Halsey [Hal]

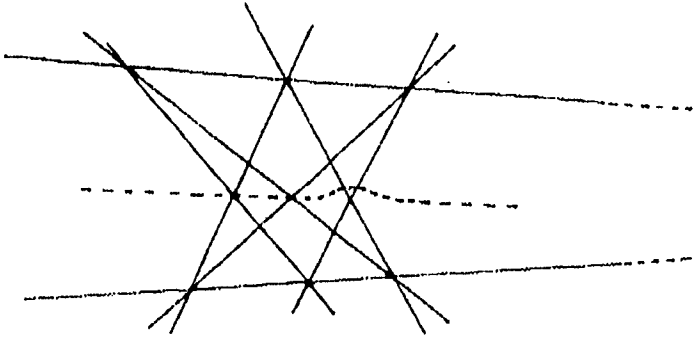


Figura 3.2: Un arreglo de pseudo-líneas no rectificable.

presentan (de manera independiente) una enumeración completa de todos los tipos de arreglos simples con 8 pseudolíneas. Tras la publicación de [Good-Pol], es claro que dichas clasificaciones lo son estrictamente de arreglos de líneas. Este es el único resultado de enumeración obtenido en años recientes.

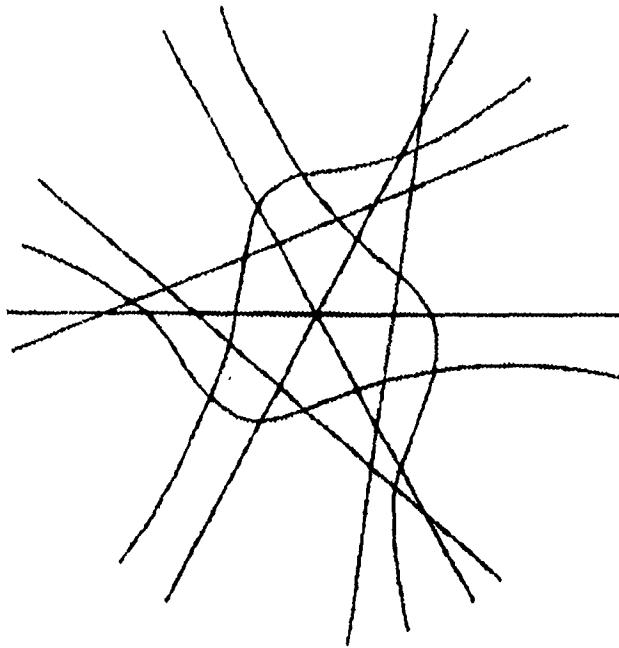


Figura 3.3: Cómo obtener un arreglo simple, no rectificable.



# Capítulo 4

## PROBLEMAS

Las propiedades locales de un arreglo determinan en gran medida su estructura; sin embargo, al estudiar las relaciones que hay entre los distintos invariantes resulta claro que para valores especificados existen muchos arreglos que los realizan. Como consecuencia, veremos que estos valores no permiten una clasificación tan completa como para distinguir cualquier pareja de arreglos y que, por lo tanto, muchas de las relaciones entre ellos conducen a problemas interesantes y no siempre fáciles.

### 4.1 Relaciones entre $t_j$ y $p_k$

Se demuestran en esta sección dos fórmulas que relacionan  $t_j$  con  $p_k$ . Éstas tienen la propiedad de completar todas las desigualdades combinatorias entre los invariantes definidos y de motivar problemas clásicos como el siguiente:

#### 4.1.1 Teorema de Sylvester

En 1893 Sylvester [Syl] planteó por primera vez el siguiente resultado: Si  $n$  puntos en  $\mathbb{RP}^2$  son no colineales, entonces existe una línea que contiene exactamente a dos de ellos.

Medio siglo más tarde, en 1940, Paul Erdős planteó exactamente el mismo problema de manera independiente. Este problema ha despertado desde entonces un gran interés por el hecho de que es la primera

muestra de cómo una propiedad combinatoria puede depender de propiedades geométricas del espacio.

Mediante dualidad podemos traducir este enunciado a uno en términos de arreglos, usando la desigualdad  $t_2(A) > 0$ ; aquí demostraremos un resultado más fuerte:

**Teorema 4.1** *Todo arreglo no trivial  $A$  satisface:*

$$t_2(A) \geq 3$$

*Demostración:* Por las identidades del capítulo 2 se sigue que:

$$\sum_{j \geq 2} (3-j)t_j + \sum_{k \geq 3} (3-k)p_k = 3f_0 - f_1 + 3f_2 - 2f_1$$

y aplicando la fórmula de Euler (2.1):

$$= 3(f_0 - f_1 + f_2) = 3$$

Podemos escribir la igualdad anterior en una forma equivalente que usaremos más adelante:

$$t_2 = 3 + \sum_{j \geq 4} (j-3)t_j + \sum_{k \geq 4} (k-3)p_k \quad (4.1)$$

Como todos los términos de ambas sumatorias son no-negativos, es claro que:

$$t_2 \geq 3$$

■

Existe una extensa bibliografía sobre este problema; en [Grü 1] (p.17) se pueden encontrar las referencias más importantes. Su principal interés radica en que, como descubrió Moser, la relación de adyacencia, que es esencialmente combinatoria, depende de manera intrínseca de las propiedades métricas del proyectivo y, en particular de la característica de Euler.



### 4.1.2 Otra fórmula sobre adyacencias

De manera similar a como determinamos la existencia de vértices simples, es posible garantizar en todo arreglo, un cierto número de caras del tipo más sencillo (i.e. triángulos).

#### Teorema 4.2

$$p_3 = 4 + \sum_{k \geq 5} (k-4)p_k + 2 \sum_{j \geq 3} (j-2)t_j \quad (4.2)$$

*Demostración:*

$$\sum_{k \geq 3} (4-k)p_k + 2 \sum_{j \geq 2} (2-j)t_j = 4f_2 - 2f_1 + 4f_0 - 2f_1$$

De manera idéntica al teorema anterior, utilizamos (2.1) de donde:

$$= 4(f_0 - f_1 + f_2) = 4.$$

Si despejamos  $p_3$  y eliminamos los índices que dan términos iguales a cero, tenemos el resultado pedido:

$$p_3 = 4 + \sum_{k \geq 5} (k-4)p_k + 2 \sum_{j \geq 3} (j-2)t_j$$

■

(??) y (??) completan el sistema de igualdades que comenzamos en el capítulo 2, pues cualquier otra fórmula lineal que involucre los valores  $f_j$  y  $p_k$  es consecuencia de estas.

Sea  $\mathbf{E}$  el conjunto de todas las expresiones formales

$$\sum_{j \geq 2} (a - bj)t_j + \sum_{k \geq 3} (c - dk)p_k$$

con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ; es claro que forman un espacio vectorial de dimensión 4. Si desarrollamos un elemento  $E \in \mathbf{E}$  asignando valores  $a_0, b_0, c_0, d_0$  a  $a, b, c, d$  tenemos

$$\sum_{j \geq 2} (a_0 - b_0 j)t_j + \sum_{k \geq 3} (c_0 - d_0 k)p_k = a_0 f_0 - b_0 f_1 + c_0 f_2 - 2d_0 f_1$$

Ahora, la única relación conocida entre las  $f_i$  es la fórmula de Euler (2.1); si queremos que la expresión anterior tenga algún significado combinatorio es necesario igualarla a un valor constante, es decir,  $a_0 f_0 - b_0 f_1 + c_0 f_2 - 2d_0 f_1 = K$ . Entonces, como consecuencia de (2.1) resulta el par de restricciones lineales

$$a = b + 2d = c (= K)$$

De esta manera,  $\mathbf{E}'$ , el subespacio de  $\mathbf{E}$  formado por expresiones a las que se les puede asociar un significado geométrico via (2.1), es de dimensión 2.

