

7
29



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**MODOS NORMALES
EN MEMBRANAS USANDO
PELÍCULAS DE JABÓN.**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

F Í S I C O

P R E S E N T A :

JOSÉ ANACLETO PEDRO ANTONIO
CUATLÁYOL ANRUBIO

DIRECTOR: M. EN C. RAFAEL A. MÉNDEZ SÁNCHEZ



MÉXICO, D.F.

FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

NOVIEMBRE 1996

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
"Modos normales en membranas usando películas de jabón"

realizado por JOSE ANACLETO PEDRO ANTONIO CUATLAYOL ANRUBIO
con número de cuenta 8752654-3 , pasante de la carrera de Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

M. EN C. RAFAEL ALBERTO MENDEZ SANCHEZ

Propietario

FIS. ARTURO FREYRE RODRIGUEZ

Propietario

DR. FRANCOIS ALLAIN LEYVRAZ WALTZ

Suplente

FIS. LUISA GABRIELA DEL VALLE DIAZ MUÑOZ

Suplente

M. EN C. ROBERTO SAYAVEDRA SOTO

Consejo Departamental de Física

DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORGA
Coordinador de Licenciatura

FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

a mi madre:

ERIBINA ANRUBIO OLIVAR

a la memoria de mi padre:

PEDRO GUATRAYO PÉREZ

a la memoria de mi abuelito:

ISAURO ROMERO CISNEROS

a mi hermana:

MARTA SUADAFUÉS GUATRAYO ANRUBIO

a su familia:

CARLOS SANCHEZ LLANES VENEZAS (espos)

CARLOS SANCHEZ LLANES GUATRAYO (hijo)

MARTA SUADAFUÉS SANCHEZ LLANES GUATRAYO (hija)

A mi abuelita Blandina Olivar de Aragón, a mi Tío Vicente Romero Olivar su esposa y mi primo, gracias por su gran ayuda. A todos mis demás tíos.

A mis "Amigos y Hermanos" de toda la vida, en especial a Luci Acevedo de S., Don Edmundo Salazar R., Cristina Salazar A., Angela Salazar A., Edmundo Salazar A., Victor Gómez E., Jorge López L., Hugo Castellanos M., Irma Martínez R., Arturo Sánchez V., Valeria González M., Pilar Espinoza H., Arturo López V., Marisol Medina R., Gabriel Gallegos C., Armando Ríos F., Rosalba Sanchezllanes V., Margarita Villegas, Margarita López V. y a todos los demás que en este momento escapan a mi mente, gracias por su amistad y todos los momentos gratos que hemos pasado juntos.

a Mí..

Con todo mi cariño a:

MARTA DE LA LUZ HERNÁNDEZ PRATA

por tu gran ayuda y apoyo,

por tu gran entereza en todo momento,

por tu compañía y todos los momentos gratos que hemos compartido,

por que le has dado sentido a mi vida,

por nuestro hijo que traes consigo en tus entrañas...

por nuestra felicidad.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer de manera muy en especial al amigo, compañero y director de mi tesis por su gran apoyo :

M. en C. Rafael Alberto Méndez Sánchez

También agradezco a mis sinodales, que contribuyeron a mejorar este trabajo de tesis con sus correcciones comentarios y sugerencias.

M. en C. Rafael Alberto Méndez Sánchez

Fís. Arturo Freyre Rodríguez

Dr. François Allain Leyvraz Waltz

Fís. Luisa Gabriela del Valle Díaz Muñoz

M. en C. Roberto Sayavedra Soto

De la misma manera quiero agradecer a la **M. en C. Gabriela Báez** y al **Fís. Hugo Hernández**, por las revisiones y discusiones a este trabajo que me ayudaron a comprender mejor el tema, también agradezco a **Martha de la Luz Hernández Prian** por ayudarme a digitalizar todas las fotos que esta tesis contiene y además por su empeño en corregir la versión final. Asimismo agradezco a **Pablo Hernández Prian** su valiosa ayuda para hacer los aros que usé en el experimento, también al **Dr. Enrique Geffroy Aguilar** por su apoyo, al **Dr. Guillermo Pulos** por las facilidades brindadas para la impresión de esta tesis y al **Dr. Luis Benet** por su ayuda para transferir mis archivos.

Agradezco a todos los profesores que me han formado como profesionista durante toda mi carrera.

Agradezco a todos mis amigos y compañeros por haber compartido conmigo, muchas experiencias buenas y malas a lo largo de la carrera.

Finalmente, agradezco a la **Universidad Nacional Autónoma de México** por la formación profesional que me ha brindado.

"Por mi raza hablará el espíritu"

Universidad Nacional Autónoma de México.

ÍNDICE

	PAG.
RESUMEN	1
CAPÍTULO I INTRODUCCIÓN GENERAL.	3
1.1 Billares Clásicos.	3
1.2 Billares Cuánticos y Membranas.	4
CAPÍTULO II BILLARES CLÁSICOS, CUÁNTICOS Y MEMBRANAS.	7
2.1 Introducción.	7
2.2 Billares Integrables.	7
2.2.1 Billar Rectangular.	7
2.2.2 Billar Circular.	8
2.2.3 Billar Elíptico.	8
2.3 Billares Caóticos.	9
2.3.1 Billar de Sinai.	9
2.3.2 Estadio de Bunimovich.	10
2.3.3 Billar Limón.	11
2.3.4 Billar África.	12
2.4 Billares con Aplicaciones Diversas.	12
2.4.1 Billar Lago.	13
2.4.2 Billar Eliptriángulo.	14
2.5 Ecuación de Onda para una Membrana.	14
2.6 Ecuación de Schrödinger para un Billar.	17
2.7 Equivalencia de Sistemas.	17
2.8 Membrana Rectangular.	18

	PAG.
2.9	Membrana Circular. 19
2.10	Membrana Elíptica. 22
2.11	Membranas con otras Formas. 24
2.12	Órbitas Periódicas. 24
	a) "Scars". 24
	b) "Bouncing Ball States". 24
CAPÍTULO III	ESTUDIO DE LOS MODOS NORMALES CON MEMBRANAS. 27
3.1	Introducción. 27
3.2	Diseño Experimental. 27
3.3	Descripción de la Solución Jabonosa. 29
3.4	Geometrías Integrables. 29
	3.4.1 Rectángulo. 29
	3.4.2 Círculo. 31
	3.4.3 Elipse. 31
3.5	Geometrías Irregulares. 32
	3.5.1 Estadio de Bunimovich. 32
	3.5.2 Billar de Sinai. 33
	3.5.3 Billar Limón. 34
	3.5.4 Billar África. 36
	3.5.5 Billar Lago. 37
	3.5.6 Billar Eliptriángulo. 38
CAPÍTULO IV	CONCLUSIONES. 39
	REFERENCIAS. 41

RESUMEN

En esta tesis se hará uso de las películas de jabón con el propósito de mostrar experimentalmente las eigenfunciones de geometrías bidimensionales con formas regulares e irregulares. Se usará un dispositivo experimental sencillo, el cual hemos diseñado, que tiene aplicaciones a la enseñanza e investigación.

Se elaborarán distintas mezclas jabonosas con el propósito de encontrar una solución jabonosa óptima, es decir, de larga duración. También se requiere que tenga una gran resistencia a la ruptura, que puede ser provocada por un movimiento vibracional. Este movimiento será generado por un vibrador mecánico, el cuál, responde a frecuencias que van desde unos cuantos Hertz hasta varios kiloHertz.

La tesis propuesta está basada en la relación que existe entre la ecuación de Helmholtz para una membrana plana con condición a la frontera de Dirichlet homogénea (valor de la función igual a cero en la frontera) y la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para un billar bidimensional. Se analizarán diferencias y analogías, así como las interpretaciones físicas.

Las geometrías integrables que se usaran son, por ejemplo: el rectángulo, y el círculo. Se mostrará que los modos propios de las películas de jabón sobre aros con las formas anteriores, corresponden a los modos normales teóricos (funciones seno para el rectángulo y funciones Bessel para el círculo). Estas geometrías son sugeridas para la enseñanza de funciones especiales (Funciones Especiales y Transformadas Integrales), así como en los cursos de Física Clásica II (Calor, Ondas y Fluidos) y Física Teórica IV (Mecánica Cuántica).

También se estudiarán las eigenfunciones de regiones cuya frontera da al sistema una dinámica caóticas como el billar de Sinaï, el billar "Limón", el billar "África" y el estadio de Bunimovich. En estos billares se buscarán características que se han predicho en la literatura de caos cuántico.

En el estadio de Bunimovich y en el billar de Sinaï, por ejemplo, se espera encontrar: *scars* (cicatrices), los cuales son un remanente (en la Mecánica Cuántica) de las órbitas inestables y aisladas del sistema clásico; *bouncing ball states* (estados de "pelota"), que están relacionados con las órbitas no aisladas de estos billares; *noisy states* (estados ruidosos), los cuales son típicos de sistemas que clásicamente presentan caos.

Se analizará también un billar con forma del antiguo lago de Tenochtitlan, el cual tiene aplicaciones en sismología. Ya que éste no tiene soluciones exactas solamente se realizarán comparaciones con patrones que han sido obtenidos numéricamente (método del elemento finito y método de diferencias finitas, entre otros) y/o experimentalmente con otros métodos (cavidades de microondas de altura despreciable, ondas superficiales en tanques de ondas de profundidad constante, placas de Chladni, tambores con geografía arbitraria, etc.).

El punto más importante de la tesis es que se espera observar, con un experimento clásico y elegante, el comportamiento de sistemas ondulatorios (billares cuánticos), que por razones teóricas y numéricas, presentan características peculiares.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN GENERAL.

En los últimos años, el estudio del caos y los fenómenos no lineales, se ha desarrollado como una rama muy importante de la física. También se ha incrementado la curiosidad acerca de las implicaciones, de esta enorme evolución de conceptos, en la mecánica cuántica y en general en todos los sistemas ondulatorios.

El tema de estudio, de este nuevo campo (llamado caos cuántico), aún no está bien definido, pero podemos distinguir dos grandes áreas: por un lado la revisión completa del límite semiclásico, el principio de correspondencia, etc. y por otro, el estudio del comportamiento cuántico de sistemas clásicamente caóticos.

Parte del trabajo en este último campo, se refiere esencialmente al estudio de cavidades bidimensionales conocidas como billares. Estos billares pueden tomar distintas formas, tales como rectángulos (el nombre surge de éstos), círculos, elipses y otros más complicados (prácticamente cualquier región bidimensional acotada que uno se imagine puede ser un billar. Más adelante, esto se discutirá con mayor detalle). Clásicamente, las geometrías arriba mencionadas, corresponden a sistemas integrables, pero existen otras, las cuales se ha demostrado que son caóticas. Situaciones que tengan ambos comportamientos, de hecho, son las que más ocurren (por ejemplo el billar limón).

Ya que estamos interesados en las implicaciones del caos clásico en los sistemas ondulatorios, introduciremos en la siguiente sección los billares clásicos.

1.1 Billares Clásicos.

Se llama billar al sistema de una partícula moviéndose dentro de una región bidimensional \mathbf{R} de forma arbitraria que satisface, al igual que en óptica geométrica, la ley de la reflexión (que el ángulo de incidencia (θ_i) con respecto a la normal sea igual al ángulo de reflexión (θ_r)). Como \mathbf{R} es de forma arbitraria, se puede generar prácticamente el billar que uno se imagine.

La dinámica que describe una partícula de masa m y con velocidad v dentro de un billar, consiste en segmentos de línea recta unidos por reflexiones especulares en la frontera ∂R (ver Figura 1.1). Escogiendo apropiadamente las condiciones iniciales, se pueden obtener las trayectorias permisibles, entre las cuales se encuentran las trayectorias periódicas. Éstas juegan un papel importante como veremos en los siguientes capítulos.

Dada una geometría determinada, es fácil distinguir varias trayectorias periódicas, que se pueden clasificar en dos tipos: algunas de ellas son órbitas estables y otras son órbitas inestables. Estas últimas se dividen en aisladas y no aisladas.

