00365

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

DEFORMACIONES DE ALGEBRAS Y LA CUANTIZACION DE $S\ell_2$

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

MAESTRIA EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

P R E S E N T A :

CESAR BAUTISTA RAMOS

DIRECTOR DE TESIS:
DR. RAYMUNDO BAUTISTA RAMOS

MEXICO, D.F. 1996

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

3
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Deformaciones de Álgebras y la Cuantización de sl_2

Tesis

que para obtener el grado académico de

Maestría en Ciencias (Matemáticas)

presenta

César Bautista Ramos[1]

Director de tesis: Dr. Raymundo Bautista Ramos

[1] bautista@fcfm.buap.mx, bautista@solarium.cs.buap.mx

Patrocinios

El presente trabajo fué apoyado en parte por becas de:

- Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología
- Dirección General de Asuntos del Personal Académico de la UNAM

Introducción

El objetivo del presente trabajo es construir lo que se conoce como la *cuantización* del álgebra de Lie sl_2 según la definición de Drinfeld-Jimbo, [14], [2], siguiendo el punto de vista de *deformación* de Gerstenhaber-Schack, [5], [7].

Lo que se conoce como *cuantizar* (o a veces *grupo cuántico*) cae dentro del concepto más amplio que es *deformar*. La idea de lo que se entiende por una *deformación* se trata de explicar en el capítulo 1.

La cuantización de sl_2 trata con deformaciones asociativas. Generalidades de tales de deformaciones asociativas se desarrollan en el capítulo 2.

En el capítulo 3 se demuestran las propiedades duales para coálgebras de los resultados del capítulo 2, [6], en vista de que una cuantización de sl_2 es tanto una álgebra como una coálgebra (aún más, es una álgebra de Hopf).

Siguiendo ésta idea de dualizar los resultados de las deformaciones de álgebras asociativas para coálgebras uno se enfrenta a la noción dual del ejemplo clásico de Gerstenhaber-Schack de álgebras rígidas, las álgebras separables, [5], para obtener como ejemplo de coálgebras rígidas *las coálgebras separables*, [6]. Tales ideas se desarrollan en el capítulo 4.

En la literatura las cuantizaciones se presentan en términos de generadores y relaciones. En el presente trabajo tratamos de presentar las estructuras como series de potencias formales.

Al menos para el caso de sl_2 lo que permite establecer una conección entre ambas presentaciones es el teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt no aplicado directamente a sl_2 sino a una deformación de ésta, a una q-álgebra de Lie obtenida de deformar el corchete de sl_2 . Y así resulta que lo que se conoce como la cuantización de sl_2 se puede obtener como la envolvente universal de ésta q-álgebra de Lie. De hecho puede decirse que el problema de cuantizar a sl_2 es tratar de darle una estructura de álgebra de Hopf a ésta q-álgebra envolvente universal (esencialmente el problema es encontrar una comultiplicación), como se hace en el caso clásico para las envolventes universales de álgebras de Lie. Todo ésto se trata de explicar en el capítulo 5.

Lo que aquí llamamos q-álgebras de Lie es una versión de lo que en fechas recientes ha aparecido en la literatura como *álgebras de Lie cuánticas (quantum Lie algebras)*, [1], [16], [3]. El establecer axiomas adecuados para tales álgebras es todavía objeto de estudio.

Tanto el primer como el segundo capítulo se basan en la primera parte de [5], mientras que el tercero está formado por resultados que aparecen en [6]. El quinto capítulo es en parte desarrollo de [14]. Tanto el capítulo cuarto como la definición de q-álgebra de Lie y la demostración del teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt para éstas son desarrollos propios del autor de la presente tesis.

Verano-Otoño 1996

Contenido

Capítulo 1

Deformaciones

Trataremos de explicar el concepto general de deformación siguiendo el punto de vista de Gerstenhaber-Shack [5]. De lo que se trata es, dada una estructura algebraica "inicial" vista como diagramas conmutando, una deformación de ésta no es más que series de potencias en un parámetro t tales que hacen conmutar diagramas del mismo tipo que el dado inicialmente, y que además valuando en $t = 0$ se obtiene justamente la estructura inicial.

El objeto principal de estudio son las k-álgebras, donde k es un anillo conmutativo unitario, sin que éstas k-álgebras sean necesariamente asociativas:

Definición 1 *A es una k-álgebra si A es un k-módulo y si además existe una función $\alpha : A \times A \to A$ k-bilineal.*

Tomemos A una álgebra de tales y comencemos a deformarla:

$$
\begin{aligned}
A_t &= \{\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \,|\, a_i \in A \,\forall i\} \\
k_t &= \{\sum_{j=0}^{\infty} r_j t^j \,|\, r_j \in k \,\forall j\}
\end{aligned}
$$

conjuntos de sumas formales con parámetro t. Resulta que A_t es un k_t-módulo extendiendo de manera natural el producto modular original:

$$k_t \times A_t \to A_t, \; (\Sigma r_j t^j, \, \Sigma a_i t^i) \mapsto \Sigma_{n=0}^{\infty} \Sigma_{j+i=n} r_j a_i t^n$$

Similarmente podemos extender el producto α de A :

$$\alpha_0 : A_t \times A_t \to A_t, \; (\Sigma a_j t^j, \, \Sigma b_i t^i) \mapsto \Sigma_{n=0}^{\infty} \Sigma_{j+i=n} \alpha(a_j, b_i) t^n$$

resultando en una k_t-álgebra.

Hay que observar que A_t es completo en la topología I-ádica con $I = \langle t \rangle$ el ideal de k_t generado por t. Por lo que A_t no es isomorfo a $k_t \otimes_k A$ porque éste último no es general completo.

Definición 2 *La k_t-álgebra (A_t, α_0) se llama deformación trivial de A*

De manera más precisa, cualquier función k-bilineal $\beta : A \times A \to A$ se extiende de manera única a una función k_t-bilineal $\beta : A_t \times A_t \to A_t$.

Pongamos ahora condiciones sobre A :

1. que A pertenezca a una categoría de álgebras $\mathcal{A}$ cuyos objetos satisfacen ciertas ecuaciones polinomiales universales ;
2. que $\forall B \in \text{obj } \mathcal{A}$ su deformación trivial $B_t \in \text{obj } \mathcal{A}$.

Como ejemplos clásicos de 1 aparecen las álgebras asociativas definidas por $(xy)z = x(yz)$; las álgebras conmutativas definidas por $(xy)z = x(yz), xy = yx$; las álgebras de Lie, definidas por $[x, x] = 0$ (propiedad alternante), $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ (identidad de Jacobi) ; y de los no tan clásicos : las álgebras de índice de nilpotencia n fijo definidas por $x_1 \ldots x_n = 0$, etc.

Mientras que para los ejemplos clásicos dados, 2 se obtiene inmediatamente (véase abajo la propiedad para el caso Lie), no es el caso general. Que en A se satifagan ciertas relaciones no significa que se cumplan las mismas relaciones en una deformación, ejemplo si A es el campo de los enteros módulo el primo p, en A se satisface la ecuación $x^{p-1} - 1 = 0$ pero en A_t no, pues $t \in A_t$, $t^{p-1} \neq 1$.

Propiedad 1 *Si A es una k-álgebra de Lie entonces, con la deformación trivial A_t es una k_t-álgebra de Lie.*

dem.-Veamos primero la propiedad alternante:

$$\alpha_0(\Sigma_i a_i t_i, \Sigma_i a_i t_i) = \Sigma_n \Sigma_{i+j=n} [a_i, a_j] t^n$$

así que los coeficientes para t^n son:

$n = 0 :\ [a_0, a_0] = 0$

$n = 1 :\ [a_1, a_0] + [a_0, a_1] = 0$

$$n = 2 :\ \underbrace{[a_2, a_0] + \overbrace{[a_1, a_1]}^{0} + [a_0, a_2]}_{0} = 0$$

$$n = 3 :\ \underbrace{[a_3, a_0] + \overbrace{[a_2, a_1] + [a_1, a_2]}^{0} + [a_0, a_3]}_{0} = 0, \ldots,$$

etcétera. Por lo que $\alpha_0(\Sigma_i a_i t_i, \Sigma_i a_i t_i) = 0$.

Ahora la identidad de Jacobi:

$$\begin{aligned}\alpha_0(\Sigma a_i t_i, \alpha_0(\Sigma b_j t_j, \Sigma c_l t_l)) \quad &+ \ \alpha_0(\Sigma b_j t_j, \alpha_0(\Sigma c_l t_l, \Sigma a_i t_i)) + \\ &\alpha_0(\Sigma c_l t_l, \alpha_0(\Sigma a_i t_i, \Sigma b_j t_j)) \qquad = \end{aligned}$$

$$\Sigma_n \Sigma_{i+j+l=n} \underbrace{([a_i,[b_j,c_l]] \ + \ [b_j,[c_l,a_i]] \ + \ [c_l,[a_i,b_j]])}_{0} t^n = 0$$

De manera similar se obtiene:

Propiedad 2 *i)Si A es una k-álgebra asociativa entonces, con la deformación trivial, A_t es una k_t-álgebra asociativa.*

ii)Si A es una k-álgebra conmutativa entonces, con la deformación trivial, A_t es una k_t-álgebra conmutativa.

El nombre *deformación trivial* es porque en ocasiones es posible deformar el producto del álgebra de manera más complicada

Definición 3 *Sean $\tilde{\beta}_i : A \times A \to A$, i=0,1,2..., funciones bilineales y $\beta_i : A_t \times A_t \to A_t$ las correspondientes funciones bilineales extendidas. Entonces la suma infinita $\beta_t = \beta_0 + t\beta_1 + t^2\beta_2 + \ldots$ denota a la función $A_t \times A_t \to A_t$, $(\Sigma a_i t_i, \Sigma b_j t_j) \mapsto \Sigma_{n=0}^{\infty} \Sigma_{i+j+l=n} \beta_i(a_j, b_l) t^n$*

β_t es k_t-bilineal. Recíprocamente cualquier función $\sigma : A_t \times A_t \to A_t$ k_t-bilineal tiene la forma $\sigma = \sigma_0 + t\sigma_1 + t^2\sigma_2 + \ldots$, para ciertas bilineales sobre A $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$, extendidas a A_t . Porque para a, b en A la igualdad

$$\sigma(a,b) = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i(a,b) t^i$$

define las funciones $\sigma_i : A \times A \to A$, k-bilineales, $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Cuando es posible encontrar una función α_t k_t-bilineal, donde α_0 corresponde a la extensión a A_t del producto original α de A y α_t satisface las mismas ecuaciones universales que las álgebras de una categoría $\mathcal{A}$ conteniendo a A, α_t se llama *deformación* de A en $\mathcal{A}$.

Definición 4 *Sea $\mathcal{A}$ una categoría que satisface los puntos 1 y 2 de antes y la pareja $(A,\alpha) \in obj\ \mathcal{A}$. Entonces una deformación formal de (A,α) en $\mathcal{A}$ es una pareja $(A_t, \alpha_t) \in obj\ \mathcal{A}$ donde;*

$$\alpha_t = \alpha_0 + t\alpha_1 + t^2\alpha_2 + \ldots$$

es k_t-bilineal y cada $\alpha_i : A \times A \to A$ es bilineal extendida .

Así una deformación trivial corresponde a tomar $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \ldots$, lo que nos da los primeros ejemplos de deformaciones:

Ejem. 1 A una k-álgebra de los casos clásicos (asociativa, conmutativa o Lie). Sea α su producto. Según las propiedades 1 y 2;

$$\alpha_t = \alpha_0 + t0 + t^2 0 + \ldots$$

es una deformación de A .

Para dar más ejemplos de deformaciones hagamos lo siguiente. De manera similar a las funciones bilineales, extendemos funciones k-lineales $f : A \to A$ a funciones $f : A_t \to A_t$, k_t-lineales (tal extensión es única) y se define la suma infinita

$$f_t = f_0 + tf_1 + t^2 f_2 + \ldots : A_t \to A_t$$

donde cada f_i es función lineal extendida a A_t . Tal f_t resulta k_t-lineal. Y recíprocamente: si $g : A_t \to A_t$ es función k_t-lineal entonces

$$g = g_0 + tg_1 + t^2 g_2 + \ldots$$

para ciertas g_i funciones lineales sobre A extendidas a A_t, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Porque para $a \in A$ la ecuación

$$g(a) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i(a) t^i$$

define las funciones $g_i : A \to A$ $i = 0, 1, 2, \ldots$ k-lineales.

Definición 5 *Un morfismo entre α_t y β_t deformaciones de A es una función $f_t : A_t \to A_t$ k_t-lineal tal que*

$$f_t = Id_{A_t} + tf_1 + t^2 f_2 + \ldots$$

y además

$$f_t(\alpha_t(a, b)) = \beta_t(f_t(a), f_t(b)) \ \ \forall a, b \in A_t$$

donde cada f_i es función lineal sobre A extendida a A_t .

Es decir, un morfismo entre deformaciones es una función k_t-lineal que respeta tanto la estructura original α en $t = 0$ (obsérvese que la extensión de la función identidad sobre A es la función identidad sobre A_t) así como el producto α_t.

Si pensamos a una deformación más que como una pareja (A_t, α_t) como la sola estructura α_t obtenemos, para la álgebra A fija, una categoría, cuyos objetos son las deformaciones α_t y cuyos morfismos son los morfismos entre deformaciones. Este es un ejemplo de una categoría donde los morfismos son isomorfismos:

Propiedad 3 *Si $g_t = Id_{A_t} + tg_1 + t^2g_2 + \ldots : A_t \to A_t$ donde cada g_i es una función lineal extendida. Entonces g_t es biyectiva y su inversa tiene la forma*

$$g_t^{-1} = Id_{A_t} + th_1 + t^2h_2 + \ldots$$

donde cada h_i es una función lineal sobre A extendida.

Dem.- g_t es inyectiva: si $g_t(\Sigma a_it^i) = 0$, entonces $\Sigma_{i+j=n}g_i(a_j) = 0$ para todo n entero no negativo.

$$\begin{array}{lcl} n=0 & : & 0 = g_0(a_0) = a_0 \\ n=1 & : & 0 = \underbrace{g_1(a_0)}_{0} + \underbrace{g_0(a_1)}_{a_1}, \text{ i.e., } a_1 = 0 \\ \vdots & & \vdots \\ n+1 & : & 0 = \sum_{i+j=n+1} g_i(a_j) = \underbrace{g_0(a_{n+1})}_{a_{n+1}} + \underbrace{\overbrace{g_1(a_n)}^{0} + \ldots + \overbrace{g_{n+1}(a_0)}^{0}}_{0} \end{array}$$

pues $a_0 = \ldots a_n = 0$. Así que $a_{n+1} = 0$.

g_t es sobreyectiva: si $\Sigma\, b_it^i \in A_t$ construiremos una suma $\Sigma\, a_it^i$ preimagen. Se debe satisfacer

$$g_t(\Sigma a_it^i) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} g_i(a_j)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_nt^n \qquad (1.1)$$

donde $g_0 = Id_A$. Sea $a_0 = b_0$. a_1 debe de cumplir según (1.1)

$$\underbrace{g_0(a_1)}_{a_1} + g_1(a_0) = b_1$$

i.e., $a_1 = b_1 - g_1(a_0)$. A su vez a_2 debe de cumplir

$$\underbrace{g_0(a_2)}_{a_2} + g_1(a_1) + g_2(a_0) = b_2$$

Inductivamente, si ya encontramos $a_0, a_1, \ldots, a_n$. a_{n+1} debe de cumplir

$$\underbrace{g_0(a_{n+1})}_{a_{n+1}} + g_n(a_1) + \ldots + g_{n+1}(a_0) = b_{n+1}$$

de donde $a_{n+1} = -g_1(a_n) - \ldots - g_{n+1}(a_0) + b_{n+1}$

Luego existe g_t^{-1} k_t-bilineal, así que $g_t^{-1} = h_0 + th_1 + t^2h_2 + \ldots$, donde cada h_i es lineal extendida. Por demostrar que $h_0 = Id_{A_t}$. Sea $a \in A$:

$$g_t^{-1}(a) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i(a)t^i$$

$$a = g_t(g_t^{-1}(a)) = \sum_n \sum_{i+j=n} g_j(h_i(a))t^n$$

de donde $a = g_0h_0(a) = h_0(a)$. Así que $h_0|_A = Id_A$, de donde $h_0 = Id_{A_t}$.

Desde luego, si $f_t = Id_{A_t} + tf_1 + t^2f_2 + \dots$ es sólo un k_t-endomorfismo lineal de A_t, en principio no tiene porque respetar deformaciones. Sin embargo si α_t es una deformación entonces tal f_t define por convolución una nueva deformación isomorfa:

Definición 6 *Para α_t deformación de α se define;*

$$\alpha_t * f_t : A_t \times A_t \to A_t\ , \quad (a,b) \mapsto f_t^{-1}\alpha_t(f_ta, f_tb) \quad .$$

El siguiente ejemplo nos será útil después:

Ejem. 2 Sean, k el campo de los números complejos y $A = k[x,y,z]$ con x,y,z indeterminadas. Sea α el producto usual en A. Deformaremos éste producto no trivialmente.

Pongamos $e^{tz} = \sum_{i=0}^{\infty}(tz)^i/i!$, $senh(tz) = \frac{1}{2}(e^{tz} - e^{-tz})$. Tanto e^{tz} como $senh(tz)$ son elementos de A_t. Escribamos ahora de manera simbólica los coeficientes de $senh(tz)/t$;

$$\frac{senh(tz)}{t} = \sum_{i=0}^{\infty} c_it^i \ .$$

(obsérvese que $c_0 = z$). Definimos:

$$f_i : A \to A\ , \quad f_i(x^uy^vz^w) = \begin{cases} c_i & \text{si } u = v = 1, w = 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad .$$

k-lineales para $i = 1, 2, \dots$. Cada f_i se extiende a una k_t-lineal sobre A_t. Sea

$$f_t = Id_{A_t} + tf_1 + t^2f_2 + \dots$$

y $\alpha_t = \alpha * f_t^{-1}$. Entonces (A_t, α_t) es una deformación del algebra asociativa (A, α) (de hecho isomorfa a la deformación trivial), con la propiedad de que, como $f_t(x) = x$ y $f_t(y) = y$:

$$\begin{aligned}
\alpha_t(x,y) &= f_t\alpha(f_t^{-1}x, f_t^{-1}y) \\
&= f_t(xy) \\
&= xy + f_1(xy)t + f_2(xy)t^2 + \dots \\
&= xy + c_1t + c_2t^2 + \dots \\
&= xy - z + senh(tz)/t
\end{aligned}$$

i.e., el producto xy se deforma en $xy - z + senh(tz)/t$.

Daremos ahora un nuevo ejemplo basados en el anterior pero ahora con la condición de que las variables x, y, z no conmuten. Este ejemplo es parte de lo que después se definirá como la *cuantización* de $sl_2(k)$ el álgebra de Lie formada por las matrices complejas 2×2 con traza cero. Antes necesitamos de:

Observación.- Si k es un anillo conmutativo unitario, una serie formal $\sum_{i=0}^{\infty} r_i t^i$ en k_t es invertible en k_t si y solo si r_0 es invertible en k.

Ejem. 3 Sea k el campo de los números complejos y A una k-álgebra asociativa con base el conjunto de símbolos

$$X^u Y^v H^w, \quad u, v, w \quad \text{enteros no negativos}$$

y producto α denotado por yuxtaposición sujeto a las siguientes relaciones: $[H, X] = 2X$, $[H, Y] = -2Y$, $[X, Y] = H$, donde $[a, b] = ab - ba$. (Tal es el caso del álgebra envolvente universal del álgebra de Lie $sl_2(k)$, según el teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt). Como en el ejemplo anterior se definen e^{tH}, $senh(tH)$, e^t y $senh(t)$. Consideremos la siguiente serie de Laurent con coeficientes en A: $senh(tH)/sinh(t)$. Más que una serie de Laurent es una serie en A_t, pues $senh(tH)/t \in A_t$, y por la observación anterior $(senh(t)/t)^{-1} \in k_t$. Luego como

$$\frac{senh(tH)}{senh(t)} = (\frac{senh(t)}{t})^{-1} \frac{senh(tH)}{t}$$

$senh(th)/senh(t) \in A_t$. Ahora escribamos simbólicamente sus coeficientes:

$$\frac{senh(tH)}{senh(t)} = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i$$

$(c_0 = H)$ y definimos

$$f_i : A \to A \,, \quad f_i(X^u Y^v H^w) = \begin{cases} c_i & \text{si } u = v = 1, w = 0 \text{ ó } u = v = 0, w = 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

para $i = 1, 2, \ldots$. Sean, como antes, $f_t = Id_{A_t} + tf_1 + t^2 f_2 + \ldots$ y $\alpha_t = \alpha * f_t^{-1}$ la cual es deformación isomorfa a la deformación trivial de α y tiene la propiedad siguiente:

$$\begin{aligned}
\alpha_t(X,Y) &= f_t\alpha(f_t^{-1}X, f_t^{-1}Y) \\
&= f_t(XY) \\
&= XY + f_1(XY)t + f_2(XY)t^2 + \dots \\
&= XY + c_1t + c_2t^2 + \dots \\
&= XY - H + senh(tH)/senh(t) \\
&= YX + senh(tH)/senh(t) \ ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_t(Y,X) &= f_t\alpha(Y,X) \\
&= f_t(YX) \\
&= f_t(XY) - f_t(H) \\
&= (YX + senh(tH)/senh(t)) - senh(tH)/senh(t) \\
&= YX
\end{aligned}$$

así que si denotamos con $[X,Y]_t$ a $\alpha_t(X,Y) - \alpha_t(Y,X)$ se tiene

$$[X,Y]_t = \frac{senh(tH)}{senh(t)} \tag{1.2}$$

i.e., el corchete $[X,Y]$ se deforma en $senh(tH)/senh(t)$.

Modificaremos la condición 1 impuesta sobre la categoría $\mathcal{A}$ basados en las siguientes observaciones.

Que el producto del álgebra A original α sea asociativo es equivalente a que $\alpha : A \otimes_k A \to A$ sea lineal y que el diagrama siguiente sea conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
(A \otimes A) \otimes A & \overset{\alpha \otimes Id_A}{\to} & A \otimes A & & \\
& & & \searrow^{\alpha} & \\
\updownarrow & & & & A \\
& & & \nearrow_{\alpha} & \\
A \otimes (A \otimes A) & \overset{Id_A \otimes \alpha}{\to} & A \otimes A & &
\end{array} \tag{1.3}$$

donde todos los productos tensoriales son sobre k y $(A \otimes A) \otimes A \leftrightarrow A \otimes (A \otimes A)$ es el isomorfismo natural. Similarmente se pueden poner las condiciones de álgebra de Lie, conmutativa, asociativa con unidad, etc., en términos de diagramas.

Por lo que en lugar de pedir que la categoría $\mathcal{A}$ satisfaga ciertas ecuaciones polinomiales universales pediremos:

1'. que los objetos de $\mathcal{A}$ hagan conmutar ciertos diagramas universales.

Sea la proyección:

$$p : A_t \to A, \ \ \Sigma_{i=0}^{\infty} a_i t^i \mapsto a_0$$

y pongamos $\Sigma_{i=0}^{\infty} a_i t^i \,|_{t=0} = p(\Sigma_{i=0}^{\infty} a_i t^i)$. Escribiremos enseguida de manera informal el concepto de deformación:

Definición 7 *Sea $\mathcal{A}$ una categoría que satisface los puntos 1' y 2 de antes y sea $A \in obj\,\mathcal{A}$ con estructura α. Entonces una deformación formal de A en $\mathcal{A}$ es una pareja (A_t, α_t) donde A_t son las series formales con coeficientes en A y α_t es una estructura sobre A_t tal que $A_t \in \mathcal{A}$ y $\alpha_t|_{t=0} = \alpha$.*

Con esta nueva terminología la anterior definición de deformación asocintiva queda como:

Ejem. 4 $\mathcal{A}$ las k-álgebras asociativas. Una deformación de una álgebra asociativa A con estructura α es una pareja (A_t, α_t) tal que $\alpha_t : A_t \otimes A_t \to A_t$ es k_t-lineal, hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(A_t \otimes A_t) \otimes A_t \arrow[r, "\alpha_t \otimes Id_{A_t}"] \arrow[dd, leftrightarrow] & A_t \otimes A_t \arrow[dr, "\alpha_t"] & \\
 & & A_t \\
A_t \otimes (A_t \otimes A_t) \arrow[r, "Id_{A_t} \otimes \alpha_t"] & A_t \otimes A_t \arrow[ur, "\alpha_t"'] &
\end{tikzcd} \tag{1.4}$$

(ver 1.3) y $\alpha_t|_{t=0} = \alpha$. Donde $\alpha_t|_{t=0} = p \circ \alpha_t$

Añadiendo condiciones:

Ejem. 5 $\mathcal{A}$ las k-álgebras asociativas unitarias. La condición unitaria para la k-álgebra (A, α) puede ponerse como: existe un morfismo $u : k \to A$, $1_k \mapsto 1_A$ k-lineal tal que hace conmutar a los diagramas;

$$\begin{tikzcd}
k \otimes_k A \arrow[r, "u \otimes Id_A"] & A \otimes_k A \arrow[dl, "\alpha"] \\
A \arrow[u] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \otimes_k k \arrow[r, "Id_A \otimes u"] & A \otimes_k A \arrow[dl, "\alpha"] \\
A \arrow[u] &
\end{tikzcd} \tag{1.5}$$

donde $A \to k \otimes_k A$, $A \to A \otimes_k k$ son los isomorfismos naturales. Así una deformación de A (en $\mathcal{A}$) es una tríada (A_t, α_t, u_t) donde A_t son las series formales infinitas con coeficientes en A, $\alpha_t : A_t \otimes_k A_t \to A_t$ es k_t-lineal tal que hace conmutar el diagrama 1.4 y $u_t : k_t \to A_t$ es k_t-lineal tal que hace conmutar los diagramas:

$$\begin{tikzcd}
k_t \otimes_{k_t} A_t \arrow[r, "u_t \otimes Id_{A_t}"] & A_t \otimes_{k_t} A_t \arrow[dl, "\alpha_t"] \\
A_t \arrow[u] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A_t \otimes_{k_t} k \arrow[r, "Id_{A_t} \otimes u_t"] & A_t \otimes_{k_t} A_t \arrow[dl, "\alpha_t"] \\
A_t \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

y además $(A_t, \alpha_t, u_t)|_{t=0} = (A, \alpha, u)$ donde $(A_t, \alpha_t, u_t)|_{t=0}$ denota a la tríada $(A, p_1 \circ \alpha_t, p_2 \circ u_t)$ donde a su vez $p_1 : A_t \to A$, $p_2 : k_t \to k$ denotan a las proyecciones en el término independiente.

Después se probará que si se tiene una deformación en las álgebras asociativas, pero el álgebra original es unitaria, entonces la deformación es automaticamente una deformación en las álgebras asociativas unitarias.

Cambiando el sentido de las flechas en los diagramas 1.3, pag. 8, y en 1.5, pag. 9, se obtienen las llamadas coálgebras. Y si además se pide la existencia un producto asociativo y de lo que se llama una antípoda se obtiene una álgebra de Hopf. Para explicar lo que se entiende por una deformación de un álgebra Hopf se necesita:

Observación.- Si M es k-módulo, y M_t denota a las series formales en t con coeficientes en M, se puede extender el producto modular de manera t-lineal a M_t resultando un k_t-módulo. Sea N otro k-módulo. Denotemos con $M_t\widehat{\otimes}_{k_t}N_t$ a la completación I-ádica del producto tensorial con $I = \langle t\rangle$ el ideal generado por t en el anillo k_t. Ésta completación se llama t-ádica. Resulta que,

$$M_t\widehat{\otimes}_{k_t}N_t \simeq (M\otimes_k N)_t,$$

como k_t-módulos. Pues, la aplicación t-bilineal,

$$\begin{array}{ccc} M_t\times N_t & \to & (M\otimes_k N)_t, \\ (\sum_i a_it^i, \sum_j b_jt^j) & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i+j=n} a_i\otimes b_jt^n \end{array}$$

induce $M_t\otimes_{k_t}N_t \to (M\otimes_k N)_t$. Que a su vez tiene una única extensión t-lineal a las completaciones t-ádicas,

$$\theta : M_t\widehat{\otimes}_{k_t}N_t \to (\widehat{M\otimes_k N})_t \simeq (M\otimes_k N)_t.$$

Por otro lado, si $\sum_i x_it^i \in (M\otimes_k N)_t$ con cada $x_i\in M\otimes_k N$, entonces se puede considerar que $x_i \in M_t\otimes_{k_t}N_t$, luego $\sum_i x_it^i \in M_t\widehat{\otimes}_{k_t}N_t$. Sea,

$$\begin{array}{cccc} \varphi : (M\otimes_k N)_t & \to & M_t\widehat{\otimes}_{k_t}N_t \\ \sum_i x_it^i & \mapsto & \sum_i x_it^i \end{array}$$

$$\begin{aligned} \theta\varphi(\sum_i x_it^i) &= \theta(\sum_i x_it^i) \\ &= \sum_i \theta(x_i)t^i \\ &= \sum_i x_it^i, \end{aligned}$$

$$\varphi\theta(\sum_i a_it^i\otimes\sum_i b_it^i) = \sum_{n=0}^{\infty}\varphi(\sum_{i+j=n}\theta(a_i\otimes b_j))t^n$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi\Big(\sum_{i+j=n} (a_i \otimes b_j)\Big)t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} (a_i \otimes b_j)t^n \\
&= \sum_i a_i t^i \otimes \sum_i b_i t^i,
\end{aligned}
$$

es decir, $\theta\varphi = Id$, $\varphi\theta = Id$.

En particular, si M, N, L son k-módulos,

$$(M_t \widehat{\otimes}_{k_t} N_t)\widehat{\otimes}_{k_t} L_t \simeq (M \otimes_k N)_t \widehat{\otimes}_{k_t} L_t \simeq (M \otimes_k N \otimes_k L)_t,$$

y similarmente, $M_t \widehat{\otimes}_{k_t}(N_t \widehat{\otimes}_{k_t} L_t) \simeq (M \otimes_k N \otimes_k L)_t$. Hemos obtenido la propiedad asociativa,

$$(M_t \widehat{\otimes}_{k_t} N_t)\widehat{\otimes}_{k_t} L_t \simeq M_t \widehat{\otimes}_{k_t}(N_t \widehat{\otimes}_{k_t} L_t)$$

Ejem. 6 $\mathcal{A}$ las k-álgebras de Hopf. Entonces un objeto en $\mathcal{A}$ es una seis-ada $(A, \alpha, u, \delta, \epsilon, \eta)$ donde α es una producto asociativo sobre A con morfismo unidad $u : k \to A$; $\delta : A \to A \otimes_k A$, $\epsilon : A \to k$ morfismos unitarios de k-álgebras ($A \otimes_k A$ tiene el producto dado por $(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$). Tales morfismos hacen conmutar las diagramas siguientes:

$$
\begin{tikzcd}
(A \otimes_k A) \otimes_k A \arrow[d, leftrightarrow] & A \otimes_k A \arrow[l, "\delta \otimes Id_A"'] & \\
& & A \arrow[ul, "\delta"'] \arrow[dl, "\delta"] \\
A \otimes_k (A \otimes_k A) & A \otimes_k A \arrow[l, "Id_A \otimes \delta"] &
\end{tikzcd}
\tag{1.6}
$$

$$
\begin{tikzcd}
k \otimes_k A & A \otimes_k A \arrow[l, "\epsilon \otimes Id_A"'] & A \otimes_k k & A \otimes_k A \arrow[l, "Id_A \otimes \epsilon"'] \\
& A \arrow[ul] \arrow[u, "\delta"'] & & A \arrow[ul] \arrow[u, "\delta"']
\end{tikzcd}
\tag{1.7}
$$

además $\eta : A \to A$ es un morfismo de k-módulos , llamado antípoda, tal que hace conmutar:

$$
\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{\delta} & A \otimes_k A \\
{\scriptstyle u \circ \epsilon}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta \otimes Id_A} \\
A & \xleftarrow{\alpha} & A \otimes_k A
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{\delta} & A \otimes_k A \\
{\scriptstyle u \circ \epsilon}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Id_A \otimes \eta} \\
A & \xleftarrow{\alpha} & A \otimes_k A
\end{array}
\tag{1.8}
$$

Tenemos que verificar la condición 2 para la categoría $\mathcal{A}$. Para esto tenemos que extender el llamado coproducto $\delta : A \to A \otimes_k A$ a A_t de manera natural: $\sum_i a_i t^i \mapsto \sum_i \delta(a_i)t^i$. Un primer intento sería poner $\delta : A_t \to A_t \otimes_{k_t} A_t$, sin embargo para que la asociación definida anteriormente tenga sentido se debe garantizar la convergencia de la serie $\sum_i \delta(a_i)t^i$:

$$\delta : A_t \to A_t \widehat{\otimes}_{k_t} A_t \,, \quad \sum_i a_i t^i \mapsto \sum_i \delta(a_i) t^i$$

donde $A_t \widehat{\otimes}_{k_t} A_t$ es la completación t-ádica del k_t-módulo $A_t \otimes_{k_t} A_t$.

Es más simple extender la counidad ϵ y la antípoda η :

$$\epsilon : A_t \to k_t \,, \quad \sum_i a_i t^i \mapsto \sum_i \epsilon(a_i) t^i \,, \quad \eta : A_t \to A_t \,, \quad \sum_i a_i t^i \mapsto \sum_i \eta(a_i) t^i$$

Ahora se tiene que hacer ver que con éstas extensiones conmutan diagramas análogos a 1.6, 1.7, 1.8, pag. 11.

Que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{tikzcd}
(A_t \widehat{\otimes}_{k_t} A_t) \widehat{\otimes}_{k_t} A_t \arrow[d, leftrightarrow] & A_t \widehat{\otimes}_{k_t} A_t \arrow[l, "\delta \widehat{\otimes} Id_{A_t}"'] & \\
 & & A_t \arrow[ul, "\delta"'] \arrow[dl, "\delta"] \\
A_t \widehat{\otimes}_{k_t} (A_t \widehat{\otimes}_{k_t} A_t) & A_t \widehat{\otimes}_{k_t} A_t \arrow[l, "Id_{A_t} \widehat{\otimes} \delta"'] &
\end{tikzcd} \tag{1.9}$$

donde $\delta \widehat{\otimes} Id_{A_t}$ es la única extensión lineal t-continua de $\delta \otimes Id_{A_t}$ a $A_t \widehat{\otimes}_{k_t} A_t$ (es decir, es la única función k_t-lineal tal que:

$$\begin{tikzcd}
A_t \widehat{\otimes}_{k_t} A_t \arrow[r, "\delta \widehat{\otimes} Id_{A_t}"] & (A_t \widehat{\otimes}_{k_t} A_t) \widehat{\otimes}_{k_t} A_t \\
A_t \otimes_{k_t} A_t \arrow[u] \arrow[r, "\delta \otimes Id_{A_t}"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & (A_t \widehat{\otimes}_{k_t} A_t) \otimes_{k_t} A_t \arrow[u]
\end{tikzcd} \tag{1.10}$$

donde las flechas verticales son los morfismos canónicos) y similarmente $Id_{A_t} \widehat{\otimes} \delta$, es porque:

$$\begin{aligned}
(\delta \widehat{\otimes} Id_{A_t})\delta(\sum_i a_i t^i) &= (\delta \widehat{\otimes} Id_{A_t})(\sum_i \delta(a_i) t^i) \\
&= (\delta \widehat{\otimes} Id_{A_t}) \sum_i (a_{i(1)} \otimes a_{i(2)}) t^i \\
&= \sum_i \delta(a_{i(1)}) \otimes a_{i(2)} t^i \text{ por } 1.10 \\
&= \sum_i (\delta \otimes Id)\delta(a_i) t^i
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_i (Id \otimes \delta)\delta(a_i)t^i \\
&= (Id\widehat{\otimes}\delta_t)\sum_i \delta(a_i)t^i \\
&= (Id\widehat{\otimes}\delta_t)\delta(\sum_i a_i t^i)
\end{aligned}
$$

y que los diagramas:

$$
\begin{tikzcd}
k_t\widehat{\otimes}_{k_t}A_t & A_t\widehat{\otimes}_{k_t}A_t \arrow[l, "\epsilon\widehat{\otimes}Id_{A_t}"'] \\
& A_t \arrow[ul] \arrow[u, "\delta"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A_t\widehat{\otimes}_{k_t}k_t & A_t\widehat{\otimes}_{k_t}A_t \arrow[l, "Id_{A_t}\widehat{\otimes}\epsilon"'] \\
& A_t \arrow[ul] \arrow[u, "\delta"']
\end{tikzcd}
\tag{1.11}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
 & A_t & \xrightarrow{\delta} & A_t\widehat{\otimes}_{k_t}A_t & \\
u\circ\epsilon & \downarrow & & \downarrow & \eta\widehat{\otimes}Id_{A_t} \\
 & A_t & \xleftarrow{\alpha} & A_t\widehat{\otimes}_{k_t}A_t &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
 & A_t & \xrightarrow{\delta} & A_t\widehat{\otimes}_{k_t}A_t & \\
u\circ\epsilon & \downarrow & & \downarrow & Id_{A_t}\widehat{\otimes}\eta \\
 & A_t & \xleftarrow{\alpha} & A_t\widehat{\otimes}_{k_t}A_t &
\end{array}
\tag{1.12}
$$

conmutan es claro.

Por una deformación de una álgebra de Hopf $(A, \alpha, u, \delta, \epsilon, \eta)$ se entiende una seis-ada $(A_t, \alpha_t, u_t, \delta_t, \epsilon_t, \eta_t)$ donde (A_t, α_t, u_t) es una k-álgebra asociativa unitaria, $\delta_t : A_t \to A_t\widehat{\otimes}_{k_t}A_t$, $\epsilon_t : A_t \to k_t$, morfismos de k_t-álgebras y $\eta_t : A_t \to A_t$ morfismo de k_t-módulos tales que hacen conmutar los diagramas 1.9, pag. 12, 1.11 y 1.12 añadiendo el subíndice t a los morfismos δ, ϵ, η, u y tales que

$$(A_t, \alpha_t, u_t, \delta_t, \epsilon_t, \eta_t)\,|_{t=0} = (A, \alpha, u, \delta, \epsilon, \eta)\,.$$

Aclaremos ésta última igualdad. $(A_t, \alpha_t, u_t)\,|_{t=0} = (A, \alpha, u)$ es como antes. $\delta_t\,|_{t=0}$ es la composición de

$$A_t \xrightarrow{\delta_t} A_t\widehat{\otimes}_{k_t}A_t \simeq (A \otimes_k A)_t \xrightarrow{p} A \otimes_k A$$

con p proyección en el término independiente. Similarmente, $\epsilon_t\,|_{t=0}$, $\eta_t\,|_{t=0}$.

Capítulo 2

Deformaciones Asociativas

Estudiaremos algunas generalidades de las deformaciones de k-álgebras asociativas, donde k es un anillo conmutativo unitario. Primero demostraremos:

Teorema 1 *Sea A una k-álgebra con producto α asociativo. Si α tiene unidad y α_t es una deformación asociativa de A entonces α_t también tiene unidad.*

Antes un par de lemas, de [7], §20.

Lema 1 *Sea A como antes, y $e \in A$ un idempotente central. Entonces existe una única serie $s = s_0 + s_1 t + s_2 t^2 + \ldots \in A_t$ idempotente con $s_0 = e$.*

Dem.- Sea $\alpha_t = \alpha + t\alpha_1 + t^2\alpha_2 + \ldots$. Se construirá inductivamente s con ayuda de la relación $\alpha_t(s, s) = s$. Esta es equivalente a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j+l=n} \alpha_i(s_j, s_l)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} s_n t^n$$

donde $\alpha_0 = \alpha$. De donde se obtiene:

$$\begin{aligned}
\alpha_0(s_0, s_0) &= s_0 \\
\alpha_0(s_0, s_1) + \alpha_0(s_1, s_0) + \alpha_1(s_0, s_0) &= s_1 \\
\alpha_0(s_0, s_2) + \alpha_0(s_1, s_1) + \alpha_0(s_2, s_0) + \alpha_1(s_0, s_1) + \alpha_2(s_0, s_0) &= s_2 \\
&\vdots \\
\alpha_0(s_0, s_{n+1}) + \alpha_0(s_{n+1}, s_0) + a &= s_{n+1}
\end{aligned}$$

donde $a \in A$ depende sólo de $s_0, s_1, \ldots, s_n$. Pongamos $\alpha_0(x, y) = xy$. Entonces el sistema de ecuaciones anterior se ve como:

$$e = s_0$$

$$
\begin{aligned}
es_1 + s_1 e + \alpha_1(e,e) &= s_1 \\
es_2 + s_1 s_1 + s_2 s_0 + \alpha_1(s_0,s_1) + \alpha_2(s_0,s_0) &= s_2 \\
&\vdots \\
es_{n+1} + s_{n+1} e + a &= s_{n+1}
\end{aligned}
$$

Supongamos que hemos encontrado $s_0, s_1, \ldots, s_n$. Queremos s_{n+1}. Así tenemos que resolver una ecuación en x de la forma:

$$ex + xe + a = x$$

o equivalentemente, como e es central:

$$a = (1-2e)x$$

multiplicando por $(1-2e)$, ($(1-2e)^2 = 1-4e+4e^2 = 1$, pues e es idempotente), se obtiene la solución:

$$x = (1-2e)a$$

lo que termina de probar el lema.

Lema 2 *Sea Λ anillo asociativo y $\lambda \in \Lambda$. Se define*

$$Ad(\lambda) : \Lambda \to \Lambda, \quad x \mapsto \lambda x - x\lambda$$

Entonces:

$$Ad(\lambda)^n x = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i \lambda^{n-i} x \lambda^i$$

Dem.- Por inducción sobre n.

Demostración de teorema 1 .- Sea $s \in A_t$ idempotente tal que $s_0 = 1$. Denotemos con $x * y$ a $\alpha_t(x,y)$, y con ab a $\alpha(a,b)$.

Si n es impar;

$$
\begin{aligned}
Ad(s)^n x &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i s^{n-i} * x * s^i \quad \text{(lema 2)} \\
&= s^n * x + (-1)^n x * s^n + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} (-1)^i s^{n-i} * x * s^i \\
&= s^n * x - x * s^n \\
&= Ad(s^n) x \\
&= Ad(s) x
\end{aligned}
$$

es decir,

$$Ad(s)^n x = Ad(s)x\,, \quad \text{si } n \text{ impar y } x \in A_t\,. \tag{2.1}$$

Además, si x es múltiplo (modular) de t^n entonces $Ad(s)x$ es múltiplo de t^{n+1}. En efecto; si $x = t^n z$

$$\begin{aligned} Ad(s)x &= s * t^n z - t^n z * s \\ &= (z_0 - z_0)t^n + \dots \end{aligned}$$

es múltiplo de t^{n+1}. En consecuencia, como $Ad(s)x$ es múltiplo de t, $Ad(s)^n x$ es múltiplo de t^n, lo que junto con 2.1 resulta en que $Ad(s)x = Ad(s)^n x$ es múltiplo de t^n para toda n, i.e., $Ad(s)x = 0$. Lo cual es equivalente a que s sea central.

Sólo resta probar que $s * x = x$, $\forall x \in A_t$. Para ésto, sea $\theta : A_t \to A_t$, $x \mapsto s * x$. θ es k_t-lineal. Veamos que $\theta = Id_{A_t}$:

<u>θ es inyectiva</u>; $s * x = 0$ implica $\sum_{i+j+l=n} a_i(s_j, x_l) = 0$ $\forall n$, donde $s = \sum_i s_i t^i$, $x = \sum_i x_i t^i$. Veamos los casos para n:

$n = 0$: $1x_0 = 0$;

$n = 1$: $1x_1 + s_1 x_0 + a_1(s_0, x_0) = 0$;

$\vdots$

n : $1x_n + \sum = 0$;

donde $\sum$ es una suma que depende linealmente de $x_0, \dots, x_{n-1}$. Por lo que, inductivamente: $x_n = 0$ $\forall n$, i.e., $x = 0$.

<u>θ es sobreyectiva</u>: pongamos $a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \in A_t$. Tenemos que resolver la ecuación $s * x = a$, la cual es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 1x_0 &= a_0 \\ 1x_1 + s_1 x_0 + a_1(s_0, x_0) &= a_1 \\ &\vdots \\ 1x_n + \sum &= a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

donde $\sum$ depende linealmente de $x_0, \dots, x_{n-1}, a_0, \dots, a_{n-1}$, por lo que tal sistema puede ser resuelto inductivamente y así resulta que θ es sobreyectiva.

Finalmente, sea $x \in A_t$, entonces $\exists y \in A_t$ tal que $s * y = x$ y:

$$\begin{aligned} s * y &= s * s * y \\ &= s * x \end{aligned}$$

luego, por inyectividad, $x = y$ y sustituyendo queda: $s * x = x$, $\forall x \in A_t$. Con lo que se termina la demostración del teorema.

Obsérvese como la unidad s en la deformación no es, en general, la unidad 1 del álgebra original. Sin embargo, salvo un isomorfismo resulta que ambas unidades coinciden.

Teorema 2 *A k-álgebra asociativa, (A_t, α_t) deformación de A. Si A tiene unidad 1 entonces existe una deformación de A isomorfa a α_t tal que tiene también a 1 como unidad.*

Dem.- Sean como antes, s unidad en A_t tal que $s_0 = 1$, $\theta : A_t \to A_t$, $a \mapsto \alpha(s, a)$. De que θ es k_t-lineal resulta que tiene la forma $\theta = \theta_0 + t\theta_1 + t^2\theta_2 + \dots$ con $\theta_i : A \to A$ lineal extendida.

Resulta que θ_0 es la identidad, pues para $a \in A$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i(a)t^i &= \theta(a) \\ &= \alpha(s, a) \\ &= \sum_n \alpha(s_n, a)t^n \end{aligned}$$

de donde $\theta_0(a) = \alpha(s_0, a) = a$, i.e., $\theta_0|_A = Id_A$ o equivalentemente; $\theta_0 = Id_{A_t}$.

Por lo tanto, la convolución $\beta_t = \alpha_t * \theta$ define una nueva deformación isomorfa a α_t. Ahora si $1 \in A$ unidad, $x \in A_t$:

$$\begin{aligned} \beta_t(x, 1) &= \theta^{-1}\alpha_t(\theta(x), \theta(1)) \\ &= \theta^{-1}\alpha_t(\theta(x), s) \\ &= x \end{aligned}$$

similarmente $\beta_t(1, x) = x$. De donde 1 es también unidad de β_t.

Como una generalización de la observación inmediata anterior al ejemplo 3 se obtiene;

Lema 3 *Sea α_t deformación del álgebra asociativa A_t.*
$\sum_{n=0}^{\infty} a_i t^i$ es invertible en α_t si y solo si a_0 es invertible en A

Dem.- Sea $s \in A_t$ la unidad y $a \neq 0 \in A_t$. Igualando coeficientes, la ecuación $\alpha_t(a, x) = s$ es equivalente a un sistema triangular lineal de ecuaciones, lo que garantiza la existencia de un inverso derecho. Similarmente existe un inverso izquierdo. Lo que implica que a es invertible.

Teorema 3 *Si A es una k-álgebra asociativa, elementos invertibles en una deformación de A siguen siendo invertibles en cualquier otra deformación de A.*

Dem.- Sea $a \in A_t$ invertible en una deformación y sea α_t otra deformación de A. Pongamos $x * y = \alpha_t(x, y)$. Por demostrar que $a \in A_t$ es invertible.

$$a * a^{-1} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(a, a^{-1})t^i$$

así $a * a^{-1} \in A_t$ es invertible por el lema 3, pag. 17, i.e., si s es la unidad en A_t, $\exists x \in A_t$ tal que $a * (a^{-1} * x) = s$ y de manera similar $\exists y \in A_t$ tal que $(y * a^{-1}) * a = s$. En particular a es invertible.

Luego es de esperarse que si A es álgebra con división A_t también lo es extendiendo los coeficientes k_t a su campo de cocientes.

Teorema 4 *Sea k campo, A una k-álgebra con división, A_t deformación de A (en la categoría de k-álgebras asociativas), K_t campo de cocientes de k_t. Entonces*

$$A_{(t)} = K_t \otimes_{k_t} A_t$$

es K_t-álgebra con división.