Como (4.1) y (4.2) son expresiones linealmente independientes en  $\mathbf{E}'$ , se sigue que cualquier otro elemento de  $\mathbf{E}'$  se obtiene a partir de estas dos. Por lo tanto, ninguna otra fórmula lineal en  $t_j$  y  $p_k$  puede aportar información combinatoria nueva.

### 4.1.3 Teorema de Eberhard

Del teorema 4.2 se sigue:  $p_3 \geq 4 + \sum_{k \geq 5} (k - 4)p_k$ , y la igualdad es característica de los arreglos simples. Un resultado interesante es que el converso es cierto:

**Teorema 4.3 (Eberhard)** *Dados  $p_3, p_5, p_6, \dots, p_m$  enteros no negativos tales que*

$$p_3 = 4 + \sum_{k \geq 5} (k - 4)p_k$$

*entonces existe un arreglo simple  $A$  con la propiedad de que:*

$$p_k(A) = p_k \text{ para } k = 3, 5, 6, \dots, m$$

La versión más general de este teorema incluye fórmulas similares para otras estructuras combinatorias como los poliedros; por lo que no se incluye la demostración. Ésta puede hallarse en [Grü 2] p.405.

## 4.2 Casi una dualidad

La semejanza entre las fórmulas (4.1) y (4.2) podría hacernos suponer que existe algún tipo de dualidad entre los elementos de dimensión

cero (vértices) y los de dimensión dos (caras). Por ejemplo, ya que  $t_2 \geq 3 + \sum_{j \geq 4} (j - 3)t_j$  y que la igualdad es característica de los arreglos simpliciales, podríamos pensar que, a semejanza del teorema de Eberhard, existe un arreglo simplicial que realiza valores  $t_j$  predeterminados.

Desafortunadamente, esto no es cierto. Como muestra, no existe un arreglo simplicial  $A$  con  $t_2(A) = 6$ ,  $t_4(A) = 1$ ,  $t_5(A) = 1$  y  $t_j(A) = 0$  para  $j \geq 6$  a pesar de que estos valores cumplen con la igualdad pedida. El problema estriba en que la gráfica inducida por el arreglo tiene un comportamiento que la distingue de su dual. Por ejemplo, mientras que la gráfica de un arreglo tiene solamente vértices de grado par, la dual debe tener al menos tres vértices de grado tres.

En realidad, la forma en que se comportan los vértices y las caras es bastante disímil. Las fórmulas del capítulo 2 nos muestran que los valores de las  $t_j$  en un arreglo determinan tanto las  $f_i$  como  $n$ ; mientras que, los valores  $p_k$  determinan todas las  $f_i$ , pero no a  $n$ . En la figura (4.1) se puede ver un ejemplo de arreglos con los mismos valores de  $p_k$  y distinto número de líneas.

A pesar de esta diferencia, resulta útil transformar un planteamiento conocido en su "dual", de forma que podemos obtener problemas nuevos o puntos de vista frescos para atacar la pregunta original.

A pesar de que las  $t_j$  dan más información, no son suficientes para conocer los valores de las  $p_k$ ; como muestra, considerese la familia de arreglos simples con  $n$  líneas.

De hecho, ni siquiera el conocimiento completo de valores locales (i.e.  $f_j, p_k, r_i$ ) es suficiente para determinar con certeza el arreglo del cual provienen. Las parejas de arreglos  $(6_5, 6_8)$ ;  $(6_9, 6_{10})$  y  $(6_{12}, 6_{13})$  del apéndice, demuestran este hecho.

### 4.3 Número mínimo de triángulos

En la demostración del teorema de Sylvester obtuvimos la cota  $t_2 \geq 3$  para vértices simples, que puede mejorarse a  $t_2 \geq \frac{3}{7}n$  (ver [Kel-Mo]); esta cota es la mejor posible como se ve en la figura (4.2). Es posible que un problema que vierta más luz sobre el comportamiento de  $t_2$  sea su relación con  $f_0$ . Esta cuestión parece no haber sido atacada hasta

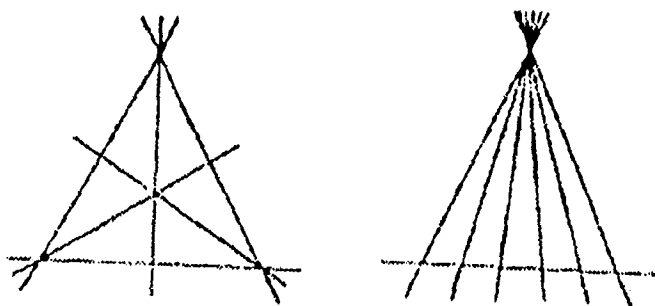


Figura 4.1: El conjunto de valores  $p_k$  no determina el número de líneas ( $p_k = 12$ ).

ahora, por lo que propongo la siguiente:

**Conjetura 1** Existe  $c > 0$  tal que  $t_2(A) \geq cf_0(A)$  para todo arreglo  $A$ .

El problema correspondiente para caras es dar la cota mínima al número de triángulos en un arreglo de  $n$  líneas. La fórmula (4.2) tiene como consecuencia inmediata que  $p_3 \geq 4$ ; pero al igual que con  $t_2$ , podemos mejorar significativamente el resultado.

**Teorema 4.4**  $p_3 \geq n$ .

*Demostración:* Esta prueba es original de Levi. Si  $A$  es un cuasi-haz,  $p_3 = f_2 = 2n - 2 > n$ ; de modo que podemos asumir que  $A$  no es cuasi-haz. Ahora, escogemos una línea  $L$  del arreglo y aplicamos la transformación líneal que la lleva al infinito. Sea  $V$  el conjunto de vértices que queda en el plano afín resultante. Como  $A$  no es cuasi-haz, el casco convexo de  $V$  es un polígono  $P$  con, al menos, tres vértices. De cada uno de estos vértices debe surgir un par de aristas (pues los

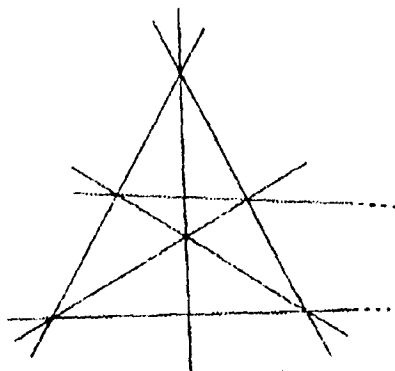


Figura 4.2: El único arreglo que satisface  $t_2 = \frac{3}{7}n$ .

vértices están en  $P$  o en  $L$ ), las cuales intersectan a  $L$  para formar un triángulo.

