



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

01174
1
23
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA

**DESARROLLO DE UN SIMULADOR SEMI-IMPLÍCITO
DEL FLUJO MULTIFÁSICO COMPOSICIONAL
EN YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS**

TESIS DE MAESTRIA

PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERIA PETROLERA

PRESENTADA POR

VICTOR HUGO ARANA ORTIZ

DIRECTOR DE TESIS

DR. FERNANDO RODRIGUEZ DE LA GARZA

CIUDAD UNIVERSITARIA

NOVIEMBRE DE 1996

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*One flew east, one flew west,
one flew over the cuckoo's nest....*

*Este trabajo se lo dedico a la memoria de Alfredo,
con mucho cariño.*

CONTENIDO

	RESUMEN	i
I.	INTRODUCCIÓN	1
II.	REVISION BIBLIOGRÁFICA	5
III.	FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL PROBLEMA	10
	III.1. Modelo de Doble Porosidad	10
	III.2. Modelo Matemático	11
	III.3. Ecuaciones Diferenciales para el Sistema de Fracturas	12
	III.4. Ecuaciones Diferenciales para el Sistema de Bloques de Matriz	14
	III.5. Condiciones Iniciales y de Frontera	16
	III.5.1 Condiciones iniciales	16
	III.5.2 Condiciones de frontera	19
	III.6 Funciones de Transferencia de Fluidos Matriz-Fractura	21
IV.	SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES DE FLUJO	23
	IV.1. Ecuaciones de Flujo en Diferencias Finitas	23
	IV.1.1 Ecuaciones de las fracturas	24
	IV.1.2 Ecuaciones de los bloques de matriz	28
	IV.2. Solución del Sistema de Ecuaciones	30
	IV.2.1 Linealización del sistema de ecuaciones : Método Semi-Implícito	30
	IV.2.2 Sistema algebraico lineal de ecuaciones	31
	IV.2.3 Reducción matricial del sistema de ecuaciones	38
	IV.2.4 Síntesis del procedimiento de solución del sistema lineal de ecuaciones	44
V.	VALIDACIÓN DEL MODELO	45
	V.1. Validación con la Solución Analítica de Warren y Root	45
	V.2. Teoría de Flujo Bifásico en Régimen Permanente	45
	V.3. Comparación de Resultados Analíticos y de Simulación	50
VI.	APLICACIONES DEL MODELO	52
	VI.1 Simulación de Pruebas de Formación en Pozos	52
	VI.2 Simulación de Agotamiento Natural	53
	VI.3 Simulación de Inyección de Gas	54
	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	56
	NOMENCLATURA	58
	REFERENCIAS	61
	APÉNDICES	65
	TABLAS	82
	FIGURAS	89

RESUMEN

En este trabajo se desarrolla un modelo composicional para yacimientos naturalmente fracturados, utilizando el concepto de doble porosidad; el simulador es bidimensional, trifásico e isotérmico. El modelo es Semi-Implicito, un tratamiento IMPSEC- implícito en presión y saturación, explícito en composición para las ecuaciones de las fracturas y, un tratamiento TI-totalmente implícito para las ecuaciones de los bloques de matriz. El método de Newton es aplicado a las ecuaciones en diferencias no lineales que resultan de este tratamiento. El modelo es una extensión de la formulación propuesta por Branco y Rodríguez para yacimientos no fracturados al problema de flujo en yacimientos fracturados. Se utiliza la ecuación de estado de Peng-Robinson para el cálculo de propiedades y el equilibrio de fases. Las funciones de transferencia de fluidos matriz-fractura, se representan de acuerdo a la extensión de la teoría de Warren y Root, hecha por Kazemi y, posteriormente modificada por Thomas, Dixon y Pierson. La presión capilar gas-aceite se mantiene constante con respecto a la composición.

Considerando el modelo de doble porosidad y una formulación IMPSEC en las ecuaciones de las fracturas, la estructura matricial que arroja el problema después de ser linealizado, posee una estructura peculiar que permite reducir el sistema original de $2 \times (2nc+6)$ ecuaciones con el mismo número de incógnitas, a un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, similar al que se obtiene para un modelo de aceite negro, reduciéndose los requerimientos computacionales, tanto en memoria como en tiempo de procesamiento, siendo esta formulación independiente del número de pseudocomponentes considerados en la mezcla de hidrocarburos.

Se realiza la verificación del modelo con la solución de Warren y Root, así como con la teoría del flujo bifásico composicional en régimen permanente, presentada por Chopra y Carter.

El método propuesto posee un nivel intermedio de implícitud entre las formulaciones IMPECS- implícito en presión, explícito en composición y saturación y TI-totalmente implícito; asimismo, ofrece una alternativa conveniente cuando en la simulación del flujo multifásico composicional en yacimientos naturalmente fracturados, el método IMPECS no proporciona soluciones estables y el método TI resulta costoso.

Finalmente, se presentan algunas aplicaciones del simulador a casos de pruebas de formación, agotamiento natural e inyección de gas para yacimientos de composición variable.

I. INTRODUCCION

La Ingeniería de Yacimientos¹ desde sus inicios, ha logrado ubicarse como una disciplina importante dentro de la industria petrolera; esta actividad ha ayudado a optimizar la explotación de yacimientos y, en consecuencia, a obtener beneficios económicos. El ingeniero de yacimientos debe ser capaz de predecir el comportamiento futuro de un yacimiento, considerando para esto varias alternativas de explotación. Para realizarlo, se requiere de una adecuada caracterización del yacimiento y de una metodología para determinar la distribución de fluidos y presión como función del tiempo y espacio.

Para optimizar la explotación de un yacimiento, se deben considerar simultáneamente diversos factores; por ejemplo, el intervalo a disparar, número de pozos a perforar, espaciamiento entre pozos, tipo de fluido en el yacimiento, modo de producción, algún método artificial de producción, condiciones de separación, etc., así como algún imponderable que surja en el transcurso de la explotación del yacimiento. En consecuencia, es necesaria una metodología que permita representar el comportamiento futuro del yacimiento para poder determinar los factores más relevantes y su interacción que influyen en la explotación del yacimiento, para posteriormente tomar mejores decisiones.

Los modelos son usados para representar y predecir el comportamiento de los fenómenos físicos bajo las restricciones a que están sujetos. En este trabajo se considerará un modelo como un medio que permita el estudio de un fenómeno, bajo condiciones apropiadas muy semejantes a lo que ocurre en la realidad. Existen dos tipos de modelos²⁻⁴, el primero representa los fenómenos físicos, en donde se intentan reproducir lo más aproximado posible, pero a menor escala; en el segundo, los modelos matemáticos, representan el fenómeno físico mediante expresiones matemáticas adecuadas.

Por mucho tiempo se han utilizado modelos matemáticos para predecir el comportamiento de yacimientos. Entre los primeros modelos que surgieron en la década de los 30 y 40 están los de balance de materia, conocidos como modelos de dimensión cero⁵. En la década de los 50, aparecieron las curvas de declinación⁶. Posteriormente en los años 60, debido a los avances en el terreno de la computación, se desarrollaron los simuladores numéricos de yacimientos⁷⁻⁹.

Según Coats⁹, un simulador de yacimientos es un conjunto de ecuaciones en diferencias finitas, escritas para cada celda de la malla de cálculo que divide al yacimiento, éstas

representan la conservación de masa y energía en cada una de las celdas. Los primeros simuladores desarrollados⁷, fueron conocidos como modelos de aceite negro, consideraban tres fases: aceite, gas y agua; éstos continúan usándose ampliamente. En los años 70, al aparecer los métodos de recuperación mejorada de hidrocarburos, los cuales debido a su alto costo, exigían un estudio detallado para su implementación, por lo que surgió la necesidad de desarrollar simuladores más sofisticados, ya que los modelos existentes para aceite negro no cumplían satisfactoriamente a los complejos procesos físicos y químicos que se llevaban a cabo. Los simuladores que respondían a las necesidades de estudiar yacimientos con fluidos de composición variable, esto es, aceite volátil o gas y condensado, fueron conocidos como simuladores composicionales.

Un yacimiento con fluidos de composición variable, según Coats⁹, es aquél en el cual el comportamiento termodinámico de los fluidos varía en espacio y tiempo. Estos no pueden ser descritos adecuadamente con los métodos tradicionales, es decir, la composición de las fases de hidrocarburos no se mantienen constantes a diferencia de los yacimientos de aceite negro.

Durante la década de los 80, la simulación de yacimientos siguió desarrollándose. La caracterización del yacimiento tomó un lugar importante; se usaron los avances de la geoestadística para describir mejor las heterogeneidades, así como proporcionar una mejor definición del yacimiento, la cual no se consideraban en los modelos anteriores. La tecnología para modelar un yacimiento naturalmente fracturado, incluyendo efectos composicionales fue también desarrollada¹⁰.

Debido a la heterogeneidad de los yacimientos, particularmente los fracturados, se han desarrollado concepciones físicas del medio poroso para representarlos matemáticamente. Un yacimiento naturalmente fracturado se considera que está formado por dos medios sobrepuestos; el primero consiste de una red de fracturas, y el segundo por un conjunto de bloques de matriz. Ambos medios intercambian fluidos conforme a las condiciones locales de presiones y de saturaciones.

De acuerdo a la conceptualización de dichos yacimientos, se han presentado en la literatura dos modelos para su estudio: el modelo de doble porosidad^{11,12}, en el cual se considera a las fracturas como un medio continuo o transportador de fluidos hacia el pozo y a los bloques de matriz como un medio discontinuo o almacenador de fluidos, y el modelo de doble porosidad-doble permeabilidad¹³, en él ambos medios son continuos.

Un modelo multifásico composicional para yacimientos fracturados, requiere básicamente para cada componente de la mezcla de hidrocarburos en las fracturas y en los bloques de matriz, lo siguiente: ecuaciones de flujo; ecuaciones de equilibrio termodinámico; ecuaciones de restricción para las fracciones molares, tanto para la fase líquida como para la fase vapor; asimismo, para cada fase en ambos medios necesita relaciones de presión capilar y una expresión restrictiva relativa a las saturaciones de fluido de las fases. Estas ecuaciones dan como resultado un sistema de $2 \times (2nc + 6)$ ecuaciones con $2 \times (2nc + 6)$ incógnitas, donde nc es el número de pseudocomponentes. Las incógnitas son presiones y saturaciones de las fases aceite, gas y agua, y fracciones molares de cada componente para las fase líquida y vapor. Una característica importante de este sistema, es la alta no linealidad y, por lo tanto, el sistema de ecuaciones debe resolverse numéricamente. El carácter continuo de estas ecuaciones en espacio y tiempo, se cambia por un carácter discreto mediante el método de diferencias finitas. El resultado de este proceso, es un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales para cada nivel de tiempo $n+1$, el cual puede solucionarse simultáneamente.

Se han publicado diversas formulaciones para resolver los sistemas no lineales de ecuaciones que surgen de la simulación numérica de yacimientos. En la referencia 14, Rodríguez y Bonet, presentan un método general, en donde resuelven el conjunto no lineal de ecuaciones para flujo multifásico. En la referencia 15, Rodríguez y Cols., extienden las ideas presentadas en la referencia 14 y presentan un método general que engloba las diferentes formulaciones de la simulación composicional.

Las diversas formulaciones que han sido publicadas en la literatura para resolver los sistemas de ecuaciones no lineales que surgen de la simulación composicional de yacimientos, pueden clasificarse como IMPECS-implícito en presión, explícito en composición y saturación; Semi-Implícito o IMPSEC-implícito en presión y saturación, explícito en composición; Secuenciales y TI-totalmente implícitos.

El objetivo de este trabajo, es extender la formulación IMPSEC, propuesta por Branco y Rodríguez¹⁶, a yacimientos naturalmente fracturados e implementar la técnica de acoplar las ecuaciones de los bloques de matriz en las ecuaciones de las fracturas. Con este acoplamiento, se obtiene una estructura matricial similar a la generada en la simulación numérica de un yacimiento no fracturado.

Asimismo, se desarrolla un modelo multifásico composicional de doble porosidad para yacimientos naturalmente fracturados, bidimensional, isotérmico y trifásico. Se considera una formulación totalmente implícita para los bloques de matriz y una formulación IMPSEC para el sistema de fracturas. Se utiliza la ecuación de estado de Peng-Robinson¹⁷ para el cálculo de propiedades y el equilibrio termodinámico de fases.

La principal motivación para realizar este trabajo, es contar con un simulador que resuelva el problema de flujo multifásico composicional en yacimientos naturalmente fracturados, considerando las ideas anteriormente expuestas, con el propósito de optimizar tanto memoria de almacenamiento como el tiempo de procesamiento requeridos en la simulación del problema.

II. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

Los modelos composicionales surgen de la necesidad de predecir el comportamiento de yacimientos, en donde la composición de los fluidos cambia durante la explotación y no es posible representarlos aceptablemente mediante los modelos tradicionales utilizados para aceite negro.

En 1977, Kazemi¹⁸ y Cols. presentan el primer simulador composicional con una formulación implícita en presión y explícita en composición y en saturación. Obtienen una ecuación en términos de presión, donde las variables restantes son evaluadas explícitamente consideradas un paso de tiempo atrás. Con la convergencia en la ecuación de presión, se solucionan las incógnitas restantes, saturaciones y composiciones, iterativamente hasta alcanzar la convergencia. El equilibrio termodinámico de fases, se maneja haciendo uso de datos tabulados y correlaciones para determinar las constantes de equilibrio.

En el mismo año, Fussell y Fussell¹⁹, dan a conocer un modelo que utiliza una ecuación de estado para calcular las propiedades de los fluidos y el equilibrio termodinámico de fases. Al igual que Kazemi¹⁸ y Cols., el modelo propuesto posee una formulación implícita en presión y explícita en composición y saturación, asimismo presentan un algoritmo que permite resolver simultáneamente las ecuaciones de equilibrio de fases y las ecuaciones de flujo, conocido como Mínimas Variables-Newton Raphson (MVNR.). Este algoritmo reduce el número de variables que forman parte del método iterativo y para corregir las variables de iteración utiliza el método de Newton.

Las formulaciones presentadas anteriormente, suponen que los valores de permeabilidad relativa, densidad, viscosidad y composición, son consideradas explícitamente en los términos de flujo, un nivel de tiempo atrás. La solución de una sola ecuación en términos de presión, seguida por una actualización de la saturación de fluidos y composición en cada celda de la malla de cálculo, se ha identificado con el nombre IMPECS. El procedimiento IMPECS por un lado es económico en recursos computacionales, pero por otro, limita el tamaño de incremento de tiempo, puesto que su estabilidad numérica es baja. Coats⁹, discute los detalles de esta formulación.

En 1979, Coats²⁰ presenta un modelo composicional totalmente implícito, que también utiliza el procedimiento iterativo de Newton-Raphson y una ecuación de estado para el

cálculo del equilibrio termodinámico de las fases y las propiedades de los fluidos. La formulación introduce un procedimiento óptimo para reducir el sistema de $2nc+1$ ecuaciones con $2nc+1$ incógnitas que aplican en cada celda de la malla de cálculo. El sistema matricial es particionado en dos subsistemas, ecuaciones de flujo y ecuaciones de equilibrio termodinámico, que son acopladas para reducir a un sistema de $nc+1$ ecuaciones con $nc+1$ incógnitas por celda.

Nghiem, Fong y Aziz²¹ en 1981, presentan una extensión del modelo de Kazemi¹⁸ y Cols., en donde utilizan una ecuación de estado para el cálculo del equilibrio termodinámico de las fases y las propiedades de los fluidos.

En 1983, Watts²², basándose en las ideas de Acs²³ y Cols., presentó una formulación secuencial, para resolver las ecuaciones de flujo composicional, procurando combinar las ventajas de los métodos implícitos en presión y explícitos en composición y saturación, y tratando de retener las características de estabilidad de los métodos con mayor implícitud, mediante el cálculo implícito de saturaciones en una manera secuencial.

En el mismo año, Thele²⁴ y Cols., presentaron un trabajo en donde comparan tres modelos composicionales. Concluyen que el trabajo de Coats²⁰, requiere de mayores recursos de memoria y tiempo de cómputo. También mencionan que la formulación de Nghiem, Fong y Aziz²¹ necesita de menos recursos de memoria, en cuanto al trabajo de Young y Stephenson²⁵, es generalmente el más rápido en obtener resultados.

En 1985, Chien²⁶ y Cols., exponen un modelo totalmente implícito. En su modelo, eligen como incógnitas la presión, la composición global de la mezcla y las constantes de equilibrio. Mencionan que con esta elección de incógnitas se mejora la estabilidad numérica produciendo un Jacobiano diagonalmente dominante y, con esto, un menor número de iteraciones para obtener la solución.

Quaudalle y Savary²⁷ en 1989, presentaron una formulación composicional implícita en presión y saturación y explícita en composición. Con esto se obtienen tres ecuaciones con tres incógnitas en cada celda de la malla de cálculo, en términos de presión y saturaciones. No se consideran en la solución de presión y saturaciones las ecuaciones de equilibrio termodinámico. Después de resolver las ecuaciones de presiones y saturaciones, se realiza un cálculo flash y se obtiene la composición de las fases.

Recientemente, Branco y Rodríguez¹⁶ presentaron una formulación, en donde las fracciones molares de las fases son evaluadas explícitamente en los términos de flujo. Las ecuaciones de equilibrio termodinámico se resuelven simultáneamente con las ecuaciones de flujo de los componentes. Este tratamiento explícito de las fracciones molares en los términos de flujo permite obtener la reducción del sistema a tres ecuaciones con tres incógnitas, como en la formulación de Quandalle y Savary²⁷.

En esencia, los diversos modelos composicionales propuestos en la literatura, resuelven el mismo sistema de ecuaciones. Lo que cambia en las distintas formulaciones, es la manera de resolver el sistema de ecuaciones no lineales de flujo en diferencias, generándose así, formulaciones con niveles variados de implícitud y, por ende, con diferentes necesidades computacionales.

Considerando los modelos para yacimientos naturalmente fracturados, éstos surgieron del concepto de doble porosidad introducido en 1960 por Bareublat¹¹ y Cols y, posteriormente retomado por Warren y Root¹² para estudiar el comportamiento transitorio de presión de pozos naturalmente fracturados, bajo condiciones de flujo monofásico. El concepto de doble porosidad, consiste en dos medios sobrepuestos : las fracturas, considerado como el medio continuo, por el cual fluyen los fluidos, y los bloques de matriz, como el medio discontinuo o almacenador de fluidos. Los dos medios intercambian fluidos conforme a las condiciones locales de presión y saturación.

Para el modelo de doble porosidad, se han propuesto diversas formas de simular la transferencia de fluidos matriz-fractura. La literatura referente a este tópico se ha enfocado a representar correctamente los efectos gravitacionales y capilares en la transferencia matriz-fractura. Kazemi²⁸ y Cols., extendieron el modelo de Warren y Root¹² para flujo multifásico, considerando únicamente fuerzas capilares y fuerzas viscosas en la transferencia de fluidos matriz-fractura, no incluyeron fuerzas de gravedad. En 1983, Thomas²⁹ y Cols. utilizaron el mismo planteamiento que Kazemi²⁸ y Cols., en el cual hacen uso de pseudofunciones de presión capilar, basadas en el concepto de equilibrio vertical para manejar implícitamente los efectos gravitacionales en la transferencia de fluidos matriz-fractura. En el mismo año, Gilman y Kazemi³⁰, extendieron el modelo propuesto anteriormente por Kazemi²⁸, intentando introducir explícitamente los efectos gravitacionales en el término de intercambio matriz-fractura. Un inconveniente de ese enfoque, es que no describen la manera de definir las profundidades de los bloques de

matriz y de las fracturas dentro de cada celda de la malla numérica en que se divide el yacimiento.

Según Sonier³¹ y Cols., las propuestas anteriores para representar los términos de transferencia, las califican como estáticas y las definen como aproximaciones que dependen fuertemente de un modelo analítico, experimental o de simulación de un bloque de matriz obtenido previamente. En contraste, proponen un modelo dinámico que definen como un modelo que se calcula internamente y que se modifica cuando las condiciones de presión, saturación y composición de los fluidos cambian durante la simulación. Este modelo, supone que existe una segregación local de fluidos en los bloques de matriz y en las fracturas; las saturaciones de fluidos son convertidas a niveles de fluido hipotéticos y obtienen expresiones para los términos gravitacionales en las funciones de transferencia de fluidos matriz-fractura.

En 1988, Dean y Lo³² presentaron un procedimiento para obtener las pseudofunciones de presión capilar, en la matriz y en la fractura, requeridos en el modelo de transferencia de Thomas²⁹ y Cols. Las pseudofunciones de presión capilar para los bloques de matriz y para las fracturas, son generadas modificando por ensaye y error las presiones capilares en el modelo de transferencia, hasta ajustar los resultados correspondientes a una simulación de detalle del flujo en un bloque de matriz empleando una malla fina. Un inconveniente de esta metodología, es el tiempo y el esfuerzo computacional requerido para generar las curvas de pseudopresión capilar.

Rossen y Shen³³ en 1989, presentaron un método similar al de Dean y Lo³², con la ventaja de que sólo requiere de una simulación de flujo en un bloque de matriz utilizando una malla fina, evitando el ajuste. Mencionan que la pseudofunción de presión capilar para la fractura se calcula directamente de las propiedades de la roca y de las dimensiones de los bloques de matriz.

Otros autores han modelado varios procesos que ocurren en la transferencia de fluidos matriz-fractura. En 1991, Fung³⁴ examina el proceso de drene de aceite por gravedad en un apilamiento de bloques y asocia fenómenos, tales como continuidad capilar y reimpregnación. Firoozabadi³⁵ y Cols. en 1994, estudian el fenómeno de reinfiltración. En 1995, Tan y Firoozabadi³⁶ modelan ambos procesos, reinfiltración y continuidad capilar.

La literatura publicada referente a los modelos multifásicos composicionales para yacimientos naturalmente fracturados, es escasa. Yamamoto³⁸ en 1971, presentó un modelo semi-implícito en composición, en el que considera tres componentes equivalentes para representar a los componentes hidrocarburos; desprecia la presión capilar y la variación de la composición en la fractura. Utiliza correlaciones para determinar las características de los fluidos.

Peng³⁹ y Cols. en 1987, presentaron un modelo composicional para yacimientos naturalmente fracturados. El modelo usa una formulación implícita en presión y explícita en composición y en saturación, similar al utilizado por Young y Stephenson²⁵ para yacimientos no fracturados.

En 1989, Coats⁴⁰ presentó un modelo composicional para yacimientos de doble porosidad. El modelo es totalmente implícito, con una ecuación de estado para determinar el equilibrio termodinámico y las propiedades volumétricas de los fluidos. Incluye los efectos de la tensión interfacial en la presión capilar y el uso de pseudocurvas de presión capilar.

En este trabajo se presenta la extensión de la formulación propuesta por Branco y Rodriguez¹⁶, para el flujo composicional en yacimientos homogéneos, al caso de yacimientos naturalmente fracturados.

III. FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL PROBLEMA

Los yacimientos naturalmente fracturados, conceptualmente se consideran constituidos por dos medios, fracturas y bloques de matriz, que interactúan en el dominio del espacio del yacimiento y del tiempo; estos se idealizan como un sistema formado por bloques de forma de paralelepípedo rectangular separados por una red de fracturas ortogonales. Ambos medios tienen características distintas, siendo los bloques de matriz los que generalmente presentan una alta capacidad de almacenamiento de hidrocarburos y una baja permeabilidad, además de tener una porosidad primaria formada durante la depositación y litificación de los sedimentos. Las fracturas, al contrario de los bloques de matriz, generalmente presentan una baja capacidad de almacenamiento y una alta permeabilidad, y constituyen un medio de porosidad secundaria formada posteriormente a la depositación.

En la literatura se han publicado dos modelos para conceptualizar un yacimiento naturalmente fracturado : modelo de doble porosidad¹² y modelo de doble porosidad-doble permeabilidad¹³. En este trabajo se considera el modelo de doble porosidad, que a continuación se explica.

III.1 Modelo de Doble Porosidad

El modelo de doble porosidad considera al sistema de fracturas como un medio continuo y a los bloques de matriz como un medio discontinuo. Las fracturas son el medio por el cual los fluidos fluyen del yacimiento hacia los pozos, mientras que los bloques de matriz se consideran discontinuos, presentándose su interacción a través de las fracturas. Los bloques de matriz presentan una alta capacidad de almacenamiento, conteniendo la mayor parte de los fluidos del yacimiento y sirven de fuente a las fracturas. Los fluidos contenidos en los bloques de matriz se transfieren a las fracturas bajo diversos mecanismos⁴¹, tales como la imbibición agua-aceite, la imbibición de aceite, el drene de aceite y la expansión de la roca y fluidos y, posteriormente fluyen a los pozos.

III.2 Modelo Matemático

En este trabajo se considera el flujo multifásico composicional en un yacimiento naturalmente fracturado, bajo condiciones isotérmicas. Se supone que las fases hidrocarburos, aceite y gas, están constituidas por nc componentes y que se encuentran en todo momento en equilibrio termodinámico en cualquier punto del yacimiento. Asimismo, se considera que la fase agua no intercambia masa con las fases hidrocarburos.

Conforme a lo descrito en el párrafo anterior, las ecuaciones que describen el flujo multifásico composicional en un yacimiento naturalmente fracturado considerando el modelo de doble porosidad, comprende el conjunto siguiente de ecuaciones en cada uno de los medios, fracturas y bloques de matriz:

- nc ecuaciones de flujo en el medio poroso, una para cada componente c que constituye la mezcla de hidrocarburos, $c = 1, 2, \dots, nc$.
- nc ecuaciones de equilibrio termodinámico entre las fases de hidrocarburos líquido y vapor, a las que nos referiremos como aceite y gas, respectivamente.
- Una ecuación de flujo para el agua.
- Dos expresiones de presión capilar que relacionan la presión de las fases agua, aceite y gas.
- Una condición de restricción para las saturaciones de las fases.
- Dos condiciones de restricción para las fracciones molares de las fases aceite y gas.

De esta manera, se tiene un total de $2 \times (2nc + 6)$ ecuaciones que describen matemáticamente el problema.

III.3. Ecuaciones Diferenciales para el Sistema de Fracturas

Las ecuaciones para el flujo multifásico composicional en el medio continuo, es decir, las fracturas, se desarrollan en el Apéndice A, y son las siguientes :

Para los componentes hidrocarburos:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[x_c \hat{\rho}_o \frac{kK_{ro}}{\mu_o} (\nabla p_o - \gamma_o \nabla D) + y_c \hat{\rho}_g \frac{kK_{rg}}{\mu_g} (\nabla p_g - \gamma_g \nabla D) \right] \\ + [x_c \hat{\rho}_o \hat{q}_o + y_c \hat{\rho}_g \hat{q}_g] + x_c \hat{\tau}_{omf} + y_c \hat{\tau}_{gmf} = \frac{\partial}{\partial t} [\phi (x_c \hat{\rho}_o S_o + y_c \hat{\rho}_g S_g)] \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde,

$$c = 1, 2, 3, \dots nc.$$

y para el agua;

$$\nabla \cdot \left[\frac{kK_{rw}}{B_w \mu_w} (\nabla p_w - \gamma_w \nabla D) \right] + b_w \hat{q}_w + \hat{\tau}_{wmf} = \frac{\partial}{\partial t} [\phi b_w S_w] \quad (3.2)$$

Una hipótesis adoptada en el modelo composicional, menciona la existencia del equilibrio termodinámico instantáneo entre las fases aceite y gas. Es decir, en cualquier punto del yacimiento, así como en cualquier nivel de tiempo, se supone que el aceite y el gas alcanzan el equilibrio en forma inmediata. Esta hipótesis es también considerada en los modelos propuestos en la literatura. En la referencia 42, se deducen las relaciones termodinámicas que gobiernan el equilibrio de fases. En resumen, las condiciones de equilibrio termodinámico de las fases aceite y gas, se traducen en la igualdad de las fugacidades de cada componente en dichas fases, o sea :

$$f_{co} = f_{cg} \quad (3.3)$$

donde,

$$c = 1, 2, 3, \dots, nc.$$

En el flujo multifásico composicional el concepto de capilaridad es importante. Entre los factores que afectan este concepto están: la tensión interfacial entre los fluidos y la roca, la mojabilidad de la roca, la geometría del espacio poroso, así como la historia de saturaciones. En este trabajo, se desprecian los efectos de la composición de las fases sobre la tensión interfacial y, consecuentemente sobre la presión capilar.

Las ecuaciones de presión capilar son :

$$Pc_{go}(S_g) = p_g - p_o \quad (3.4)$$

$$Pc_{wo}(S_w) = p_o - p_w \quad (3.5)$$

Las condiciones de restricción de las saturaciones de las fases y de las fracciones molares para las fases aceite y gas, que complementan las ecuaciones de las fracturas son :

$$S_o + S_g + S_w = 1 \quad (3.6)$$

$$\sum_{c=1}^{nc} x_c = 1 \quad (3.7)$$

$$\sum_{c=1}^{nc} y_c = 1 \quad (3.8)$$

Las ecuaciones (3.1) a (3.8) constituyen para el sistema de fracturas un subconjunto de $2nc+6$ ecuaciones con igual número de incógnitas, las cuales son : $p_o, p_g, p_w, S_o, S_g, S_w, x_1, x_2, \dots, x_{nc}, y_1, y_2, \dots, y_{nc}$.

En la ecuación (3.1), $\hat{\tau}_{omf}$ y $\hat{\tau}_{gmf}$ representan el ritmo de intercambio molar entre matriz y fractura de las fases aceite y gas, respectivamente, a condiciones de yacimiento por unidad de volumen de roca. En la ecuación (3.2), $\hat{\tau}_{wmf}$ representa el ritmo de intercambio de la fase agua, bajo las mismas condiciones, entre los bloques de matriz y las fracturas.

III.4 Ecuaciones Diferenciales para el Sistema de Bloques de Matriz

El subconjunto de ecuaciones que modelan el flujo en los bloques de matriz, considerando un modelo de doble porosidad, es el siguiente :

Para los componentes hidrocarburos :

$$-\{x_c \hat{\tau}_{omf} + y_c \hat{\tau}_{gmf}\} = \frac{\partial}{\partial t} [\phi (x_c \hat{\rho}_o S_o + y_c \hat{\rho}_g S_g)]_m \quad (3.9)$$

donde,

$$c = 1, 2, 3, \dots nc.$$

Para el agua :

$$-\hat{\tau}_{wmf} = \frac{\partial}{\partial t} [\phi b_w S_w]_m \quad (3.10)$$

Las condiciones de equilibrio termodinámico de las fases aceite y gas son :

$$f_{com} = f_{cgm} \quad (3.11)$$

donde,

$$c = 1, 2, 3, \dots nc.$$

En la ecuación (3.1), $\hat{\tau}_{omf}$ y $\hat{\tau}_{gmf}$ representan el ritmo de intercambio molar entre matriz y fractura de las fases aceite y gas, respectivamente, a condiciones de yacimiento por unidad de volumen de roca. En la ecuación (3.2), $\hat{\tau}_{wmf}$ representa el ritmo de intercambio de la fase agua, bajo las mismas condiciones, entre los bloques de matriz y las fracturas.