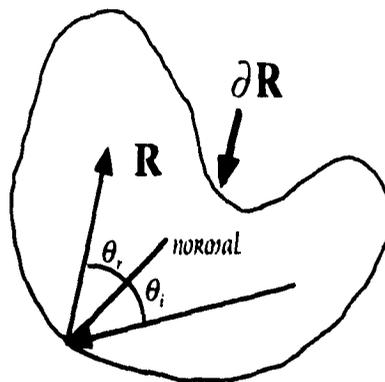


Figura 1.1 La región R muestra una geometría arbitraria dentro de la cual, una partícula se puede mover cumpliendo la ley de la reflexión y con colisiones elásticas.

El criterio de estabilidad de la órbita al que nos referimos es simple: Dadas dos condiciones iniciales, una sobre la órbita periódica y la otra muy cercana a ésta, es posible construir la dinámica linealizada de esta diferencia. Se aprecia que cuando el movimiento es inestable, esta diferencia diverge exponencialmente. El parámetro que caracteriza esta divergencia es llamado exponente de Lyapunov.

1.2 Billares Cuánticos y Membranas.

El análogo cuántico de los billares clásicos son llamados billares cuánticos, y sus eigenfunciones están relacionadas a las características de su contraparte clásica. Los billares cuánticos, satisfacen la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo (ecuación de Helmholtz) con la amplitud nula en las orillas (condiciones de Dirichlet a la frontera). Tales sistemas pueden ser simultáneamente entendidos como un tambor o cualquier membrana vibrante sujeta a un marco. El propósito de esta tesis es

mostrar que el comportamiento cuántico de los billares clásicamente integrables y caóticos, puede ser presentado en un salón de clases con las vibraciones de una película de jabón. En particular, seremos capaces de exhibir las cicatrices (*scars*) encontradas por primera vez por Heller[1], además de McDonald y Kaufman[2,3] quienes fueron los pioneros.

Se dice que las eigenfunciones están cicatrizadas, si están prácticamente localizadas en una o más órbitas periódicas de la contraparte clásica. No es completamente nuevo el que se encuentren cicatrices en ondas "no cuánticas" ya que los *scars* fueron encontrados sobre placas de Chladni[4], y sobre ondas superficiales en agua[5]. Sin embargo, el experimento aquí sugerido es particularmente simple y elegante, mientras que la ecuación de onda y/o las condiciones a la frontera de los experimentos arriba mencionados, no corresponden exactamente a los billares cuánticos. Por otra parte, las cavidades de microondas son caras y no muestran los *scars* de una manera directamente visible[6].

En el siguiente capítulo vamos a discutir los billares clásicos y cuánticos, haciendo énfasis en las órbitas periódicas y en las eigenfunciones. También estudiaremos la equivalencia de los billares cuánticos con las membranas vibrantes. En el tercer capítulo introduciremos el equipo experimental y se mostrarán las eigenfunciones que se obtienen con las películas de jabón para las distintas geometrías, comparándose con estudios teóricos y/o numéricos. Las conclusiones se dan en el último capítulo.

CAPÍTULO II

BILLARES CLÁSICOS, CUÁNTICOS Y MEMBRANAS.

2.1 Introducción.

En este capítulo se estudian las características de algunos billares clásicos integrables y caóticos. En esta sección también se hace énfasis sobre las órbitas periódicas y su estabilidad. Posteriormente, a partir de la ecuación de Schrödinger en un billar bidimensional, se llega a la ecuación de Helmholtz. Esta última, también se obtiene de la ecuación de onda para una membrana. Además, aquí se estudian las soluciones a las geometrías introducidas en la sección de billares clásicos. El hecho de que la misma ecuación se obtenga en ambos casos, se usa extensamente en éste y en el siguiente capítulo. Finalmente obtenemos la solución para la ecuación de Helmholtz con condiciones a la frontera de Dirichlet para algunas regiones separables, y damos algunos resultados para billares caóticos.

2.2 Billares Integrables.

Empezamos estudiando los billares integrables, ya que la dinámica es estable dentro de ellos. Los billares de este tipo son el rectángulo, el círculo y la elipse.

Las distintas trayectorias dentro de éstos billares se pueden analizar de manera tanto cualitativa como cuantitativa.

2.2.1 Billar Rectangular.

Las órbitas de este sistema pueden ser periódicas o cuasiperiódicas. Las trayectorias periódicas típicas se muestran en la figura 2.1.

Ya que todas las trayectorias son estables y no aisladas, cualquier perturbación en la condición inicial implicara una separación, a lo mas, lineal de las trayectorias.

Las dos constantes de movimiento independientes para este sistema son: las dos proyecciones del módulo de la velocidad sobre los dos ejes paralelos a los lados del rectángulo.

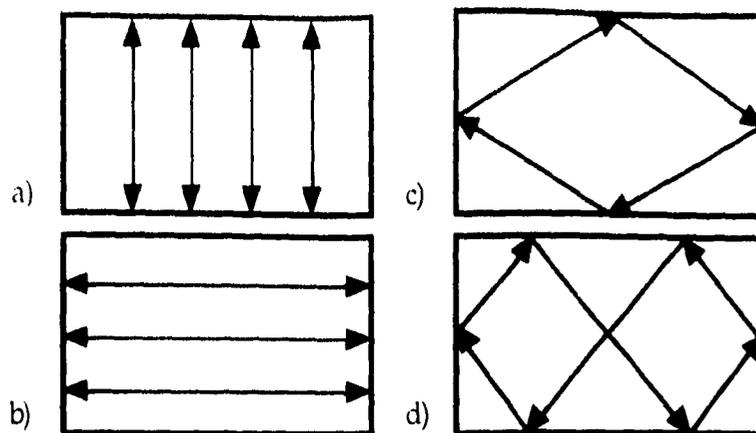


Figura 2.1 Trayectorias periódicas en un billar rectangular.

2.2.2 Billar Circular.

Este es un ejemplo más de los billares integrables. En la figura 2.2 se muestra una trayectoria típica dentro de un billar circular, la cual está confinada en un anillo. Esto da lugar a una cáustica. Sus dos constantes de movimiento independientes son: la energía y el momento angular con respecto al centro del billar. Esta última se debe a que este sistema es invariante ante rotaciones. La presencia de las dos constantes de movimiento implica que el sistema sea integrable.

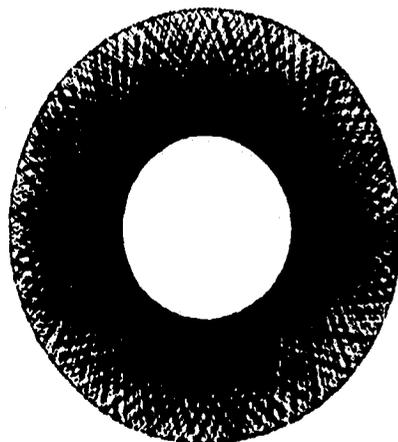


Figura 2.2 Billar Circular que muestra una trayectoria que forma una cáustica.

2.2.3 Billar Elíptico.

La elipse es un billar integrable, ya que tiene dos constantes de movimiento independientes, que son: la energía y el producto de los momentos angulares con respecto a cada uno de los focos de la elipse[7].

En la figura 2.3 se muestran algunas trayectorias periódicas que forman cáusticas. Éstas son elipses a) e hiperboloides b) que comparten los mismos focos con la elipse que define la frontera del billar.

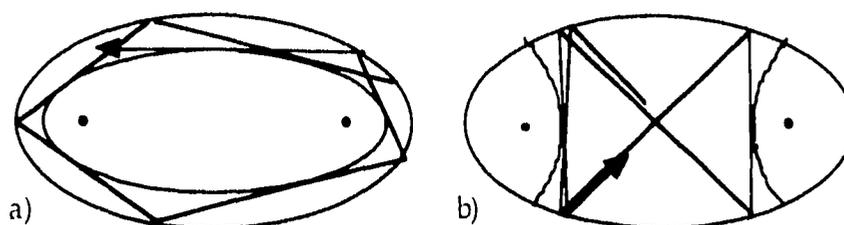


Figura 2.3 Se muestran los dos tipos de cáusticas en el billar elíptico, a) cáusticas en forma de elipses y b) hiperboloides. Ambas son confocales. Tomado de la referencia[6].

2.3 Billares Caóticos.

Existen otros billares que han sido ampliamente estudiados y que presentan caos. Tal es el caso del estadio de Bunimovich, los billares de Sinai, limón y África. De los cuales se da una breve explicación en los siguientes párrafos.

2.3.1 Billar de Sinai.

Este sistema está formado por un cuadrado con un círculo dispersor en el centro. El caos en este billar proviene de que dos órbitas inicialmente cercanas alguna vez pasarán muy cerca del círculo, de tal manera que una sea dispersada por éste y la otra no. Esto da como resultado la divergencia exponencial de las trayectorias. En la figura 2.4, se muestran algunas órbitas inestables aisladas y no aisladas correspondientes al billar de Sinai.

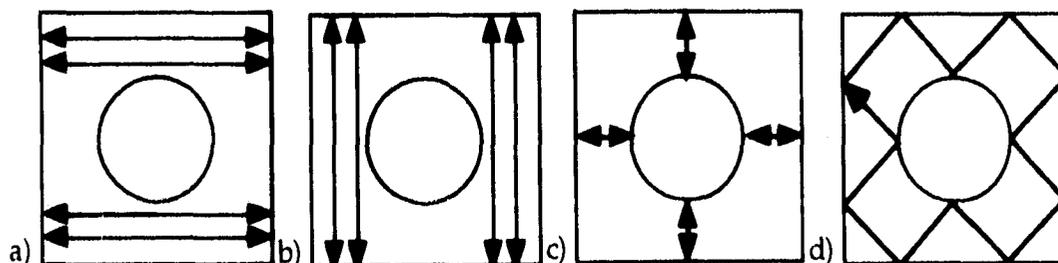


Figura 2.4 Órbitas periódicas no aisladas (a y b) y aisladas (c y d) del billar de Sinai.

2.3.2 Estadio de Bunimovich.

La geometría del estadio de Bunimovich, corresponde a un par de segmentos de recta paralelos de longitud a unidos por dos semicírculos de radio r , como se muestra en la figura 2.5.

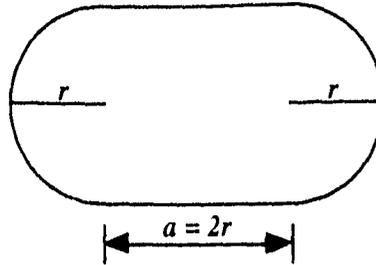


Figura 2.5 Estadio de Bunimovich.

Nuevamente, en este billar se encuentran trayectorias periódicas inestables aisladas y no aisladas que se muestran en la figura 2.6. Algunas órbitas son más inestables que otras, dependiendo de su longitud. Si la órbita es no aislada, entonces la partícula se quedará atrapada por un largo tiempo dentro de la región de órbitas no aisladas marginalmente inestables.

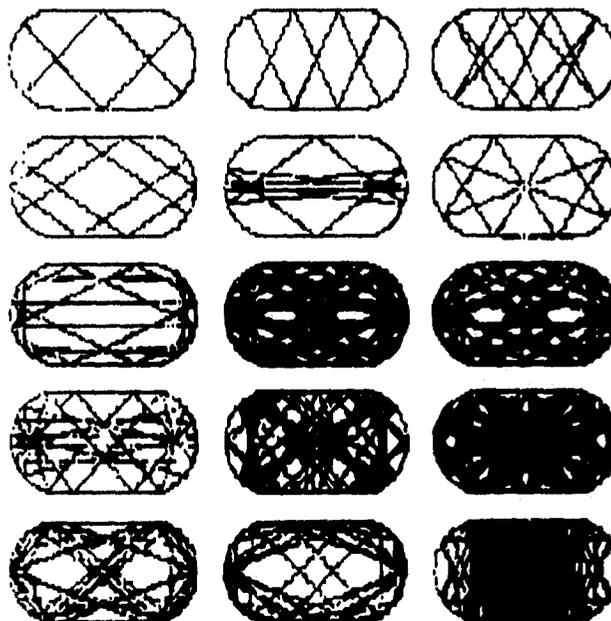


Figura 2.6 Órbitas periódicas aisladas y no aisladas del Estadio de Bunimovich. Tomado de la referencia[8].

