

18
25



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**MATEMATICAS Y MUSICA: PERSPECTIVAS
A TRAVES DEL TIEMPO.**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A :

MARIANA MONTIEL HERNANDEZ



DIRECTOR DE TESIS: DR. EMILIO LLUIS PUEBLA



MEXICO, D. F.

1996

**FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR**

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: Matemáticas y
Música: perspectivas a través del tiempo

realizado por Mariana Montiel Hernández

con número de cuenta 9052391-9 , pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis	Dr. Emilio Lluís Puebla
Propietario	
Propietario	Dr. Rodolfo San Agustín Chi
Propietario	Dr. Juan Morales Rodríguez
Suplente	M.C. Miguel Lara Aparicio
Suplente	Mat. Renato Galicia Brito

Emilio Lluís Puebla

~~*Rodolfo San Agustín Chi*~~

Juan Morales Rodríguez

Miguel Lara Aparicio

Renato Galicia Brito

Consejo Departamental de Matemáticas

M.en C. ALEJANDRO BRAVO MÚSICA

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

México, D.F., 1993

***A Bernardo por convencerme que no hay
imposibles y que no se debe mirar atrás***

A Emiliano

INDICE

INTRODUCCION	1
CAPITULO I La Música como una Manifestación Física y las Matemáticas	1
1.1.	2
1.2.	6
CAPITULO II La Música como una Manifestación Estética y las Matemáticas: la medida estética de George Birkhoff	16
2.1.	16
2.2.	18
2.3.	21
2.4.	23
2.5.	26
CAPITULO III Los Números de Fibonacci. La Proporción Aurea y la Obra de Bela Bartok	28
3.1.	28
3.2.	30
3.3.	33
3.4.	35
3.5.	41
CAPITULO IV Teoría de Grupos, Conjuntos y la Música	45
4.1.	45
4.2.	58
CAPITULO V Música, Estructuras Algebraicas y Teoría de Automatas	74
V.I.	75
5.1.	75

5.2	76
5.3	77
5.4	77
5.5	83
5.6	84
5.7	85
5.8	89
5.9	94
V.ii	99
ANEXO Teoría Matemática de la Música (TMM)	104
APENDICE I Fracciones Continuas Binarias y Ternarias	117
APENDICE II Algebra Booleana	120
APENDICE III Teoría de Autómatas	121
APENDICE IV Módulos, Categorías y Funtores	124
APENDICE V El Nervio y los Simplejos	125
BIBLIOGRAFIA	128

Agradecimientos

Este trabajo jamás se hubiera realizado sin el apoyo constante de mi director de tesis, el Dr. Emilio Lluís Puebla. Quiero hacer público mi agradecimiento por la confianza que siempre me ha otorgado y mi reconocimiento ante el ejemplo de científico y humanista que él representa. Asimismo, quiero agradecer al Dr. Rodolfo San Agustín Chi, mi codirector de tesis, por sus atinados comentarios, sugerencias y críticas, así como por el tiempo que me dedicó.

Agradezco también al Dr. Juan Morales Rodríguez, al M.en C. Miguel Lara Aparicio y al Mat. Renato Galicia Brito por sus observaciones que ayudaron a enriquecer tanto la forma como el contenido del trabajo.

Finalmente quiero agradecer a la Dra. Flor de María Aceff por haberme iniciado en el paquete Scientific WorkPlace, y al Mat. Guilmer F. González Flores y a la Act. Mónica Villa George por su solidaridad y su gran capacidad de trabajo. Sin su ayuda y sus conocimientos de Computación, ¡la tesis seguiría en el disco!

Sin embargo, quiero recalcar que cualquier falla o incoherencia que encuentre el lector es responsabilidad exclusivamente mía.

Introducción

En esta tesis se pretende recoger una muestra del trabajo representativo desde tiempos pasados hasta las fechas actuales, en torno a la Matemática y la Música. Por lo tanto, es importante mencionar que la complejidad de la Matemática en nuestro trabajo es la que históricamente los grandes músicos o matemáticos han empleado. Es hasta en los trabajos recientes como los de Guerino Mazzola (véase [Mazz] en la bibliografía) que una maquinaria matemática más sofisticada se despliega, en aras de comprender y describir el fenómeno musical. Es indiscutible que desde la época de los griegos se ha buscado vincular de una u otra forma estas dos áreas de creación humana. En los tiempos modernos, la Matemática es clasificada por muchos como una ciencia, en tanto la Música se considera una *bella arte*. Sin embargo, los que han incursionado en cualquiera o ambas de estas áreas pueden afirmar que los términos *elegancia* y *belleza* son empleados con frecuencia por los matemáticos, mientras el músico es formado con cursos de Teoría Musical, Armonía y Contrapunto en los que la precisión y el ejercicio del detalle se asemejan a algunas de las materias del matemático.

Entre los muchos aspectos que tienen en común la matemática y la música, se encuentra la importancia otorgada a las sutilezas. Lo que es indiscutible es que a partir de los pitagóricos (“¿Qué es lo más sabio? El número. ¿Qué es lo más hermoso? La armonía” [Rob.,p.56]) matemáticos y músicos tan destacados como Huygens, Rameau, Galileo y Euler han trabajado sobre esta relación; uno de los matemáticos más importantes de nuestro siglo, George David Birkhoff, en el prefacio de su libro *La Medida Estética* menciona cómo tenía 30 años con la inquietud de buscar alguna explicación satisfactoria de la parte formal de la música. Actualmente, estas inquietudes y los intentos de explicar este vínculo entre las Matemáticas y la Música continúa, reflejándose en trabajos como los que se estudian en los capítulos 4 y 5 de

esta tesis, más el proyecto que se realiza actualmente en Zürich bajo la égida del matemático y compositor Guerino Mazzola, reseñado en nuestro anexo.

El presente trabajo es un reporte nada exhaustivo acerca de diferentes ensayos que se han hecho con el propósito de vincular la Matemática y la Música, normalmente por medio de la aplicación de la primera, y que han sido llevados a cabo en el transcurso del tiempo. El capítulo 1 de la tesis se titula *La Música como una Manifestación Física y las Matemáticas*, puesto que las primeras investigaciones en torno al tema en cuestión surgieron en lo tocante a este aspecto externo (el aspecto físico) de la Música; tanto la Matemática como la Música tuvieron que desarrollarse y sofisticarse bastante para poder realizar el tipo de aplicación y análisis que se reseña en algunos capítulos posteriores. Aquí explicamos la gran incógnita de Pitágoras en cuanto a la relación entre los enteros pequeños y la consonancia, y cómo se le contesta siglos después en términos de la Ley de Fourier. De manera similar, presentamos la explicación acústica de la formación de las escalas modernas a través de la existencia de los armónicos o tonos parciales. También tratamos el tema de la afinación, fundamentalmente la de *igual temperamento* como alternativa a la *justa*, y cómo se ha planteado el problema de la división múltiple de la octava. Reseñamos una forma de "resolver" dicho problema de manera acústica, con el empleo de fracciones continuas binarias y ternarias.

El segundo capítulo se llama *La Música como una Manifestación Estética y las Matemáticas* y trata sobre todo la Medida Estética definida por el matemático George D. Birkhoff. Aquí recorreremos brevemente los planteamientos de varios pensadores, principalmente matemáticos, en torno a la cuestión estética y en particular a la Música, y presentamos algunos intentos previos (como el de Euler) de resolver cuantitativamente varias de las incógnitas que plantea dicha cuestión. Detallamos el planteamiento de Birkhoff, dado que nos parece de sumo interés que uno de los matemáticos más importantes de nuestro siglo haya dedicado varios años de su vida a estudiar este tema.

El capítulo 3 se titula *Los Números de Fibonacci, la Proporción Aurea y la Obra de Bela Bartok*. Aquí estudiamos fragmentos de la obra de dicho compositor, quien desarrolló una teoría armónica, así como de estructura rítmica, con base en el número phi conocido como el número áureo. Nos llama la atención cómo un fenómeno matemático como los números de Fibonacci y la proporción áurea, llega a ser el eje de un sistema musical completo.

El capítulo 4 se denomina *Música, Conjuntos y Teoría de Grupos* y se trata del estudio de varios artículos escritos en las últimas dos décadas, en los cuales se intenta aplicar conceptos formales y precisos de las matemáticas al análisis musical. Estos artículos son trabajos representativos de Gerald Balzano, David Lewin y Eric Regener, entre otros. Asimismo, comentamos un libro publicado en México en 1989 y titulado *Música y Teoría de Grupos Finitos (3 variables booleanas)*, de Julio Estrada y Jorge Gil. En este capítulo aparece la Teoría de Grupos como una forma autocontenida de explicar el desarrollo de la estructura musical, incluyendo las tonalidades y la armonía, y se plantea esta explicación algebraica como una alternativa seria a la explicación acústica existente. Ilustramos este planteamiento con ejemplos tomados de relaciones musicales básicas, establecidas con mucha anterioridad a la Teoría de Grupos pero totalmente consecuentes con ésta. Por otra parte, veremos que los conjuntos juegan un papel fundamental en el análisis de la música atonal, en que no es posible asirse a las herramientas de la armonía tradicional con sus reglas; lo que sobrevive siempre es el intervalo musical, miembro de un conjunto.

El quinto capítulo se llama *Música, Estructuras Algebraicas y Autómatas* y consiste principalmente en el desarrollo de un artículo de Marc Chemillier titulado *Monoïde Libre et Musique* que se publicó en 1985, en el cual se pretendió hacer una formalización matemática de estos temas que jamás se había realizado anteriormente, según el autor. Aquí estudiamos una estructura algebraica llamada *solfeo* así como los morfismos que relacionan los solfeos entre sí, para después modelar con ejemplos musicales. De modo semejante, vemos cómo la Teoría de Autómatas ha sido empleada en diferentes facetas del análisis musical.

Finalmente se agrega un anexo titulado *Teoría Matemática de la Música (TMM)*, en el que se esboza el trabajo llevado a cabo en el proyecto del mismo nombre con sede en Suiza bajo la dirección de Guerino Mazzola, quien usa la Topología Algebraica, la Teoría de Categorías y otras áreas similares en un esfuerzo por aplicar el lenguaje, los métodos y las perspectivas de la matemática moderna a una musicología sistematizada. Es importante enfatizar que la temática de este anexo se presenta de manera sumamente informal y descriptiva, ya que cae fuera del alcance de esta tesis; sin embargo, se pretende retomar y profundizar en el material aquí comentado (más otros aspectos que ni se mencionan) en un trabajo posterior.

Cabe enfatizar que la autora de esta tesis intentó, en todo momento, sintetizar, aclarar y/o

extender la información de un gran número de artículos, pormenorizando varios conceptos y ejemplos (tanto matemáticos como musicales) con explicaciones y, en muchas ocasiones, con fórmulas y pasos omitidos en los trabajos originales. Aportó abundantes ejemplos, pensando siempre en facilitar al lector una comprensión más cabal de los elementos que encontró motivantes, y formalizó y extrajo la parte matemática, muchas veces expuesta en los artículos y libros consultados de manera implícita o informal.

extender la información de un gran número de artículos, pormenorizando varios conceptos y ejemplos (tanto matemáticos como musicales) con explicaciones y, en muchas ocasiones, con fórmulas y pasos omitidos en los trabajos originales. Aportó abundantes ejemplos, pensando siempre en facilitar al lector una comprensión más cabal de los elementos que encontró motivantes, y formalizó y extrajo la parte matemática, muchas veces expuesta en los artículos y libros consultados de manera implícita o informal.

Capítulo 1

La Música como una Manifestación Física y las Matemáticas

Algunos músicos...han tomado la inquietud que tenía Pitágoras de explicar la música, como prueba de que el método numérico que organiza el fenómeno musical es una suerte de accidente peculiar. Estos músicos afirman que todas las reglas de la música son asunto de costumbre y de acuerdos, y que no hay ninguna forma absolutamente correcta o equivocada para escoger las notas. Mi propia creencia es que el desarrollo de la música ha sido afectado de manera muy fuerte por la forma en que las cosas vibran y por el modo en que trabajan nuestros oídos.

Arthur H. Benade

Todas las escalas conocidas se parecen mucho a la nuestra; en particular, la de los antiguos griegos era casi la misma. La razón de esta semejanza no es difícil de hallar: toda escala debe considerarse como el resultado de un esfuerzo por encontrar un conjunto de notas con las más estrechas relaciones de consonancia posibles entre sí.

George David Birkhoff

El hecho de que un reconocido físico nuclear (también flautista consumado), así como uno de los matemáticos más importantes de nuestro siglo, hayan sentido la necesidad de entender de

manera racional el arte más abstracto, nos sirve para reforzar nuestra certeza de que cualquier intento de encontrar nexos entre diferentes áreas de pensamiento y creación humanos nos lleva a enriquecer y profundizar en cualquiera de ellas o en todas. El propósito de este capítulo es dar una breve semblanza de cómo la música en su faceta de fenómeno físico ha atraído la atención de matemáticos desde la época de Pitágoras, pasando por Galileo, Huygens, Bernoulli y Euler hasta llegar nuestro siglo. El contenido no es de ninguna manera exhaustivo y sólo se pretende ubicar al lector en una dirección del tiempo, ya que es en esta área, de la música como fenómeno físico, donde surgían las primeras inquietudes relacionadas con nuestro tema. También es lógico que así haya sido, puesto que tuvo que haber un desarrollo posterior tanto de la música como de la matemática para que pudieran surgir explicaciones y modelos basados en las Teorías de Grupos y Conjuntos, o en Módulos o Topología como veremos en capítulos posteriores. De esta manera, en este primer capítulo estudiaremos la famosa gran incógnita de Pitágoras, veremos la explicación acústica tanto de la consonancia como del desarrollo de nuestras escalas actuales y entenderemos el origen (también acústico) de la afinación de igual temperamento. Asimismo, estudiaremos un método que se diseñó para realizar la división múltiple de la octava dentro del sistema de igual temperamento, basado en fracciones continuas binarias y ternarias, cuya motivación también es acorde con la explicación acústica en boga desde Pitágoras. Se hace mucho hincapié en reconocer cuándo se explica la música en función del aspecto acústico, dado que en el capítulo 4 se plantea una forma alternativa de entender el desarrollo de todo nuestro sistema musical de tonalidades y de plantear la división múltiple de la octava (en más de doce partes), basada en la Teoría de Grupos.

1.1

Cuando los antiguos griegos dividían la cuerda de su monocordio (un instrumento provisto de una sola cuerda y un puente móvil) encontraron que si esta división era de proporción 2:1 se tenía la octava (o sea, la misma nota pero más aguda). Asimismo, la proporción 3:2 daba el intervalo de la quinta, 4:3 la cuarta, 5:4 la tercera mayor, 6:5 la tercera menor y 5:3 la sexta mayor.¹

¹Cabe aclarar que, cuando se refiere a la división de la cuerda, se expresa la razón entre el número mayor y el menor (2:1, 3:2, etc.); sin embargo, como se verá adelante, las razones de las frecuencias de vibración son



Aunque el concepto de "consonancia" ha ido cambiando, si nos restringimos por el momento a la música occidental, desde sus inicios con los antiguos griegos hasta la armonía clásica que regía la composición de finales del siglo XVIII y todo el siglo XIX, se encuentra que estos intervalos han sido considerados consonantes, en oposición a las segundas menor y mayor, las séptimas menor y mayor, y la cuarta aumentada (o quinta disminuida).



La relación entre los enteros pequeños y la consonancia en la música "ha sido, desde todos los tiempos, vista como un misterio maravilloso de un significado profundo" [Helm. p.15]. Los pitagóricos emplearon esta relación para desarrollar su "armonía de las esferas" (armonía que sólo pudo escuchar Pitágoras entre los mortales!) y su doctrina pregonaba que "todo es número y armonía". Cabe mencionar que hubo filósofos de la antigua China como Tso-kiu-mlng, compañero de Confucio, quien en el año 500 A.C. comparó los cinco sonidos de la escala china (pentatónica, pero también basada en las razones de la cuerda) con los cinco elementos de su filosofía natural: agua, fuego, madera, metal y tierra. "Aún en los tiempos más recientes se pueden encontrar teóricos, amigos de la música, que prefieren celebrar el misticismo aritmético en vez de intentar escuchar *armónicos*" [Helm. p.229]. Son estas *series armónicas* que vamos a describir en los siguientes párrafos.

La gran incógnita que planteó Pitágoras, del porqué de la relación entre consonancia y números enteros pequeños, no pudo ser resuelta por los antiguos griegos ya que las explicaciones físicas y fisiológicas estaban lejos de haber sido descubiertas y entendidas. Asimismo, a pesar

expresadas de forma inversa (1:2, 2:3, etc.).

* Por consonancia se entiende "lo que suena bien".

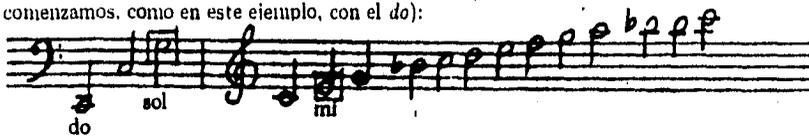
de su descubrimiento de las escalas diatónicas en sus siete modos (escalas correspondientes a las teclas blancas del piano), que son la fuente de nuestras escalas actuales de modos mayor y menor, su música fue *monofónica*, es decir, exenta de acompañamiento o *polifonía* (varias voces simultáneas), y la consonancia se percibía por intervalos melódicos (horizontales). Es curioso para nosotros que un ser humano de mente tan compleja y aguda como Aristóteles haya podido decir "...por esta razón entendemos a una persona que habla, mejor que varias personas que dicen la misma cosa al mismo tiempo. Así es, también, con las cuerdas. Y mucho menos cuando la flauta y la lira se tocan al mismo tiempo, porque sus voces son confundidas las unas con las otras. Asimismo, el porqué está claro ya que, debido a las consonancias, ambos sonidos son escondidos el uno por el otro" [Helni., p.237].

Tuvieron que pasar muchos años hasta que Galileo (hijo de un músico notable y rebelde de su época y él también un espléndido laudista y compositor, actividad que retomó bajo su arresto domiciliario cuando fue condenado por la Inquisición) comenzara a desentrañar las leyes que gobiernan el movimiento de las cuerdas. Sus investigaciones, sucedidas por las de Newton, Euler y Daniel Bernoulli, llevaron al descubrimiento de que las razones sencillas de las longitudes de las cuerdas se presentaban en los intervalos musicales de todos los instrumentos y no eran exclusivas de las cuerdas. De hecho, se descubrió que la sensación de un sonido musical se debe al *movimiento periódico* del cuerpo sonoro, en tanto el ruido tiene su fuente en el movimiento errático. La altura de un sonido (una nota) depende de la frecuencia de la onda emitida, o sea, el número de vibraciones que se suceden en cada segundo o vibraciones por segundo (v.p.s.). El sonido será más grave con una frecuencia menor y más agudo con una mayor. Hoy día, por común acuerdo, se ha tomado la nota *la*, correspondiente a la segunda cuerda del violín, como altura de referencia, con una frecuencia de 440 vibraciones por segundo. Más adelante se presenta una tabla de las frecuencias con las 88 notas abarcadas por el piano, cuyas alturas son las aceptadas internacionalmente para las orquestas.

Cuando el sonido fundamental de un intervalo dado se transfiere del bajo a una octava más aguda, se dice que el intervalo "se invierte" (el sentido del "inverso" aquí es muy diferente de su significado en la matemática. Por eso lo interesante del artículo *El Monoide Libre y la Música* que se analiza en el Capítulo V). Una cuarta es una quinta invertida, una sexta menor es una tercera mayor invertida, etc. De esta forma, el número que representa el bajo del intervalo se

dobra (recuérdese que la relación de frecuencia de la octava es 1:2) y así se obtienen las razones de los números de altura correspondientes; es decir, se dobla el número menor (el bajo) de la razón original. Por ejemplo: de la quinta 2:3 se obtiene $3:2(2) = 3:4$, que es la cuarta; de la tercera mayor 4:5 se obtiene $5:4(2) = 5:8$ que es la sexta menor, su inverso, y así sucesivamente.

Fueron el músico Jean Phillippe Rameau y el matemático Jean Le Rond D'Álembert quienes realmente transfirieron la teoría de la consonancia del plano metafísico a lo físico, ya que explicaron la consonancia de las terceras mayor y menor y sus inversiones, las sextas menor y mayor, en función de los *armónicos*. Las series armónicas o *parciales superiores*, también conocidos como *sobretonos*, se presentan debido al siguiente fenómeno: el oído no percibe solamente el sonido musical tocado, cuya altura se debe a la frecuencia de onda, sino que también percibe toda una serie de sonidos musicales más agudos. Estas series son iguales para todos los sonidos correspondientes al movimiento periódico y abarcan la siguiente gama (si comenzamos, como en este ejemplo, con el *do*):



Así es como se explica la consonancia, presente en las combinaciones de notas que coinciden en sus primeros armónicos. El acorde de *do* mayor, por ejemplo, consiste en *do*, *mi* y *sol* y, como podemos ver, *sol* y *mi* son de los primeros sonidos parciales superiores de la nota *do*.

Euler intentó explicar la relación entre consonancia y números enteros de una manera más científica que, por ejemplo, Kepler, quien, a pesar de ser uno de los más grandes científicos de todos los tiempos, no pudo sustraerse de la tentación de buscar (o escuchar) la "armonía de los mundos". Tan es así, que le atribuyó a la tierra los sonidos *mi-fa-mi*: miseria, hambruna, miseria de nuestro planeta [Abell, et.al, p.40]. Pero Euler tampoco pudo dejar de explicar la consonancia de modo más bien psicológico. Afirmó que provoca más "placer" escuchar 2, 3 ó 4 vibraciones de un sonido que coinciden con 1, 2 ó 3 del otro, que el que experimentaríamos si las razones de tiempo de las vibraciones fueran inconmensurables entre sí, o si sólo pudieran expresarse con números muy grandes. Euler desarrolló una regla aritmética para calcular el grado de consonancia de un intervalo, o un acorde, que se basaba en las razones de los periodos de vibración que los caracterizaban (la regla aritmética de Euler se verá en el Capítulo 2). El problema del sistema que ideó Euler es que no explica porqué una consonancia, levemente

desafinada, suena casi igual que el mismo intervalo perfectamente afinado. Asimismo, esta consonancia con una leve desafinación suena mucho "mejor" (¡para oídos clásicos, por supuesto!) que un intervalo definitivamente disonante como por ejemplo una segunda, aunque la razón numérica de la consonancia con una ligera desafinación es más compleja. Lo que sucede es que, según Euler, la mente percibe las razones de los números de altura tal como se emiten. Sin embargo, el gran aporte de Helmholtz en su multicitado libro, fue descubrir que sólo se perciben los efectos físicos de estas razones, es decir, la sensación continua (consonancia) o intermitente (disonancia) de los nervios auditivos.

El descubrimiento de Helmholtz, así como las limitaciones de las explicaciones de Euler, se deben al hecho de que era necesario contar con el trabajo de Fourier. Helmholtz resuelve la gran pregunta de Pitágoras porque sabe que el oído asimila los sonidos complejos en oscilaciones pendulares, según la ley de la vibración simpática que etiqueta los sonidos como consonantes en la medida en que los estímulos nerviosos sean continuos, sin perturbación. Asimismo, para mediados del siglo pasado se sabía que el proceso en que se asimilan los armónicos se expresa, matemáticamente, por la ley de Fourier. Esta ley muestra cómo cualquier magnitud que varía periódicamente puede ser expresada como una suma de magnitudes periódicas simples, cualquiera que sea su naturaleza. La longitud de los periodos de los términos simples de la suma tiene que ser tal que uno, dos, tres, o cuatro, etc. de ellos sean iguales a la magnitud original. Si traducimos este hecho a los sonidos musicales, de por sí periódicos, vemos que los números de los armónicos tienen que ser exactamente uno, dos, tres, etc. veces la magnitud del sonido original, y así los números enteros determinan las razones de las consonancias. Cabe mencionar que las "perturbaciones", típicas de las disonancias, se deben a un fenómeno llamado *beats* (batimientos) cuyo análisis no se va a realizar en este trabajo. Para profundizar más en estos aspectos se recomiendan los trabajos de Helmholtz y Benade, citados en la bibliografía. De este modo, "En última instancia, la explicación de las relaciones numéricas racionales de Pitágoras se encuentra en la Ley de Fourier, y en cierto sentido esta ley puede considerarse como la fuente primaria de la Teoría de la Armonía" [Helm. p.229].

1.2

En este punto de nuestra exposición, vamos a enfocar la atención sobre un artículo titulado

Music and Ternary Continued Fractions (Música y Fracciones Ternarias Continuas), presentado en 1947 por J.M. Barbour. El trabajo comienza con la reafirmación de un hecho que ya conocemos: el intervalo más importante en la música, desde el punto de vista físico, es la octava con su razón de 2:1. Sin embargo, el número de notas abarcadas en los confines de este intervalo ha variado según tiempo y lugar. Lo interesante es que la escala pentatónica por ejemplo (una forma fácil de encontrar esta escala es tocar las teclas negras del piano) se encuentra en países tan lejanos y disímboles como China y Escocia. Ya vimos que la escala diatónica de siete notas (correspondiente a las teclas blancas del piano, si se inicia y termina con cualquier *do*) se remonta a los tiempos antiguos y forma la base de la música clásica occidental, en tanto la escala cromática de doce notas, que incluye las teclas blancas y negras del piano, cobró importancia hace tres siglos y, en el siglo presente, ha servido de base para el *dodecafonismo* (sistema musical que prescinde de la noción de tonalidad).

Un problema, presente desde los tiempos de la música monofónica (de una sola voz, propia de los griegos y de todos los pueblos en las primeras etapas del desarrollo de la música) y que se agudizó con el advenimiento de la música polifónica (de varias voces simultáneas) y armónica, así como con las combinaciones, a manera de orquesta, de instrumentos de cuerdas, alientos y teclados, es la afinación. Un sistema, conocido como el de la *afinación justa* cobró aceptación en el siglo XVI, ya que los acordes principales, la tónica, la subdominante y la dominante (*do-mi-sol, fa-la-do, sol-si-re*, en la escala de *do* mayor) se expresan por las razones 4:5:6 (4/5 es la frecuencia de la tercera mayor, *do-mi, fa-la, sol-si*, y 5/6 es la frecuencia de la tercera menor, *mi-sol, la-do, si-re*). Pero cuando se emplea el método de afinación justa en toda la escala cromática hay intervalos que suenan ríspidos y desagradables. En el siglo XVII se trabajaron varios sistemas de afinación en que se tuvieron que alterar algunas notas en aras de poder usar todos los intervalos.

Hoy en día se usa, fundamentalmente, el sistema de afinación conocido como de *igual temperamento* que encuentra su modelo en la afinación del piano. Aun así, las cuerdas del violín, de intervalos de una quinta (*sol-re-la-mi*), suelen afinarse según la afinación justa. En el sistema de igual temperamento la quinta se ajusta hacia abajo por una *coma diatónica* o *coma Pitagórica*, que es la diferencia entre seis tonos $(9/8)^6$ y la octava $(2/1)$ (el tono, representado por $9/8$, es la segunda mayor). Esta es una razón de 531441:524288, que está entre 75:74 y

74:73. Como se puede ver, las razones en este sistema ya no son de enteros pequeños. Una quinta temperada por una coma ditónica posee la razón $2^{7/12}:1$. Si se considera la escala cromática, comenzando con *do*, y sus semitonos (*do*= 0, *do*[♯] = 1, *re*= 2, *re*[♯] = 3, *mi*= 4, *fa*= 5, *fa*[♯] = 6, *sol*= 7, *sol*[♯] = 8, *la*= 9, *la*[♯] = 10, *si*= 11), la quinta consiste en 7 semitonos de 12 posibles y, por lo tanto, es 7/12 de una octava. Asimismo, la distancia entre los semitonos de igual temperamento se calcula así: hay un número *n*, que multiplicado por sí mismo 12 veces nos da la octava con su razón 2:1. Así es que:

$$n^{12} = 2, \text{ entonces } n = \sqrt[12]{2} = 2^{1/12}.$$

El sistema de igual temperamento se usaba en laúdes y otros instrumentos con trastes desde el siglo XVI, pero no fue universalmente aceptado hasta mediados del siglo XIX, debido a la forma en que, bajo dicho sistema se agudizan las terceras mayores. Esto se explica en función de una medida conocida como la *centésima* (*cent*), que equivale a $\frac{1}{1200}$ de la octava. Estas cents son centésimas de un semitono y pueden medir cualquier intervalo musical: son especialmente importantes en la medición numérica de intervalos "exóticos" para nuestro oído, acostumbrado a la música occidental. Por ejemplo, la medida de "1439 cents", tomada desde el *do* que se encuentra a una octava más bajo del *do* central, representa un sonido más agudo por 39/100 de un semitono (o sea, 39 cents) que el *re* que está al lado del *do* central. La octava contiene 1200 cents y la quinta, en la afinación de igual temperamento, contiene 700 cents, en tanto la tercera mayor es de 400 cents. En la afinación justa, la quinta, con su razón de 3:2, contiene 702 cents y, por lo mismo, la afinación de igual temperamento (con 700 cents) sólo se encuentra ligeramente baja en comparación. Sin embargo, la tercera de la afinación justa es igual a 386.3 cents, tal que la tercera de igual temperamento (400 cents) se ha agudizado por casi 14 cents.

No obstante, la afinación de igual temperamento posee la gran ventaja de que es un sistema cerrado, o sea, cíclico. Esto significa que la enésima potencia del valor dado de una quinta caerá exactamente en una de las octavas superiores de la nota inicial. Frecuentemente han surgido sugerencias para mejorar las terceras dentro del sistema de igual temperamento: esto significa, usualmente, aumentar la cantidad de notas de la octava. Hay teóricos que han dividido la octava, de forma precisa, en más de 100 partes. Sin embargo, ¡no han inventado, paralelamente, los instrumentos para poder hacer música con estos sistemas! A continuación se

² El tema de la división múltiple de la octava se va a retomar en el Capítulo 4 (Teoría de Grupos, Conjuntos

presenta la tabla de frecuencias que se emplea actualmente a nivel internacional y que contiene las alturas de las 88 notas del piano. Como ya se dijo, las razones de los intervalos pierden su carácter de enteros pequeños que poseían en la afinación justa, pero se gana en cuanto a la posibilidad de usar las doce tonalidades, cosa imposible en la afinación justa ya que para "cerrar" el círculo de quintas se tenía que estrechar por lo menos una de ellas con un sonido resultante tan desagradable que se le llamaba "el aullido del lobo". Nótese que el *la* central, la segunda cuerda del violín, es de 440 v.p.s.

Altura	1	2	3	4	5	6	7	8
<i>sol</i> ²	51.91	103.82	207.65	415.30	830.60	1661.21	3322.43	
<i>sol</i>	48.99	97.99	195.99	391.99	783.99	1567.98	3135.96	
<i>fa</i> ²	46.24	92.49	184.99	369.99	739.98	1479.97	2959.95	
<i>fa</i>	43.65	87.30	174.61	349.22	698.45	1396.91	2793.82	
<i>mi</i>	41.20	82.40	164.81	329.62	659.25	1318.51	2637.02	
<i>re</i> ²	38.89	77.78	155.56	311.12	622.25	1244.50	2489.01	
<i>re</i>	36.70	73.41	146.83	293.66	587.33	1174.65	2349.31	
<i>do</i> ²	34.64	69.29	138.59	277.18	554.36	1108.73	2217.461	
<i>do</i>	32.70	65.40	130.81	261.62	523.25	1046.50	2093.01	4186.01
<i>si</i>	30.86	61.73	123.47	246.94	493.88	986.76	1975.53	3951.06
<i>la</i> ²	29.13	58.27	116.54	233.08	466.16	932.32	1864.65	3729.31
<i>la</i>	27.50	55.00	110.00	220.00	440.00	880.00	1760.00	3520.00

Entre los sistemas de división múltiple de la octava, cabe mencionar el de Nicola Vicentino que data de mediados del siglo XVI, en que la divide en 31 partes iguales. Pero él puso la condición de que las quintas debían ser ajustadas a la afinación común en los instrumentos de teclado; fue Christian Huygens (el físico, geómetra y astrónomo holandés) quien mostró que el sistema de igual temperamento y el de la octava de 31 partes eran esencialmente iguales, ya

y la Música). Obviamente, la música electrónica es una forma de responder al "problema" de los instrumentos, especialmente los teclados.

que la tercera del igual temperamento tiene 386.3 cents y el de la división en 31 partes ¡387.1!

La mejor división cíclica con menos de 100 partes es la que divide la octava en 53 notas, ya que con ella la tercera y la quinta se aproximan bastante a la afinación justa. Los pitagóricos la insinuaron cuando decían que había cuatro comas (una *coma pitagórica*, en términos de cents, resulta de subir 12 quintas y bajar 7 octavas, es decir, $12 \times 701.955 - 7 \times 1200 = 23.460 \approx 23.5$ cents) en el semitono y nueve comas en el tono y, por lo tanto, la octava contendría $(5 \times 9) + (2 \times 4) = 53$ comas. El teórico chino, King Fang, mencionó la división de la octava en 53 partes [Bar. p.547] y teóricos europeos de los siglos XVIII y XIX también hablaron de ella. En esta división las quintas son casi perfectas (701.9 cents) y las terceras ligeramente bajas (384.9 cents). Sin embargo, esta división es poco práctica para instrumentos reales, aunque factible para la música electrónica o computarizada.

El geómetra y acústico francés, Joseph Sauveur, se interesó mucho en la división múltiple de la octava y desarrolló una teoría al respecto. En un artículo que data de 1711 [citado en Bar. p.548], Sauveur dio una lista de 25 posibles divisiones de la octava: 12, 17, 19, 31, 43, 50, 53, 55, 67, 74, 98, 105, 112, 117, 122, 136, 141, 153, 160, 177, 184, 189, 208, 232 y 256. La teoría se basa en la división del tono; por ejemplo, *do-re* se divide en un semitono diatónico, *do-re*², y un semitono cromático, *re*³-*re*. En la afinación justa, si se toma el semitono diatónico con razón 16:15 (112 cents) y el semitono cromático con razón 135:128 (92 cents), la razón del semitono diatónico al cromático será 112:92, o sea, 28:23. Como la octava contiene 7 semitonos diatónicos y 5 cromáticos, se usa la fórmula: $O = 7d + 5c$, $d > c$. Si se usan aproximaciones a la razón 28:23, como 5:4, 6:5 y 11:9, se puede sustituir con $d/c = \frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$ o $\frac{11}{9}$. Cuando $d/c = \frac{5}{4}$, $O = (7 \times 5) + (5 \times 4) = 55$ partes; cuando $d/c = \frac{6}{5}$, $O = (7 \times 6) + (5 \times 5) = 67$ partes. Así es como se llega a algunas de las divisiones de Sauveur; otras divisiones resultan de la combinación de varias series independientes entre sí, cada una determinada por la fórmula $d=c+i$ donde $i=1, 2, 3, 4$. Si $i=4$, entonces $O = 7(c+4) + 5c = 12c + 28$; posteriormente se emplean valores impares de 7 a 19 para c , y resultan las divisiones de 112, 136, 160, 184, 208, 232 y 256.