III.4 Ecuaciones Diferenciales para el Sistema de Bloques de Matriz

El subconjunto de ecuaciones que modelan el flujo en los bloques de matriz, considerando un modelo de doble porosidad, es el siguiente :

Para los componentes hidrocarburos :

$$-\{x_c \hat{\tau}_{omf} + y_c \hat{\tau}_{gmf}\} = \frac{\partial}{\partial t} [\phi (x_c \hat{\rho}_o S_o + y_c \hat{\rho}_g S_g)]_m \quad (3.9)$$

donde,

$$c = 1, 2, 3, \dots nc.$$

Para el agua :

$$-\hat{\tau}_{wmf} = \frac{\partial}{\partial t} [\phi b_w S_w]_m \quad (3.10)$$

Las condiciones de equilibrio termodinámico de las fases aceite y gas son :

$$f_{com} = f_{cgm} \quad (3.11)$$

donde,

$$c = 1, 2, 3, \dots nc.$$

Las ecuaciones de presión capilar son :

$$Pc_{gom}(S_{gm}) = p_{gm} - p_{om} \quad (3.12)$$

$$Pc_{wom}(S_{wm}) = p_{om} - p_{wm} \quad (3.13)$$

Además de las ecuaciones anteriores, se tienen las siguientes restricciones :

$$S_{om} + S_{gm} + S_{wm} = 1 \quad (3.14)$$

$$\sum_{c=1}^{nc} x_{cm} = 1 \quad (3.15)$$

y,

$$\sum_{c=1}^{nc} y_{cm} = 1 \quad (3.16)$$

Las ecuaciones (3.9) a (3.16), constituyen para el sistema de bloques de matriz, un subconjunto de $2nc + 6$ ecuaciones con igual número de incógnitas, las cuales son : $p_{om}, p_{gm}, p_{wm}, S_{om}, S_{gm}, S_{wm}, (x_1, x_2, \dots, x_{nc}, y_1, y_2, \dots, y_{nc})_m$

Nótese que no existen términos de flujo en las ecuaciones (3.9) y (3.10) para los bloques de matriz y, de acuerdo con el principio de conservación de masa, el ritmo de intercambio de fluidos matriz-fracturas es igual al ritmo de acumulación de fluidos en los bloques de matriz.

III.5. Condiciones Iniciales y de Frontera^{7,43}

La formulación de un problema de flujo de fluidos a través de medios porosos está incompleta si no se definen las condiciones iniciales y de frontera. Las condiciones iniciales definen la distribución de presiones, de saturaciones y la composición de las fases al tiempo cero. Por otra parte, la forma en que el yacimiento interactúa con sus alrededores durante su vida productiva se introduce a través de las condiciones de frontera.

III.5.1 Condiciones iniciales

Consideremos que al tiempo cero existe equilibrio gravitacional y capilar en el yacimiento. Suponemos también que se conoce la presión a una cierta profundidad del yacimiento y la profundidad de los contactos gas-aceite, z_{cgo} , y agua-aceite, z_{cwo} , si estos existen. La suposición de equilibrio gravitacional y capilar significa que no existe flujo de las fases al tiempo cero; es decir, los gradientes de potencial de las fases en cualquier punto y en cualquier dirección son cero. Esto es, considerando la ley de Darcy :

$$\frac{kK_{rp}}{\mu_p} (\nabla p_p - \gamma_p \nabla p) = 0 \quad (3.17)$$

donde,

$$p = o, g, w.$$

A lo largo de un plano horizontal ubicado en una posición cualquiera en la dirección de z , se tiene que :

$$\frac{\partial p_p}{\partial x} = 0 \quad (3.18)$$

y,

$$\frac{\partial p_p}{\partial y} = 0 \quad (3.19)$$

Las ecuaciones (3.18) y (3.19) indican que en condiciones de equilibrio, las presiones en un plano horizontal cualquiera permanecen constantes. En estas condiciones, la ecuación (3.17) también nos indica que :

$$\frac{\partial p_p}{\partial z} - \gamma_p = 0 \quad (3.20)$$

Lo que significa que en condiciones de equilibrio, la distribución vertical de presiones está dada por el peso de la columna de los fluidos, o sea :

$$p_p(x, y, z, t = 0) = p_p^0(z) \quad (3.21)$$

Conocida la presión de referencia $p_{p,ref}$, medida a una profundidad de referencia z_{ref} , es posible calcular la presión en cualquier profundidad en el yacimiento.

Integrando la ecuación (3.20), se obtiene lo siguiente :

$$\int_{p_{p,ref}}^{p_p} dp_p = \int_{z_{ref}}^z \gamma_p(p) dz \quad (3.22)$$

resultando,

$$p_p = p_{p,ref} + \bar{\gamma}_p (\bar{p}_p) [z - z_{ref}] \quad (3.23)$$

En la ecuación (3.23), \bar{p}_p puede aproximarse como el promedio aritmético de las presiones p_p y $p_{p,ref}$. Debido a que la ecuación (3.23) contiene implícitamente a la presión p_p , ya

que $\bar{\gamma}_p$ depende de esa variable, la solución de p_p puede obtenerse a través del método iterativo de Newton-Raphson.

La ecuación (3.23) escrita para la fase aceite, es la siguiente :

$$p_o = p_{o,ref} + \bar{\gamma}_o(\bar{p}_o)[z - z_{ref}] \quad (3.24)$$

Cuando existe capa de gas en el yacimiento, conocida la presión de la fase aceite en el contacto gas-aceite, $p_{o,zcgo} = p_b$, es posible calcular la presión de la fase gas en el contacto gas-aceite, esto es,

$$Pc_{go}(S_g = 1.0) = Pc_{go,e} = p_{g,zcgo} - p_{o,zcgo} \quad (3.25)$$

donde $Pc_{go,e}$ es la presión capilar gas-aceite de entrada. A partir de la ecuación (3.25) se puede obtener la presión de la fase gas en el contacto,

$$p_{g,zcgo} = Pc_{go,e} + p_{o,zcgo} \quad (3.26)$$

Similarmente cuando existe agua en el yacimiento, se puede obtener la presión de la fase agua en el contacto agua-aceite, mediante :

$$p_{w,zcwo} = p_{o,zcwo} - Pc_{wo,e} \quad (3.27)$$

La distribución de presiones de las fases gas y agua pueden entonces calcularse a partir de la ecuación (3.23), esto es :

$$p_g = p_{g,zcgo} + \bar{\gamma}_g \bar{p}_g [z - z_{cgo}] \quad (3.28)$$

y,

$$P_w = P_{w,z_{cwo}} + \bar{\gamma}_w \bar{P}_w [z - z_{cwo}] \quad (3.29)$$

Conocida la distribución vertical de presiones de las fases en el yacimiento, es posible calcular la distribución de presiones capilares, dado que :

$$Pc_{go}(S_g) = p_g(z) - p_o(z) \quad (3.30)$$

y,

$$Pc_{wo}(S_w) = p_o(z) - p_w(z) \quad (3.31)$$

Usando un proceso de interpolación inversa, se puede entonces obtener de las curvas Pc_{go} contra S_g y Pc_{wo} contra S_w , la distribución inicial de saturaciones de las fases gas y agua, S_g y S_w , respectivamente. La saturación de aceite la obtenemos con la ecuación (3.6).

En el caso de fluidos de composición variable, se requiere también especificar la composición inicial de las fases aceite y gas. Esta información deberá conocerse del análisis de muestras representativas de los fluidos, obtenidas antes de iniciar la explotación del yacimiento. En este trabajo no se considera la variación de la composición con respecto a la profundidad. Este fenómeno puede ser significativo para yacimientos con grandes espesores. Wheaton⁴⁴ y Whitson⁴⁵, presentan técnicas para determinar la variación de la composición con respecto a la profundidad causada por efectos gravitacionales.

III.5.2 Condiciones de frontera

La interacción del yacimiento con sus alrededores, se especifica a través de condiciones de frontera; un análisis detallado se proporciona en la referencia 42. En el caso de la frontera

externa, o sea, los límites del yacimiento, es común especificar cero flujo a través de ella. Tal situación es expresada matemáticamente de la siguiente manera,

$$\left(\nabla p_p - \gamma_p \nabla D \right)_S = 0 \quad (3.32)$$

donde S es la dirección perpendicular al contorno del yacimiento. También se puede especificar una condición, en donde el flujo es conocido a través del tiempo.

En problemas donde existe una frontera interna, como es el caso de flujo hacia un pozo, se pueden tener las siguientes condiciones de frontera :

1) Gasto especificado.

De acuerdo con la ecuación de Darcy, escrita en la frontera interna para la fase p , se tiene :

$$\left(p_p - p_{wf} \right) = \frac{\mu_p q_p}{IP(k_{rp})} \quad (3.33)$$

donde el índice de productividad⁴⁶, IP , se discute en el Apéndice C.

2) Presión especificada.

En este caso se especifica la presión de la fase p en la frontera, a lo largo del tiempo, esto es:

$$p_p(\text{frontera}, t) = p_p(t)_{\text{frontera}} \quad (3.34)$$

donde,

$p = o, g, w.$

III.6. Funciones de Transferencia de Fluidos Matriz-Fractura

El ritmo de intercambio de fluidos matriz-fractura, que interviene en las ecuaciones (3.1), (3.2), (3.9) y (3.10) depende de las condiciones locales de presión, saturación y composición de los fluidos en los bloques de matriz y en las fracturas. En los diferentes trabajos publicados sobre yacimientos fracturados, el aspecto más importante y complejo para modelar este tipo de yacimientos, es la solución correcta del intercambio de fluidos entre los bloques de matriz y las fracturas que los rodean. En este trabajo, la transferencia de fluidos entre ambos sistemas se representa de acuerdo a la teoría de Warren y Root¹², discutida por Kazemi²⁸ y, posteriormente revisada por Thomas²⁹ y Cols.

Dependiendo de la fase en cuestión, la función de transferencia de fluidos matriz-fractura se representa mediante las siguientes expresiones :

$$\hat{\tau}_{omf} = \sigma k_m \left[\frac{\hat{\rho}_o K_{ro}}{\mu_o} \right]_{mf} (p_{om} - p_o) \quad (3.35)$$

$$\hat{\tau}_{gmf} = \sigma k_m \left[\frac{\hat{\rho}_g K_{rg}}{\mu_g} \right]_{mf} (p_{gm} - p_g) \quad (3.36)$$

$$\hat{\tau}_{wmf} = \sigma k_m \left[\frac{K_{rw}}{B_w \mu_w} \right]_{mf} (p_{wm} - p_w) \quad (3.37)$$

En las ecuaciones (3.35) a (3.37), el parámetro σ tiene dimensiones de recíproco de área, y comúnmente se conoce como factor de forma; representa las características geométricas de la roca fracturada. La aplicación del factor de forma en la simulación numérica fue introducida por Kazemi²⁸ y Cols., demostrando que para el caso tridimensional :

$$\sigma = 4 \left(\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} + \frac{1}{L_z^2} \right) \quad (3.38)$$

siendo L_x, L_y y L_z las longitudes de los bloques de matriz en las direcciones x, y , y z , respectivamente. Para $L_x = L_y = L_z = L$, el factor de forma σ , tiene el valor de $12/L^2$.

En la obtención del factor de forma expresado por la ecuación (3.38), Kazemi²⁸ consideró únicamente la geometría del sistema, no cuantificó la existencia de un gradiente de presión en los bloques de matriz. La aplicación de la ecuación (3.38), es equivalente a suponer un gradiente lineal de presión entre el centro del bloque de matriz y las fracturas. Lim y Aziz⁴⁷ en 1995, presentan una derivación de factores de forma, combinando la geometría del sistema con las soluciones analíticas del comportamiento de presión para el flujo entre los bloques de matriz y las fracturas. Asimismo, concluyen que el factor de forma en la función de transferencia de fluidos matriz-fractura para un modelo de doble porosidad, es un parámetro gobernado por la geometría del sistema y el gradiente de presión en los bloques de matriz.

IV. SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES DE FLUJO

El conjunto de ecuaciones que describen el comportamiento de flujo de fluidos en el yacimiento, ecuaciones (3.1) a (3.8) y (3.9) a (3.16), para las fracturas y los bloques de matriz, respectivamente, son no lineales y, por consiguiente no se pueden resolver por métodos analíticos. Se recurre a métodos numéricos para solucionarlas mediante su aproximación en diferencias finitas, lo que genera un sistema algebraico de ecuaciones no lineales, que puede ser resuelto mediante el método iterativo de Newton-Raphson. En cada iteración, el método de Newton-Raphson genera un sistema algebraico de ecuaciones lineales que puede resolverse mediante algún algoritmo aplicable a la solución de sistemas de ecuaciones con matrices dispersas. En este capítulo, se presentan las ecuaciones aproximadas de flujo para el modelo de doble porosidad y se revisa la aplicación del método de Newton-Raphson a la solución de los sistemas de ecuaciones algebraicas no lineales correspondientes. También se aprovecha el esquema matricial resultante para reducirlo mediante operaciones matriciales y optimizar su solución .

IV.1. Ecuaciones de Flujo en Diferencias Finitas

Los sistemas de ecuaciones no lineales (3.1) a (3.8) y (3.9) a (3.16), para las fracturas y los bloques de matriz, respectivamente, se resuelven numéricamente. El carácter continuo de estas ecuaciones, en espacio y tiempo, se cambia por un carácter discreto mediante su aproximación en diferencias finitas⁷. Los términos de flujo de las ecuaciones de las fracturas se aproximan mediante diferencias centrales y los términos de acumulación en las fracturas y en los bloques de matriz mediante diferencias regresivas. Este proceso de discretización, da como resultado un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales en cada etapa de tiempo. Estas ecuaciones, que son las que constituyen el simulador , son escritas en términos de operadores en diferencias como se muestra más adelante. La aproximación en diferencias finitas de los sistemas de ecuaciones (3.1) a (3.8) y (3.9) a (3.16), se desarrollan en detalle en el Apéndice B.

IV.1.1. Ecuaciones de las fracturas

Las ecuaciones de flujo en las fracturas, aproximadas mediante diferencias finitas, como se indica en el párrafo previo, para el caso de flujo bidimensional, son las siguientes.

Para los componentes hidrocarburos :

$$\begin{aligned} & \Delta \left[x_c T_o (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D) \right]_{ik}^{n+1} + \Delta \left[y_c T_g (\Delta p_g - \gamma_g \Delta D) \right]_{ik}^{n+1} + (x_c \hat{p}_o q_o + y_c \hat{p}_g q_g)_{ik}^{n+1} \\ & + (x_c \tau_{omf} + y_c \tau_{gmf})_{ik}^{n+1} = \frac{V_{r,ik}}{\Delta t} \Delta_t \left[\phi (x_c \hat{p}_o S_o + y_c \hat{p}_g S_g) \right]_{ik} \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde,

$c = 1, 2, 3, \dots nc.$

Para el agua,

$$\Delta \left[T_w (\Delta p_w - \gamma_w \Delta D) \right]_{ik}^{n+1} + (b_w q_w)_{ik}^{n+1} + (\tau_{wmf})_{ik}^{n+1} = \frac{V_{r,ik}}{\Delta t} \Delta_t \left[\phi b_w S_w \right]_{ik} \quad (4.2)$$

Las ecuaciones de equilibrio termodinámico son :

$$(f_{co})_{ik}^{n+1} = (f_{cg})_{ik}^{n+1} \quad c = 1, 2, 3, \dots nc. \quad (4.3)$$

Las ecuaciones de presión capilar son discretizadas de la siguiente manera:

$$Pc_{go,ik}^{n+1} (S_g) = p_{g,ik}^{n+1} - p_{o,ik}^{n+1} \quad (4.4)$$

$$Pc_{wo,ik}^{n+1} (S_w) = p_{o,ik}^{n+1} - p_{w,ik}^{n+1} \quad (4.5)$$

Las ecuaciones de las restricción restantes :

$$(S_o + S_g + S_w)_{ik}^{n+1} = 1 \quad (4.6)$$

$$\left(\sum_{c=1}^{nc} x_c \right)_{ik}^{n+1} = 1 \quad (4.7)$$

$$\left(\sum_{c=1}^{nc} y_c \right)_{ik}^{n+1} = 1 \quad (4.8)$$

donde,

$$i = 1, 2, \dots, I; \quad k = 1, 2, \dots, K; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

En (4.1) y (4.2), se tiene que la transmisibilidad de las fases en las fracturas se define como:

$$T_o = \alpha \left(\frac{\hat{\rho}_o K_{ro}}{\mu_o} \right) \quad (4.9)$$

$$T_g = \alpha \left(\frac{\hat{\rho}_g K_{rg}}{\mu_g} \right) \quad (4.10)$$

$$T_w = \alpha \left(\frac{K_{rw}}{B_w \mu_w} \right) \quad (4.11)$$

donde α , es un factor geométrico⁴² que depende del sistema de coordenadas geométricas elegidas. La definición se muestra en el Apéndice C.

Para evaluar las transmisibilidades de los fluidos en las fronteras de las celdas del sistema de fracturas, se utiliza el concepto corriente arriba; es decir, las propiedades dentro de los paréntesis se evalúan a las condiciones de presión, saturación y composición de la celda de mayor potencial.

Las aproximaciones de la transferencia de fluidos matriz-fractura, mostradas en III.6, son las siguientes:

$$\left(\tau_{omf} \right)_{ik}^{n+1} = \left[T_{omf} (p_{om} - p_o) \right]_{ik}^{n+1} \quad (4.12)$$

$$\left(\tau_{gmf}\right)_{ik}^{n+1} = \left[T_{gmf}(p_{gm} - p_g)\right]_{ik}^{n+1} \quad (4.13)$$

y,

$$\left(\tau_{wmf}\right)_{ik}^{n+1} = \left[T_{wmf}(p_{wm} - p_w)\right]_{ik}^{n+1} \quad (4.14)$$

Nótese que $\tau_{pmf} = V_{r,ik} \hat{\tau}_{pmf}$, $p = o, g, w$. La transmisibilidad de las fases entre los bloques de matriz y las fracturas es definida como :

$$T_{omf} = \sigma V_r k_m \left(\frac{\hat{\rho}_o K_{ro}}{\mu_o} \right)_{mf} \quad (4.15)$$

$$T_{gmf} = \sigma V_r k_m \left(\frac{\hat{\rho}_g K_{rg}}{\mu_g} \right)_{mf} \quad (4.16)$$

$$T_{wmf} = \sigma V_r k_m \left(\frac{K_{rw}}{B_w \mu_w} \right)_{mf} \quad (4.17)$$

Para evaluar las transmisibilidades de los fluidos entre los bloques de matriz y las fracturas, se utiliza el concepto corriente arriba⁷, que puede ser las fracturas o los bloques de matriz. Es decir, las propiedades dentro del paréntesis se evalúan a las condiciones del medio de mayor potencial.

Las ecuaciones (4.4) a (4.8) pueden ser acopladas en las ecuaciones (4.1), (4.2) y (4.3) para reducir el número de ecuaciones y de incógnitas del sistema.

Las presiones de las fases gas y agua, p_g y p_w , pueden ser eliminadas usando las relaciones de presión capilar, dadas en (4.4) y (4.5):

$$p_g = p_o + Pc_{go} \quad (4.18)$$

$$p_w = p_o - Pc_{wo} \quad (4.19)$$

La saturación de aceite, S_o , puede ser eliminada usando la relación expresada en (4.6):

$$S_o = 1 - S_g - S_w \quad (4.20)$$

Las fracciones molares x_{nc} y y_1 son eliminadas mediante las expresiones (4.7) y (4.8),

$$x_{nc} = 1 - \sum_{c=1}^{nc-1} x_c \quad (4.21)$$

$$y_1 = 1 - \sum_{c=2}^{nc} y_c \quad (4.22)$$

La porosidad de cada medio en el nivel de tiempo $n+1$, se puede escribir en función de la compresibilidad de la roca, c_r , considerada como constante:

$$\phi^{n+1} = \phi^n [1 + c_r (p_o^{n+1} - p_o^n)] \quad (4.23)$$

Acoplando las expresiones (4.18) a (4.23) en (4.1) y (4.2), el sistema reducido de ecuaciones es el siguiente:

Para los componentes hidrocarburos:

$$\begin{aligned} & \Delta [x_c T_o (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D)]_{ik}^{n+1} + \Delta [y_c T_g (\Delta p_o - \Delta P c_{go} - \gamma_g \Delta D)]_i^{n+1} + [x_c \hat{\rho}_o q_o + y_c \hat{\rho}_g q_g]_{ik}^{n+1} \\ & + \left[(x_c T_o)_{mf} (p_{om} - p_o) + (y_c T_g)_{mf} (p_{om} - p_o + P c_{gom} - P c_{go}) \right]_{ik}^{n+1} \\ & = \frac{V_{r,jk}}{\Delta t} \Delta_i \left[\phi (x_c \hat{\rho}_o (1 - S_g - S_w) + y_c \hat{\rho}_g S_g) \right]_{ik} \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde,

$$c = 1, 2, 3, \dots, nc.$$

Para el agua,

$$\begin{aligned} & \Delta \left[T_w (\Delta p_o - \Delta P c_{wo} - \gamma_w \Delta D) \right]_{ik}^{n+1} + [b_w q_w]_{ik}^{n+1} \\ & + \left[T_w \mu_f (p_{om} - p_o - P c_{wom} + P c_{wo}) \right]_{ik}^{n+1} = \frac{V_{r,ik}}{\Delta t} \Delta_t [\phi b_w S_w]_{ik} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Las ecuaciones de equilibrio termodinámico no experimentan modificación alguna,

$$(f_{co})_{ik}^{n+1} = (f_{cg})_{ik}^{n+1} \quad c = 1, 2, 3, \dots, nc. \quad (4.26)$$

donde,

$$i = 1, 2, \dots, I; \quad k = 1, 2, \dots, K; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

El sistema definido por (4.24) a (4.26) para las fracturas, constituye en cada celda ik de la malla un subsistema de $2nc + 1$ ecuaciones algebraicas no lineales, con la presión de la fase aceite p_o , las saturaciones de la fases gas, S_g y agua S_w , y las fracciones molares de las fases aceite $x_1, x_2, \dots, x_{nc-1}$ y gas, y_2, y_3, \dots, y_{nc} como incógnitas primarias.

IV.1.2. Ecuaciones de los bloques de matriz

Siguiendo un procedimiento similar para los bloques de matriz, el sistema de ecuaciones diferenciales que modelan el flujo multifásico composicional en los bloques de matriz, mostradas en (3.9) a (3.16), aproximadas mediante diferencias finitas, son las siguientes.

Para los componentes hidrocarburos :

$$\begin{aligned} & - \left[(x_c T_o)_{mf} (p_{om} - p_o) + (y_c T_g)_{mf} (p_{om} + p_o + P c_{gom} - P c_{go}) \right]_{ik}^{n+1} \\ & = \frac{V_{r,ik}}{\Delta t} \Delta_t \left[\phi (x_c \hat{p}_o (1 - S_g - S_w) + y_c \hat{p}_g S_g) \right]_{m,ik} \end{aligned} \quad (4.27)$$

donde,

$$c = 1, 2, 3, \dots nc.$$

Para el agua,

$$- \left[T_{w_{mf}} (p_{om} - p_o - Pc_{wom} + Pc_{wo}) \right]_{ik}^{n+1} = \frac{V_{r,ik}}{\Delta t} \Delta_t [\phi b_w S_w]_{m,ik} \quad (4.28)$$

Las ecuaciones de equilibrio termodinámico son :

$$(f_{com})_{ik}^{n+1} = (f_{cgm})_{ik}^{n+1} \quad c = 1, 2, 3, \dots nc. \quad (4.29)$$

donde,

$$i = 1, 2, \dots I; k = 1, 2, \dots K; n = 0, 1, 2 \dots$$

El sistema definido por (4.27) a (4.29) para los bloques de matriz, constituye un subsistema de $2nc + 1$ ecuaciones algebraicas no lineales con la presión de la fase aceite p_{om} , las saturaciones de las fases gas, S_{gm} , y agua, S_{wm} , y las fracciones molares de las fases aceite $(x_1, x_2, \dots, x_{nc-1})_m$ y gas $(y_2, y_3, \dots, y_{nc})_m$ como incógnitas primarias.

Concluyendo, el sistema algebraico de ecuaciones en diferencias finitas, expresado por las ecuaciones (4.24) a (4.29), para el sistema de fracturas y los bloques de matriz, consiste en cada nivel de tiempo $n+1$ y, en cada celda ik de la malla de cálculo, de un conjunto de $2 \times (2nc+1)$ ecuaciones con el mismo número de incógnitas. Nótese que en cada celda se redujeron diez incógnitas y, por lo tanto, diez ecuaciones con respecto al sistema original.

IV.2. Solución del Sistema de Ecuaciones

El conjunto de ecuaciones en diferencias, que describe el comportamiento de flujo de fluidos en el yacimiento, ecuaciones (4.24) a (4.29), constituyen un sistema algebraico de ecuaciones no lineales. Debido a esto, su solución se obtiene mediante el método iterativo de Newton-Raphson, lo que genera en cada iteración un sistema lineal de ecuaciones. En el Apéndice D, se describe en detalle el método iterativo de Newton-Raphson. Los sistemas lineales de ecuaciones se solucionan en este trabajo empleando el método NSPIV⁴⁷, especializado en la solución de sistemas de ecuaciones de matrices dispersas.

IV.2.1 Linealización del sistema de ecuaciones: Método Semi-Implicito

El conjunto de ecuaciones (4.24) a (4.29) son no lineales. En este trabajo dicho sistema se resuelve mediante la extensión del método Semi-Implicito empleado por Branco y Rodríguez¹⁶ en la solución del problema de flujo multifásico composicional en yacimientos no fracturados.

Las ecuaciones de flujo de los componentes hidrocarburos en las fracturas, ecuación (4.24), son parcialmente linealizadas evaluando explícitamente las fracciones molares de los componentes en los términos de flujo, una iteración atrás. Los términos fuente y de acumulación al igual que el término de transferencia de fluidos son tratados implícitamente. Debido a que las ecuaciones de la matriz no tienen términos de flujo, únicamente existen el término de acumulación y el término de transferencia de fluidos matriz-fractura, las ecuaciones son tratadas de una manera totalmente implícita.

A continuación se presenta matemáticamente el procedimiento para linealizar el sistema de ecuaciones, dado por (4.24) a (4.29).

IV.2.2. Sistema algebraico lineal de ecuaciones

Para aplicar el método iterativo de Newton-Raphson y linealizar el sistema de ecuaciones (4.24) a (4.29), se definen las siguientes funciones de residuos. En la fractura se tiene :

Para los componentes hidrocarburos,

$$\begin{aligned}
 F_{c,ik}^{n+1} = & \Delta \left[x_c^v T_o^0 (\Delta p_o^{n+1} - \gamma_o^0 \Delta D) \right]_{ik} + \Delta \left[y_c^v T_g^0 (\Delta p_o^{n+1} - \Delta P c_{go}^{n+1} - \gamma_g^0 \Delta D) \right]_{ik} \\
 & + \left[x_c \hat{p}_o q_o + y_c \hat{p}_g q_g \right]_{ik}^{n+1} + \left[(x_c T_o)_{mf} (p_{om} - p_o) + (y_c T_g)_{mf} (p_{om} - p_o + P c_{gom} - P c_{go}) \right]_{ik}^{n+1} \\
 & - \frac{V_{r,ik}}{\Delta t} \Delta_t \left[\phi (x_c \hat{p}_o (1 - S_g - S_w) + y_c \hat{p}_g S_g) \right]_{ik} = 0
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

donde,

$$c = 1, 2, 3, \dots, nc$$

y,

$$T_o^0 = T_o(p_o^{n+1}, S_g^{n+1}, \chi_c^v); p = o, g \text{ y } \chi_c = x_c \text{ o } y_c$$

Para la fase agua,

$$\begin{aligned}
 F_{w,ik}^{n+1} = & \Delta \left[T_w (\Delta p_o - \Delta P c_{wo} - \gamma_w \Delta D) \right]_{ik}^{n+1} + \left[b_w q_w \right]_{ik}^{n+1} \\
 & + \left[T_{wmf} (p_{om} - p_o - P c_{wom} + P c_{wo}) \right]_{ik}^{n+1} - \frac{V_{r,ik}}{\Delta t} \Delta_t \left[\phi b_w S_w \right]_{ik} = 0
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Equilibrio termodinámico,

$$F f_{c,ik}^{n+1} = (f_{co})_{ik}^{n+1} - (f_{cg})_{ik}^{n+1} = 0 \quad c = 1, 2, 3, \dots, nc. \tag{4.32}$$

En los bloques de matriz :

Para los componentes hidrocarburos :

$$F_{cm,ik}^{n+1} = - \left[(x_c T_o)_{mf} (p_{om} - p_o) + (y_c T_g)_{mf} (p_{om} - p_o + Pc_{gom} - Pc_{go}) \right]_{ik}^{n+1} \quad (4.33)$$

$$- \frac{V_{r,ik}}{\Delta t} \Delta_t \left[\phi \left(x_c \hat{\rho}_o (1 - S_g - S_w) + y_c \hat{\rho}_g S_g \right) \right]_{m,ik} = 0$$

donde,

$$c = 1, 2, 3, \dots, nc.$$

Para la fase agua,

$$F_{wm,ik}^{n+1} = - \left[T_{wmf} (p_{om} - p_o - Pc_{wom} + Pc_{wo}) \right]_{ik}^{n+1} - \frac{V_{r,ik}}{\Delta t} \Delta_t [\phi b_w S_w]_{m,ik} = 0 \quad (4.34)$$

Y finalmente, para las ecuaciones de equilibrio termodinámico,

$$Ff_{cm,ik}^{n+1} = (f_{com})_{ik}^{n+1} - (f_{cgm})_{ik}^{n+1} = 0 \quad c = 1, 2, 3, \dots, nc. \quad (4.35)$$

Definiendo los siguientes vectores de incógnitas o variables primarias, en la celda ik , para las fracturas:

$$\mathbf{U}_{f,ik} = \left(p_o, S_g, S_w, x_1, x_2, \dots, x_{nc-1}, y_2, y_3, \dots, y_{nc} \right)_{ik}^T \quad (4.36)$$

y,

$$\mathbf{W}_{f,ik} = \left(p_o, S_g, S_w \right)_{ik}^T \quad (4.37)$$

Para los bloques de matriz,

$$\mathbf{U}_{m,jk} = \left(p_o, S_g, S_w, x_1, x_2, \dots, x_{nc-1}, y_2, y_3, \dots, y_{nc} \right)_{m,jk}^T \quad (4.38)$$

y,

$$\mathbf{W}_{m,jk} = \left(p_o, S_g, S_w \right)_{m,jk}^T \quad (4.39)$$

Entonces, la dependencia de las funciones de residuos, expresiones (4.30) a (4.35), es en forma general :

$$F_{c,jk} = F_{c,jk} \left(\mathbf{W}_{f,jk-1}, \mathbf{W}_{f,j-1k}, \mathbf{U}_{f,jk}, \mathbf{U}_{m,jk}, \mathbf{W}_{f,j+1k}, \mathbf{W}_{f,jk+1} \right) = 0 \quad (4.40)$$

$$F_{w,jk} = F_{w,jk} \left(\mathbf{W}_{f,jk-1}, \mathbf{W}_{f,j-1k}, \mathbf{W}_{f,jk}, \mathbf{W}_{m,jk}, \mathbf{W}_{f,j+1k}, \mathbf{W}_{f,jk+1} \right) = 0 \quad (4.41)$$

$$Ff_{c,jk} = Ff_{c,jk} \left(\mathbf{U}_{f,jk} \right) = 0 \quad (4.42)$$

$$F_{cm,jk} = F_{cm,jk} \left(\mathbf{U}_{f,jk}, \mathbf{U}_{m,jk} \right) = 0 \quad (4.43)$$

$$F_{wm,jk} = F_{wm,jk} \left(\mathbf{W}_{f,jk}, \mathbf{W}_{m,jk} \right) = 0 \quad (4.44)$$

$$Ff_{cm,jk} = Ff_{cm,jk} \left(\mathbf{U}_{m,jk} \right) = 0 \quad (4.45)$$

donde,

$$c = 1, 2, 3, \dots, nc ; i = 1, 2, \dots, I ; k = 1, 2, \dots, K .$$

El algoritmo iterativo de solución de Newton-Raphson se establece expandiendo las funciones de residuos en la iteración $(\nu + 1)$, mediante el truncamiento de la serie de Taylor, alrededor del nivel iterativo conocido (ν) . Esto conduce al siguiente sistema de ecuaciones lineales:

En las fracturas:

Para los componentes hidrocarburos :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j,l} \left\{ \frac{\partial F_{c,jk}^v}{\partial p_{o,j,l}} \delta p_{o,j,l}^{v+1} + \frac{\partial F_{c,jk}^v}{\partial S_{g,j,l}} \delta S_{g,j,l}^{v+1} + \frac{\partial F_{c,jk}^v}{\partial S_{w,j,l}} \delta S_{w,j,l}^{v+1} \right\} + \frac{\partial F_{c,jk}^v}{\partial x_{1,jk}} \delta x_{1,jk}^{v+1} + \frac{\partial F_{c,jk}^v}{\partial x_{2,jk}} \delta x_{2,jk}^{v+1} + \dots + \\
 & \frac{\partial F_{c,jk}^v}{\partial x_{nc-1,jk}} \delta x_{nc-1,jk}^{v+1} + \frac{\partial F_{c,jk}^v}{\partial y_{2,jk}} \delta y_{2,jk}^{v+1} + \dots + \frac{\partial F_{c,jk}^v}{\partial y_{nc,jk}} \delta y_{nc,jk}^{v+1} + \frac{\partial F_{c,jk}^v}{\partial p_{om,jk}} \delta p_{om,jk}^{v+1} + \frac{\partial F_{c,jk}^v}{\partial S_{gm,jk}} \delta S_{gm,jk}^{v+1} + \\
 & \frac{\partial F_{c,jk}^v}{\partial S_{wm,jk}} \delta S_{wm,jk}^{v+1} + \frac{\partial F_{c,jk}^v}{\partial x_{1m,jk}} \delta x_{1m,jk}^{v+1} + \frac{\partial F_{c,jk}^v}{\partial x_{2m,jk}} \delta x_{2m,jk}^{v+1} + \dots + \frac{\partial F_{c,jk}^v}{\partial x_{nc-1m,jk}} \delta x_{nc-1m,jk}^{v+1} + \\
 & \frac{\partial F_{c,jk}^v}{\partial y_{2m,jk}} \delta y_{2m,jk}^{v+1} + \dots + \frac{\partial F_{c,jk}^v}{\partial y_{ncm,jk}} \delta y_{ncm,jk}^{v+1} = -F_{c,jk}^v
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

donde,

$$c = 1, 2, 3, \dots, nc.$$

Para la fase agua,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j,l} \left\{ \frac{\partial F_{w,jk}^v}{\partial p_{o,j,l}} \delta p_{o,j,l}^{v+1} + \frac{\partial F_{w,jk}^v}{\partial S_{w,j,l}} \delta S_{w,j,l}^{v+1} \right\} + \frac{\partial F_{w,jk}^v}{\partial p_{om,jk}} \delta p_{om,jk}^{v+1} + \frac{\partial F_{w,jk}^v}{\partial S_{g,jk}} \delta S_{g,jk}^{v+1} \\
 & + \frac{\partial F_{w,jk}^v}{\partial S_{wm,jk}} \delta S_{wm,jk}^{v+1} = -F_{w,jk}^v
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

donde,

$$j, l = i, k-1; i-1, k; i, k; i+1, k; i, k+1$$

Equilibrio termodinámico,

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial F_{c,jk}^v}{\partial p_{o,jk}} \delta p_{o,jk}^{v+1} + \frac{\partial F_{c,jk}^v}{\partial S_{g,jk}} \delta S_{g,jk}^{v+1} + \frac{\partial F_{c,jk}^v}{\partial x_{1,jk}} \delta x_{1,jk}^{v+1} + \frac{\partial F_{c,jk}^v}{\partial x_{2,jk}} \delta x_{2,jk}^{v+1} + \dots + \frac{\partial F_{c,jk}^v}{\partial x_{nc-1,jk}} \delta x_{nc-1,jk}^{v+1} + \\
 & \frac{\partial F_{c,jk}^v}{\partial y_{2,jk}} \delta y_{2,jk}^{v+1} + \dots + \frac{\partial F_{c,jk}^v}{\partial y_{nc,jk}} \delta y_{nc,jk}^{v+1} = -F_{c,jk}^v
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

En los bloques de matriz :

Para los componentes hidrocarburos :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial F_{cm,jk}^v}{\partial p_{o,jk}} \delta p_{o,jk}^{v+1} + \frac{\partial F_{cm,jk}^v}{\partial S_{g,jk}} \delta S_{g,jk}^{v+1} + \frac{\partial F_{cm,jk}^v}{\partial S_{w,jk}} \delta S_{w,jk}^{v+1} + \frac{\partial F_{cm,jk}^v}{\partial x_{1,jk}} \delta x_{1,jk}^{v+1} + \frac{\partial F_{cm,jk}^v}{\partial x_{2,jk}} \delta x_{2,jk}^{v+1} + \dots + \\
 & + \frac{\partial F_{cm,jk}^v}{\partial x_{nc-1,jk}} \delta x_{nc-1,jk}^{v+1} + \frac{\partial F_{cm,jk}^v}{\partial y_{2,jk}} \delta y_{2,jk}^{v+1} + \dots + \frac{\partial F_{cm,jk}^v}{\partial y_{nc,jk}} \delta y_{nc,jk}^{v+1} + \frac{\partial F_{cm,jk}^v}{\partial p_{o,m,jk}} \delta p_{o,m,jk}^{v+1} + \\
 & \frac{\partial F_{cm,jk}^v}{\partial S_{gm,jk}} \delta S_{gm,jk}^{v+1} + \frac{\partial F_{cm,jk}^v}{\partial S_{wm,jk}} \delta S_{wm,jk}^{v+1} + \frac{\partial F_{cm,jk}^v}{\partial x_{1m,jk}} \delta x_{1m,jk}^{v+1} + \frac{\partial F_{cm,jk}^v}{\partial x_{2m,jk}} \delta x_{2m,jk}^{v+1} + \dots + \\
 & \frac{\partial F_{cm,jk}^v}{\partial x_{nc-1m,jk}} \delta x_{nc-1m,jk}^{v+1} + \frac{\partial F_{cm,jk}^v}{\partial y_{2m,jk}} \delta y_{2m,jk}^{v+1} + \dots + \frac{\partial F_{cm,jk}^v}{\partial y_{ncm,jk}} \delta y_{ncm,jk}^{v+1} = -F_{cm,jk}^v
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

Para la fase agua,

$$\frac{\partial F_{wm,jk}^v}{\partial p_{o,jk}} \delta p_{o,jk}^{v+1} + \frac{\partial F_{wm,jk}^v}{\partial S_{w,jk}} \delta S_{w,jk}^{v+1} + \frac{\partial F_{wm,jk}^v}{\partial p_{o,m,jk}} \delta p_{o,m,jk}^{v+1} + \frac{\partial F_{wm,jk}^v}{\partial S_{wm,jk}} \delta S_{wm,jk}^{v+1} = -F_{wm,jk}^v \tag{4.50}$$

Equilibrio termodinámico,

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial Ff_{cm,jk}^v}{\partial p_{o,m,jk}} \delta p_{o,m,jk}^{v+1} + \frac{\partial Ff_{cm,jk}^v}{\partial S_{gm,jk}} \delta S_{gm,jk}^{v+1} + \frac{\partial Ff_{cm,jk}^v}{\partial x_{1m,jk}} \delta x_{1m,jk}^{v+1} + \frac{\partial Ff_{cm,jk}^v}{\partial x_{2m,jk}} \delta x_{2m,jk}^{v+1} + \dots + \\
 & \frac{\partial Ff_{cm,jk}^v}{\partial x_{nc-1m,jk}} \delta x_{nc-1m,jk}^{v+1} + \frac{\partial Ff_{cm,jk}^v}{\partial y_{2m,jk}} \delta y_{2m,jk}^{v+1} + \dots + \frac{\partial Ff_{cm,jk}^v}{\partial y_{ncm,jk}} \delta y_{ncm,jk}^{v+1} = -Ff_{cm,jk}^v
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

Se tiene en (4.46) a (4.51), un sistema de ecuaciones, en donde las incógnitas son los cambios iterativos de las presiones, saturaciones y composiciones en cada una de las celdas, tanto en las fracturas como en los bloques de matriz

$(\delta p_o, \delta S_g, \delta S_w, \delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_{nc-1}, \delta y_2, \delta y_3, \dots, \delta y_{nc})_{ik}^{v+1}$, y,

$(\delta p_o, \delta S_g, \delta S_w, \delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_{nc-1}, \delta y_2, \delta y_3, \dots, \delta y_{nc})_{m,jk}^{v+1}$, donde, $i = 1, 2, \dots, I$, $k = 1, 2, \dots, K$.

En particular $\delta p_{o,jk}^{v+1} = p_{o,jk}^{v+1} - p_{o,jk}^v$; las incógnitas restantes se definen similarmente.

En los bloques de matriz :

Para los componentes hidrocarburos :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial F_{cm,jk}^v}{\partial p_{o,jk}} \delta p_{o,jk}^{v+1} + \frac{\partial F_{cm,jk}^v}{\partial S_{g,jk}} \delta S_{g,jk}^{v+1} + \frac{\partial F_{cm,jk}^v}{\partial S_{w,jk}} \delta S_{w,jk}^{v+1} + \frac{\partial F_{cm,jk}^v}{\partial x_{1,jk}} \delta x_{1,jk}^{v+1} + \frac{\partial F_{cm,jk}^v}{\partial x_{2,jk}} \delta x_{2,jk}^{v+1} + \dots + \\
 & + \frac{\partial F_{cm,jk}^v}{\partial x_{nc-1,jk}} \delta x_{nc-1,jk}^{v+1} + \frac{\partial F_{cm,jk}^v}{\partial y_{2,jk}} \delta y_{2,jk}^{v+1} + \dots + \frac{\partial F_{cm,jk}^v}{\partial y_{nc,jk}} \delta y_{nc,jk}^{v+1} + \frac{\partial F_{cm,jk}^v}{\partial p_{o,m,jk}} \delta p_{o,m,jk}^{v+1} + \\
 & \frac{\partial F_{cm,jk}^v}{\partial S_{gm,jk}} \delta S_{gm,jk}^{v+1} + \frac{\partial F_{cm,jk}^v}{\partial S_{wm,jk}} \delta S_{wm,jk}^{v+1} + \frac{\partial F_{cm,jk}^v}{\partial x_{1m,jk}} \delta x_{1m,jk}^{v+1} + \frac{\partial F_{cm,jk}^v}{\partial x_{2m,jk}} \delta x_{2m,jk}^{v+1} + \dots + \\
 & \frac{\partial F_{cm,jk}^v}{\partial x_{nc-1m,jk}} \delta x_{nc-1m,jk}^{v+1} + \frac{\partial F_{cm,jk}^v}{\partial y_{2m,jk}} \delta y_{2m,jk}^{v+1} + \dots + \frac{\partial F_{cm,jk}^v}{\partial y_{ncm,jk}} \delta y_{ncm,jk}^{v+1} = -F_{cm,jk}^v
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

Para la fase agua,

$$\frac{\partial F_{wm,jk}^v}{\partial p_{o,jk}} \delta p_{o,jk}^{v+1} + \frac{\partial F_{wm,jk}^v}{\partial S_{w,jk}} \delta S_{w,jk}^{v+1} + \frac{\partial F_{wm,jk}^v}{\partial p_{o,m,jk}} \delta p_{o,m,jk}^{v+1} + \frac{\partial F_{wm,jk}^v}{\partial S_{wm,jk}} \delta S_{wm,jk}^{v+1} = -F_{wm,jk}^v \tag{4.50}$$

Equilibrio termodinámico,

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial Ff_{cm,jk}^v}{\partial p_{om,jk}} \delta p_{om,jk}^{v+1} + \frac{\partial Ff_{cm,jk}^v}{\partial S_{gm,jk}} \delta S_{gm,jk}^{v+1} + \frac{\partial Ff_{cm,jk}^v}{\partial x_{1m,jk}} \delta x_{1m,jk}^{v+1} + \frac{\partial Ff_{cm,jk}^v}{\partial x_{2m,jk}} \delta x_{2m,jk}^{v+1} + \dots + \\
 & \frac{\partial Ff_{cm,jk}^v}{\partial x_{nc-1m,jk}} \delta x_{nc-1m,jk}^{v+1} + \frac{\partial Ff_{cm,jk}^v}{\partial y_{2m,jk}} \delta y_{2m,jk}^{v+1} + \dots + \frac{\partial Ff_{cm,jk}^v}{\partial y_{ncm,jk}} \delta y_{ncm,jk}^{v+1} = -Ff_{cm,jk}^v
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

Se tiene en (4.46) a (4.51), un sistema de ecuaciones, en donde las incógnitas son los cambios iterativos de las presiones, saturaciones y composiciones en cada una de las celdas, tanto en las fracturas como en los bloques de matriz $(\delta p_o, \delta S_g, \delta S_w, \delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_{nc-1}, \delta y_2, \delta y_3, \dots, \delta y_{nc})_{ik}^{v+1}$, y, $(\delta p_o, \delta S_g, \delta S_w, \delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_{nc-1}, \delta y_2, \delta y_3, \dots, \delta y_{nc})_{m,jk}^{v+1}$ donde, $i = 1, 2, \dots, I$, $k = 1, 2, \dots, K$.

En particular $\delta p_{o,jk}^{v+1} = p_{o,jk}^{v+1} - p_{o,jk}^v$; las incógnitas restantes se definen similarmente.

Nótese que con el fin de simplificar la escritura, el superíndice correspondiente al nivel de tiempo $n+1$ fue eliminado de las expresiones (4.46) a (4.51).

El proceso iterativo del nivel de tiempo $n+1$ se inicia comúnmente con la siguiente estimación de la solución :

Para las fracturas,

$$\begin{aligned} & \left(p_o, S_g, S_w, x_1, x_2, \dots, x_{nc-1}, y_2, y_3, \dots, y_{nc} \right)_{ik}^0 = \\ & \left(p_o, S_g, S_w, x_1, \delta x_2, \dots, x_{nc-1}, y_2, y_3, \dots, y_{nc} \right)_{ik}^n \end{aligned} \quad (4.52)$$

Para los bloques de matriz:

$$\begin{aligned} & \left(p_o, S_g, S_w, x_1, x_2, \dots, x_{nc-1}, y_2, y_3, \dots, y_{nc} \right)_{m,ik}^0 = \\ & \left(p_o, S_g, S_w, x_1, \delta x_2, \dots, x_{nc-1}, y_2, y_3, \dots, y_{nc} \right)_{m,ik}^n \end{aligned} \quad (4.53)$$

Y termina cuando los cambios iterativos de las incógnitas en la fractura y la matriz son menor a una tolerancia estipulada, ϵ . Por ejemplo, $|\delta p_{o,ik}^{v+1}| < \epsilon$; las incógnitas restantes se definen similarmente, tanto para las fracturas como para los bloques de matriz.

El sistema lineal de ecuaciones obtenido mediante la aplicación del método iterativo de Newton-Raphson en la iteración $(v+1)$, expresiones (4.46) a (4.51), puede escribirse en forma compacta como sigue :

$$[J]^v \delta U^{v+1} = -F \quad (4.54)$$

donde $[J]$ se conoce como la matriz Jacobiana, δU es el vector de incógnitas y F es el vector de residuos.

La estructura matricial del subsistema de ecuaciones para la celda ik (4.46) a (4.51), es el siguiente :

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} E_{ff} & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix}_{ik}^v \begin{bmatrix} \delta U_f \\ \delta U_m \end{bmatrix}_{i,k-1}^{v+1} + \begin{bmatrix} C_{ff} & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix}_{ik}^v \begin{bmatrix} \delta U_f \\ \delta U_m \end{bmatrix}_{i-1,k}^{v+1} + \begin{bmatrix} A_{ff} & A_{fm} \\ A_{mf} & A_{mm} \end{bmatrix}_{ik}^v \begin{bmatrix} \delta U_f \\ \delta U_m \end{bmatrix}_{i,k}^{v+1} + \\
 & \begin{bmatrix} B_{ff} & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix}_{ik}^v \begin{bmatrix} \delta U_f \\ \delta U_m \end{bmatrix}_{i+1,k}^{v+1} + \begin{bmatrix} D_{ff} & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix}_{ik}^v \begin{bmatrix} \delta U_f \\ \delta U_m \end{bmatrix}_{i,k+1}^{v+1} = - \begin{bmatrix} F_f \\ F_m \end{bmatrix}_{ik}^v
 \end{aligned} \quad (4.55)$$

donde $E_{ff}, C_{ff}, A_{ff}, A_{fm}, B_{ff}, D_{ff}, A_{mf}, A_{mm}$ son submatrices del orden $(2nc+1) \times (2nc+1)$.

Las submatrices A_{ff} y A_{fm} , contienen las derivadas de las funciones de residuos de las fracturas con respecto a las incógnitas de la fractura y de la matriz en la celda ik , respectivamente. Las submatrices A_{mf} y A_{mm} , contienen las derivadas de las funciones de residuos de los bloques de matriz con respecto a las incógnitas de la fractura y de la matriz en la celda ik , respectivamente. Las submatrices E_{ff} , C_{ff} , B_{ff} y D_{ff} contienen las derivadas de las funciones de residuos de las fracturas con respecto a las incógnitas de las fracturas en las celdas $i, k-1$; $i-1, k$; $i+1, k$ e $i, k+1$, respectivamente. Los elementos de cada submatriz se muestran en el Apéndice E.

IV.2.3. Reducción matricial del sistema de ecuaciones

La estructura matricial del sistema lineal de ecuaciones (4.55), permite reducirlo a un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas por celda, similar al que se obtiene en el caso de yacimientos homogéneos de aceite negro. La reducción del sistema de ecuaciones se hace en tres etapas, que a continuación se discuten.

Primera reducción

Nótese que la estructura matricial del sistema de ecuaciones mostrado en (4.55), permite llevar a cabo una primera reducción del problema matricial acoplando las ecuaciones de la matriz en las ecuaciones de la fractura. Para esto, el subsistema de ecuaciones (4.55) puede escribirse de la siguiente manera :

Ecuaciones de las fracturas :

$$E_{ff,jk}^v \delta U_{f,jk-1}^{v+1} + C_{ff,jk}^v \delta U_{f,j-1k}^{v+1} + A_{ff,jk}^v \delta U_{f,jk}^{v+1} + A_{fm,jk}^v \delta U_{m,jk}^{v+1} + B_{ff,jk}^v \delta U_{f,j+1k}^{v+1} + D_{ff,jk}^v \delta U_{f,jk+1}^{v+1} = -F_{fjk}^v \quad (4.56)$$

Ecuaciones de los bloques de matriz :

$$A_{mf,jk}^v \delta U_{f,jk}^{v+1} + A_{mm,jk}^v \delta U_{m,jk}^{v+1} = -F_{m,jk}^v \quad (4.57)$$

Ahora bien, de la expresión (4.57), se resuelve para las incógnitas de la matriz $\delta U_{m,jk}^{v+1}$, en términos de las incógnitas de la fractura, $\delta U_{f,jk}^{v+1}$, como sigue :

$$\delta U_{m,jk}^{v+1} = -F_{m,jk}^{*v} - A_{mf,jk}^{*v} \delta U_{f,jk}^{v+1} \quad (4.58)$$

donde,

$$A_{mf,jk}^{*v} = [A_{mm,jk}^v]^{-1} A_{mf,jk}^v \quad (4.59)$$

y,

$$F_{m,jk}^{*v} = [A_{mm,jk}^v]^{-1} F_{m,jk}^v \quad (4.60)$$

La expresión (4.58), representa la solución de las incógnitas en la matriz, en función de las incógnitas de la fractura.

Sustituyendo (4.58) , en la ecuación de las fracturas, expresión (4.56), se tiene lo siguiente :

$$E_{ff,jk}^v \delta U_{f,jk-1}^{v+1} + C_{ff,jk}^v \delta U_{f,j-1k}^{v+1} + A_{ff,jk}^v \delta U_{f,jk}^{v+1} + A_{fm,jk}^v \left[-F_{m,jk}^{*v} - A_{mf,jk}^{*v} \delta U_{f,jk}^{v+1} \right] + \quad (4.61)$$

$$B_{ff,jk}^v \delta U_{f,j+1k}^{v+1} + D_{ff,jk}^v \delta U_{f,jk+1}^{v+1} = -F_{f,jk}^{*v}$$

Agrupando :

$$E_{ff,jk}^v \delta U_{f,jk-1}^{v+1} + C_{ff,jk}^v \delta U_{f,j-1k}^{v+1} + A_{ff,jk}^{*v} \delta U_{f,jk}^{v+1} + B_{ff,jk}^v \delta U_{f,j+1k}^{v+1} + D_{ff,jk}^v \delta U_{f,jk+1}^{v+1} = -F_{f,jk}^{*v} \quad (4.62)$$

Siendo,

$$A_{ff,jk}^{*v} = A_{ff,jk}^v - A_{fm,jk}^v A_{mf,jk}^{*v} \quad (4.63)$$

$$F_{f,jk}^{*v} = F_{f,jk}^v - A_{fm,jk}^v F_{m,jk}^{*v} \quad (4.64)$$

Nótese que el subsistema de ecuaciones (4.62), consiste de $2nc+1$ ecuaciones con $2nc+1$ incógnitas por cada celda de la malla de cálculo. El subsistema de ecuaciones (4.62), contiene sólo incógnitas de las fracturas, o sea, δU_f^{v+1} .

La estructura matricial del subsistema de ecuaciones reducido (4.62), posee una estructura matricial similar a la que se obtiene para un yacimiento homogéneo.

El acoplamiento de las ecuaciones, en la manera descrita, reduce la cantidad de memoria y de tiempo de cómputo requeridos en la simulación de yacimientos fracturados. Con esto, los requerimientos son ligeramente mayores a los correspondientes al caso de yacimientos no fracturados.

Segunda reducción

El subsistema de ecuaciones (4.62), puede ser resuelto de una manera óptima considerando su estructura matricial. Primero, las nc ecuaciones de equilibrio termodinámico pueden ser acopladas en las ecuaciones de flujo^{16,20}, para reducir el sistema a $nc+1$ ecuaciones con $nc+1$ incógnitas. Esto se puede hacer particionando el sistema (4.62), para la celda ik , de la siguiente manera :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E_{ul} & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix}_{ik}^v \begin{bmatrix} \delta U_u \\ \delta U_l \end{bmatrix}_{i,k-1}^{v+1} + \begin{bmatrix} C_{ul} & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix}_{ik}^v \begin{bmatrix} \delta U_u \\ \delta U_l \end{bmatrix}_{i-1,k}^{v+1} + \begin{bmatrix} A_{ul}^* & A_{ur}^* \\ A_{ll}^* & A_{lr}^* \end{bmatrix}_{ik}^v \begin{bmatrix} \delta U_u \\ \delta U_l \end{bmatrix}_{ik}^{v+1} + \\ \begin{bmatrix} b_{ul} \\ [0] \end{bmatrix}_{ik}^v \begin{bmatrix} \delta U_u \\ \delta U_l \end{bmatrix}_{i+1,k}^{v+1} + \begin{bmatrix} d_{ul} \\ [0] \end{bmatrix}_{ik}^v \begin{bmatrix} \delta U_u \\ \delta U_l \end{bmatrix}_{i,k+1}^{v+1} = - \begin{bmatrix} F_u^* \\ F_l^* \end{bmatrix}_{ik}^v \end{aligned} \quad (4.65)$$

donde,

$$\begin{aligned} F_{f,jk}^{*v} &= (F_u^{*v}, F_l^{*v})_{ik}^T, \quad \delta U_{f,jk} = (\delta U_u, \delta U_l)_{ik}^T; \\ \delta U_{u,jk} &= (\delta p_o, \delta S_g, \delta S_w, \delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_{nc-2})_{ik}^T; \quad \delta U_{l,jk} = (\delta x_{nc-1}, \delta y_2, \delta y_3, \dots, \delta y_{nc})_{ik}^T; \end{aligned}$$

Nótese que los subíndices ff para las submatrices y f para los subvectores fueron omitidos en la ecuación (4.65), para simplificar la notación.

El sistema de ecuaciones (4.65), puede escribirse como :

$$\begin{aligned} E_{ul,jk}^v \delta U_{u,jk-1}^{v+1} + C_{ul,jk}^v \delta U_{u,j-1,k}^{v+1} + A_{ul,jk}^{*v} \delta U_{u,jk}^{v+1} + A_{ur,jk}^{*v} \delta U_{l,jk}^{v+1} + \\ + B_{ul,jk}^v \delta U_{u,j+1,k}^{v+1} + D_{ul,jk}^v \delta U_{u,jk+1}^{v+1} = -F_{u,jk}^{*v} \end{aligned} \quad (4.66)$$

y,

$$A_{ll,jk}^{*v} \delta U_{u,jk}^{v+1} + A_{lr,jk}^{*v} \delta U_{l,jk}^{v+1} = -F_{l,jk}^{*v} \quad (4.67)$$

Las submatrices con subíndices ul son del orden $(nc + 1) \times (nc + 1)$, con subíndices ur son del orden $(nc + 1) \times (nc)$, con subíndices ll son del orden $(nc) \times (nc + 1)$ y con subíndices lr son del orden $(nc) \times (nc)$. Los subvectores con subíndices u y l son del orden $(nc + 1)$ y (nc) , respectivamente.

Resolviendo en (4.67) para $\delta U_{l,jk}^{v+1}$, en términos de $\delta U_{u,jk}^{v+1}$, se llega a :

$$\delta U_{l,jk}^{v+1} = -F_{l,jk}^{**v} - A_{ll,jk}^{**v} \delta U_{u,jk}^{v+1} \quad (4.68)$$

Siendo,

$$F_{l,jk}^{**v} = [A_{lr,jk}^{*v}]^{-1} F_{l,jk}^{*v} \quad (4.69)$$

y,

$$A_{ll,jk}^{**v} = [A_{lr,jk}^{*v}]^{-1} A_{ll,jk}^{*v} \quad (4.70)$$

Ahora la ecuación (4.68) puede ser sustituida en la expresión (4.66) :

$$E_{ul,jk}^v \delta U_{u,jk-1}^{v+1} + C_{ul,jk}^v \delta U_{u,j-1k}^{v+1} + A_{ul,jk}^{**v} \delta U_{u,jk}^{v+1} + B_{ul,jk}^v \delta U_{u,j+1k}^{v+1} + D_{ul,jk}^v \delta U_{u,jk+1}^{v+1} = -F_{u,jk}^{**v} \quad (4.71)$$

Donde los superíndices ** denotan aquellas submatrices y subvectores que resultan después de acoplar la ecuación (4.68) en la ecuación (4.66).

Siendo,

$$A_{ul,jk}^{**v} = A_{ul,jk}^{*v} - A_{ur,jk}^{*v} A_{ll,jk}^{*v} \quad (4.72)$$

y,

$$F_{u,jk}^{**v} = F_{u,jk}^{*v} - A_{ur,jk}^{*v} F_{l,jk}^{*v} \quad (4.73)$$

Nótese que el subsistema reducido (4.71), soluciona un sistema de $nc+1$ ecuaciones con $nc+1$ incógnitas.

Tercera reducción

Ahora, una tercera reducción puede realizarse considerando que el subsistema (4.71), puede particionarse de la siguiente manera :

$$\begin{bmatrix} e_{ul} & [0] \\ e_{ll} & [0] \end{bmatrix}_{ik}^v \begin{bmatrix} \delta u_u \\ \delta u_l \end{bmatrix}_{i,k-1}^{v+1} + \begin{bmatrix} c_{ul} & [0] \\ c_{ll} & [0] \end{bmatrix}_{ik}^v \begin{bmatrix} \delta u_u \\ \delta u_l \end{bmatrix}_{i-1,k}^{v+1} + \begin{bmatrix} a_{ul} & a_{ur} \\ a_{ll} & a_{lr} \end{bmatrix}_{ik}^v \begin{bmatrix} \delta u_u \\ \delta u_l \end{bmatrix}_{ik}^{v+1} + \begin{bmatrix} b_{ul} & [0] \\ b_{ll} & [0] \end{bmatrix}_{ik}^v \begin{bmatrix} \delta u_u \\ \delta u_l \end{bmatrix}_{i+1,k}^{v+1} + \begin{bmatrix} d_{ul} & [0] \\ d_{ll} & [0] \end{bmatrix}_{ik}^v \begin{bmatrix} \delta u_u \\ \delta u_l \end{bmatrix}_{i,k+1}^{v+1} = - \begin{bmatrix} f_u \\ f_l \end{bmatrix}_{ik}^v \quad (4.74)$$

En el anterior subsistema de ecuaciones, las submatrices con subíndices ul son ahora del orden (3×3) , con subíndices ur son del orden $(3) \times (nc - 2)$, con subíndices ll son del orden $(nc - 2) \times (3)$ y con subíndices lr son del orden $(nc - 2) \times (nc - 2)$. Los subvectores con subíndices u y l son del orden (3) y $(nc - 2)$, respectivamente.

Nótese que, $\delta u_{u,jk} = (\delta p_\sigma, \delta S_g, \delta S_w)_{jk}^T$ y $\delta u_{l,jk} = (\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_{nc-2})_{jk}^T$

El subsistema (4.74) también puede escribirse como :

$$\begin{aligned} e_{ul,jk}^v \delta u_{u,jk-1}^{v+1} + c_{ul,jk}^v \delta u_{u,j-1k}^{v+1} + a_{ul,jk}^v \delta u_{u,jk}^{v+1} + a_{ur,jk}^v \delta u_{l,jk}^{v+1} + \\ b_{ul,jk}^v \delta u_{u,j+1k}^{v+1} + d_{ul,jk}^v \delta u_{u,jk+1}^{v+1} = -f_{u,jk}^v \end{aligned} \quad (4.75)$$

y,

$$\begin{aligned} e_{ll,jk}^v \delta u_{u,jk-1}^{v+1} + c_{ll,jk}^v \delta u_{u,j-1k}^{v+1} + a_{ll,jk}^v \delta u_{u,jk}^{v+1} + a_{lr,jk}^v \delta u_{l,jk}^{v+1} + \\ b_{ll,jk}^v \delta u_{u,j+1k}^{v+1} + d_{ll,jk}^v \delta u_{u,jk+1}^{v+1} = -f_{l,jk}^v \end{aligned} \quad (4.76)$$

Resolviendo para $\delta u_{u,jk}^{v+1}$ en la ecuación (4.76) :

$$\delta u_{l,jk}^{v+1} = -f_{l,jk}^{*v} - e_{ll,jk}^{*v} \delta u_{u,jk-1}^{v+1} - c_{ll,jk}^{*v} \delta u_{u,j-1k}^{v+1} - a_{ll,jk}^{*v} \delta u_{u,jk}^{v+1} - b_{ll,jk}^{*v} \delta u_{u,j+1k}^{v+1} - d_{ll,jk}^{*v} \delta u_{u,jk+1}^{v+1} \quad (4.77)$$

Sustituyendo (4.77) en (4.75), se obtiene:

$$e_{ul,jk}^{*v} \delta u_{u,l,k-1}^{v+1} + c_{ul,jk}^{*v} \delta u_{u,j-1k}^{v+1} + a_{ul,jk}^{*v} \delta u_{u,jk}^{v+1} + b_{ul,jk}^{*v} \delta u_{u,j+1k}^{v+1} + d_{ul,jk}^{*v} \delta u_{u,jk+1}^{v+1} = -f_{u,jk}^{*v} \quad (4.78)$$

Siendo,

$$e_{ul,jk}^{*v} = e_{ul,jk}^v - a_{ur,jk}^v [a_{lr,jk}^v]^{-1} e_{ll,jk}^v \quad (4.79)$$

$$c_{ul,jk}^{*v} = c_{ul,jk}^v - a_{ur,jk}^v [a_{lr,jk}^v]^{-1} c_{ll,jk}^v \quad (4.80)$$

$$a_{ul,jk}^{*v} = a_{ul,jk}^v - a_{ur,jk}^v [a_{lr,jk}^v]^{-1} a_{ll,jk}^v \quad (4.81)$$

$$b_{ul,jk}^{*v} = b_{ul,jk}^v - a_{ur,jk}^v [a_{lr,jk}^v]^{-1} b_{ll,jk}^v \quad (4.82)$$

$$d_{ul,jk}^{*v} = d_{ul,jk}^v - a_{ur,jk}^v [a_{lr,jk}^v]^{-1} d_{ll,jk}^v \quad (4.83)$$

$$f_{u,jk}^{*v} = -f_{u,jk}^v + a_{ur,jk}^v [a_{lr,jk}^v]^{-1} f_{l,jk}^v \quad (4.84)$$

El subsistema de ecuaciones reducido (4.78), consiste de tres ecuaciones con tres incógnitas por cada celda de la malla de cálculo, las incógnitas son $(\delta p_o, \delta S_g, \delta S_w)_{ik}$, este subsistema es similar al obtenido en el caso de modelos de aceite negro para yacimientos no fracturados.