A pesar de que la geometría de este billar es sencilla, al igual que el de Sinaï, este billar es caótico. Una trayectoria típica que describe una partícula dentro de este billar nunca se cierra (independientemente de la condición inicial) y barre casi toda el área del estadio. Este tipo de trayectoria es una clara manifestación del comportamiento ergódico del sistema, el cual ha sido comprobado por el propio Bunimovich[9] (ver figura 2.7).

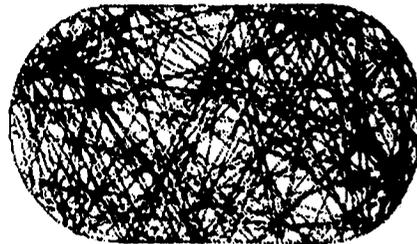


Figura 2.7 Trayectoria ergódica típica del estadio de Bunimovich.
Tomado de la referencia[9].

El que este estadio sea un sistema caótico puede entenderse fácilmente, ya que cuando dos trayectorias inicialmente cercanas chocan en alguno de los semicírculos, se enfocan. Después de esto se desenfocan hasta chocar con el otro semicírculo. Como la distancia de desenfocamiento es más grande que la de enfocamiento, se produce una divergencia exponencial.

2.3.3 Billar Limón.

Este billar está formado por la intersección de dos círculos de radio r , cuyos centros están separados por una distancia $d < r$, la figura 2.8 muestra esquemáticamente como se construye este billar.

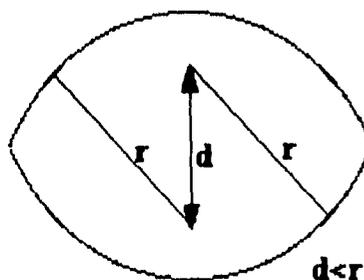


Figura 2.8 Billar Limón.

El billar "Limón" es un ejemplo de los sistemas mezclados (debido a que presenta movimiento caótico y cuasiperiódico). Las trayectorias en este billar están caracterizadas por una extrema sensibilidad a las condiciones iniciales. Algunas trayectorias típicas de los dos tipos de movimientos se presentan a continuación en la figura 2.9.

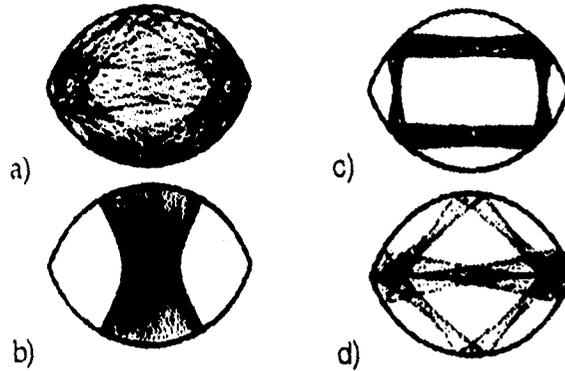


Figura 2.9 Aquí se muestran ambos tipos de movimiento sobre el billar Limón: a) el caótico, b), c) y d) el cuasiperiódico. Tomado de la referencia[10].

2.3.4 Billar África.

Este es otro billar que se ha estudiado y cuya frontera es una representación conformal cúbica del círculo unitario[11]. Esta geometría no tiene ninguna simetría, por lo que no existe otra constante de movimiento independiente a parte de la energía total. Este billar se presenta en la figura 2.10 y ha sido ampliamente usado (principalmente por Berry[12]) para estudiar el efecto de un campo magnético sobre una partícula confinada dentro de éste.

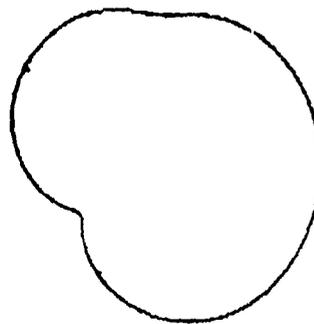


Figura 2.10 Billar África. Tomado de la referencia[10].

2.4 Billares con Aplicaciones Diversas.

También trabajamos con billares que tienen formas asociadas a aplicaciones que no están relacionadas con el caos, o que están diseñados con un propósito

específico. En esta sección se presenta el billar que llamaremos simplemente **lago** y que corresponde a la zona lacustre del Valle de México sobre el antiguo lago de Tenochtitlan. También presentaremos otro billar que nosotros construimos y que hemos llamado “**eliptriángulo**”.

2.4.1 Billar Lago.

En la figura 2.11 a) se muestra un mapa del Valle de México. Esta es una antigua cuenca que contiene tres tipos de terreno bien definidos; montañas rocosas y volcanes (Zona I), depósitos sedimentarios también llamados regiones de transición (Zona II), y la región de barros suaves que corresponde al lecho de los antiguos lagos (Zona III). En la figura 2.11 b) se muestran las fronteras de la región de barros suaves[13] correspondiente al lecho del antiguo lago de Tenochtitlan. También se indican las principales avenidas y puntos de referencia así como su escala y orientación. Por otra parte, los barros de la Zona III son poco profundos (~50m) con respecto a las dimensiones del lago, por lo que Flores *et al*[14] desarrollaron un modelo bidimensional para estudiar la respuesta sísmica de esta capa, basados en los modos normales de esta región. Aunque las condiciones a la frontera para este modelo son diferentes (condiciones de Neumann) y la resonancia es provocada por ondas longitudinales, los modos normales de las películas de jabón nos pueden dar alguna información cualitativa al respecto.

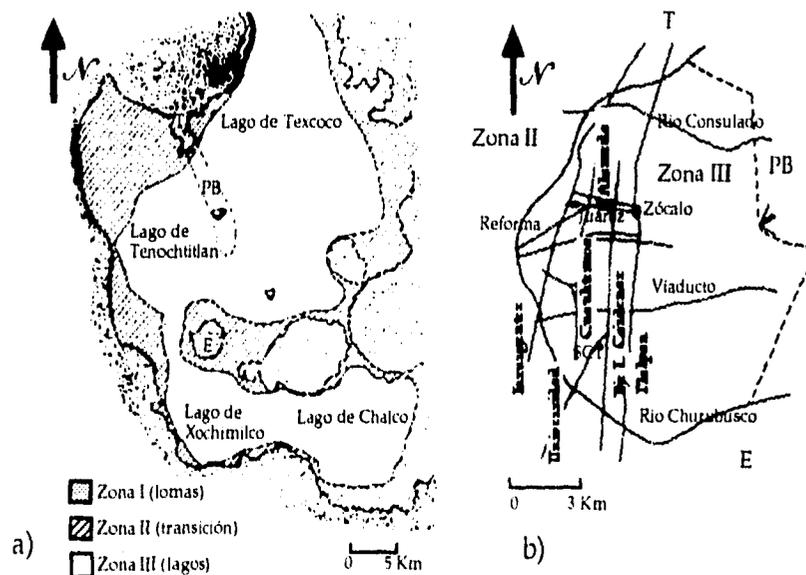


Figura 2.11 a) Mapa del Valle de México. b) Fronteras de la región de barros suaves. Tomado de la referencia[14].

2.4.2 Billar Eliptriángulo.

Este billar fue diseñado con el propósito específico de tener una simetría discreta de rotación, pero ninguna de reflexión. Este billar está construido con un cuarto de elipse (figura 2.12 a) y b)), que se repite sobre las caras de un triángulo equilátero (figura 2.12 c) y d)), de tal manera que se rompen las simetrías de reflexión, mas no las de rotación. De hecho se pueden construir más ejemplos de billares con algún tipo de simetría discreta.

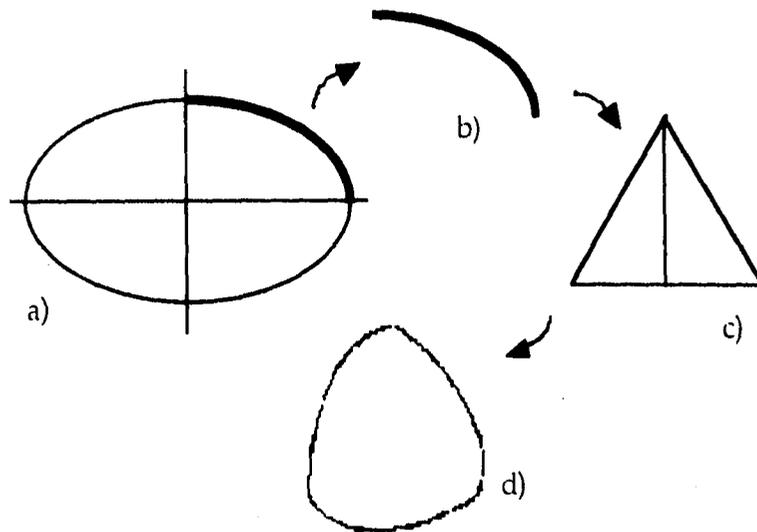


Figura 2.12 Se muestran las faces de construcción del billar eliptriángulo.

2.5 Ecuación de Onda para una Membrana.

En las siguientes secciones estudiaremos los análogos elásticos (membrana bidimensional) y cuántico de los billares clásicos. Esto porque la película de jabón es un sistema de fácil visualización y que corresponde exactamente al análogo cuántico. De hecho esto es cierto para bajas frecuencias (donde el amortiguamiento es casi nulo) y películas no muy extensas (con efectos de la fuerza de gravedad despreciables).

El desplazamiento de una sección infinitesimal de cuerda dx en un tiempo dt está descrito por la ecuación de onda unidimensional

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

donde ψ es el desplazamiento y c es la velocidad de propagación de la onda en la cuerda. Gráficamente esta ecuación describe el desplazamiento de la onda sobre la sección de la cuerda (Ver figura 2.13).

Para obtener la ecuación de onda para una membrana, suponemos que existe una tensión superficial f_0 por unidad de longitud a través de cualquier línea sobre la membrana, sin tomar en cuenta la orientación.

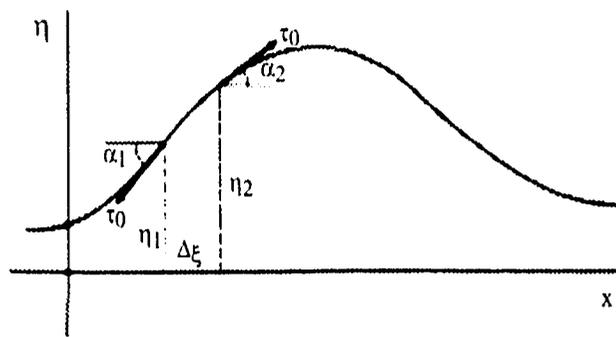


Figura 2.13 Desplazamiento de una porción de cuerda.

Este es el análogo en dos dimensiones de la tensión existente en una cuerda. De manera similar al de una cuerda, se idealizan las propiedades elásticas de la membrana a estudiar, donde f_0 permanece constante para pequeñas deflexiones en cualquier momento y tiempo. Suponemos que la membrana tiene una densidad de masa por unidad de área ρ_0 (Sin tomar en cuenta el efecto de la acción gravitacional y el efecto del peso del aire que rodea la membrana).

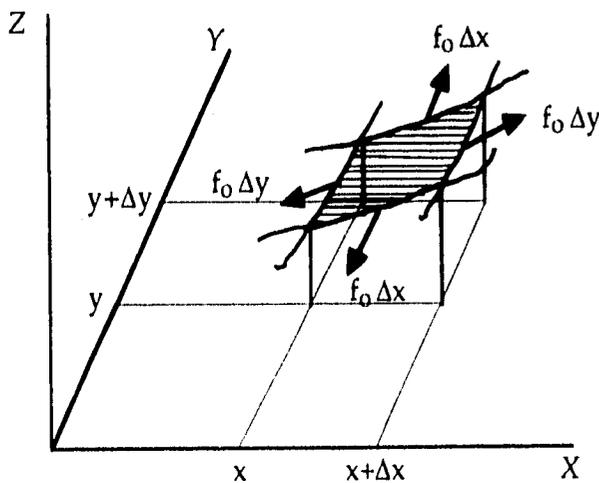


Figura 2.14 Desplazamiento de un elemento cuadrado de membrana.

