03071

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
UNIDAD ACADÉMICA DE LOS CICLOS PROFESIONAL Y DE POSTGRADO DEL C.C.H.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA
(Una propuesta metodológica)

TESIS
Para obtener el grado de
Maestría en Educación en Matemáticas.

FERNANDO SERRATO CRUZ

México, D.F., Noviembre de 1996.

DIRECTOR DE TESIS

M. en C. Juan B. Recio Zubieta

SINODALES

M. en E.M. Patricia Balderas Cañas
M. en E.M. Iñaqui de Olaizola Arizmendi
M. en E.M. Juan M. Estrada Medina
M. en E.M. Miguel Mercado Martínez

Para Ofelia

INDICE

INTRODUCCIÓN

En la práctica docente, con estudiantes de la Preparatoria Agrícola de la Universidad Autónoma Chapingo, en sus tres niveles de bachillerato, se ha podido observar que, un problema fundamental que enfrentan el docente y el alumno, es el proceso enseñanza-aprendizaje del álgebra, durante el primer año de la preparatoria. Sin duda alguna, esta materia constituye un filtro sorprendente, ya que, en estos cursos es donde existe un mayor índice de reprobados, y por lo tanto, una mayor incidencia de bajas escolares. Esta situación, es preocupante ya que se pudiera pensar, que por el hecho de estar becados la mayor parte de los estudiantes (becados internos, 30%; becados externos 40%) Alanís et. al (1995), se sitúan en mejores condiciones para el estudio de tiempo completo, y por tanto, su rendimiento debería ser a buen nivel, sin embargo, en la práctica no es así, ya que la eficiencia terminal de los estudiantes de preparatoria es del 50%, siendo las materias de matemáticas las que más contribuyen a esta deserción y en concreto las de álgebra de los dos primeros semestres.

Múltiples han de ser los factores que influyen en el estudiante (sociales, económicos, psicológicos, etc.) que propician la reprobación de los cursos de matemáticas, sin embargo, el factor enseñanza-aprendizaje, es de fundamental importancia ya que, contribuye a acrecentar aún más dicho problema.

Evidentemente, las materias de matemáticas en general son dificiles para los estudiantes en los diferentes niveles en que se imparten. Para darse una idea de ello, basta observar los índices de reprobación de éstas en los diferentes planteles educativos. En el caso de la Preparatoria Agrícola de la Universidad Autónoma Chapingo, las materias de Álgebra ocupan el primer lugar de reprobación con respecto a las demás áreas. Es por esta razón, que los docentes debemos poner un mayor énfasis en su enseñanza.

Cada tema de los cursos mencionados, reviste una gran importancia debido a sus respectivos problemas de enseñanza aprendizaje. Sin embargo, el tema de ecuaciones lineales, es uno de los que más dificultades presenta a los estudiantes ya que, la mayor parte de ellos no tienen una idea clara de lo que es una ecuación lineal, tampoco el porqué es necesario comprender ciertas propiedades de las ecuaciones que permiten establecer el valor de la incógnita, aunado a esto está el problema de la variedad de los tipos de problemas que se les presentan para resolver.

Siendo la comprensión del concepto de una ecuación lineal y su resolución uno de los temas fundamentales de las matemáticas en el nivel bachillerato, es necesario que el alumno comprenda los aspectos conceptuales relevantes pero, no de forma mecánica y memorística, ya que, esto los conduciría a repetir esquemas rígidos que poco contribuyen al pensamiento flexible.

I ANTECEDENTES Y MARCO TEÓRICO.

I.1 LA ECUACIÓN LINEAL Y SU RESOLUCIÓN.

Los profesores José Mestre y William Gerace (1986), realizaron un estudio, con diferentes grupos de estudiantes de Ingeniería en sus primeros semestres, donde se les planteó la solución de tres tipos de ecuaciones lineales elementales.

Este estudio tendiente a observar los diferentes problemas de la interpretación de la ecuación y su solución fue un acercamiento interesante al plan de resolución de una ecuación lineal.

En su investigación, los profesores Adolf Afekenstam y Karl Greger (1982), proponen un test para niños de 9 a 13 años de edad, en donde incluyen problemas de números enteros, adición, multiplicación.

En esta investigación, observaron los factores que influencian la facilidad con la cual los niños de esta edad resuelven los problemas, paso por paso: resuelven ecuaciones lineales muy elementales, pero desde el punto aritmético sin la necesidad de plantear formalmente la ecuación, no introducen ninguna metodología algebraica para la búsqueda de la incógnita, sino que la solución la dan en términos de razonamientos más que de operaciones.

Otra investigación muy importante, es la realizada por el profesor Floy Vest (1973), ya que en dicha investigación, se sientan las bases para la comprensión de las ecuaciones lineales y su resolución; estableciendo como se relacionan los modelos matemáticos en las ecuaciones; desarrollando cuatro conceptos generales en torno a las ecuaciones y sus modelos. Sin embargo, sus modelos los plantea a nivel de los números enteros y para estudiantes del nivel primaria

En este trabajo también plantea ecuaciones sencillas con números enteros y a través de operaciones y sus inversos, da soluciones muy elementales.

Booth (1981), plantea una serie de test, para alumnos de 13, 14 y 15 años de edad, sobre la resolución de ecuaciones lineales elementales y el nivel de comprensión de las variables ó incógnitas que intervienen en ellas. En algunos problemas la solución se da por tanteo, asignando una serie de valores y observando que algunos de ellos resuelven el problema, en otros es necesario que el estudiante plantee un procedimiento general de solución ya que, la prueba y el error no es un método muy económico para conocer el valor de la incógnita.

Un trabajo, que sin duda es el más relevante en cuanto a que específicamente habla sobre el significado de una ecuación lineal y el método de resolución, es el elaborado por Nicolas Herscovics y Carolyn Kieran (1980), donde hacen una referencia inicial de que en muchos libros de texto se introduce el concepto de ecuación a través de la resolución de problemas, y no dudan del manejo algebraico del estudiante, sin embargo, para muchos estudiantes el trasladar un problema verbal, del lenguaje común al lenguaje algebraico es trasladarlo a un lenguaje desconocido; estos autores también presentan una forma de abordar las ecuaciones sobre una construcción explícita, basada en la aritmética.

De igual manera, presentan la forma de como los estudiantes pueden construir ecuaciones por medio de las identidades aritméticas, y también presentan la distinción entre una ecuación en aritmética y una ecuación en álgebra, además de un método para la resolución de las ecuaciones de una forma natural, aplicando las propiedades de la igualdad.

Específicamente hablando de la resolución de ecuaciones, por estudiantes que inician el estudió del álgebra, Rojano (1985), señala que el paso de la resolución de ecuaciones de la forma: $x + a = b$, a la solución de las de la forma: $ax + b = cx + d$, no es inmediato ni espontáneo y que es muy común que ellos utilicen el ensayo y el error, asignando diferentes valores a las diferentes apariciones de la incógnita específica en una misma expresión (polisemia). La polisemia, sin embargo, puede evitarse cuando se aclara a los alumnos, de manera explícita, que todas las apariciones de la incógnita específica, representan el mismo valor (Herscovics y Linchevski, 1991).

La enseñanza tradicional que tiende a desarrollar y fortalecer las habilidades manipulativas, no parece ser adecuada para ayudar a los alumnos a superar las dificultades que tienen en el manejo de o con la incógnita específica, y no puede esperarse que los estudiantes superen estas dificultades espontáneamente, por lo que la tarea educativa es ayudarlos a superarlas. Rojano (1985).

Distintos acercamientos se han usado para ayudar a los estudiantes a superar las dificultades que tienen para operar con la incógnita específica, Filloy y Rojano (1989), por ejemplo, uso de modelos concretos (el modelo geométrico, el modelo de la balanza). Con el uso de estos modelos, se encontró que las intervenciones de enseñanza eran cruciales para ayudar a los alumnos a progresar desde el modelo a la construcción de nociones algebraicas.

También se encontró (Herscovics y Linchevski 1991), que la instrucción individualizada, diseñada especialmente para ayudar a los estudiantes a superar las dificultades para operar con la incógnita específica, puede llevarlos a adquirir la capacidad de agrupar términos similares en una ecuación. Sin embargo, se observó que las dificultades persisten cuando tienen que operar con incógnitas de coeficiente unitario y, por lo tanto, no explícitamente señalado. (Rojano, 1985).

Otro aspecto que puede ser crucial tomar en cuenta para ayudar a los alumnos a trabajar con la incógnita específica, es buscar en los antecedentes de los niños una base cognitiva sobre la cual construir el conocimiento nuevo. Además, indicar explícitamente el marco de referencia y pedirles que respondieran "en álgebra", fue un elemento esencial que ayudó a los estudiantes a pasar de un contexto aritmético a uno algebraico. Estos resultados indican que para los que se inician en el estudio del álgebra puede ser crucial saber con claridad el contexto matemático en el cual se espera que trabajen. (Chalouh y Herscovics (1988).

I.2 APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO

La esencia del proceso aprendizaje significativo, reside en que, ideas expresadas simbólicamente son relacionadas de modo no artibrario y sustancial (no al pie de la letra) con lo que el alumno sabe. (Ausubel, et al, 1995). Si la intención del alumno consiste sólo en memorizar arbitraria y literalmente, tanto el proceso de aprendizaje como los resultados del mismo, estos serán mecánicos y carentes de significado. Por ejemplo, la memorización mecánica de definiciones, de conceptos o proposiciones, sin el reconocimiento del significado de las palabras de la definición. Un estudiante podría aprender la ley de Ohm, la cuál indica que la corriente en un circuito, es directamente proporcional al voltaje, sin embargo, esta proposición no será significativamente aprendida, si el estudiante no sabe el significado de los conceptos: corriente, voltaje, resistencia y proporciones directa e inversa.

Sobre este punto mencionan que todo el aprendizaje en el salón de clases puede ser situado a lo largo de dos dimensiones independientes: la dimensión repetición-aprendizaje significativo y la dimensión recepción-descubrimiento.

El aprendizaje por recepción, es el tipo de aprendizaje en el que el contenido total de lo que se debe aprender se presenta al aprendíz más o menos en su forma final, el únicamente necesita relacionarlo activa y significativamente con los aspectos relevantes de su estructura cognoscitiva, y retenerlo para el recuerdo o reconocimiento posteriores, como una base para el aprendizaje del nuevo material.

El aprendizaje por descubrimiento, es el tipo de aprendizaje en el que el contenido principal de lo que será aprendido no se proporciona (o presenta), sino que debe ser descubierto por el aprendíz, antes de que pueda asimilarlo en su estructura cognoscitiva.

Sin embargo, ni el aprendizaje por recepción, ni el aprendizaje por descubrimiento son absolutos. Más bien, se pueden situar en un contínuo recepción-descubrimiento. Por razones lógicas, la mayor parte del aprendizaje en el salón de clases, especialmente el de los alumnos de mayor edad, es aprendizaje por recepción.

El aprendizaje significativo por recepción involucra la adquisición de significados nuevos. Requiere tanto de una actitud de aprendizaje significativo, como de la presentación al alumno del material potencialmente significativo. Este tipo de aprendizaje es importante en la educación, porque es el mecanismo humano por excelencia, que se utiliza para adquirir y almacenar. conocimientos.

Aprendizaje significativo no es sinónimo del aprendizaje de material significativo. En primer lugar, el material de aprendizaje es sólo potencialmente significativo (tarea de aprendizaje que puede ser significativamente aprendida tanto porque es lógicamente significativa, como porque las ideas relevantes están presentes en la estructura cognoscitiva particular del aprendíz). En segundo término, debe estar presente una actitud de aprendizaje significativo.

La facilitación del aprendizaje es tan sólo uno de los fines propios de la enseñanza. Esta no es un fin en sí misma, a menos que los alumnos aprendan; y aunque el fracaso de éstos en aprender, no indica necesariamente la competencia del maestro, aprender sigue siendo todavía la única medida factible del mérito de la enseñanza.

El aprendizaje del material de la mayoría de las materias de estudio supone que la adquisición de conocimiento es un fin en sí mismo. También supone que aunque los estudiantes deben, en el análisis final, asumir la responsabilidad por la dirección guiada de aprendizaje, la escuela no puede renunciar a su responsabilidad por la dirección guiada del aprendizaje.

El profesor debe asumir el cargo de presentar a los estudiantes los materiales de aprendizaje que sean substancialmente válidos y pedagógicamente apropiados, además de idear los materiales de aprendizaje y los métodos de enseñanza que estén apropiadamente situados en el continuo repetición-significativo y recepción-descubrimiento.

En el aprendizaje en el salón de clases, el aprendizaje significativo es más importante, con respecto al aprendizaje por repetición, de la misma manera que el aprendizaje por recepción, lo es con respecto al aprendizaje por descubrimiento. Por ejemplo, el realizar experimentos de laboratorio, a la manera de una receta de cocina, sin comprender los principios metodológicos y sustanciales subyacentes que intervienen, tiene poco de método científico; tampoco "descubrir" las respuestas correctas a problemas de matemáticas y de ciencia sin entender lo que realmente se está haciendo, ayuda mucho al conocimiento o a la habilidad para resolver problemas, ya que el estudiante logra esta "proeza" aprendiéndose de memoria "problemas-tipo" y procedimientos mecánicos, para manipular símbolos algebraicos.

Finalmente, debemos tener en cuenta que en el proceso enseñanza-aprendizaje en el salón de clases, enseñar y aprender no son coextensivos, pues enseñar, es tan solo una de las condiciones que pueden influir en el aprendizaje. Así pues, los alumnos pueden aprender sin ser enseñados, es decir, enseñándose a sí mismos; y por otro lado, aunque un maestro sea muy competente, no se logrará forzosamente el aprendizaje, si el alumno es desatento carece de motivación o está cognoscitivamente impreparado. Entonces, no siempre se puede decir que "el niño no aprendió, porque el profesor no le enseñó". (Idem.)

Según Ausubel (1995), cuando no existen conceptos relevantes en la estructura cognitiva de un individuo, la información nueva tiene que adquirirse de memoria, siempre que el individuo adquiera nueva información sobre un área de conocimiento que no tenga ninguna relación con la que ya sabe. El aprendizaje signficativo requiere la existencia de conceptos relevantes (inclusores) en la estructura cognitiva, los cuales se encargan de asimilar la nueva información.

Para establecer la relación entre la información nueva con los conceptos de la estructura cognitiva, se introduce un concepto inclusor, el cual tiene la función de interacción en el aprendizaje significativo, facilitando el paso de información relevante,a través de las barreras receptivas y la conexión entre la información reciente y el conocimiento adquirido anteriormente. Además cuando se efectúa esta conexión, el concepto inclusor se modifica ligeramente y la información almacenada cambia también de alguna manera. La información que se aprende significativamente se retiene, en general, más tiempo que la que se aprende de memoria (la que no está relacionada con un inclusor) pero con el tiempo se hace imposible la recuperación conciente de los elementos relacionados. Cuando los elementos incluidos ya no se pueden operar en la memoria, se produce la inclusión obliterativa. Aunque se produzca la pérdida aparente de un elemento subordinado, la experiencia previa de aprendizaje significativo ha modificado al inclusor. La información que se aprende significativamente (relacionada con los inclusores de la estructura cognitiva) se puede recordar, generalmente, durante semanas ó meses despuès de su adquisición. Sin embargo, el proceso de inclusión produce una cierta modificación de la información almacenada. Debido a esto, la información que se recuerda puede aparecer de forma ligeramente diferente a la aprendida al principio. Con el tiempo, la información recordada puede incorporar atributos más generales del concepto ó los conceptos inclusores por los que ha sido asimilada y una vez que la inclusión obliterativa ha tenido lugar, los mensajes específicos aprendidos ya no son recuperables.

En caso de que ya existiesen conceptos adecuados en la estructura cognitiva, los organizadores previos servirìan para relacionar el nuevo material de aprendizaje con inclusores específicos y relevantes. Si no existiesen conceptos relevantes en la estructura cognitiva, el organizador previo serviría para afianzar la nueva información y conducirla al desarrollo de un concepto inclusivo que pudiera operar para facilitar el aprendizaje subsiguiente sobre temas relevantes.

Los organizadores previos servirían de puente cognitivo para relacionar fácilmente los inclusores relevantes existentes, con el material nuevo que se aprendiera. Para que los organizadores previos faciliten el aprendizaje, la información subsiguiente debe ser potencialmente significativa y los alumnos deben tener predisposición para el aprendizaje significativo.

A medida que se han acumulado datos sobre el valor de los organizadores previos, se ha hecho cada vez más evidente que la facilitación de nuevo aprendizaje, esta en gran medida, en función de la adecuación de los conceptos existentes en la estructura cognitiva. Es probable que los organizadores previos actúen sólo en la medida en que existan inclusores relevantes, y en la que el alumno perciba la relación entre los inclusores existentes y la nueva información (lo cual requiere algo más que una simple predisposición para el aprendizaje significativo). En pocas palabras, la función principal de un organizador previo es salvar el abismo que existe entre lo que el alumno ya sabe y lo que necesita saber, antes de que aprenda con buenos resultados la tarea inmediata.

El verdadero problema del aprendizaje escolar no consiste en si la información nueva se va ha aprender significativamente o de manera totalmente memorística; el problema se centra en el grado en que el nuevo aprendizaje es significativo. Debería conservarse la idea del aprendizaje memorístico, sólo en situaciones de aprendizaje en que la adquisición de nueva información, tiene lugar relacionándolo con elementos relativamente poco importantes de la estructura cognitiva. El aprendizaje memorístico se produce cuando no se realiza ningún esfuerzo conciente, por asociar el nuevo conocimiento con una estructura de conceptos que ya se encuentren en la estructura cognitiva, por lo que el aprendizaje se produce de forma memorística o de modo significativo, dependiendo de la predisposición del alumno hacia la tarea de aprendizaje y del grado en que se hayan desarrollado conceptos relevantes en la estructura cognitiva.

El aprendizaje significativo tiene tres ventajas sobre el memorístico; se retiene por más tiempo; la información incluída produce una diferenciación progresiva de los inclusores, lo que aumenta la la capacidad para aprender después de manera fácil otros materiales relacionados; la información que se olvida después de que se haya producido la inclusión obliterativa deja secuelas en el concepto inclusor facilitando de esta manera el aprendizaje de nuevos materiales relacionados, incluso después de que se haya producido el olvido. La información aprendida de memoria inhibe el aprendizaje subsecuente de otra información similar.

I.3 LAS METÁFORAS EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

"-Las metáforas son operacionales: operan en la mente del alumno para lograr el aprendizaje", Carrol, Mack (1985).

De acuerdo a la anterior definición, las metáforas son proposiciones básicas de comparación que pueden estimular los procesos de razonamiento. Esta definición reúne los aspectos operacionales y estructurales y se refiere a las metáforas como una forma de pensar, que asocia los conceptos y las relaciones entre estos, y proyecta las propiedades de los objetos animados e inanimados en otros. Tienen dos funciones básicas complementarias: iniciar los procesos de razonamiento y comunicar los conocimientos. (Wenzelburger, de Olaizola, 1994)

Las metáforas son proposiciones de comparación como ya se mencionó, que estimulan los procesos del pensamiento activo en el aprendiz. Este punto de vista está en armonía con una hipótesis constructivista del aprendizaje. Los constructivistas creen que los estudiantes construyen el conocimiento activamente, basado en los conocimientos ya existentes Duit (1990). Las metáforas sirven como puentes entre los conceptos nuevos y los ya existentes. (Wenzelburger, de Olaizola, 1994).