IV.2.4. Síntesis del procedimiento de solución del sistema lineal de ecuaciones

La solución del sistema reducido (4.78), comprende los siguientes cálculos en cada iteración newtoniana:

- Cálculo de los elementos que conforman las submatrices $e_{ul,jk}^{*v}, c_{ul,jk}^{*v}, a_{ul,jk}^{*v}, b_{ul,jk}^{*v}, d_{ul,jk}^{*v}$, expresiones (4.79) a (4.83) y de los subvectores $f_{u,ik}^{*v}$, expresión (4.84)
- Solución del sistema (4.78), mediante el uso de la subrutina NSPIV⁴⁸, para determinar $\delta u_u = (\delta p_o, \delta S_g, \delta S_w)_{ik}^T$.
- Obtención de $\delta u_l = (\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_{nc-2})_{ik}^T$, con la expresión (4.77), que junto con δu_u obtenido anteriormente, se obtiene $\delta U_{u,ik} = (\delta p_o, \delta S_g, \delta S_w, \delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_{nc-2})_{ik}^T$
- Obtención de los subvectores de incógnitas $\delta U_{l,ik} = (\delta x_{nc-1}, \delta y_2, \delta y_3, \dots, \delta y_{nc})_{ik}^T$, con la expresión (4.68).
- Con los subvectores δU_u y δU_l , se obtienen los subvectores δU_f , que son la solución para las incógnitas de la fractura, $\delta U_f = (p_o, S_g, S_w, x_1, x_2, \dots, x_{nc-1}, y_2, y_3, \dots, y_{nc})^T$
- Solucionar el subsistema de ecuaciones (4.58), para obtener los subvector de incógnitas de los bloques de matriz, $\delta U_m = (p_o, S_g, S_w, x_1, x_2, \dots, x_{nc-1}, y_2, y_3, \dots, y_{nc})_m^T$.
- Verificar los criterios de convergencia para la solución y, dependiendo del caso, realizar otra iteración o pasar a otro nivel de tiempo.

Conocida la distribución de presiones, saturaciones y composiciones en las fracturas y en los bloques de matriz, es posible calcular los ritmos de producción de aceite, gas y agua, el cambio en la composición de las fases aceite y gas y los volúmenes de fluidos transferidos entre las fracturas y los bloques de matriz, durante el intervalo de tiempo.

V. VALIDACION DEL MODELO

La validación del modelo presentado, se verifica con la solución analítica de Warren y Root¹², para flujo en una sola fase; también con la teoría de flujo bifásico en régimen permanente presentada por Chopra y Carter⁴⁹.

V.1 Validación con la Solución Analítica de Warren y Root¹²

Los resultados del simulador se comparan con los resultados obtenidos mediante la siguiente solución analítica propuesta por Warren y Root , para el caso de flujo radial de líquido en un yacimiento infinito:

$$p_{wf} = p_i - \frac{70.6qB\mu}{k_f h} \left\{ 0.80908 + \ln \left[\frac{0.000236k_f t}{\phi\mu c_{if} r_w^2} \right] + E_i \left[\frac{0.000236\alpha k_m r_w^2}{\omega(1-\omega)\phi\mu c_{if} r_w^2} \right] - E_i \left[\frac{0.000236\alpha k_m r_w^2}{(1-\omega)\phi\mu c_{if} r_w^2} \right] \right\} \quad (5.1)$$

donde,

$$\omega = \frac{\phi_f c_{if}}{\phi_f c_{if} + \phi_m c_{im}}$$

Las unidades de la ecuacion (5.1), son del sistema inglés.

V.2. Teoría de Flujo Bifásico en Régimen Permanente⁴⁹

Las ecuaciones diferenciales que describen el flujo composicional en yacimientos naturalmente fracturados considerando el modelo de doble porosidad, fue descrita en las Secciones (III.3) y (III.4). Estas ecuaciones escritas sin considerar efectos capilares y gravitacionales, son las siguientes :

Para las fracturas :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[\left(x_c \hat{\rho}_o \frac{kK_{ro}}{\mu_o} + y_c \hat{\rho}_g \frac{kK_{rg}}{\mu_g} \right) \nabla p_o \right] + [x_c \hat{\rho}_o \hat{q}_o + y_c \hat{\rho}_g \hat{q}_g] + \\ x_c \hat{\tau}_{omf} + y_c \hat{\tau}_{gmf} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi (x_c \hat{\rho}_o S_o + y_c \hat{\rho}_g S_g) \right] \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde,

$c = 1, 2, \dots nc.$

Para los bloques de matriz,

$$-\{x_c \hat{\tau}_o + y_c \hat{\tau}_g\}_{mf} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi (x_c \hat{\rho}_o S_o + y_c \hat{\rho}_g S_g) \right]_m \quad (5.3)$$

donde,

$c = 1, 2, \dots nc.$

El término \hat{q}_p , representa el gasto molar de producción o inyección de la fase $p = o, g$ por unidad de volumen de roca y el término $\hat{\tau}_p$, el intercambio molar de la fase p entre los bloques de matriz y fracturas, por unidad de volumen de roca.

Para un balance total, se tiene que la suma de las fracciones molares de los componentes en las fases aceite y gas son igual a 1. Considerando que no existe inyección y que sólo existe producción a través del pozo productor, la ecuación (5.2), para las fracturas, se reduce a lo siguiente :

$$\nabla \cdot \left[\left(\hat{\rho}_o \frac{kK_{ro}}{\mu_o} + \hat{\rho}_g \frac{kK_{rg}}{\mu_g} \right) \nabla p_o \right] + (\hat{\tau}_o + \hat{\tau}_g)_{mf} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi (\hat{\rho}_o S_o + \hat{\rho}_g S_g) \right] \quad (5.4)$$

Para los bloques de matriz,

$$-\{\hat{\tau}_o + \hat{\tau}_g\}_{mf} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi (\hat{\rho}_o S_o + \hat{\rho}_g S_g) \right]_m \quad (5.5)$$

En régimen permanente no existe acumulación en cualquier punto del yacimiento, entonces la ecuación (5.3) para los bloques de matriz, puede escribirse como :

$$-\{x_c \hat{\tau}_o + y_c \hat{\tau}_g\}_{mf} = 0 \quad (5.6)$$

donde,

$$c = 1, 2, \dots nc.$$

Considerando la expresión (5.6), la ecuación de flujo en régimen permanente para las fracturas es :

$$\nabla \cdot \left[\left(x_c \hat{\rho}_o \frac{kK_{ro}}{\mu_o} + y_c \hat{\rho}_g \frac{kK_{rg}}{\mu_g} \right) \nabla p_o \right] = 0 \quad (5.7)$$

donde,

$$c = 1, 2, \dots nc.$$

La ecuación (5.7) para las fracturas es idéntica a la que se obtiene para un sistema homogéneo bajo régimen permanente. La ecuación (5.6) para los bloques de matriz, indica que no existe flujo entre los bloques de matriz y las fracturas.

Entonces, en la ecuación (5.7), debido a que la divergencia del argumento es igual a cero, el argumento es un vector constante, o sea :

$$\left(x_c \hat{\rho}_o \frac{kK_{ro}}{\mu_o} + y_c \hat{\rho}_g \frac{kK_{rg}}{\mu_g} \right) \nabla p_o = \vec{v}_c \quad (5.8)$$

donde,

$$c = 1, 2, \dots nc \text{ y } \vec{v}_c \text{ es el vector velocidad del componente } c.$$

Igualmente para la ecuación (5.4), se tiene que bajo condiciones de régimen permanente no existe acumulación de la mezcla de hidrocarburos, entonces :

$$\nabla \cdot \left[\left(\hat{\rho}_o \frac{kK_{ro}}{\mu_o} + \hat{\rho}_g \frac{kK_{rg}}{\mu_g} \right) \nabla p_o \right] = 0 \quad (5.9)$$

luego ,

$$\left(\hat{\rho}_o \frac{kK_{ro}}{\mu_o} + \hat{\rho}_g \frac{kK_{rg}}{\mu_g} \right) \nabla p_o = \vec{v}_h \quad (5.10)$$

donde \vec{v}_h , es el vector velocidad total de la mezcla de hidrocarburos.

Realizando el producto escalar de vectores de las ecuaciones (5.8) y (5.10), por un vector unitario \vec{e} , se tiene lo siguiente :

$$\left(x_c \hat{\rho}_o \frac{kK_{ro}}{\mu_o} + y_c \hat{\rho}_g \frac{kK_{rg}}{\mu_g} \right) \nabla p_o \cdot \vec{e} = \vec{v}_c \cdot \vec{e} \quad (5.11)$$

$$\left(\hat{\rho}_o \frac{kK_{ro}}{\mu_o} + \hat{\rho}_g \frac{kK_{rg}}{\mu_g} \right) \nabla p_o \cdot \vec{e} = \vec{v}_h \cdot \vec{e} \quad (5.12)$$

Dividiendo (5.11) entre (5.12), se tiene :

$$\frac{\vec{v}_c \cdot \vec{e}}{\vec{v}_h \cdot \vec{e}} = \frac{\lambda_o x_c + \lambda_g y_c}{\lambda_o + \lambda_g} = z_{cf} \quad (5.13)$$

siendo,

$$\lambda_o = \hat{\rho}_o \frac{K_{ro}}{\mu_o} \quad (5.14)$$

y,

$$\lambda_g = \hat{\rho}_g \frac{K_{rg}}{\mu_g} \quad (5.15)$$

En la ecuación (5.13), z_{cf} es la fracción molar global del componente c en la mezcla de hidrocarburos fluyendo en el yacimiento.

Considérese un yacimiento en el cual la frontera externa está arriba de la presión de saturación, es decir, el fluido existente en ese punto es monofásico. En el yacimiento bajo

régimen permanente, no ocurrirá variación de la composición total de cada componente del fluido en movimiento, y será igual a la composición total del fluido inicial, esto es :

$$z_{cf} = z_{ci} \quad (5.16)$$

El análisis de la ecuación (5.13), implica que en el flujo bajo régimen permanente la composición total fluyendo no varía con respecto a la distancia, por lo tanto, la ecuación (5.16) debe ser válida. En esta conclusión, se basa la validación del modelo composicional para flujo en régimen permanente.

Considerando la hipótesis de que las fases se encuentran en equilibrio termodinámico, la ecuación (5.13), puede ser escrita como :

$$z_{cf} = \frac{\lambda_o x_c + \lambda_g y_c}{\lambda_o + \lambda_g} = L_{\Gamma} x_c + V_{\Gamma} y_c \quad (5.17)$$

donde,

$$L_{\Gamma} = \frac{\lambda_o}{\lambda_o + \lambda_g} \quad y \quad V_{\Gamma} = \frac{\lambda_g}{\lambda_o + \lambda_g}$$

En una expansión a composición constante del fluido original, a las condiciones de presión y temperatura en un cierto punto del yacimiento, generaría las composiciones de las fases aceite y gas, o sea, x_{ci} y y_{ci} en dicho punto, que por definición se relacionan con la composición total del fluido de la siguiente manera :

$$z_{ci} = L_{ecc} x_{ci} + V_{ecc} y_{ci} \quad (5.18)$$

donde, L_{ecc} y V_{ecc} , son las fracciones molares de la fase líquida y vapor, respectivamente, a la presión y temperatura de expansión.

De acuerdo a la ecuación (5.16), la expresión (5.18), puede escribirse como :

$$z_{cf} = \frac{\lambda_o}{\lambda_o + \lambda_g} x_{ci} + \frac{\lambda_g}{\lambda_o + \lambda_g} y_{ci} \quad (5.19)$$

Igualando las ecuaciones (5.18) y (5.19), y reordenando se tiene :

$$\left[\frac{\lambda_o}{\lambda_o + \lambda_g} - L_{ecc} \right] x_{ci} + \left[\frac{\lambda_g}{\lambda_o + \lambda_g} - V_{ecc} \right] y_{ci} = 0 \quad (5.20)$$

Para satisfacer la expresión (5.20), se debe de cumplir lo siguiente :

$$\frac{\lambda_o}{\lambda_o + \lambda_g} = L_{ecc} \quad (5.21)$$

O también,

$$\frac{\lambda_g}{\lambda_o + \lambda_g} = V_{ecc} \quad (5.22)$$

Dividiendo la ecuación (5.21) entre la ecuación (5.22), se obtiene finalmente que :

$$\frac{\lambda_o}{\lambda_g} = \frac{\frac{K_{ro} \hat{p}_o}{\mu_o}}{\frac{K_{rg} \hat{p}_g}{\mu_g}} = \frac{L_{ecc}}{V_{ecc}} \quad (5.23)$$

La ecuación (5.23), implica que la relación de movilidades de las fase aceite y gas, fluyendo bajo régimen permanente, debe ser igual a la relación entre las fracciones molares de dichas fases, cuando los sistemas están sometidos a la misma presión y temperatura.

V. 3 Comparación de Resultados Analíticos y de Simulación.

La primera comparación se realizó con la solución analítica de Warren y Root¹², presentada en la Sección V.1. Esta solución es válida para flujo transitorio y monofásico.

En la Tabla 5.1 se muestran los datos correspondientes a los fluidos y al yacimiento para la verificación analítica. En la Figura 5.1, se observa que los resultados del simulador para tres diferentes gastos se ajustan perfectamente a la solución analítica.

La segunda comparación se realizó con la teoría de régimen permanente presentada en la sección V.2. La composición de los fluidos utilizada en la simulación se muestra en la Tabla 5.2, las propiedades de los pseudocomponentes se presentan en las Tablas 5.3 y 5.4. Los datos de permeabilidades relativas fueron tomados de la Figura 5.2. Las curvas de presión capilar agua-aceite y gas-aceite se muestran en las Figuras 5.3a y 5.3b, respectivamente.

En la Tabla 5.5, se presentan los datos del yacimiento de aceite volátil analizado. En la Tabla 5.6 aparecen los datos relativos al pozo productor y al pozo inyector. En la Tabla 5.7 se muestran los datos correspondientes a los fluidos y características del medio fracturado y de los bloques de matriz. En la Tabla 5.8 se presentan los parámetros de control del simulador.

Como se apuntó anteriormente, el cociente de movilidades λ_o/λ_g bajo flujo en régimen permanente, fue comparado con el cociente de L/V, obtenido para diferentes presiones simulando una expansión a composición constante (*ecc*). En la Figura 5.4 se verifica el ajuste, con esto se confirma la teoría para flujo bifásico en régimen permanente.

Los resultados de presiones de fondo fluyendo en la fractura y en los bloques de matriz para la celda (1,1), se pueden ver en la Figura 5.5. Nótese que al alcanzar el régimen permanente, las presiones se estabilizan y se igualan, provocando que no exista intercambio de fluidos matriz-fractura durante el período de régimen permanente. Esta última observación hace válida la expresión (5.6) y confirma dicha teoría para un medio con doble porosidad.

En la Figura 5.5 se muestra el comportamiento de la saturación de gas para las fracturas y los bloques de matriz en la celda (1,1). Se observa que la saturación de gas en las fracturas disminuye, debido a que el mantenimiento de presión para obtener el régimen permanente no le permite incrementarse. Además, la cantidad de gas que se desarrolla en la fractura fluye rápidamente hacia el pozo evitando su acumulación, esto se debe a que la permeabilidad de las fracturas es mayor a la permeabilidad de los bloques de matriz.

Es importante mencionar que para alcanzar el flujo permanente, se inyectó simultáneamente fluido de composición idéntica al fluido original en el yacimiento, a presión constante e igual a la inicial en la celda colocada en la frontera del yacimiento, celda (15,1).

VI. APLICACIONES DEL MODELO

En esta sección se presentan algunas aplicaciones de interés práctico en la simulación de yacimientos naturalmente fracturados con fluidos de composición variable. Los casos estudiados son los siguientes : simulación de prueba de formación, simulación de agotamiento natural y simulación de inyección de gas.

Las aplicaciones anteriores se realizan en yacimientos conteniendo aceite volátil. Para yacimientos de gas y condensado, sólo se estudió agotamiento natural. La composición de los fluidos y las curvas de permeabilidades relativas para la matriz y las fracturas son las presentadas en el Capítulo V.

VI.1 Simulación de Pruebas de Formación en Pozos

Esta prueba se realiza en un yacimiento cilíndrico, inicialmente con líquido bajosaturado, produciendo un solo pozo en el centro y en todo el espesor. Para esta prueba se analizó el comportamiento de la presión de fondo fluyendo y de las saturaciones en los bloques de matriz y en las fracturas. El yacimiento se discretizó en una malla de ocho celdas en la dirección radial. Los parámetros de control de la simulación se muestran en la Tabla 6.1.

La prueba de formación comprende un período inicial de producción de doce horas, seguido por un cierre de 36 horas. Los datos del yacimiento se muestran en la Tabla 6.2. La prueba se realizó con un gasto de 3150 bpd, con la presión inicial ligeramente mayor a la presión de saturación. Los datos para las fracturas y los bloques de matriz se presentan en la Tabla 6.3. Otros datos de producción son mostrados en la Tabla 6.4.

Los resultados de presión de fondo fluyendo contra el tiempo son mostrados en la Figura 6.1, en donde se observa la respuesta esperada. El yacimiento en el decremento se depresiona, al cerrarse el pozo la presión se incrementa en el yacimiento hasta estabilizarse.

En la Figura 6.2 se muestra el comportamiento de la saturación de gas para las fracturas y los bloques de matriz contra el tiempo en la celda productora (1,1); la S_g en la fractura aparece en el instante en que la presión en la celda (1,1) es menor a la presión de saturación,

4379 lb/pg², aproximadamente. El comportamiento de la S_g en las fracturas muestra valores inferiores a los presentados por los bloques de matriz, esto se puede explicar de la siguiente manera : en el momento de cerrarse el pozo, la presión en las fracturas se incrementa por arriba de la presión de saturación y la S_g tiende a desaparecer; por su parte, la saturación de gas en la matriz permanece igual durante el tiempo de cierre de la prueba. Sin embargo, se observó que para tiempos de cierre mayores la S_g en la matriz tiende a disminuir cuando la presión se estabiliza en ambos medios, y desaparece totalmente de la matriz cuando a un tiempo de cierre mayor al de la prueba, la presión a la cual se estabiliza matriz y fracturas es mayor a la presión de saturación del fluido.

VI.2 Simulación de Agotamiento Natural

Yacimiento de Aceite Volátil

El agotamiento natural se realizó discretizando al yacimiento en ocho celdas en dirección horizontal (x), cuatro celdas en la dirección vertical (z) y se produjo en la celda (1,1), colocada en la parte inferior del yacimiento. Las características del yacimiento se muestran en la Tabla 6.5. Los datos del medio fracturado y de los bloques de matriz son mostrados en la Tabla 6.6, los parámetros de control de la simulación se muestran en la Tabla 6.7. Otros datos de producción para el caso de aceite volátil son mostrados en la Tabla 6.8

La Figura 6.3 muestra el comportamiento de la presión de fondo y el gasto de gas contra el tiempo, se observa que el gasto de gas aumenta cuando la saturación de gas en la fractura en la celda productora (1,1) aumenta también, ver Figura 6.4. El gasto de gas disminuye cuando se alcanza la p_{wf} mínima, 1000 lb/pg². La simulación termina cuando se cumple la condición de gasto de aceite mínimo. En la Figura 6.5 se muestra el comportamiento de gasto de aceite y la relación gas-aceite contra el tiempo. Al terminar la primera condición de producción, gasto de aceite constante, se cambia la condición de producción a p_{wf} constante, e inmediatamente se alcanza el gasto de aceite mínimo. La relación gas-aceite aumenta cuando en la celda productora, celda (1,1), la saturación de gas empieza a incrementarse y, con esto la producción de gas. Nótese que el gas producido antes de que en la celda productora se incremente la saturación de gas, es el gas en solución que fluye con la fase aceite.

En la Figura 6.6 se presenta la comparación entre la producción de masa acumulada que es referida como datos de simulación y el balance de masa para los pseudocomponentes pC_1 y para pC_3 y más pesados calculada en el yacimiento. Estas se grafican contra el tiempo y se observa que la comparación es satisfactoria.

Yacimiento de Gas y Condensado

Para el agotamiento natural de un yacimiento de gas y condensado, se consideró el mismo número de celdas en dirección horizontal y vertical; también la misma celda productora que en el caso de aceite volátil. Los datos de producción son mostrados en la Tabla 6.9 y los parámetros de control de la simulación son los mismos que aparecen en la Tabla 6.7. Los resultados se presentan en la Figura 6.7, en donde se observa el comportamiento de la presión de fondo fluyendo y el gasto de gas contra el tiempo para la celda productora (1,1). Se muestran dos modos de producción, gasto de gas constante y presión de fondo fluyendo constante; el comportamiento es el esperado para estas condiciones de producción.

En la Figura 6.8 se presenta el comportamiento de la relación gas-aceite y el gasto de aceite contra el tiempo para la celda productora (1,1). Asimismo, los resultados son los esperados para la forma de producción impuesta.

Por último, en la Figura 6.9 se presenta al igual que la Figura 6.6, la comparación entre la producción de masa acumulada y el balance de masa para el pseudocomponente pC_1 , así como para el pC_3 y más pesados, éstos se grafican contra tiempo. Se observa que la comparación es buena.

VI.3 Simulación de Inyección de gas

En este caso se utilizó el yacimiento de aceite volátil para inyectar gas en la parte superior. Las características del yacimiento, el gasto de producción y el número de celdas son las mismas utilizadas en el caso de agotamiento natural. La inyección consistió de 3.5×10^6 de $\text{pie}^3/\text{día}$ ($100,000 \text{ m}^3/\text{día}$) de gas, inyectados a través de la celda (8,4), localizada en la parte superior; la celda productora (1,1), se localizó en la parte inferior del yacimiento. Los datos

del yacimiento para el medio fracturado y los bloques de matriz, así como los parámetros de control de la simulación son los mismos que se usaron en el caso de agotamiento natural para aceite volátil. Los datos de producción para el caso de inyección se presentan en la Tabla 6.11. La composición del gas inyectado se muestra en la Tabla 6.12.

Los resultados se presentan en la Figura 6.10. La presión de fondo fluyendo y el gasto de gas, se grafican contra el tiempo, para los casos de agotamiento natural y de inyección de gas. El comportamiento para el caso de inyección de gas tiene la misma tendencia que el comportamiento que experimenta considerando únicamente agotamiento natural; lo que provoca la inyección de gas es mantener ligeramente la presión en el yacimiento, provocando el desplazamiento en tiempo del comportamiento de la presión de fondo y el gasto de gas. En la Figura 6.10, el incremento en el gasto de gas coincide cuando la presión de fondo fluyendo empieza a experimentar una caída mayor y la saturación de gas se incrementa, Figura 6.11.

En la Figura 6.12 se observa el comportamiento del gasto de aceite y la relación gas-aceite contra el tiempo para los casos de agotamiento natural e inyección de gas. Ambos comportamientos también son desplazados con respecto al mostrado por el agotamiento natural. La relación gas-aceite es menor en el caso de inyección de gas, debido a que la saturación de gas en la celda productora (1,1), no se desarrolla por causa del mantenimiento de la presión. La relación gas-aceite producida antes de que se incremente súbitamente, es debido al gas existente en todo el yacimiento que fluye rápidamente hacia la celda productora. Nótese que la saturación crítica de gas es cero, Figura 5.2.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Combinando el modelo de doble porosidad y el tratamiento explícito a las fracciones molares en los términos de flujo de las ecuaciones en las fracturas, se desarrolló un modelo Semi-Implicito trifásico e isotérmico que describe el flujo multifásico composicional de fluidos a través de medios porosos fracturados. Se consideran geometría cartesiana y cilíndrica. Se utiliza la ecuación de estado de Peng-Robinson para determinar el equilibrio termodinámico de las fases y sus propiedades volumétricas. Las siguientes conclusiones y recomendaciones pueden ser hechas :

1. La formulación Semi-Implicita propuesta por Branco y Rodríguez para yacimientos homogéneos, se aplica similarmente para yacimientos fracturados conceptualizados con el modelo de doble porosidad.
2. Con el acoplamiento de las ecuaciones de los bloques de matriz en las ecuaciones de las fracturas, el esquema matricial resultante es similar al que se obtiene en problemas de flujo en un medio poroso homogéneo. Esta técnica permite adaptar a cualquier modelo la opción de simular yacimientos fracturados.
3. El problema matricial original de $2 \times (2nc+6)$ ecuaciones se redujo mediante operaciones matriciales a un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas por cada celda de la malla de cálculo.
4. En el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas por cada celda de la malla de cálculo, las incógnitas a determinar son : la presión de aceite p_o , la saturación de gas S_g y la saturación de agua S_w . Las incógnitas restantes para las fracturas y para los bloques de matriz se determinan mediante operaciones matriciales.
5. El número de ecuaciones que se resuelven simultáneamente es independiente al número de pseudocomponentes (nc) considerados.
6. El estructura matricial del sistema reducido es similar al que se obtiene en modelos de aceite negro. Los requerimientos computacionales son ligeramente mayores.
7. El nivel de implicitud de la formulación propuesta es intermedia entre la formulación IMPECS y la formulación totalmente implícita.

8. El método propuesto proporciona una alternativa para resolver problemas, en donde el método IMPECS puede llegar a ser impráctico y el método totalmente implícito puede ser costoso.
9. El modelo fue validado con la solución analítica de Warren y Root y con la teoría de flujo bifásico composicional en régimen permanente para yacimientos homogéneos presentada por Chopra y Carter. En ambos casos la aproximación es aceptable.
10. El modelo fue probado con algunas aplicaciones, demostrando que la formulación puede ser usada para simular problemas prácticos.

Para complementar el modelo propuesto, se sugiere lo siguiente :

1. Mejorar el modelo de transferencia de fluidos matriz-fractura.
2. Implementar el flujo primario en los bloques de matriz para modelar procesos como : reinfiltración y continuidad capilar.
3. Para probar la estabilidad numérica del modelo propuesto, se recomienda comparar su desempeño numérico con otras formulaciones con distintos niveles de implícitud.

NOMENCLATURA

b_w	inverso del factor de volumen de agua [b/bl]
B_w	factor de volumen de agua [b/bl]
c_r	compresibilidad del volumen rocoso [lb/pg ²] ⁻¹
D	profundidad [pie]
f_{co}	fugacidad del componente c en la fase aceite [lb/pg ²]
f_{cg}	fugacidad del componente c en la fase gas [lb/pg ²]
F	función de residuos
IP	índice de productividad de pozo [md-pie]
$[J]$	matriz Jacobiana
K_{rp}	permeabilidad relativa a la fase p [fracción]
K_{ro}	permeabilidad relativa a la fase aceite [fracción]
K_{rg}	permeabilidad relativa a la fase gas [fracción]
K_{rw}	permeabilidad relativa a la fase agua [fracción]
k	permeabilidad absoluta [md]
L	fracción molar de la fase líquida [fracción]
L_x	longitud en la dirección x del bloque de matriz [pie]
L_y	longitud en la dirección y del bloque de matriz [pie]
L_z	longitud en la dirección z del bloque de matriz [pie]
p	presión [lb/pg ²]
p_p	presión de la fase p [lb/pg ²]
$p_{p,z}$	presión de la fase p en la profundidad z [lb/pg ²]
p_{ref}	presión de referencia [lb/pg ²]
p_{wf}	presión de fondo fluyendo [lb/pg ²]
Pc_{go}	presión capilar gas aceite [lb/pg ²]
$Pc_{go,e}$	presión capilar gas aceite de entrada [lb/pg ²]
Pc_{wo}	presión capilar agua aceite [lb/pg ²]
$Pc_{wo,e}$	presión capilar agua aceite de entrada [lb/pg ²]
\hat{q}_p	gasto de la fase $p=o,g$ por unidad de volumen de roca [bl/pie ³ día]
q_p	gasto de la fase $p=o,g$ [bl/día]
\hat{q}_w	gasto volumétrico de la fase agua por unidad de volumen de roca [bl/ pie ³ día]
q_w	gasto volumétrico de la fase agua [bl/día]
r	dirección radial o coordenada en la dirección r [pie]
r_e	radio externo para geometría cilíndrica [pie]
r_o	radio de una celda con pozo para geometría cilíndrica [pie]

r_w	radio de pozo [pie]
S_w	saturación de la fase agua [fracción]
S_g	saturación de la fase gas [fracción]
S_o	saturación de la fase aceite [fracción]
S_p	saturación de la fase p [fracción]
S_{wi}	saturación de agua irreductible [fracción]
T_p	transmisibilidad de la fase p [mol / lb/pg ² día]
t	tiempo [día]
T	temperatura [°R]
T_s	temperatura de separación [°R]
U	vector genérico de incógnitas
V_r	volumen de roca [pie ³]
V_p	volumen poroso [pie ³]
w	factor acéntrico
W	vector genérico
x	dirección x o coordenada en la longitud x [pie]
x_c	fracción molar del componente c en la fase aceite [fracción]
y_c	fracción molar del componente c en la fase gas [fracción]
z_c	fracción molar total del componente c en la mezcla de hidrocarburos [fracción]

Símbolos griegos

α	factor geométrico [pie ³]
Δt	intervalo de tiempo [día]
Δ	operador diferencias
ε	tolerancia
δu	variación de iteraciones newtonianas de u
ϕ	porosidad [fracción]
σ	factor de forma [1/pie ²]
θ	relativo a tratamiento Semi-Implicito
γ_p	peso específico de la fase p [lb/pie ³]
$\bar{\gamma}_p$	peso específico medio de la fase p [lb/pie ³]
λ_p	movilidad de la fase p [mol/pie ³ lb/pg ² día]
$\hat{\rho}_p$	densidad molar de la fase p [mol/ pie ³]
ρ_w	densidad de la fase agua [lb/ pie ³]

$\hat{\tau}_{omf}$	intercambio matriz-fractura de aceite por unidad de volumen de roca [mol/ pie ³ día]
$\hat{\tau}_{gmf}$	intercambio matriz-fractura de gas por unidad de volumen de roca [mol/ pie ³ día]
τ_{wmf}	intercambio matriz-fractura de agua [bl/ día pie ³]
μ_p	viscosidad de la fase p [cp]

Subíndices

c	componente
g	fase gas
f	fractura
h	hidrocarburo
i	relativo a dirección x o radial
$i+1/2$	fronteras de la celda i
k	índice relativo a la dirección z
m	matriz.
mf	matriz-fractura.
n	índice de nivel de tiempo
nc	número de componentes
o	fase aceite
r	dirección radial, roca
ref	referencia
S	superficie
t	tiempo
T	transpuesto
w	fase agua
x	dirección x
z	dirección z
v	nivel de iteración.

