

00382



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO**

8  
24

FACULTAD DE CIENCIAS

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

POTENCIALES DE ERIKSEN PARA EL ESTUDIO DE  
LAS INTERACCIONES EN QUARKS PESADOS

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
DOCTOR EN CIENCIAS (FISICA)

P R E S E N T A :

ARTURO ZENTELLA DEHESA

MEXICO, D. F.

1996



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

00382



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

**POTENCIALES DE ERIKSEN PARA EL ESTUDIO DE  
LAS INTERACCIONES EN QUARKS PESADOS**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
DOCTOR EN CIENCIAS (FISICA)**

**P R E S E N T A :**

**ARTURO ZENTELLA DEHESA**

**DIRECTOR DE TESIS: FERNANDO MATIAS MORENO YNTRIAGO**

**MEXICO, D. F.**

**1996**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

# Resumen

Se repasan conceptos y características generales de los sistemas quarkonios. Se resalta el carácter perturbativo de los cálculos tanto en el proceso numérico como en los términos cinéticos y potenciales, debido a que los efectos relativistas son introducidos como correcciones a una ecuación de Schrödinger. Se destaca la limitación de estas descripciones en el sector dependiente de espín.

Se desarrolla en detalle un formalismo muy general, para desacoplar en forma cerrada la ecuación de Dirac por bloques. Se discuten ampliamente condiciones, propiedades y consecuencias de la existencia de esta transformación exacta. Esta transformación contiene a ambos límites: Foldy-Wouthuysen (no relativista) y Cini-Touschek (ultrarrelativista). Se generaliza al caso no abeliano. Se muestra explícitamente la existencia de una supersimetría asociada a esta transformación.

Se aplica este formalismo a dos propuestas alternativas de quarkonio, con potencial de oscilador de Dirac y con interacción pseudoescalar. Los resultados para el primero están en amplio desacuerdo con el experimento, mientras que para el último, la concordancia con el experimento mejora notablemente, respecto a predicciones previas.

# Presentación

La redacción de esta tesis ha sido guiada principalmente por una intención: presentar en forma panorámica una posibilidad alterna de obtener resultados cerrados en el marco de la mecánica cuántica relativista en el contexto de la ecuación de Dirac.

Esta discusión tiene su parte medular en el detalle formal y físico de la transformación cerrada de Foldy-Wouthuysen. Esto lo desarrollo ante ustedes en los capítulos 2 y 3.

Alrededor de este núcleo les presento, en el capítulo 1, un resumen de los antecedentes que resaltan la importancia de la existencia de esta alternativa, principalmente en torno a los conceptos pertinentes del sistema quarkonio.

El capítulo 4 cierra el ciclo con dos ejemplos de aplicación de este formalismo al estudio de modelos de bolsa, y poniendo énfasis especial en los estados triplete  $^3P_J$  de las familias  $J/\Psi$  ( $c\bar{c}$ ) y  $\Upsilon$  ( $b\bar{b}$ ).

En la presentación de la transformación cerrada de Foldy-Wouthuysen he incluido el detalle del desarrollo de este formalismo. Hago esto con el ánimo de lograr dos objetivos. Por una parte, es mi deseo ilustrar la transparencia de este formalismo, así como mostrarles las hipótesis de trabajo necesarias para la validez del mismo. Por otra parte, me complacería mucho lograr despertar en ustedes la simpatía hacia este formalismo a través de la elegancia de su simplicidad, así como por las bondades que comparte, de manera natural, con metodologías similares: no perturbativas.

Al respecto de este último punto es conveniente recordar que la transformación cerrada de Foldy-Wouthuysen *sólo* es posible para una parte del total de los potenciales covariantes. Así que para algún problema específico puede suceder que una parte del potencial pueda ser diagonalizada en forma cerrada y el resto deba ser modificado con técnicas tradicionales, incluyendo la posible participación de términos perturbativos. Sin embargo, en general este desacoplamiento exacto concede a las técnicas variacionales un lugar de mayor relevancia del que han tenido hasta ahora.

El trabajo que dio lugar a esta tesis se desarrolló prácticamente en su totalidad en el *Departamento de Física Teórica* del Instituto de Física —y en parte, en el *Fermi National Laboratory*— y con apoyos parciales de la DGAPA y PADEP. Durante mi estancia en el Instituto de Química se generó la versión final de esta tesis.

**TESIS**

**COMPLETA**

## Resumen

Se repasan conceptos y características generales de los sistemas quarkonios. Se resalta el carácter perturbativo de los cálculos tanto en el proceso numérico como en los términos cinéticos y potenciales, debido a que los efectos relativistas son introducidos como correcciones a una ecuación de Schrödinger. Se destaca la limitación de estas descripciones en el sector dependiente de espín.

Se desarrolla en detalle un formalismo muy general, para desacoplar en forma cerrada la ecuación de Dirac por bloques. Se discuten ampliamente condiciones, propiedades y consecuencias de la existencia de esta transformación exacta. Esta transformación contiene a ambos límites: Foldy-Wouthuysen (no relativista) y Cini-Touschek (ultrarrelativista). Se generaliza al caso no abeliano. Se muestra explícitamente la existencia de una supersimetría asociada a esta transformación.

Se aplica este formalismo a dos propuestas alternativas de quarkonio, con potencial de oscilador de Dirac y con interacción pseudoescalar. Los resultados para el primero están en amplio desacuerdo con el experimento, mientras que para el último, la concordancia con el experimento mejora notablemente, respecto a predicciones previas.

# Abstract

Quarkonium systems are reviewed. It is pointed out that their treatments are perturbative at numerical level but also because kinetic and potential terms are introduced as relativistic and spin correction terms. This comes from an originally Schrödinger formulation. Inconsistencies in the spin sector are clearly pointed out.

Here we develop in detail a quite general formalism for block-diagonalizing the Dirac equation in closed form. Conditions, properties and consequences of the existence of such closed transformation are discussed. Both limits are included for this formalism, Foldy-Wouthuysen (nonrelativistic) and Cini-Touschek (ultrarelativistic). It is generalised for the nonabelian case. The existence of a supersymmetry associated to this transformation is explicitly shown.

This formalism is used to work out two alternative quarkoniums. One using the Dirac oscillator potential and the second including a pseudoscalar interaction. The first case is far from experiment, while the latter is in excellent agreement with the experiment and an improvement to previous reported predictions.

# Presentación

La redacción de esta tesis ha sido guiada principalmente por una intención: presentar en forma panorámica una posibilidad alterna de obtener resultados cerrados en el marco de la mecánica cuántica relativista en el contexto de la ecuación de Dirac.

Esta discusión tiene su parte medular en el detalle formal y físico de la transformación cerrada de Foldy-Wouthuysen. Esto lo desarrollo ante ustedes en los capítulos 2 y 3.

Alrededor de este núcleo les presento, en el capítulo 1, un resumen de los antecedentes que resaltan la importancia de la existencia de esta alternativa, principalmente en torno a los conceptos pertinentes del sistema quarkonio.

El capítulo 4 cierra el ciclo con dos ejemplos de aplicación de este formalismo al estudio de modelos de bolsa, y poniendo énfasis especial en los estados triplete  $^3P_J$  de las familias  $J/\Psi$  ( $c\bar{c}$ ) y  $\Upsilon$  ( $b\bar{b}$ ).

En la presentación de la transformación cerrada de Foldy-Wouthuysen he incluido el detalle del desarrollo de este formalismo. Hago esto con el ánimo de lograr dos objetivos. Por una parte, es mi deseo ilustrar la transparencia de este formalismo, así como mostrarles las hipótesis de trabajo necesarias para la validez del mismo. Por otra parte, me complacería mucho lograr despertar en ustedes la simpatía hacia este formalismo a través de la elegancia de su simplicidad, así como por las bondades que comparte, de manera natural, con metodologías similares: no perturbativas.

Al respecto de este último punto es conveniente recordar que la transformación cerrada de Foldy-Wouthuysen *sólo* es posible para una parte del total de los potenciales covariantes. Así que para algún problema específico puede suceder que una parte del potencial pueda ser diagonalizada en forma cerrada y el resto deba ser modificado con técnicas tradicionales, incluyendo la posible participación de términos perturbativos. Sin embargo, en general este desacoplamiento exacto concede a las técnicas variacionales un lugar de mayor relevancia del que han tenido hasta ahora.

El trabajo que dio lugar a esta tesis se desarrolló prácticamente en su totalidad en el *Departamento de Física Teórica* del Instituto de Física —y en parte, en el *Fermi National Laboratory*— y con apoyos parciales de la DGAPA y PADEP. Durante mi estancia en el Instituto de Química se generó la versión final de esta tesis.



# Contenido

<b>Resumen</b>	<b>vii</b>
<b>Abstract</b>	<b>viii</b>
<b>Presentación</b>	<b>ix</b>
<b>Contenido</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Tablas</b>	<b>xiii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>xiv</b>
<b>1 Antecedentes</b>	<b>1</b>
1.1 Interacciones fuertes y quarks . . . . .	1
1.2 El quarkonio tradicional . . . . .	2
1.3 Un quarkonio alternativo . . . . .	5
1.4 Tratamientos alternativos . . . . .	7
<b>2 Desacoplamiento exacto de las componentes de energía en la ecuación de Dirac</b>	<b>9</b>
2.1 La transformación de Foldy-Wouthuysen cerrada . . . . .	9
2.2 Matrices pares y diagonalización (inicial) . . . . .	10
2.3 Un problema académico . . . . .	11
2.4 Matrices pares y diagonalización (final) . . . . .	12
2.5 Forma trigonométrica de $e^{tS}$ . . . . .	12
2.6 Forma cerrada de la transformación . . . . .	13
2.7 Foldy-Wouthuysen y Cini-Touschek . . . . .	14
2.8 Comentarios a los resultados . . . . .	15
<b>3 Los potenciales asociados a la transformación cerrada de Foldy-Wouthuysen</b>	<b>19</b>
3.1 Tres casos particulares . . . . .	19
3.1.1 caso magnético. . . . .	19
3.1.2 caso anómalo. . . . .	21
3.1.3 caso minimal + anómalo. . . . .	22
3.2 La clase de los potenciales nones . . . . .	22

3.3	Grados de libertad internos . . . . .	25
3.4	Supersimetría y estabilidad del mar de Dirac . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Aplicaciones al sistema quarkonio</b> . . . . .	<b>29</b>
4.1	Consideraciones generales . . . . .	29
4.2	Potenciales lineales y el límite no relativista . . . . .	30
4.3	Oscilador de Dirac como potencial confinante . . . . .	31
4.4	Confinamiento parcialmente pseudoescalar . . . . .	33
4.5	Otras aplicaciones . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Reflexiones</b> . . . . .	<b>37</b>
5.1	Resultados y conclusiones . . . . .	37
5.2	Perspectivas . . . . .	40
	<b>Bibliografía</b> . . . . .	<b>40</b>
	<b>Epílogo</b> . . . . .	<b>45</b>

# Lista de Tablas

1.1	Valores optimizados de los parámetros para el potencial de Cornell . . .	5
1.2	Diferencias de masas entre estados $^3P_J$ consecutivos, y su cociente $R_\chi$ . . .	7
3.1	Potenciales que permiten una diagonalización mediante una transformación de Foldy-Wouthuysen cerrada . . . . .	23
3.2	Presentación alternativa de los potenciales desacoplables mediante la transformación de Foldy-Wouthuysen . . . . .	24
3.3	Tabla de anticonmutación para $\beta$ , $\alpha$ y $\alpha_5$ . . . . .	24
3.4	Tabla de conmutación para $\beta$ , $\alpha$ y $\alpha_5$ . . . . .	25
4.1	Valores optimizados de los parámetros para el potencial de Dirac . . . . .	33
4.2	Estados $c\bar{c}$ de masas más bajas: valores experimentales, valores para modelo de bolsa de Cornell y valores para confinamiento por oscilador de Dirac . . . . .	33
4.3	Estados $b\bar{b}$ de masas más bajas: valores experimentales, valores para modelo de bolsa de Cornell y valores para confinamiento por oscilador de Dirac . . . . .	34
4.4	Valores experimentales para las masas de los estados $\chi$ para charmonio y bottomnio . . . . .	34
4.5	Comparación entre valores experimentales para $R_\chi$ y sus predicciones teóricas . . . . .	35
4.6	Comparación entre valores experimentales de parámetros para la dependencia en espín y diversas predicciones teóricas, para el quarkonio pesado . . . . .	36

# Lista de Figuras

1.1	Diagramas de las familias de mesones $c\bar{c}$ y $b\bar{b}$ . . . . .	3
1.2	Similitud entre diversos potenciales quark-antiquark . . . . .	5
2.1	Triángulo rectángulo asociado a la transformación de Foldy-Wouthuysen . . . . .	15
2.2	Triángulo rectángulo asociado a la transformación de Cini-Touschek . . . . .	16
4.1	El potencial de oscilador de Dirac, comparado con los potenciales tradicionales en las regiones de interés, para $c\bar{c}$ . . .	31
4.2	El potencial de oscilador de Dirac, comparado con los potenciales tradicionales en las regiones de interés, para $b\bar{b}$ . . .	32

# Capítulo 1

## Antecedentes

### 1.1 interacciones fuertes y quarks

A mediados de la década de los años setenta los sistemas quarkonio comenzaron a ser detectados experimentalmente [1, 2, 3, 4]. Desde entonces el espectro de estos sistemas ha sido ampliamente medido [5] y modelado [6, 7]. Estos sistemas han sido una importante guía para entender mejor las interacciones fuertes.

Existen diversos escenarios desde los cuales pueden ser estudiadas las interacciones. Dos de estos escenarios —que son a la vez opuestos y a la vez complementarios— son por una parte la espectroscopía y por otra, la perspectiva de los fenómenos de dispersión. Cada uno de estos tratamientos impone sus propias técnicas y métodos, tanto en el aspecto experimental como en el teórico. Aquí, el interés fue trabajar desde la perspectiva de la espectroscopía. Sin embargo, el caso dispersivo presenta algunos puntos complementarios a nuestra discusión y se remite al lector a la bibliografía correspondiente a los aspectos experimentales [8, 9, 10, 11] y teóricos [12, 13, 14, 15, 16, 17].

Al hablar del sistema quarkonio es conveniente distinguir entre quarks pesados y ligeros. Como pesados se reconocen: charm (c), bottom (b) y top (t) —verificada recientemente la existencia de éste último [18, 19]—. Correspondientemente los quarks up (u), down (d) y strange (s) son denominados ligeros.

Esta división encuentra su origen en el hecho de que las predicciones para los mesones quarkonio ligeros se apartan excesivamente de sus mediciones correspondientes. En relación a esta discordancia se tiene en general la *esperanza* de que las dificultades conceptuales que aparecen en la comprensión de la espectroscopía de quarks ligeros puedan ser superadas desde el estudio de los quarks pesados. Sin embargo, la explicación de la falla de la teoría en el sector de quarks ligeros es un punto delicado, y es mejor ser más prudente y caminar con cuidado por ese terreno.

Mediante argumentos generales (longitud de Compton y radio de Bohr) se puede hacer plausible que conforme menor sea la masa de los quarks que conforman al mesón, se espera que el sistema sea más relativista. Y esto es a la vez la motivación y la justificación tradicionales para enfocar la atención al estudio de los sistemas quark-antiquark pesados *sólo*; de esta manera se tendría la ventaja de que las propiedades del quarkonio proveerían adicionalmente una arena propicia para poner a prueba detalles de las predicciones teóricas cuantitativas mediante mediciones

precisas [20, 21].