Se enfocará nuestra atención a un elemento cuadrado de la membrana como se ilustra en la figura 2.14. Cuando la membrana esta desplazada, surge una fuerza neta en la dirección Z para cada par de las fuerzas que ejercen tensión $f_0 \Delta x$ y $f_0 \Delta y$ que actúan sobre las cuatro orillas de desplazamiento del elemento cuadrado. La fuerza neta sobre Z para la dirección en X es:

$$f_0 \Delta x \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{y+\Delta y} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_y \right] = f_0 \Delta x \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Delta y, \quad (2.2)$$

mientras la fuerza neta sobre Z para la dirección sobre el eje Y es:

$$f_0 \Delta y \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_x \right] = f_0 \Delta y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Delta x. \quad (2.3)$$

La suma de estas fuerzas debe ser igual al producto de la masa $\rho_0 \Delta x \Delta y$ de el elemento por su aceleración, esto es:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.4)$$

donde

$$c \equiv \left(\frac{f_0}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.5)$$

es la velocidad para la onda transversal sobre la membrana. La generalización de la ecuación de onda sobre la cuerda en una dimensión (2.1) a dos dimensiones se desarrolló, básicamente para estudiar los movimientos de una membrana.

La ecuación (2.4) se escribe de manera más general en términos del operador de Laplace (Laplaciano) en dos dimensiones

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (2.6)$$

de donde la ecuación (2.4) simplemente queda

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (2.7)$$

2.6 Ecuación de Schrödinger para un Billar.

En este caso partimos de la ecuación de Schrödinger de una partícula confinada en un billar bidimensional, denotado por R . El potencial V es infinito fuera del billar, mientras que V es nulo en el interior de éste:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x, y; t) + V(x, y) \psi(x, y; t) = i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (2.8)$$

$$\text{con el potencial } V(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dentro de } R \\ \infty & \text{fuera de } R \end{cases} \quad (2.9)$$

donde ψ es la función de onda y \hbar es la constante de Planck. Ya que la partícula no puede estar en la frontera ∂R (porque el potencial es infinito), se tiene $\psi|_{\partial R} = 0$, es decir, debe de tener condiciones de Dirichlet a la frontera. Así el problema cuántico queda definido como:

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x, y; t) = i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} & x, y \in R \\ \psi|_{\partial R} = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

2.7 Equivalencia de Sistemas.

En esta sección separaremos la parte espacial de la parte temporal en las ecuaciones (2.7) y (2.10), proponiendo

$$\psi(x, y, t) = \phi(x, y) e^{i\omega t}. \quad (2.11)$$

Derivando con respecto al tiempo obtenemos

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = i\omega \phi(x, y) e^{i\omega t}; \quad (2.12a)$$

derivando nuevamente se obtiene

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \phi(x, y) e^{i\omega t} \quad (2.12b)$$

y de la misma manera tomando el Laplaciano del otro lado de la ecuación, se obtiene para la parte espacial lo siguiente:

$$\nabla^2 \psi(x, y; t) = e^{i\omega t} \nabla^2 \phi(x, y), \quad (2.13)$$

e introduciendo las dos ecuaciones anteriores en las ecuaciones (2.7) y (2.10) se obtiene:

$$\nabla^2 \phi_n + k_n^2 \phi_n = 0 \quad (2.14)$$

con $k_n = \omega_n/c$ para la ecuación (2.14) y $k_n = \sqrt{2mE_n/\hbar^2}$ para la ecuación (2.10). La ecuación (2.14) se conoce como la ecuación de Helmholtz o ecuación de onda reducida. Las soluciones k_n son llamados eigenvalores, y son proporcionales a las frecuencias propias. Las ϕ_n son llamados modos normales o eigenfunciones. Resumiendo, se ha demostrado que las ecuaciones independientes del tiempo para una membrana ideal y un billar cuántico son matemáticamente las mismas, por lo que se aprovechará esta analogía en el siguiente capítulo.

2.8 Membrana Rectangular.

La geometría más simple en donde se puede resolver la ecuación (2.14) es un rectángulo. Usando de nuevo separación de variables

$$\phi(x, y) = X(x)Y(y) \quad (2.15)$$

donde X es función sólo de x y Y es una función sólo de y . Al sustituir (2.15) en (2.14) y dividir por $\phi(x, y)$ hallamos que

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} - \frac{\omega^2}{c^2} = -k_x^2, \quad (2.16)$$

donde la segunda constante de separación es $-k_x^2$. Esta ecuación se separa en:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X &= 0 \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_y^2 Y &= 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde las constantes de separación están relacionadas de la siguiente manera:

$$k_x^2 + k_y^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (2.18)$$

Las vibraciones que pueden existir en una membrana de forma rectangular nos proporciona una simple introducción a los modos normales bidimensionales. Suponemos que la membrana esta firmemente sujeta en los soportes a lo largo de los ejes coordenados X e Y , y en $x = a$ e $y = b$ las soluciones tentativas a la ecuación (2.14) están dadas por:

$$\psi_{n,m}(x,y) = A \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2a} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{2b} \quad (2.19)$$

donde A es la amplitud y n, m son los números cuánticos a lo largo de los ejes X, Y respectivamente. Estas eigenfunciones satisfacen la condición a la frontera de Dirichlet $\psi|_{\partial R} = 0$ en los bordes antes mencionados.

2.9 Membrana Circular.

Otra geometría para la cual la ecuación (2.14) es separable es el círculo. Para la membrana circular de radio a nuestra primera tarea será poner el Laplaciano de la ecuación (2.14) en coordenadas apropiadas a esta simetría. De manera que mediante un cambio de variables, se obtiene la ecuación de onda para la membrana circular bidimensional en coordenadas polares (r, θ) de la manera siguiente:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + k^2 \phi = 0. \quad (2.20)$$

Haciendo nuevamente separación de variables:

$$\phi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) \quad (2.21)$$

$$\frac{r^2}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^2 = -\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = m^2, \quad (2.22)$$

donde hemos escogido la segunda constante de separación como m^2 . La ecuación anterior se separa en dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + m^2 \Theta = 0, \quad (2.23)$$

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)R = 0. \quad (2.24)$$

La ecuación para $\Theta(\theta)$ tiene soluciones complejas independientes $e^{\pm im\theta}$, o las soluciones reales independientes $\cos m\theta$ y $\sin m\theta$. Vemos que la constante de separación m debe ser un entero, el cual convierte a Θ en una función univaluada de θ . En efecto se está haciendo uso de las condiciones de frontera a lo largo de la línea radial sobre la membrana circular, y que el desplazamiento y su derivada con respecto a θ debe de ser una función continua que corta esta frontera hipotética.

La ecuación diferencial para $R(r)$ se puede poner en la forma normal o estándar

$$\frac{d^2R}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{dR}{du} + \left(1 - \frac{m^2}{u^2}\right)R = 0 \quad (2.25)$$

cambiando a variables independientes adimensionales

$$u = kr \quad (2.26)$$

La ecuación (2.25) es conocida como la Ecuación de Bessel. Puesto que ésta es de segundo orden, debe de tener dos soluciones linealmente independientes para cada valor de los parámetros m . Las dos soluciones normalmente son designadas por $J_m(u)$ y $N_m(u)$. Estas funciones están tabuladas[15].

La solución $J_m(u)$ es llamada función de Bessel (de primera clase) de orden m , y ésta es acotada sobre el rango completo desde 0 a ∞ . La otra solución, $N_m(u)$, es llamada la función de Neumann (o la función de Bessel de segunda clase) de orden m , y esta diverge únicamente cuando $u = 0$. Esta última no puede presentar un posible desplazamiento de la membrana, así que sólo se necesita examinar las funciones $J_m(u)$.

Finalmente

$$\phi(r, \theta) = A J_m(kr) \cos m\theta \quad (2.27)$$

es la solución de la ecuación de onda reducida (de Helmholtz) de una geometría circular, siendo A la amplitud. Para satisfacer las condiciones de frontera $\phi(a, \theta) = 0$ se debe de cumplir que $ka = x'$ donde x' son los ceros de $J_m(x)$ también están tabulados[15]. Nuestra discusión acerca de los varios modos normales de una membrana circular se puede extender fácilmente a valores arbitrarios de m , con la frontera exterior a $r = a$ tal que $k_{mn} a = u_{mn}$, donde u_{mn} es la n -ésima raíz de $J_m(x) = 0$. Evidentemente m son los nodos diametrales, y $n-1$ son los círculos nodales. La solución final es entonces

$$\phi(r, \theta) = J_m\left(\frac{x' r}{a}\right) \cos m\theta \quad (2.28)$$

Algunos modos normales del círculo para valores pequeños de m y n se muestran en la figura 2.15. Por convención, diremos que las áreas en blanco indican que los máximos salen de la hoja de papel, y las negras entran.

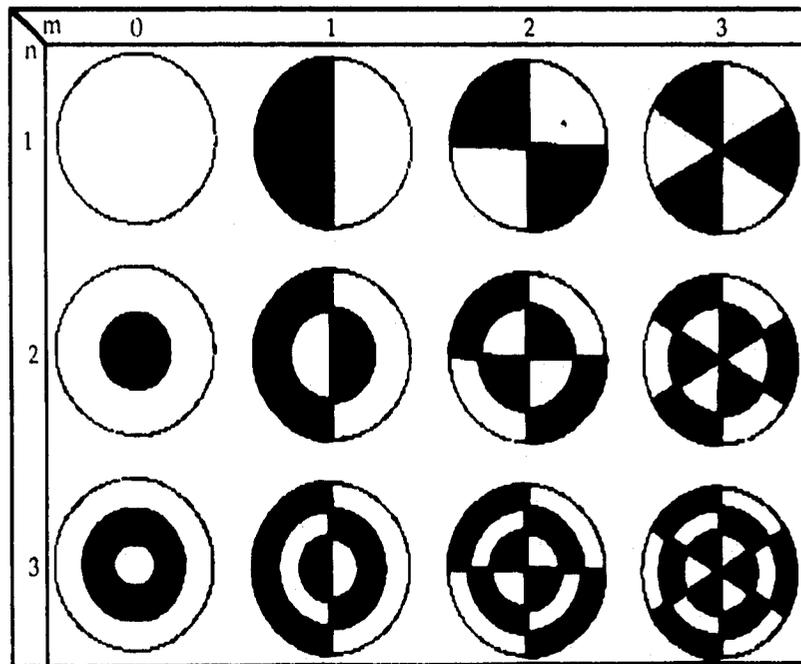


Figura 2.15 Modos normales de una membrana circular.

2.10 Membrana Elíptica.

Otra geometría integrable es la elipse, donde también se puede hacer separación de variables. La ecuación de Helmholtz se resuelve de la misma manera, como se procedió con el rectángulo y el círculo pero en coordenadas elípticas, las cuales introducimos ahora como ξ, η . En términos de las coordenadas rectangulares x, y , las coordenadas elípticas están definidas por las siguientes relaciones:

$$\left. \begin{aligned} x &= c \cosh \xi \cos \eta, & y &= c \sinh \xi \sin \eta \\ (0 \leq \xi < \infty, & & 0 \leq \eta < 2\pi). \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

La excentricidad e , definida como el radio de la semi-distancia focal al semi-eje mayor, esta dado por:

$$e = (\cosh \xi)^{-1}, \quad (2.30)$$

de tal manera que para resolver nuestro problema de eigenvalores, se tiene que resolver la siguiente ecuación en coordenadas elípticas:

$$\frac{1}{c^2(\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta)} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \Phi_p + \gamma_p \Phi_p = 0, \quad (2.31)$$

con $\Phi_p = 0$ cuando $\xi = a$. El subíndice p se ha introducido para indicar que se está resolviendo la parte par, y obtener las soluciones reales del sistema.