REFERENCIAS

1. Muskat, M.: "The Flow of Homogenous Fluids Through Porous Media," McGraw-Hill, New York (1937).
2. Coats, K.H.: "Use and Misuse of Reservoir Simulation Models," *J. Pet. Tech.* (Nov. 1969) 1391-1398.
3. Staggs, H.M. y Herbeck, E.F.: "Reservoir Simulation Models - An Engineering Overview", *J. Pet. Tech.* (Dic. 1971) 1428-1433.
4. Crichlow, H.B.,: "Modern Reservoir Engineering a Simulation Approach," Prentice-Hall (1977), 1-20.
5. Dake, L.P.: "Fundamentals of Reservoir Engineering", *Elsevier* (1979). 73-102.
6. Arps, J.J., : "Analysis of Decline Curves", *Trans., AIME*, 1945, 228-247.
7. Aziz, K. y Settari, A., "Petroleum Reservoir Simulation", London, *Applied Science Pub.*, 1979.
8. Odch, A.S.: "Reservoir Simulation - What Is It ?", *J. Pet. Tech.* (Nov. 1969) 1383-88.
9. Coats, K.H.,: "Reservoir Simulation : State of the Art ", *J. Pet.Tech.* (Ago.1982) 1633-42.
10. Breitenbach, E.A.: "Reservoir Simulation ; State of the ART ", *J. Pet. Tech.* (Sep 1991) 1033-36
11. Barenblatt, G.L., Zheltov, I.P. y Kochina, I.N.: "Basic concepts on the theoría of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks" *J. Appl. Math. Mech.*, English translation (1960) 1286-1303.
12. Warren, J.E. y Root, P.J.: "The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs", *Soc. Pet. Eng. J.* (Sept. 1964), 245-55.
13. Hill, A.C. y Thomas, G.W. : "A new Approach for Simulating Complex Fractured Reservoirs", SPE 13537 presentado en el 1985 SPE Reservoir Simulation Symposium, Dallas, Feb 10-13.
14. Rodríguez de la Garza, F. y Bonet, L.: "A General Formulation for Linearization used in Reservoir Simulation Methods with applications to Adaptive Implicit Methods," SPE 27051 presentado en el III Latin American and Caribbean Petroleum Engineering Conference of SPE, Buenos Aires, Arg., Abril 27-29, 1994.
15. Rodríguez de la Garza, F., Galindo, A.N. y Guzmán, J. : "A General Formulation for Compositional Reservoir Simulation", SPE 28705 presentado en el SPE International Petroleum Conference and Exhibition of Mexico, Veracruz, 10-13 Oct. 1994, 377-391.

16. Branco, C.M. y Rodriguez, F.A.: "A Semi-Implicit Formulation for Compositional Reservoir Simulation" SPE 27053 presentado en el III Latin American and Caribbean Petroleum Engineering Conference of SPE, Buenos Aires, Arg. (April 1994), 377-291.
17. Peng, D.Y. y Robinson, D.B.: "A New Two-Constant Equation of State", *Ind. Eng. Chem. Fundam.* (1976), 15, No. 1, 59-64.
18. Kazemi, H. y Vestal, C.R.: "An Efficient Multicomponent Numerical Simulator", *Soc. Pet. Eng.*, SPE 6890 (1977).
19. Fussel, L.T. y Fussel, D.D.: "An iterative Technique for Compositional Reservoir Simulator", *Soc. Pet. Eng.*, SPE 6891 (1979).
20. Coats, K.H.: "An Equation of State Compositional Model", *Soc. Pet. Eng. J.* (Oct. 1980) 363-76.
21. Nghiem, L.X., Fong, D.K. y Aziz, D.K.: "Compositional Modeling With an equation of State", *Soc. Pet. Eng. J.* (Dic 1984), 687-698.
22. Watts, J.W.: "A Compositional Formulation of the pressure and Saturation Equation", *Soc. Pet. Eng.*, SPE 12244 (1983).
23. Acs G., Doleschall, S. y Farkas, E.: "General Purpose Compositional Model", *Soc. Pet. Eng. J.* (Ago 1985), 543-553.
24. Thele, K.J. y Lake, L.W.: "Comparasion of Three-of-State Compositional Simulators" *Soc. Pet. Eng.*, SPE 12245 (1983).
25. Young, L.C. y Stephenson, R.E.: "Generalized Compositional Approach for Reservoir Simulation" *Soc. Pet. Eng.*, SPE 10516 (1982).
26. Chien, M.C., Lee, S.T. y Chen, W.H. : "A New Full Implicit Compositional Simulator" *Soc. Pet. Eng.*, SPE 13385 (1985).
27. Quandalle, P. y Savary, D. : "An implicit in Pressure and Saturation Approach to Fully Compositional Simulation" SPE 18423, presentado en el Symposium on Reservoir Simulation, Houston, TX, Feb 6-8, (1989).
28. Kazemi, H., Merril, L.S., Porterfield, K.L. y Zeman, P.R.: "Numerical Simulation Of Water-Oil Flow in Naturally Fractured Reservoir" *Soc. Pet. Eng. J.* (Dic. 1976), 317-326.
29. Thomas, L.K., Dixon, T.N., y Pierson, R.G.: "Fractured Reservoir Simulation" *Soc. Pet. Eng. J.* (Feb. 1983), 42-54.
30. Gilman, J.R. y Kazemi, H.: "Improvement in Simulation of Naturally Fractured Reservoir", *Soc. Pet. Eng. J.* (Ago. 1983), 695-707. .
31. Sonier, F., Souillard, P. and Blaskovick, F.T.: "Numerical Simulation of Naturally Fractured Reservoir", *SPERE* (Nov. 1988), 1114-22.

32. Dean, R.H. y Lo, L.L.: "Simulations of Naturally Fractured Reservoir", *SPE* (May. 1988), 638-48.
33. Rossen, R.H. y Shen, E.I.: "Simulation of Gas/Oil Drainage and Water/Oil Imbibition in Naturally Fractured Reservoirs", *SPE* (Nov. 1989), 464-70.
34. Fung, L.S.: "Simulation Block to Block Proces in Naturally Fractured Reservoir," *SPE* (Nov 1991)
35. Firoozabadi, A. y Ishimoto, K.: "Reinfiltration in Fractured Porous Media-Part 1 : One-Dimensional Model," *SPE Advanced Technology Series* (April 1994)Vol.2, No.2,34-44.
36. Firoozabadi, A.,Ishimoto, K. y Dindoruk, B.: " Reinfiltration in Fractured Porous Media-Part 2 : Two-Dimensional Model," *SPE Advanced Technology Series* (Abril 1994)Vol.2, No.2,45-51.
37. Tan, J.C.T. y Firoozabadi, A.: " Dual-Porosity Simulation Incorporating Reinfiltration and Capillary Continuity concepts-Part 1 : Single Gridcell," SPE 29113 presentado en el 13th Symposium on Reservoir Simulation held in San Antonio, TX 12-15 Feb. 1995.
38. Yamamoto, R.H., Padgett, J.B y Ford, W.T.: "Compositional Reservoir Simulator for fissured System-The single-Block Model ", *Soc. Pet. Eng. J.* (Jun 1971),113-128.
39. Peng, C.P. , Yanosik, J.L. y Stephenson R.E.: " A Generalized Compositional Model for Naturally Fractured Reservoirs ", *SPE* (May 1990), 221-226.
40. Coats, K.H.: " Implicit Compositional Simulation of Single Porosity and Dual-Porosity Reservoirs", SPE 18427, Proc. Tenth SPE Reservoir Simulation Symposium, (Feb 1989), 239-275.
41. Van Golf Racht, T.D. : "Fundamentals of Fractured Reservoir Engineering," Elsevier Scientific Publishing (1982). 551-605.
42. Branco, C.M. : "Simulador Compositional de Reservatorios com Formulacao Implicita em pressao e Saturacoes e semi implicita em composicoe", Tese de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Julho 1991.
43. Rodríguez de la Garza, F.: "Apuntes del Curso Simulación Avanzada de yacimientos", *DEPFI, UNAM* (1995).
44. Wheaton, R.J. : " Treatment of Variation of Composition With Depth in Gas Condensate Reservoir", *Soc. Pet. Eng. J.*, SPE 18267 (1988)
45. Whitson, C.H. : " Compositional Gradients in Petroleum Reservoirs", *Soc. Pet. Eng. J.*, SPE 28000 (1994)
46. Peaceman, D.W.: "Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation," Elsevier Scientific Publishing (1977).
47. Lim., K.T. y Aziz, K.: "Matrix-fracture transfer shape factors for dual-porosity simulators," *Journal of Pteroleum Science and Engineering*, 13(1995) 169-178.

48. Sherman, A.H. "NSPIV, A Fortran Subroutine for Sparse Gaussian Elimination with Partial Pivoting", *ACM Trans. Math. Software*.
49. Chopra, A.K. y Carter, R.C., : "Proof of the Two-Phase Steady-State Theory for Flow Through Porous Media", *SPEFE* (Dec 1986).

APÉNDICE A

Para las ecuaciones de flujo multifásico composicional, considérese un volumen elemental representativo del medio poroso, en donde existe flujo unidimensional, Figura A.1. Con base en el principio de conservación de materia, se puede establecer el siguiente balance molar para el componente c , $c = 1, 2, \dots, n_c$, en el elemento.

Hay c componentes fluyendo en el elemento de volumen en dos de tres posibles fases móviles. La fase agua no intercambia su masa con otras fases. Los n_c componentes forman una mezcla de hidrocarburos en dos fases en equilibrio, en espacio y tiempo.

Cada uno de los componentes deberá conservarse a través de todo el sistema. Considérese la conservación de masa para cada componente.

Al efectuar un balance de materia para cada componente, considerando coordenadas rectangulares y sólo en la dirección x , se tiene lo siguiente :

Ritmo de entrada de moles del elemento c al volumen de control =
Ritmo de entrada de moles de c contenido en la fase aceite +
Ritmo de entrada de moles de c contenido en la fase gas =

$$(Ax_c \hat{\rho}_o v_{ox})|_x + (Ay_c \hat{\rho}_g v_{gx})|_x \quad (\text{A.1})$$

y,

Ritmo de salida de moles de c del elemento =

$$(Ax_c \hat{\rho}_o v_{ox})|_{x+\Delta x} + (Ay_c \hat{\rho}_g v_{gx})|_{x+\Delta x} \quad (\text{A.2})$$

donde A , es el área transversal del elemento expuesto al flujo, $\hat{\rho}_p$ es la densidad molar de la fase $p=o,g$ y v_{px} son las velocidades macroscópicas de las fase $p=o,g$ en la dirección x .

El ritmo de acumulación de moles del componente c en el volumen de control, está dado por el ritmo de cambio de los moles de c , contenidos en las fases aceite y gas en el espacio poroso, esto es :

Ritmo de acumulación de moles del elemento c en el volumen de control =

$$A\Delta x \frac{\partial}{\partial t} (\phi S_o \hat{\rho}_o x_c) + A\Delta x \frac{\partial}{\partial t} (\phi S_g \hat{\rho}_g y_c) \quad (\text{A.3})$$

El ritmo de producción / inyección de moles de c del volumen de control, definiendo \hat{q}_p = gasto volumétrico de la fase $p = o, g, w$ a condiciones de yacimiento por unidad de volumen de roca, es :

Ritmo de producción/ inyección de moles del componente c =

$$A\Delta x (x_c \hat{\rho}_o \hat{q}_o) + A\Delta x (y_c \hat{\rho}_g \hat{q}_g) \quad (\text{A.4})$$

Substituyendo las ecuaciones (A.1) a (A.4) en el postulado de conservación de materia , dividiendo la expresión resultante entre el volumen de control, $A\Delta x$, reorganizando y tomando límites cuando $\Delta x \rightarrow 0$, se llega a :

$$-\frac{\partial}{\partial x} (x_c \hat{\rho}_o v_{ox}) - \frac{\partial}{\partial x} (y_c \hat{\rho}_g v_{gx}) + x_c \hat{\rho}_o \hat{q}_o + y_c \hat{\rho}_g \hat{q}_g = \frac{\partial}{\partial t} [\phi (x_c \hat{\rho}_o S_o + y_c \hat{\rho}_g S_g)] \quad (\text{A.5})$$

donde,

$$c = 1, 2, \dots, nc ; p = o, g, w.$$

La ecuación (A.5) puede extenderse al caso de flujo multidimensional. En notación del operador diferencial n- dimensional, ∇ ; estas ecuaciones pueden escribirse en forma más general como :

$$-\nabla \cdot [(x_c \hat{\rho}_o v_o) + (y_c \hat{\rho}_g v_g)] + x_c \hat{\rho}_o \hat{q}_o + y_c \hat{\rho}_g \hat{q}_g = \frac{\partial}{\partial t} [\phi (x_c \hat{\rho}_o S_o + y_c \hat{\rho}_g S_g)] \quad (\text{A.6})$$

Para flujo laminar en el yacimiento, podemos expresar la velocidad de cada fase mediante la ecuación de Darcy :

$$v_p = -\frac{kK_{rp}}{\mu_p}(\nabla p_p - \gamma_p \nabla D) \quad (\text{A.7})$$

Substituyendo la ecuación (A.7) en la ecuación (A.6), se tiene lo siguiente :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[x_c \hat{\rho}_o \frac{kK_{ro}}{\mu_o} (\nabla p_o - \gamma_o \nabla D) + y_c \hat{\rho}_g \frac{kK_{rg}}{\mu_g} (\nabla p_g - \gamma_g \nabla D) \right] + \\ x_c \hat{\rho}_o \hat{q}_o + y_c \hat{\rho}_g \hat{q}_g = \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi (x_c \hat{\rho}_o S_o + y_c \hat{\rho}_g S_g) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Nótese que el operador diferencial nabla, ∇ ; se define en el sistema de coordenadas cartesianas como :

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \quad (\text{A.9})$$

y el vector de velocidades de la fase $p = o, g, w$, v_p , es :

$$v_p = v_{px} i + v_{py} j + v_{pz} k \quad (\text{A.10})$$

Un tratamiento similar, pero volumétrico para la fase agua conduce a lo siguiente :

$$\nabla \cdot \left[\frac{kK_{rw}}{B_w \mu_w} (\nabla p_w - \gamma_w \nabla D) \right] + b_w \hat{q}_w = \frac{\partial}{\partial t} [\phi b_w S_w] \quad (\text{A.11})$$

Las ecuaciones (A.8) y (A.11) describen el flujo multifásico composicional en un yacimiento bajo condiciones isotérmicas y laminares.

APÉNDICE B

El sistema de ecuaciones que representa el comportamiento de flujo multifásico composicional en yacimientos naturalmente fracturados, es un sistema de ecuaciones no lineal y por conveniencia se utilizan métodos numéricos para su solución.

Por lo tanto, es necesario transformar las ecuaciones de su forma continua a su forma discreta, mediante lo cual se llega a una solución aproximada del sistema de ecuaciones.

La solución numérica del sistema de ecuaciones se refiere a resultados en puntos discretos dentro del sistema. La discretización en el espacio, se lleva a cabo dividiendo al yacimiento en celdas, cuyo conjunto constituye una malla. Esto se realiza mediante el empleo de diferencias centrales. La discretización del tiempo se efectúa segmentando el tiempo en intervalos consecutivos, $n = 0, 1, 2, \dots$ de tamaño arbitrario, mediante el empleo de diferencias regresivas.

A continuación se presenta la aproximación de las ecuaciones diferenciales en ecuaciones de diferencias, obtenidas a través de un esquema en diferencias finitas.

Realizando el análisis para las fracturas y partiendo de la ecuación (3.1), sólo para los componentes hidrocarburos de la fase líquida, considerando una sola dirección en el nivel de tiempo $(n+1)$ y empleando un esquema implícito, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[x_c \hat{\rho}_o \frac{kK_{ro}}{\mu_o} \left(\frac{\partial p_o}{\partial x} - \gamma_o \frac{\partial D}{\partial x} \right) \right]_i^{n+1} + (x_c \hat{\rho}_o \hat{q}_o)_i^{n+1} + \{x_c \hat{\tau}_{omf}\}_i^{n+1} = \frac{\partial}{\partial t} [\phi(x_c \hat{\rho}_o S_o)]_i^{n+1} \quad (\text{B.1})$$

Considerando,

$$u = x_c \lambda_{ox} \left(\frac{\partial p_o}{\partial x} - \gamma_o \frac{\partial D}{\partial x} \right) \quad (\text{B.2})$$

donde,

$$\lambda_{ox} = \hat{\rho}_o \frac{kK_{ro}}{\mu_o} \quad (\text{B.3})$$

Ahora, sustituyendo la ecuación (B.2) en el término de flujo de la ecuación (B.1), se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[x_c \lambda_{ox} \left(\frac{\partial p_o}{\partial x} - \gamma_o \frac{\partial D}{\partial x} \right) \right]_i^{n+1} = \frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_i} \quad (\text{B.4})$$

Empleando diferencias centrales en la ecuación (B.4), se tiene:

$$\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_i} = \frac{u_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta x_i} \quad (\text{B.5})$$

donde,

$$u_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = (x_c \lambda_{ox})_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \left[\frac{p_{o,i+1} - p_{o,i}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} - \gamma_{o,i+\frac{1}{2}} \frac{D_{i+1} - D_i}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \right]^{n+1} \quad (\text{B.6})$$

y,

$$u_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} = (x_c \lambda_{ox})_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \left[\frac{p_{o,i} - p_{o,i-1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} - \gamma_{o,i-\frac{1}{2}} \frac{D_i - D_{i-1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \right]^{n+1} \quad (\text{B.7})$$

Sustituyendo las ecuaciones (B.6) y (B.7) en (B.5), se tiene:

$$\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_i} = \frac{1}{\Delta x_i} (x_c \lambda_{ox})_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \left[\left(\frac{p_{o,i+1} - p_{o,i}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} - \gamma_{o,i+\frac{1}{2}} \frac{D_{i+1} - D_i}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \right)^{n+1} \right] - \frac{1}{\Delta x_i} (x_c \lambda_{ox})_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \left[\left(\frac{p_{o,i} - p_{o,i-1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} - \gamma_{o,i-\frac{1}{2}} \frac{D_i - D_{i-1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \right)^{n+1} \right] \quad (\text{B.8})$$

Discretizando el término de acumulación empleando diferencias regresivas en tiempo, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi(x_c \hat{p}_o S_o)]_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} [(\phi x_c \hat{p}_o S_o)^{n+1} - (\phi x_c \hat{p}_o S_o)^n]_i \quad (\text{B.9})$$

Sustituyendo las ecuaciones (B.8) y (B.9) en (B.1), resulta:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta x_i} (x_c \lambda_{ox})_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \left[\left(\frac{P_{o,i+1} - P_{o,i}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} - \gamma_{o,i+\frac{1}{2}} \frac{D_{i+1} - D_i}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \right)^{n+1} \right] - \\
& \frac{1}{\Delta x_i} (x_c \lambda_{ox})_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \left[\left(\frac{P_{o,i} - P_{o,i-1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} - \gamma_{o,i-\frac{1}{2}} \frac{D_i - D_{i-1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \right)^{n+1} \right] + (x_c \hat{\rho}_o \hat{q}_o)_i^{n+1} + \{x_c \hat{\tau}_{omf}\}_i^{n+1} \\
& = \frac{1}{\Delta t} \left[(\phi x_c \hat{\rho}_o S_o)^{n+1} - (\phi x_c \hat{\rho}_o S_o)^n \right]_i
\end{aligned} \tag{B.10}$$

Multiplicando la ecuación (B.10) por el volumen de roca de la celda i , $V_{r,i} = A \Delta x_i$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{x_c \lambda_{ox} A}{\Delta x_i} \right)_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \left[P_{o,i+1} - P_{o,i} - \gamma_{o,i+\frac{1}{2}} (D_{i+1} - D_i) \right]^{n+1} - \\
& \left(\frac{x_c \lambda_{ox} A}{\Delta x_i} \right)_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \left[P_{o,i} - P_{o,i-1} - \gamma_{o,i-\frac{1}{2}} (D_i - D_{i-1}) \right]^{n+1} + (x_c \hat{\rho}_o q_o)_i^{n+1} + \{x_c \tau_{omf}\}_i^{n+1} \\
& = \frac{V_{r,i}}{\Delta t} \left[(\phi x_c \hat{\rho}_o S_o)^{n+1} - (\phi x_c \hat{\rho}_o S_o)^n \right]_i
\end{aligned} \tag{B.11}$$

Introduciendo el concepto de transmisibilidad para la fase aceite:

$$T_{ox} = \frac{\lambda_{ox} A}{\Delta x_i} \tag{B.12}$$

Las transmisibilidades de las fases gas y aceite, se definen en forma similar.

Sustituyendo la ecuación (B.12) en (B.11), se tiene :

$$\begin{aligned} & (x_c T_o)_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D)_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - (x_c T_o)_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D)_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} + (x_c \hat{\rho}_o q_o)_i^{n+1} + \{x_c \tau_{omf}\}_i^{n+1} \\ & = \frac{V_{r,j}}{\Delta t} \Delta_i [\phi(x_c \hat{\rho}_o S_o)]_i \end{aligned} \quad (B.13)$$

La ecuación (B.13) se puede expresar de una manera más compacta, empleando operadores en diferencias, como se muestra a continuación :

$$\Delta [x_c T_o (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D)]_i^{n+1} + (x_c \hat{\rho}_o q_o)_i^{n+1} + \{x_c \tau_{omf}\}_i^{n+1} = \frac{V_{r,j}}{\Delta t} \Delta_i [\phi(x_c \hat{\rho}_o S_o)]_i \quad (B.14)$$

Nótese que en la ecuación (B.14) se han incluido los operadores de diferencias centrales, Δu_i^{n+1} , y diferencias regresivas, $\Delta_i u_i^{n+1}$, definidos como :

$$\Delta u_i^{n+1} = u_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \quad (B.15)$$

$$\Delta_i u_i^{n+1} = u_i^{n+1} - u_i^n \quad (B.16)$$

Procediendo en forma similar para las ecuaciones que modelan el flujo en las fracturas (3.1) y (3.2), considerando flujo en dos direcciones, se tienen las siguientes expresiones :

Para los componentes hidrocarburos :

$$\begin{aligned} & \Delta [x_c T_o (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D)]_{ik}^{n+1} + \Delta [y_c T_g (\Delta p_g - \gamma_g \Delta D)]_{ik}^{n+1} + (x_c \hat{\rho}_o q_o + y_c \hat{\rho}_g q_g)_{ik}^{n+1} \\ & + \{x_c \tau_{omf} + y_c \tau_{gmf}\}_{ik}^{n+1} = \frac{V_{r,ik}}{\Delta t} \Delta_i [\phi(x_c \hat{\rho}_o S_o + y_c \hat{\rho}_g S_g)]_{ik} \end{aligned} \quad (B.17)$$

Para el agua,

$$\Delta [T_w (\Delta p_w - \gamma_w \Delta D)]_{ik}^{n+1} + (b_w q_w)_{ik}^{n+1} + (\tau_{wmf})_{ik}^{n+1} = \frac{V_{r,ik}}{\Delta t} \Delta_i [\phi b_w S_w]_{ik} \quad (B.18)$$

Para los bloques de matriz, ecuaciones (3.9) y (3.10), debido a su conceptualización, únicamente se discretiza el término de acumulación, obteniéndose las ecuaciones siguientes:

Para los componentes hidrocarburos :

$$-(x_c \tau_{omf} + y_c \tau_{gmf})_{ik}^{n+1} = \frac{V_{r,ik}}{\Delta t} \Delta_t [\phi (x_c \hat{\rho}_o S_o + y_c \hat{\rho}_g S_g)]_{m,ik} \quad (\text{B.19})$$

Para el agua,

$$-(\tau_{wmf})_{ik}^{n+1} = \frac{V_{r,ik}}{\Delta t} \Delta_t [\phi b_w S_w]_{m,ik} \quad (\text{B.20})$$

Nótese el cambio de $\hat{\tau}_{cp,mf}$ y \hat{q}_p , por $\tau_{p,mf}$ y q_p , respectivamente, donde $p = o, g, w$.

APÉNDICE C

En este Apéndice se muestran los índices de productividad⁴⁶, IP , utilizados en la ecuación (3.33), así como los factores geométricos empleados en las ecuaciones (4.9) a (4.11), en ambos casos para geometría cartesiana y radial.

Índice de productividad, IP

$$IP_k = \frac{2\pi k \Delta z}{\ln \left(\frac{r_o}{r_w} \right)} \quad (C.1)$$

donde r_w es el radio del pozo y Δz es el espesor de la celda que contiene al pozo. Para geometría radial, las variables de la expresión (C.1) representan :

k : permeabilidad absoluta en la dirección radial.

r_o : radio de la celda que contiene al pozo.

En el caso de geometría cartesiana, las variables significan lo siguiente :

k : promedio geométrico de las permeabilidades horizontal y vertical de la celda que contiene al pozo.

$$r_o = 0.14 \Delta x_{jk} (1 + \beta^2)^{1/2} \quad (C.2)$$

donde,

$$\beta = \frac{\Delta x_{jk}}{\Delta y} \quad \text{para } 0.5 < \beta < 2.$$

Factor geométrico, α

Para geometría cartesiana, en dirección x , se tiene:

$$\alpha_{i \pm \frac{1}{2}} = \frac{2\Delta y \Delta z k}{\frac{\Delta x_i}{k_{x,i}} + \frac{\Delta x_{i \pm 1}}{k_{x,i \pm 1}}} \quad (C.3)$$

para la dirección z ,

$$\alpha_{k\pm\frac{1}{2}} = \frac{2\Delta y\Delta x_i}{\frac{\Delta z_k}{k_{z,k}} + \frac{\Delta z_{k\pm 1}}{k_{z,k\pm 1}}} \quad (\text{C.4})$$

Para geometría cilíndrica se tiene para la dirección radial :

$$\alpha_{i+\frac{1}{2}} = \frac{2\pi\Delta z_k}{\frac{1}{k_{r,i}} \ln \frac{r_{i+\frac{1}{2}}}{r_i} + \frac{1}{k_{r,i+1}} \ln \frac{r_{i+1}}{r_{i+\frac{1}{2}}}} \quad (\text{C.5})$$

y,

$$\alpha_{i-\frac{1}{2}} = \frac{2\pi\Delta z_k}{\frac{1}{k_{r,i-1}} \ln \frac{r_{i-\frac{1}{2}}}{r_{i-1}} + \frac{1}{k_{r,i}} \ln \frac{r_i}{r_{i-\frac{1}{2}}}} \quad (\text{C.6})$$

Para la dirección vertical z ,

$$\alpha_{k+\frac{1}{2}} = \frac{2\pi \left(r_{i+\frac{1}{2}}^2 - r_{i-\frac{1}{2}}^2 \right)}{\frac{\Delta z_k}{k_{z,k}} + \frac{\Delta z_{k+1}}{k_{z,k+1}}} \quad (\text{C.7})$$

y,

$$\alpha_{k-\frac{1}{2}} = \frac{2\pi \left(r_{i+\frac{1}{2}}^2 - r_{i-\frac{1}{2}}^2 \right)}{\frac{\Delta z_k}{k_{z,k}} + \frac{\Delta z_{k-1}}{k_{z,k-1}}} \quad (\text{C.8})$$

APÉNDICE D

Considérese un sistema F_i de ecuaciones algebraicas no lineales con n incógnitas X_1, X_2, \dots, X_n , escrito en forma residual, esto es:

$$F_i(\bar{X}) = F_i(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) = 0 \quad (\text{D.1})$$

donde,

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Se desea encontrar un vector \bar{X} que sea solución del sistema (D.1). El método de Newton-Raphson⁴³ resuelve las incógnitas en forma iterativa. El proceso iterativo se fundamenta en la expansión del sistema F_i en series de Taylor alrededor del vector \bar{X}^v . De esta expansión sólo se conservan los términos de menor orden, o sea :

$$F_i(\bar{X}^{v+1}) = F_i(\bar{X}^v) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial F_i}{\partial X_j} \right)^v \delta X_j^{v+1} = 0 \quad (\text{D.2})$$

La ecuación (D.2) se puede expresar de la manera siguiente :

$$F_i(\bar{X}^{v+1}) = F_i(\bar{X}^v) + \sum_{j=1}^n J_{ij}^v \delta X_j^{v+1} = 0 \quad (\text{D.3})$$

donde,

$i = 1, 2, \dots, n$; $v = 0, 1, 2, \dots$; (v) y $(v+1)$ indican los niveles de iteración, conocido e incógnita, respectivamente. El término J_{ij}^v significa :

$$J_{ij}^v = \left(\frac{\partial F_i}{\partial X_j} \right)^v \quad (\text{D.4})$$

La matriz constituida por todos los elementos J_{ij}^v , es conocida como matriz Jacobiana.

Usando el lado derecho de la ecuación (D.3), se tiene :

$$\sum_{j=1}^n J_{ij}^v \delta \bar{X}_j^{v+1} = -F_i(\bar{X}^v) \quad (\text{D.5})$$

donde,

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Se tiene en (D.5) un sistema de ecuaciones, en donde las incógnitas son los cambios iterativos de $\delta \bar{X}_j^{v+1} = \bar{X}_j^{v+1} - \bar{X}_j^v$.

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene el vector $\delta \bar{X}_j^{v+1}$ y, a partir de este, se determina \bar{X}^{v+1} , esto es :

$$\bar{X}^{v+1} = \bar{X}^v + \delta \bar{X}^{v+1} \quad (\text{D.6})$$

Este proceso se repite hasta que se cumplen los siguientes criterios de convergencia :

$$|F_i(\bar{X}^{v+1})| < \bar{\epsilon} \quad (\text{D.7})$$

$$|\bar{X}^{v+1} - \bar{X}^v| = |\delta \bar{X}^v| < \bar{\epsilon} \quad (\text{D.8})$$

donde $\bar{\epsilon}$, es un vector de tolerancia. La convergencia del método depende de la estimación de la solución, o sea, el vector $\bar{X}^{(0)}$.

APÉNDICE E

Los elementos de las submatrices para la celdas vecinas de la celda ik , es decir, para la submatriz E_{ff} , C_{ff} , B_{ff} y D_{ff} , tienen los siguientes elementos :

$$\begin{bmatrix}
 \frac{\partial F_w}{\partial p_o} & \frac{\partial F_w}{\partial S_g} & \frac{\partial F_w}{\partial S_w} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \frac{\partial F_1}{\partial p_o} & \frac{\partial F_1}{\partial S_g} & \frac{\partial F_1}{\partial S_w} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \frac{\partial F_2}{\partial p_o} & \frac{\partial F_2}{\partial S_g} & \frac{\partial F_2}{\partial S_w} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \frac{\partial F_3}{\partial p_o} & \frac{\partial F_3}{\partial S_g} & \frac{\partial F_3}{\partial S_w} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\
 \frac{\partial \dot{F}_{nc}}{\partial p_o} & \frac{\partial \dot{F}_{nc}}{\partial S_g} & \frac{\partial \dot{F}_{nc}}{\partial S_w} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0
 \end{bmatrix}$$

Nótese, que estas submatrices representan las derivadas de las funciones de residuos de las ecuaciones de las fracturas de la celda ik , con respecto a las incógnitas de las fracturas en las celdas vecinas. Estas submatrices son del orden $(2nc+1) \times (2nc+1)$.