Hemos mostrado que cualquier línea  $L$  del arreglo tiene aristas de tres triángulos distintos, de modo que existen al menos  $3n$  aristas distintas pertenecientes a triángulos i.e.  $p_3 \geq n$ . ■

Una de las conjeturas de Grünbaum concierne a los casos en que se da la igualdad de este teorema. La demostración anterior muestra que si un vértice múltiple fuese vértice del casco convexo (caso que no se da necesariamente), entonces  $L$  sería adyacente a más de tres triángulos y por lo tanto,  $p_3 > n$ .

El argumento anterior no es suficiente para establecer que un arreglo que no sea simple debe tener más de  $n$  triángulos. En [Roud 1] se prueba el siguiente resultado

**Teorema 4.5** *Si un arreglo de líneas cumple  $p_3 = n$  entonces es simple.*

La idea consiste en suponer un arreglo no simple con  $p_3 = n$  y estudiar las posibles configuraciones de las líneas alrededor de un vértice múltiple. Mediante la aplicación repetida de dos lemas de incidencia, se llega a una configuración como la de la figura (3.3) de donde se sigue que el arreglo no es rectificable.

## 4.4 Número máximo de triángulos

Evidentemente  $t_2 \leq \binom{n}{2}$ , pues la igualdad caracteriza a los arreglos simples; pero la situación análoga para el número de triángulos es un tema fructífero. La cota máxima no solo representa un problema interesante, sino que tiene relación con otras cuestiones como veremos más adelante.

**Teorema 4.6** Para arreglos simples con  $n \geq 4$  tiene lugar  $p_3 \leq \frac{n(n-1)}{3}$ .

*Demostración:* En un arreglo simple, una arista no puede pertenecer a más de un triángulo, pues se tendría una de las estructuras de la figura 4.3, de modo que el arreglo no es simple o consta de tres líneas.

Como cada línea tiene  $(n - 1)$  aristas, el máximo número de aristas

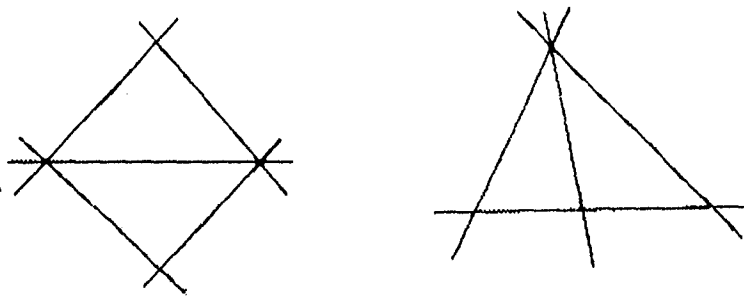


Figura 4.3: Configuraciones no permitidas en un arreglo simple.

pertenecientes a un triángulo es  $n(n - 1)$ ; es decir:  $p_3 \leq \frac{n(n-1)}{3}$ . ■

En [Roud 2] se demuestra la desigualdad para arreglos arbitrarios de pseudo-líneas, haciendo uso del método del miope; la idea consiste en descomponer los vértices múltiples en configuraciones que no disminuyan el número de triángulos, de modo que se pueda aplicar la cota para arreglos simples.

Desafortunadamente, esta aplicación particular del método no permite saber si el arreglo simple obtenido es rectificable o no. Hasta la fecha permanece abierta la cuestión de si existen infinitos arreglos de líneas que satisfagan  $p_3 = \frac{n(n-1)}{3}$ .

Existe, sin embargo, cierta cantidad de información disponible sobre las propiedades que debe tener un arreglo con número máximo de triángulos.

La gráfica dual de un arreglo afín tiene número cromático igual a 2. En términos geométricos, si pintamos las caras de un arreglo con rojo y azul, este resultado proviene del hecho de que cada línea separa al plano afín en dos mitades y, por un razonamiento inductivo, se puede invertir el color de las caras de una de las mitades cada vez que agregamos una línea. Además, cuando el número de líneas es par, es posible trasladar consistentemente la coloración al arreglo proyectivo correspondiente.

Un teorema de Grünbaum nos dice que la razón entre el número de caras de cada color no excede a dos; o lo que es equivalente, que la cantidad de caras azules  $t_2^a$  no puede ser mayor que  $\frac{2}{3}f_2$ .

Como cada arista es incidente a una cara de cada color, es claro que el total de lados de las caras rojas es el mismo que el número de lados de las caras azules. Por un sencillo argumento de conteo, es fácil ver que en un arreglo simple,  $t_2^a = \frac{2}{3}f_2$  es equivalente a que todas las caras azules sean triángulos y, por lo tanto, que el arreglo cumple la cota máxima para  $p_3$ . De hecho, la igualdad en la cota para  $t_2^a$  es equivalente a la igualdad para la cota de  $p_3$ .

## 4.5 Cuadriláteros

Como vimos en la última sección, el comportamiento de los triángulos en un arreglo simple es relativamente fácil de estudiar. El problema análogo para cuadriláteros es más complicado, pues al tener un lado más, no es posible aplicar la mayoría de las restricciones que antes eran posibles.

Afortunadamente, existe una bella conexión entre resultados sobre  $p_3$  y resultados similares para  $p_4$ . Uno de ellos nos permitirá encontrar un nuevo ejemplo de arreglo simple sin cuadriláteros que no fué considerado en el trabajo de Grünbaum.

### 4.5.1 Cota superior

Un teorema de Grünbaum ([Grü 1] p.29) nos da la cota superior para el número de cuadriláteros

**Teorema 4.7** *Para  $n \geq 5$  se da  $p_4 \leq \frac{n(n-3)}{2}$ ; de hecho, existe un único arreglo simple que satisface la igualdad.*

Grünbaum propone además la siguiente

**Conjetura 2**  $p_4 = \frac{n(n-3)}{2}$  es posible solo para arreglos simples.

Esta conjetura fue resuelta en años recientes.

El arreglo simple que cumple la cota máxima, es el generado por los lados de un  $n$ -gono regular.

### 4.5.2 Cota inferior

Como se ve en los arreglos de las figuras (4.4) y (4.5), es posible tener arreglos simples sin cuadriláteros. Estos ejemplos eran conocidos por Grünbaum quien supuso que eran únicos y, de hecho, propuso la

**Conjetura 3** *Todo arreglo simple con más de 16 líneas cumple  $p_4 > 0$ .*

En la siguiente sección veremos el estado actual de esta pregunta.