Dem.-k_t es dominio entero. Localizando el k_t-módulo A_t en el ideal primo cero (0) de k_t :

$$(A_t)_{(0)} \simeq K_t \otimes_{k_t} A_t$$

isomorfismo de k_t-módulos dado por $a/b \mapsto (1/b) \otimes a$ ([12], teo 4.4 pag. 26), el cual también es de K_t-álgebras.

$(A_t)_{(0)}$ es una álgebra con división, pues si $a/b \in (A_t)_{(0)}$ con $a \in A_t$, $a = t^m(\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i)$ con $a_i \neq 0$, y entonces, por el lema 3, pag. 17, $\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ es invertible. En consecuencia:

$$\frac{a}{b} = \frac{t^m \sum_i a_i t^i}{b}$$

es invertible en $(A_t)_{(0)}$.

Por lo tanto $A_{(t)}$ es álgebra con división.

En el camino hacia campo, las deformaciones a lo más heredan álgebra con división, en los términos del teorema 4, pues existen deformaciones no conmutativas de álgebras conmutativas con división. Por ejemplo:

Ejem. 7 Sea k campo, $A = k(x, y)$ con x, y indeterminadas. α el producto usual de A. Definimos

$$\alpha_i : A \times A \to A, \quad \alpha_i(a, b) = \frac{\partial^i a}{\partial x^i}\frac{\partial^i b}{\partial y^i} \quad i = 1, 2, \ldots$$

extendemos a A_t y entonces

$$\alpha_t = \alpha + t\alpha_1 + t^2\alpha_2 + \dots$$

es una deformación de la k-álgebra asociativa con división $A = k(x, y)$, no conmutativa puesto que $\alpha_t(x, y) = xy + t$, mientras que $\alpha_t(y, x) = xy$.

Que α_t es realmente una deformación se sigue de las siguientes observaciones generales.

α_t es asociativa si y sólo si

$$\alpha_t(\alpha_t(a, b), c) - \alpha_t(a, \alpha_t(b, c)) = 0$$

para todo $a, b, c \in A_t$. Lo cual es equivalente, igualando coeficientes a:

$$\sum_{i+j=n} \{\alpha_i(\alpha_j(a, b), c) - \alpha_i(a, \alpha_j(b, c))\} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2.2}$$

para cualesquiera $a, b, c \in A$.

Definición 8 *Las ecuaciones 2.2 se llaman ecuaciones de deformación para álgebras asociativas.*

Definición 9 *Si $f : A \to A$, $g : A \to A$ son dos funciones k-lineales, se define el producto copa $f \cup g$ como la función k-bilineal:*

$$f \cup g : A \times A \to A, \quad (a, b) \mapsto f(a)g(b)$$

Con ayuda de tal producto copa y de derivaciones se pueden construir deformaciones.

Teorema 5 *A k-álgebra asociativa con producto α, k con característica cero.*

Si ϕ, ψ son dos derivaciones en A tales que $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$ entonces

$$\alpha_t = \alpha + \frac{t}{1!}\phi \cup \psi + \frac{t^2}{2!}\phi^2 \cup \psi^2 + \frac{t^3}{3!}\phi^3 \cup \psi^3 + \dots$$

es una deformación de α, donde los exponentes de ϕ y ψ indican composición.

Dem.-Sólo hay que checar las ecuaciones de deformación. Tenemos que;

$$\begin{aligned}\sum_{i+j=n} \alpha_i(\alpha_j(a, b), c) &= \sum_{i+j=n} \frac{1}{i!j!}\phi^i(\phi^j(a)\psi^j(b))\psi^i(c) \\ &= \sum_{i+j=n} \frac{1}{i!j!}\sum_{l=0}^{i}\binom{i}{l}\phi^{i-l+j}(a)\phi^l(\psi^j(b))\psi^i(c)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=0,l=0}^{n,n-j} \frac{1}{(n-j)!j!} \binom{n-j}{l} \phi^{n-l}(a)\phi^{l}(\psi^{j}(b))\psi^{n-j}(c) \\
&= \sum_{l=0,j=0}^{n,n-l} \frac{1}{(n-j)!j!} \binom{n-j}{l} \phi^{n-l}(a)\phi^{l}(\psi^{j}(b))\psi^{n-j}(c) \\
&= \sum_{l=0,j=0}^{n,n-l} \frac{1}{(n-l)!l!} \binom{n-l}{j} \phi^{n-l}(a)\psi^{j}(\phi^{l}(b))\psi^{n-j}(c) \\
&= \sum_{i+j=n} \frac{1}{i!j!}\phi^{i}(a) \sum_{l=0}^{i} \binom{i}{l} \psi^{l}(\phi^{j}(b))\psi^{i-l+j}(c) \\
&= \sum_{i+j=n} \frac{1}{i!j!}\phi^{i}(a)\psi^{i}(\phi^{j}(b)\psi^{j}(c)) \\
&= \sum_{i+j=n} \alpha_i(a,\alpha_j(b,c))
\end{aligned}
$$

Por lo tanto α_t es asociativa.

De las ecuaciones de deformación 2.2, pag. 19, se obtiene;

$$
\sum_{\substack{i+j=n \\ i>0,\, j>0}} \alpha_i(\alpha_j(a,b),c) - \alpha_i(a,\alpha_j(b,c)) = \delta^2\alpha_n(a,b,c) \qquad (2.3)
$$

para $n = 1, 2, \ldots$, donde

$$
\delta^2\alpha_n(a,b,c) = a\alpha_n(b,c) - \alpha_n(a,b)c + \alpha_n(a,bc) - \alpha_n(ab,c)
$$

$\delta^2\alpha_n$ es lo que se conoce como el 2-operador de cofrontera en la cohomología de Hochschild de α_n. Considerando tal cohomología se obtiene una condición para cuando todas las deformaciones de un algebra asociativa son triviales salvo isomorfismo.

Definición 10 *Si A es una k-álgebra tal que cualquier deformación es isomorfa a la deformación trivial, A se llama rígida.*

Específicamente, el resultado es que si el segundo grupo de cohomologia de Hochschild $H^2(A,A)$ es nulo, A es rígida, como veremos más adelante. Primero damos la definición de la cohomología de Hochschild.

Definición 11 *A, S k-álgebras asociativas unitarias, $S \to A$ morfismo de k-álgebras, M un A-bimódulo. Se definen los k-módulos;*

$$
C^0(A,S;M) = \{m \in M \mid sm = ms \ \forall s \in S\}
$$

$C^n(A,S;M)$ *las funciones* $f : \underbrace{A\times\ldots\times A}_{n-\text{veces}} \to M$, *k-multilineales tales que;*

$$f(sa_1,\ldots,a_n) = sf(a_1,\ldots,a_n)$$
$$\vdots$$
$$f(\ldots,a_is,a_{i+1},\ldots) = f(\ldots,a_i,sa_{i+1},\ldots)$$
$$\vdots$$
$$f(a_1,\ldots,a_ns) = f(a_1,\ldots,a_n)s$$

Los elementos de $C^n(A,S;M)$ *se llaman n-cocadenas de Hochschild S-relativas con coeficientes en M.*

Definición 12 *El morfismo de cofrontera de Hochschild es;*

$$\delta^n : C^n(A,S;M) \to C^{n+1}(A,S;M)$$
$$(\delta^0 m)(a) = am - ma;$$
$$\begin{aligned}(\delta^n f)(a_1,\ldots,a_{n+1}) = \ & a_1 f(a_2,\ldots,a_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(\ldots,a_ia_{i+1},\ldots)\\ & +(-1)^{n+1}f(a_1,\ldots,a_n)a_{n+1}\end{aligned}$$

Tenemos así el complejo de cocadenas

$$C^*(A,S;M) : C^0(A,S;M) \xrightarrow{\delta^0} C^1(A,S;M) \xrightarrow{\delta^1} C^1(A,S;M) \to \ldots$$

cuya inexactitud es medida por los grupos de cohomologia $H^*(A,S;M)$ llamados de Hochschild.

Definición 13

$$H^n(A,M) = H^n(A,k;M)\,, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Observación.-

i) $\alpha_t * Id_{A_t} = \alpha_t$;

ii) Si $f_t = Id_{A_t} + tf_1 + t^2f_2 + \ldots, g_t = Id_{A_t} + tg_1 + t^2g_2 + \ldots$ donde cada f_i, g_i son k-endomorfismos de A extendidos. Entonces $\alpha_t * (f_t \circ g_t) = (\alpha_t * f_t) * g_t$.

Lema 4 *Sea* $\alpha_t = \alpha + t\alpha_1 + t^2\alpha_2 + \ldots$ *deformación asociativa de* α *con* $\alpha_i : A\times A \to A$ *función k-bilineal extendida a* A_t, $i = 1,\ldots,n$.

i) Si $\alpha_1 = 0,\ldots,\alpha_{r-1} = 0$ *entonces* $\delta^2\alpha_r = 0$;

ii) Si $\alpha_1 = 0,\ldots,\alpha_{r-1} = 0$ *y* $\alpha_r = \delta^1\beta$ *entonces* $\tilde{\alpha}_t = \alpha_t * (Id_{A_t} - t^r\beta)$ *es deformación de* α *con* $\tilde{\alpha}_1 = 0,\ldots,\tilde{\alpha}_r = 0$.

Dem.- i) se obtiene de 2.3, pag. 20, inmediatamente. Para obtener ii) ponemos $h = Id_{A_t} - t^r\beta$ entonces

$$h\tilde{\alpha}_t(x,y) = \alpha_t(hx, hy)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_t(x,y) - t^r\beta\tilde{\alpha}_t(x,y) = \; & \alpha_t(x,y) - t^r\{\alpha_t(\beta x, y) + \alpha_t(x, \beta y)\} + \\ & t^{2r}\alpha_t(\beta x, \beta y)\end{aligned}$$

si suponemos $x, y \in A$;

$$\sum_i \tilde{\alpha}_i(x,y)t^i - t^r \sum_i \beta\tilde{\alpha}_i(x,y)t^i = \sum_i \alpha_i(x,y)t^i - t^r c_1 + t^{2r}c_2$$

lo que implica, para

$$\begin{array}{ll} i = 1: & \tilde{\alpha}_1(x,y) = \alpha_1(x,y) = 0; \\ i = 2: & \tilde{\alpha}_2(x,y) = \alpha_2(x,y) = 0; \\ \vdots & \vdots \\ i = r-1: & \tilde{\alpha}_{r-1}(x,y) = \alpha_{r-1}(x,y) = 0; \\ i = r: & \tilde{\alpha}_r(x,y) - \beta\alpha(x,y) = \alpha_r(x,y) - \{\alpha(\beta x, y) + \alpha(x, \beta y)\}, i.e., \\ & \tilde{\alpha}_r(x,y) = \alpha_r(x,y) - \delta\beta(x,y) = 0, \end{array}$$

recordando que $\alpha : A \times A \to A$ es el producto original en A.

Teorema 6 *Si A es k-álgebra asociativa con unidad;*

$$H^2(A,A) = 0 \Rightarrow A \;\; \textit{rígida}$$

Dem.- Sea α_t deformación de α. Si $n = 1$ el lado izquierdo de 2.3, pag. 20, es cero, así $\delta^2\alpha_1 = 0$, i.e, α_1 es un cociclo, por lo que $\alpha_1 + im\delta_1 \in H^2(A,A) = 0$, i.e., $\alpha_1 = \delta_1\beta^{(1)}$ para algún $\beta^{(1)} \in C^1(A,A)$. Pongamos $\alpha_t^{(1)} = \alpha_t * (Id_{A_t} - t\beta^{(1)})$ deformación isomorfa a α_t. Por ii de lema 4, pag. 21, $\alpha_1^{(1)} = 0$ y de nuevo por lema 4, $\delta^2\alpha_2^{(1)} = 0$, de donde $\alpha_2^{(1)} + im\,\delta_1 \in H^2(A,A) = 0$ por lo que $\exists\beta^{(2)} \in C^1(A,A)$ tal que $\alpha_2^{(1)} = \delta^1\beta^{(2)}$ y entonces $\alpha_t^{(2)} = \alpha_t * (Id_{A_t} - t^2\beta^2)$ es isomorfa a α_t tal que $\alpha_1^{(2)} = 0, \alpha_2^{(2)} = 0$. Y se repite el razonamiento anterior tantas veces como se quiera. Resulta;

$$\begin{aligned}\alpha_t^{(n)} &= \alpha_t * (Id - t\beta^{(1)}) * \ldots * (Id - t^n\beta^{(n)}) \\ &= \alpha_t * ((Id - t\beta^{(1)}) \circ \ldots \circ (Id - t^n\beta^{(n)}))\end{aligned}$$

es deformación equivalente a α_t tal que $\alpha_1^{(n)} = 0, \ldots, \alpha_n^{(n)} = 0$. Por lo que $\alpha_t^\infty = \alpha_t * \prod_{i=1}^\infty (Id - t^i\beta^{(i)})$ debe de ser deformación tal que $\alpha_1^\infty = 0, \alpha_2^\infty = 0, \ldots$, i.e., α_t^∞ debe de ser trivial e isomorfa a α_t. En efecto, veamos primero que la composición $\prod_{i=1}^\infty (Id - t^i\beta^{(i)})$ tiene sentido;

$\prod_{i=1}^\infty (Id - t^i\beta^{(i)})(x) \in A_t \quad \forall x \in A_t$, pues

$$\prod_{i=1}^{n}(Id - t^i\beta^{(i)})(x) - \prod_{i=1}^{n+1}(Id - t^i\beta^{(i)})(x) =$$

$$\prod_{i=1}^{n}(Id - t^i\beta^{(i)})\{x - (Id - t^{n+1}\beta^{(n+1)})(x)\}$$

$$= t^{n+1}\prod_{i=1}^{n}(Id - t^i\beta^i)\beta^{(n+1)}(x) \in t^n A_t$$

i.e., la sucesión $\{\prod_{i=1}^{n}(Id - t^i\beta^{(i)})(x)\}_n$ es de Cauchy limpia en la topología t-ádica, y como A_t es t-ádicamente completo: $\prod_{i=1}^{\infty}(Id - t^i\beta^{(i)})(x) \in A_t$ (obsérvese que $\prod_{i=1}^{\infty}(Id - t^i\beta^{(i)})\,|_{t=0} = Id_A$).

$\alpha_t * \prod_{i=1}^{\infty}(Id - t^i\beta^{(i)})$ es trivial pues si escribimos $\tilde{\alpha}_t = \alpha_t * \prod_{i=1}^{\infty}(Id - t^i\beta^{(i)})$, $f_n = \prod_{i=1}^{n}(Id - t^i\beta^{(i)})$ entonces $f_\infty\tilde{\alpha}_t(x,y) = \alpha_t(f_\infty x, f_\infty y)$ pero $f_n\alpha_t^{(n)}(x,y) = \alpha_t(f_n x, f_n y)$ luego;

$$\begin{aligned}
f_\infty\tilde{\alpha}_t(x,y) - f_n\alpha_n^{(n)}(x,y) &= \alpha_t(f_\infty x, f_\infty y) - \alpha_t(f_n x, f_n y)\\
&= \alpha_t(f_\infty x - f_n x, f_\infty y) + \alpha_t(f_n x, f_\infty y)\\
&\quad -\alpha_t(f_n x, f_n y)\\
&= \alpha_t(f_\infty x - f_n x, f_\infty y) + \alpha_t(f_n x, f_\infty y - f_n y)\\
&\quad \in t^n A_t
\end{aligned}$$

pues $f_\infty x - f_n x \in t^n A_t$. Por otro lado como $f_n = Id + tf_1^{(n)} + t^2 f_2^{(n)} + \ldots$ y f_n converge limpiamente a f_∞, $f_i^{(n)} = f_i^\infty$ $0 < i < n$, así que:

$$\begin{aligned}
D &= f_\infty\tilde{\alpha}_t(x,y) - f_n\alpha_t^{(n)}(x,y)\\
&= \{\tilde{\alpha}_t(x,y) - \alpha_t^{(n)}(x,y)\} + \quad tf_1^{(n)}\{\tilde{\alpha}_t(x,y) - \alpha_t^{(n)}(x,y)\} + \ldots\\
&\qquad + t^{n-1}f_{n-1}^{(n)}\{\tilde{\alpha}_t(x,y) - \alpha_t^{(n)}(x,y)\} + t^n R
\end{aligned}$$

pero $\tilde{\alpha}_t(x,y) - \alpha^{(n)}(x,y) = \{\alpha(x,y) + t\tilde{\alpha}(x,y) + t^2\tilde{\alpha}(x,y) + \ldots\} - \{\alpha(x,y) + t^{n+1}\alpha_{n+1}^{(n)}(x,y) + t^{n+2}\alpha_{n+2}^{(n)}(x,y) + \ldots\} = t\tilde{\alpha}_1(x,y) + \ldots + t^{n-1}\tilde{\alpha}_{n-1}(x,y) + t^n S$ y sustituyendo;

$$\begin{aligned}
D &= t\tilde{\alpha}_1(x,y) + \ldots + t^{n-1}\tilde{\alpha}_{n-1}(x,y) + t^n S\\
&\quad + t^2 f_1^{(n)}\tilde{\alpha}_1(x,y) + t^3 f_1^{(n)}\tilde{\alpha}_2(x,y) + \ldots + t^n f_1^{(n)}\tilde{\alpha}_{n-1}(x,y) + t^{n+1} f_1 S\\
&\quad + \ldots + t^n f_{n-1}^{(n)}\tilde{\alpha}_1(x,y)\\
&\quad + t^{n+1} f_{n-1}^{(n)}\tilde{\alpha}_2(x,y) + \ldots + t^{2n-1} f_{n-1}^{(n)}\tilde{\alpha}_{n-1}(x,y) + t^{2n} f_{n-1} S + t^n R
\end{aligned}$$

y si suponemos $x, y \in A$;

$$\begin{aligned}
D &= \tilde{\alpha}_1(x,y)t + (\tilde{\alpha}_2(x,y) + f_1^{(n)}\tilde{\alpha}_1(x,y))t^2 + \ldots +\\
&\qquad \{\tilde{\alpha}_{n-1}(x,y) + f_{n-2}\tilde{\alpha}_1(x,y) + \ldots + f_1\tilde{\alpha}_{n-1}(x,y)\}t^{n-1} + t^n S'
\end{aligned}$$

pero sabemos que $D \in t^n A_t$, lo que implica:

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_1(x,y) &= 0\\
\tilde{\alpha}_2(x,y) + f_1^{(n)}\tilde{\alpha}_1(x,y) &= 0\\
&\vdots\\
\tilde{\alpha}_{n-1}(x,y) + f_{n-2}\tilde{\alpha}_1(x,y) + \ldots + f_1\tilde{\alpha}_{n-1}(x,y) &= 0
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_1(x,y) &= 0\\
\tilde{\alpha}_2(x,y) &= 0\\
&\vdots\\
\tilde{\alpha}_{n-1}(x,y) &= 0
\end{aligned}$$

para todo $n > 2$. Por lo tanto $\tilde{\alpha}_t$ es trivial e isomorfa a α_t, y así A es rígida.

Ejem. 8 Las álgebras separables A están caracterizadas por el hecho de que $H^n(A,M) = 0$ $\forall M$ A-bimódulo y $\forall n \geq 1$ ([13], Lema pag. 206 y proposición pag.208). En particular las álgebras separables son rígidas. Y así las matrices $M_n(k)$, las álgebras de grupo $k[G]$ con G grupo finito de orden coprimo con la característica de k, las extensiones de campos $K \supseteq k$ separables son todas ellas rígidas.

Se pueden decir algunas cosas cuando se extienden los coeficientes de k a un anillo K más grande en un sentido similar al teorema 4, pag. 18. Precisemos, una deformación $\alpha_t = \alpha + t\alpha_1 + \ldots$ de la estructura asociativa α de A puede pensarse como una deformación de $K \otimes_k A$ de la siguiente manera: cada $\alpha_i : A \times A \to A$ es k-bilineal, entonces induce $\alpha_i : A \otimes_k A \to A$, k-lineal, de igual forma $p : K \otimes_k K \to K$, $x \otimes x' \mapsto xx'$. Luego existe $(K \otimes_k K) \otimes_k (A \otimes_k A) \to K \otimes_k A$, k-bilineal y además $(K \otimes_k A) \times (K \otimes_k A) \to (K \otimes_k A) \otimes_t (K \otimes_k A) \simeq (K \otimes_k K) \otimes_k (A \otimes_k A)$. Es decir, tenemos inducida $\tilde{\alpha}_t : (K \otimes_k A) \times (K \otimes_k A) \to K \otimes_k A$, $(x \otimes a, x' \otimes a') \mapsto xx' \otimes \alpha_i(a,a')$ que resulta K-bilineal.

Tenemos que α_t induce $\tilde{\alpha}_t = \tilde{\alpha} + t\tilde{\alpha}_1 + t^2\tilde{\alpha}_2 + \ldots$. Probaremos que $((K \otimes_k A)_t, \tilde{\alpha}_t)$ es deformación de $(K \otimes_k A, \tilde{\alpha})$ cuando (A_t, α_t) lo es de (A, α)

Observación.- Si (A_t, α_t) es deformación del álgebra asociativa (A, α), extendiendo coeficientes a $K \supseteq k$ anillo conmutativo unitario resulta que $((A \otimes_k K)_t, \tilde{\alpha}_t)$ es deformación de $(A \otimes_k K, \tilde{\alpha})$.

Dem.- Sólo hay que verificar las ecuaciones de deformación. Sean $a, b, c, \in A$, $x, y, z \in K$;

$$\tilde{\alpha}_t(\tilde{\alpha}_t(a \otimes x, b \otimes y), c \otimes z) = \sum_n \sum_{i+j=n} \alpha_i(\alpha_j(a,b),c) \otimes xyzt^n$$

mientras que

$$\tilde{\alpha}_t(a \otimes x, \tilde{\alpha}_t(b \otimes y, c \otimes z)) = \sum_n \sum_{i+j=n} \alpha_i(a, \alpha_j(b,c)) \otimes xyzt^n$$

y como se cumplen las ecuaciones de deformación para α_t, $\tilde{\alpha}_t$ resulta asociativa.

Veamos el comportamiento en cohomología.

Teorema 7 *A una k-álgebra, M un k-módulo.*

i) Existe un k-morfismo $K \otimes_k C^*(A, M) \to C^*(K \otimes_k A, K; K \otimes_k M)$ tal que es isomorfismo, si $K \supset k$ extensión de campos finita.

ii) Si $K \supset k$ extensión de campos finita,

$$K \otimes_k H^*(A, M) \simeq H^*(K \otimes_k A, K; K \otimes_k M)$$

Dem.-

$i)$ Definimos;

$$\begin{array}{ccc} K \otimes_k C^n(A, M) & \xrightarrow{\psi_n} & C^n(K \otimes_k A, K; K \otimes_k A) \\ x \otimes g & \mapsto & (K \otimes_k M)^n \stackrel{x \otimes g}{\to} K \otimes_k A \\ & & (x_1 \otimes a_1, \ldots, x_n \otimes a_n) \mapsto x x_1 \ldots x_n \otimes g(a_1 \ldots a_n) \end{array}$$

$x \otimes g$ bien definida y es K-multilineal por lo que $x \otimes g \in C^n(K \otimes_k A, K; K \otimes_k A)$. Veamos que ψ es morfismo de cocadenas:

$$\delta^n(x \otimes g)(1 \otimes a_1, \ldots, 1 \otimes a_{n+1}) =$$

$$(1 \otimes a_1)(x \otimes g)(1 \otimes a_2, \ldots, 1 \otimes a_{n+1}) + \sum_i (-1)^i (x \otimes g)(\ldots, 1 \otimes a_i a_{i+1}, \ldots) +$$

$$(-1)^{n+1}(x \otimes g)(1 \otimes a_1, \ldots, 1 \otimes a_n)(1 \otimes a_{n+1})$$

$$\begin{aligned} &= (1 \otimes a_1)(x \otimes g(a_2, \ldots, a_{n+1})) + \\ &\qquad \sum_i (-1)^i x \otimes g(\ldots, a_i a_{i+1}, \ldots) + \\ &\qquad (-1)^n (x \otimes g(a_1, \ldots, a_n))(1 \otimes a_{n+1}) \\ &= x \otimes (\delta^n g)(a_1, \ldots, a_n) \end{aligned}$$

por lo tanto $\delta^n(x \otimes g) = x \otimes \delta^n g$, de donde,

$$\begin{array}{ccccc} & K \otimes_k C^n(A, M) & \stackrel{\psi_n}{\to} & C^n(K \otimes_k A, K \otimes_k K \otimes M) & \\ Id \otimes \delta^n & \downarrow & \circlearrowright & \downarrow & \delta^n \\ & K \otimes_k C^{n+1}(A, M) & \stackrel{\psi_{n+1}}{\to} & C^{n+1}(K \otimes_k A, K \otimes_k K \otimes M) & \end{array}$$

Exhibiremos ahora el morfismo inverso de ψ_*. Supongamos que $x_1, \ldots, x_m$ es base de K sobre k y $\{m_j\}_j$ lo es de M sobre k de tal manera que $\{x_i \otimes m_j\}_{i,j}$ es base de $K \otimes_k M$ sobre k. Si $f \in C^n(K \otimes A, K; K \otimes A)$, definimos

$$f(1 \otimes a_1, \ldots, 1 \otimes a_n) = \sum_{i,j} x_i \otimes y_{i,j} m_j$$

con $y_{i,j} = y_{i,j}(a_1,\ldots,a_n) \in k$ y $y_{i,j} = 0$ para casi todo i,j. Luego tenemos definida $y_{i,j} : A^n \to k$, $(a_1,\ldots,a_n) \mapsto y_{i,j}(a_1,\ldots a_n)$ función k-multilineal.

$$f(1\otimes a_1,\ldots,1\otimes a_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes f_i(a_1,\ldots a_n)$$

con $f_i = \sum_j y_j b_j : A^n \to A$ función k-multilineal.

Se pone

$$\theta_n : C^n(K\otimes_k A, K; K\otimes_k M) \to K\otimes_k C^n(A,M),\ \theta(f) = \sum_{i=1}^{m} x_i \otimes f_i$$

Veamos que θ_n es, en efecto, el inverso de ψ_n. Para $f \in C^n(K\otimes_k A, K; K\otimes_k M)$,

$$\begin{aligned}\sum_i (x_i\otimes f_i)(1\otimes a_i,\ldots,1\otimes a_n) &= \sum_i x_i\otimes f_i(a_1,\ldots,a_n) \quad \text{por definición}\\ &= f(1\otimes a_1,\ldots,1\otimes a_n)\end{aligned}$$

i.e., $\sum_i x_i \otimes f_i = f$, según la notación dada en la definición de θ_n. Por lo que:

$$\begin{aligned}\psi_n\theta_n(f) &= \psi_n(\sum_i x_i\otimes f_i)\\ &= \sum_i x_i\otimes f_i\\ &= f\end{aligned}$$

además, si $g \in C^n(A,M), x \in K$,

$$\begin{aligned}(x\otimes g)(1\otimes a_1,\ldots,1\otimes a_n) &= x\otimes g(a_1,\ldots,a_n)\\ &= \sum_i x_i\otimes z_i g(a_1,\ldots,a_n)\end{aligned}$$

donde $x = \sum z_i x_i$, $z_i \in k$;

$$\begin{aligned}\theta_n\psi_n(x\otimes g) &= \theta_n(x\otimes g)\\ &= \sum_i x_i\otimes z_i g\\ &= \sum_i z_i x_i\otimes g\\ &= x\otimes g\,.\end{aligned}$$

ii) Del inciso anterior, $H^*(K\otimes C^*(A,M)) \simeq H^*(K\otimes_k A, K\otimes_k M)$, junto con $K\otimes_k H^*(A,M) \simeq H^*(\ K\otimes_k C^*(A,M)\ )$, (lema 6.1, pag. 195 de [17] para cohomología).

La no rigidez se conserva cuando se extienden coeficientes, en extensiones de campos finitas.

Teorema 8 *Sea $K \supseteq k$ extensión de campos finita y con característica cero. Si (A_t, α_t) es deformación asociativa no isomorfa a la trivial entonces extendiendo coeficientes a K, $((K \otimes_k A)_t, \bar{\alpha}_t)$ tampoco es isomorfa a la trivial.*

Dem.-

$$\alpha_t = \alpha + t\alpha_1 + t^2\alpha_2 + \dots$$

Según la demostración y notación del teorema 6, pag. 22, $\exists n \geq 1$ tal que $\alpha_n^{(n-1)} \in ker\,\delta^1$, $\alpha_n^{(n-1)} \notin im\,\delta^1$ pero $\alpha_t^{(n-1)} = \alpha + t^n\alpha_n^{(n-1)} + t^{n+1}\alpha_{n+1}^{(n-1)} + \dots$ isomorfa a α_t. Pongamos $\beta_t = \alpha_t^{(n-1)}$ y extendamos coeficientes a K:

$$\bar{\beta}_t = \bar{\alpha} + t^n\bar{\alpha}_n^{(n-1)} + t^{n+1}\bar{\alpha}_{n+1}^{(n-1)} + \dots$$

$\alpha_n^{(n-1)} + im\,\delta^1 \in H^2(A, A)$ y es no cero, por lo que $K \otimes [\alpha_n^{(n-1)}] \in K \otimes_k H^2(A, A)$ también diferente de cero, que vía el isomorfismo $K \otimes_k H^2(A, A) \simeq H^2(K \otimes_k A, K \otimes_k A)$ va a dar en $[1 \otimes \alpha_n^{(n-1)}]$, luego también es diferente de cero, i.e., $\bar{\alpha}_n^{(n-1)} = 1 \otimes \alpha_n^{(n-1)} \notin im\,\delta^1$. El teorema quedará probado si antes justificamos:

Teorema 9 *Si (A_t, α_t) deformación asociativa isomorfa a la trivial con*

$$\alpha_t = \alpha + t^n\alpha_n + t^{n+1}\alpha_{n+1} + \dots$$

entonces $\alpha_n \in im\,\delta^1$, siempre y cuando carac $k \not| \; n!$.

Para probar éste se necesita algo de preparación. Todo lo que resta del presente capítulo se dedica a éste objetivo.

Obsérvese que si α_t es isomorfa a la deformación trivial existe un isomorfismo $h_t = Id + th_1 + t^2h_2 + \dots$ tal que $\alpha = \alpha_t * h_t$ i.e.,

$$h_t\alpha(a, b) = \alpha_t(h_t(a), h_t(b)) \quad \forall a, b \in A$$

Si ponemos $a, b \in A$, desarrollando en series e igualando coeficientes ésta ecuación es equivalente a:

$$h_m\alpha(a, b) = \sum_{i+j+l=m} \alpha_i(h_j(a), h_l(b)) \quad m \geq 0$$

donde $h_0 = Id$. Sustituyendo $m = n$:

$$h_n\alpha(a, b) = \alpha_n(h_0a, h_0b) + \sum_{i+j=n} \alpha(h_ia, h_jb)$$

o lo que es lo mismo

$$a_n(a,b) = -\sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} h_i a h_j b - \delta^1 h_n(a,b)$$

y similarmente para $m < n$.

$$\delta^1 h_m(a,b) = -\sum_{\substack{i+j=m \\ i,j>0}} h_i a h_j b$$

En notación producto copa:

$$a_n = -\Sigma_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} h_i \cup h_j - \delta^1 h_n \tag{2.4}$$

$$\delta^1 h_m = -\Sigma_{\substack{i+j=m \\ i,j>0}} h_i \cup h_j, \quad 1 \leq m < n \tag{2.5}$$

Observemos que para el caso $n = 1$, de 2.4 se obtiene el teorema a demostrar. Así que el problema es cuando $n > 1$. Según 2.4 basta con demostrar que la suma que aparece del lado derecho de la igualdad es una 1-cofrontera. Probaremos que para $n > 1$ las ecuaciones 2.5 forzan a que esto sea así.

A manera de ilustración examinemos el caso $n = 3$.

Lema 5 *Si h_1 es derivación, $h_1 \cup h_1 = -\delta h_2$ y carac $k \neq 3$, entonces $h_1 \cup h_2 + h_2 \cup h_1$ es una cofrontera.*

Dem.-

$$\begin{aligned} h_2(Id \cup Id) &= -\delta h_2 + Id \cup h_2 + h_2 \cup Id \\ &= h_1 \cup h_1 + Id \cup h_2 + h_2 \cup Id, \end{aligned}$$

$$h_1 h_2(Id \cup Id) = h_1 \cup h_1^2 + h_1^2 \cup h_1 + Id \cup h_1 h_2 + h_1 \cup h_2 + h_2 \cup h_1 + h_1 h_2 \cup Id,$$

i.e.,

$$-\delta(h_1 h_2) = h_1 \cup h_1^2 + h_1^2 \cup h_1 + h_1 \cup h_2 + h_2 \cup h_1$$

pero $h_1^3(Id \cup Id) = Id \cup h_1^3 + 3h_1 \cup h_1^2 + 3h_1^2 \cup h_1 + h_1^3 \cup Id$ o equivalentemente, $-\frac{\delta h_1^3}{3} = h_1 \cup h_1^2 + h_1^2 \cup h_1$. Por lo tanto,

$$\frac{\delta h_1^3}{3}(Id \cup Id) - \delta(h_1 h_2) = h_1 \cup h_2 + h_2 \cup h_1$$

En lo que sigue se mostrará que tal argumento puede ser generalizado. Para lo cual supondremos que $h_i : A \to A$, $i = 1, 2, \ldots, n$ son k-lineales tales que satisfacen 2.5, pag. 28, con $n > 1$.

Lema 6 *Si $f, g : A \to A$ funciones k-lineales y $1 \leq m < n$;*

$$h_m(f \cup g) = f \cup h_m g + h_m f \cup g + \sum_{\substack{u+v=m \\ u>0, v>0}} h_u f \cup h_v g$$

Dem.-

$$\begin{aligned} h_m(f \cup g) &= -\delta^1 h_m(f, g) + f \cup h_m g + h_m f \cup g \\ &= \sum_{\substack{u+v=m \\ u>0, v>0}} h_u f \cup h_v g + f \cup h_m g + h_m f \cup g \end{aligned}$$

De aquí en adelante se supondrá que los subíndices de todos los h son positivos.

Para abreviar, pongamos

$$\begin{aligned} p_u^m(s) &= \sum_{i_1+\ldots+i_m=s} h_{i_1} \ldots h_{i_{u-1}} \cup h_{i_u} \ldots h_{i_m} \\ p_1^m(s) &= \sum_{i_1+\ldots+i_m=s} Id \cup h_{i_1} \ldots h_{i_{u-1}} h_{i_u} \ldots h_{i_m} \\ p_{m+1}^m(s) &= \sum_{i_1+\ldots+i_m=s} h_{i_1} \ldots h_{i_{u-1}} h_{i_u} \ldots h_{i_m} \cup Id \end{aligned}$$

Observación.- Sea

$$c^i_{j_1,\ldots,j_u} = \frac{i!}{j_1! \ldots j_u!}.$$

Se cumple:

i)

$$c^i_{j,(i-j)} = \binom{i}{j};$$

ii) si $u + v + w = i$ entonces

$$c^{i+1}_{u,v,w+1} = c^i_{u-1,v,w+1} + c^i_{u,v-1,w+1} + c^i_{u,v,w}.$$

Lema 7

$$\sum_{i_1+\ldots+i_m=s} h_{i_1}\ldots h_{i_m}(Id\cup Id)=\sum_{l=1}^{m+1}\sum_{u=l}^{m+1}\left(\begin{array}{c}u-1\\u-l\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}m\\u-1\end{array}\right)p_u^{m+l-1}(s)$$

Dem.- Por inducción sobre m. Exhibamos el paso inductivo.

$$\sum_{i_2+\ldots+i_{m+1}=s'} h_{i_2}\ldots h_{i_{m+1}}(Id\cup Id)=\sum_{l=1}^{m+1}\sum_{u=l}^{m+1} c^m_{u-l,l-1,m-u+1}p_u^{m+l-1}(s')$$

Aplicando h_{i_1}, sumando sobre los subíndices tales que $i_1+s'=s$, y luego por lema 6, queda:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_1+\ldots+i_{m+1}=s} h_{i_1}\ldots h_{i_{m+1}}(Id\cup Id)=\\
&\sum_{l=1}^{m+1}\sum_{u=l}^{m+1} c^m_{u-l,l-1,m-u+1}\sum_{i_1+s'=s} h_{i_1}p_u^{m+l-1}(s')\\
&=\sum_{l=1}^{m+1}\sum_{u=l}^{m+1} c^m_{u-l,l-1,m-u+1}\{p_{u+1}^{m+l}(s)+p_u^{m+l}(s)+p_{u+1}^{m+l+1}(s)\}\\
&=\sum_{l=1}^{m+1}\sum_{w=l+1}^{m+2} c^m_{w-1-l,l-1,m-w+2}p_w^{m+l}(s)+\sum_{l=1}^{m+1}\sum_{u=l}^{m+1} c^m_{u-l,l-1,m-u+1}p_u^{m+l}(s)\\
&+\sum_{k=2}^{m+2}\sum_{v=k}^{m+2} c^m_{v-k,k-2,m-v+2}p_v^{m+k}(s), \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

pero la primera doble sumatoria es

$$\sum_{l=2}^{m+1}\sum_{w=l+1}^{m+1} c^m_{w-1-l,l-1,m-w+2}p_w^{m+l}(s)+\sum_{w=2}^{m+2}\left(\begin{array}{c}m\\w-2\end{array}\right)p_w^{m+1}(s)$$
$$+\sum_{l=1}^{m+1}\left(\begin{array}{c}m\\l-1\end{array}\right)p_{m+2}^{m+l}(s)$$

mientras que la segunda doble sumatoria es

$$\sum_{l=2}^{m+1}\sum_{u=l+1}^{m+1} c^m_{u-l,l-1,m-u+1}p_u^{m+l}(s)+\sum_{u=1}^{m+1}\left(\begin{array}{c}m\\u-1\end{array}\right)p_u^{m+1}(s)$$
$$+\sum_{l=1}^{m+1}\left(\begin{array}{c}m\\l-1\end{array}\right)p_l^{m+l}(s)$$

y la tercera doble sumatoria es,

$$\sum_{k=2}^{m+1}\sum_{v=k+1}^{m+1} c^{m}_{v-k,k-2,m-v+2}p_v^{m+k}(s)+\sum_{k=2}^{m+2}\binom{m}{k-2}p_{m+2}^{m+k}(s)$$
$$+\sum_{k=2}^{m+1}\binom{m}{k-2}p_k^{m+k}(s).$$

Sustituyendo en 2.6, pag. 30,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_1+\dots+i_{m+1}=s} h_{i_1}\dots h_{i_{m+1}}(Id\cup Id)=\\
&\sum_{l=2}^{m+1}\sum_{w=l+1}^{m+1}(c^{m}_{w-1-l,l-1,m-w+2}+c^{m}_{w-l,l-1,m-w+1}+c^{m}_{w-l,l-2,m-w+2})p_w^{m+l}(s)\\
&+\sum_{w=2}^{m+1}(\binom{m}{w-2}+\binom{m}{w-1})p_w^{m+1}+p_1^{m+1}(s)\\
&+\sum_{l=2}^{m+1}(\binom{m}{l-1}+\binom{m}{l-2})p_{m+2}^{m+l}(s)+p_{m+2}^{m+1}(s)+p_{m+2}^{2m+2}(s)\\
&+\sum_{l=2}^{m+1}(\binom{m}{l-1}+\binom{m}{l-2})p_l^{m+l}(s)\\
&=\sum_{l=2}^{m+1}\sum_{w=l+1}^{m+1}c^{m+1}_{w-l,l-1,m-w+2}p_w^{m+l}(s)\\
&+\sum_{w=2}^{m+1}\binom{m+1}{w-1}p_{m+2}^{m+w}(s)+p_1^{m+1}(s)\\
&+\sum_{l=2}^{m+1}\binom{m+1}{l-1}p_{m+2}^{m+l}+p_{m+2}^{m+1}(s)+p_{m+2}^{2m+2}(s)\\
&+\sum_{l=2}^{m+1}\binom{m+1}{l-1}p_l^{m+l}(s)\\
&=\sum_{l=l}^{m+1}\sum_{w=l+1}^{m+1}c^{m+1}_{w-l,l-1,m-w+2}p_w^{m+l}(s)\\
&+\sum_{l=2}^{m+1}\binom{m+1}{l-1}p_{m+2}^{m+l}+p_{m+2}^{m+1}(s)+p_{m+2}^{2m+2}(s)\\
&+\sum_{l=1}^{m+1}\binom{m+1}{l-1}p_l^{m+l}(s)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{l=1}^{m+1} \sum_{w=l+1}^{m+1} c^{m+1}_{w-l,l-1,m-w+2} p_w^{m+l}(s) \\
&+ \sum_{l=1}^{m+1} \binom{m+1}{l-1} p^{m+l}_{m+2} + p^{2m+2}_{m+2}(s) \\
&+ \sum_{l=1}^{m+1} \binom{m+1}{l-1} p_l^{m+l}(s) \\
&= \sum_{l=1}^{m+1} \sum_{w=l}^{m+1} c^{m+1}_{w-l,l-1,m-w+2} p_w^{m+l}(s) + \sum_{l=1}^{m+1} \binom{m+1}{l-1} p^{m+l}_{m+2} + p^{2m+2}_{m+2}(s) \\
&= \sum_{l=1}^{m+1} \sum_{w=l}^{m+2} c^{m+1}_{w-l,l-1,m-w+2} p_w^{m+l}(s) + p^{2m+2}_{m+2}(s) \\
&= \sum_{l=1}^{m+2} \sum_{w=l}^{m+2} c^{m+1}_{w-l,l-1,m-w+2} p_w^{m+l}(s) \\
&= \sum_{l=1}^{m+2} \sum_{w=l}^{m+2} \binom{w-1}{w-l} \binom{m+1}{w-1} p_w^{m+l}(s)
\end{aligned}
$$

Observación.- Los coeficientes en la fórmula anterior pueden calcularse de manera similar a los del triángulo de Pascal, como sigue: pongamos una pirámide de base triangular con pisos formados inductivamente de números enteros, los siguientes;

1	1 1	1 2 1	1 3 3 1	1 4 6 4 1
	1	2 2	3 6 3	4 12 12 4
		1	3 3	6 12 6
			1	4 4
				1

etcétera. Los puntos frontera de cada triángulo se calculan como en el triángulo de Pascal, mientras que los puntos interiores se obtienen sumando tres números adyacentes del piso anterior.

Teorema 10 *Si la característica de k no divide a $n!$,*

$$\sum_{i+j=n} h_i \cup h_j = \sum_{l=2}^{n} \frac{(-1)^{l+1}}{l} \sum_{i_1+\cdots+i_l=n} \delta^1(h_{i_1} \ldots h_{i_l})$$

donde todos los subíndices son positivos.

Dem.- Sea S la suma

$$S = \sum_{l=2}^{n} \frac{(-1)^l}{l} h_{i_1} \dots h_{i_l}(Id \cup Id).$$

Según la fórmula del lema 7, pag. 30,

$$S = \sum_{l=2}^{n} \frac{(-1)^l}{l} \sum_{j=1}^{l+1} \sum_{u=j}^{l+1} \binom{u-1}{u-j} \binom{l}{u-1} p_u^{l+j-1}(n). \tag{2.7}$$

veamos como aparecen los términos $p_u^{l+j-1}(n)$. Lo hacen de la siguiente forma, (con ciertos coeficientes),

$$\begin{array}{ccc} p_1^2 & p_2^2 & p_3^2 \\ & p_2^3 & p_3^3 \\ & & p_3^4 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} p_1^3 & p_2^3 & p_3^3 & p_4^3 \\ & p_2^4 & p_3^4 & p_4^4 \\ & & p_3^5 & p_4^5 \\ & & & p_4^6 \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{ccccc} p_1^l & p_2^l & \dots & p_l^l & p_{l+1}^l \\ & p_2^{l+1} & \dots & p_l^{l+1} & p_{l+1}^{l+1} \\ & & & \vdots & \vdots \\ & & & p_l^{2l-1} & p_{l+1}^{2l-1} \\ & & & & p_{l+1}^{2l} \end{array} \quad \dots$$

de donde todos los sumandos del lado derecho de 2.7 tienen la forma p_{l+1}^{l+w} con $0 \leq w \leq l$. Y tal p_{l+1}^{l+w} se repite w veces si no es de la forma p_l^1 ni de la forma p_{l+1}^l ni p_2^2, con coeficientes

$$\frac{(-1)^l}{l} \binom{l}{l-w} \binom{l}{l}, \frac{(-1)^{l+1}}{l+1} \binom{l}{l+1-w} \binom{l+1}{l},$$
$$\dots, \frac{(-1)^{l+w}}{l+w} \binom{l}{(l+w)-w} \binom{l+w}{l},$$

es decir, el coeficiente de p_{l+1}^{l+w} en la suma del lado derecho de 2.7 es

$$\sum_{j=0}^{w} \frac{(-1)^{(l+j)}}{l+j} \binom{l}{l-w+j} \binom{l+j}{l}$$

pero ésta suma en nula, como se demostrará en el lema siguiente. Así,

$$S = \sum_{l=2}^{n} \frac{(-1)^l}{l} (p_1^l + p_{l+1}^l) + p_2^2. \tag{2.8}$$

Por otro lado,

$$\delta(h_{i_1} \dots h_{i_l}) = Id \cup h_{i_1} \dots h_{i_l} - h_{i_1} \dots h_{i_l}(Id \cup Id) + h_{i_1} \dots h_{i_l} \cup Id$$

por lo que

$$\sum_{l=2}^{n} \frac{(-1)^l}{l} \sum_{i_1 + \dots + i_l = n} \delta(h_{i_1} \dots h_{i_l}) \quad = \quad \sum_{l=2}^{n} \frac{(-1)^l}{l} p_1^l - S + \sum_{l=2}^{n} \frac{(-1)^l}{l} p_{l+1}^l$$

$$
\begin{aligned}
&= -p_2^2 \\
&= -\sum_{i+j=n} h_i \cup h_j
\end{aligned}
$$

Lema 8 *Si $w > 0$, $0 < l \leq w$, entonces*

$$\sum_{k=l}^{l+w} \frac{(-1)^k}{k} \binom{l}{k-w} \binom{k}{l} = 0$$

Dem.- Sean $s_1, \ldots, s_n$ las n funciones simétricas elementales en n variables. Se cumple que,

$$s_{n-p}(m_1+1, \ldots, m_n+1) = \sum_{i=p}^{n} \binom{i}{p} s_{n-i}(m_1, \ldots, m_n), \quad 0 \leq p \leq n.$$

Sustituyendo $n = l + w$, $p = w$, se obtiene

$$
\begin{aligned}
0 = s_w(0, \ldots, 0, \underbrace{1, \ldots, 1}_{w-1}) &= \sum_{i=l}^{l+w} \binom{i}{l} s_{n-i}(\underbrace{-1, \ldots, -1}_{l+1}, 0, \ldots, 0) \\
&= \sum_{i=l}^{l+w} \binom{i}{l} \binom{l+1}{n-i} (-1)^{n-i} \\
&= \sum_{i=l}^{l+w} \frac{(-1)^{n-i} i! (l+1)}{(i-l)!(l+w-i)!(i+1-w)!},
\end{aligned}
$$

cancelando $l+1$,

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=l}^{l+w} \frac{(-1)^{n-i} i!}{(i-l)!(l+w-i)!(i+1-w)!} \\
&\quad \text{haciendo el cambio } k = i+1, l' = l+1 \\
&= \sum_{k=l+1}^{l+1+w} \frac{(-1)^{n-i}(k-1)!}{(k-l')!(l'+w-k)!(k-w)!} \\
&= \sum_{k=l'}^{l'+w} \frac{(-1)^{n-k}}{k} \binom{l'}{k-w} \binom{k}{l'}
\end{aligned}
$$

Capítulo 3

Deformaciones Coasociativas

Siguen ahora los resultados duales a los del capítulo anterior para coálgebras, ([6], pag. 54). Las demostraciones de tales resultados no son precisamente duales a las del caso asociativo. Son más bien consecuencia del caso asociativo. Lo que sucede es que para el caso coasociativo hay un producto de convolución involucrado que es asociativo, el cual da información sobre el coproducto debido a que se trabaja con series de potencias.