El primer aporte realmente científico, por medio del uso de fracciones continuas, al problema de la división múltiple de la octava se debe a M.W Drobisch y data de 1855. Este tomó la razón de los logaritmos de la quinta a la octava ($\log \frac{3}{2} : \log 2$) y la expresó como la fracción $\frac{46,797}{80,000}$; después empleó fracciones continuas ordinarias [véase Apéndice 1] para encon-

trar aproximaciones sucesivas. A continuación vamos a desarrollar dicho proceso:

$$\begin{aligned}
 46,797 &= 80,000 \times 0 + 46,797 \\
 80,000 &= 46,797 \times 1 + 33,203 \\
 46,797 &= 33,203 \times 1 + 13,594 \\
 33,203 &= 13,594 \times 2 + 6,015 \\
 13,594 &= 6,015 \times 2 + 1,564 \\
 6,015 &= 1,564 \times 3 + 1,323 \\
 1,564 &= 1,323 \times 1 + 241 \\
 1,323 &= 241 \times 5 + 118 \\
 241 &= 118 \times 2 + 5 \\
 118 &= 5 \times 23 + 3 \\
 5 &= 3 \times 1 + 2 \\
 3 &= 2 \times 1 + 1 \\
 2 &= 1 \times 2
 \end{aligned}$$

Así es que:

$$\frac{a}{b} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{23 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}}}}}$$

y las fracciones continuas ordinarias que obtuvimos son: $0, 0 + \frac{1}{1}, 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}, 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}, 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}}, \dots$ que, a su vez, son iguales a $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{7}{12}, \frac{23}{41}, \dots$

Los denominadores (que son las divisiones propuestas de la octava musical) de la serie completa son: 2, 5, 12, 41, 53, 306, 665, 15,601, Como ya se mencionó, este método fue el primero realmente científico de dividir la octava con respecto a las terceras y las quintas. El problema de este método estriba en que, por un lado, se quieren comparar tres magnitudes (la tercera, la quinta y la octava) y, por otro, sólo se puede escoger una razón (la tercera a

la octava, o la quinta a la octava) cuando se trabaja con fracciones continuas binarias. Por este motivo, se investigó el uso de fracciones continuas ternarias para llegar a la "solución" del problema de la división múltiple de la octava, ya que dichas fracciones continuas ternarias aportan un medio en que tres números pueden aproximarse de forma simultánea. Pensamos que aquí cabe una pequeña digresión. Es incuestionable que, por la sencillez de la afinación de igual temperamento, ésta ha sido ventajosa para el desarrollo de la música instrumental. Una afinación en que se dividiera la octava en más partes requeriría de una complejidad mucho mayor en la mecánica de los instrumentos y, por ende, un grado extremo de dificultad en su manipulación. Se puede afirmar que el altísimo desarrollo de la música instrumental de los últimos 250 años no hubiera sido posible sin el empleo de la afinación de igual temperamento. Sin embargo, este hecho no le resta interés al problema de la división múltiple, desde el punto de vista teórico o hasta práctico, en la época de la música generada por computadora (y del uso poco ortodoxo de ciertos instrumentos, como las cuerdas, que se prestan para ello).⁴

El empleo del algoritmo de Jacobi (véase Apéndice 1) para fracciones continuas ternarias, en relación al problema de la división múltiple de la octava, se plantea así:

Sean $u_1 = \log \frac{5}{4}$; $v_1 = \log \frac{3}{2}$; $w_1 = \log 2$ y las razones $A_n : B_n : C_n$, que representan las aproximaciones sucesivas a las razones de los tres logaritmos. Musicalmente, se explica de esta manera: si la octava se divide en C_n partes, entonces A_n partes es una buena aproximación a la tercera mayor y B_n a la quinta justa. Los resultados para los p y q dados son:

⁴La división múltiple de la octava y del tono se han llevado a cabo desde tiempo atrás. El método de Aristoxeno, quien propuso la división del tono en tercios, cuartos y octavos, el Sonido 13 de Julián Carrillo y el trabajo que se realiza actualmente en el proyecto del Instituto de Investigaciones Estéticas conjuntamente con el Instituto de Matemáticas Aplicadas y Sistemas, son otras vertientes de esta misma búsqueda que ha ocupado a hombres de diferentes siglos y muchas naciones.

p_n	q_n	A_n	B_n	C_n
1	3	1	1	3
0	1	1	2	3
1	7	8	15	25
0	1	9	16	28
0	1	10	18	31
0	2	28	51	87
3	8	478	263	817

El problema que se presenta con estos resultados tiene dos vertientes. Primeramente, la convergencia es muy rápida y, para la división múltiple de la octava, interesan los valores pequeños; en segundo lugar, los resultados son muy distintos a los propuestos por Sauveur y por el mismo Drobisch, quien utilizó un método tan similar. No obstante, cuando se emplea el inverso de la expansión de Jacobi (Apéndice 1), se llega a:

p_n	q_n	A_n	B_n	C_n
0	1	0	1	1
0	1	0	1	2
1	2	1	3	5
2	2	4	7	12
0	3	13	24	41
0	1	17	31	53
0	5	98	179	306

Lo interesante aquí es que, como v_1 es $\log \frac{3}{2}$ y w_1 es $\log 2$, y como B_n y C_n son independientes de p_n , la serie para la razón de la quinta justa a la octava ($B_n : C_n$) coincide con lo obtenido por Drobisch en sus fracciones continuas binarias. Sin embargo, la convergencia sigue siendo muy rápida. En el artículo se propone usar la "expansión mixta" en que se emplea el método de Jacobi (J) cuando $u_n > v_n$ y el método inverso (R) cuando $u_n < v_n$, con todo p igual a cero. Se sigue este criterio, porque como u_n es el divisor en el método de Jacobi (J) y v_n es

el divisor en el método inverso (R), y se busca una convergencia lenta, se va a tomar siempre el más grande entre u_n y v_n . El procedimiento se explica en el Apéndice 1. Los resultados se presentan en la siguiente tabla:

	p_n	q_n	A_n	B_n	C_n
	0	1	0	1	1
R	0	1	0	1	2
J	0	1	1	1	2
J	0	1	1	2	3
R	0	1	2	3	5
J	0	1	2	4	7
R	0	1	4	7	12
R	0	1	6	11	19
R	0	1	10	18	31
J	0	1	11	20	34
J	0	1	17	31	53
R	0	1	28	52	87
J	0	1	38	69	118
R	0	4	180	327	669

Como se puede ver, con el método mixto la convergencia es más lenta que con los métodos de Jacobi o inverso. Se busca una convergencia lenta en el problema de la división múltiple de la octava, ya que así se encuentran más alternativas factibles de implementar. Sin embargo, con una simple inversión de las hipótesis la expansión mixta arrojará una convergencia más rápida. Cabe mencionar de nuevo que en el tiempo de Drobisch y aún en el tiempo de Barbour, este problema tenía más alcance teórico que práctico. Hoy día se pueden plantear resultados teóricos y prácticos. Este ensayo con fracciones continuas se basó en la descripción acústica (física) del sistema musical, con sus razones entre enteros pequeños, cuyo origen data desde

hace aproximadamente 2,500 años. En el capítulo 4 veremos otro enfoque hacia la división múltiple de la octava, basado en una descripción algebraica del sistema musical con el empleo de la Teoría de Grupos.

Capítulo 2

La Música como una Manifestación Estética y las Matemáticas: la medida estética de George Birkhoff

La Estética como rama de la filosofía ha sido una preocupación humana desde los antiguos griegos, y muy probablemente desde antes. Ha sido común tomar uno u otro aspecto de la experiencia estética (su naturaleza sensual, su valor pedagógico, la cualidad mística inherente a su efecto) y absolutizarlo. Sin embargo, la estética como "ciencia que trata de la belleza y de los sentimientos que hacen nacer lo bello en nosotros", si realmente pretende ser científica, "debe ser abordada desde el punto de vista analítico y preocuparse con los aspectos formales del arte" [Birk., 1, p.193]. Así es que, en este capítulo se verá como uno de los matemáticos más destacados de nuestro siglo formuló la *Mérida Estética*.

2.1

En sus *Diálogos*, Platón examinó varias definiciones de lo bello y luego las rechazó por inconsistentes. Por ejemplo, Platón descartó como definición de lo bello "lo que deleita a la vista y al oído", porque no podía hallar un elemento común entre los dos sentidos y, por lo tanto, la belleza consistiría en dos elementos en lugar de uno. No obstante, según Birkhoff sí hay un elemento común subyacente entre estos dos sentidos, ya que el espacio es una variedad métrica

tridimensional y, de la misma manera, el tiempo (representado por la recta, por supuesto) es una variedad métrica unidimensional. Así es que las formas espaciales y temporales son de la misma naturaleza abstracta, y el placer estético provocado por los objetos espaciales (por ejemplo, la Pintura) y temporales (la Música) surge de las relaciones formales propias de las variedades métricas [Birk., 1, p.196]. De esta manera se entiende la conocida referencia de Goethe a la Arquitectura como "música congelada" y los comentarios del mismo Platón, en el *Philebus*, cuando escribe " Si se sustrae la aritmética, lo medible y lo pesable de cualquier arte, lo que queda no será mucho" y "la medida y la proporción siempre se transforman en la belleza y la excelencia".

Leibniz, considerado el cofundador junto con Newton del cálculo infinitesimal era, aparte de gran matemático, un filósofo preocupado por todas las manifestaciones humanas y naturales. El definió la música de una manera sorprendente como " el acto de contar realizado por la mente sin que ésta se percate de que está contando" [Birk. 1, p.200]. Como se verá más adelante, esta definición coincide con uno de los puntos de partida más importantes de Birkhoff, o sea, que *la densidad de ciertas relaciones ordenadas entre las notas, percibidas intuitivamente, puede medir el efecto estético.*

Como se mencionó en el Capítulo I, Euler mantenía que la mente humana se deleitaba en la ley y el orden y, por lo tanto, encontraba placer en descubrir su naturaleza. Así es que según Euler, entre más pequeños los números que expresan la razón de dos frecuencias, más fácil es descubrir las leyes y el orden y se hace más agradable escuchar los sonidos en cuestión. Desde esta perspectiva, Euler desarrolló su teoría de la consonancia, basándose en esta "ley" señalada por Pitágoras (véase Capítulo I). Asimismo, este gran matemático y físico propuso una medida cuantitativa para "calcular" la disonancia de un acorde: expresó la razón de la frecuencia del acorde por medio de los números más pequeños que se podían encontrar siempre y cuando se mantuvieran las proporciones y después encontró su mínimo común múltiplo. Esta era la "medida" de la disonancia. Por ejemplo, la razón de frecuencia del acorde de *do mayor*, *do- mi-sol*, es 4:5:6:8 (la tercera mayor 4:5, la tercera menor 5:6 y la cuarta 6:8). Como el mínimo común múltiplo de estos números es 120, se tenía así la medida de disonancia de dicho acorde. Sin embargo, esta medida es cuestionable por varios motivos. Para comenzar, el acorde *do-mi-sol-si* (8:10:12:15) posee la misma medida 120, pero es mucho más disonante por la

séptima mayor, *do-si*. Asimismo, como se explicó en el Capítulo I (en lo tocante a los cents) si una nota está ligeramente desafinada (o "infinitesimalmente" desafinada) la medida se dispara a infinito, aunque una quinta con esta ligera desafinación suena mucho "mejor" (según la armonía tradicional) que si se tocara una segunda menor. Finalmente, como se mide la disonancia, se encuentra que es "mejor" eliminar el *mi* del acorde de *do* mayor y tocar solamente *do-sol* y, como menciona el físico James Jeans, "se puede eliminar cualquier disonancia sentándose en el silencio total" [Je., p.156].

Según Jeans, autor de *Science and Music* escrito en 1938 (el trabajo de George Birkhoff apareció en 1932), "Este es un defecto de la mayoría de las teorías de la disonancia. Hay innumerables teorías que nos explican el origen de la perturbación que sentimos cuando escuchamos disonancia, pero ninguna ni siquiera intenta explicarnos el origen del placer que provoca la armonía; de hecho, por más ridículo que parezca, esto último permanece como uno de los problemas sin solución de la música" [Je., p.156]. No obstante, he aquí la esencia de la motivación detrás del trabajo de Birkhoff, *A Mathematical Theory of Aesthetics* publicado, como ya se señaló, con *seis años de anticipación* al libro de donde proviene la cita. En el trabajo de Birkhoff, se desarrolla la Medida Estética", la cual vamos a estudiar en lo que resta de este capítulo.

2.2

En el prefacio de su libro, Birkhoff explica su propia motivación cuando escribe "La estructura formal de la música occidental comenzó a interesarme hace aproximadamente treinta años. Parecía evidente que debía haber allí algún principio director y, sin embargo, no parecía haberse encontrado ninguna explicación satisfactoria de la forma musical.... Siguiendo este camino surgió en mi mente la Teoría de la Medida Estética y el enigma de la melodía tomó el aspecto de un problema casi matemático que yo, como matemático, podía estudiar provechosamente.... La verdadera función del concepto de la Medida Estética es proveer procedimientos sistemáticos de análisis en simples dominios formales de la estética. Hay una enorme diferencia entre el descubrimiento de un diamante y su tasación; aún más entre la creación de una obra de arte y un análisis de los factores formales que entran en ella" [Birk., 2, Prefacio].

Se establece que la experiencia estética está compuesta por tres fases sucesivas:

- (1) Un esfuerzo preliminar de atención, que es necesario para el acto de la percepción, y que aumenta proporcionalmente a la *complejidad* (C) del objeto;
- (2) el sentimiento de valor o *medida estética* (M) que recompensa este esfuerzo;
- (3) la comprobación de que el objeto está caracterizado por una cierta armonía, simetría u *orden* (O), más o menos disimulado, que parece necesario para el efecto estético.

Con base en estos tres factores, se idea una fórmula en que estos aspectos aparecen como variables medibles: $M = \frac{O}{C}$. De este modo, si se puede medir el orden (O) y la complejidad (C) de una obra en particular (en su libro, Birkhoff analiza las formas poligonales, los mosaicos y vasos como obras de arte, así como la Poesía y, por supuesto, la Música) se logra que la razón $\frac{O}{C}$ brinde la medida estética (M) de cualquier objeto de una clase en particular.

El sentimiento de esfuerzo está implícito en la experiencia estética y va acompañado de una serie de ajustes propios del estado de concentración. Así es que se supone que A, B, C, \dots son los distintos ajustes fisiológicos automáticos; a, b, c, \dots son los índices de tensión (de los ojos, los oídos, la posición, etc.) respectivos y r, s, t, \dots son las veces en que los ajustes A, B, C, \dots se producen. De esta forma, tenemos la complejidad: $C = ra + sb + tc + \dots$. Esta fórmula se ejemplificará más adelante con su aplicación a la música.

Para llegar a la fórmula del orden O , primeramente se distingue entre dos tipos de asociación, o sea, asociaciones *formales* y *connotativas*. Las primeras son simples y unitarias, como la simetría o la consonancia. Las asociaciones connotativas pueden ejemplificarse con el significado de un poema o la motivación de una sinfonía. Los elementos de orden de un objeto estético son propiedades del objeto, correspondientes a cualquier tipo de asociación. Dichos elementos pueden ser positivos o negativos; un ejemplo de una asociación negativa es la disonancia aguda (por lo menos, ¡dentro de los límites de la armonía clásica! a los que se restringe Birkhoff en su trabajo). Se designarán las asociaciones de varios tipos como L, M, N, \dots y los tonos de sentimiento (positivo, negativo o neutral) como l, m, n, \dots y si L, M, N, \dots se producen u, v, w, \dots veces respectivamente, se puede definir el orden: $O = ul + vm + wn + \dots$. La aplicación se irá aclarando con los ejemplos musicales.

Como la Medida Estética M es un índice cuantitativo, la pregunta lógica que surge es ¿en qué contexto es válida la comparación? Por un lado, como ya se mencionó, las comparaciones sólo tienen sentido dentro de las restricciones de una clase de objetos bien definida; no sería

válido comparar un poema con una melodía. Pero aún y cuando se haya definido con rigurosidad la clase de objetos en cuestión la "comparación estética, de la que es índice determinante la medida estética M , tendrá significado substancial sólo cuando representa el juicio normal o medio de algún grupo seleccionado de observadores. Por ejemplo, al considerar la música occidental sería natural guiarse por el consenso de opinión de los que estuvieran familiarizados con ella. Así es que, la medida estética M representa el *juicio estético* de un *observador normal ideal*" [Birk.2, p.10,11].

Se presenta una analogía con una fórmula muy conocida en la ciencia económica. Si se quiere medir cuál es la mejor de varias empresas, se razona de la siguiente forma: i es el capital invertido, y p la ganancia anual. De este modo, $\frac{p}{i}$, que es el porcentaje de interés sobre capital, representa el "éxito" en términos económicos de una empresa. Como la apreciación de los objetos estéticos implica un esfuerzo "invertido", medido por C , y la "ganancia" se materializa en el tono positivo de la experiencia estética, es decir, el orden O , se tiene que la recompensa es proporcional al esfuerzo, tanto en la empresa comercial ($\frac{p}{i}$) como en la medida estética $M = \frac{O}{C}$.

También se aporta un argumento matemático, para apoyar la fórmula de la medida estética. Se supone, para iniciar con una simplificación, que dos objetos de la clase tienen el mismo Orden O y la misma Complejidad C . En este caso particular sus Medidas Estéticas M son idénticas, ya que $\frac{O}{C} = \frac{O}{C}$. Si escribimos $M = f(O, C)$, se puede afirmar que M depende, en términos funcionales, sólo de O y de C . Pero todavía no se ha determinado la función f .

Supongamos, después, que existe un conjunto de k objetos de la clase, todos con el mismo O y la misma C , y un segundo conjunto k' de objetos, todos con la misma C' y el mismo O' . Se escogen k y k' tal que $k'C' = kC$.

Si medimos todos los objetos del primer conjunto, el esfuerzo total es igual a kC y el tono de sentimiento total es kO (el tono de sentimiento, que puede ser positivo o negativo, es producido por el orden y las asociaciones que éste provoca). En el segundo conjunto, el esfuerzo total es $k'C'$ (pero $k'C' = kC$) y el tono de sentimiento es, por supuesto, $k'O'$. Sin embargo, si la medida estética de los objetos individuales del segundo conjunto fuera la misma que en el primero, tendríamos que el tono de sentimiento total sería también el mismo, y $k'O' = kO$. En este caso $\frac{O}{C}$ y $\frac{O'}{C'}$ serían iguales y la medida estética dependería exclusivamente de la relación entre O y C , o sea, $M = f(\frac{O}{C})$. Por lo tanto, lo que importa, para determinar la medida

estética M , no es la magnitud numérica real de f , sino su magnitud relativa, y M puede definirse exclusivamente en términos de la relación entre O y C . $M = \frac{O}{C}$, como se hizo desde un principio. Cabe señalar que cuando hay indiferencia, es decir, cuando el tono de sentimiento que provocan las asociaciones está ausente, la medida estética es igual a cero.

Otra aclaración pertinente antes de iniciar la aplicación a la música es la siguiente: el análisis se dirige casi exclusivamente hacia el aspecto formal (recuérdese que el orden incluye componentes formales y connotativos) puesto que éste es el "único al que puede aplicarse cuantitativamente la fórmula básica de la medida estética" [Birk.2, p.13].

2.3

En los capítulos del libro de Birkhoff dedicados a la aplicación de la medida estética a la música, éste busca analizar algunos de los elementos de orden formal más sencillos. Se comienza con los acordes diatónicos; después se analiza la armonía diatónica y, finalmente, la melodía. Se menciona también el ritmo, señalando que es un caso particular (y más sencillo) de la melodía; no obstante, su estudio se deja abierto junto con muchas otras aplicaciones de la medida estética (dado que sólo se examina en este trabajo la armonía tradicional, cuando ya para la época de la publicación de esta obra en 1932, existía la armonía del romanticismo tardío, el cromatismo, el dodecafonismo, etc.) Hasta donde hemos podido averiguar, esta gama de aplicaciones y problemas abiertos no han sido retomados dentro de la línea de la medida estética, ni por musicólogos, ni por estéticos de ninguna especialización y mucho menos por matemáticos, independientemente de venir de tan prestigiado autor. Éste, en su tiempo, aclaró que "la apreciación de las relaciones de orden entre las notas musicales está... ampliándose y desarrollándose continuamente; sería absurdo tratar de formular una teoría definitiva de la Medida Estética, válida tanto para la música del futuro como para la del pasado". Así es que, se formula el problema fundamental del trabajo en cuestión: "Circunscribiéndose a un conjunto dado de recursos musicales, determinar hasta qué punto las relaciones de orden entre las notas de una composición musical constituyen la base efectiva del goce musical" [Birk.2, p.114].

Antes de comenzar la aplicación propiamente, se repasan muchos de los elementos que vimos en el Capítulo I (consonancia y series armónicas, la afinación de igual temperamento, la escala diatónica, etc.) Se llega a la conclusión de que el problema netamente técnico de la armonía

consiste en determinar cuáles son las combinaciones "adecuadas" y que la solución convencional viene de los tratados de armonía, con sus reglas empíricas y, por supuesto, sus excepciones. Sin embargo, esta "solución" empírica no puede satisfacer el espíritu científico ya que, detrás de toda esta intuición, hay bases racionales. Si no fuera así, no se podría explicar porqué en cada época hay un consenso referente a la armonía, así como el hecho de que una persona normal por la audición aprende a apreciar las armonías de tal forma que, si individuos distintos escuchan las mismas armonías, las opiniones son sorprendentemente coincidentes.

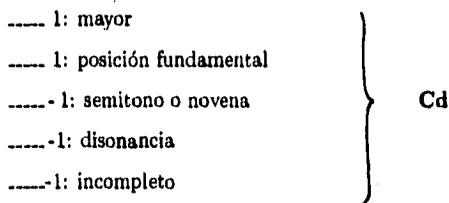
El objeto más sencillo de la armonía es un solo acorde diatónico, y se inicia la aplicación con dichos acordes. En este caso, la complejidad C (el esfuerzo), se considera invariable, y todo se resume en encontrar los elementos de orden O (el tono de sentimiento como positivo, negativo o neutral), ya que en este caso $M = O$. De esta manera, la medida estética del acorde simple, expresada como m para diferenciarla de la M de la sucesión de dos acordes, es: $m = Cd + I + D$, donde

(1) Cd es la suma de cinco componentes: 1 si el acorde es mayor; 1 si está en posición fundamental; -1 si el acorde es disonante (según define la armonía tradicional) y otro -1 si la disonancia es de un semitono o una novena; -1 si el acorde es incompleto o irregular.

(2) I es la suma de tres componentes: 1 si aparece el intervalo de la "tercera esperada" (ya que la tercera de un acorde le da su característica de modo mayor o menor); 1 si aparece el intervalo de la quinta disminuida (una disonancia "agradable", aun en la armonía tradicional).

(3) D es la suma de dos componentes: 1 si una nota de un acorde consonante primario es la nota *dominadora* (la nota dominadora es la nota que está en el bajo, y que se repite por lo menos tanto como las otras notas del acorde) y otro 1 si esta nota es la fundamental del acorde; -2 si se duplica una nota disonante, o la sensible, o la cuarta sobre el bajo.

En seguida se reproduce el diagrama de la medida estética m de un acorde



----- 1: tercera esperada } I
 ----- 1: quinta disminuída }

----- 1: fundamental y bajo } D
 ----- 1: nota de un acorde primario consonante como N.D. }
 -----2: nota disonante, sensible o cuarta sobre el bajo, doblada }

Como se ve, la medida m no puede pasar de 5, y esta medida sólo se presenta en los acordes primarios (tónica, cuarta y quinta) y las séptimas dominantes en posición fundamental, en que domina la base. La peor medida es -4, y se considera un acorde con medida estética 4 o 5 como bueno, con medida 3 como regular, con 2 como pasable y los otros, por lo general, como malos.

2.4

El siguiente paso consiste en aplicar la Medida Estética a la armonía diatónica y, más específicamente, a sucesiones de acordes. Es evidente que una suma de la medida m , que representa la calidad de los acordes individuales, no es suficiente; es posible tener dos acordes altamente satisfactorios, por ejemplo, la dominante y la subdominante, en tanto la transición de la dominante a la subdominante no es de la misma calidad. Se escoge la tonalidad de *do* mayor para trabajar y se procede a acomodar las distintas alternativas desde el enfoque de la Medida Estética. De nuevo se adopta el valor de 1 para el esfuerzo (la complejidad) C , ya que la medida se circunscribe, en esta primera etapa a las sucesiones de sólo dos acordes. Así es que, $M = O$ otra vez, y el tono de sentimiento (orden) O se descompone en los elementos $M = m_1 + t + m_2$, donde m_1 y m_2 son las medidas, ya vistas, de los acordes individuales y t es la medida estética de la transición. El valor de la transición t es, a su vez, una suma que consta de las siguientes componentes:

(1) *La resolución*: $R = 4, -4$; el elemento R es igual a 4 cuando se resuelve un primer acorde disonante en un segundo que es consonante, según las medidas m , ya conocidas, para los acordes individuales. Si no se efectúa esta resolución, la medida es igual a -4.

(2) *La cadencia*: $Cl = 4, -2$; el elemento Cl es igual a 4 si las sucesiones son una de las siguientes:¹ $V, viib \leftrightarrow I, via$ (7 (la séptima dominante) $\leftrightarrow I$ en $vii \leftrightarrow vi a$),

$ii, iii \leftrightarrow vi, IV \leftrightarrow I$. $Cl = -2$ en las sucesiones: $7 \rightarrow I$ sin la cadencia mencionada y $IV a \rightarrow via$.

Cl es igual a cero en cualquier otro caso.

(3) *La sucesión dominante*: $D = 4$. Esta sucesión incluye dos de los siguiente acordes: $ii, iii, viib, V, V^7, V^9, V^{11}, V^{13}$, con la excepción de $vii \leftrightarrow ii, iii, V$ así como $ii \leftrightarrow iii a$ y $V^7 \rightarrow V$.

En los casos que no se excluyen, D es igual a 4 si se cumplen los siguientes requisitos: en las sucesiones $ii \rightarrow viib, V$ y $iii \rightarrow viib, V$, la submediante en ii y la mediante en tres se mueven por pasos; en $iii a \rightarrow V$ la mediante debe estar en la parte superior de iii .

D se considera igual a cero en todos los demás casos.

(4) *Los elementos SF y RF*: $SF = 4, RF = 4$. SF significa, en el caso de primeras inversiones sucesivas, que la base sube o baja uno o dos pasos; RF se presenta cuando el primer acorde en posición básica es seguido por una primera inversión en que la base baja un paso.

(5) *La progresión*: $P = 2, 0, -2$. P es igual a dos si se pueden mantener dos notas del primer acorde como notas consonantes del segundo acorde. P es igual a dos, también, cuando ninguna nota del primer acorde se puede mantener, pero cada nota del primero va a la nota más cercana del segundo. P es cero si sólo se puede mantener una nota del primer acorde, o en los casos de una resolución o una sucesión dominante. En los otros casos la progresión tiene un valor de -2 .

En seguida viene una serie de elementos negativos, cuya presencia provoca un tono de sentimiento desagradable (siempre en función de la armonía tradicional) :

(6) *El elemento negativo*: $FR = -4$, el cual se define como una sucesión que consiste en una primera inversión, sucedida por un acorde en posición básica, cuya base baja un paso.

(7) *El elemento negativo de la mediante*: $Mt = -2, -4$. Mt es igual a -2 si iii está presente, pero la sucesión no es: $iii a \rightarrow Ia$; si iii está presente y el bajo salta una sexta o una tercera, Mt

¹La notación empleada es el estándar en la música; I, IV y V son la tónica, la subdominante y la dominante respectivamente, ii, iii y vi son los acordes menores correspondientes a las notas que forman los intervalos de segunda, tercera y sexta mayor, respectivamente, y vii es el acorde disminuido correspondiente a la sensible (recordamos que se circunscribe al modo mayor y, específicamente, a do mayor). En cuanto a las letras a y b , hay una confusión, ya que se especifica en una parte que la letra a corresponde a la posición fundamental del acorde y la letra b significa la primera inversión (véase Birk., I, p. 294, 2, p. 180), pero después se emplea el acorde sin letra para la posición fundamental; en este caso, la letra a podría ser la primera inversión y la letra b podría ser la segunda inversión. A veces no queda claro si la letra a significa posición fundamental o primera inversión, o si la letra b es la primera inversión o la segunda. Esto presentaría un problema de dimensión distinta en una tesis de Música, pero en nuestro trabajo, de orientación matemática, no tendría sentido detenernos en esta ambigüedad.

es igual a -4.

(8) *El elemento negativo de la sensible: LN = -2,-4.* Si la sensible salta más de una tercera, o se convierte en el bajo, se tiene que LN = -2; si la sensible está en los dos acordes, y no es una sucesión dominante, LN = 4.

(9) *El elemento negativo de las notas estacionarias: SN = -2, -4.* En este caso, SN = 2 si una parte extrema, o dos partes (aunque no sean extremas) se mantienen; si tres o más notas se conservan estacionarias, tenemos que SN = -4.

(10) *El elemento negativo del salto disonante: DL = -2.* Aquí, cualquier salto disonante, aun la quinta disminuída y la séptima menor, se considera negativo.

(11) *El elemento negativo del movimiento paralelo (similar): SM = -2,* se presenta cuando todas las notas se mueven hacía arriba o hacía abajo.

(12) *El elemento negativo del salto del bajo: BL = -4.* Esto se presenta cuando la sucesión contiene una segunda inversión, la cual se alcanza (o se deja) por saltos, pero no desde la posición fundamental del primer acorde.

Después de definir esta clasificación, se decidió comparar los resultados con un manual clásico, llamado *Counterpoint: Strict and Free* (Contrapunto: Estricto y Libre) de Prout, ya que lo que arroja la medida estética debería coincidir con los juicios empíricos acerca de sucesiones "buenas", "posibles" y "malas", basados en la observación y la experiencia. En la página que sigue se reproduce la tabla comparativa de la medida estética *M* de Birkhoff, y la clasificación empírica de Prout.

Los números indican los acordes (1= tónica, 4 = subdominante, etc.); el tipo redondo es para la posición básica y el tipo cursivo es para la primera inversión (Prout no clasificó la segunda inversión). Por ejemplo, 15 significa I→Va. Cuando no coincide la clasificación de Prout con la medida estética *M*, se ponen las letras b = buena, m = mala y p = posible como exponentes.

MEDIDA ESTETICA M Y CLASIFICACION DE PROUT DE LAS
SUCESIONES DE ACORDES

Clasificación de PROUT	Malos					Posibles (*)					Buenas									
M =	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	32	73	54	43	13	23	21m	13°	13°	18°	12	12	14	15	14	15	14	17	17	
73							23	21	31m	16°	12°	13°	16	16	15	25	14	65	17	
							31	34	36°	24°	16°	27°	24	21	32	27	15		51	
							34	32	46°	25°	23°	20°	24	25	41	41	51			
							35	37	61°	31°	24°	36°	26	21	45	53	54			
							43	52	64°	34°	26°	32°	23	24	41		50			
							63		61°	35°	36°	34°	37	25	45		57			
							65		63m	42°	35°	31°	42	43°	52		51			
									72°	53°	36°	46°	47	42	53		65			
									74°	63°	33°	43°	45	46	54		71			
									75°		45°	56°	41°	52	57					
									75°		46°	62°	51	50	71					
											42°	61°	62	56						
											47°	64°	64	62						
											54°	72°	67	64						
											52°			65						
											53°			76						
											63°									
											61°									
											67°									
											63°									
											76°									
											74°									

Birkhoff [2], p. 132.

2.5

El último caso que se considera, en esta aplicación de la Medida Estética, es la melodía. Se deja abierto el problema de la música como una estructura dependiente de armonía, melodía y ritmo (considerado éste como una clase especial de melodía) en que $M = \frac{O}{C}$, y C sería el número de notas que entrarán como elementos melódicos, en tanto O sería la suma de los elementos de orden, de tipo armónico, melódico y rítmico, con sus pesos específicos. Se circunscribe, una vez más, para la melodía, a un problema simplificado, que se plantea así: "Dada una melodía sencilla, en compás de cuatro tiempos, de 8, 16, 32, 64 o 128 notas,... determinar una medida adecuada de la complejidad C y de los elementos de orden O , tal que la razón $M = \frac{O}{C}$ suministre una adecuada Medida Estética de la melodía" [Birk., 2, p.187]. Se decidió que la medida del esfuerzo C sería el número de notas de la melodía (una nota prolongada se cuenta una sola vez); de este modo, el problema fundamental estribaría de nuevo en definir y pesar los elementos de orden O . Se resolvió por medio de una lista de 15 elementos, cada uno con sus criterios numéricos. El lector que tenga interés en conocer estos detalles, más su aplicación al canto coral de la IX Sinfonía de Beethoven, puede consultar la obra de Birkhoff [2, p.186-205], quien concluye que " (1) Para buenas melodías la Medida Estética M es siempre alta y, en general por lo menos 3; (2) no es posible encontrar sucesiones puramente mecánicas de notas para las cuales M alcance a 2; (3) no pueden inventarse sucesiones de clasificación francamente alta, desprovistas de cualidad melódica. En otras palabras, la teoría parece ser ampliamente satisfactoria en toda su extensión" [Birk., 2, p.200].

Antes de concluir este capítulo, vale la pena reflexionar sobre la aparente sencillez de la fórmula $M = \frac{O}{C}$. En el medio de los matemáticos el nombre de George D. Birkhoff detona una serie de asociaciones: Algebra Moderna, Topología, Relatividad, etc. ¿Por qué este maestro de nuestro siglo por terminar consagró varios años de su vida al problema de la Medida Estética? y ¿por qué la complejidad de su fórmula no rebasa un nivel elemental? Tal vez la respuesta estriba en el hecho de que la genialidad no siempre es sinónimo del empleo de lo más complejo, sino que consta de tener el buen gusto para distinguir y saber exactamente lo que se requiere para poder atacar el problema planteado. Podría también surgir la pregunta ¿cómo no se pensó en este modelo antes? No obstante, era necesaria la combinación de matemático y hombre preocupado por toda manifestación humana, él mismo en una cierta etapa de madurez, para darle la forma

sencilla pero elocuente y efectiva que tomó la Medida Estética.

Capítulo 3

Los Números de Fibonacci, la Proporción Aurea y la Obra de Bela Bartok

En este capítulo se pretende estudiar la aplicación de un concepto matemático, la *proporción áurea* (y la *serie de Fibonacci*) en la obra de uno de los compositores más renombrados de este siglo, Bela Bartok. En efecto, su método de composición se basó en la proporción áurea, la cual repasaremos en la primera sección para después ver cómo fue aplicada por este compositor en sus modelos armónicos, rítmicos y estructurales en general.

3.1

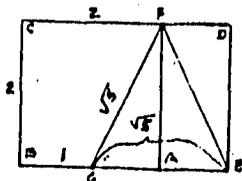
La proporción áurea es la media geométrica del segmento unitario (AB):



El segmento está dividido de tal forma que $\frac{1}{C_1B} = \frac{C_1B}{1-C_1B}$ (tenemos que $1 - C_1B = AC_1$). Sea $x = C_1B$; de esta manera $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$ y $x^2 = 1 - x$ si, y sólo si, $x^2 + x - 1 = 0$, cuyas raíces son $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

El cociente, cuando se toma la raíz positiva, es aproximadamente igual a 0.618... (es un número irracional), y representa la proporción áurea. Si se toma el valor absoluto de la raíz negativa, el cociente es igual a 1.618... que nos da el punto C_2 (que cae fuera del segmento)

y se forma otra proporción áurea. Este número 1.618... conocido como phi (ϕ) también puede ilustrarse por medio del rectángulo áureo. Cabe mencionar aquí que se conocía la proporción áurea en las etapas avanzadas de la civilización egipcia (se usó en la construcción de la gran pirámide de Keops), aunque los griegos atribuyan su descubrimiento a Pitágoras y Euclides fue el primero en dividir la recta en las razones que vimos[St., p.23]. En su libro *De Divina Proportione* (1509), el matemático Luca Pacioli (amigo de Leonardo da Vinci, quien usó la proporción áurea en su obra pictórica) destacó la importancia de esta relación y desde finales del siglo pasado hubo un interés en explorarla. En la obra *Vorschule der Ästhetik* que data de 1876, el pionero de la psicofísica Gustav Fechner realizó experimentos por medio de encuestas con poblaciones seleccionadas para determinar la forma rectangular que más satisfacía estéticamente. Los "mejores" rectángulos, después de mucha observación, eran sin duda los cuadrados y los rectángulos áureos, así como los que se aproximaban a éstos. El rectángulo áureo es de la forma siguiente:



Aquí la proporción se presenta entre el largo y el ancho del rectángulo, así como entre los lados del cuadrado y la diagonal del subrectángulo, un proceso que continúa por medio de subdivisiones. En este diagrama: $\frac{CF+FD}{CB} = \frac{BA+AE}{DE} = \frac{BG+FG}{CB} = \frac{BG+FE}{FA}$, etc....

En 1202, en plena "edad media" europea, se escribió una obra, *Liber Abacci* (El Libro del Abaco), cuyo autor fue el matemático Leonardo de Pisa, mejor conocido por su apodo *Fibonacci*. Esta obra contenía casi todo el conocimiento algebraico y de la aritmética de su tiempo, y jugó un papel importante en el desarrollo de la matemática en Europa Occidental en los siglos subsiguientes[Vor., p.1]. En este libro se planteó el famoso problema de los pares de conejos, o sea, ¿cuántos pares de conejos nacen de un par, en un año? Enunciamos el problema de la siguiente forma: se encierra una par de conejos para ver cuántos pares de conejos nacerán en el transcurso de un año. Cada mes un par de conejos produce otro par (hembra y macho, situación obviamente idealizada), y dicho par comienza a reproducirse dos meses después de su propio nacimiento.

El primer par se reproduce el primer mes; así es que, en ese mes habrá dos pares. El siguiente mes nuevamente el primer par se reproduce y, de esta forma, en el segundo mes habrá 3 pares. De estos 3 pares, 2 se reproducen en el tercer mes, dando lugar a 5 pares. El cuarto mes, 3 pares se reproducen para sumar 8 pares y, en el quinto mes se reproducen el par original, el par nacido el primer mes, el par nacido el segundo mes y los dos pares nacidos el tercer mes; es decir 5 pares se reproducen, para alcanzar 13 pares. De estos 13 pares, los 5 pares nacidos el quinto mes no se reproducirán el sexto mes pero los otros ocho sí lo harán para sumar 21 pares, de los cuales 13 se reproducirán el séptimo mes para sumar 34 pares. De esta manera, se deriva la serie siguiente:

$u_1 = 1, u_2 = 1, u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \quad n \geq 2, u_0 = 0$, o sea: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ..., conocida como la serie de Fibonacci. La relación entre los números de Fibonacci y la proporción áurea es muy cercana. A continuación demostraremos por inducción matemática que cuando $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \phi = 1.618\dots$, para $n \geq 10$.

(1) Para $n = 10$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{11}}{u_{10}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{89}{55} = 1.618\dots$

(2) Supongamos, como hipótesis de inducción, que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.618\dots$

Queda por demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = 1.618\dots$

Pero $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1} + u_n}{u_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_{n+1}} + \frac{u_n}{u_{n+1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{u_n}{u_{n+1}} \right)$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + .618\dots = 1.618\dots = \phi$

ya que $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ es el recíproco de 1.618... ■

Los números de Fibonacci poseen muchas propiedades interesantes (véase [Vor]) pero, para la finalidad de nuestra exposición, no necesitaremos profundizar más sobre el tema.

3.2

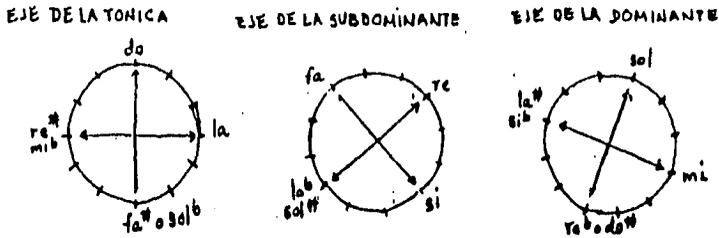
El principio de la proporción áurea ha sido empleado en varias de las Bellas Artes; por ejemplo, en la Arquitectura era conocida y empleada desde la época de los egipcios y también

fue utilizada en las grandes construcciones griegas para resurgir después de un largo paréntesis, desempeñando un papel de suprema importancia en la Arquitectura del Renacimiento. Fue en esa misma época que cobró fama entre los pintores y, aparte del ya mencionado Leonardo da Vinci, Miguel Angel pintó su *Sagrada Familia* dentro de la proporción áurea, así como lo hizo Botticelli en su *Magnificat* y en nuestra época la presenciamos en el *Corpus Hiperubus* de Salvador Dalí. Sin embargo, con la excepción de un movimiento de un cuarteto de cuerdas de Haydn, no había existido antecedentes concretos de la proporción áurea en la música hasta que Bela Bartok (1881-1945), compositor húngaro de nuestro siglo, desarrolló un método de composición que integraba escalas, estructuras armónicas, motivos melódicos, así como relaciones de duración entre movimientos o dentro de un solo movimiento (exposición, desarrollo, recapitulación), según un principio básico: la proporción áurea y los números de Fibonacci.