### 4.5.3 Resultados nuevos

Consideremos un arreglo simple y supongamos que  $p_4 = 0$ . Contando las aristas por cara, tenemos

$$2f_1 \geq 3p_3 + 5(f_2 - p_3)$$

es decir

$$2p_3 \geq 5f_2 - 2f_1.$$

Como el arreglo es simple

$$2p_3 \geq 5\binom{n}{2} + 1 - 4\binom{n}{2}$$



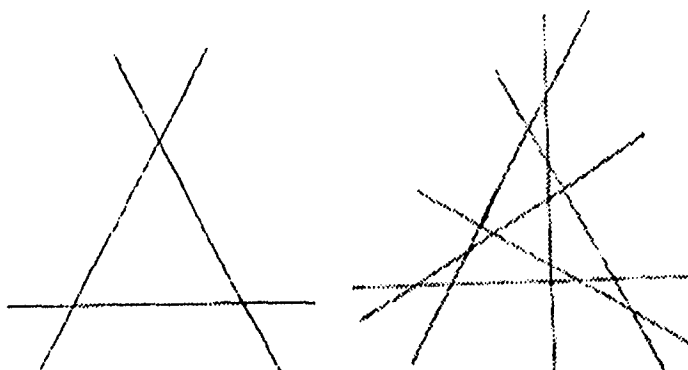


Figura 4.4: Arreglos de tres y seis líneas sin cuadriláteros.

de donde

$$2p_3 \geq \binom{n}{2} + 5$$

ó

$$2p_3 \geq \frac{f_2}{2} + 2$$

En otras palabras, un arreglo simple sin cuadriláteros debe tener "muchos" triángulos. El hecho de que  $p_3$  sea un factor en la determinación de  $p_4$  parece haber escapado a los intentos por solucionar el problema de la cota mínima para cuadriláteros; por ello, es importante el siguiente resultado

**Teorema 4.8** Para arreglos simples con  $n > 4$ ,  $p_3 = \frac{n(n-1)}{3} \Rightarrow p_4 = 0$ .

*Demostración:* Si un arreglo  $A$  alcanza la cota máxima de triángulos, sabemos que estos deben alternarse con el resto de las caras; de tal manera que si existiese un cuadrilátero, éste tendría triángulos adyacentes a sus cuatro lados como se muestra en la figura (4.6)

Por ser  $A$  simple, las aristas  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$  forman parte de la misma

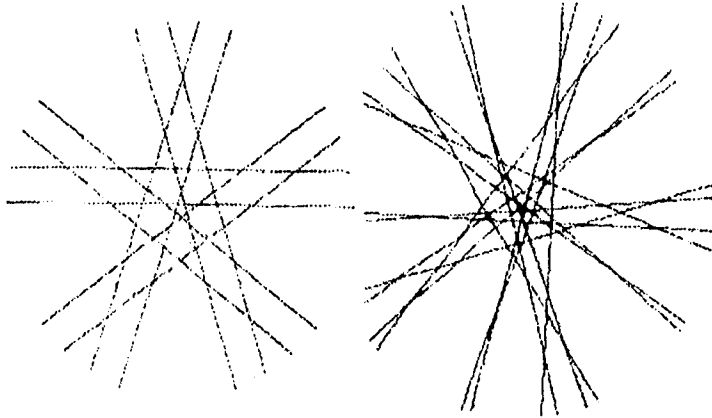


Figura 4.5: Arreglos de diez y dieciseis líneas sin cuadriláteros.

línea y lo mismo ocurre con  $b_1$ ,  $b_2$  y  $b_3$ ; por lo que los vértices  $v_1$  y  $v_2$  deben ser el mismo y, por lo tanto, es claro que  $A$  es el arreglo simple de cuatro líneas. ■

#### 4.5.4 Ejemplos nuevos

En [Roud 3], el autor construye familias infinitas de arreglos simples de pseudo-líneas que alcanzan la cota superior para el número triángulos. De aquí se sigue que existe un número infinito de arreglos simples sin cuadriláteros. Sin embargo, no existe una prueba de rectificabilidad y de ahí que la conjetura siga abierta. La única excepción es el arreglo de 18 líneas de la figura (4.7) que aparece en el artículo citado y para el cual sí existe una prueba de rectificabilidad.

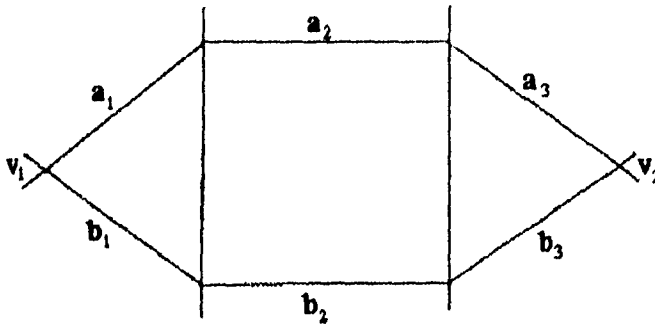


Figura 4.6: Un arreglo con número máximo de triángulos no tiene cuadriláteros.

## 4.6 Número de vértices por línea

La exposición previa se ha relacionado principalmente con los valores para celdas de dimensión par; sin embargo, una fuente de problemas que parece estar más relacionada con la geometría de los arreglos de líneas (es decir rectificables) es el que concierne a los elementos contenidos en una línea. La afirmación anterior se justifica por el hecho de que la mayor parte de las relaciones locales no dependen de si el complejo celular con el que trabajamos proviene, en efecto, de un arreglo rectificable.

### 4.6.1 El problema de $r^*$ .

Para presentar el problema siguiente, es necesario introducir un nuevo invariante. Como veremos, incluso antes de existir la noción de arreglo propiamente dicha, este invariante despertó ya algún interés.

**Definición 4.1** Para todo arreglo  $A$  sea:

$$r^*(A) = \{\max_{L \in A} r(L)\}$$

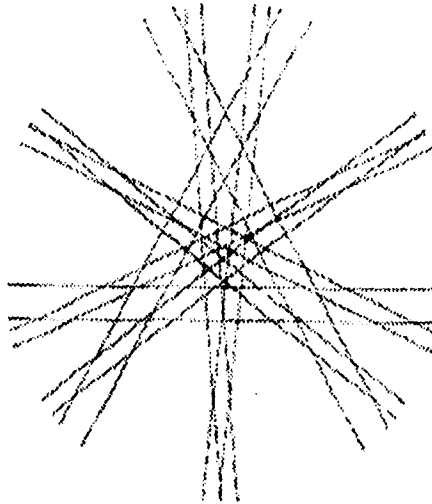


Figura 4.7: Ejemplo reciente de arreglo sin cuadriláteros ( $n = 18$ ).

Tanto los arreglos simples como los simpliciales tienen  $r^* = n - 1$ ; lo cual sugiere que las preguntas interesantes aparecen alrededor de aquellos arreglos que no son casos extremos.

El primer resultado es fácil de demostrar:

**Teorema 4.9**  $r^* \geq \sqrt{n - 1}$

*Demostración:* Notemos primero que  $t(V) \leq r^*$  para todo vértice  $V$ ; de lo contrario, dada una línea  $L$  externa a  $V$  se tendría  $r(L) > r^*$ .

Ahora, sea  $L^*$  una línea que cumple  $r(L^*) = r^*$  y contemos las líneas que la intersectan. En cada vértice,  $L^*$  puede ser cruzada por un máximo de  $r^* - 1$  líneas, y como todas las líneas cruzan a  $L^*$  tenemos  $r^*(r^* - 1) \geq (n - 1)$  de donde se sigue el resultado. ■

A pesar de ser esta la mejor cota obtenida, resulta ser mala en la práctica. En 1961 Erdős planteó la siguiente:

**Conjetura 4** Existe  $c_0 > 0$  tal que  $r^*(A) \geq c_0 n(A)$  para todo arreglo.

Esta conjetura permanece aún abierta.

La demostración anterior aparece en [Dir] donde también se formula una conjetura sobre el crecimiento de  $r^*$ . En concreto, Dirac propone que  $r^* \geq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ .

A continuación presento una familia infinita de arreglos que no cumplen la cota dada por Dirac.