Teorema 11 *Supóngase que la terna (A, δ, ϵ) es una k-coálgebra donde δ es comultiplicación y ϵ es counidad. Si (A_t, δ_t) es deformación de (A, δ) entonces δ_t tiene counidad.*

Dem.- Sea $B = \otimes_k A$ la k-álgebra tensorial de A con $u : k \to B$ morfismo unidad, y pongamos $B_t = (\otimes_k A)_t$ con producto β_t trivial y morfismo unidad $u_t : k_t \to B_t$. Resulta que $Hom_{k_t}(A_t, B_t)$ es k_t-álgebra con producto γ_t dado por convolución:

$$\gamma_t(f_t, g_t) = \beta_t(f_t \widehat{\otimes} g_t)\delta_t \tag{3.1}$$

para $f_t, g_t \in Hom_{k_t}(A_t, B_t)$, donde $f_t \widehat{\otimes} g_t$ es la única extensión I-continua de $f_t \otimes g_t$ a $A_t \widehat{\otimes}_{k_t} A_t$.

Pero como cada $f_t \in Hom_{k_t}(A_t, B_t)$ tiene la forma $f_t = f_0 + f_1 t + f_2 t^2 + \ldots$, donde $f_i \in Hom_k(A, B)$, $\forall i$, se sigue que

$$Hom_{k_t}(A_t, B_t) \simeq (Hom_k(A, B))_t$$

como k_t-módulos. Vía tal isomorfismo $(Hom_k(A, B))_t$ tiene una estructura de k_t-álgebra isomorfa a la de $Hom_{k_t}(A_t, B_t)$. Además para $f, g \in Hom_k(A, B)$, si hacemos $t = 0$ en 3.1 se obtiene $\gamma_0(f,g) = \alpha(f\otimes g)\delta$, que es producto asociativo unitario de $Hom_k(A,B)$. Es decir, $(Hom_{k_t}(A_t,B_t),\gamma_t)$ es deformación de $(Hom_k(A,B),\gamma_0)$.

Siendo que γ_0 tiene unidad $u\epsilon$, γ_t tambien tiene unidad e_t, (teo.1, cap.2, pag. 14) tal que $e_0 = u\epsilon$

Extendamos ϵ a los productos tensoriales $A^{n\otimes} = \underbrace{A\otimes_k\ldots\otimes_k A}_{n-veces}$ de manera k-lineal, $n = 1,2,\ldots$, y entonces a la suma directa $B = \oplus_{n=0}^{\infty}A^{n\otimes}$, $(A^{0\otimes} = k)$, luego a B_t de manera k_t-lineal . Abusando de la notación, denotemos con ϵ_t a ésta última extensión; $\epsilon_t : B_t \to k_t$.

$\epsilon_t e_t : A_t \to k_t$ de tal forma que $u_t\epsilon_t e_t \in Hom_{k_t}(A_t,B_t)$, y como e_t unidad,

$$\begin{aligned}
u_t\epsilon_t e_t &= \gamma_t(u_t\epsilon_t e_t, e_t)\\
&= \beta_t(u_t\epsilon_t e_t\hat{\otimes}e_t)\delta_t
\end{aligned}$$

en particular, si $a \in A$, y ponemos $\delta_t(a) = a_{(1)}\hat{\otimes}a_{(2)}$, (límite de sumas en $A_t\hat{\otimes}A_t$), $1 \in k \subsetneq B$,

$$\begin{aligned}
\epsilon_t e_t(a)1 &= \beta_t(\epsilon_t e_t(a_{(1)})1\hat{\otimes}e(a_{(2)}))\\
&= \epsilon_t e_t(a_{(1)})e(a_{(2)}) \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

además de que

$$\begin{aligned}
\beta_t(u_t\epsilon_t e_t\hat{\otimes}u_t\epsilon_t e_t)\delta_t(a) &= \beta_t(\ \epsilon_t e_t(a_{(1)})1\hat{\otimes}\epsilon_t e_t(a_{(2)})1\ )\\
&= \epsilon_t e_t(a_{(1)})\ \epsilon_t e_t(a_{(2)})1\\
&= \epsilon_t(\ \epsilon_t e_t(a_{(1)})e_t(a_{(2)})\ )1\\
&= \epsilon_t(\epsilon_t e_t(a)1),\ \text{por } 3.2\\
&= \epsilon_t(e_t(a))1\\
&= u_t\epsilon_t e_t(a),\ \forall a \in A.
\end{aligned}$$

Se sigue que $\gamma_t(u_t\epsilon_t e_t, u_t\epsilon_t e_t) = u_t\epsilon_t e_t$, i.e., $u_t\epsilon_t e_t$ es idempotente tal que

$$\begin{aligned}
u_t\epsilon_t e_t|_{t=0} &= u\epsilon e_0\\
&= u\epsilon(u\epsilon)\\
&= u\epsilon
\end{aligned}$$

pero también e_t es idempotente y $e_0 = u\epsilon$. Entonces por unicidad (lema 1, cap. 2, pag. 14),

$$u_t\epsilon_t e_t = e_t \qquad (3.3)$$

Ésta última ecuación implica que $\epsilon_t e_t$ es counidad para δ_t. En efecto, si $a \in A$, $\delta_t(a) = a_{(1)}\hat{\otimes}a_{(2)}$ como antes, $i_{A_t} : A_t \hookrightarrow B_t$ inclusión, entonces, como

$\gamma_t(e_t, i_{A_t}) = i_{A_t}$.

$$\begin{aligned} a &= \beta_t(\, e_t(a_{(1)}) \hat{\otimes} a_{(2)}\,) \\ &= \beta_t(\, \iota_t e_t(a_{(1)}) 1 \hat{\otimes} a_{(2)}\,) \text{ por } 3.3 \\ &= \iota_t e_t(a_{(1)}) a_{(2)} \end{aligned}$$

se sigue entonces, en $k_t \otimes_{k_t} A_t$.

$$\begin{aligned} 1 \otimes a &= \iota_t e_t(a_{(1)}) \otimes a_{(2)} \\ &= (\iota_t e_t \otimes Id)\delta_t(a), \ \forall\, a \in A \end{aligned}$$

o equivalentemente, $q_1 = (\iota_t e_t \otimes Id)\delta_t$. Donde $q_1 : A_t \to k_t \otimes_{k_t} A_t$ isomorfismo canónico. De manera similar, $q_2 = (Id \otimes \iota_t e_t)\delta_t$.

La demostración del dual al teo. 2 del capítulo asociativo, pag. 17, es también dual. Nótese como es clara cual debe de ser la definición de un morfismo entre dos deformaciones de un coproducto.

Definición 14 *Sea A un k-módulo con coproducto coasociativo $\delta : A \to A \otimes_k A$. Si δ_t', δ_t'' son dos deformaciones de δ, un morfismo entre estas deformaciones es una función $f_t \in End_{k_t}(A_t)$ tal que $f_t|_{t=0} = Id_A$ y además,*

$$\begin{array}{ccccc} & & \delta_t' & & \\ & A_t & \to & A_t \hat{\otimes}_{k_t} A_t & \\ f_t & \downarrow & \circlearrowright & \downarrow & f_t \hat{\otimes} f_t \\ & A_t & \to & A_t \hat{\otimes}_{k_t} A_t & \\ & & \delta_t' & & \end{array}$$

Teorema 12 *Sea (A, δ) una k-coálgebra, (A_t, δ_t) deformación. Si el coproducto δ tiene counidad ϵ entonces existe una deformación de A isomorfa a (A_t, δ_t) tal que también tiene a ϵ como counidad.*

Dem.- Sean, $q_1 : A_t \to A_t \hat{\otimes}_{k_t} A_t$ isomorfismo canónico, ϵ_t counidad de δ_t, $\theta_t : A_t \to A_t$ definida por $\theta_t = q_1^{-1}(\epsilon_t \hat{\otimes} Id)\delta$. Entonces, θ_t es k_t-lineal tal que $\theta_0 = Id_A$ y

$$\gamma_t = (\theta_t \hat{\otimes} \theta_t)\delta_t \theta_t^{-1}$$

define una deformación de δ isomorfa a δ_t. Veamos que ϵ extendida a A_t es counidad para γ_t.

Para $a \in A$, pongamos $\delta(a) = a^{(1)} \otimes a^{(2)}$,

$$\begin{aligned}
\epsilon\theta_t(a) &= \epsilon(\epsilon_t(a^{(1)})a^{(2)}) \\
&= \epsilon_t(a^{(1)})\epsilon(a^{(2)}) \\
&= \epsilon_t(a^{(1)}\epsilon(a^{(2)})) \\
&= \epsilon_t(a), \text{ pues } \epsilon \text{ es counidad de } \delta.
\end{aligned}$$

i.e., $\epsilon\theta_t = \epsilon_t$. Luego,

$$\begin{aligned}
(\epsilon\hat{\otimes}Id)(\theta_t\hat{\otimes}\theta_t)\delta_t &= (\epsilon\theta_t \otimes \theta_t)\delta_t \\
&= (Id\hat{\otimes}\theta_t)(\epsilon_t\hat{\otimes}Id)\delta_t \\
&= (Id\hat{\otimes}\theta_t)q_1 \\
&= 1 \otimes \theta_t
\end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}
(\epsilon\hat{\otimes}Id)\gamma_t &= 1\hat{\otimes}\theta_t\theta_t^{-1} \\
&= q_1.
\end{aligned}$$

Similarmente $(Id\hat{\otimes}\epsilon)\gamma_t = q_2$.

También se obtiene una propiedad análoga cuando se tiene a la vez estructuras de álgebras y coágebras que son compatibles entre sí. Las llamadas biálgebras.

Observación.- Si A es un k-módulo entonces $Hom_{k_t}(A_t \otimes_{k_t} A_t, k_t) \simeq (\, Hom_k(A \otimes_k A, k)\,)_t$.

Dem.- Si $f \in Hom_{k_t}(A_t \otimes_{k_t} A_t, k_t)$, $a \otimes b \in A \otimes_k A$, entonces la ecuación

$$f(a \otimes b) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(a \otimes b)t^i$$

con $f_i(a \otimes b) \in k$, define el elemento $\sum_{i=0}^{\infty} f_i t^i$ de $(\, Hom_k(A \otimes_k A, k)\,)_t$.

Recíprocamente, el elemento $\sum_{i=0}^{\infty} f_i t^i$ de $(\, Hom_k(A \otimes_k A, k)\,)_t$ define a la función de $Hom_{k_t}(A_t \otimes_{k_t} A_t, k_t)$ siguiente,

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=0}^{\infty} f_i t^i : A_t \otimes_{k_t} A_t &\rightarrow k_t \\
\textstyle\sum_{i=0} a_u t^u \otimes \sum_{v=0} b_i t^v &\mapsto \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+u+v=n} f_i(a_u \otimes b_v)t^n
\end{aligned}$$

Teorema 13 *Sea $(A, \alpha, u, \delta, \epsilon)$ una k-biálgebra (i.e., (A, α, u) álgebra asociativa unitaria, (A, δ, ϵ) coálgebra, donde δ y ϵ son k-morfismos de álgebras unitarias). Si $(A_t, \alpha_t, u_t, \delta_t)$ es una deformación de (A, α, u, δ) entonces δ_t también tiene una counidad ϵ_t de tal forma que $(A_t, \alpha_t, u_t, \delta_t, \epsilon_t)$ es deformación de $(A, \alpha, u, \delta, \epsilon)$.*

Dem.- Por teorema 11, pag. 35, δ_t tiene counidad ϵ_t. Por demostrar que ϵ_t es un morfismo que respeta el producto α_t.

El producto tensorial, $A_t \otimes_{k_t} A_t$ tiene una estructura de coálgebra coasociativa dada por

$$\beta_t = (Id \otimes \sigma \otimes Id) \circ (\delta_t \otimes \delta_t)$$

donde $\sigma : A_t \otimes_{k_t} A_t \to A_t \otimes_{k_t} A_t$ switch. Luego, como antes, $Hom_{k_t}(A_t \otimes_{k_t} A_t, k_t)$ tiene una estructura de álgebra asociativa con producto γ_t dado por convolución,

$$\gamma_t(f_t, g_t) = (f_t \otimes g_t)\beta_t$$

vía la identificación $k_t \otimes_{k_t} k_t \simeq k_t$, y con counidad $\epsilon_t \otimes \epsilon_t$.

Por la observación inmediata anterior, $(Hom_{k_t}(A_t \otimes_{k_t} A_t, k_t), \gamma_t)$ es deformación de $(Hom_k(A \otimes_k A, k), \gamma_0)$.

$\epsilon\alpha$ es unidad de $(Hom_k(A \otimes_k A, k), \gamma_0)$, pues si $a, b \in A$ y $\delta(a) = a_{(1)} \otimes a_{(2)}, \delta(b) = b_{(1)} \otimes b_{(2)}$,

$$\begin{aligned}
\gamma_0(\epsilon\alpha, g)(a \otimes b) &= \epsilon\alpha(a_{(1)} \otimes b_{(1)})g(a_{(2)} \otimes b_{(2)}) \\
&= \epsilon(a_{(1)})\epsilon(b_{(1)})g(a_{(2)} \otimes b_{(2)}) \\
&= g(\epsilon(a_{(1)})a_{(2)} \otimes \epsilon(b_{(1)})b_{(2)}) \\
&= g(a \otimes b)
\end{aligned}$$

i.e., $\gamma_0(\epsilon\alpha, g) = \epsilon\alpha$, y similarmente $\gamma_0(g, \epsilon\alpha) = g$, $\forall g \in Hom_k(A \otimes_k A, k)$.

$\epsilon_t\alpha_t : A_t \otimes_{k_t} A_t \to k_t$ es idempotente con el producto γ_t. En efecto, para $a, b \in A$, pongamos $\delta_t(a) = a_{(1)} \hat{\otimes} a_{(2)}, \delta_t(b) = b_{(1)} \hat{\otimes} b_{(2)}$,

$$\begin{aligned}
(\epsilon_t\alpha_t \otimes \epsilon_t\alpha_t)\beta_t(a \otimes b) &= (\epsilon_t\alpha_t \otimes \epsilon_t\alpha_t)(Id \otimes \sigma \otimes Id)\delta_t(a) \otimes \delta_t(b) \\
&= (\epsilon_t\alpha_t \otimes \epsilon_t\alpha_t)(a_{(1)} \otimes b_{(1)}) \otimes (a_{(2)} \otimes b_{(2)}) \\
&= \epsilon_t\alpha_t(a_{(1)}, b_{(1)})\epsilon_t\alpha_t(a_{(2)}, b_{(2)}) \\
&= \epsilon_t(\alpha_t(a, b)_{(1)})\epsilon_t(\alpha_t(a, b)_{(2)}) \text{ pues } \delta_t \text{ es de álgebras,} \\
&= \epsilon_t(\epsilon_t(\alpha_t(a, b)_{(1)})\alpha_t(a, b)_{(2)}) \\
&= \epsilon_t(\alpha_t(a, b))
\end{aligned}$$

i.e.,

$$\gamma_t(\epsilon_t\alpha_t, \epsilon_t\alpha_t) = (\epsilon_t\alpha_t \otimes \epsilon_t\alpha_t)\beta_t = \epsilon_t\alpha_t.$$

Así que $\epsilon_t\alpha_t$ es idempotente tal que $\epsilon_t\alpha_t|_{t=0} = \epsilon\alpha$ unidad. Pero también $\epsilon_t \otimes \epsilon_t$ es idempotente. Entonces por unicidad, (lema 1, cap. 2, pag. 14), se sigue que,

$$\epsilon_t\alpha_t = \epsilon_t \otimes \epsilon_t$$

o lo que es lo mismo, ϵ_t es morfismo de álgebras.

En el caso asociativo, deformación de invertible es invertible (teo 3. cap. 2, pag. 17). Como una aplicación de tal hecho para el caso coasociativo se obtiene que deformaciones de antípodas siguen siendo antípodas, en la categoría de biálgebras.

Teorema 14 *Sea $(A, \alpha, u, \delta, \epsilon, \eta)$ una k-álgebra de Hopf, donde η es antípoda. Si $(A_t, \alpha_t, u_t, \delta_t, \epsilon_t)$ es una deformación de $(A, \alpha, u, \delta, \epsilon)$ entonces la deformación también tiene antípoda.*

Dem.- Una vez más, $End_{k_t}(A_t)$ tiene una estructura de álgebra asociativa con producto dado por convolución,

$$\beta_t(f_t, g_t) = \alpha_t(f_t \hat{\otimes} g_t)\delta_t, \ \forall\, f_t, g_t \in A_t$$

que en $t = 0$ es el producto de convolucion de $End_k(A)$. Y como $End_{k_t}(A_t) \simeq (\, End_k(A)\,)_t$, se sigue que $(\, End_{k_t}(A_t), \beta_t\,)$ es deformación de $(\,(\, End_k(A)\,)_t, \beta_0\,)$.

$Id_A \in End_k(A)$ es invertible, luego por teo. 3, cap. 2 pag. 17, $Id_A \in (\, End_k(A)\,)_t$ sigue siendo invertible lo cual es equivalente a que $Id_{A_t} \in (\, End_k(A)\,)_t$ sea invertible. Es decir, existe una antípoda en la deformación.

Así que para deformar álgebras de Hopf sólo hay que tener cuidado del producto y del coproducto. La unidad, counidad y la antípoda se cuidan solas.

Corolario 1 *Sea $(A, \alpha, u, \delta, \epsilon, \eta)$ una k-álgebra de Hopf. Si $(A_t, \alpha_t, \delta_t)$ es deformación de (A, α, δ) entonces existen u_t unidad, ϵ_t counidad y η_t antípoda tales que $(A_t, \alpha_t, u_t, \delta_t, \epsilon_t, \eta_t)$ es álgebra de Hopf, deformación de $(A, \alpha, u, \delta, \epsilon, \eta)$.*

Antes de dar la condición dual a las ecuaciones de deformación (2.2), pag. 19, veamos el dual a teo. 5, cap.2 pag. 19.

Teorema 15 *Sea A una k-coálgebra con coproducto δ, k con característica cero. Sean $f, g \in End_k(A)$ tales que $f \circ g = g \circ f$, $\delta f = (f \otimes Id + Id \otimes f)\delta$, $\delta g = (g \otimes Id + Id \otimes g)\delta$. Entonces*

$$\delta_t = \delta + \frac{t}{1!}(f \otimes g)\delta + \frac{t^2}{2!}(f^2 \otimes g^2)\delta + \frac{t^3}{3!}(f^3 \otimes g^3)\delta + \dots$$

es una deformación de δ, donde los exponentes de f y g indican composición.

Dem.- Primero obsérvese que valen las fórmulas,

$$\delta f^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (f^{n-j} \otimes f^j)\delta, \ \delta g^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (g^j \otimes g^{n-j})\delta. \tag{3.4}$$

Ahora,

$$
\begin{aligned}
(Id \otimes \delta_t)\delta_t &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{i+j=n} \frac{1}{i!j!}(Id \otimes (f^j \otimes g^j)\delta)(f^i \otimes g^i)\delta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} (f^i \otimes (f^j \otimes g^j)\delta g^i)\delta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{i+j=n} \frac{1}{i!j!}(f^i \otimes (f^j \otimes g^j)(\sum_{l=0}^{i} \binom{i}{l} (g^l \otimes g^{i-l})\delta)\delta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{i+j=n} \frac{1}{i!j!} \sum_{l=0}^{i} \binom{i}{l} (f^i \otimes (f^j g^l \otimes g^{j+i+l})\delta)\delta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{j=0,l=0}^{n,n-j} \frac{1}{(n-j)!j!} \binom{n-j}{l} (f^{n-j} \otimes f^j g^l \otimes g^{n-l})(Id \otimes \delta)\delta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{l=0,j=0}^{n,n-l} \frac{1}{(n-j)!j!} \binom{n-j}{l} (f^{n-j} \otimes f^j g^l \otimes g^{n-l})(Id \otimes \delta)\delta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{l=0,j=0}^{n,n-l} \frac{1}{(n-l)!l!} \binom{n-l}{j} (f^{n-j} \otimes f^j g^l \otimes g^{n-l})(Id \otimes \delta)\delta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{i+j=n} \frac{1}{i!j!} \sum_{l=0}^{i} \binom{i}{l} (f^{n-l} \otimes f^l g^j \otimes g^i)(Id \otimes \delta)\delta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{i+j=n} \frac{1}{i!j!} \sum_{l=0}^{i} \binom{i}{l} (f^{i+j-l} \otimes g^j f^l \otimes g^i)(\delta \otimes Id)\delta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{i+j=n} \frac{1}{i!j!}((f^j \otimes g^j)(\sum_{l=0}^{i} \binom{i}{l} (f^{i-l} \otimes f^l)\delta \otimes g^i)\delta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{i+j=n} \frac{1}{i!j!}((f^j \otimes g^j)\delta f^i) \otimes g^i)\delta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{i+j=n} \frac{1}{i!j!}((f^j \otimes g^j)\delta \otimes Id)(f^i \otimes g^i)\delta \\
&= (\delta_t \otimes Id)\delta_t
\end{aligned}
$$

Ejem. 9 Sea sl_2^+ el conjunto de matrices triangulares superiores de traza cero con entradas en los números complejos. sl_2^+ es una álgebra de Lie. Denotemos con U^+ a su álgebra envolvente universal. U^+ es una coálgebra con comultiplicación δ. Construiremos una deformación no trivial para la coálgebra U^+.

Como

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

son básicos para sl_2, los monomios $\{X^i H^j\}_{i\geq 0, j\geq 0}$ forman una base para U^+ según el teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt.

Tomemos γ, ν como un par de números complejos fijos. Definimos funciones lineales f, g como sigue,

$$f : U^+ \to U^+, \; f(z) = \gamma X z, \; g : U^+ \to U^+, \; g(z) = \nu z H$$

Veamos que f y g satisfacen las condiciones del teorema 15, pag 40. Que f conmuta con g es obvio, y

$$\begin{aligned} \delta g(z) &= \nu\delta(z)\delta(H) \\ &= \nu\delta(z)(H \otimes 1 + 1 \otimes H) \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} (g \otimes Id + Id \otimes g)\delta(z) &= (Id \otimes g)\delta(z) + (g \otimes Id)\delta(z) \\ &= \nu z_{(1)} \otimes z_{(2)} H + \nu z_{(1)} H \otimes z_{(2)} \\ &= \nu\delta(z)(1 \otimes H) + \nu\delta(z)(H \otimes 1) \\ &= \delta g(z) \end{aligned}$$

así que $(g \otimes Id + Id \otimes g)\delta = \delta g$. Similarmente $(f \otimes Id + Id \otimes f)\delta = \delta f$. Estamos en condiciones de afirmar que

$$\delta_t = \delta + \frac{t}{1!}(f \otimes g)\delta + \frac{t^2}{2!}(f^2 \otimes g^2)\delta + \frac{t^3}{3!}(f^3 \otimes g^3)\delta + \ldots$$

es una deformación de δ, según el teorema 15, pag. 40. Por ejemplo,

$\delta_t(X) =$

$$X \otimes 1 + 1 \otimes X + (f \otimes g)(X \otimes 1 + 1 \otimes X)t + \tfrac{1}{2!}(f^2 \otimes g^2)(X \otimes 1 + 1 \otimes X)t^2 + \ldots$$

$$= X \otimes 1 + 1 \otimes X + (\gamma X^2 \otimes \nu H + \gamma X \otimes \nu H X)t + \tfrac{1}{2!}(\gamma^2 X^3 \otimes \nu^2 H^2$$

$$+ \gamma^2 X^2 \otimes \nu^2 H^2 X)t^2 + \tfrac{1}{3!}(\gamma^3 X^4 \otimes \nu^3 H^3 + \gamma^3 X^3 \otimes \nu^3 H^3 X)t^3 + \ldots$$

$$= e^{\gamma X \otimes \nu H t}(X \otimes 1) + e^{\gamma X \otimes \nu H t}(1 \otimes X),$$

i.e.,

$$\delta_t(X) = e^{\gamma X \otimes \nu H t}\delta(X)$$

y similarmente

$$\delta_t(H) = \delta(H)e^{\gamma X \otimes \nu H t}.$$

Ejem. 10 sl_2^+, U^+, ν como en el ejemplo anterior. Sea $x \in sl_2^+$ fijo ($\delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$). Se definen,

$$f : U^+ \to U^+,\ f(z) = [x, z],\ g : U^+ \to U^+,\ g(z) = \nu z x$$

La prueba de que g es coderivación ya se hizo en el ejemplo inmediato anterior. f es también coderivación: para $z \in U^+$,

$$\begin{aligned}
(f \otimes Id + Id \otimes f)\delta(z) &= (Id \otimes f + f \otimes Id)(z_{(1)} \otimes z_{(2)})\\
&= z_{(1)} \otimes [x, z_{(2)}] + [x, z_{(1)}] \otimes z_{(2)}\\
&= z_{(1)} \otimes (xz_{(2)} - z_{(2)}x) + (xz_{(1)} - z_{(1)}x) \otimes z_{(2)}\\
&= \delta(x)(z_{(1)} \otimes z_{(2)}) - (z_{(1)} \otimes z_{(2)})\delta(x)\\
&= [\delta(x), \delta(z)]\\
&= \delta[x, z]\\
&= \delta f(z)
\end{aligned}$$

Por lo que ésta igualdad se cumple en todo U^+. Verifiquemos ahora que f conmuta con g.

$$\begin{aligned}
gf(z) &= g[x, z]\\
&= g(xz) - g(zx)\\
&= \nu x^2 z - \nu x z x\\
&= \nu[x, xz]\\
&= \nu f(xz)\\
&= fg(z)
\end{aligned}$$

Y de nuevo, por el teorema 15, pag. 40, se tiene una deformación δ_t de δ. Fijemos $x = H, \nu = \frac{1}{2}$ y calculemos,

$$\begin{aligned}
\delta_t(X) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}(f^i \otimes g^i)(X \otimes 1 + 1 \otimes X)t^i\\
&= (X \otimes 1 + 1 \otimes X) + \frac{1}{1!}(X \otimes H)t + \frac{1}{2!}(X \otimes H^2)t^2 + \dots\\
&= X \otimes e^{Ht} + 1 \otimes X,
\end{aligned}$$

y por su lado,

$$\delta_t(H) = H \otimes 1 + 1 \otimes H.$$

Tal δ_t tiene más propiedades. Tomemos la restricción de δ_t a sl_2^+,

$$\delta_t|_{sl_2^+} : sl_2^+ \to U_t^+ \otimes_k U_t^+$$

Como

$$[\delta_t(H), \delta_t(X)] = [H, X] \otimes e^{Ht} + 1 \otimes [H, X] = \delta_t[H, X]$$

$\delta_t|_{sl_2^+}$ es un morfismo de Lie, el cual se extiende a un morfismo de álgebras unitarias $\Delta_t : U^+ \to U_t^+ \otimes_k U_t^+$ y éste a su vez a un k_t-morfismo de álgebras unitarias $\Delta_t : U_t^+ \to U_t^+ \otimes_k U_t^+$. Δ_t sigue siendo coasociativa porque en $\Delta_t(H^i) = \Delta_t(H)^i = \delta_t(H)^i = \delta_t(H^i)$ y $\Delta_t(X) = \delta_t(X)$, en consecuencia,

$$\begin{aligned}
(\Delta_t \otimes Id)\Delta_t(X) &= (\Delta_t \otimes Id)(X \otimes e^{Ht} + 1 \otimes X) \\
&= (\delta_t \otimes Id)\delta_t(X) \\
&= (Id \otimes \delta_t)\delta_t(X) \\
&= (Id \otimes \Delta_t)\Delta_t(X),
\end{aligned}$$

i.e., Δ_t es coasociativa en X, y claramente lo es en H, luego como X, H generan como k-álgebra a U^+, se sigue que Δ_t es coasociativa en todo U^+, pues si lo es en x y en y, entonces lo es en xy. En efecto,

$$\begin{aligned}
(Id \otimes \Delta_t)\Delta_t(xy) &= (Id \otimes \Delta_t)\Delta_t(x)\Delta_t(y) \\
&= (Id \otimes \Delta_t)(x_{(1)}y_{(1)} \otimes x_{(2)}y_{(2)}) \\
&= x_{(1)}y_{(1)} \otimes \Delta_t(x_{(2)})\Delta_t(y_{(2)}) \\
&= (x_{(1)} \otimes \Delta_t(x_{(2)}))(y_{(1)} \otimes \Delta_t)(y_{(2)}) \\
&= (\Delta_t \otimes Id)\Delta_t(x)(\Delta_t \otimes Id)\Delta_t(y) \\
&= (\Delta_t \otimes Id)\Delta_t(xy).
\end{aligned}$$

Por lo tanto Δ_t *es una deformación de la biálgebra* U^+.

Observación.-

i) sl_2^+ no es semisimple pues si $(,)$ denota a la forma de Killing, $(X, X) = 0$, porque $adj(X) \circ adj(X)(X) = 0$, $adj(X) \circ adj(X)(H) = 0$.

ii) Supóngase que A es una k-biálgebra y que f, g, δ_t son como en el teorema 15, pag. 40. Consideremos A_t con deformación trivial del álgebra A. Una condición adicional para que δ_t resulte un morfismo de k_t-álgebras (es decir una estructura de biálgebra), es que $f \otimes g : A \otimes A \to A \otimes A$ sea una derivación.

Dem.- Sean $x, y \in A$,

$$\begin{aligned}
\delta_t(x)\delta_t(y) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i+j=n}\frac{1}{i!j!}(f^i \otimes g^i)\delta(x)(f^j \otimes g^j)\delta(y)t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{u=0}^{n}\binom{n}{u}(f^{n-u} \otimes g^{n-u})\delta(x)(f^u \otimes g^u)\delta(y)t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(f \otimes g)^n(\delta(x)\delta(y))t^n \\
&= \delta_t(xy).
\end{aligned}$$

Podemos prescindir de la característica cero de la forma siguiente.

Teorema 16 *Sea A una k-coálgebra con coproducto δ. Sean $f, g \in End_k(A)$ tales que $f \circ g = g \circ f$ y,*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A \otimes_k A \arrow[d, "Id \otimes f"] \\
A \arrow[r, "\delta"] & A \otimes_k A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A \otimes_k A \arrow[d, "g \otimes Id"] \\
A \arrow[r, "\delta"] & A \otimes_k A
\end{tikzcd}$$

Entonces

$$\delta_t = \delta + t(f \otimes g)\delta + t^2(f^2 \otimes g^2)\delta + t^3(f^3 \otimes g^3)\delta + \ldots$$

es una deformación de δ, donde los exponentes de f y g indican composición.

Dem.- Primero obsérvese que,

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_k A \arrow[r, "Id \otimes f"] & A \otimes_k A \arrow[r, "Id \otimes f"] & \ldots \arrow[r, "Id \otimes f"] & A \otimes_k A \\
A \arrow[u, "\delta"] \arrow[r, "f"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & A \arrow[u] \arrow[r, "f"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \ldots \arrow[r, "f"] & A \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

i.e., $\delta f^k = (Id \otimes f^k)\delta$, y similarmente $\delta g^k = (g^k \otimes Id)\delta$. Por otro lado,

$$\begin{aligned}
(\delta_t \otimes Id)\delta_t &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{i+j=n}((f^i \otimes g^i)\delta \otimes Id)(f^j \otimes g^j)\delta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{i+j=n}((f^i \otimes g^i)\delta f^j \otimes g^j)\delta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{i+j=n}((f^i \otimes g^i)(Id \otimes f^j)\delta \otimes g^j)\delta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{i+j=n}(f^i \otimes g^i f^j \otimes g^j)(\delta \otimes Id)\delta,
\end{aligned}$$

mientras que,

$$\begin{aligned}(Id\otimes\delta_t)\delta_t &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i+j=n}(Id\otimes(f^j\otimes g^j)\delta)(f^i\otimes g^i)\delta\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i+j=n}(f^i\otimes(f^j\otimes g^j)\delta g^i)\delta\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i+j=n}(f^i\otimes(f^j\otimes g^j)(g^i\otimes Id)\delta)\delta\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i+j=n}(f^i\otimes f^jg^i\otimes g^j)(Id\otimes\delta)\delta\end{aligned}$$

y por la coasociatividad de δ se sigue que δ_t es coasociativa.

Puesto que $A_t\hat{\otimes}_{k_t}A_t \simeq (A\otimes_k A)_t$ como k_t-módulos, resulta que

$$Hom_{k_t}(A_t, A_t\hat{\otimes}_{k_t}A_t) \simeq (\ Hom_k(A, A\otimes_k A\ )_t$$

también como k_t-módulos. Por lo que si δ_t es deformación coasociativa, en particular tiene la forma,

$$\delta_t = \sum_{i=0}^{\infty} t^i\delta_i$$

donde cada $\delta_i : A_t \to A_t\otimes_{k_t}A_t$, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Se obtienen entonces ecuaciones análogas a (2.2), pag. 19. A saber, $\delta_t = \sum_{i=0}^{\infty} t^i\delta_i$ es coasociativa ssi

$$\sum_{i+j=n}\{(\delta_i\otimes Id)\delta_j - (Id\otimes\delta_i)\delta_j\} = 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.5}$$

Despejando éstas,

$$\sum_{\substack{i+j=n\\ i>0, j>0}}\{(\delta_i\otimes Id)\delta_j - (Id\otimes\delta_i)\delta_j\} = \delta^2\delta_n \tag{3.6}$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$, donde

$$\delta^2\delta_n = (Id\otimes\delta)\delta_n - (\delta\otimes Id)\delta_n + (Id\otimes\delta_n)\delta - (\delta_n\otimes Id)\delta$$

es de nuevo un 2-operador de cofrontera en la cohomología de Hoschild de δ_n como se explica en lo que sigue.

Sea M un k-módulo, (A, δ) una k-coálgebra, y M también un A-bicomódulo (escríbase la definición de bimódulo en forma diagramática y luego cambiése el sentido de las flechas, se obtiene entonces la definición de bicomódulo). Sea $j : A \to S$ morfismo de k-coálgebras. Se definen ([6], pag. 57),

$$A^{n\otimes} = \underbrace{A \otimes_k \ldots \otimes_k A}_{n-veces}$$

$$A^{0\otimes} = k$$

$$\delta(i) : A^{n\otimes} \to A^{(n+1)\otimes}, \delta(i)(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = \ldots \otimes a_{i-1} \otimes \delta(a_i) \otimes a_{i+1} \ldots$$

$$C_c^n(M; S, A) = \{f : M \to A^{n\otimes} \mid f \text{ conmuta } 3.7, 3.8, 3.9, \ i = 1, 2, \ldots, n-1\}$$

$$\begin{array}{ccccc} & S \otimes_k A^{n\otimes} & \overset{(j\otimes Id)\delta\otimes Id_{A^{(n-1)\otimes}}}{\longleftarrow} & A^{n\otimes} & \\ Id \otimes f & \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow & f \\ & S \otimes_k M & \overset{(j\otimes Id)\lambda}{\longleftarrow} & M & \end{array} \tag{3.7}$$

$$\begin{array}{ccccc} & A^{n\otimes} \otimes_k S & \overset{Id_{A^{(n-1)\otimes}}\otimes(Id\otimes j)\delta}{\longleftarrow} & A^{n\otimes} & \\ f \otimes Id & \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow & f \\ & M \otimes_k S & \overset{(Id\otimes j)\rho}{\longleftarrow} & M & \end{array} \tag{3.8}$$

$$\begin{array}{cccc} A \otimes_k \ldots \otimes_k A \otimes_k \underbrace{A}_{i-lugar} \otimes_k S \otimes_k \ldots \otimes_k A & \overset{j_{i+1}\delta(i)}{\longleftarrow} & A^{n\otimes} & \\ j_{i+1}\delta(i+1) \quad \uparrow & & \uparrow & f \\ A^{n\otimes} & \overset{f}{\longleftarrow} & M & \end{array} \tag{3.9}$$

donde $j_i = Id \otimes j \otimes Id$; λ, ρ son las estructuras izquierdas y derechas de comódulo de M respectivamente.

Definición 15 *Los elementos del k-módulo $C_c^n(M; S, A)$ se llaman n-cocadenas de Hoschild S-relativas con coeficientes en M para coálgebras.*

Definición 16 *El morfismo de cofrontera de Hoschild para coálgebras es*

$$\delta^n : C^n(M;S,A) \to C^{n+1}(M;S,A)$$

$$\delta^n(f) = (Id \otimes f)\lambda + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \delta(i) f + (-1)^{n+1} (f \otimes Id)\rho \qquad (3.10)$$

Observación.- El morfismo de cofrontera δ^n está bien definido.
Dem.- Basta con probar que cada sumando del lado derecho de 3.10 está en $C^{n+1}(M;S,A)$. Examinemos el primero.

$(Id \otimes f)\lambda$ hace conmutar 3.7 :

$$\begin{aligned}
(Id \otimes (Id \otimes f)\lambda)(j \otimes Id)\lambda &= (j \otimes (Id \otimes f)\lambda)\lambda \\
&= (j \otimes Id \otimes f)(Id \otimes \lambda)\lambda \\
&= (j \otimes Id \otimes f)(\delta \otimes Id)\lambda, \text{ pues } M \text{ es comódulo,} \\
&= ((j \otimes Id)\delta \otimes Id)(Id \otimes f)\lambda
\end{aligned}$$

$(Id \otimes f)\lambda$ hace conmutar 3.8 :

$$\begin{aligned}
((Id \otimes f)\lambda \otimes Id)(Id \otimes j)\rho &= ((Id \otimes f)\lambda \otimes j)\rho \\
&= (Id \otimes f \otimes j)(\lambda \otimes Id)\rho \\
&= (Id \otimes f \otimes j)(Id \otimes \rho)\lambda, \text{ pues } M \text{ es bicomódulo} \\
&= (Id \otimes (f \otimes j)\rho)\lambda \\
&= (Id \otimes \{(Id \otimes (Id \otimes j)\delta)f\})\lambda, \text{ pues } f \text{ conmuta 3.8,} \\
&= (Id \otimes (Id \otimes j)\delta)(Id \otimes f)\lambda
\end{aligned}$$

$(Id \otimes f)\lambda$ hace conmutar 3.9 : si $n \geq i > 1$,

$$\begin{aligned}
j_{i+1}\delta(i)(Id \otimes f)\lambda &= (Id \otimes j_i\delta(i-1)f)\lambda \\
&= (Id \otimes j_i\delta(i)f)\lambda, \text{ pues } f \text{ conmuta 3.9,} \\
&= j_{i+1}\delta(i+1)(Id \otimes f)\lambda,
\end{aligned}$$

y si $i = 1$,

$$\begin{aligned}
j_2\delta(1)(Id \otimes f)\lambda &= j_2(\delta \otimes f)\lambda \\
&= j_2(Id \otimes f)(\delta \otimes Id)\lambda \\
&= j_2(Id \otimes f)(Id \otimes \lambda)\lambda, \text{ pues } M \text{ es cómodulo,} \\
&= (Id \otimes j \otimes f)(Id \otimes \lambda)\lambda \\
&= \{(Id \otimes (j \otimes f)\lambda\}\lambda \\
&= \{Id \otimes ((j \otimes Id)\delta \otimes Id_{A^{(n-1)\otimes}})f\}\lambda, \ (f \text{ conmuta 3.7}), \\
&= j_2\delta(2)(Id \otimes f)\lambda.
\end{aligned}$$

$\delta(i)f$ conmuta 3.7 :

$$\begin{aligned}(Id\otimes\delta(i)f)(j\otimes Id)\lambda &= (Id\otimes\delta(i))(j\otimes f)\lambda\\ &= (Id\otimes\delta(i)f)\{(j\otimes Id)\delta\otimes Id_{A(n-1)\otimes}\}f, \text{ por 3.7,}\\ &= \{(j\otimes Id)\delta\otimes Id_{A^{n}\otimes}\}\delta(i)f\end{aligned}$$

$\delta(i)f$ conmuta 3.8 similarmente.

$\delta(i)f$ conmuta 3.9 : si $l > i+1$, ó , $l < i-1$,

$$\begin{aligned}j_{l+1}\delta(l)\delta(i)f &= (Id\otimes\delta\otimes Id)j_{l+1}\delta(l)f\\ &= (Id\otimes\delta\otimes Id)j_{l+1}\delta(l+1)f, \text{ por 3.9}\\ &= j_{l+1}\delta(l+1)\delta(i)f,\end{aligned}$$

si $l = i-1$,

$$\begin{aligned}j_i\delta(i-1)\delta(i)f &= (Id\otimes\underbrace{\delta}_{i+1}\otimes Id)j_i\delta(i-1)f\\ &= (Id\otimes\underbrace{\delta}_{i+1}\otimes Id)j_i\delta(i)f, \text{ por 3.9}\\ &= j_i(\,Id\otimes(\underbrace{Id}_{i}\otimes\underbrace{\delta}_{i+1})\delta\otimes Id\,)f\\ &= j_i(\,Id\otimes(\underbrace{\delta}_{i}\otimes\underbrace{Id}_{i+1})\delta\otimes Id\,)f\\ &= j_i\delta(i)\delta(i)f\end{aligned}$$

si $l = i$,

$$\begin{aligned}j_{i+1}\delta(i)\delta(i)f &= j_{i+1}(Id\otimes(\delta\otimes Id)\delta\otimes Id)f\\ &= j_{i+1}(Id\otimes(Id\otimes\delta)\delta\otimes Id)f\\ &= j_{i+1}(Id\otimes Id\otimes\delta\otimes Id)\delta(i)f\\ &= j_{i+1}\delta(i+1)\delta(i)f\end{aligned}$$

si $i = i+1$,

$$\begin{aligned}j_{i+2}\delta(i+1)\delta(i)f &= j_{i+2}(Id\otimes\underbrace{\delta}_{i+1}Id)\delta(i)f\\ &= j_{i+2}(Id\otimes(Id\otimes\delta)\delta\otimes Id)f\\ &= j_{i+2}(Id\otimes(\delta\otimes Id)\delta\otimes Id)f\\ &= j_{i+2}(\,Id\otimes(\delta\otimes Id)\otimes Id\,)\delta(i)f\\ &= (\,Id\otimes(\delta\otimes Id)\otimes Id\,)j_{i+1}\delta(i)f\\ &= (\,Id\otimes(\delta\otimes Id)\otimes Id\,)j_{i+1}\delta(i+1)f, \text{ por 3.9,}\\ &= j_{i+2}\delta(i)\delta(i+1)f\\ &= j_{i+2}\delta(i+2)\delta(i)f\end{aligned}$$

$(f \otimes Id)\rho$ conmuta 3.7 :

$$\begin{aligned}
(Id \otimes (f \otimes Id)\rho)(j \otimes Id)\lambda &= (j \otimes f \otimes Id)(Id \otimes \rho)\lambda \\
&= (j \otimes f \otimes Id)(\lambda \otimes Id)\rho, \text{ (M es bicomódulo),} \\
&= \{(j \otimes f)\lambda \otimes Id\}\rho \\
&= \{(\,(j \otimes Id)\delta \otimes Id\,)f \otimes Id\}\rho, \text{ por 3.7} \\
&= (\,(j \otimes Id)\delta \otimes Id\,)(f \otimes Id)\rho
\end{aligned}$$

$(f \otimes Id)\rho$ conmuta 3.8 :

$$\begin{aligned}
(Id_{A^{n}\otimes} \otimes (Id \otimes j)\delta)(f \otimes Id)\rho &= (f \otimes Id \otimes j)(Id \otimes \delta)\rho \\
&= (f \otimes Id \otimes j)(\rho \otimes Id)\rho, \text{ (M es comódulo)} \\
&= (\,(f \otimes Id)\rho \otimes j\,)\rho \\
&= (\,(f \otimes Id)\rho \otimes j\,)(Id \otimes j)\rho
\end{aligned}$$

$(f \otimes Id)\rho$ conmuta 3.9 : si $n \geq i \geq 1$,

$$\begin{aligned}
j_{i+1}\delta(i)(f \otimes Id)\rho &= j_{i+1}(\delta(i)f \otimes Id)\rho \\
&= j_{i+1}(\delta(i+1)f \otimes Id)\rho, \text{ por 3.9,} \\
&= j_{i+1}\delta(i+1)(f \otimes Id)\rho
\end{aligned}$$

Observación.- $\delta^{n+1} \circ \delta^{n} = 0$
Dem.-

$\delta^{n+1} \circ \delta^{n}(f) =$

$$\begin{aligned}
&(\,Id \otimes (Id \otimes f)\lambda)\,\lambda + \sum_{i=1}^{n+1} \delta(i)(Id \otimes f)\lambda + (-1)^{n+2}\{\,(Id \otimes f)\lambda \otimes Id\,)\rho \\
&+ \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}\,(\,(Id \otimes \delta(i)f)\lambda + \sum_{l=1}^{n+1}(-1)^{l}\delta(l)\delta(i)f + (-1)^{n+2}(\delta(i)f \otimes Id)\rho\} \\
&\qquad + (-1)^{n+1}\{(Id \otimes (f \otimes Id))\lambda + \sum_{l=1}^{n+1}(-1)^{l}\delta(l)(f \otimes Id)\rho \\
&\qquad\qquad + (-1)^{n+2}(\delta(i)f \otimes Id)\rho\},
\end{aligned}$$

pero

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}(Id \otimes \delta(i)f)\lambda = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}\delta(i+1)(Id \otimes f)\lambda,$$

$$(\,(Id \otimes f)\lambda \otimes Id\,)\rho = (Id \otimes f \otimes Id)(\lambda \otimes Id)\rho = (\,Id \otimes (f \otimes Id)\rho\,)\lambda,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+i}(\delta(i)f\otimes Id)p=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+i}\delta(i)(f\otimes Id)p,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{i+j}\delta(j)\delta(i)f=0$$

(ésto porque

$$\delta(j)\delta(i)=\begin{cases}\delta(i+1)\delta(j), & j < i-1,\\ \delta(i-1)\delta(i), & j = i-1,\\ \delta(i+1)\delta(i), & j = i,\\ \delta(i)\delta(i), & j = i+1,\\ \delta(i)\delta(j-1), & j > i+1,\end{cases}$$

),

$$\delta(n+1)(f\otimes Id)p=(f\otimes Id)(Id\otimes\delta)p=((f\otimes Id)p\otimes Id)p.$$

y sustituyendo queda que $\delta^{n+1}\circ\delta^{n}(f)=0$.

Tenemos así el complejo de cocadenas

$$C_c^{*}(M;A,S):C_c^{0}(M;A,S)\xrightarrow{\delta^0}C_c^{1}(M;A,S)\xrightarrow{\delta^1}C_c^{1}(M;A,S)\to\dots$$

cuya inexactitud es medida por los grupos de cohomologia $H_c^{*}(M;A,S)$ llamados de Hoschild para coálgebras.

Definición 17

$$H_c^{n}(M,A)=H_c^{n}(M;A,A)\,,\quad n=0,1,2,\dots$$

Definición 18 *A k-coálgebra. Si* $f_t = Id + tf_1 + t^2 f_2 + \dots \in End(A_t)$, δ_t *deformación coasociativa de* δ,

$$\delta_t * f_t=(f_t^{-1}\hat{\otimes}f_t^{-1})\delta_t f_t$$

es deformación isomorfa a δ_t.

Utilizando el hecho de que $A_t\hat{\otimes}_{k_t}A_t\simeq(A\otimes_k A)_t$, se pueden copiar las demostraciones de los resultados correspondientes al caso asociativo para obtener:

Observación.-
i) $\delta_t * Id_{A_t}=\delta_t$;
ii) Si $f_t = Id_{A_t}+tf_1+t^2f_2+\dots$, $g_t = Id_{A_t}+tg_1+t^2g_2+\dots$ donde cada f_i, g_i son k-endomorfismos de A extendidos. Entonces $\delta_t*(f_t\circ g_t)=(\delta_t*f_t)*g_t$.

Lema 9 *Sea* $\delta_t = \delta + t\delta_1 + t^2\delta_2 + \ldots$ *deformación coasociativa de* δ.

i) Si $\delta_1 = 0, \ldots, \delta_{r-1} = 0$ *entonces* $\delta^2\delta_r = 0$ *;*

ii) Si $\delta_1 = 0. \ldots, \delta_{r-1} = 0$ *y* $\delta_r = \delta^1\beta$ *entonces* $\bar{\delta}_t = \delta_t * (Id_{A_t} - t^r\beta)$ *es deformación de* δ *con* $\bar{\delta}_1 = 0, \ldots, \bar{\delta}_r = 0$.