Si comparamos un concepto nuevo con uno conocido, mediante una metáfora, transferimos lo que ya sabemos a un contexto nuevo. Las metáforas pueden ser útiles para establecer campos conceptuales Vergnaud, (1982). Por ejemplo, las estructuras aditivas forman un campo conceptual y también las estructuras multiplicativas, Díaz (1990).

En la enseñanza de la Matemática, se recurre muchas veces a las comparaciones metafóricas, en ocasiones en la forma de materiales concretos. Las variables se comparan con cajas, bolsas o recipientes. Las fracciones se introducen como operadores que encogen o agrandan los números. Las operaciones básicas se representan como máquinas en las cuales se pone un número de un lado y sale otro número del otro lado, por ejemplo, si disponemos de una colección de máquinas multiplicadoras en serie, el concepto de número primo surge de ésta situación en forma natural. En general, las funciones a veces asumen el papel de las máquinas que "convierten" los números.

En el contexto de lo que Ausubel ha definido comó organizador previo (Ausubel et. al 1995) se sitúa la metáfora de la balanza que puede utilizarse al trabajar con ecuaciones. Al resolver problemas verbales las ecuaciones son metáforas de situaciones reales, las operaciones se efectúan con las variables que representan los objetos o las magnitudes reales, metafóricamente.

II. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

La resolución de ecuaciones en general y de ecuaciones lineales en particular, forma parte del contenido de los cursos de Álgebra (I,II), y son pieza fundamental en todas las Matemáticas, ya que gran parte de éstas se cimientan sobre la teoria de ecuaciones, de las cuales las lineales son un caso particular.

Sin embargo, no sólo la justificación de la importancia que revisten en el curriculum escolar de bachillerato, hacen del estudio de las ecuaciones un tema de fundamental importancia, sino también su dificultad conceptual y operativa, para los estudiantes ya que, en este tema es donde el estudiante presenta dificultades tanto en la comprensión del concepto de ecuación, como en el planteamiento de los métodos de solución que no resultan claros para ellos.

El tema de ecuaciones lineales, forma parte del curriculum de matemáticas del tercer año de secundaria, por tanto, es de suponerse que el estudiante cuando ingresa al bachillerato ya trae conocimientos previos en este tema, y por ende esta en condiciones de abordar sin dificultad la comprensión y resolución de ecuaciones lineales, sin embargo, la experiencia nos muestra una realidad un tanto diferente, debido a que los estudiantes en general sólo resuelven ecuaciones enteras como la siguiente:

$$\boxed{-2 + x = 6}$$

esto es, con la incógnita en un solo miembro de la igualdad, siendo más dificil para ellos, resolver aquellas ecuaciones que presentan un mayor número de operaciones, principalmente aquellas con racionales y con las que tienen la incógnita en ambos miembros. Por otro lado, la forma en que enfrentan la resolución dc ecuaciones es muy mecánica y a un nivel de receta, ya que es frecuente observar como la gran mayoría de los estudiantes aplican el procedimiento de las operaciones inversas para obtener el valor de la incógnita, es decir, lo que esté restando pasa sumando al otro miembro, lo que esté sumando pasa restando, lo que esté multiplicando pasa dividiendo y lo que esté dividiendo pasa multiplicando. Este procedimiento aunque es práctico, deja de lado la parte conceptual que subyace en esta forma de proceder, a tal grado que los estudiantes enfrentan de la misma forma problemas como los siguientes:

$$\boxed{\begin{array}{c} 2x + 3 = x - 2 \\ 3(x + 2) - x + 1 = 2x + 7 \\ x - 2 = x - 1 \end{array}}$$

en donde el primer problema sí tiene solución única, y en los dos últimos con este procedimiento "desaparece" la incógnita, dificultándoseles las argumentaciones para explicar este hecho.

Otro enfoque que se le dá a la enseñanza de las ecuaciones lineales, es la presentada en un buen número de libros de texto del nivel bachillerato. En estos libros se introduce primero el concepto de igualdad entre conjuntos, posteriormente pasan a la igualdad numérica, y con éstos dos conceptos se define la ecuación lineal, como una proposición abierta en la cual se igualan dos expresiones algebraicas, la cual puede ser verdadera o falsa dependiendo del valor o valores que se le de a la incógnita. Con estos elementos se procede a definir las propiedades de la igualdad para aislar el valor de la incógnita. Después, presentan el concepto de ecuaciones equivalentes y por último a nivel de ejemplos, la resolución de ecuaciones lineales de diferentes tipos Gobran (1990). Un inconveniente que se observa con esta forma de presentación de las ecuaciones lineales, es que los conceptos se presentan ya definidos y se corre el peligro de que el alumno los memorice mecánicamente junto con los tipos de ecuaciones que se les dá como ejemplos, de tal manera que al presentarles alguna variante del mismo problema ya no sean capaces de resolverlo.

Otro aspecto que contribuye a la dificultad conceptual de las ecuaciones, desde un particular punto de vista es, que la mayoría de los docentes que imparten la materia de álgebra, en el nivel de secundaria y algunos otros en el nivel de bachillerato, aplican una metodología de enseñanza-aprendizaje generalmente memorístico, mecánico y sobre todo carente de significado para el estudiante, ya que éste repite los mismos esquemas "enseñados" por el profesor, además de que la forma de presentar las ecuaciones, confunde al estudiante debido a que no les queda claro, cuando una igualdad es una identidad; ó cuando una igualdad es una ecuación; ó cuándo se establece una igualdad. Por tal motivo, se presenta el problema de que el estudiante no sabe que hacer en el momento de resolver diversos tipos de ecuaciones que presentan variantes como: la incógnita en ambos miembros; ecuaciones con paréntesis, ecuaciones fraccionarias (con denominadores numéricos ó algebraicos).

Considerando la problemática planteada en los párrafos anteriores, en esta investigación, se desarrolla una propuesta metodológica alternativa para la enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones lineales y su resolución. En esta propuesta, se considera la importancia de presentar el tema de ecuaciones lineales, desarrollando su antecedente aritmético hasta el planteo algebraico, ya que el conocimiento aritmético, es importante para que el estudiante por sí mismo desarrolle gradualmente su conocimiento algebraico.

La propuesta metodológica para la enseñanza-aprendizaje de el tema de ecuaciones lineales, está fundamentada en la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel.(Ausubel1995). Considerando tambien el modelo de la balanza (Rojano, 85), la elaboración de material didáctico potencialmente significativo y la participación activa de el estudiante (actitud positiva hacia el aprendizaje significativo). Ausubel (1995).

II.1 HIPÓTESIS.

De acuerdo al marco teórico y al planteamiento del problema, se plantea la hipótesis siguiente:

EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DEL CONCEPTO DE ECUACIÓN LINEAL, Y EN PARTICULAR LA RESOLUCIÓN DE SUS DIVERSOS TIPOS, SE CONSIGUE MEJOR CON LA APLICACIÓN DE LA METÁFORA DE LA BALANZA, DE MATERIAL POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVO, Y DE LA PARTICIPACIÓN DEL ESTUDIANTE EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE, QUE SIN ESTOS TRES ELEMENTOS.

III. METODOLOGÍA.

Para investigar los resultados de la aplicación de la propuesta metodológica en el aprendizaje de la resolución de ecuaciones lineales se llevaron a cabo dos estudios, uno de ellos con alumnos de la Secundaria Federal "Ignacio Ramírez ", de Texcoco (estudio piloto) y el otro con alumnos de la Preparatoria Agrícola de la Universidad Autónoma Chapingo (estudio principal).

III.1 Estudio Piloto.

El estudio piloto se realizó con la finalidad de probar el material de enseñanza elaborado para la investigación, verificar el tiempo de aplicación del mismo, y de evaluar el nivel de conocimientos previos sobre el tema a desarrollar (exámen de diagnóstico). Se llevó a cabo con dos estudiantes del tercer grado de secundaria, de 15 años de edad (edad promedio de los estudiantes del primer grado de la Preparatoria Agrícola), en un salón de clases de la preparatoria Agrícola, durante siete sesiones matutinas de una hora y media de duración cada una, diariamente y fuera de su horario normal de clases.

En la primera sesión se aplicó el examen de diagnóstico, con la finalidad de observar, si los conocimientos aritméticos y algebraicos previos de los estudiantes de secundaria, que participaron en el estudio piloto estaban a un mismo nivel. Porque siendo así, trabajarían el material didáctico elaborado para la investigación con menos dificultades y se detectarían mejor las fallas del mismo. El examen lo resolvieron en aproximadamente dos horas. (ANEXO I).

El examen de diagnóstico se diseñó con reactivos de opción múltiple y de complementación, con los siguientes contenidos:

a) Números reales.

En este tema se hicieron preguntas sobre aspectos aritméticos, ya utilizados desde la educación primaria, y otras preguntas tendientes a observar la utilización por parte de los estudiantes, de algunas de las propiedades de los números reales.

a) Álgebra.

En este caso los reactivos presentados versaron sobre: expresiones algebraicas, productos notables y factorización, asi como ecuaciones lineales con una incógnita (despejes).

A continuación se ejemplifican algunos de los 54 reactivos del examen de diagnóstico.

a) Números reales:

1.- ¿ Cuál de los siguientes números no es entero?
a) 0 b) 3 c) ½ d) 4

4.- ¿Cuál de las siguientes operaciones no está definida para los números reales?
a) 3+0 b) 3·0 c) 0/3 d) 3/0 e) 0-3

10.- a · □ = b · □, es conocida como la propiedad __________ para la multiplicación de los números reales.

22.- Escribe los factores primos de 120 ____________________

33.- ¿Qué número puedes usar en ambos cuadros para que la operación sea falsa? 25 + □ = □ + 30 - 5
a) 0 b) 5 c) 25 d) ninguno e) todos

b) Expresiones algebraicas.

1.- Escriba un ejemplo de cada uno de los siguientes términos.
a) un trinomio ______________________________
b) Un binomio ______________________________
c) Un monomio ______________________________

4.- Sí (1/8)x = 12, entonces x es igual:
a)2/3 b)3/2 c) 96 d)20 e) no se conoce.

5.- El resultado de la Ecuación: x + 1/x = x - 1/x. es:
a) 0 b) 1 c) 0 y 1 d) -1 e) No tiene solución.

6.- Resuelva la siguiente ecuación lineal.

$7/n - 5/n = ¼$

8.- Si $F = GmM/d^2$, entonces m es igual a:

a) Fd^2/GM b) Fd^2GM c) $F+d^2/GM$ d) FGM/d^2 e) Fd^2-G

c) Completa las siguientes expresiones:

4) $x^2 + 2xy + y^2 = (\square + \square)^2$

9) $81x^2 - 49 = (9x + \square)(\square - 7)$

13) $(x+3)/(x+1) + (x+2)/(x+1) = \{(x+3) + (x+2)\} / (\square + \square)$

$= (\square + \square) / (\square + \square)$

Los resultados obtenidos en el examen de diagnóstico por estudiantes de secundaria son los siguientes:

1) De los 54 reactivos del examen, resolvieron un promedio de 12 acertadamente, es decir, que el número de respuestas correctas está muy por debajo de la media. De los 12 aciertos, 9 son de aritmética de los más elementales, relacionados al uso de las operaciones simples, tales como: suma, resta, multiplicación y división.

2) En el plano conceptual, el cálculo del mínimo común múltiplo, el concepto de número primo, y las propiedades de los números reales. Son conceptos que no supieron aplicar.

3) En el plano algebraico, sus dificultades aumentaron considerablemente, ya que no pudieron realizar correctamente factorizaciones por término común, de trinomios y diferencia de cuadrados.

4) En el caso de las ecuaciones lineales, no fueron capaces de resolver correctamente ninguna de ellas.

Resumiendo, los estudiantes del 3er. grado de secundaria, están más familiarizados con aspectos aritméticos elementales, que con aspectos conceptuales, el plano algebraico es poco claro para ellos, lo cual es explicable porque es en este nivel donde se da la transición de la aritmética al álgebra.

Una vez que se observó que los dos estudiantes de secundaria estaban al mismo nivel de conocimientos previos, se procedió con la prueba del material que se aplicó en la investigación.

En la primera sesión, se realizó el experimento de la balanza. Se les proporcionaron pesas de diferente denominación (1, 10, 20, 25, 50,100 y 250 gramos) y una balanza, la cual pudieron manipular y observar que mediante la colocación de los mismos pesos en cada uno de sus platillos, se establecía el equilibrio de la misma. Al respecto se les hicieron preguntas sobre que era lo que sucedía, cuando se sumaban, restaban, multiplicaban ó dividían pesos iguales en los platillos de la balanza. Una vez realizado el experimento, el siguiente paso fue presentar a los alumnos el material didáctico elaborado. (ANEXO II).

En la segunda sesión se les pidió realizaran sumas sencillas cómo la siguiente:

$$3 + 6 = \square$$

Se les preguntó si esa era la única forma de obtener el resultado (en este caso 9), la respuesta fué que no, por lo que se les pidió buscaran otros números que dieran la misma cantidad. Se les pidió que observaran las cantidades tanto del lado derecho, cómo las del izquierdo y que las compararan, al preguntarles que es lo que notaron, contestaron que en ambos lados las cantidades eran iguales.

Se les planteó una segunda pregunta; ¿es la única forma de expresar las dos cantidades?, después de algunos titubeos y de insistir en ejemplos similares contestaron que no, uno de ellos dijo que el nueve puede expresarse, como la suma de otros números. Ante esta situación se les pidió que expresaran de manera diferente números dados, expresados con sumas ó multiplicaciones en un lado de la igualdad, como los siguientes:

$$14 + 10 = \square$$
$$\square = 2 \cdot 8 + 5$$

Ellos generalmente hacían sumas, aunque se les presentaran ejercicios con multiplicaciones. Se les preguntó que relación había entre el experimento de la balanza, y las operaciones realizadas en los ejercicios, contestaron que era la igualdad de cantidades.

La tercera sesión consistió en resolver ejercicios como los anteriores, con la variante de que ahora ya no se daba algún valor numérico en algún miembro de la igualdad, el cuál se pedía que calculara el estudiante, por ejemplo:

$$2+\square = 5+5$$
$$40 = 4\cdot\square$$

En cada ejercicio se solicitaba al estudiante quc obtuviera el valor numérico de ambos miembros de la igualdad para cerciorarse de la identidad de valores.

En la cuarta sesión se les presentaron ejercicios similares a los anteriores, con la variante de que el lugar de el valor numérico que se desconoce puede ser ocupado por cualquier símbolo, (en el caso particular se propone una literal) el cual debe ser sustituido por el valor numérico, en el momento que se calcule por prueba y error. (En este caso por cálculo mental)

$2+\underline{b}=5+5$	$\underline{b}=8$
$3\cdot\underline{z}+5=10+1$	$\underline{z}=2$

En la quinta sesión, se les presentaron ejercicios con fracciones, como los siguientes:

$$50/b=10$$
$$3\cdot y+4=5$$

En éste último los estudiantes tuvieron dificultades ya que, la solución no es entera, es una fracción.

En esta misma sesión se les plantearon ejercicios en los que se utilizan paréntesis, tales como los siguientes:

$$4(x\text{-}2)=12$$
$$5(a+2)=a+1$$

El primero lo resolvieron con muchas dificultades y con la ayuda del maestro, el segundo les fue imposible resolverlo. Sin embargo, ellos sabían que las literales representaban un valor numérico definido.

Como una alternativa para resolver los problemas anteriores, se les pidió que recordaran las manipulaciones que realizaron en el experimento con la balanza; cuando sumaban, restaban, multiplicaban ó dividían, en ambos platillos por los mismos pesos, para mantener su equilibrio.

Se les plantearon entonces, ejercicios para que los realizaran procediendo por la analogía del experimento de la balanza. Por ejemplo:

$$\boxed{v+5=8}$$

Dada la sencillez de este ejercicio, los estudiantes sabían que el valor de la literal es 3, y que sumado a 5 da 8 en el miembro izquierdo, idéntico al 8 del miembro derecho. Partiendo de este hecho y de la metáfora de la balanza, se le restó a ambos miembros de la igualdad el número 5, quedando una igualdad equivalente a la inicial $v = 3$, en la cual el valor de la literal es fácilmente identificable. Bajo este contexto se les presentaron una variedad de ejercicios, desde los más elementales, hasta los del siguiente tipo:

$$\boxed{2x/7 - (5x-30)/16 = (4x+7)/14 - (x-4)/8}$$

En este último planteamiento transcurrieron las dos sesiones restantes.

Realizado el pilotaje, se hicieron los ajustes pertinentes al material elaborado para la investigación, dichos ajustes fueron fundamentalmente la exclusión de ecuaciones lineales fraccionarias con denominadores algebraicos, a los que se tiene que factorizar por los diferentes métodos, dejando solo aquellas que presentan denominadores factorizables por término común (expresiones con dos términos).

III.2 Estudio principal.

La manera en que el experimento se implemento fue la siguiente:

- Selección al azar del grupo experimental y del grupo control (Grupos 15 y 19, con 37 y 40 alumnos, respectivamente), de entre los veintidos grupos de primer grado de la Preparatoria Agricola, del ciclo escolar 1994-1995.

-Aplicación del examen de diagnóstico (el mismo aplicado en el pilotaje) a ambos grupos.

- Inicio del experimento con el grupo experimental (grupo 15) e inicio de clase tradicional con el grupo control (19), con el mismo maestro, en salón y horario normal de la clase de matemáticas.

- Aplicación del examen post experimento a ambos grupos.

- Análisis estadístico de resultados.

- Aplicación de examen postexperimento, un mes después para evaluar la retención de conocimientos de ambos grupos.

- Material utilizado: balanzas de platillos y pesas de diferentes denominaciones y algunas sin denominación; material didáctico elaborado.

A continuación se esbozan los aspectos principales de la aplicación del material de enseñanza y de la metáfora de la balanza. Además se describe la manera de como se llevaron a cabo las sesiones con cada uno de los grupos.

Después del pilotaje , la primera actividad que se desarrolló con el grupo experimental, fue el experimento de la balanza. Con el grupo control no se realizó dicho experimento. De igual manera, sólo al grupo experimental se le proporcionó el material didáctico elaborado.

Con el grupo experimental se trabajó el tema de ecuaciones lineales, en una serie de siete sesiones de una hora y media de duración, en el salón y horario normal correspondiente a la clase de matemáticas. Se propició, en cada momento la participación activa de los estudiantes, ya sea en forma generalizada o individual, preguntando para aclarar sus dudas o dando ideas sobre el desarrollo del trabajo; el objetivo fue que no permanecieran desinteresados. En el transcurso del trabajo con el tema de ecuaciones se les pidió que relacionaran el experimento de la balanza con las igualdades que se les presentaron en el material de estudio.

Al grupo control, el mismo profesor expuso el tema de ecuaciones, también en siete sesiones, con la misma duración, en el salón y en el horario normal de clase de matemáticas. La clase fue tradicional, y con el enfoque común que presentan la mayoría de los libros de texto, recomendados en la bibliografía para el curso de matemáticas I. (ANEXO III).

1) Grupo experimental.

a) Primera sesión.