La submatriz A_{ff} para la celda ik , cuenta con los siguientes elementos :

$$\begin{array}{cccccccc}
 \frac{\partial F_w}{\partial p_o} & \frac{\partial F_w}{\partial S_g} & \frac{\partial F_w}{\partial S_w} & \frac{\partial F_w}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_w}{\partial x_{nc-2}} & \frac{\partial F_w}{\partial x_{nc-1}} & \frac{\partial F_w}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_w}{\partial y_{nc}} \\
 \frac{\partial F_1}{\partial p_o} & \frac{\partial F_1}{\partial S_g} & \frac{\partial F_1}{\partial S_w} & \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_{nc-2}} & \frac{\partial F_1}{\partial x_{nc-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{nc}} \\
 \frac{\partial F_2}{\partial p_o} & \frac{\partial F_2}{\partial S_g} & \frac{\partial F_2}{\partial S_w} & \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_{nc-2}} & \frac{\partial F_2}{\partial x_{nc-1}} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_{nc}} \\
 \frac{\partial F_3}{\partial p_o} & \frac{\partial F_3}{\partial S_g} & \frac{\partial F_3}{\partial S_w} & \frac{\partial F_3}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_3}{\partial x_{nc-2}} & \frac{\partial F_3}{\partial x_{nc-1}} & \frac{\partial F_3}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_3}{\partial y_{nc}} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \frac{\partial \dot{F}_{nc}}{\partial p_o} & \frac{\partial \dot{F}_{nc}}{\partial S_g} & \frac{\partial \dot{F}_{nc}}{\partial S_w} & \frac{\partial \dot{F}_{nc}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \dot{F}_{nc}}{\partial x_{nc-2}} & \frac{\partial \dot{F}_{nc}}{\partial x_{nc-1}} & \frac{\partial \dot{F}_{nc}}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \dot{F}_{nc}}{\partial y_{nc}} \\
 \frac{\partial Ff_1}{\partial p_o} & \frac{\partial Ff_1}{\partial S_g} & \frac{\partial Ff_1}{\partial S_w} & \frac{\partial Ff_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial Ff_1}{\partial x_{nc-2}} & \frac{\partial Ff_1}{\partial x_{nc-1}} & \frac{\partial Ff_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial Ff_1}{\partial y_{nc}} \\
 \frac{\partial Ff_2}{\partial p_o} & \frac{\partial Ff_2}{\partial S_g} & \frac{\partial Ff_2}{\partial S_w} & \frac{\partial Ff_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial Ff_2}{\partial x_{nc-2}} & \frac{\partial Ff_2}{\partial x_{nc-1}} & \frac{\partial Ff_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial Ff_2}{\partial y_{nc}} \\
 \frac{\partial Ff_{nc}}{\partial p_o} & \frac{\partial Ff_{nc}}{\partial S_g} & \frac{\partial Ff_{nc}}{\partial S_w} & \frac{\partial Ff_{nc}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial Ff_{nc}}{\partial x_{nc-2}} & \frac{\partial Ff_{nc}}{\partial x_{nc-1}} & \frac{\partial Ff_{nc}}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial Ff_{nc}}{\partial y_{nc}}
 \end{array}$$

Nótese, que la submatriz A_{ff} , en forma general, tendrá todos los elementos. Asimismo, representa las derivadas de las funciones de residuos de las ecuaciones de las fracturas de la celda ik , con respecto a las incógnitas de las fracturas en la misma celda. Esta submatriz es del orden $(2nc+1) \times (2nc+1)$.

La submatriz A_{mm} para la celda ik , incluye los siguientes elementos :

$\frac{\partial F_{wm}}{\partial p_{om}}$	$\frac{\partial F_{wm}}{\partial S_{gm}}$	$\frac{\partial F_{wm}}{\partial S_{vm}}$	$\frac{\partial F_{wm}}{\partial x_{1m}}$	$\frac{\partial F_{wm}}{\partial x_{nc-2m}}$	$\frac{\partial F_{wm}}{\partial x_{nc-1m}}$	$\frac{\partial F_{wm}}{\partial y_{2m}}$	$\frac{\partial F_{wm}}{\partial y_{ncm}}$
$\frac{\partial F_{1m}}{\partial p_{qm}}$	$\frac{\partial F_{1m}}{\partial S_{gm}}$	$\frac{\partial F_{1m}}{\partial S_{vm}}$	$\frac{\partial F_{1m}}{\partial x_{1m}}$	$\frac{\partial F_{1m}}{\partial x_{nc-2m}}$	$\frac{\partial F_{1m}}{\partial x_{nc-1m}}$	$\frac{\partial F_{1m}}{\partial y_{2m}}$	$\frac{\partial F_{1m}}{\partial y_{ncm}}$
$\frac{\partial F_{2m}}{\partial p_{om}}$	$\frac{\partial F_{2m}}{\partial S_{gm}}$	$\frac{\partial F_{2m}}{\partial S_{vm}}$	$\frac{\partial F_{2m}}{\partial x_{1m}}$	$\frac{\partial F_{2m}}{\partial x_{nc-2m}}$	$\frac{\partial F_{2m}}{\partial x_{nc-1m}}$	$\frac{\partial F_{2m}}{\partial y_{2m}}$	$\frac{\partial F_{2m}}{\partial y_{ncm}}$
$\frac{\partial F_{3m}}{\partial p_{om}}$	$\frac{\partial F_{3m}}{\partial S_{gm}}$	$\frac{\partial F_{3m}}{\partial S_{vm}}$	$\frac{\partial F_{3m}}{\partial x_{1m}}$	$\frac{\partial F_{3m}}{\partial x_{nc-2m}}$	$\frac{\partial F_{3m}}{\partial x_{nc-1m}}$	$\frac{\partial F_{3m}}{\partial y_{2m}}$	$\frac{\partial F_{3m}}{\partial y_{ncm}}$
$\frac{\partial F_{ncm}}{\partial p_{om}}$	$\frac{\partial F_{ncm}}{\partial S_{gm}}$	$\frac{\partial F_{ncm}}{\partial S_{vm}}$	$\frac{\partial F_{ncm}}{\partial x_{1m}}$	$\frac{\partial F_{ncm}}{\partial x_{nc-2m}}$	$\frac{\partial F_{ncm}}{\partial x_{nc-1m}}$	$\frac{\partial F_{ncm}}{\partial y_{2m}}$	$\frac{\partial F_{ncm}}{\partial y_{ncm}}$
$\frac{\partial Ff_{1m}}{\partial p_{om}}$	$\frac{\partial Ff_{1m}}{\partial S_{gm}}$	$\frac{\partial Ff_{1m}}{\partial S_{vm}}$	$\frac{\partial Ff_{1m}}{\partial x_{1m}}$	$\frac{\partial Ff_{1m}}{\partial x_{nc-2m}}$	$\frac{\partial Ff_{1m}}{\partial x_{nc-1m}}$	$\frac{\partial Ff_{1m}}{\partial y_{2m}}$	$\frac{\partial Ff_{1m}}{\partial y_{ncm}}$
$\frac{\partial Ff_{2m}}{\partial p_{om}}$	$\frac{\partial Ff_{2m}}{\partial S_{gm}}$	$\frac{\partial Ff_{2m}}{\partial S_{vm}}$	$\frac{\partial Ff_{2m}}{\partial x_{1m}}$	$\frac{\partial Ff_{2m}}{\partial x_{nc-2m}}$	$\frac{\partial Ff_{2m}}{\partial x_{nc-1m}}$	$\frac{\partial Ff_{2m}}{\partial y_{2m}}$	$\frac{\partial Ff_{2m}}{\partial y_{ncm}}$
$\frac{\partial Ff_{ncm}}{\partial p_{om}}$	$\frac{\partial Ff_{ncm}}{\partial S_{gm}}$	$\frac{\partial Ff_{ncm}}{\partial S_{vm}}$	$\frac{\partial Ff_{ncm}}{\partial x_{1m}}$	$\frac{\partial Ff_{ncm}}{\partial x_{nc-2m}}$	$\frac{\partial Ff_{ncm}}{\partial x_{nc-1m}}$	$\frac{\partial Ff_{ncm}}{\partial y_{2m}}$	$\frac{\partial Ff_{ncm}}{\partial y_{ncm}}$

Observe, que la submatriz A_{mm} , en forma general, tendrá todos los elementos. Esta submatriz representa las derivadas de las funciones de residuos de las ecuaciones en los bloques de matriz de la celda ik , con respecto a las incógnitas de las fracturas en la misma celda. Esta submatriz es del orden $(2nc+1) \times (2nc+1)$.

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

Los elementos de las submatriz A_{fm} , contiene los siguientes elementos :

$$\begin{array}{cccccccc}
 \frac{\partial F_w}{\partial p_{om}} & \frac{\partial F_w}{\partial S_{gm}} & \frac{\partial F_w}{\partial S_{wm}} & \frac{\partial F_w}{\partial x_{1m}} & \dots & \frac{\partial F_w}{\partial x_{nc-2m}} & \frac{\partial F_w}{\partial x_{nc-1m}} & \frac{\partial F_w}{\partial y_{2m}} & \dots & \frac{\partial F_w}{\partial y_{ncm}} \\
 \frac{\partial F_1}{\partial F_1} & \frac{\partial F_1}{\partial F_1} & \frac{\partial F_1}{\partial F_1} & \frac{\partial F_1}{\partial F_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial F_1} & \frac{\partial F_1}{\partial F_1} & \frac{\partial F_1}{\partial F_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial F_1} \\
 \frac{\partial F_2}{\partial F_2} & \frac{\partial F_2}{\partial F_2} & \frac{\partial F_2}{\partial F_2} & \frac{\partial F_2}{\partial F_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial F_2} & \frac{\partial F_2}{\partial F_2} & \frac{\partial F_2}{\partial F_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial F_2} \\
 \frac{\partial F_3}{\partial F_3} & \frac{\partial F_3}{\partial F_3} & \frac{\partial F_3}{\partial F_3} & \frac{\partial F_3}{\partial F_3} & \dots & \frac{\partial F_3}{\partial F_3} & \frac{\partial F_3}{\partial F_3} & \frac{\partial F_3}{\partial F_3} & \dots & \frac{\partial F_3}{\partial F_3} \\
 \frac{\partial F_w}{\partial p_{om}} & \frac{\partial F_w}{\partial S_{gm}} & \frac{\partial F_w}{\partial S_{wm}} & \frac{\partial F_w}{\partial x_{1m}} & \dots & \frac{\partial F_w}{\partial x_{nc-2m}} & \frac{\partial F_w}{\partial x_{nc-1m}} & \frac{\partial F_w}{\partial y_{2m}} & \dots & \frac{\partial F_w}{\partial y_{ncm}} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \frac{\partial F_{nc}}{\partial p_{om}} & \frac{\partial F_{nc}}{\partial S_{gm}} & \frac{\partial F_{nc}}{\partial S_{wm}} & \frac{\partial F_{nc}}{\partial x_{1m}} & \dots & \frac{\partial F_{nc}}{\partial x_{nc-2m}} & \frac{\partial F_{nc}}{\partial x_{nc-1m}} & \frac{\partial F_{nc}}{\partial y_{2m}} & \dots & \frac{\partial F_{nc}}{\partial y_{ncm}} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0
 \end{array}$$

Esta submatriz representa las derivadas de las funciones de residuos de las ecuaciones de las fracturas de la celda ik , con respecto a las incógnitas de los bloques de matriz en la misma celda. Nótese, que para esta submatriz no existen derivadas de las ecuaciones de equilibrio termodinámico con respecto a las incógnitas primarias. Esta submatriz es del orden $(2nc+1) \times (2nc+1)$.

Los elementos de la submatriz A_{mf} , tiene los siguientes elementos :

$$\begin{bmatrix}
 \frac{\partial F_{wm}}{\partial p_o} & \frac{\partial F_{wm}}{\partial S_g} & \frac{\partial F_{wm}}{\partial S_w} & \frac{\partial F_{wm}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_{wm}}{\partial x_{nc-2}} & \frac{\partial F_{wm}}{\partial x_{nc-1}} & \frac{\partial F_{wm}}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_{wm}}{\partial y_{nc}} \\
 \frac{\partial F_{1m}}{\partial p_o} & \frac{\partial F_{1m}}{\partial S_g} & \frac{\partial F_{1m}}{\partial S_w} & \frac{\partial F_{1m}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_{1m}}{\partial x_{nc-2}} & \frac{\partial F_{1m}}{\partial x_{nc-1}} & \frac{\partial F_{1m}}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_{1m}}{\partial y_{nc}} \\
 \frac{\partial F_{2m}}{\partial p_o} & \frac{\partial F_{2m}}{\partial S_g} & \frac{\partial F_{2m}}{\partial S_w} & \frac{\partial F_{2m}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_{2m}}{\partial x_{nc-2}} & \frac{\partial F_{2m}}{\partial x_{nc-1}} & \frac{\partial F_{2m}}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_{2m}}{\partial y_{nc}} \\
 \frac{\partial F_{3m}}{\partial p_o} & \frac{\partial F_{3m}}{\partial S_g} & \frac{\partial F_{3m}}{\partial S_w} & \frac{\partial F_{3m}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_{3m}}{\partial x_{nc-2}} & \frac{\partial F_{3m}}{\partial x_{nc-1}} & \frac{\partial F_{3m}}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_{3m}}{\partial y_{nc}} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \frac{\partial F_{ncm}}{\partial p_o} & \frac{\partial F_{ncm}}{\partial S_g} & \frac{\partial F_{ncm}}{\partial S_w} & \frac{\partial F_{ncm}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_{ncm}}{\partial x_{nc-2}} & \frac{\partial F_{ncm}}{\partial x_{nc-1}} & \frac{\partial F_{ncm}}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_{ncm}}{\partial y_{nc}} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0
 \end{bmatrix}$$

Esta submatriz representa las derivadas de las funciones de residuos de las ecuaciones de los bloques de matriz de la celda ik , con respecto a las incógnitas de las fracturas en la misma celda. Nótese, que para esta submatriz no existen derivadas de las ecuaciones de equilibrio termodinámico con respecto a las incógnitas primarias. Esta submatriz es del orden $(2nc+1) \times (2nc+1)$.

TABLAS

Tabla 5.1. Parámetros del yacimiento y fluido para verificación analítica.

Presión inicial	lb/pg ²	4500
Radio del pozo	pie	0.328
Espesor de la formación	pie	65.6
Longitud de los bloques de matriz	pie	3.05
Porosidad de la fractura	fracción	0.015
Permeabilidad de la fractura	md	1000
Compresibilidad total de la fractura	(lb/pg ²) ⁻¹	4.12E-05
Porosidad de la matriz	fracción	0.15
Permeabilidad de la matriz	md	1
Compresibilidad total de la matriz	(lb/pg ²) ⁻¹	3.66E-05
Factor de volumen de aceite	cons.	2.15
Viscosidad de aceite	cp	0.0979

Tabla 5.2. Composición inicial de fluidos.

Componente	Composición Original	Pseudo Componente	Fracción de Gas	Fracción de Líquido
CH ₄	0.6069	pC ₁	0.6117	0.45941
N ₂	0.0078			
C ₂ H ₆	0.1433	pC ₂	0.1467	0.13716
CO ₂	0.0034			
C ₃ H ₈	0.0959	pC ₃	0.1711	0.1954
C ₄	0.0536			
C ₅	0.0216			
C ₆	0.0125			
C ₇	0.0126			
C ₈	0.0134	pC ₄	0.0508	0.09065
C ₉	0.0076			
C ₁₀	0.0047			
C ₁₁	0.0140	pC ₅	0.01396	0.05383
C ₁₂₊	0.0057	pC ₆	0.00574	0.06355

Tabla 5.3 Propiedades de pseudocomponentes.

	Pseudocomponentes					
	pC ₁	pC ₂	pC ₃	pC ₄	pC ₅	pC ₆
Peso molecular	16.19	30.39	52.03	108.54	184.41	340.88
Factor acéntrico	0.0084	0.1009	0.1773	0.3758	0.506	0.829
Temp. crítica °R	367.41	575.7	745.09	1024.18	1361.39	1673.79
Presión crítica lb/pg ² a	674.62	722.95	584.00	382.62	321.20	199.36
Factor Z crítico	0.2897	0.2859	0.2782	0.2652	0.249	0.2297

Tabla 5.4 Propiedades de pseudocomponentes. Coeficientes de interacción.

	Pseudocomponentes					
	pC ₁	pC ₂	pC ₃	pC ₄	pC ₅	pC ₆
pC ₁	0.00000	0.00001	-0.00250	0.03.69	0.04647	0.05519
pC ₂	0.00001	0.00000	-0.00081	0.00987	0.00987	0.00987
pC ₃	-0.00250	-0.00081	0.00000	0.00236	0.00236	0.00236
pC ₄	0.03069	0.00987	0.00236	0.00000	0.00000	0.00000
pC ₅	0.04647	0.00987	0.00236	0.00000	0.00000	0.00000
pC ₆	0.05519	0.00987	0.00236	0.00000	0.00000	0.00000

Tabla 5.5. Datos del yacimiento para verificación del modelo. Aceite volátil. Régimen permanente.

Parámetro	Unidad	
Longitud en dirección x	pie	9850
Longitud en dirección y	pie	656
Longitud en dirección z	pie	328
Presión inicial de yacimiento	lb/pg ² a 8170 p	4500
Temperatura de yacimiento	°R	760

Tabla 5.6. Datos pozo productor e inyector para validación del modelo. Régimen permanente.

Parámetro	Unidad	
Radio de pozo	pie	0.328
Gasto de aceite	bpd	12580
Pwf mínima	lb/pg ²	1000
Presión de inyección (cte.)	lb/pg ² a 8169p.	4500
Presión de separación	lb/pg ²	14.7
Temperatura de separación	°R	760

Tabla 5.7. Datos de fractura y matriz para validación del modelo. Régimen permanente.

Parámetro matriz-fractura	Unidad	Matriz	Fractura
Compresibilidad de la formación	(lb/pg ²) ⁻¹	3.03E-6	3.03E-06
Saturación de agua irreductible	fracción	0.2	0
Porosidad	fracción	0.15	0.01
Permeabilidad horizontal	md	10	150
Permeabilidad vertical	md	-	150
Longitud de bloques	pie	10	-

Tabla 5.8. Parámetros de simulación para verificación de modelo. Régimen permanente.

Parámetro de simulación	Unidad	
Celdas en dirección x		15
Celdas en dirección z		1
Coordenadas pozos productor e inyector		(1,1) (15,1)
Δt inicial	día	1.00E-03
Δt mínimo	día	1.00E-05
Δt máximo	día	4
Tolerancia de presión	lb/pg ²	0.2
Tolerancia de saturación	fracción	5.00E-04
Tolerancia de fracciones molares	fracción	1.00E-07
Tolerancia en ecuaciones de equilibrio	fracción	1.00E-07
No máx. de iteraciones permitidas		5
Variación máxima de presión	lb/pg ²	100
Variación máxima de saturación	fracción	1.0E-02

Tabla 6.1. Parámetros de simulación. Prueba de formación en un yacimiento de aceite volátil.

Parámetros de simulación	Unidad	
Celdas en dirección r (radial)		8
Celdas en dirección z		1
Δt inicial	día	1.00E-03
Δt mínimo	día	1.00E-03
Δt máximo	día	0.5
Tolerancia de presión	lb/pg ²	0.2
Tolerancia de saturación	fracción	5.00E-04
Tolerancia de fracciones molares	fracción	1.00E-06
Tolerancia en ecuaciones de equilibrio	fracción	1.00E-06
No máx. de iteraciones permitidas		5
Variación máxima de presión	lb/pg ²	1000
Variación máxima de saturación	fracción	1.00E-02

Tabla 6.2. Datos del yacimiento. Prueba de formación en un yacimiento de aceite volátil

Parámetro	Unidad	
Longitud en dirección r (radial)	pie	9845
Longitud en dirección z	pie	165
Presión inicial de yacimiento	lb/pg ² a 8170 pie	4380
Temperatura de yacimiento	°R	760

Tabla 6.3. Datos de bloques de matriz y fracturas. Prueba de formación en un yacimiento de aceite volátil

Parámetros matriz-fractura	Unidad	Matriz	Fractura
Compresibilidad de la formación	(lb/pg ²) ⁻¹	3.03E-06	3.03E-06
Saturación de agua irreductible	fracción	0.2	0
Porosidad	fracción	0.15	0.01
Permeabilidad horizontal	md	50	200
Permeabilidad vertical	md	-	-
Longitud de bloque (x, y, z)	pie	10	-

Tabla 6.4. Datos de producción. Prueba de formación en un yacimiento de aceite volátil.

Parámetro	Unidad	
Radio del pozo	pie	0.328
Gasto de aceite	bpd	3150
Presión de fondo fluyendo mínima	lb/pg ²	1000
Presión de separación	lb/pg ²	14.7
Temperatura de separación	°R	520

Tabla 6.5. Datos de yacimiento. Agotamiento natural en un yacimiento de aceite volátil.

Parámetro	Unidad	
Longitud en dirección x	pie	3280
Longitud en dirección y	pie	1640
Longitud en dirección z	pie	328
Presión inicial de yacimiento	lb/pg ² a 8170 pie	4500
Temperatura de yacimiento	°R	760

Tabla 6.6. Datos de bloques de matriz y fracturas. Agotamiento natural en un yacimiento de aceite volátil.

Parámetros matriz-fractura	Unidad	Matriz	Fractura
Compresibilidad de la formación	lb/pg ²	3.03E-06	3.03E-06
Saturación de agua irreductible	fracción	0.2	0
Porosidad	fracción	0.15	0.01
Permeabilidad horizontal	md	10	300
Permeabilidad vertical	md	-	300
Longitud de bloques (x, y, z)	pie	15	-

Tabla 6.7. Parámetros de simulación. Agotamiento natural en un yacimiento de aceite volátil.

Parámetros de simulación	Unidad	
Celdas en dirección x		8
Celdas en dirección z		4
Celda productora		(1, 1)
Δt inicial	día	1.00E-03
Δt mínimo	día	1.00E-05
Δt máximo	día	5
Tolerancia de presión	lb/pg ²	0.2
Tolerancia de saturación	fracción	5.00E-04
Tolerancia de fracciones molares	fracción	1.00E-06
Tolerancia en ecuaciones de equilibrio	fracción	1.00E-06
No máx. de iteraciones permitidas		5
Variación máxima de presión	lb/pg ²	1000
Variación máxima de saturación	fracción	1.00E-02

Tabla 6.8. Datos de producción. Agotamiento natural de un yacimiento de aceite volátil.

Parámetro	Unidad	
Radio de pozo	pie	0.328
Gasto de aceite	bpd	3775
Presión de fondo fluyendo mínima	lb/pg ²	1000
Gasto de aceite mínimo	bpd	63
Presión de separación	lb/pg ²	14.7
Temperatura de separación	°R	520

Tabla 6.9. Datos de producción. Agotamiento natural en un yacimiento de gas y condensado.

Parámetro	Unidad	
Radio de pozo	pie	0.328
Gasto de gas	p ³ /día	1.76E+07
Presión de fondo fluyendo mínima	lb/pg ²	1000
Gasto mínimo	p ³ /día	3.53E+04
Presión de separación	lb/pg ²	14.7
Temperatura de separación	°R	520

Tabla 6.10. Parámetros de simulación. Inyección de gas en un yacimiento de aceite volátil.

Parámetros de simulación	Unidad	
Celdas en dirección x		8
Celdas en dirección z		4
Celdas productora/injectora		(1,1)/(8,4)
Δt inicial	día	1.00E-03
Δt mínimo	día	1.00E-05
Δt máximo	día	5
Tolerancia de presión	lb/pg ²	0.2
Tolerancia de saturación	fracción	5.00E-04
Tolerancia de fracciones molares	fracción	1.00E-06
Tolerancia en ecuaciones de equilibrio	fracción	1.00E-06
No máx. de iteraciones permitidas		5
Variación máxima de presión	lb/pg ²	1000
Variación máxima de saturación	fracción	1.00E-02

Tabla 6.11. Datos de producción. Inyección de gas en un yacimiento de aceite volátil.

Parámetro	Unidad	
Radio de pozo	pie	0.328
Gasto de aceite	bpd	3775
Presión de fondo fluyendo mínima	lb/pg ²	1000
Gasto de inyección	p ³ /día	3.50E+06
Presión de separación	lb/pg ²	14.7
Temperatura de separación	°R	520

Tabla 6.12. Composición del gas inyectado.

Pseudo Componente	Fracción de Gas
pC ₁	0.652424
pC ₂	0.156151
pC ₃	0.178949
pC ₄	0.012473
pC ₅	0.000003
pC ₆	0.000000

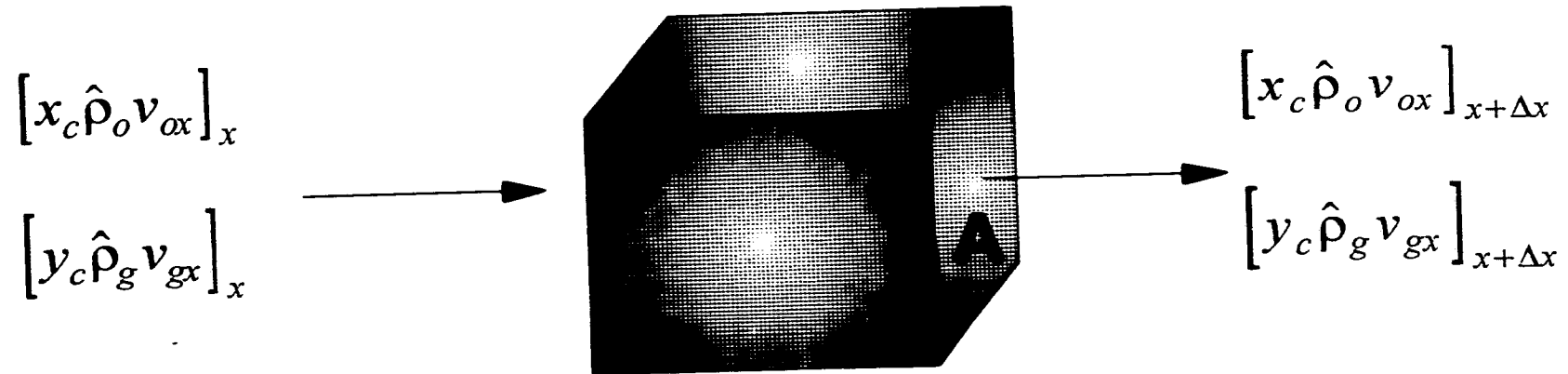


Figura 1A. Volumen representativo del medio poroso

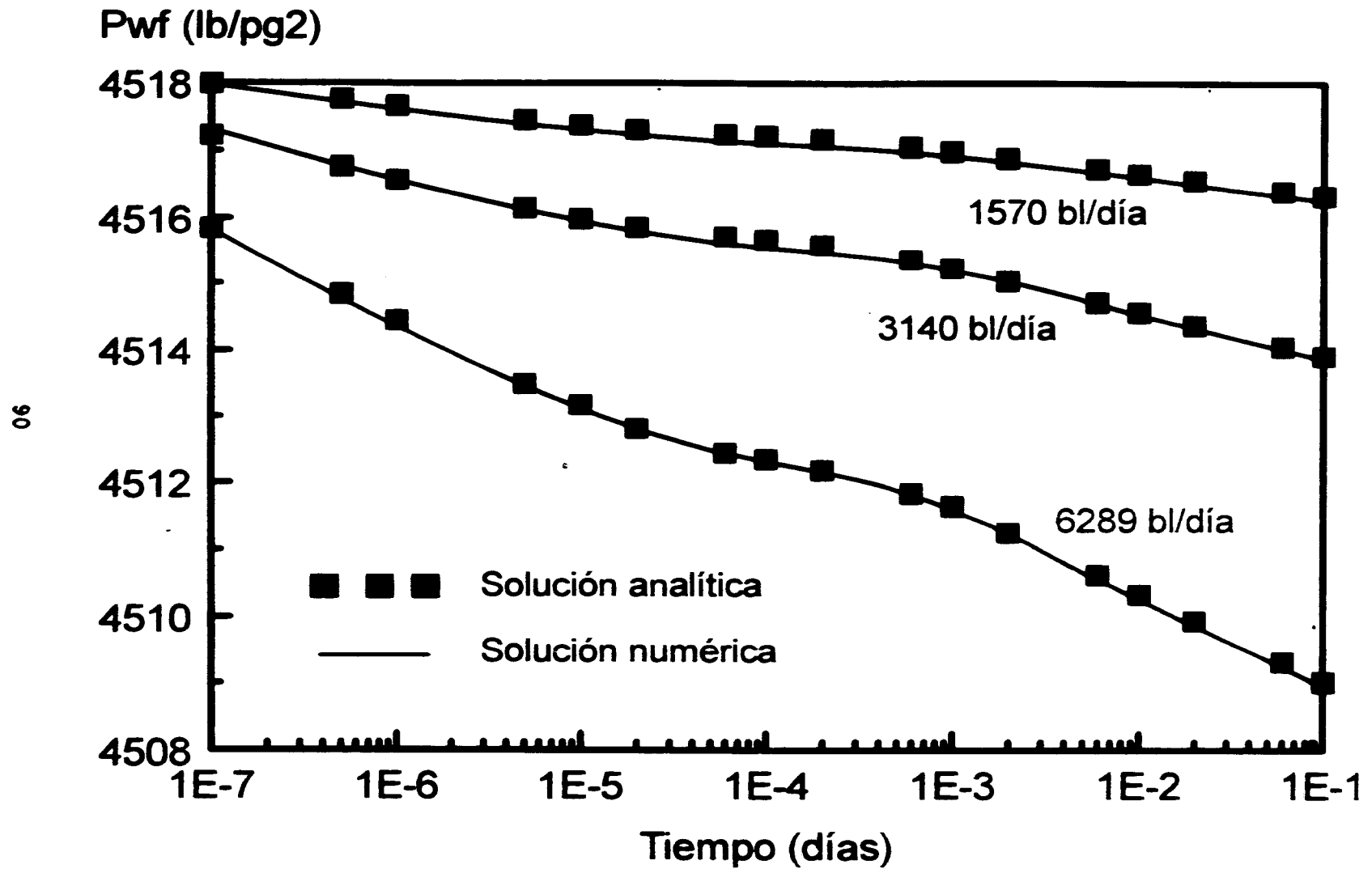


Figura 5.1. Validación analítica, modelo de doble porosidad, con flujo monofásico de líquido.

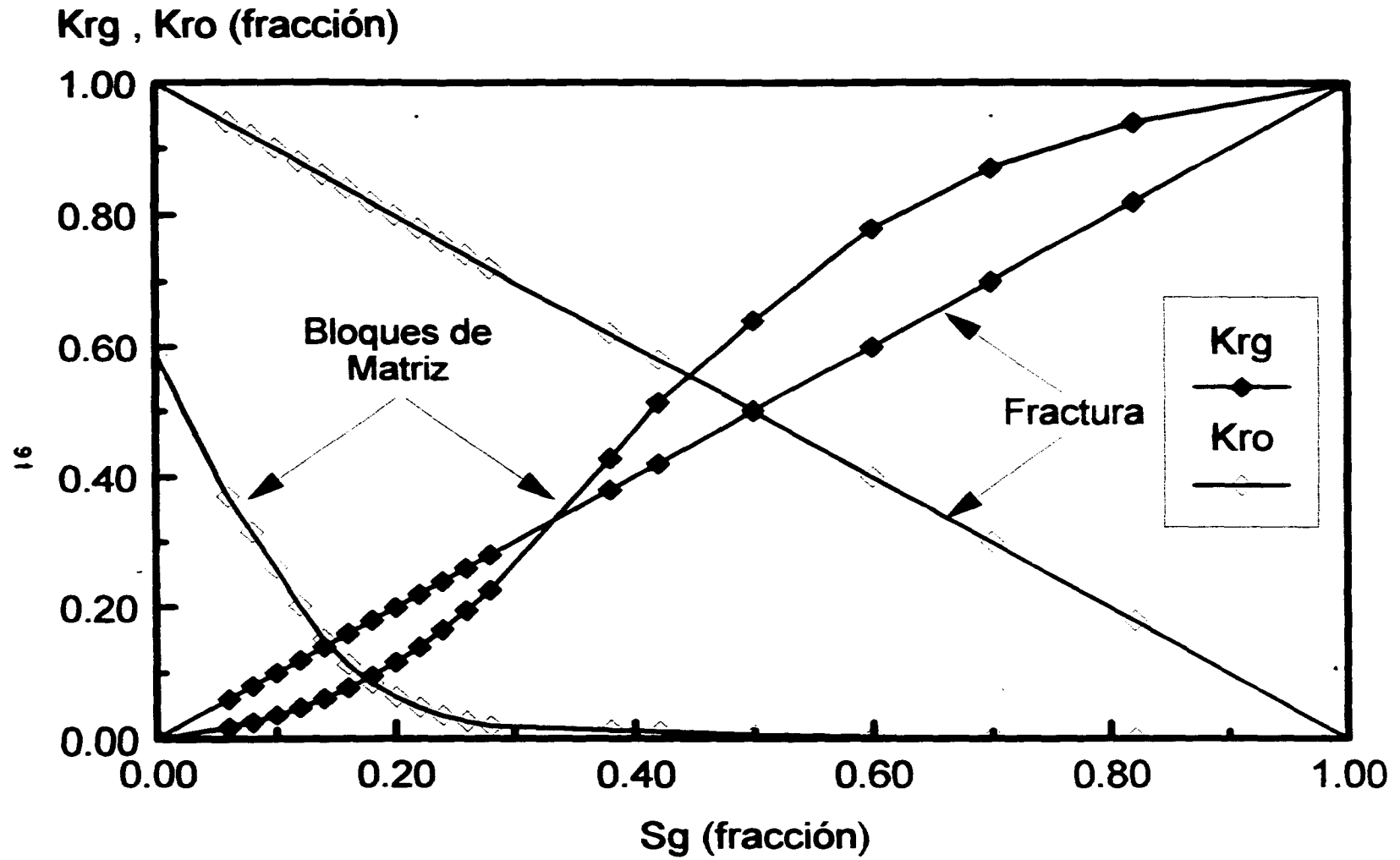


Figura 5.2. Curvas de permeabilidad relativa gas-aceite, para bloques de matriz y fracturas.