Teorema 17 *Si* A *es* k*-coálgebra coasociativa :*

$$H_c^2(A, A) = 0 \Rightarrow A \ \textit{rígida}$$

Capítulo 4

Coálgebras Separables

Como primeros candidatos a ser ejemplos de coálgebras rígidas son las coálgebras separables. La definición de tales coálgebras es dual a la segunda definición de álgebra separable que aparece en [13], pag. 182. Una coálgebra A se dirá que es *separable* en caso de que la sucesión exacta corta

$$0 \to im\,\delta \to A^e \xrightarrow{p} coker\,\delta \to 0$$

se escinda, donde δ es la comultiplicación de A, A^e es la coálgebra envolvente de A y p la proyección natural. Trataremos de explicar tal definición en lo que sigue (lo único que hay que hacer es distinguir los resultados que aparecen en el libro de Pierce [13] sobre álgebras separables que es posible dualizar).

Sea (A, δ) una k-coálgebra (k anillo asociativo con unidad).

Definición 19 *La coálgebra opuesta a (A, δ) es (A^o, δ^o), donde $A^o = A$ como k-módulo y*

$$\begin{tikzcd}
A^o \arrow[rr, "\delta^o"] \arrow[dr, "\delta"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & A^o \otimes_k A^o \\
& A \otimes_k A \arrow[ur, "s"'] &
\end{tikzcd}$$

donde s switch.

Observación.- δ^o es coasociativa.
Dem.- Utilicemos la notación sigma. Pongamos $\delta(a) = a_{(1)} \otimes a_{(2)}$;

$$\begin{aligned}
(Id \otimes \delta^o)\delta^o(a) &= (Id \otimes \delta^o)(a_{(2)} \otimes a_{(1)}) \\
&= a_{(2)} \otimes a_{(1)(2)} \otimes a_{(1)(1)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= s_{1,3}(a_{(1)(1)} \otimes a_{(1)(2)} \otimes a_{(2)}),\ s_{1,3} \text{ swicht en lugares } 1,3 \\
&= s_{1,3}((\delta \otimes Id)\delta(a)) \\
&= s_{1,3}((Id \otimes \delta)\delta(a)) \\
&= (\delta^o \otimes Id)(a_{(2)} \otimes a_{(1)}) \\
&= (\delta^o \otimes Id)\delta^o(a)
\end{aligned}
$$

Definición 20 *La coálgebra envolvente de A es:*

$$A^e = A^o \otimes_k A$$

producto tensorial de coálgebras con coproducto $\delta^e = (Id \otimes s \otimes Id)(\delta^o \otimes \delta)$, donde s es swicht.

Como sucede con los módulos, para estudiar bicomódulos basta con estudiar comódulos laterales.

Propiedad 4 *Sea A una k-coálgebra no necesariamente counitaria.*

i) Si M es un A-bicomódulo entonces M es una A^e-comódulo derecho con estructura ρ^e tal que

$$
\begin{tikzcd}
M \otimes_k A \arrow[d, "\lambda \otimes Id"'] & M \arrow[l, "\rho"'] \arrow[d, "\rho^e"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\
A \otimes_k M \otimes_k A & M \otimes_k A^e \arrow[l, "s \otimes Id"]
\end{tikzcd}
$$

donde λ, ρ son las estructuras izquierda y derecha de M respectivamente y s swicht.

ii) Si M es un A^e-comódulo derecho y A tiene counidad $\epsilon : A \to k$ entonces M es un A-bicomódulo;

iii) Sea M un A-bicomódulo. Denotemos con M_{A^e} al mismo M pero visto como A^e-comódulo derecho. Pongamos además, para M, N un par de A-bicomódulos,

$$Hom_{A^e}(M_{A^e}, N_{A^e})$$

como el k-módulo de morfismos de A^e-módulos derechos de M_{A^e} en N_{A^e}. Entonces, si A tiene counidad,

$$Hom_{A-A}(M, N) = Hom_{A^e}(M_{A^e}, N_{A^e})$$

Dem.-

i) Sea $\rho^e : M \to M \otimes_k A^e$ definida por el diagrama conmutativo. Por demostrar que ρ^e es coasociativa:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho^e"] \arrow[d, "\rho^e"'] & M \otimes_k A^e \arrow[d, "Id_M \otimes \delta^e"] \\ M \otimes A^e \arrow[r, "\rho^e \otimes Id"'] & M \otimes_k A^e \otimes_k A^e \end{tikzcd}$$

Pongamos $\lambda^o = s\lambda$, $\rho^o = s\rho$, y para $m \in M$: $\rho(m) = m_{\rho(1)} \otimes m_{\rho(2)}$. $\lambda(m) = m_{\lambda(1)} \otimes m_{\lambda(2)}$;

$(Id_M \otimes \delta^e)\rho^e(m)$
$= (Id_M \otimes \delta^e)(\lambda^o \otimes Id)\rho(m)$
$= m_{\rho(1)\lambda(2)} \otimes \delta^e(m_{\rho(1)\lambda(1)} \otimes m_{\rho(2)})$
$= m_{\rho(1)\lambda(2)} \otimes \{Id_A \otimes s \otimes Id_A\}\{\delta^o(m_{\rho(1)\lambda(1)}) \otimes \delta(m_{\rho(2)})\}$
$= \{Id_{M \otimes A} \otimes s \otimes Id_A\}\{m_{\rho(1)\lambda(2)} \otimes \delta^o(m_{\rho(1)\lambda(1)}) \otimes \delta(m_{\rho(2)})\}$
$= (Id \otimes s \otimes Id_A)(Id \otimes \delta^o)\lambda^o(m_{\rho(1)}) \otimes \delta(m_{\rho(2)})$
$= (Id \otimes s \otimes Id_A)\{(Id \otimes \delta^o)\lambda^o \otimes Id_{A \otimes A})(Id \otimes \delta)\rho(m)$
$= (Id \otimes s \otimes Id_A)\{(\lambda^o \otimes Id)\lambda^o \otimes Id_{A \otimes A})(\rho \otimes Id)\rho(m)$
(pues M es A^o-comódulo derecho con λ^o y A-comódulo derecho con ρ)
$= (Id_{M \otimes A} \otimes s \otimes Id_A)\{\lambda^o(m_{\rho(1)\rho(1)\lambda(2)}) \otimes m_{\rho(1)\rho(1)\lambda(1)} \otimes m_{\rho(1)\rho(2)} \otimes m_{\rho(2)}\}$
$= \lambda^o(m_{\rho(1)\rho(1)\lambda(2)}) \otimes m_{\rho(1)\rho(2)} \otimes m_{\rho(1)\rho(1)\lambda(1)} \otimes m_{\rho(2)}$.

Por otro lado;

$(\rho^e \otimes Id_{A^e})\rho^e(m)$
$= (\rho^e \otimes Id_{A^e})\{\lambda^o \otimes Id_{A^e})\rho(m)$
$= \rho^e(m_{\rho(1)\lambda(2)}) \otimes m_{\rho(1)\lambda(1)} \otimes m_{\rho(2)}$
$= (\lambda^o \otimes Id)\rho(m_{\rho(1)\lambda(2)}) \otimes m_{\rho(1)\lambda(1)} \otimes m_{\rho(2)}$
$= (\lambda^o \otimes Id)(s \otimes Id)(\rho^o \otimes Id)\lambda^o(m_{\rho(1)}) \otimes m_{\rho(2)}$
(como M es A^o-bimódulo)
$= (\lambda^o \otimes Id)(s \otimes Id)(Id \otimes \lambda^o)\rho^o(m_{\rho(1)}) \otimes m_{\rho(2)}$
$= (\lambda^o \otimes Id)(s \otimes Id)\{m_{\rho(1)\rho(2)} \otimes m_{\rho(1)\rho(1)\lambda(2)} \otimes m_{\rho(1)\rho(1)\lambda(1)}\} \otimes m_{\rho(2)}$
$= \lambda^o(m_{\rho(1)\rho(1)\lambda(2)}) \otimes m_{\rho(1)\rho(2)} \otimes m_{\rho(1)\rho(1)\lambda(1)} \otimes m_{\rho(2)}$
$= (Id_M \otimes \delta^e)\rho^e(m)$,

según la serie de igualdades anteriores.

ii) M es comódulo derecho: se define $\rho : M \to M \otimes_k A$ por:

$$\begin{tikzcd} M \otimes_k A \arrow[d, leftrightarrow] & & M \arrow[ll, "\rho"'] \arrow[d] \\ M \otimes_k k \otimes_k A \arrow[rr, phantom, "\circlearrowright", near start, shift left=4ex] & & M \otimes_k A^o \otimes_k A \arrow[ll, "Id_M \otimes \epsilon \otimes Id"] \end{tikzcd}$$

ρ es coasociativa: por definición, $\rho = (Id \otimes \epsilon Id_A)\rho^e$:

$$\begin{aligned}
(\rho \otimes Id)\rho(m) &= (\rho \otimes Id)\{m_{\rho^e(1)} \otimes \epsilon(m_{\rho^e(2)})m_{\rho^e(3)}) \\
&= m_{\rho^e(1)\rho^e(1)} \otimes \epsilon(m_{\rho^e(1)\rho^e(2)})m_{\rho^e(1)\rho^e(3)} \otimes \epsilon(m_{\rho^e(2)})m_{\rho^e(3)} \\
&= (Id_M \otimes \epsilon \otimes Id_A \otimes \epsilon \otimes Id_A)(\rho^e \otimes Id)\rho^e(m) \\
&= (Id_M \otimes \epsilon \otimes Id_A \otimes \epsilon \otimes Id_A)(Id \otimes \delta^e)\rho^e(m) \\
&= m_{\rho^e(1)} \otimes \epsilon(m_{\rho^e(2)(2)}) \otimes m_{\rho^e(3)(1)} \otimes \epsilon(m_{\rho^e(2)(1)}) \otimes m_{\rho^e(3)(2)} \\
&= m_{\rho^e(1)} \otimes \epsilon(m_{\rho^e(2)(1)}m_{\rho^e(2)(2)})m_{\rho^e(3)(1)} \otimes m_{\rho^e(3)(2)} \\
&= m_{\rho^e(1)} \otimes \epsilon(m_{\rho^e(2)}) \otimes m_{\rho^e(3)(1)}m_{\rho^e(3)(2)} \\
&= (Id \otimes \delta)\rho(m)
\end{aligned}$$

M es comódulo izquierdo: sea $A \otimes_k M \xleftarrow{\lambda} M$ definida por

$$\begin{tikzcd}
A^o \otimes_k M \otimes_k k \simeq A \otimes M & & M \arrow[ll, "\lambda"'] \arrow[d, "\rho^e"] \\
A^o \otimes_k M \otimes_k A \arrow[u, "Id \otimes \epsilon"] \arrow[rr, phantom, "\circlearrowright"] & & M \otimes_k A^o \otimes_k A \arrow[ll, "s \otimes Id"]
\end{tikzcd}$$

λ es coasociativa: $\lambda = (Id_{A^o \otimes M} \otimes \epsilon)(s \otimes Id)\rho^e$ por definición,

$$\begin{aligned}
(Id \otimes \lambda)\lambda(m) &= (Id \otimes \lambda)(m_{\rho^e(2)} \otimes m_{\rho^e(1)}\epsilon(m_{\rho^e(3)})) \\
&= m_{\rho^e(2)}\epsilon(m_{\rho(3)}) \otimes m_{\rho^e(1)\rho^e(2)} \otimes m_{\rho^e(1)\rho^e(1)}\epsilon(m_{\rho^e(1)\rho^e(3)}) \\
&= (\epsilon \otimes Id_A \otimes \epsilon \otimes Id_{A \otimes M})(m_{\rho^e(3)} \otimes m_{\rho^e(2)} \otimes m_{\rho^e(1)\rho^e(3)} \\
&\quad \otimes m_{\rho(1)\rho(3)} \otimes m_{\rho^e(1)\rho^e(2)} \otimes m_{\rho^e(1)\rho^e(1)}) \\
&= (\epsilon \otimes Id_A \otimes \epsilon \otimes Id_{A \otimes M})s_{1,3}(s_{1,3} \otimes Id)(\rho^e \otimes Id)\rho^e(m) \\
&\quad (s_{1,3} \text{ swicht entre el primer y tercer factor}) \\
&= (\epsilon \otimes Id_A \otimes \epsilon \otimes Id_{A \otimes M})s_{1,3}(s_{1,3} \otimes Id)(Id_M \otimes \delta^e)\rho^e(m) \\
&= \epsilon(m_{\rho^e(3)\delta(2)})m_{\rho^e(3)\delta(1)} \otimes \epsilon(m_{\rho^e(3)\delta(1)})m_{\rho^e(2)\delta(2)} \otimes m_{\rho^e(1)} \\
&= m_{\rho^e\delta(1)} \otimes \epsilon(\, m_{\rho^e(3)\delta(1)}\epsilon(m_{\rho^e(3)\delta(2)})\,)m_{\rho^e(2)\delta(2)} \otimes m_{\rho^e(1)} \\
&= m_{\rho^e(2)\delta(1)} \otimes \epsilon(m_{\rho^e(3)})m_{\rho^e(2)\delta(2)} \otimes m_{\rho^e(1)} \\
&= m_{\rho^e(2)\delta(1)} \otimes m_{\rho^e(2)\delta(2)} \otimes m_{\rho^e(1)}\epsilon(m_{\rho^e(3)}) \\
&= (\delta \otimes Id)(Id \otimes \epsilon)(s \otimes Id)\rho^e(m) \\
&= (\delta \otimes Id)\rho(m)
\end{aligned}$$

M es bicomódulo: sea $s_{1,2} : (M \otimes A) \otimes A \to A \otimes (M \otimes A)$ switch,

$$\begin{aligned}
(Id \otimes \rho)\lambda(m) &= (Id \otimes \rho)(m_{\rho^e(2)} \otimes m_{\rho^e(1)})\epsilon(m_{\rho^e(3)}) \\
&= m_{\rho^e(2)}\epsilon(m_{\rho^e(3)}) \otimes m_{\rho^e(1)\rho^e(1)} \otimes \epsilon(m_{\rho^e(1)\rho^e(2)})m_{\rho^e(1)\rho^e(3)} \\
&= s_{1,2}\{\, m_{\rho^e(1)\rho^e(1)} \otimes \epsilon(m_{\rho^e(1)\rho^e(2)})m_{\rho^e(1)\rho^e(3)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \otimes m_{\rho^e(2)}\epsilon(m_{\rho^e(3)}))\} \\
= \;& s_{1,2}(Id \otimes \epsilon \otimes Id_{A\otimes A} \otimes \epsilon)(\rho^e \otimes Id)\rho^e(m) \\
= \;& s_{1,2}(Id \otimes \epsilon \otimes Id_{A\otimes A} \otimes \epsilon)(Id \otimes \delta^e)\rho^e(m) \\
= \;& m_{\rho^e(2)\delta(1)}\epsilon(m_{\rho^e(3)\delta(2)}) \otimes m_{\rho^e(1)} \otimes \epsilon(m_{\rho^e(2)\delta(2)})m_{\rho^e(3)\delta(1)} \\
= \;& m_{\rho^e(2)\delta(1)}\epsilon(m_{\rho^e(2)\delta(2)}) \otimes m_{\rho^e(1)} \otimes \epsilon(m_{\rho^e(3)\delta(2)})m_{\rho^e(3)\delta(1)} \\
= \;& m_{\rho^e(2)} \otimes m_{\rho^e(1)} \otimes m_{\rho^e(3)},
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

mientras que,

$$
\begin{aligned}
(\lambda \otimes Id)\rho(m) \;=\;& (\lambda \otimes Id)(m_{\rho^e(1)} \otimes \epsilon(m_{\rho^e(2)})m_{\rho^e(3)}) \\
=\;& m_{\rho^e(1)\rho^e(2)} \otimes m_{\rho^e(1)\rho^e(1)}\epsilon(m_{\rho(1)\rho(3)}) \otimes \epsilon(m_{\rho(2)})m_{\rho^e(3)} \\
=\;& (Id \otimes \epsilon \otimes \epsilon \otimes Id)(s_{1,2} \otimes Id)(\rho^e \otimes Id)\rho^e(m) \\
=\;& (Id \otimes \epsilon \otimes \epsilon \otimes Id)(s_{1,2} \otimes Id)(Id \otimes \delta^e)\rho^e(m) \\
=\;& m_{\rho^e(2)\delta(2)} \otimes m_{\rho^e(1)}\epsilon(m_{\rho^e(3)\delta(1)})\epsilon(m_{\rho^e(2)\delta(1)}) \otimes m_{\rho^e(3)\delta(2)} \\
=\;& \epsilon(m_{\rho^e(2)\delta(1)})m_{\rho^e(2)\delta(2)} \otimes m_{\rho^e(1)} \otimes \epsilon(m_{\rho^e(3)\delta(1)})m_{\rho^e(3)\delta(2)} \\
=\;& m_{\rho^e(2)} \otimes m_{\rho^e(1)} \otimes m_{\rho^e(3)}.
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

Entonces de 4.1 y 4.2,

$$(\rho \otimes Id)\lambda = (\lambda \otimes Id)\rho$$

iii) "$\subseteq$": sean $f : M \to N$ de A-bicomódulos, s switch, $\lambda^o = s\lambda, \rho^o = s\rho$, entonces

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_M"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N \arrow[d, "\rho_N"] \\
M \otimes_k A \arrow[r, "f \otimes Id"'] & N \otimes_k A
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\lambda_M"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N \arrow[d, "\lambda_N"] \\
A \otimes_k M \arrow[r, "Id \otimes f"'] & A \otimes_k N
\end{tikzcd}
$$

Por demostrar,

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho^e_M"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N \arrow[d, "\rho^e_N"] \\
M \otimes_k A^o \otimes_k A \arrow[r, "f \otimes Id"'] & N \otimes_k A^o \otimes A
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
\rho'_N f &= (\lambda_N^o \otimes Id)\rho_N f \\
&= (\lambda_N^o \otimes Id)(f \otimes Id)\rho_M \\
&= (\lambda_N^o f \otimes Id)\rho_M \\
&= \{s(Id \otimes f) \otimes f)\lambda_M \otimes Id)\}\rho_M \\
&= \{(f \otimes Id)\lambda_M^o \otimes Id\}\rho_M \\
&= (f \otimes Id)(\lambda_M^o \otimes Id)\rho_M \\
&= (f \otimes Id)\rho_M^e .
\end{aligned}
$$

"$\supseteq$": sea $f : M \to N$ tal que

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_M^e"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N \arrow[d, "\rho_N^e"] \\
M \otimes_k A^o \otimes_k A \arrow[r, "f \otimes Id"'] & N \otimes_k A^o \otimes A
\end{tikzcd}
$$

Se tiene entonces que,

$$
\begin{aligned}
\rho_N^e f &= (Id \otimes \epsilon \otimes Id)\rho_N^e f \\
&= (Id_M \otimes \epsilon \otimes Id_A)(f \otimes Id_{A^e})\rho_M^e \\
&= (f \otimes \epsilon \otimes Id_A)\rho_M^e \\
&= (f \otimes Id)\rho_M ,
\end{aligned}
$$

es decir,

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_M"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N \arrow[d, "\rho_N"] \\
M \otimes_k A \arrow[r, "f \otimes Id"'] & N \otimes_k A
\end{tikzcd}
$$

Además, para $m \in M$,

$$
\begin{aligned}
\lambda_N f(m) &= (Id_{A \otimes M} \otimes \epsilon)(s \otimes Id)\rho_N^e f(m) \\
&= (Id_{A \otimes M} \otimes \epsilon)(s \otimes Id)(f \otimes Id_{A^e})\rho_M^e f(m) \\
&= m_{(2)} \otimes f(m_{(1)})\epsilon(m_{(3)}),
\end{aligned}
$$

y por otro lado,

$$
\begin{aligned}
(Id \otimes f)\lambda_M &= (Id \otimes f)(Id_{A \otimes M} \otimes \epsilon)(s \otimes Id)\rho_M^e(m) \\
&= (Id \otimes f)(m_{(2)} \otimes f(m_{(1)})\epsilon(m_{(3)})
\end{aligned}
$$

por lo tanto,

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\lambda_M"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & N \arrow[d, "\lambda_N"] \\ A \otimes_k M \arrow[r, "Id \otimes f"'] & A \otimes_k N \end{tikzcd}$$

Corolario 2 *i) Si A es k-coálgebra entonces A es un A^e-módulo derecho;*
ii) Si A es k-coálgebra unitaria entonces A^e es un A-bicomódulo.

Definición 21 (M, ρ_M) *un A-comódulo derecho. Un k-submódulo N de M se llama A-subcomódulo si*

$$\rho_M(N) \subseteq N \otimes_k A$$

Propiedad 5 *i) Si $f : M \to N$ es de A-comódulos derechos entonces $Im\, f$ es subcomódulo de N;*
ii) Si N es A-subcomódulo derecho M entonces M/N es A-comódulo derecho con estructura:

$$\bar{\rho} : M/N \to (M/N) \otimes_k A, \ , m + N \mapsto (m_{(1)} + N) \otimes m_{(2)}$$

donde $\rho(m) = m_{(1)} \otimes m_{(2)}$ y ρ es a su vez la estructura de M.

Dem.- i) Inmediato de la definición de morfismo.
ii) Sea $p : M \to M/N$ proyección natural. Sea ρ tal que:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\rho_M"] \arrow[dr, "\rho"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & M \otimes_k A \arrow[dl, "p \otimes Id"] \\ & (M/N) \otimes_k A & \end{tikzcd}$$

Por lo que $\rho(N) = 0$, luego la $\bar{\rho}$ que aparece en el enunciado está bien definida.
$\bar{\rho}$ es coasociativa:

$$\begin{aligned} (\bar{\rho} \otimes Id)\bar{\rho}(m) &= (\bar{\rho} \otimes Id)(m_{(1)} + M) \otimes m_{(2)} \\ &= (m_{(1)(1)} + M) \otimes m_{(1)(2)} \otimes m_{(2)} \end{aligned}$$

$$(Id \otimes \delta)\bar{\rho}(m) = (m_{(1)} + M) \otimes m_{(2)(1)} \otimes m_{(2)(2)}$$

pero $m_{(1)(1)} \otimes m_{(1)(2)} \otimes m_2 = m_{(1)} \otimes m_{(2)(1)} \otimes m_{(2)(2)}$ en $M \otimes_k \otimes_k A$. Y aplicando $p \otimes Id_{A \otimes A}$ se obtiene la coasociatividad.

Lema 10 *$\delta : A \to A^e$ es una transformación de A^e-comódulos derechos.*

Dem.- Como A es A-bicomódulo entonces es A^e-comódulo derecho. Por demostrar:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\rho^e"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & A^e \arrow[d, "\delta^e"] \\ A \otimes_k A^e \arrow[r, "\delta \otimes Id"'] & A^e \otimes_k A^e \end{tikzcd}$$

. Sea $s_{i,j}$ switch entre el i y el j factor, $a \in A$.

$$\begin{aligned} \delta^e\delta(a) &= \delta^e(a_{(1)} \otimes a_{(2)}) \\ &= a_{(1)(2)} \otimes a_{(2)(1)} \otimes a_{(1)(1)} \otimes a_{(2)(2)} \\ &= s_{2,3}s_{1,2}(\delta \otimes Id \otimes Id)(Id \otimes \delta)\delta(a) \\ &= s_{2,3}s_{1,2}(\delta \otimes Id \otimes Id)(\delta \otimes Id)\delta(a) \\ &= s_{2,3}s_{1,2}(\,(\delta \otimes Id)\delta \otimes Id\,)\delta(a) \\ &= s_{2,3}s_{1,2}(\,(Id \otimes \delta)\delta \otimes Id\,)\delta(a) \\ &= a_{(1)(2)(1)} \otimes a_{(1)(2)(2)} \otimes a_{(1)(1)} \otimes a_{(2)} \\ &= (\delta \otimes Id_{A^e})\delta^o(a_{(1)} \otimes a_{(2)}) \\ &= (\delta \otimes Id_{A^e})(\delta^o \otimes Id_A)\delta(a) \\ &= (\delta \otimes Id_{A^e})\rho^e(a). \end{aligned}$$

Corolario 3 *$coker\,\delta = A^e/Im\,\delta$ es A^e-comódulo derecha.*

Dem.- $Im\,\delta$ es A^e-subcomódulo de A^e. Lo que implica que $A^e/Im\,\delta$ es A^e-comódulo derecho.

Definición 22 *Sea (A, δ, ϵ) coálgebra unitaria. A se llama separable en caso de que la sucesión exacta corta de A^e-comódulos derechos*

$$0 \to im\,\delta \to A^e \xrightarrow{p} coker\,\delta \to 0$$

se escinde.

Para álgebras la condición de separabilidad es equivalente a la existencia de un elemento separador idempotente. Tal hecho está relacionado con la libertad de una álgebra unitaria. Cuando se quiere obtener el resultado dual para coálgebras separables se encuentran dificultades para obtener que una coálgebra unitaria es libre. Sin embargo hay cierta clase de "libertad" no de la coálgebra sino de su coálgebra envolvente. Éste es el resultado que sigue.

Lema 11 *Sea M un A-bicomódulo con A una coálgebra unitaria (o equivalentemente, M un A^e-módulo derecho). Entonces*

$$Hom_{A^e}(M, A^e) = \{\lambda_f \mid f : M \to k, \; k\text{-lineal}\}$$

donde $\lambda_f = ((Id \otimes f)\lambda \otimes Id)\rho$, y ρ, λ son las estructuras derechas e izquierdas de M respectivamente.

Dem.- "$\subseteq$": Sea $M \xrightarrow{g} A^e$ de A^e-comódulos. Definimos entonces $f = (\epsilon \otimes \epsilon)g : M \to k$. Luego,

$$\begin{aligned}
\lambda_f &= \{(Id \otimes (\epsilon \otimes \epsilon)g)\lambda \otimes Id\}\rho \\
&= (\epsilon \otimes \epsilon \otimes Id)(g \otimes Id)(s\lambda \otimes Id)\rho \\
&= (\epsilon \otimes \epsilon \otimes Id)(g \otimes Id)\rho^e \\
&= (\epsilon \otimes \epsilon \otimes Id)\delta^e g \\
&= g,
\end{aligned}$$

pues $\epsilon \otimes \epsilon$ es counidad de A^e.

"$\supseteq$": Sea $f : M \to k$, k-lineal. Por demostrar que

$$\begin{array}{ccccc}
 & M & \xrightarrow{\lambda_f} & A^e & \\
\rho^e & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \delta^e \\
 & M \otimes_k A^e & \xrightarrow[\lambda_f \otimes Id]{} & A^e \otimes_k A^e &
\end{array}$$

Tomemos $m \in M$,

$$\begin{aligned}
\delta^e\lambda_f(m) &= \delta^e\{(Id \otimes f)\lambda \otimes Id\}\rho(m) \\
&= f(m_{\rho(1)\lambda(2)})m_{\rho(1)\lambda(1)(2)} \otimes m_{\rho(2)(1)} \otimes m_{\rho(1)\lambda(1)(1)} \otimes m_{\rho(2)(2)}
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
(\lambda_f \otimes Id)\rho^e(m) &= \lambda_f\{m_{\rho(1)\lambda(2)}) \otimes m_{\rho(1)\lambda(1)} \otimes m_{\rho(2)} \\
&= (Id \otimes f)\lambda(m_{\rho(1)\lambda(2)\rho(1)}) \otimes m_{\rho(1)\lambda(2)\rho(2)} \\
&\quad \otimes m_{\rho(1)\lambda(1)} \otimes m_{\rho(2)} \\
&= (s_{1,3} \otimes Id)(Id \otimes s_{1,2} \otimes Id)(Id \otimes \{Id \otimes f)\lambda \otimes Id_{A^e}) \\
&\quad (\rho \otimes Id)\rho(m) \\
&= (s_{1,3} \otimes Id)(Id \otimes s_{1,2} \otimes Id)(Id \otimes (Id \otimes f)\lambda \otimes Id_{A^e}) \\
&\quad (Id \otimes \delta)\rho(m) \\
&= m_{\rho(1)\lambda(2)\lambda(1)}f(m_{\rho(1)\lambda(2)\lambda(3)}) \otimes m_{\rho(2)(1)} \\
&\quad \otimes m_{\rho(1)\lambda(1)} \otimes m_{\rho(2)(2)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (s_{1,2} \otimes Id)(Id \otimes s_{1,2} \otimes Id) \\
&\quad (m_{\rho(2)(1)} \otimes (Id \otimes \lambda)\lambda(m_{\rho(1)}) \otimes m_{\rho(2)(2)}) \\
&= m_{\rho(1)\lambda(1)(2)} \otimes m_{\rho(2)\rho(1)} \otimes m_{\rho(1)\lambda(1)(1)} f(m_{\rho(1)\lambda(2)}) \\
&\quad \otimes m_{\rho(2)(2)} \\
&= \delta^e \lambda_f(m)
\end{aligned}
$$

según los cálculos anteriores. Por lo tanto,

$$(\lambda_f \otimes Id)\rho^e = \delta^e \lambda_f$$

El siguiente resultado es el dual a la existencia de un elemento separador idempotente.

Teorema 18 *Una coálgebra unitaria (A, δ, ϵ) es separable si y sólo si existe $coker\,\delta \xrightarrow{f} k$ de k-módulos tal que*

$$(Id \otimes f \circ p \otimes Id)(\delta \otimes \delta) = p$$

donde $p : A^e \to coker\,\delta$ proyección canónica.

Dem.- A es separable si y sólo si existe $\varphi : coker\,\delta :\to A^e$ de A^e-comódulos tal que $p\circ\varphi = Id_{coker\,\delta}$. Por lema 11, pag. 61, $\varphi = \lambda_f$ para alguna $f : coker\,\delta \to A^e$, k-lineal, donde $\lambda_f = ((Id \otimes f)\lambda \otimes Id)\rho$ y ρ, λ son las estructuras derechas e izquierdas de $coker\,\delta$. Desarrollemos, por definición,

$$
\begin{aligned}
\rho^e : coker\,\delta &\to coker\,\delta \otimes_k A^e \\
m_1 \otimes m_2 + Im\,\delta &\mapsto (m_{1(2)} \otimes m_{2(1)} + Im\,\delta) \otimes m_{1(1)} \otimes m_{2(2)}
\end{aligned}
$$

y en consecuencia,

$$
\begin{aligned}
\rho : coker\,\delta &\to coker\,\delta \otimes_k A \\
m_1 \otimes m_2 + Im\,\delta &\mapsto (m_{1(2)} \otimes m_{2(1)} + Im\,\delta) \otimes \epsilon(m_{1(1)})m_{2(2)},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda : coker\,\delta &\to coker\,\delta \otimes_k A \\
m_1 \otimes m_2 + Im\,\delta &\mapsto m_{1(1)} \otimes (m_{1(2)} \otimes m_{2(1)} + Im\,\delta)\epsilon(m_{2(2)})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_f(m_1 \otimes m_2 + Im\,\delta) &= ((Id \otimes f)\lambda \otimes Id)\rho(m_1 \otimes m_2 + Im\,\delta) \\
&= (Id \otimes f)\lambda(m_{1(2)} \otimes m_{2(1)} + Im\,\delta) \otimes \epsilon(m_{1(1)})m_{2(2)} \\
&= m_{1(2)(1)} \otimes f(p(m_{1(2)(2)} \otimes m_{2(1)(1)}))\epsilon(m_{2(1)(2)}) \\
&\quad \otimes \epsilon(m_{1(1)})m_{2(2)} \\
&= m_{1(2)(1)} \otimes f(p(m_{1(2)(2)} \otimes m_{2(1)})) \otimes \epsilon(m_{1(1)})m_{2(2)} \\
&= (Id \otimes f \circ p \otimes Id)\delta(m_{1(2)})\epsilon(m_{1(1)}) \otimes m_{2(1)} \otimes m_{2(2)} \\
&= (Id \otimes f \circ p \otimes)(\delta(m_1) \otimes \delta(m_2)) \\
&= (Id \otimes f \circ p \otimes Id)(\delta \otimes \delta)(m_1 \otimes m_2)
\end{aligned}
$$

es decir,

$$\lambda_f \circ p = (Id \otimes f \circ p \otimes Id)(\delta \otimes \delta). \qquad (4.3)$$

Por lo que si A es separable entonces se aplica p a ambos lados de 4.3 y se obtiene

$$p \circ \varphi \circ p = Id \circ p = p(Id \otimes f \circ p \otimes Id)(\delta \otimes \delta)$$

i.e., $p = p \circ (Id \otimes f \circ p \otimes Id)(\delta \otimes \delta)$. Recíprocamente, si $p = p \circ (Id \otimes f \circ p \otimes Id)(\delta \otimes \delta)$, aplicando de nuevo p a 4.3 se obtiene que $p \circ \lambda_f \circ p = p$, lo cual es equivalente a que $p \circ \varphi = Id_{coker\,\delta}$, o en otras palabras, a que A sea separable.

Ejem. 11 Sea G grupo, $A = k[G]$ la k-álgebra de grupo. A es una k-coálgebra unitaria con comultiplicación

$$\delta : k[G] \to k[G] \otimes_k k[G], \; g \mapsto g \otimes g, \quad (g \in G)$$

y counidad,

$$\epsilon : k[G] \to k, \; \epsilon(g) = 1, \quad (g \in G).$$

La sucesión exacta

$$0 \to im\,\delta \to A^e \xrightarrow{p} coker\,\delta \to 0$$

se escinde pues si se define la función k-lineal

$$f : k[G] \otimes_k k[G] \to k, \; g_1 \otimes g_2 \mapsto 1 - \delta_{g_1 g_2}$$

donde $\delta_{g_1 g_2}$ es delta de Kronecker, entonces $f(Im\,\delta) = 0$. Por lo que f induce linealmente $\bar{f} : coker\,\delta \to k$ y ésta última es tal que

$$\begin{aligned}(Id \otimes \bar{f} \circ p \otimes Id)(\delta \otimes \delta)(g_1 \otimes g_2) &= g_1 \otimes (1 - \delta_{g_1 g_2}) \otimes g_2 \\ &= g_1 \otimes g_2 - \delta_{g_1 g_2} g_1 \otimes g_2\end{aligned}$$

aplicando p,

$$\begin{aligned}p \circ (Id \otimes \bar{f} \circ p \otimes Id)(\delta \otimes \delta)(g_1 \otimes g_2) &= g_1 \otimes g_2 - \delta_{g_1 g_2} g_1 \otimes g_2 + Im\,\delta \\ &= \begin{cases} g_1 \otimes g_2 + Im\,\delta, & \text{si } g_1 \neq g_2 \\ Im\,\delta, & \text{si } g_1 = g_2 \end{cases} \\ &= p(g_1 \otimes g_2)\end{aligned}$$

por lo que

$$p \circ (Id \otimes \bar{f} \circ p \otimes Id)(\delta \otimes \delta) = p$$

de donde se concluye, con ayuda del teorema 18, pag. 62, que $A = k[G]$ es coálgebra separable.

Ejem. 12 Sea k campo, $M_n(k)$ matrices $n \times n$ con entradas en k. Sean

$$I_{i,j} = (\delta_{i,j})_{i,j}$$

matrices en $M_n(k)$ con $\delta_{i,j}$ delta de Kronecker.

$M_n(k)$ es k-coálgebra con comultiplicación dada por

$$\delta(I_{i,j}) = \sum_{u=1}^{n} I_{i,u} \otimes I_{u,j}$$

y counidad

$$\epsilon : M_n(k) \to k,\ \epsilon(I_{i,j}) = \delta_{i,j}.$$

Se define k-linealmente $f : M_n^e(k) \to k$ por

$$f(I_{i,j} \otimes I_{u,v}) = \begin{cases} \delta_{i,j}\delta_{u,v}, & \text{si } i \neq v \\ 0, & \text{si } i = v \end{cases}$$

(como k campo, $\{ I_{i,j} \otimes I_{u,v} \mid i,j,u,v \}$ es base de M_n^e). f anula a $Im\,\delta$ pues

$$\begin{aligned} f\delta(I_{i,j}) &= f(\sum_{u=1}^{n} I_{i,u} \otimes I_{u,j}) \\ &= \begin{cases} \sum_{u=1}^{n} \delta_{i,u}\delta_{u,j} = 0, & \text{si } i \neq j \\ 0, & \text{si } i = j \end{cases} \end{aligned}$$

luego f induce $\bar{f}$ que cumple con

$$\begin{aligned} & p \circ (Id \otimes \bar{f} \circ p \otimes Id)(\delta \otimes \delta)(I_{i,j} \otimes I_{u,v}) = \\ & \quad p(\sum_{l=1,w=1}^{n} I_{i,l} \otimes f(I_{l,j} \otimes I_{u,w}) \otimes I_{w,v}) \\ &= p(\sum_{\substack{l=1,w=1 \\ l \neq w}} I_{i,l} \otimes \delta_{l,j}\delta_{u,w} \otimes I_{w,v}) \\ &= p(I_{i,j} \otimes \delta_{j,j}\delta_{u,u} \otimes I_{u,v}) \\ &= p(I_{i,j} \otimes I_{u,v}) \end{aligned}$$

Por lo que

$$p \circ (Id \otimes \bar{f} \circ p \otimes Id)(\delta \otimes \delta) = p$$

y de nuevo, por teorema 18, pag. 62, $M_n^e(k)$ es coálgebra separable.

Ahora procederemos a establecer la relación entre separabilidad y cohomología.

Definición 23 *Sea M un A-bicomódulo. Una derivación (ó coderivación) de M a A es un morfismo $\phi : M \to A$, k-lineal tal que*

$$\delta\phi = (\phi \otimes Id)\rho + (Id \otimes \phi)\lambda$$

donde δ es la comultiplicación de A y ρ, λ son las estructuras derechas e izquierdas de M, respectivamente.

Consideremos (A, δ, ϵ) coálgebra unitaria. Definimos $\kappa : A \otimes_k A \to A$, $x \otimes y \mapsto x\epsilon(y) - \epsilon(x)y$. Entonces $\kappa(Im\,\delta) = 0$ en vista de que, para $a \in A$,

$$\begin{aligned}
\kappa\delta(a) &= \kappa(a_{(1)} \otimes a_{(2)}) \\
&= a_{(1)}\epsilon(a_{(2)}) - \epsilon(a_{(1)})a_{(2)} \\
&= a - a \\
&= 0,
\end{aligned}$$

y así $Im\,\delta \subseteq ker\,\kappa$. Por lo que κ induce un morfismo k-lineal $coker\,\delta = A^e/Im\,\delta \to A^e/ker\,\kappa$. Luego definimos el k-morfismo $\bar{\kappa}$ como la composición,

$$\begin{tikzcd}
coker\,\delta \arrow[rr] \arrow[dr, "\bar{\kappa}"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & A^e/ker\,\kappa \arrow[dl, "\kappa"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Recordemos además el complejo de cocadenas:

$$C_c^0(M, A) \xrightarrow{\delta^0} C_c^1(M, A) \xrightarrow{\delta^1} C_c^2(M, A) \to \ldots$$

y pongamos $Z^n(M, A) = ker\,\delta^n$, $B^n(M, A) = Im\,\delta^{n-1}$.

Lema 12 *Sea M un A-bicomódulo unitario (A coálgebra unitaria) ó equivalentemente, M un A^e-módulo derecho unitario.*

i) Si $\phi \in Hom_{A^e}(M, coker\,\delta)$ entonces $\bar{\kappa}\phi$ es una derivación de M en A;

ii) La función $\theta : \phi \mapsto \bar{\kappa}\phi$ es iso de k-módulos de $Hom_{A^e}(M, coker\,\delta)$ a $Z^1(M, A)$;

iii)

$$\theta^{-1}(Im\,\delta^0) = \theta^{-1}(B^1(M, A)) = \{p \circ \psi \mid \psi \in Hom_{A^e}(M, A^e)\}$$

Dem.- i) Sean $\rho : M \to M \otimes_k A$, $\lambda : M \to A \otimes_k M$ estructuras derechas e izquierdas de M respectivamente. Por demostrar

$$(Id \otimes \bar{\kappa}\phi)\lambda + (\bar{\kappa}\phi \otimes Id)\rho = \delta\bar{\kappa}\phi \tag{4.4}$$

donde δ es comultiplicación de A.

Sabemos que $Hom_{A^*}(M_{A^*}, N_{A^*}) = Hom_{A-A}(M, N)$ entonces

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\rho"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & coker\,\delta \arrow[d, "\rho_c"] \\
M \otimes_k A \arrow[r, "\phi \otimes Id"'] & coker\,\delta \otimes_k A
\end{tikzcd}$$

y similarmente con λ. Siguiendo las definiciones, resulta que ρ_c está dada por

$$a_1 \otimes a_2 + Im\,\delta \mapsto (a_{(1)(2)} \otimes a_{(2)(1)} + Im\,\delta) \otimes \epsilon(a_{(1)(1)})a_{(2)(2)}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
(Id \otimes \bar{\kappa}\phi)\lambda + (\bar{\kappa}\phi \otimes Id)\rho &= (Id \otimes \bar{\kappa})(Id \otimes \phi)\lambda + (\bar{\kappa} \otimes Id)(\phi \otimes Id)\rho \\
&= (Id \otimes \bar{\kappa})\lambda_c\phi + (\bar{\kappa} \otimes Id)\rho_c\phi
\end{aligned}$$

calculemos éstos dos últimos sumandos. Sean $m \in M$ y $\phi(m) = m_{\phi(1)} \otimes m_{\phi(2)} + Im\,\delta$,

$$\begin{aligned}
&(\bar{\kappa} \otimes Id)\rho_c\phi(m) = \\
&\qquad (\bar{\kappa} \otimes Id)\big((m_{\phi(1)(2)} \otimes m_{\phi(2)(1)} + Im\,\delta) \otimes \epsilon(m_{\phi(1)(1)})m_{\phi(2)(2)} \big) \\
&\quad = \; m_{\phi(1)(2)}\epsilon(m_{\phi(2)(1)}) - \epsilon(m_{\phi(1)(2)})m_{\phi(2)(1)} \otimes \epsilon(m_{\phi(1)(1)})m_{\phi(2)(2)} \\
&= m_{\phi(1)(2)} \otimes \epsilon(m_{\phi(1)(1)})\epsilon(m_{\phi(2)(1)})m_{\phi(2)(2)} \\
&\qquad - m_{\phi(2)(1)}\epsilon(m_{\phi(1)(2)}\epsilon(m_{\phi(1)(1)}))m_{\phi(2)(1)} \otimes m_{\phi(2)(2)} \\
&\quad = \; m_{\phi(1)(2)} \otimes \epsilon(m_{\phi(1)(1)})m_{\phi(2)} - \epsilon(m_{\phi(1)})m_{\phi(2)(1)} \otimes m_{\phi(2)(2)} \\
&\quad = \; m_{\phi(1)} \otimes m_{\phi(2)} - \epsilon(m_{\phi(1)})m_{\phi(2)(1)} \otimes m_{\phi(2)(2)};
\end{aligned}$$

ahora,

$$\begin{aligned}
&(Id \otimes \bar{\kappa})\lambda_c\phi(m) = \\
&(Id \otimes \bar{\kappa})(Id \otimes \epsilon)(s \otimes Id)\{(m_{\phi(1)(2)} \otimes m_{\phi(2)(1)} + Im\,\delta) \otimes m_{\phi(1)(1)} \otimes m_{\phi(2)(2)}) \\
&= (Id \otimes \bar{\kappa})\{m_{\phi(1)(1)} \otimes (m_{\phi(1)(2)} \otimes m_{\phi(2)(1)} + Im\,\delta)\epsilon(m_{\phi(2)(2)})) \\
&= m_{\phi(1)(1)} \otimes \bar{\kappa}(m_{\phi(1)(2)} \otimes m_{\phi(2)} + Im\,\delta) \\
&= m_{\phi(1)(1)} \otimes m_{\phi(1)(2)}\epsilon(m_{\phi(2)}) - m_{\phi(1)(1)}\epsilon(m_{\phi(1)(2)}) \otimes m_{\phi(2)} \\
&= m_{\phi(1)(1)} \otimes m_{\phi(1)(2)}\epsilon(m_{\phi(2)}) - m_{\phi(1)} \otimes m_{\phi(2)},
\end{aligned}$$

sumando,

$$\begin{aligned}
&\{ (\bar{\kappa} \otimes Id)\rho_c + (Id \otimes \bar{\kappa}\lambda_c) \}\phi(m) = \\
&\qquad m_{\phi(1)(1)} \otimes m_{\phi(1)(2)}\epsilon(m_{\phi(2)}) - \epsilon(m_{\phi(1)})m_{\phi(2)(1)} \otimes m_{\phi(2)(2)} \\
&\quad = \; \delta(m_{\phi(1)}\epsilon(m_{\phi(2)}) - \epsilon(m_{\phi(1)})m_{\phi(2)}) \\
&\quad = \; \delta\bar{\kappa}\phi(m)
\end{aligned}$$

ii) $\underline{\theta \text{ es sobre}}$: sea $\chi \in Z^1(M, A) = ker\,\delta^1$, ie. $\chi : M \to A$ lineal y derivación. Se define ψ como,

$$\psi : M \to A,\ \psi(m) = \chi(m_{\rho(1)}) \otimes m_{\rho(2)} + Im\,\delta$$

Se afirma que $\epsilon \circ \chi = 0$, pues

$$\begin{aligned}(\epsilon \otimes \epsilon)\delta\chi &= (\epsilon \otimes Id)(Id \otimes \epsilon)\delta\chi \\ &= \epsilon\chi,\end{aligned}$$

pero también

$$\begin{aligned}(\epsilon \otimes \epsilon)\delta\chi &= (\epsilon \otimes \epsilon)((\chi \otimes Id)\rho + (Id \otimes \chi)\lambda) \\ &= (\epsilon\chi \otimes Id)(Id \otimes \epsilon)\rho + (Id \otimes \epsilon\chi)(\epsilon \otimes Id)\lambda \\ &= \epsilon\chi + \epsilon\chi\end{aligned}$$

i.e., $\epsilon\chi = \epsilon\chi + \epsilon\chi$, lo que implica $\epsilon\chi = 0$.