Así, en relación con este punto es aceptado universalmente que el desacuerdo entre la teoría y el experimento que prevalece en el caso de quarks ligeros se deba a la existencia de efectos relativistas de órdenes superiores a los considerados en la teoría [22]. Para aclarar ideas alrededor del punto anterior es oportuno presentar —si bien a grandes rasgos— las ideas básicas de este modelo, principalmente con el interés de fijar un lenguaje común.

## 1.2 el quarkonio tradicional

Sin lugar a dudas, el sistema quarkonio ha sido el modelo más exitoso en la descripción de estados ligados bajo la influencia de interacciones fuertes. Baste con mencionar el gran acuerdo que existe entre los datos experimentales reportados y los valores predichos para las masas de los estados  $n^3S_1$  de los sistemas  $c\bar{c}$  ( $J/\psi(1S)$ ,  $\psi(2S)$ , ...) y  $b\bar{b}$  ( $\Upsilon(1S)$ ,  $\Upsilon(2S)$ , ...), así como para el estado singlete  $1^1S_0$  ( $\eta_c(1S)$ ). Existen otras predicciones del modelo quarkonio en el mismo rango de masas, que se muestran en la figura 1.1. Sin embargo, hasta ahora no ha sido reportada ninguna partícula identificada como alguno de estos últimos estados.

La Cromodinámica Cuántica (QCD) del modelo estándar muestra gran concordancia con los experimentos de dispersión inelástica profunda *no polarizada*. Esto significó una fuerte sugerencia para su utilización en la predicción de un potencial para el quarkonio: un sistema de dos quarks muy pesados, siendo uno de ellos la antipartícula del otro [23, 24, 25, 26, 27, 28, 29]. Por medio de este procedimiento se puede obtener una forma genérica del potencial para el sistema quark-antiquark en la aproximación sofocada<sup>1</sup>. En el caso de masas iguales esta forma se reduce a [30, 31]

$$\begin{aligned}
 V_{qq} = & V(r) + \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}}{2m^2} \left( -\frac{dV(r)}{dr} + 4\frac{dV_2(r)}{dr} \right) \\
 & + \frac{1}{12m^2} (6\mathbf{S} \cdot \hat{r} \quad \mathbf{S} \cdot \hat{r} - 2\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}) V_3(r) \\
 & + \frac{1}{6m^2} (2\mathbf{S} \cdot \mathbf{S} - 3) V_4(r), \quad (1.1)
 \end{aligned}$$

donde  $V(r)$  es el potencial independiente de espín y  $V_2$ ,  $V_3$  y  $V_4$  son dependientes de espín. En una teoría abeliana —como es el caso de QED— es posible relacionar de manera sencilla los potenciales  $V_i$  con  $V(r)$ . Pero en general éste no es el caso para una teoría no abeliana debido a que nuevas contribuciones evitan una relación directa entre los diferentes potenciales.

Se parte de la reducción no relativista de la interacción de cuatro fermiones que resulta del intercambio entre quark y antiquark con un campo vectorial y otro escalar. Así, el potencial quark-antiquark puede ser descompuesto en dos interacciones efec-

<sup>1</sup>En la literatura la nomenclatura para esta aproximación es conocida en su versión inglesa, a saber *quenched approximation*. Ésta consiste en ignorar los rizos fermión-antifermión.

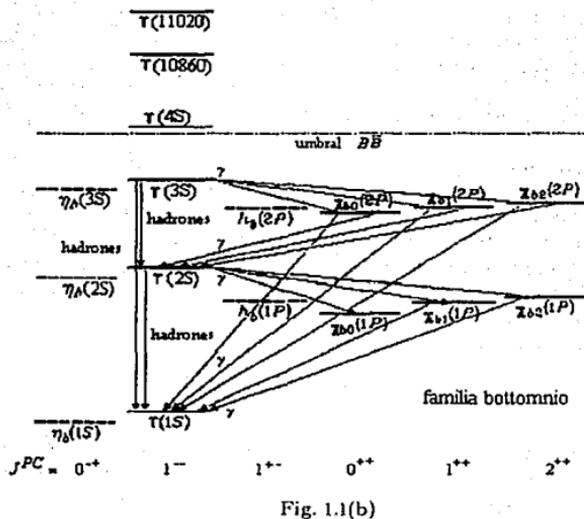
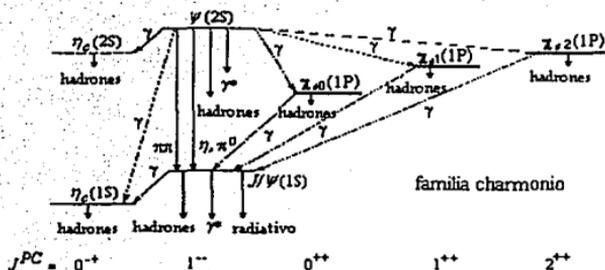


Figura 1.1: Diagramas de las familias de mesones [5]:  $c\bar{c}$  en 1.1(a) y  $b\bar{b}$  en 1.1(b).

tivas —una escalar y otra vectorial—. Y la forma que se obtiene para ellas en el espacio de momentos es

$$L_{int} = \bar{s}(g^2) \bar{u}u \bar{v}v + \bar{v}(g^2) \bar{u}\gamma_{\mu}u \bar{v}\gamma^{\mu}v. \quad (1.2)$$

En el límite estático esta expresión conduce a las siguientes relaciones:

$$V(r) = v(r) + s(r), \quad (1.3a)$$

$$V_2(r) = v(r), \quad (1.3b)$$

$$V_3(r) = \left( \frac{d}{dr} - \frac{d^2}{dr^2} \right) v(r) \quad (1.3c)$$

y

$$V_4(r) = \nabla^2 v(r). \quad (1.3d)$$

Las ecuaciones (1.3) muestran dos puntos interesantes. Por un lado la relación (1.3a) para  $V(r)$  resulta ser sencillamente una suma de los potenciales escalar y vectorial. Por otra parte, en esta aproximación se recupera la posibilidad de expresar en forma directa los potenciales  $V_i(r)$  —aunque esta vez ya no como una relación directa de  $V(r)$ , sino como una expresión en términos de la parte vectorial  $v(r)$  y sus derivadas—.

Para la parte independiente de espín han sido propuestas muchas formas funcionales. Sin embargo, al evaluar numérica o gráficamente estos potenciales es inmediato observar que todos ellos son equivalentes dentro de la región de interés tanto para los sistemas charmonio como bottomonio. Esto se muestra en la figura 1.2 [7].

Por otra parte es común en todos estos casos dividir al potencial <sup>2</sup>, distinguiendo dos regiones: una con influencia predominante a distancias cortas y semejante al tipo coulombiano, y otra de largo alcance de carácter fuertemente confinante. En la propuesta de Cornell, estos dos términos se realizan en la siguiente expresión.

$$V = -\frac{\alpha}{r} + \kappa r, \quad (1.4)$$

La intuición queda favorecida con esta expresión. El primer término —que representa la parte interna— se reconoce como la contribución perturbativa por el intercambio de un solo gluón. El segundo término —que es la contribución externa— es una componente confinante no perturbativa y puede ser relacionada con la pendiente de la trayectoria de Regge. Al usar los valores experimentales para los sistemas  $J/\psi$  (c) y  $\Upsilon$  (b) los parámetros del potencial (1.4) son los de la tabla 1.1.

<sup>2</sup>Aparte de interpretaciones alternas [32]

tivas —una escalar y otra vectorial—. Y la forma que se obtiene para ellas en el espacio de momentos es

$$L_{int.} = \bar{s}(q^2) \bar{u}u \bar{v}v + \bar{v}(q^2) \bar{u}\gamma_{\mu}u \bar{v}\gamma^{\mu}v \quad (1.2)$$

En el límite estático esta expresión conduce a las siguientes relaciones:

$$V_1(r) = v(r) + s(r), \quad (1.3a)$$

$$V_2(r) = v(r), \quad (1.3b)$$

$$V_3(r) = \left(\frac{d}{rdr} - \frac{d^2}{d^2r}\right)v(r) \quad (1.3c)$$

y

$$V_4(r) = \nabla^2 v(r). \quad (1.3d)$$

Las ecuaciones (1.3) muestran dos puntos interesantes. Por un lado la relación (1.3a) para  $V(r)$  resulta ser sencillamente una suma de los potenciales escalar y vectorial. Por otra parte, en esta aproximación se recupera la posibilidad de expresar en forma directa los potenciales  $V_i(r)$  —aunque esta vez ya no como una relación directa de  $V(r)$ , sino como una expresión en términos de la parte vectorial  $v(r)$  y sus derivadas—.

Para la parte independiente de espín han sido propuestas muchas formas funcionales. Sin embargo, al evaluar numérica o gráficamente estos potenciales es inmediato observar que todos ellos son equivalentes dentro de la región de interés tanto para los sistemas charmonio como bottomnio. Esto se muestra en la figura 1.2 [7].

Por otra parte es común en todos estos casos dividir al potencial <sup>2</sup>, distinguiendo dos regiones: una con influencia predominante a distancias cortas y semejante al tipo coulombiano, y otra de largo alcance de carácter fuertemente confinante. En la propuesta de Cornell, estos dos términos se realizan en la siguiente expresión.

$$V = -\frac{\alpha}{r} + \kappa r, \quad (1.4)$$

La intuición queda favorecida con esta expresión. El primer término —que representa la parte interna— se reconoce como la contribución perturbativa por el intercambio de un solo gluón. El segundo término —que es la contribución externa— es una componente confinante no perturbativa y puede ser relacionada con la pendiente de la trayectoria de Regge. Al usar los valores experimentales para los sistemas  $J/\psi$  ( $c\bar{c}$ ) y  $\Upsilon$  ( $b\bar{b}$ ) los parámetros del potencial (1.4) son los de la tabla 1.1.

<sup>2</sup>Aparte de interpretaciones alternas [32]

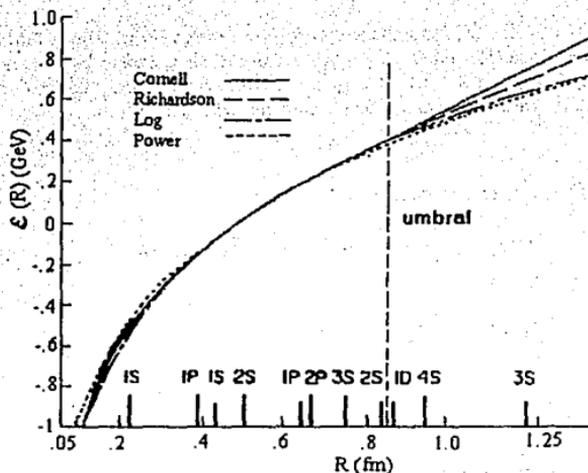


Figura 1.2: La gráfica muestra que los potenciales para quark-antiquark de los varios modelos más populares, son equivalentes para el rango de los radios de interés.

Tabla 1.1: Valores optimizados de los parámetros para el potencial de Cornell.

sistema	$\alpha$	$\kappa / [\frac{1}{\text{GeV}^2}]$
$c\bar{c}$	0.52	0.18
$b\bar{b}$	0.48	0.18

### 1.3 un quarkonio alternativo

Si bien es cierto que el modelo quarkonio ha mostrado tener muchas bondades —colocándolo en el lugar preponderante actual—, también es cierto que ha mostrado una limitación importante en cuanto al sector dependiente de espín. Y se puede decir que el fenómeno dependiente de espín no es comprendido —al menos al mismo nivel que el independiente de espín—.

El tratamiento llano es *cualitativamente* correcto pero presenta diferencias cuantitativas en la predicción del espectro de las masas. Es posible refinar los resultados si se *relajan* las restricciones en el carácter covariante de Lorentz de las interacciones.

Algunos autores han trabajado exitosamente potenciales no escalares [33, 34, 35]. Si se incluye una interacción efectiva pseudoescalar y se permite la mezcla escalar y vectorial las modificaciones relevantes que se manifiestan son el término adicional en el lagrangiano que representa una interacción pseudoescalar

$$L_{\text{int}}^P = \bar{p}(q^2) \bar{u}\gamma^5 u \bar{v}\gamma^5 v. \quad (1.5)$$

Ahora las relaciones correspondientes a (1.3) son

$$V(r) = v(r) + s(r) + \frac{1}{m^2} \nabla^2(v(r) - s(r)), \quad (1.6a)$$

$$V_2(r) = v(r), \quad (1.6b)$$

$$V_3(r) = \left(\frac{d}{dr} - \frac{d^2}{dr^2}\right)(v(r) - p(r)) \quad (1.6c)$$

y

$$V_4(r) = \nabla^2(v(r) + \frac{1}{2}p(r)). \quad (1.6d)$$

Los potenciales independientes de espín son ahora

$$v(r) = v_i \frac{\alpha}{r} + v_e \kappa r, \quad (1.7a)$$

$$s(r) = s_i \frac{\alpha}{r} + s_e \kappa r, \quad (1.7b)$$

$$p(r) = p_i \frac{\alpha}{r} + p_e \kappa r. \quad (1.7c)$$

A partir de los datos experimentales, la discusión se centra en el desdoblamiento de los estados  $\chi$  [5]. Y la atención se orienta hacia la mejor comprensión del ordenamiento del desdoblamiento del triplete  $\chi$ , de los estados  ${}^3P_0$ ,  ${}^3P_1$  y  ${}^3P_2$  del quarkonio [20, 21].

Los parámetros usuales para este caso son la diferencia de masa para estados consecutivos  ${}^3P_J$ , y su cociente.

$$\mathcal{R}_\chi = \frac{M({}^3P_2) - M({}^3P_1)}{M({}^3P_1) - M({}^3P_0)}. \quad (1.8)$$

En la tabla 1.2 se presentan algunos valores reportados para estos parámetros [22]. Como se puede observar para los valores de las masas [37], la desviación entre los valores experimentales y predichos ( $\sim 32$  Mev para  $c\bar{c}$  y  $\sim 2$  Mev para  $b\bar{b}$ ) va más allá de las incertidumbres experimentales actuales ( $< 0.5$  Mev para  $c\bar{c}$  y  $< 0.7$  Mev para  $b\bar{b}$ ). Se ha optado por los tratamientos indirectos [30] que concentran su atención en la separación relativa entre los estados consecutivos  ${}^3P_J$ , el cociente  $\mathcal{R}_\chi$  (1.8). Sin embargo, los valores para las diferencias entre las masas, así como para las masas mismas permanecen inexplicadas.

**Tabla 1.2:** Diferencias de masas entre estados  $^3P_J$  consecutivos, y los cocientes de estas diferencias,  $R_X$ . El reporte experimental [5], y dos de cálculos perturbativos Dib et al. [30] y Villarreal et al. [36].

	Exp. *	Dib	Villa.
$M(^3P_1)_c - M(^3P_0)_c$	$95.4 \pm 1$		50
$M(^3P_2)_c - M(^3P_1)_c$	$45.7 \pm 1$		26
$R_{Xc}$	$0.48 \pm 0.02$	0.538	0.52
$M(^3P_1)_b - M(^3P_0)_b$	$32.1 \pm 1$		28
$M(^3P_2)_b - M(^3P_1)_b$	$21.3 \pm 1$		18
$R_{Xb}$	$0.66 \pm 0.06$	0.717	0.64

\* todos los valores de las masas están en  $\text{MeV}/c^2$ .