### 4.6.2 Una familia de arreglos con $r^*$ pequeña.

Considere la colección de líneas en  $\mathbb{R}^2$  dada por la unión de las rectas  $\{y = i \mid i = 1 \dots 2k + 1\}$ ;  $\{x = i \mid i = 1 \dots 2k + 1\}$  y sus dos diagonales principales. Si agregamos la línea al infinito, tendremos un arreglo de  $4k + 5$  líneas.

En este arreglo, la línea al infinito tiene 4 vértices, ya que este es el número de direcciones en que hay líneas trazadas; las líneas horizontales y verticales tienen  $2k + 1$  intersecciones en la región finita más un vértice en el que se unen y que comparten con la línea al infinito; por último, las dos diagonales se intersectan en el punto de intersección de las líneas horizontal y vertical que se hallan a la mitad, por lo que tienen también,  $2k + 1$  vértices en la región finita y uno más con la recta al infinito (ver figura 4.8).

De esta manera, todas las rectas excepto una, tienen  $2k + 2$  vértices y por lo tanto,  $r^* = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor < \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ .

### 4.6.3 Conjetura

Si se invierte un par de horas en tratar de encontrar un contraejemplo, resulta tentador concluir que la cota óptima correcta es  $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ , sin embargo existen algunos arreglos con un alto grado de simetría para los cuales no es válida esta cota (ver figura 4.9).

De todos modos, la gran cantidad de simetría de estos arreglos, ha llevado a suponer que hay un número máximo de líneas de que pueden estar constituidos (el arreglo de la figura (4.9) es el de mayor  $n$  que se conoce). Es pues, factible aventurar la

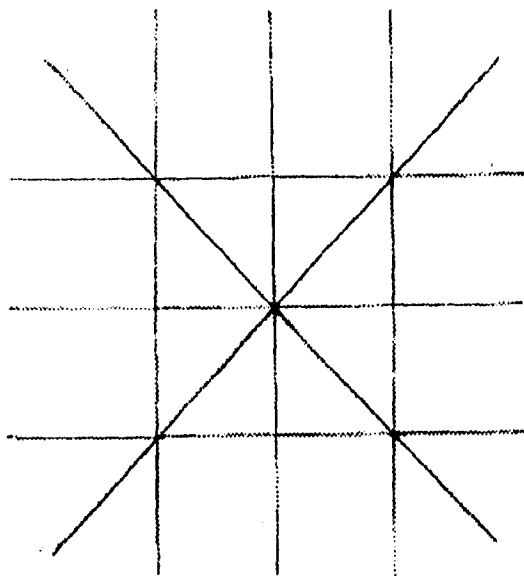


Figura 4.8:  $r^* = \frac{4}{3}n$ . El arreglo más pequeño de la familia que desmiente la conjetura de Dirac. (Contiene la línea al  $\infty$ )

**Conjetura 5** Para todos los arreglos, excepto un número finito de casos, es válida la cota:  $r^* \geq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ .

Un argumento en favor es el siguiente. El promedio de multiplicidad de los vértices de un arreglo, es

$$\frac{\sum j t_j}{\sum t_j} = \frac{f_1}{f_0} \leq 3 - \frac{3}{f_0} < 3.$$

Como  $L^*$  tiene el mayor número de vértices, el promedio de multiplicidad de ellos debe ser el menor posible.

Ahora, es razonable suponer que dicho promedio más bajo sea, a su vez, menor que el promedio global. En este caso tendríamos:

$$3 > \frac{\sum_{V \in L^*} r(V)}{r(L^*)} = \frac{r^* + (n-1)}{r^*} = 1 + \frac{n-1}{r^*}$$

Es decir  $2 > \frac{n-1}{r^*}$ , de donde se sigue el resultado.

Sin embargo, nuestra suposición sobre el promedio de multiplicidad en

$L^*$  no se sostiene (precisamente en el ejemplo de la figura 4.9), debido a que en estos arreglos, la simetría genera varios vértices con una gran multiplicidad.

Este argumento constituye una razón muy poderosa para suponer que la conjetura de Erdős puede resultar un problema muy difícil.

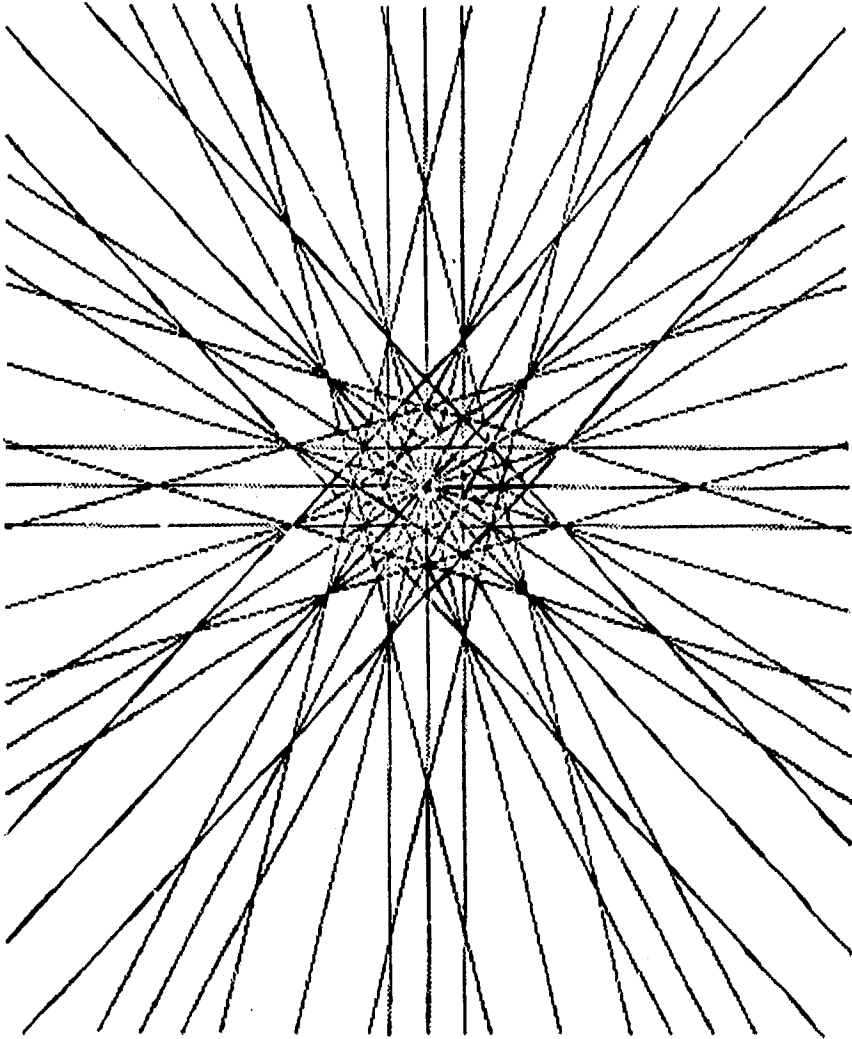


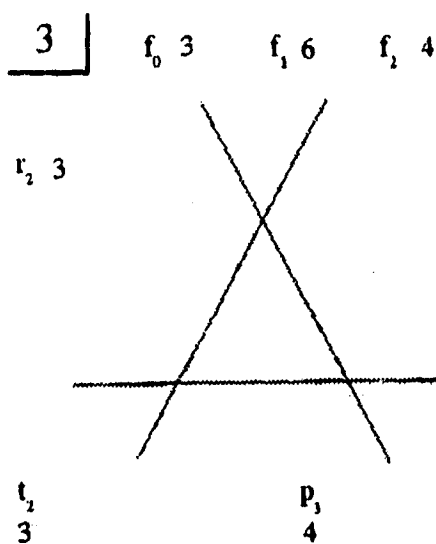
Figura 4.9: Arreglo con  $r^* < \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ .