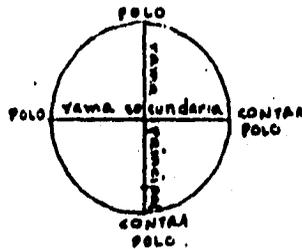
“Seguimos los pasos de la naturaleza en la composición” escribió Bartok. . . El aumentaba constantemente su colección de plantas e insectos. . . Llamaba al girasol su planta favorita y se ponía feliz cuando encontraba piñas sobre su escritorio” [Len., p.29]. Esta cita nos hace entender que Bartok estaba consciente de que la proporción áurea se encuentra de una forma sorprendente en la naturaleza orgánica (no se encuentra en la naturaleza inorgánica, donde sí presenciamos la manifestación de una estructura matemática: los grupos, que a menudo se ejemplifican por medio de la simetría de los cristales. El hecho de que los números de la proporción áurea, .618. . . , 1.618. . . , sean irracionales es lo que hace que no aparezcan en estas estructuras inorgánicas, totalmente simétricas). El botánico Franci definió la proporción áurea como “un invariante algebraico asociado a las funciones de la vida” [St., p.3]. El arreglo de las florecillas romboidales del girasol se presenta en espirales contralogarítmicas de 34 y 55, 89 y 144 (números de Fibonacci). Los botones de una rama y los pétalos de una flor se arreglan de tal manera que un botón se encuentre directamente arriba de otro sólo después de que uno de ellos pase por 3, 5 u 8 de los otros en su espiral sobre la rama. El caracol (ejemplo al cual vamos a regresar para analizar la estructura de la *Sonata para Dos Pianos y Percusiones* de Bartok) y la piña, fruto del pino, presentan ejemplos claros de la proporción áurea en sus espirales y el mismo ser humano la encuentra en su cuerpo: cuando un hombre se para en posición erecta, la distancia del suelo a su ombligo, multiplicada por 1.618, da su estatura completa (también se halla la relación en las falanges de los dedos, en los huesos de la mano, en el cerebro y en la

saugre).

Para poder comprender el uso de la proporción áurea en la música de Bartok veamos de modo muy somero el *Sistema de los Ejes*, el cual forma el cuerpo de los principios tonales de este compositor ya que, cuando se hace referencia a la tónica, subdominante y dominante, no se está en el contexto de la armonía tradicional.



En el sistema musical de Bartok, *todos* los acordes del eje de la tónica (do, mi[♯] = re[♯], fa[♯] = sol[♯] y la) poseen, precisamente, la función de tónica en tanto *todos* los acordes del eje de la subdominante y el eje de la dominante también cumplen con las funciones de subdominante y dominante, respectivamente. No importa que el acorde sea mayor o menor, ya que esta relación (mayor-menor) se suple por la relación entre las *cuatro alternativas de cada eje*. Asimismo, los *contrapolos* del eje (la relación señalada por las flechas) encarnan un principio importante de la música de Bartok, puesto que un polo siempre es intercambiable con su contrapolo, sin que se implique ningún cambio de relación.



La relaciones de "tonalidad" se entienden así:



Es decir, donde en la armonía tradicional tenemos una tónica en un modo determinado (por ejemplo, *do* mayor) con su subdominante (*fa* mayor) y su dominante (*sol* mayor), en el sistema de Bartok las mismas relaciones son dadas por los ejes tónico, subdominante y dominante. Cabe mencionar que cada eje incluye tanto la relativa (según la armonía tradicional) de cualquiera de sus miembros, como la relativa superior propia de la armonía romántica.

Con esta pequeña explicación, que simplifica y excluye muchos detalles musicales, se puede concluir que el sistema de los ejes de Bartok refleja la "vieja lucha entre los principios de 'tonalidad' y 'equidistancia' con la ascendencia gradual del último, lo cual desembocó, finalmente, en el tratamiento igual y libre de las doce notas cromáticas.... Aquí trazamos una línea entre el sistema de doce sonidos (de Bartok) y el *Zwölftonmusik* de Schönberg. Schönberg aniquila y disuelve la tonalidad mientras que Bartok incorpora los principios del pensamiento armónico en una perfecta síntesis" [Len., p.16]. Claro está, ¡el autor de esta cita tenía sus preferencias bien definidas! pero de todas maneras el hecho objetivo, es decir el sistema de los ejes, se entiende en el desarrollo histórico de la armonía y el sistema concreto y muy particular de Bartok (ya que él no formó "escuela" como sí la formó Schönberg).

3.3

Primeramente vamos a estudiar cómo empleó Bartok la proporción áurea en lo que toca a la *duración* de los elementos de una composición (tema principal, segundo tema, recapitulación, etc.) para después entrar en sus *estructuras armónicas, motivos melódicos y escalas*. En la siguiente página se reproducen los 16 compases introductorios de la *Sonata para Dos Pianos y Percusiones* puesto que, según Lendvai, ésta representa un ejemplo modelo de la construcción de acuerdo con la proporción áurea. Si se consideran los cambios de tiempo que se presentan (de 9/8 a 6/8), es más adecuado calcular en términos de 3/8, en vez de los 9/8 indicados inicialmente. Así es que, el formato completo consta de 46 unidades, y su proporción áurea es: $46 \times .618 \approx 28$. Es precisamente en este punto que comienza la inversión del tema. Si analizamos la parte que está en la posición inicial, o sea, los primeros 28 compases (unidades), vemos que la tónica (según el sistema de los ejes) termina en el primer tercio de la unidad 18, lo cual nos refleja: $28 \times .618 = 17.3$.

A continuación presentamos un esquema:

POSICION FUNDAMENTAL

Musical notation for the first system of 'POSICION FUNDAMENTAL'. It features a single staff with a melodic line and a rhythmic line below it. The melodic line starts with a *pp* dynamic and includes a *tr* (trill) marking. The rhythmic line consists of vertical stems with flags, indicating a specific rhythmic pattern.

Musical notation for the second system of 'POSICION FUNDAMENTAL'. It consists of two staves. The upper staff continues the melodic line with a *pp* dynamic. The lower staff is labeled 'Cimbaloch.' and contains a complex rhythmic pattern with many vertical stems.

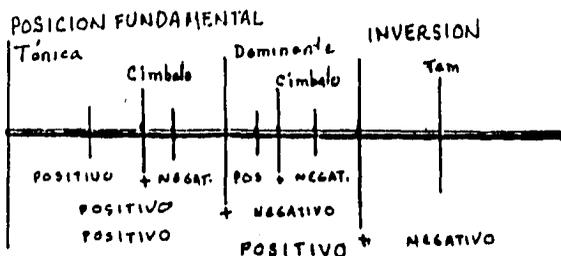
Musical notation for the third system of 'POSICION FUNDAMENTAL'. It consists of two staves. The upper staff is labeled 'DOMINANTE' and 'pp'. The lower staff is labeled 'TAMBOUR' and contains a rhythmic pattern with vertical stems.

Musical notation for the fourth system of 'POSICION FUNDAMENTAL'. It consists of two staves. The upper staff is labeled 'Cimbal' and contains a complex rhythmic pattern with many vertical stems. The lower staff is labeled 'TAMBOUR' and contains a rhythmic pattern with vertical stems.

INVERSION

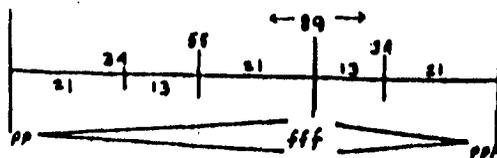
Musical notation for the first system of 'INVERSION'. It consists of two staves. The upper staff is labeled 'pp' and contains a melodic line with a *tr* marking. The lower staff is labeled 'tam-tam' and contains a rhythmic pattern with vertical stems.

Musical notation for the second system of 'INVERSION'. It consists of two staves. The upper staff is labeled 'CRESC.' and contains a melodic line. The lower staff is labeled 'tam-tam' and contains a rhythmic pattern with vertical stems.



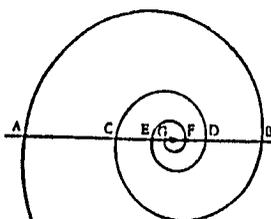
Primeramente, hay que distinguir entre las dos posibles divisiones según la proporción áurea: éstas están en función de cuál sección es primera, la más larga o la más corta. Si la sección larga es seguida por la corta, se denomina positiva; si la corta precede a la larga se le llama negativa. Por otro lado, vemos que los golpes del címbalo se determinan también de acuerdo con la proporción áurea.

Si se analizan las proporciones de la fuga del primer movimiento de *Música para Cuerdas, Percusiones y Celesta* se verá que ésta inicia pianísimo, se transforma gradualmente en fortísimamente y vuelve a pianísimo. Los 89 compases del movimiento se dividen en secciones de 55 y 34 compases, por el *fff*:



Las subdivisiones representan otras instrucciones de color y dinamismo.

El hecho interesante en relación a estos dos esquemas es su similitud con las espirales del caracol *Nautulus* (inspiración de Julio Verne para su famosa novela *Veinte Mil Leguas de Viaje Submarino!*).



La concha de este molusco sigue un patrón en que el centro siempre permanece en proporción áurea, positiva o negativa, con A-B, B-C, C-D, D-E, E-F, F-G.

3.4

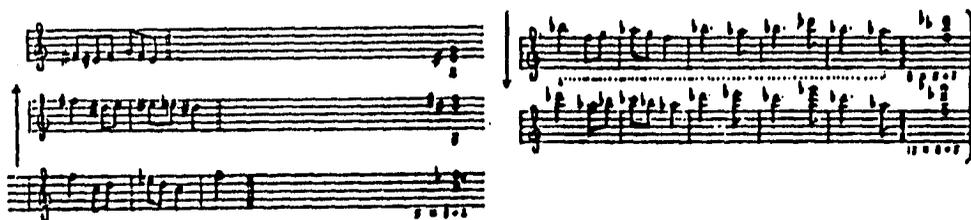
La proporción áurea se encuentra asimismo en los acordes e intervalos de la música de Bartok: es más, todo su sistema cromático se basa en esta relación y en la serie de Fibonacci. Aquí vamos a introducir una notación que se empleará en todo lo que resta del presente trabajo y cobrará especial relevancia en el capítulo que sigue:

0 = unísono, 1 = segunda menor, 2 = segunda mayor, 3 = tercera menor, 4 = tercera mayor, 5 = cuarta justa, 6 = cuarta aumentada (quinta disminuida), 7 = quinta justa, 8 = sexta menor, 9 = sexta mayor, 10 = séptima menor, 11 = séptima mayor, 12 = octava, 13 = octava +segunda menor, etc. Es decir n = número de semitonos que abarca un intervalo.

Queda claro que el número puede representar el intervalo o, en el contexto apropiado, puede usarse para designar la nota correspondiente, siempre y cuando se defina la nota de partida (0).

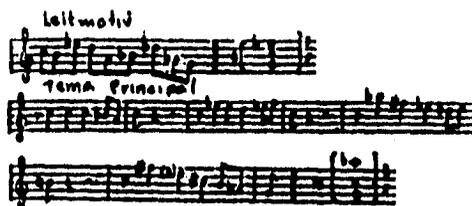
Bartok construyó su música con el empleo de células de 2, 3, 5, 8 y 13 (números de Fibonacci), y con subdivisiones estrictamente limitadas a las proporciones de estos números. Así es que, el intervalo de 8 (sexta menor) sólo puede subdividirse en 5 + 3 (cuarta y tercera menor); cualquier otra subdivisión, por ejemplo, 4 + 4 ó 7 + 1, es prohibida en su esquema armónico.

A continuación se presenta un agrupamiento del *Divertimiento* que ilustra la división de la construcción melódica por células.



En el finale de este *Divertimiento* el tema principal aparece con cinco variaciones. En lo que se reprodujo, las variaciones están agrupadas de acuerdo con tamaño: la forma inicial del tema es 3-2 = 5 y, en el último agrupamiento (que es una continuación del que le precede) la melodía sube por una cuarta justa (5) en el cuarto compás, en vez de una tercera menor (3) (como en el penúltimo renglón, donde se encierra con un círculo), siguiendo así un aumento de la serie de Fibonacci.

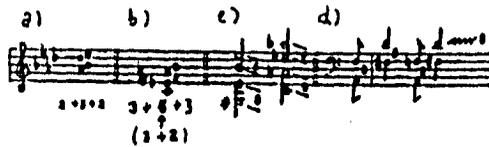
En seguida se presentan los temas sucesivos del primer movimiento de la *Sonata para Dos Pianos y Percusiones*:





El rango del leitmotiv es de 8 semitonos, y se divide (por medio de la nota fundamental *do*) en $5 + 3$ semitonos. El tema principal abarca 13 semitonos y se divide, a su vez (por *do*) en $5 - 8$ semitonos. La primera frase del tema secundario se extiende 13 semitonos (de *sol* hacia abajo hasta *fa*²) en tanto la segunda frase abarca 21 semitonos (de *si* hacia abajo hasta *re*). El esquema es: leitmotiv: $3 + 5 = 8$, tema principal: $5 - 8 = 13$, tema secundario: 13, 21.

La construcción armónica sigue, también, los preceptos de la proporción áurea y la serie de Fibonacci. La *Sonata para Dos Pianos y Percusiones* nos sirve para ilustrar dicha construcción:



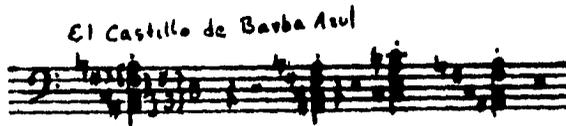
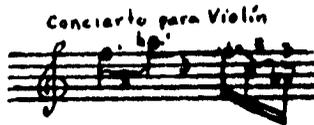
El tema principal (véanse los temas sucesivos de la figura anterior) recibe su color específico de la armonía pentatónica (un aspecto muy importante en la música de Bartok y al cual regresaremos), cuya fórmula es $2 + 3 + 2$ (a). En medio del tema principal hay una construcción $3 - 5 + 3$ (b); en el tema secundario se unen cuartas y sextas menores paralelas (c) y el tema final está acompañado por sextas menores paralelas (d). De esta manera tenemos: tema principal: $2 + 3 + 2$, parte media: $3 + 5 + 3$, tema secundario: $5 + 8$, tema final: 8.

En la música de Bartok hay abundancia de paralelas, con la excepción de las terceras y sextas mayores; se puede hablar de una "prohibición" de estas paralelas (por el hecho de que no se componen de números de Fibonacci) análoga a la "prohibición" de quintas y octavas paralelas

en la armonía tradicional, ya que no caben en el sistema numérico de la serie de Fibonacci y la proporción áurea. Otro rasgo típico de la estructura armónica en la música de Bartok es la colocación de la tercera menor sobre la nota fundamental y la tercera mayor debajo de ella (la segunda inversión de un acorde menor): así es que, el acorde tiene una proporción de 8:5:3. A éste se le agrega la tercera mayor (con relación a la nota fundamental) como bajo.



De este modo surgió uno de los acordes más típicos en la música de Bartok, el *mayor-menor*, que consiste en una tercera menor- cuarta justa- tercera menor (3 + 5 - 3), que a veces se completa con la séptima de la fundamental (*mi- sol- do- mi* con *si* como séptima de *do*). A continuación se presentan algunos ejemplos de distintas obras:



Para Lendvai, la proporción áurea en la obra de Bartok no es "una restricción externa sino una de las leyes más intrínsecas de la música, demostrada por la *pentatonía* (tal vez el sistema

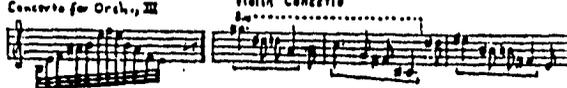
humano de sonidos más antiguo) que puede ser considerado como una expresión musical del principio de la proporción áurea. La pentatonía, particularmente las formas más antiguas de pentatonía menor (*la* y *re*), descansa sobre un patrón reflejado por los pasos melódicos de la segunda mayor (2), la tercera menor (3) y la cuarta (5)" (Len., p. 48). Un ejemplo de la pentatonía es la *Suite Dancística*, conocida como la *Sinfonía de Europa del Este*. El primer movimiento se construye con segundas mayores (2), el segundo con terceras menores (3), el tercer movimiento reúne los dos previos (2 + 3 + 2 - 3 + 2), en tanto sus armonías se basan en 5 + 5 y, finalmente, la melodía del cuarto movimiento sigue el patrón $8 = 5 + 3$, con $5 = 3 + 2$.



Hay un grupo recurrente de acordes en la música de Bartok, que representan intervalos de 1:5, 1:3 y 1:2, es decir, una segunda menor seguida por una cuarta justa (1:3), una segunda menor seguida por una tercera menor (1:3) y una segunda menor seguida por una segunda mayor (1:2). Es evidente que la relación de la proporción áurea está presente como 5:3:2. El modelo 1:5 consiste, precisamente, en alternar segundas menores y cuartas justas, por ejemplo: *do-do²-fa²-sol-do*: en el 1:3 se alternan las segundas menores y las terceras menores: *do-do²-mi-fa-sol²-la-do* y, finalmente, en el modelo 1:2 se alternan segundas menores y mayores: *do-do²-mi²-mi-fa²-sol-la-si²-do*. Estos sistemas son cerrados; se presentan algunos ejemplos a continuación:

MODELO 1:5

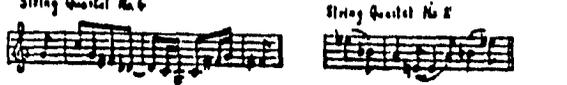
Concerto for Orch., III Violin Concerto



Divertimento, I "Frustration", No. 2
to Easy Pieces, PFA. Suite, Op. 14



String Quartet No. 6 String Quartet No. 2



MODELO 1:3

Concerto for Orch., III II Berceuse No. 1



Scherzo, Op. 2 (Pft./Orch.)



Pft. Concerto No. 2



MODELO 1:2

String Quartet No. 6 String Quartet No. 6



Mikrokosmos No. 140 No. 146 & 147



Mikrokosmos No. 140



El modelo 1:2 reviste una gran importancia, ya que también forma la escala básica del sistema cromático de Bartok: si se entiende este hecho, se puede definir una tonalidad, aun en las melodías y acordes cromáticos más enigmáticos. Así es que, la escala (si comenzamos en *do*) es:



Dentro del rango de la escala de doce tonos, y dentro del sistema de los ejes, se pueden construir tres modelos de 1:2:

una tónica: *do- do²- mi²- mi- fa²- sol- la- si²*

una dominante: *do²- re- mi- fa- sol- la²- si- y*

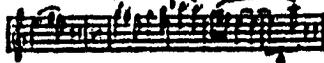
una subdominante: *re- mi²- fa- fa²- la² - la- si- do.*

Como ejemplo, pondremos el *Notturmo* del *Mikrokosmos*:

I LINEA



II LINEA



IV LINEA



3.5

Bartok, aparte de desarrollar todo un sistema cromático basado en la proporción áurea, al cual nos asomamos sólo superficialmente debido a la naturaleza del presente trabajo, también construyó un sistema diatónico. La escala acústica (escala de los armónicos) es característica de la diatonía de Bartok; esta escala corresponde a la serie natural de los armónicos (véase Capítulo I): *do- re- mi- fa²- sol- la- si²- do*.

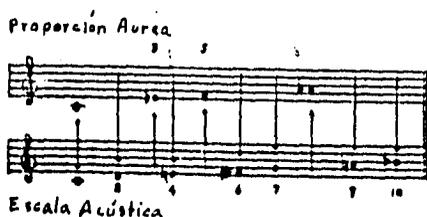


Si se comparan los temas principales del primer movimiento (cromático) y el tercer movimiento (diatónico) de la *Sonata para Dos Pianos y Percusiones* se puede ilustrar otro aspecto de toda esta estructura armónica y melódica según la línea de la proporción áurea.

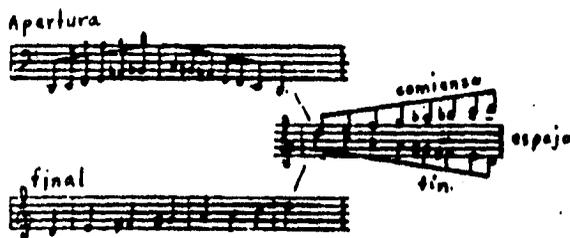


El tema cromático se compone de números de Fibonacci, ya que la melodía consiste en tercetas menores (3), cuartas justas (3) y sextas menores (8). El tema diatónico es una escala

acústica. Lo interesante aquí es que estos dos sistemas se complementan, puesto que una escala cromática puede dividirse en una escala acústica, más una serie de Fibonacci.



De modo semejante, los dos sistemas no sólo se complementan sino que también se reflejan en una relación inversa, ya que si se invierten los intervalos de la proporción áurea se obtienen los intervalos acústicos. Por ejemplo, de la inversión de una segunda mayor (2) se obtiene la séptima menor: de una tercera menor (3) una sexta mayor: de una cuarta justa (5) una quinta: finalmente, de una sexta menor (8) se obtiene una tercera mayor y, de esta manera, se forman algunos de los intervalos característicos de la escala acústica. Este fenómeno se ilustra en la apertura y el finale de la *Cantata Profana*, en que las dos escalas, una de proporción áurea y la otra acústica, se reflejan nota por nota:



Los dos sistemas también pueden compararse en función de sus relaciones numéricas. Ya sabemos desde el Capítulo I que los números del sistema de armónicos (en este caso, el sistema diatónico de Bartok y su escala acústica) se basa en la relación entre enteros. En cambio, el número clave de la proporción áurea (base del sistema cromático en la música de Bartok) es irracional: $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} = .6180340 \dots$

Así podemos señalar que el sistema acústico implica proporciones aritméticas (de números enteros) mientras que el sistema de la proporción áurea se basa en proporciones geométricas, por consistir en números irracionales, sólo expresables con exactitud de esta manera. La proporción (3:5:8) según la serie de Fibonacci no deja de ser una aproximación, expresable realmente en números irracionales (por ejemplo, 5: 8,09061). Por este motivo, la tercera menor en la pentatonía es más grande que en el sistema de igual temperamento (aunque el hecho de las discrepancias en cuanto a la medición exacta de los intervalos en distintos sistemas de afinación, ya nos es familiar).

Erno Lendvai, a quien debemos el rescate y sistematización del *Estilo de Bartok* (como se llama su libro completo, publicado en húngaro en 1953), vierte un análisis interesante, aunque no deja de mostrar su gran inclinación por Bartok, la cual da pie a interpretaciones que aun pretendiendo ser científicas, pueden ser algo subjetivas. Según este autor, la dualidad entre el sistema cromático (pentatonía y la proporción áurea) y el sistema diatónico (basado en los armónicos) "expresa los dos empeños más antiguos de la música. El aparato fisiológico de nuestro oído (con la estructura logarítmica de la cóclea) nos permite percibir con más rapidez las relaciones *sol-la- sol- mi* (2:3:5) en una etapa temprana, de lo cual tanto las canciones infantiles como la música folclórica primitiva arrojan pruebas inequívocas. En culturas musicales primitivas el sentido de una tonalidad mayor y las atracciones funcionales son casi desconocidos. El desarrollo del pensamiento armónico surge de ... la serie armónica... que sólo puede manifestarse por medio de la música instrumental. ¿Sería demasiado atrevido suponer que las raíces del pensamiento pentatónico y acústico fueran los dos puntos de partida de toda la música?... El primero se justifica por la audición "interior", basada en la estructura fisiológica del oído; el segundo por la audición "exterior", controlada por las leyes físicas de la consonancia" [Len., p.88,87]. De acuerdo con esta idea, la presencia de la proporción áurea en la naturaleza orgánica se encaja con el hecho de que la pentatonía es la forma "natural" de la música, la cual se ha presentado en casi todas las culturas en una etapa¹ en tanto la armonía acústica se desarrolla a raíz de fenómenos netamente físicos, como una columna de aire que

¹Cabe mencionar que Bartok y Kodaly eran, aparte de compositores, musicólogos especializados en el folclore. Bartok dijo que "sería posible reducir toda la música folclórica sobre la faz de la tierra a, esencialmente, unas cuantas formas 'padres', arquetipos y estilos antiguos". Según Kodaly, la tercera menor descendente, *sol-mi*, en vez de *do-re-mi*, es lo que el niño percibe primero como una relación musical, representando de esta manera la expresión musical más temprana de un ser humano.

vibra en un tubo o una cuerda vibrante.

Independientemente de que se considere la música de Bartok como algo natural e inevitable, o como un método de composición rígido y reglamentado, hasta forzado (o de un modo que media entre estos dos extremos), es de sumo interés analizar cómo el fenómeno matemático de la proporción áurea y los números de Fibonacci, presente en la naturaleza y en otras manifestaciones artísticas del hombre, llegaron a formar parte de un sistema musical completo.

Capítulo 4

Teoría de Grupos, Conjuntos y la Música

En este capítulo se estudiarán artículos escritos en las décadas de los setenta y ochenta, en los cuales se intenta aplicar conceptos formales y precisos de las Matemáticas y más específicamente, de la Teoría de Grupos y de Conjuntos, al Análisis Musical. Dichos artículos son trabajos representativos de Gerald Balzano, David Lewin y Eric Regener, entre otros; asimismo, se comentará un libro publicado en México en 1984, titulado *Música y Teoría de Grupos Finitos (3 variables booleanas)*, del compositor Julio Estrada y el ingeniero Jorge Gil.

4.1

Iniciaremos con el artículo de Gerald Balzano, *The Group-Theoretic Description of 12-Fold and Microtonal Pitch Systems* (El Enfoque Teórico de Grupos en la Descripción de los Sistemas de Altura¹ de 12 Notas y Microtonales) que data de 1980. Este autor plantea que los instrumentos musicales de la orquesta y sus técnicas de ejecución se restringen, de manera fundamental, a la división de la octava en 12 partes, es decir, el sistema resultante de todo un

¹El término *pitch* en inglés se traducirá como altura y así *pitch class* será *clase de altura* (se refiere a clases de equivalencia para cada nota, dado que no se diferencia entre los registros de las octavas) y *pitch system* será *sistema de altura*. Las clases de altura abarcan las 12 notas de la escala cromática (o los números de 0 a 11 que las representan) sin importar, como ya se mencionó, un registro en particular. Finalmente, se usarán los términos *clase de altura* y *nota* como sinónimos, especialmente cuando se habla de *conjuntos de clases de altura* o *conjuntos de notas*.

desarrollo y refinamiento que comenzó en Grecia con Pitágoras, como ya se vio en el Capítulo I. El descubrimiento de este sistema partió de la relación entre números enteros pequeños (la división de la cuerda), y siempre se ha explicado en función de las razones de las frecuencias, con las potencias de estas razones¹ expresadas como $2^p 3^q 5^r$ con p , q y r pertenecientes a los enteros (positivos y negativos), así como la existencia física de las series armónicas. Por otro lado, se han buscado formas de dividir la octava en más partes² y, con el advenimiento de la computadora, las posibilidades de explorar los sistemas microtonales alternativos parecen ser casi ilimitadas. Por lo mismo, hay que fijar una base para la selección que pueda orientar la búsqueda hacia los caminos más enriquecedores. Las potencias de las razones y las series armónicas siempre han aportado la base de referencia, tanto para la división de la octava en doce partes (independientemente de la afinación justa, de igual temperamento o pitagórica) como en la búsqueda de sistemas microtonales. En este artículo, se aboga por otra forma de entender los recursos de los sistemas de altura de los sonidos; esta forma es "independiente de las razones entre enteros, y considera a los Intervalos individuales como transformaciones que forman un grupo matemático"[Bal. p.66]. Se presentan argumentos para considerar la descripción *algebraica* de los sistemas de altura como una alternativa seria a la descripción *acústica* existente.

Se supone que las definiciones formales de grupo, grupo cíclico, morfismo y otros conceptos afines son del dominio del lector de este trabajo. Los grupos que nos interesarán en esta exposición son Z , el grupo cíclico de orden infinito que consiste en los enteros bajo la suma y, sobre todo, los grupos cíclicos finitos Z_n , para ciertos $n \in N$. Primeramente tomaremos el grupo Z ; hay dos interpretaciones de este grupo, la *estática* y la *dinámica*. La interpretación estática consiste en definir Z como el grupo cuyos elementos son enteros y cuya operación binaria es la suma usual; la definición según el enfoque dinámico considera los elementos como *transformaciones* y la operación binaria como una *sucesión*. Así, según la interpretación estática, se toman dos enteros (por ejemplo, 3 y 4) con la operación suma para obtener el entero 7. El enfoque dinámico nos muestra dos transformaciones, "sumar 3" y "sumar 4" que se aplican en sucesión para

¹Ciertas razones son muy especiales como, por ejemplo, $2^{-1}3^1$ que expresa la quinta justa.

²Aquí cabe una pequeña aclaración. Se sabe, desde el capítulo I, que el semitono se divide en cents (100 cents) y que hay 1.200 cents en la octava de doce sonidos. Asimismo, el tono se divide en 10 partes por la coma, etc... La división múltiple de la octava y del tono se ha llevado a cabo desde los tiempos de Aristóxeno y ha sido una constante que, hoy en día, cobra un relieve especial por los sistemas electrónicos existentes.

llegar a una tercera transformación, "sumar 7". Los dos enfoques son aplicables a la música, ya que los elementos estáticos corresponden a los lugares de altura (las notas) en un sistema, en tanto los elementos dinámicos representan los intervalos musicales como transformaciones que generan conjuntos de notas.

Cualquier sistema de altura, concebido como un conjunto de puntos sobre un continuo de frecuencias, es un ejemplo de Z . Si se consideran 3 puntos, a , b y c , se puede describir su relación por medio del predicado NEXT ("el que sigue" en inglés), abreviado por N . De esta forma, $c = N(b) = N[N(a)] = N^2(a)$; $a = N^{-1}(b)$ y $a = N[N^{-1}(a)] = N^0(a) = I(a)$. Este aspecto no se desarrolla más en el trabajo, pero se menciona para mostrar que el concepto de grupo puede aplicarse a sistemas que no son de igual temperamento. Sin embargo, cuando sí se trabaja dentro del sistema de igual temperamento, NEXT tiene una interpretación estricta en términos de las frecuencias logarítmicas.³ Este hecho permite definir un grupo con nitidez y, asimismo, usar el lenguaje de la simetría para describir el trayecto de sus elementos. La característica que determina un grupo cíclico es que todos sus elementos pueden describirse a partir de un generador. Sin embargo, esta característica particular de Z es común a todos los sistemas de igual temperamento y, por lo tanto, no ayuda a describir las diferencias entre ellos. La manera de representar la característica distintiva de cada sistema es reconocer el número de subdivisiones de la octava, $N^n = \text{octava}$ y realizar una aplicación homomorfa de Z a Z_n de la forma

$$N^{jn+k} \rightarrow k \pmod n \quad \text{con } j \in Z \text{ (los enteros) y } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

³Las notas de la escala cromática en el sistema de igual temperamento no son equidistantes ni por el número de vibraciones ni por la longitud de las ondas de los sonidos respectivos, sino que representan los logaritmos, base 2, de estas magnitudes. Sea $do=0$, $do^1=1, \dots, si=11$ y $p = 0, 1, \dots, 11$. Tomemos el do más grave como punto de partida; este do vibra a n v/s, el do que sigue a $n \times 2^1$ v/s, y el do de la m -ésima octava a $n \times 2^m$ v/s. Asimismo, cada nota (de la escala cromática igualmente temperada) vibra $12\sqrt{2}$ veces más que la anterior. Por lo tanto, el número de vibraciones de cualquier sonido es:

$$N_{pm} = n \times 2^m \left(12\sqrt{2}\right)^p = n \times 2^m \times p \left(2^{17}\right), \text{ con } p = \text{el número de la nota, } m = \text{el número de la octava.}$$

$$\log N_{pm} = \log n + m \log 2 + \frac{p}{12} \log 2 = \log n + \log 2 \left(m + \frac{p}{12}\right)$$

Tomemos el número de vibraciones del do más grave como la unidad ($n = 1$) y $\log 2 = 1$ (pasamos al sistema de base 2).

$$\log N_{pm} = \log 1 + \left(m + \frac{p}{12}\right) = m + \frac{p}{12}$$

Así es que, si se enumeran las teclas del piano, cada una describe logaritmos de la cantidad de vibraciones de los sonidos. El número de la octava (m) es la característica, y el número de la nota (dividido por 12) es la mantisa. Por ejemplo, el sonido sol de la tercera octava es $3 + \frac{7}{12} = 3.583$. El número 3 es la característica del logaritmo base 2 del número de vibraciones de este sol, y $\frac{7}{12}$ (.583) es la mantisa. El número de vibraciones por segundo es, entonces, $2^{3.583}$, o sea, es 11.98 veces mayor que el número de vibraciones del do que se definió como el sonido más grave.

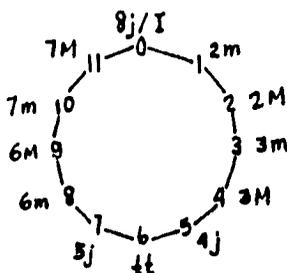
Así es que, el grupo Z_{12} (la escala cromática) consiste en el conjunto $\{0_{12}, 1_{12}, \dots, 11_{12}\}$ y la operación *suma módulo 12*. El elemento identidad, 0_{12} , es la imagen de $N^{-24}, N^{-12}, N^0, N^{12}$, etc., los cuales forman el conjunto de homomorfismos que dejan la clase de altura invariante. Como un homomorfismo dinámico, 0_{12} representa el conjunto de clases de altura que preservan los homomorfismos invariantes y, como elemento estático, 0_{12} es un origen arbitrario (cualquier nota de la escala cromática) al que se aplican las reglas de la suma, igual que se hace con los demás elementos. A continuación se presenta una tabla de grupos que representa Z_{12} ; en este caso tomamos la nota $do = 0$ como el unísono (o sea, la identidad), aunque se puede escoger a cualquiera de las 12 notas de la escala cromática como el 0_{12} y numerar a partir de ella (por ejemplo, $la^2 = 0, la = 1, si^2 = 2, \dots, sol = 11$).

*	do 0	do ² 1	re 2	re ² 3	mi 4	fa 5	fa ² 6	sol 7	sol ² 8	la 9	la ² 10	si 11
0 do	do	do ²	re	re ²	mi	fa	fa ²	sol	sol ²	la	la ²	si
1 do ²	do ²	re	re ²	mi	fa	fa ²	sol	sol ²	la	la ²	si	do
2 re	re	re ²	mi	fa	fa ²	sol	sol ²	la	la ²	si	do	do ²
3 re ²	re ²	mi	fa	fa ²	sol	sol ²	la	la ²	si	do	do ²	re
4 mi	mi	fa	fa ²	sol	sol ²	la	la ²	si	do	do ²	re	re ²
5 fa	fa	fa ²	sol	sol ²	la	la ²	si	do	do ²	re	re ²	mi
6 fa ²	fa ²	sol	sol ²	la	la ²	si	do	do ²	re	re ²	mi	fa
7 sol	sol	sol ²	la	la ²	si	do	do ²	re	re ²	mi	fa	fa ²
8 sol ²	sol ²	la	la ²	si	do	do ²	re	re ²	mi	fa	fa ²	sol
9 la	la	la ²	si	do	do ²	re	re ²	mi	fa	fa ²	sol	sol ²
10 la ²	la ²	si	do	do ²	re	re ²	mi	fa	fa ²	sol	sol ²	la
11 si	si	do	do ²	re	re ²	mi	fa	fa ²	sol	sol ²	la	la ²

Para ejemplificar las consideraciones teóricas se inicia con Z_{12} , para después plantear divisiones microtonales en ciertos Z_n . Se presentarán tres formas isomorfas de entender Z_{12} , basadas en tres conjuntos diferentes de generadores. Esto significa que las relaciones estructurales permanecen sin cambio por el isomorfismo, pero las relaciones de cercanía sí son modificadas. Por ejemplo, dado un isomorfismo entre dos grupos $\langle G, * \rangle$ y $\langle H, \circ \rangle$, para tres elementos en G , tenemos que si $g_1 * g_2 = g_3$, los elementos correspondientes en H son $h_1 \circ h_2 = h_3$. Pero los

elementos que se encuentran cerca, en términos de los generadores de G , no necesariamente se hallan cerca en relación a los generadores de H .

La primera descripción de Z_{12} se basa en el semitono temperado, o segunda menor (1_{12}), como generador del grupo. Los intervalos se distribuyen como las horas del reloj y hablaremos del "círculo" de semitonos aunque, evidentemente, no es una circunferencia en el sentido matemático.



Esta descripción presenta una serie de características, expuestas a continuación.

(1) Cada par de puntos adyacentes se conecta directamente por una transformación de un semitono. Por lo tanto, doce iteraciones de un semitono resulta en una octava, o sea, el elemento identidad: $(1_{12})^{12} = 1$. Ningún número menor de iteraciones puede dar la identidad. Así es que, el elemento 1 es de periodo 12. También $(11_{12})^{12} = 1 = [(1_{12})^{-1}]^{12}$, o sea, la séptima mayor y la segunda menor son mutuamente inversas musicalmente (ya que el inverso musical se define como $12 - x$, siendo x el intervalo original) y, como tales, ambas generan el mismo grupo. Hacemos notar que en este caso el inverso musical posee la propiedad de generar el grupo o subgrupo, hecho totalmente coherente con la Teoría de Grupos.

(2) Los elementos 2_{12} y 10_{12} (la segunda mayor y la séptima menor, inversos musicales) son de periodo 6, ya que $(2_{12})^6 = (10_{12})^6 = 1$. Cada uno genera un subgrupo Z_6 cuyos elementos son $\{0_{12}, 2_{12}, 4_{12}, 6_{12}, 8_{12}, 10_{12}\}$ y corresponden a la escala de tonos, muy usada en la música impresionista. En la siguiente tabla se verifica que Z_6 , generado por 2_{12} ó 10_{12} es, efectivamente, cerrado.

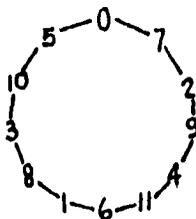
*	do 0	re 2	mi 4	fa ² 6	sol ² 8	la ² 10
0 do	do	re	mi	fa ²	sol ²	la ²
2 re	re	mi	fa ²	sol ²	la ²	do
4 mi	mi	fa ²	sol ²	la ²	do	re
6 fa ²	fa ²	sol ²	la ²	do	re	mi
8 sol ²	sol ²	la ²	do	re	mi	fa ²
10 la ²	la ²	do	re	mi	fa ²	sol ²

La identidad $do = 0$ está en Z_6 y, para todo elemento, su inverso también se encuentra en Z_6 ($do * do = 0$, $re * la^2 = 0$, $mi * sol^2 = 0$, $fa^2 * fa^2 = 0$, $sol^2 * mi = 0$, $la^2 * re = 0$). Así es que, podemos afirmar que Z_6 es, a su vez, un grupo.