## 1.4 tratamientos alternativos

Además de una modificación en las interacciones, es conveniente destacar también que los tratamientos usuales del quarkonio han sido perturbativos, no relativistas y con correcciones relativistas a la ecuación de Schrödinger [30]. Ha habido diversos tratamientos alternativos apoyados en un principio variacional [35, 34, 38, 39]. Ahí, las correcciones relativistas son introducidas vía el desarrollo de  $\sqrt{m^2 + p^2}$ . También se han introducido correcciones relativistas al potencial. Pero para las eigenfunciones aparecen inestabilidades que han mostrado ser muy críticas [35]. Aquí estoy haciendo referencia a los cálculos de elementos de matriz para el sector dependiente de espín. Ellos se realizan comúnmente vía un procedimiento perturbativo [30]. Ahí aparecen términos de la forma  $1/r^3$ . Estos términos son divergentes en un tratamiento no perturbativo. El resultado no divergente del modelo estándar proviene de imponer una cota mínima arbitraria para  $r$ , jugando el papel de función escalón<sup>3</sup> [40].

Por otra parte, el siguiente argumento muestra que es impreciso considerar a los efectos relativistas como correcciones. La tabla 1.1 muestra la evolución esperada para el acoplamiento fuerte  $\alpha = \frac{3}{4}\alpha_s$ , hacia valores menores para distancias pequeñas. Si recordamos que el radio de Bohr reducido es  $r_B = 2/(m\alpha)$ , esto define la escala para el sistema quarkonio. Los efectos relativistas son importantes cuando la longitud de Compton  $\lambda_C = 1/m$ , es comparable al radio de Bohr. Así que para potenciales con influencia coulombiana predominante, los efectos relativistas van como el cociente  $R = \lambda_C/r_B = \alpha/2$ . Tanto para  $c\bar{c}$  como para  $b\bar{b}$ ,  $R \approx 1/4$ . la conclusión usual es que  $c\bar{c}$  puede trabajarse desde una plataforma no relativista, pues  $(v/c)^2 \approx 0.25$ .

Sin embargo, al incluir un confinamiento no despreciable se espera que el radio promedio disminuya y en consecuencia, que el sistema sea más relativista. Detallaré esto. A partir del principio de incertidumbre y usando la energía cinética no

<sup>3</sup>En inglés, es frecuente usar en este contexto el término *cutoff*.

relativista se puede establecer una escala  $r_0$ , más apropiada para el potencial tipo Cornell.

$$\frac{2}{mr_0^3} = \frac{\alpha}{r_0^2} + \kappa, \quad (1.9)$$

que se reduce correctamente al valor  $r_B$  para valores pequeños de  $\kappa$ . Al resolver la ecuación 1.9 para  $r_0$ , se encuentra una única solución real

$$r_0 = \frac{3}{z + 1 + \frac{1}{z}} r_B \quad (1.10)$$

con

$$z = \left( 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}(4x + 27x^2)^{1/2} + \frac{27}{2}x \right)^{1/3} \geq 1 \quad (1.11)$$

y

$$x = \frac{\kappa}{\alpha} r_B^2 = \frac{4\kappa}{m^2 \alpha^3}. \quad (1.12)$$

Observen que  $r_B \geq r_0$  y que  $r_0$  crece monótonamente con  $\kappa$ . Para charmonio son relevantes los valores,  $m = 1.84$  GeV,  $\alpha = 0.52$  y  $\kappa = 0.18$  GeV<sup>2</sup>. Así que  $r_0/r_B = 0.62$ . En consecuencia, en vez del valor coulombiano  $(v_B/c)^2 \approx 0.27$ , se llega al valor menos favorable  $(v_0/c)^2 \approx 0.43$ . Aplicando este último razonamiento al bottomonio, su valor coulombiano  $(v_B/c)^2 \approx 0.23$ , se mantiene comparable con  $(v_0/c)^2 \approx 0.27$ . Con lo anterior, al menos se hace cuestionable incluir correcciones de este orden en forma perturbativa, para el sistema charmonio.

Alternativamente, uno puede comenzar directamente con una ecuación relativista. El espín de los quarks es  $1/2$  y la ecuación apropiada es la de Dirac. Esta elección tiene una ventaja adicional. La covariancia es una parte explícita inherente a la ecuación de Dirac y el carácter tensorial de Lorentz para el confinamiento puede ser trabajado nítidamente. Sin embargo, otras interacciones deben ser puestas a mano como los potenciales espín-espín si se mantiene el tratamiento de la ecuación de Dirac como la descripción de una sola partícula.

Los antecedentes que les he presentado hasta aquí son un pequeño grupo —si bien representativo— del marco general de una discusión más extensa. Y ella fue el sustrato motor del presente trabajo.

En el siguiente capítulo desarrollaremos en detalle un método de diagonalización cerrada para la ecuación de Dirac. Esta técnica da inmediato acceso a dos importantes variantes en el tratamiento tradicional. Promueve la transparencia en el estudio de la covariancia para las interacciones. Y hace posible optar por técnicas de cálculo alternativas a las perturbativas, como es el caso de métodos variacionales.

## Capítulo 2

# Desacoplamiento exacto de las componentes de energía en la ecuación de Dirac

Entre los problemas dentro de QCD los métodos perturbativos son por mucho los más usados. Baste recordar que los diagramas de Feynman plantean un desarrollo en una serie que se corta al orden de interés en cada caso. Pero es indiscutible que frente a los métodos perturbativos, las soluciones cerradas tienen como ventaja la certeza.

La transformación de Foldy-Wouthuysen lleva por lo general a una serie, pues debe ser realizada recursivamente hasta el orden deseado de  $1/m$  —para el caso no relativista—.

Sin embargo existe una clase de potenciales para los cuales esta transformación da lugar a una diagonalización cerrada en las componentes grande y pequeña de los espinores de Dirac. A esta clase de potenciales la denotaremos por *potenciales de Eriksen* [41]. En este capítulo estudiaremos de estos potenciales algunas propiedades relevantes para los propósitos de esta tesis. A continuación discutiré con ustedes con detalle el concepto de paridad y a partir de él presentaremos la transformación cerrada de Foldy-Wouthuysen. Posteriormente trabajaremos las generalizaciones a este procedimiento [42, 43, 44, 45].

### 2.1 la transformación de Foldy-Wouthuysen cerrada

Una transformación de Foldy-Wouthuysen [46] es una rotación del hamiltoniano en el espacio de las matrices de Dirac con la cualidad de que el nuevo hamiltoniano sea diagonal por bloques, desacoplando así las componentes del espinor, grande y pequeña. Cuando un operador tiene esta estructura se dice que es par.

El que una matriz de Dirac sea diagonal por bloques de  $2 \times 2$  en la representación de Dirac-Pauli es equivalente a pedirle que conmute con  $\beta$ . Sin embargo, esta última condición tiene la ventaja de ser independiente de la representación.

## 2.2 matrices pares y diagonalización (inicial)

A partir de una matriz de referencia  $B$  definimos que una matriz  $A$  es par si conmuta con  $B$ , y non si anticonmuta. En general para una matriz  $B$  arbitraria existen matrices que no son ni par ni non. Pero esto no es para preocuparse. Lo que sí nos interesa es poder separar a cualquier matriz  $A$  en dos partes con paridad bien definida<sup>1</sup>.

En este momento podríamos iniciar el tortuoso camino para dilucidar en lo posible las propiedades de los espacios capaces de soportar tales operadores  $B$ . Sin embargo demostrar la existencia de una matriz  $B$  con las propiedades mencionadas es posible y es más sencillo mediante un ejemplo concreto. Dejemos el trabajo de la identificación de la familia completa de tales espacios a mentes más pacientes.

Se puede comprobar directamente que para el caso de matrices de  $2 \times 2$ , si se elige como matriz de referencia una de las matrices  $\sigma$  de Pauli entonces toda matriz es la suma de una puramente par y otra puramente non. Las matrices de Dirac reproducen dicha propiedad en varios casos. Dos de ellos son cuando se elige  $\beta$  ó  $\gamma^5$  como referencia. Las matrices pares con respecto a  $\beta$  son las matrices diagonales por bloques de  $2 \times 2$  en la representación de Dirac-Pauli, y las pares con respecto a  $\gamma^5$  son diagonales por bloques en la representación de Weyl. Otro ejemplo interesante es el caso en que se elige la matriz  $-i\beta\gamma^5$  como referencia.

Aunque en lo subsecuente ya no discutiremos con detalle el último caso ni el de  $\gamma^5$ , sin embargo, vale la pena notar aquí una diferencia. La matriz  $\beta$  es non cuando se elige como referencia a la matriz  $\gamma^5$ , y en ese caso las matrices  $\alpha_i$  son pares. Por otra parte, con la matriz  $-i\beta\gamma^5$  como referencia, tanto  $\beta$  como  $\alpha_i$  son nones. Al pedir las condiciones de conmutación necesarias para realizar la transformación cerrada, cuando el momento lineal aparece en la parte par (por ejemplo cuando  $B = \gamma^5$ ) la parte non ya no puede depender del espacio de configuración y viceversa si el momento aparece en la parte non, como verán posteriormente<sup>2</sup>.

Con base en el concepto de *paridad respecto a una matriz referencia*, ahora estamos en posición de expresar la transformación de Foldy-Wouthuysen cerrada, en términos muy generales. Buscamos realizar una transformación  $H \rightarrow H'$ , con  $H'$  definida por

$$i\partial_t - H' := e^{iS}(i\partial_t - H)e^{-iS}, \quad (2.2)$$

<sup>1</sup>Dado un operador referencia  $B$ , siempre es posible para cualquier operador  $A$ , la descomposición

$$A = A_{\text{par}} + A_{\text{non}} \quad (2.1a)$$

si sus partes se definen como

$$A_{\text{par}} := \frac{1}{2}(A + BAB) \quad ; \quad A_{\text{non}} := \frac{1}{2}(A - BAB). \quad (2.1b)$$

Mediante un cálculo directo, verificarán que

$$[A_{\text{par}}, B] = 0 \quad ; \quad [A_{\text{non}}, B] = 0. \quad (2.1c)$$

<sup>2</sup>Veán la explicación a la ecuación (2.4). Comparen con la condición (2.7e) y su uso en (2.14). Asimismo revisen el párrafo 3.4 concerniente a los generadores de la supersimetría, más adelante.

de tal manera que  $H'$  sea puramente par con respecto a una matriz  $B$  la cual supondremos hermitiana. El procedimiento usual [46, 47] es identificar en  $H$  sus partes<sup>3</sup> par  $H_{\text{par}}$  y non  $H_{\text{non}}$

$$H = H_{\text{par}} + H_{\text{non}}. \quad (2.4)$$

Con esta descomposición la elección usual de  $S$  es

$$iS := B H_{\text{non}} \theta. \quad (2.5)$$

$B$  y  $\theta$  son operadores hermitianos, y  $\theta$  conmuta con  $B$  y  $H_{\text{non}}$ .

### 2.3 un problema académico

Aunque la elección de  $S$  es adecuada, vale la pena señalar algunas motivaciones heurísticas subyacentes.

Recordemos de nuestros cursos de cuántica elemental el problema académico de una partícula fija, con espín en un campo magnetostático externo

$$H = \sigma \cdot \mathbf{B}. \quad (2.6)$$

Podemos resolver este problema rotando el hamiltoniano para que en el nuevo sistema,  $\sigma$  apunte en la dirección  $z$ . Como  $\sigma_3$  es diagonal (par) esto resuelve inmediatamente el problema en lo relativo al espacio de espín. La rotación se efectúa alrededor de un eje perpendicular por una parte al eje  $z$  y por otra a la dirección en la que apunta el vector  $\mathbf{B}$ . De la primera condición la dirección resulta ser la de un vector  $\hat{n}$  en el plano  $xy$ . Al expresar el operador de rotación como exponencial de sus generadores, observamos que en el exponente aparece sólo la parte non del hamiltoniano.

Por otra parte, llegamos a la misma conjetura a partir de la tabla de multiplicación para las matrices  $\sigma$ , por su carácter cíclico. Si lo que buscamos para la ecuación (2.6) es deshacernos de la parte non mediante operaciones de multiplicación, es razonable esperar que la parte par ( $\sigma_z$ ) no necesite participar, pero que  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  sí aparezcan.

Ambos razonamientos nos llevan a la misma conclusión. El generador de la rotación,  $S$ , debe de ser una combinación sólo de las matrices  $\sigma$  nones.

<sup>3</sup>Si  $B = B^\dagger$  se verifica que tanto  $H_{\text{par}}$  como  $H_{\text{non}}$  son hermitianos.

$$\begin{aligned} \{B, H\} &= \{B, H_{\text{non}}\} = 2BH_{\text{non}} \\ &= -\{B, H\}^\dagger = 2BH_{\text{non}}^\dagger, \end{aligned} \quad (2.3a)$$

y similarmente

$$\begin{aligned} \{B, H\} &= \{B, H_{\text{par}}\} = 2BH_{\text{par}} \\ &= \{B, H\}^\dagger = 2BH_{\text{par}}^\dagger. \end{aligned} \quad (2.3b)$$

Aquí requerimos también que  $B$  sea no singular. Pero la condición (2.7a) es equivalente.

## 2.4 matrices pares y diagonalización (final)

Regresemos ahora a la ecuación (2.5). El operador  $\theta$  debe conmutar con  $B$  y con  $H_{\text{non}}$ . Esto lo satisface un operador que llamaremos  $h^2$  y que es par a la vez que es función de  $H_{\text{non}}$  (por ejemplo una potencia suya). Así que les resultará plausible el que propongamos que  $\theta$  dependa exclusivamente de  $h^2$ . Además por comodidad escogeremos a  $B$  como una raíz de la unidad. Abajo les presento la lista de las suposiciones que haremos.

$$B^2 := 1, \quad (2.7a)$$

$$h^2 := H_{\text{non}}^2, \quad (2.7b)$$

$$\theta := \theta(h^2). \quad (2.7c)$$

Observen ustedes que aunque  $H_{\text{non}}$  es non, su cuadrado es par y en la práctica (2.7d) que se expresa abajo

$$[h, B] := 0, \quad (2.7d)$$

no es una condición extra<sup>4</sup>, pero la escribo aquí para referencias futuras. Adicionalmente vamos a pedir una condición que será de gran utilidad al momento de obtener una forma cerrada de la transformación (2.2)

$$\{H_{\text{par}}, H_{\text{non}}\} := 0. \quad (2.7e)$$

Verificaremos la consistencia de estas suposiciones al final<sup>5</sup>.

## 2.5 forma trigonométrica de $e^{iS}$

La exponencial compleja de la ecuación (2.2) tiene a su vez una expresión equivalente del tipo trigonométrico. Para obtenerla es conveniente que desarrollen la serie y la asocien en dos nuevas series, una para las potencias pares de  $iS$  y otra para las impares. Luego apliquen la propiedad (2.7c) a cada término de ambas series. Finalmente basta que usen la definición misma de matriz non y un poco de combinatoria para que obtengan

$$\frac{(iS)^n}{n!} = \frac{(BH_{\text{non}}\theta)^n}{n!} = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \frac{B^n H_{\text{non}}^n \theta^n}{n!} \quad (2.8)$$

En los términos con potencias pares ( $n = 2m$ ) los factores  $H_{\text{non}}^2$  pueden ser substituidos directamente por  $h^2$ , según (2.7b),

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(iS)^{2m}}{2m!} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{h^{2m} \theta^{2m}}{2m!} = \cos h\theta. \quad (2.9)$$

<sup>4</sup>Lo que se pide es que  $h$  exista. Más adelante demostraremos la existencia de una raíz par ( $h$ ) de  $h^2$ ; si bien es cierto que no es única.