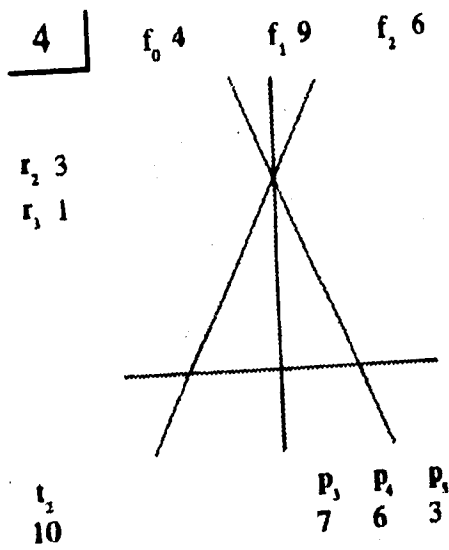
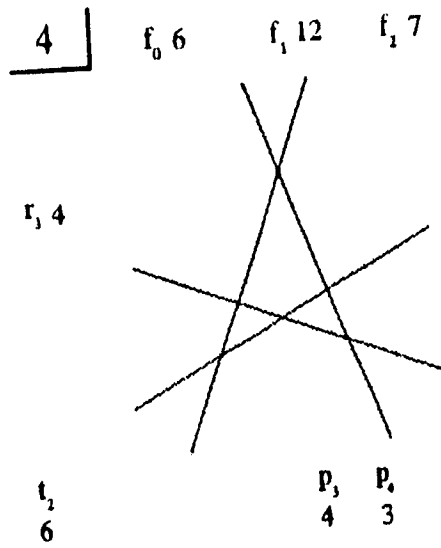


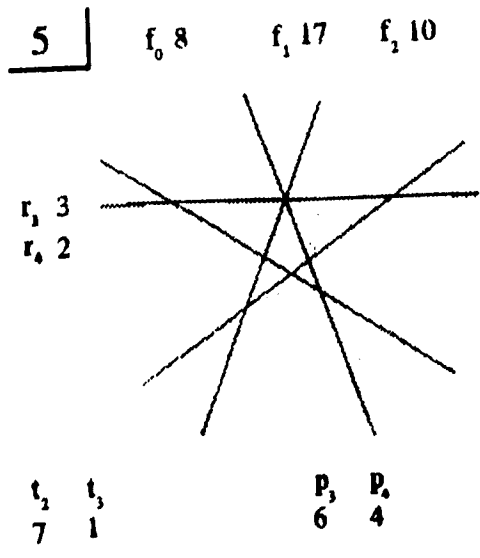
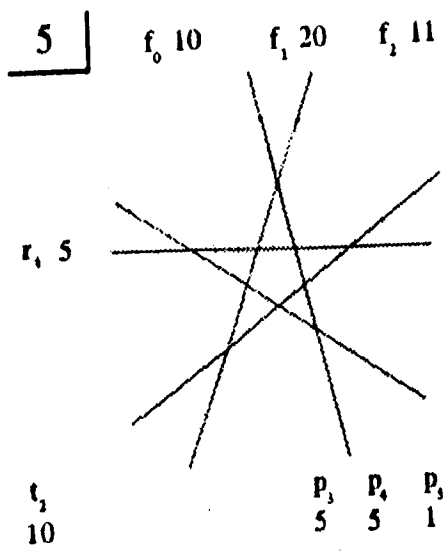
# A

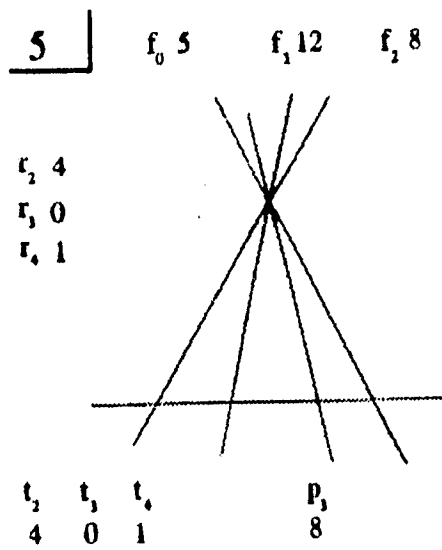
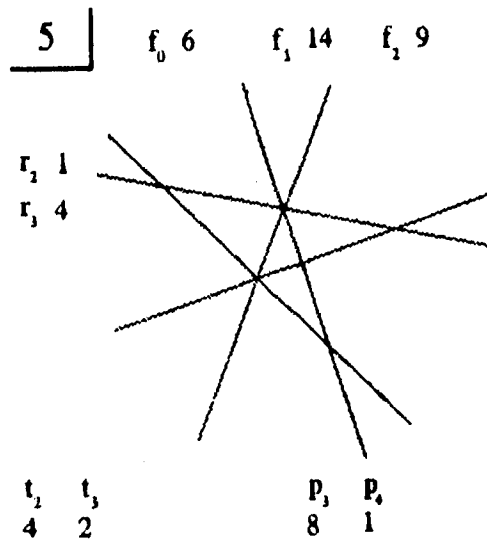
## Catálogo

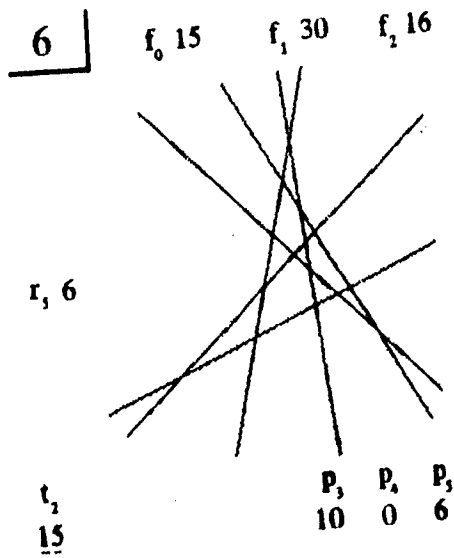
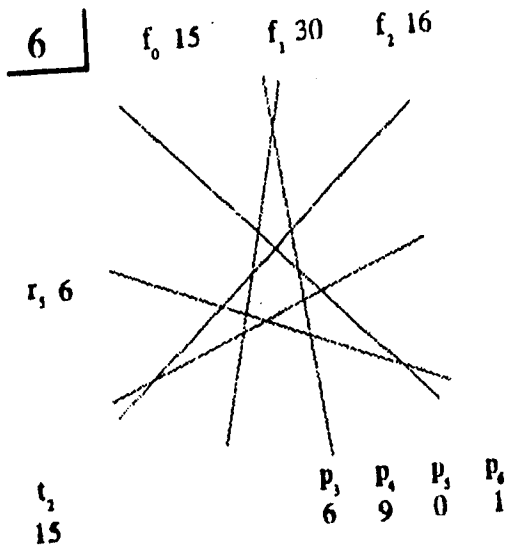
En esta sección se incluyen todos los arreglos con seis líneas o menos ordenados por número de líneas. Para cada arreglo están anotados los valores de sus invariantes globales y locales.