Se afirma ahora que $\bar{\kappa} \circ \psi = \chi$, porque para $m \in M$,

$$\begin{aligned}\bar{\kappa}\psi(m) &= \bar{\kappa}(\chi(m_{\rho(1)}) \otimes m_{\rho(2)} + Im\,\delta) \\ &= \chi(m_{\rho(1)})\epsilon(m_{\rho(2)}) - \underbrace{\epsilon\chi(m_{\rho(1)})}_{0} \otimes m_{\rho(2)} \\ &= \chi(m).\end{aligned}$$

Para hacer ver que θ es sobre sólo falta probar que χ es de A^e-comódulos derechos.

$$\begin{array}{ccccc} & & \psi & & \\ & M & \to & coker\,\delta & \\ \rho^e & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \rho^e_c \\ & M \otimes_k A^e & \to & coker\,\delta \otimes_k A^e & \\ & & \psi \otimes Id & & \end{array}$$

De nuevo, siguiendo las definiciones, resulta que ρ^e_c está dada por

$$m_1 \otimes m_2 + Im\,\delta \mapsto (m_{1(2)} \otimes m_{2(1)} + Im\,\delta) \otimes m_{1(1)} \otimes m_{2(2)}$$

Pongamos $p : A^e \to coker\,\delta$ proyección canónica, $Q = (p \otimes Id_{A^e})(Id \otimes s \otimes Id)$, $m \in M$. Calculemos,

$$\begin{aligned}\rho^e_c\psi(m) &= \rho^e_c(\chi(m_{\rho(1)}) \otimes m_{\rho(2)} + Im\,\delta)) \\ &= (p \otimes Id_{A^e})(Id \otimes s \otimes Id)(\delta^o \otimes \delta)(\chi \otimes Id)\rho(m) \\ &= Q(\delta^o\chi \otimes Id)(Id \otimes \delta)\rho(m) \\ &= Q(s\delta\chi \otimes Id)(\rho \otimes Id)\rho(m) \\ &= Q(s\{(\chi \otimes Id)\rho + (Id \otimes \chi)\lambda\} \otimes Id)(\rho \otimes Id)\rho(m)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= Q((s\{\chi \otimes Id\} \otimes Id)(\rho \otimes Id)\rho(m_{\rho(1)}) \otimes m_{\rho(2)})\\
&\quad +Q((s\{Id \otimes \chi\} \otimes Id)(\lambda \otimes Id)\rho(m_{\rho(1)}) \otimes m_{\rho(2)})\\
&= Q((s\{\chi \otimes Id\} \otimes Id)(Id \otimes \delta)\rho(m_{\rho(1)}) \otimes m_{\rho(2)})\\
&\quad +Q((s\{Id \otimes \chi) \otimes Id)(Id \otimes \rho)\lambda(m_{\rho(1)}) \otimes m_{\rho(2)})\\
&= (p \otimes Id_{A^e})(m_{\rho(1)\rho(2)(1)} \otimes m_{\rho(1)\rho(2)(2)} \otimes \chi(m_{\rho(1)\rho(1)}) \otimes m_{\rho(2)})\\
&\quad +(p \otimes Id_{A^e})(\chi(m_{\rho(1)\lambda(2)\rho(1)}) \otimes m_{\rho(1)\lambda(2)\rho(2)} \otimes m_{\rho(1)\lambda(1)} \otimes m_{\rho(2)})\\
&= (\chi(m_{\rho(1)\lambda(2)\rho(1)}) \otimes m_{\rho(1)\lambda(2)\rho(2)} + Im\,\delta) \otimes m_{\rho(1)\lambda(1)} \otimes m_{\rho(2)}\\
&= \psi(m_{\rho(1)\lambda(2)}) \otimes m_{\rho(1)\lambda(1)} \otimes m_{\rho(2)}\\
&= (\psi \otimes Id)(s \otimes Id_A)(\lambda \otimes Id)\rho(m)\\
&= (\psi \otimes Id)\rho^e(m)
\end{aligned}
$$

<u>θ es inyectiva:</u> primero un cálculo auxiliar. Sea $a_1 \otimes a_2 \in A^e$, entonces

$$
\begin{aligned}
&(Id \otimes \epsilon - \epsilon \otimes Id) \otimes (\epsilon \otimes Id)\delta^e(a_1 \otimes a_2) =\\
&\qquad a_{1(2)}\epsilon(a_{2(1)}) \otimes \epsilon(a_{1(1)})a_{2(2)} - \epsilon(a_{1(2)})a_{2(1)} \otimes \epsilon(a_{1(1)})a_{2(2)}\\
&= a_1 \otimes a_2 - \epsilon(a_1)\delta(a_2)
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Sea $\varphi \in Hom_{A^e}(M, coker\,\delta)$ tal que $\theta(\varphi) = \bar{\kappa}\varphi = 0$. Por demostrar $\varphi = 0$. Tomemos $m \in M$ y pongamos $\varphi(m) = m_{\varphi(1)} \otimes m_{\varphi(2)} + Im\,\delta$.

$$(\bar{\kappa} \otimes \epsilon \otimes Id)\rho^e_c\varphi(m) = m_{\varphi(1)} \otimes m_{\varphi(2)} - \epsilon(m_{\varphi(1)})\delta(m_{\varphi(2)}),$$

por 4.5. Pero como φ es de comódulos,

$$(\bar{\kappa} \otimes \epsilon \otimes Id)(\varphi \otimes Id)\rho^e(m) = m_{\varphi(1)} \otimes m_{\varphi(2)} - \epsilon(m_{\varphi(1)})\delta(m_{\varphi(2)})$$

ecuación cuyo lado izquierdo es igual a $(\bar{\kappa}\varphi \otimes \epsilon \otimes Id)\rho^e(m) = 0$. Lo que implica

$$m_{\varphi(1)} \otimes m_{\varphi(2)} = \epsilon(m_{\varphi(1)})\delta(m_{\varphi(2)}) \in Im\,\delta$$

por lo que $\varphi(m) = 0$, $\forall m$, i.e., $\varphi = 0$.

iii) Sea $\chi \in Im\,\delta^0 = B^1(M, A)$. Entonces $\chi : M \to A$ es k-lineal tal que

$$\chi = (Id \otimes f)\lambda - (f \otimes Id)\rho$$

para algún $f : M \to k$, k-lineal también.

Sabemos que $\theta^{-1}(\chi) = \psi$, donde $\psi : M \to coker\,\delta$, $\psi(m) = (\chi \otimes Id)\rho(m) + Im\,\delta$. El resultado estaría probado si $(\chi \otimes Id)\rho$ fuera de A^e-comódulos derechos, sin embargo no necesariamente es así. Para subsanar ésta deficiencia se hace:

$$\lambda_f = ((Id \otimes f)\lambda \otimes Id)\rho$$

como en el lema 11, pag. 61. Por el mismo lema 11, $\lambda_f \in Hom_{A^e}(M, A^e)$. Pero ahora $\theta(p \circ \lambda_f) = \chi$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\theta(p \circ f)(m) &= \{(Id \otimes \epsilon) - (\epsilon \otimes Id)\}\{(Id \otimes f)\lambda \otimes Id\}(m_{\rho(1)} \otimes m_{\rho(2)} \\
&= m_{\rho(1)\lambda(1)} f(m_{\rho(1)\lambda(2)}]\epsilon(m_{\rho(2)}) - \epsilon(m_{\rho(1)})_{\lambda(1)} f(m_{\rho(1)\lambda(2)})m_{\rho(2)} \\
&= (Id \otimes f)\lambda(m_{\rho(1)})\epsilon(m_{\rho(2)}) - f(\epsilon \otimes Id)\lambda(m_{\rho(1)}))m_{\rho(2)} \\
&= (Id \otimes f)\lambda(m_{\rho(1)}\epsilon(m_{\rho(2)})) - f(m_{\rho(1)})m_{\rho(2)} \\
&= (Id \otimes f)\lambda(m) - (f \otimes Id)\rho(m) \\
&= \chi(m)
\end{aligned}$$

Teorema 19 (A, δ, ϵ) *una k-coálgebra unitaria.*

$$A \textit{ es separable} \Leftrightarrow H_c^1(M, A) = 0, \ \forall M \ A\textit{-bicomódulo unitario}$$

Dem.- Sea $\theta : Hom_{A^e}(M, coker\,\delta) \to Z^1(M, A)$ iso de k-módulos como en el lema inmediato anterior.

Si A es separable, existe $\varphi : coker\,\delta \to A^e$ de A^e-módulos derechos, tal que $p\varphi = Id_{coker\,\delta}$. Sea $\psi \in Z^1(M, A)$. Mediante θ podemos poner $\psi : M \to coker\,\delta$. Luego $\psi = p(\varphi\psi) \in B^1(M, A)$. Lo que implica

$$H_c^1(M, A) = Z^1(M, A)/B^1(M, A) = 0.$$

para cualquier M A-bicomódulo unitario.

Recíprocamente, se pone $M = coker\,\delta$ y entonces

$$\begin{aligned}
Id_{coker\,\delta} \in Hom_{A^e}(coker\,\delta, coker\,\delta) &= Z^1(M, A) \\
&= B^1(M, A) \\
&= \{p \circ \psi \,|\, \psi \in Hom_{A^e}(M, A^e)\}
\end{aligned}$$

i.e., existe $\varphi : M \to A^e$ de A^e-módulos tal que $p \circ \varphi = Id$.

Ahora se trata de establecer que la condición $H_c^1(M, A) = 0$, $\forall M$ A-bicomódulo unitario es equivalente a $H_c^n(N, A) = 0$, $\forall n \geq 2, \forall M$ A-bicomódulo unitario. Tal hecho se puede obtener sin mayor dificultad para cuando k es campo y A es finita dimensional como k-espacio vectorial. Por ahora, consideremos a (A, δ, ϵ) como una k-coálgebra unitaria arbitrraria. Resulta que $A^* = Hom_k(A, k)$ es k-álgebra asociativa con unidad ϵ y con producto

$$f \cdot g = \mu(f \otimes g)\delta$$

donde μ es el producto de k. Similarmente:

Propiedad 6 *Si M es A-bicomódulo unitario entonces*

$$M^* = Hom_k(M, k)$$

es A^*-bicomódulo con productos laterales

$$\begin{array}{l} a \cdot f = \mu(a \otimes f)\lambda, \\ f \cdot b = \mu(f \otimes b)\rho, \end{array} \quad f \in M^*, a, b \in A^*$$

donde λ, ρ son las estructuras izquierda y derecha de M, respectivamente.

Se define,

$$\begin{array}{ccc} C_c^n(M, A) & \xrightarrow{F_n} & C^n(A^*, M^*) \\ M \xrightarrow{f} A^{n\otimes} & \mapsto & F_n(f) \end{array}$$

donde

$$F_n(f) : (A^*)^{\otimes n} \to M^*, \; F_n(f)(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n) = (f_1 \otimes \ldots \otimes f_n)f$$

Lema 13 *i)*

$$\begin{tikzcd} C_c^n(M, A) \arrow[r, "\delta^n"] \arrow[d, "F_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C_c^{n+1}(M, A) \arrow[d, "F_{n+1}"] \\ C^n(A^*, M^*) \arrow[r, "\delta^n"'] & C^{n+1}(A^*, M^*) \end{tikzcd} .$$

ii) si k campo, F_n es inyectiva;

iii) si k campo y tanto A como M son finito dimensionales, F_n es isomorfismo.

Dem.- i) Sea $f \in C_c^n(M, A)$. Entonces $f : M \to A^{\otimes n}$ y

$$\delta^n f = (Id \otimes f)\lambda + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \delta(i) f + (-1)^{n+1} (f \otimes Id)\rho \qquad (4.6)$$

Calculemos F_{n+1} en cada uno de los sumandos del lado derecho de 4.6:

$$\begin{aligned} F_{n+1}((Id \otimes f)\lambda)(f_1 \otimes \ldots \otimes f_{n+1}) &= (f_1 \otimes \ldots \otimes f_{n+1})(Id \otimes f)\lambda \\ &= (f_1 \otimes (f_2 \otimes \ldots \otimes f_{n+1})f)\lambda \\ &= (f_1 \otimes F_n(f)(f_2 \otimes \ldots \otimes f_{n+1}))\lambda \\ &= f_1 \cdot F_n(f)(f_2 \otimes \ldots \otimes f_{n+1}); \quad (4.7) \end{aligned}$$

similarmente

$$F_{n+1}((f\otimes Id)\rho)(f_1\otimes\ldots\otimes f_{n+1}) = F_n(f)(f_1\otimes\ldots\otimes f_n)\cdot f_{n+1} \qquad (4.8)$$

mientras que

$$\begin{aligned} F_{n+1}(\delta(i)f)(f_1\otimes\ldots\otimes f_{n+1}) &= (f_1\otimes\ldots\otimes f_{n+1})\delta(i)f \\ &= (\ldots\otimes f_i\otimes f_{i+1}\otimes\ldots)(\ldots\otimes \underbrace{\delta}_{i-lugar}\otimes\ldots)f \\ &= (\ldots\otimes f_{i-1}\otimes f_i\cdot f_{i+1}\otimes f_{i+2}\otimes\ldots)f \\ &= F_n(f)(\ldots\otimes \underbrace{f_i\cdot f_{i+1}}_{i-lugar}\otimes\ldots). \qquad (4.9) \end{aligned}$$

Aplicando F_{n+1} a ambos lados de 4.6, aplicando y sustituyendo 4.7, 4.8, 4.9:

$$\begin{aligned} F_{n+1}(\delta^n f)(f_1\otimes\ldots f_{n+1}) &= f_1\cdot F_n(f)(f_2\otimes\ldots\otimes f_{n+1}) \\ &\quad +\sum_{i=1}^{n} F_n(f)(\ldots\otimes f_i\cdot f_{i+1}\otimes\ldots) \\ &\quad +F_n(f)(f_1\otimes\ldots\otimes f_n)\cdot f_{n+1} \\ &= (\delta^n F_n(f))(f_1\otimes\ldots\otimes f_{n+1}) \end{aligned}$$

para cualquier $f_1\otimes\ldots f_{n+1}\in (A^*)^{\otimes(n+1)}$. Lo que implica,

$$F_{n+1}(\delta^n f) = \delta^n F_n(f)$$

ii) Supongamos $F_n(f) = 0$, i.e., $(f_1\otimes\ldots f_n)f = 0$, $\forall f_1\otimes\ldots f_n\in (A^*)^{n\otimes}$. Si $f\neq 0$, existe $m\in M$ tal que $f(m)\neq 0$, luego,

$$f(m) = \sum_i a_{1,i}\otimes\ldots a_{n,i}.$$

El subespacio de A, $W = \langle a_{l,i}\,|\,l,i\rangle_k$ es finito dimensional. Pongamos $e_1,\ldots,e_s$ base de W: entonces $f(m)\in W^{n\otimes}$ y

$$f(m) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} \lambda_{i_1\ldots i_n} e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_n}$$

podemos suponer que $\lambda_{1\ldots n}\neq 0$ y en consecuencia

$$0 = (e_1^*\otimes\ldots\otimes e_n^*)f(m) = \lambda_{1\ldots n}\neq 0$$

lo cual está en contradicción con nuestras suposiciones. Por lo tanto $f(m) = 0$, $\forall m$.

iii)

$$C^n(A^*, M^*) = Hom_k((A^*)^{n\otimes}, M^*),\ C_c^n(M,A) = Hom_k(M, A^{n\otimes})$$

$$
\begin{aligned}
\dim C^n(A^*, M^*) &= \dim (A^*)^{n\otimes} \dim M^* \\
&= (\dim A)^n (\dim M) \\
&= \dim C^n(M, A)
\end{aligned}
$$

y F_n inyectiva, luego F_n es iso.

Lema 14 *k campo, B una k-álgebra finito dimensional y unitaria.*
i)
Si $H^n(B, M) = 0$, $\forall M$ B-bimódulo finito dimensional entonces $H^k(B, N) = 0$ $\forall N$ B-bimódulo finito dimensional y $k \geq n$.
ii) B es separable si y solo si $H^1(B, N) = 0$, $\forall N$ B-bimódulo de dimensión finita.

Dem.- La misma que en Pierce [13], lemma pag. 206, para obtener i, y proposición, pag. 208, para ii.

Teorema 20 *k campo, A una k-coálgebra finito dimensional. Son equivalentes:*
i) A es separable ;
ii) $H^n_c(M, A) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ $\forall M$ A-bicomódulo finito dimensional.

Dem.- $H^1_c(M, A) \simeq H^1(A^*, M^*)$ según iii de lema 13, pag. 70. Por lo que A es separable si y sólo si lo es el álgebra asociativa A^*. Lo cual es equivalente a que los grupos de cohomología $H^n(A^*, N) = 0$, $\forall N$ A^*-bimódulo finito dimensional, $n = 1, 2, \ldots$. Pero, de nuevo por el lema 13, $H^n(A^*, N) \simeq H^n_c(N^*, A)$. Lo que termina de asegurar la afirmación del enunciado del teorema.

Corolario 4 *k campo, A una k-coálgebra finito dimensional. Si A es separable entonces A es rígida.*

Dem.- $H^2_c(A, A) = 0$.

Ejem. 13 Sea G grupo finito, k campo. Sabemos que el álgebra de grupo $k[G]$ es una coálgebra separable. Luego entonces es rígida.

Ejem. 14 k campo, $M_n(k)$ matrices $n \times n$ con entradas en k. $M_n(k)$ es una k-coálgebra de dimensión finita y también separable, y entonces es rígida.

Capítulo 5

Grupos Cuánticos y la Cuantización de $sl_2(k)$

Ejemplificaremos los conceptos de los capítulos anteriores en lo que se conoce como la definición de *grupo cuántico* según Drinfield, y construiremos una cuantización para el caso más simple no trivial: $sl_2(k)$ el álgebra de Lie de las matrices complejas 2×2 de traza cero. El objetivo que se persigue es construir una deformación no trivial del álgebra envolvente universal de $sl_2(k)$.

Resulta que los propios axiomas de ésta deformación tienen implícita una estructura que se conoce como *biálgebra de Lie*. Para $sl_2(k)$ estas biálgebras de Lie están completamente clasificadas. Lo cual sugiere la manera en que hay que deformar la coestructura del álgebra envolvente universal de $sl_2(k)$, lo cual a su vez sugiere una deformación del corchete de Lie de $sl_2(k)$. El problema es entonces construir una deformación asociativa del producto tal que el corchete inducido sea la deformación del corchete obtenida anteriormente. Este no es más que el viejo problema que resuelve el álgebra envolvente universal, en nuestro caso no exactamente aplicado a álgebras de Lie, sino a lo que llamaremos *q−álgebras de Lie*. Obtenemos entonces una especie de *q−álgebra envolvente universal*.

La manera en que se presenta ésta q−álgebra envolvente universal es, por supuesto, por medio de generadores y relaciones, que es la manera usual en que se presentan en la literatura los *grupos cuánticos*. Para hacer la conección con nuestro punto de vista, que es presentar las estructuras mediante series de potencias haremos uso del teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt aplicado a q−álgebras de Lie.

La definición de grupos cuánticos tratan con álgebras de Lie. En lo que sigue k denotará al campo de los números complejos, a menos que se diga lo contrario.

Sea $\mathcal{G}$ una k-álgebra de Lie, $U\mathcal{G}$ su álgebra envolvente universal. $U_t = U\mathcal{G}_t$ el k_t-módulo de las series formales con parámetro t y coeficientes en $U\mathcal{G}$. Y consideremos la estructura canónica de álgebra de Hopf de la envolvente universal ([9] pag. 224), $(U\mathcal{G}, \mu, u, \Delta, \epsilon, \eta)$, donde μ es el producto, u el morfismo unidad, Δ la comultiplicación, ϵ la counidad y η la antípoda: $\Delta : U\mathcal{G} \to U\mathcal{G} \otimes_k U\mathcal{G}$, morfismo de k-álgebras caracterizado por $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, \forall x \in \mathcal{G}$, $\epsilon : U\mathcal{G} \to k$, proyección canónica,$(U\mathcal{G} = k \oplus \mathcal{G}U\mathcal{G})$, $\eta : U\mathcal{G} \to U\mathcal{G}$, antimorfismo dado por $\eta(x) = -x, \forall x \in \mathcal{G}$. En todas éstas definiciones se está haciendo uso implícitamente del teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, ([9], teo. 1.1. pag. 222).

Definición 24 *U_t se llamo cuantización de $\mathcal{G}$ si existe una deformación*

$$(U_t, \mu_t, u_t, \Delta_t, \epsilon_t, \eta_t)$$

del álgebra $(U\mathcal{G}, \mu, u, \Delta, \epsilon, \eta)$ de Hopf.

A una cuantización también se le llama *grupo cuántico*. Éste nombre es porque se está pensando en grupos de Lie. Más específicamente, para estudiar un grupo de Lie G es común reemplazar a éste por su álgebra de Hopf, $C^\infty(G)$. De aquí la palabra *grupo*. Mientras que *cuántico (quantum)* se refiere a la deformación con parámetro t ([18] pag. 85).

Obsérvese que al menos existe la deformación trivial. Antes de dar una deformación no trivial averiguemos como tiene que ser ésta. O en otras palabras lo que sigue son consecuencias de la definición de cuantización.

Sea $p : U_t \to U\mathcal{G}$ la proyección natural, $s : U_t \hat{\otimes}_{k_t} U_t \to U_t \hat{\otimes}_{k_t} U_t$ switch, $U = U\mathcal{G}$. Se define $\Delta_t' = s \circ \Delta_t$. Entonces, para $a \in U_t$;

$$\begin{aligned} \Delta_t(a) &= \Delta_t(p(a) + tb) \quad \text{con } b \in U_t \\ &= \Delta(p(a)) + tc \end{aligned}$$

para algún $c \in U_t \hat{\otimes}_{k_t} U_t$, (recordar que $U_t \hat{\otimes}_{k_t} U_t \simeq (U\mathcal{G} \otimes_k U\mathcal{G})_t$ y que $\Delta_t = \sum_{i=0}^{\infty} t^i \Delta_i$). Luego,

$$\Delta_t'(a) = \Delta(p(a)) + ts(c)$$

por ser Δ cocommutativa. De donde $\Delta_t(a) - \Delta_t'(a) \equiv 0 \,(mod\, t)$. Finalmente, haciendo $t = 0$ en la serie $\{\Delta_t(a) - \Delta_t'(a)\}/t$;

$$\frac{\Delta_t(a) - \Delta_t'(a)}{t}\Big|_{t=0} \in U \otimes_k U$$

Por lo tanto, tenemos una función k-lineal:

$$\delta : U\mathcal{G} \to U\mathcal{G} \otimes_k U\mathcal{G} \,, \quad a \mapsto \frac{\Delta_t(a) - \Delta_t'(a)}{t}\Big|_{t=0}$$

Denotemos con la misma δ a $\delta|_{\mathcal{G}}$. Se afirma que:

Propiedad 7

$$\delta : \mathcal{G} \to \mathcal{G} \otimes_k \mathcal{G}$$

Dem.- Sea P el conjunto de elementos primitivos de $U\mathcal{G}$. Como *carac* $k = 0$. $P = \mathcal{G}$. Asi que: $g \in \mathcal{G} \Leftrightarrow \Delta g = g \otimes 1 + 1 \otimes g$ ([9], pag. 225, 2.1).

Sea $g \in \mathcal{G}$. Podemos poner, como se observó antes:

$$\begin{aligned} \Delta_t g &= \Delta g + tb \quad \text{con } b \in U_1 \hat{\otimes}_{k_t} U_t \\ &= g \otimes 1 + 1 \otimes g + tb \end{aligned}$$

aplicando $(Id \otimes \Delta_t)$,

$$\begin{aligned} (Id \otimes \Delta_t)\Delta_t g &= g \otimes \Delta_t(1) + 1 \otimes \Delta_t g + t(Id \otimes \Delta_t b) \\ &= g \otimes \Delta_t(1) + 1 \otimes g \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes g + t(1 \otimes b) + t(Id \otimes \Delta_t)b \end{aligned}$$

similarmente,

$$(\Delta_t \otimes Id)\Delta_t g = g \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes g \otimes 1 + t(b \otimes 1) + \Delta_t(1) \otimes g + t(\Delta \otimes Id)b$$

ahora sabemos que en principio $1 \in U\mathcal{G}$ no es necesariamente la unidad en la deformación U_t, sin embargo salvo un isomorfismo 1 es también la unidad en la deformación. Así podemos suponer que $1 \in U\mathcal{G}$ es también la unidad en U_t. Luego como Δ_t es, por definición morfismo unitario de álgebras: $\Delta_t(1) = 1 \otimes 1$. Ésta suposición junto con la coasociatividad asegura la igualdad:

$$g \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes g + t\{1 \otimes b + (Id \otimes \Delta_t)b\} = g \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes g + t\{b \otimes 1 + (\Delta_t \otimes Id)b\}$$

i.e.,

$$t(1 \otimes b + (Id \otimes \Delta_t)b\} = t(b \otimes 1 + (\Delta_t \otimes Id)b\} \tag{5.1}$$

Si dividimos por t y luego hacemos $t = 0$, ($U_1 \hat{\otimes}_{k_t} U_t \hat{\otimes}_{k_t} U_t \simeq (U\mathcal{G} \otimes_k U\mathcal{G} \otimes_k U\mathcal{G})_t$ de k_t-módulos) se obtiene la siguiente igualdad en $U\mathcal{G} \otimes_k U\mathcal{G} \otimes_k U\mathcal{G}$:

$$1 \otimes b_0 + (Id \otimes \Delta)b_0 = b_0 \otimes 1 + (\Delta \otimes Id)b_0 \tag{5.2}$$

Para seguir avanzando se necesita de:

Lema 15 *En general, si $\mathcal{L}$ es una k-álgebra de Lie con la característica de k cero, U el álgebra envolvente universal de $\mathcal{L}$, Δ la comultiplicación de ésto, $b_0 \in U \otimes_k U$, tales que:*

$$(\Delta \otimes_k Id)b_0 - (Id \otimes_k \Delta)b_0 = 1 \otimes b_0 - b_0 \otimes 1$$

Entonces

$$b_0 \in \mathcal{L} \otimes_k \mathcal{L}$$

Dem. de lema.- Sea $\{g_v\}_v$ k-base ordenada de $\mathcal{L}$. Por el teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt ([9], pag 222, 1.1) podemos escribir

$$b_0 = \sum_{u_1,\dots,u_n;v_1,\dots,v_n} \xi_{(u_1,\dots,u_n;v_1,\dots,v_n)} g_{u_1}^{\alpha_1} \cdots g_{u_n}^{\alpha_n} \otimes g_{v_1}^{\beta_1} \cdots g_{v_m}^{\beta_m}$$

con $\xi_{(u_1,\dots,u_n;v_1,\dots,v_n)}$ nunca cero y $\alpha_i = \alpha_i(u_i)$, $\beta_j = \beta_j(v_j)$. Por lo que

$1 \otimes b_0 - b_0 \otimes 1 =$

$$\sum_{(u;v)} \xi_{(u;v)} \Delta^{\alpha_1}(g_{u_1}) \dots \Delta_{u_n}^{\alpha_n} \otimes g_{v_1}^{\beta_1} \cdots g_{v_m}^{\beta_m}$$

$$- \sum_{(u;v)} \xi_{(u;v)} g_{u_1}^{\alpha_1} \cdots g_{u_n}^{\alpha_n} \otimes \Delta^{\beta_1}(g_{v_1}) \dots \Delta^{\beta_m}(g_{v_m}) \}$$

$$= \sum_{(u;v)} \xi_{(u;v)} \sum_{l_1=0 \dots l_n=0}^{\alpha_1,\dots,\alpha_n} \binom{\alpha_1}{l_1} \cdots \binom{\alpha_n}{l_n} g_{u_1}^{l_1} \cdots g_{u_n}^{l_n} \otimes g_{u_1}^{\alpha_1 - l_1} \dots g_{u_n}^{\alpha_n - l_n} \otimes g_{v_1}^{\beta_1} \cdots g_{v_m}^{\beta_m}$$

$$- \sum_{(u;v)} \xi_{(u;v)} g_{u_1}^{\alpha_1} \cdots g_{u_n}^{\alpha_n} \otimes \sum_{d_1=0,\dots,d_m=0}^{\beta_1,\dots,\beta_m} \binom{\beta_1}{d_1} \cdots \binom{\beta_m}{d_m} g_{v_1}^{\beta_1 - d_1} \dots g_{v_m}^{\beta_m - d_m} \otimes g_{v_1}^{d_1} \cdots g_{v_m}^{d_m}$$

lo cual implica, por la aparición del 1 en la diferencia inicial, que

$$0 = \sum_{(u;v)} \xi_{(u,v)} \sum_{\substack{(l_1,\dots,l_n) \\ 0 < \Sigma l_i < \Sigma \alpha_i}} \binom{\alpha_1}{l_1} \cdots \binom{\alpha_n}{l_n} g_{u_1}^{l_1} \cdots g_{u_n}^{l_n}$$

$$\otimes g_{u_1}^{\alpha_1 - l_1} \dots g_{u_n}^{\alpha_n - l_n} \otimes g_{v_1}^{\beta_1} \cdots g_{v_m}^{\beta_m}$$

$$- \sum_{(u;v)} \sum_{\substack{(d_1,\dots,d_m) \\ 0 < \Sigma d_i < \Sigma \beta_i}} \xi_{(u;v)} g_{u_1}^{\alpha_1} \cdots g_{u_n}^{\alpha_n}$$

$$\otimes \binom{\beta_1}{d_1} \cdots \binom{\beta_m}{d_m} g_{v_1}^{\beta_1 - d_1} \dots g_{v_m}^{\beta_m - d_m} \otimes g_{v_1}^{d_1} \cdots g_{v_m}^{d_m}$$

en la primera sumatoria siempre aparece el factor $g_{v_1}^{\beta_1} \dots g_{v_m}^{\beta_m}$ que nunca aparece en la segunda sumatoria, mientras que en ésta segunda siempre aparece como factor $g_{u_1}^{\alpha_1} \dots g_{u_n}^{\alpha_n}$ que nunca aparece en la segunda. Así tenemos una combinación lineal no trivial de elementos básicos a menos que las sumas sean sobre conjuntos vacíos. Y ésto sucede solo si $n = 1$, $m = 1$ y $1 = \beta_1 = \alpha_1$. Por lo tanto;

$$b_0 = \sum_{u_1,v_1} \xi_{u_1,v_1} g_{u_1} \otimes g_{v_1} \in \mathcal{L} \otimes_k \mathcal{L} \qquad (5.3)$$

Continuemos con la demostración de la propiedad afirmada. Pusimos $\Delta_t g = \Delta g + tb$, luego $\Delta_t' g = \Delta g + ts(b)$ con s switch, por lo que;

$$\begin{aligned} \delta(g) &= \frac{\Delta_t(g) - \Delta_t'(g)}{t}\Big|_{t=0} \\ &= b_0 - s(b_0) \in \mathcal{G} \otimes_k \mathcal{G}. \end{aligned}$$

Propiedad 8

$$\begin{aligned} i)\ \ \delta(xy) &= \delta(x)\Delta(y) + \Delta(x)\delta(y) \quad \forall x,y \in U\mathcal{G}\,; \\ ii)\ \ \delta[x,y] &= [x \otimes 1 + 1 \otimes x, \delta(y)] - [y \otimes 1 + 1 \otimes y, \delta(x)]\,, \quad \forall x,y \in \mathcal{G}\,; \end{aligned}$$

donde el corchete es de Lie.

Dem.-
$i)$ Sean $x, y \in U\mathcal{G}$ entonces,

$$\begin{aligned} \Delta_t(xy) - \Delta_t'(xy) &= \Delta_t(x)\Delta_t(y) - \Delta_t'(x)\Delta_t'(y) \\ &= \{\Delta_t(x) - \Delta_t'(x)\}\Delta_t(y) + \Delta_t'(x)\{\Delta_t(y) - \Delta_t'(y)\} \end{aligned}$$

dividiendo por t y luego haciendo $t = 0$ se obtiene la igualdad anunciada.
$ii)$

$$\begin{aligned} \delta([x,y]) &= \delta(xy) - \delta(yx) \\ &= \delta(x)\Delta(y) + \Delta(x)\delta(y) - \delta(y)\Delta(x) - \Delta(y)\delta(x) \\ &= [\Delta(x), \delta(y)] - [\Delta(y), \delta(x)] \end{aligned}$$

y si ponemos $x, y \in \mathcal{G}$, como tales son primitivos, se obtiene la igualdad deseada.

El inciso i dice que $\delta : U\mathcal{G} \to U\mathcal{G} \otimes_k U\mathcal{G}$ está determinado por $\delta|_{\mathcal{G}}$. Mientras que ii asegura que δ es un 1-cociclo en el siguiente complejo de cocadenas:

En general para V un F-espacio vectorial denotemos con $\bigwedge(V)$ al álgebra exterior construida sobre V $(\bigwedge(V) = \otimes V/\langle v^2 \mid v \in V\rangle_{\otimes V})$. Entonces:

$$\bigwedge(V) = \oplus_{k=0}^{\infty} \bigwedge^k(V)$$

donde $\bigwedge^k(V) = \langle v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \mid v_i \in V\rangle_k$ $(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$ es la imagen de $v_1 \otimes \ldots \otimes v_k$ en $\bigwedge(V))$, $\bigwedge^0(V) = F)$.

Sea M un $\mathcal{L}$-módulo con $\mathcal{L}$ F-álgebra de Lie. Se definen las cocadenas

$$C^q(\mathcal{L}, M) = Hom_F(\bigwedge^q \mathcal{L}, M)$$

y el operador de cofrontera:

$$\begin{array}{ccc} C^q(\mathcal{L}, M) & \xrightarrow{\delta^q} & C^{q+1}(\mathcal{L}, M) \\ \bigwedge^q \mathcal{L} \xrightarrow{c} M & \mapsto & \bigwedge^{q+1} \mathcal{L} \xrightarrow{\delta^q c} M \end{array}$$

donde

$$\delta^q c(g_1 \wedge \ldots \wedge g_{q+1}) = \sum_{1 \leq s \leq q+1} (-1)^s g_s c(g_1 \wedge \ldots \hat{g}_s \ldots \wedge g_{q+1}) +$$

$$\sum_{1 \leq s < t \leq q+1} (-1)^{s+t-1} c([g_s, g_t] \wedge g_1 \wedge g_2 \wedge \ldots \wedge \hat{g}_s \wedge \ldots \wedge \hat{g}_t \ldots \wedge g_{q+1})$$

y el acento^ significa eliminar ([4] 1.§3. pag.15). . Se tiene entonces un complejo de cocadenas cuya inexactitud es medida, como siempre, por

$$H^*(\mathcal{L}, M) = H^*(C^*(\mathcal{L}, M))$$

Propiedad 9 *Si $\mathcal{L}$ es una F-álgebra de Lie entonces $\mathcal{L} \otimes_F \mathcal{L}$ es un $\mathcal{L}$-módulo. c en $C^*(\mathcal{L}, \mathcal{L} \otimes_F \mathcal{L})$ es 1-cociclo $\Leftrightarrow$ $c[g_1, g_2] = [g_1 \otimes 1 + 1 \otimes g_1, c(g_2)] - [g_2 \otimes 1 + 1 \otimes g_2, c(g_1)]$ $\forall g_1, g_2 \in \mathcal{L}$.*

Dem.- $\mathcal{L}$ actúa sobre $\mathcal{L} \otimes_F \mathcal{L}$ definiendo

$$g(x \otimes y) = [g, x] \otimes y + x \otimes [g, y]$$

Veamos los 1-cociclos c de $C^*(\mathcal{L}, \mathcal{L} \otimes_F \mathcal{L})$:

$$\begin{aligned} \delta^1 c(g_1 \wedge g_2) &= \sum_{1 \leq s < t \leq 2} (-1)^{s+t-1} c[g_s, g_t] + \sum_{1 \leq s \leq 2} (-1)^s g_s c(\ldots, \hat{g}_s, \ldots) \\ &= c[g_1, g_2] - g_1 c(g_2) + g_2 c(g_1) \end{aligned}$$

por lo que c es un 1-cociclo si y solo si

$$\begin{aligned} c[g_1, g_2] &= g_1 c(g_2) - g_2 c(g_1) \\ &= [g_1 \otimes 1 + 1 \otimes g_1, c(g_2)] - [g_2 \otimes 1 + 1 \otimes g_2, c(g_1)] \end{aligned}$$

También con ayuda de tal cohomología se puede probar que las cuantizaciones de álgebras de Lie semisimples finito dimensionales siempre tienen producto isomorfo al trivial.

Propiedad 10 *Si $\mathcal{L}$ es una F-álgebra de Lie y U su álgebra envolvente universal. Entonces,*

$$H^2(\mathcal{L},\mathcal{L}) = 0 \Rightarrow H^2(U,U) = 0.$$

Dem.- Sea $f \in C^2(U,U)$ tal que $\delta^2 f = 0$. i.e.,

$$\delta^2 f(a,b,c) = af(b,c) - f(ab,c) + f(a,bc) - f(a,b)c = 0. \tag{5.4}$$

Caso: f es simétrica en $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$. Se quiere encontrar $g \in C^1(U,U)$ tal que

$$f(a,b) = ag(b) - g(ab) + g(a)b,\ \forall a.b \in U. \tag{5.5}$$

Sea X una base totalmente ordenada de $\mathcal{L}$. Y sea $S(X)$ el conjunto de todas las sucesiones finitas no decrecientes de elementos de X. El teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt asegura que los productos de los elementos de $S(X)$ forman una base para U. Sobre ésta base se define $g : U \to U$ linealmente de tal manera que satisfaga 5.5, como sigue:

si $(x_1,\dots,x_n) \in S(X)$,

$$g(x_1 \dots x_n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 1 \\ -f(x_1,x_2), & \text{si } n = 2 \\ x_1 g(x_2 \dots x_n) - f(x_1,x_2 \dots x_n), & \text{si } n > 2 \end{cases}$$

Como f es simétrica, vale 5.5 sobre $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$.

Obsérvese como, por linealidad, si 5.5 vale para $f(a,b)$ y para $f(a,c)$ entonces vale para $f(a,b+c)$.

Probaremos ahora que 5.5 vale para elementos de la forma $f(x_1, zx_2 \dots x_n)$ con $(x_1,\dots x_n) \in S(X), (x_1,z) \in S(X)$: para $n = 1$ ya se hizo. Para $n > 1$: si $(x_1, z, x_2,\dots,x_n) \in S(X)$ se obtiene 5.5 por definición de g. En caso contrario,

$$\begin{aligned} f(x_1, zx_2 \dots x_n) &= f(x_1,(x_2 z + [z,x_2])x_3 \dots x_n) \\ &= f(x_1, x_2 z x_3 \dots x_n) + f(x_1,[z,x_2]x_3 \dots x_n) \\ &\ \ \vdots \\ &= f(x_1, x_2 \dots z \dots x_n) + f(x_1,[z,x_2]x_3 \dots x_n) + \dots \end{aligned} \tag{5.6}$$

donde $(x_1,\dots,z,\dots,x_n) \in S(X)$. Entonces para todos los sumandos de 5.6 vale 5.5 por inducción, en consecuencia, como se observó antes, vale 5.5 para $f(x_1, zx_2 \dots x_n)$.

También es cierta 5.5 para elementos de la forma $f(z,x_1 \dots x_n)$ con $z \in X, (x_1,\dots,x_n) \in S(X)$. En efecto, si $n = 1$ es por definición de g. Supongamos $n > 1$. Si $(z,x_1) \in S(X)$ se obiene 5.5 por definición. Si no, de 5.4 se obtiene

$$\begin{aligned} f(z, x_1 \dots x_n) &= -zf(x_1, x_2 \dots x_n) + f(zx_1, x_2 \dots x_n) \\ &\quad + f(z,x_1)x_2 \dots x_n \qquad (5.7) \\ &= -zf(x_1, x_2 \dots x_n) + f(x_1 z, x_2 \dots x_n) + f([z,x_1], x_2 \dots x_n) \\ &\quad + f(z,x_1)x_2 \dots x_n; \end{aligned}$$

pero también de 5.4,

$$\begin{aligned} f(x_1 z, x_2 \ldots x_n) &= x_1 f(z, x_2 \ldots x_n) + f(x_1, z x_2 \ldots x_n) - f(x_1, z) x_2 \ldots x_n \\ &= x_1 z g(x_2 \ldots x_n) - g(x_1 z x_2 \ldots x_n) + g(x_1 z) x_2 \ldots x_n \end{aligned}$$

por hipótesis de inducción y el caso anterior, i.e. vale 5.5), lo que implica, por linealidad e inducción (de nuevo) , que es cierta para $f(x_1 z + [z, x_1], x_2 \ldots x_n)$. Sustituyendo en 5.7,

$$\begin{aligned} f(z, x_1 \ldots x_n) &= -z x_1 g(x_2 \ldots x_n) + z g(x_1 x_2 \ldots x_n) \\ &\quad z x_1 g(x_2 \ldots x_n) - g(z x_1 \ldots x_n) + g(z x_1) x_2 \ldots x_n \\ &\quad -g(z x_1) x_2 \ldots x_n \\ &= z g(x_1 \ldots x_n) - g(z x_1 \ldots x_n) \end{aligned}$$

i.e., vale 5.5 para $f(z, x_1 \ldots x_n)$ y por ende, para $f(z, b)$, $\forall b \in U$.

Finalmente, veamos que 5.5 se cumple para el caso general.

Sean $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_m) \in S(X)$. Por inducción sobre n veamos la validez de 5.5. Si $n = 1$ es el caso anterior. Supongamos $n > 1$,

$$\begin{aligned} f(x_1 \ldots x_n, y_1 \ldots y_m) &= x_1 f(x_2 \ldots x_n, y_1, \ldots, y_m) \\ &\quad + f(x_1, x_2 \ldots x_n y_1, \ldots, y_m) \\ &\quad - f(x_1, x_2 \ldots x_n) y_1 \ldots y_m \text{ por 5.4,} \\ &= x_1 x_2 \ldots x_n g(y_1 \ldots y_m) - x_1 g(x_2 \ldots x_n y_1 \ldots y_m) \\ &\quad + x_1 g(x_2 \ldots x_n) y_1 \ldots y_m \\ &\quad + x_1 g(x_2 \ldots x_n y_1 \ldots y_m) - g(x_1 \ldots x_n y_1 \ldots y_m) \\ &\quad - x_1 g(x_2 \ldots x_n) y_1 \ldots y_m + g(x_1 x_2 \ldots x_n) y_1 \ldots y_m \\ &= \delta^1 g(x_1 \ldots x_n, y_1 \ldots y_m) \end{aligned}$$

Caso: f no simétrica en $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$. Definimos $h : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, con la siguiente fórmula: $h(x, y) = f(x, y) - f(y, x)$. h es antisimétrica, por lo tanto define una función $h : \mathcal{L} \wedge \mathcal{L} \to \mathcal{L}$. Luego podemos considerar que $h \in C^2(\mathcal{L}, \mathcal{L})$. Calculemos, recordando que $\mathcal{L}$ actúa sobre sí misma vía su corchete de Lie,

$$\begin{aligned} \delta^2 h(x, y, z) &= -[x, h(y, z)] + [y, h(x, z)] - [z, h(x, y)] \\ &\quad + h([x, y], z) - h([x, z], y) + h([y, z], x) \\ &= -\delta^2 f(x, y, z) + \delta^2 f(x, z, y) - \delta^2 f(y, z, x) + \delta^2 f(z, y, x) \\ &\quad - \delta^2 f(z, x, y) + \delta^2 f(y, x, z) \\ &= 0, \end{aligned}$$

por lo que h es una cofrontera. Es decir, existe $g \in C^1(\mathcal{L}, \mathcal{L})$ tal que $h = \delta^1 g$. Extendemos $-g$ linealmente (e inductivamente) a U de la siguiente manera, si $(x_1, \dots, x_n) \in S(X)$,

$$\tilde{g}(x_1 \dots x_n) = \begin{cases} -g(x_1), & \text{si } n = 1 \\ f(x_1, x_2 \dots x_n) - x_1\tilde{g}(x_2 \dots x_n) - \tilde{g}(x_1)x_2 \dots x_n, & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

sobre los monomios básicos dados por el teorema de Poincare-Birkhoff-Witt . Entonces, si $a, b \in \mathcal{L}$, (obsérvese que como $\tilde{g} \in C^1(U, U)$, $\delta^1\tilde{g}$ denota el morfismo de cofrontera de Hochschild),

$$\begin{aligned} \delta^1\tilde{g}(a,b) - \delta^1\tilde{g}(b,a) &= \tilde{g}[b,a] + [a, \tilde{g}(b)] + [\tilde{g}(a), b] \\ &= -[a, g(b)] + [b, g(a)] + g[a,b] \\ &= \delta^1 g(a,b) \\ &= f(a,b) - f(b,a), \end{aligned}$$

despejando,

$$f(a,b) - \delta^1\tilde{g}(a,b) = f(b,a) - \delta^1\tilde{g}(b,a). \ \forall a, b \in \mathcal{L}$$

es decir, la diferencia $f - \delta^1\tilde{g}$ es simétrica en $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$. Luego, como $f - \delta^1\tilde{g} \in ker\,\delta^2$, por el caso simétrico se obtiene que f es una cofrontera.

Corolario 5 *Si $\mathcal{L}$ es F-álgebra de Lie semisimple y finito dimensional entonces su álgebra envolvente universal es rígida.*

Dem.- Por un lema de Whitehead, ([8], prop.6.3, pag. 249) se obtiene que $H^2(\mathcal{L}, M) = 0$ para cualquier $\mathcal{L}$-módulo M finito dimensional. En particular $H^2(\mathcal{L}, \mathcal{L}) = 0$. Lo que implica $H^2(U, U) = 0$, donde U es el álgebra envolvente universal de $\mathcal{L}$. Y así, por teo. 6, cap. 2, U es rígida.

Regresando a nuestra k-álgebra de Lie $\mathcal{G}$ se obtiene que $\delta : \mathcal{G} \to \mathcal{G} \otimes_k \mathcal{G}$ es un 1-cociclo en $C^*(\mathcal{G}, \mathcal{G} \otimes_k \mathcal{G})$. Tal δ tiene más propiedades. Por ejemplo, dualizando

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{G} \otimes_k \mathcal{G})^* \arrow[rr, "\delta^*"] & & \mathcal{G}^* \\ & \mathcal{G}^* \otimes_k \mathcal{G}^* \arrow[ul, "i"] \arrow[ur, "\delta^+"'] \arrow[u, phantom, "\circlearrowright"] & \end{tikzcd}$$

donde $i : \mathcal{G}^* \otimes_k \mathcal{G}^* \to (\mathcal{G} \otimes_k \mathcal{G})^*$, $\ i(m \otimes n)(u \otimes v) = m(u)n(v)$ es inclusión (pues manda linealmente independientes en linealmente independientes). Abusando de la notación denotamos con δ^* a δ^+.

El siguiente es un cálculo necesario para probar que δ^* es un corchete de Lie.

Observación.- Sean $x, y, z \in U\mathcal{G}^*$, $d \in U\mathcal{G} \otimes_k U\mathcal{G}$ y $D = 1 \otimes d - d \otimes 1 + (Id \otimes \Delta)d - (\Delta \otimes Id)d$. Entonces

$$(x \otimes y \otimes z - y \otimes x \otimes z + z \otimes x \otimes y - z \otimes y \otimes x + y \otimes z \otimes x - x \otimes z \otimes y)D = 0$$

Dem.- Por linealidad podemos suponer que $d = a \otimes b$. Pongamos $S = (x \otimes y \otimes z - y \otimes x \otimes z + z \otimes x \otimes y - z \otimes y \otimes x + y \otimes z \otimes x - x \otimes z \otimes y)$, $s : U\mathcal{G} \otimes_k U\mathcal{G} \to U\mathcal{G} \otimes_k U\mathcal{G}$, switch. Entonces:

$S \circ (Id \otimes \Delta - \Delta \otimes Id)(a \otimes b) =$

$$x(a)(y \otimes z)(\Delta(b) - s\Delta(b)) + (x \otimes y)(s\Delta(a) - \Delta(a))z(b) + (y \otimes z)(s\Delta(a) - \Delta(a))x(b) + y(a)(z \otimes x)(\Delta(b) - s\Delta(b)) + (x \otimes z)(\Delta(a) - s\Delta(b))y(b) + z(a)(x \otimes y)(\Delta(b) - s\Delta(b)) = 0$$

pues Δ es cocommutativa. Un cálculo similar muestra que $S(1 \otimes d - d \otimes 1) = 0$.

Propiedad 11

$$\delta^* : \mathcal{G}^* \otimes_k \mathcal{G}^* \to \mathcal{G}^*$$

es un corchete de Lie

Dem.-
<u>δ^* es alternante</u>; sea $x \in \mathcal{G}^*$, $g \in \mathcal{G}$;

$$\begin{aligned} \delta^*(x, x)(g) &= (x \otimes x)\delta(g) \\ &= (x \otimes x)(b_0 - s(b_0)) \quad \text{donde } \Delta_t = a + tb\text{, con } b \in U\mathcal{G} \otimes_k U\mathcal{G} \\ &= (x \otimes x)b_0 - (x \otimes x)s(b_0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

pues $x \otimes x = (x \otimes x) \circ s$. Por lo tanto $\delta^*(x, x) = 0$.