<sup>5</sup>Vean los comentarios de la sección 2.8.

Para la serie impar ( $n = 2m + 1$ ) usen el mismo procedimiento excepto por una multiplicación por  $h/h$  y una factorización de  $BH_{\text{non}}h^{-1}$ . En el camino es útil recordar que  $h^{-1}$  es par

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(iS)^{2m+1}}{(2m+1)!} = BH_{\text{non}}h^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{h^{2m+1}\theta^{2m+1}}{(2m+1)!} = BH_{\text{non}}h^{-1} \sin h\theta. \quad (2.10)$$

Combinen ambos resultados para obtener una fórmula trigonométrica del tipo de Euler-d'Moivre

$$e^{BH_{\text{non}}\theta} = \cos h\theta + BH_{\text{non}}h^{-1} \sin h\theta. \quad (2.11)$$

La ecuación anterior es la descomposición (2.4) de la exponencial en una parte par y otra non. Más adelante esta propiedad mostrará ser de gran utilidad.

## 2.6 forma cerrada de la transformación

Para efectuar la rotación indicada en la ecuación (2.2) vamos a imponer una restricción. Sólo se tomarán en cuenta los hamiltonianos  $H$  que no dependan explícitamente del tiempo. Esto restringe severamente la clase de potenciales a los que les está permitido participar: los potenciales estáticos.

$$\partial_t H = 0. \quad (2.12)$$

Sin embargo estos potenciales cubren los casos de interés para el presente trabajo. En particular son suficientes para describir estados estacionarios de sistemas ligados. Cuando  $H$  dependiere explícitamente del tiempo la transformación (2.2) generaría una serie infinita según muestra la aplicación directa de la fórmula de Becker-Kampel-Hausdorff [46, 48]; esto, en lo referente a los términos  $\hat{S}, \hat{S}, \dots$

La ventaja de la restricción señalada es la futilidad de la presencia del operador  $\partial_t$  en la ecuación (2.2) para este caso, reduciéndola a

$$H' = e^{iS} H e^{-iS}. \quad (2.13)$$

Si ahora toman en cuenta las propiedades de conmutación (2.7e) entre  $S$  y  $H$  corroborarán que al pasar la exponencial de un lado de  $H$  al otro el exponente cambia de signo. Esto lo pueden visualizar de inmediato por ejemplo desarrollando la exponencial en una serie de potencias.

Sustituyan  $H$  y  $e^{-2iS}$  por sus expresiones equivalentes (2.4) y (2.11) en la ecuación (2.13). Desarrollando el producto y asociando términos pares e impares a la manera (2.4) y usando nuevamente la condición (2.7e) resulta

$$H' = B[BH_{\text{par}} \cos 2h\theta + h \sin 2h\theta] + H_{\text{non}}[\cos 2h\theta - BH_{\text{par}}h^{-1} \sin 2h\theta]. \quad (2.14)$$

El ejemplo que trabajaremos es el caso en que  $H_{\text{par}}$  es proporcional a  $B$ , siendo de la forma  $H_{\text{par}} = mB$ , y  $B = \beta$ . La rotación anterior para un 'ángulo' arbitrario es

$$H' = \beta[m \cos 2h\theta + h \sin 2h\theta] + H_{\text{non}}[\cos 2h\theta - \frac{m}{h} \sin 2h\theta]. \quad (2.15)$$

Esta fórmula es bastante general y no está restringida en forma alguna al espacio de las matrices de Dirac, pues sólo basta que se tenga a la disposición un operador con las propiedades de conmutación y anticonmutación discutidas al inicio de la sección 2.2. Un ejemplo obvio aparte de las matrices de Dirac es el de las matrices de Pauli<sup>6</sup>.

## 2.7 Foldy-Wouthuysen y Cini-Touschek

A partir de la ecuación (2.15) es inmediato obtener la expresión de la transformación cerrada de (2.2), bajo las condiciones (2.7). Lo que falta es elegir un 'ángulo' adecuado para anular el término impar. Esto se logra imponiendo que  $\theta(h^2)$  cumpla con la condición trigonométrica

$$\frac{m}{h} \sin 2h\theta = \cos 2h\theta \quad (2.16)$$

o equivalentemente

$$\text{tg } 2h\theta = \frac{h}{m}. \quad (2.17)$$

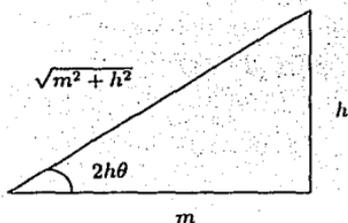
Cuando  $h$  es diagonal,  $\theta$  también lo es y la ecuación (2.17) es también la ecuación para los eigenvalores. Los eigenvalores de  $\theta$  son reales pues los de  $h$  y  $m$  lo son, por tanto su interpretación como ángulos es correcta. Esto prueba la hermiticidad para  $\theta$ , así como la validez de la ecuación (2.5) y nuestras suposiciones concomitantes. En particular aquí tenemos una prueba de consistencia con la hipótesis (2.7c), pues ambos miembros en la ecuación (2.17) son funciones impares de  $h$ .

Para finalmente exhibir el hamiltoniano diagonalizado es conveniente construir antes el triángulo rectángulo correspondiente a (2.17), cuya validez ha quedado justificada arriba. Leyendo los valores de  $\sin h\theta$  y  $\cosh h\theta$  a partir de la figura 2.1 y sustituyendo en (2.15) obtenemos

$$H_{\text{FW}} := \beta \sqrt{m^2 + h^2}. \quad (2.18)$$

Para comprobar que el requisito (2.7d) se cumple basta observar que una posible solución a  $h$  es el operador  $H_{\text{FW}}$  con  $m = 0$ . El hamiltoniano (2.18) es conocido como de tipo Foldy-Wouthuysen [49] y con esto se concluye la búsqueda planteada al inicio de la sección.

<sup>6</sup>Aunque no menos obvio que otros.



**Figura 2.1:** Construcción del triángulo rectángulo que representa formalmente a la transformación de Foldy-Wouthuysen. El ángulo es real, con lo que se asegura que las relaciones entre los catetos son trigonométricas y no hiperbólicas.

Sin embargo la expresión (2.15) nos ofrece un regalo no previsto al inicio. Si consideramos el caso en que el hamiltoniano es puramente non el camino a recorrer es enteramente similar. Las condiciones análogas a (2.16) y (2.17) son

$$m \cos 2h\theta = -h \operatorname{sen} 2h\theta, \quad (2.19)$$

$$\operatorname{tg} 2h\theta = -\frac{m}{h}. \quad (2.20)$$

Esta vez la figura 2.2 es la apropiada para leer los valores de  $\operatorname{sen} h\theta$  y  $\cos h\theta$ , y que corresponden a la rotación ortogonal a 2.18.

$$H_{CT} := H_{\text{non}} \sqrt{1 + \frac{m^2}{h^2}}. \quad (2.21)$$

Éste es conocido como el hamiltoniano del tipo Cini-Touschek [50] y es el apropiado para una descripción en el límite ultrarrelativista, a diferencia del tipo Foldy-Wouthuysen que corresponde al límite no relativista.

## 2.8 comentarios a los resultados

Noten que la masa tiene un peso opuesto en ambos límites. Mientras que para la región no relativista  $m$  es el término dominante de la energía, para la región ultrarrelativista  $m$  es una contribución pequeña. La expresión (2.21) es como si fuera una factorización de  $H_{\text{non}}$  y el segundo término en el subradical contiene a la masa en el numerador con lo que resulta pequeño. Por el contrario en la expresión (2.18) el término  $\beta m$  es la contribución principal y  $h^2/m$  es la corrección.

Concluamos esta sección destacando varios puntos.

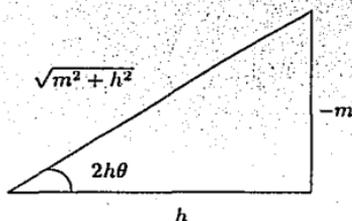


Figura 2.2: Construcción del triángulo rectángulo que representa formalmente a la transformación de Cini-Touschek. El ángulo es real, con lo que se asegura que las relaciones entre los catetos son trigonométricas y no hiperbólicas.

El primero es que aquí hemos empleado el término *límite* distinguiéndolo del término *aproximación* a la vez que resaltando su connotación de *descripción más apropiadas en un cierto régimen*.

Como segundo punto a destacar es que la forma Cini-Touschek no es equivalente a elegir como matriz de referencia a  $\gamma^5$  por ejemplo (ver sección 2.2). Un término de la forma  $\alpha \cdot \pi$ , con  $\pi = \mathbf{p} - i\beta\gamma^5$  cambia a  $\alpha \cdot \pi^\dagger$  cuando pasa una  $\gamma^5$  de un lado al otro. Estos términos no tienen una paridad bien definida con respecto a  $\gamma^5$  (ni tampoco con respecto a  $-i\beta\gamma^5$ ). Es decir que no necesariamente existe una matriz que clasifique como términos pares a los que otra matriz ha clasificado como nones. Como consecuencia de este segundo comentario se tiene que para cada uno de los tres casos señalados en la sección 2.2 podría existir una expresión tipo Foldy-Wouthuysen y una tipo Cini-Touschek, siendo todas independientes.

El tercer punto se refiere a una ventaja del método y se discutirá más adelante con ayuda de ejemplos concretos. Por el momento baste mencionar que con (2.18) se logra desacoplar las componentes grande y pequeña, pero que aún falta por encontrar las eigenfunciones del problema para tener una solución completa. Ya que la masa es una constante la expresión (2.18) tiene las mismas eigenfunciones que  $h^2$ . Esto indica que es suficiente si nos concentramos en  $h^2$  cuando busquemos la solución completa de (2.18). La relación entre  $h^2$  y  $H^2$  es muy estrecha según muestra la ecuación (2.7b). Y así, para los casos en los que el hamiltoniano  $H$  de la ecuación (2.2) represente una raíz de Dirac de un problema previo (por ejemplo no relativista) y de solución conocida, las soluciones del operador  $h^2$  estarán relacionadas también estrechamente con las del problema previo.

Como cuarto punto, es conveniente resaltar que generalizaciones a este procedimiento deben hacerse con precaución, siendo esto particularmente cierto en relación a la condición de independencia temporal, y su conexión con la unitariedad de la transformación de Foldy-Wouthuysen [51, 52, 53, 54].

Finalmente, un resultado extremadamente importante es que el desacoplamiento de las componentes grande y pequeña es exacto sin importar *la intensidad* de la interacción. Además esto conlleva a que la definición del vacío pueda mantenerse la misma con y sin interacción.





## Capítulo 3

# Los potenciales asociados a la transformación cerrada de Foldy-Wouthuysen

En el capítulo anterior les he mostrado la existencia de formas cerradas para la transformación de Foldy-Wouthuysen. Avancemos ahora en la dirección de delimitar la clase de potenciales que pueden participar en el hamiltoniano de Dirac  $H$  de la ecuación (2.2) que permitan obtener una forma cerrada para la transformación. Llevaremos esta búsqueda hasta el caso de potenciales no abelianos. Al final les presentaré las propiedades supersimétricas de este problema. Pero antes de abordar el caso general estudiemos tres ejemplos conocidos.

### 3.1 tres casos particulares

**3.1.1 caso magnético.** Existen dos potenciales muy simples en estructura que permiten una solución cerrada del tipo (2.18). El primero es el caso magnetostático y corresponde a un acoplamiento mínimo<sup>1</sup>. Sin embargo se puede hacer el mismo tratamiento con un hamiltoniano más completo [43] y es el que les presento a continuación.

$$H_{\text{mag}} := \alpha \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) + \beta m. \quad (3.1)$$

Seguiremos la notación usual, definiendo

$$\boldsymbol{\pi} := \mathbf{p} + e\mathbf{A}, \quad (3.2)$$

y así el hamiltoniano (3.1) se expresa como

$$H = \alpha \cdot \boldsymbol{\pi} + \beta m. \quad (3.3)$$

<sup>1</sup>Ya antes [55, 56, 57] se ha trabajado este potencial pero restringido a partículas con masa cero. Este y otros casos de partículas de Dirac en un campo magnético independiente del tiempo [58, 59] quedan englobados en esta sección.

Para obtener la descomposición del tipo (2.4) usamos  $B = \beta$  como matriz de referencia para la paridad. Los términos son

$$H_{\text{par}} = \beta m, \quad (3.4)$$

$$H_{\text{non}} = \alpha \cdot \pi. \quad (3.5)$$

El potencial cumple con la condición  $\partial_t \mathbf{A} = 0$  y con ello se cumple también (2.12) así que es aplicable la ecuación (2.13). Como  $H_{\text{par}}$  es proporcional a  $\beta$  el hamiltoniano cumple las características para poder ser llevado a la forma (2.15). Por tanto se tiene para este caso un hamiltoniano de Foldy-Wouthuysen (2.18) y el correspondiente de Cini-Touschek (2.21), sólo que ahora sabemos la forma explícita para  $h^2$  y es

$$h_{\text{mag}}^2 := (\alpha \cdot \pi)^2 = [\alpha \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A})]^2, \quad (3.6)$$

que es un pariente cercano del hamiltoniano no relativista propuesto inicialmente por Pauli<sup>2</sup>.  $H_{\text{Pauli}} = (1/2m)(\sigma \cdot \pi)^2$ .

El desarrollo del último término en la expresión (3.6) se obtiene haciendo uso de la conocida identidad para las  $\sigma_i$  de Dirac

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k, \quad (3.7)$$

así como de su análogo<sup>3</sup> para las  $\rho_i$ , y recordando las definiciones de  $\alpha$  y  $\beta$  en términos de las matrices  $\rho$  de Dirac [60].

$$\alpha = \rho_1 \sigma \quad (3.8)$$

$$\beta = \rho_3. \quad (3.9)$$

Y así resulta que (3.6) es

$$h_{\text{mag}}^2 = (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + 2e(\mathbf{s} \cdot \mathbf{B}). \quad (3.10)$$

La conexión entre  $H_{\text{Pauli}}$  y  $h_{\text{mag}}^2$  se revela al desarrollar la serie correspondiente a (2.18) usando (3.10).

Claramente la condición  $\partial_t \mathbf{A} = 0$  impone la ausencia de campo eléctrico. Y recordando la discusión relacionada con la ecuación (2.13), si se deseara incluir el campo eléctrico se vería uno forzado a abandonar para estos casos las formas cerradas (2.18) y (2.21).

Es oportuno retomar la discusión que se anticipó en la sección 2.8. Gracias a la expresión (2.18) el problema cuántico relativista (3.1) hereda directamente las eigenfunciones de un problema no relativista conocido. Y cuando el problema no relativista tiene solución exacta en términos de funciones conocidas el problema relativista asociado (2.18) tiene una solución completa.

<sup>2</sup>En la representación de Dirac-Pauli las matrices de Dirac  $\alpha_i$  son  $\sigma_i \otimes \sigma_1$ .

<sup>3</sup> $\sigma$  y  $\rho$  conmutan. Las  $\sigma_i$  son las matrices de Dirac asociadas al espín.