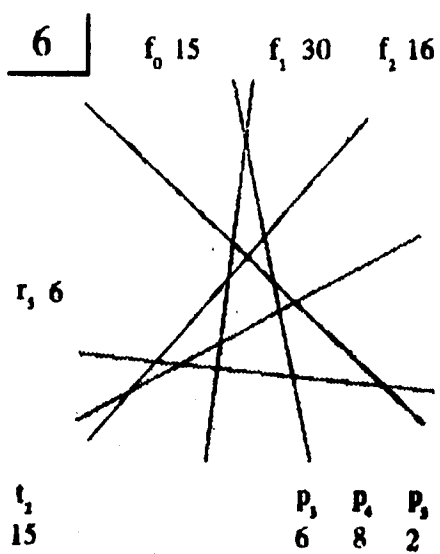
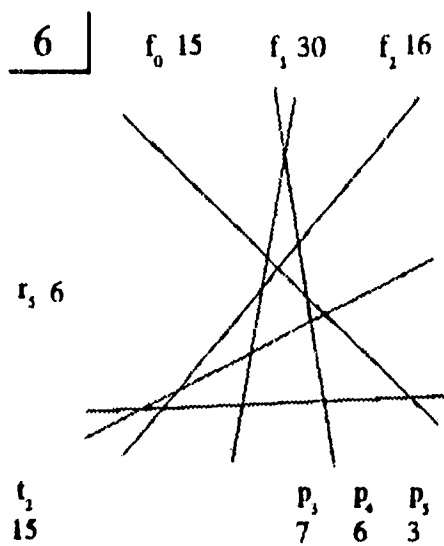


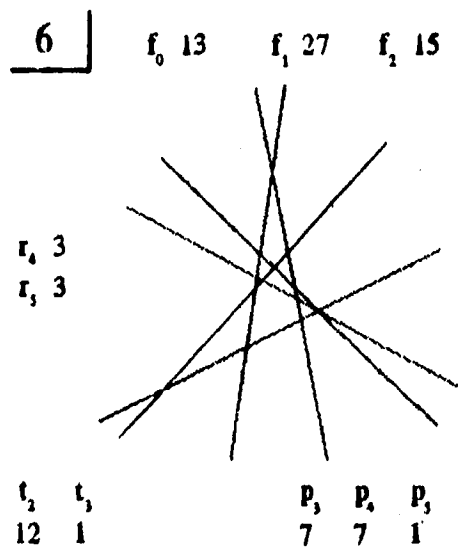
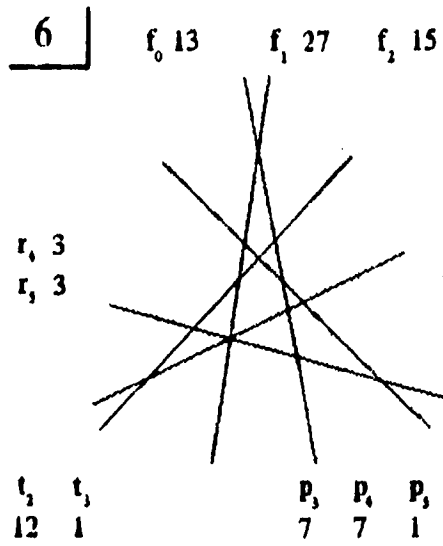


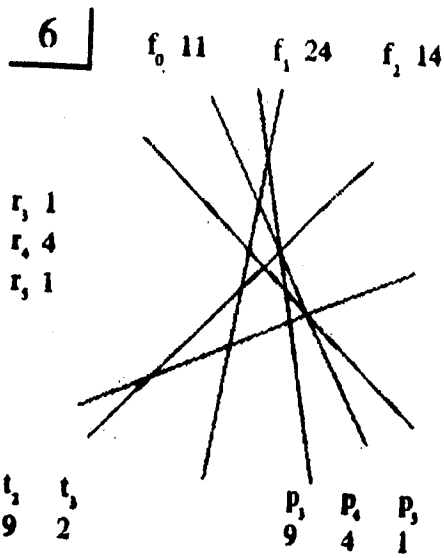
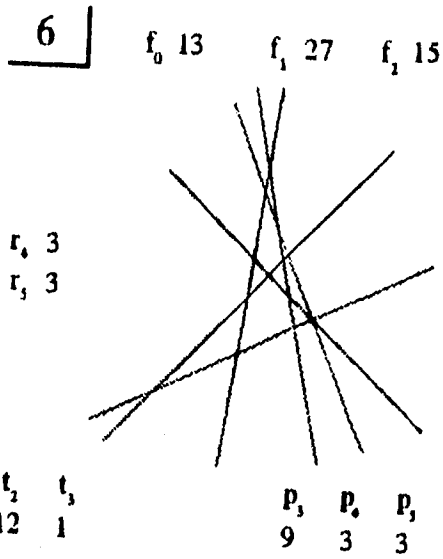




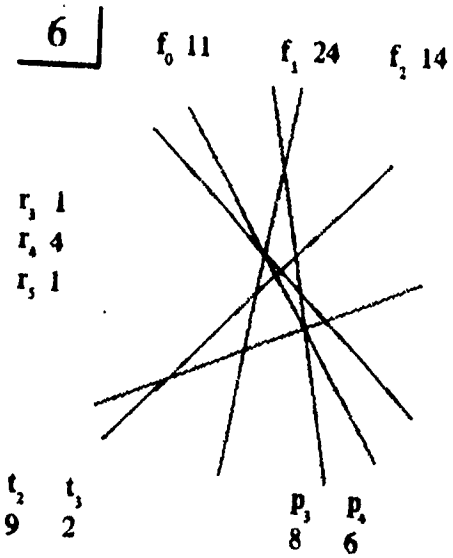
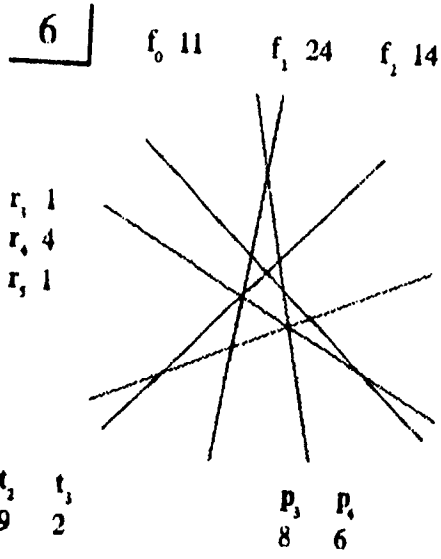