Definimos $u(\xi, \eta) = \Phi_p(\xi, \eta)$. Si separamos u de tal forma que $u(\xi, \eta) = u_1(\xi)u_2(\eta)$ y aplicando lo anterior a la ecuación (2.31) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\eta^2} u_2(\eta) + (\lambda - 2h^2 \cos 2\eta) u_2(\eta) &= 0, \\ -\frac{d^2}{d\xi^2} u_1(\xi) + (\lambda - 2h^2 \cosh 2\xi) u_1(\xi) &= 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde $\lambda(h^2)$ es el parámetro de separación y $h^2 = \frac{c^2}{4} \gamma_p^2$. La ecuación anterior es una ecuación diferencial de Mathieu. La segunda ecuación del grupo (2.32), procede de la primera por $\eta = \pm i \xi$, que es la ecuación diferencial modificada de Mathieu. Además de satisfacer las condiciones de frontera, las cuales requieren que sobre $\xi = a$, $u(\xi, \eta) = 0$.

La solución de la primera ecuación del grupo (2.32), posee la periodicidad requerida que es:

$$u_2(\eta) = c e_m(\eta; h^2) = c e_m(-\eta; h^2) \quad (2.33)$$

la cual es la función par de Mathieu de primer orden e integral de orden ($m = 0, 1, 2, \dots$), y

$$u_2(\eta) = s e_{m+1}(\eta; h^2) = -s e_{m+1}(-\eta; h^2) \quad (2.34)$$

la cual es la función impar de Mathieu de primer orden e integral de orden ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$). Las soluciones correspondientes a la segunda ecuación del grupo (2.32) que posee la continuidad requerida a través de la línea focal es

$$u_1(\xi) = C e_m(\xi; h^2) = C e_m(-\xi; h^2) \quad (2.35)$$

la cual es la función par modificada de Mathieu con integral de orden ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$). y

$$u_1(\xi) = S e_{m+1}(\xi; h^2) = -S e_{m+1}(-\xi; h^2) \quad (2.36)$$

la cual es la función impar modificada de Mathieu con integral de orden ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$).

Y las condiciones a la frontera son:

$$\begin{aligned} C e_m(a; h^2) = 0, \quad S e_{m+1}(a; h^2) = 0, \\ \left[\frac{\partial}{\partial \xi} C e_m(\xi; h^2) \right]_{\xi=a} = 0, \quad y \quad \left[\frac{\partial}{\partial \xi} S e_{m+1}(\xi; h^2) \right]_{\xi=a} = 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

las cuales son satisfechas cuando $h = \frac{c}{2} \gamma_{mn}$ y $h = \frac{c}{2} i \gamma_{mn}$, con $m = 0, 1, 2, 3, \dots; n = 1, 2, 3, \dots$. Aquí γ_{mn} y $i \gamma_{mn}$ son los n -ésimos eigenvalores pares e impares de la ecuación (2.31).

Con la normalización de factores suprimidos, las eigenfunciones pares e impares de la ecuación (2.31) son:

$$\begin{aligned} {}_p \Phi_{mn}(\xi, \eta) &= C e_m \left(\xi; \left(\frac{c}{2} \gamma_{mn} \right)^2 \right) c e_m \left(\eta; \left(\frac{c}{2} \gamma_{mn} \right)^2 \right), \\ {}_i \Phi_{mn}(\xi, \eta) &= S e_{m+1} \left(\xi; \left(\frac{c}{2} i \gamma_{mn} \right)^2 \right) s e_{m+1} \left(\eta; \left(\frac{c}{2} i \gamma_{mn} \right)^2 \right), \\ (m = 0, 1, 2, 3, \dots; n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (2.38)$$

2.11 Membranas con otras Formas.

Aparte de los casos separables existen otros más interesantes, pero mucho más complicados. Tal es el caso de los modos normales de una película de jabón con aro en forma de violín o de guitarra, por poner algunos ejemplos. En estos casos, solamente es posible encontrar las soluciones de la ecuación de Helmholtz de manera numérica, aproximada o con alguna computadora analógica, como la que presentaremos en el siguiente capítulo en donde se explican con detalle los resultados que nuestro experimento reveló y que al mismo tiempo se confrontan con algunos resultados numéricos que son genéricos en estos billares.

2.12 Órbitas Periódicas.

a) "Scars".

En la figura 2.16 se muestra un modo normal para el estadio de Bunimovich. Las funciones parecen estar localizadas alrededor de algunas órbitas periódicas clásicas. En la literatura se dice comúnmente que las eigenfunciones están cicatrizadas por las órbitas periódicas cortas. En la referencia [6], se dio una prueba de la existencia de las cicatrices o *scars*.

Mucha de la literatura[16, 17] habla de la existencia de una conexión estrecha entre trayectorias periódicas y el espectro de energías, así es que, debemos esperar que las órbitas periódicas de algún modo hagan su aparición en los eigenfunciones. La aparición de los *scars* es bien entendida basándose en los trabajos teóricos de Heller[1, 18] y Bogomolny[19].

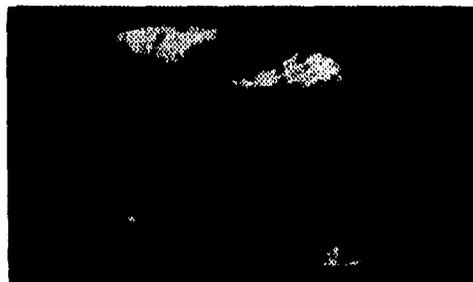


Figura 2.16 Este es un ejemplo *descars* sobre dos órbitas periódicas que tienen forma de "V", opuestas una de la otra en el estadio de Bunimovich.

b) "Bouncing Ball States".

Las excepciones a éste tipo de órbitas periódicas son las verticales marginalmente inestables, que aparecen perpendicularmente entre las secciones rectas del billar. Éstas órbitas no-aisladas causan desviaciones muy espectaculares de

conducta azarosa en algunas eigenfunciones. Estas eigenfunciones han sido llamadas *bouncing ball states*. Un ejemplo de este tipo de estados propios se muestra a continuación en la figura 2.17.

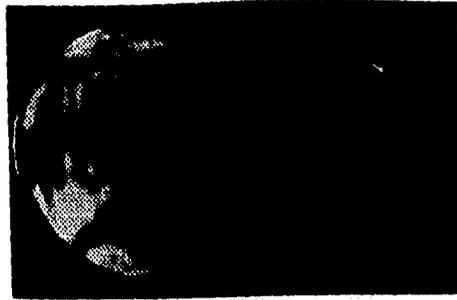


Figura 2.17 Este es un ejemplo de *bouncing ball state* en el estadio de Bunimovich.

Esta foto y las demás de esta tesis, fueron digitalizadas con un *scanner* "ScanMaker II" de Microtek en tonos de grises con 100 puntos por pulgada (dpi) a lo más.

CAPÍTULO III

ESTUDIO DE LOS MODOS NORMALES CON MEMBRANAS.

3.1 Introducción.

Recientemente las ideas semiclásicas han venido a ser el punto de partida para nuevos experimentos (inclusive numéricos) en física atómica[20], molecular[21], microondas[6], acústica[4], etc. En este capítulo, hacemos uso de las vibraciones de una película de jabón para estudiar las propiedades de las eigenfunciones de los billares cuánticos. Además se explican los diseños experimentales que construimos, así como la solución química del jabón que utilizamos. Posteriormente se confrontaran nuestros resultados con los teóricos para membranas en geometrías integrables. Para las membranas en otro tipo de geometrías, se compararán con los resultados numéricos obtenidos por otros grupos.

3.2 Diseño Experimental.

Para la realización de este experimento se probaron varios montajes experimentales, los cuales se fueron desechando debido a que tenían algunos inconvenientes que a continuación se mencionan:

El primero de estos está basado en un artículo de Jearl Walker [22]. En él se usa una caja de aproximadamente 15 X 15 X 15 cm (las cajas de galletas Mac'Ma son ideales), pintada en los interiores y exteriores de color negro mate para evitar la reflexión de la luz, a la tapadera se le hace un agujero con la forma apropiada (circular, rectangular, cuadrada, etc.), para que ahí se coloque la película de jabón a perturbar por medio de una bocina conectada a un generador de funciones y colocada frente a ésta. Para poder observar lo que sucede en la película de jabón, es necesario hacer incidir sobre ella, luz blanca de rayos paralelos (lo cual se hizo con un proyector de diapositivas). A la película se le da una forma de cáscara esférica extrayendo aire del interior de la caja, para que por medio de la reflexión se observe el fenómeno que nos interesa. En el foco de este "seudo-espejo" cóncavo se coloca un ocular, que

proyecta la imagen en una pantalla (Ver figura 3.1). El problema por el cual se abandonó este montaje, fue que es muy difícil hacer los agujeros de la forma deseada en la tapa de la caja sin que ésta se dañe, además de que este dispositivo realza los colores de la interferencia de la luz en la membrana, los cuales no son nuestro objetivo de estudio.

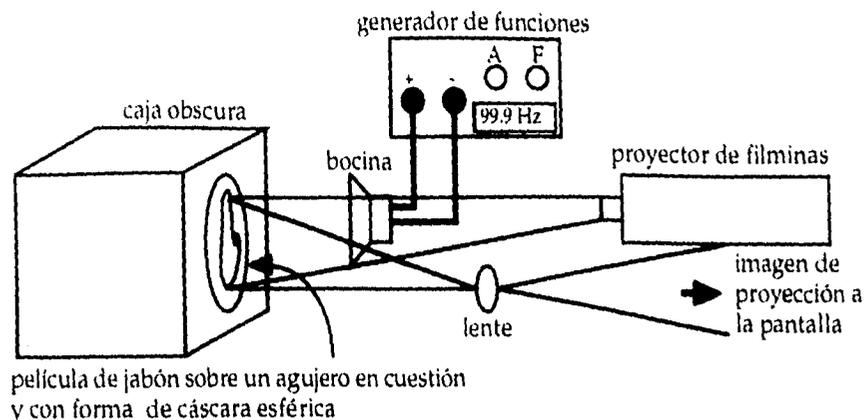


Figura 3.1 Primer dispositivo usado para visualizar el fenómeno de resonancia sobre la membrana.

El segundo montaje, fue tomado del American Journal of Physics[23], y se construyó con una bocina en el extremo inferior de un codo de PVC de 5.25 pulg de largo y 4 pulg de diámetro, en el extremo superior se conecta un tubo de lucita con alguna forma determinada (círculo, rectángulo, etc.). Este dispositivo se muestra en la figura 3.2. Cuando la frecuencia de vibración de la bocina es igual a una de las frecuencias propias de la película, ésta entra en resonancia. Este dispositivo se abandonó ya que el aire dentro del tubo no es un muy buen transmisor de la energía.

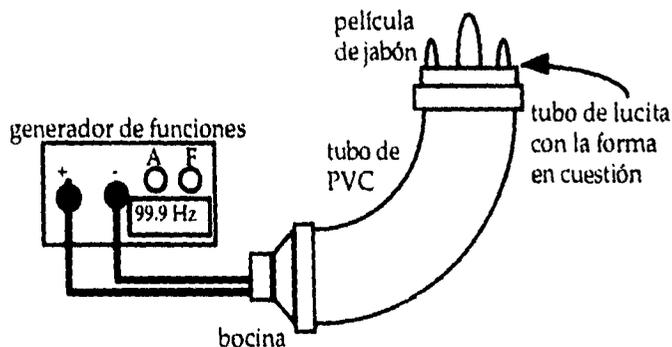


Figura 3.2 Segundo dispositivo usado para hacer resonar una película de jabón.

La Figura 3.3 muestra esquemáticamente el dispositivo experimental que diseñamos[24], en el cual se usó un vibrador mecánico PASCO Scientific, modelo SF-9324 conectado a un generador de funciones PASCO Scientific, modelo PI-99587, el vibrador perturba aros de alambre con distintas formas (tales como el rectángulo, el círculo, el estadio de Bunimovich, el billar lago y otros de interés). Cuando la frecuencia de excitación corresponde a una de las frecuencias propias de la membrana, se encuentran los modos normales de vibración. De esta forma si la membrana está vibrando en un modo normal, podemos ver lo que sucede en ella por la reflexión directa de luz natural, en donde los antinodos de vibración aparecen como zonas brillantes sobre un fondo oscuro. Esto lo mostraremos en la siguiente sección haciendo uso de una geometría rectangular.