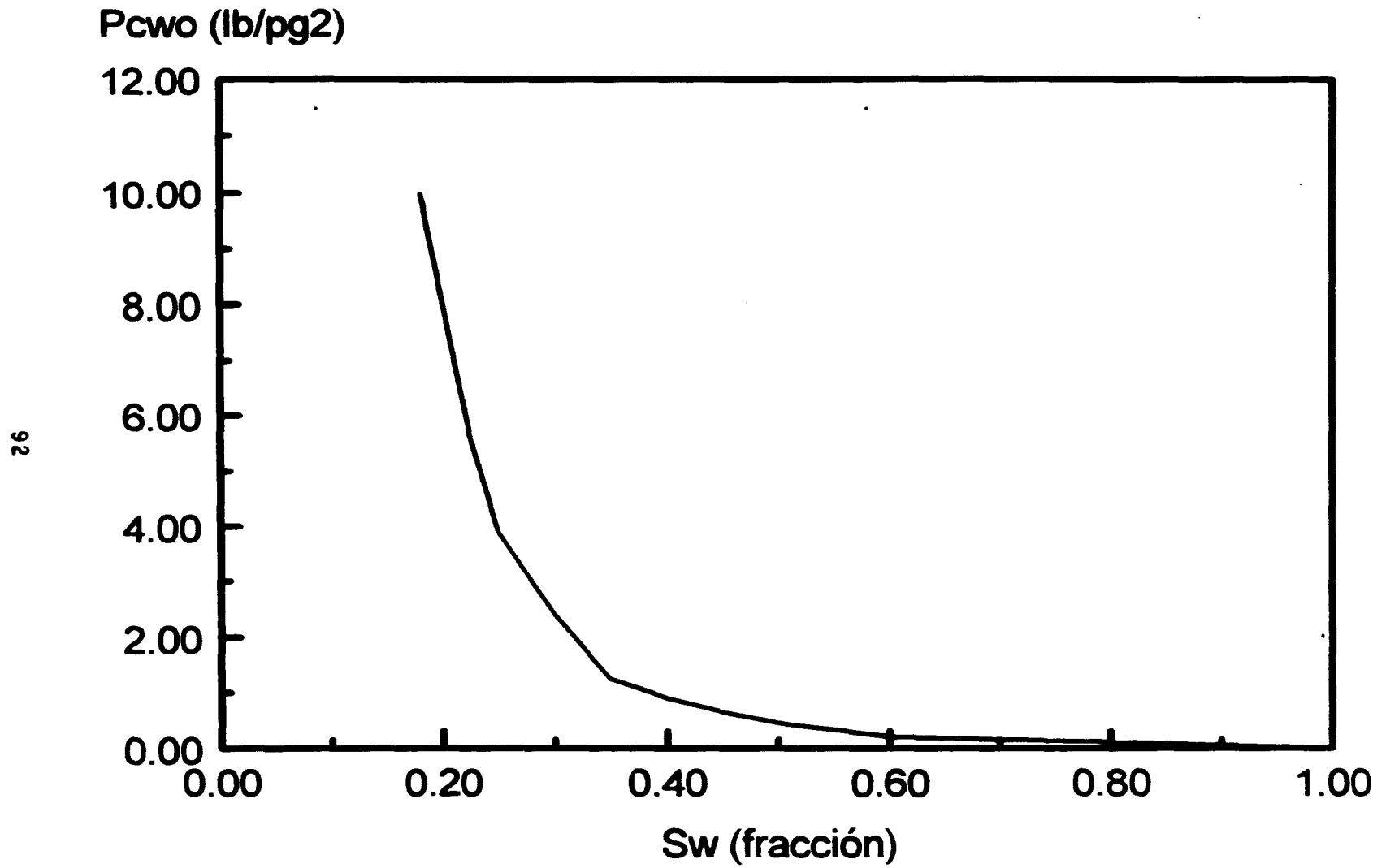


Figura 5.3a. Curva de presión capilar agua-aceite para bloques de matriz.

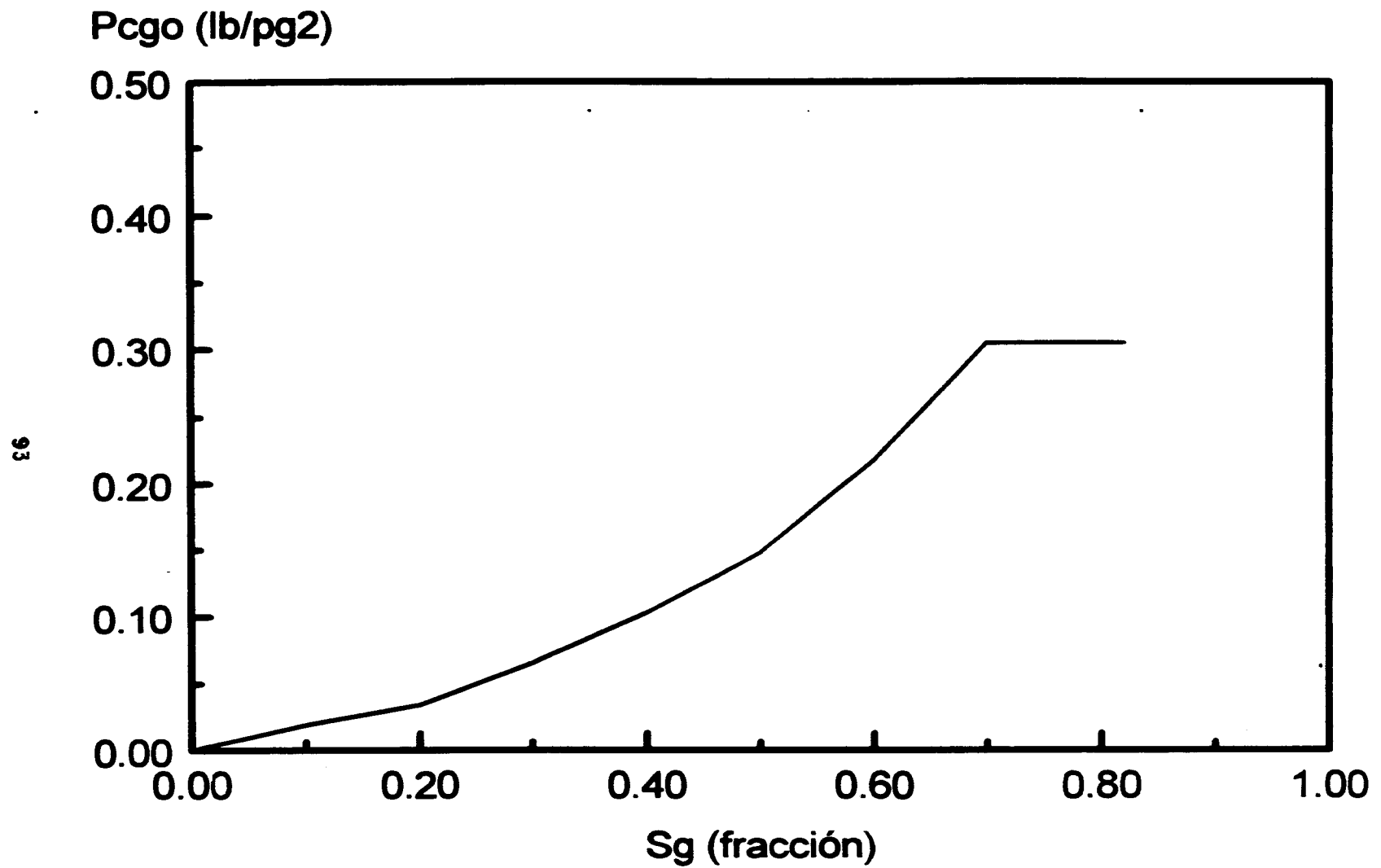


Figura 5.3b. Curva de presión capilar gas-aceite para bloques de matriz.

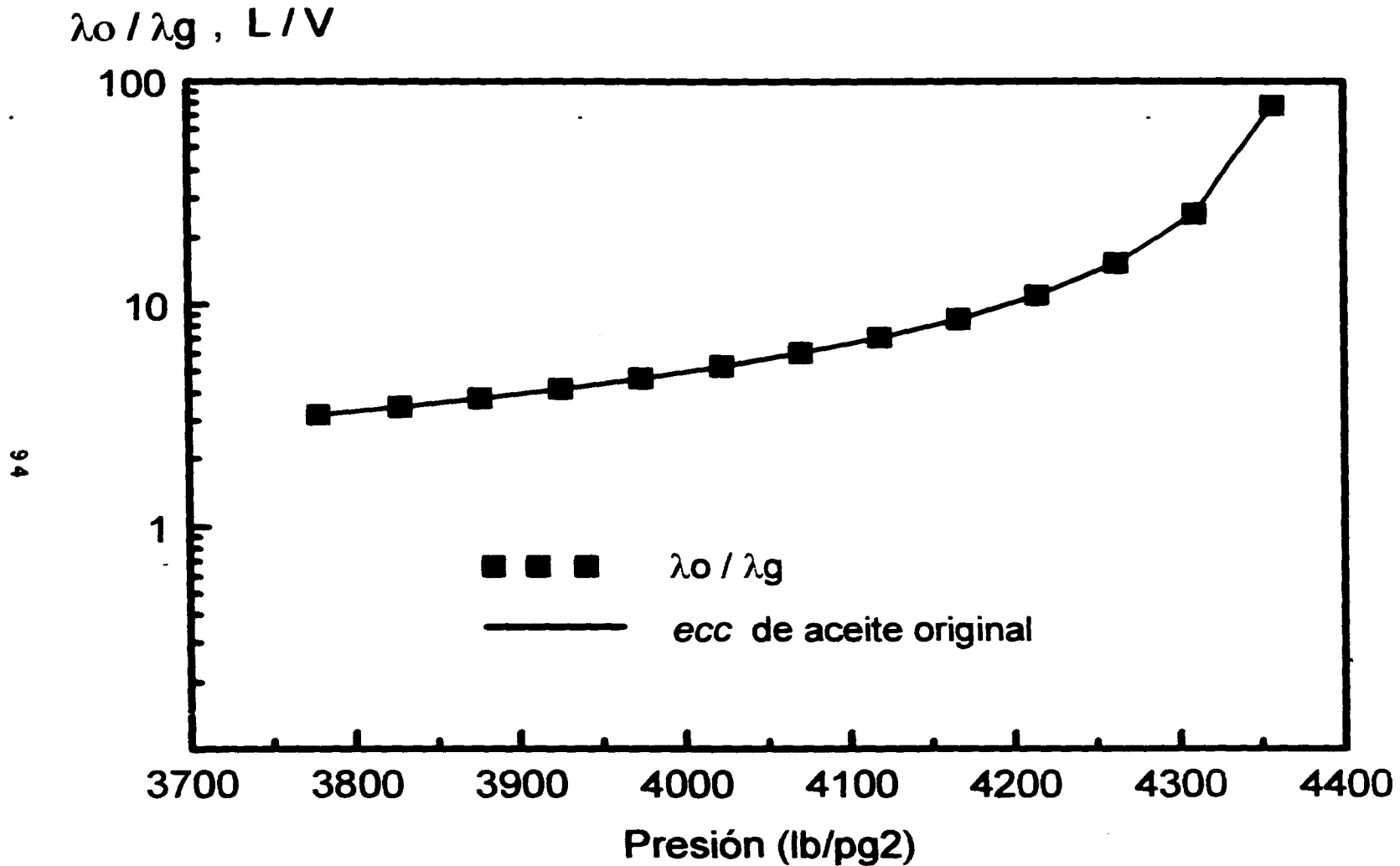


Figura 5.4. Relación de movilidades de las fases aceite y gas, y relación de fracciones molares L/V contra la presión. Yacimiento de aceite volátil, flujo lineal.

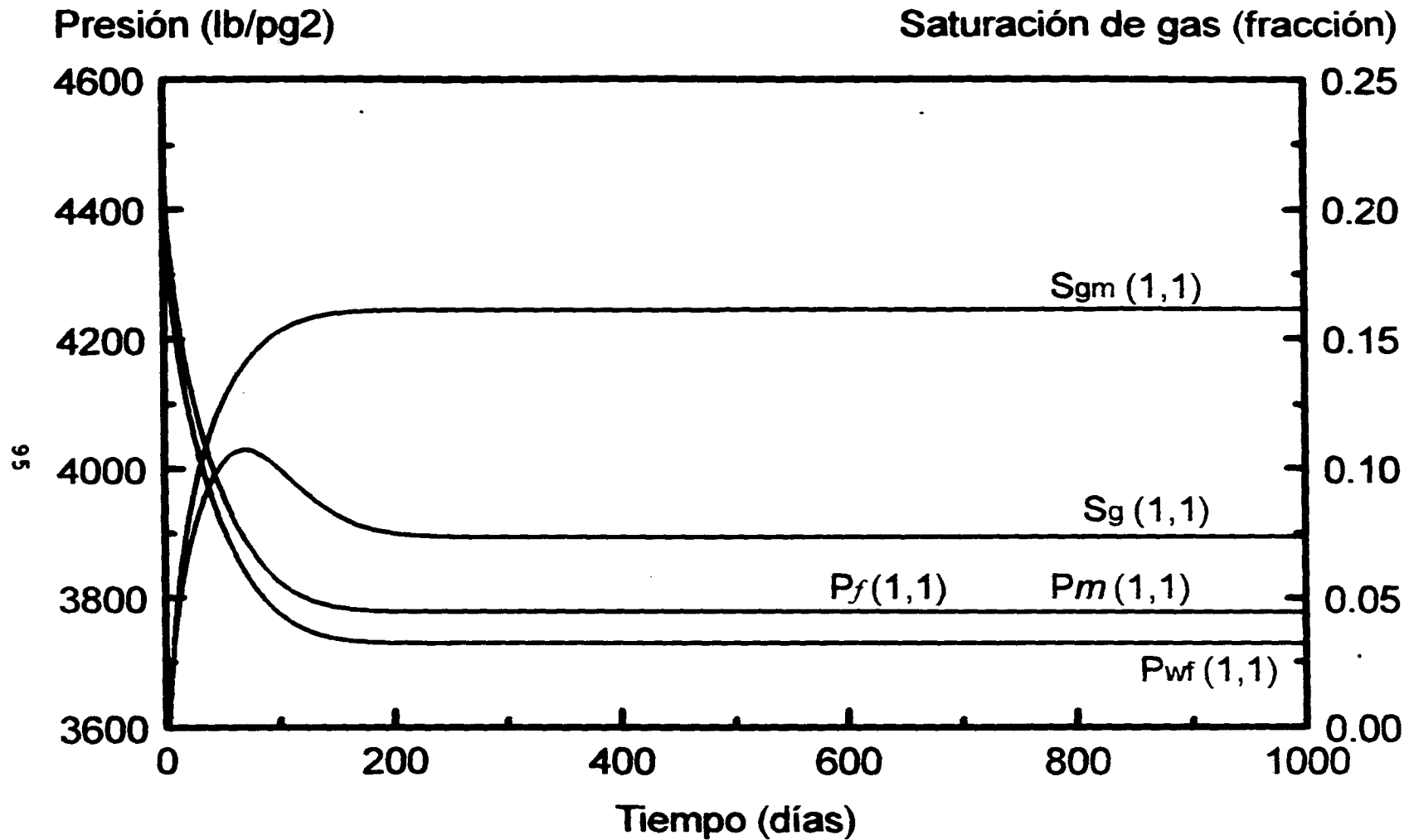


Figura 5.5. Presión de fondo fluyendo y saturación de gas en la matriz y en la fractura contra el tiempo. Régimen permanente. Yacimiento de aceite volátil, flujo lineal.

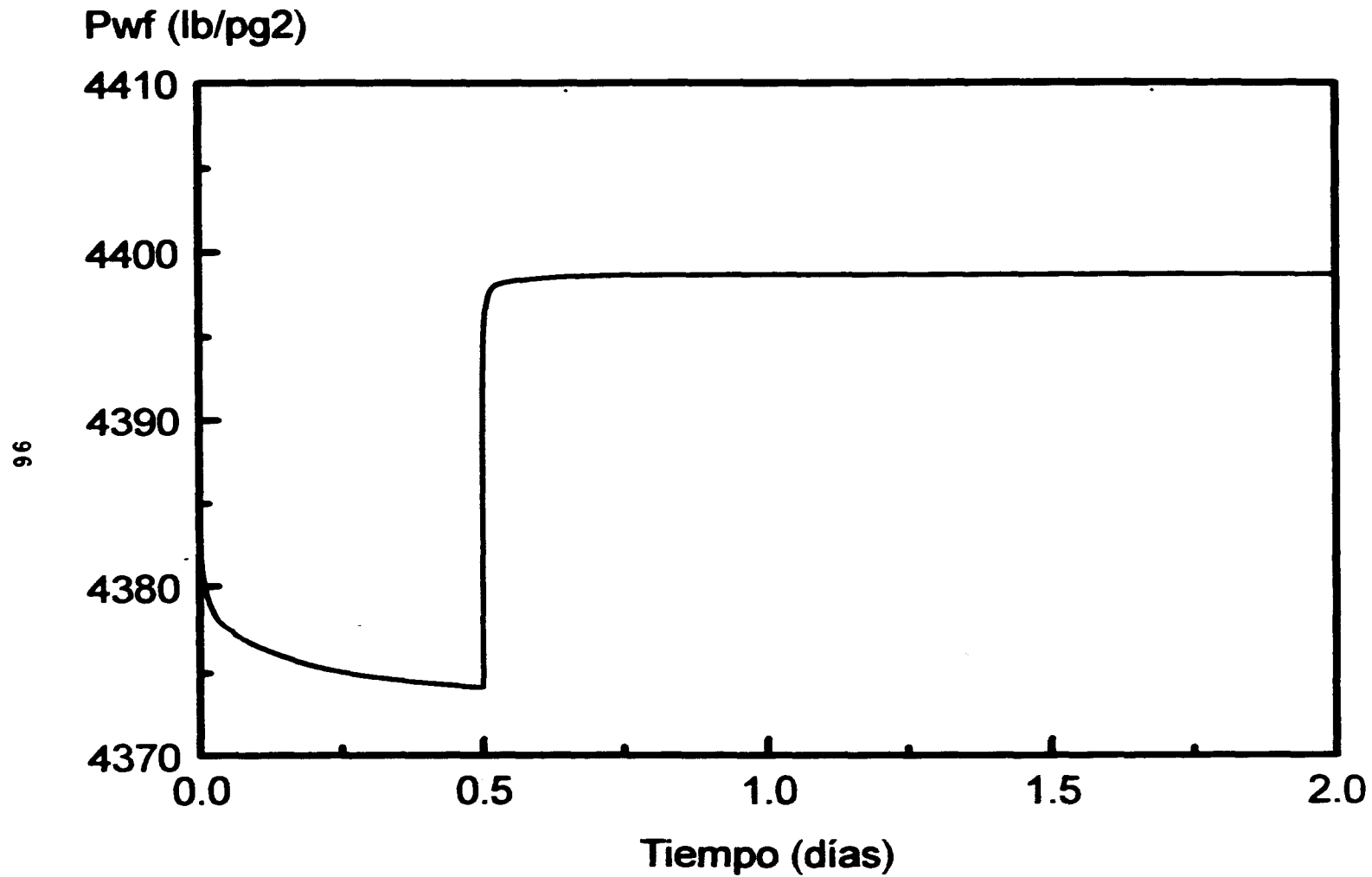


Figura 6.1.: Presión de fondo fluyendo contra el tiempo. Prueba de formación en un yacimiento de aceite volátil.

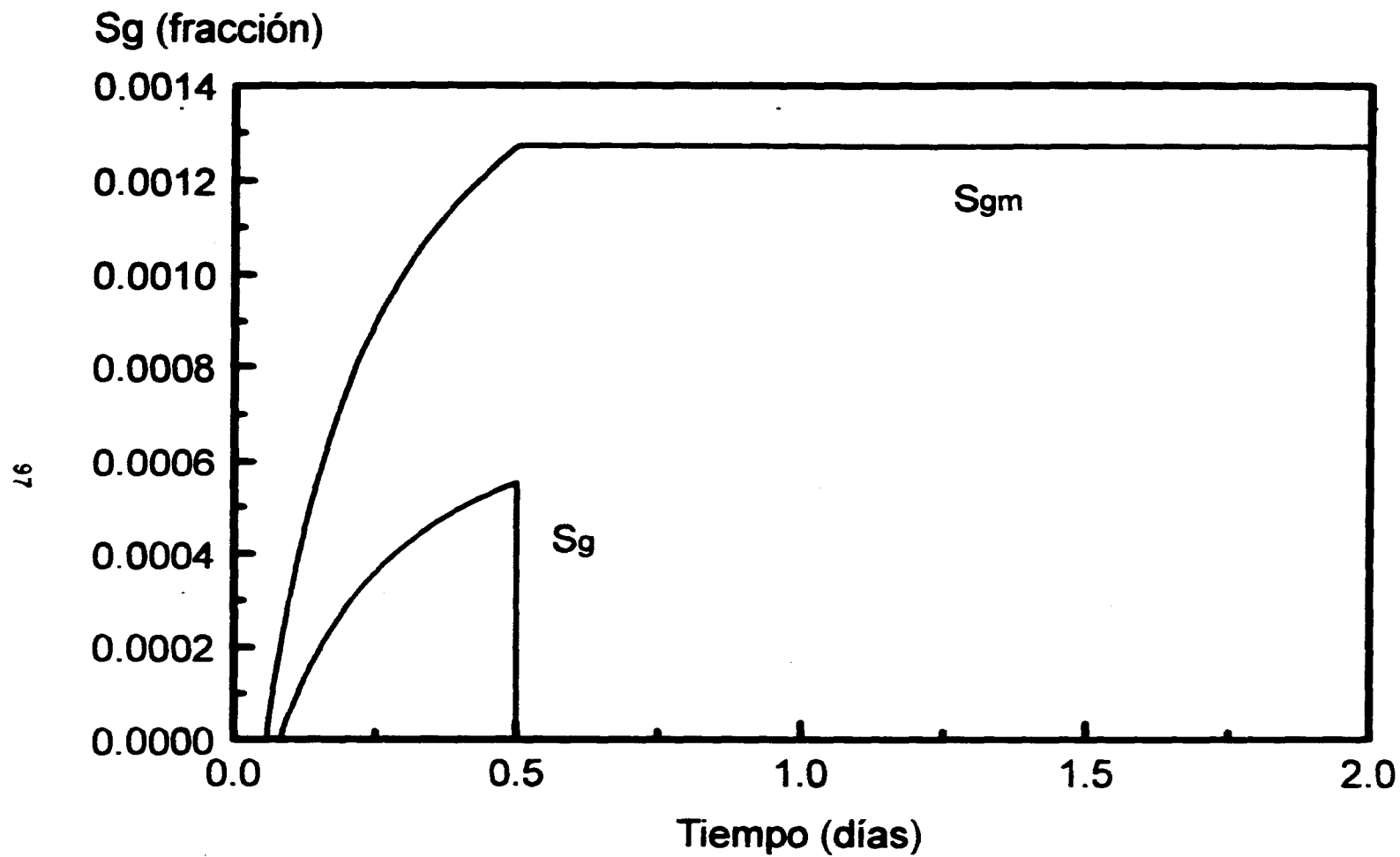


Figura 6.2. Saturación de gas contra el tiempo en la matriz y en la fractura. Prueba de formación en un yacimiento de aceite volátil.

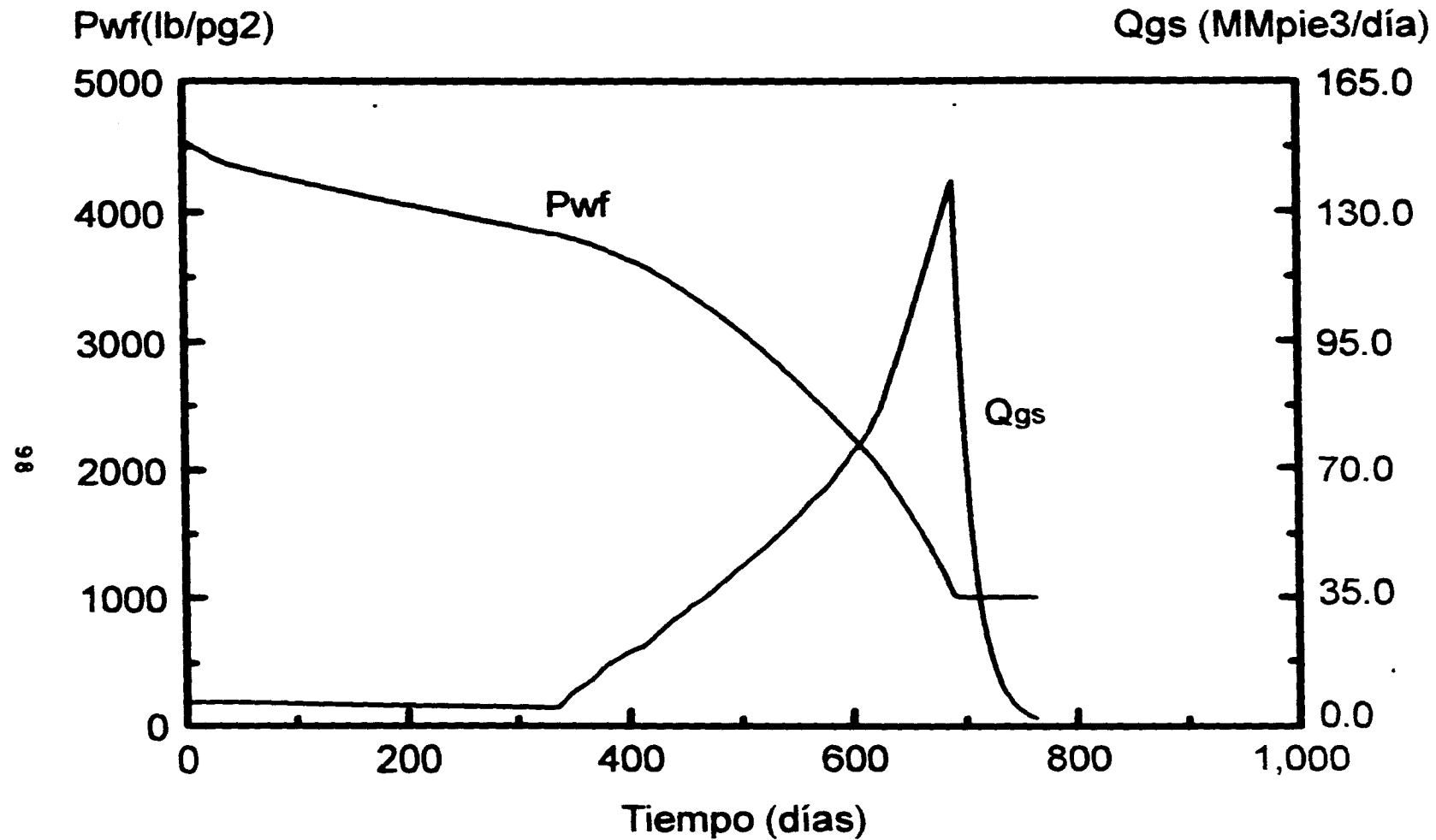


Figura 6.3. Presión de fondo fluyendo y gasto de gas contra el tiempo. Agotamiento natural en un yacimiento de aceite volátil.

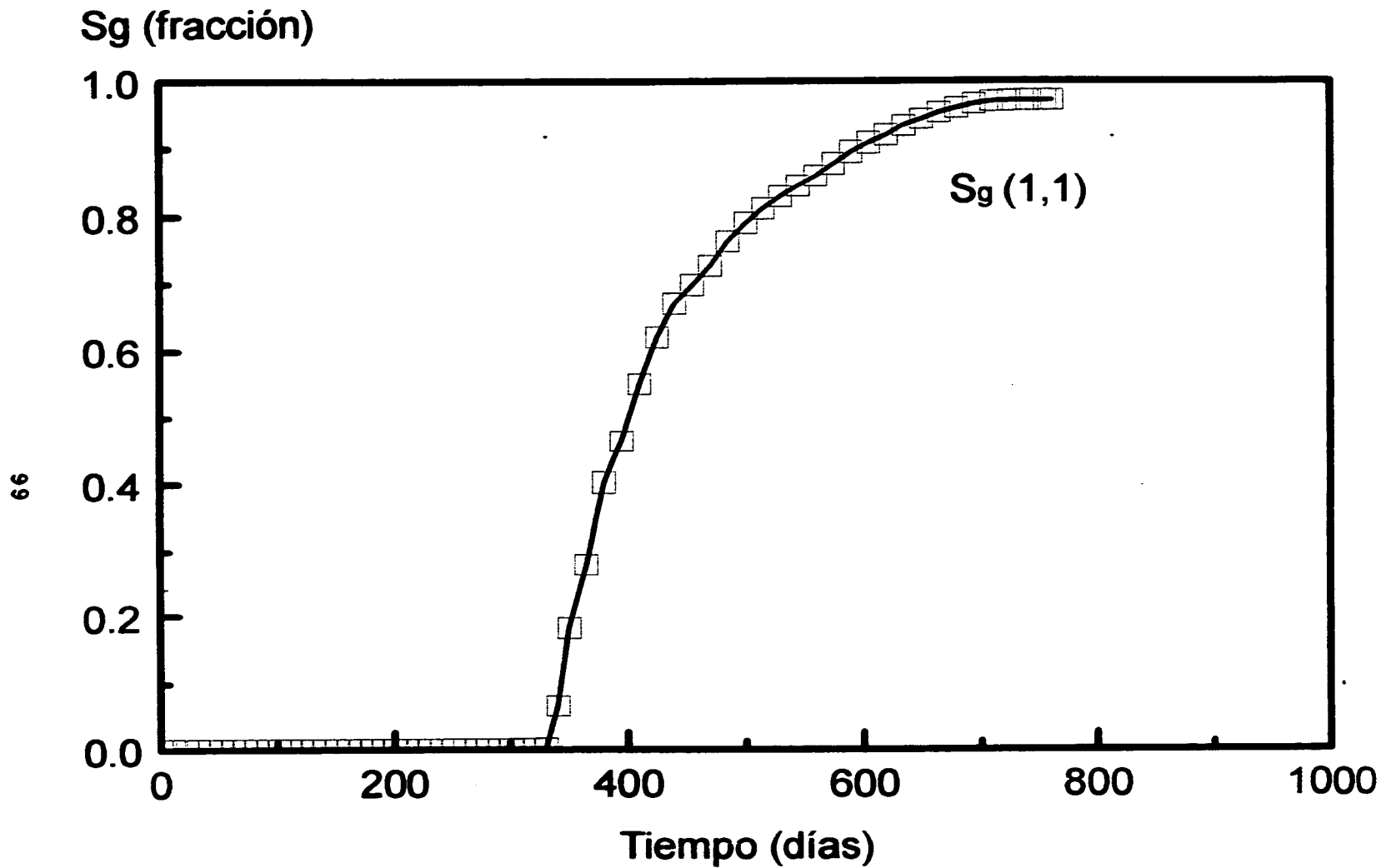


Figura 6.4. Saturación de gas en la fractura contra el tiempo, celda(1,1).
Agotamiento natural en un yacimiento de aceite volátil.