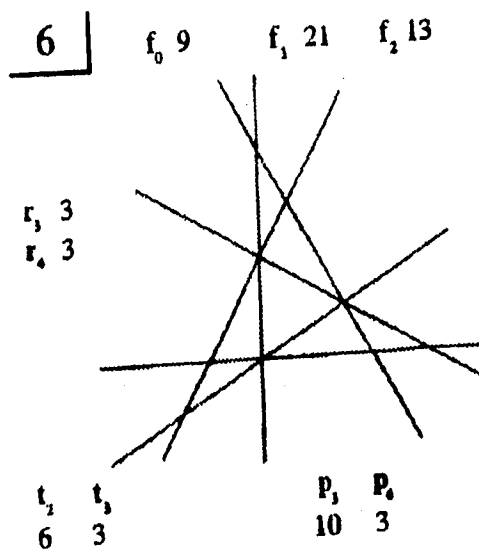
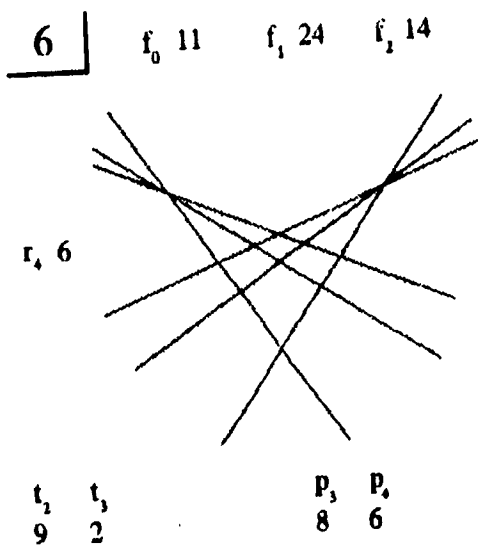


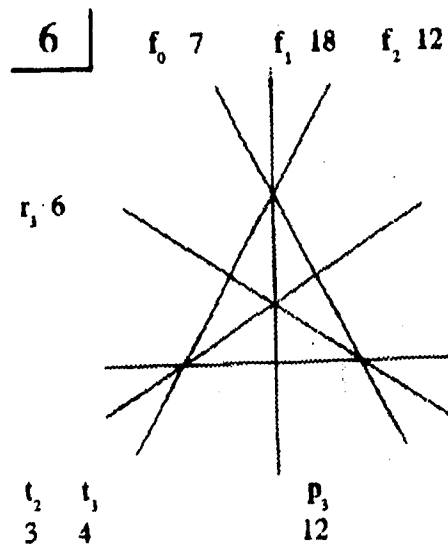
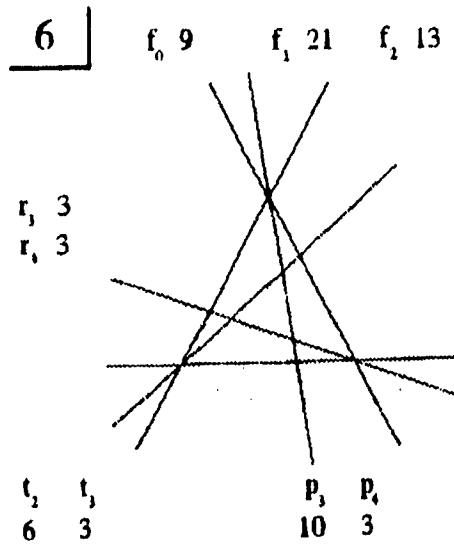




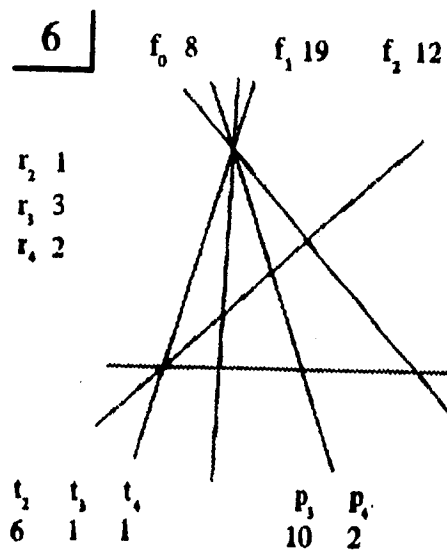
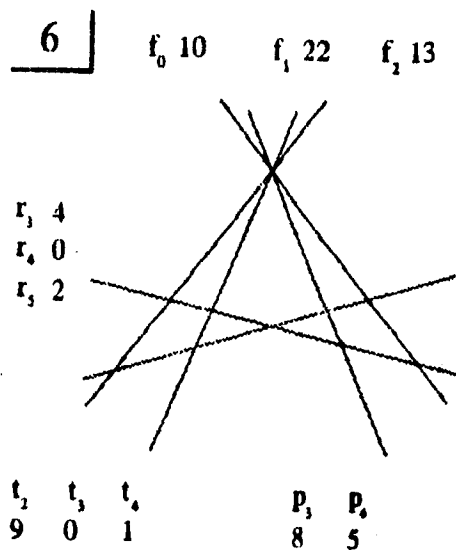


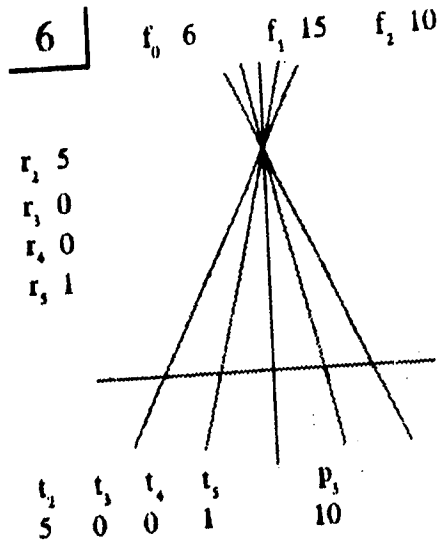






ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA







# Bibliografía

- [Björ] Björner, A. et. al. (1993) *Oriented matroids; Encyclopedia of Mathematics and its Applications vol. 46, Cambridge University Press.*
- [Grü 1] Grünbaum, Branko (1971) *Arrangements and spreads; CBMS Regional Conference Series in Mathematics, No.10, AMS, Providence, R.I.*
- [Grü 2] Grünbaum, Branko (1967) *Convex polytopes; Interscience Publ., Londres.*
- [Oxl] Oxley, James G. (1992) *Matroid theory; Oxford Science Publications.*
- [Canh] Canham, R.J. (1971) *Tesis doctoral; University of East Anglia, Norwich*
- [Dir] Dirac, G.A. (1951) *Collinearity properties of sets of points; Quart. J. Math., 2, 221-227.*
- [Good-Pol] Goodman, J.E., Pollack, R. (1980) *Proof of Grünbaum's conjecture on the stretchability of certain arrangements of pseudo-lines; J. Combinatorial Theory, Ser. A, 29, 385-390.*
- [Grü 3] Grünbaum, Branko (1971) *Arrangements of hyperplanes; Proc. Second Louisiana Conference on Combinatorics And Graph Theory. Baton Rouge.*
- [Hal] Halsey, E. (1971) *Tesis doctoral; University of Washington, Seattle*

- [Kel-Mo] Kelly, L.M. y Moser, W.O.J. (1958) *On the number of ordinary lines determined by  $n$  points*; *Canada J. Math.*, 10, 210-219.
- [Roud 1] Roudneff, J.P. (1988) *Arrangements of lines with a minimal number of triangles are simple*; *Discrete Comput. Geometry*, 3, 97-102.
- [Roud 2] Roudneff, J.P. (1996) *The maximal number of triangles in arrangements of pseudo-lines*; *J. of combinatorial Theory Ser. B*, 66, 44-74.
- [Roud 3] Roudneff, J.P. (1986) *On the number of triangles in simple arrangements*; *Discrete Mathematics*, 60
- [Syl] Sylvester, J.J. (1893) *Problem 11851; Mathematical questions and solutions from the Educational Times*, 59, 98-99.