3.1.2 caso anómalo. Pasemos ahora al segundo ejemplo. El hamiltoniano es

$$H_{\text{anom}} := \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} + i\beta\mathbf{E}) + \beta m. \quad (3.11)$$

Es un vector de tres componentes que depende del vector de posición  $\mathbf{r}$ . Nuevamente se pide (2.12) que ahora se traduce en  $\partial_t \mathbf{E} = 0$ . La  $i$  aparece para que el término  $i\boldsymbol{\alpha} \cdot \beta\mathbf{E}$  sea hermitiano. En la referencia [42] se muestra que este término puede interpretarse como un acoplamiento entre el momento magnético anómalo y un campo eléctrico.  $\mathbf{E}$  representa un campo eléctrico estático externo. En dicho trabajo se discuten también las propiedades ante CPT y de covariancia de este hamiltoniano.

Cuando  $\mathbf{E} = -\mathbf{r}$  se recupera el caso particular conocido como el oscilador de Dirac [61] y un tratamiento análogo al del caso magnetostático se puede encontrar en el trabajo [42]. El caso para  $\mathbf{E}$  arbitrario está trabajado en [43].

Ahora el potencial corresponde a un acoplamiento no mínimo. Sin embargo podemos utilizar una notación similar a la del ejemplo anterior. Definimos

$$\boldsymbol{\pi} := \mathbf{p} + i\beta\mathbf{E}, \quad (3.12)$$

y entonces el hamiltoniano (3.11) se escribe también como (3.3). De nueva cuenta se identifican las partes par y non. Resultando la misma descomposición (3.4) y (3.5). El procedimiento se repite idéntico hasta llegar a las ecuaciones (2.18) y (2.21). Para  $\hbar^2$  se tiene esta vez

$$\hbar_{\text{anom}}^2 = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\pi})^2 = [\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} + i\beta\mathbf{E})]^2. \quad (3.13)$$

El último término se puede desarrollar fácilmente observando que al permutar  $\boldsymbol{\alpha}$  y  $\boldsymbol{\pi}$ , este último factor se convierte en  $\boldsymbol{\pi}^\dagger$ . Usando (3.7), (3.8) y (3.9) obtenemos

$$\hbar_{\text{anom}}^2 = p^2 + E^2 + \beta(\nabla \cdot \mathbf{E} + 4\mathbf{s} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{p} + 2i\mathbf{s} \cdot \nabla \times \mathbf{E}), \quad (3.14)$$

y para el caso del oscilador de Dirac

$$\hbar_{\text{OD}}^2 = p^2 + r^2 - \beta(3 + 4\mathbf{L} \cdot \mathbf{s}). \quad (3.15)$$

Nuevamente pueden observar una relación entre el problema relativista, y uno no relativista. El último ejemplo es especialmente sugerente, pues es un oscilador armónico más un término  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{s}$  cuyo origen es el tratamiento relativista. Como son conocidas las eigensoluciones de  $H_{\text{osc}}$  —el hamiltoniano del oscilador clásico— la solución completa de  $\hbar_{\text{OD}}^2$  es inmediata.  $H_{\text{osc}}$ ,  $\beta$ ,  $\mathbf{J}^2$ ,  $\mathbf{J}_z$ ,  $\mathbf{L}^2$ ,  $s^2$  y el operador de reflexión de coordenadas conmutan entre sí, así como con  $\hbar_{\text{OD}}^2$  y por tanto con (2.18). Más aún,  $H_{\text{FW}}$  es función de estos operadores, así que su espectro se puede obtener directamente del espectro de  $H_{\text{osc}}$  y de los eigenvalores de estos operadores.

**3.1.3 caso minimal + anómalo.** Si observan ustedes la similitud entre los dos ejemplos anteriores<sup>4</sup> estarán de acuerdo en que existe un tercer ejemplo que los engloba a ambos. Definimos

$$\pi := \mathbf{p} + \mathbf{A} + i\beta\mathbf{E}, \quad (3.16)$$

con las restricciones ya mencionadas para  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{E}$ . Su presencia simultánea no limita en nada el procedimiento y se reproducen (3.3), (3.4), (3.5), (2.18) y (2.21). Ahora

$$h_{\text{min+anom}}^2 = (\mathbf{p} + \mathbf{A})^2 + E^2 + 2\mathbf{s} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \beta(\nabla \cdot \mathbf{E} + 4\mathbf{s} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{p} + 2i\mathbf{s} \cdot \nabla \times \mathbf{E}). \quad (3.17)$$

Les he exhibido ya dos potenciales de Eriksen:  $\alpha \cdot \mathbf{A}$  y  $i\alpha\beta \cdot \mathbf{E}$ . Las preguntas inmediatas son, ¿qué tanto puede generalizarse esta idea? y ¿cuántos potenciales de Eriksen más existen? A continuación abordaremos este asunto.

## 3.2 la clase de los potenciales nones

Observen con cuidado el procedimiento de Foldy-Wouthuysen, y en particular noten las condiciones (2.7c) y (2.7b). Ya que del hamiltoniano no aparece en la forma final (2.18) más que  $H_{\text{non}}$  y la masa, es claro que un potencial que apareciera en  $H_{\text{par}}$  no tendría cabida en (2.18). Sin embargo, el potencial escalar acompaña a la masa —por lo que es par— y clama por su participación aquí. Pero a este potencial tampoco le estaría permitido depender de  $\mathbf{r}$  por la condición (2.7e). Y sólo podría participar como una constante, la cual puede ser absorbida en el término de masa. Así pues, indagemos todos los casos posibles de potenciales nones en la ecuación de Dirac.

Debido a que son 16 las matrices de Dirac, sólo 8 pueden ser nones. En la sección anterior hemos mostrado seis componentes: tres para la parte espacialoide del potencial vectorial, y tres para la parte eléctrica del potencial tensorial. Los dos restantes son  $i\beta\gamma_5$  y  $\gamma_5$ , los potenciales pseudoescalar y la componente temporaloide del vector axial respectivamente.

Si ahora recuerdan las matrices  $\rho$  y  $\sigma$  es sencillo visualizar todo este conjunto a la vez. Ya que  $\beta = \rho_3$  y  $\sigma$  conmuta con  $\rho$ , las 8 matrices que nos interesan son:  $\rho_1\sigma^i = \alpha_i$ ,  $\rho_2\sigma^i = \beta\sigma^{jk}$ ,  $\rho_1 = \gamma_5$  y  $\rho_2 = -i\beta\gamma_5$ .

Los potenciales se resumen en la tabla 3.1 o en forma alternativa en la tabla 3.2. Noten que aparte de las dos limitantes (2.7e) y (2.12), los potenciales siguen siendo muy generales. Su dependencia funcional en  $\mathbf{r}$  es arbitraria.

<sup>4</sup>Comparen las ecuaciones (3.1) y (3.2) con (3.11) y (3.12); también sus consecuencias (3.3), (3.4) y (3.5); asimismo (3.6) con (3.13).

**Tabla 3.1:** El estudio de los potenciales que permiten diagonalizar por bloques al hamiltoniano de Dirac con una transformación de Foldy-Wouthuysen cerrada tiene sus antecedentes en Eriksen [41]. Aquí les presento una lista completa de los potenciales con esta cualidad [44]. En la última columna he puesto las matrices de Dirac asociadas a los potenciales. El lado izquierdo contiene a la forma hamiltoniana y el lado derecho a la expresión covariante multiplicada por una  $\beta$ .

potencial	interpretación física	matriz
i) $A(\mathbf{r})$	Las tres componentes espaciales del potencial vectorial (acoplamiento mínimo puramente magnético),	$\alpha = \beta\gamma$
ii) $E(\mathbf{r})$	Las tres componentes tipo campo eléctrico del potencial tensorial (acoplamiento magnético anómalo),	$i\alpha\beta = \beta\sigma^{0i}$
iii) $A_5(\mathbf{r})$	La componente del potencial pseudoescalar,	$\alpha_5 = -i\beta\gamma_5$
iv) $E_5(\mathbf{r})$	La componente temporal del potencial pseudovectorial.	$i\alpha_5\beta = \beta\gamma_5\gamma^0$

Deseamos seguir la notación (3.2), (3.12) y (3.16). Para ello hacemos las dos siguientes definiciones [44].

$$\alpha_5 := -i\beta\gamma_5, \quad (3.18)$$

$$p_5 := 0. \quad (3.19)$$

La tabla de conmutación y anticonmutación para  $\beta$ ,  $\alpha$  y  $\alpha_5$  se muestra en las tablas 3.3 y 3.4. Ambas tablas se pueden obtener de manera directa a partir de las matrices  $\sigma$  y  $\rho$  y sus propiedades (3.7). Ahora podemos definir

$$\pi_I := p_I + A_I + i\beta E_I \quad \text{con} \quad I = 1, 2, 3 \text{ y } 5. \quad (3.20)$$

Aquí he introducido la convención de usar índices romanos en mayúscula para denotar que nos referimos a las componentes 1, 2, 3 y 5. Índices repetidos implican una suma. El hamiltoniano más general con transformación de Foldy-Wouthuysen cerrada es por tanto

$$H = \alpha_I \pi_I + \beta m, \quad (3.21)$$

**Tabla 3.2:** Presentación alternativa, de los potenciales desacoplables mediante la transformación de Foldy-Wouthuysen; usando la representación de las matrices de Dirac como productos directos de matrices  $(2 \times 2)$  en su representación de Pauli. Las dos columnas centrales (bajo  $\sigma^1$  y  $\sigma^2$ ) definen a los potenciales con transformación de Foldy-Wouthuysen cerrada. Las siglas entre paréntesis representan: (S)=escalar, (P)=pseudoescalar, (V)=cuadrivector, (A)=cuadrivector axial y (T)=tensor.

$\otimes$	1	$\sigma^1$	$\sigma^2$	$\sigma^3$
	(S)	(P)	(A <sup>0</sup> )	(V <sup>0</sup> )
1	i	$\gamma_5$	$-i\gamma_5\gamma^0$	$\gamma^0$
	(T <sup>kl</sup> )	(T <sup>m0</sup> )	(V <sup>m</sup> )	(A <sup>m</sup> )
$\sigma^m$	$\frac{\epsilon_{mkl}}{2}\sigma^{kl}$	$i\sigma^{m0}$	$-i\gamma^m$	$-\gamma_5\gamma^m$

**Tabla 3.3:** Tabla de anticonmutación para  $\beta$ ,  $\alpha_I$  y  $\alpha_5$ . Usando la notación (3.18) esta tabla se puede resumir en  $\{\alpha_I, \alpha_J\} = 2\delta_{IJ}$

$\{\alpha_I, \alpha_J\}_{(+)}$		$\alpha_J$		
		$\beta$	$\alpha_j$	$\alpha_5$
$\alpha_I$	$\beta$	2	0	0
	$\alpha_i$	0	$2\delta_{ij}$	0
	$\alpha_5$	0	0	2

que es la forma análoga a (3.3). Cuando descomponemos el hamiltoniano en sus partes par y non (2.4), la forma de la parte par se repite: (3.4). Lo equivalente a (3.5) es (3.22).

$$H_{\text{par}} = \beta m, \quad (3.4)$$

$$H_{\text{non}} = \alpha_I \pi_I. \quad (3.22)$$

Los hamiltonianos de Foldy-Wouthuysen y de Cini-Touschek son

$$H_{\text{FW}} = \beta \sqrt{m^2 + h^2}, \quad (2.18)$$

$$H_{\text{CT}} = \alpha_I \pi_I \sqrt{1 + m^2/h^2}. \quad (3.23)$$

Tabla 3.4: Tabla de conmutación para  $\beta$ ,  $\alpha$  y  $\alpha_5$ .

$[\alpha_I, \alpha_J]_{(-)}$		$\alpha_J$		
		$\beta$	$\alpha_j$	$\alpha_5$
$\alpha_I$	$\beta$	0	$2i\alpha_5\sigma^j$	$-2i\gamma_5$
	$\alpha_i$	$-2i\alpha_5\sigma^i$	$2i\epsilon_{ijk}\sigma^k$	$2i\beta\sigma^i$
	$\alpha_5$	$2i\gamma_5$	$-2i\beta\sigma^j$	0

Sólo falta calcular  $h^2$ , que como han de recordar<sup>5</sup> es  $(\alpha_I \alpha_J)(\pi_I \pi_J^\dagger)$ . Para ello dos rutas son las que se ocurren de inmediato. La primera es usar las tablas 3.3 y 3.4 y aprovechar que se tiene sólo una expresión para anticonmutar todas las matrices  $\alpha_I$  —aunque para conmutarlas es necesario realizarlo por casos, cada uno con álgebra distinta—. La segunda ruta es usar las matrices  $\rho$  y  $\sigma$  de Dirac y sacar ventaja de que el álgebra de las matrices  $\sigma$  es la misma que la de las  $\rho$ .

Si agrupamos a las componentes con  $I = 1, 2, 3$  en *trivectores* escribiéndolos en *negrita* la expresión para  $h^2 = (\alpha_I \pi_I)^2$  es

$$\begin{aligned}
 h^2 := & (\mathbf{p} + \mathbf{A})^2 + \mathbf{E}^2 + A_5^2 + E_5^2 \\
 & + s \cdot \left[ 2\nabla \times \mathbf{A} + 2i \nabla E_5 + 4A_5 \mathbf{E} - 4E_5 (\mathbf{p} + \mathbf{A}) \right] \\
 & + \beta \left[ \nabla \cdot \mathbf{E} + s \cdot \left[ 2i \nabla \times \mathbf{E} + 2\nabla A_5 + 4\mathbf{E} \times (\mathbf{p} + \mathbf{A}) \right] \right]. \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

### 3.3 grados de libertad internos

Para finalizar con las generalizaciones, les presentaré en esta breve sección el caso de potenciales con grados de libertad internos. Esta situación tiene una realización en el marco de las interacciones fundamentales. Uno es el caso de la interacción débil con una simetría  $SU(2)$  y el otro es el de las interacciones de color cuya simetría es  $SU(3)$ .

Como los grados internos de libertad son representados con ayuda de grupos no abelianos designaremos a estos potenciales como *potenciales no abelianos*. Para ser más específicos denotemos por  $\{T_a\}$  el conjunto de los generadores de un grupo. El índice  $a$  recorre todos los elementos del conjunto. Un potencial no abeliano lo definimos por la sustitución

$$V_i \rightarrow T \cdot V_i := T_a V_{a i}, \quad (3.25)$$

<sup>5</sup>Ver comentarios después de (3.13).

y los índices repetidos  $a$  implican una suma a todos los generadores del grupo. Estos operadores conmutan con las matrices de Dirac pues actúan en espacios diferentes. Por eso es que no se ve afectado el procedimiento de la transformación cerrada de Foldy-Wouthuysen. Realizando la sustitución (3.25) sobre (3.20) definimos ahora

$$\pi_I := p_I + T_a A_{Ia}(\mathbf{r}) + i\beta T_a E_{Ia}(\mathbf{r}). \quad (3.26)$$

Son válidas las formas (3.21), —con (3.4) y (3.22)—, (2.18) y (3.23). Esta vez la expresión para  $h^2$  es

$$\begin{aligned} h^2 := & (\mathbf{p} + T_a \mathbf{A}_a)^2 \\ & + T_a \left[ \mathbf{s} \cdot (2\nabla \times \mathbf{A}_a + 2i\nabla E_{5a} - 4E_{5a} \mathbf{p}) \right. \\ & \left. + \beta \left[ \nabla \cdot \mathbf{E}_a + \mathbf{s} \cdot (2i\nabla \times \mathbf{E}_a + 2\nabla A_{5a} + 4\mathbf{E}_a \times \mathbf{p}) \right] \right] \\ & + \frac{1}{2} \{ T_a, T_b \} \left[ (\mathbf{E}_a \cdot \mathbf{E}_b + E_{5a} E_{5b} + A_{5a} A_{5b}) - 4\mathbf{s} \cdot (E_{5a} \mathbf{A}_b + A_{5a} \mathbf{E}_b) \right. \\ & \left. - 4\beta \mathbf{s} \cdot \mathbf{A}_a \times \mathbf{E}_b \right] \\ & + \frac{1}{2} [T_a, T_b] \left[ 2\mathbf{s} \cdot (\mathbf{A}_a \times \mathbf{A}_b + \mathbf{E}_a \times \mathbf{E}_b) \right. \\ & \left. + \beta \left[ 2(\mathbf{A}_a \cdot \mathbf{E}_b + A_{5a} E_{5b}) - 4\mathbf{s} \cdot (\mathbf{A}_{5a} \mathbf{A}_b + \mathbf{E}_{5a} \mathbf{E}_b) \right] \right]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

### 3.4 supersimetría y estabilidad del mar de Dirac

El conjunto de potenciales que hemos denominado de Eriksen tiene características físicas curiosas. Contiene a potenciales como el pseudoescalar y el temporaloide del vector axial. Sin embargo no incluyen al escalar o al temporaloide del acoplamiento mínimo. Llama la atención 'la correlación incompleta' con la covariancia de Lorentz. Típicamente las partes temporaloides y espacialoides pertenecen a "paridad" opuesta.