Primeramente se les dió la indicación, de que formaran equipos de 5 integrantes cada uno, a cada equipo se les proporcionó una balanza y pesas iguales y de diferente denominación (con peso desde 1 gramo hasta 250 gramos). No se les mencionó el objetivo específico de la actividad, simplemente se les dijo que manipularan la balanza, realizando operaciones según consideraran conveniente, con la finalidad de que observaran las diferentes maneras de mantener el equilibrio de la misma. Se les sugirió, que todos los integrantes de cada equipo la manipularan, para que así se dieran cuenta cada uno de ellos de como se lograba dicho equilibrio.

Durante el experimento se pudo observar lo siguiente: que los integrantes de los equipos empezaron "jugando" con la balanza y las pesas; agregaban o quitaban pesas según se necesitara para lograr el equilibrio de esta, algunas veces se fijaban en la denominación de las pesas, y otras simplemente agregaban o quitaban pesas hasta conseguirlo. Otras veces utilizaban pesas de igual denominación para equilibrarla y en otras utilizaban pesas de distinta denominación.

Al final de la sesión se les solicitó que hicieran una discusión sobre el experimento realizado y que obtuvieran una conclusión sobre el mismo. Su conclusión fue, que el equilibrio de la balanza solo se logró agregando o quitando pesas o pesos iguales a ambos platillos Tambien al final se les proporcionó una copia de todo el material de estudio y se les dejó como tarea, leer la parte correspondiente a la balanza.

b) Segunda sesión.

En esta sesión, se realizó una plenaria, en la cual se les preguntó el objetivo del experimento realizado en la primera sesión. La mayor parte de los equipos manifestó que el objetivo fué el de equilibrar y mantener el equilibrio de la balanza, con las pesas.

A la pregunta de ¿Cuál era la condición fundamental para equilibrar la balanza?, Su respuesta fué, que la condición era la igualdad de pesos en ambos platillos.

¿Y si se agrega una pesa de 50 gr. o de cualquier otra denominación en uno de los platillos? ¿Qué se tiene que hacer para mantener el equilibrio de la balanza? Su respuesta también fue general, en el sentido de que se tiene que agregar o colocar otra pesa de la misma denominación, en el otro platillo

¿Y agregando otra pesa de 50 gr. ó de otra denominación, a los 50 gr. iniciales, a uno de los platillos? ¿qué sucede? la respuesta fue que se desnivela la balanza. ¿qué se tiene que hacer para restituir el equilibrio? Su respuesta fue, que se pone otra pesa igual en el otro platillo.

Si colocan en alguno de los platillos, seis veces el peso de 50 grs, esto es, $6 \cdot 50$ gr. = 300 grs, ¿Qué sucede a la balanza? ¿Cómo se restituye el equilibrio? La respuesta común fue, se coloca en el otro platilllo un peso igual.

Si la balanza está equilibrada con dos pesas de 50 grs. en cada platillo, ¿qué sucede si quitas (restas) las dos pesas de un platillo?, La respuesta fue: vence el peso que queda en el otro platillo ¿Cómo se restituye el equilibrio? algunos estudiantes respondieron: colocando nuevamente las pesas en el platillo, mientras que otros estudiantes dijeron que quitando las dos pesas que quedaban en el otro platillo.

Si se tienen 6 pesas de 50 gramos. en cada platillo de la balanza, esto es, 300 gr. en cada platillo equilibrándose de esta forma la balanza, pero se quiere tener sólo la sexta parte de ese peso, en uno de los platillos ¿qué se tiene que hacer?. Esta pregunta causo expectación, ya que, la mayor parte de los estudiantes no respondieron de inmediato y sólo algunos, despues de reflexionar contestaron que se debería dejar solo una pesa de 50 grs., en ese platillo.

En este caso fue necesario aclarar que la sexta parte de 300grs., es lo mismo que dividir 300 grs., entre seis. Con esta aclaración, todos los estudiantes entendieron mejor la pregunta, y respondieron que para mantener el equilibrio deberia quedar sólo una pesa de 50 grs. en cada platillo.

Otras preguntas, a las que respondieron afirmativamente, fueron: ¿Si se agregaran o quitaran pesas iguales, estas pueden ser de cualquier denominación, esto es, pesas enteras o fraccionarias? ¿Se puede multiplicar un peso patrón dado por números enteros positivos o racionales, para tener pesos mayores (múltiplos) o menores (submúltiplos)?

Finalmente, se les preguntó, que si al tener equilibrada la balanza con pesos iguales en cada platillo, ¿es posible dividir entre cualquier número entero distinto de cero estos pesos y buscar el equilibrio con una de estas fracciones. Aquí no hubo mucha claridad en los estudiantes de como podría ser esto, en una situación concreta, para lo cual se realizaron algunos ejercicios como el siguiente: Si se tiene la balanza equilibrada con 1000 grs. en cada platillo y divido este peso entre 30, se obtienen 33.3 gr. que debe ser el peso que se debería colocar en cada platillo de la balanza para conseguir el equilibrio.

Un planteamiento importante fue la situación donde a partir del equilibrio de la balanza con pesos iguales en ambos platillos y al realizar la operación de agregar pesas iguales a ambos platillos, el peso resultante fue mayor que el peso original, pero también se siguió manteniendo el equilibrio, lo mismo sucedió si se quitaban pesos iguales, el peso resultante fue menor que el peso original, pero el equilibrio se seguió manteniendo. ¿Y si se dividen ambos pesos iguales por un número distinto de cero?, la fracción de peso resultante seguirá manteniendo en equilibrio la balanza, ya que el peso resultante sería una fracción del peso original, pero igual en ambos platillos. Lo mismo sucedería si se multiplicaran por el mismo número ambos pesos de la balanza.

Aquí, se les dió la explicación de que a estos estados de equilibrio, que se mantienen en los diferentes momentos al realizar las operaciones mencionada se denominan, estados equivalentes. Este estado de equivalencia deja de serlo en el momento en que se desequilibra la balanza, ya que habrá pesos diferentes.

Al final de esta segunda sesión, se les dejó de tarea que estudiaran la siguiente parte del material de estudio, hasta llega a la primera serie de ejercicios, y se les dió la indicación de que no los resolvieran, ya que esa sería una actividad a realizar en el salón de clases.

c) Tercera sesión.

Se inició esta sesión, indicándoles que realizaran sumas de números enteros como las siguientes:

$$3+4=7$$
$$8+2=10$$

Se les explicó que en esta manera de realizar operaciones entre números, el papel del signo igual es el de enlazar las operaciones del lado izquierdo con el resultado en el lado derecho, y que es la forma más común en que se enseña a realizar operaciones aritméticas, desde la educación primaria.

Se les pidió que realizaran la operación del lado izquierdo del signo igual, y observaran que el resultado de ésta es idéntico al del lado derecho del signo igual, esto es,

$$\begin{array}{r} 3+4=7 \\ 7=7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8+2=10 \\ 10=10 \end{array}$$

Se les dice que estas, son dos formas de expresar el mismo número (la de la izquierda del signo igual es una forma implícita que se dá a través de operaciones).

Hechas estas observaciones, se les preguntó si esta forma de realizar operaciones en igualdades numéricas, era la única que se puede usar, es decir, operaciones del lado izquierdo y resultado en el lado derecho.

La mayoría de los estudiantes se manifestaron indecisos y solo algunos respondieron que no era la única forma, acto seguido, se les pidió que ejemplificaran; algunos respondieron con ejemplos como el siguiente:

$$7=3+4$$

Ante esta situación se planteó la pregunta más explícitamente. ¿Los números que están al lado derecho del signo igual, se pueden expresar en términos de operaciones, al igual que las del lado izquierdo?. La respuesta de la mayoría fue afirmativa, entonces se les pidió a algunos que dieran ejemplos desde su lugar, sin necesidad de pasar al pizarrón. Sus ejemplos fueron parecidos a los dos dados al inicio de la sesión. A la pregunta, ¿Las operaciones que intervienen pueden ser restas, multiplicaciones o divisiones? Su respuesta fue afirmativa, aunque les costo más tiempo dar ejemplos, ante tal situación se les plantearon los siguientes ejemplos:

$$\boxed{\begin{array}{c} 5+8=6+7 \\ 13=13 \\ 20+8=10\cdot 2+8 \\ 28=28 \\ 6\cdot 3+5=5\cdot 3+4\cdot 2 \\ 23=23 \end{array}}$$

Después de los ejemplos, se les pidió que elaboraran ellos mismos 10 ejercicios en el salón de clases. Al revisar estos, se pudo observar que la mayoría incluyó las operaciones de suma, resta, y multiplicación, pero no incluyeron la división, ni el uso de paréntesis.

También en el salón de clases de les pidió que resolvieran por equipos, los 14 ejercicios de la primera serie del material.

Bajo la misma óptica de mantener las identidades numéricas, se les presentó el siguiente ejemplo, en el que se omite un número en uno de los miembros de la igualdad numérica, dejando un cuadro vacio en su lugar:

$$\boxed{8\cdot \square + 10 = 30 + 20}$$

En este ejemplo, se les pidió que calcularan mentalmente ó por prueba y error, el número que va en el cuadro vacio. Fácilmente encontraron el número, que en este caso es el 5.

$$\boxed{\begin{array}{c} 8\cdot 5+10=30+20 \\ 40+10=30+20 \\ 50=50 \end{array}}$$

En otros ejemplos se incluyeron paréntesis y divisores en donde el número omitido aparece dentro del paréntesis o como numerador o divisor. En este tipo de ejercicios los alumnos mostraron más dificultad para encontrar el número omitido, sin embargo la mayoría pudo realizarlos.

$$3(2+\square)-6=10+8$$

$$\square/3=6$$

Cabe aclarar que en este momento, no se les dió la definición de ecuación, puesto que el material didáctico elaborado se enfocó principalmente hacia la construcción de los conceptos, a través de ir trabajando con el propio material.

De igual manera que en las sesiones anteriores, en todo momento se hizo que los estudiantes participaran, haciéndoles preguntas sobre la manera en que observaban y notaban la analogía entre el experimento de la balanza y el manejo de las igualdades numéricas, así hasta llegar al momento de introducir las incógnitas de manera natural y gradual, presentándoselas primero como cantidades desconocidas dentro de las igualdades, y después representándolas por medio de una literal.

d) Cuarta sesión.

Se siguió trabajando con igualdades; pero al inicio de esta sesión se les preguntó sobre las dificultades que tuvieron en los ejercicios de la tarea. Algunos estudiantes tuvieron dificultad en los ejercicios del siguiente tipo:

$$16/\square=1$$

$$8/\square-3=2-3$$

$$3(\square-5)=8\cdot 3$$

En el primer ejercicio, no recordaron que un número dividido por sí mismo es igual la unidad. En el segundo los confundió que el resultado fuera negativo y eso les bloqueo el buscar el número que va en el divisor. En el tercer ejercicio no se dieron cuenta que el número que debe resultar en la asociación debe ser el número 8, por el que multiplicando por 3 da el número 24, el mismo resultado que del lado derecho. No tuvieron claridad respecto a que el paréntesis aparte de ser signo de asociación, tambien tiene la función de ser factor, cuando hay otros números fuera del paréntesis, sin otro signo u operación.

En esta sesión, se les preguntó: ¿Que analogía podían establecer entre el experimento de la balanza y el manejo de este tipo de igualdades numéricas? La respuesta de la mayoría del grupo fue que en los resultados iguales en ambos miembros de la igualdad.

Se continuó la sesión con igualdades en donde el número omitido en los cuadros vacios debe ser el mismo, y se presenta repetidamente en el primero y segundo miembro, donde ya no resulta tan fácil encontrar el número desconocido por prueba y error, o mentalmente.

Para introducir un tratamiento a este tipo de igualdades, se les planteó el ejemplo siguiente:

En la identidad: $\boxed{5 \cdot \boxed{15} + 54 = 129}$

Donde se sabe que el resultado de las operaciones del lado izquierdo es equivalente al resultado del lado derecho, se les preguntó ¿ que sucedería si se resta a ambos miembros de esta identidad numérica uno de los números componentes de la identidad, digamos el 54? ¿Y si se divide a ambos miembros entre otro número componente de la operación del lado izquierdo, digamos el 5?

Al realizar los estudiantes las operaciones indicadas, pudieron observar que al restar 54 a ambos miembros de la identidad, se obtenía también una identidad, pero disminuida en 54 unidades, y que al dividir entre 5 a ambos miembros de la identidad numérica, se obtenía también una identidad aunque en una quinta parte de la identidad original.

Se les preguntó si esta forma de operar con identidades numéricas es análoga a lo que se hizo en el experimento con la balanza. La respuesta de los estudiantes fue afirmativa, puesto que con este ejemplo pudieron darse cuenta que la igualdad al igual que la balanza, mantuvo su equilibrio, al restarle o dividir por una misma cantidad, a ambos miembros. de la identidad.

Siguiendo con la identidad númerica:

$$\boxed{5 \cdot 15 + 54 = 129}$$

Se les preguntó, ¿qué pasaría sí se omite un número de la identidad, digamos el 15?¿cómo lo encontramos? Los alumnos contestaron que las estrategia sería el cálculo mental ó la prueba y el error. En este punto es cuando se les explica que, dado que se sabe que debemos encontrar el valor numérico desconocido, se propone representarlo con algún signo cualquiera siempre y cuando no sea un número, por ejemplo, cualquier letra del alfabeto (literal) a la que se le llamará incógnita. En este caso la literal, digamos la letra **w**, representará al valor numérico desconocido y entonces la tarea es emprender su búsqueda o cálculo:

$$\boxed{5 \cdot \mathbf{w} + 54 = 129}$$

Los estudiantes ya sabían que el resultado de la operación del lado izquierdo debe ser 129. Entonces se les indicó que restaran el número 54 en ambos miembros:

$$\boxed{\begin{array}{rcr} 5 \cdot \mathbf{w} + 54 & = & 129 \\ \underline{\quad -54} & = & \underline{-54} \\ 5 \cdot \mathbf{w} \quad & = & 75 \end{array}}$$

En la nueva identidad obtenida, los estudiantes captan que 5 · w, debe ser igual a 75, y por prueba y error, pueden encontrar el valor de w, sin embargo, se les indica que intenten encontrarlo dividiendo entre 5 a ambos miembros de la identidad:

$$\frac{5 \cdot \mathbf{w}}{5} = \frac{75}{5}$$

$$\mathbf{w} = 15$$

Sustituyendo:

$$5(15) = 75$$

$$5 = 75$$

$$\frac{5 \cdot 15}{5} = \frac{75}{5}$$

$$15 = 15$$

Los estudiantes puedieron observar, como esta forma de proceder los llevó logicamente a plantear despues de cada operación, igualdades equivalentes cada vez más elementales, hasta una última igualdad que les fue muy sencillo transformar en identidad, sustituyendo la incógnita por un valor que fue obvio detectar.

Por equipos se siguió trabajando con otros ejemplos similares, en donde el objetivo fue que trataran de encontrar el valor de la incógnita, siguiendo el mismo procedimiento del ejemplo, esto es, restando y dividiendo ambos miembros por cantidades iguales.

Se les hizo la observación de que esta forma de tratar las igualdades, es con la finalidad de que las transformaciones que se van dando al realizar una operación en la igualdad original den lugar a igualdades equivalentes pero más elementales, hasta plantear una última igualdad donde resulte sencillo sustituir el valor encontrado, transformándose esta última igualdad equivalente en una identidad numérica.

En este punto, se les dijo, que era necesario distinguir en los ejemplos tratados, **dos tipos de igualdades: la igualdad donde no existen incógnitas y que se llama identidad numérica, y la igualdad en la que existe incógnita y que se llama igualdad condicional o ecuación,** que esta condicionada al valor que se asigne a dicha incógnita, para poder transformarse en identidad numérica.

Se continuó la sesión trabajando con los ejercicios del material, en los que la incógnita se encontraba en un sólo lado de la igualdad y no se repetía, en unos ejercicios ésta se encontraba multiplicando, en otras sumando y en otras dividiendo.

Por cada tipo de igualdad presentada, inmediatamente se hacía participar al estudiante, haciendo ejercicios de resolución de problemas del tipo visto. En esta sesión resolvieron en equipo, 6 ejercicios en el salón de clase y se les dejó de tarea individual, los restantes 5 ejercicios.

e) Quinta sesión.

Al inicio de esta sesión, los alumnos manifestaron sus dudas, respecto a los ejercicios que se les dejaron de tarea, coincidiendo la mayoría en la dificultad de los siguientes ejercicios:

$10 - 4 = 6$	$10 - z = 6$
$3 \cdot \square + 4 = 5$	$3x + 4 = 5$
$5 - 3/\square = 4$	$5 - 3/\square = 4$

En el primer ejerció, porque cuando asignaron a **z** el valor -4, el resultado fue 14, y no 6, como en la igualdad de la izquierda, se corrige el problema recordándoles que no deben perder de vista que se tienen igualdades numéricas, por lo que 10-**z**, es una forma de expresar el número 6, por lo que a 10 se le tiene que restar el 4 para obtener el 6. En el segundo ejercicio, no supieron que hacer con el 3 que multiplica a la incógnita **x**. Se les dijo que recordaran como las transformaciones, a igualdades equivalentes se plantean no sólo sumando ó restando cantidades, sino también multiplicando o dividiendo, tal como se hizo en el experimento de la balanza. Aquí lo que desconcertó a los estudiantes fue que el resultado fuera en forma de fracción, y no de forma entera. Se les aclaró que las soluciones no tenían porque ser necesariamente números enteros, ya que esto depende de la estructura de la ecuación. La dificultad en el tercer problema, fue el que la incógnita apareció como denominador, y no supieron como resolverlo, entonces se les pidió que pensaran, que número restado al 5 daba como resultado el 4, dijeron que el 1. Y que número divide al 3 para dar como resultado el 1, no les quedó claro, hasta que se les dieron ejemplos numéricos: 20/20=2; 5/5=1, entonces se dieron cuenta que es el número 3. Se les hace la aclaración de que, la incógnita **x**, finalmente es un valor númerico por lo que en la ecuación se puede multiplicar, sumar, restar o dividir por ella misma.

Los ejemplos con que se siguió trabajando fueron aquellos en los que aparecía el paréntesis, el cual se les recuerda que no sólo sirve para multiplicar como lo manifestaron la mayoría de los estudiantes, sino que tambien sirve para agrupar o asociar. En estos ejemplos y ejercicios no tuvieron mayor problema ya que eran con números enteros, sin embargo, tuvieron mayor dificultad en ejercicios como el siguiente:

$$\boxed{0.2(4-3x) + 0.3x = 2.6}$$

Donde a diferencia de los ya tratados, se compone con números racionales, paréntesis y la incógnita repetida en el primer miembro de la ecuación. Como estaban acostumbrados a trabajar con números enteros, los desconcertaron los números racionales, sin embargo, despues de algunos ejemplos de sumas y multiplicaciones con este tipo de números, lograron entender.

Se les explica otra forma de tratar el problema, que es realizando una factorización utilizando la propiedad distributiva, sin embargo, esta forma fue más complicada para ellos, ya que era necesario recordarles la factorización por término común y la propiedad distributiva de los números reales.

Despues de trabajar con varios ejemplos con números racionales, se les dejó de tarea que realizaran los ejercicios correspondientes del material.

f) Sexta sesion.