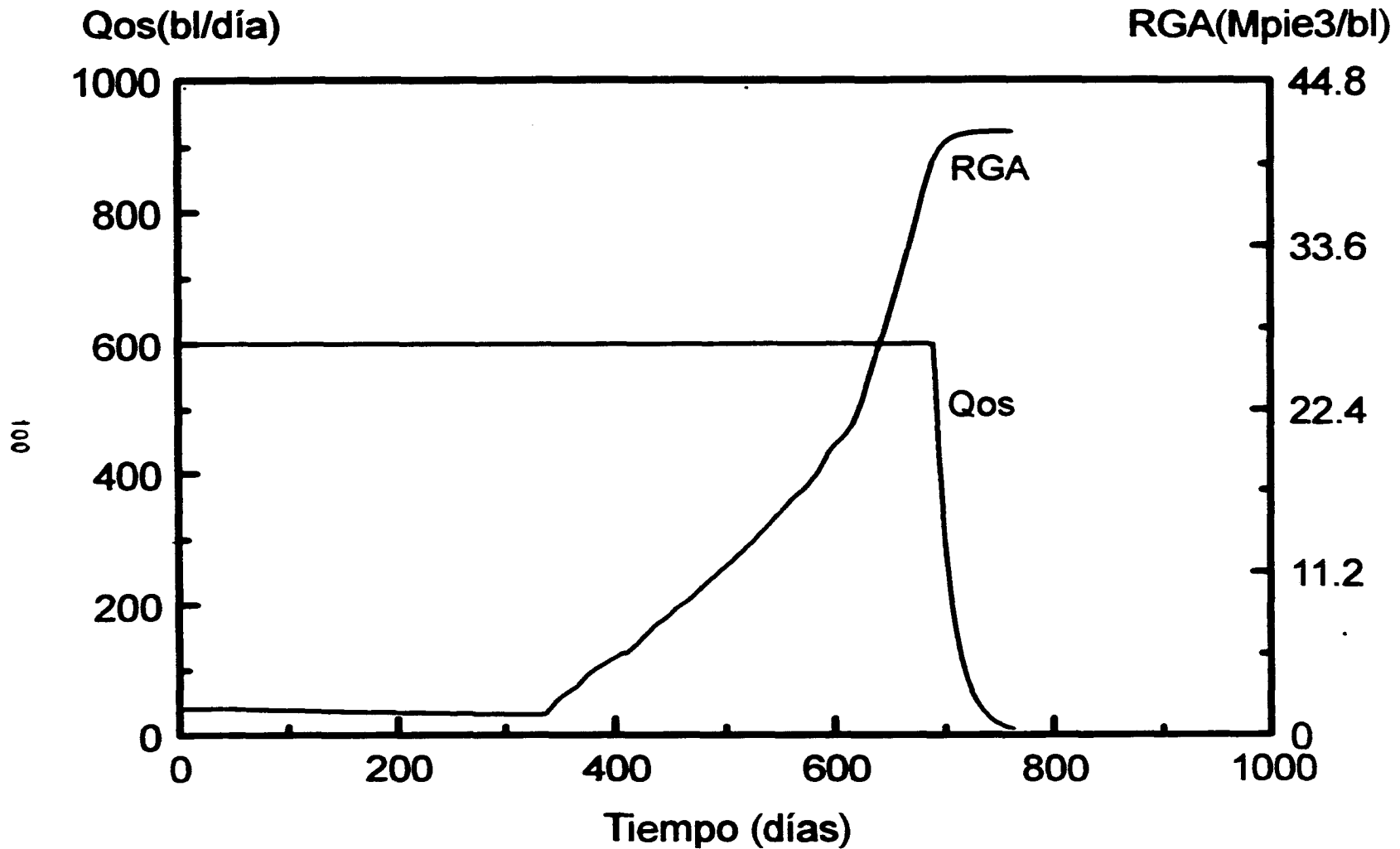


Figura 6.5. Relación gas-aceite y gasto de aceite contra el tiempo. Agotamiento natural en un yacimiento de aceite volátil.

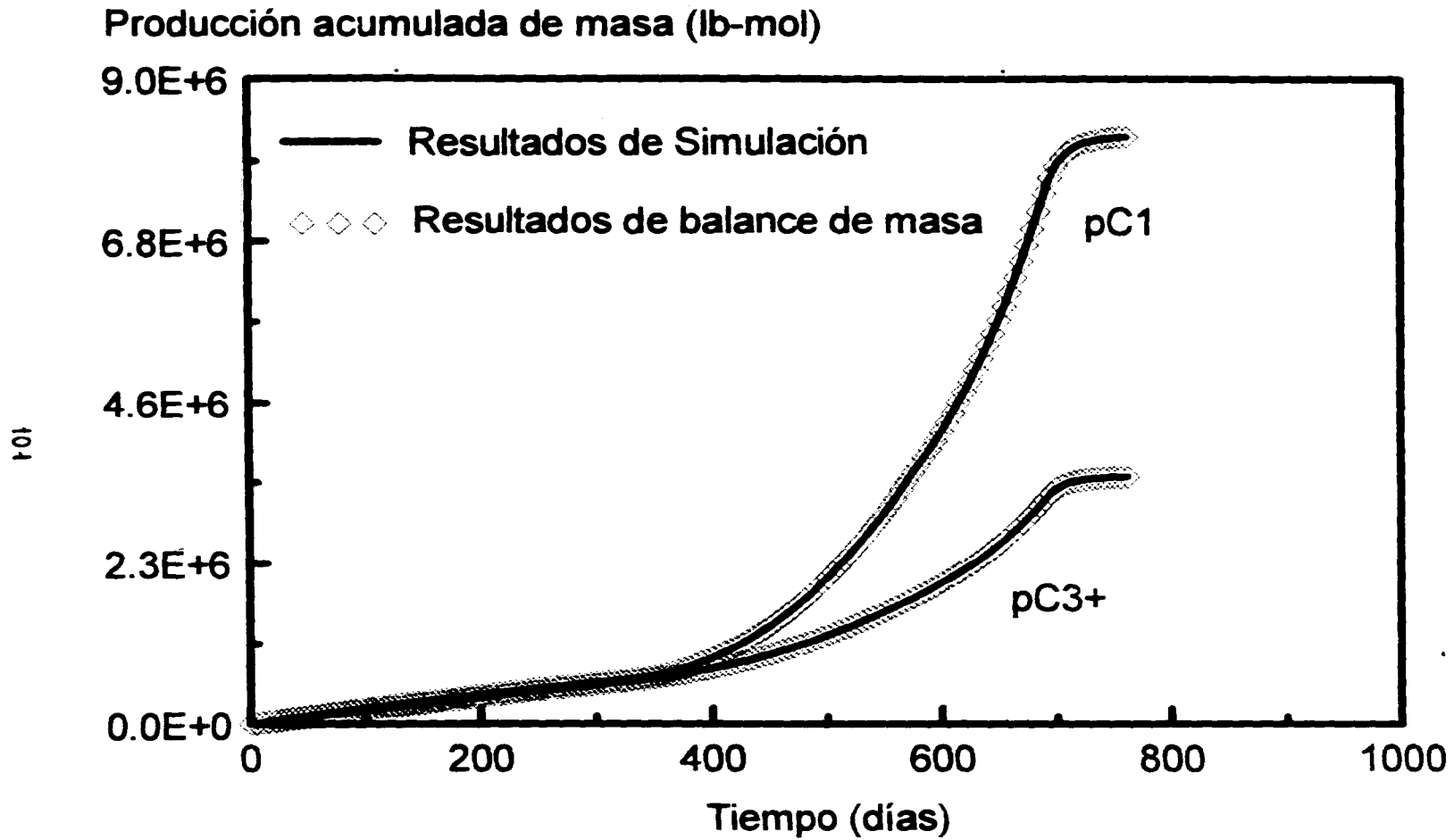


Figura 6.6. Producción acumulada de masa y balance de masa contra el tiempo. Agotamiento natural en un yacimiento de aceite volátil.

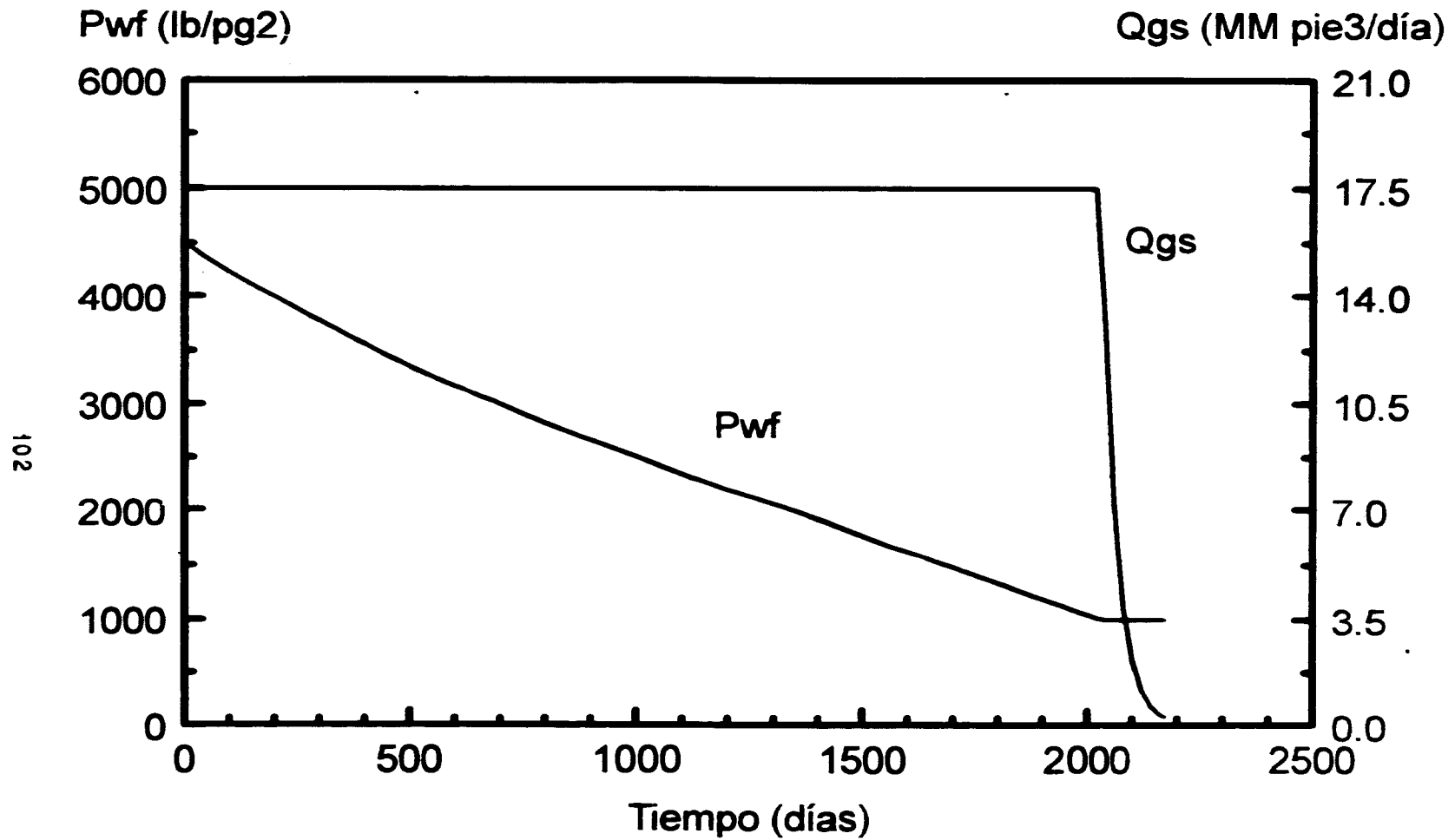


Figura 6.7. Presión de fondo fluyendo y gasto de gas contra el tiempo. Agotamiento natural en un yacimiento de gas y condensado.

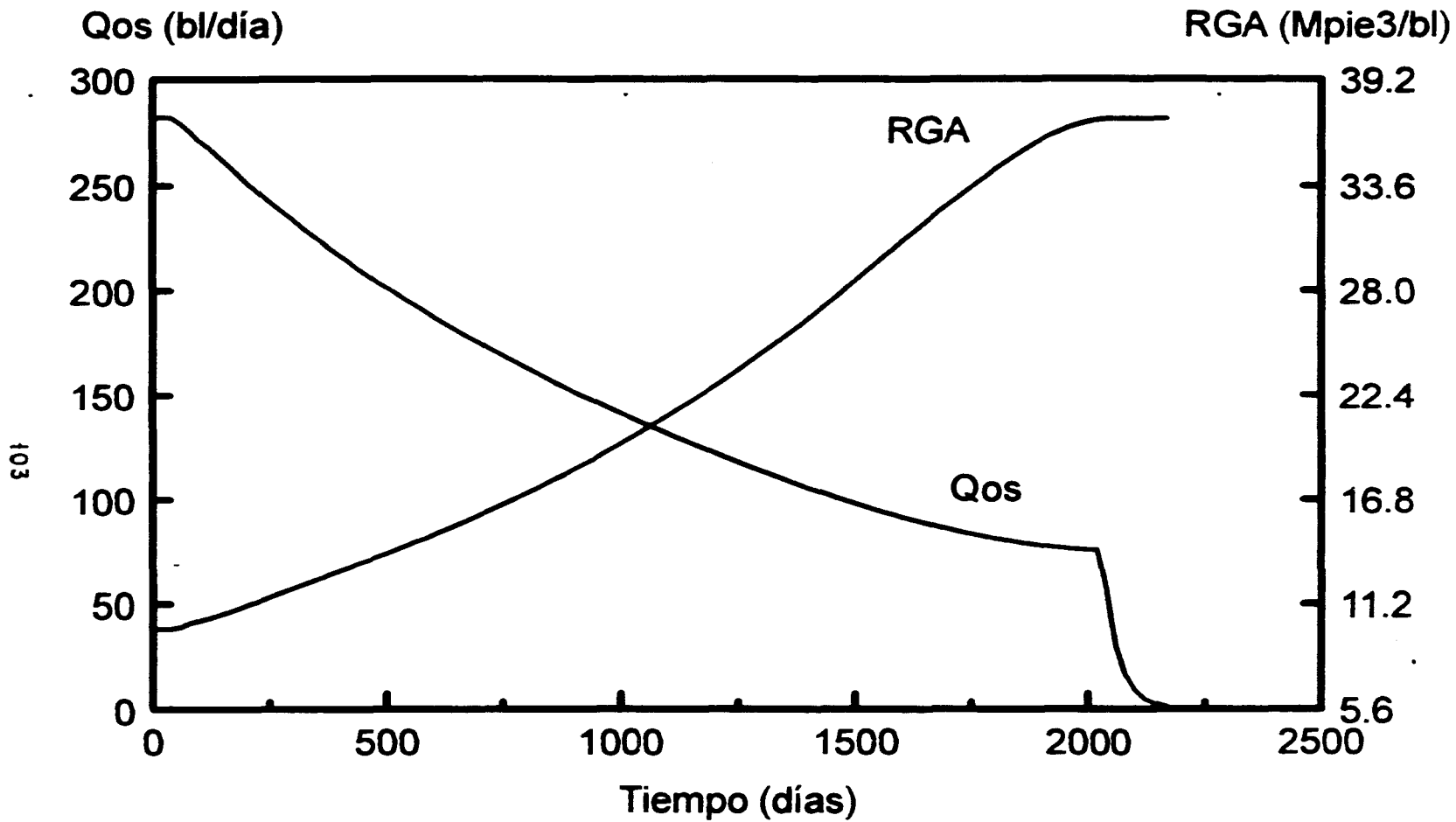


Figura 6.8. Relación gas-aceite y gasto de aceite contra el tiempo. agotamiento natural en un yacimiento de gas y condensado.

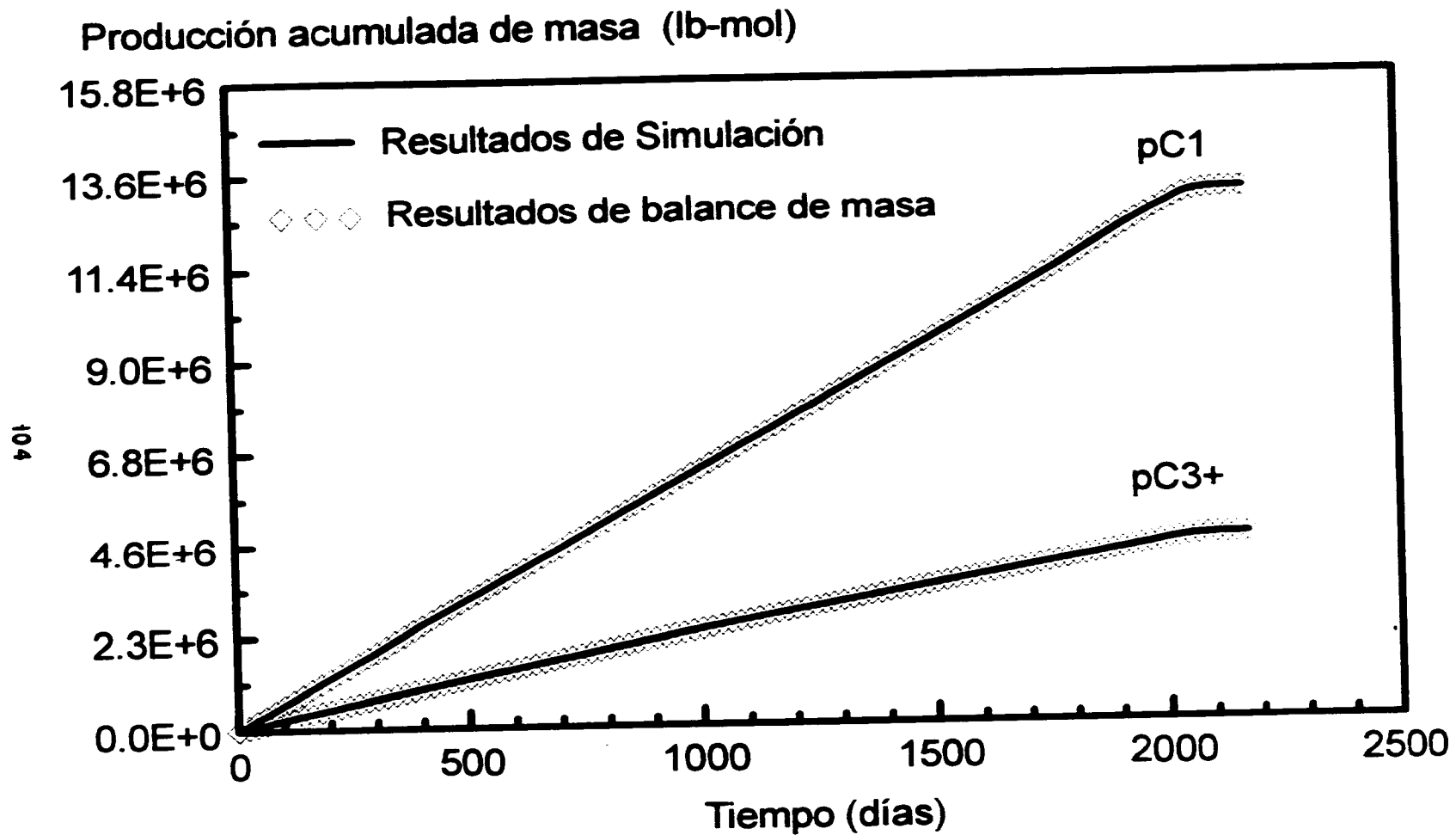


Figura 6.9. Producción de masa acumulada y balance de masa contra el tiempo. Agotamiento natural en un yacimiento de gas y condensado.

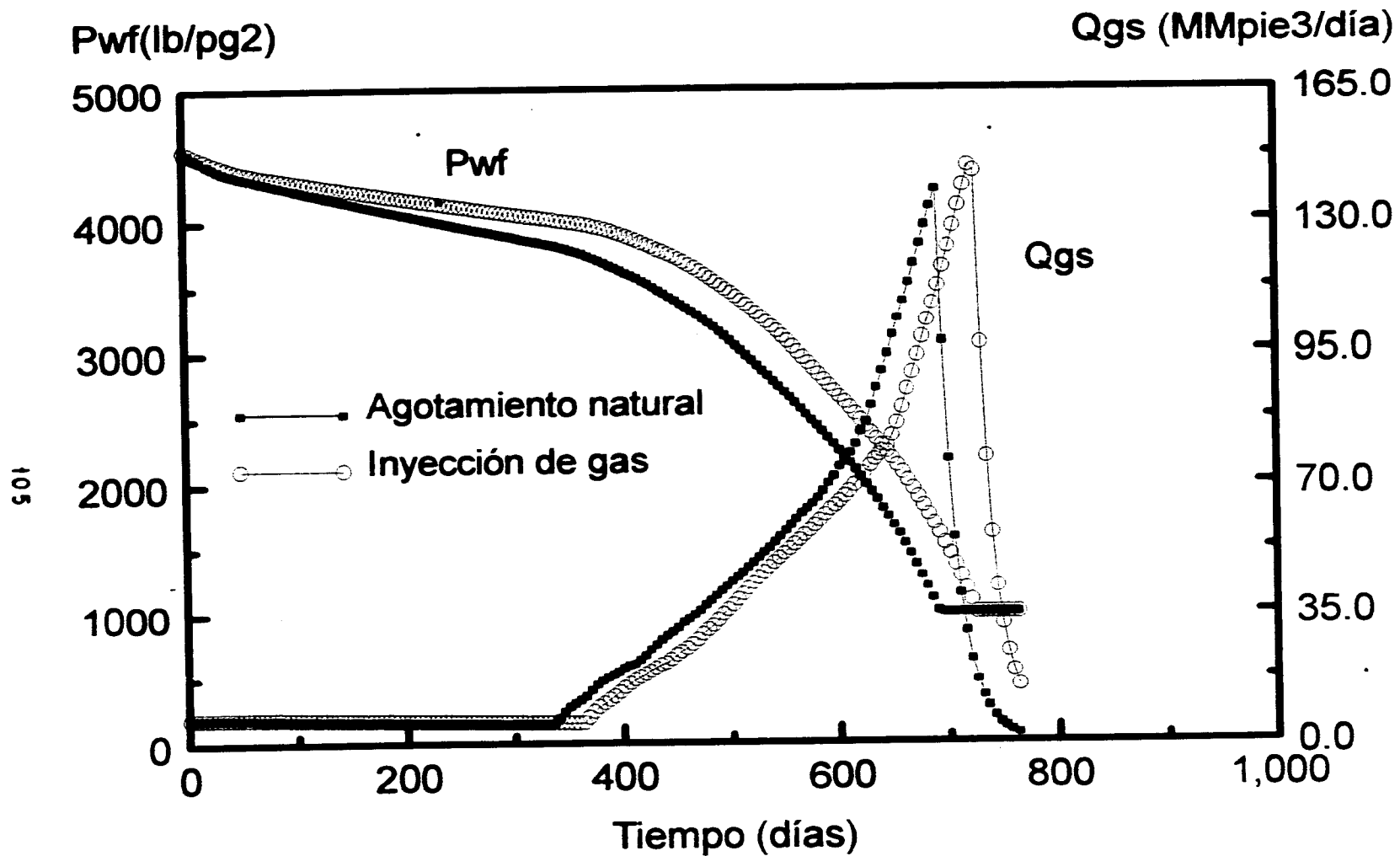


Figura 6.10. Presión de fondo fluyendo y gasto de gas contra el tiempo. Yacimiento de aceite volátil con inyección de gas.

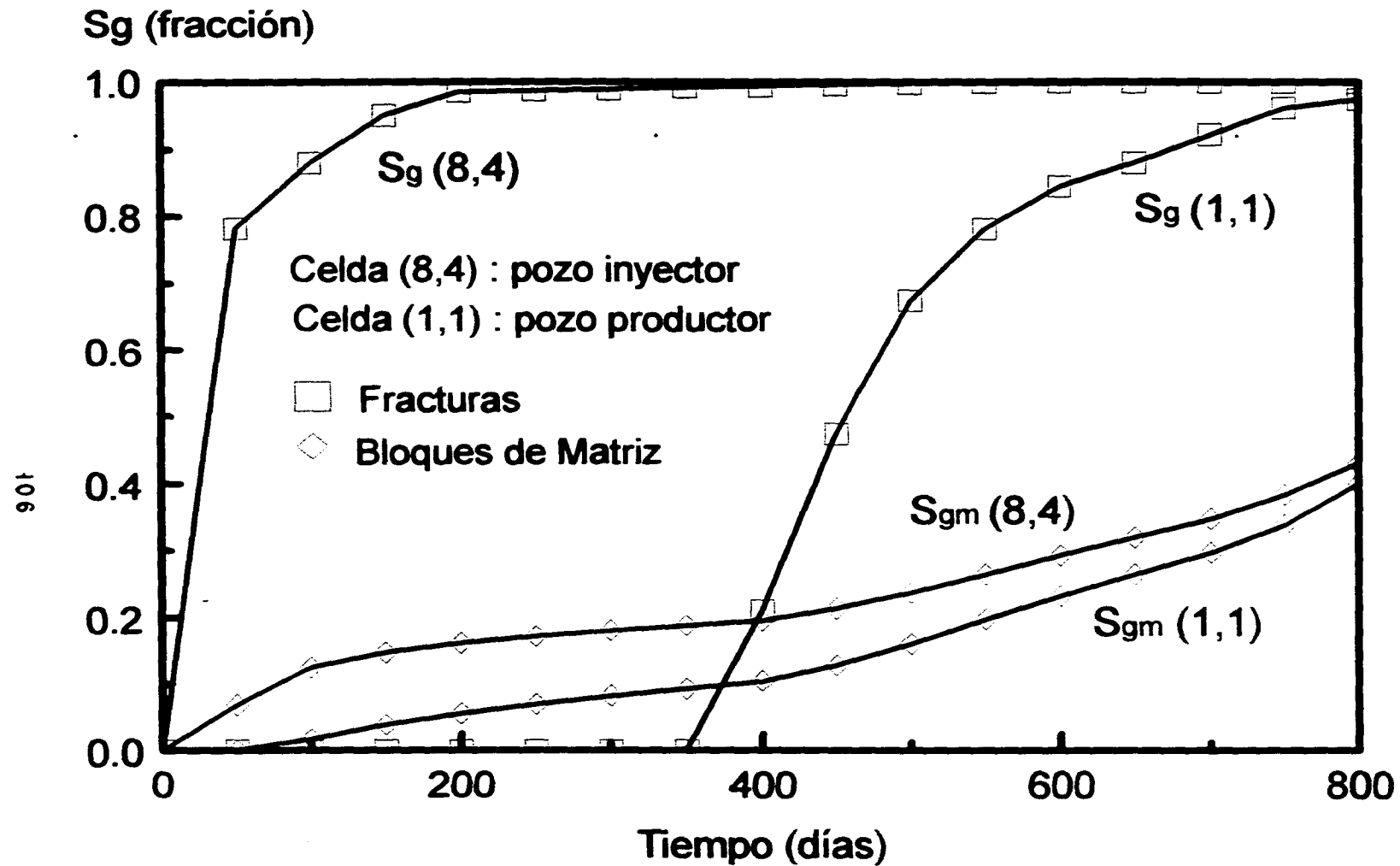


Figura 6.11. Saturación de gas en la matriz y en la fractura contra el tiempo. Yacimiento de aceite volátil con inyección de gas.

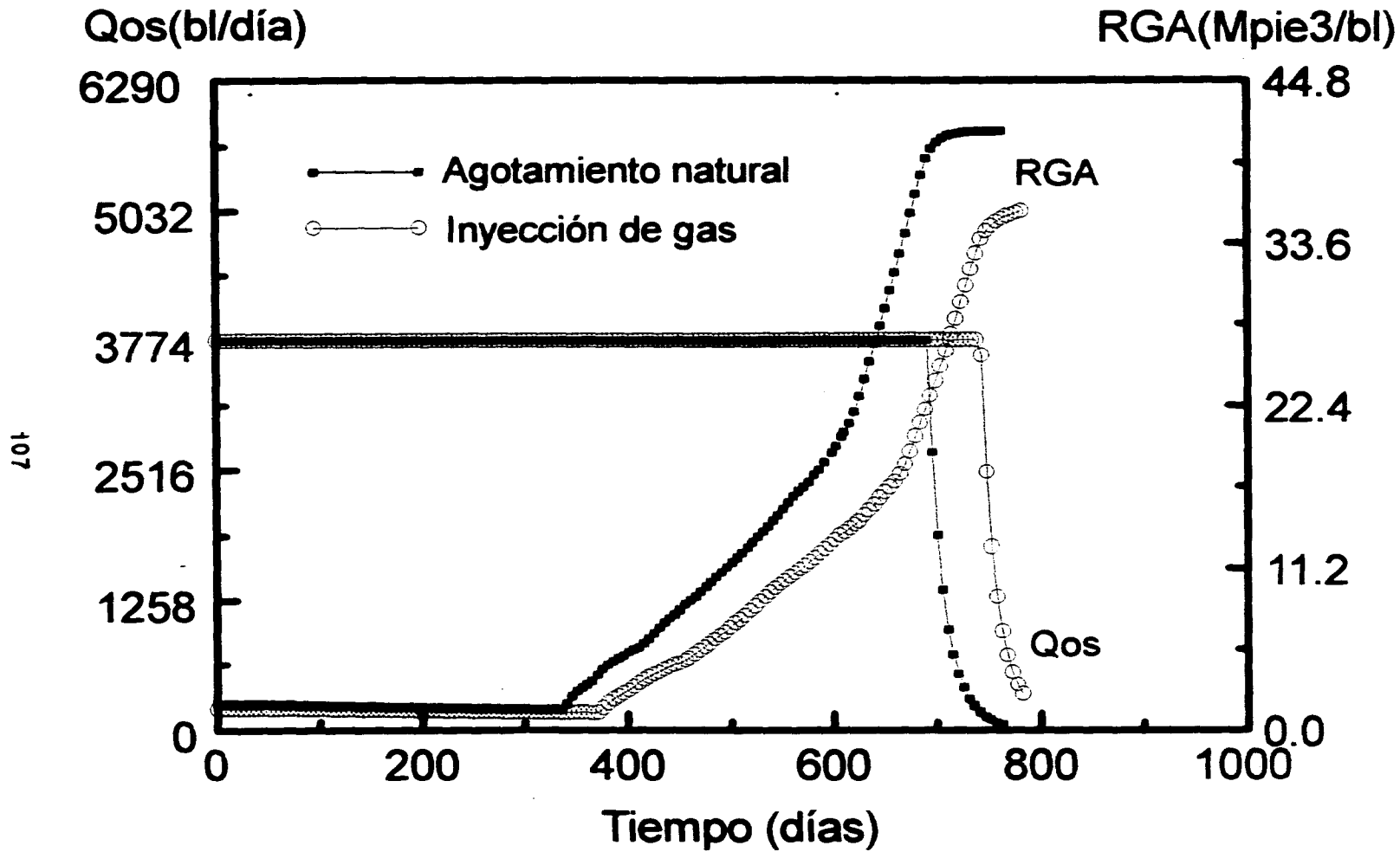


Figura 6.12. Relación gas-aceite y gasto de aceite contra el tiempo. Yacimiento de aceite volátil con inyección de gas.