Por otra parte como las soluciones de energía positiva y negativa pueden ser desacopladas en forma exacta estos potenciales contribuyen a la estabilidad del mar de Dirac [43].

Mostraremos ahora la existencia de un hamiltoniano supersimétrico de segundo orden íntimamente relacionado con el hamiltoniano de primer orden (3.21) [43, 45, 55, 56, 57]. Definimos [62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70].<sup>6</sup>

$$\lambda := m\beta, \quad (3.28)$$

<sup>6</sup> Estrictamente, no es necesario que (3.30) sea una definición pues se puede obtener a partir de (3.29).

$$Q := \alpha_I \pi_I \frac{(1-\beta)}{2}, \quad (3.29)$$

$$Q^\dagger := \alpha_I \pi_I \frac{(1+\beta)}{2}. \quad (3.30)$$

En términos de los potenciales  $A_I$  y  $E_I$  los operadores de carga fermiónica se expresan como [71, 72, 73]

$$Q = \frac{\rho_1 + i\rho_2}{2} \left[ \sigma \cdot (\mathbf{P} + \mathbf{A} - i\mathbf{E}) - (E_5 + iA_5) \right], \quad (3.31)$$

$$Q^\dagger = \frac{\rho_1 - i\rho_2}{2} \left[ \sigma \cdot (\mathbf{P} + \mathbf{A} + i\mathbf{E}) - (E_5 - iA_5) \right]. \quad (3.32)$$

El operador  $\lambda$  es un operador bosónico hermitiano. Los operadores no hermitianos  $Q$  y  $Q^\dagger$  son fermiónicos y obedecen una superálgebra. Estos operadores cumplen con las siguientes propiedades<sup>7</sup>.

$$\lambda = \lambda^\dagger, \quad (3.33a)$$

$$\{Q, \lambda\} = 0 = \{Q^\dagger, \lambda\}, \quad (3.33b)$$

$$\{Q, Q\} = 0 = \{Q^\dagger, Q^\dagger\} \quad (3.33c)$$

y

$$\{\lambda, \{Q, Q^\dagger\}\} = 0. \quad (3.33d)$$

La propiedad (3.33b) define a  $\lambda$  como un operador non en la nomenclatura usual de las superálgebras. Ahora podemos reescribir el hamiltoniano (3.21) como

$$H = Q + Q^\dagger + \lambda. \quad (3.34)$$

Si elevamos al cuadrado y usamos las propiedades (3.33) obtenemos

$$\mathcal{H} := \{Q, Q^\dagger\} = H^2 - \lambda^2. \quad (3.35)$$

Así hemos arribado a un hamiltoniano  $\mathcal{H}$  supersimétrico y es idéntico a  $h^2$ . Como se recordará contiene a la matriz  $\beta$  con lo que es un hamiltoniano de Dirac de segundo orden, y no uno de Klein-Gordon. Resulta inmediato expresar la transformación de Foldy-Wouthuysen en términos de esta superálgebra. Las relaciones (2.5), (2.18) y (3.23) se convierten en

$$iS = \lambda(Q + Q^\dagger) \theta(\{Q, Q^\dagger\}), \quad (3.36)$$

$$H_{\text{FW}} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2}} \sqrt{\{Q, Q^\dagger\} + \lambda^2} \quad (3.37)$$

y

<sup>7</sup>Noten también [63, 66] que el operador  $q := Q + Q^\dagger$  es hermitiano. Asimismo,  $\lambda = \lambda^\dagger$ . Y se cumple  $\{q, h^2\} = 0$ ,  $\{q, \lambda\} = 0$  y por supuesto  $\{q, q^\dagger\} = h^2$ .

$$H_{CT} = (Q + Q^\dagger) \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\{Q, Q^\dagger\}}} \quad (3.38)$$

La clase máxima de potenciales que permiten que tengamos una superálgebra dada la forma (3.34) son los potenciales noes como puede verificarse de inmediato de (3.33b) y de las definiciones (3.28), (3.29) y (3.30). Es por demás notable que la existencia de una supersimetría para estos potenciales— no esté correlacionada en lo absoluto con su dependencia funcional con respecto a las coordenadas de configuración. Resulta depender exclusivamente del papel covariante de Lorentz que jueguen.

Podemos decir que la existencia de la superálgebra escondida (3.33) es la responsable de la estabilidad del mar de Dirac. Y a su vez la estabilidad del mar de Dirac es el origen de la posibilidad de una diagonalización por bloques exacta del hamiltoniano de Dirac.

## Capítulo 4

# Aplicaciones al sistema quarkonio

El tratamiento de cálculo que se ha aplicado tradicionalmente al sistema quarkonio ha sido del tipo perturbativo. Además, los fenómenos relativistas han sido considerados a través de incluir correcciones relativistas; cinéticas por una parte y potenciales por otra. En este último capítulo les presentaré dos resultados de una formulación *variacional*, basada en el formalismo de la transformación de Foldy-Wouthuysen cerrada.

### 4.1 consideraciones generales

En principio, la ecuación de Dirac describe la dinámica de una sola partícula<sup>1</sup>. Sin embargo, el sistema quarkonio es un sistema de más de una. No es la intención de este trabajo hacer un tratamiento desde la perspectiva de una mecánica cuántica, relativista, de muchos cuerpos, y consistente. Por el contrario, se usará la ecuación de Dirac reconociendo sus alcances y limitaciones.

Por ejemplo, la interpretación que se ostenta aquí es que el potencial es *efectivo*. Asimismo se supondrá que *la partícula* de la ecuación representa al sistema binario *reducido*. Por otra parte, los potenciales que ocupan posiciones covariantes *pares* deben ser tratados individualmente y aparte. En su caso, inclusive podrían ir acompañados de términos de corrección y de interacciones efectivas, debido a que no pertenecen a la clase de los potenciales desacoplables en forma cerrada *alla manera de* Foldy-Wouthuysen. Finalmente, en todo momento se debe tener presente que pueden surgir dificultades, propias de estar en un problema de *muchos cuerpos*, trabajado con una teoría de *una partícula*.

Sin embargo —y después de apuntar algunas limitantes— el presente tratamiento mejora al tradicional en varios aspectos, y ya varias veces mencionados con anterioridad. Por una parte la transformación es *cerrada*. Esto *permite* un tratamiento no perturbativo, y en este caso, *variacional*. Por otra parte, la posición covariante del potencial se trabaja ahora *nítidamente*. Además, otra ventaja es que de entrada se está usando la ecuación de Dirac, que es relativista, y la apropiada para describir un fermión de espín 1/2.

<sup>1</sup> Esto es, aparte de la paradoja de Klein. Y esta afirmación es más precisa conforme la ubicación sea inferior con respecto al umbral de creación de pares.

Estos elementos destierran de entrada *incertidumbres* —propias de todo método perturbativo— como las convergencias para las series de diagramas de Feynman, o para las correcciones relativistas. Adicionalmente, entendiendo el espín como un fenómeno relativista, es de esperar que términos de la forma  $L \cdot s$  y similares, tienen natural cabida en este formalismo y en un principio no necesitan ser puestos a mano.

## 4.2 potenciales lineales y el límite no relativista

Ahora estamos en una posición ventajosa para indagar la siguiente cuestión que ha surgido en relación con este tema [74]:

Si comparan el hamiltoniano 3.11 (para  $E = -r$ ) con su asociado 3.15, observarán en lo particular, que un potencial lineal en la ecuación de Dirac se tradujo en uno cuadrático en el límite no relativista. Diversos autores han trabajado ecuaciones de Dirac con potenciales lineales cuya aproximación no relativista incluye al oscilador armónico [75, 76, 77, 78, 79]. Esto es un subconjunto de una clase de problemas conocidos como osciladores equivalentes relativistas [80, 81].

Recientemente se ha puesto atención a un problema particular de potencial —de la clase mencionada arriba— y conocido como oscilador de Dirac [61]. Y se han estudiado sus propiedades covariantes, CPT [42], supersimetría y estabilidad del mar de Dirac [43], así como su espectro de energía y simetrías de grupos del hamiltoniano correspondientes [61, 82, 83]. El oscilador de Dirac se define por ( $\hbar = c = 1$ )

$$i\partial_t\psi = H_{OD}\psi = [\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} + i\beta\boldsymbol{\kappa}r) + \beta m] \psi. \quad (4.1)$$

donde  $\boldsymbol{\alpha}$  y  $\beta$  son las matrices de Dirac usuales [60]. El parámetro  $\boldsymbol{\kappa}$  se puede interpretar como la intensidad de un momento magnético anómalo [42]. Originalmente [61], el hamiltoniano fue introducido como la raíz cuadrada del oscilador armónico en el mismo sentido que la ecuación de Dirac es la raíz cuadrada de la ecuación de Klein-Gordon [60].

Para un tratamiento no relativista es más apropiado su hamiltoniano equivalente obtenido mediante la transformación de Foldy-Wouthuysen. El oscilador de Dirac corresponde a los potenciales que además de permitir esta transformación cerrada, también admite una eigensolución exacta. Esto es claro cuando se contrasta con los resultados de la sección 3.1.2. En este caso las eigenfunciones se expresan en términos de las eigenfunciones del oscilador armónico no relativista [42, 61].

El hamiltoniano de Foldy-Wouthuysen para este problema es

$$H_{FW-OD} = \beta\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2 + \boldsymbol{\kappa}^2 r^2 - \beta\boldsymbol{\kappa}(3 + 4\mathbf{L} \cdot \mathbf{s})}. \quad (4.2)$$

El confinamiento lineal introducido de esta manera correspondería a una teoría de bolsa, pero *tensorial*, en vez de escalar. Presento a ustedes las consecuencias de esta bolsa exótica en la siguiente sección.

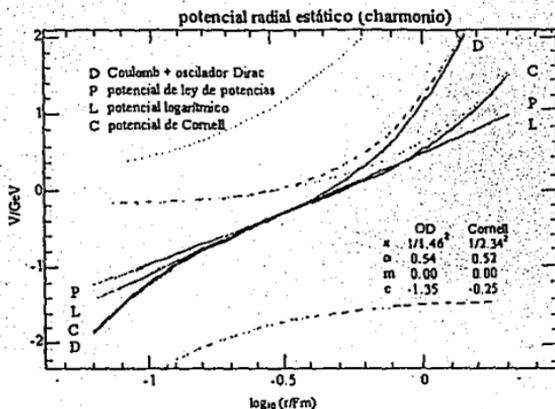


Figura 4.1: El potencial de oscilador de Dirac, comparado con los potenciales tradicionales en las regiones de interés. La curva punteada superior representa a la energía cinética relativista y la entrecortada inferior corresponde a la parte coulombiana de la interacción, cuando se usa el oscilador de Dirac como confinamiento. Las curvas, entrecortada y punteada, intermedias corresponden a sendos confinamientos lineales asintótico.

### 4.3 oscilador de Dirac como potencial confinante

El potencial de oscilador de Dirac puede ser probado como confinamiento en un modelo de bolsa. Las figuras 4.1 y 4.2 ilustra cómo se compara el potencial de oscilador de Dirac con los potenciales escalares tradicionales. La figura 4.1 está optimizada para la familia  $c\bar{c}$ , y la figura 4.2, para la familia  $b\bar{b}$ . La tabla 4.1 muestra algunos valores pertinentes del modelo y los compara con los parámetros apropiados del modelo de Cornell.

Por lo anteriormente expuesto, se dispone de una solución cerrada. Sin embargo, se debe tener cuidado, pues en el hamiltoniano 4.2 aparece un término intenso,  $L \cdot s$ , de acoplamiento espín-órbita, ocasionando una degeneración infinita del estado base<sup>2</sup>.

El oscilador de Dirac es interesante porque su formulación covariante presenta un potencial *lineal* con obvias consecuencias *confinantes*. A la vez, en su límite no relativista presenta una estructura cuadrática de tipo oscilador armónico —tan familiar en muchos campos—. Y el modelo específico, es el siguiente. Se restringe

<sup>2</sup>Términos de la forma  $\beta(\sigma \cdot L + 1)$  [60] han sido usados para romper la supersimetría asociada [80, 83] y obteniendo degeneración finita, pero en lo que sigue no se recurrirá a estos términos adicionales.

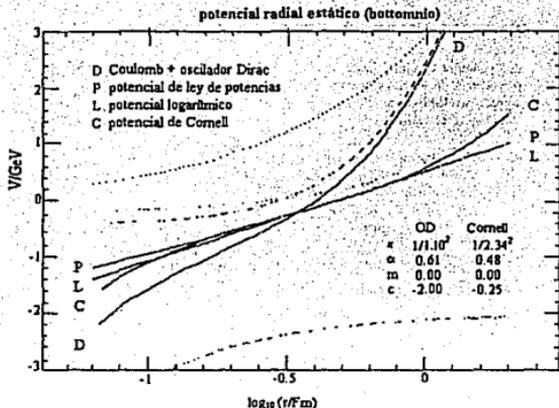


Figura 4.2: El potencial de oscilador de Dirac, comparado con los potenciales tradicionales en las regiones de interés. La curva punteada superior representa a la energía cinética relativista y la entrecortada inferior corresponde a la parte coulombiana de la interacción, cuando se usa el oscilador de Dirac como confinamiento. Las curvas, entrecortada y punteada, intermedias corresponden a sendos confinamientos lineales asintótico.

el estudio a sistemas tipo quarkonio, es decir  $q\bar{q}$ . Se reemplaza el confinamiento tradicional por el potencial del oscilador de Dirac.

El procedimiento para truncar la base infinita de funciones en los cálculos de la matriz de los operadores se realizó así. Primero se calculó la matriz equivalente diagonal. Luego se aplicaron las funciones a los eigenvalores correspondientes y finalmente se desdiagonalizó para regresar la matriz a la base original.

Otros autores han hecho cálculos semejantes [84]. Pero el presente enfoque difiere en que es relativista en cuanto que parte de la ecuación de Dirac, en vez de la de Schrödinger. Asimismo, el confinamiento alternativo que se pone a prueba aquí, es de tipo tensorial en vez del alternativo pseudoescalar.

La tabla 4.2 confronta los valores experimentales de la familia  $c\bar{c}$  con las predicciones, usando el potencial del oscilador de Dirac, así como el de Cornell. La tabla 4.3 corresponde a la familia  $b\bar{b}$ .