(3) Los elementos 3_{12} y 9_{12} (la tercera menor y la sexta mayor) son de período 4 y generan el subgrupo $Z_4 = \{0_{12}, 3_{12}, 6_{12}, 9_{12}\}$, que forma el acorde conocido como la *séptima disminuida*.

4. Los otros subgrupos de Z_{12} son $Z_3 = \{0_{12}, 4_{12}, 8_{12}\}$, generado por 4_{12} o 8_{12} (la tercera mayor o la sexta menor) y que corresponde a la tráfada aumentada. $Z_2 = \{0_{12}, 6_{12}\}$, es el tritono que sólo se genera a sí mismo y a la identidad, ya que el tritono es su propio inverso, $tt = (tt)^{-1}$.

Los únicos elementos que no han fungido como generadores son 5_{12} y 7_{12} (la cuarta y la quinta justas). Esto sucede porque, como cada uno genera Z_{12} , ellos no pertenecen a ninguno de los subgrupos propios mencionados. De hecho, la cuarta y la quinta justas son los generadores de la segunda forma isomorfa de trabajar con Z_{12} , como se ve a continuación.

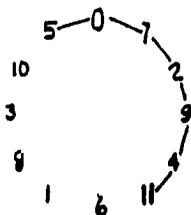


Como la aplicación del círculo de semitonos que se acaba de analizar, al círculo de quintas⁴ preserva la estructura, o sea $0 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 7$, etc., se puede afirmar que es un isomorfismo. Por

⁴Aquí el círculo de quintas puede verse bajo una perspectiva nueva. Es la única estructura isomorfa al círculo de semitonos. De esta forma, el círculo de quintas se concibe en función de la quinta justa como 7_{12} y no en

ejemplo. sean $1_{12}, 2_{12}$ y 3_{12} tres elementos del círculo los sen. mos. con $1_{12} + 2_{12} = 3_{12}$. Las imágenes en el círculo de quintas son $f(1_{12}) = 7_{12}$, $f(2_{12}) = 2_{12}$ y $f(3_{12}) = 9_{12}$ respectivamente. con $7_{12} \circ 2_{12} = 9_{12}$. En términos matemáticos podemos decir que $f(x + y) = f(x) \circ f(y)$ y $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, definiendo así un morfismo. Es inmediato ver que f es inyectiva y suprayectiva.

Hay un hecho sencillo, pero importante, en lo referente a las escalas diatónicas. Una escala mayor, por ejemplo *do*, cuando se transpone por una quinta justa a *sol*, se convierte en otra escala mayor con todos los elementos, menos uno, iguales entre sí. El elemento que cambia se altera por un semitono, $fa \rightarrow fa^{\sharp}$. Se puede plantear y contestar en términos del pensamiento matemático la pregunta ¿por qué se van alterando las escalas diatónicas, representadas en el círculo de quintas, por medio de pequeños cambios de un elemento? Lo que sucede es que las escalas diatónicas son subconjuntos muy especiales del círculo de quintas, ya que sus puntos *siempre están adyacentes*.



Cualquier subconjunto de tamaño 7 en este círculo de quintas, cuyos puntos formarían una curva si se pudieran conectar de la forma expuesta, es una escala diatónica. Una escala diatónica se altera sólo un elemento cuando se transforma por la quinta justa porque como $(7_{12})^{12} = 1_{12}$, la transposición de una escala por una quinta justa lleva a una escala con $m - 1$ miembros en común y el elemento alterado sólo ha sufrido un cambio mínimo. Es esta propiedad que subyace tanto a la transformación $fa \rightarrow fa^{\sharp}$, como a la existencia misma de las armaduras.

Hasta aquí se ha visto que Z_{12} puede ser generado independientemente por dos elementos distintos y que las dos formas isomorfas reflejan percepciones diferentes de *cercanía* que operan en la música. Una de ellas es la forma melódica, basada en la proximidad de las notas por separado: la otra está basada en escalas y la cercanía entre las tonalidades. La tercera

términos de su razón acústica $\frac{3}{2}$. Normalmente se enseña que el círculo de quintas es una forma de *mnemotecnias* que ayuda a recordar las relaciones entre las tonalidades y las armaduras. Pero desde la perspectiva de la Teoría de Grupos, esta concepción algo superficial se torna más profunda, y se ve cómo el círculo de quintas está enraizado en la estructura misma del sistema de alturas.

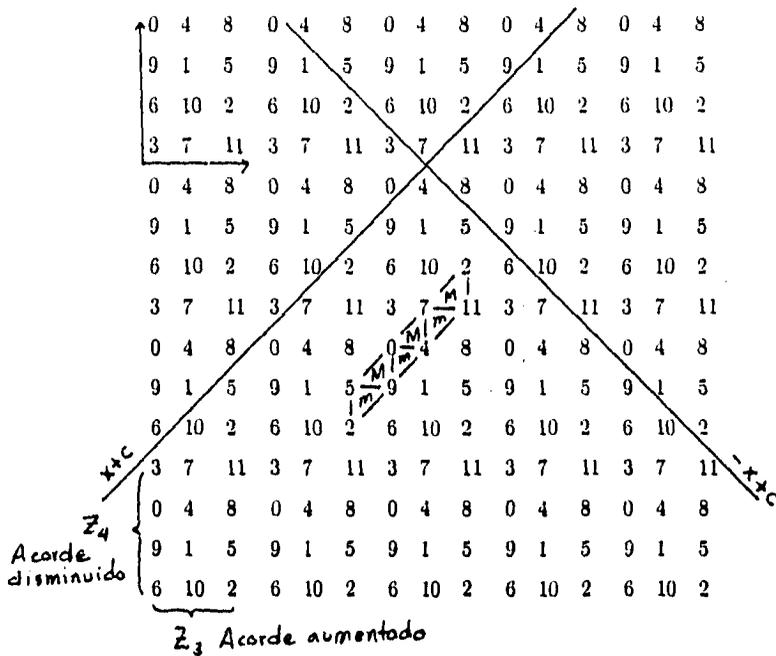
descripción isomorfa se va a basar en una estructura intermedia, presente en la música desde el siglo XVII: la *triada* o *acorde*.

Las formas de generar el grupo, tanto de los semitonos como el de las quintas son ambos unidimensionales, en el sentido de que sus elementos resultan de un solo generador. Existen, también, e *productos directos* de grupos que, así como en el producto cartesiano, son generados por listas de n elementos, las cuales son vectores cuyos elementos emergen de los miembros de algún grupo más pequeño. Un conocido teorema de la Teoría de Grupos y , más específicamente, de grupos abelianos de orden finito (todo grupo cíclico es abeliano, y Z_{12} es cíclico) afirma:

Teorema 4.1: El grupo $Z_m \times Z_n$ es isomorfo a Z_{mn} si y sólo si m y n son primos relativos entre sí, esto es, si el mcd de m y n es 1 [Fra., p.80].

Por lo mismo, Z_{12} es isomorfo al producto directo de dos de sus subgrupos, *i.e.* Z_3 y Z_4 , $Z_{12} \cong Z_3 \times Z_4$. Un elemento en $Z_3 \times Z_4$ se describe como: (a, b) , donde $a \in \{0, 1, 2\}$, $b \in \{0, 1, 2, 3\}$ y su regla de asociación es $(a, b) * (a', b') = ((a + a') \bmod 3, [b + b'] \bmod 4)$. El isomorfismo en cuestión va de $Z_3 \times Z_4 \rightarrow Z_{12}$ y su regla de asociación es $(a, b) \rightarrow (4a + 3b)_{12}$, $a \in Z_3, b \in Z_4$.

Se puede realizar una interpretación gráfica de esta tercera forma de concebir Z_{12} . Se tienen dos ejes, uno generado por terceras mayores (4_{12} genera Z_3) y el otro por terceras menores (3_{12} genera Z_4). Cada intervalo musical es un punto que corresponde al número de terceras mayores y/o menores contenidas en el intervalo. Una quinta justa puede expresarse como una tercera mayor (4_{12}) y una tercera menor (3_{12}) y, por lo tanto, la quinta justa (7_{12}) es el punto (1,1). La forma gráfica correcta de representar esta descripción es por medio de un toro (o, más bien, puntos sobre un toro), pero para facilitar las comparaciones con las otras dos (de segundas menores y de quintas justas) se ha "desenrollado". Se puede pensar en cada "rectángulo de puntos" como una región fundamental y, por lo mismo, hay que tener en cuenta que, en aras de mostrar relaciones de adyacencia, hay duplicaciones; por ejemplo, cada aparición de 2_{12} es, en realidad, el mismo punto.



Para comenzar habría que señalar que las estructuras máximas que se pueden formar sin repetir una nota (un número), y que sean conectadas y compactas cuando se conectan (en este caso son paralelogramos) son, en realidad, los seis acordes básicos. Esto es análogo a lo que sucede en el círculo de quintas con la escala diatónica (si se traza una curva conexas). Los acordes mayor y menor se representan como triángulos rectos congruentes, relacionados por rotaciones de 180° y los acordes aumentados y disminuidos son triángulos *degenerados* de una sola dimensión. Las escalas diatónicas, en esta tercera manera de ver Z_{12} , forman otra vez una estructura compacta y conectada si se conectan los puntos. En el círculo de las quintas, las escalas diatónicas surgieron de conectar las quintas justas. En esta descripción las escalas diatónicas resultan de conectar los acordes mayores y menores, para obtener una figura que es convexa, compacta y que recorre una cantidad máxima de espacio sobre los dos ejes.

Del modo en que se graficó la última descripción de Z_{12} , ($Z_3 \times Z_4$), como una especie de

enrejado infinito sobre el plano, se puede ver cómo este grupo contiene a los otros dos. La familia de rectas $y = x + c$, son círculos de quintas desenrollados, separados por terceras. La familia de rectas $y = -x + c$ son círculos de semitonos. En una imagen toroidal del producto directo de terceras, el círculo completo de quintas o semitonos no cerraría hasta después de tres y cuatro revoluciones alrededor del toro.

La descripción de las terceras es la única que se relaciona con el concepto de *tónica*, o *acorde tónico*. En el conjunto diatónico hay tres *triángulos mayores* (M) y tres *triángulos menores* (m). Por ejemplo, el triángulo mayor localizado en el centro y correspondiente al conjunto $\{0, 2, 4, 7, 9, 11\}$ (*do* mayor) es, efectivamente, $\{0, 4, 7\}$ (*do, mi, sol*) y el triángulo menor ubicado en el centro del mismo conjunto es $\{9, 0, 4\}$ (*la, do, mi*), es decir, la relativa. Ninguno de estos acordes, o sus fundamentales 0 y 9, tienen una ubicación semejante (privilegiada) en los círculos de las quintas o de los semitonos.

Esta semejanza de Z_{12} y las tres formas isomorfas de describirlo se puede entender también en términos de relaciones melódicas (los semitonos como generadores), de tonalidad (las quintas como generadores) y armónicas (las terceras como generadores). Esta manera de entender ciertas relaciones musicales básicas, en función de la Teoría de Grupos, se extiende a la división múltiple de la octava, expresada por Z_n para ciertos $n \in N$.

Cada sistema puede verse análogamente al grupo de los semitonos, donde el generador es el elemento más pequeño (la unidad). La pregunta es ¿cuáles de estos sistemas poseen dos grupos isomorfos al grupo de los semitonos ("semitono" según la división) en que:

(1) uno de los grupos sea el generador unidimensional del círculo de las tonalidades (análogo al círculo de las quintas en Z_{12}) y

(2) el otro sea un grupo de producto directo de "terceras", tal que un subconjunto "diatónico", de puntos adyacentes el círculo de las tonalidades de (1) es asimismo una estructura convexa y conectada cuando se conectan los puntos en esta descripción generada por el producto directo?

Teorema 4.2. Todos los grupos que poseen los recursos estructurales (1) y (2) son de la forma

$$Z_n \cong Z_k \times Z_{k+1} \quad \text{con } n = k(k+1) \quad \text{para } k \in Z, k \geq 3.$$

Demostración. En un conjunto formado por la alternancia de triángulos fundamentales de

la gráfica de $Z_k \times Z_{k'}$, con $k' \neq k$, el orden de los grupos involucrados difiere a lo más por 1, $|k - k'| \leq 1$. Si el orden difiriera por más que 1, el paralelogramo (es decir, la estructura convexa y conectada de (2)) que se generara agotaría el ciclo más pequeño antes de completar el más grande. Por ejemplo, si se tiene a cuatro veces y b tres veces, estas literales pueden emplearse en un ciclo alternante, $abababa$, pero si las a son cinco y las b son tres, se acabará la cantidad de b sin tener la posibilidad de *alternar*, o sea, $abababaa$. Si se tiene la misma cantidad de a y b (o sea, $k = k'$) tendría que existir el isomorfismo $Z_k \times Z_k \cong Z_{k^2}$, el cual nunca puede ser ya que contradiría el Teorema 4.1. Así es que, para que una escala conectada en el círculo de quintas sea convexa en la gráfica correspondiente al producto cartesiano, dicha gráfica tiene que ser de la forma $Z_k \times Z_{k+1}$. ■

Si $k < 3$, por ejemplo $k = 2$, entonces $Z_n = Z_6$ sólo posee un generador y no se puede formar el círculo de quintas (ya que la quinta justa es 7). Cuando $k \geq 3$, aparentemente hay una cantidad enorme de posibles generadores pero, en realidad, sólo hay uno que genera la estructura conectada y convexa de (2) que se busca. Este generador es el elemento $(2k + 1)_n$, cuya escala diatónica resultante contiene $2k + 1$ notas y posee la propiedad de que las escalas adyacentes se diferencian en una sola nota, siendo este cambio de un "semitono" del contexto de Z_n (la propiedad $fa \rightarrow fa^{\flat}$ en Z_{12}). El elemento $(2k + 1)_n$ se comporta como una quinta justa en Z_{12} , y los elementos k_n y $(k + 1)_n$ son equivalentes a las terceras menor y mayor. A continuación se demuestra la

Propiedad 4.1: Si una escala generada por el elemento $(2k + 1)_n$, $k \geq 3$, posee $2k + 1$ elementos entonces se cumple " $fa \rightarrow fa^{\flat}$ ", es decir, que el cambio en las escalas adyacentes son de una sola nota y de un "semitono".

Demostración. Sabemos que en Z_{12} , $[(2k + 1)]^2 \bmod k(k + 1) = 1$, ya que $k = 3$, $2k + 1 = 7$, $\text{mod } k(k + 1) = 12$ y $(7)^2 \bmod 12 = 1$. En Z_n , si el cambio hacia la "quinta" al lado $(2k + 1)$ da como resultado que $[(2k + 1)]^2 \bmod k(k + 1) = 1$, habremos demostrado la propiedad.

Así es que,

$$\begin{aligned} [(2k + 1)]^2 \bmod k(k + 1) &= [4k^2 + 4k + 1] \bmod k(k + 1) = [4k(k + 1) + 1] \bmod k(k + 1) = \\ &= [0 + 1] \bmod k(k + 1) = 1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

A continuación se muestra la gráfica de las "terceras" para Z_{20} , con $k = 4$, $Z_{20} \cong Z_4 \times Z_5$.

0	5	10	15	0	5	10	15	0	5	10	15	0	5	10
16	1	6	11	16	1	6	11	16	1	6	11	16	1	6
12	17	2	7	12	17	2	7	12	17	2	7	12	17	2
8	13	18	3	8	13	18	3	8	13	18	3	8	13	18
4	9	14	19	4	9	14	19	4	9	14	19	4	9	14
0	5	10	15	0	5	10	15	0	5	10	15	0	5	10
16	1	6	11	16	1	6	11	16	1	6	11	16	1	6
12	17	2	7	12	17	2	7	12	17	2	7	12	17	2
8	13	18	3	8	13	18	3	8	13	18	3	8	13	18
4	9	14	19	4	9	14	19	4	9	14	19	4	9	14
0	5	10	15	0	5	10	15	0	5	10	15	0	5	10
16	1	6	11	16	1	6	11	16	1	6	11	16	1	6
12	17	2	7	12	17	2	7	12	17	2	7	12	17	2
8	13	18	3	8	13	18	3	8	13	18	3	8	13	18
4	9	14	19	4	9	14	19	4	9	14	19	4	9	14
0	5	10	15	0	5	10	15	0	5	10	15	0	5	10
16	1	6	11	16	1	6	11	16	1	6	11	16	1	6
12	17	2	7	12	17	2	7	12	17	2	7	12	17	2
8	13	18	3	8	13	18	3	8	13	18	3	8	13	18
4	9	14	19	4	9	14	19	4	9	14	19	4	9	14

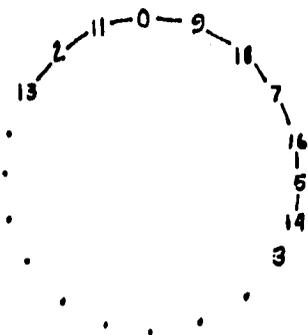
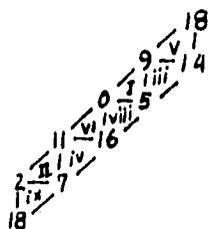
Z_5 {

0	5	10	15	0	5	10	15	0	5	10	15	0	5	10
16	1	6	11	16	1	6	11	16	1	6	11	16	1	6
12	17	2	7	12	17	2	7	12	17	2	7	12	17	2
8	13	18	3	8	13	18	3	8	13	18	3	8	13	18
4	9	14	19	4	9	14	19	4	9	14	19	4	9	14

Z_4

En Z_{20} , la escala diatónica consiste en el subconjunto de clases de altura $\{0_{20}, 2_{20}, 5_{20}, 7_{20}, 9_{20}, 11_{20}, 14_{20}, 16_{20}, 18_{20}\}$ o sea, 9 notas. La escala con un sostenido es $\{9_{20}, 11_{20}, 14_{20}, 16_{20}, 18_{20}, 1_{20}, 3^*_{20}, 5_{20}, 7_{20}\}$ (* representa el lugar de la alteración musical) y la escala con un bemol es $\{11_{20}, 13^*_{20}, 16_{20}, 18_{20}, 0_{20}, 2_{20}, 5_{20}, 7_{20}, 9_{20}\}$. Los acordes se presentan a continuación (los números romanos mayúsculos significan "mayor" y los minúsculos "menor")

	I	II	iii	iv	V	VI	vii°	viii	ix
"tónica"	0	2	5	7	9	11	14	16	18
"tercera"	5	7	9	11	14	16	18	0	2
"quinta"	9	11	14	16	18	0	2	5	7



Como la división de la octava es de 20 partes, el "semitono" es de 60 cents, y el elemento 9₂₀ (la "quinta") corresponde a un intervalo de 540 cents. Hay 4 acordes mayores, 4 menores y uno disminuido (toda escala de tamaño 2k + 1 presenta k tríadas mayores, k tríadas menores y una disminuida).

Asimismo, se sigue que $Z_{30} \cong Z_3 \times Z_0$ y $Z_{42} \cong Z_6 \times Z_7$, y se encuentra el mismo patrón análogo en estos casos. La escala diatónica de Z_{30} consta de 11 notas: $\{0_{30}, 3_{30}, 6_{30}, 8_{30}, 11_{30}, 14_{30}, 17_{30}, 19_{30}, 22_{30}, 25_{30}, 28_{30}\}$ y la de Z_{42} de 13 clases de altura: $\{0_{42}, 4_{42}, 7_{42}, 10_{42}, 13_{42}, 16_{42}, 20_{42}, 23_{42}, 26_{42}, 29_{42}, 33_{42}, 36_{42}, 39_{42}\}$, con las correspondientes tríadas que forman la región convexa y conectada (el paralelogramo).

Se mantiene la propiedad "fa → fa²" a partir de 11₃₀ en Z_{30} y 13₄₂ en Z_{42} (igual que sucede con 7₁₂ en Z_{12}). Es interesante señalar que hay otros dos grupos cíclicos isomorfos a Z_{30} : $Z_2 \times Z_{15}$ así como $Z_3 \times Z_{10}$. Sin embargo, como es de esperarse, no dan por resultado la región convexa y conectada de la escala diatónica ya que no cumplen con la propiedad 4.1.

, El desarrollo de todos estos sistemas de altura se realizó sin recurrir, en ningún momento, a las razones de enteros que, desde Pitágoras a Helmholtz, siempre estaban en el fondo de cualquier explicación en torno a las escalas diatónicas (claro está ¡la Teoría de Grupos data apenas de finales del siglo XIII!). Parece más que una mera curiosidad que en la descripción algebraica de los intervalos musicales (en sustitución de su explicación acústica) se halle la escala diatónica mayor, correspondiente a la escala cromática en Z_{12} , como el miembro más pequeño de una familia de sistemas microtonales. Cabe mencionar que la división algebraica de la octava da por resultado números distintos a la división basada en razones de enteros (véase el Capítulo I); la única división de la octava cuya cantidad de notas aparece en los dos casos es la de 12, la escala cromática Z_{12} .

Parece que las dos descripciones del sistema musical corresponden a dos aspectos fundamentales de la música, es decir, su realidad física como vibraciones en el aire (la descripción acústica) y su estructura, a veces muy compleja, con sus simetrías, orden, etc. (la descripción algebraica). Es entendible que la descripción acústica que se originó hace aproximadamente 2,500 años con los experimentos de Pitágoras haya sido la única existente hasta hace poco, ya que tuvo que haber un desarrollo en la matemática y, específicamente en el Álgebra y la Teoría de Grupos, antes de poder realizar el nexo con el sistema musical. Como dicho desarrollo es reciente, no se podía esperar esta explicación alternativa de la percepción musical hasta estas últimas fechas.

4.2

Los siguientes artículos, que se describirán muy someramente, tienen una motivación común. Dicha motivación se relaciona con la búsqueda que han llevado a cabo los teóricos de la música de este siglo, en aras de hacer análisis de una gran parte de la producción musical de nuestra época, actividad que ya no se puede realizar con las herramientas del análisis tradicional, basadas en la tonalidad. La música atonal también tiene su estructura, su simetría y su "sentido", pero se necesitan otros puntos de referencia. Uno de estos "asideros" es el intervalo porque finalmente toda la música (tonal y atonal) puede describirse como una sucesión de intervalos, tanto horizontales (melodía) como verticales (armonía), para poder hacer un análisis análogo al tradicional en lo tocante a su estructura (que quede claro que aquí no entramos en cuestiones

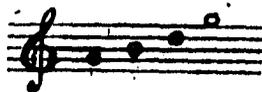
relacionadas con la interpretación).

En 1973 apareció un libro, *The Structure of Atonal Music*. (La Estructura de la Música Atonal) de Allen Forte, en el cual se presenta una descripción sistemática de todos los posibles conjuntos de notas bajo equivalencias, en términos de octavas, de transposición y de inversión. Se define una relación de equivalencia sobre $\mathcal{P}(Z/12Z)$ (el conjunto potencia de Z_{12}) de esta manera: $X \sim Y$ si X y Y difieren sólo por una transposición ($Y = \{x + t : x \in X\}$) o una inversión ($Y = \{12 - x : x \in X\}$).⁵ Asimismo, no se emplean las descripciones que funcionan en el análisis tradicional (con sus notas de referencia como la tónica o la tónica local) sino que se relacionan conjuntos de notas en términos de su semejanza bajo el contenido interválico, los sonidos comunes (llamados *invariantes*) y relaciones abstractas de contención conjuntista. En 1974 Eric Regener escribió un artículo llamado *On Allen Forte's Theory of Chords* (Acercas de la Teoría de Acordes de Allen Forte) en que después de alabar el trabajo y de plantear que éste tiene alcances más allá de lo que concibe el mismo Forte, intenta formalizar y hacer más accesibles algunas de las ideas del libro. Según Regener, muchos conceptos de Forte se pierden por difusos y demasiado restringidos o, por otra parte, se inventa una notación tan "original" que no se entiende, cuando se podrían utilizar formas ya establecidas en el análisis musical,

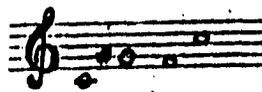
⁵En la música el transponer (o transportar) consiste en tomar un conjunto de notas, por ejemplo {do 0, mi 4, sol 7, do 0}



en la tonalidad de do mayor, y mantener los mismos intervalos en otra tonalidad, por ejemplo, sol mayor, por medio de subir cada nota una quinta justa (T_{12}) {sol 7, si 11, re 2, sol 7}.



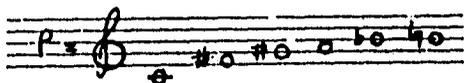
La inversión musical consiste en tomar el conjunto de notas {do 0, mi 4, sol 7, mi 4, do 0} y restar cada una de la octava ($12 - x$), {do 12, sol² 8, fa 5, do 12}.



sin ningún peligro de caer en un análisis "tradicional" de la música atonal (cosa, por demás, imposible).

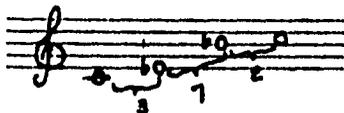
En la sección del artículo de Regener titulado *Contenido Interválico y Notas Comunes* se toman A y B como dos conjuntos arbitrarios de clases de altura. Así es que, si $M(A, B)$ es el número de notas que A y B tienen en común y si P y Q son acordes en la *forma interválica normal*⁶ entonces $M(T_0(P), T_d(Q))$ se llama *función interválica*. Esta misma función fue definida de manera ligeramente diferente, como se verá después, por David Lewin en 1959. Para un valor dado de d , esta expresión describe el número de notas en común entre la *transposición cero* de P (o sea, ningún cambio) y la transposición de Q , que sube d semitonos.

Sea $n(Q)$ el número de elementos en el acorde Q . Si $n(Q) \leq n(P)$ se ve que si $n(Q)$ son las notas en común entre los acordes Q y P , entonces $Q \subset P$. Por ejemplo, si $P = \{0, 6, 8, 9, 10, 11\}$ ⁷



$$\text{y } Q = \{0, 8, 11\}$$

⁶La forma interválica normal se logra por medio de la siguiente serie de pasos. Considérese una colección no vacía de acordes en notación interválica (o sea, el conjunto $\{0, 3, 10\}$):



Se escribe (372) en notación cíclica, ya que hay 3 semitonos entre $do=0$ y $mi^3=3$, 7 semitonos entre $mi^3=3$ y $si^7=10$, y 2 semitonos entre $si^7=10$ y $do=0$). Ninguno de los conjuntos es igual a otro, y todos tienen el mismo número de notas, n .

(1) Fíjese el índice k en 1 (la primera nota).

(2) Escójanse, entre todas las posibles combinaciones, el (los) acorde(s) cuyo número k sea más grande. Si hay más que un acorde, repítase el proceso, incrementando k por 1, hasta que quede un sólo acorde. Por ejemplo, el pentacorde $\{0, 2, 5, 8, 9\}$ corresponde a (23313) en notación interválica. Con $k=1$, permanecen (33132), (31323) y (32331). Con $k=2$ sólo queda (33132). Esta es la forma interválica normal.

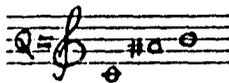
La forma interválica normal permite ver con facilidad ciertos aspectos de la estructura interna:

a) la *inversión* de un acorde es el acorde cuyos intervalos cíclicos se encuentran en orden inverso. Por ejemplo, la inversión de (432111) es (411123) y la de (322131) es (313122);

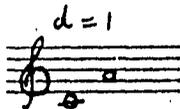
b) la *inversión simétrica* se lee lo mismo al revés como al derecho, en alguna permutación. Por ejemplo (412221) o (321231);

c) los acordes con *simetría de transposición* se reconocen por su estructura periódica: el número de transposiciones idénticas es el número de repeticiones del periodo. Por ejemplo, en (313131) las doce transposiciones se agrupan en conjuntos de 3 (la transposición que se definió como $Y = \{x+t: x \in X\}$).

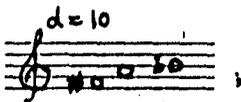
⁷Las notas realmente representan acordes y deberían estar sobrepuestas, pero para mayor facilidad de comprensión se ilustran horizontalmente.



entonces en la transposición $d = 0$, $M(T_0(P), T_0(Q)) = \{0, 8, 11\} = 3$. En $d = 1$, $M(T_0(P), T_1(Q)) = \{0, 9\} = 2$.



y en $d = 10$, $M(T_0(P), T_{10}(Q)) = \{6, 9, 10\} = 3$.



por otro lado, $M(T_0(P), T_5(Q)) = \emptyset$.

En seguida vamos a demostrar un teorema acerca de la función M .

Teorema 4.3: El número de clases de altura en común entre los complementos de dos conjuntos dados es $12 - n(A) - n(B) + M(A, B)$.

Demostración. Supongamos que A y B son dos conjuntos cualesquiera de notas, y A' y B' son sus complementos respectivos. Es obvio que cada clase de altura de A que no está en B está en B' , o sea, $M(A, B') = n(A) - M(A, B)$. Así es que, $M(A', B') = M(B', A') = n(B') - M(B', A) = 12 - n(B) - (n(A) - M(A, B))$. Por lo tanto, $M(A', B') = 12 - n(A) - n(B) + M(A, B)$. ■

En el ejemplo ya expuesto de la función interválica, $A = \{0, 6, 8, 9, 10, 11\}$ y $B = \{0, 8, 11\}$. Cuando $d = 0$, se tiene que $M(A, B) = 3$, es decir, $\{0, 8, 11\}$. Asimismo, $A' = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ y $B' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10\}$. De esta manera, $M(A', B') = 12 - 6 - 3 + 3 = 6$ y, efectivamente, hay 6 clases de altura en común, $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ entre A' y B' .

David Lewin, en su artículo de 1977 titulado *Forte's Interval Vector. My Interval Function and Regener's Common-Note Function* (El Vector Interválico de Forte, Mi Función Interválica y la Función de Notas Comunes de Regener) explica que el vector interválico de Forte es un concepto rigurosamente armónico, ligado al análisis de acordes como tales, en tanto la función

interválica que él ha definido. ($INTF(X, Y, i)$), es totalmente contrapuntística en su concepción. Las definiciones que se dan a continuación son, precisamente, de este último artículo.

Definición 4.1: Dados dos conjuntos de notas X y Y y un intervalo i , la función $INTF(X, Y, i)$ es el número de maneras distintas en que el intervalo i puede formarse, llevando un miembro de X a uno de Y . Es decir, el número de pares distintos de clases de altura (x, y) tal que x pertenece a X , y pertenece a Y , y el intervalo de x a y es i .

Se modela por ejemplo la siguiente situación. Uno se sienta al piano e improvisa, empleando sólo notas de X en la mano izquierda y sólo notas de Y en la mano derecha. Preguntamos ¿de cuántas maneras distintas puede ocurrir el intervalo i en el contrapunto resultante? (Cabe mencionar que la función es invertible si $INTF(X, Y, i) = INTF(Y, X, i)$, puesto que bajo estas condiciones es inyectiva y suprayectiva). El punto de vista probabilístico también puede usarse. Consideremos que el conjunto X tiene m notas y el conjunto Y tiene n notas; asimismo, $x \in X$, $y \in Y$ se tocan al azar y, de esta manera, hay mn posibles combinaciones. Sabemos que $INTF(X, Y, i)$ producirá precisamente el intervalo i , de entre estas mn posibilidades y, así, el cociente $\frac{INTF(X, Y, i)}{mn}$ representa la probabilidad de escuchar i , en vez de los otros posibles intervalos, en esta improvisación al azar.

Definición 4.2: Dados dos conjuntos de clases de altura X, Y se define la *función de notas comunes entre X, Y* como la función que asigna a cada operación A el número $CMNF(A, X, Y)$ de notas en común entre los conjuntos $A(X)$ y Y .

$A(X)$ se entiende como X transformado por A . Por ejemplo, $T_5(X)$ es la transposición de 5 semitonos de cada miembro de X .



Asimismo, si I es la inversión alrededor de mi y fa , entonces $I((do, mi, sol))$ es (la, fa, re) .



(Cabe recordar que, en este caso, $mi = 0$ en X y $fa = 0$ en Y).

La función de notas comunes no calcula intervalos como tales, sino transformaciones y, en particular, aquellas transformaciones entre dos conjuntos, X y Y : la diferencia estriba en las interpretaciones estática y dinámica mencionadas al principio de este capítulo. Más aún, el contexto implica trabajar con un grupo canónico (la escala cromática que es isomorfa a Z_{12} , como ya se vio en este mismo capítulo) cuya operación $*$, la transposición musical, se comporta como la suma en Z_{12} .

De esta manera, por ejemplo, los "inversos" (musicales) 5_{12} y 7_{12} (la quinta y la cuarta justas), en vez de concebirse como intervalos (que son sonidos muy bien definidos, particulares y concretos) se definen, de modo abstracto, como transformaciones inversas A^{-1} . Así es que, T_7 es el inverso de T_5 , ya que si se transpone una nota por siete semitonos y después por 5, se llega al punto de partida. El mismo Lewin menciona, en sus conclusiones, que se puede objetar que su función (que en vez de calcular intervalos de x a y , calcula *ocurrencias de situaciones generales* $A(x) = y$) "no es más que una diversión ... (ya que) las transformaciones específicas nos interesan precisamente porque interactúan ... con una estructura interválica dada a priori (o sea, que las transposiciones preservan intervalos,... (y) las inversiones invierten los intervalos...) ... Sin embargo, yo siento que las consecuencias filosóficas radicales que pueden extraerse de este formalismo valen la pena analizarse ..." [Lew., p.231].

Finalmente estudiaremos otra construcción teórica interesante, descrita por Regener en su artículo sobre Forte, que es la del *complejo de conjuntos* y las relaciones generales de contención que genera. Las siguientes definiciones corresponden a dicho artículo.

Definición 4.3: Un acorde S es miembro de un *complejo de conjuntos* $K(T)$ alrededor de T si $S \subset T$ o $S \subset T'$ o si $T \subset S$ o $T' \subset S$. Asimismo, $\text{card } S \neq \text{card } T$ (o $\text{card } T'$) y tanto S como T sólo pueden tener entre 3 y 9 elementos.

Definición 4.4: Un acorde S es miembro de un *subcomplejo* $Kh(T)$, si cumple las relaciones de contención, tanto para T como para T' .

Definición 4.5: Un *subenrejado* $S(Q, P)$, entre los acorde Q y P , es una colección de acordes que están sobre el camino directo de Q a P . O sea, todos los conjuntos que contienen a Q y están contenidos en P (incluyendo a Q y a P).

Sea \emptyset el acorde vacío, sin ninguna clase de altura y Ω la colección de las 12 clases de altura.

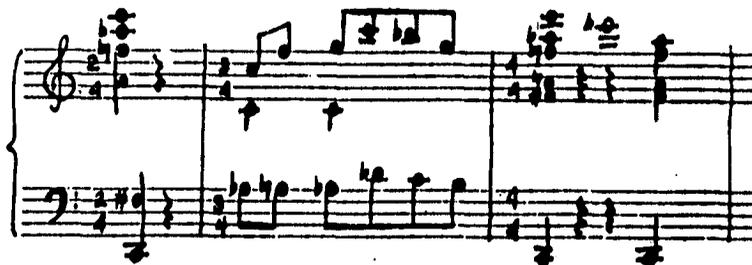
Entonces.

- (a) $S(\emptyset, P)$ es la colección de acordes contenidos en P ;
- (b) $S(Q, \Omega)$ es la colección de acordes que contienen a Q y
- (c) $S(\emptyset, \Omega)$ es la colección de todos los posibles acordes.

Si P no contiene a Q , el subenrejado es vacío. De esta forma, $K(T) = S(\emptyset, T) \cup S(\emptyset, T') \cup S(T, \Omega) \cup S(T', \Omega)$, es decir, $K(T)$ es la colección de todos los acordes contenidos en T o T' , o que pueden contener a T o T' .

Para describir el subcomplejo $Kh(T)$ supongamos, sin pérdida de generalidad, que T tiene 6 ó menos elementos. Entonces, $Kh(T) = S(T, T') \cup [S(\emptyset, T) \cap S(\emptyset, T')] \cup [S(T, \Omega) \cap S(T', \Omega)]$ y, por lo tanto, $Kh(T)$ consiste en los acordes que contienen a T y a T' , o que están contenidos en ambos conjuntos. Si T' no contiene a T entonces $S(T, T')$ es vacío y $Kh(T)$ consiste sólo en las otras dos colecciones.

Se puede preguntar ¿Cómo es que $T' \supset T$? A continuación presentamos un ejemplo musical [Ch..p.347.8] de este fenómeno, dentro de la teoría de Forte, el cual se presenta en un pasaje de *La Consagración de la Primavera* de Igor Stravinsky.



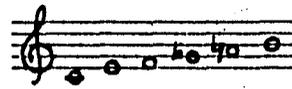
El conjunto de notas del primer acorde en $X = \{fa, fa^{\sharp}, la^{\flat}, la, do\}$, con $do = 0$, es el conjunto de clases de altura $\{5, 6, 8, 9, 0\}$. En el tercer compás este acorde se repite con dos notas nuevas más, mi y mi^{\flat} , $Y = \{mi^{\flat}, mi, fa, fa^{\sharp}, la^{\flat}, la, do\}$, que se puede escribir $\{3, 4, 5, 6, 8, 9, 0\}$. Así es que, se puede decir que $X \subset Y$. También, $X' = \{1, 2, 3, 4, 7, 10, 11\}$. Si se reemplaza cada elemento por su inverso musical, $Z = \{12 - x : x \in X\}$, se tiene $Z = \{11, 10, 9, 8, 5, 2, 1\}$ que, reordenado, es $\{1, 2, 5, 8, 9, 10, 11\}$ (cabe repetir, otra vez, que se define una relación de equivalencia, $X \cong Z$, si X y Z se diferencian sólo por una transposición, $Z = \{x + t : x \in X\}$, o una inversión). Si transponemos este conjunto (operación que no lo "cambia") agregando

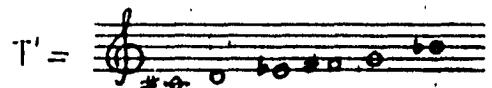
7 mod 12, tenemos $\{8, 9, 0, 3, 4, 5, 6\}$ que, reordenado es $\{3, 4, 5, 6, 8, 9, 0\} = Y$, y por lo tanto $X \subset X'$. Así es que, dentro de este modelo, con las equivalencias entre un conjunto y sus transposiciones e inversiones (y por su muy particular definición de inversión), un conjunto de notas puede estar contenido en su complemento.