En esta sesión se estudiaron los últimos ejemplos del material, los cuales constan de distintas variantes, en ellos se pidió a los estudiantes que calcularan el valor de la incógnita mentalmente o por prueba y error. Algunos dieron los valores correctos, sin embargo la mayor parte de ellos no logran por este método dar las soluciones adecuadas, además la estructura de los problemas es un poco diferente a los ejemplos tratados con anterioridad, y este hecho los confundió ya que, la incógnita en algunos casos aparece en ambos miembros de la igualdad, en otros es un denominador en uno o en ambos miembros, o se repite en alguno de los miembros, además de que no supieron que hacer cuando aparecían racionales.

Fue en el manejo de los denominadores de una ecuación racional, donde tuvieron más dificultades, ya que estos, hicieron difícil el aislamiento de la incógnita (esto es, la incógnita en la ecuación equivalente más elemental no se encontraba operando con ningún número o literal). Se les recordó que el manejo de estos problemas para la transfomación de los denominadores es lo que ellos hacián en aritmética, cuando sumaban o restaban fracciones, esto es que primero calculaban el MCM ó multiplicaban los denominadores para obtenerlo. En este tipo de ejercicios se debía hacer lo mismo, debido a que finalmente todos son números. Sin embargo, el MCM en el caso de las ecuaciones se utiliza para multiplicar ambos miembros de la igualdad, de tal manera que, la ecuación original se transforme en una equivalente en el momento en que se vayan realizando las divisiones entre el MCM y los denominadores, obteniendo cocientes enteros (sin denominadores).

Al final de cada ejemplo resuelto se pidió a los estudiantes que sustituyeran el valor de la incógnita en su ecuación original y que observaran como ésta se transformaba en una identidad numérica. Lo mismo podían hacer en todas las ecuaciones equivalentes, se obtendrían identidades numéricas pero con diferentes valores con respecto a la original, y esto fue producto de las operaciones realizadas (sumar, restar, multiplicar o dividir ambos miembros por un mismo número).

Al finalizar esta sesión se les dejó de tarea realizar, los ejercicios de la última serie del material.

g) Séptima sesión.

En esta última sesión se revisaron los ejercicios de la tarea y se observó que unos estudiantes resolvieron los ejercicios por prueba y error y otros por el procedimiento ilustrado en los ejemplos resueltos de el material. Sin embargo, los que intentaron por prueba y error no resolvieron los ejercicios cuyas soluciones eran números negativos, a diferencia de los que utilizaron el método ya visto en los ejemplos, los cuales si llegaron a los resultados adecuados.

Para despejar sus dudas, se siguió trabajando con cinco ejemplos más, con variantes diferentes a los ejemplos tratados en la sexta sesión, preguntando en cada momento a los estudiantes sobre los procedimientos a seguir en cada problema. Se detectó que tuvieron mayor dificultad en los problemas con denominadores con alguna expresión algebraica sencilla con dos términos, ya que les fue difícil calcular el MCM. Otro problema fue el manejo del signo negativo en fracciones cuyo numerador es una expresión agrupada con paréntesis. En estos casos se trabajó con una serie de ejemplos conjuntamente con los estudiantes en donde tenían que calcular el MCM de los denominadores algebraicos y también con más ejemplos en los que se utilizaban fracciones cuyo denominador estaba constituido por una expresión agrupada con paréntesis precedido por un signo negativo, en los que se les indicó que aplicaran la propiedad distributiva y la regla de los signos.

Al final de cada ejemplo se les pidió que sustituyeran el valor de la incógnita en la ecuación original, para transformarla en la identidad numérica correspondiente.

2) Grupo control.

a) Primera sesión.

Esta sesión se inició, escribiendo en el pizarrón la definición de igualdad entre conjuntos, ilustrándola con diagramas utilizando conjuntos de símbolos y conjuntos numéricos, tomando como referencia los textos que normalmente se recomiendan en este nivel. Aunque, no hubo gran interacción entre el maestro y los estudiantes, se atendió y aclaró en todo momento, cualquier duda que manifestaron sobre la exposición del tema, durante la clase.

El concepto de igualdad entre conjuntos se extendió a las igualdades numéricas o identidades numéricas como las siguientes:

$$\boxed{\begin{array}{c} 6+3=5+4 \\ 9=9 \end{array}}$$

Se dieron ejemplos de este tipo de identidades numéricas, con diferentes operaciones (suma, resta, división, y multiplicación) y se les hizo hincapie en que las operaciones realizadas en ambos miembros de la igualdad solo eran formas diferentes de expresar las mismas cantidades numéricas. Brevemente se les mencionó que operar con identidades es similar al hecho de establecer el equilibrio de una balanza, cuando se igualan los pesos en cada uno de sus platillos.

Despues de realizar algunos ejercicios con igualdades numéricas, se les explicó que también en álgebra existen igualdades entre expresiones algebraícas, algunas de las cuales se presentan como productos notables, factorizaciones y en operaciones con expresiones algebraicas enteras y fraccionarias, dándoles ejemplos como los siguientes:

$$\boxed{\begin{array}{l} (a+b)^2 = a^2+2ab+ b^2 \\ a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \\ x^2-2x+1 = (x-1)^2 \end{array}}$$

Se les plateó que le dieran un valor numérico a las literales y que sustituyeran dichos valores en esas identidades. Explicándoles, que para cada valor de las literales las identidades algebraícas se transforman en identidades numéricas:

Sí $a = 2$; $b = 4$ entonces, sustituyendo en la primera expresión:

$$\boxed{\begin{aligned} (2+4)^2 &= 2^2+2(2\cdot 4)+4^2 \\ 6^2 &= 4+16+16 \\ 36 &= 36 \end{aligned}}$$

Se les mostró que con otros valores para las literales, las identidades numéricas se seguían obteniendo, al realizar las operaciones en este tipo de expresiones. Sin embargo, se les mencionó que existe otro tipo de expresiones algebraicas, como la siguiente:

$$\boxed{2x + 3 = x + 1}$$

Las cuales no son identidades algebraicas, pero son igualdades entre dos expresiones algebraicas.

Se le da el mismo tratamiento a este tipo de ejemplos y se otorga un valor arbitrario a la literal,

Por ejemplo, sí $x = 2$, se obtiene:

$$\boxed{\begin{aligned} 2(2)+3 &= 2+1 \\ 4+3 &= 3 \\ 7 &\neq 3 \end{aligned}}$$

Se les pidió que observaran que con este valor asignado a **x** no se obtiene una identidad numérica, se dieron otros valores a la literal y sucedió lo mismo. Se les explicó que cuando se le asigna a **x** el valor de -2, se obtiene una identidad numérica y ningún otro valor diferente transforma la igualdad en una identidad numérica. De todos estos intentos se concluyó que la igualdad está condicionada a transformarse en identidad sólo bajo un solo valor de la literal. Bajo este esquema se dan otros ejemplos similares.

Al finalizar esta sesión se les dejó como tarea buscar cinco identidades algebraicas parecidas a los ejemplos dados y que asignaran valores a las incógnitas, y que además observaran que tipo de igualdades se transforman: en identidades numericas para todos los valores de la literal (incógnita) y cuales se transforman en identidades sólo para un valor de la incógnita.

b)Segunda sesión:

Se inicia revisando la tarea de algunos estudiantes, y lo que se observó es que algunas identidaes algebraicas las equivocan, pero la mayor parte de sus ejercicios los realizaron adecuadamente. Se les indica que en esta sesión, solo se trabajará con expresiones que se transforman en identidades para un único valor de la incógnita, a las cuales se les llamará: **igualdades condicionales** o simplemente **ecuaciones lineales.**

Después, se les dieron ejemplos de ecuaciones donde la incógnita aparece en el primero y segundo miembros, con coeficientes enteros, sin paréntesis y sin denominadores, como los siguientes:

$$\boxed{\begin{array}{l} 2x + 3 = x + 8 \\ 2x - 1 = x - 4 \end{array}}$$

Por prueba y error se van asignando diversos valores a la incógnita, tanto números positivos, como negativos, enteros y fraccionarios, hasta encontrar uno que la transforme en una identidad numérica.

Finalmente se les deja de tarea que en base a los ejemplos explicados, busquen cinco ejercicios de este tipo de ecuaciones y traten de encontrar el valor de la incógnita por prueba y error.

c) Tercera sesión.

Se revisa la tarea de algunos estudiantes y se observa que no dan suficientes valores a la incógnita y por lo tanto no obtienen identidades numéricas, además plantearon ejercicios como el siguiente:

$$\boxed{x - 1 = x + 5}$$

En donde se explica lo siguiente: al dar valores numéricos diversos a la incógnita se observa que ninguna la transforma en identidad y queda la duda planteada ¿existe algún número real que la transforme en identidad? Se les indica que este tipo de ejemplos se retomaran más adelante.

Se sigue la sesión con la explicación de las propiedades de la igualdad: Si $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, entonces, si se suma, resta, multiplica o divide a ambos miembros por un mismo numero ($\neq 0$ en el caso de la división) la igualdad se sigue conservando. Dichas propiedades se les ilustraron primero con números y posteriormente con ecuaciones:

$$\boxed{\mathbf{x} + 1 = 6}$$

Donde se parte de la idea de que puede existir un número real tal que al sustituirlo por la incógnita, la transforme en una identidad numérica. Bajo este contexto ambos miembros de la igualdad son diferentes formas de expresar el mismo número. Esto es, se tiene una igualdad condicional. Si se resta a ambos miembros de esta igualdad el número 1 se obtiene después de realizar algunas operaciones lo siguiente:

$$\boxed{x + 1 - 1 = 6\text{-}1 \qquad \mathbf{x} = 5}$$

La igualdad obtenida en este caso es muy elemental ya que para transformarla en identidad basta asignar a la incógnita **x**, el número 5, esto es,

$$\boxed{\text{si } x = 5\text{, entonces } 6 = 6}$$

Se les explica que el valor de la incógnita no sólo se puede calcular por prueba y error, sino también al aplicar las propiedades de la igualdad para transformar la ecuación original en otras equivalentes más elementales, esto es, que tengan menos operaciones, hasta obtener una, la más elemental de todas en la cual es obvio el valor que se debe asignar a la incógnita.

Una aclaración pertinente fue que a una ecuación se puede sumar, restar, multiplicar o dividir, por el mismo número (puede ser cualquiera, **excepto el cero),** y la igualdad se sigue conservando, sin embargo, para el objetivo que se persigue de calcular el valor adecuado de la incógnita, estos números no son arbitrarios y dependen de los valores numéricos o literales que constituyen la ecuación.

Siguiendo el ejemplo anterior se les pide que resuelvan algunos ejercicios y se les dejan algunos otros de tarea.

d) Cuarta sesión:

Se revisó la tarea de algunos estudiantes en clase, y se observó que presentaban dificultades en los problemas donde aparece la incógnita en ambos miembros y con signo negativo. Ellos sabían que la incógnita debía aparecer en un sólo miembro de la igualdad, sin embargo, el signo negativo les causo confusión. Se les explicó que la incógnita es hasta ciento punto un valor numérico implícito y por lo tanto tambien se puede usar para sumar, restar, multiplicar y dividir a ambos miembros de una igualdad. Se les resuelven en el pizarrón ejemplos para despejar sus dudas.

Despues de los ejemplos, se les da el concepto de ecuaciones equivalentes de la siguiente forma: las ecuaciones que se transforman en otras al aplicar alguna de las propiedades de la igualdad se les conoce como ecuaciones equivalentes y en un contexto más general, dos ecuaciones son equivalentes si tienen la misma solución.

Se resuelven algunos ejemplos en el pizarrón, de ecuaciones donde el valor de la incógnita es una fracción y otras donde se utilizan paréntesis y números fraccionarios en uno o en los dos miembros.

Algunos alumnos plantean dudas en el uso de los signos que anteceden al paréntesis, y en las ecuaciones con fracciones. Se explican los ejemplos en base a la propiedad distributiva y en las reglas de los signos. En el caso de las fracciones se les plantea el cálculo del MCM y posteriormente multiplicar por este ambos miembros de la igualdad, con la finalidad de transformar la ecuación en una equivalente sin denominadores.

Al finalizar la sesión se les dejaron de tarea ejercicios similares a los ejemplos resueltos en clase.

e) Quinta sesión.

En esta sesión, al revisar las tareas, se pudo observar que los alumnos en su mayoría presentaban errores en el manejo de los signos, y en el cálculo del MCM, por lo que se siguió resolviendo ejemplos hasta que les quedará más claro y se les explicó que si calculaban el MCM de los términos numéricos y lo multiplicaban por la literal que lo conforma, aseguraban así el MCM de todos los denominadores. Se insistió en el manejo de la regla de los signos.

f) Sexta y séptima sesión.

En estas dos últimas sesiones se insistió con ejemplos de ecuaciones racionales con denominadores literales, conformados por expresiones algebraicas binomiales simples. Se trabajo con este tipo de ecuaciones durante las dos sesiones, porque fue con las que tuvieron más dificultad para resolverlas.

Se les reitero que en los ejercicios donde aparecieran diferencia de cuadrados, se tenia primero que factorizar para posteriormente calcular el MCM.

Retomando el ejemplo planteado en la tercera sesión:

$$\boxed{x - 1 = x + 5}$$

Para resolverlo se asignaron diversos valores a la incógnita a fin de que observaran que con ninguno de los valores asignados se obtenía una identidad numérica, sino que se obtenía una desigualdad numérica. Con la resolución de otros ejemplos se demostró que este tipo de "igualdades" no tienen solución y se llaman **desigualdades.** También en los ejemplos pudieron notar que al despejar la incógnita, esta "desaparece" quedando una desigualdad.

Al final de la sesión se les dejaron de tarea, ecuaciones parecidas a las de los ejemplos resueltos en clase, en un problemario de 50 ejercicios, de los cuales se les pidió que resolvieran como mínimo la mitad. (Anexo VI)

Al finalizar las sesiones con los alumnos de los grupos experimental y de control, se les aplicó un examen final. ANEXO III.

Dicho examen estuvo conformado por cuatro partes:

La primera con una serie de ocho reactivos, cuyos contenidos trataron de observar si el estudiante sabía distinguir entre igualdades condicionales, incondicionales o igualdades numéricas; la segunda parte compuesta por cinco reactivos, tendientes a medir si el estudiante sabía cuando una igualdad es una ecuación y cuando no lo es; la tercera parte, dirigida a medir si el estudiante sabe las condiciones bajo las cuales dos ecuaciones son equivalentes o no; la cuarta parte esta conformada por cuatro ecuaciones, la primera de las cuales es una ecuación sin denominadores y sin paréntesis, con la incógnita en ambos miembros de la igualdad y con coeficientes enteros, la segunda ecuación tiene paréntesis e incógnita en ambos miembros de la igualdad, así como coeficientes enteros, la tercera ecuación, es con fracciones, con la incógnita en el numerador y con denominadores numéricos, la cuarta ecuación también es fraccionaria, pero en este caso la incógnita aparece tanto en el numerador como en el denominador y forma una expresión que es factorizable por término común numérico.

RESULTADOS.

Los resultados obtenidos por el grupo experimental y el grupo control en el examen de diagnóstico que se les aplicó, con el objetivo de observar el nivel de sus conocimientos aritméticos y algebraicos previos, fueron los siguientes:

El grupo 19 (grupo control), obtuvo una media de aciertos del 23.71% y el grupo 15 (grupo experimental) de 23.25%, ambos de un total de 54 reactivos. Se puede inferir de estos porcentajes, que los estudiantes de los dos grupos no mostraron gran diferencia respecto a sus conocimientos matemáticos previos, aunque estuvieron por debajo de la media normal, lo que quiere decir que estaban en igualdad de conocimientos previos, antes de iniciar el experimento.

Respecto a los conocimientos evaluados con este examen, pudo observarse que los estudiantes del primer año de preparatoria mostraron, además de los conocimientos aritméticos elementales, un manejo de ciertos conocimientos algebraicos más amplios. Esta "mejoría" con relación a los estudiantes de tercero de secundaria (pilotaje), se debió a que en el momento de implementar la investigación, ya habían tenido en el semestre inmediato anterior, el curso de Álgebra I.

Respecto a la metodología, se observó que al realizar el experimento de la balanza, desde un punto de vista físico con el grupo experimental, para aplicar las propiedades de la igualdad en la resolución de ecuaciones lineales, fue un procedimiento recomendable ya que, el estudiante percibió objetivamente el momento en que se estableció el equilibrio de la balanza, que fue cuando hubo igualdad de los pesos en ambos platillos de ésta. Y esta metáfora del modelo de la balanza se extendió a la resolución de ecuaciones lineales, en cuanto a sumar, restar, multiplicar y dividir por un mismo número a ambos miembros de una ecuación, para mantener la igualdad. De igual manera fue importante que los alumnos participaran activamente durante las sesiones, y el trabajar directamente con el material didáctico elaborado, para entender con más facilidad la ecuaciones. La metodología tradicional aplicada con el grupo control, dió como resultado que en la resolución de las ecuaciones tuvieran mayores dificultades que el grupo experimental.

En cuanto al procedimiento planteado para obtener el valor de la incógnita, mediante una serie de transformaciones de la ecuación original a ecuaciones equivalentes más elementales, se observó que las ecuaciones con fracciones, son los casos en donde los estudiantes de ambos grupos (experimental y control) presentaron mayor dificultad para resolver, aunque la media de aciertos del grupo experimental fue superior a la media del grupo control, no fue claro para ambos grupos el porqué se debían transformar las ecuaciones con denominadores a ecuaciones equivalentes sin denominadores. Para eliminar este problema fue necesario recalcarles la importancia de calcular el mínimo común múltiplo de los denominadores, ya que el cálculo de este es lo que más se les dificultó.

Los aciertos y errores obtenidos en el exámen final, por los 37 alumnos del grupo experimental (grupo 15), y los obtenidos por los del grupo control, se presentan detalladamente en la tabla 1 y 2, considerando el número de alumnos que contestaron acertadamente y los que contestaron erroneamente en cada inciso de los bloques de preguntas. También se muestra el porcentaje de alumnos que contestaron de manera correcta, y la diferencia entre los que acertaron y los que no lo hicieron.

GRUPO de 37 alumnos	Bloques de PREGUNTAS E INCISOS	No. de alumnos con respuestas correctas.	% de alumnos con respuestas correctas	Número de alumnos con respuestas incorrectas	Diferencia entre número de alumnos con respuestas correctas con los de respuestas incorrectas.
EXPERIMENTAL	BLOQUE 1				
	1a	22	59	15	7
	1b	26	70	11	15
	1c	24	65	13	11
	1d	20	54	17	3
	1e	33	89	4	29
	1f	24	65	13	11
	1g	35	95	2	33
	1h	31	84	6	25
	BLOQUE 2				
	2a	34	92	3	31
	2b	35	95	2	33
	2c	23	62	14	9
	2d	27	73	10	17
	2e	14	38	23	-9
	BLOQUE 3				
	3a	28	76	9	19
	3b	26	70	11	15
	BLOQUE 4				
	4	36	97	1	35
	BLOQUE 5				
	5a	37	100	0	37
	5b	37	100	0	37
	5c	37	100	0	37
	5d	37	100	0	37
	5e	35	95	2	33
	5f	36	97	1	35
	5g	36	97	1	35
	5h	37	100	0	37
	BLOQUE 6				
	6a	36	97	1	35
	6b	36	97	1	35
	6c	29	78	8	21
	6d	17	46	20	-3

TABLA 1. Resultados obtenidos por el grupo experimental, en el examen post experimento.