El espectro presenta mejoras importantes respecto de la aplicación llana [82] del potencial del oscilador de Dirac. En particular, el mejor ajuste refleja el orden correcto en el desdoblamiento de los estados tripletes  $^3P_J$ . Sin embargo, salta a la

Tabla 4.1: Valores optimizados de los parámetros para el potencial de oscilador de Dirac, y comparado con el modelo de Cornell.

	Cornell		Dirac osc.	
	$c\bar{c}$	$b\bar{b}$	$c\bar{c}$	$b\bar{b}$
$\alpha_S$	0.52	0.48	0.54	0.61
$a$	2.34			
$\kappa$			1.46	1.10

Tabla 4.2: Estados  $c\bar{c}$  de masas más bajas: valores experimentales, valores para modelo de bolsa de Cornell y valores para confinamiento por oscilador de Dirac. La masa del estado  $J/\psi$  (1S) se usó para ajustar el estado base. El resto del espectro se obtuvo optimizando  $\Delta m$  para el estado  $\psi'$  (2S).

	masas medidas *	potencial de Cornell		oscilador de Dirac	
		masa	$\Delta m$	masa	$\Delta m$
$J/\psi$	$3096.9 \pm 0.1$	3096.9	0.0	3096.9	0.0
$\chi_{c0}$	$3415.1 \pm 1.0$	3392.6	-22.5	2821.9	-593.2
$\chi_{c1}$	$3510.5 \pm 0.1$	3489.7	-20.9	3193.0	-317.6
$\chi_{c2}$	$3556.2 \pm 0.1$	3514.3	-42.0	3749.9	193.6
$\psi'$	$3686.0 \pm 0.1$	3679.0	-7.0	3689.7	3.7
$\eta_c$	$2979.8 \pm 2.1$	2963.6	-16.0	2973.9	-5.7
$\chi_{c1}$		3499.9		3469.7	
$(\chi_c)$	$3523.3 \pm 0.5$	3492.6	-32.8	3461.2	-64.2

\* Todos los valores de las masas están en  $\text{MeV}/c^2$ .

vista que los valores obtenidos mediante oscilador de Dirac están muy lejos de reflejar el experimento.

#### 4.4 confinamiento parcialmente pseudoescalar

Un potencial de carácter pseudoescalar pertenece a la clase de los potenciales desacoplables *alla maniera di Foldy-Wouthuysen*. Ya antes, otros autores [33, 35] han discutido este caso. Han mostrado que al añadir una interacción pseudoescalar es posible corregir discrepancias entre la teoría y el experimento [22].

Esta inclusión es consistente con los efectos de espín observados en dispersión elástica de altas energías protón-protón, a ángulos grandes.

La tabla 4.4 condensa los valores experimentales de los estados triplete  $^3P_J$ , sus diferencias consecutivas y el cociente de estas diferencias.

**Tabla 4.3:** Estados  $b\bar{b}$  de masas más bajas: valores experimentales, valores para modelo de bolsa de Cornell y valores para confinamiento por oscilador de Dirac. La masa del estado  $\Upsilon$  ( $1S$ ) se usó para ajustar el estado base. El resto del espectro se obtuvo optimizando  $\Delta m$  para el estado  $\Upsilon'$  ( $2S$ ).

	masas medidas *	potencial de Cornell		oscilador de Dirac	
		masa	$\Delta m$	masa	$\Delta m$
$\Upsilon$	$9460.4 \pm 0.2$	9460.4	0.0	9460.4	0.0
$\chi_{b0}$	$9859.8 \pm 1.3$	9852.2	-7.6	9533.1	-326.7
$\chi_{b1}$	$9891.9 \pm 0.7$	9888.3	-3.6	9752.1	-139.8
$\chi_{b2}$	$9913.2 \pm 0.6$	9906.1	-7.1	10100.0	186.8
$\Upsilon'$	$10023.3 \pm 0.3$	10006.5	-16.8	10023.5	0.2
$^1S$		9334.6		9127.2	
$^1P$		9895.9		9924.7	
$(\chi_b)$	$9900.2 \pm 0.7$	9894.2	-6.0	9921.0	20.8

\* Todos los valores de las masas están en  $\text{MeV}/c^2$ .

**Tabla 4.4:** Valores experimentales para las masas de los estados  $\chi$  para charmonio y bottomonio. Excepto la razón  $\mathcal{R}_\chi$ , todos los valores están en  $\text{MeV}$ .

		$c\bar{c}$	$b\bar{b}$	$b\bar{b}'$
$\chi_0$	$^3P_0$	3 415	9 860	10 232
$\chi_1$	$^3P_1$	3 511	9 892	10 255
$\chi_2$	$^3P_2$	3 556	9 913	10 269
	$\Delta_{21}$	$46 \pm 1$	$21 \pm 1$	$14 \pm 1$
	$\Delta_{10}$	$95 \pm 1$	$32 \pm 1$	$23 \pm 1$
	$\mathcal{R}_\chi$	$0.48 \pm 0.02$	$0.66 \pm 0.06$	$0.61 \pm 0.06$

Al confrontar estos datos con sus correspondientes predicciones teóricas se pone de manifiesto la alta sensibilidad a los datos de entrada, que tienen los datos dependientes de espín. El amplio espectro de resultados que aparece en la tabla 4.5 muestran esta sensibilidad.

Adicionalmente, la forma de cálculo puede ser puesta a prueba. El tratamiento perturbativo y el variacional, están confrontados en la tabla 4.6. En ella pueden ustedes observar que es inconsistente calcular los efectos dependientes de espín con un procedimiento perturbativo, para los elementos de matriz.

Los resultados *variacionales* implican que el potencial más simple de Cornell (Coulomb vectorial y confinamiento escalar) es insuficiente para explicar los datos

Tabla 4.5: Comparación entre valores experimentales para  $\mathcal{R}_x$  y sus predicciones teóricas.

Modelo	$\mathcal{R}_{x_e}$ [0.48 ± 0.02]	$\mathcal{R}_{x_s}$ [0.66 ± 0.06]	$\mathcal{R}'_{x_s}$ [0.61 ± 0.06]
Beavis [85]	0.97	0.96	1.0
Buchmüller [28]	0.61	0.76	0.75
McClary & Byers [86]	0.35	0.45	0.48
Moxhay & Rosner [87]	0.42	0.42	0.42
Olsson & Suchyta [88]	0.55	0.78	0.79
Gilman [30, 31]	0.54	0.72	0.73
Gupta [89]	0.50	0.64	0.67
Villarreal [36]	0.48	0.67	0.69

experimentales.

#### 4.5 otras aplicaciones

Estas aplicaciones no pretenden ser en ningún sentido exhaustivas. Por el contrario, los trabajos anteriores están dirigidos en una misma línea. Tienen directa conexión con un problema muy interesante y aún abierto hoy en día: las interacciones —fundamentales o efectivas— entre quarks.

Existen muchas propuestas a distintos niveles para entender las interacciones interhadrónicas. Y como hemos visto aquí, para el caso de quarkonios pesados el desacoplamiento exacto de Foldy-Wouthuysen se plantea como una útil opción para su estudio.

Concluyo mi exposición, mencionando que existen otros terrenos en los que este formalismo también puede ser, y ha sido, aplicado con éxito. En las interacciones nucleares, el campo involucrado es el campo piónico. Y a este campo se le asocia un carácter pseudoescalar. Aparte de factores de forma, es claro que es un lugar interesante para la aplicación de este formalismo. Y no sólo eso. Ya que el isoespín de los nucleones está asociado a una simetría interna  $SU(2)$ , esto puede involucrar dificultades adicionales, que en lo relativo a este desacoplamiento exacto no representa ningún problema extra. Otras aplicaciones han sido trabajadas en este sentido [90].

Aunque es obvio, vale la pena recalcar lo siguiente en este contexto. Dado que la diagonalización de Foldy-Wouthuysen es *cerrada*, asegura ser *unitaria*. Los métodos perturbativos, sin embargo, por lo general no aseguran mantener la unitariedad y se requiere de trabajo adicional para recuperar la unitariedad perdida en el desarrollo de los diagramas de Feynman.

Otros aspectos de interés práctico, incluyen el indagar potenciales con simetría esférica, así como problemas unidimensionales.

Tabla 4.6: Comparación entre valores experimentales de parámetros para la dependencia en espín y diversas predicciones teóricas, para el quarkonio pesado. Las leyendas significan: (TP) cálculo de efectos dependientes de espín mediante teoría perturbativa; (PV) cálculo variacional para el hamiltoniano completo con funciones de Slater o (ho) de oscilador de Dirac; (ps) funciones de Slater permitiendo un intercambio pseudoescalar; (R) cálculo semirelativista en la energía cinética.

Dato	Experimento	NR				R
		TP [30, 31]	PV(Slater) [36]	PV(ho)	PV(ps) [36]	PV [89, 36]
$\Delta_{21}^s$	$45 \pm 1$	$26 \pm 1$	$28 \pm 10$	$24 \pm 3$	$45 \pm 10$	46
$\Delta_{10}^s$	$95 \pm 1$	$50 \pm 1$	$119 \pm 10$	$112 \pm 3$	$95 \pm 10$	95
$\mathcal{R}_s^s$	$0.48 \pm 0.02$	0.53	0.23	0.21	0.47	0.48
$\Delta_{21}^v$	$20 \pm 1$	$18 \pm 1$	$19 \pm 3$	$18 \pm 3$	$20 \pm 3$	20
$\Delta_{10}^v$	$30 \pm 1$	$28 \pm 1$	$43 \pm 3$	$36 \pm 3$	$31 \pm 3$	31
$\mathcal{R}_v^v$	$0.67 \pm 0.06$	0.72	0.44	0.5	0.66	0.66

Asimismo, otras áreas pudieran interesarse en aplicaciones de este formalismo. En especial, aquéllas en las que los diagramas de Feynman son transferidos a ellas, para su descripción. Éste podría ser el caso de estado sólido, por mencionar alguno.

Ya que el formalismo tal como se presentó está inbuido en el panorama relativista, también se podría indagar las posibles analogías en el ámbito de la mecánica clásica, particularmente en una formulación hamiltoniana con números de Graßman.

## Capítulo 5

# Reflexiones

Esta última parte es un recuento del trabajo hecho, los resultados logrados, y las conclusiones y comentarios relacionados.

### 5.1 resultados y conclusiones

- El presente estudio está orientado a los estados ligados de potenciales estáticos en sistemas quark-antiquark, denominado sistema quarkonio, con énfasis especial en los quarkonios llamados pesados  $c\bar{c}$  y  $b\bar{b}$ .
- Hay para el quarkonio varios modelos propuestos con potenciales independientes de espín diferentes, pero todos coinciden en el rango de distancia de interés. Aquí se ha elegido seguir el modelo de Cornell.
- Usualmente se parte de formalismos perturbativos y no relativistas, para luego incluir correcciones cinéticos y potenciales. La incertidumbre de la ausencia de términos del mismo orden deseado normalmente está latente.
- Les he mostrado mediante argumentos generales que la estimación usual del *grado no relativista* del sistema  $c\bar{c}$  es al menos cuestionable.
- Aunque las predicciones para los estados (S)  $J/\Psi$  y  $\Upsilon$  están en concordancia con el experimento, no es el caso para los estados ( $^3P_J$ ) ( $\chi$ ). Este desacuerdo sugiere que el fenómeno dependiente de espín no está comprendido —al menos al mismo nivel— que el independiente.
- En el contexto de la QCD, también es posible en el caso no abeliano, expresar los potenciales dependientes de espín, en términos de la parte independiente.
- La parte del potencial independiente de espín es considerada la contribución de una parte escalar y otra vectorial.
- La parte escalar es de tipo lineal confinante y la parte vectorial, de tipo coulombiana. Existen intentos exitosos que relajan esta condición incluyendo una contribución pseudoescalar.
- El parámetro comúnmente usado en los estudios de los estados  $^3P_J$  es el cociente, de las diferencias de masas de estados sucesivos. Pero las masas absolutas permanecen inexplicadas.

- En vez de tratamientos no relativistas aquí se propone un tratamiento usando la ecuación de Dirac; teniendo dos ventajas importantes. Por ser una ecuación relativista ya contiene todas las correcciones relativistas de entrada, cinéticas y potenciales.
- Considerando al espín como una consecuencia relativista, este tratamiento también ya toma en consideración términos de interacciones mezclados con espín, como espín órbita.
- Además de usar una ecuación relativista, presento a ustedes la existencia de una transformación cerrada de Foldy-Wouthuysen. Este resultado añade al trabajo la posibilidad de un tratamiento variacional en vez del perturbativo usual.
- Presento a ustedes, en detalle, el desarrollo del formalismo de la transformación cerrada de Foldy-Wouthuysen y señalo las restricciones e hipótesis de trabajo para asegurar la existencia de la transformación cerrada.
- Construyo y presento explícitamente los hamiltonianos para los límites no relativista (Foldy-Wouthuysen) y ultrarrelativista (Cini-Touschek); destacando que uso el término *límite* y no *aproximación*, pues los resultados son *exactos*.
- Ya que el resultado es cerrado, el desacoplamiento de los espinosres grande y pequeño es válido también para potenciales intensos.
- Como el hamiltoniano transformado queda expresado en términos de hamiltonianos relacionados directamente con similares de Schrödinger, aumentan las expectativas de resolver el problema totalmente.
- A partir de trabajar explícitamente tres ejemplos con interpretación física transparente, establezco la generalización de la clase máxima de potenciales que permiten una transformación cerrada de Foldy-Wouthuysen. Entre los ejemplos están el caso magnético (contemplados, el caso magnetostático y el efecto Hall, entre otros) y el caso eléctrico anómalo (incluido por ejemplo, el oscilador de Dirac).
- Presento a ustedes una notación condensada, para describir a la clase completa de los potenciales de la transformación cerrada, pero que a la vez mantiene la individualidad de ellos; incluyo las tablas de conmutación y anticonmutación de esta notación.
- A partir de esta notación escribo las transformaciones Foldy-Wouthuysen y Cini-Touschek cerradas, mostrando cómo intervienen los diversos potenciales según su posición covariante.
- En dos tablas muestro a ustedes explícitamente cuáles potenciales son los que pueden estar presentes para poder lograr una transformación cerrada.
- Los potenciales que permiten una diagonalización por bloques exacta son: el pseudoescalar, la parte temporaloide del vector axial, la parte espacialoide del vector polar y las componentes temporal-espacialoide del tensorial.