La notación del enrejado y subenrejado es muy general, y puede aplicarse a problemas musicales para trazar relaciones entre acordes sin recurrir a la armonía clásica. Sin embargo, la simetría del complejo de conjuntos (los conjuntos y sus complementos) enfatiza los hexacordes, o sea, los conjuntos de clases de altura de 6 notas.

A manera de una pequeña digresión, hay un teorema, conocido como el *Teorema de Milton Babbitt* que realmente es un corolario del Teorema 4.3.

Teorema: Un conjunto de seis notas diferentes y su complemento definen exactamente los mismos intervalos.

Ejemplo: $T = \{0, 4, 5, 8, 9, 11\}$, $T' = \{1, 2, 3, 6, 7, 10\}$. $T =$ 

$T' =$ 

En los dos conjuntos hay una cantidad de 6 segundas menores y séptimas mayores $(1_{12}, 11_{12})$, 2 segundas mayores y séptimas menores $(2_{12}, 10_{12})$, 6 terceras menores y sextas mayores $(3_{12}, 9_{12})$, 8 terceras mayores y sextas menores $(4_{12}, 8_{12})$, 6 cuartas y quintas justas $(5_{12}, 7_{12})$ y 2 tritonos (6_{12}) . Asimismo, es lógico que hay 30 intervalos, ya que dedujimos que la combinación tomada fue $\frac{6!}{2!4!} \times 2$.

Demostración. En el Teorema 4.3 se demostró que $M(A', B') = 12 - n(A) - n(B) + M(A, B)$. De este modo, como $n(A) = n(B) = 6$, entonces $M(A', B') = 12 - 6 - 6 + M(A, B) = M(A, B)$. ■

O sea, como no son exactamente las mismas notas, tienen que ser equivalentes por una transposición o inversión, y ambas operaciones preservan las distancias interválicas según las definimos.

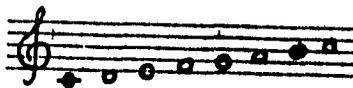
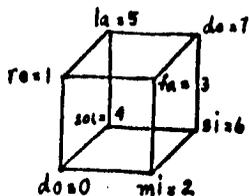
El énfasis puesto sobre los hexacordes no tiene mucho sentido musical, ya que no son especialmente importantes en la mayoría de la música atonal. En sí, el énfasis de Forte en la complementación puede explicarse por el hecho de privilegiar el análisis de la música de Schönberg, compositor para quien la constante circulación de las doce clases de altura era de suma

importancia. No obstante, una profundización en las aplicaciones concretas del complejo de conjuntos al análisis de la música atonal, o hasta tonal, podría hacerse en otra ocasión ya que por cuestiones de espacio y por la naturaleza misma de este trabajo no se debe detener más en el punto. Lo que sí es interesante enfatizar es el hecho de que este tipo de análisis cumple con los requisitos de una teoría clásica, dado que a pesar de su pretensión de explicar fenómenos que trascienden los límites de la armonía clásica o la música tonal, esta última también resulta analizable como caso particular.

4.3

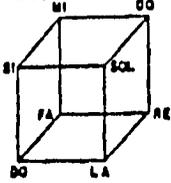
En 1975 se publicó en un cuaderno del CIMASS (hoy IIMAS), perteneciente a la Universidad Nacional Autónoma de México, un trabajo de investigación de los autores Julio Estrada y Jorge Gil titulado *Grupos Finitos y su Aplicación al Análisis, Estudio y Desarrollo de Estructuras Melódicas, Armónicas y Contrapuntísticas*. Posteriormente, en 1984, se publicó el libro *Música y Teoría de Grupos Finitos (3 variables booleanas)* de los mismos autores. En esencia, lo que se hace en ambos trabajos es tomar la escala diatónica de *do* mayor, con la repetición de *do* (*do, re, mi, fa, sol, la, si, do*) y asignarles a las notas la numeración 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, que se presentan como los 8 vértices de un cubo. Así es que, se habla del grupo de orden $2^3 \times 3!$ que consiste en 3 variables booleanas (véase el Apéndice II) y cuyas 48 permutaciones son las simetrías del cubo. El uso de las 3 variables booleanas parece ser más bien por adoptar la nomenclatura de programas computacionales previamente diseñados para aplicaciones en otras áreas (donde se usan, precisamente, algoritmos derivados del Álgebra Booleana o la Teoría de Autómatas) que por una necesidad inherente a la música. Por este mismo motivo, las permutaciones resultantes (que, en el libro, se llaman de "funciones booleanas", aunque no es la acepción formal de este término) reflejan simetrías conocidas, estudiadas fundamentalmente en la Teoría de Grupos.

Por ejemplo, se toma como identidad la escala diatónica de *do* mayor [Est., p.26-8]

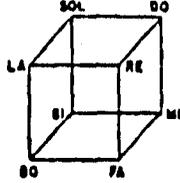


y, a partir de ella, se forman las 48 permutaciones del grupo de simetrías del cubo (la tabla está en las siguientes páginas).

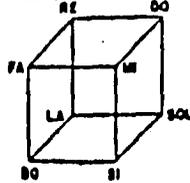
25(70)



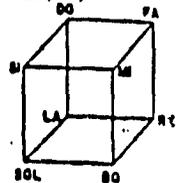
26(70)



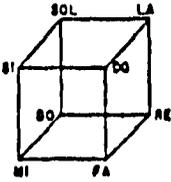
27(70)



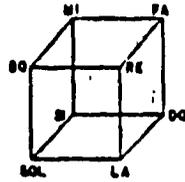
28(43)



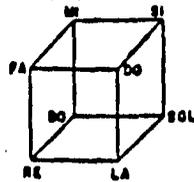
29(25)



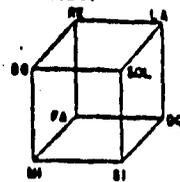
30(43)



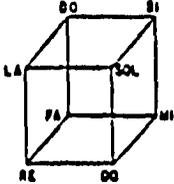
31(16)



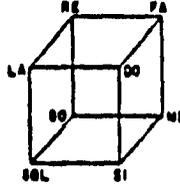
32(25)



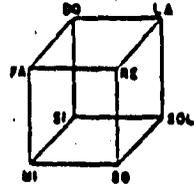
33(16)



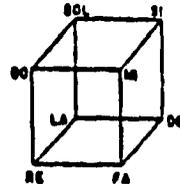
34(43)



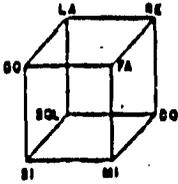
35(25)



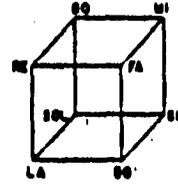
36(16)



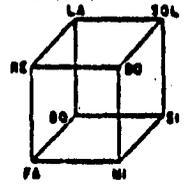
37(61)



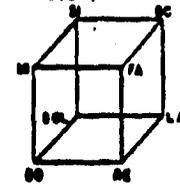
38(52)



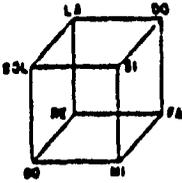
39(34)



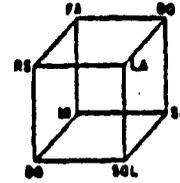
40(07)



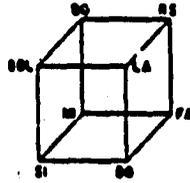
41(07)



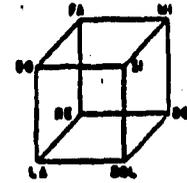
42(07)



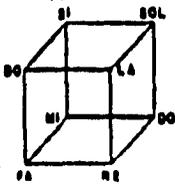
43(61)



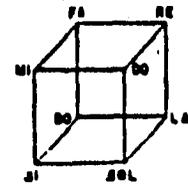
44(52)



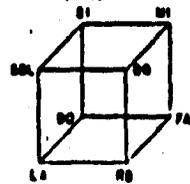
45(34)



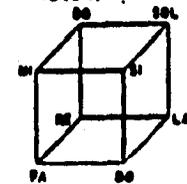
46(61)

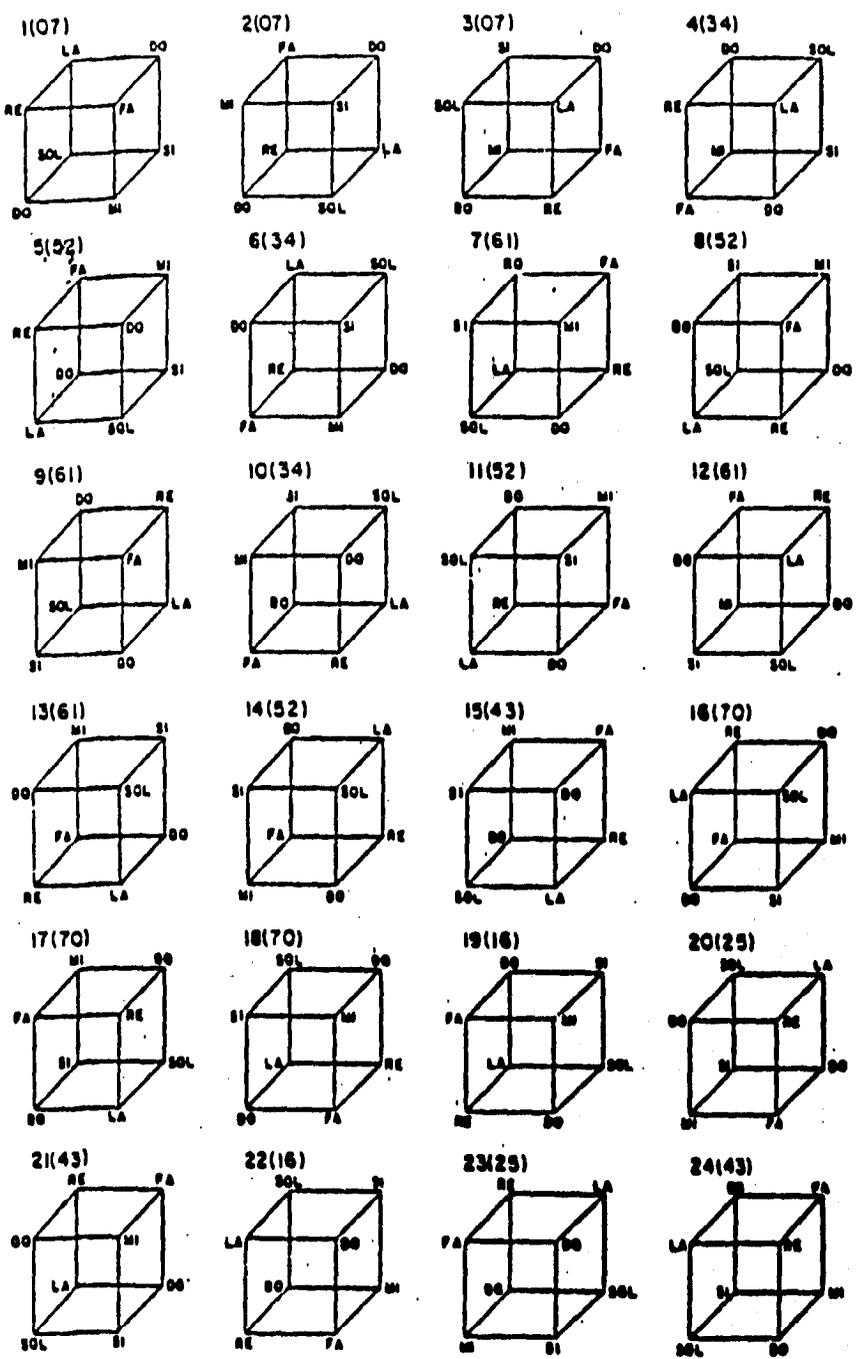


47(52)

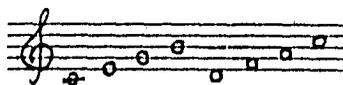
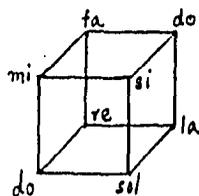


48(34)

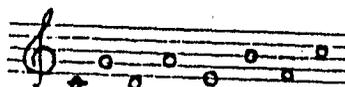
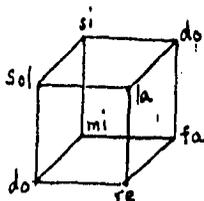




Como se puede ver, la identidad consiste en intervalos musicales de segundas. La siguiente permutación nos lleva a:



que (con la excepción del intervalo entre la cuarta y quinta nota) se compone de terceras ascendentes y, en seguida, la permutación 3 nos da:



que son quintas ascendentes. A partir de estas tres permutaciones se forman las *extensiones interválicas* que se agrupan en tres conjuntos: N_1 = segundas y séptimas, N_2 = terceras y sextas y N_3 = quintas y cuartas. A cada nivel (N_1 , N_2 , N_3) pertenecen 16 permutaciones, lo cual es lógico por las simetrías del cubo.

En la nota 1 del Apéndice del libro, se enuncia que " al efectuar las 48 permutaciones, sustituyendo la identidad, permutación 1 (01234567) por la permutación 2 (02461357), y después por la permutación 3 (04152637), se observa que generan las *mismas melodías* que puede generar la permutación 1" [Est., p. 135] (subrayado nuestro). Sin embargo, lo que sucede es que las 48 permutaciones del grupo de las simetrías del cubo es precisamente eso, la *operación* de un *grupo* y, por lo tanto, es cerrada. De esta manera es inevitable que, si se parte de cualesquiera de las permutaciones, y se realizan las otras 47 sin torcer el cubo, las que reaparecen tienen que ser las mismas.

De la misma manera en que se define la extensión intervalica, la naturaleza de las simetrías del cubo da pie a *recurrencias*, *reflexiones*, etc.⁸ que se traducen a notación musical y se formulan tablas, como la que se presenta a continuación (los números representan las permutaciones de 1 a 48).

		d				b			
N ₃	17	21	9	3	27	33	45	41	
N ₂	16	20	4	2	26	28	44	40	
N ₁	18	13	11	1	25	35	37	42	
N ₁	23	24	12	10	34	36	48	47	
N ₂	15	19	8	7	31	32	43	39	
N ₃	22	14	6	5	29	30	38	46	
		q				p			

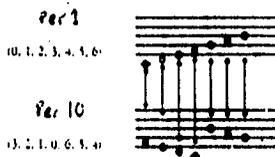
en que, por ejemplo, 1 (la identidad) pertenece al nivel intervalico 1 (segundas, en la terminología musical) que, como punto de partida, se designa con "d"; la permutación 10 es su reflexión "q", 25 es su recurrencia "b" y 34 es la reflexión de la recurrencia "p"

d 1	25 b
q 10	34 p

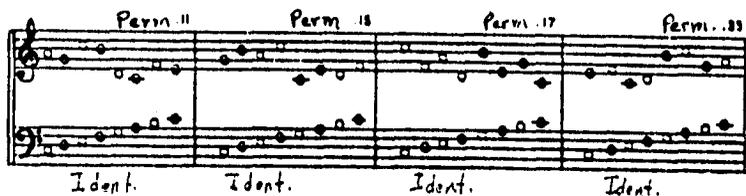
⁸La recurrencia se define como la presentación al revés de la permutación original e inicia en la permutación 25, siendo ésta la recurrencia de la permutación 1, como se ve a continuación:



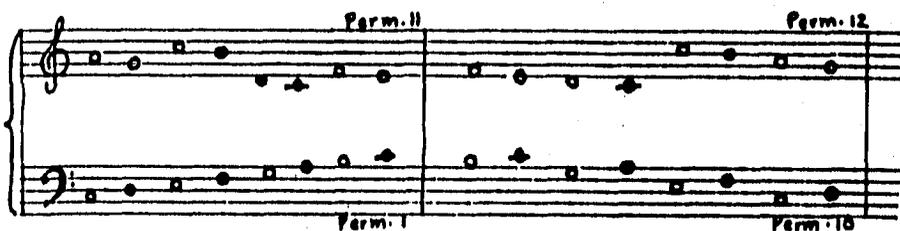
La reflexión se realiza quitando la duplicación de la octava y queda de esta forma:



A partir de estas relaciones, se forman subgrupos, órbitas, etc., todo estudiado en la Teoría de Grupos y, en particular, el grupo de las simetrías del cubo. En el Capítulo 2 del libro, también se habla de relaciones armónicas por medio de la sobreposición de permutaciones (la sobreposición, es decir las permutaciones sobrepuestas verticalmente, se trata por motivos musicales para poder hacer análisis armónico) y se encuentra cuales sobreposiciones son consonantes o disonantes según los distintos criterios que existen (época, gusto, etc.). Asimismo, se toman los subgrupos correspondientes a las simetrías del cubo, se traducen a notas, y se investigan cuales son consonantes o disonantes con la identidad. Se halla que hay 9 subgrupos formados con las permutaciones que producen intervalos consonantes cuando se sobreponen a la identidad. De estos 9 subgrupos ($S_3 = (1, 11)$, $S_7 = (1, 15)$, $S_9 = (1, 17)$, $S_{13} = (1, 35)$, $S_{16} = (1, 38)$, $S_{22} = (1, 4, 5)$, $S_{33} = (1, 11, 38, 41)$, $S_{47} = (1, 17, 35, 38)$, $S_{59} = (1, 4, 5, 38, 39, 42)$) se escogen las permutaciones 11, 15, 17 y 35 para generar subgrupos en sucesiones armónicas, como se ve a continuación.

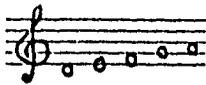


Como ejemplo, se toma el subgrupo $S_3 = (1, 11)$ sobrepuesto y al lado se muestra lo generado después de 10 permutaciones (la permutación 10, correspondiente a 1, y la permutación 12, correspondiente a 11):



Se comenta que "de las asociaciones armónicas obtenidas a partir de la generación de la tabla de permutaciones de cada subgrupo, se puede observar que los intervalos obtenidos *permanecen constantes en todas las asociaciones del mismo subgrupo*" [Est. p. 58] (en este caso los intervalos son terceras, sextas, cuartas y quintas). Este hecho también tenía que presentarse, ya que una de las propiedades de un subgrupo es la cerradura y estas asociaciones entre notas preservan los intervalos, aunque no deja de ser interesante señalarlo para los fines del análisis musical.

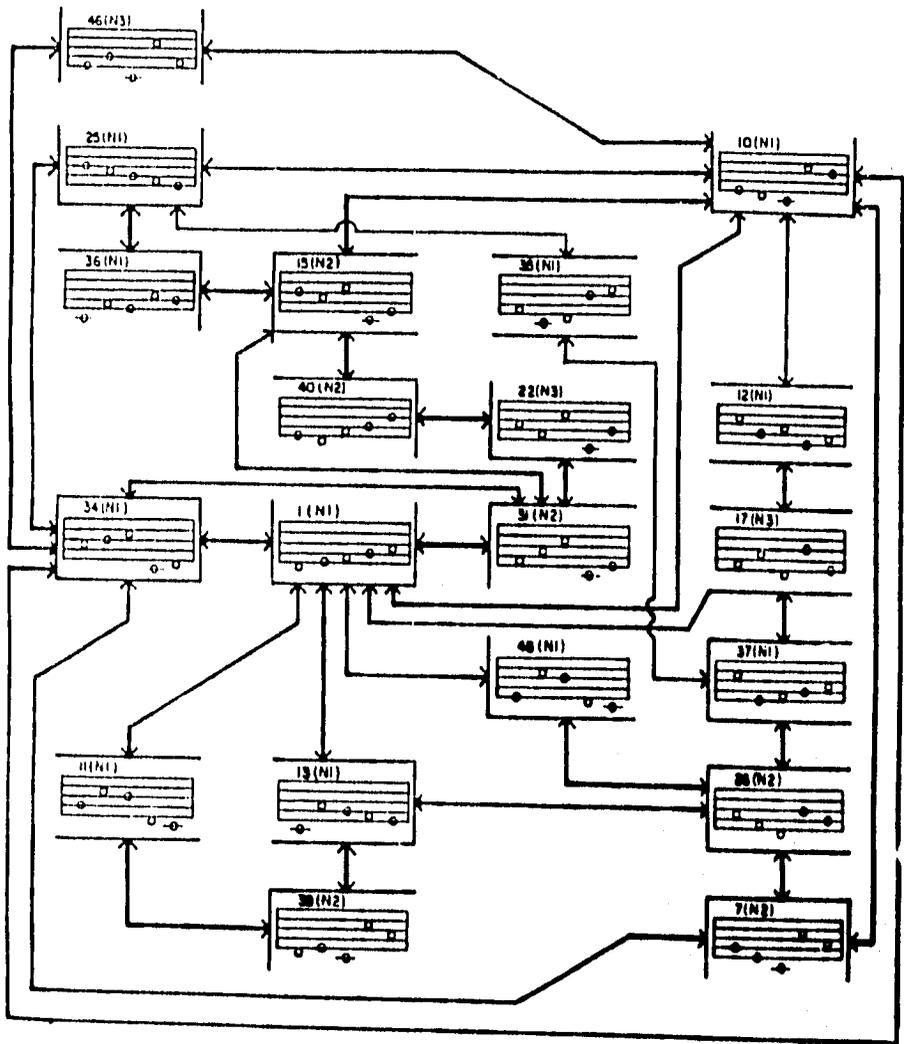
En los capítulos 3 y, sobre todo en el 4 (*Relaciones Armónico-Contrapuntísticas y Secuencias Melódicas*) se construyen redes secuenciales (véase el Apéndice 3 de esta tesis) que "funcionan como autómatas, en el sentido matemático de la palabra, o sea, que se asocia un estado a una estructura musical... es decir : el estado I



se transforma al estado

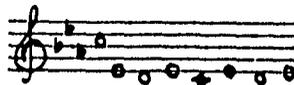


por la aplicación de la permutación $10''$ [Est., p.84]. En la página siguiente se presenta una red secuencial a partir de las permutaciones del cubo como si éstas fueran reglas de producción, cuya finalidad es la de formar melodías con ciertas características en común (cantidad de sonidos comunes, orden de aparición de los sonidos comunes, intervalos comunes, etc.) a partir de una identidad.



Aquí no se profundiza realmente en la esencia de la Teoría de Autómatas desde la perspectiva matemática, como tampoco se hace cuando se forman árboles secuenciales de las permutaciones: sin embargo, estos procesos (de las redes y árboles secuenciales) no se retoman en el Capítulo 5 que es la *Aplicación al Análisis de Obras Musicales*. En dicho capítulo se busca aplicar todo el desarrollo anterior al análisis de 2 obras: el *Preludio y Fuga en do menor* de J.S. Bach, y la sonata conocida como *Pátética* de Beethoven.

La aplicación consiste en tomar una identidad⁹ y buscar su reaparición en el transcurso de la pieza, en función de las 48 permutaciones del cubo (a partir de la identidad). Así es que, por ejemplo, se toma como "identidad" el motivo inicial del preludio, compás 1



(72120212) y, remitiéndose a las permutaciones del cubo, se encuentra que en el compás 28 hay una "equivalencia" con la permutación 3 en cuatro de las notas. O sea, que *re* → *sol*, *mi* → *re*, *do* → *do* y *mi* → *re* (1 → 4, 2 → 1, 0 → 0 y 3 → 2, que es lo que sucede en la permutación 3 con los 4 vértices en cuestión).



Este proceso se realiza a lo largo del capítulo y, como sería de esperarse, se encuentran "pedazos" de las permutaciones, con relación a la "identidad" musical, en el transcurso de las

⁹La identidad en la aplicación difiere radicalmente de su empleo, en todo el libro, como el conjunto de notas de la escala diatónica, correspondiente a los vértices del cubo, en cualesquiera de las 48 posiciones de las simetrías del mismo, y en cuyo caso son 8 notas sin repetición (si se diferencia entre el *do* = 0 y el *do* = 7) o, en ocasiones (por ejemplo, en las generación de secuencias melódicas) un número menor de notas, pero sin repetición. No obstante, cuando se toma un número menor de notas (por ejemplo, 5 notas) se tiene que recurrir a la permutación correspondiente de las ocho notas (ocho vértices) porque si no se hace así (se tuerce el cubo! Sin embargo, la identidad en la aplicación a las piezas de Bach y Beethoven es un conjunto de notas de la escala diatónica (*do* = 0, *re* = 1, etc.), pero dicho conjunto contiene hasta 20 notas (los compases 1, 2 y 3 de la fuga) con varias repeticiones de la misma nota.

piezas. A los autores les parece importante el hecho de que se detecten ciertos elementos del preludio por medio de las permutaciones en la fuga, ya que " parece lógico el que ambas obras estén ligadas entre sí, puesto que constituyen un conjunto para el compositor. Sin embargo, aún cuando auditivamente pueden crear una impresión de unidad, el método tradicional de análisis musical no lo explica" [Est., p.119]. No obstante, ¡si se llevara el mismo proceso hasta la otra obra empleada en la aplicación, *La Patética* de Beethoven, seguramente se encontrarían también las relaciones de las simetrías del cubo entre ésta y el *Preludio* de Bach, por más disímolos que sean los estilos de composición de ambos, debido al carácter finito y permutable de las notas musicales como conjunto discreto!

Lo que es indiscutible es que el libro *Música y Teoría de Grupos Finitos (3 variables booleanas)* es la búsqueda más importante que se ha realizado en México de vincular el lenguaje musical con el de las matemáticas puras.

Capítulo 5

Música, Estructuras Algebraicas y Teoría de Autómatas

En 1987 se publicó un artículo en dos partes de Marc Chemillier, titulado *Monoïde Libre et Musique* (El Monoïde Libre y la Música). La primera parte se subtitula *Les Musiciens Ont-ils Besoin des Mathematiques?* (¿Necesitan Matemáticas los Músicos?) y se trata de un resumen de diferentes enfoques y trabajos representativos, algunos de los cuales ya reseñamos en el Capítulo 4. Concretamente, Chemillier bosqueja brevemente el trabajo de Allen Forte, Regener, Lewin y Balzano, así como de varios otros teóricos, algunos de los cuales se estudiarán más adelante en este capítulo, en relación a la Teoría de Autómatas. Chemillier concluye la primera parte de su artículo con una sección que titula *Punto de partida de una nueva proposición teórica*, en la que prepara el terreno para la segunda parte del mismo trabajo. Se advierte que esta segunda parte del *Monoïde Libre et Musique* es deliberadamente formal desde una perspectiva matemática, ya que "Este enfoque puede renovar el análisis tradicional que se conforma con buscar propiedades a tientas, a partir de hipótesis mal definidas" [Ch., p.369]. Asimismo, se explica que la intención es usar el marco algebraico para traducir al lenguaje matemático la doble organización de la música, o sea, lo horizontal y lo vertical. "Se introduce por tanto, aparte de la concatenación usual, una operación de sucesiones (secuencias) musicales" [Ch., p.369]. Cabe mencionar que en este capítulo nosotros abundamos en la ejemplificación, dado que nos parecía imperante mostrar cómo las propiedades abstractas de las estructuras algebraicas efectivamente

se traducen al lenguaje concreto de la música (¡por paradójico que suene hablar de la Música, que es el arte más abstracto, como un lenguaje concreto!)

V.I

La segunda parte del artículo entra inmediatamente en materia con las definiciones de las propiedades algebraicas de los objetos matemáticos que intervendrán en el desarrollo de dicho artículo. Hay varias formas de entender el material que maneja el autor. El fondo matemático nos remite a la Teoría de Grupos (Libres) o, en este caso, Monooides (Libres) cuando se definen por medio de relaciones y generadores; sin embargo, será esencial poder comprender los mismos objetos matemáticos en el contexto de la Teoría de Autómatas (véase el Apéndice 3).

Se recordará que un monoide es un concepto más general que el de grupo, ya que no posee la propiedad del inverso (dicho sea de paso, esta estructura parece acomodarse al caso de la música en que no hay un inverso simétrico en el sentido matemático, como vimos en el Capítulo IV). Se considera un conjunto finito E de elementos, y $A = \mathcal{P}(E)$ el conjunto de subconjuntos de E , como el alfabeto. Los elementos del alfabeto son conjuntos, y estos conjuntos son los símbolos indivisibles que forman dicho alfabeto (Σ , según la notación común) que sirve de base de los lenguajes dentro de la Teoría de Autómatas. Asimismo, se considera el monoide libre A^* , dotado de la concatenación (yuxtaposición) usual, que es el conjunto de sucesiones musicales.

En el lenguaje de la Teoría de Autómatas, el monoide libre A^* es Σ^* , o sea, el conjunto de *cuerdas* obtenido por la concatenación de cero o más símbolos de Σ [Linz, p.16]. Así es que, la yuxtaposición de las sucesiones musicales se traduce en la concatenación de símbolos, es decir, cuerdas según el lenguaje de la Teoría de Autómatas. Como se verá más adelante, se definen subconjuntos X, Y, \dots de A^* como *lenguajes*, lo cual también corresponde a la definición usual de un lenguaje como un subconjunto de Σ^* (véase el Apéndice 3).

En seguida el autor define una ley de composición sobre A^* , representada por \parallel , correspondiente a la *sobreposición* de sucesiones musicales. Es evidente que esta ley es un intento de representar el aspecto vertical, o armónico, del fenómeno musical.

5.1

Consideremos $u \parallel v = w$, para $u, v, w \in A^*$, definida así: $\parallel : A^* \times A^* \rightarrow A^*$, tal que

(1.1) Si $u = v = 1$ (la palabra vacía), entonces $w = 1$.

(1.2) Si u y v son de la misma longitud, entonces cada letra de w es la unión de las letras correspondiente en u y v . Cabe enfatizar otra vez que las "letras" son, en este caso conjuntos de $A = \mathcal{P}(E)$.

(1.3) Si $|u| > |v|$, sea $u = u'x$; entonces, $w = u||v = (u'||v) \cdot x$ donde $|u'| = |v|$.

En los ejemplos que siguen se usará esta notación: un conjunto $\{do, re, mi\}$ se escribirá como

$\begin{bmatrix} do \\ re \\ mi \end{bmatrix}$ y las operaciones se realizarán columna por columna.

Sea $E = \{do, re, mi\}$, $A = \mathcal{P}(E) = \{\{do\}, \{re\}, \{mi\}, \{do, re\}, \{do, mi\}, \{re, mi\}, \{do, re, mi\}, \emptyset\}$

$u = \{do\} \{do, mi\} \{do, re, mi\}$, $v = \{re\} \{re, mi\}$

Musicalmente, cada conjunto representa un acorde; u y v están en el monoide A^* , cuya operación es la concatenación.

Ejemplo 1.

$$u||v = \begin{array}{c} do \ do \ do \\ mi \ re \\ mi \end{array} \parallel \begin{array}{c} re \ re \ \emptyset \\ mi \\ \end{array} = \begin{array}{c} do \ do \ do \\ re \ re \ re \\ mi \ mi \end{array} = \{do, re.\} \{do, re, mi\} \{do, re, mi\} = w$$

En notación musical tenemos:



La ley $||$ es una especie de extensión a A^* (el monoide) de la ley \cup sobre $\mathcal{P}(E)$. Así es que, parece natural introducir una extensión de la ley \cap de $\mathcal{P}(E)$ (la intersección). De este modo se define una segunda ley sobre A^* , denotada ésta por \perp .

5.2

Consideremos $u \perp v = w$, para $u, v, w \in A^*$, definida así: $\perp : A^* \times A^* \rightarrow A^*$

(2.1) Si $u = v = 1$, entonces $w = 1$.

(2.2) Si $|u| = |v|$, entonces cada letra de w es la intersección de las letras correspondientes de u y v .

(2.3) Si $|u| > |v|$, sea $u = u'x$; entonces $w = u \perp v = u' \perp v$.

Ejemplo 2. Sean E, A, u y v como en el Ejemplo 1. $u \perp v =$

$$\begin{array}{ccc|ccc} \text{do} & \text{do} & \text{do} & \text{re} & \text{re} & \emptyset \\ & \text{mi} & \text{re} & & \text{mi} & = \\ & & \text{mi} & & & \end{array}$$

$\emptyset \text{ mi} \emptyset = \{ \text{mi} \} = w$.

Según la notación musical:



5.3

Asimismo, si $|u|$ denota la *longitud* de una palabra u , se tiene que:

(3.1) $|u \cdot v| = |u| + |v|$ (el símbolo \cdot representa la concatenación).

(3.2) $|u \parallel v| = \text{máx}(|u|, |v|)$.

(3.3) $|u \perp v| = \text{mín}(|u|, |v|)$.

Ejemplo 3. Sean E, A, u y v como en el Ejemplo 1.

$$|u \cdot v| = |u| + |v| = 3 + 2 = 5$$

$$|u \parallel v| = \text{máx}(|u|, |v|) = |u| = 3$$

$$|u \perp v| = \text{mín}(|u|, |v|) = |v| = 2$$

En seguida, el autor procede a definir las propiedades de cálculo de \cup y \cap sobre $\mathcal{P}(E)$ (el alfabeto) que se preservan por \parallel y \perp en el monoide libre A^* . Estas propiedades son:

5.4

(4.1) Idempotencia: $u \parallel u = u$, $u \perp u = u$.

Ejemplo 4.1. Sean E, A, u y v como en los ejemplos anteriores. $u \parallel u =$

$$\begin{array}{ccc} \text{do} & \text{do} & \text{do} \\ \parallel & & \\ \text{mi} & \text{re} & \\ \parallel & & \\ & \text{mi} & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{do} & \text{do} & \text{do} \\ & \text{mi} & \text{re} \\ & & \text{mi} \end{array}$$

$= \{ \text{do} \} \{ \text{do}, \text{mi} \} \{ \text{do}, \text{re}, \text{mi} \} = u$

$$\text{Asimismo, } u \perp u = \begin{array}{ccc} \text{do} & \text{do} & \text{do} \\ \text{mi} & \text{re} & \\ & & \text{mi} \end{array} \left\{ \begin{array}{ccc} \text{do} & \text{do} & \text{do} \\ & \text{mi} & \text{re} \\ & & \text{mi} \end{array} \right. = \{do\} \{do, mi\} \{do, re, mi\} = u$$

En notación musical se expresa:



(4.2) Asociatividad: $u \parallel (v \parallel w) = (u \parallel v) \parallel w$, $u \perp (v \perp w) = (u \perp v) \perp w$.

Ejemplo 4.2 Sean E, A, u y v como en los ejemplos previos y $w = \{do, mi\} \{re, mi\}$

$$u \parallel (v \parallel w) = \begin{array}{ccc} \text{do} & \text{do} & \text{do} \\ \text{mi} & \text{re} & \\ & & \text{mi} \end{array} \parallel \left(\begin{array}{ccc} \text{re} & \text{re} & \\ & \text{do} & \text{re} \\ & \text{mi} & \text{mi} \end{array} \right) = \begin{array}{ccc} \text{do} & \text{do} & \text{do} \\ \text{mi} & \text{re} & \\ & & \text{mi} \end{array} \parallel \begin{array}{ccc} \text{re} & \text{re} & \emptyset \\ & \text{do} & \text{mi} \\ & \text{mi} & \text{mi} \end{array}$$

$= \{do, re, mi\} \{do, re, mi\} \{do, re, mi\}$ y, por otro lado.

$$(u \parallel v) \parallel w = \left(\begin{array}{ccc} \text{do} & \text{do} & \text{do} \\ \text{mi} & \text{re} & \\ & & \text{mi} \end{array} \parallel \begin{array}{ccc} \text{re} & \text{re} & \emptyset \\ & \text{mi} & \end{array} \right) \parallel \begin{array}{ccc} \text{do} & \text{re} & \emptyset \\ \text{mi} & \text{mi} & \end{array} = \begin{array}{ccc} \text{do} & \text{do} & \text{do} \\ \text{mi} & \text{re} & \\ & & \text{mi} \end{array} \parallel \begin{array}{ccc} \text{do} & \text{re} & \emptyset \\ & \text{mi} & \text{mi} \\ & \text{mi} & \end{array}$$

$= \{do, re, mi\} \{do, re, mi\} \{do, re, mi\}$.

Según la notación musical:



$$u \perp (v \perp w) = \begin{array}{ccc} \text{do} & \text{do} & \text{do} \\ \text{mi} & \text{re} & \\ & & \text{mi} \end{array} \perp \left(\begin{array}{ccc} \text{re} & \text{re} & \\ & \text{do} & \text{re} \\ & \text{mi} & \text{mi} \end{array} \right) = \begin{array}{ccc} \text{do} & \text{do} & \text{do} \\ \text{mi} & \text{re} & \\ & & \text{mi} \end{array} \perp \begin{array}{ccc} \emptyset & \text{re} & \emptyset \\ & \text{mi} & \\ & \text{mi} & \end{array} = \{mi\}$$

$$(u \perp v) \perp w = \left(\begin{array}{ccc} \text{do} & \text{do} & \text{do} \\ \text{mi} & \text{re} & \\ & & \text{mi} \end{array} \perp \begin{array}{ccc} \text{re} & \text{re} & \emptyset \\ & \text{mi} & \end{array} \right) \perp \begin{array}{ccc} \text{do} & \text{re} & \\ \text{mi} & \text{mi} & \end{array} = \begin{array}{ccc} \emptyset & \text{mi} & \emptyset \\ & \text{do} & \text{re} & \emptyset \\ & \text{mi} & \text{mi} \end{array}$$

$= \{mi\}$



(4.3) Conmutatividad: $u||v = v||u$, $u\perp v = v\perp u$.