Grupo de 40 alumnos	Bloques de preguntas e incisos.	Número de alumnos con respuestas correctas	% de alumnos con respuestas correctas	Número de alumnos con respuestas incorrectas	Diferencia entre el número de alumnos con respuestas correctas con los de respuestas incorrectas.
CONTROL	BLOQUE 1				
	1a	20	55	20	0
	1b	36	90	4	32
	1c	31	78	9	22
	1d	26	65	14	12
	1e	40	100	0	40
	1f	28	70	12	16
	1g	39	98	1	38
	1h	31	76	9	22
	BLOQUE 2				
	2a	31	77	9	22
	2b	33	82	7	26
	2c	35	88	5	30
	2d	26	65	14	12
	2e	34	85	6	28
	BLOQUE 3				
	3a	29	73	11	18
	3b	26	65	14	12
	BLOQUE 4				
	4	29	73	11	18
	BLOQUE 5				
	5a	38	95	2	36
	5b	37	93	3	34
	5c	40	100	0	40
	5d	38	95	2	36
	5e	38	95	2	36
	5f	32	95	8	24
	5g	36	90	4	32
	5h	40	100	0	40
	BLOQUE 6				
	6a	21	53	19	2
	6b	23	58	17	6
	6c	15	38	25	-10
	6d	5	39	35	-30

Tabla 2. Resultados obtenidos por el grupo control, en el examen postexperimento

ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE LOS RESULTADOS.

Para comparar los resultados obtenidos en el examen por los estudiantes, en los dos grupos (experimental y control) se hizo un análisis de varianza (Camacho, 1992) de los aciertos por inciso, de cada uno de los alumnos.

En la tabla 3, se presenta un resumen de los resultados del análisis de varianza (ver glosario, anexo V), para el total de reactivos formulados en el examen post experimento, aplicado a los grupos experimental y de control. La variable tratada fue la diferencia entre el número de alumnos con respuestas correctas, por inciso y por grupo.

TABLA 3

FUENTE	Grados de libertad	Suma de cuadrados (varianzas estimadas)	cuadrado medio	Valor de F	probabilidad Pr>F
MODELO	1	20.6428	20.6428	0.35	0.5546
ERROR	54	3152.7857	58.3849		
Total	55	3173.4285			

En la tabla 4, se presenta el resumen de los resultados del análisis de varianza, de las primeras 5 preguntas del examen (Bloques 1 al 5 en Tablas 1 y 2), consideradas como preguntas teóricas. La variable tratada fue el número de alumnos con respuesta correcta por inciso por grupo.

TABLA 4

FUENTE	Grados de libertad	Varianza estimada	Cuadrado medio	Cociente F	Probabilidad. Pr >F
MODELO	1	161.33	161.33	4.59	0.037*
ERROR	46	1618.58	35.18		
Total corregidas.	47	1779.91			

*Significativo a un nivel de 0.05.

En la tabla 5, se presenta un resumen de los resultados del análisis de varianza, de la pregunta número 6 del examen (Bloque 6 en las tablas 1 y 2), considerada como práctica (resolución de ecuaciones). La variable tratada fue, el número de alumnos con respuesta correcta por inciso y por grupo.

TABLA 5

FUENTE	Grados de libertad	Varianza estimada	Cuadra-do medio.	Cociente F	Probabili-dad. Pr > F
MODELO	1	364.5	364.5	5.0	0.066*
ERROR	6	437.0	72.83		
TOTAL CORREGI-DAS.	7	801.5			

*Significativo a un nivel de 0.1

DISCUSION DE RESULTADOS

De la tabla 3, puede inferirse que el uso del material potencialmente significativo elaborado para el tema de ecuaciones lineales, y el experimento de la balanza como un referente metafórico, no produjeron un efecto significativo en los resultados obtenidos por los alumnos del grupo experimental en la totalidad del examen, ya que existió mínima diferencia a su favor, con respecto a los resultados obtenidos por los alumnos del grupo control, que no tuvieron estos referentes.

De la tabla 4 puede inferirse que no existe una diferencia significativa a favor del grupo experimental, en las respuestas a las 5 primeras preguntas, teoricas (Bloque 5 de las tablas 1 y2). Por lo que se deduce que puede ser significativa a favor del grupo control, ya que, su promedio de respuestas correctas fue superior al del grupo experimental.

En la tabla 5 se presenta el análisis de varianza, para la comparación de las respuestas a los incisos de la sexta pregunta del examen, correspondiente a la resolución de ecuaciones, (Bloque 6 de las tablas 1 y 2) de la que puede inferirse que hubo una diferencia significtiva (nivel 10%) a favor del grupo experimental. Esto indica que la aplicación del material didáctico elaborado, el modelo de la balanza y la participación activa de los estudiantes produjeron un mejor aprendizaje y resolución de las ecuaciones, con respecto al grupo control que no tuvo estos referentes

En la resolución total del examen no hubo diferencia significativa entre un grupo y otro (Tablas 1, 2 y 3). Una posible explicación es que hubo una compensación entre las respuestas a las preguntas de teoría (Bloques 1 a 5 de las tablas 1 y 2), y las de la pregunta 6 (Bloque 6 de las tablas 1 y 2), ya que el grupo control, obtuvo más aciertos en las preguntas de teoría que en las de resolución de ecuaciones, mientras que el grupo experimental muestra un efecto contrario, obtuvo más aciertos en la resolución de ecuaciones, que en las preguntas teóricas.

Analizando las respuestas de los alumnos de ambos grupos en el examen por cada pregunta: en los incisos del bloque 1,(Tablas 1 y 2) el número de alumnos con respuestas correctas en el grupo control fue mayor (5 alumnos en promedio) que los del grupo experimental, porque en el grupo control se reforzó con ejemplos, el concepto de igualdad de los tipos señalados en la pregunta. Y en el grupo experimental no se dieron ejemplos de igualdades entre conjuntos e identidades incondicionales, puesto que la metodología de enseñanza fue diferente en el grupo experimental, presentando material potencialmente significativo para el estudiante, con el objetivo de que por el mismo fuera construyendo el concepto de ecuación, evitando en este caso presentarle "conceptos o definiciones" de forma aislada, puesto que con esto se tiende a esquematizar y a memorizar el conocimiento, como se dió el caso con el grupo control.

En las respuestas a los incisos del bloque 2 (Tablas 1 y 2), el número de alumnos del grupo experimental con respuesta correcta fue mayor en tres de los 5 incisos. Es interesante hacer notar que en dichos incisos se presentan dos desigualdades y que los estudiantes del grupo control no tuvieron claro en que condiciones se dan igualdades y en cuales no. Los alumnos del grupo experimental, en este caso fueron más acertados. En el último inciso de este mismo bloque, los alumnos del grupo control tuvieron más aciertos , puesto que sabían que para distinguir entre una ecuación condicional y una incondicional, tenian que sustituir un valor arbitrario y así observar que no se transformaban en identidades numéricas. Este grupo aplicó simplemente el esquema enseñado por el profesor. Los alumnos del grupo experimental tuvieron menos aciertos porque para hacer la distinción entre ecuación condicional e incondicional fue necesario que de acuerdo a lo aprendido con el material trabajado en el experimento, llevaran acabo todo un procedimiento, el cual se pudo hacer con los ejercicios anteriores, más no en este último, cuya dificultad estribó en la presencia de denominadores, lo cual fue determinante para no llegar al grado de respuesta dada por el grupo control.

En el tercer bloque de incisos correspondiente a la pregunta tres (Tablas 1 y 2), los resultados obtenidos por los alumnos de ambos grupos fueron muy aproximados, esto se explica porque en el grupo control se trabajó con varios ejemplos para que entendieran cuando dos ecuaciones son equivalentes, ya sea despejando la incógnita de ambas y cerciorándose de que el valor de ésta es el mismo para ambas ecuaciones, u obteniendo una a partir de la otra, por medio del procedimiento de sumar, restar, multiplicar o dividir ambos miembros de la igualdad por la misma cantidad. En el grupo experimental el concepto de ecuaciones equivalentes, se obtuvo como parte del proceso de aislar el valor de la incógnita, hasta llegar a una ecuación equivalente final, pero muy sencilla de resolver, en donde la incógnita se iguala con un valor numérico final.

En el último bloque de cuatro incisos (Bloque 6 en Tablas 1 y 2), en los que hay que resolver ecuaciones lineales de diversos tipos, la diferencia en las respuestas correctas de los alumnos del grupo experimental con los del grupo control, fue a favor de los del experimental. En la ecuación del primer inciso que corresponde a una ecuación entera, sin paréntesis y sin denominadores y con la incógnita en ambos miembros de la ecuación, 36 de 37 alumnos del grupo experimental la resuelven correctamente y del grupo control 21 de 40 alumnos también la resuelven.

El segundo inciso de este último bloque de problemas (Tablas 1 y 2), corresponde a una ecuación lineal entera con paréntesis en ambos miembros de la ecuación, y con más de una ocurrencia de la incógnita en ambos miembros, a diferencia del problema anterior donde sólo aparece una vez, tanto en el primer miembro de la ecuación como en el segundo. En este problema el número de respuestas correctas fue a favor del grupo experimental, 36 de los 37 alumnos lo resolvieron correctamente; en el grupo control 23 de los 40 alumnos también lo resolvieron.

La diferencia de resultados en este inciso, la estableció el menor número de errores cometidos por los alumnos el grupo experimental en el tratamiento de la incógnita, ya que, cuando transformaron el paréntesis obtuvieron una ecuación equivalente con dos términos semejantes en el primer miembro y un término semejante en el segundo, aislando la incógnita y haciendo explícito su valor numérico. Los alumnos del grupo control tuvieron más errores porque no supieron agrupar los términos semejantes ni tampoco aislar la incógnita. No tuvieron una idea clara del papel que juega ésta, al no considerarla como un número que no es explícito al inicio, pero que se hace explícito, en el momento de establecer la última ecuación equivalente.

El tercer problema del bloque 6 (tablas 1 y 2), es una ecuación racional con denominadores numéricos enteros, la incógnita aparece en el primer miembro, en cada una de las dos fracciones que lo conforman. Este problema lo resuelven correctamente 29 alumnos del grupo experimental, y 15 alumnos del grupo control. Los del grupo experimental marcaron la diferencia de aciertos a su favor porque tuvieron mayor facilidad en el manejo de los denominadores, paréntesis, signos y términos semejantes, y sobre todo en que sabían, que a través de ecuaciones equivalentes se puede ir transformando la ecuación original, hasta llegar a una que sea la más sencilla de todas, y en la cual se puede asignar fácilmente el valor de la incógnita, y que ésta es un número que se hace explícito hasta esa última ecuación equivalente.

El cuarto problema del bloque 6, (tablas 1 y 2 correspondió a una ecuación también racional, pero en este caso las fracciones que la formaban tenían expresiones factorizables por término común (binomios). Este problema, 17 alumnos del grupo experimental lo resolvieron correctamente, y del grupo control sólo 5 alumnos puedieron resolverlo, aunque existió una diferencia en las respuestas correctas a favor del grupo experimental, los alumnos de ambos grupos tuvieron dificultades para resolver este tipo de problema. El factor fundamental de sus dificultades en la resolución de éste, fue que no supieron factorizar los denominadores para calcular el MCM.

Los alumnos del grupo control tuvieron en promedio un 86% de respuestas correctas en las preguntas que se pueden considerar como teóricas (conceptos o definiciones), y los del grupo experimental un 79 %. Los alumnos del grupo control obtuvieron una diferencia de respuestas correctas a su favor de un 7% , esto se puede atribuir a que en el grupo control se puntualizó más en este tipo de aspectos de definición, alternados con ejemplos, para ilustrarlos, debido a ello los estudiantes del grupo control, repitieron estos esquemas en el momento que identificaron una similitud con los ejercicios el examen. En el grupo experimental no se puntualizó de manera especial sobre alguna definición, ya que el objetivo del material aplicado no fue el de la puntualización de definiciones, más bien en este, se presentaron las ecuaciones en una forma más integral, de tal manera que los conceptos se fueran construyendo, tomando en cuenta el orígen aritmético de las ecuaciones, la metáfora de la balanza y la participación activa del alumno.

En el último bloque del examen (Bloque 6), los alumos del grupo experimental obtuvieron en promedio un 79.5% de respuestas correctas y los del grupo control obtuvieron en promedio sólo un 47%, la diferencia fue a favor del grupo experimental en un 32.5%. Esta diferencia indica que el procedimiento utilizado por los alumnos del grupo experimental, para resolver las ecuaciones fue con los referentes ya mencionados, con los que trabajó durante las sesiones y que les dejaron un mejor entendimiento sobre el tratamiento de la incógnita, para la resolución correcta de las ecuaciones. Es en estos resultados donde puede observarse que los alumnos del grupo experimental obtuvieron un aprendizaje más significativo. Hecho que quedó demostrado en los resultados obtenidos por este grupo, en el examen (el mismo examen postexperimento) que se les aplicó tanto a éste como al de control, un mes después de finalizado el experimento, donde pudo observarse que retuvieron más el conocimiento sobre la resolución de ecuaciones, que los del grupo control. (ANEXO VI.)

CONCLUSIONES

De los resultados obtenidos y discutidos en los párrafos anteriores, se puede concluir lo siguiente:

En la resolucion de los problemas del bloque 6 (tablas 1 y 2), se puede observar que los alumnos del grupo experimental, obtuvieron mejores resultados, la diferencia de resultados entre las respuestas de los alumnos de ambos grupos, quizá se deba a que los del grupo experimental resolvieron las ecuaciones, trabajando con referentes significativos: con el modelo de la balanza, el material didáctico elaborado y su participación activa, y de que aprendieron la resolución de las ecuaciones, desde sus orígenes aritméticos hasta llegar al planteamiento algebraico, pasando por la equivalencia de las ecuaciones. La concepción de ecuación condicional y de ecuación equivalente a que llegaron, les permitió una claridad en éstas, que se reflejó en la destreza para hacer explícito el valor de la incógnita, sabiendo además que la incógnita representada por una literal cualquiera, finalmente es un número determinado, que en el momento de sustituirlo en al ecuación la transforma en una identidad numérica.

En los resultados obtenidos por los alumnos de ambos grupos, en el segundo examen (el mismo que se les aplicó al finalizar las sesiones del experimento), realizado un mes después de la aplicación del primero, se puede observar que los alumnos del grupo experimental son más consistentes en sus respuestas, ya que, mantienen su promedio de respuestas correctas obtenido en el primer examen, a diferencia del grupo de control el cual tiende a bajarlo considerablemente, tanto en las preguntas consideradas teóricas, como en la resolución de ecuaciones. Estos resultados muestran que el grupo experimental retuvo por más tiempo el conocimiento adquirido, por lo que, se puede inferir que dicho conocimiento es significativo.

Al trabajar con material potencialmente significativo el tema de ecuaciones lineales y utilizar situaciones metafóricas, como el experimento de la balanza para la resolución de éstas como medio para el aprendizaje significativo,así como la participación sistemática del estudiante en discusión colectiva e individual sobre el tema, invariablemente propicia un aprendizaje significativo. Una enseñanza cimentada en un proceso de aprendizaje significativo, puede tener resultados más positivos a largo plazo, debido a que ayuda a entender mejor los conceptos y no a mecanizarlos.

El aprendizaje significativo, que tiene como base el modelo cosntructivista, rompe con el esquema informador-receptor; y pone en juego la capacidad del profesor para investigar e idear formas alternas de transmitir el conocimiento, de tal manera que el estudiante construya y comprenda por si mismo los conceptos fundamentales del saber matemático, por lo que este modelo podría ser aplicable para la enseñanza de las ecuaciones.

Por lo mencionado en los párrafos anteriores se concluye, que no hay evidencia para rechazar la hipótesis de que el aprendizaje de la resolución de ecuaciones se mejora con la ayuda de material potencialmente significativo, del modelo de la balanza y la participación activa del alumno. A diferencia de que con la presentación del tema, con el referente del supuesto que el estudiante posee los conocimientos matemáticos previos según el curriculum escolar, al estilo de la gran mayoría de los libros de texto, pero sin la participación activa y sistemática del estudiante, difícilmente se puede propiciar un aprendizaje que sea significativo.

Además de que los métodos expositivos de clase por parte del profesor, como única metodología de enseñanza, propician en el estudiante memorización de corto alcance, y mecanización en la solución de problemas de ecuaciones lineales, lo que trae como consecuencia, un aprendizaje sin significado, el cual es olvidado a corto plazo.

LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN.

La investigación se realizó en horario normal para la clase de matemáticas, esto limitó el estudio de variantes más complicadas de ecuaciones fraccionarias con denominadores algebraicos factorizables, por lo que este aspecto fue poco explorable y factor de fuentes de error en algunos de los problemas del último bloque en el examen. Fundamentalmente porque en el programa de estudio, el tiempo dedicado a este tema estuvo limitado a 10 horas, y el propósito de la investigación se limitó a estas condiciones en el tiempo normal de clases.

En cuanto al uso de la balanza como un modelo para la enseñanza de las ecuaciones, la limitante fue que no hay manera de representar cantidades negativas, por lo que fue necesario pasar por un proceso de abstracción de las operaciones, lo mismo sucede para la representación de fracciones, las cuales físicamente no pueden ser representadas en su totalidad, por lo que fue necesario pasar por dicho proceso.

ANEXOS.

Anexo I.
Examen de Diagnóstico.

a) Números reales:

1.- ¿ Cuál de los siguientes números no es entero?
a) 0 b) 3 c) ½ d) 4

2.- El inverso multiplicativo de 5 es :
$\square$

3.- Si a/b y c/d , son números racionales (fracciones), entonces el algoritmo de la suma se expresa como :
$a/b + c/d = \square$

4.- ¿Cuál de las siguientes operaciones no está definida para los números reales?
a) 3+0 b) 3·0 c) 0/3 d) 3/0 e) 0-3

5.- La propiedad a + b = b + a , es conocida como la propiedad :
_______________ para la suma de los números reales.

6.- la propiedad del elemento neutro para la suma de números reales, se ilustra como:

$\square + a = a$

7.- a + (b+c) =(a+b)+c, se conoce como:
La propiedad ________________ para la suma de los reales.

8.- La propiedad distributiva de los números reales se ilustra como:
$a \cdot (\square + c) = a \cdot b + a \cdot \square$

9.- $a \cdot \square = a$, se conoce como; la propiedad del elemento _______ para la multiplicación de números reales.

10.- $a \cdot \square = b \cdot \square$ es conocida como la propiedad ________ ____________ para la multiplicación de números reales.

11.- De los siguientes números, indique cuál es primo:

a) 6 b) 11 c) 15 d) 39 e) 51

12.- Obtener el resultado de la operación : 6 - (-3)= $\square$

13.- Divida 10.342 entre 2.61 (sin usar calculadora) ________

14.- Resolver sin calculadora la siguiente operación: 93.6/3=____

15.- 2/3 / 1/6 = _____

16.- 3 1/9 - 1/3 = _____

17.-Simplifica a la mínima expresión las siguientes fracciones:

3/15=___ 25/45=___ 10/12=____ 24/39=____

18.- ¿Cuál es el mínimo común denominador (mínimo común múltiplo), de las siguientes fracciones.?