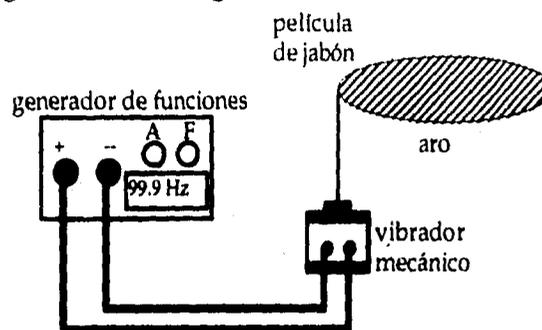


Figura 3.3 Montaje esquemático del dispositivo usado para la realización de los experimentos reportados en esta tesis.

3.3 Descripción de la Solución Jabonosa.

Existen en la literatura muchas fórmulas para hacer jabón[25]. Dentro de éstas, la fórmula química que mejor funcionó para hacer películas jabonosas fue tomada de J. Walker[22]. Esta consiste en mezclar 1.4 gr de trietanolamina, 100 gr de glicerina diluida con agua destilada al 85% y 2 gr de ácido oleico. El jabón que se obtiene, tiene las propiedades de hacer pompas y películas con larga duración y gran resistencia a los cambios de tensión superficial provocados por la vibración. Aunque esta fórmula tiene la desventaja de envejecer debido a que se oxida muy rápido, es posible alargar su duración y resistencia agregando una pequeña cantidad proporcional de un shampoo comercial (shampoo Mennen).

3.4 Geometrías Integrables.

3.4.1 Rectángulo.

Las zonas brillantes pueden apreciarse muy fácilmente en un rectángulo vibrando como se muestra en la foto 3.1. Estas zonas brillantes se ubican de una

manera regular ya que las eigenfunciones descritas por la solución (2.19). En este experimento, se trabajó con un aro rectangular de 15 x 21 cm. Como se dijo en el capítulo 2, una región rectangular tiene como soluciones el producto de senos, así pues, en este capítulo se comparan los modos normales obtenidos experimentalmente para distintas geometrías con los correspondientes modos teóricos (tomando $a=15$ cm y $b=21$ cm).

En la foto 3.1a) se aprecian 4 zonas en forma de bandas, las cuales son los antinodos en esa frecuencia y que teóricamente corresponde a $n=1$ y $m=2$, donde m es el número cuántico asociado al eje "Y" y n el correspondiente al eje "X" (ver sección 2.8). En la foto 3.1b) se muestra la eigenfunción con $n=6$ y $m=4$. La eigenfunción con $n=1$ y $m=6$ se presenta en la foto 3.1c). Similarmente se pueden obtener otras eigenfunciones para $n, m < 15$, de una manera visible.

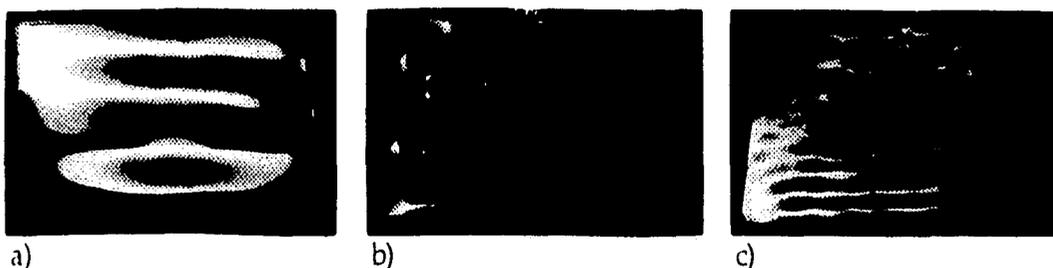


Foto 3.1 Modos normales de una película de jabón en un aro rectangular. a) $n=1$; $m=2$, a 19.13 Hz., b) $n=6$; $m=4$, a 51.6 Hz., c) $n=1$; $m=6$, a 87.72 Hz.

En la figura 3.4 se muestran los resultados numéricos correspondientes a cada una de las condiciones de la foto 3.1, usando la solución (2.19) y tomando en cuenta las condiciones a la frontera, se obtienen los modos normales sobre la región rectangular.

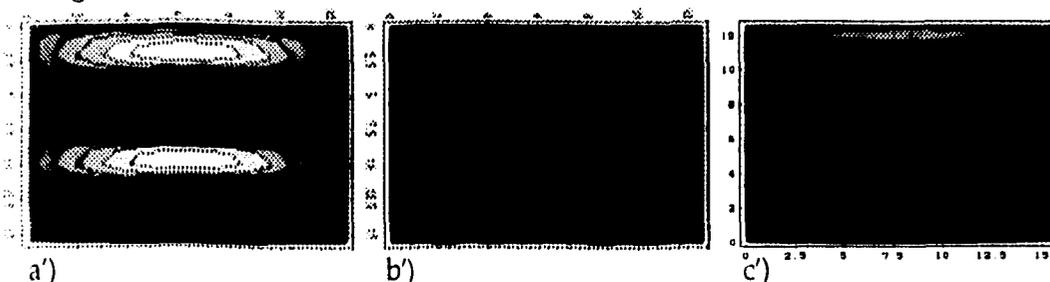


Figura 3.4 Se muestran los correspondientes modos normales en una región rectangular, los cuales se elaboraron ajustando la solución (2.19) a las fotos de 3.1.

3.4.2 Círculo.

El segundo caso integrable que estudiaremos es el círculo. Para esta geometría las soluciones están dadas por la ecuación (2.28). En la foto 3.2) se muestra una eigenfunción con $n=3$, $m=0$, sobre un aro de radio=9.5 cm. En este caso es muy difícil obtener $m \neq 0$, ya que no existe un eje nodal fijo en la variable angular, debido a la simetría del sistema. Por esta razón, la única manera de obtener a $m=1, 2, \dots$, es tomando la mitad, un tercio o un cuarto de círculo, etc. Lo mismo se puede hacer para sistemas con simetrías discretas como en estadio de Bunimovich o el billar de Sinai, por ejemplo.

En la figura 3.5 se muestra la gráfica de (2.28) para la variable angular, para $n=3$, $m=0$.



Foto 3.2 Se muestra un modo normal para el billar circular con $n=3$; $m=0$, a 26.06 Hz.

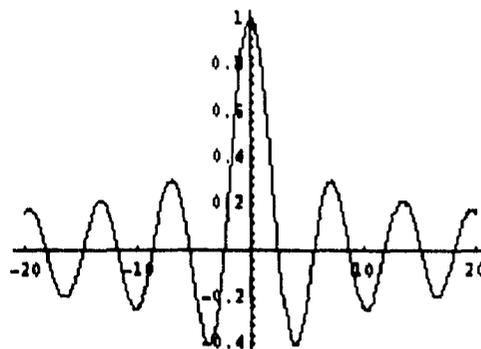


Figura 3.5 La gráfica muestra un corte a lo largo de un diámetro del aro. Salvo condiciones de frontera, la solución aquí mostrada es $J_0(x)$.

3.4.3 Elipse.

La última región integrable que estudiaremos es la elipse. La cual tiene en su eje mayor $a=23$ cm y en su eje menor $b=13$ cm. En este caso las eigenfunciones pares e impares de la elipse están dadas por el conjunto de soluciones (2.38). En la foto 3.3a) se muestra una eigenfunción a 32.23 Hz, con predominancia de reticulado sobre el eje menor y cargado hacia los costados, pero sin interactuar con los focos de la elipse. En la foto 3.3b) se presenta otra a 43.53 Hz, en la cual es muy notoria la trayectoria estable que está sobre el eje menor. Por último, se puede observar en la foto 3.3c) una eigenfunción a 89.79 Hz que refleja la existencia de trayectorias, que están acotadas por las cáusticas que son hipérbolas confocales con las elipses (ya que claramente se pueden ver que comparten los mismos focos).



Foto 3.3 Tres distintas eigenfunciones en el billar Elíptico. a) y b) son trayectorias que están sobre el eje menor de la elipse, mientras que la c) muestra cáusticas acotadas por hiperboloides confocales.

A continuación, la figura 3.6 muestra la posición de las líneas nodales para el eigenestado $n_\eta = 4, n_\xi = 2$ donde los subíndices η, ξ , son los correspondientes a las líneas nodales diametrales y elipsoidales.

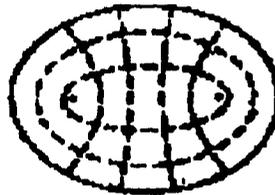


Figura 3.6 Se muestra la posición de las líneas nodales para un eigenestado de la elipse. Tomado de la referencia[26].

3.5 Geometrías Irregulares.

3.5.1 Estadio de Bunimovich.

En esta sección estudiaremos con detalle distintas eigenfunciones que trazan muy variadas formas dentro del estadio de Bunimovich, nuestro estadio tiene 5 cm de radio en las secciones semicirculares y 10 cm entre la separación de los centros de éstos ya que la relación que usamos fue $a = 2r$. En la foto 3.4a) se aprecia un *bouncing ball state* que está asociado con trayectorias periódicas, marginalmente inestables dentro de la sección de paredes rectas del estadio. Estos estados, se pueden obtener también a distintas frecuencias, en este caso corresponde a una a frecuencia de 37.7 Hz. La foto 3.4b) esta tomada a una frecuencia de 46.61 Hz, y se observa lo que posiblemente sería un *scar* a una frecuencia muy baja sobre el eje mayor del estadio. De hecho no se puede asegurar que sea un *scar* ya que éstos están típicamente más localizados alrededor de las órbitas periódicas. En la foto 3.4c) a 270 Hz se presenta una mezcla de *bouncing ball state* y un *scar* de forma transversal. La foto 3.4d) fue tomada a una frecuencia de 287 Hz, y tiene asociadas dos órbitas periódicas que tienen forma de "V" opuestas una de la otra. La foto 3.4e) está a 351 Hz y

aparentemente traza también dos órbitas periódicas que tienen forma de "N" opuestas una de la otra. Por último la foto 3.4f) está a 829 Hz y muestra un estado asociado a la órbita que une los dos extremos del estadio muy semejante a la foto 3.4b) pero más localizada sobre la órbita periódica.

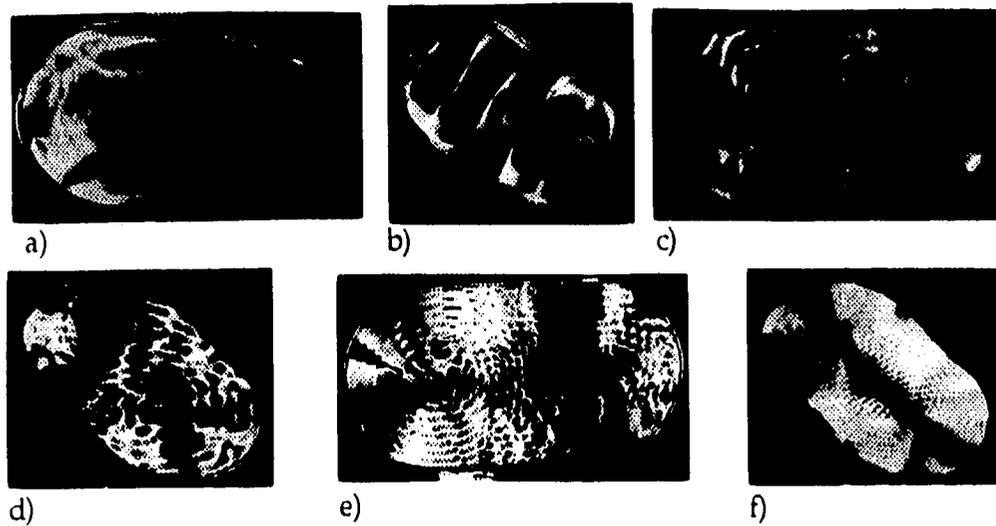


Foto 3.4 Se muestran 6 distintos modos normales sobre el estadio de Bunimovich, unos muestran *scars* y otros *bouncing ball states*.