Ejemplo 4.3. Sean E, A, u, v y w como en los ejemplos anteriores.

$$\begin{array}{l}
 u||v = \begin{array}{c} \text{do do do} \\ \text{mi re} \\ \text{mi} \end{array} \Bigg| \begin{array}{c} \text{re re } \emptyset \\ \text{mi} \end{array} = \{do, re\} \{do, re, mi\} \{do, re, mi\} \\
 v||u = \begin{array}{c} \text{re re } \emptyset \\ \text{mi} \end{array} \Bigg| \begin{array}{c} \text{do do do} \\ \text{mi re} \\ \text{mi} \end{array} = \{do, re\} \{do, re, mi\} \{do, re, mi\}
 \end{array}$$

En notación musical se representa así:



$$\begin{array}{l}
 u\perp v = \begin{array}{c} \text{do do do} \\ \text{mi re} \\ \text{mi} \end{array} \Bigg| \begin{array}{c} \text{re re } \emptyset \\ \text{mi} \end{array} = \{mi\} \\
 v\perp u = \begin{array}{c} \text{re re } \emptyset \\ \text{mi} \end{array} \Bigg| \begin{array}{c} \text{do do do} \\ \text{mi re} \\ \text{mi} \end{array} = \{mi\}
 \end{array}$$

O sea, en notación musical, un sólo conjunto de un elemento:



(4.4) Absorción: $u|(u\perp v) = u$, $u\perp(u||v) = u$.

Ejemplo 4.4. Sean E, A, u y v como en los ejemplos anteriores.

$$u \parallel (u \perp v) = \begin{array}{ccc} do & do & do \\ mi & re & \\ mi & & \end{array} \parallel \left(\begin{array}{ccc} do & do & do \\ mi & re & \\ mi & & \end{array} \parallel \begin{array}{ccc} re & re & \emptyset \\ mi & & \end{array} \right) = \begin{array}{ccc} do & do & do \\ mi & re & \\ mi & & \end{array} \parallel \begin{array}{ccc} \emptyset & mi & \emptyset \end{array}$$

$$= \{do\} \{do, mi\} \{do, re, mi\} = u.$$

Según la notación musical:



$$u \perp (u \parallel v) = \begin{array}{ccc} do & do & do \\ mi & re & \\ mi & & \end{array} \parallel \left(\begin{array}{ccc} do & do & do \\ mi & re & \\ mi & & \end{array} \parallel \begin{array}{ccc} re & re & mi \\ mi & & \end{array} \right) = \begin{array}{ccc} do & do & do \\ mi & re & \\ mi & & \end{array} \parallel \begin{array}{ccc} do & do & do \\ re & re & re \\ mi & mi & \end{array}$$

$$= \{do\} \{do, mi\} \{do, re, mi\} = u$$

(4.5) Distributividad: $u \parallel (v \perp w) = (u \parallel v) \perp (u \parallel w)$, $u \perp (v \parallel w) = (u \perp v) \parallel (u \perp w)$

Ejemplo 4.5. Sean E, A, u, v y w como en los ejemplos previos.

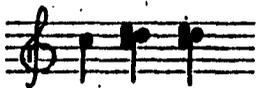
$$u \parallel (v \perp w) = \begin{array}{ccc} do & do & do \\ mi & re & \\ mi & & \end{array} \parallel \left(\begin{array}{ccc} re & re & do \\ mi & & mi \end{array} \parallel \begin{array}{ccc} do & re & \\ mi & mi & \end{array} \right) = \begin{array}{ccc} do & do & do \\ mi & re & \\ mi & & \end{array} \parallel \begin{array}{ccc} \emptyset & re & \emptyset \\ mi & & \end{array}$$

$$= \{do\} \{do, re, mi\} \{do, re, mi\}$$

$$(u \parallel v) \perp (u \parallel w) = \left(\begin{array}{ccc} do & do & do \\ mi & re & \\ mi & & \end{array} \parallel \begin{array}{ccc} re & re & \emptyset \\ mi & & \end{array} \right) \parallel \left(\begin{array}{ccc} do & do & do \\ mi & re & \\ mi & & \end{array} \parallel \begin{array}{ccc} do & re & \emptyset \\ mi & mi & \end{array} \right) =$$

$$\begin{array}{ccc} do & do & do \\ re & re & re \\ mi & mi & \end{array} \parallel \begin{array}{ccc} do & do & do \\ mi & re & re \\ mi & mi & \end{array} = \{do\} \{do, re, mi\} \{do, re, mi\}$$

En notación musical, la cuerda de conjuntos se expresa como:



$$u \perp (v \parallel w) = \begin{array}{ccc} do & do & do \\ mi & re & \\ mi & & \end{array} \parallel \left(\begin{array}{ccc} re & re & do \\ mi & & mi \end{array} \parallel \begin{array}{ccc} do & re & \\ mi & mi & \end{array} \right) = \begin{array}{ccc} do & do & do \\ mi & re & \\ mi & & \end{array} \parallel \begin{array}{ccc} do & re & \emptyset \\ re & re & \\ mi & mi & \end{array} =$$

$$\{do\} \{do, mi\} \{re, mi\}$$

$$(u \perp v) \parallel (u \perp v) = \begin{pmatrix} do & do & do \\ & mi & re \\ & & mi \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} re & re & \emptyset \\ & & mi \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} do & do & do \\ & mi & re \\ & & mi \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} do & re & \emptyset \\ & mi & mi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & re \\ & & mi \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} do & do & re \\ & mi & mi \end{pmatrix} = \{do\} \{do, mi\} \{re, mi\}$$

Que, según la notación musical, es:



(4.6) La palabra vacía (1) es el neutro para la sobreposición \parallel , pues: $1 \parallel u = 1 \parallel (1 \cdot u) = (1 \parallel 1) \cdot u = 1 \cdot u = u$.

Por otro lado, ciertas propiedades de \cup y \cap sobre $\mathcal{P}(E)$ se pierden en A^* . Por ejemplo.

Proposición: No existe un neutro para \perp .

Demostración. Supongamos que e es tal que $u \perp e = u$ para todo $u \in A^*$. Así es que $|u \perp e| = |u|$. Pero como $|u \perp e| = \min(|u|, |e|)$, tenemos que $|e| \geq |u|$ para todo $u \in A^*$. Por lo tanto e es una palabra infinita, y hay una contradicción, mostrando así que no hay neutro para \perp . ■

Las propiedades 4.1, 4.2, 4.3 y 4.4 otorgan a A^* una estructura llamada *enrejado*. Si se incluyen las propiedades de la concatenación (\cdot) , se tiene:

(4.7) Asociatividad: $u(vw) = (uv)w$.

Ejemplo 4.7. Sean E, A, u, v y w como en los ejemplos anteriores.

$$u(vw) = \{do\} \{do, mi\} \{do, re, mi\} (\{re\} \{re, mi\} \{do, mi\} \{re, mi\}) =$$

$$(\{do\} \{do, mi\} \{do, re, mi\} \{re\} \{re, mi\}) \{do, mi\} \{re, mi\} = (uv)w$$

(4.8) El neutro (1), llamada palabra vacía.

(4.9) Distributividad por la izquierda de \cdot sobre \parallel y \perp : $u(v \parallel w) = uv \parallel uw$, $u(v \perp w) = uv \perp uw$

Ejemplo 4.9. Sean E, A, u, v y w como en los ejemplos anteriores.

$$u(v \parallel w) = \{do\} \{do, mi\} \{do, re, mi\} \left(\begin{pmatrix} re & re \\ & mi \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} do & re \\ & mi & mi \end{pmatrix} \right) =$$

$$\begin{array}{l}
 \{do\} \{do, mi\} \{do, re, mi\} \{do, re, mi\} \{re, mi\} \\
 \begin{array}{c}
 do \ do \ do \ re \ re \\
 mi \ re \ mi
 \end{array} \parallel \begin{array}{c}
 do \ do \ do \ do \ re \\
 mi \ re \ mi \ mi
 \end{array} = \\
 \{do\} \{do, mi\} \{do, re, mi\} \{do, re, mi\} \{re, mi\}.
 \end{array}$$

En notación musical, $u(v\|w) = uv\|uw =$



$$\begin{array}{l}
 u(v\perp w) = \{do\} \{do, mi\} \{do, re, mi\} \left(\begin{array}{c} re \ re \\ mi \end{array} \left| \begin{array}{c} do \ re \\ mi \ mi \end{array} \right. \right) = \{do\} \{do, mi\} \{do, re, mi\} \{re \ mi\} \\
 \begin{array}{c}
 do \ do \ do \ re \ re \\
 mi \ re \ mi
 \end{array} \left| \begin{array}{c}
 do \ do \ do \ do \ re \\
 mi \ re \ mi \ mi
 \end{array} \right. = \{do\} \{do, mi\} \{do, re, mi\} \{re, mi\} \\
 uv\perp uw = \begin{array}{c}
 do \ do \ do \ re \ re \\
 mi \ re \ mi
 \end{array} \left| \begin{array}{c}
 do \ do \ do \ do \ re \\
 mi \ re \ mi \ mi
 \end{array} \right. = \{do\} \{do, mi\} \{do, re, mi\} \{re, mi\} \\
 \begin{array}{c}
 do \ do \ do \ re \ re \\
 mi \ re \ mi
 \end{array} \left| \begin{array}{c}
 do \ do \ do \ do \ re \\
 mi \ re \ mi \ mi
 \end{array} \right. = \{do\} \{do, mi\} \{do, re, mi\} \{re, mi\}
 \end{array}$$

En notación musical, $u(v\perp w) = uv\perp uw =$



5.5

Definición. Un *enrejado* (véase pág. 80) es un conjunto con dos leyes (T, \wedge, \vee) , que verifica:

$$(5.1) \text{ Idempotencia: } u \wedge u = u, \quad u \vee u = u.$$

$$(5.2) \text{ Asociatividad: } u \wedge (v \wedge u) = (u \wedge v) \wedge w, \quad u \vee (v \vee w) = (u \vee v) \vee w$$

$$(5.3) \text{ Conmutatividad: } u \wedge v = v \wedge u, \quad u \vee v = v \vee u$$

$$(5.4) \text{ Absorción: } u \wedge (u \vee v) = u, \quad u \vee (u \wedge v) = u$$

Un *conjunto reticulado* es un conjunto con una relación de orden (E, \preceq) tal que, para todo x y y en E , existen el $\inf(x, y)$ y el $\sup(x, y)$.

Teorema 5.1: Todo conjunto reticulado es un enrejado y recíprocamente.

La correspondencia entre las dos estructuras se presenta canónicamente como:

(a) Si T (o sea, (T, \wedge, \vee)) es un enrejado, se define una relación de orden \preceq sobre T : $x \preceq y$ si y sólo si $x \vee y = y$ ó $x \wedge y = x$.

(b) Si (E, \preceq) es un conjunto reticulado, se definen \wedge y \vee como: $x \wedge y = \inf(x, y)$ y $x \vee y = \sup(x, y)$.

Primeramente se demostrará que un enrejado es un conjunto reticulado. Sea $x \preceq y$ para $x = x \wedge y$.

Entonces $x \vee y = (x \wedge y) \vee y = y$. La relación \preceq es una relación de orden, ya que

$$(5.5) \quad x \preceq x, \text{ entonces } x \wedge x = x.$$

$$(5.6) \quad x \preceq y \text{ y } y \preceq x, \text{ entonces } x = y, \text{ pues } x = x \wedge y = y \wedge x = y.$$

$$(5.7) \quad x \preceq y \text{ y } y \preceq z, \text{ entonces } x \preceq z, \text{ ya que } x \wedge z = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) = x \wedge y = x.$$

Así es que, para x, y en T , $\inf(x, y)$ existe, y es igual a $x \wedge y$ porque:

$$(x \wedge y) \wedge x = x \wedge y \text{ donde } x \wedge y \preceq x \text{ y } (x \wedge y) \wedge y = x \wedge y \text{ donde } x \wedge y \preceq y.$$

Asimismo, si $m \wedge x = m \wedge y = m$ (es decir, $m \preceq x$ y $m \preceq y$), entonces

$$m \wedge (x \wedge y) = m \wedge x = m, \text{ donde } m \preceq x \wedge y.$$

Por lo tanto, $\inf(x, y) = x \wedge y$.

Análogamente,

$$(x \vee y) \vee x = y \vee x \text{ donde } y \vee x \succeq x \text{ y } (x \vee y) \vee y = y \vee y \text{ donde } y \succeq y.$$

De igual forma, si $x \vee m = y \vee m = m$ ($m \succeq x$ y $m \succeq y$), entonces $m \vee (x \vee y) = m \vee y = m$

donde $m \succeq x \vee y$.

Por lo tanto, $\sup(x, y) = x \vee y$.

Ahora demostraremos que un conjunto reticulado es un enrejado, ya que cumple las propiedades estipuladas. Sea $x \wedge y = \inf(x, y)$ y $x \vee y = \sup(x, y)$.

(5.1) Idempotencia: $\inf(x, x) = \sup(x, x) = x$.

(5.2) Asociatividad: sea $x \preceq y$, $y \preceq z$. Los supremos comunes a x y $\sup(y, z)$ son del conjunto $\{x, y, z\}$ y será el mismo supremo para el $\sup(x, y)$ y z . En este caso el supremo es z .

Análogamente, el ínfimo de x e $\inf(y, z)$ se encuentran igualmente en el conjunto $\{x, y, z\}$ y será el mismo para el ínfimo entre $\inf(x, y)$ y z . En este caso el ínfimo es x .

Conmutatividad: $\inf(x, y) = \inf(y, x)$, $\sup(x, y) = \sup(y, x)$.

Absorción: $\inf(x, \sup(x, y)) = \sup(x, \inf(x, y))$ porque $x \preceq \sup(x, y)$ y $x \succeq \inf(x, y)$. ■

5.6

Definición. Una estructura matemática llamada *solfeo*, es un conjunto dotado de tres leyes $(S, \parallel, \perp, \cdot)$ que verifica:

(6.1) (S, \parallel, \perp) es un enrejado distributivo (es decir, cumple con 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 y 4.5).

(6.2) (S, \cdot) es un monoide con elemento neutro 1.

(6.3) 1 es neutro para \parallel .

(6.4) La concatenación \cdot es distributiva por la izquierda sobre \parallel y \perp .

Ejemplo 6.1. $(N, \text{máx}, \text{mín}, +)$ es un solfeo, con N el conjunto de número naturales.

Sabemos que el orden sobre N es total, es decir, para todo $m, n \in N$,

$m \preceq n$ o $n \preceq m$. Esto implica que (N, \preceq) es un conjunto reticulado, puesto que para todo m, n de N , $\inf(m, n) = m$ si $m \preceq n$ o $\inf(m, n) = n$ si $n \preceq m$ y análogamente para el supremo. Como (N, \preceq) es un conjunto reticulado, posee a la vez la estructura de un enrejado, como ya se demostró. Además, el enrejado es:

(6.1.1) distributivo, ya que $\text{máx}(m, \text{mín}(n, p)) = \text{mín}(\text{máx}(m, n), \text{máx}(m, p))$ y

$\text{mín}(m, \text{máx}(n, p)) = \text{máx}(\text{mín}(m, n), \text{mín}(m, p))$;

(6.1.2) asociativo, dado que la suma sobre N posee esta propiedad, y cero es neutro para $+$

$(m+0 = 0+m = m)$;

(6.1.3) distributivo, para la suma sobre máx y mín , porque:

donde $m \succeq x \vee y$.

Por lo tanto, $\sup(x, y) = x \vee y$.

Ahora demostraremos que un conjunto reticulado es un enrejado, ya que cumple las propiedades estipuladas. Sea $x \wedge y = \inf(x, y)$ y $x \vee y = \sup(x, y)$.

(5.1) Idempotencia: $\inf(x, x) = \sup(x, x) = x$.

(5.2) Asociatividad: sea $x \preceq y$, $y \preceq z$. Los supremos comunes a x y $\sup(y, z)$ son del conjunto $\{x, y, z\}$ y será el mismo supremo para el $\sup(x, y)$ y z . En este caso el supremo es z .

Análogamente, el ínfimo de x e $\inf(y, z)$ se encuentran igualmente en el conjunto $\{x, y, z\}$ y será el mismo para el ínfimo entre $\inf(x, y)$ y z . En este caso el ínfimo es x .

Conmutatividad: $\inf(x, y) = \inf(y, x)$, $\sup(x, y) = \sup(y, x)$.

Absorción: $\inf(x, \sup(x, y)) = \sup(x, \inf(x, y))$ porque $x \preceq \sup(x, y)$ y $x \succeq \inf(x, y)$. ■

5.6

Definición. Una estructura matemática llamada *solfeo*, es un conjunto dotado de tres leyes $(S, \parallel, \perp, \cdot)$ que verifica:

(6.1) (S, \parallel, \perp) es un enrejado distributivo (es decir, cumple con 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 y 4.5).

(6.2) (S, \cdot) es un monoide con elemento neutro 1.

(6.3) 1 es neutro para \parallel .

(6.4) La concatenación \cdot es distributiva por la izquierda sobre \parallel y \perp .

Ejemplo 6.1. $(N, \text{máx}, \text{mín}, +)$ es un solfeo, con N el conjunto de número naturales.

Sabemos que el orden sobre N es total, es decir, para todo $m, n \in N$,

$m \preceq n$ o $n \preceq m$. Esto implica que (N, \preceq) es un conjunto reticulado, puesto que para todo m, n de N , $\inf(m, n) = m$ si $m \preceq n$ o $\inf(m, n) = n$ si $n \preceq m$ y análogamente para el supremo. Como (N, \preceq) es un conjunto reticulado, posee a la vez la estructura de un enrejado, como ya se demostró. Además, el enrejado es:

(6.1.1) distributivo, ya que $\text{máx}(m, \text{mín}(n, p)) = \text{mín}(\text{máx}(m, n), \text{máx}(m, p))$ y

$\text{mín}(m, \text{máx}(n, p)) = \text{máx}(\text{mín}(m, n), \text{mín}(m, p))$;

(6.1.2) asociativo, dado que la suma sobre N posee esta propiedad, y cero es neutro para $+$ ($m+0 = 0+m = m$);

(6.1.3) distributivo, para la suma sobre máx y mín , porque:

$$m + \max(n, p) = \max(m + n, m + p) \quad \text{y} \quad m + \min(n, p) = \min(m + n, m + p).$$

(6.1.4) Asimismo, el cero es neutro para el máximo ya que para todo $m \in N$.

$$\max(0, m) = \max(m, 0) = m. \blacksquare$$

5.7

Veamos cómo se relacionan dos sofeos. Definimos un morfismo φ de un monoide A^* en un monoide M con las siguientes características:

$$(7.1) \quad \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y),$$

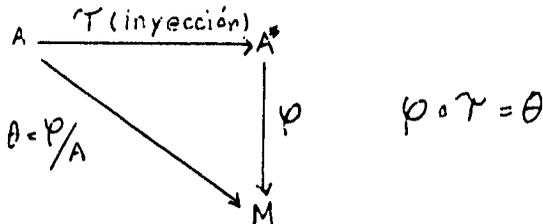
$$(7.2) \quad \varphi(1_{A^*}) = 1_M.$$

La forma en que se caracterizan los monoïdes libres es a través de las aplicaciones universales. Para toda aplicación θ de A (un alfabeto) en un monoïde M , existe un morfismo único φ , del monoïde A^* en M , que extiende θ .

$$\theta = \varphi/A \quad (\varphi \text{ restringido a } A)$$

$$\varphi(u_1 u_2) = \varphi(u_1)\varphi(u_2)$$

$$\varphi(1_{A^*}) = 1_M \quad (\text{donde } 1 \text{ es la palabra vacía de } A^*)$$



Ejemplo 7.1. Sean E, A y u como en los ejemplos anteriores.

Consideremos la inyección $\tau : A \rightarrow A^*$, $\tau(h) = u$, $u \in A^*$, con:

$$\theta = \varphi/A : A \rightarrow M, \quad \theta(h) = 2u.$$

Sea $\varphi : A^* \rightarrow M$, $\varphi(u) = 2u$, entonces:

$$\tau(\{do\}, \{do, mi\}, \{do, re, mi\}) = \{do\} \{do, mi\} \{do, re, mi\}$$

$$\theta(\{do\}, \{do, mi\}, \{do, re, mi\}) = \{do\} \{do, mi\} \{do, re, mi\} \{do\} \{do, mi\} \{do, re, mi\}$$

$$\varphi(\{do\} \{do, mi\} \{do, re, mi\}) = \{do\} \{do, mi\} \{do, re, mi\} \{do\} \{do, mi\} \{do, re, mi\}$$



En términos generales no se puede definir un homomorfismo f , de un solfeo S en un solfeo S' , tal que:

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

$$f(x \parallel y) = f(x) \parallel f(y).$$

El problema estriba en el hecho de que los elementos de un solfeo pueden descomponerse de distintas maneras por \parallel (en la demostración del Teorema 5.2 se ilustra este hecho). Sin embargo, bajo ciertas restricciones podemos definir un homomorfismo de S en S' .

Teorema 5.2: Para toda aplicación λ de E en el solfeo S' , donde $B = \mathcal{P}(F)$, existe un morfismo único f del solfeo S , donde $A = \mathcal{P}(E)$, en el solfeo S' que extiende a λ , si y sólo si

$$(7.3) \text{ Para todo } a, b \in E, |\lambda(a)| = |\lambda(b)| \text{ y}$$

$$(7.4) \perp_{b \in E} \lambda(b) = \emptyset \emptyset \dots \emptyset \quad (\text{entonces, } f(\emptyset) = \emptyset \emptyset \dots \emptyset).^1$$

¹ Aunque no se menciona en el artículo, es evidente que la extensión se realiza por medio de funtores (véase el Apéndice 4), o sea, $f = F(\lambda')$. Veamos que $f = F(\lambda')$ es un functor covariante.

(II.2.1) A cada objeto (conjunto) $E \in C$, se le asocia $S \in C'$, donde los objetos de C' son solfeos.

(II.2.2) A cada morfismo $(\lambda' : E \rightarrow F) \in C(E, F)$, se le asocia un morfismo $(F(\lambda') : F(E) \rightarrow F(F) \in C'(F(E), F(F)))$ (donde los objetos de C' son solfeos), que satisface:

(II.2.3) $F(\lambda'' \circ \lambda') = F(\lambda'') \circ F(\lambda')$.

Demostración. Primeramente demostraremos la necesidad. Sea f un morfismo único de S en S' . Supongamos que, para algún $a, b \in E$, $|\lambda(a)| \neq |\lambda(b)|$, ($\lambda = f/E$ como en la hipótesis). Supongamos también, sin pérdida de generalidad, que $|\lambda(a)| > |\lambda(b)|$. Sea $u = \{a, b\}$ $\{a, b\} =$
 $\begin{matrix} a & a \\ b & b \end{matrix}$ en cuyo caso, se tiene que $u = aa\|bb = ab\|ba$ (esto ejemplifica las distintas maneras de descomposición bajo $\|$). Por un lado,

$$f(u) = f(aa\|bb) = f(aa)\|f(bb) = f(a)f(a)\|f(b)f(b) = \lambda(a)\lambda(a)\|\lambda(b)\lambda(b) \quad \text{y así: } |f(u)| = 2|\lambda(a)| \quad (\text{por 3.2}).$$

$$f(u) = f(ab\|ba) = f(ab)\|f(ba) = f(a)f(b)\|f(b)f(a) = \lambda(a)\lambda(b)\|\lambda(b)\lambda(a), \quad \text{de donde } |f(u)| = |\lambda(a)| + |\lambda(b)| < 2|\lambda(a)| \quad (\text{también por 3.2}).$$

Por lo tanto, para todo $a, b \in E$, $|\lambda(a)| = |\lambda(b)|$, ya que la longitud es única.

De modo igual, sabemos que $\emptyset \in E$ y que $|\lambda(\emptyset)| = |\lambda(a)|$ para todo $a \in E$ (por lo que acabamos de demostrar). Supongamos que, para $E = \{a, b\}$, $F = \{x, y\}$, que $\lambda'(a) = x$, $\lambda'(b) = \{x, y\} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ($\lambda' : E \rightarrow F$). Entonces, $\lambda'(a) \cap \lambda'(b) = \{x\} \neq \emptyset$ y para $\lambda(\emptyset)$ habría dos posibilidades: $\lambda(\emptyset) = x$ ó $\lambda(\emptyset) = \emptyset$ (por la definición de morfismo, ya que $\lambda = f/E$). Como esto no puede suceder, tenemos que $\perp_{b \in E} \lambda(b) = \emptyset \emptyset \dots \emptyset$. Entonces, $\lambda(\emptyset) = \emptyset \emptyset \dots \emptyset$ (n veces).

De esta manera, si f es un morfismo único de S en S' , $\lambda = f/E$ verifica 7.3 y 7.4.

Supongamos ahora que 7.3 y 7.4 se verifican para λ de E en B^* y sea $k = |\lambda(a)|$, $a \in E$. Asimismo, sea $f : S \rightarrow S'$, dada por:

$f(\emptyset) = \emptyset \emptyset \dots \emptyset$ (k veces), $f(1) = 1$; (\emptyset es el elemento idéntico para $\|$ y 1 es la identidad para \cdot).

$$f(u_i) = \|\|_{a \in u_i} \lambda(a) \quad \text{para } u_i \in A = \mathcal{P}(E), \quad u_i \neq \emptyset;$$

$$f(u) = f(u_1)f(u_2)\dots f(u_n) \quad \text{para } u = u_1u_2\dots u_n, \quad \text{con } u_i \in A, \quad u \in A^*$$

Veamos que f es un morfismo: sea $u = vw$, $u = u_1u_2\dots u_n$, $v = u_1\dots u_p$, $w = u_{p+1}\dots u_n$. Entonces, $f(v)f(w) = f(u_1\dots u_p)f(u_{p+1}\dots u_n) = f(u_1)\dots f(u_p)f(u_{p+1})\dots f(u_n) = f(u_1\dots u_n) = f(u) = f(vw)$.

Como el dominio de $F(\lambda^n)$ es $\text{im}F(\lambda')$ el funtor es covariante. Esto se aprecia claramente por la dirección de las flechas.
 (II.2.4) $F(1_E) = 1_{F(E)}$, ya que $1_E = \emptyset$ bajo la unión (\cup) en E , y $1_{F(E)} = \emptyset$ bajo $\|$ en S .

Sea $u = v \parallel w$, $u = u_1 \dots u_n$, $\max(|v|, |w|) = |u|$, donde suponemos, sin pérdida de generalidad, que $|w| = |u| = n$. Sea $w = w_1 \dots w_n$ y $v = v_1 \dots v_p$, con $u_i = w_i \cup v_i$ para $i \leq p$, y $u_i = w_i$ para $i \geq p + 1$. Entonces, $f(v) \parallel f(w) = f(v_1) \dots f(v_p) \parallel f(w_1) \dots f(w_p) f(w_{p+1}) \dots f(w_n)$ donde, según 7.3, $|f(v_i)| = |f(w_i)|$ para todo $i \leq p$.² Así es que, se puede aplicar la propiedad de cálculo (1.3) que ya se vio en este capítulo y se tiene: $f(v) \parallel f(w) = (f(v_1) \dots f(v_p) \parallel f(w_1) \dots f(w_p)) f(w_{p+1}) \dots f(w_n) = ((f(v_1) \parallel f(w_1)) \dots (f(v_p) \parallel f(w_p)) f(w_{p+1}) \dots f(w_n)$.

Pero si $v_i, w_i \in A$, entonces $f(v_i) \parallel f(w_i) = (\|_{a \in v_i} \lambda(a)) (\|_{a \in w_i} \lambda(a)) = \|_{a \in v_i \cup w_i} \lambda(a) = f(v_i \cup w_i)$. Por lo tanto, $f(v) \parallel f(w) = [f(v_1 \cup w_1) \dots f(v_p \cup w_p)] \cdot f(w_{p+1}) \dots f(w_n) = f(u) = f(v \parallel w)$.

Ahora probaremos la unicidad. Supongamos que hay otro morfismo h . Hay que verificar que $h/E = \lambda = f/E$ para poder afirmar que $h = f$. De la condición 7.3 vemos que $h(\emptyset) = \emptyset \dots \emptyset = f(\emptyset)$. Por la definición de un morfismo $h(1) = 1 = f(1)$. Para todo $u_i \in A$ se ve, por la forma en que está definida la aplicación, que si $u_i = v_i \cup w_i$, donde $v_i \neq w_i$, entonces, para $a_1 \dots a_p \in v_i$ y $a_{p+1} \dots a_n \in w_i$, se tiene que $h(u_i) = h(v_i) \parallel h(w_i) = \|_{a \in v_i} \lambda(a) \|_{a \in w_i} \lambda(a) = \lambda(a_1) \parallel \lambda(a_2) \dots \parallel \lambda(a_n) = f(v_i) \parallel f(w_i) = f(u_i)$. Así es que, $f/E = h/E$. Ahora, sea $u \in A^*$, $u = v_i w_i$. Entonces, $h(u) = h(v_i) h(w_i) = \|_{a \in v_i} \lambda(a) \|_{a \in w_i} \lambda(a) = f(v_i) f(w_i) = f(u)$. Por lo tanto, $f = h$. ■

Ejemplo 7.2. *El morfismo de la transposición.* Una transposición (o transportación) de una sucesión musical (una palabra o cuerda) implica recorrer la misma sucesión un intervalo (musical) más agudo o más grave. En este caso se considera una transposición a un semitono superior. Si $E = \{la, do, mi\}$, entonces $F = \{si^b, re^b, fa\}$. La transposición aparece como la extensión de la aplicación de E en F definida así: $la \rightarrow si^b$, $do \rightarrow re^b$, $mi \rightarrow fa$. Esta es una aplicación inyectiva de E en F .

²Es evidente que u_i pertenece a A , y no a E como estipula 7.3. Pero por la construcción del morfismo, $f(u_i) = \|_{a \in u_i} \lambda(a)$ para $u_i \in A$. Así es que: $|f(u_i)| = |\|_{a \in u_i} \lambda(a)| = \max(|\lambda(a_j)|) \text{ (con } j = 1 \dots n) = |\lambda(a)| = |\lambda(b)| = \max(|\lambda(b_j)|) = |\|_{a \in v_i} \lambda(b)| = |f(v_i)|$.

La Transposición

E = { la, do, mi }

F = { sib, reb, fa }

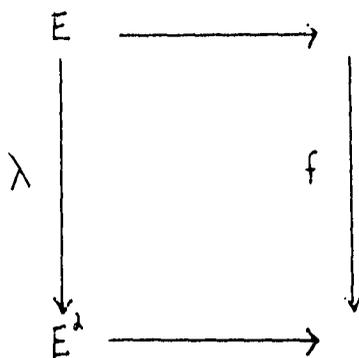
The diagram illustrates the transposition of a musical piece from E major to F major. On the left, two musical staves are shown: the top one is for E major and the bottom one is for F major. The E major staff has a treble clef and a bass clef, with notes G, A, B, C, D, E. The F major staff has a treble clef and a bass clef, with notes F, G, A, Bb, C, D. Arrows indicate the transposition: a vertical arrow from E to F, a diagonal arrow from E to B*, and a vertical arrow from B* to F. On the right, two musical staves are shown: the top one is for A* major and the bottom one is for B* major. The A* major staff has a treble clef and a bass clef, with notes C, D, E, F, G, A. The B* major staff has a treble clef and a bass clef, with notes D, E, F, G, A, B. Arrows indicate the relationship between these staves: a vertical arrow from A* to B*, and a vertical arrow from B* to F. The letter 'f' is written next to the arrow from B* to F.

Ejemplo 7.3. Aumento y disminución en el ritmo. En este ejemplo veremos que el aumento rítmico es un morfismo aditivo y multiplicativo. Se considera un aumento en el ritmo que dobla los valores. Algebraicamente se representa así: sea E el conjunto de elementos que consta de dos partes disjuntas con la misma cardinalidad, $E = E_0 \cup E'$. Para a en E_0 (a dura una unidad mínima de tiempo), a' significa que se extiende una unidad de tiempo. Sea $\lambda' : E \rightarrow E^2$ definida para $\lambda'(a) = aa'$ y $\lambda'(a') = a'a'$. Tenemos que,

(i) Para todo $a \in E$, $|\lambda(a)| = 2$;

(ii) $\bigcup_{a \in E} \lambda(a) = \emptyset$

Así es que el aumento que extiende λ es un morfismo.



5.8

Después de desarrollar las estructuras algebraicas y sus morfismos, se explora el álgebra de las relaciones de equivalencia y la música. Primeramente, y acorde con el propósito inicial de formalizar todo, se define una relación \mathcal{R} que es compatible a la izquierda con una ley \cdot (la concatenación) sobre E .

Definición 8.0. Para todo $x, y, z \in E$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow zx\mathcal{R}zy$. Asimismo, la relación es compatible bilateralmente si se cumple para la izquierda y la derecha.

Ejemplo 8.0. Consideremos $do, mi, sol \in E$. Si $mi\mathcal{R}sol$, entonces, $do\ mi\mathcal{R}\ do\ sol$.

En seguida se enumeran unas definiciones en torno al monoide (A^*, \cdot) . Es en esta parte donde se introduce un subconjunto X de A^* , al cual se le denomina un *lenguaje* (véase el Apéndice 3).

Definición 8.1. La relación de equivalencia sobre A^* para los *buenos finales*: $x \sim y$ si y sólo si para todo $u \in A^*$, tenemos que (a) si $xu \in X$ entonces $yu \in X$ y (b) si $yu \in X$ entonces $xu \in X$.

Ejemplo 8.1 (los buenos finales)

Sea $u = \{\text{sol, si, re, fa}\} \{\text{do, mi, sol}\}$, $x = \text{sol}$, $y = \text{re}$. Tenemos que $x \sim y$, puesto que $\text{sol} \{\text{sol, si, re, fa}\} \{\text{do, mi, sol}\} \sim \text{re} \{\text{sol, si, re, fa}\} \{\text{do, mi, sol}\}$



Definición 8.2. La relación de equivalencia sobre A^* para los *buenos contextos*: $x \equiv y$ si y sólo si para todo $u, v \in A^*$, si $uxv \in X$ entonces $uyv \in X$.

Ejemplo 8.2. (los buenos contextos)

Sean x y y como en el ejemplo anterior y, en este caso, sea v como era u en dicho ejemplo anterior. En este ejemplo sea $u = \{\text{do, mi, sol}\} \{\text{sol, si}\}$. Así es que, $x \equiv y$, dado que $\{\text{do, mi, sol}\} \{\text{sol, si}\} \{\text{sol}\} \{\text{sol, si, re, fa}\} \{\text{do, mi, sol}\} \in X$ y $\{\text{do, mi, sol}\} \{\text{sol, si}\} \{\text{re}\} \{\text{sol, si, re, fa}\} \{\text{do, mi, sol}\} \in X$.



Definición 8.3. Ahora se define una relación sobre el solfeo $(A^*, \parallel, \perp, \cdot)$ donde $A = \mathcal{P}(E)$ llamada la relación de equivalencia para las buenas armonías: $x \parallel y$ si para todo $u, v \in A^*$, $u(x \parallel v) \in X$ si y sólo si $u(y \parallel v) \in X$.

Ejemplo 8.3. (las buenas armonías)

Sean u, v, x, y como en el ejemplo anterior.

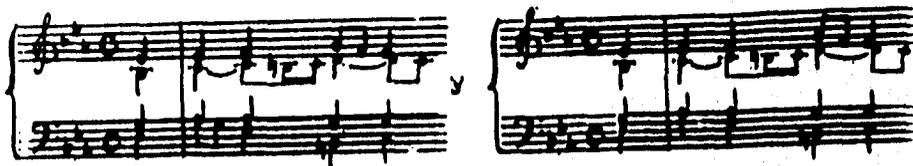
$$\begin{aligned}
 u(x||v) &= \{do, mi, sol\} \{sol, si\} \left(\begin{array}{c|c} sol & \emptyset \\ \hline & sol \quad ao \\ & si \quad mi \\ & re \quad sol \\ & fa \quad . \end{array} \right) = \\
 &\{do, mi, sol\} \{sol, si\} \{sol, si, re, fa\} \{do, mi, sol\} \in X \\
 u(y||v) &= \{do, mi, sol\} \{sol, si\} \left(\begin{array}{c|c} re & \emptyset \\ \hline & sol \quad do \\ & si \quad mi \\ & re \quad sol \\ & fa \quad . \end{array} \right) = \\
 &\{do, mi, sol\} \{sol, si\} \{sol, si, re, fa\} \{do, mi, sol\} \in X
 \end{aligned}$$



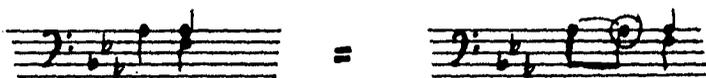
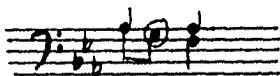
En el ejemplo musical que viene a continuación, se puede distinguir entre las relaciones de equivalencia y las que no lo son.

Ejemplo 8.4

Sea X el lenguaje contenido en las dos sucesiones siguientes, que difieren por una sola nota, llamada *nota de paso* y que puede o no omitirse.



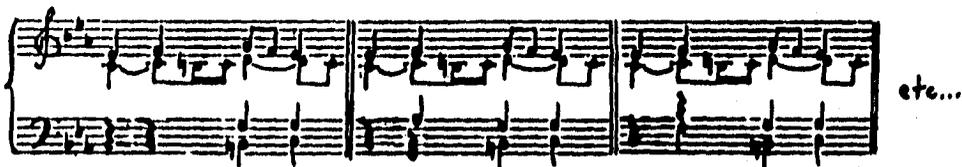
Así es que, las dos sucesiones son equivalentes para los buenos contextos.



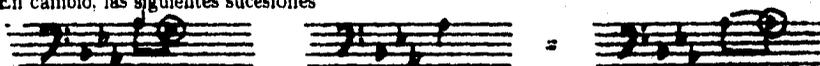
ya que si x es el *sol* del primero, y y es *la*^b con el valor de una corchea, tenemos que $uxv \in X$ y $uyv \in X$. Los contextos armónicos comunes son:



v pueda ser:



En cambio, las siguientes sucesiones

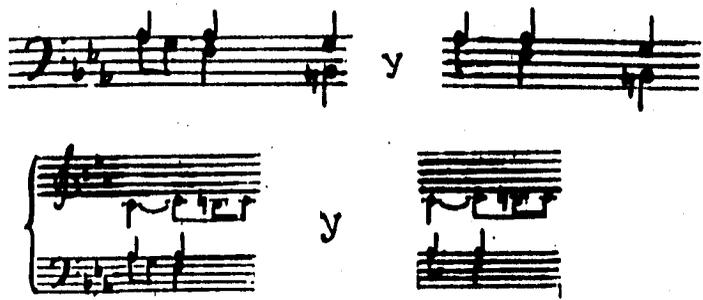


no son equivalentes, puesto que se puede encontrar un contexto armónico que convenga a la segunda y no a la primera:



El problema que se presenta aquí es que se pierde el *la*² que le da su característica al acorde de *fa* menor. Si vemos a *x* como el *sol* de a) y a *y* como el *la*² de b) con valor de una corchea, $u(x||v) \notin X$ y $u(y||v) \in X$, siendo *X* el contexto armónico que admite el acorde de *fa* menor.