<u>Jacobi</u> ; sean $x, y, z \in \mathcal{G}^*$, $g \in \mathcal{G}$. Pongamos, como en la demostración de la propiedad 2.3, pag. 20, $b_0 = \sum \xi_{u,v}(g) g_u \otimes g_v$ con $\xi_{u,v}(g) \in k$ y $(g_u)_u$ básicos en $\mathcal{G}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \delta^*(x, y)(g) &= (x \otimes y)\delta(g) \\ &= (x \otimes y)(b_0 - s(b_0)) \text{ por definición de } \delta(g) \\ &= \sum_{u,v} \xi_{u,v}(g)\{x(g_u)y(g_v) - y(g_u)x(g_v)\} \end{aligned}$$

así;

$$\begin{aligned} \delta^*(\delta^*(x, y), z)g &= (\delta^*(x, y) \otimes z) \circ \delta(g) \\ &= \textstyle\sum_{u,v} \xi_{u,v}(g)(\delta^*(x, y) \otimes z)(g_u \otimes g_v - g_v \otimes g_u) \\ &= \textstyle\sum_{u,v} \xi_{u,v}(g)\{\delta^*(x, y)g_u z(g_v) - \delta^*(x, y)g_v z(g_u)\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= &\textstyle\sum_{u,v,u',v'} \xi_{u,v}(g)\xi_{u',v'}(g_u)\{x(g_{u'})y(g_{v'}) - x(g_{v'})y(g_{u'})\}z(g_v) \\
&- \textstyle\sum_{u,v,u',v'} \xi_{u,v}(g)\xi_{u',v'}(g_v)\{x(g_{u'})y(g_{v'}) - x(g_{v'})y(g_{u'})\}z(g_u)
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

Por otro lado, (ver 5.1 y 5.2, pag. 75) podemos poner $\Delta_t(g) = \Delta(g) + tb$ y pensar a $b \in (UG \otimes_k UG)_t$ para obtener

$$
1 \otimes b + (Id \otimes \Delta_t)b = b \otimes 1 + (\Delta_t \otimes Id)b \tag{5.9}
$$

Desarrollando b como serie $b = \sum_i b_i t^i$, $b_i \in UG \otimes_k UG$ se obtiene :

$$
\begin{aligned}
&1 \otimes b_0 + (Id \otimes \Delta_t)b_0 + t\{1 \otimes b_1 + (Id \otimes \Delta_t)b_1\} \equiv \\
&\qquad b_0 \otimes 1 + (\Delta_t \otimes Id)b_0 + t\{b_1 \otimes 1 + (\Delta_t \otimes Id)b_1\} \ (mod\ t^2)
\end{aligned}
$$

escribiendo b_0 en términos de básicos, $b_0 = \sum \xi_{u,v} g_u \otimes g_v$. ($\xi_{u,v} = \xi_{u,v}(g)$) pongamos $\Delta_t(g_u) = g_u \otimes 1 + 1 \otimes g_u + tb_0(u) + t^2 d(u)$. Sustituyendo:

$$
1 \otimes b_0 + \sum \xi_{u,v}\{g_u \otimes 1 \otimes g_v + g_u \otimes g_v \otimes 1 + tg_u \otimes b_0(v)\} + t\{1 \otimes b_1 + (Id \otimes \Delta_t)b_1\} \equiv
$$

$$
b_0 \otimes 1 + \sum \xi_{u,v}\{g_u \otimes 1 \otimes g_v + 1 \otimes g_u \otimes g_v + tb_0(u) \otimes g_v\} + t\{b_1 \otimes 1 + (\Delta_t \otimes Id)b_1\} (mod\ t^2)
$$

como los coeficientes de t en ambos lados son iguales:

$$
\begin{aligned}
&\sum \xi_{u,v} g_u \otimes b_0(v) + 1 \otimes b_1 + (Id \otimes \Delta_t)b_1 \equiv \\
&\qquad \sum \xi_{u,v} b_0(u) \otimes g_v + b_1 \otimes 1 + (\Delta_t \otimes Id)b_1 (mod\ t^2)
\end{aligned}
$$

haciendo $t = 0$:

$$
\sum \xi_{u,v} g_u \otimes b_0(v) + 1 \otimes b_{1,0} + (Id \otimes \Delta)b_{1,0} = \sum \xi_{u,v} b_0(u) \otimes g_v + b_{1,0} \otimes 1 + (\Delta \otimes Id)b_{1,0}
$$

escribiendo a $b_0(u) = \sum_{u',v'} \xi_{u',v'}(u) g_{u'} \otimes g_{v'}$:

$$
\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{u,v,u',v'} \xi_{u,v} g_u \otimes \xi_{u',v'}(v) g_{u'} \otimes g_{v'} + 1 \otimes b_{1,0} + (Id \otimes \Delta)b_{1,0} = \\
&\qquad \textstyle\sum_{u,v,u',v'} \xi_{u,v}\xi_{u',v'}(u) g_{u'} \otimes g_{v'} \otimes g_v + b_{1,0} \otimes 1 + (\Delta \otimes Id)b_{1,0}
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

aplicando a 5.10 $x \otimes y \otimes z, y \otimes x \otimes z, z \otimes x \otimes y, z \otimes y \otimes x, y \otimes z \otimes x, x \otimes z \otimes y$, y en vista de 5.8 :

$$
\delta^*(\delta^*(x, y), z)g + \delta^*(\delta^*(y, z), x)g + \delta^*(\delta^*(z, x), y)g = S(D) \tag{5.11}
$$

donde $S = (x \otimes y \otimes z - y \otimes x \otimes z + z \otimes x \otimes y - z \otimes y \otimes x + y \otimes z \otimes x - x \otimes z \otimes y)$ y $D = 1 \otimes b_{1,0} - b_{1,0} \otimes 1 + (Id \otimes \Delta)b_{1,0} - (\Delta \otimes Id)b_{1,0}$. Pero por la observación inmediata anterior, $S(D) = 0$.

Luego como 5.11 es para todo $g \in G$ se concluye que δ^* es rorchete de Lie.

Definición 25 *En general, si $\mathcal{L}$ es una k-álgebra de Lie y $\beta : \mathcal{L} \to \mathcal{L} \otimes_k \mathcal{L}$ es k-lineal tal que:*
i) β es un 1-cociclo en $C^*(\mathcal{L}, \mathcal{L} \otimes_k \mathcal{L})$;
ii) $\beta^* : \mathcal{L}^* \otimes_k \mathcal{L}^* \to \mathcal{L}^*$ es un corchete de Lie ;
entonces β se llama estructura de biálgebra de Lie.

Hemos probado que cualquier cuantización de $\mathcal{G}$ tiene una biálgebra de Lie subyacente, la cual puede ser interpretada como su aproximación de "primer orden" (en t). Para construir cuantizaciones es, por lo tanto, natural proceder en dos pasos; primero encontrar una estructura de biálgebra de Lie y entonces, usando la información de primer orden, construir su cuantización ([14] pag. 214).

Si el álgebra de Lie $\mathcal{G}$ es finito dimensional y semisimple entonces los grupos de cohomologia $H^1(\mathcal{G}, M)$ son cero para cualquier $\mathcal{G}$-módulo M ([9] cor.2.5, pag.101). En particular:

$$0 = H^1(\mathcal{G}, \mathcal{G} \otimes_k \mathcal{G})$$

i.e., $ker\,\delta^1 = Im\,\delta^0$ donde

$$\begin{array}{c} C^0(\mathcal{G}, \mathcal{G} \otimes_k \mathcal{G}) \overset{\delta^0}{\to} C^1(\mathcal{G}, \mathcal{G} \otimes_k \mathcal{G}) \overset{\delta^1}{\to} C^2(\mathcal{G}, \mathcal{G} \otimes_k \mathcal{G}) \\ \| \\ Hom(k, \mathcal{G} \otimes_k \mathcal{G}) \\ \| \\ \mathcal{G} \otimes_k \mathcal{G} \end{array}$$

Lo que aplicado a nuestro δ cociclo, $\delta(x) = \delta^0(r)(x)$ para algún $r \in \mathcal{G} \otimes_k \mathcal{G}$, $\forall x \in \mathcal{G}$, pero por definición:

$$\begin{aligned} \delta^0(r)(x) &= \sum_{1 \le s \le 1} (-1)^s x \cdot r \\ &= [1 \otimes x + x \otimes 1, r] \text{ por definición de la} \\ &\qquad\qquad \text{acción de } \mathcal{G} \text{ sobre } \mathcal{G} \otimes_k \mathcal{G} \end{aligned}$$

en consecuencia

$$\delta(x) = [1 \otimes x + x \otimes 1, r]$$

Definición 26 *r se llama r- matriz clásica.*

Traduzcamos ahora las propiedades de δ a la r-matriz r. Para ésto pongamos, $r = \sum_i x_i \otimes y_i$ con cada $x_i, y_i \in \mathcal{G}$;

$$r^{31} = \sum y_i \otimes 1 \otimes x_i\,, \quad r^{12} = \sum x_i \otimes y_i \otimes 1\,, \quad r^{23} = \sum 1 \otimes x_i \otimes y_i\,,$$

etcétera.

Propiedad 12 *Si $\mathcal{G}$ es k-álgebra de Lie semisimple y $s : U\mathcal{G}\otimes_k U\mathcal{G} \to U\mathcal{G}\otimes_k U\mathcal{G}$ switch :*

a) δ^* es alternante $\Leftrightarrow$ $r + r'$ es $\mathcal{G}$-invariante; donde $r' = s(r)$;

b) si $r + r'$ es $\mathcal{G}$-invariante:

δ^* satisface la identidad de Jacobi $\Leftrightarrow [r^{23}, r^{12}] + [r^{31}, r^{23}] + [r^{12}, r^{31}]$ es $\mathcal{G}$-invariante; donde el corchete es en $(U\mathcal{G})^{\otimes 3}$.

Dem.- Pongamos $r = \sum x_i \otimes y_i$ con $x_i, y_i \in \mathcal{G}$;

a) Sean $x, y \in \mathcal{G}^*, g \in \mathcal{G}$:

$$\begin{aligned}
0 &= \{\delta^*(x,y) + \delta^*(y,x)\}(g) \\
&= (x \otimes y)\delta(g) + (y \otimes x)\delta(g) \\
&= (x \otimes y)(g \cdot r) + (y \otimes x)(g \cdot r) \\
&= (x \otimes y)([g, x_i] \otimes y_i + x_i \otimes [g, y_i]) + (y \otimes x)([g, x_i] \otimes y_i + x_i \otimes [g, y_i]) \\
&= x[g, x_i]y(y_i) + x(x_i)y([g, y_i]) + y([g, x_i])x(y_i) + y(x_i)x([g, y_i]) \cdot
\end{aligned}$$

i.e.,

$$(x \otimes y)(g \cdot r + g \cdot r') = 0 \ \ \forall x, y \in \mathcal{G}^*$$

lo cual es equivalente a

$$g \cdot (r + r') = 0 \quad \forall g \in \mathcal{G}$$

o lo que es lo mismo, $r + r'$ es $\mathcal{G}$-invariante.

b) Sean $x, y, z \in \mathcal{G}^*, g \in \mathcal{G}$,

$$\begin{aligned}
\delta^*(\delta^*(x,y),z)(g) &= (\delta^*(x,y) \otimes z)g \cdot r \\
&= \{\delta^*(x,y) \otimes z\}\{[g, x_i] \otimes y_i + x_i \otimes [g, y_i]\} \\
&= \delta^*(x,y)[g, x_i]z(y_i) + \delta^*(x,y)x_i z[g, y_i] \\
&= \{(x \otimes y)[g, x_i] \cdot r\}z(y_i) + \{(x \otimes y)x_i \cdot r\}z[g, y_i] \\
&= (x \otimes y)\{[[g, x_i], x_j] \otimes y_j + x_j \otimes [[g, x_i], y_j]\}z(y_i) + \\
&\qquad (x \otimes y)([x_i, x_j] \otimes y_j + x_j \otimes [x_i, y_j])z[g, y_i] \\
&= (x \otimes y \otimes z)\{[[g, x_i], x_j] \otimes y_j \otimes y_i + x_j \otimes [[g, x_i], y_j] \otimes y_i \\
&\qquad + [x_i, x_j] \otimes y_j \otimes [g, y_i] + x_j \otimes [x_i, y_j] \otimes [g, y_i]\}
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\delta^*(\delta^*(y,z),x)(g) &= (x \otimes y \otimes z)\{y_i \otimes [[g, x_i], x_j] \otimes y_j + y_i \otimes x_j \otimes [[g, x_i], y_j] \\
&\qquad + [g, y_i] \otimes [x_i, x_j] \otimes y_j + [g, y_i] \otimes x_j \otimes [x_i, y_j]\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta^*(\delta^*(z,x),y)(g) &= (x \otimes y \otimes z)\{y_j \otimes y_i \otimes [[g, x_i], x_j] + [[g, x_i], y_j] \otimes y_i \otimes x_j \\
&\qquad + y_j \otimes [g, y_i] \otimes [x_i, x_j] + [x_i, y_j] \otimes [g, y_i] \otimes x_j\}
\end{aligned}$$

reacomodando, δ^* satisface Jacobi si y sólo si

$$\begin{aligned}
0 \quad = \quad & [[g,x_i]\otimes 1\otimes y_i, x_j\otimes y_j\otimes 1] + [1\otimes [g,x_i]\otimes y_i, x_j\otimes y_j\otimes 1] \\
& \quad + [x_i\otimes 1\otimes [g,y_i], x_j\otimes y_j\otimes 1] + [1\otimes x_i\otimes [g,y_i], x_j\otimes y_j\otimes 1] \\
& + [y_i\otimes [g,x_i]\otimes 1, 1\otimes x_j\otimes y_j] + [y_i\otimes 1\otimes [g,x_i], 1\otimes x_j\otimes y_j] \\
& \quad + [[g,y_i]\otimes x_i\otimes 1, 1\otimes x_j\otimes y_j] + [[g,y_i]\otimes 1\otimes x_i, 1\otimes x_j\otimes y_j] \\
& + [1\otimes y_i\otimes [g,x_i], y_j\otimes 1\otimes x_j] + [[g,x_i]\otimes y_i\otimes 1, y_j\otimes 1\otimes x_j] \\
& \quad + [1\otimes [g,y_i]\otimes x_i, y_j\otimes 1\otimes x_j] + [x_i\otimes [g,y_i]\otimes 1, y_j\otimes 1\otimes x_j]
\end{aligned}$$

lo cual es equivalente a

$$0 = [g\cdot r^{13}, r^{12}] + [g\cdot r^{23}, r^{12}] + [g\cdot r^{21}, r^{23}] + [g\cdot r^{31}, r^{23}] + [g\cdot r^{32}, r^{31}] + [g\cdot r^{12}, r^{31}]$$

($\mathcal{G}$ actúa sobre $(U\mathcal{G})^{\otimes^3}$ mediante

$$g\cdot(a\otimes b\otimes c) = [g,a]\otimes b\otimes c + a\otimes [g,b]\otimes c + a\otimes b\otimes [g,c]$$

). Considerando la función lineal $U\mathcal{G}\otimes_k U\mathcal{G} \to (U\mathcal{G})^{\otimes^3}$, $u\otimes v \mapsto u\otimes v\otimes 1$, como $r + r'$ es $\mathcal{G}$-invariante, se obtiene $g\cdot r^{12} = -g\cdot r^{21}$. Similarmente, $g\cdot r^{32} = -g\cdot r^{23}$, $g\cdot r^{31} = -g\cdot r^{13}$, así

$$0 = g\cdot [r^{23}, r^{12}] + g\cdot [r^{31}, r^{23}] + g\cdot [r^{12}, r^{31}]$$

pues, como cálculos directos demuestran, vale la fórmula:

Lema 16 *Si $u, v \in (U\mathcal{G})^{\otimes^3}$:*

$$g\cdot [u,v] = [g\cdot u, v] + [u, g\cdot v]$$

es decir, $g\cdot\_$ es una derivación.

Por lo tanto, $[r^{23}, r^{12}] + [r^{31}, r^{23}] + [r^{12}, r^{31}]$ es $\mathcal{G}$-invariante.

Definición 27 $\langle r, r\rangle = [r^{12}, r^{13}] + [r^{12}, r^{23}] + [r^{13}, r^{23}]$ *([14] pag. 214 ii$_2$)*

Obsérvese como ésta suma de corchetes no es precisamente la suma de corchetes obtenida anteriormente. Sin embargo puede obtenerse ([2] sec. 4. pag. 903). Para ésto:

Lema 17 *Si $\mathcal{L}$ es álgebra de Lie simple finito dimensional sobre un campo F de característica cero, los elementos $\mathcal{L}$-invariantes del $\mathcal{L}$-módulo $\mathcal{L}\otimes_F \mathcal{L}$ tienen dimensión uno.*

Dem.-

Los F-endomorfismos $End(\mathcal{L})$ sobre $\mathcal{L}$ forman un $\mathcal{L}$-módulo: en efecto, si $l \in \mathcal{L}, f \in End(\mathcal{L})$, se define

$$l \cdot f = D_l \circ f - f \circ D_l$$

donde $D_l : \mathcal{L} \to \mathcal{L},\ x \mapsto [l, x]$.

$End(\mathcal{L}) \simeq \mathcal{L} \otimes_F \mathcal{L}$ como $\mathcal{L}$ -módulos: sea

$$\begin{array}{llllll} \phi: & \mathcal{L} & \to & \mathcal{L}^* & & \\ & l & \mapsto & \phi(l): & \mathcal{L} & \to & F \\ & & & & x & \mapsto & (x, l) \end{array}$$

donde $(,)$ es la forma de Killing. ϕ es iso pues la forma de Killing es no singular. Por lo que $\mathcal{L} \otimes_F \mathcal{L} \overset{\phi \otimes Id_{\mathcal{L}}}{\simeq} \mathcal{L}^* \otimes \mathcal{L}$. Pero $\mathcal{L}^* \otimes \mathcal{L} \simeq End(\mathcal{L})$ via el morfismo definido a continuación:

$$\begin{array}{lllllll} \theta: & \mathcal{L}^* \otimes \mathcal{L} & \to & End(\mathcal{L}) & & & \\ & f \otimes l & \mapsto & \theta(f \otimes l): & \mathcal{L} & \to & \mathcal{L} \\ & & & & x & \mapsto & f(x) l \end{array}$$

Hagamos ver que θ es un isomorfismo exhibiendo su inverso:

$$\begin{array}{llll} \psi: & End(\mathcal{L}) & \to & \mathcal{L}^* \otimes \mathcal{L} \\ & \mathcal{L} \overset{f}{\to} \mathcal{L} & \mapsto & \sum_i p_i \circ f \otimes x_i \end{array}$$

donde $\{x_i\}_i$ es base de $\mathcal{L}$ y $p_i : \mathcal{L} \to F$ es la proyección en la coordenada i ;

$$\begin{aligned} \theta \circ \psi(f)(x) &= \sum_i \theta(p_i \circ f \otimes x_i)(x) \\ &= \sum_i (p_i \circ f(x)) x_i \\ &= \sum_i \xi_i x_i \text{ donde } f(x) = \sum_i \xi_i x_i \\ &= f(x) \quad \forall x \in \mathcal{L} \end{aligned}$$

i.e., $\theta\psi(f) = f$.

$$\psi\theta(f \otimes l) = \sum_i p_i \circ \theta(f \otimes l) \otimes x_i$$

pero $p_i \circ \theta(f \otimes l)(x) = f(x)\xi_i$ donde $l = \sum_i f \otimes \xi_i x_i$, así

$$\begin{aligned} \psi\theta(f \otimes l) &= \sum_i \xi_i f \otimes x_i \\ &= \sum_i f \otimes \xi_i x_i \\ &= f \otimes l \end{aligned}$$

$$
\begin{tikzcd}
(\mathcal{L} \otimes_k \mathcal{L}) \arrow[rr] \arrow[dr, "\psi \otimes Id_{\mathcal{L}}"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & End(\mathcal{L}) \\
& \mathcal{L}^* \otimes_F \mathcal{L} \arrow[ur, "\theta"'] &
\end{tikzcd}
$$

Se afirma que $\theta \circ (\psi \otimes Id_{\mathcal{L}})$ es de $\mathcal{L}$-módulos;

$$
\begin{aligned}
\theta \circ (\psi \otimes Id_{\mathcal{L}})(l \cdot (l_1 \otimes l_2) &= \theta \circ (\psi \otimes Id_{\mathcal{L}}([l, l_1] \otimes l_2 + l_1 \otimes [l, l_2] \\
&= \theta(\psi[l, l_1] \otimes l_2) + \theta(\psi(l_1) \otimes [l, l_2])
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\theta(\psi[l, l_1] \otimes l_2)(x) &= \psi[l, l_1](x) l_2 \\
&= ([l, l_1], x) l_2 \\
\theta(\psi(l_1) \otimes [l, l_2])(x) &= \psi(l_1)(x)[l, l_2] \\
&= (l_1, x)[l, l_2]
\end{aligned}
$$

por lo tanto

$$
\theta \circ (\psi \otimes Id_{\mathcal{L}})(l \cdot (l_1 \otimes l_2))(x) = ([l, l_1], x) l_2 + (l_1, x)[l, l_2]
$$

$$
\begin{aligned}
l \cdot \theta \circ (\psi \otimes Id_{\mathcal{L}})(l_1 \otimes l_2) &= l \cdot \theta(\psi(l_1) \otimes l_2) \\
&= D_l \circ \theta(\psi(l_1) \otimes l_2) - \theta(\psi(l_1) \otimes l_2) \circ D_l \\
D_l \circ \theta(\psi(l_1) \otimes l_2)(x) &= D_l(\psi(l_1(x) l_2) \\
&= (l_1, x) D_l(l_2) \\
&= (l_1, x)[l, l_2]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\theta(\psi(l_1) \otimes l_2) \circ D_l(x) &= \theta(\psi(l_1) \otimes l_2)[l, x] \\
&= \psi(l_1)[l, x] l_2 \\
&= ([l, x], l_1) l_2 \\
&= -([x, l], l_1) l_2 \\
&= -(x, [l, l_1]) l_2
\end{aligned}
$$

por lo tanto

$$
\theta \circ (\psi \otimes Id_{\mathcal{L}})(l \cdot (l_1 \otimes l_2))(x) = l \cdot \theta \circ (\psi \otimes Id_{\mathcal{L}})(l_1 \otimes l_2)(x) \,, \quad \forall x \in \mathcal{L}
$$

i.e.,

$$
\theta \circ (\psi \otimes Id_{\mathcal{L}})(l \cdot (l_1 \otimes l_2)) = l \cdot \theta \circ (\psi \otimes Id_{\mathcal{L}})(l_1 \otimes l_2)
$$

de donde $\theta \circ (\psi \otimes Id_{\mathcal{L}})$ es de $\mathcal{L}$-módulos.

Se obtiene entonces que $(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L})^{\mathcal{L}} = \mathcal{L}$-invariantes de $(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}) \simeq \mathcal{L}$-invariantes de $End(\mathcal{L}) = End(\mathcal{L})^{\mathcal{L}}$. Por lo que basta con probar:

$dim\, End(\mathcal{L})^{\mathcal{L}} = 1$: sea $f \in End(\mathcal{L})^{\mathcal{L}}$ entonces $D_l \circ f = f \circ D_l \quad \forall l \in \mathcal{L}$, donde $D_l : \mathcal{L} \to D_l \quad x \mapsto [l, x]$, lo cual es equivalente a

$$[l, f(x)] = f[l, x], \quad \forall l, x \in \mathcal{L} \tag{5.12}$$

Consideremos H subálgebra de Cartan de $\mathcal{L}$, $\mathcal{L} = \oplus_\lambda \mathcal{L}_\lambda$ descomposición de Cartan asociada a $H = \mathcal{L}_0$. Sea además $\{h_\alpha \mid \alpha \text{ raíz}\}$ estrella de $\mathcal{L}$ y e_α generador de $\mathcal{L}_\alpha$ para α raíz tal que $[e_{-\alpha}, e_\alpha] = h_\alpha$. Se cumplen las siguientes relaciones ([15] cap. 5)

$$[h_\alpha, h_\beta] = 0\,, \qquad\qquad [e_\alpha, h_\beta] = \alpha(h_\beta)e_\alpha$$

$$[e_{-\alpha}, e_\alpha] = h_\alpha\,, \quad [e_\alpha, e_\beta] = \begin{cases} 0\,, & \text{si } \alpha+\beta \text{ no raíz};\\ \xi_{\alpha,\beta}e_{\alpha+\beta}\,, & \text{si } \alpha+\beta \text{ raíz (para algún } \\ & \xi_{\alpha,\beta} \in F); \end{cases}$$

para nuestro $f \in End(\mathcal{L})^{\mathcal{L}}$ podemos escribir, si α es raíz,

$$f(e_\alpha) = h(\alpha) + \sum_{\lambda \text{ raíz}} \xi_\lambda(\alpha)e_\lambda \tag{5.13}$$

donde $h(\alpha) \in H$ y $\xi(\alpha) \in F$. Por 5.12,

$$\begin{aligned} f[h_\alpha, e_\alpha] &= [h_\alpha, f(e_\alpha)] \\ &= \underbrace{[h_\alpha, h(\alpha)]}_{0} + \sum_\lambda \xi_\lambda(\alpha)[h_\alpha, e_\lambda] \quad (H \text{ es abeliano}) \\ &= -\sum_\lambda \xi_\lambda(\alpha)\lambda(h_\alpha)e_\lambda \end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned} f[h_\alpha, e_\alpha] &= f(-\alpha(h_\alpha)e_\alpha) \\ &= -\alpha(h_\alpha)f(e_\alpha) \\ &= -\alpha(h_\alpha)h(h_\alpha) - \sum_\lambda \alpha(h_\alpha)\xi_\lambda(\alpha)e_\lambda \end{aligned}$$

lo que implica $0 = \alpha(h_\alpha)h(\alpha) = (h_\alpha, h_\alpha)h(\alpha)$, pero $(h_\alpha, h_\alpha) > 0$, por lo que $h(\alpha) = 0$. Sustituyendo en 5.13,

$$f(e_\alpha) = \sum_\lambda \xi_\lambda(\alpha)e_\alpha$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} f(h_\alpha) &= f[e_{-\alpha}, e_\alpha] \\ &= [e_{-\alpha}, fe_\alpha] \\ &= \sum_\lambda \xi_\lambda(\alpha)[e_{-\alpha}, e_\lambda] \\ &= \sum_{\lambda-\alpha \text{ raíz}} \xi_\lambda(\alpha)\xi_{-\alpha,\lambda}e_{\lambda-\alpha} + \xi_\alpha(\alpha)h_\alpha \end{aligned} \tag{5.14}$$

luego, si β es otra raíz,

$$\begin{aligned} 0 &= f[h_\beta, h_\alpha] \\ &= [h_\beta, f(h_\alpha)] \\ &= \sum_{\lambda-\alpha \text{ raíz}} \xi_\lambda(\alpha)\xi_{-\alpha,\lambda}[h_\beta, e_{\lambda-\alpha}] \quad \text{pues } H \text{ abeliano} \\ &= -\sum_{\lambda-\alpha \text{ raíz}} \xi_\lambda(\alpha)\xi_{-\alpha,\lambda}(\lambda-\alpha)(h_\beta)e_{\lambda-\alpha} \end{aligned} \tag{5.15}$$

si ponemos $\beta = \lambda - \alpha$ para alguna $\lambda - \alpha$ raíz particular, $(\lambda-\alpha)(h_\beta) = (h_{\lambda-\alpha}, h_\beta) \neq 0$. Así, de 5.15 : $\xi_\lambda(\alpha)\xi_{-\alpha,\lambda} = 0$, $\forall\lambda$ raíz tal que $\lambda - \alpha$ raíz. Sustituyendo en 5.14,

$$f(h_\alpha) = \xi_\alpha(\alpha)h_\alpha .$$

Pongamos $\xi_\alpha = \xi_\alpha(\alpha)$. Se tiene que

si α, β son raíces tales que $(h_\alpha, h_\beta) \neq 0$ entonces $\xi_\alpha = \xi_\beta$;

$$\begin{aligned} \beta(h_\alpha)f(e_\beta) &= f[e_\beta, h_\alpha] \\ &= [e_\beta, fh_\alpha] \\ &= \xi_\alpha[e_\beta, h_\alpha] \\ &= \xi_\alpha\beta(h_\alpha)e_\beta \end{aligned}$$

por lo que si $0 \neq (h_\alpha, h_\beta) = \beta(h_\alpha)$, $f(e_\beta) = \xi_\alpha e_\beta$, de donde $\xi_\alpha = \xi_\beta$. En particular se obtiene que

$$f(e_\alpha) = \xi_\alpha e_\alpha , \quad \forall\alpha \text{ raíz}$$

$\xi_\alpha = \xi_\beta$, si α, β raíces ; sea α_0 raíz fija y pongamos $\xi = \xi_{\alpha_0}$. Sea $M = \{\alpha \text{ raíz} \mid \xi_\alpha = \xi\}$,

$$W = \sum_{\lambda\in M} Fh_\lambda + \sum_{\lambda\in M} Fe_\lambda$$

probemos que W es ideal de $\mathcal{L}$. Como

$$\mathcal{L} = \sum_{\alpha \text{ raíz}} Fh_\alpha + \sum_{\alpha \text{ raíz}} Fe_\alpha$$

para hacer ver que W es ideal basta con probar que:

(i) $[h_\alpha, e_\lambda] \in W$;

(ii) $[e_\alpha, h_\lambda] \in W$;

(iii) $[e_\alpha, e_\lambda] \in W$;

$\forall \alpha$ raíz, $\lambda \in M$.

(i): $[h_\alpha, e_\lambda] = -(h_\alpha, h_\lambda)e_\lambda \in W$. si $\lambda \in M$;

(ii): $[e_\alpha, h_\lambda] = (h_\alpha, h_\lambda)e_\alpha$. Si $(h_\alpha, h_\lambda) = 0$ entonces $[e_\alpha, e_\lambda] = 0 \in W$. Si $(h_\alpha, h_\lambda) \neq 0$ sabemos que $\xi_\alpha = \xi_\lambda = \xi$ luego $\alpha \in M$, se sigue que $[e_\alpha, h_\lambda] \in W$;

(iii): Si $[e_\alpha, e_\lambda] \neq 0$, $[e_\alpha, e_\lambda] = \xi_{\alpha,\lambda} e_{\alpha+\lambda}$ con $\xi_{\alpha,\lambda} \neq 0$ y $\alpha + \lambda$ raíz. Aplicando f,

$$f[e_\alpha, e_\lambda] = \xi_{\alpha,\lambda}\xi_{\alpha+\lambda}e_{\alpha+\lambda}, \quad [e_\alpha, fe_\lambda] = \xi_{\alpha,\lambda}\xi e_{\alpha+\lambda}$$

lo que implica $\xi = \xi_{\alpha+\lambda}$. Luego $\alpha + \lambda \in M$ y así $[e_\alpha, e_\lambda] \in W$.

Por lo tanto,

$$W \text{ es ideal de } \mathcal{L}$$

pero como $\mathcal{L}$ es simple y $W \neq 0$, $\mathcal{L} = W$, de donde $M =$ todas las raices de $\mathcal{L}$, i.e., $\xi_\alpha = \xi_\beta$ para cualesquiera α, β. Podemos poner

$$f(e_\alpha) = \xi e_\alpha, \quad f(h_\alpha) = \xi h_\alpha, \quad \forall \alpha \text{ raíz}$$

lo que quiere decir, $f = \xi Id$. Por lo tanto $\dim End(\mathcal{L})^{\mathcal{L}} = 1$.

Observación.- Si $V \neq 0$ es F-espacio vectorial, $\dim V < \infty$ con *carac* $F \neq 2$ y $.|. : V \times V \to F$ forma bilineal simétrica no degenerada, entonces V tiene una base ortonormal.

Definición 28 *Si $\mathcal{L}$ es una F-álgebra de Lie semisimple finita dimensional con característica de F cero,*

$$\Omega \in \mathcal{L} \otimes_F \mathcal{L} \text{ se llama elemento de Casimir si } \theta \circ (\phi \otimes Id_{\mathcal{L}})\Omega = Id_{\mathcal{L}}$$

donde θ y ϕ están definidas en el lema 17, pag. 86 ([9], pag. 99).

Lema 18 *Si $\mathcal{L}$ es F-álgebra de Lie finita dimensional con carac $F = 0$ y Ω es elemento de Casimir entonces $\Omega = \sum_i x_i \otimes x_i$, donde $\{x_i\}_i$ es base ortonormal de $\mathcal{L}$ con respecto a la forma de Killing. Además Ω es $\mathcal{L}$-invariante.*

Dem.- La existencia de la base ortonormal $\{x_i\}_i$ está garantizada por la observación inmediata anterior, pues como $\mathcal{L}$ es semisimple, la forma de Killing es no degenerada. Sea ésta $(,)$. Entonces, utilizando la notación del lema 17, pag. 86,

$$\theta(\phi \otimes Id)\Omega = \sum_i \theta(\phi(x_i) \otimes x_i)$$

y si $x \in \mathcal{L}$;

$$\begin{aligned}
\theta(\phi(x_i) \otimes x_i)x &= \sum_i (\phi(x_i)(x)x_i \text{ por definición de } \theta \\
&= \sum_i (x, x_i)x_i \\
&= \sum_{i,j} \delta_{i,j}\xi_j x_i \text{, donde } x = \sum_j \xi_j x_j \\
&= \sum_i \xi_i x_i \\
&= x
\end{aligned}$$

i.e., $\sum_i \theta(\phi(x_i) \otimes x_i) = Id_{\mathcal{L}}$. Por lo tanto, $\theta(\phi \otimes Id)\Omega = Id_{\mathcal{L}}$, i.e., Ω es elemento de Casimir. Además como $(\mathcal{L} \otimes \mathcal{L})^{\mathcal{L}} \simeq End(\mathcal{L})^{\mathcal{L}}$ y $Id_{\mathcal{L}} \in End(\mathcal{L})^{\mathcal{L}}$ evidentemente. Se sigue que $\Omega \in (\mathcal{L} \otimes \mathcal{L})^{\mathcal{L}}$.

Propiedad 13 *Sea $\mathcal{G}$ álgebra de Lie finita dimensional y simple. Si además ponemos $\delta^*(g) = [g \otimes 1 + 1 \otimes g, r]\ \forall g \in \mathcal{G}$ entonces podemos suponer que r está torcida (i.e., $r + r' = 0$) y en tal caso:*

$$\delta^* \textit{ satisface Jacobi} \Leftrightarrow \langle r, r\rangle \textit{ es } \mathcal{G}\textit{-invariante.}$$

Dem.- Por propiedades 11, pag. 82 y 12, pag. 85 resulta que $r + r'$ es $\mathcal{G}$-invariante. Pero los elementos $\mathcal{G}$-invariantes de $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ son múltiplos escalares del elemento de Casimir

$$\Omega = \sum_i g_i \otimes g_i$$

donde $\{g_i\}_i$ es base ortonormal de $\mathcal{G}$ con respecto a la forma de Killing. Por lo que $r + r' = \lambda\Omega$ para algún escalar λ .

Si $\lambda = 0$ entonces r está torcida. Si $\lambda \neq 0$ se pone $\tilde{r} = r - \frac{\lambda}{2}\Omega$. Luego,

$$\begin{aligned}
[g \otimes 1 + 1 \otimes g, \tilde{r}] &= g \cdot \tilde{r} \\
&= g \cdot r - \frac{\lambda}{2}\underbrace{g \cdot \Omega}_{0}, \text{ pues } \Omega \text{ es } \mathcal{G}\text{-invariante,} \\
&= g \cdot r \\
&= \delta(g)
\end{aligned}$$

y $\tilde{r}$ está torcida:

$$\begin{aligned}\tilde{r}+\tilde{r}' &= r+r'-\lambda\Omega\\ &= 0\end{aligned}$$

por lo tanto podemos suponer que $r=\tilde{r}$ torcida.

Sabemos que δ^* satisface Jacobi $\Leftrightarrow$ $[r^{23},r^{12}]+[r^{31},r^{23}]+[r^{12},r^{31}]$ es $\mathcal{G}$-invariante. Pero como r está torcida;

$$\begin{aligned}{[r^{23},r^{12}]+[r^{31},r^{23}]+[r^{12},r^{31}]} &= -[r^{12},r^{23}]-[r^{13},r^{23}]-[r^{12},r^{13}]\\ &= -\langle r,r\rangle\end{aligned}$$

Así,

$$\delta^* \text{ satisface Jacobi} \Leftrightarrow \langle r,r\rangle \text{ es } \mathcal{G}\text{-invariante.}$$

La suma $\langle r,r\rangle$ se considera porque la ecuación $\langle r,r\rangle=0$ es conocida como la *ecuación clásica de Yang-Baxter*. Después, para $\mathcal{G}=sl_2(k)$, encontraremos soluciones a tal ecuación. Las consideraciones siguientes serán útiles para alcanzar tal objetivo.

Sea $\tau_{(1,2)}:U\mathcal{G}^{\otimes^3}\to U\mathcal{G}^{\otimes^3}$, $u_1\otimes u_2\otimes u_3\mapsto u_2\otimes u_1\otimes u_3$ y análogamente $\tau_{(2,3)}$, $\tau_{(1,3)}$. Supongamos que la r-matriz $r=\sum_i a_i\otimes b_i$ está torcida y apliquemos las funciones tau a $\langle r,r\rangle$:

$$\begin{aligned}\tau_{(1,2)}\langle r,r\rangle &= \tau_{(1,2)}[r^{12},r^{13}]+\tau_{(1,2)}[r^{12},r^{23}]+\tau_{(1,2)}[r^{13},r^{23}]\\ &= \sum_{i,j}\tau_{1,2}[a_i,a_j]\otimes b_i\otimes b_j+\sum_{i,j}\tau_{(1,2)}a_i\otimes[b_i,a_j]\otimes b_j\\ &\qquad +\sum_{i,j}\tau_{(1,2)}a_i\otimes a_j\otimes[b_i,b_j]\\ &= \sum_{i,j}b_i\otimes[a_i,a_j]\otimes b_j+\sum_{i,j}[b_i,a_j]\otimes a_i\otimes b_j\\ &\qquad +\sum_{i,j}a_j\otimes a_i\otimes[b_i,b_j]\\ &= [r^{21},r^{23}]+[r^{21},r^{13}]+[r^{23},r^{13}]\\ &= -[r^{12},r^{23}]-[r^{12},r^{13}]-[r^{13},r^{23}]\\ &= -\langle r,r\rangle\end{aligned}$$

similarmente, $\tau_{(2,3)}\langle r,r\rangle=-\langle r,r\rangle$, $\tau_{(1,3)}\langle r,r\rangle=-\langle r,r\rangle$. Es decir, $\tau_{(i,j)}=-\langle r,r\rangle$ para toda (i,j) transposición en el grupo simétrico S_3. Se afirma que ésto implica que $\langle r,r\rangle\in\bigwedge^3\mathcal{G}$. En efecto:

Lema 19 *Si V es un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F de característica cero y $x \in V^{\otimes^n}$ es tal que $\tau_{(i,j)}(x) = -x, \forall (i,j)$ transposición, entonces $x \in \bigwedge^n V$.*

Dem.- Sea S_n el grupo simétrico de orden $n!$, $m = dim\, V$. $q : V^{\otimes^n} \to \bigwedge^n V$ proyección natural. Entonces $dim \bigwedge^n V = \binom{n}{m}$. Pongamos

$$W = \{x \in V^{\otimes^n} \mid \tau_{(i,j)}x = -x \text{ , } \forall (i,j) \text{ transposición en } S_n\}$$

Por demostrar que $q|_W$ es inyectiva (ésta es exactamente lo que se afirma en el lema). Para lo cual consideremos $e_1, \ldots, e_m$ base de V, entonces

$$\{ \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \tau_\sigma (e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_n}) \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq m\}$$

es base de W.

Si $i_1 < \ldots < i_n$;

$$\begin{aligned} q(\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \tau_\sigma (e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_n})) &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \tau_\sigma (e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_n}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \tau_\sigma (e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}) \\ &= n! e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n} \end{aligned}$$

i.e., q manda básicos en básicos (característica es cero) y entonces resulta que es inyectiva.

Generalicemos la definición 27, pag. 86.

Definición 29 *Si $u, v \in \mathcal{G} \otimes_k \mathcal{G}$;*

$$\langle u, v \rangle = [u^{12}, v^{13}] + [u^{12}, v^{23}] + [u^{13}, v^{23}]$$

Propiedad 14 *Si $\mathcal{G}$ es k-álgebra simple finito dimensional, r una r-matriz torcida y Ω el elemento de Casimir del lema 18, pag. 91. Entonces,*

a)

$$\langle \mathrm{r}, \Omega \rangle + \langle \Omega, \mathrm{r} \rangle = 0$$

b) $\langle \Omega, \Omega \rangle$ es $\mathcal{G}$-invariante;

c) $\langle \Omega, \Omega \rangle$ es no cero, si $\mathcal{G}$ es no abeliana.

Dem.- Pongamos $r = \sum_i a_i \otimes b_i$, $\Omega = \sum_j g_j \otimes g_j$. En las siguientes igualdades, cada vez que aparezcan los subíndices i, j se sobrentenderá suma sobre ellos:

a)

$$\begin{aligned}
\langle r, \Omega\rangle &= [r^{12}, \Omega^{13}] + [r^{12}, \Omega^{23}] + [r^{13}, \Omega^{23}] \\
&= [a_i, g_j] \otimes b_i \otimes g_j + a_i \otimes [b_i, g_j] \otimes g_j + a_i \otimes g_j \otimes [b_i, g_j] \\
&= [a_i, g_j] \otimes b_i \otimes g_j + a_i \otimes \underbrace{b_i \cdot \Omega}_{0} \text{ pues } \Omega \text{ es } \mathcal{G}\text{-invariante;}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \Omega, r\rangle &= [g_j, a_i] \otimes g_j \otimes b_i + g_j \otimes [g_j, a_i] \otimes b_i + g_j \otimes a_i \otimes [g_j, b_i] \\
&= -\underbrace{a_i \cdot \Omega}_{0} \otimes b_i + g_j \otimes a_i \otimes [g_j, b_i];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle r, \Omega\rangle + \langle \Omega, r\rangle &= [a_i, g_j] \otimes b_i \otimes g_j + g_j \otimes a_i \otimes [g_j, b_i] \\
&= [a_i, g_j] \otimes b_i \otimes g_j + g_j \otimes b_i \otimes [a_i, g_j] \text{ pues } r \text{ está torcida} \\
&= 0 \text{ pues } a_i \cdot \Omega = 0 .
\end{aligned}$$

b) Pongamos $\delta_1 : \mathcal{G} \to \mathcal{G} \otimes_k \mathcal{G}$, $\delta_1(x) = x \cdot \Omega$, es decir, $\delta_1 = 0$. Entonces $\delta_1^* = 0$ por supuesto que es corchete de Lie, y como Ω es $\mathcal{G}$-invariante, se sigue, por propiedad 12, pag. 85, que

$$[\Omega^{23}, \Omega^{12}] + [\Omega^{31}, \Omega^{23}] + [\Omega^{12}, \Omega^{31}] \text{ es } \mathcal{G}\text{-invariante.}$$

Utilizando que Ω es $\mathcal{G}$-invariante,

$$\begin{aligned}
&[\Omega^{23}, \Omega^{12}] + [\Omega^{31}, \Omega^{23}] + [\Omega^{12}, \Omega^{31}] \\
&= g_j \otimes [g_i, g_j] \otimes g_i + g_i \otimes g_j \otimes [g_i, g_j] + [g_i, g_j] \otimes g_i \otimes g_j \\
&= -g_j \otimes [g_j, g_i] \otimes g_i - g_i \otimes [g_i, g_j] \otimes g_j - g_i \otimes [g_i, g_j] \otimes g_j \\
&= -3 g_i \otimes [g_i, g_j] \otimes g_j \\
&= 3 [g_i, g_j] \otimes g_i \otimes g_j \\
&= 3 \langle \Omega, \Omega \rangle,
\end{aligned}$$

además, si $\langle \Omega, \Omega\rangle = 0$ entonces como los g_i son básicos, $[g_i, g_j] = 0$, $\forall\, i, j$. Lo que implica $\mathcal{G}$ abeliana.

Propiedad 15 *La parte $\mathcal{G}$-invariante de $\bigwedge^2 \mathcal{G}$ es cero*

Dem.- Como $\bigwedge^2 \mathcal{G} \subseteq \mathcal{G} \otimes_k \mathcal{G}$ y $dim\,(\mathcal{G} \otimes_k \mathcal{G})^{\mathcal{G}} = 1$ entonces $dim\,(\bigwedge^2 \mathcal{G})^{\mathcal{G}} = 0$ ó 1 . Si ocurre lo segundo, el elemento de Casimir, $\Omega = \sum x_i \otimes x_i \in \bigwedge^2 \mathcal{G}$, i.e., $\tau_{(1,2)}\Omega = -\Omega$, pero $\tau_{(1,2)}\Omega = \Omega$ así $2\Omega = 0$. Lo cual es imposible. Por lo que $dim\,(\bigwedge^2 \mathcal{G})^{\mathcal{G}} = 0$.

Ejem. 15 *La cuantización de $sl_2(k)$.* Tomemos $\mathcal{G} = sl_2(k)$ las matrices 2×2 con traza cero y con entradas en k el campo complejo. Mostraremos como la cuantización "usual" introducida por Drinfeld y Jimbo puede obtenerse.

Según lo anterior el primer paso es obtener las estructuras de biálgebra de Lie. Sabemos que tales estructuras aparecen según lo hacen las r-matrices clásicas r (para las álgebras semisimples tales como $sl_2(k)$) y podemos suponer que tales r están sujetas a las siguientes condiciones:

(i) $r \in \bigwedge^2 \mathcal{G}$;

(ii) $\langle r, r \rangle \in \mathcal{G}^{\otimes^3}$ es $\mathcal{G}$-invariante;

pero $\langle r, r \rangle \in \bigwedge^3 \mathcal{G}$, y así $\langle r, r \rangle$ debe de ser $\mathcal{G}$-invariante de $\bigwedge^3 \mathcal{G}$, pero todos lo elementos de $\bigwedge^3 \mathcal{G}$ son $\mathcal{G}$-invariantes pues $dim \bigwedge^3 \mathcal{G} = \binom{dim\, \mathcal{G}}{3} = 1$ y $\langle \Omega, \Omega \rangle$ que es no cero, está en $\bigwedge^3 \mathcal{G}$, y es $\mathcal{G}$-invariante, según la propiedad 14, pag. 94. Así la condición (ii) es redundante. Por lo que las estructuras de biálgebras sobre $\mathcal{G}$ están parametrizadas por $\bigwedge^2 \mathcal{G}$ espacio 3-dimensional.

En particular:

Teorema 21 $\langle r, r \rangle = \xi \langle \Omega, \Omega \rangle$ *para algún* $\xi \in k$ *y entonces* $\hat{r} = r + \sqrt{-\xi}\, \Omega$ *es solución de la ecuación clásica de Yang-Baxter, donde* Ω *es el elemento de Casimir.*

Dem.-

$$\begin{aligned} \langle \hat{r}, \hat{r} \rangle &= \langle r, r \rangle + \sqrt{-\xi}(\langle r, \Omega \rangle + \langle \Omega, r \rangle) - \xi \langle \Omega, \Omega \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Las estructuras de biálgebras de Lie dadas por $\bigwedge^2 \mathcal{G}$ no son todas diferentes. pueden dar lugar a estructuras isomorfas: δ_1, δ_2 estructuras de biálgebras son isomorfas si existe α automorfismo de Lie tal que:

$$\begin{array}{ccccc} & \mathcal{G} & \rightarrow & \mathcal{G} \otimes_k \mathcal{G} & \\ \alpha & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \alpha \otimes \alpha \\ & \mathcal{G} & \rightarrow & \mathcal{G} \otimes_k \mathcal{G} & \end{array}$$

pero si δ_1, δ_2 provienen de r-matrices r_1, r_2 respectivamente, i.e., $\delta_1(x) = x \cdot r_1, \delta(x) = x \cdot r_2$, entonces, que el diagrama anterior conmute es equivalente a que $\forall x \in \mathcal{G}$:

$$\begin{aligned} \alpha(x) \cdot r_2 &= (\alpha \otimes \alpha)(x \cdot r_1) \\ &= (\alpha \otimes \alpha) \sum_i ([x, a_i] \otimes b_i + a_i \otimes [x, b_i]) \,, \text{ donde } r_1 = \sum a_i \otimes b_i \,; \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_i ([\alpha x, \alpha a_i] \otimes \alpha b_i + \alpha a_i \otimes [\alpha x, \alpha b_i]) \\
&= \sum \alpha x \cdot (\alpha \otimes \alpha) a_i \otimes b_i) \\
&= \alpha(x) \cdot (\alpha \otimes \alpha) r_1
\end{aligned}
$$

i.e.,

$$\alpha(x) \cdot (r_2 - (\alpha \otimes \alpha) r_1) = 0\,, \quad \forall x \in \mathcal{G} \tag{5.16}$$

luego como α es automorfismo, 5.16 es equivalente a que $r_2 - (\alpha \otimes \alpha) r_1$ es $\mathcal{G}$-invariante. Pero también $r_2 - (\alpha \otimes \alpha) r_1 \in \bigwedge^2 \mathcal{G}$ (aplicar $\tau_{(1,2)}$) y como la parte $\mathcal{G}$-invariante de $\bigwedge^2 \mathcal{G}$ es cero:

$$r_2 = (\alpha \otimes \alpha) r_1$$

Así que las clases de isomorfía de las estructuras de biálgebra de Lie sobre $sl_2(k)$ están parametrizadas por el grupo de automorfismos de Lie $Aut_{Lie}(\mathcal{G})$ actuando sobre $\bigwedge^2 \mathcal{G}$.