MCD (1/105, 1/70) =_____________

19.- Encontrar $\sqrt{324}$ =____________

20.- $(1.3 \times 10^6) \cdot (1.1 \times 10^4) = 1.46 \times$ ___________

21.- ¿En que forma el conjunto de números enteros difiere de los números naturales?_____________________________

22.- Escribe los factores primos de 120.__________

23.- Si el numerador y denominador de una misma fracción son multiplicados por el mismo número:

a) La fracción se hace más pequeña
b) La fracción permanece con el mismo valor
c) La fracción incrementa su valor
d) El resultado dependerá de si el valor del número es mayor ó menor que 1.

24.- Si tres fracciones tienen denominadores que son primos relativos, el minimo común denominador, es igual al:

a)Denominador más grande

b) Denominador más pequeño

c) Producto de todos los denominadores

d) La suma de los tres denominadores

25.- Si el valor del númerador y del denominador de una fracción son iguales, el valor de la fracción es:

a) Mayor que 1

b) Menor que 1

c) Igual a 1

d) Depende del valor del numerador.

26.- Si el punto decimal de un número es movido tres lugares a la derecha, entonces estamos:

a) Dividiendo el número entre 1000

b) Dividiendo el número entre 100

c) Multiplicando por 3

d) Multiplicando por1000

27.- ¿Cuál es el número que falta, en la siguiente operación:

24+76= $\square$

a) 24 b) 34 c) 52 d)100 e) Ninguno de ellos

28.- ¿Que número falta en 6 x 15 = $\square$ x 6

a) 9 b) 15 c) 90 d) 540 e) Ninguno

29.- Encuentra el número que falta en, 108/12 · $\square$ =108

a) 1 b) 9 c) 10 d)12 e) ninguno

30.- Completa la siguiente operación: (70+30) + 50=70+($\square$ +50)

a)20 b) 30 c) 50 d) 70 e) ninguno

31.- ¿Qué número falta: (64 x $\square$)÷ 16 = 64

a) 0 b) 4 c) 16 d) 64 e) ninguno

32.- Completa: 3 x 26=(3 x $\square$) + (3x6)

a) 2 b) 6 c) 20 d) 26 e) ninguno

33.- ¿Qué número puedes usar en ambos cuadros para que
la operación sea falsa: $25 + \square = \square + 30 - 5$
a) 0 b) 5 c) 25 d) ninguno e) todos

b) Expresiones algebraicas.

1.- Escriba un ejemplo de cada uno de los siguientes términos.
a) un trinomio ______________________________
b) Un binomio ______________________________
c) Un monomio ______________________________

2.- Encuentre el resultado de: (a-b)/(a+b) - b/(a+b) =
a) 1/b b) a-1/a c) a/2(a+b) d) (a-2b)/(a+b) e) a-2b/a(a+b)

3.- Multiplique las siguientes expresiones:
(x+2)(x+3) = _______________
(2x+3)(x+1) = _______________
(x-6)(x+4) = _______________
(x-3)(x-2) = _______________

4.- Sí (1/8)x = 12, entonces x es igual:
a)2/3 b)3/2 c) 96 d)20 e) no se conoce.

5.- El resultado de la Ecuación: x + 1/x = x - 1/x. es:
a) 0 b) 1 c) 0 y 1 d) -1 e) No tiene solución.

6.- Resuelva la siguiente ecuación lineal.
7/n - 5/n = ¼

7.- Sí $x^2 + kx + 6 = (x+2)(x+3)$ para toda x. Entonces k es igual:
a) -1 b) 1 c) 3 d) 5 e) 6

8.- Si $F = GmM/d^2$, entonces m es igual a:
a) Fd^2/GM b) Fd^2GM c) $F+d^2/GM$ d) FGM/d^2 e) Fd^2-G

c) Completa las siguientes expresiones:

1) $a(x+y-z)=a\cdot x + a\cdot \square - a\cdot \square$

2) $2ax + 4ay - 8az = 2a(\square + \square - \square)$

3) $(a+b)^2 = \square + \square + \square$

4) $x^2 + 2xy + y^2 = (\square + \square)^2$

5) $(x+2)(x-3) = \square - \square - \square$

6) $x^2 - 8x + 15 = (x-5)(x - \square)$

7) $(2x-3)(x+4) = \square + \square - \square$

8) $6x^2 - x - 15 = (\square - 5)(\square + 3)$

9) $81x^2 - 49 = (9x + \square)(\square - 7)$

10) $(x+y)(x-y) = \square$

11) $(a+b+c)^2 = \square + \square + \square + \square + \square + \square$

12) $(x^2 - 6x + 5)/(x-5) = (x-5)(x - \square)/(x-5) = \square$

13) $(x+3)/(x+1) + (x+2)/(x+1) = \{(x+3)+(x+2)\}/(\square + \square)$
$= (\square + \square)/(\square + \square)$

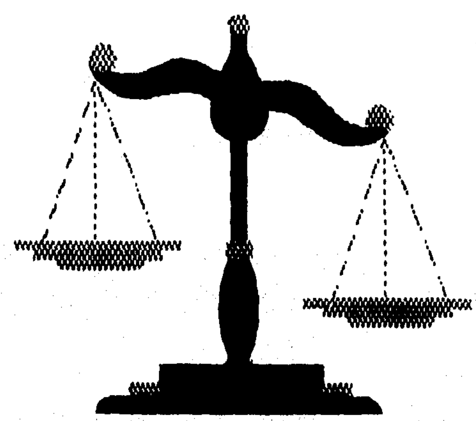
Anexo II.

Material de trabajo.

El material de estudio en su primera parte, induce al estudiante hacia la construcción del concepto de ecuación lineal, continuando con las propiedades de la igualdad y finalmente los ejercicios que deberán resolver los estudiantes.

Experimento de la balanza:

¿Qué se necesita como condición(es) para que la balanza mantenga el equilibrio?



El equilibrio de la balanza se establece cuando los platillos se encuentran nivelados a la misma altura. Si sólo se dispone de pesas de 50 grs. (o de cualquier otra denominación) ¿qué sucederá a la balanza si en uno de sus platillos, en el de el lado derecho, por ejemplo, se coloca una de estas pesas?

¿Qué necesitas hacer para restablecer el equilibrio?

Una vez restablecido el equilibrio, si se pone (suma o adiciona) otra pesa de 50 grs., ahora en el lado izquierdo de la balanza, ¿qué se observa? ¿A qué se debe ese desequilibrio? ¿Como logras equilibrar la balanza? ¿Qué pasa si se dispone de pesas de diferente peso?

En el momento en que se restablece el equilibrio de la balanza hay en cada platillo dos pesos de 50 grs. esto es, hay 100 grs. en cada platillo. Si quitas (restas, sustraes) las dos pesas de 50 grs. del lado izquierdo, ¿qué sucede a la balanza? ¿Como logras restablecer el equilibrio? ¿Volviéndolas a poner o quitándo dos del lado derecho?

Ahora bien, poniendo 6 pesas del lado derecho (seis veces el peso de 50 grs.) ó 6·(50 grs.), es decir, adicionando un múltiplo de la pesa de 50 grs., (lo cual equivale a multiplicar el peso de la pesa de 50 grs. por 6), ¿qué sucede a la balanza, ¿cómo se restablece el equilibrio?.

Al establecerse el equilibrio, se tienen en ambos platillos 6 pesas de 50 grs, esto es, 300 grs., en cada uno. Si se dividen los 300 grs., del platillo del lado izquierdo entre 3, y se deja una tercera parte en ese platillo (esto es, quitando las otras dos terceras partes). ¿Qué sucede? ¿cómo se logra restablecer el equilibrio?

¿Es necesario realizar las mismas operaciones, es decir, sumar, restar, multiplicar ó dividir los mismos pesos en ambos lados de la balanza?

A los estados de equilibrio, que se mantienen en los diferentes momentos de estas operaciones se denominan: estados equivalentes (si se suma o agrega un mismo peso en ambos lados de la balanza; el equilibrio no se altera).

Este estado de equivalencia se rompe en el mismo momento en que se desequilibra la balanza, ya que, habrá pesos diferentes y la igualdad de ellos deja de mantenerse.

Al finalizar el experimento de la balanza, pasaremos a la resolución de ecuaciones, pero antes es necesario recordar los siguientes puntos:

En las expresiones aritméticas, es usual que aparezcan una o varias operaciones a un lado del signo igual, generalmente a la izquierda, y en el lado derecho el resultado de dichas operaciones. Entonces, ¿ para qué sirve el signo igual? Sirve para enlazar una serie de operaciones aritméticas con su resultado.

Ejemplos:

$$\boxed{\begin{array}{c} 5+7=12 \\ 15+18=33 \end{array}}$$

Sin embargo, en el caso de expresiones algebraicas, ¿el signo igual tambien puede enlazar las operaciones con su resultado? En expresiones como la siguiente sí:

$$\boxed{3x+4=25}$$

Pero en otras como el siguiente ejemplo, no puede:

$$\boxed{3x + 4 = 7x - 5}$$

¿Porque? Veamos las siguientes sumas aritméticas con números enteros:

$$\begin{array}{|r|} \hline 2 + 3 = 5 \\ 5 + 8 = 13 \\ 12 + 2 = 14 \\ 20 + 8 = 28 \\ \hline \end{array}$$

Observen que un proceso común que se efectúa en este tipo de sumas, es obtener el número del lado derecho, por suma de los números del lado izquierdo, es decir, el número del lado derecho, se interpreta como el resultado de la suma de los números del lado izquierdo, ahora veamos los siguientes ejemplos:

$$\begin{array}{|r|} \hline 2 + 3 = 5 \\ \mathbf{5 = 5} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|r|} \hline 5 + 8 = 13 \\ \mathbf{13 = 13} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|r|} \hline 10 + 20 = 30 \\ \mathbf{30 = 30} \\ \hline \end{array}$$

¿Qué notamos? que el número que resulta de la operación del lado izquierdo del signo igual, es equivalente al número del lado derecho, es decir, el resultado de las operaciones del lado izquierdo, es igual al número que está del lado derecho. A este tipo de igualdades entre números, en aritmética se les llama identidades.

Ahora observen los siguientes ejemplos:

$$\boxed{\begin{array}{c} 5+8=6+7 \\ \mathbf{13=13} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} 20+8=10\cdot 2+8 \\ \mathbf{28=28} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} 3\cdot 4+2=8+6 \\ \mathbf{14=14} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} 5+3\cdot 8=29 \\ \mathbf{29=29} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} 7+3=3+7 \\ \mathbf{10=10} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} 6\cdot 3+5=5\cdot 3+4\cdot 2 \\ \mathbf{23=23} \end{array}}$$

¿Que es lo que notan? como pueden darse cuenta, en los ejemplos anteriores se pueden establecer además de la suma, operaciones de multiplicación en ambos miembros de las identidades, de tal manera que, el resultado del lado izquierdo se mantenga igual al del lado derecho.

EJERCICIOS.

Considerando los ejemplos anteriores, resuelva las siguientes identidades:

1.- $\mathbf{12+8=\boxed{}}$
$\boxed{}=\boxed{}$

2.- $\boxed{}\mathbf{=13+5}$
$\boxed{}=\boxed{}$

3.- $\mathbf{4+10=\boxed{}}$
$\boxed{}=\boxed{}$

4.- $5 \cdot 2 + 4 = \square$

$\square = \square$

5.- $\square = 2 \cdot 8 + 5$

$\square = \square$

6.- $2 \cdot 10 + 3 \cdot 4 = \square$

$\square = \square$

7.- $2 + \square = 5 + 5$

$\square = \square$

8.- $4 \cdot \square = 40$

$\square = \square$

9.- $20 + 30 = 25 + \square$

$\square = \square$

10.- $5 \cdot 10 = 10 \cdot \square$

$\square = \square$

11.- $80 = 8 \cdot \square$

$\square = \square$

12. $20 + 5 \cdot 8 = \square + 6 \cdot 5$

$\square = \square$

13.- $100 + 50 = \square$

$\square = \square$

14.- $8 . 9 + 28 = 10 \cdot \square$

$\square = \square$

Siguiendo con la idea de mantener los resultados equivalentes, resolvamos el siguiente ejercicio:

$$8 \cdot \square + 10 = 30 + 20$$

Para que se mantenga la equivalencia de resultados en la identidad, es necesario colocar un número en el cuadro vacío, de tal manera que, el resultado de las operaciones del lado izquierdo de la identidad, sea igual al resultado de la operación del lado derecho de la misma. Calculando por prueba y error,¿Cuál es ese número? El número que debe ir en el cuadro es el **5.**

Entonces en la identidad:

$$\mathbf{8 \cdot \boxed{?} + 10 = 30 + 20,} \qquad \boxed{?} = \mathbf{5}$$

Ponemos el número correspondiente,

$$8 \cdot \mathbf{5} + 10 = 30 + 20$$
$$40 + 10 = 30 + 20$$
$$\mathbf{50 = 50}$$

Se obtienen los resultados equivalentes.

Resolvamos otros ejemplos similares:

EJEMPLO 1.

$$3(2 + \boxed{}) - 6 = 10 + 8 \qquad \boxed{?} = \mathbf{6}$$

colocando el **6,** tenemos:

$$3(2 + \boxed{\mathbf{6}}) - 6 = 10 + 8$$
$$3 \cdot 8 - 6 = 10 + 8$$
$$24 - 6 = 10 + 8$$
$$\mathbf{18 = 18}$$

ó también,

$$3 \cdot 2 + 3 \cdot \mathbf{6} - 6 = 10 + 8$$
$$6 + 18 - 6 = 10 + 8$$
$$\mathbf{18 = 18}$$

EJEMPLO 2.

$$\boxed{?}/3 = 6 \qquad \boxed{?} = \mathbf{18}$$

ya que,

$$\boxed{\mathbf{18}} / 3 = 6$$
$$\mathbf{6 = 6}$$

EJEMPLO 3.

$\boxed{?} / 5 - 10 = 3 + 3$ $\boxed{?} = \mathbf{80}$

ya que,

$\boxed{80} / 5 - 10 = 3 + 3$

$16 - 10 = 3 + 3$

$\mathbf{6 = 6}$

EJEMPLO 4.

$8 / \boxed{?} = 4$ $\boxed{?} = \mathbf{2}$

ya que,

$8 / \boxed{\mathbf{2}} = 4$

$\mathbf{4 = 4}$

EJEMPLO 5.

$20 / \boxed{?} + 5 = 5 + 2$ $? = \mathbf{10}$

ya que,

$20 / \boxed{\mathbf{10}} + 5 = 5 + 2$

$2 + 5 = 5 + 2$

$\mathbf{7 = 7}$

EJERCICIOS:

Siguiendo el modelo de los ejemplos resueltos, encuentre el número que debe ir en el cuadro vacio.

1.- $2 + \boxed{} = 8 + 2$ $? = \boxed{}$

2.- $\boxed{} - 6 = 3 + 2$ $? = \boxed{}$

3.- $15 = 2 + \boxed{} /5$ $? = \boxed{}$

4.- $\boxed{} /3 = 20$ $? = \boxed{}$

5 .- $8 = 20 - \boxed{} /2$ $? = \boxed{}$

6.- $16/ \boxed{} = 1$ $? = \boxed{}$

7.- $8 / \boxed{} - 3 = 2 - 3$ $? = \boxed{}$

8.- $10 + 4 = 20 / \boxed{} + 10$? = $\boxed{}$

9.- $5(2 + \boxed{}) = 25 + 25$? = $\boxed{}$

10.- $3(\boxed{} - 5) = 8 \cdot 3$? = $\boxed{}$

11.- $36 = 6(\boxed{} + 6)$? = $\boxed{}$

12.- $100 = (10)(20) - \boxed{}$? = $\boxed{}$

Para resolver cada uno de los ejercicios anteriores, es necesario que encuentren por prueba y error el número adecuado, que haga de la igualdad entre las dos cantidades, una identidad.

También que recuerden que en todos los ejemplos y ejercicios dados, se puede establecer la analogía entre el equilibrio de la balanza y la igualdad de las expresiones que se están comparando, y que para lo cual es necesario buscar un número adecuado para establecer la identidad, esto es, como lo hicieron en el experimento de la balanza al buscar la pesa adecuada que colocada en uno de sus platillos restablece su equilibrio.

Ahora observen la siguiente identidad:

$$\boxed{\begin{array}{l} 5 \cdot 15 + 54 = 129 \\ 75 + 54 = 129 \\ \quad \mathbf{129 = 129} \end{array}}$$

¿Qué sucederá si restamos a ambos miembros de esta identidad el número 54? ¿Se conservará la identidad?

$$\boxed{\begin{array}{lr} & 5 \cdot \underline{15} + 54 = 129 \\ \underline{\text{restar } 54.} & \underline{-54} = \underline{-54} \\ & 5 \cdot 15 = 75 \\ & 75 = 75 \\ \multicolumn{2}{l}{\text{Sí se conserva la identidad.}} \end{array}}$$

¿Y si dividimos a ambos miembros entre 5?

$$
\begin{array}{|l|}
\hline
\text{Dividimos: } 5 \cdot 15 \ / 5 = 75 / 5 \\
\qquad\qquad\quad 75 / 5 = 75 / 5 \\
\qquad\qquad\qquad \mathbf{15 = 15} \\
\text{Se sigue conservando la identidad.} \\
\hline
\end{array}
$$

Aunque la identidad original se transforma en una nueva debido a las operaciones realizadas en ambos miembros de la misma (se resta o se divide el mismo número), se siguen conservando los resultados equivalentes y por tanto la identidad. Sí recuerdan en el experimento con la balanza, se hacia algo similar (adicionar, sustraer, dividir o multiplicar los pesos, pero en ambos platillos para poder mantener su equilibrio).

Siguiendo con el mismo ejercicio, pero ahora con un cuadro vacío, en el que debe ir un número que no conocemos,

$$\boxed{5 \cdot \boxed{?} + 54 = 129}$$

Ponemos en el cuadro cualquier letra del abecedario que represente al número desconocido, que debe colocarse en el cuadro vacío, la **x** por ejemplo:

$$\boxed{5 \cdot \boxed{\mathbf{x}} + 54 = 129}$$

Enseguida procedemos como en el ejercicio anterior y restamos el número 54 , en ambos miembros de la igualdad:

Restando 54,

$$
\begin{array}{|l|}
\hline
5 \cdot \mathbf{x} + 54 = 129 \\
\underline{\qquad -54 = -54} \\
\qquad 5 \cdot \mathbf{x} \ = \ 75 \\
\hline
\end{array}
$$

Dividimos a ambos miembros entre 5:

$$
\begin{array}{|c|}
\hline
5 \cdot \mathbf{x} / 5 = 75 / 5 \\
\mathbf{x} = 5 \\
\mathbf{5=5} \\
\hline
\end{array}
$$

Obsérvese como esta forma de proceder nos lleva lógicamente a plantear igualdades equivalentes cada vez más elementales, hasta una última en la cuál es fácil conocer el valor "desconocido"

Procediendo como en los ejercicios anteriores, encuentre el número desconocido (representado por una literal) en la igualdad del lado derecho de la línea, realizando las operaciones que transforman la identidad del lado izquierdo, en otras más elementales:

	$5 \cdot \mathbf{20} - 84 = 16$	$5 \cdot \mathbf{a} - 84 = 16$
	$5 \cdot \mathbf{20} - 84 = 16$	$5 \cdot \mathbf{a} - 84 = 16$
sumar 84	$\underline{+\ 84} = \underline{+84}$	$\underline{+84} = \underline{+84}$
	$5 \cdot \mathbf{20} = 100$	$5 \cdot \mathbf{a} = 100$
dividir entre 5.		
	$5 \cdot \mathbf{20} / 5 = 100 / 5$	$5 \cdot \mathbf{a} / 5 = 100 / 5$
	$\mathbf{20} = 20$	$\mathbf{a} = 20$
		$\mathbf{20} = 20$

A la literal que representa el número desconocido, se le conoce como: **incógnita.**

Pueden notar que en todos los ejemplos realizados, para poder mantener la igualdad entre las cantidades de cada lado del signo igual, se tienen que realizar las mismas operaciones, es decir, sí se suma un número al miembro del lado derecho, el mismo número se debe sumar al miembro del lado izquierdo para mantener la igualdad, si se resta un número al miembro izquierdo, el mismo número hay que restar al miembro derecho para maltenerla, si se divide por un número distinto de cero a un miembro de la igualdad, lo mismo se hace con el otro miembro para mantener la igualdad, y finalmente sí se multiplica un miembro de la igualdad por un número, lo mismo debe hacerse con el otro miembro, para seguir manteniendo la igualdad.