Por otro lado, las sucesiones mostradas en seguida sí son equivalentes.



ya que no se pierde el la^2 .

5.9

Después de explorar las relaciones netamente algebraicas del monoide A^* y sus derivados (como el solfeo), el autor cambia el enfoque al de la Teoría de Autómatas. Se toma el solfeo $(S, \parallel, \perp, \cdot)$, donde $A = \mathcal{P}(E)$, y los subconjuntos o lenguajes $X, Y \subset A^*$ y se define la *sobreposición* de X y Y como: $X \parallel Y = \{X \parallel Y : x \in X, y \in Y\}$. Asimismo, se define la *sobreposición de longitudes iguales* de X y Y como: $X \Pi Y = \{x \parallel y : x \in X, y \in X, |x| = |y|\}$. De esta manera se formula un teorema:

Teorema 5.3: Si X y Y son dos lenguajes pertenecientes a S y reconocibles para un autómata (véase el Apéndice 3), entonces $X \Pi Y$ también es reconocible para un autómata.

Demostración: sea $\mathcal{A} = (Q, \delta, T)$ y $\mathcal{A}' = (Q', \delta', T')$ dos autómatas deterministas receptores que reconocen los lenguajes X y Y . Se forma el autómata $\mathcal{A}'' = (Q \times Q', \delta, \delta', T \times T')$ de la siguiente manera:

$z = x \cup y : (p, q) \rightarrow (r, s)$ con $x : p \rightarrow r$ en \mathcal{A} y $y : q \rightarrow s$ en \mathcal{A}' . Veamos que $|\mathcal{A}''| = X \Pi Y$.

Primeramente, sea $|\mathcal{A}''|$ el comportamiento del autómata. Sea w la etiqueta de un camino de \mathcal{A}'' , que va de $(i, i') \rightarrow (t, t')$; se pueden asociar dos caminos, de \mathcal{A} y de \mathcal{A}' , de la siguiente manera: si $z : (p, q) \rightarrow (r, s)$, entonces le corresponden, por construcción, dos flechas en \mathcal{A} y $\mathcal{A}' : p \rightarrow r$ y $q \rightarrow s$, cuyas etiquetas son x y y , con $z = x \cup y$. Así es que, hay dos caminos, $i \rightarrow t$ y $i' \rightarrow t'$ de \mathcal{A} y \mathcal{A}' , de etiquetas u y v , tales que $|u| = |v| = |w|$, y $w = u \parallel v$. Así es que $|\mathcal{A}''| \subset X \Pi Y$.

Recíprocamente, sea $w = u \parallel v$ donde $|u| = |v| = |w|$, y u y v son etiquetas de caminos de \mathcal{A} y \mathcal{A}' tal que $u : i \rightarrow t$ y $v : i' \rightarrow t'$. Por lo tanto, el camino $(i, i') \rightarrow (t, t')$ cuya etiqueta es $u \parallel v = w$ se logra en \mathcal{A}'' y $X \Pi Y \subset |\mathcal{A}''|$. ■

Posteriormente se hace una generalización de este teorema, ya que puede darse el caso de que los subconjuntos de S (que son sucesiones musicales, o sea, lenguajes) X o Y sean infinitos y no tenga sentido hablar de la sobreposición de longitudes iguales, $X \Pi Y$. De este modo, se enuncia otro teorema:

Teorema 5.4: Si X y Y son lenguajes, subconjuntos de S y reconocibles para un autómata, entonces $X \parallel Y$ también es reconocible para un autómata.

Demostración. Sean $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ y \mathcal{A}'' como en la demostración anterior. Asimismo, sea $\mathcal{A}_0'' = \{Q \times Q' \cup Q \cup Q', (\delta, \delta'), T \times T' \cup T \cup T'\}$ con la flechas

- $(p, q) \rightarrow (r, s)$ en \mathcal{A}''
- $p \rightarrow r$ si $p, r \in Q$ y la flecha está en \mathcal{A} ;
- $q \rightarrow s$ si $q, s \in Q'$ y la flecha está en \mathcal{A}' ;
- $(p, t') \rightarrow r$ si $t' \in T', r \in Q$, y $p \rightarrow r$ en \mathcal{A} ;
- $(t, q) \rightarrow s$ si $t \in T, s \in Q'$, y $q \rightarrow s$ en \mathcal{A}' .

Primeramente, sea $|\mathcal{A}_0''|$ el comportamiento de un autómata, con $w = u\|v, u \in E, v \in Y$ y con $u : i \rightarrow t$ en \mathcal{A} y $v : i' \rightarrow t'$ en \mathcal{A}' . Sabemos por la demostración anterior que si $|u| = |v|$, entonces $w : (i, i') \rightarrow (t, t')$ está en \mathcal{A}'' . Si $|u| \neq |v|$, supongamos, sin pérdida de generalidad, que $|u| > |v|$ y $u = u'u''$. Si $u' : i \rightarrow p$ y $u'' : p \rightarrow t$, entonces $u'\|v : (i, i') \rightarrow (p, t')$ está en \mathcal{A}'' y $u'' : p \rightarrow t$ está en \mathcal{A} . Más aún, si se escribe $u'' = xu'''$, se tiene un camino $p \rightarrow r \rightarrow t$ de etiqueta xu''' en \mathcal{A} , y la flecha $x : (p, t') \rightarrow r$ está en \mathcal{A}_0'' con la etiqueta: $(u'\|v)xu''' = (u'\|v)u'' = u'u''\|v = u\|v = w$. Por lo tanto, $|\mathcal{A}_0''| \subset X\|Y$.

Recíprocamente, tenemos $X\|Y$, y w la etiqueta de un camino en \mathcal{A}_0'' . Si el camino es de la forma $w : (i, i') \rightarrow (t, t')$, entonces existen dos caminos $u : i \rightarrow t$ y $v : i' \rightarrow t'$ de \mathcal{A} y \mathcal{A}' , y $w = u\|v$ con $u \in X, v \in Y$. Si el camino es de la forma $w : (i, i') \rightarrow t, t \in T$, entonces sea p el primer estado de Q que figura en el camino $w : (i, i') \rightarrow t$; así es que $w' \times w'' : (i, i') \rightarrow (q, t') \rightarrow p \rightarrow t$. El camino $w' : (i, i') \rightarrow (q, t')$ puede descomponerse en $u : i \rightarrow q$ y $v : i' \rightarrow t'$, con $w' = u\|v$ y $v \in Y$. En este caso $u \times w'' : i \rightarrow q \rightarrow p \rightarrow t$ es un camino logrado de \mathcal{A} , donde $uxw'' \in X$ y $w = w'xw'' = (u\|v)xw''$ con $|u| = |v|$, donde $w = uxw''\|v, uxw'' \in X$ y $v \in Y$. Así es que, $X\|Y \subset |\mathcal{A}_0''|$. ■

A continuación se definen *melodía* y *polifonía*. Una sucesión (cuerda) w en S es una *melodía* si para toda letra w_i de w : $\text{card } w_i \leq 1$ (es evidente que se refiere a la cardinalidad de los conjuntos de $A = \mathcal{P}(E)$, que es el alfabeto. Así es que, A coincide con el conjunto E que le da origen y no se contemplan acordes). Una sucesión w de S es una *polifonía estricta a n voces*, si:

- (i) existe una partición de $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$;
- (ii) existen n melodías, M_1 sobre E_1, M_2 sobre E_2, \dots, M_n sobre E_n , tal que: $w = M_1\|M_2\|\dots\|M_n, w_{ij} \in M_i$

(la familia de M_i es única porque, para una partición dada de E , para cada letra w_i de w la $\text{card}(w_i \cap E_i) \leq 1$, cualquiera que sea $i \leq n$)

Como ya se vio, la sobreposición de un número finito de subconjuntos (es decir, lenguajes reconocibles para un autómata) es a su vez reconocible para el autómata. Si se tiene un conjunto finito, el número de particiones que pueden considerarse también es finito. Un forma de reconocer la polifonías a n voces sobre un conjunto de elementos E es construir un autómata según el algoritmo que sigue:

- se buscan todas las particiones posibles del conjunto E en n clases;
- para una partición dada, se determinan los autómatas que pueden reconocer las melodías (las melodías son lenguajes reconocibles para un autómata) que se pueden formar en cada clase;
- se construye un autómata que reconozca la sobreposición (\parallel) de n familias de melodías;
- el autómata que reconozca una polifonía estricta a n voces sobre E será obtenido por el reagrupamiento de todos los autómatas del inciso anterior, para todas las particiones posibles de E en n clases.

Para un conjunto de p elementos, el número de particiones en n clases, P_p^n , que se puede formar sobre E , se calcula en función del número de suprayecciones, S_p^n , de un conjunto de p elementos a un conjunto (menor o igual) de n elementos. De esta manera, $S_p^n = n!P_p^n$. Este número de suprayecciones del conjunto de p elementos en el conjunto de n elementos se calcula por medio de los números de Stirling de segundo tipo, cuya fórmula es:

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=0..n} (-1)^k \binom{n}{n-k} (n-k)^p \text{ [Gri., p.74-77] }.$$

Así es que, se tiene una construcción semejante a un triángulo de Pascal:

$n \dots$	p	1	2	3	4	5	6	7	8
	1	1							
	2	1	1						
	3	1	3	1					
	4	1	7	6	1				
	5	1	15	25	10	1			
	6	1	31	90	65	15	1		
	7	1	63	301	350	140	21	1	
	8	1	127	966	1701	1050	266	28	1

Si E_1, \dots, E_n es una partición de E , y M_1, \dots, M_n son las familias de melodías sobre los conjuntos de elementos E_i , dichas familias son reconocibles para un autómatá finito. Asimismo, en los conjuntos de tipo $E_1 \parallel \dots \parallel E_n$ las palabras se descomponen de manera única, $w_1 \parallel \dots \parallel w_n$. Pero cuando se tienen n lenguajes, L_1, L_2, \dots, L_n , ¿cuáles son las palabras de $L_1 \parallel \dots \parallel L_n$ que se descomponen de manera única? (o sea, en los casos en que las palabras son conjuntos).

Esta pregunta, que se mantiene abierta, tiene una importancia musical, porque las hipótesis teóricas que justifican el enfoque que se adopta en este artículo consideran las sucesiones musicales como una especie de sucesiones de "paquetes de eventos simultáneos". Esto implicaría que, de acuerdo a la notación tradicional de la música, se pierde información sobre el reparto de las notas entre las diferentes voces de la polifonía. Sucede que, cuando las n voces son diferenciadas por los timbres (instrumentos distintos, por ejemplo), se trabaja con una partición en el sentido matemático, que divide el conjunto total de todas las voces diferentes, y no se da paso a la *ambigüedad*.³ Pero en los casos de polifonías realizadas en instrumentos idénticos, o en un solo instrumento polifónico, como el piano, la ambigüedad es inherente al mismo fenómeno musical.

El último ejemplo musical de este tema consiste en un trabajo de un grupo de musicólogos

³La ambigüedad es un concepto preciso en la teoría de autómatas, pero como implica conceptos como los lenguajes libres de contexto y árboles que no hemos definido en este trabajo, se deja como idea intuitiva por la semántica de la palabra.

que transcribieron. por ordenador, unas *tablaturas* para laúd del siglo XVI. El laúd es un instrumento polifónico que, por lo mismo, puede ejecutar varias voces simultáneas. Sin embargo, la notación de tablatura, que indica donde colocar los dedos, no permite visualizar el desarrollo de las distintas voces.

{	{	{	{	{	{	{	{	{	{	{	{	{		
0	5	p	k	5	k	5	o	d	l	n	c	3	g	o
3		g	2						c	2	l	2		
2	l								g				r	

Las tablaturas se parecen a las sucesiones descritas en el artículo que estamos comentando, ya que los elementos (el elemento es equivalente a "la colocación del dedo sobre el diapasón") son realmente las notas que forman las letras del alfabeto. El equipo ERATTO (Equipe de Recherche sur l'Analyse et la Transcription des Tablatures par Ordinateur) logró obtener automáticamente, por medio de un programa de decifrado, la notación musical para partitura, asignando distintas notas a diferentes voces.



La versión final (refinada por Raymond Meylan) quedó así:



V.II

La idea de relacionar la Teoría de Autómatas con la música se remonta a los años sesenta y setenta. En su artículo *Grammars as Representations for Music* (Gramáticas como Representaciones para la Música), de 1979, C. Roads reseña brevemente los principales aportes de varios teóricos representativos, que han utilizado Gramáticas (véase el Apéndice 3) para modelar estructuras musicales. Una profundización en esta línea agrandaría demasiado el presente trabajo, pero se presentará a continuación un ejemplo del tipo de investigación que se realiza. En 1968, Terry Winograd describió un programa computarizado que analizaba las estructuras armónicas de varias composiciones tonales. El programa realiza, primero, un análisis preliminar de la sintaxis de un fragmento musical. También, en esta primera fase, se procesa la información para reducir el número de caminos que se usarán en el análisis. Así se eliminan caminos que tendrían sentido gramatical con respecto a la armonía codificada, pero que carecen de sentido musical. El programa se aplicó a selecciones de Schubert (Opus 33, núm. 7) y Bach (Corales 12 y 57) con buenos resultados en cuanto al análisis armónico. Esto sirvió como base para desarrollar un *Sistema de Lenguaje Natural para la Comprensión*, SHRDLU. Este sistema tiene la capacidad de "aprender" de su ambiente, tanto de la información que se mete, como de la que se deduce internamente. Así es que, uno de los aspectos técnicos notables del trabajo de Winograd es la expansión del concepto de Gramática, como algo más que una simple lista de reglas de producción.

En la primera parte del artículo de Chemellier hay algunas referencias más a la aplicación de la informática y los autómatas al análisis musical. Se cita a P. Greussay quien, en un trabajo de 1985 para la I.R.C.A.M. (Institut Recherche Coordination Acoustique Musique) de París, titulado *Exposition ou Exploration: Graphes Beethovenians*, opta por el análisis de elementos particulares de obras específicas, más que por agrupaciones generales como "música tonal", "escuela clásica vienesa", etc.

Se maneja que, en el análisis de una pieza musical, se pueden colocar los símbolos de la partitura en una relación de unos con otros. De esta forma, en una partitura que contiene n símbolos, hay $2^{n \times n}$ relaciones posibles. Este número, 2^{n^2} , es el conjunto potencia de los n^2 intervalos que se obtienen si se tabulan los intervalos dirigidos de cada nota, en un conjunto de clases de altura dado con n elementos, a cada una de las otras notas y consigo mismo. Vamos

a poner un ejemplo: si se tiene el conjunto de clases de altura con 3 notas. {do, re, mi}, los intervalos dirigidos son: do→ do, re→ re, mi→ mi, do→ re, re→ do, do→ mi, mi→ do, re→ mi y mi→ re, que son, precisamente, $3^2 = 9$.

De esta manera, en la *Sarabanda* de la *Primera Suite Francesa* de J.S. Bach, $n = 534$ y ¡habría $2^{(534)^2}$ relaciones para analizar en términos interválicos! Sin embargo, muchas de estas relaciones son carentes de sentido musical, en tanto que otras sí son relevantes. Se mide, entonces, la *calidad* de una pieza por el número de *relaciones relevantes* que hay en ella. Para poder determinar estas relaciones se recurre a modelos inspirados en la informática. La sobreposición en el tiempo de sucesiones musicales puede verse como dos procesos paralelos, uno armónico y otro polifónico. En el análisis de la vigésima *Variación Diabelli*, de Beethoven se programan *agentes mentales* que repercuten sobre la sucesión musical (que se realiza por intervalos), así como un diálogo entre dichos agentes para construir una configuración de los intervalos característicos de la pieza. La pieza mencionada comienza con una cuarta descendente, seguida de una segunda mayor ascendente. Los agentes son, por ejemplo, NOTAS, que recoge las notas y las envía a INTERVALOS, quien forma los intervalos y los manda a CONFIGURADOR, quien se esfuerza en descubrir las regularidades de la configuración, etc. De este modo, los cinco primeros compases forman una configuración abstracta de intervalos, a manera de gráfica.

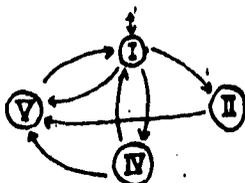
voz canónica

El configurador plantea esta pregunta: (porque se está bajando por cuartas justas)

con el re, la gráfica está completa.

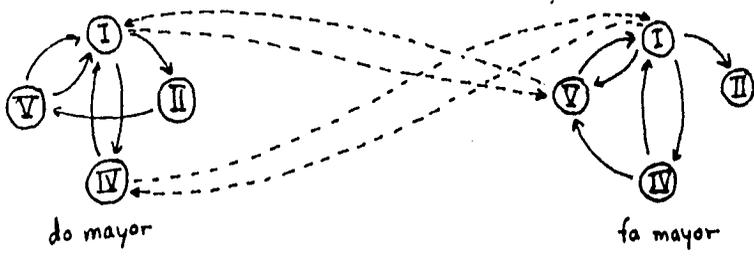
Parece haber acuerdo entre los teóricos, como hemos marcado en otros capítulos, que hay un dominio de la música que no es accesible al análisis racional pero, a la vez, hay una parte algorítmica (en el lenguaje de la informática) de la elaboración de cualquier composición. Los intentos de controlar la organización de eventos sonoros por ordenador data de los años cincuenta. Greussay planteó en 1973, en su tesis de la Universidad de París, un método automático de armonización y, en 1985, salió un artículo de S.R. Newcomb, en el *Computer Music Journal*, donde se revela el programa LASSO, que corrige ejercicios de contrapunto.

En los años sesenta, Pierre Barbaud escribió dos libros, *Introduction á la Composition Musicale Automatique* (Introducción a la Composición Musical Automática) y *La Musique: Discipline Scientifique* (La Música: Disciplina Científica). En ellos se sentaron las bases teóricas para este enfoque. Interesaban, en particular, las sucesiones de acordes juzgados como "correctas" en la armonía tradicional. En una tonalidad dada, se usan números romanos para indicar los seis acordes que se pueden construir con todos los sonidos de la escala diatónica menos la sensible. Por ejemplo, en *do* mayor se tiene I= {do, mi, sol}, II= {re, fa, la}, etc. Una sucesión armónica es como una palabra formada del alfabeto {I, II, III, IV, V, VI}.⁴



Como ejemplo, la sucesión I V I IV I II V I es reconocida por un autómata. También se pueden considerar las modulaciones. A continuación se describe gráficamente la modulación de *do* mayor a su subdominante, *fa* mayor. Como I en *do* mayor es igual a V en *fa* mayor, se emplean estos dos acordes como pivotes.

⁴Es evidente que los trabajos de Barbaud ejercieron una influencia en Chemillier.



Se obtiene, de esta forma, un autómata de 172 estados. Un medio que se usa para el reconocimiento de las sucesiones correctas de acordes, es analizarlos por medio de la polifonía. Así es que, cada nota de los acordes se trata como una de las voces de una polifonía. Se proponen tres reglas para realizar esta operación.

- (1) Todos los acordes tienen que estar en la misma tonalidad en la etapa inicial;
- (2) la polifonía está a cuatro voces;
- (3) la nota fundamental está doblada y las otras dos notas son la tercera y la quinta.

Asimismo, cuando el cambio de acordes va del estado X a Y (determinado por la fundamental) la nota fundamental se encuentra siempre como bajo y el cambio en las otras tres partes se hace según las siguientes reglas, de acuerdo con el caso:

- a) Si el intervalo (de la fundamental) de X a Y es ascendente:
 - a.1) la fundamental de X es seguida por la quinta de Y ;
 - a.2) la tercera de X es seguida por la fundamental de Y ;
 - a.3) la quinta de X es seguida por la tercera de Y .
- b) Si el intervalo de X a Y es descendente:
 - b.1) la fundamental de X es seguida de la tercera de Y ;
 - b.2) la tercera de X es seguida de la quinta de Y ;
 - b.3) la quinta de X es seguida por la fundamental.



La aplicación de la Teoría de Autómatas a la música ya tiene un trayecto que, en muchos aspectos, coincide con esta misma teoría y su aplicación a la lingüística. Este hecho no debería sorprendernos, ya que la música es un lenguaje que, a pesar de sus particularidades, se puede representar por medio de Gramáticas. En esta breve semblanza se ve cómo la automatización de ciertos aspectos del análisis musical puede ahorrar muchísimo tiempo y errores humanos,

dejando así el tiempo libre para ser dedicado a otras facetas más creativas. No obstante, un hecho real es que los antecedentes en estas cuestiones muestran que su exploración ayuda más al desarrollo de la misma Teoría de Autómatas que a las áreas específicas de aplicación. Como ejemplo podemos poner el caso del ajedrez y la computación, en que esta última fue más beneficiada por el trabajo realizado que el juego en sí. La lingüística también aporta otro ejemplo en que la aplicación llevó a un gran desarrollo de la teoría matemática. No mencionamos esto para minimizar el trabajo hecho, sino al contrario para mostrar que lo que en un principio podría aparentar ser un área muy específica y localizada de aplicación (en este caso la aplicación de algoritmos al análisis musical) podría convertirse en un acicate para avanzar en cuestiones matemáticas más generales.

Anexo

Teoría Matemática de la Música (TMM)

En el transcurso de los últimos diez años se ha dado forma a un proyecto titulado Teoría Matemática de la Música (TMM), bajo la égida del matemático y compositor suizo Guerino Mazzola. Este trabajo se basa en las Teorías de Módulos y Categorías, así como en las Topologías Algebraica y Combinatoria entre otras áreas de la Matemática, con la finalidad de describir las estructuras musicales de una manera objetiva. El propósito del proyecto no es "absorber la genialidad de un compositor o intérprete mediante una teoría formal, sino entender los aspectos de la música sujetos al razonamiento, de la misma manera en que los físicos intentan comprender la naturaleza perceptible como una expresión racional del creador y no al creador mismo" [Mazz..4].

Según los escritos de Mazzola y sus colaboradores (véase la bibliografía) la base conceptual de MaMuTh ha venido desarrollándose paralelamente en la Matemática y la Musicología desde hace cien años, por medio de tres modelos fundamentales. El primer modelo data de los años 1850-70, y se trata de los *gestalts globales* (estructuras globales). Los teóricos de la música Eduard Hanslick y Hugo Riemann hablaron de la unidad dentro de la multiplicidad (o variedad) en sus respectivos escritos de 1854 y 1867. Por ejemplo, el formato de la sonata, visto como un *gestalt global*, es como un atlas geográfico, compuesto de cartas locales en forma de movimientos, frases, motivos, acordes, etc. [Mazz., 4 y 5]. Por otra parte, es el matemático Bernhard Riemann quien en esos mismos años formaliza las nuevas ideas sobre el concepto de espacio como variedades, entendidas éstas como la resultante lograda después de pegar cartas planas (cartesianas) locales, similar también a los atlas geográficos. Por medio de este

Anexo

Teoría Matemática de la Música (TMM)

En el transcurso de los últimos diez años se ha dado forma a un proyecto titulado Teoría Matemática de la Música (TMM), bajo la égida del matemático y compositor suizo Guerinio Mazzola. Este trabajo se basa en las Teorías de Módulos y Categorías, así como en las Topologías Algebraica y Combinatoria entre otras áreas de la Matemática, con la finalidad de describir las estructuras musicales de una manera objetiva. El propósito del proyecto no es "absorber la genialidad de un compositor o intérprete mediante una teoría formal, sino entender los aspectos de la música sujetos al razonamiento, de la misma manera en que los físicos intentan comprender la naturaleza perceptible como una expresión racional del creador y no al creador mismo" [Mazz.,4].

Según los escritos de Mazzola y sus colaboradores (véase la bibliografía) la base conceptual de MaMuTh ha venido desarrollándose paralelamente en la Matemática y la Musicología desde hace cien años, por medio de tres modelos fundamentales. El primer modelo data de los años 1850-70, y se trata de los *gestalts globales* (estructuras globales). Los teóricos de la música Eduard Hanslick y Hugo Riemann hablaron de la unidad dentro de la multiplicidad (o variedad) en sus respectivos escritos de 1854 y 1867. Por ejemplo, el formato de la sonata, visto como un *gestalt global*, es como un atlas geográfico, compuesto de cartas locales en forma de movimientos, frases, motivos, acordes, etc. [Mazz., 4 y 5]. Por otra parte, es el matemático Bernhard Riemann quien en esos mismos años formaliza las nuevas ideas sobre el concepto de espacio como variedades, entendidas éstas como la resultante lograda después de pegar cartas planas (cartesianas) locales, similar también a los atlas geográficos. Por medio de este

enfoque global se entiende la esfera, el toro, la banda de Möbius o hasta el plano mismo como estructuras globales diferentes, pero compuestos de las mismas cartas planas. Como superficies, sólo difieren en la forma en que se pegaron. Lo esencial, tanto para la música como para la matemática, era comprender que se pueden juntar estructuras localmente triviales de tal manera que el resultado sea una estructura compleja, de ningún modo trivial.

El segundo modelo común a la Música y la Matemática surgió en los años 20 de este siglo y se basa en las simetrías generales. Por el lado de la música, se estrenó en 1928 las Variaciones para Orquesta op. 31 de Arnold Schönberg, obra realizada según el principio de la composición simétrica dodecafónica. Asimismo, en 1924 se publicó un análisis del *Arte de la Fuga* de J.S. Bach en que el matemático y musicólogo W. Graeser empleó simetrías geométricas para explicar las estructuras musicales de la obra [Mazz., 3, 4 y 5]. En el terreno de la matemática pura, el concepto de espacio vectorial se generalizó al de módulo y fue Emmy Noether quien, en un trabajo de 1929, incorporó las simetrías generales y grupos de homología en el Algebra Abstracta moderna [Mazz., 3, 4, Ll.P., p.7].

El tercer modelo es de los años cincuenta de este siglo y se le denomina la *Clasificación por medio del cambio de perspectiva*. En la Musicología, T.W. Adorno planteó que toda la gama de interpretaciones de una obra musical tiene que tomarse en cuenta, ya que son indispensables en la constitución de su identidad, que se va formando poco a poco. En la Matemática, N. Yoneda desarrolló su teoría, sintetizada en el *Lema de Yoneda*, que afirma que un objeto matemático puede clasificarse en isomorfismos mediante su *functor*. Esto último es un sistema de "perspectivas" (morfismos) que relaciona el objeto inicial con otros objetos del mismo tipo de estructura (*categoría*) y después con los objetos de otras categorías. Según el Lema, el hecho de conocer los objetos en sí no es esencial para su clasificación aunque sí lo es construir su comportamiento (los funtores) dentro de una estructura dada (las categorías) (véase el Apéndice 4).

TMM descansa sobre tres pilares fundamentales, que son:

- (6.1) Un lenguaje específico que pueda captar las estructuras musicales relevantes.
- (6.2) Un conjunto de proposiciones (teoremas) que tratan el comportamiento de estructuras musicales sujetas a condiciones definidas.
- (6.3) La operacionalización de la teoría para fines de composición y análisis, con computa-

doras y sin ellas.

El Lenguaje

El lenguaje de TMM parte del enfoque de que las estructuras musicales son estructuras globales, formadas por estructuras locales pegadas de una cierta manera. La selección de una cierta cubierta es parte de la perspectiva, en el sentido de Yoneda. En términos más formales tenemos:

Las Categorías de Composiciones Locales

- (a) **Los Objetos.** El objeto elemental, o carta, se llama *composición local* (K, M) y se define como un subconjunto finito, no vacío K de elementos de un Módulo M , sobre un anillo conmutativo R . El módulo M surge de un espacio dependiente del contexto, cuyos elementos son determinados por características musicales, tales como sonido, duración, volumen, tiempo, timbre, etc.

Ejemplo 8.1. Si se toma Z_{12} , el grupo cíclico que describe la escala cromática (véase el Capítulo 4), la función $\mu : Z \times Z_{12} \rightarrow Z_{12}$, tal que $\mu(n, x) = nx$ es un homomorfismo de módulos (Z_{12}) con $R = Z$ (véase el Apéndice 4). Así es que, la regla que estipula $\mu(n, x) = 7x$ se puede ilustrar con una gráfica en $(Z_{12})^2$, es decir, $Z_{12} \times Z_{12}$. Esta gráfica se interpreta como un proceso de modulación sobre el círculo de quintas (véase el Capítulo 4).

De hecho, hay tres módulos que revisten una importancia especial. El módulo de los números reales R sobre el anillo de números racionales Q se llama el *módulo de altura*, y sus estructuras aditivas y multiplicativas expresan relaciones entre notas e intervalos. El *módulo de Euler* consiste en el espacio tridimensional Q^3 ($Q \times Q \times Q$) sobre el anillo Q , y las propiedades aditivas corresponden, otra vez, a los intervalos, en tanto de la multiplicación se derivan intervalos en afinaciones que no sean necesariamente la de igual temperamento. Finalmente, el módulo Z_n sobre el anillo Z se emplea para representar clases de altura (aplicación similar a la que ya vimos en el Capítulo 4, donde Z_n se concebía como un grupo).

- (b) **Los Morfismos.** Dos composiciones locales (K, M) y (L, N) sobre R se compararán por medio de los morfismos $f : (K, M) \rightarrow (L, N)$.

A veces para comparar las composiciones locales se recurre a la idea de simetría, la cual se formaliza por medio de automorfismos. Algunos ejemplos de estas simetrías, o sea automorfismos, son las transposiciones (tanto en clases de altura, es decir tonalidad, como en cuanto al tiempo) y las inversiones. Esto nos lleva a pensar que hay una similitud entre los automorfismos de las composiciones locales y la equivalencia que hacía invariante una sucesión musical bajo transposición o inversión, manejada en los artículos de Lewin y Regener (véase el Capítulo 4). Asimismo, se postula que la composición de dos transformaciones afines con sentido musical también posee sentido musical.

Las Categorías Globales

Las cartas K de las composiciones locales se pegan y se compararán por los isomorfismos inducidos de los módulos subyacentes. Estos objetos globales que generan se llaman *composiciones globales*.

Definición: Una composición global, (K, I, A) , se define por:

(a) Un conjunto finito K , junto con una cubierta finita I de K , que consiste en las subcomposiciones locales K_1, K_2, \dots, K_m , todas las cuales se encuentran en el mismo módulo M de K .

(b) Un atlas A para K e I (es decir, una familia (K_t, M_t) , $t \in T$) de composiciones locales (K_t, M_t) en Loc_R (composiciones locales sobre R), junto con las biyecciones $\theta_t : K_t \rightarrow I_t$, $I_t \in I$, tal que :

(b.1) el conjunto de los I_t se componen de elementos de I ,

(b.2) para $I_t \cap I_s \neq \emptyset$, existe un isomorfismo de composiciones locales:

$\theta_s^{-1} \circ \theta_t : (\theta_t^{-1}(I_t \cap I_s), M_t) \rightarrow (\theta_s^{-1}(I_t \cap I_s), M_s)$. Las biyecciones θ_t sobre las composiciones locales (K_t, M_t) se llaman los *mapas del atlas* A .

Cabe mencionar que la cubierta I es estructurada por el atlas A , el cual aplica cada subconjunto de K en I a una composición local en algún módulo y así se tiene una descripción matemática particular de los eventos en el subconjunto. Como no se especifica el contenido de K , el conocimiento sobre K sólo puede obtenerse estudiando las composiciones locales y las aplicaciones que las relacionan con la cubierta I de K . Esto es coherente para la realidad musical en que las partes son subconjuntos de algún conjunto original (como la escala diatónica),

el cual nunca se hace explícito.

Por otro lado, se ve con claridad como la estructura común de una sonata es una jerarquía de cartas. En el primer movimiento se tiene la exposición de los temas, su desarrollo, la recapitulación y la coda. Dentro de cada una de estas cartas hay otras más pequeñas, que describen temas, voces, acordes, etc. A veces las cartas locales se intersecan, como en el caso de la carta de una voz y la carta de un acorde compuesto de diferentes voces. Aquí es donde se plantea para la musicología la ventaja de emplear módulos y categorías, puesto que la música en sí puede concebirse como una colección de objetos musicales a los cuales se les puede dar una multiplicidad de interpretaciones. Como las relaciones de los objetos se modelan como simetrías de módulos, su multiplicidad puede expresarse en términos de *variedades geométricas* (véase el Apéndice 4), que son como el atlas de las cartas, las cuales representan los mismos datos geográficos y las relaciones entre ellos de diferentes maneras.

Proposiciones y Teoremas

Las proposiciones y teoremas, el segundo pilar de TMM, son demostrados en el libro base que data de 1985 titulado *Gruppen und Kategorien in der Musik* (Grupos y Categorías en la Música) y en *Geometrie der Töne* (La Geometría del Tono), de 1990. La presentación formal de estos teoremas cae fuera del alcance de esta tesis, pero es interesante mencionar de qué se trata algunos de ellos. Para clasificar, se definen los tipos de estructuras según la Teoría de Categorías y, a partir de ahí, se buscan las listas completas de clases de isomorfismos. En el caso de las composiciones locales, se busca el conjunto mínimo de éstas, tal que todas las demás sean isomorfas. En *Gruppen...* [Mazz.,6] se dan los detalles técnicos de la clasificación, que implica la construcción de Esquemas Algebraicos Invariantes que, como ya se ha dicho, está fuera del alcance de este trabajo. Lo interesante es que sí se ha logrado una clasificación completa para composiciones locales de 3 elementos (en el contexto de la escala cromática de 12 sonidos) en sólo 26 clases isomorfas y una clasificación, también completa, para acordes [Mazz.,1,6]. Hay teoremas de modulación para la afinación de igual temperamento y para la afinación justa. Un ejemplo del proceso de modulación y su descripción por medio de la Topología Combinatoria se verá un poco más adelante en este anexo.

La Operacionalización de la Teoría

En cuanto a la operacionalización de la teoría, se tiene el proyecto *Zurich Interpretation Workstation* [Mazz.,1] en el que se dedujo que la transición de la presentación formal de una estructura musical, o sea una partitura, a la interpretación real por medio de una ejecución física, puede describirse a través de atlas particulares de campos vectoriales locales. En el *Performance Workstation RUBATO* [Mazz.,2] se trata el problema sumamente intrincado de todo el proceso de transformación de una partitura dada, en su interpretación, mediante el análisis musical de los aspectos armónicos, contrapuntísticos, melódicos, rítmicos, etc. Históricamente, la interpretación, como tal, ha sido estudiada de manera muy subjetiva. Lo que la *Teoría de la Interpretación* dentro de MaMuTh pretende es darle un giro a la musicología por medio de modelos matemáticos elaborados, que no buscan la "mejor" interpretación de entre las infinitas posibilidades, sino la descripción precisa de las estructuras y procesos que la definen. Para esto, se enfrentan tres problemas fundamentales:

(6.3.1) Una representación simbólica sin restricciones de los contenidos sintácticos y semánticos de los signos de la partitura.

(6.3.2) Una representación tecnológica sin restricciones de la interpretación física que resulta.

(6.3.3) La explicación de la estructura de la transformación: qué es lo que está siendo transformado, cómo se procede y porqué.

El estado de RUBATO todavía en 1995 era de software de investigación. RUBATO se compone de un número de módulos llamados RUBETTES. Esos módulos se agrupan de acuerdo a cuatro dominios correspondientes a las tareas fundamentales del Performance Workstation:

- (a) la representación por predicados de la partitura y el cálculo de los predicados;
- (b) el análisis musical: estructuración;
- (c) la síntesis de las interpretaciones: configuración;
- (d) la salida ("output") tecnológica.

En cuanto a (a), se incluye:

- un *explorador* (browser) de predicados musicales de todos los tipos, es decir, notas, silencios, tempo, volumen legato, staccato, etc.;
- un editor, *LoGeoRubeatte*, para definir las combinaciones lógicas y geométricas de los predicados dados;

- Una *vista (view) de predicados* para su representación visual.

En lo tocante a (b), la estructuración, se dispone de *MetroUrbette*, *HarmoRubette* y *MeloRubette*[Mazz.,2]. Para (c), la configuración, se distinguen dos tipos de operadores:

- operadores *básicos*
- operadores de *Pianola*.

Los tres operadores básicos son: *Tiempo de Inicio (E)*, *Altura (H)*, que se mide en semitonos, y *Volumen (L)*, que abarca desde *ppppp* a *ffff*.

Los operadores de pianola correspondientes son : *Duración (D)* que es la diferencia entre los tiempos de inicio y término de un sonido, *Glissando (G)*, definido como la diferencia entre la altura al inicio del sonido y al término del mismo, y *Crescendo (C)* que mide la diferencia entre el volumen al inicio y al término del sonido.

Para cada parámetro simbólico P hay un parámetro físico correspondiente, p . Por ejemplo, a la altura H , que se representa simbólicamente en semitonos, le corresponde h , que es la altura física, definida como una expresión lineal del logaritmo de la frecuencia cuya unidad es el Hertz, de periodo un segundo.

Los operadores básicos actúan sobre la interpretación de los parámetros básicos y, de esta manera, controlan aspectos como *rubato* (la diferencia entre el tiempo estricto, de metrónomo, y la ejecución real que se aleja siempre, aunque sea en forma leve, de esa exactitud), *afinación*, etc. Los operadores de pianola se encargan de la articulación y la microestructura dinámica y de entonación de los sonidos (por ejemplo, el *crescendo* o el *glissando* en el violín).