Sea $SL_2(k)$ el grupo de matrices complejas 2×2 con determinante 1.

Lema 20 *Si $\alpha \in Aut_{Lie}(\mathcal{G})$ con $\mathcal{G} = sl_2(k)$ entonces existe $T \in SL_2(k)$ tal que;*

$$\alpha(m) = TmT^{-1}\,, \quad \forall m \in sl_2(k)\,.$$

Dem.- Sea,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

base canónica de $sl_2(k)$. Pongamos $V = k^2$. V es un $\mathcal{G}$-módulo definiendo,

$$\mathcal{G} \times V \to V, \ (x, v) \mapsto \alpha(x) v.$$

V es irreducible, pues si no, existe $W \subset V$ un $\mathcal{G}$-invariante con $dim W = 1$, y como $\mathcal{G} = [\mathcal{G}, \mathcal{G}]$, se sigue que $xv = 0$, $\forall v \in V, x \in \mathcal{G}$, i.e, $\alpha(x) = 0, \forall x \in \mathcal{G}$ lo cual es no es posible.

Utilizando teo. 7.2 pag. 33 de [10], V tiene un único vector maximal v_1 correspondiente al más alto peso de V que es $dim V - 1 = 1$, y según lema 7.2 del mismo [10], V tiene una base formada por v_0, v_1 tal que

$$
\begin{aligned}
\alpha(H) v_0 &= v_0, & \alpha(H) v_1 &= -v_1, \\
\alpha(X) v_0 &= 0, & \alpha(X) v_1 &= v_0, \\
\alpha(Y) v_0 &= v_1, & \alpha(Y) v_1 &= 0
\end{aligned}
$$

por lo que las representaciones matriciales de $\alpha(H), \alpha(X), \alpha(Y)$ con respecto a la base$\{v_0, v_1\}$ son, respectivamente, H, X, Y. De donde se sigue el lema.

Propiedad 16 *El $Aut_{Lie}(\mathcal{G})$-módulo $\bigwedge^2 \mathcal{G}$ es isomorfo al $Aut_{Lie}(\mathcal{G})$-módulo $\mathcal{G}$.*

Dem.- Sea Ψ función k-lineal definida por:

$$\begin{array}{rcl} \Psi : \bigwedge^2 \mathcal{G} & \to & \mathcal{G} \\ H \otimes X - X \otimes H & \mapsto & [H,X] = 2X \\ H \otimes Y - Y \otimes H & \mapsto & [H,Y] = -2Y \\ X \otimes Y - Y \otimes X & \mapsto & [X,Y] = H \end{array}$$

Así Ψ es monomorfismo, pero como $dim \bigwedge^2 \mathcal{G} = 3$, entonces Ψ es iso de k-módulos. Veamos que es de $Aut_{Lie}(\mathcal{G})$-módulos.

Sea $\alpha \in Aut_{Lie}(\mathcal{G})$ entonces para cierta $T \in SL_2(k)$, $\alpha(m) = TmT^{-1}$, $\forall m \in \mathcal{G}$,

$$\begin{array}{rcl} \Psi(\alpha(H \otimes X - X \otimes H)) & = & \Psi(\alpha(H) \otimes \alpha(X) - \alpha(X) \otimes \alpha(H)) \\ & = & [\alpha(H), \alpha(X)] \\ & = & T[H,X]T^{-1} \\ & = & \alpha[H,X] \\ & = & \alpha\Psi(H \otimes X - X \otimes H) \end{array}$$

similarmente para $[H,Y], [X,Y]$.

Por lo tanto, las clases de isomorfía de las estructuras de biálgebras de sl_2 están parametrizadas por $Aut_{Lie}(\mathcal{G})$ actuando sobre $\mathcal{G}$.

Pero a su vez, hemos visto que $Aut_{Lie}(\mathcal{G})$ está parametrizada por $SL_2(k)$, (cada automorfismo de Lie es una conjugación). Tenemos la siguiente reducción: las clases de isomorfía de las estructuras de biálgebras de sl_2 están parametrizadas por $SL_2(k)$ actuando sobre $\mathcal{G} = sl_2(k)$ por conjugación.

Aún más, cada órbita de la acción de SL_2 sobre sl_2 da lugar a una clase de isomorfía. Pero para ésta acción, por el teorema de Jordan, sólo hay esencialmente tres órbitas:

$$\text{la de } 0, \text{ la de } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ y la de } \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix} \text{ con } \mu \neq 0 \in k$$

Regresando a las r-matrices, via las identificaciones anteriores se obtienen las tres estructuras de biálgebras de Lie no isomorfas entre sí correspondientes a las tres órbitas anteriores (ver propiedad 16, pag. 98), respectivamente:

$$r = 0, \; r = \tfrac{1}{2}(H \otimes X - X \otimes H), \; r = \mu(X \otimes Y - Y \otimes X)$$

La primera corresponde a la estructura de biálgebra $\delta = 0$. Veamos la segunda:

$$\begin{aligned}\delta(z) &= [z\otimes 1 + 1\otimes z, \frac{1}{2}(H\otimes X - X\otimes H)] \\ &= \frac{1}{2}\{[z,H]\otimes X - X\otimes[z,H] + H\otimes[z,X] - [z,X]\otimes H\}.\end{aligned}$$

Mientras que la tercera:

$$\begin{aligned}\delta(z) &= [z\otimes 1 + 1\otimes z, \mu(X\otimes Y - Y\otimes X)] \\ &= \mu\{[z,X]\otimes Y - Y\otimes[z,X] + X\otimes[z,Y] - [z,Y]\otimes X\}\end{aligned}$$

Para abreviar, denotemos con $A\wedge B$ a la diferencia $A\otimes B - B\otimes A$ en $\mathcal{G}\otimes_k\mathcal{G}$. Y resumimos lo anterior en:

Teorema 22 *Las estructuras de biálgebras de Lie sobre $sl_2(k)$, no isomorfas entre sí son:*

i) $\delta = 0$;

ii) $\delta(z) = \frac{1}{2}([z,H]\wedge X + H\wedge[z,X])$, $\forall z\in sl_2(k)$;

iii) $\delta(z) = \mu([z,X]\wedge Y + X\wedge[z,Y])$, $\forall z\in sl_2(k)$, $\mu\neq 0$.

Tenemos completo el primer paso en la construcción de una cuantización para sl_2. El teorema anterior da toda la información de primer orden. Ahora construiremos las cuantizaciones propiamente. Lo haremos sólo para los casos i) y iii).

El caso i), i.e., $\delta = 0$, sugiere, por supuesto la deformación trivial. Para iii) se requiere algo más de trabajo.

Lo primero que se observa es que para iii), si $\mathcal{G}^+$ denota a la subálgebra de sl_2 que consiste de matrices triangulares superiores y $\mathcal{G}^-$ denota a la subálgebra de matrices triangulares inferiores,

$$\begin{aligned}\delta(X) &= \mu(X\otimes H - H\otimes X)\in\mathcal{G}^+\otimes\mathcal{G}^+ ; \\ \delta(H) &= \mu(2X\wedge Y - 2X\wedge Y) = 0\in\mathcal{G}^+\otimes\mathcal{G}^+\end{aligned}$$

entonces $\delta(\mathcal{G}^+)\subseteq\mathcal{G}^+\otimes_k\mathcal{G}^+$, pues $\mathcal{G}^+ = \langle H, X\rangle_k$. Similarmente $\delta(\mathcal{G}^-)\subseteq\mathcal{G}^-\otimes_k\mathcal{G}^-$. Lo cual sugiere deformar (*cuantizar*) por separado $U\mathcal{G}^+$ y $U\mathcal{G}^-$ y luego juntar de alguna manera tales. Deformemos $U\mathcal{G}^+$ primero.

Sabemos $\delta(H) = 0$, pero como $\Delta_t(H) - \Delta_t'(H) = t\delta(H) + t^2\ldots$ se sugiere,

$$\Delta_t(H) = \Delta(H) = H\otimes 1 + 1\otimes H \tag{5.17}$$

ahora, para X una especie de generalización de la ecuación anterior,

$$\Delta_t(X) = X\otimes f + g\otimes X$$

con $f, g \in U_t^+ = (U\mathcal{G}^+)_t$, tales que $f \to 1, g \to 1$ cuando $t \to 0$. Para que Δ_t : $\mathcal{G}^+ \to U_t^+ \otimes_{k_t} U_t^+$ sea de Lie pongamos $f, g \in (U\mathcal{H})_t$ donde $\mathcal{H}$ es la subálgebra de Lie diagonal de $\mathcal{G} = sl_2(k)$ ($\mathcal{H}$ es abeliana y así $U\mathcal{H}$ es conmutativa). En efecto;

$$\begin{aligned}
\Delta_t(H)\Delta_t(X) &= HX \otimes f + X \otimes Hf + Hg \otimes X + g \otimes HX\ ; \\
\Delta_t(X)\Delta_t(H) &= XH \otimes f + gH \otimes X + X \otimes fH + g \otimes XH\ ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\Delta_t(H), \Delta_t(X)] &= [H, X] \otimes f + g \otimes [H, X] + (Hg - gH) \otimes X \\
&\qquad\qquad + X \otimes (Hf - fH) \\
&= 2X \otimes f + g \otimes 2X, \text{ pues } U\mathcal{H} \text{ es conmutativa;} \\
&= \Delta_t(2X) \\
&= \Delta_t[H, X]\ .
\end{aligned}$$

por lo que $\Delta_t : \mathcal{G}^+ \to U_t^+ \otimes_{k_t} U_t^+$ es de Lie.

Luego, por la propiedad universal de $U\mathcal{G}^+$, Δ_t se extiende a $\Delta_t : U\mathcal{G}^+ \to U_t^+ \otimes_{k_t} U_t^+$ morfismo de k-álgebras asociativas. Y éste a su vez se extiende a

$$\Delta_t : U_t^+ \to U_t^+ \hat{\otimes}_{k_t} U_t^+\ , \sum a_i t^i \mapsto \sum \Delta_t(a_i) t^i$$

morfismo de k_t-álgebras asociativas, donde la estructura multiplicativa de $U_t^+ = (U\mathcal{G}^+)_t$ es la trivial. Veamos ahora la comultiplicación. Se debe cumplir,

$$(Id \hat{\otimes} \Delta_t)\Delta_t(X) = (\Delta_t \hat{\otimes} Id)\Delta_t(X)$$

desarrollando, ésta es equivalente a

$$X \hat{\otimes} \Delta_t(f) + g \hat{\otimes} X \hat{\otimes} f + g \hat{\otimes} g \hat{\otimes} X = X \hat{\otimes} f \hat{\otimes} f + g \hat{\otimes} X \hat{\otimes} f + \Delta_t(g) \hat{\otimes} X$$

lo cual es cierto si $\Delta_t(f) = f \otimes f$, $\Delta_t(g) = g \otimes g$. Veamos condiciones para que ésto suceda.

$\mathcal{H} = \langle H \rangle_k$ álgebra de Lie abeliana, por lo que su álgebra envolvente universal, $U\mathcal{H} = k[H]$, entonces $f = \sum_{i \geq 0} p_i(H) t^i$ con $p_i(H) \in k[H]$. Por simplicidad pongamos $p_i(H) = \xi_i H^{m(i)}$ con $\xi_i \in k$. Así para que $\Delta_t(f) = f \otimes f$,

$$\sum_{i \geq 0} \xi_i \Delta_t(H)^{m(i)} t^i = \sum_{n \geq 0} \sum_{i+j=n} \xi_i \xi_j H^{m(i)} \otimes H^{m(j)} t^n$$

yendo a $(U\mathcal{H} \otimes_k U\mathcal{H})_t$ y utilizando la definición de Δ_t se obtiene,

$$\xi_n (H \otimes_k 1 + 1 \otimes_k H)^{m(n)} = \sum_{i+j=n} \xi_i \xi_j H^{m(i)} \otimes_k H^{m(j)} \qquad (5.18)$$

lo cual recuerda al binomio de Newton; i.e., si se pone $\xi_i = 1/i!, m(i) = i$, $\forall i$ entonces se obtiene

$$\frac{1}{n!}(H \otimes_k 1 + 1 \otimes_k H)^n = \sum_{i+j=n} \frac{1}{i!}\frac{1}{j!} H^i \otimes H^j$$

lo cual es cierto precisamente por el binomio de Newton. Más generalmente, si se pone $\xi_i = \rho^i/i!$, $m(i) = i$, con $\rho \in k$ fijo, entonces la igualdad 5.18 vale. Se propone por tanto la solución:

$$f = \sum_{i \geq 0} \frac{\rho^i}{i!} H^i t^i = e^{\rho H t}$$

similarmente para g ;

$$g = \sum_{i \geq 0} \frac{\gamma^i}{i!} H^i t^i = e^{\gamma H t}$$

donde $\gamma \in k$. Es decir,

$$\Delta_t(X) = X \otimes e^{\rho H t} + e^{\gamma H t} \otimes X$$

Podemos suponer $-\rho = \gamma$, lo cual no es grave, porque si hacemos $X' = Xe^{-1/2(\rho+\gamma)Ht} \in U_t^+$, entonces

$$\begin{aligned}
\Delta_t(X') &= \Delta_t(X)\Delta_t(e^{-1/2(\rho+\gamma)Ht}), \ \Delta_t \text{ es de álgebras;} \\
&= \Delta_t(X)e^{-1/2(\rho+\gamma)t\Delta_t(H)}, \text{ por definición de } \Delta_t; \\
&= \Delta_t(X)e^{-1/2(\rho+\gamma)t(H\otimes 1+1\otimes H)} \\
&= \Delta_t(X)e^{-1/2(\rho+\gamma)(H\otimes 1)t}e^{-1/2(\rho+\gamma)(1\otimes H)t} \\
&= \Delta_t(X)(e^{-1/2(\rho+\gamma)Ht} \otimes 1)(1 \otimes e^{-1/2(\rho+\gamma)Ht}) \\
&= (X \otimes e^{\rho Ht} + e^{\gamma Ht} \otimes X)e^{-1/2(\rho+\gamma)Ht} \otimes e^{-1/2(\rho+\gamma)Ht} \\
&= X' \otimes e^{1/2(\rho-\gamma)Ht} + e^{1/2(\gamma-\rho)Ht} \otimes X'
\end{aligned}$$

i.e., $\Delta_t(X')$ tiene la forma $X' \otimes e^{\xi Ht} + e^{-\xi Ht} \otimes X'$. Además H, X' generan a U_t^+ así como H, X generan.

Falta anexar la información de primer orden que ya habiamos obtenido. Para lo cual:

$$\begin{aligned}
\Delta_t(X) - \Delta_t'(X) &= X \otimes (e^{\gamma Ht} - e^{-\gamma Ht}) + (e^{-\gamma Ht} - e^{\gamma Ht}) \otimes X \\
&= X \otimes (\{\gamma Ht + \tfrac{(\gamma Ht)^2}{2!} + \ldots\} - \{-\gamma Ht + \tfrac{(\gamma Ht)^2}{2!} - \ldots\}) \\
&\quad -(\{\gamma Ht + \tfrac{(\gamma Ht)^2}{2!} + \ldots\} - \{-\gamma Ht + \tfrac{(\gamma Ht)^2}{2!} - \ldots\}) \otimes X \\
&\equiv X \otimes 2\gamma Ht - 2\gamma Ht \otimes X \pmod{t^2} ;
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} X\otimes 2\gamma H - 2\gamma H\otimes X &= \frac{\Delta_t(X)-\Delta_t'(X)}{t}\Big|_{t=0} \\ &= \delta(X) \\ &= \mu(X\otimes H - H\otimes X) \end{aligned}$$

lo cual implica: $\gamma = 1/2\mu$. Es decir,

$$\Delta_t(X) = X\otimes e^{\frac{1}{2}\mu Ht} + e^{-\frac{1}{2}\mu Ht}\otimes X\,. \tag{5.19}$$

Exhibamos la counidad y la antípoda. Se tiene que cumplir (ver 1.11 pag. 13)

$$\begin{aligned} X &= (Id\hat{\otimes}\epsilon_t)\Delta_t(X) \\ &= X\epsilon_t(e^{\frac{1}{2}\mu Ht}) + e^{-\frac{1}{2}\mu Ht}\epsilon_t(X) \\ &= Xe^{\frac{1}{2}\mu\epsilon_t(H)t} + e^{-\frac{1}{2}\mu Ht}\epsilon_t(X) \end{aligned}$$

i.e.,

$$X = Xe^{\frac{1}{2}\mu\epsilon_t(H)t} + e^{-\frac{1}{2}\mu Ht}\epsilon_t(X)$$

Como $\epsilon : (U^+ = k\oplus \mathcal{G}^+U^+) \to k$ proyección, se obtiene que $\epsilon_t(X) = \epsilon(X) = 0, \epsilon_t(H) = \epsilon(H) = 0$. Lo que describe completamente a la counidad ϵ_t. Y entonces los diagramas 1.11 conmutan.

Para la antípoda $\eta_t : U_t^+ \to U_t^+$. Según 1.12 pag.13, se debe cumplir

$$0 = \alpha_t(\eta_t\hat{\otimes}Id)\Delta_t(H),$$

i.e, sustituyendo 5.17, pag. 99

$$0 = \eta_t(H) + \eta_t(1)H$$

lo cual sugiere, $\eta_t|_k = Id_k$, $\eta(H) = -H$. Luego, también de 1.12, pero ahora para X,

$$\eta_t(X) = -e^{\frac{1}{2}\mu Ht}Xe^{-\frac{1}{2}\mu Ht} \tag{5.20}$$

se puede escribir ésta igualdad de mejor manera, para lo cual es el siguiente lema técnico.

Lema 21 *Sea* $\lambda\in k$,

i) Si $[H,z] = cz$ *para algún* $c\in k$ *entonces*

$$H^n z = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}c^i zH^{n-i}\,;$$

ii)

$$e^{2\lambda t}Xe^{\lambda tH}=e^{\lambda tH}X,\quad e^{-2\lambda t}Ye^{\lambda tH}=e^{\lambda tH}Y\ .$$

Dem.- i) Por inducción sobre n. Si $n=1$;

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{1}\binom{1}{i}c^i zH^{n-i} &= zH+cz\\ &= Hz\ ;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H^{n+1}z &= H\Big(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}c^i zH^{n-i}\Big)\\ &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}c^i HzH^{n-i}\\ &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}c^i(zH+cz)H^{n-i}\\ &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}c^i zH^{n+1-i}+\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}c^i zH^{n+1-i}\\ &= zH^{n+1}+\sum_{i=1}^{n}\binom{n+1}{i}c^i zH^{n+1-i}+c^{n+1}z\\ &= \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}c^i zH^{n+1-i}\ .\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}e^{2\lambda t}Xe^{\lambda Ht} &= \sum\frac{2^i\lambda^i t^i}{i!}X\sum\frac{\lambda^j H^j t^j}{j!}\\ &= \sum_n\sum_{i+j=n}\frac{2^iXH^j}{i!j!}\lambda^n t^n\\ &= \sum\frac{1}{n!}H^nX\lambda^n t^n,\ \text{porque } [H,X]=2X \text{ e inciso i ;}\\ &= e^{\lambda Ht}X\ .\end{aligned}$$

Similarmente la otra ecuación afirmada.

Por lo que 5.20 se puede escribir como:

$$\begin{aligned}\eta_t(X) &= -e^{\frac{1}{2}\mu Ht}Xe^{-\frac{1}{2}\mu Ht}\\ &= -e^{\frac{1}{2}\mu Ht}e^{\mu t}e^{-\frac{1}{2}\mu Ht}X\\ &= -e^{\mu t}X\ .\end{aligned}$$

Definición 30 *A una k-álgebra asociativa, $x, y \in A$ tales que*

$$xy = qyx$$

para algún $q \in k$. Para n, i naturales con $n \geq i$ se definen los q-coeficientes binomiales (llamados también polinomios de Gauss),

$$\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q$$

como los coeficientes que aparecen en la ecuación

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q y^i x^{n-i}$$

([18] pag. 158).

Resumiendo,

Teorema 23 *Sea $\mu \neq 0$ en k el campo complejo. Una cuantización para $\mathcal{G}^+$ la k-subálgebra de Lie de las matrices triangulares superiores de $\mathcal{G} = sl_2(k)$ viene descrita por lo siguiente:*

i) La multiplicación y la unidad son las dadas por la deformación trivial;

ii) la comultiplicación Δ_t es;

$$\Delta_t(H) = H \otimes 1 + 1 \otimes H,\ \Delta_t(X) = X \otimes e^{\frac{1}{2}\mu H t} + e^{-\frac{1}{2}\mu H t} \otimes X\ ;$$

iii) la counidad $\epsilon_t : (U\mathcal{G}^+)_t \to k_t$ es la proyección natural y la antípoda η_t es la extensión natural a $(U\mathcal{G}^+)_t$ del antimorfismo,

$$U\mathcal{G}^+ \to U\mathcal{G}^+\ ,\ X^m H^n \mapsto (-1)^{m+n} e^{m\mu t} H^n X^m\ .$$

Dem.- Por construcción sólo hay que hacer ver el axioma para la antípoda. Y por linealidad ésto se reduce a los básicos $\{X^m H^n\}_{m,n}$. Sea $K = e^{\frac{1}{2}\mu H t}, q = e^{\frac{1}{2}\mu t}$, entonces, según lema 21, pag. 103,

$$KX = q^2 XK, XK^{-1} = q^2 K^{-1} X\ ,$$

de donde

$$(X \otimes K)(K^{-1} \otimes X) = q^4 (K^{-1} \otimes X)(X \otimes K). \tag{5.21}$$

En consecuencia, utilizando la definición de los q^4-binomiales, para $X \otimes K$, $K^{-1} \otimes X$,

$$\begin{aligned}
&\alpha(Id\widehat{\otimes}\eta_t)\Delta_t(X^m H^n) = \alpha(Id\widehat{\otimes}\eta_t)(X \otimes K + K^{-1} \otimes X)^m(H \otimes 1 + 1 \otimes H)^n \\
&= \alpha(Id\widehat{\otimes}\eta_t)\textstyle\sum_{i=0,j=0}^{m,n} \left[{m \atop i} \right]_{q^4} (K^{-1} \otimes X)^i (X \otimes K)^{m-i} \left({n \atop j} \right)(H^{n-j} \otimes H^j) \\
&= \alpha(Id\widehat{\otimes}\eta_t)\textstyle\sum_{i=0,j=0}^{m,n} \left[{m \atop i} \right]_{q^4} \left({n \atop j} \right)(K^{-i}X^{m-i} \otimes X^i K^{m-i})(H^{n-j} \otimes H^j) \\
&= \textstyle\sum_{i=0,j=0}^{m,n} \left[{m \atop i} \right]_{q^4} \left({n \atop j} \right) K^{-i}X^{m-i}H^{n-j}\eta_t(X^i K^{m-i} H^j) \\
&= \textstyle\sum_{i=0,j=0}^{m,n} \left[{m \atop i} \right]_{q^4} \left({n \atop j} \right) q^{2i} K^{-i}X^{m-i}H^{n-j}(-1)^{i+j}H^j K^{i-m} X^i \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{m} \left[{m \atop i} \right]_{q^4} q^{2i} K^{-i}X^{m-i}(-1)^i (H - H)^n K^{i-m} X^i \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\alpha(Id\widehat{\otimes}\eta_t)\Delta_t = u_t\epsilon_t,$$

es decir, η_t es inverso lateral derecho de Id_{A_t} en la k_t-álgebra $Hom_{k_t}(A_t, A_t)$ con su producto dado por convolución. Pero tal inverso debe de ser la antípoda (recuérdese que la antípoda se cuida sola en las deformaciones), en particular se debe de cumplir también que

$$\alpha(\eta_t\widehat{\otimes}Id)\Delta_t = u_t\epsilon_t$$

Por analogia existe una cuantización similar para $\mathcal{G}^- = \langle H, Y \rangle$. Sólo hay que cambiar la antípoda. Porque según 1.12 pag.13, se debe cumplir

$$\begin{aligned}
\eta_t(Y) &= -e^{\frac{1}{2}\mu H t} Y e^{-\frac{1}{2}\mu H t} \\
&= -e^{\frac{1}{2}\mu H t} e^{-\mu t} e^{-\frac{1}{2}\mu H t} Y, \text{ por lema 21, pag. 103 ;} \\
&= -e^{-\mu t} Y .
\end{aligned}$$

Teorema 24 *Sea $\mu \neq 0$ en k el campo complejo. Una cuantización para $\mathcal{G}^-$ la k-subálgebra de Lie de las matrices triangulares inferiores de $\mathcal{G} = sl_2(k)$ viene descrita por lo siguiente:*

i) La multiplicación y la unidad son las triviales;

ii) la comultiplicación Δ_t es;

$$\Delta_t(H) = H \otimes 1 + 1 \otimes H, \ \Delta_t(Y) = Y \otimes e^{\frac{1}{2}\mu H t} + e^{-\frac{1}{2}\mu H t} \otimes Y ;$$

iii) la counidad $\epsilon_t : (U\mathcal{G}^-)_t \to k_t$ es la proyección natural y la antípoda η_t es la extensión natural a $(U\mathcal{G}^-)_t$ del antimorfismo,

$$U\mathcal{G}^- \to U\mathcal{G}^- \,,\; Y^m H^n \mapsto (-1)^{m+n} e^{-m\mu t} H^n Y^m \,.$$

Ahora hay que juntar las deformaciones U_t^+, U_t^-. La forma en que se relaciona $\mathcal{G}^+$ con $\mathcal{G}^-$ viene dada por la ecuación

$$[X, Y] = H$$

y entonces hay que deformar ésta relación. Se tiene que cumplir

$$\begin{aligned}
\Delta_t[X,Y] &= [\Delta_t X, \Delta_t Y] \\
&= [X \otimes e^{\frac{1}{2}\mu H t} + e^{-\frac{1}{2}\mu H t} \otimes X, Y \otimes e^{\frac{1}{2}\mu H t} + e^{-\frac{1}{2}\mu H t} \otimes Y] \\
&= [X,Y] \otimes e^{\mu H t} + e^{-\mu H t} \otimes [X,Y] + e^{-\frac{1}{2}\mu H t} Y \otimes X e^{\frac{1}{2}\mu H t} \\
&\quad - Y e^{-\frac{1}{2}\mu H t} \otimes e^{\frac{1}{2}\mu H t} X + X e^{-\frac{1}{2}\mu H t} \otimes e^{\frac{1}{2}\mu H t} Y \\
&\quad - e^{-\frac{1}{2}\mu H t} X \otimes Y e^{\frac{1}{2}\mu H t}
\end{aligned}$$

pero, de nuevo, según lema 21, pag. 103,

$$\begin{aligned}
e^{-\frac{1}{2}\mu H t} Y \otimes X e^{\frac{1}{2}\mu H t} &= Y e^{-\frac{1}{2}\mu H t} \otimes e^{\mu t} X e^{\frac{1}{2}\mu H t} \\
&= Y e^{-\frac{1}{2}\mu H t} \otimes e^{\frac{1}{2}\mu H t} X
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\Delta_t[X,Y] = [X,Y] \otimes e^{\mu H t} + e^{-\mu H t} \otimes [X,Y] \tag{5.22}$$

lo que no es exactamente la igualdad obtenidad antes para la comultiplicación en H, pero hay que recordar que el corchete $[X, Y]$ ahora se esta haciendo en $(U\mathcal{G})_t$ y aquí podemos deformar el producto, por lo que no necesariamente se da la igualdad $[X, Y] = H$ en $(U\mathcal{G})_t$. Para obtener la deformación adecuada hay que observar lo siguiente,

$$\begin{aligned}
\Delta_t(e^{\mu H}) &= \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i \frac{\Delta_t^i H}{i!} t^i \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mu^i}{i!} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} H^i \otimes H^{i-j} t^i \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i \sum_{u+v=i} \frac{H^u}{u!} \otimes \frac{H^v}{v!} t^i \\
&= e^{\mu H t} \otimes e^{\mu H t}
\end{aligned}$$

i.e., $\Delta_t(e^{\mu H t}) = e^{\mu H t} \otimes e^{\mu H t}$. En consecuencia

$$\Delta_t(e^{\mu H t} - e^{-\mu H t}) = e^{\mu H t} \otimes e^{\mu H t} - e^{-\mu H t} \otimes e^{-\mu H t}$$

por lo que si se pone

$$[X,Y]_t = e^{\mu Ht} - e^{-\mu Ht}, \tag{5.23}$$

se obtiene

$$\Delta_t[X,Y]_t = [X,Y]_t \otimes e^{\mu Ht} + e^{-\mu Ht} \otimes [X,Y]_t$$

tal como se quería en 5.22. Sin embargo falta el requerimiento de que en $t = 0$ la deformación sea el producto original. Y tal elección de $[X,Y]_t$ no cumple. Para subsanar esta deficiencia, como el coeficiente de t en $e^{\mu Ht} - e^{-\mu Ht}$ es $2\mu H$, se puede poner

$$[X,Y]_t = \frac{1}{s(t)} \frac{e^{\mu Ht} - e^{-\mu Ht}}{2} = \frac{1}{s(t)} sinh\,(\mu Ht)$$

donde $s(t) \in (t) \subset k_t$ cualquiera tal que el coeficiente de t sea μ, y sigue siendo válida 5.22. Por ejemplo podemos poner,

$$[X,Y]_t = \frac{sinh\,(\mu Ht)}{sinh\,(\mu t)} \tag{5.24}$$

(ver ejem 3. cap. 1).

Teorema 25 *Sea $\mu \neq 0$ en k el campo complejo, $K_\mu = e^{\frac{1}{2}\mu Ht}$, $q_\mu = e^{\frac{1}{2}\mu t}$. Una cuantización para $\mathcal{G} = sl_2(k)$ viene descrita por lo siguiente:*

i) La multiplicación es tal que cumple:

$$K_\mu X = q_\mu^2 X K_\mu,\; K_\mu Y = q_\mu^{-2} Y K_\mu,\; [X,Y]_t = \frac{K_\mu^2 - K_\mu^{-2}}{q_\mu^2 - q_\mu^{-2}}.$$

Además la unidad es trivial, y tal multiplicación es isomorfa a la trivial;

ii) la comultiplicacion Δ_t es;

$$\Delta_t(H) = H \otimes 1 + 1 \otimes H,$$

$$\Delta_t(X) = X \otimes K_\mu + K_\mu^{-1} \otimes X,\; \Delta_t(Y) = Y \otimes K_\mu + K_\mu^{-1} \otimes Y;$$

iii) la counidad $\epsilon_t : (U\mathcal{G})_t \to k_t$ es la proyección natural y la antípoda η_t es tal que

$$X^l Y^m H^n \mapsto (-1)^{l+m+n} q_\lambda^{2(l-m)} H^n Y^m X^l.$$

Para demostrar éste teorema se necesita de más información. Esencialmente de la relación entre la definición de una deformación por medio de series de potencias, por un lado, y de la definición por medio de generadores y relaciones, por otro.

Como k es campo, k_t es dominio entero. Denotemos con C al campo de cocientes de k_t. Hay que notar que para el álgebra envolvente universal U de $\mathcal{G} = sl_2(k)$, si formamos el espacio vectorial $C \otimes_{k_t} U_t$, resulta que $C \otimes_{k_t} U_t \simeq (U_t)_{(0)}$ donde $(U_t)_{(0)}$ es la localización del k_t-módulo U_t en el ideal primo (0) de k_t ([12], teo 4.4. pag. 26) y además

$$\begin{tikzcd}
C \otimes_{k_t} U_t \arrow[rr] & & (U_t)_{(0)} \\
& U_t \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] &
\end{tikzcd}$$

donde, $U_t \to (U_t)_{(0)}$, $u \mapsto u/1$; $U_t \to C \otimes_{k_t} U_t$, $u \mapsto 1 \otimes u$. Como $ker(U_t \to (U_t)_{(0)})$ es la t-torsión de U_t y ésta es cero, se sigue que $U_t \to C \otimes_{k_t} U_t$ es monomorfismo.

Lema 22 *Sea U el álgebra envolvente universal de $\mathcal{G}$, $\mu \neq 0 \in k$, $K = e^{\frac{1}{2}\mu H t} \in U_t$, U_t deformación trivial de U. Entonces el elemento $K \in C \otimes_{k_t} U_t$ es trascendente sobre C.*

Dem.- Supongamos que

$$c_0 + c_1 K + \ldots + c_n K^n = 0 \tag{5.25}$$

con $c_i \in C$, $i = 0, \ldots, n$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que cada $c_i \in k_t$. Multiplicando el lado izquierdo de 5.25 por X,

$$c_0 X + c_1 K X + \ldots + c_n K^n X = 0,$$

conmutando,

$$c_0 X + c_1 q^2 X K + \ldots + c_n q^{2n} K^n = 0,$$

cancelado X,

$$c_0 + c_1 q^2 K + \ldots + c_n q^{2n} K^n = 0. \tag{5.26}$$

Repitiendo el mismo procedimiento para Y, se obtiene,

$$c_0 + c_1 q^{-2} K + \ldots + c_n q^{-2n} K^n = 0, \tag{5.27}$$

restando de 5.26, 5.27,

$$c_1(q^2 - q^{-2})K + \ldots + c_n(q^{2n} - q^{-2n})K^n = 0$$

multiplicando por K^{-1},

$$c_1(q^2 - q^{-2}) + \ldots + c_n(q^{2n} - q^{-2n})K^{n-1} = 0$$

luego, aplicando inducción se obtiene $c_1 = \ldots = c_n = 0$, y así también $c_0 = 0$.

Lema 23 *Los elementos $X, Y, H, K, K^{-1}, K^2, K^{-2} \in C \otimes_{k_t} U_t$ son linealmente independientes sobre C.*

Dem.- Supongamos combinación lineal de los elementos en cuestión. De nuevo, sin pérdida de generalidad,

$$aX + bY + cH + eK + fK^{-1} + gK^2 + hK^{-2} = 0 \tag{5.28}$$

con $a, \ldots, h \in k_t$. Multiplicando por K^2 a la izquierda del lado izquierdo de 5.28,

$$aK^2X + bK^2Y + cK^2H + eK^3 + fK + gK^4 + h1 = 0. \tag{5.29}$$

conmutando,

$$aq^4XK^2 + bq^{-4}YK^2 + cHK^2 + eK^3 + fK + gK^4 + h1 = 0 \tag{5.30}$$

cancelando K^2,

$$aq^4X + bq^{-4}Y + cH + eK + fK^{-1} + gK^2 + hK^{-2} = 0 \tag{5.31}$$

restando de 5.28, ésta última,

$$a(1-q^4)X + b(1-q^{-4})Y = 0$$

y como X, Y son evidentemente linealmente independientes sobre C, se obtiene que $a = b = 0$. Luego, de 5.28,

$$cK^2H + eK^3 + fK + gK^4 + h1 = 0. \tag{5.32}$$

Multiplicando por X a la derecha,

$$\begin{aligned}
0 &= cHK^2X + eK^3X + fKX + hX \\
&= cHq^4XK^2 + eq^6XK^3 + q^2fXK + hX \\
&= cq^4(XH + 2X)K^2 + eq^6XK^3 + q^2fXK + hX, \ ([H, X] = 2X), \\
&= cq^4XHK^2 + cq^4 2XK^2 + eq^6XK^3 + q^2fXK + hX,
\end{aligned}$$

cancelando X,

$$cq^4HK^2 + cq^4 2K^2 + eq^6K^3 + q^2fK + h1 = 0,$$

restándola de 5.32,

$$c(1-q^4)HK^2 - cq^4 2K^2 + e(1-q^6)K^3 + f(1-q^2)K + gK^4 = 0$$

multiplicando por K^{-1},

$$c(1-q^4)HK - cq^4 2K + e(1-q^6)K^2 + f(1-q^2)1 + gK^3 = 0. \tag{5.33}$$

Repitiendo el mismo procedimiento para Y, multiplicando 5.32 por Y,

$$\begin{aligned} 0 &= cHK^2Y + eK^3Y + fKY + HY \\ &= cHq^{-4}YK^2 + eq^{-6}YK^3 + q^{-2}fYK + hY \\ &= cq^{-4}(YH - 2Y)K^2 + eq^{-6}YK^3 + q^{-2}fYK + hY, \ ([H, Y] = -2Y) \\ &= cq^{-4}YHK^2 - 2cq^{-4}K^2 + eq^{-6}YK^3 + q^{-2}fYK + hY \end{aligned}$$

cancelando Y,

$$cq^{-4}HK^2 - 2cq^{-4}K^2 + eq^{-6}K^3 + q^{-2}fK + h1 = 0$$

restándola a 5.32,

$$c(1 - q^{-4})HK^2 + 2cq^{-4}K^2 + e(1 - q^{-6})K^3 + f(1 - q^2)K + gK^4 = 0$$

multiplicando por q^4K^{-1},

$$c(q^4 - 1)HK + 2cK + e(q^4 - q^{-2})K^2 + fq^4(1 - q^2) + gq^4K^3 = 0$$

sumándosela a 5.33,

$$2c(1 - q^4)K + e(1 - q^6 + q^4 - q^{-2})K^2 + f(q^4(1 - q^2) + (1 - q^2)) + g(1 - q^4)K^3 = 0$$

pero como K trascendente sobre C, se obtiene que $c = e = f = g = 0$.

Ahora hay que observar que las relaciones

$$KX - q^2XK = 0, \ KY - q^{-2}YK = 0 \tag{5.34}$$

recuerdan a un corchete de Lie, ó tal vez deberíamos decir a un "q-corchete de Lie". Obsérvese como en los restandos de 5.34 hay involucrado un "q-switch": $S(K \otimes X) = q^2XK$. $S(K \otimes Y) = q^{-2}YK$. Siguiendo a Manin [11] pag. 81, resulta que los axiomas de un álgebra de Lie están dados en términos del switch usual. Entonces utilizando un q-switch se obtiene la definición de un q-álgebra de Lie. Veamos: sea W una F-álgebra de Lie con corchete $f(x, y) = [x, y]$, sea σ permutación de $(1, 2, \ldots, n)$, definimos $s_\sigma : W^{\otimes n} \to W^{\otimes n}$, $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \mapsto x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)}$. Entonces la propiedad antisimétrica es

$$fs_{(12)} = -f$$

y la identidad de Jacobi,

$$f(Id_W \otimes f) + f(Id_W \otimes f)s_{(23)}s_{(12)} + f(Id_W \otimes f)s_{(12)}s_{(23)} = 0.$$

Abstrayendo tales propiedades se obtiene la definición de una S-álgebra de Lie en el sentido de Manin. Expliquemos:

Definición 31 *Sea W un F-espacio vectorial. Un switch es isomorfismo lineal $S : W \otimes_F W \to W \otimes_F W$ tal que*

(a) $S^2 = Id_{W \otimes_F W}$;

(b) $(S_{(12)} S_{(23)})^3 = Id_{W \otimes_F W \otimes_F W}$.

donde $S_{(12)} = S \otimes Id_W$, $S_{(23)} = Id_W \otimes S$.

En tal caso, el switch S induce, para cada n entero positivo, una representación del grupo simétrico S_n de orden $n!$,

$$R : S_n \to W^{n\otimes}$$

puesto que la siguiente es una presentación del grupo S_n

$$\langle\, s_{(i,i+1)} \mid i = 1, \ldots, n-1, (s_{(i,i+1)} s_{(j,j+1)})^{m(i,j)} = 1 \,\rangle$$

donde $m(i,j)$ es el orden de $s_{(i\,i+1)} s_{(j\,j+1)}$, (el grupo S_n junto con las transposiciones $\{ s_{(12)}, \ldots, s_{(n-1,n)} \}$ forman un sistema de Coxeter). Para $\sigma \in S_n$ pongamos $S_\sigma = R(\sigma)$. Entonces $S_\sigma : W^{n\otimes} \to W^{n\otimes}$ es isomorfismo.

Definición 32 *Una S-álgebra de Lie es una tríada (W, f, S) formada por un F-espacio vectorial W, una función lineal $f : W \otimes_F W \to W$, un switch $S : W \otimes_F W \to W \otimes_F W$, tales que satisfacen*

(a)

$$\begin{tikzcd}
W \otimes_F W \arrow[rr, "S"] \arrow[dr, "-f"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & W \otimes_F W \arrow[dl, "f"] \\
& W &
\end{tikzcd}$$

(b) $f(Id_W \otimes f) + f(Id_W \otimes f) S_{(23)} S_{(12)} + f(Id_W \otimes f) S_{(12)} S_{(23)} = 0$;

Ésta definición es un caso particular de la definición de S-álgebras de Lie de Manin, [11], pag.82., pero basta para nuestros propósitos

Lo que se pretende hacer con éstas S-álgebras de Lie es mostrar que tienen una "S-álgebra envolvente universal" que cumple con el teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, para lo cual necesitamos de la siguientes condiciones adicionales: para B una base para W,

(c) $S(x \otimes y) = q_{x,y}\, y \otimes x$, para algún $q_{x,y} \in F$, $\forall x, y \in B$;

(d) Si $x, y, z \in B$ diferentes entre sí y $S_{(23)} = Id_W \otimes S, S_{(12)} = S \otimes Id_W$ entonces

$$S(Id \otimes f)(x \otimes y \otimes z) = (f \otimes Id) S_{(23)} S_{(12)} (x \otimes y \otimes z)$$

Definición 33 *Un F-espacio vectorial W le llamaremos q-álgebra de Lie si es una S-álgebra de Lie que cumple con los incisos (c) y (d) anteriores.*

Ejem. 16 Cuando se pone q como la función constante 1, S el switch usual y la característica de k es cero en la definición 33 se tiene la definición de un álgebra de Lie.