¿Que analogía se puede establecer entre esta forma de mantener la igualdad en las ecuaciones, con el hecho de mantener al equilibrio de la balanza?

Recuerden que para mantener en equilibrio la balanza, si se restaba, sumaba, dividía ó multiplicaba el peso en uno de sus platillos, esa misma operación, y con las mismas cantidades se realizaba con el peso del otro platillo.

Una diferencia sustancial entre la igualdad de la izquierda y la de la derecha, descansa en el hecho de que la igualdad de la parte izquierda es una identidad, mientras que la igualdad de la derecha, está condicionada al valor que le asignemos a la cantidad desconocida (incógnita), y no es sino hasta que se encuentra su valor y se sustituye en la igualdad, que se transforma en una identidad ó igualdad incondicional.

Para continuar con la idea anteriormente expresada, veamos las siguientes operaciones:

1.- $2 \cdot \mathbf{5} = 10$ Dividiendo entre 2. $2 \cdot \mathbf{5}/2 = 10/2$ $\mathbf{5} = 5$	$2 \cdot \mathbf{x} = 10$ $2 \cdot \mathbf{x}/2 = 10/2$ $\mathbf{x} = 5$ $\mathbf{5} = 5$

2.- $5 - 4/3 = 11/3$	$\mathbf{x} - 4/3 = 11/3$
Multiplicando por 3.	
$3(\mathbf{5} - 4/3) = 3(11/3)$ $3 \cdot \mathbf{5} - 3(4/3) = 3(11/3)$	$3(\mathbf{x} - 4/3) = 3(11/3)$ $3 \cdot \mathbf{x} - 3(4/3) = 3(11/3)$
Sumando 4, $3 \cdot \mathbf{5} - 4 = 11$ $\underline{+4} = \underline{+4}$ $3 \cdot 5 = 15$	$3 \cdot \mathbf{x} - 4 = 11$ $\underline{+4} = \underline{+4}$ $3 \cdot \mathbf{x} = 15$
Dividiendo entre 3, $3 \cdot 5/3 = 15/3$ $\mathbf{5} = 5$	$3 \cdot \underline{x}/3 = 15/3$ $\underline{\mathbf{x}} = \mathbf{5}$ $\mathbf{5} = \mathbf{5}$

3.- $10 / 2 - 3 = 2$	$10 / x - 3 = 2$
Multiplicando por 2:	
$2(10/2 - 3) = 2 \cdot 2$ $2 \cdot 10 / 2 - 2 \cdot 3 = 2 \cdot 2$ $10 - 2 \cdot 3 = 2 \cdot 2$	$x(10 / x - 3) = x \cdot 2$ $x \cdot 10 / x - x \cdot 3 = x \cdot 2$ $10 - 3 \cdot x = 2 \cdot x$
Restando 10:	
$10 - 2 \cdot 3 = 2 \cdot 2$ $\underline{-10 \quad\quad = \quad -10}$ $-2 \cdot 3 = 2 \cdot 2 - 10$	$10 - 3 \cdot x = x \cdot 2$ $\underline{-10 \quad\quad = \quad -10}$ $-3 \cdot x = 2 \cdot x - 10$
Restando $2 \cdot 2$:	
$-2 \cdot 3 = 2 \cdot 2 - 10$ $\underline{-2 \cdot 2} = \underline{-2 \cdot 2}$ $-2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = -10$	$-3 \cdot x = 2 \cdot x - 10$ $\underline{-2 \cdot x} = \underline{-2 \cdot x}$ $-3 \cdot x - 2 \cdot x = -10$
Aplicando la Propiedad distributiva:	
$(-3-2)2 = -10$	$(-3-2)x = -10$
Dividiendo entre -5:	
$-5 \cdot 2 / -5 = -10 / -5$	$-5 \cdot x / -5 = -10 / -5$
$2 = 2$	$x = 2$ $2 = 2$

En los ejemplos anteriores pueden darse cuenta, como las identidades de la columna de la izquierda se mantienen como tales, al realizar las transformaciones indicadas, mientras que las igualdades de la columna de la derecha en las que aparece una literal (**incógnita**), se transforman en identidades, en el momento en que es encontrado y sustituido el valor de esta en la operación.

A las igualdades donde una incógnita representa al valor desconocido y, que por lo tanto están condicionadas a transformase en identidades, hasta el momento en que se sustituye el valor de la incógnita, se les denomina: **Igualdades condicionales o simplemente ecuaciones.**

A continuación, considerando los ejemplos, resuelva los siguientes ejercicios:

1.- 150 + **12**·10 = 270	150 + **B**·10 = 270
2.- **3** + 5 = 8	**y** + 5 = 8
3.- 10 - **4** = 6	10 - **z** = 6
4.- 3·___ + 5 = 20	3·**w** + 5 = 20
5.- **8**·___ - 10 = 70	**8·t** - 10 = 70
6.- 8 · ___ = 40	**8** · **s** = 40
7.- **20**/4 = 5	**y**/4 = 5
8.- **100**/25 - 2 = 2	**X**/25 - 2 = 2
9.- 10 = **50**/10 + 5	10 = **v**/10 + 5
10.- 3·___ + 4 = 5	3·**x** + 4 = 5
11.- 5 - 3/___ = 4	5 - 3/**X** = 4

En los siguientes ejemplos, se introduce una nueva variante, que es el uso del paréntesis, como signo de agrupación y como factor. Y donde la incógnita se encuentra asociada con términos numéricos dentro del paréntesis y forma tambien parte del factor. ¿Cómo calculamos la incógnita?, "eliminando" el paréntesis y realizando las transformaciones correspondientes, como en los ejemplos anteriores.

EJEMPLOS:

Ejemplo 1:	
$4(\mathbf{8} - 3) = 20$	$4(\mathbf{x} - 3) = 20$
Prop. Distributiva.	
$4 \cdot \mathbf{8} - 4 \cdot 3 = 20$	$4 \cdot \mathbf{x} - 4 \cdot 3 = 20$
Sumar 12:	
$4 \cdot \mathbf{8} - 12 = 20$	$4 \cdot \mathbf{x} - 12 = 20$
$+\underline{12 = 12}$	$\underline{+12 = 12}$
$4 \cdot \mathbf{8} = 32$	$4 \cdot \mathbf{x} = 32$
Dividir entre 4:	
$4 \cdot \mathbf{8} / 4 = 32 / 4$	$4 \cdot \mathbf{x} / 4 = 32 / 4$
$\mathbf{8} = 8$	$\mathbf{x} = 8$
	$\mathbf{8} = 8$

Ejemplo 2.

$0.2(4 - 3\cdot\square) + 0.3\cdot\square = 2.6$	$0.2(4-3\cdot\mathbf{x}) + 0.3\cdot\mathbf{x} = 2.6$
$0.8 - 0.6\square + 0.3\cdot\square = 2.6$	$0.8 - 0.6\cdot\mathbf{x} + 0.3\cdot\mathbf{x} = 2.6$
$0.8 + (-0.6 + 0.3)\square = 2.6$	$0.8 + (-0.6 + 0.3)\,\mathbf{x} = 2.6$
Restar 0.8:	
$0.8 + (-0.6 + 0.3)\square = 2.6$ $\underline{-0.8 \qquad = -0.8}$ $(-0.6 + 0.3)\square = 1.8$ $-0.3\cdot\square = 1.8$	$0.8 + (-0.6 + 0.3)\,\mathbf{x} = 2.6$ $\underline{-0.8 \qquad = -0.8}$ $(-0.6 + 0.3)\,\mathbf{x} = 1.8$ $-0.3\cdot\mathbf{x} = 1.8$
Dividir entre -0.3:	
$-0.3\cdot\square / -0.3 = 1.8 / -0.3$	$-0.3\cdot\mathbf{x} / -0.3 = 1.8 / -0.3$
$\square = -6$ $-6 = -6$	$\mathbf{x} = -6$ $-6 = -6$

Observación:

En este segundo ejemplo es más complicado encontrar el valor numérico, del ejercicio de la columna izquierda, por lo que primero se debe resolver, el ejercicio de la columna derecha, en el que se utiliza la incógnita.

Finalmente se observa que desarrollando el ejemplo del lado derecho, se llega a una ecuación equivalente muy sencilla, cuya solución es obvia.

EJERCICIOS.

Considerando los ejemplos anteriores, encuentre el valor de la incógnita, sustituya dicho valor en las ecuaciones originales y realice operaciones.

1.- $0.7 \cdot \underline{x} - 1.2 = 0.3(2 \cdot \underline{x} - 1)$
2.- $30 - 2(\underline{y} - 1) = 38$
3.- $20 + 8(2 - \underline{w}) = 44$
4.- $5(7 - \underline{x}) = 25$

Ahora resolvamos ejemplos, que presentan otras variantes, como ecuaciones con más de una ocurrencia de la incógnita.

Ejemplo 1.

$$6(\mathbf{y} - 1) = 7 \cdot \mathbf{y} - 12$$

Aplicando propiedad distributiva:

$$6 \cdot \mathbf{y} - 6 = 7 \cdot \mathbf{y} - 12$$

Sumando 6,

$$\begin{array}{rcl} 6 \cdot \mathbf{y} - 6 & = & 7 \cdot \mathbf{y} - 12 \\ +6 & = & +6 \\ \hline 6 \cdot \mathbf{y} & = & 7\mathbf{y} - 6 \end{array}$$

Restando 7· y,

$$\begin{array}{rcl} 6 \cdot \mathbf{y} & = & 7 \cdot \mathbf{y} - 6 \\ -7 \cdot \mathbf{y} & = & -7 \cdot \mathbf{y} \\ \hline -1 \cdot \mathbf{y} & = & -6 \end{array}$$

Dividiendo entre -1,

$$-1 \cdot \mathbf{y}/-1 = -6/-1$$

$$\mathbf{y} = 6$$

$$\mathbf{6=6}$$

Si se sustituye el valor obtenido para la incógnita en la ecuación original, realizando operaciones, se obtiene la identidad.

Ejemplo 2:

$$10(2 - z) = 4(z - 9)$$

Aplicando propiedad distributiva:

$$20 - 10 \cdot z = 4 \cdot z - 36$$

Restando 20,

$$\begin{array}{rcl} 20 - 10 \cdot z & = & 4 \cdot z - 36 \\ \underline{-20} & \underline{=} & \underline{-20} \\ -10 \cdot z & = & 4 \cdot z - 56 \end{array}$$

Restando $4 \cdot z$,

$$\begin{array}{rcl} -10 \cdot z & = & 4 \cdot z - 56 \\ \underline{-4 \cdot z} & \underline{=} & \underline{-4 \cdot z} \\ -14 \cdot z & = & -56 \end{array}$$

Dividiendo entre -14.

$$-14 \cdot z \,/ -14 = -56 / -14$$

$$z = 4$$

$$4 = 4$$

Ejemplo 3.

$$x / 2 = 12 - x / 4$$

Multiplicando por 4.

$$4(x / 2) = 4(12 - x / 4)$$

Aplicando propiedad distributiva:

$$4 \cdot x / 2 = 48 - 4 \cdot x / 4$$
$$2x = 48 - x$$

Sumando **x**,

$$\begin{array}{r} 2 \cdot x = 48 - x \\ \underline{+\ x = \quad +x} \\ 3x = 48 \end{array}$$

Dividiendo entre 3,

$$3x / 3 = 48 / 3$$
$$x = 16$$
$$16 = 16$$

Ejemplo 4:

$$7 / \mathbf{a} = 2 + 1 / \mathbf{a}$$

Multiplicando por a.

$$\mathbf{a}(7 / \mathbf{a}) = \mathbf{a}(2 + 1 / a)$$

Aplicando propiedad distributiva,

$$7 = \mathbf{a} \cdot 2 + \mathbf{a} \cdot 1 / \mathbf{a}$$
$$7 = \mathbf{a} \cdot 2 + 1$$

Restando 1,

$$\begin{array}{rcl} 7 & = & \mathbf{a} \cdot 2 + 1 \\ \underline{-1} & = & \underline{\quad -1} \\ 6 & = & \mathbf{a} \cdot 2 \end{array}$$

Dividiendo entre 2,

$$6 / 2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{2} / 2$$
$$3 = \mathbf{a}$$

Simetría,

$$\mathbf{a} = 3$$
$$\mathbf{3} = 3$$

Ejemplo 5:

$$y / 4 + y / 3 + y / 2 = 36$$

(Calculando el m.c.m. de 4,3,2, que es igual a 12)

Multiplicar por 12:

$$12(y / 4 + y / 3 + y / 2) = 12(36)$$

Propiedad Distributiva:

$$12 \cdot y / 4 + 12 \cdot y / 3 + 12 \cdot y / 2 = 12(36)$$
$$3 \cdot y + 4 \cdot y + 6 \cdot y = 432$$
$$13 \cdot y = 432$$

Dividir entre 13.

$$13 \cdot y / 13 = 432 / 13$$
$$y = 33.2$$
$$\mathbf{33.2} = 33.2$$

Ejemplo 6:

$$3 / 4 \cdot c = 1 / c - ¼$$

Multiplicando por $4 \cdot c$,

$$4 \cdot c(3 / 4 \cdot c) = 4 \cdot c(1 / c - 1 / 4)$$

Aplicando propiedad distributiva:

$$4 \cdot c(3 / 4 \cdot c) = 4 \cdot c(1 / c) - 4 \cdot c(1 / 4)$$
$$3 = 4 \cdot 1 - c \cdot 1$$
$$3 = 4 - c \cdot 1$$

Restando 4,

$$3 = 4 - c \cdot 1$$
$$\underline{-4 = -4}$$
$$-1 = -c \cdot 1$$

Dividiendo entre -1,

$$-1/-1 = -c \cdot 1/-1$$

Aplicando reflexiva:

$$1 = c$$
$$c = 1$$

Ejemplo 7:

$$(x - 2) / 3 - (x - 1) / 4 = 4$$

multiplicar por 12,

$$12(x-2)/3 - 12(x - 1)/4 = 12(4)$$
$$4(x - 2) - 3(x - 1) = 48$$

Aplicando propiedad distributiva:

$$4 \cdot x - 8 - 3 \cdot x + 3 = 48$$
$$x - 5 = 48$$

Sumando 5:

$$\underline{x - 5} = \underline{48}$$
$$+5 = +5$$
$$x = 53$$

$$x = 53$$

$$\mathbf{53} = 53$$

Ejemplo 8:

$$1 - (2\mathbf{m}-5)/3 = (\mathbf{m}+3)/2$$

multiplicar por 6,

$$6(1 - (2 \cdot m - 5))/3 = 6(\mathbf{m} + 3)\ /2$$
$$6 - 6(2 \cdot m - 5)3 = 3(\mathbf{m} + 3)$$

Aplicando distributiva,

$$6 - 2(2 \cdot \mathbf{m} - 5) = 3 \cdot \mathbf{m} + 3 \cdot 3$$
$$6 - 4 \cdot \mathbf{m} + 10 = 3 \cdot \mathbf{m} + 9$$
$$-4 \cdot \mathbf{m} + 16 = 3 \cdot \mathbf{m} + 9$$

Restando 16,

$$\begin{array}{rcl} -4 \cdot \mathbf{m} + 16 & = & 3 \cdot \mathbf{m} + 9 \\ \underline{\phantom{-4 \cdot \mathbf{m}} - 16} & = & \underline{-16} \\ -4 \cdot \mathbf{m} & = & 3 \cdot \mathbf{m} - 7 \end{array}$$

Restando $3 \cdot \mathbf{m}$,

$$\begin{array}{rcl} -4 \cdot \mathbf{m} & = & 3 \cdot \mathbf{m} - 7 \\ \underline{-3 \cdot \mathbf{m}} & \underline{=} & \underline{-3 \cdot \mathbf{m}} \\ -7 \cdot \mathbf{m} & = & -7 \end{array}$$

Dividiendo entre -7,

$$-7 \cdot \mathbf{m} / -7 = -7 / -7$$
$$\mathbf{m} = 1$$

$$\mathbf{1=1}$$

Ejemplo 9:

$$8 / (y-2)-13 / 2 = 3 / (2y-4)$$

multiplicando por 2(y-2),

$$2(y-2)(8 / (y-2)-13 / 2) = 2(y-2)(3 / (2y-4))$$

Aplicando distributiva,

$$\begin{aligned} 2(y-2)\cdot 8 / (y-2)-2(y-2)\cdot 13 / 2 &= 3 \\ 2\cdot 8 -(y-2)\cdot 13 &= 3 \\ 16 - 13y + 26 &= 3 \\ -13y+ 42 &= 3 \end{aligned}$$

Restando 42,

$$\begin{aligned} -13y + 42 &= 3 \\ \underline{\quad -42} &\underline{= -42} \\ -13y \quad &= -39 \end{aligned}$$

Dividiendo entre -13,

$$\begin{aligned} -13y / -13 &= -39 / - 13 \\ y &= 3 \\ 3 &= 3 \end{aligned}$$

Ejemplo 10.

$10/(\mathbf{r}-3)+4/(3-\mathbf{r}) = 6$
$10 / (\mathbf{r}-3)+4/-(\mathbf{r}-3) = 6$
$10 / (\mathbf{r}-3)-4/(\mathbf{r}-3) = 6$

multiplicando por ($\mathbf{r}$-3)

$(\mathbf{r}-3)(10/(\mathbf{r}-3)-4/(\mathbf{r}-3)) = (\mathbf{r}-3)6$

Aplicando propiedad distributiva.

$(\mathbf{r}-3)\cdot 10(\mathbf{r}-3)-(\mathbf{r}-3)\cdot 4/(\mathbf{r}-3) = (\mathbf{r}-3)6$
$10-4 = 6\mathbf{r}-18$
$6= 6\mathbf{r}-18$

Sumando 18.

$6 = 6\mathbf{r} - 18$
$+\underline{18} = \underline{+18}$
$24= 6\mathbf{r}$

Dividiendo entre 6.

$24/6 = 6\mathbf{r}/6$
$4 = \mathbf{r}$

Aplicando reflexiva.

$\mathbf{r} = 4$
$\mathbf{4} = 4$

Recuerde que la incógnita representa un número, por lo que se puede usar ésta misma para: restarla, sumarla, multiplicarla ó dividirla a ambos miembros de la igualdad.