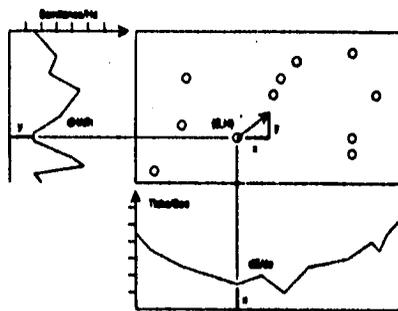
La estructura clave, que contiene todos los detalles de la interpretación es, por supuesto, la partitura. Se comienza con un análisis de la situación local de la interpretación. Consideremos la *composición* un conjunto finito K de eventos sonoros. Cada sonido simbólico $X = \{E, H, L, D, G, C\}$ se asocia con su imagen física $x = P(x) = \{e, h, l, d, g, c\}$. Cabe mencionar que ninguno de los parámetros realmente representa un concepto discreto. Hasta la altura H , tantas veces representada por Z_{12} , cuando se toma en relación los otros parámetros y la partitura como una totalidad, puede conceptuarse como continua.¹ Para el tiempo E o el volumen L este hecho es aún más evidente. Así es que se atribuye un carácter continuo a la

¹Este procedimiento no es nuevo en las aplicaciones de las matemáticas. En la Economía, por ejemplo, las curvas de oferta y demanda también implican esta conceptualización continua de variables que, en un inicio, se definen como discretas.

música y tanto X como su contraparte física $P(x) = x$, son números reales.

Los *campos de interpretación* son campos vectoriales especiales que describen las transformaciones de las interpretaciones musicales. Por ejemplo, tanto el parámetro E (tiempo de inicio) como $P(E) = e$, su pareja física, son números reales. Así es que el tiempo es $\frac{\partial E}{\partial e} = \frac{\partial P^{-1}}{\partial e}$ en el punto E . Esta función se denomina $T(E)$. La función de transformación P es invertible y continuamente diferenciable aparte de ser también monótona, dado que el tiempo es siempre positivo. La curva de tiempo es realmente un campo de velocidades, definido por cada tiempo de inicio simbólico E . El intervalo de tiempo físico Δe asociado al intervalo simbólico entre los tiempos de inicio E_0 y E_1 es la integral: $\Delta e = \int_{E_0}^{E_1} \frac{1}{T}$, ya que sabemos de la teoría de ecuaciones diferenciales, como $T = \frac{\partial E}{\partial e}$, entonces $\frac{\partial e}{\partial E} = \frac{1}{T}$.

Se puede definir, análogamente, un *campo de entonación*, o *campo de alturas*, $I(H) = \frac{\partial H}{\partial h}$. De esta manera si se tienen dos curvas fijas, $T(E)$ y $I(H)$, se produce un campo bidimensional en el plano de parámetros E y H . A cada punto (E, H) de este plano, le corresponde el vector $(T(E), I(H))$.

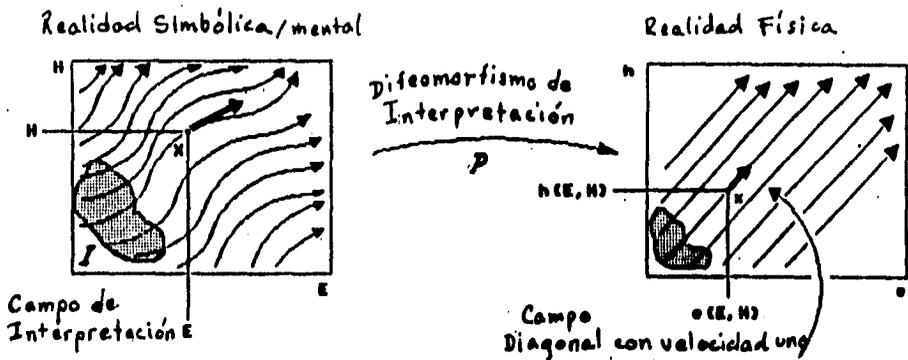


El punto físico $P(X) = x$ se obtiene de la siguiente manera. Supongamos conocido el valor físico x_0 , asociado al punto simbólico X_0 . Asimismo, supongamos necesarios t segundos para llegar de X_0 a X . Entonces $x = x_0 + (t, t)$ (es decir, $(e, h) = (e_0, h_0) + (t, t)$). Los

campos de interpretación propiamente abarcan los seis parámetros: son campos vectoriales de seis dimensiones.

A continuación esbozaremos una idea general de cómo la función de transformación P da lugar a un campo de interpretación.

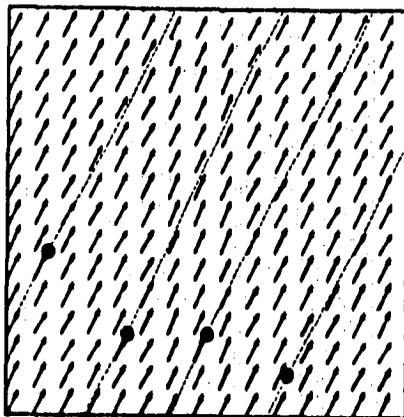
Supongamos que P es una aplicación continuamente diferenciable del espacio de parámetros simbólicos al espacio de parámetros físicos. Para dos parámetros, por ejemplo, E y H , se vería así:



A la derecha se tiene el campo diagonal con valor $\Delta = (1, \dots, 1)$ en cada punto $P(X) = x = (e, h, \dots)$ asociado a $X = (E, H, \dots)$. Si se aplica la matriz jacobiana de la función inversa de P , o sea P^{-1} en x , al vector Δ , se define el valor $\psi(X)$ del campo de interpretación. Es decir, el campo de interpretación ψ desde la perspectiva simbólica y el campo diagonal desde la perspectiva física, se corresponden bajo la transformación de interpretación P . De esta forma, $J(P)^{-1}(E, H)(\Delta)$ (si tomamos dos parámetros) es $\begin{bmatrix} \frac{\partial e}{\partial E} & \frac{\partial h}{\partial E} \\ \frac{\partial e}{\partial H} & \frac{\partial h}{\partial H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial e}{\partial E} + \frac{\partial h}{\partial E}, \frac{\partial e}{\partial H} + \frac{\partial h}{\partial H} \right)$ que define el campo de interpretación ψ en $C = (E, H)$.

Así es que la transformación de interpretación puede calcularse a partir del campo de interpretación más un conjunto I de datos iniciales. Para cualquier punto X , se sigue la trayectoria del flujo sobre ψ hasta que se topa con I en un punto X_0 . Se calcula el tiempo t sobre la trayectoria para llegar de X_0 a X . De esta forma X se aplica a $x = x_0 + t\Delta$.

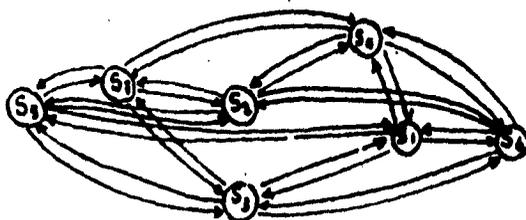
Ejemplo 6.2. En este ejemplo se toman cuatro parámetros, E , H , L y D (tiempo de inicio, altura, volumen y duración) y se relacionan E y D . Supóngase una leve variación de tempo, de carácter sinoidal, $T(E) = 1 + 0.1 \text{ sen}(E)$ (recuérdese que $T(E) = \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E^{-1}}{\partial t}$ en el punto E). Se muestra el campo de interpretación para un staccato fuerte, que acorta la duración en un 50%. Asimismo, se incluyen los cuatro eventos sonoros mencionados y sus curvas integrales.



El poder entender la expresión en la interpretación musical implica la búsqueda de un sistema. Los críticos musicales y musicólogos hablan del "estilo", pero la teoría de la interpretación es un acercamiento a la crítica musical y su teoría, con herramientas matemáticas. Dentro del modelo RUBATO, el problema mencionado de buscar un sistema, se precisa por medio de los operadores de configuración y pesos analíticos. Una configuración particular se llama una *Crítica* de P . La variedad completa de Críticas se llama la *variedad crítica* de P . Así es que, el asunto de estilo se plantea como el problema de determinar la estructura global o clases de isomorfismos de dicha variedad crítica. La clasificación de las subvariedades que, cuando se restringen a ciertos análisis melódicos y operadores de configuración se definen para 273 variables y 32 ecuaciones cúbicas, está fuera del alcance de esta tesis, igual que otros problemas mencionados anteriormente, pero cabe señalar que los primeros cálculos de puntos especiales sobre estas subvariedades han mostrado aspectos interesantes acerca de la diferencia entre los estilos de los pianistas Argerich y Horowitz.

Como se ve, esto abre un campo nuevo y amplio de descripción matemática de la expresividad humana. También vale la pena mencionar que, en realidad, no se están buscando tanto clases isomorfas de variedades críticas, como invariantes "estables" de tales clases, es decir, invariantes que no cambian significativamente bajo pequeñas perturbaciones del sistema. Queda claro que se plantearán muchas situaciones que pueden ser abordadas por métodos estadísticos así como por sistemas dinámicos.

Para finalizar esta pequeña y muy incompleta exposición de lo que es MaMuTh, queremos retomar el problema de las simetrías en las modulaciones. En su trabajo de 1911, *Harmonielehre* (Teoría de la Armonía), Arnold Schönberg intentó dar una idea de la coherencia entre los acordes, restringiéndose a una escala diatónica de siete notas. Aquí se introdujo la *Banda Armónica*, como el conjunto de sonidos comunes entre dos acordes. Cuando esta intersección es no vacía, se forma una Banda Armónica. La figura geométrica que resulta es bonita, pero no arroja ninguna luz sobre alguna relación geométrica formal. Por ejemplo, en la escala de *do* mayor, sean $s_1 = (\text{do-mi-sol})$, $s_2 = (\text{re-fa-la})$, $s_3 = (\text{mi-sol-si})$, $s_4 = (\text{fa-la-do})$, $s_5 = (\text{sol-si-re})$, $s_6 = (\text{la-do-mi})$, $s_7 = (\text{si-re-fa})$. De este modo, tenemos la siguiente figura:

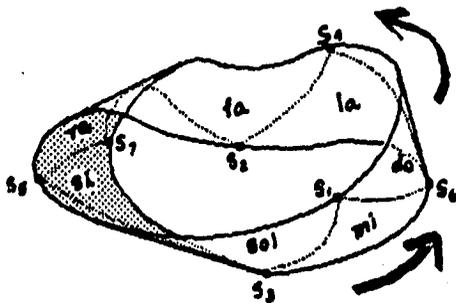


Sin embargo, si se recurre a un objeto de la Topología Combinatoria, el *nervio* $N(s_i^{(3)})$ donde $i = 1, \dots, 7$ (véase el Apéndice 5), se obtiene una Banda de Möbius y los vértices que se forman coinciden con los siete acordes, concebidos como 0-simplejos (véase el Apéndice 5).

El nervio se asocia con la cubierta de un conjunto por un sistema de curvas. La Banda de Möbius resultante se bautizó como *Banda Armónica de S* en honor a Schönberg, quien había contemplado el esqueleto unidimensional de $N(s_i^{(3)})$, o sea los segmentos, con su nombre de Banda Armónica. Se construye de la forma descrita a continuación.

Los acordes s_1, s_2, \dots, s_3 de $s^{(3)}$ se representan como puntos (simplejos de dimensión cero). Los puntos de dos acordes con una intersección no vacía se conectan por una línea (simplejos unidimensionales). Tres acordes con intersección no vacía forman la superficie de un triángulo, es decir, un simplejo bidimensional. No hay cuatro acordes (tríadas) con notas en común y, por lo tanto, la construcción termina en este punto. Cabe mencionar que cuando se busca el nervio de la cubierta de la escala diatónica por acordes de la séptima, $s_1 = (\text{do-mi-sol-si})$, $s_2 = (\text{re-fa-la-do})$, ..., $s_7 = (\text{si-re-fa-la})$ se obtienen siete configuraciones del agrupamiento cuádruple (cuatro acordes con notas en común). Así es que en este caso se tienen siete tetraedros que, en su totalidad, forman un toro. La Banda Armónica de S (la banda de Möbius formada por el nervio de tríadas) está contenida en este "toro de séptimas". Hay una especie de encajonamiento "hacia abajo" de la tríada hasta la séptima, o sea $I = (\text{do-mi-sol})$ se extiende a $vi^7 = (\text{la-do-mi-sol})$.

La Banda Armónica de S se ve así, siendo $s^{(3)}$ independiente de la selección de una tónica en particular.



La Banda Armónica de S ha sido de mucha utilidad en el establecimiento de modelos de modulación de una tonalidad a otra [Mazz., 4, Muzzu.] que no recurren a la armonía tradicional

en cuanto a los cambios de acordes, ni a las alteraciones o a las consideraciones melódicas. Se realiza una teoría de armonía con una restricción total a las estructuras verticales. El análisis de estos modelos, cuya riqueza no se restringe al empleo de las matemáticas abstractas sino que también echa mano de la física cuántica (se busca un *cuanto de modulación* M que posea la "fuerza" de transformar $s_i^{(3)}$ en $t_i^{(3)}$, otra tonalidad distinta, siendo M el conjunto de sonidos que forman los pasos requeridos para la transición) no va a incluirse en el presente trabajo. El ejemplo de la Banda Armónica de S se incluyó para dar una pequeñísima muestra de cómo se están utilizando las Topologías Algebraica y Combinatoria en el proyecto de MaMuTh. Una presentación con más profundidad y detalle tendrá que hacerse en trabajos posteriores.

Apéndice I

Sabemos por el algoritmo de Euclides que:

$$a = bq_0 + r_1 \quad 0 \leq r_1 < b$$

$$b = r_1q_1 + r_2 \quad 0 \leq r_2 < r_1 \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

$$r_1 = r_2q_2 + r_3$$

⋮

$$r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n$$

$$r_{n-1} = r_nq_n$$

Así es que :

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_1}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}}$$

$$\frac{b}{r_1} = q_1 + \frac{r_2}{r_1} = q_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = q_2 + \frac{r_3}{r_2} = q_2 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}}$$

$$\text{Por lo tanto, } \frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\ddots}}}$$

Como $\frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} = q_n$, vemos que :

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_n}}}}$$

Se consideran los siguientes números: $q_0, q_0 + \frac{1}{q_1}, q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2}}, \dots$

y se denominan *fracciones ordinarias simples*:

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{a}{b}, \quad \frac{P_1}{Q_1} = q_0 + \frac{1}{q_1}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2}}, \dots, \frac{P_n}{Q_n} = w$$

Se conocen estos números como las *fracciones convergentes* de la fracción continua w .

Fraciones Continuas Ternarias

El Algoritmo de Jacobi para *fracciones continuas ternarias* es así: si u_1, v_1, w_1 son tres números, se define la expansión de una fracción continua ternaria por las ecuaciones: $u_{n+1} = v_n - p_n u_n$; $v_{n+1} = w_n - q_n u_n$; $w_{n+1} = u_n$, donde p_n y q_n son enteros. Los números A, B, C ,

definidos por las fórmulas de recursión que vienen a continuación, forman el enésimo conjunto de convergencia de la fracción continua ternaria:

$$\left(\frac{u_n}{u_1}, \frac{w_n}{u_1}\right) = (p_1, q_1; p_2, q_2; \dots; p_n, q_n; \dots);$$

$$A_n = q_n A_{n-1} + p_n A_{n-2} + A_{n-3};$$

$$B_n = q_n B_{n-1} + p_n B_{n-2} + B_{n-3};$$

$$C_n = q_n C_{n-1} + p_n C_{n-2} + C_{n-3}.$$

$$\text{Las condiciones iniciales son: } \begin{bmatrix} A_{-2} & A_{-1} & A_0 \\ B_{-2} & B_{-1} & B_0 \\ C_{-2} & C_{-1} & C_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Asimismo, } \begin{bmatrix} A_{n-2} & A_{n-1} & A_n \\ B_{n-2} & B_{n-1} & B_n \\ C_{n-2} & C_{n-1} & C_n \end{bmatrix} = \prod_{1..n} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & p_n \\ 0 & 1 & q_n \end{bmatrix}$$

La expansión inversa se define como sigue: $u_{n+1} = u_n - p_n u_n$; $v_{n+1} = w_n - q_n u_n$; $w_{n+1} = v_n$; en este caso $\left(\frac{u_n}{u_1}, \frac{w_n}{u_1}\right) = (p_1, q_1; \dots; p_n, q_n, \dots)$ y las condiciones iniciales son

$$\begin{bmatrix} A_{n-2} & A_{n-1} & A_n \\ B_{n-2} & B_{n-1} & B_n \\ C_{n-2} & C_{n-1} & C_n \end{bmatrix} = \prod_{1..n} \begin{bmatrix} 1 & 0 & p_n \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & q_n \end{bmatrix}$$

donde

$$A_n = q_n A_{n-1} + A_{n-2} + p_n;$$

$$B_n = q_n B_{n-1} + B_{n-2};$$

$$C_n = q_n C_{n-1} + C_{n-2},$$

con las mismas condiciones iniciales que en el método anterior.

Como los métodos de Jacobi (J) y el método inverso (R) convergen rápido, en el problema de la afinación se busca un método de convergencia lenta. En cualquier etapa de la expansión hay dos posibles divisores, u_n y v_n ; así es que, se divide por el más grande. De esta forma, para una etapa J:

$$\begin{bmatrix} A_{n-2} & A_{n-1} & A_n \\ B_{n-2} & B_{n-1} & B_n \\ C_{n-2} & C_{n-1} & C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n-k-3} & A_{n-k-2} & A_{n-k-1} \\ B_{n-k-3} & B_{n-k-2} & B_{n-k-1} \\ C_{n-k-3} & C_{n-k-2} & C_{n-k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & p_n \\ 0 & 1 & q_n \end{bmatrix} \text{ donde } k \text{ es el número}$$

de etapas R entre ésta y la última etapa J. Para una etapa R, la matriz es
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & p_n \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & q_n \end{bmatrix}.$$

Para una etapa R, tenemos que $S_n = q_n S_{n-1} + S_{n-2} + p_n S_{n-k-3}$, y para una etapa J, $S_n = q_n S_{n-1} + p_n S_{n-2} + S_{n-k}$, con $S_n = A_n, B_n$ ó C_n .

Apéndice 2

Algebra Booleana

Definición 1: Sea un \mathcal{B} conjunto con dos operaciones binarias, \cup y \cap . $(\mathcal{B}, \cup, \cap)$ es un *álgebra Booleana* si:

- (1) \cup y \cap son conmutativas;
- (2) $(\mathcal{B}, \cup, \cap)$ posee dos elementos neutros,
 - (2.1) el elemento 0 para \cup , y
 - (2.2) el elemento 1 para \cap ;
- (3) para todo $x \in \mathcal{B}$, existe un $x' \in \mathcal{B}$ tal que:
 - (3.1) $x \cup x' = 1$ (el conjunto universal) y
 - (3.2) $x \cap x' = 0$ (el conjunto vacío);
- (4) Cada operación binaria es distributiva con respecto a la otra, o sea, para todo $x, y, z \in \mathcal{B}$,
 - (4.1) $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$, y
 - (4.2) $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$.

Funciones Booleanas

Cualquier expresión de la forma $x \cup y$, $x \cap y'$, $[x \cup (y \cap z)']$ es una *función Booleana*. Es decir, una función booleana se compone de una cantidad finita de elementos unidos por \cup y \cap . El número de variables de una función es el número de letras distintas (x y x' se toman como una sola variable). Así es que, una variable booleana consiste en dos valores que corresponden, en el lenguaje de la lógica, a *verdadero* y *falso*; también se puede ver como la variable x y su negación x' , que se representan con los números 0 y 1.

Apéndice 3

Teoría de Autómatas

Definición 1: Sea Σ un conjunto finito, no vacío, de símbolos. Este conjunto se denomina *alfabeto*. De los símbolos individuales se construyen *cuerdas* que son sucesiones finitas de símbolos del alfabeto.

Ejemplos: (1) Si el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$, entonces *abab* y *aaabbb* son cuerdas sobre Σ .

(1.2) Si el alfabeto $\Sigma = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, entonces $\emptyset \{a\} \{a, b\} \{a\}$ y $\{b\} \{b\} \{a, b\}$ son cuerdas sobre Σ .

La *concatenación* (*yuxtaposición*) de dos cuerdas w y v es la cuerda obtenida cuando se conecta el símbolo de v al lado derecho de w .

Ejemplos: (1.3) Si $w = a_1a_2\dots a_n$ y $v = b_1b_2\dots b_n$ entonces $wv = a_1a_2\dots a_nb_1b_2\dots b_n$.

(1.4) Si $w = \{a, b\} \{a\} \emptyset$ y $v = \{b\} \{b\}$ entonces $wv = \{a, b\} \{a\} \emptyset \{b\} \{b\}$.

Definición 2: Si Σ es un alfabeto, Σ^* es el conjunto de cuerdas que se obtiene por la concatenación de cero o más símbolos de Σ . El conjunto Σ^* siempre contiene a λ , la cuerda vacía. Un *lenguaje* se define como un subconjunto de Σ^* . Cualquier cuerda w en un lenguaje L , se llama una *palabra* de L .

Ejemplos: (1.2.1) Sea $\Sigma = \{a, b\}$. Entonces $\Sigma^* = \{\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \dots\}$.

(1.2.2) El conjunto $\{a, aa, aab\}$ es un lenguaje sobre $\Sigma = \{a, b\}$. Como tiene un número finito de palabras, es un lenguaje finito.

Como los lenguajes son conjuntos, la unión, la intersección y la diferencia se definen de forma inmediata..

Apéndice 3

Teoría de Autómatas

Definición 1: Sea Σ un conjunto finito, no vacío, de símbolos. Este conjunto se denomina *alfabeto*. De los símbolos individuales se construyen *cuerdas* que son sucesiones finitas de símbolos del alfabeto.

Ejemplos: (1) Si el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$, entonces *abab* y *aaabbb* son cuerdas sobre Σ .

(1.2) Si el alfabeto $\Sigma = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, entonces $\emptyset \{a\} \{a, b\} \{a\}$ y $\{b\} \{b\} \{a, b\}$ son cuerdas sobre Σ .

La *concatenación* (*yuxtaposición*) de dos cuerdas w y v es la cuerda obtenida cuando se conecta el símbolo de v al lado derecho de w .

Ejemplos: (1.3) Si $w = a_1 a_2 \dots a_n$ y $v = b_1 b_2 \dots b_n$ entonces $wv = a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_n$.

(1.4) Si $w = \{a, b\} \{a\} \emptyset$ y $v = \{b\} \{b\}$ entonces $wv = \{a, b\} \{a\} \emptyset \{b\} \{b\}$.

Definición 2: Si Σ es un alfabeto, Σ^* es el conjunto de cuerdas que se obtiene por la concatenación de cero o más símbolos de Σ . El conjunto Σ^* siempre contiene a λ , la cuerda vacía. Un *lenguaje* se define como un subconjunto de Σ^* . Cualquier cuerda w en un lenguaje L , se llama una *palabra* de L .

Ejemplos: (1.2.1) Sea $\Sigma = \{a, b\}$. Entonces $\Sigma^* = \{\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \dots\}$.

(1.2.2) El conjunto $\{a, aa, aab\}$ es un lenguaje sobre $\Sigma = \{a, b\}$. Como tiene un número finito de palabras, es un lenguaje finito.

Como los lenguajes son conjuntos, la unión, la intersección y la diferencia se definen de forma inmediata..

II Gramáticas

Una gramática G se define como una lista de 4 elementos $G = (V, T, S, P)$ donde:

V es un conjunto finito de objetos llamados *variables*;

T es un conjunto finito de objetos llamados *símbolos terminales*;

$S \in V$ es un símbolo especial, llamado la *variable inicial*;

P es un conjunto finito de *producciones*.

Los conjuntos V y T son disjuntos y son diferentes del vacío.

Las reglas de producción especifican cómo la gramática G transforma una cuerda en otra, definiendo así un lenguaje asociado a la gramática. Las reglas de producción son de la forma $x \rightarrow y$, donde x pertenece a $(V \cup T)^+$ (o sea, $(V \cup T) - \{\lambda\}$), y y pertenece a $(V \cup T)^*$.

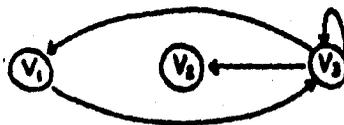
Dada una cuerda w , de la forma $w = uxv$, si aplicamos la regla de producción, obtenemos $z = uyv$, que se escribe $w \Rightarrow z$.

Si $G = (V, T, S, P)$, entonces el conjunto $L(G) = \{w \in T^* : S^* \rightarrow w\}$ es el lenguaje generado por G .

Ejemplo. II.1) Sea $G = (\{S\}, \{a, b\}, S, P)$ con P de la forma: $S \rightarrow aSb; S \rightarrow \lambda$. Entonces, $S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow nabb$, y escribimos $S^* \Rightarrow aabb$.

III Gráficas

Una gráfica consiste en dos conjuntos finitos $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ que son los *vértices* y $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ que se llaman *esquinas*. Cada esquina es un par de vértices de V , por ejemplo, $e_i = \{v_j, v_k\}$. Las gráficas se representan por diagramas en que los vértices son círculos y las esquinas son líneas con flechas que conectan los vértices. Por ejemplo, la gráfica con vértices $\{v_1, v_2, v_3\}$ y esquinas $\{(v_1, v_3), (v_3, v_1), (v_3, v_2), (v_3, v_3)\}$ se ve así:



Una sucesión de esquinas. $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_m, v_n)$, es un camino de v_1 a v_n .

IV Autómatas

Un autómata es un modelo abstracto de una computadora digital. Un receptor *determinista finito (dfa)* se define por la lista de 5 elementos $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, T)$, donde:

Q es un conjunto finito de *estados internos*;

Σ es un conjunto finito de símbolos llamado *alfabeto de entradas*;

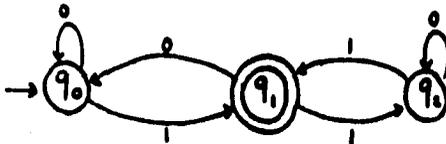
$\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ es llamada la *función de transición*;

$q_0 \in Q$ es el *estado inicial*;

$T \subseteq Q$ es un conjunto de *estados terminales*.

Ejemplo. IV.1) Sea $M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_1\})$. Las reglas de producción son:

$\delta(q_0, 0) = q_0; \delta(q_1, 0) = q_0; \delta(q_2, 0) = q_2; \delta(q_0, 1) = q_1; \delta(q_1, 1) = q_2; \delta(q_2, 1) = q_1$. A continuación se muestra la gráfica de transición que representa la sucesión de funciones. El estado terminal se representa con un círculo doble.



V Lenguajes y Autómatas

Un lenguaje L es el conjunto de todas las cuerdas reconocibles para un autómata. El lenguaje reconocido por un dfa $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, T)$ es el conjunto de todas las cuerdas sobre Σ reconocidas por M , o sea, $L(M) = \{w \in \Sigma^* : \delta^*(q_0, w) \in T\}$.

Si un dfa no acepta (es decir, no reconoce) un lenguaje, éste se para en un estado no final, tal que $\bar{L}(M) = \{w \in \Sigma^* : \delta^*(q_0, w) \notin T\}$.

Apéndice 4

I Módulos

Definición I.1: Sea Λ un anillo conmutativo con $1 \neq 0$. Un Λ módulo es una pareja (M, μ) donde M es un grupo abeliano aditivo y $\mu: \Lambda \times M \rightarrow M$ es una función $(\alpha, x) \rightarrow \alpha x$ tal que:

$$(I.1) \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y; \quad \text{para } \alpha, \beta \in \Lambda, \quad x, y \in M$$

$$(I.2) (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x;$$

$$(I.3) (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x);$$

$$(I.4) 1x = x$$

Ejemplo. I.1 Si $\Lambda = \mathbb{Z}$, el anillo de los números enteros, entonces para todo grupo abeliano G , la función $\mu: \mathbb{Z} \times G \rightarrow G$, dada por $\mu(n, x) = nx$ satisface 1,2,3 y 4 para todo $n \in \mathbb{Z}$ y todo $x \in G$. Así es que, todo grupo abeliano es un \mathbb{Z} -módulo.

Definición I.2: Sean M y N dos Λ -módulos. Una función $f: M \rightarrow N$ se llama *homomorfismo de Λ -módulos* si:

$$(2.1) f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ y } f \text{ conmuta con la acción de cada } \alpha \in \Lambda. \text{ Es decir, } f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \text{ para todo } \alpha, \beta \in \Lambda \text{ y todo } x, y \in M.$$

II Categorías y Funtores

Definición II.1: Una categoría \mathcal{C} consiste en:

(II.1) una clase de objetos A, B, C ;

(II.2) un conjunto $\mathcal{C}(A, B)$, correspondiente a cada par de objetos $A, B \in \mathcal{C}$, cuyos elementos son morfismos f de A en B , $f: A \rightarrow B$;

Apéndice 4

I Módulos

Definición I.1: Sea Λ un anillo conmutativo con $1 \neq 0$. Un Λ *módulo* es una pareja (M, μ) donde M es un grupo abeliano aditivo y $\mu : \Lambda \times M \rightarrow M$ es una función $(\alpha, x) \rightarrow \alpha x$ tal que:

$$(I.1) \quad \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y; \quad \text{para } \alpha, \beta \in \Lambda, \quad x, y \in M$$

$$(I.2) \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x;$$

$$(I.3) \quad (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x);$$

$$(I.4) \quad 1x = x$$

Ejemplo. I.1 Si $\Lambda = \mathbb{Z}$, el anillo de los números enteros, entonces para todo grupo abeliano G , la función $\mu : \mathbb{Z} \times G \rightarrow G$, dada por $\mu(n, x) = nx$ satisface 1,2,3 y 4 para todo $n \in \mathbb{Z}$ y todo $x \in G$. Así es que, todo grupo abeliano es un \mathbb{Z} -módulo.

Definición I.2: Sean M y N dos Λ -módulos. Una función $f : M \rightarrow N$ se llama *homomorfismo de Λ -módulos* si:

$$(2.1) \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ y } f \text{ conmuta con la acción de cada } \alpha \in \Lambda. \text{ Es decir, } f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \text{ para todo } \alpha, \beta \in \Lambda \text{ y todo } x, y \in M.$$

II Categorías y Funtores

Definición II.1: Una *categoría* C consiste en:

(II.1) una clase de objetos A, B, C ;

(II.2) un conjunto $C(A, B)$, correspondiente a cada par de objetos $A, B \in C$, cuyos elementos son morfismos f de A en B , $f : A \rightarrow B$;

(II.3) una ley de composición para cada terna de objetos $A, B, C \in \mathcal{C}$, tal que

$\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \rightarrow \mathcal{C}(A, C)$, la cual satisface los siguientes axiomas:

- a) $\mathcal{C}(A, B) = \mathcal{C}(D, E)$ si y sólo si $A = D, B = E$.
- b) Si $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ y $h : C \rightarrow D$, entonces $h(gf) = (hg)f$.
- c) Para todo objeto $A \in \mathcal{C}$, existe un morfismo $1_A : A \rightarrow A$ tal que, para cualesquiera $f : A \rightarrow B$ y $g : C \rightarrow A$, $f1_A = f$ y $1_Ag = g$.

Ejemplo. (II.1) La categoría de los conjuntos, *Conj*. Sus objetos son los conjuntos y los morfismos son las funciones de un conjunto en otro.

Definición II.2: Sean \mathcal{C} y \mathcal{C}' dos categorías. Un funtor covariante, $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$, es una regla que asocia:

(II.2.1) un objeto $A' \in \mathcal{C}'$ a cada objeto $A \in \mathcal{C}$;

(II.2.2) un morfismo $(F(f) : F(A) \rightarrow F(B)) \in \mathcal{C}'(F(A), F(B))$ a cada morfismo $(f : A \rightarrow B) \in \mathcal{C}(A, B)$.

$F(f)$ satisface las siguientes condiciones:

(II.2.3) $(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ y

(II.2.4) $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

Definición II.3: Sean \mathcal{C} y \mathcal{C}' dos categorías. Un funtor contravariante, $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$, satisface (II.2.1) y (II.2.4) de la Definición II.2, más:

(II.3.1) a cada morfismo $(f : A \rightarrow B) \in \mathcal{C}(A, B)$ se asocia un morfismo $(F(f) : F(B) \rightarrow F(A)) \in \mathcal{C}'(F(B), F(A))$ y

(II.3.2) $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$.

Ejemplo. (II.2.1) Sea un funtor $F : \text{Conj} \rightarrow_{\Lambda} \text{Mod}$ tal que a cada conjunto X se le asocia un Λ -módulo libre $F(X)$ con base X . Si $f : X \rightarrow Y$ es una función entre conjuntos entonces, como $F(X)$ es un Λ -módulo libre, f se extiende a un homomorfismo único $F(X) \rightarrow F(Y)$.

III Variedades

Definición III.1: Sea n un entero positivo. Una variedad n dimensional es un espacio de Hausdorff (es decir, para dos puntos arbitrarios x e y de un espacio topológico T existen vecindades abiertas O_x y O_y de intersección vacía) tal que cada punto tiene un entorno abierto homeomorfo a la bola abierta $U^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$.

Apéndice 5

I Nervio

Definición I.1: El nervio de una cubierta consiste en asociar a cada cubierta abierta finita llamada $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ de un espacio métrico compacto X , un complejo combinatorio (conjunto finito) $N(\mathcal{U})$. Los vértices son las U_α y los p -simplejos de $N(\mathcal{U})$ son los subconjuntos $(U_{\alpha_0}, U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n})$ de $p+1$ conjuntos de la cubierta tal que la intersección $U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_n} \neq \emptyset$.

II Simplejos

Definición II.1: Para todo conjunto A de un espacio lineal L , existe el menor conjunto convexo que contiene a A . Este conjunto convexo minimal es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a A y se llama *cápsula convexa* del conjunto A .

Definición II.3: Sean x_1, x_2, \dots, x_{n+1} puntos de un espacio lineal. Se dice que los puntos están en *posición general* cuando no pertenecen a ningún subespacio de dimensión $(n-1)$. La cápsula convexa de los puntos x_1, \dots, x_{n+1} , que se encuentran en posición general, se llama *simplejo* de n dimensiones y los puntos x_1, \dots, x_{n+1} son los vértices de este simplejo. Un simplejo de dimensión cero es un punto; un simplejo unidimensional es un segmento, un simplejo bidimensional es un triángulo y un simplejo tridimensional, un tetraedro.

Bibliografía

[Abell] Abell, George, et.al., *Exploration of the Universe*, Saunders Golden Sunburst series, Saunders College Publishing, USA, 1987.

[Bal.] Balzano, Gerald, "The Group-Theoretic Description of 12-Fold and Microtonal Pitch Systems", *Computer Music Journal*, Vol.4, No.4, Winter 1980, Massachusetts Institute of Technology.

Barbaud, Pierre, *Introduction à la Composition Musicales Automatique*, Dunod, Paris, 1965.

Barbaud, Pierre, *La Musique Discipline Scientifique*, Dunod, Paris, 1968.

[Bar.] Barbour, J.M, "Music and Ternary Continued Fractions", *American Journal of Mathematics*, Nov. 1948.

Benade, Arthur, *Horns, Strings and Harmony*, Anchor Books, Doubleday & Company, Inc., Garden City, New York, 1960.

[Birk.,1] Birkhoff, George David [1], "A Mathematical Theory of Aesthetics", *Rice Institute Pamphlet*, Vol. 19, July 1932.

[Birk., 2] Birkhoff, George David [2], *Medida Estética*, Universidad Nacional del Litoral, Rosario, Argentina, 1945.

[Chem.] Chemillier, Marc, "Monoïde Libre et Musique", *Informatique Théorique et Applications*, Vol.21, no. 3,4, oct. 1986, jan. 1987.

[Esta.] Estrada Julio y Gil, Jorge, *Teoría de Grupos y la Música (3 variables booleanas)*, Instituto de Investigaciones Estéticas, Universidad Nacional Autónoma de México, 1984.

[Fra.] Fraleigh, John B., *Algebra Abstracta*, Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, Delaware, 1987.

[Gri.] Grimaldi, Ralph, *Matemáticas Discretas y Combinatoria*, Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, Delaware, 1989.

[Helm.] Helmholtz, Hermann, *On the Sensations of Tone as a Physiological Basis for the Theory of Music*, Dover Publications, Inc., New York, 1954.

[Je.] Jeans, James Sir, *Science and Music*, Dover Publications, Inc., New York, 1968.

[Len.] Lendvai, Erno, *Bela Bartok: An Analysis of His Music*, Kahn & Averill, London, 1979.

[Lew.] Lewin, David, "Forte's Interval Vector, My Interval Function and Regener's Common-Note Function", *Journal of Music Theory*, Yale University, New Haven, Connecticut, 1979.

Linz, Peter, *An Introduction to Formal Languages and Automata*, D.C. Heath and Company, Lexington, Massachusetts.

[Ll.P.] Lluís Puebla, Emilio, *Algebra Homológica, Cohomología de Grupos y K-Teoría Algebraica Clásica*, Addison-Wesley Iberoamericana, S.A., México, 1990.

[Mazz.,1] Mazzola Guerino [1], "Musical Performance and Vector Fields: Mathematical Music Theory Between Physics and Esthetics", Universidad de Zürich, Mar. 26, 1996.

[Mazz.,2] Mazzola, Guerino y Zahorka, Oliver [2], "The RUBATO Performance Workstation on NEXTSTEP", *ICMC Proceedings, 1994*.

[Mazz., 3] Mazzola, Guerino [3], "Towards Big Science Geometric Logic of Music and its Technology", *ICMC Proceedings, 1996*.

[Mazz., 4] Mazzola, Guerino [4], "Mathematical Music Theory-An Informal Survey", *CER-FIM, 1994*

[Mazz., 5] Mazzola, Guerino [5], "Mathematische Musiktheorie: Status quo 1990", *Jber. d. Dt. Math., Verein B.G. Teubner, Stuttgart, 1991*.

[Mazz., 6] Mazzola, Guerino [6], *Gruppen und Kategorien in der Musik*, *Jber. d. Dt. Math. Verein, Stuttgart, 1991*.

[Muzzu.] Muzzolini, Daniel, *Musical Modulation by Symmetries*, *Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich Research Report No. 90-02, Jul. 1990*.

[Reg.] Regener, Eric, "On Allen Forte's Theory of Chords", *Perspectives of New Music*, 1974.

Roads, C. "Grammars as Representations for Music", *Computer Music Journal*, Vol. III, No.1, 1979.

[Rob.] Robin, Leon, *Greek Thought and the Origins of the Scientific Spirit*, Knopf, New

York, 1928.

Roeder, John, "A MaMuth Achievement", *Perspectives of New Music*, 1992.

Stephen, M., "Mysterious Number Phi", *Mathematics Teacher*, Mar. 1956.

[Vor] Vorobev, N.N., *Fibonacci Numbers*, Blaisdell Publishing Company, New York, 1961.