A continuación se muestran sólo tres estadios obtenidos numéricamente, los cuales asociamos respectivamente con la serie de fotos 3.4, ya que cualitativamente existe una gran semejanza. Sobre estos billares se han remarcado las trayectorias alrededor de estados más localizados asociados con *scars*.

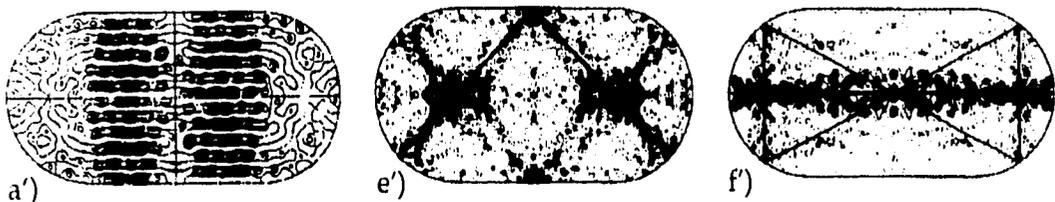


Figura 3.7 Se muestran tres estadios obtenidos numéricamente, remarcándose las trayectorias más localizadas asociadas con *scars*. Tomado de la referencia[1].

3.5.2 Billar de Sinai.

Debido a que en este sistema la frontera no es una sola, existen algunos problemas de índole experimental que dificultaron el trabajo con el mismo, ya que si,

por ejemplo, se pone a oscilar una de las dos fronteras manteniendo la otra fija, sólo se notan algunos modos de vibración.

Una forma de solucionar este problema es uniendo los dos aros de manera que estos se encuentren sujetos el uno del otro, de tal manera que no interfieran con la película de jabón al estar vibrando. Esto tiene la desventaja de que la vibración no se transmite íntegramente de la frontera que esta sujeta del vibrador mecánico, a la frontera que se encuentra "suspendida", debido a que en este dispositivo en ocasiones se amortigua la vibración y en otras se aumenta.

Otro problema que es muy difícil de solucionar es que se tiene que sacar una película sobre los dos aros independientes (el círculo y el rectángulo). Este es un problema que aún no hemos resuelto. Es por estas razones que no se incluyen los resultados experimentales que en algún momento hemos obtenido en el laboratorio.

Para este experimento usamos un aro cuadrado de 20 cm por lado, con un aro circular al centro de 3.7 cm de radio.



Foto 3.5 Se muestra el billar de Sinaï, en una vibración propia de la cual no se pudo obtener ninguna información.

3.5.3 Billar Limón.

Para este billar se presenta la serie de fotos 3.6 las cuales fueron tomadas a frecuencias bajas, en la primera 3.6a) a 19.84 Hz en donde se ven 4 antinodos y en la segunda 3.6b) a 26.26 Hz se ven 9 antinodos. En ambos casos las eigenfunciones respetan la simetría original del billar. La foto 3.6c) muestra una eigenfunción a 41.06 Hz. En ésta se manifiesta una trayectoria cuasiperiódica que se relaciona con la que se muestra en la figura 2.9. La última foto de esta serie 3.6d), fue tomada a 304 Hz y muestra trayectorias cuasiperiódicas que corresponden a la dirección horizontal y también sobre otras regiones. Es posible que estas sean *scars* asociados con algunas órbitas de período no muy pequeño.

Para este experimento se utilizo un billar con las siguientes especificaciones: dos secciones de semi-círculo con radio de 10.5 cm , con una separación entre los centros de 6.5 cm.

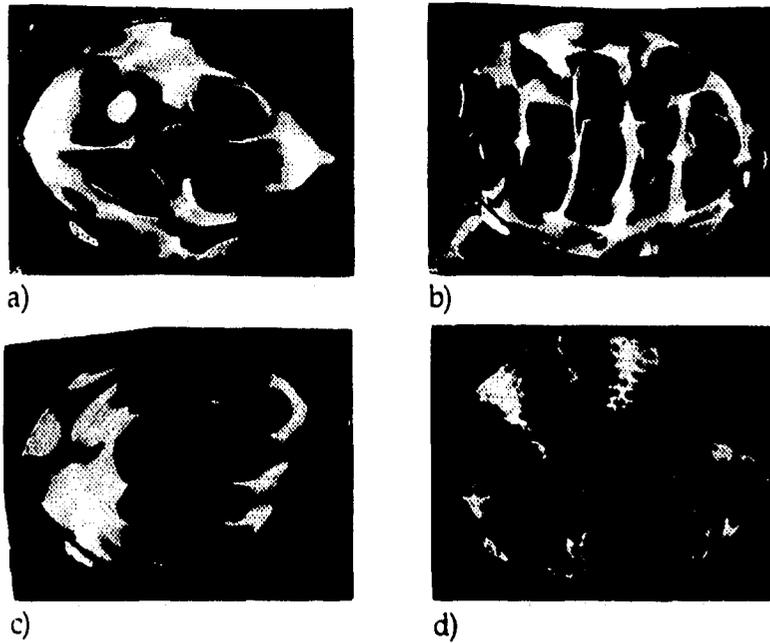


Foto 3.6 Se muestran cuatro eigenfunciones del billar Limón en particular la d), muestra trayectorias bien localizadas que al parecer es un *scar*.

La figura 3.8 muestra una eigenfunción asociada a la trayectoria cuasiperiódica de una partícula dentro del billar Limón. Este tipo de eigenestados se pueden asociar cualitativamente a la foto 3.6c).

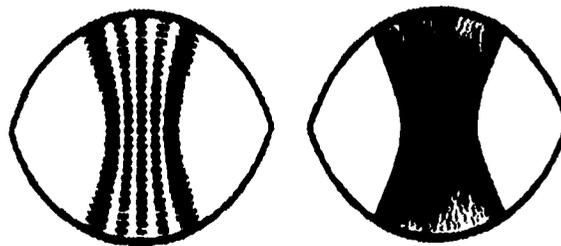


Figura 3.8 Se muestra una eigenfunción y su trayectoria asociada. Tomado de la referencia[10].

3.5.4 Billar África.

En esta sección las dos primeras fotos están a frecuencias muy cercanas, la 3.7a) a 27.91 Hz y la 3.7b) a 28.58 Hz, en ambas es notorio que existen cicatrices de trayectorias periódicas. En la 3.7c) a 73.82 Hz se observan tres trayectorias periódicas principalmente que dan la apariencia de ser *scars*. En las dos últimas fotos, 3.7d) a 114 Hz y 3.7e) a 165 Hz, se ve que en ambas resaltan eigenfunciones sobre trayectorias periódicas que se intersectan entre sí, dispuestas en distintas posiciones para cada uno de los billares.

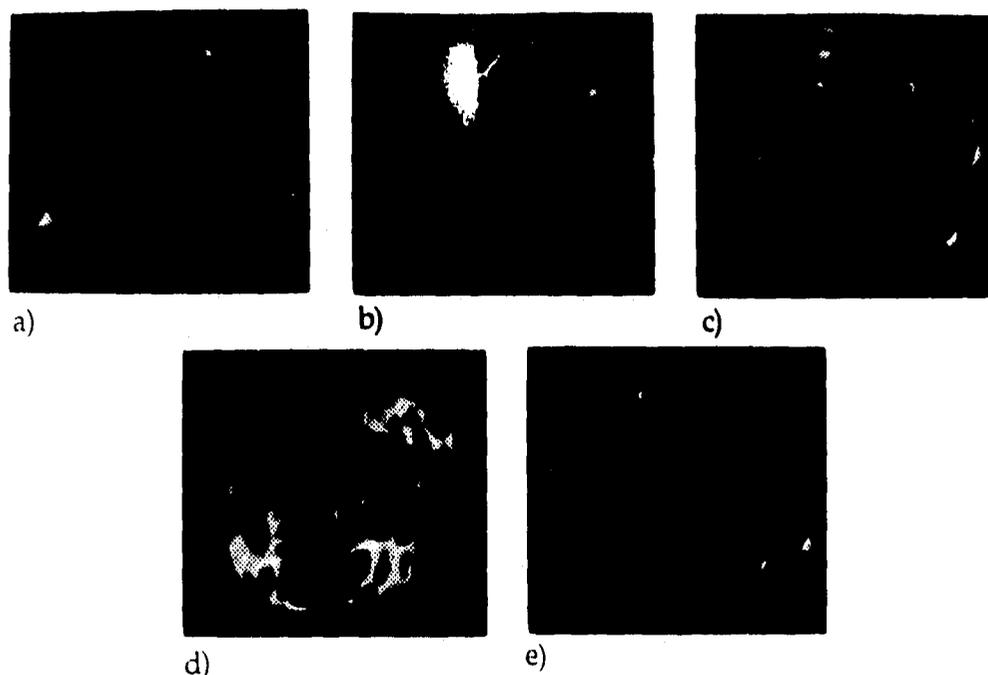


Foto 3.7 Serie de cinco eigenfunciones sobre el billar África. En las fotos a) y b) se observa una marcada trayectoria transversal al billar, pero en la foto d) se observan con más claridad dos trayectorias que se cruzan las cuales al parecer están asociadas con *scars* sobre este billar.

A continuación en la figura 3.9 se muestran dos billares, en los cuales se observan las líneas nodales, para un sistema sometido a un flujo magnético (es decir, no corresponde al experimento aquí realizado), la figura d') se asocia con su contraparte d) ya que cualitativamente las trayectorias cruzadas que están dentro de este billar (que probablemente son *scars*), apuntan a las regiones de máxima o mínima amplitud de la figura 3.9d'). La figura e') ha sido asociada con la foto e), porque es posible observar en ambas que existen dos regiones (una en la parte sur y otra en la parte nororiente del billar), en donde ambas manifiestan gran movimiento.

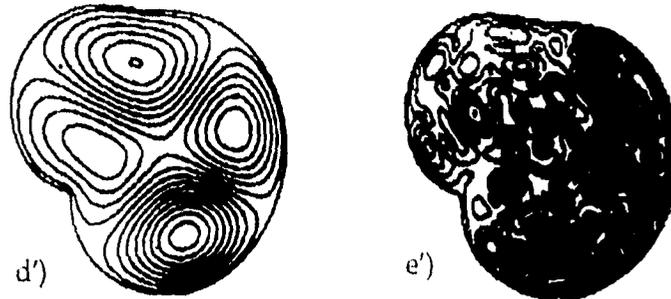


Figura 3.9 Se muestran dos eigenfunciones que satisfacen el operador de Laplace con condiciones de frontera de Dirichlet, ambas asociadas con su contraparte experimental. Tomado de la referencia[27].

3.5.5 Billar Lago.

En este billar se muestran resultados interesantes que se discuten uno por uno y en algún caso se comparan con resultados de cálculos que implican la discretización de la región de barros suaves. La foto 3.8a) está tomada a 32.94 Hz y muestra una distribución de antinodos dispuestos transversalmente a la línea N-S del billar. La 3.8b) tomada a 43.52 Hz tiene dos trayectorias periódicas permanentes principales que al parecer son *scars*, pues son trayectorias sobre las cuales es muy visible que se alinean de manera sorprendente "ondas de De Broglie". La 3.8c) a 48.88 Hz también muestra trayectorias periódicas con una cierta ordenación en la parte sur del diagrama. La última 3.8d) a 94.07 Hz muestra una figura casi totalmente desordenada, aun así, es posible notar que se forma un anillo en la parte interna del billar. Para este experimento se uso un aro , que en su longitud más larga (dirección N-S) mide 26 cm y en dirección transversal mide 18.7 cm.