- Muestro que este desacoplamiento por bloques también existe para potenciales con grados de libertad internos. Y se presenta explícita la transformación cerrada para este caso, que es el de grupos no abeliano.
- Discuto la interrelación de la existencia de esta transformación cerrada con el formalismo de la mecánica cuántica supersimétrica.
- Reexpreso el hamiltoniano original en operadores bosónico y de carga fermiónica, que corresponden a un hamiltoniano supersimétrico  $h^2$ , asociado al original,  $H$ , mediante  $h^2 = (H - \beta m)^2$ .
- Muestro claramente que el hamiltoniano supersimétrico asociado al problema es de Dirac de segundo orden y no de Klein-Gordon.
- Muestro a ustedes explícitamente la transformación cerrada en términos de los operadores de esta supersimetría.
- Ya que la existencia de la supersimetría implica estados de energía acotados inferiormente, esto equivale a que la transformación cerrada implica la estabilidad del mar de Dirac para la clase de potenciales de esta transformación.
- El punto anterior reafirma dos puntos ya antes expuestos: no importa la intensidad de los potenciales; y este formalismo es una alternativa variacional a los tratamientos perturbativos.
- Este formalismo está restringido por el hecho de que la ecuación de Dirac es, en principio, una descripción de una sola partícula.
- El potencial de oscilador de Dirac permite además de una diagonalización por bloques según el formalismo de la transformación cerrada, también una eigen-solución completa. Las eigenfunciones del oscilador armónico aparecen en la solución.
- Se aplica el formalismo de la transformación cerrada al caso del quarkonio con un confinamiento tipo oscilador de Dirac.
- En relación al potencial independiente de espín, se muestran los valores optimizados de los parámetros de este modelo alterno y se compara con el tradicional de Cornell.
- Se muestran los cálculos para las masas de los estados de masas más bajas de las familias  $c\bar{c}$  y  $b\bar{b}$ . Estos valores se comparan con el experimento y con las predicciones equivalentes del modelo de Cornell. Se encuentran importantes desacuerdos en el modelo con oscilador de Dirac.
- Se aplica este formalismo al caso del quarkonio al cual se le permite adicionalmente ahora una interacción pseudoescalar. Esto se hace con base en el antecedente discutido en el primer capítulo, relacionado con un quarkonio de potencial pseudoescalar. Y por supuesto porque este potencial es de los que permiten una transformación cerrada,

- Se muestran los cálculos para las masas de los estados de masas más bajas de las familias  $c\bar{c}$  y  $b\bar{b}$ . Éstos valores se comparan con el experimento y con las predicciones equivalentes del modelo de Cornell. Se muestra que el ajuste del parámetro  $(^3P_2 - ^3P_1)/(^3P_1 - ^3P_0)$  es excelente.
- Un resultado global de este trabajo es destacar la importancia de cálculos mediante un formalismo *relativista, expresamente covariante, cerrado y variacional*, para en forma nítida confirmar o descartar con un alto grado de confianza diversos modelos propuestos.

## 5.2 perspectivas

De la experiencia obtenida de este trabajo, se muestra interesante indagar varios casos inmediatos.

Uno de ellos es el caso nuclear. Es conocido que la interacción nucleón-nucleón está descrito por el intercambio de un pseudoescalar.

El resultado favorable respecto de modelos de bolsa pseudoescalares también indica el probar diversas combinaciones de potenciales interesantes.

Otras áreas de aplicación más lejanas son aquéllas en las que el formalismo de los diagramas de Feynman aparecen de forma natural, como el caso de estado sólido.

# Bibliografía

- [1] J. J. Aubert *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **33**, 1404 (1974).
- [2] J. E. Agustin *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **33**, 1406 (1974).
- [3] S. W. Herb *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 252 (1977).
- [4] W. R. Innes *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 1240, 1640(E) (1977).
- [5] Particle Data Group, *Phys. Rev. D* **54**, (1996).
- [6] Michael E. Peskin, "Aspects of the Dynamics of heavy quark systems", en *Proceedings of Summer Institute on Particle Physics, SLAC-PUB-3273* (1983), p 151.
- [7] Estia Eichten, "The sixth quark", *SLAC-281, CONF 8407112*, en *Proceedings of Summer Institute on Particle Physics*, editado por P. M. McDonough (1984) p 1.
- [8] A. D. Krisch, *Jour. de Physique* **46**, C2 511 (1985).
- [9] G. R. Court *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **57**, (5) 507 (1986).
- [10] K. A. Brown *et al.*, *Phys. Rev. D* **31**, (11) 3017 (1985).
- [11] P. R. Cameron *et al.*, *Phys. Rev. D* **32**, (11) 3070 (1985).
- [12] S. Brodsky y G. Farrar, *Phys. Rev. Lett.* **31**, 1153 (1973).
- [13] G. R. Farrar y D. R. Jackson, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 245 (1979).
- [14] A. V. Efremov y A. V. Radyushkin, *Phys. Lett.* **94 B**, 245 (1980).
- [15] A. Duncan y A. H. Müller, *Phys. Lett.* **90 B**, 159 (1980).
- [16] S. Brodsky y P. Lepage, *Phys. Rev. D* **24**, 1808 (1981).
- [17] G. Farrar, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 1643 (1986).
- [18] F. Abe *et al.*, "Observation of top quark production in  $p\bar{p}$  collisions", en *Fermilab-Pub-95-022-E CDF/PUB/TOP/PUBLIC/3040*.
- [19] S. Avachi *et al.*, "Observation of the top quark", en *HEP-EX-95 03003*.
- [20] Waikwonk Kwong, Jonathan L. Rosner y Chris Quiggs, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **37**, 325 (1987).
- [21] Jonathan L. Rosner, "Heavy flavor theory", en *Proceedings of Banaff summer school*, World Scientific, Singapore (1989).
- [22] Matías Moreno y Arturo Zentella, "Relativistic effects and spin dependence in quarkonium", en *Proceedings of the IV Mexican School of Particles and Fields*, editado por José Luis Lucio y Arnulfo Zepeda, World Scientific, (1992).
- [23] Dieter Z. Gromes, *Nucl. Phys. B* **131**, 80 (1977).
- [24] Estia Eichten y Frank L. Feinberg, *Phys. Rev. Lett.* **43**, (17) 1205 (1979).
- [25] Estia Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K. D. Lane y T. M. Yan, *Phys. Rev. D* **21**, (1) 203 (1980).
- [26] Estia Eichten y Frank L. Feinberg, *Phys. Rev. D* **23**, (11) 2724 (1981).

- [27] Estia Eichten, "Dynamics and spectroscopy at high energy", en *Proceedings of the XI SLAC Summer Institute on Particle Physics*, editado por P. M. McDonough, *SLAC report No.267*, Standford, Cal. (1983), p 497.
- [28] W. Buchmüller, *Phys. Lett. B* **112**, 479 (1982).
- [29] Dieter Z. Gromes, *Phys. C* **26**, 401 (1984).
- [30] Claudio O. Dib, Frederick J. Gilman y Paula J. Franzini, "Splitting of the P states in heavy quarkonium systems and the nature of the spin-dependent potential", preprint *SLAC-PUB-4402* (1987).
- [31] Frederick J. Gilman, *Proceedings of the III Mexican School of Particles and Fields*, editado por José Luis Lucio y Arnulfo Zepeda, World Scientific, (1988).
- [32] Lichtenberg, *Int. J. Theo Phys. A* **2** 1669 (1987).
- [33] C. Avilez, G. Cocho y M. Moreno, *Phys. Rev. D* **24**, 634 (1981).
- [34] Alan Gara, Berenice Durand y Loyal Durand, "Relativistic description of quark-antiquark bond states, II Spin-dependent treatment", preprint *MAD/TH/90-4* of University of Wisconsin, Madison (1990).
- [35] G. Cocho, R. Jáuregui, M. Moreno y C. Villarreal, *Nuovo Cim. A* **107**, (3) 341 (1994).
- [36] Carlos Villarreal Luján, tesis doctoral, Universidad Nacional Autónoma de México, (1988).
- [37] Dieter Gromes, "Ordinary hadrons", en *Proceedings of the Yukon Advanced Study Institute*, editado por N. Isgur, G. Karl y P. J. O'Donnell, World Scientific, Whitehorse, Yukon, Canada (1984).
- [38] Suraj N. Gupta, Stanley F. Radford y Wayne W. Repko, *Phys. Rev. D* **31**, (1) 160 (1985).
- [39] Alan Gara et al., *Phys. Rev. D* **40**, (3) 843 (1989).
- [40] H. Gross, *Phys. Lett. B* **68**, 343 (1977).
- [41] E. Eriksen, *Phys. Rev.* **111**, 1011 (1958).
- [42] M. Moreno y A. Zentella, *Jour. of Physics A: Math. Gen.* **22**, L821 (1989).
- [43] Matías Moreno, Rodolfo Martínez y Arturo Zentella, *Mod. Phys. Lett. A* **5**, (12) 949 (1990).
- [44] Rodolfo Martínez, Matías Moreno y Arturo Zentella, *Rev. Mex. Fís.* **36** (S1), 176 (1990).
- [45] Rodolfo Martínez, Matías Moreno y Arturo Zentella, *Phys. Rev. D* **43**, (6) 2036 (1991).
- [46] James D. Bjorken y S. Drell, "Relativistic Quantum Mechanics", Mc Graw-Hill, New York (1964).
- [47] S. S. Schweber, "An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory", Harper and Row, New York (1964).
- [48] Eugen Merzbacher, "Quantum Mechanics", John Wiley & Sons, Inc. (1970).
- [49] Leslie L. Foldy y Sigfried A. Wouthuysen, *Phys. Rev.* **78**, 29 (1950).
- [50] M. Cini y T. Touschek, *Nuovo Cimento* **7**, 422 (1958).
- [51] M. M. Nieto, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 1042 (1977).

- [52] T. Goldman, *Phys. Rev. D* **15**, 1063 (1977).
- [53] J. Kupersztynch, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 483 (1979).
- [54] L. Holster, *J. Math. Phys.* **30**, 1621 (1989).
- [55] Richard J. Hughes, V. Alan Kostelecký y Michael Martin Nieto, *Phys. Lett. B* **171**, (2,3) 226 (1986).
- [56] Richard J. Hughes, V. Alan Kostelecký y Michael Martin Nieto, *Phys. Rev. D* **34**, (4) 1100 (1986).
- [57] V. Alan Kostelecký, Michael Martin Nieto y D. R. Truax, *Phys. Rev. A* **38**, 4413 (1988).
- [58] K. M. Case, *Phys. Rev.* **95** 1323 (1954).
- [59] K. M. Case, *Phys. Rev.* **100** 1513 (1955).
- [60] P.A.M. Dirac, "The Principles of Quantum Mechanics", Cuarta Edición, Oxford University Press (1981).
- [61] M. Moshinsky y A. Szczepaniak, *Jour. of Physics A: Math. Gen.* **22**, L817 (1989).
- [62] J. Wess y B. Zumino, *Nucl. Phys. B* **70**, 39 (1974).
- [63] H. Nicolai, *J. Phys. A* **9**, (9) (1976).
- [64] Edward Witten, *Nucl. Phys., B* **188**, 513 (1981).
- [65] Edward Witten, *Nucl. Phys., B* **202**, 253 (1982).
- [66] C.A. Blockley y G. E. Stedman, *Eur. J. Phys.* **6**, 218 (1985).
- [67] G. E. Stedman, *Eur. J. Phys.* **6**, 225 (1985).
- [68] C.V. Sukumar, *J. Phys. A* **18**, 2917 (1985).
- [69] R. Dutt, A. Khare y U. P. Sukhatme, *Am. J. Phys.* **56**, (2) 163 (1988).
- [70] Luis Fernando Urrutia y Eduardo Hernández, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 755 (1983).
- [71] M. de Crombrugge y V. R. Henberg, *Ann. Phys. (NY)* **151**, 99 (1983).
- [72] V. Alan Kostelecký, Michael Martin Nieto y D. R. Truax, *Phys. Rev. D* **32**, (10) 2627 (1985).
- [73] Georg Junker, "Recent developments in supersymmetric quantum mechanics", Conferencia en "Frontiers in theoretical physics", International Center for Physics & applied mathematics, Edirne, Turquía, 15-21 de diciembre de 1993.
- [74] M. Moreno y A. Zentella, "Oscillator as a confining potential", CONF-90/189-T, Fermi National Laboratory (1990) y en *Proceedings of the IV Mexican School of Particles and Fields*, editado por José Luis Lucio y Arnulfo Zepeda, World Scientific, (1991).
- [75] D. Itô, K. Mori y E. Carriere, *Nuovo Cim.* **51**, 1119 (1967).
- [76] N. V. V. J. Swamy, *Phys. Rev.* **180**, 1225 (1969).
- [77] P. A. Cook, *Lett. Nuovo Cim.* **1**, (10) 419 (1971).
- [78] Y. M. Cho, *Nuovo Cim. A* **23**, 550 (1974).
- [79] J. N. Ginocchio, "Dynamical Supersymmetric Dirac Hamiltonian", in *Symmetries in Sciences II*, editado por B. Gruber y R. Lenczewski, Plenum (1986).
- [80] Alfons Stahlhofen, "A comment on Dirac oscillators", Inst. f. Theo. u. Angew. Physik, Universität Stuttgart, Fed. Rep. Germany (1990).

- [81] Alfons Stahlhofen, "Erweiterung und neue Anwendungen der Infeld'schen Faktorisierung", Ph.D. thesis (1986).
- [82] Marcos Moshinsky y A. Szczepaniak, "The Dirac oscillator and its contribution to the baryon mass formula", *Proceedings of the Rio de Janeiro International Workshop on Relativistic Aspects of Nuclear Physics*, (1990).
- [83] O. Castaños, A. Frank, R. López y L. F. Urrutia, *Phys. Rev. D* **43**, 544 (1991).
- [84] Carlos Villarreal et al., "Non perturbative effects in quarkonium", *IFUNAM-report*, Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México, (1989).
- [85] D. Beavis et al., *Phys. Rev. D* **20**, 2345 (1981).
- [86] R. McClary y N. Byers, *Phys. Rev. D* **28**, 1632 (1983).
- [87] P. Moxhay y J. L. Rosner, *Phys. Rev. D* **28**, 1132 (1983).
- [88] M. G. Olsson y C. J. Suchyta, *Phys. Rev. D* **35**, 1738 (1987).
- [89] R. Gupta et al., *Phys. Rev. D* **34**, 201 (1986).
- [90] M. Moreno y A. Zentella, "Confinamiento por un potencial pseudo-escalar", presentado en IX Reunión Anual de la División de Partículas y Campos de la Sociedad Mexicana de Física, UNAM, México (1995);  
M. Moreno y A. Zentella, "La Ecuación de Dirac para una corriente pseudo-escalar", presentado en XXXVIII Congreso Nacional de Física, Zacatecas, México (1995);  
M. Moreno y A. Zentella, "Bound-states in  $\gamma^5$  potentials," presentado en V Taller de Partículas y Campos, y V Taller de Partículas Latinoamericano de Fenomenología de las Interacciones Fundamentales, Puebla (1995).

## Epílogo

Para concluir, deseo señalar que el desarrollo de esta tesis ha tenido una larga historia. Y sea sólo por ello, mucha gente ha resultado involucrada, y de maneras muy variadas. De cada uno de ustedes —desde la academia hasta mis familias—, y en muy diversas categorías, he recibido su estimulante apoyo para la realización de esta tesis. En especial, Matías, es agradable gozar de tu amistad —así como de tu enorme paciencia.

Comparto con todos ustedes lo que un examen de doctorado pueda tener de divertido.

*examinador: Usted se encuentra en medio del desierto. Ve un quelonio ...*

*replicante: ... ¿un quelonio? ...*

*examinador: Hmm ...*

*¿Alguna vez ha visto a una tortuga?*

*replicante: ... sssi ...*

*examinador: ... pues lo mismo. ¿Continuamos?*

*replicante: ... Si.*

*examinador: La tortuga está volteada boca arriba. El sol está muy intenso. Usted sabe que la tortuga morirá si no la voltea, pero usted ¡no la voltea!, ¿por qué será, Leo?*

*replicante: ¿Qué? Yo no conozco la tortuga. No estoy en el desierto. ¿Porqué me culpa? ...*

*examinador: Relájese ...*

*Esto es sólo un examen. Está diseñado para generar una respuesta emocional ...*

*Oiga ... ¿y la dirección que puso en su solicitud es la de su domicilio actual?*

*replicante: ¿Es esto también parte del examen?*

*"Blade Runner"*  
*Ridley Scott*