Observe que en las ecuaciones donde se presentan denominadores, estos hacen incómodo el manejo de las ecuaciones, es más sencillo manejar sus ecuaciones equivalentes sin denominadores, por lo que seria preferible transformar la ecuación original a una equivalente, pero sin estos, para lo cuál se ha recurrido a la multiplicación de ambos miembros de la ecuación por un número, el cual resulta ser la multiplicación de los denominadores en los casos sencillos .

EJERCICIOS

Considerando los ejemplos, resuelva los siguientes ejercicios, y sustituya el valor obtenido en la ecuación original, con la finalidad de obtener las identidades numéricas buscadas.

1.- $\square + 3 = 5$

2.- $2 + \square = 11$

3.- $4 - \square = 11$

4.- $\square - 5 = 3$

5.- $5 = 3 - \square$

6.- $3 \cdot \square = 15$

7.- $-8 \cdot \square = 32$

8.- $-28 \cdot \square = -56$

9.- $-9 = 27 \cdot \square$

10.- $-7 = -42 \cdot \square$

11.- $8 = 7 - \square$

12.- $25 / \square = 5$

13.- $-22 / \square = 2$

14.- $-48 / \square = -3$

15.- $\square / 3 + 5 = 7$

16.- $3 \cdot \square / 3 + 2 \cdot \square / 5 = 31/8$

17.- $3 - \square / 2 + \square + 4 / 5 = 4$

18.- $2 \cdot \square + 5 = 4 \cdot \square + 7$

19.- $17 \cdot \square - 3 = 11 \cdot \square - 9$

20.- $\square + 8/3 - \square + 3/2 = 2 \cdot \square$

21.- $7\square - (8 - 17 \cdot \square) = 18$

22.- $2 \cdot (\square - 5) = 14$

23.- $4(3 \cdot \square - 5) - 8 \cdot \square = 7 \cdot \square + 1$

24.- $(\square + 5) - 4 - (\square + 9) = 0$

25.- $7 \cdot \square + 5(\square - 8) = 4(3 \cdot \square - 5) + 12$

26.- $3 \cdot \square / 14 + 8 \cdot \square / 7 - 3/2 = 11/21 - 11 \cdot \square / 21$

27.- $14 \cdot y / 3 + \mathbf{y} / 6 + 3 / 5 = 7 \cdot \mathbf{y} / 5 - 26$

28.- $5 \cdot \mathbf{t} / 2 + 7 \cdot \mathbf{t} / 8 + 10 = 3 \cdot t + 23 / 10$

29.- $8 / (\mathbf{z}-3) + 4 / (\mathbf{z}-3) = 1 / 3$

30.- $6 / (\mathbf{h}+4) - 2 / (\mathbf{h}+4) = 4$

31.- $8 / 3 \cdot \mathbf{x} + 9 / 11 \cdot \mathbf{x} = -3$

32.- $14 = (\mathbf{x} - 2(3 - 5 \cdot \mathbf{x}))$

ANEXO III.

Examen post experimento.

PREGUNTA 1. Escribe en el renglón de la derecha el tipo de igualdad, según sea el caso: (condicional, incondicional, identidad numérica igualdad entre conjuntos).

a) $3x+5 = 5+3x$ __________________

b) $2{\cdot}3+5 = 4{\cdot}2+3$ __________________

c) $2x + 3 = x - 1$ __________________

d) $(a + b)^2 = a^2+2ab+b^2$ __________________

e) $\{1,2,3\} = \{3,2,1\}$ __________________

f) $x/2 + x-1/3 = x/5$ __________________

g) {*, □, +, ▱ } = {+, □, ▱, *} __________________

h) $2(5+2) + 3 \cdot 5 = 10{\cdot}2 + 3{\cdot}3$ __________________

PREGUNTA 2. Escribe en el renglón correspondiente cuales de las siguientes "ecuaciones" son igualdades y cuales no. Justifica tu respuesta.

a) $2x-3 = x - 1$ ______________
b) $a - 1 = a - 3$ ______________
c) $3(y-2) = 4(y-8)$ ______________
d) $7z + 5(z+8) = 4(3z-5)+12$ ______________
e) $x/3 - (2x-3)/5 = x/8$ ______________

PREGUNTA 3. ¿Cuáles de las siguientes parejas de ecuaciones son equivalentes y cuáles no?. Justifica tu respuesta.

a) $2(x-3) = x - 1$ $x-6=-1$	b) $5x-2 = 3x+8$ $2x-10=0$

PREGUNTA 4. Explica la analogía entre una balanza de platillos y una ecuación. ________________________________

PREGUNTA 5. Dada la siguiente ecuación lineal:

$$(3/ x-1) - (4 / x-1) = 2x / 3(x-1)$$

Escriba en el renglón de la derecha el argumento que justifica cada paso del procedimiento llevado a cabo, para aislar (despejar) el valor de la incógnita.

a) $3(x - 1) [(3 / x-1) - (4 / x-1)] = 3(x - 1) [(2x) / 3(x - 1)]$ ______
b) $9(x - 1) / (x-1) - 12(x -1) / (x-1) = 6(x-1) \cdot x / 3(x-1)$ _________
c) $9 \cdot 1 - 12 \cdot 1 = 2 \cdot 1 \cdot x$ _______________
d) $-3 = 2x$ _______________
e) $-3 / 2 = 2x / 2$ __________
f) $-3 / 2 = x$ _____________
g) $x = -3 / 2$ _____________
h) $-3 / 2 = -3 / 2$ __________

PREGUNTA 6. Resuelve las siguientes ecuaciones lineales y verifique.

a) $3x - 2 = 5x - 4$
b) $3a - 2(2a-5) = 2(a+3) - 8$
c) $y / 5 - (y - 2) / 2 = 3/4$
d) $(x-3) / (2x-2) = 1/6 - (1-x) / (3x-3)$

ANEXO IV.

Problemario. (Grupo control)

I.- Ecuaciones de 1er. grado con una incógnita.

1.- Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) x - 9 = 15	d) x - .3 = 1.7	g) 8 - x = 0
b) x - 20 = 50	e) x - 5 = 8.3	h) 10 - x = 3
c) 17 = x - 13	f) x- 4/3 = 11/3	i) $12\text{-}x^2 = x - x^2$

2.- Resuelve:

a) 3x + 1 = 13	d) 76 = 10x + 6	g) 8x +13/4=77/4
b) 5x + 3 = 33	e) 45 = 15 + 12x	h) 4x + 3 = 17/3
c) 11 + 7x = 88	f) 3.4 = 1.4 + 2x	i) 45 = 15 + 12x

3.- Resuelve las ecuaciones:

a) 21/r = 3	d) 5.4/r = 3	g) 30 - r = 17
b) 14/r =4	e) .4 = 10/r	h) 8.4-r = 5.7
c) 8 = 24/r	f) 5/r = 5/2	i) 71/4 = 81/4 -r

4.- Resuelve las ecuaciones.

a) y/4 + 6 = 5	d) 2y/3 + 7 = -7	g) y - y/2 = -20
b) 8 + y/5 = -1	e) 12 + 2y/5 = 18	h) y + (2/3)y = -45
c) 30 = 25 - y/3	f) 24 = 7y/5 + 31	i) (17/2)y +6 = (31/4)y

5.- Resuelve las ecuaciones.

a) 4(x-1) =20	d) 6(y-1) = 7y	g) 20 + 8(2-y) = 44
b) 3(x-2) = -6	e) 30 - 2(y-1)38	h) 3(z+1) = 4(6-z)
c) 42 = 7(2x-1)	f) 12y - 3 = 5(2y+1)	i) 2(z+1)-3(4z-2) = 6z

6.- Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $(x/2) - (x/3) = 7$
b) $x/5 + x/6 = 11$
c) $x/2 = 12 - x/4$
d) $y/4 + y/3 + y/2 = 36$
e) $y/5 + y/3 - y/2 = 3$
f) $10 + y/6 = y/3 - 4$
g) $3x/4 - 2x/3 = 3/4$
h) $x/2 = 3x/7 - 5$
i) $5x/2 - 2x/3 = -11/6$

7.- Resuelve las ecuaciones siguientes.

a) $5/x - 2/x = 3$
$7/a = 2 + 1/a$
c) $1/x + ½ = 5/x$
d) $3/b + ¼ = 2/b$
g) $^{2}/_{3x} + 1/x = 5$
f) $3/4(c) = 1/c - ¼$

8.- Resuelva las ecuaciones siguientes:

a) $(x-2)/3 - (x-1)/4 = 4$
b) $(y-3)/5 - 1 = (y-5)/4$
c) $(W-z)/4 - (w+4)/3 = -5/6$
d) $1 - (2m-5)/3 = (m+3)/2$

9.- Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $(d+8)/(d-2) = 9/4$
b) $4/(x-4) = 7/(x+2)$
c) $8 / (y-2) - 13/2 = 3/(2y-4)$
d) $10/(r-3) + 4/(3-r) = 6$

ANEXO V.

GLOSARIO ESTADÍSTICO

Análisis de varianza: Es un proceso aritmético mediante el cual la variación total de un conjunto de datos se divide en dos o más componentes, cada uno de los cuales se puede atribuir a una fuente identificable (Daniel,1981).

La variación de un conjunto de datos muestrales se mide generalmente **por la varianza de la muestra.** Si se tiene disponible para el análisis una muestra de datos, se puede medir la variación total mediante.

$$s^2 = \frac{\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y})^2}{n-1}$$

Se llama suma total de cuadrados al numerador de esta ecuación, porque es la suma de las desviaciones elevadas al cuadrado de las medidas individuales respecto de su media,donde la suma se realiza sobre el número total de medidas..Se puede considerar también a la suma total de cuadrados como medida de variación. Es esta representación de la variación la que se divide en el análisis de varianza (idem.).

Cuando se analizan datos de un experimento estadístico, se pueden identificar dos fuentes de variabilidad: variabilidad entre los tratamientos, el cual mide el grado en que las medias muestrales difieren entre sí y la variabilidad dentro de los tratamientos, que mide el grado en que las observaciones que quedan dentro de los tratamientos varían respecto a las medias individuales de cada uno de estos. Entonces, la suma total de cuadados se dividen en las dos componentes anteriores. A la segunda componente se le llama suma de cuadrados o suma de cuadrados del error (SCE). En símbolos :

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} (y_{ij} - \bar{y})^2 = \sum_{j=1}^{k} n_j(\bar{y}_j - \bar{y})^2 + \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ij} - \bar{y}_j)^2$$

Suma total de cuadrados (SCT)=suma de cuadrados de los tratamientos (SCTR)+suma de cuadrados del error (SCE).

De la relación anterior: SCE=SCT-SCTR

División de los grados de libertad.

Una suma de cuadrados dividida por los grados de libertad adecuados (gl) da como resultado una varianza. Si se divide cada una de las sumas de cuadrados que se describieron anteriormente por los grados de libertad apropiados, se obtiene una varianza que se denominará media cuadrada(MC). Los grados de libertad relacionados con la suma total de cuadrados son n-1, o numero total de medidas en el conjunto de datos menos 1. Se llama a n-1 los grados totales de libertad. Dividiendo la suma total de cuadrados por los grados totales de libertad, se obtiene la media cuadrada total (MCT). Entonces SCT/(n-1)=MCT.

El valor de los grados de libertad relacionados con la suma de cuadrados de los tratamientos es igual al numero de tratamientos menos 1. Si hay k tratamientos, el valor de los grados de libertad de los tratamientos es k-1. La media cuadrada de los tratamientos (MCTR) está dada por SCTR/(k-1)=MCTR.

Se obtiene el valor de los grados de libertad del error por sustracción.Así, los grados de libertad del error son (n-1)-(k-1)=n-k. La media cuadrada del error (MCE) está dada por SCE/(n-k)=MCE.

La prueba F.

Uno de los objetivos del análisis de varianza es la verificación de hipótesis sobre parámetros poblacionales. El análisis de varianza permite verificar la hipótesis nula de que varias medias poblacionales (tratamientos) son iguales frente a la hipótesis alterna de que no todas son iguales. Se puede expresar formalmente la hipótesis así:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad , \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

Se obtiene un estadístico de prueba adecuado para verificar esta hipótesis tomando la razón entre la media cuadrada de los tratamientos y la media cuadrada del error. Si se denomina razón de varianza o F calculada, (RV) a esta razón, se tiene :

RV=MCTR/MCE

RV es el estadístico de prueba que se emplea para determinar si la hipótesis nula se rechaza o no. Si en un experimento, esta razón es mayor que la probabilidad asociada al grado de significación (.01,.05 ó .1), la hipótesis nula se rechaza, de otra manera se acepta. (idem.).

ANEXO VI .

Resultados obtenidos por el grupo experimental, en el examen postexperimento que se aplicó un mes después del examen final.

GRUPO CON 37 ALUMNOS	Bloques de preguntas e incisos	No. de alumnos con respuestas correctas	No. de alumnos con respuestas incorrectas.
	BLOQUE I		
	1a	20	17
	1b	24	13
	1c	24	13
	1d	19	18
E	1e	30	7
	1f	22	15
X	1g	32	5
	1h	29	8
	BLOQUE 2		
P	2a	34	3
	2b	33	4
E	2c	20	17
	2d	26	11
R	2e	12	25
	BLOQUE 3		
I	3a	26	11
	3b	25	12
M			
	BLOQUE 4		
E	4a	34	3
	BLOQUE 5		
	5a	31	6
N	5b	37	0
	5c	36	1
T	5d	35	2
	5e	34	3
A	5f	35	2
	5g	37	0
L	5h	37	0
	BLOQUE 6		
	6a	35	2
	6b	34	3
	6c	28	9
	6d	15	22

Resultados obtenidos por los alumnos del grupo control, en el examen postexperimento que se aplicó un mes después del examen final.

GRUPO DE 40 ALUMNOS	Bloques de preguntas e incisos	No. de alumnos con respuestas correctas	No. de alumnos con respuestas incorrectas.
	BLOQUE 1		
	1a	15	25
	1b	29	11
	1c	25	15
	1d	19	21
	1e	35	5
	1f	24	16
C	1g	34	6
	1h	29	11
	BLOQUE 2		
O	2a	28	12
	2b	30	10
	2c	29	11
	2d	20	20
	2e	26	14
	BLOQUE 3		
N	3a	23	17
	3b	18	22
	BLOQUE 4		
	4a	27	13
	BLOQUE 5		
T	5a	37	3
	5b	33	7
R	5c	34	6
	5d	37	3
	5e	34	3
	5f	27	13
	5g	37	3
	5h	34	6
O	BLOQUE 6		
	6a	15	25
L	6b	13	21
	6c	11	29
	6d	2	38

BIBLIOGRAFÍA

Alanís, Lorenzo. et. al. Informe sobre alumnos. Nuevo plan de Estudios de Preparatoria Agrícola, UACH, 1995. pág. 38-45.

A. Petrovski, Psicología Evolutiva y Pedagogica. Edit. Asbe, México. 1993.

Ary, Donald, Cheser Jacobs, Lucy, Razavieh, Asghar. Introducción a la In-investigación Pedagógica. 2a. edic. Edit. Interaméricana, México, 1982.

Balderas, Cañas Patricia E. Adquisición de Conceptos de Cálculo con apoyo de La Graficación en Microcomputadora. Tesis de Maestría. UACPYP - CCH, UNAM, 1992.

Booth, L. Algebra: Children's understanding of mathematics. NFERNELSON Windsor,1984

Campbell, Donald T. Diseños experimentales y cuasiexperimentales en la investigación social. 3a. edic. Edit. Amorrourtu editores. Buenos Aires. 1982

Camacho Castillo, Osvaldo. Valle Paniagua, David H. SAS (Statistical Analysis System) para Microcomputadoras México, 1992. 174p.

Castro, Gustavo, Sistema de Ecuaciones Lineales con aplicaciones. Tesis de grado, CIEA. México, 1986.

Daniel, Wayne w. Estadistica con aplicaciones a las ciencias sociales y a la educación, McGraw-Hill, Mex., 1985.

Ekenstam, A. and Greger, K. Some aspects of children's ability solve mathematical problems. Journal for Mathematics. 1982. p. 370-383.

Gobran, Alfonse. Álgebra elemental Edit. Iberoaméricana, Colombia, 1990.

Guzmán Hernández, José. El desarrollo conceptual de la resolución y la teoría de ecuaciones, Tesis de Grado,CIEA, México, 1983.

Herscovics N. and Kieran, Carolyn. Costructing meaning for the concept of equation. University Montreal, 1980

Jacome González, Arturo. Montaje de un experimento educativo en el nivel medio superior, titulado "Taller de matemáticas". Tesis de Grado. CINVESTAV IPN. Méx. 1986.

Lemoyne G. and Tremplay C. Addition and multiplication problem - solving and interpretation of relevant data. Educational studies in mathematics. Vol. 12, 97-123pp. México, 1986.

Lester, Frank K. Some educational and psicological considerations.Mathema tical problem solvig in the elementary school Indianan University(Member of the problem solving staff at Indiana University for their variable sugestions),1974.

López Mendoza, Josefina. Teoría de ecuaciones: resolución de ecuaciones. Tesis de Grado, CCH Sur, México, 1978.

Marmolejo Vega, Efrén. Epistemología y enseñanza de la matemática. Revista de educación matemática, Vol. 1, No. 2, 12-16 pp. México. 1989.

Mestre, José. Geralt, William. University of Massachusetts. The interplay of linguistic factors in mathematical translation tasks. Focus on Learning problems in mathematicas winter, Vol. 8, No. 1. Center for teaching/learning problems of mathematics winter, 1986.

Morán Olguín, Severo. Enseñanza-aprendizaje del álgebra simbólica, tesis de Grado. CINVESTAV IPN. México, 1993.

Moreno Armella, Luis. Waldegg. CINVESTAV IPN. Constructivismo y educación matemática. Revista de Educación Matemática Vol. 4. No. 2. México. 1993.

Novak, Joseph. Teoría y Práctica de la educación, 2a. Ed. Alianza editores, Madrid, 1988.

Olaizola Arizmendi, Iñaqui de. Wenselburger Guttenberg, Elfriede, "Algunas reflexiones sobre las metáforas en la Educación Matemática". Lecturas Matemáticas Vol. 15, 47-61 pp. México, 1994.

P. Ausubel, Joseph. Novak, D. Hanesian, Helen. psicología educativa un punto de vista cognoscitivo. Edit. Trillas. 2a. edición. México, 1983 (reimpresión 1995). 623 p.

Peraza Pereyra José Enrique. Curso taller sobre didáctica del álgebra. Tesis de Grado,CINVESTAV, IPN, México, 1987.

Rojano Ceballos, Teresa. De la aritmética al álgebra. Tesis de doctorado, CINVESTAV IPN, México, 1985

Sources for learning mathematics in undergraduate university courses. Int. J. Mathematical education Science technology Vol. 15, No. 3, 375-380 p. 1984.

Trujillo y Marin, Manuel. Uso del lenguaje algebraico en la resolución de problemas de aplicación. Tesis de Grado, 1987.

Ursini Legovich, Sonia, CINVESTAV, IPN. "los niños y las variables". Revista de Educación matemática Vol. 6 No. 3, 90-108 pp. Méx. 1994.

Vest, Floyd. Using models of operations and equations. educational studies in mathematics vol. 9, no. 2. pág. 147-155. 1973.