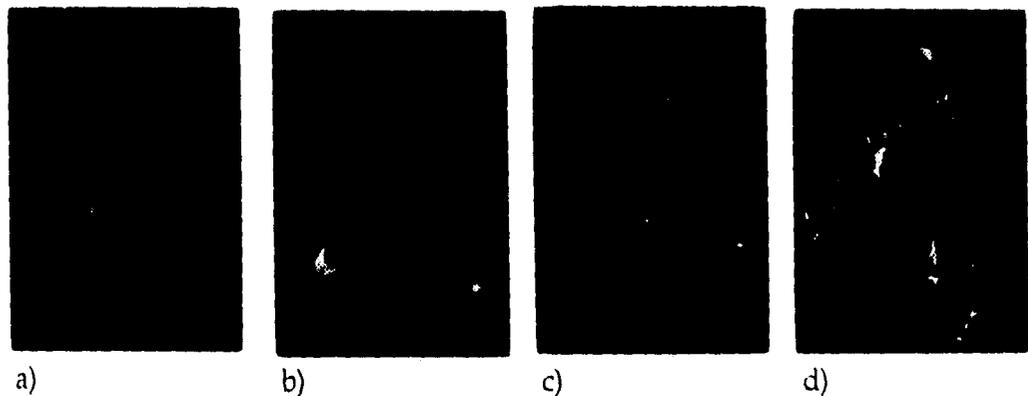


Foto 3.8 Se muestran cuatro eigenfunciones sobre el billar Lago, las cuales pueden estar cicatrizadas por trayectorias periódicas como es el caso del b).

La figura 3.10 muestra dos patrones de resonancia, el primero a) se asocia con su correspondiente a'), el cual esta a 0.5 Hz. Cualitativamente se observa que la parte norte del billar tiene un máximo de resonancia que se muestra "coronado" en su alrededor. El segundo b) se asocia también con el b') el cual resuena con un período de 1.94 s, este también muestra trayectorias periódicas muy bien definidas.

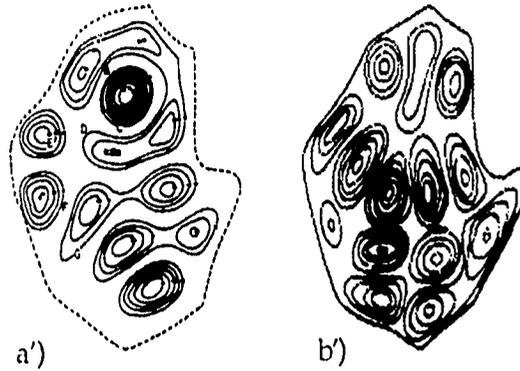
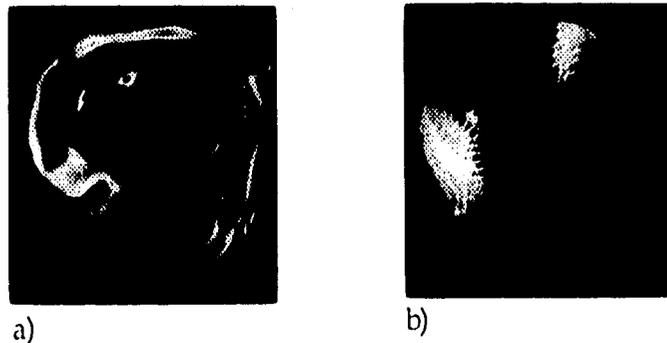


Figura 3.10 Se muestran las correspondientes soluciones numéricas, para las dos primeras fotos del billar Lago. Tomadas de las referencias[11,28].

3.5.6 Billar Eliptriángulo.

En este último billar sólo mostramos dos fotos, en la primera 3.9a) a 34.93 Hz se ven 6 antinodos en la parte central que dan idea de ser un modo propio de vibración ya que muestran claramente la simetría del sistema. La segunda foto 3.9b) a 353 Hz muestra tres trayectorias muy marcadas que convergen al centro, pero que en menor medida continúan de forma recta hasta la pared frontal, estas trayectorias periódicas al parecer también son *scars*.



CAPÍTULO IV

CONCLUSIONES.

En esta tesis se ha hecho uso de un dispositivo para observar las propiedades de los modos normales de regiones bidimensionales, que por un lado es sencillo, por otro es de fácil manejo y que además es de bajo costo. Por esto puede ser usado como un experimento demostrativo tanto dentro de las aulas, como en laboratorios no tan especializados o museos. Este dispositivo lo hemos tomado para examinar distintas geometrías partiendo de las formas regulares, hasta las caóticas para ver los sorprendentes resultados que previamente se habían obtenido por medio de simulación numérica, con cavidades de microondas, con placas de Chladni o con tanques de ondas. De los anteriores solamente las cavidades de microondas corresponden a la ecuación de Helmholtz y satisfacen las condiciones a la frontera, pero las eigenfunciones no son directamente visibles y el equipo es muy costoso; en contraste con el dispositivo presentado en esta tesis. Las desventajas de este dispositivo son: *a*) que no se pueden medir las frecuencias propias (ya que se usa una película de jabón la cual cambia sus propiedades con el tiempo), *b*) que no se pueden observar todos los modos altos (por el amortiguamiento) y *c*) que muchas veces la película no es homogénea (ya que se forman gotas en los antinodos del modo normal).

Como un primer ejemplo, se han examinado el rectángulo, el círculo y la elipse, obteniéndose soluciones conocidas de la ecuación de Helmholtz. Estas soluciones se discuten generalmente en los libros de texto, por lo que estas geometrías se podrían utilizar como un auxiliar didáctico en los cursos correspondientes.

El segundo ejemplo que estudiamos fueron los billares asociados al caos (es decir billares cuyo análogo clásico presenta caos). Los que aquí estudiamos fueron el billar de Sinai, el estadio de Bunimovich, el billar Limón y el billar África. Todos estos billares son sistemas no separables, es por esta razón que las eigenfunciones de ambos sistemas, así como sus espectros de frecuencias sólo pueden ser conocidos con cierta aproximación, usando métodos numéricos[29], o con algún experimento como el presente. A esto se debe la relevancia de tener algún método sencillo para observar las

eigenfunciones de estos sistemas. Para estos billares encontramos cicatrices de las órbitas periódicas cortas

El último caso que se estudió fueron las geometrías asociadas con otras aplicaciones, tal es el caso del billar Lago y del billar Eliptriángulo, los cuales también son sistemas no separables. En el primer caso, nuestros resultados se compararon con aquellos que se han reportado en la literatura, mientras que para el Eliptriángulo sólo se muestran nuestros resultados, ya que es un billar que hemos diseñado con el propósito de estudiar un sistema con este tipo de simetría discreta.

Otras posibles aplicaciones de este dispositivo experimental, es que podría servir para analizar el teorema isoespectral, que establece que ciertos pares de dominios tienen los mismos eigenvalores. También para analizar la respuesta de las eigenfunciones ante perturbaciones. Para esto se necesitaría desarrollar herramientas de "software" para analizar con más detalle los modos normales. Para lo cual se está trabajando actualmente.

Este diseño además puede usarse para estudiar resonancias de sistemas más complicados[30], así como para estudiar patrones y ondas de Faraday en tanques de ondas, modos normales en la ecuación biarmónica en placas de Chladni con formas arbitrarias[31, 32].

REFERENCIAS

- [1] Heller E. J., "Bound-State Eigenfunctions of Classically Chaotic Hamiltonian Systems: Scars of Periodic Orbits", *Phys. Rev. Lett.* **53**, 1515-1518 (1984).
- [2] McDonald S. W. and Kaufman A. N., "Spectrum and Eigenfunctions for a Hamiltonian with Stochastic Trajectories", *Phys. Rev. Lett.* **42**, 1189 (1979).
- [3] McDonald S. W., Ph. D. Thesis, Lawrence Berkeley Laboratory Report LBL 14837 "Wave Dynamics of Regular and Chaotic Rays", (1983)
- [4] Stein J. and Stöckmann H. -J., "Experimental Determination of Billiard Wave Functions". *Phys. Rev. Lett.* **68**, 2867-2870 (1992).
- [5] Blümel R., et al., "Quasilinear Ridge Structures in Water Surface Waves". *Phys. Rev. A* **45-4**, 2641 (1992).
- [6] Sridhar S., *Experimental Observation of Scarred Eigenfunctions of Chaotic Microwave Cavities*". *Phys. Rev. Lett.* **67**, 785-788 (1991).
- [7] Berry M. V., "Regularity and Chaos in Classical Mechanics, illustrated by three deformations of a circular billiard". *Eur. J. Phys.* **2**, 91-102 (1981).
- [8] Heller E. J., O'Connor P. W. and Gehlen J., "The Eigenfunctions of Classically Chaotic Systems". *Physica Scripta.* **40**, 354-359, (1989).
- [9] Bunimovich L. A., "On the Ergodic Properties of some Billiards". *Funct. Anal. Appl.* **8**, 73-74 (1974).
- [10] Heller E. J. and Tomsovic S., "Postmodern Quantum Mechanics". *Phys. Today* 38-46, July 1993.
- [11] Robnik M., *J. Phys. A: Math. Gen.* **16**, 3971-78 (1983).
- [12] Berry M. V. and Robnik M., "Quantum States Without Time-Reversal Symmetry: Wavefront Dislocations in a Non-Integrable Aharonov-Bohm Billiard", *J. Phys. A: Math. Gen.* **19**, 1365-1372 (1986).
- [13] Marsal R. J. and Mazari M., "The Subsoil of México City", (UNAM, México, 1959).
- [14] Flores J., Novaro O. and Seligman T. H., "Possible Resonance Effect in the Distribution of Earthquake Damage in México City", *Nature*, **326**, 783-785 (1987).
- [15] Abramowitz M. and Stegun I. A., "Handbook of Mathematical Functions". Dover Pub. 1972.

- [16] Gutzwiller M. C., "*Chaos in Classical and Quantum Mechanics*" (Springer-Verlag, New York, 1990).
- [17] Reichl L. E., "*The Transition to Chaos*" (Springer-Verlag, New York, 1992).
- [18] Heller E. J., "*Qualitative Properties of Eigenfunctions of Classically Chaotic Hamiltonian Systems*" in T. H. Seligman and H. Nishioka (Eds.) *Quantum Chaos and Statistical Nuclear Physics*. (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1986).
- [19] Bogomolny E. B., "*Smoothed Wave Functions of Chaotic Quantum System*", *Physica D.* **31**, 169-189 (1988).
- [20] Holle A., Main J., Wiebusch G., Rottke H. and Welge K. H., "*Quasi-Landau Spectrum of the Chaotic Diamagnetic Hydrogen Atom*", *Phys. Rev. Lett.* **61**, 161-164 (1988).
- [21] Lombardi M. and Seligman T. H., "*Universal and Nonuniversal Statistical Properties of Levels and Intensities for Chaotic Rydberg Molecules*", *Phys. Rev. A.* **47**, 3571-3586 (1993).
- [22] Walker J., "*Music and Ammonia Vapor Excite the Color Pattern of a Soap Film*", *Sci. Am.* **236**(8), 92-95 (1987).
- [23] Kagan D. T. and Buchholtz L. J., "*Demonstrations of Normal Modes on a Bubble Membrane*", *Am. J. Phys.*, **59**, 376-377 (1991).
- [24] Arcos E. et al, "*Quantum Chaos on a Soap Film*", enviado al *Am. J. Phys.*
- [25] Isenberg C. "*The Science of Soap Film and Soap Bubbles*", Dover Pub. 1978.
- [26] Traibert A. J. S., Fendrik A. J. and Bernath M., "*Level Crossings and Commuting Observables for the Quantum Elliptic Billiard*", *J. Phys. A: Math. Gen.* **22**, 1365-1370 (1989).
- [27] Berry M. V. and Robnik M., "*Statistics of Energy Levels Without Time-Reversal Symmetry: Aharonov-Bohm Chaotic Billiards*", *J. Phys. A: Math. Gen.* **19**, 649-668 (1986).
- [28] Seligman T. H., Alvarez-Tostado J. M., Mateos J. L., Flores J. and Novaro O., "*Resonant Response Models for the Valley of Mexico-I; the Elastic Inclusion Approach*", *Geophys. J. Int.* **99**, 789-799 (1989).
- [29] Borgnis F. E. and Papas C. H., "*Electromagnetic Waveguides*", Vol. XVI, *Encyclopedia of Physics*. Springer berlin (1968).
- [30] Jones C., "*A Mechanical Resonance Apparatus for Undergraduate Laboratories*", *Am. J. Phys.*, **63**, 232-359 (1989).
- [31] Díaz-Ordaz K. "*Teorema Iso-Espectral y Vibraciones de Placas*", Poster Presentado en el XXXIX Cong. Nal. de Fís. S. M. F., Oaxaca (1996).