Ejem. 17 Pongamos

$$W_o = \langle X, Y, H, K, K^{-1}, K^2, K^{-2}\rangle_C$$

donde C es el campo de cocientes de k_t. $B = \{X, Y, H, K, K^{-1}, K^2, K^{-2}\}$ es una base de W_o. Se define $f : W_o \times W_o \to W_o$ bilineal cuya matriz asociada con respecto a la base ordenada B es

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{K^2-K^{-2}}{q^2-q^{-2}} & -2X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{K^2-K^{-2}}{q^{-2}-q^2} & 0 & 2Y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2X & -2Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora se definen

$$\begin{gathered} q_{X,Y} = 1,\ q_{X,H} = 1,\ q_{X,K^i} = q^{-2i},\ i = \pm 1, \pm 2 \\ q_{Y,H} = 1,\ q_{Y,K^i} = q^{2i}, \\ q_{H,K^i} = 1,\ q_{K^i,K^j} = 1,\ i = \pm 1, \pm 2 \\ q_{x,y} = q_{y,x}^{-1},\ \forall x, y \in B. \end{gathered}$$

Inmediatamente se cumplen (a) y (c) de la definición 33. Verifiquemos (d). Primero hay que notar que si se cumple (d) para $x \otimes y \otimes z$ entonces se cumple también para $x \otimes z \otimes y$. En efecto,

$$\begin{aligned} S(Id \otimes f)(x \otimes S(y \otimes z)) &= S(x \otimes f S(y \otimes z)) \\ &= -S(Id \otimes f)(x \otimes y \otimes z) \\ &= -(f \otimes Id) S_{(23)} S_{(12)}(x \otimes y \otimes z) \\ &= -(f \otimes Id) q_{x,y} q_{x,z}\, y \otimes z \otimes x \\ &= (f \otimes Id) S_{(23)} S_{(12)}(x \otimes S(y \otimes z)) \end{aligned}$$

pero como $S(y \otimes z) = q_{y,z}\, z \otimes y$, con $q_{y,z} \neq 0$ se sigue que

$$S(Id \otimes f)(x \otimes z \otimes y)) = (f \otimes Id) S_{(23)} S_{(12)}(x \otimes z \otimes y).$$

Por lo tanto basta con examinar los siguientes casos:

caso $x = X, y = Y, z = H$:

$$\begin{aligned} S(Id_W \otimes f)(X \otimes Y \otimes H) &= S(X \otimes 2Y) \\ &= 2Y \otimes X, \\ (f \otimes Id_W)S_{(23)}S_{(12)}(X \otimes Y \otimes H) &= (f \otimes Id_W)(Y \otimes H \otimes X) \\ &= 2Y \otimes X. \end{aligned}$$

caso $x = X, y = Y, z = K^i$:

$$\begin{aligned} S(Id \otimes f)(X \otimes Y \otimes K^i) &= S(X \otimes f(Y \otimes K^i)) \\ &= 0, \\ (f \otimes Id)S_{(23)}S_{(12)}(X \otimes Y \otimes K^i) &= q^{-2i}(f \otimes Id)(Y \otimes K^i \otimes X) \\ &= 0. \end{aligned}$$

caso $x = X, y = H, z = K^i$:

$$\begin{aligned} S(Id \otimes f)(X \otimes H \otimes K^i) &= 0, \\ (f \otimes Id)S_{(23)}S_{(12)}(X \otimes H \otimes K^i) &= q^{-2i}(f \otimes Id)(H \otimes K^i \otimes X) \\ &= 0. \end{aligned}$$

caso $x = X, y = K^i, z = K^j$:

$$\begin{aligned} S(Id \otimes f)(X \otimes K^i \otimes K^j) &= 0, \\ (f \otimes Id)S_{(23)}S_{(12)}(X \otimes K^i \otimes K^j) &= q^{-2(i+j)}(f \otimes Id)(K^i \otimes K^j \otimes X) \\ &= 0. \end{aligned}$$

caso $x = Y, y = X, z = H$:

$$\begin{aligned} S(Id \otimes f)(Y \otimes X \otimes H) &= S(Y \otimes -2X) \\ &= -2X \otimes Y, \\ (f \otimes Id)S_{(23)}S_{(12)}(Y \otimes X \otimes H) &= f(X \otimes H) \otimes Y \\ &= -2X \otimes Y. \end{aligned}$$

caso $x = Y, y = X, z = K^i$:

$$\begin{aligned} S(Id \otimes f)(Y \otimes X \otimes K^i) &= S(Y \otimes 0) \\ &= 0, \\ (f \otimes Id)S_{(23)}S_{(12)}(Y \otimes X \otimes K^i) &= q^2 f(X \otimes K^i) \otimes Y \\ &= 0. \end{aligned}$$

caso $x = Y, y = H, z = K^i$:

$$\begin{aligned}
S(Id \otimes f)(Y \otimes H \otimes K^i) &= S(Y \otimes 0) \\
&= 0, \\
(f \otimes Id)S_{(23)}S_{(12)}(Y \otimes H \otimes K^i) &= q^2 f(H \otimes K^i) \otimes Y \\
&= 0.
\end{aligned}$$

caso $x = Y, y = K^i, z = K^j$:

$$\begin{aligned}
S(Id \otimes f)(Y \otimes K^i \otimes K^j) &= S(Y \otimes 0) \\
&= 0, \\
(f \otimes Id)S_{(23)}S_{(12)}(Y \otimes K^i \otimes K^j) &= q^{2(i+j)} f(K^i \otimes K^j) \otimes Y \\
&= 0.
\end{aligned}$$

caso $x = H, y = X, z = y$:

$$\begin{aligned}
S(Id \otimes f)(H \otimes X \otimes Y) &= S(H \otimes \frac{K^2 - K^{-2}}{q^2 - q^{-2}}) \\
&= \frac{K^2 - K^{-2}}{q^2 - q^{-2}} \otimes H, \\
(f \otimes Id)S_{(23)}S_{(12)}(H \otimes X \otimes Y) &= f(X \otimes Y) \otimes H \\
&= \frac{K^2 - K^{-2}}{q^2 - q^{-2}} \otimes H.
\end{aligned}$$

caso $x = H, y = X, z = K^i$:

$$\begin{aligned}
S(Id \otimes f)(H \otimes X \otimes K^i) &= 0, \\
(f \otimes Id)S_{(23)}S_{(12)}(H \otimes X \otimes K^i) &= (f \otimes Id)(X \otimes K^i \otimes H) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

caso $x = H, y = Y, z = K^i$:

$$\begin{aligned}
S(Id \otimes f)(H \otimes Y \otimes K^i) &= 0, \\
(f \otimes Id)S_{(23)}S_{(12)}(H \otimes Y \otimes K^i) &= (f \otimes Id)(Y \otimes K^i \otimes H) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

caso $x = H, y = K^i, z = K^j$:

$$\begin{aligned}
S(Id \otimes f)(H \otimes K^i \otimes K^j) &= 0, \\
(f \otimes Id)S_{(23)}S_{(12)}(H \otimes K^i \otimes K^j) &= (f \otimes Id)(K^i \otimes K^j \otimes H) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

caso $x = K^i, y = X, z = Y$:

$$\begin{aligned} S(Id\otimes f)(K^i\otimes X\otimes Y) &= \frac{K^2-K^{-2}}{q^2-q^{-2}}\otimes K^i,\\ (f\otimes Id)S_{(23)}S_{(12)}(K^i\otimes X\otimes Y) &= (f\otimes Id)q^2q^{-2}(X\otimes Y\otimes K^i)\\ &= \frac{K^2-K^{-2}}{q^2-q^{-2}}\otimes K^i. \end{aligned}$$

caso $x = K^i, y = X, z = H$:

$$\begin{aligned} S(Id\otimes f)(K^i\otimes X\otimes H) &= -2q^2X\otimes K^i,\\ (f\otimes Id)S_{(23)}S_{(12)}(K^i\otimes X\otimes H) &= (f\otimes Id)q^2(X\otimes H\otimes K^i)\\ &= -q^22X\otimes K^i. \end{aligned}$$

caso $x = K^i, y = X, z = K^j$:

$$\begin{aligned} S(Id\otimes f)(K^i\otimes X\otimes K^j) &= 0,\\ (f\otimes Id)S_{(23)}S_{(12)}(K^i\otimes X\otimes K^j) &= (f\otimes Id)q^2(X\otimes K^j\otimes K^i)\\ &= 0. \end{aligned}$$

caso $x = K^i, y = Y, z = H$:

$$\begin{aligned} S(Id\otimes f)(K^i\otimes Y\otimes H) &= 2q^{-2}Y\otimes K^i,\\ (f\otimes Id)S_{(23)}S_{(12)}(K^i\otimes Y\otimes H) &= (f\otimes Id)(Y\otimes H\otimes K^i)\\ &= 2q^{-2}Y\otimes K^i. \end{aligned}$$

caso $x = K^i, y = Y, z = K^j$:

$$\begin{aligned} S(Id\otimes f)(K^i\otimes Y\otimes K^j) &= 0,\\ (f\otimes Id)S_{(23)}S_{(12)}(K^i\otimes Y\otimes K^j) &= (f\otimes Id)q^{-2}(Y\otimes K^j\otimes K^i)\\ &= 0. \end{aligned}$$

caso $x = K^i, y = H, z = K^j$:

$$\begin{aligned} S(Id\otimes f)(K^i\otimes H\otimes K^j) &= 0,\\ (f\otimes Id)S_{(23)}S_{(12)}(K^i\otimes H\otimes K^j) &= (f\otimes Id)(H\otimes K^j\otimes K^i)\\ &= 0. \end{aligned}$$

Ahora veamos (b). Observemos que

$$\begin{gathered} g(x\otimes y\otimes z) + gS_{(23)}S_{(12)}(x\otimes y\otimes z) + gS_{(12)}S_{(23)}(x\otimes y\otimes z) = \\ -q_{y,z}\{\, g(x\otimes z\otimes y) + gS_{(23)}S_{(12)}(x\otimes z\otimes y) + gS_{(12)}S_{(23)}(x\otimes z\otimes y)\,\}, \end{gathered}$$

además,

$$\begin{aligned}
&g(x\otimes x\otimes y)+gS_{(23)}S_{(12)}(x\otimes x\otimes y)+gS_{(12)}S_{(23)}(x\otimes x\otimes y)\\
&=f(\,x\otimes f(x\otimes y)\,)+q_{x,y}f(\,x\otimes f(y\otimes x)\,)+q_{x,y}^2 f(\,y\otimes \underbrace{f(x\otimes x)}_{0}\,)\\
&\qquad=f(\,x\otimes f(x\otimes y)\,)+f(\,x\otimes fS(x\otimes y)\,)\\
&\qquad=f(\,x\otimes f(x\otimes y)\,)-f(\,x\otimes f(x\otimes y)\,)\\
&\qquad=0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&g(x\otimes y\otimes y)+gS_{(23)}S_{(12)}(x\otimes y\otimes y)+gS_{(12)}S_{(23)}(x\otimes y\otimes y)\\
&=f(\,x\otimes \underbrace{f(y\otimes y)}_{0}\,)+q_{x,y}^2 f(\,y\otimes f(y\otimes x)\,)+q_{x,y}f(\,y\otimes f(x\otimes y)\,)\\
&\qquad=q_{x,y}f(\,y\otimes fS(x\otimes y)\,)+q_{x,y}f(\,x\otimes f(x\otimes y)\,)\\
&\qquad=-q_{x,y}f(\,y\otimes f(x\otimes y)\,)+q_{x,y}f(\,x\otimes f(x\otimes y)\,)\\
&\qquad=0,
\end{aligned}$$

de donde se puede suponer que x,y,z son diferentes entre sí. Por lo que es suficiente con examinar los siguientes casos:

caso $x=X, y=Y, z=H$,

$$f(X\otimes 2Y)+f(Y\otimes 2X)+\underbrace{f(H\otimes \frac{K^2-K^{-2}}{q^2-q^{-2}})}_{0}=0$$

caso $x=Y, y=X, z=H$,

$$f(Y\otimes -2X)-f(X\otimes -2Y)+\underbrace{f(H\otimes \frac{K^2-K^{-2}}{q^{-2}-q^2})}_{0}=0$$

caso $x=Y, y=H, z=X$,

$$f(Y\otimes 2X)+\underbrace{f(H\otimes \frac{K^{-2}-K^2}{q^2-q^{-2}})}_{0}+f(X\otimes 2Y)=0$$

caso $x=H, y=Y, z=X$,

$$\underbrace{f(H\otimes \frac{K^{-2}-K^2}{q^{-2}-q^2})}_{0}+f(Y\otimes -2X)+f(X\otimes -2Y)=0$$

y en los casos que restan siempre x, y ó z es K^i, $i = \pm 1, \pm 2$, y aquí la igualdad a probar se cumple pues $f(K^i \otimes u) = f(u \otimes K^i) = 0$.

Observación.- Si W es una q-álgebra de Lie con respecto a la base B entonces

(a) $q_{x,y} \neq 0$, $q_{y,x} = q_{x,y}^{-1}, \forall x, y \in B$;

(b) si $x, y, z \in B$ diferentes entre sí y

$$f(x \otimes y) = \sum_j s_j x_j$$

con cada $x_j \in B$, $s_j \in F$ entonces se cumple

$$s_j \neq 0 \Rightarrow q_{z,x} q_{z,y} = q_{z,x_j}$$

(c) $f(y \otimes x) = -q_{y,x} f(x \otimes y)$, $\forall x, y \in B$;

(d) si $x, y, z \in B$ diferentes entre sí,

$$f(\, f(x \otimes y) \otimes z\,) - f(x \otimes f(y \otimes z)\,) + q_{x,y} f(\, y \otimes f(x \otimes z)\,) = 0$$

(e) Si $x, y, z \in B$ diferentes entre sí,

$$f(\, f(x \otimes y) \otimes z\,) = -q_{x,z} q_{y,z} f(\, z \otimes f(x \otimes y)\,).$$

Dem.- (a) $S^2 = Id$ y S es isomorfismo.
(b) Por (d) de la definición 33, pag. 112,

$$\begin{aligned} S(Id \otimes f)(z \otimes x \otimes y) &= (f \otimes Id) S_{(23)} S_{(12)} (z \otimes x \otimes y) \\ &= q_{z,x} q_{z,y} f(x \otimes y) \otimes z \\ &= \sum_j q_{z,x} q_{z,y} s_j x_j \otimes z \end{aligned}$$

pero por otro lado $S(Id \otimes f)(z \otimes x \otimes y) = \sum_j q_{z,x_j} s_j x_j \otimes z$, por lo que

$$\sum_j q_{z,x_j} s_j x_j \otimes z = \sum_j q_{z,x} q_{z,y} s_j x_j \otimes z$$

de donde se obtiene, igualando coeficientes, que si $s_j \neq 0$ entonces $q_{z,x_j} = q_{z,x} q_{z,y}$.
(c) Se sigue de (a) de la definición 33, pag. 112.
(e) Escribamos $f(x \otimes y) = \sum_j s_j x_j$ con cada $x_j \in B, s_j \neq 0$,

$$\begin{aligned} f(\, f(x \otimes y) \otimes z\,) &= -\sum_j q_{x_j,z} s_j f(z \otimes x_j) \\ &= -\sum_j s_j q_{x,z} q_{y,z} f(z \otimes x_j), \text{ por (b)}, \\ &= -q_{x,z} q_{y,z} f(\, z \otimes f(x \otimes y)\,) \end{aligned}$$

(d) Según (e) y (c),

$$
\begin{aligned}
& f(\, f(x \otimes y) \otimes z\,) - f(\, x \otimes f(y \otimes z\,) + q_{x,y} f(\, y \otimes f(x \otimes z)\,) \\
= & -q_{x,z} q_{y,z} f(\, z \otimes f(x \otimes y\,) - f(\, x \otimes f(y \otimes z\,) - q_{x,y} q_{x,z} f(\, y \otimes f(z \otimes x)\,) \\
= & -f(Id_W \otimes f) S_{(12)} S_{(23)}(x \otimes y \otimes z) - f(Id_W \otimes f)(x \otimes y \otimes z) \\
& -f(Id_W \otimes f) S_{(23)} S_{(12)}(x \otimes y \otimes z) \\
= & \; 0,
\end{aligned}
$$

debido a (b) de la definición 33.

Sea W un F-espacio vectorial, $\otimes(W)$ su F-álgebra tensorial,

$$W^{n\otimes} = \underbrace{W \otimes_F \ldots \otimes_F W}_{n-veces},$$

B una base totalmente ordenada de W.

Definición 34 *i) Para $u_1 \otimes \ldots \otimes u_n \in W^{n\otimes}$ con cada $u_i \in B$, se define su desorden como el número*

$$D(u_1 \otimes \ldots \otimes u_n) = \#\{(i,j) \,|\, i < j, u_i > u_j\}$$

ii) Para $u = \sum \xi_{i_1,\ldots,i_n} u_{i_1} \otimes \ldots \otimes u_{i_n} \in W^{n\otimes}$ con cada $u_{i_j} \in B, \xi_{i_1,\ldots,i_n} \in F$, se define su desorden como el número

$$D(u) = \max\{D(u_{i_1} \otimes \ldots \otimes u_{i_n}) \,|\, \xi_{i_1,\ldots,i_n} \neq 0\},$$

$D(0) = 0$.

Denotemos con

$$
\begin{aligned}
B_0(B) &= \{1\} \\
B_n(B) &= \{u_1 \otimes \ldots \otimes u_n \in W^{\otimes n} \,|\, u_i \in B\} \\
B(B) &= \cup_{n=0}^{\infty} B_n(B) \\
W_s^{\otimes n} &= \langle u \in B_n(B) \,|\, D(u) \leq s \rangle_F,
\end{aligned}
$$

y con $S(B)$ al conjunto de sucesiones finitas no decrecientes de elementos de B.

Ahora, para W una q-álgebra de Lie, definimos $J(W)$ como el ideal bilátero de $\otimes(W)$ generado por

$$u \otimes v - q_{u,v} v \otimes u - f(u, v),\; u, v \in B$$

Sea además,

$$J(W)_{r,s} = J(W) \cap (W_s^{\otimes(r+1)} + \sum_{n=0}^{r} W^{\otimes n})$$

Lema 24 *Sea $w \in B_{r+1}(B)$ con $D(w) = s+1$, y*

$$w = u \otimes x \otimes y \otimes a \otimes x' \otimes y' \otimes b$$

con $x, x', y, y' \in B$ tales que $x > y$, $x' > y'$, $u, a, b \in B(B)$ entonces la suma

$$\begin{gathered} u \otimes q_{x,y} y \otimes x \otimes a \otimes x' \otimes y' \otimes b + u \otimes f(x,y) \otimes a \otimes x' \otimes y' \otimes b \\ -u \otimes x \otimes y \otimes a \otimes q_{x',y'} y' \otimes x' \otimes b - u \otimes x \otimes y \otimes a \otimes f(x',y') \otimes b \end{gathered}$$

pertenece a $J(W)_{r,s}$.

Dem.- El elemento $u \otimes y \otimes x \otimes a \otimes (x' \otimes y' - q_{x',y'} y' \otimes x') \otimes b$ tiene menos desorden que w, mientras que $u \otimes y \otimes x \otimes a \otimes f(x',y') \otimes b \in \sum_{n=0}^{r} W^{\otimes n}$, luego,

$$u \otimes q_{x,y} y \otimes x \otimes a \otimes (x' \otimes y' - q_{x',y'} y' \otimes x' - f(x',y')) \otimes b \equiv 0 \ (mod\, J(W)_{r,s})$$

similarmente,

$$u \otimes (x \otimes y - q_{x,y} y \otimes x - f(x,y)) \otimes a \otimes q_{x',y'} y' \otimes x' \otimes b \equiv 0 \ (mod\, J(W)_{r,s})$$

así,

$$\begin{aligned} &u \otimes q_{x,y} y \otimes x \otimes a \otimes x' \otimes y' \otimes b \equiv \\ &u \otimes q_{x,y} y \otimes x \otimes a \otimes q_{x',y'} y' \otimes x' \otimes b + u \otimes q_{x,y} y \otimes x \otimes a \otimes f(x',y') \otimes b \\ &\qquad (mod\, J(W)_{r,s}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &u \otimes x \otimes y \otimes a \otimes q_{x',y'} y' \otimes x' \otimes b \equiv \\ &u \otimes q_{x,y} y \otimes x \otimes a \otimes q_{x',y'} y' \otimes x' \otimes b + u \otimes f(x,y) \otimes a \otimes q_{x',y'} y' \otimes x' \otimes b \\ &\qquad (mod\, J(W)_{r,s}) \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} &u \otimes q_{x,y} y \otimes x \otimes a \otimes x' \otimes y' \otimes b - u \otimes x \otimes y \otimes a \otimes q_{x',y'} y' \otimes x' \otimes b \equiv \\ &u \otimes q_{x,y} y \otimes x \otimes a \otimes f(x',y') \otimes b - u \otimes f(x,y) \otimes a \otimes q_{x',y'} y' \otimes x' \otimes b \end{aligned}$$

sumando $u \otimes f(x,y) \otimes a \otimes x' \otimes y' \otimes b - u \otimes x \otimes y \otimes a \otimes f(x',y') \otimes b$,

$$\begin{aligned} &u \otimes q_{x,y} y \otimes x \otimes a \otimes x' \otimes y' \otimes b + u \otimes f(x,y) \otimes a \otimes x' \otimes y' \otimes b \\ &-u \otimes x \otimes y \otimes a \otimes q_{x',y'} y' \otimes x' \otimes b - u \otimes x \otimes y \otimes a \otimes f(x',y') \otimes b \\ &\equiv u \otimes q_{x,y} y \otimes x \otimes a \otimes f(x',y') \otimes b - u \otimes x \otimes y \otimes a \otimes f(x',y') \otimes b \\ &\quad u \otimes f(x,y) \otimes a \otimes x' \otimes y' \otimes b - u \otimes f(x,y) \otimes a \otimes q_{x',y'} y' \otimes x' \otimes b \\ &\equiv -u \otimes f(x,y) \otimes a \otimes f(x',y') \otimes b + u \otimes f(x,y) \otimes a \otimes f(x',y') \otimes b \\ &\qquad = 0 \ (mod\, J(W)_{r,s}) \end{aligned}$$

Lema 25 *Sea* $w \in B_{r+1}(B)$ *con* $D(w) = s + 1$ *y*

$$w = u \otimes x \otimes y \otimes z \otimes b$$

con $x, y, z \in B$ *tales que* $x > y > z$, $u, b \in B(B)$ *entonces*

$$\begin{gathered} u \otimes q_{x,y} y \otimes x \otimes z \otimes b + u \otimes f(x,y) \otimes z \otimes b \\ -u \otimes x \otimes q_{y,z} z \otimes y \otimes b - u \otimes x \otimes f(y,z) \otimes b \end{gathered}$$

es congruente módulo $J(W)_{r,s}$ *a*

$$\begin{gathered} u \otimes q_{x,y} q_{x,z} f(y,z) \otimes x \otimes b - u \otimes x \otimes f(y,z) \otimes b \\ +u \otimes q_{x,y} y \otimes f(x,z) \otimes b - u \otimes q_{y,z} f(x,z) \otimes y \otimes b \\ +u \otimes f(x,y) \otimes z \otimes b - u \otimes q_{y,z} q_{x,z} z \otimes f(x,y) \otimes b \end{gathered}$$

Dem.- Razonando como en la demostración del lema inmediato anterior se obtienen,

$$u \otimes q_{x,y} y \otimes (x \otimes z - q_{x,z} z \otimes x - f(x,z)) \otimes b \equiv 0 \ (mod\, J(W)_{r,s})$$

$$u \otimes q_{y,z} (x \otimes z - q_{x,z} z \otimes x - f(x,z)) \otimes y \otimes b \equiv 0 \ (mod\, J(W)_{r,s})$$

restando,

$$\begin{gathered} u \otimes q_{x,y} y \otimes x \otimes z \otimes b - u \otimes x \otimes q_{y,z} z \otimes y \otimes b \equiv \\ u \otimes q_{x,y} q_{x,z} y \otimes z \otimes x \otimes b + u \otimes q_{x,y} y \otimes f(x,z) \otimes b \\ -u \otimes q_{y,z} q_{x,z} z \otimes x \otimes y \otimes b - u \otimes q_{y,z} f(x,z) \otimes y \otimes b \\ (mod\, J(W)_{r,s}). \end{gathered} \tag{5.35}$$

Como antes,

$$u \otimes q_{x,y} q_{x,z} y \otimes z \otimes x \otimes b \equiv u \otimes q_{x,y} q_{x,z} (q_{y,z} z \otimes y + f(y,z)) \otimes x \otimes b \otimes b \quad (mod\, J(W)_{r,s})$$

$$u \otimes q_{y,z} q_{x,z} z \otimes x \otimes y \otimes b \equiv u \otimes q_{y,z} q_{x,z} z \otimes (q_{x,y} y \otimes x + f(x,y)) \otimes b \quad (mod\, J(W)_{r,s})$$

sustituyendo en 5.35,

$$\begin{gathered} u \otimes q_{x,y} y \otimes x \otimes z \otimes b - u \otimes x \otimes q_{y,z} z \otimes y \otimes b \equiv \\ u \otimes q_{x,y} q_{x,z} f(y,z) \otimes x \otimes b + u \otimes q_{x,y} y \otimes f(x,z) \otimes b \\ -u \otimes q_{y,z} q_{x,z} z \otimes f(x,y) \otimes b - u \otimes q_{y,z} f(x,z) \otimes y \otimes b \ (mod\, J(W)_{r,s}) \end{gathered}$$

y sumando a ambos lados de la congruencia el elemento $u \otimes f(x,y) \otimes z \otimes b - u \otimes x \otimes f(y,z) \otimes b$ se obtiene el resultado afirmado.

Teorema 26 *Si W es una q-álgebra de Lie y $U_q(W) = \otimes(W)/J(W)$ entonces una F-base para $U_q(W)$ la forman los monomios*

$$\mathcal{M} = \{\gamma(u_1 \otimes \ldots \otimes u_n) \mid (u_1, \ldots, u_n) \in S(B)\}$$

donde $\gamma : \otimes(W) \to U_q(W)$ es la proyección natural.

Dem.- Enseguida demostraremos que $\mathcal{M}$ genera. Basta con demostrar que $\mathcal{M}$ genera a $\gamma(W^{\otimes n})$. Por inducción sobre n. Sea $w = x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \in B_n(B)$. Si $D(w) = 0$, $\gamma(w) \in \mathcal{M}$ y no hay nada que probar. Ahora hagamos una segunda inducción sobre el desorden. Supongamos $D(w) = s + 1$, y $w = u \otimes x \otimes y \otimes v$ con $u, v \in B(B)$ y $x > y$. Entonces

$$w \equiv u \otimes q_{x,y} y \otimes x \otimes v + u \otimes f(x,y) \otimes v \; (mod \, J(W))$$

pero como $D(u \otimes q_{x,y} y \otimes x \otimes v) = s$, $u \otimes f(x,y) \otimes v \in W^m$ con $m < n$, se sigue por inducción que $\gamma(w) \in \langle \mathcal{M} \rangle_F$.

Ahora demostraremos independencia lineal sobre F. Para ésto basta con definir una función F-lineal $\sigma : \otimes(W) \to S(W)$, $S(W)$ la F-álgebra simétrica sobre W, sujeta a las condiciones siguientes:

i) $\sigma(1) = 1$;
ii) $\sigma(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = x_1 \ldots x_n, \forall (x_1, \ldots, x_n) \in S(B)$;
iii)$\sigma(J(W)) = 0$.

Definiremos tal σ haciendo una doble inducción como antes. Según la condición i, σ se puede definir sobre $W^0 = F$. Ahora supongamos que σ ya ha sido definida en $\sum_{n=0}^{r} W^{\otimes n}$ tal que cumple i,

ii') $\sigma(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = x_1 \ldots x_n, \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \cup_{i=0}^{r} B_i(B)$ no decreciente;
iii') σ anula a $J(W) \cap \sum_{n=0}^{r} W^{\otimes n}$.

Tenemos que definirla sobre $W^{\otimes(r+1)}$. Lo haremos haciendo una segunda inducción sobre el desorden.

Siguiendo ii, se puede definir σ en los elementos de W^{r+1} sin desorden, i.e., sobre $(W^{\otimes(r+1)})_0$. Además , según iii', σ anula a $J(W) \cap \sum_{n=0}^{r} W^{\otimes n} = J(W) \cap ((W^{\otimes(r+1)})_0 + \sum_{n=0}^{r} W^{\otimes n})$. (los elementos de $(W^{\otimes(r+1)})_0$ no tienen desorden, mientras que los de $J(W)$ sí).

Supongamos que σ cumple i, y que ya ha sido definida sobre $(W^{\otimes(r+1)})_s + \sum_{n=0}^{r} W^{\otimes n}$ tal que

ii") $\sigma(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = x_1 \ldots x_n, \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \cup_{i=0}^{r+1} B_i(B)$ no decreciente;
iii") σ se anula sobre $J(W)_{r,s} = J(W) \cap ((W^{\otimes(r+1)})_s + \sum_{n=0}^{r} W^{\otimes n})$.

Ahora tenemos que definir σ sobre $(W^{\otimes(r+1)})_{s+1}$. Sea $w \in B_{r+1}(B)$ tal que $D(w) = s + 1$, entonces se puede escribir,

$$w = u \otimes x \otimes y \otimes v$$

con $u, v \in B(B), x, y \in B, x > y$. Evidentemente, $D(u \otimes y \otimes x \otimes v) = s$, así que $u \otimes q_{x,y} y \otimes x \otimes u \in (W^{\otimes(r+1)})_s$ por lo que se puede definir

$$\sigma(w) = \sigma(u \otimes q_{x,y} y \otimes x \otimes v + u \otimes f(x,y) \otimes v) \tag{5.36}$$

(la condición iii demanda que así sea). Luego valen i, ii", iii". Sólo resta por probar que σ está bien definida, es decir, que σ no depende de la elección de los elementos desordenados x, y en 5.36.

Supongamos que

$$w = u \otimes x \otimes y \otimes a \otimes x' \otimes y' \otimes b$$

con $x > y$, $x' > y'$. Hay dos casos: a) todos los x, y, x', y' son diferentes entre sí. b) hay un elemento común entre x, y y x', y'.

caso a: tenemos que mostrar que σ se anula en

$$\begin{aligned} u \otimes q_{x,y} y \otimes x \otimes a \otimes x' \otimes y' \otimes b + u \otimes f(x,y) \otimes a \otimes x' \otimes y' \otimes b \\ - u \otimes x \otimes y \otimes q_{x',y'} y' \otimes x' \otimes b - u \otimes x \otimes y \otimes f(x', y') \otimes b \end{aligned}$$

pero según lema 24, pag. 119, ésta suma pertenece a $J(W)_{r,s}$, luego por la hipótesis de inducción sobre s, σ anula a tal suma.

caso b: después de intercambiar las primas, tal vez, podemos suponer que $x > y = x' > y'$ y poner $z = y'$. Entonces

$$w = u \otimes x \otimes y \otimes z \otimes b$$

con $x > y > z$. Luego según lema 25, pag. 120, basta con demostrar que

$$\begin{aligned} & u \otimes q_{x,y} q_{x,z} f(y,z) \otimes x \otimes b - u \otimes x \otimes f(y,z) \otimes b \\ + & u \otimes q_{x,y} y \otimes f(x,z) \otimes b - u \otimes q_{y,z} f(x,z) \otimes y \otimes b \\ + & u \otimes f(x,y) \otimes z \otimes b - u \otimes q_{y,z} q_{x,z} z \otimes f(x,y) \otimes b \end{aligned}$$

está en $J(W)_{r,s}$. Sea tal suma S. Se puede escribir $f(y,z) = \sum_j s_j x_j$ con cada $s_j \in F$ no cero y $x_j \in B$. Entonces $q_{x,y} q_{x,z} = q_{x,x_j}$ para cada j según (b) de la observación inmediata posterior a la definición 33, pag. 112. Calculemos, (módulo $J(W)_{r,s}$),

$$\begin{aligned} q_{x,y} q_{x,z} f(y,z) \otimes x - x \otimes f(y,z) &= \sum_j q_{x,y} q_{x,z} s_j x_j \otimes x - \sum_j x \otimes x_j \\ &= \sum_j (q_{x,x_j} x_j \otimes x - x \otimes x_j) \\ &\equiv -\sum_j f(x, x_j) \ (mod\ J(W)_{r,s}) \\ &= -f(x, f(y,z)) \end{aligned}$$

similarmente

$$\begin{aligned} f(x,y) \otimes z - q_{y,z} q_{x,z} z \otimes f(x,y) &\equiv f(f(x,y), z) \\ q_{x,y} y \otimes f(x,z) - q_{y,z} f(x,z) \otimes y &\equiv q_{x,y} f(y, f(x,z)) \ (mod\ J(W)_{r,s}), \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} S &\equiv u\otimes (\, f(f(x,y),z) - f(x,f(y,z)) + q_{x,y} f(y,f(x,z))\,) \otimes b \\ &= 0 \; (\, mod\; J(W)_{r,s}\,) \end{aligned}$$

según (d) de la observación inmediata posterior a la definición 33, pag. 112.

Ejem. 18 Sea W_o un F-espacio vectorial con base (x,y), $q \in F$ no cero. W_0 es una q-álgebra definiendo $q_{x,y} = q$ y $f : W_o \otimes_F W_o \to W_o$, $f = 0$. Resulta que el álgebra tensorial $\otimes(W_o)$ es $F\langle x,y\rangle$ el anilo de polinomios con variables no conmutativas x, y,

$$U_q(W_o) = F\langle x,y\rangle / \langle x\otimes y - q\, y\otimes x\rangle_{F\langle x,y\rangle}$$

es el llamado *plano cuántico* $A_q^{2|0}$ ([11], pag. 5).

Podemos dotar a tal plano cuántico de una estructura de biálgebra *no co-conmutativa*. Sea $\tilde{\Delta} : \otimes(W_o) \to U_q(W_o) \otimes_F U_q(W_o)$ morfismo de F-álgebras inducido por $\tilde{\Delta}(x) = \gamma(x) \otimes \gamma(y) + 1 \otimes \gamma(x), \tilde{\Delta}(y) = \gamma(y) \otimes \gamma(y)$, donde $\gamma : \otimes(W_o) \to U_q(W_o)$ proyección natural. Como

$$\tilde{\Delta}(x)\tilde{\Delta}(y) = q\tilde{\Delta}(y)\tilde{\Delta}(x)$$

$\tilde{\Delta}$ anula al generador de $J(W_o)$, luego $\tilde{\Delta}$ induce un morfismo de F-álgebras

$$\begin{aligned} \Delta : U_q(W_o) \to U_q(W_o) \otimes_F U_q(W_o),\; &\gamma(x) \mapsto \gamma(x) \otimes \gamma(y) + 1 \otimes \gamma(x), \\ &\gamma(y) \mapsto \gamma(y) \otimes \gamma(y). \end{aligned}$$

Para mostrar coasociativad basta probarla en los generadores $\gamma(x), \gamma(y)$:

$$\begin{aligned} (Id \otimes \Delta)\Delta(\gamma(x)) &= \gamma(x) \otimes \gamma(y) + 1 \otimes \gamma(x) \otimes \gamma(y) + 1 \otimes 1 \otimes \gamma(x) \\ &= (\Delta \otimes Id)\Delta(\gamma(x)), \\ (Id \otimes \Delta)\Delta(\gamma(y)) &= \gamma(y) \otimes \gamma(y) \otimes \gamma(y) \\ &= (\Delta \otimes Id)\Delta(\gamma(y)). \end{aligned}$$

Ahora se definen los elementos de F, $\epsilon(x) = 0, \epsilon(y) = 1, \epsilon(1) = 1$. Lo que induce un morfismo de F-álgebras $\tilde{\epsilon} : \otimes(W_o) \to F$ que anula al generador de $J(W_o)$: $\tilde{\epsilon}(x)\tilde{\epsilon}(y) = q\tilde{\epsilon}(y)\tilde{\epsilon}(x) = 0$, por lo que a su vez $\tilde{\epsilon}$ induce un morfismo de F-álgebras

$$\epsilon : U_q(W_o) \to F,\; \epsilon(\gamma(x)) = 0, \epsilon(\gamma(y)) = 1, \epsilon(1) = 1.$$

Resulta que ϵ es counidad para Δ. Y así el plano cuántico $A^{2|0}$ es una biálgebra. Sin embargo no es una álgebra de Hopf debido a que si η fuera una antípoda, se debería cumplir $\alpha(Id\otimes\eta)\Delta(\gamma(y)) = \epsilon(\gamma(y))1$, lo cual es equivalente a $\gamma(y)\eta(\gamma(y)) = 1$, i.e., $\gamma(y)$ tiene que ser invertible, lo cual no es así. La forma más obvia de resolver tal problema es adjuntar de alguna manera al plano cuántico el elemento y^{-1} y luego definir $\eta(y) = y^{-1}$. De hecho es un procedimiento de ésta clase el que se tuvo que hacer para obtener el siguiente corolario.

Corolario 6 *Sean, C campo de cocientes de k_t,*

$$W_o = \langle X, Y, H, K, K^{-1}, K^2, K^{-2} \rangle_C.$$

Consideremos a W_o como una q-álgebra de Lie. Entonces en la C-álgebra asociativa $U_q(W_o)$ se cumplen las siguientes relaciones:

$$\gamma(X \otimes Y) - \gamma(Y \otimes X) = \gamma(\tfrac{K^2 - K^2}{q^2 - q^{-2}})$$
$$\gamma(H \otimes X) - \gamma(X \otimes H) = 2\gamma(X), \gamma(H \otimes Y) - \gamma(Y \otimes H) = -2\gamma(Y),$$
$$\gamma(K^i \otimes K^j) = \gamma(K^j \otimes K^i),\ i, j = \pm 1, \pm 2$$
$$\gamma(K \otimes X) = \gamma(q^2 X \otimes K), \gamma(K \otimes Y) = \gamma(q^{-2} Y \otimes K)$$

donde $\gamma : \otimes(W_o) \to U_q(W_o)$ proyección natural. Además una C-base para $U_q(W_o)$ la forman los elementos

$$\gamma(X^{\otimes a} Y^{\otimes b} H^{\otimes c} K^{\otimes d} (K^{-1})^{\otimes e} (K^2)^{\otimes f} (K^{-2})^{\otimes g})$$

•

donde a, b, c, d, e, f, g son enteros no negativos.

Lo que sigue es mostrar como las relaciones del corolario inmediato anterior definen una k_t-deformación del producto del álgebra envolvente universal de $sl_2(k)$.

Tomemos W_o, B como en el corolario inmediato anterior. Definimos para $v, w \in W_o$, n, m enteros no negativos, los siguientes elementos de $\otimes(W_o)$:

$$v^0 = 1,$$
$$v^{\otimes n} = \underbrace{v \otimes_C \ldots \otimes_C v}_{n-\text{veces}},$$
$$v^{\otimes n} w^{\otimes m} = v^{\otimes n} \otimes w^{\otimes m}$$

$$p(K, n, m) = \frac{q^{4n} K^2 - q^{-4n} K^{-2}}{q^2 - q^{-2}} + \frac{q^{4(n-1)} K^2 - q^{-4(n-1)} K^{-2}}{q^2 - q^{-2}} + \ldots$$
$$+ \frac{K^2 - K^{-2}}{q^2 - q^{-2}} + \frac{q^{-4} K^2 - q^4 K^{-2}}{q^2 - q^{-2}} + \ldots + \frac{q^{-4m} K^2 - q^{4m} K^{-2}}{q^2 - q^{-2}}$$

Lema 26 *Sean a, b, c, d, e números naturales.*

i)

$$\gamma(H^{\otimes c} \otimes X) \in \langle \gamma(X \otimes H^{\otimes c}), \gamma(X \otimes H^{\otimes (c-1)}), \ldots, \gamma(X \otimes H), \gamma(X) \rangle_{k_t}$$

ii)

$$\gamma(H^{\otimes c}\otimes X^{\otimes d})\in\langle\gamma(X^{\otimes d}\otimes H^{\otimes c}),\gamma(X^{\otimes d}\otimes H^{\otimes(c-1)}),\ldots,$$
$$\gamma(X^{\otimes d}\otimes H),\gamma(X^{\otimes d})\rangle_{k_t}$$

iii)

$$\gamma(H^{\otimes a}\otimes Y^{\otimes b})\in\langle\gamma(Y^{\otimes b}\otimes H^{\otimes a}),\gamma(Y^{\otimes b}\otimes H^{\otimes(a-1)}),\ldots,$$
$$\gamma(Y^{\otimes b}\otimes H),\gamma(Y^{\otimes b})\rangle_{k_t}$$

iv) $\gamma(p(K,n,m)\otimes X)=\gamma(X\otimes p(K,n+1,m-1))$;
v) $\gamma(p(K,n,m)\otimes Y)=\gamma(Y\otimes p(K,n-1,m+1))$.

Dem.-i) Si $c=1$ la pertenencia es obvia. Supongamos $c>1$. Por hipótesis de inducción,

$$\gamma(H^{\otimes(c-1)}\otimes X)\in\langle\gamma(X\otimes H^{\otimes(c-1)}),\gamma(X\otimes H^{\otimes((c-2)}),\ldots,$$
$$\gamma(X\otimes H),\gamma(X)\rangle_{k_t},$$

luego,

$$\gamma(H^{\otimes c}\otimes X)\in\langle\gamma(H\otimes X\otimes H^{\otimes(c-1)}),\gamma(H\otimes X\otimes H^{\otimes((c-2)}),\ldots,$$
$$\gamma(H\otimes X\otimes H),\gamma(X)\rangle_{k_t}$$

pero como $\gamma(H\otimes X)=\gamma(X\otimes H)+\gamma(2X)$, se obtiene el resultado.

ii) Por inducción sobre d. Si $d=1$, es el inciso i. Ahora supongamos $d>1$, y

$$\gamma(H^{\otimes c}\otimes X^{\otimes(d-1)})\in\langle\gamma(X^{\otimes(d-1)}\otimes H^{\otimes c}),\gamma(X^{\otimes(d-1)}\otimes H^{\otimes(c-1)}),\ldots,$$
$$\gamma(X^{\otimes(d-1)}\otimes H),\gamma(X^{\otimes(d-1)})\rangle_{k_t}.$$

Luego

$$\gamma(H^{\otimes c}\otimes X^{\otimes d})\in\langle\gamma(X^{\otimes(d-1)}\otimes H^{\otimes c}\otimes X),\gamma(X^{\otimes(d-1)}\otimes H^{\otimes(c-1)}\otimes X),$$
$$\ldots,\gamma(X^{\otimes(d-1)}\otimes H\otimes X),\gamma(X^{\otimes d})\rangle_{k_t},$$

pero según i,

$$\gamma(X^{\otimes(d-1)}\otimes H^{\otimes c}\otimes X)\in\langle\gamma(X^{d}\otimes H^{\otimes c}),\gamma(X^{d}\otimes H^{\otimes(c-1)}),$$
$$\ldots,\gamma(X^{d}\otimes H),\gamma(X^{d})\rangle_{k_t},$$

$$\gamma(X^{\otimes(d-1)}\otimes H^{\otimes(c-1)}\otimes X)\in\langle\gamma(X^{d}\otimes H^{\otimes(c-1)}),\gamma(X^{d}\otimes H^{\otimes((c-1)-1)}),$$
$$\ldots,\gamma(X^{d}\otimes H),\gamma(X^{d})\rangle_{k_t}$$

etcétera. De donde se sigue la afirmación.

iii) Análoga a ii.

iv)

$$
\begin{aligned}
&\gamma(p(K,n,m)\otimes X) = \\
&\frac{1}{q^2-q^{-2}}\gamma(\,q^{4n}K^2\otimes X - q^{-4n}K^{-2}\otimes X + q^{4(n-1)}K^2\otimes X \\
&-q^{-4(n-1)}K^{-2}\otimes X + \ldots + K^2\otimes X - K^{-2}\otimes X \\
&+q^{-4}K^2\otimes X - q^4K^{-2}\otimes X + \ldots + q^{-4m}K^2\otimes X - q^{4m}K^{-2}\otimes X\,) \\
&= \frac{1}{q^2-q^{-2}}\gamma(\,q^{4(n+1)}X\otimes K^2 - q^{-4(n+1)}X\otimes K^{-2} + \ldots \\
&+X\otimes K^2 - X\otimes K^{-2} + \ldots \\
&+q^{-4m+4}X\otimes K^2 - q^{4m-4}X\otimes K^{-2}\,) \\
&= \gamma(X\otimes p(K,n+1,m-1))
\end{aligned}
$$

v) Análoga a iv.

Lema 27 *i) Para a natural,*

$$Y^{\otimes a}\otimes X = X\otimes Y^{\otimes a} - Y^{\otimes(a-1)}\otimes p(K,0,a-1).$$

ii) Sea

$$P = \langle p(K,n_1,z_1)\otimes\ldots\otimes p(K,n_m,z_m) \mid n_i, z_i \text{ no negativos, } m\rangle_{k_1}.$$

Entonces, para a,b naturales,

$$\gamma(Y^{\otimes a}X^{\otimes b}) = \sum_{i=1,j=1}^{a,b}\gamma(X^{\otimes i}Y^{\otimes j}\otimes p_{i,j})$$

para ciertos $p_{i,j}\in P$.

Dem.- i) Por inducción sobre a. Si $a=1$:

$$\gamma(Y\otimes X) \;=\; \gamma(X\otimes Y) - p(K,0,0)$$

Ahora supongamos $a>1$ y

$$\gamma(Y^{\otimes(a-1)}\otimes X) = \gamma(X\otimes Y^{\otimes(a-1)}) - \gamma(Y^{\otimes(a-2)}\otimes p(K,0,a-2)).$$

$$
\begin{aligned}
\gamma(Y^{\otimes a}\otimes X) &= \gamma((Y\otimes X)\otimes Y^{\otimes(a-1)}) - \gamma(Y^{\otimes(a-1)}\otimes p(K,0,a-2)) \\
&= \gamma(X\otimes Y^{\otimes a}) - \gamma(p(K,0,0)\otimes Y^{\otimes(a-1)})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& -\gamma(Y^{\otimes(a-1)} \otimes p(K,0,a-2)) \\
= \; & \gamma(X \otimes Y^{\otimes a}) - \gamma(Y^{\otimes(a-1)} \otimes \frac{q^{-4(a-1)}K^2 - q^{4(a-1)}K^{-2}}{q^2 - q^{-2}}) \\
& -\gamma(Y^{\otimes(a-1)} \otimes p(K,0,a-2)) \\
= \; & \gamma(X \otimes Y^{\otimes a}) - \gamma(Y^{\otimes(a-1)} \otimes p(K,0,a-1))
\end{aligned}
$$

ii) Por inducción sobre b. Si $b = 1$ tenemos el inciso i. Exhibamos el paso inductivo.

$$
\begin{aligned}
\gamma(Y^{\otimes a} X^{\otimes b+1}) &= \gamma(Y^{\otimes a} X^{\otimes b} \otimes X) \\
&= \sum_{i=1,j=1}^{a,b} \gamma(X^{\otimes i} Y^{\otimes j} \otimes p_{i,j} \otimes X) \\
&= \sum_{i=1,j=1}^{a,b} \gamma(X^{\otimes i} Y^{\otimes j} X \otimes p'_{i,j})
\end{aligned}
$$

para ciertos $p'_{i,j} \in P$, por lema 26, pag. 125. Utilizando el inciso i, se obtiene,

$$
\gamma(Y^{\otimes a} X^{\otimes b+1}) = \sum_{i=1,j=1}^{a,b} \gamma(X^{\otimes(i+1)} Y^{\otimes j} \otimes p'_{i,j} - X^{\otimes i} Y^{\otimes j} \otimes p(K,0,j-1) \otimes p'_{i,j})
$$

Demostración de teorema 25, pag. 107.- Según el teorema 26, pag. 121, los elementos

$$
\gamma(X^{\otimes a} Y^{\otimes b} H^{\otimes c} K^{\otimes d} (K^{-1})^e (K^2)^f (K^{-2})^g)
$$

a,b,c,d,e,f,g enteros no negativos forman una C-base para $\otimes(W_o)/J(W_o)$, donde $\gamma : \otimes(W_o) \rightarrow \otimes(W_o)/J(W_o)$ proyección natural. Por lo que si $z \in \otimes(W_o)/J(W_o)$ se puede escribir

$$
z = \sum_{a,b,c,d,e,f,g} c_{a,b,c,d} \gamma(X^{\otimes a} Y^{\otimes b} H^{\otimes c} K^{\otimes d} (K^{-1})^e (K^2)^f (K^{-2})^g)
$$

donde $c_{a,b,c,d,e,f,g} \in C$ estan determinados unívocamente por z. Sean, U el álgebra envolvente universal de $\mathcal{G} = sl_2(k)$, $V = C \otimes_{k_t} U_t$. Definimos entonces $g : \otimes(W_o)/J(W_o) \rightarrow V$ por

$$
g(z) = \sum_{a,b,c,d,e,f,g} c_{a,b,c,d} X^a Y^b H^c K^{d-e+2f-2g}.
$$

Definimos además para a,b,c,n,m,l enteros no negativos, y para los básicos $X^a Y^b H^c, X^n Y^m H^l$ en el álgebra envolvente universal U de $\mathcal{G} = sl_2(k)$,

$$
\alpha_t(X^a Y^b H^c, X^n Y^m H^l) = g(\gamma(X^{\otimes a} Y^{\otimes b} H^{\otimes c} \otimes_C X^{\otimes n} Y^{\otimes m} H^{\otimes l})) \qquad (5.37)
$$

$\alpha_t(X^aY^bH^c, X^nY^mH^l) \in U_t$ porque según lemas 26, pag. 125 y 27, pag. 126,

$$\begin{aligned}
\alpha_t(X^aY^bH^c, X^nY^mH^l) &= g(\gamma(X^{\otimes a}Y^{\otimes b}\sum_{i=0}^{c} r_i X^{\otimes n}H^{\otimes i}Y^{\otimes m}H^{\otimes l})) \\
&= \sum_{i=0}^{c} r_i g(\gamma(X^{\otimes a}Y^{\otimes b}X^{\otimes n}(H^{\otimes i}Y^{\otimes m})H^{\otimes l})) \\
&\qquad \text{para algunos } r_i \in k_t, \\
&= \sum_{i=0,j=0}^{c,i} r_i s_j g(\gamma(X^{\otimes a}(Y^{\otimes b}X^{\otimes n})Y^{\otimes m}H^{\otimes j}H^{\otimes l})) \\
&\qquad \text{para algunos } s_j \in k_t, \\
&= \sum_{i=0,j=0}^{c,l} r_i s_j g(\gamma(X^{\otimes a}(\sum_{u,v} X^{\otimes u}Y^{\otimes v} \otimes p_{u,v})Y^{\otimes m}H^{\otimes j}H^{\otimes l})) \\
&\qquad \text{para algunos } p_{u,v} \in P, \text{(ver lema 27, pag. 126)}, \\
&= \sum_{i=0,j=0}^{c,l} r_i s_j g(\gamma(\sum_{u,v} X^{\otimes(a+u)}Y^{\otimes(v+m)} \otimes p'_{u,v} H^{\otimes(j+l)})) \\
&\qquad \text{para algunos } p'_{u,v} \in P, \\
&= \sum_{i=0,j=0}^{c,l} r_i s_j \sum_{u,v} g(\gamma(X^{\otimes(a+u)}Y^{\otimes(v+m)}H^{\otimes(j+l)}p'_{u,v})) \\
&= \sum_{i=0,j=0}^{c,l} r_i s_j \sum_{u,v} X^{a+u}Y^{v+m}H^{j+l}p'_{u,v} \qquad (5.38)
\end{aligned}$$

donde ahora cada $p'_{u,v} \in P_0$, con $P_0 \subseteq C \otimes_{k_t} U_t$ y

$$P_0 = (p(K, n_1, z_1)\dots p(K, n_m, z_m) \mid n_i, z_i \text{ no negativos}, m)_{k_t}.$$

Aún más, como cada sumando de $P(K, n, m)$,

$$\frac{q^j K^2 - q^{-j}K^{-2}}{q^2 - q^{-2}} \in U_t$$

entonces cada $p(K, n_i, z_i) \in U_t$ y así, $P_0 \subseteq U_t$. En consecuencia, de 5.38,

$$\alpha_t(X^aY^bH^c, X^nY^mH^l) \in U_t.$$

Por lo que α_t se puede extender de manera t-bilineal a $\alpha_t : U_t \times U_t \to U_t$.

α_t es asociativa porque en los generadores,

$\alpha_t(\alpha_t(X^aY^bH^c, X^nY^mH^l), X^uY^vH^w)$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha_t(\textstyle\sum_{i,j,r,s} c_{i,j,r,s} X^i Y^j H^r K^s, X^u Y^v H^w) \\
&= \textstyle\sum_{i,j,r,s} c_{i,j,r,s} \sum_{u=0}^{\infty} \alpha_t(X^i Y^j H^r \frac{(\mu s H)^u}{u!}, X^u Y^v H^w) t^u \\
&= \textstyle\sum_{i,j,r,s} c_{i,j,r,s} \sum_{u=0}^{\infty} g(X^{\otimes i} Y^{\otimes j} H^{\otimes r} \frac{(\mu s H)^{\otimes u}}{u!} \otimes X^{\otimes u} Y^{\otimes v} H^{\otimes w}) t^u
\end{aligned}
$$

pero

$$
\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{u=0}^{\infty} g(X^{\otimes i} Y^{\otimes j} H^{\otimes r} \frac{(\mu s H)^{\otimes u}}{u!} \otimes X^{\otimes u} Y^{\otimes v} H^{\otimes w}) t^u \\
&\qquad - g(X^{\otimes i} Y^{\otimes j} H^{\otimes r} K^{\otimes s} \otimes X^{\otimes u} Y^{\otimes v} H^{\otimes w}) \equiv 0 \pmod{t^n}
\end{aligned}
$$

para todo n no negativo. Por lo que,

$$
\begin{aligned}
&\alpha_t(\alpha_t(X^a Y^b H^c, X^n Y^m H^l), X^u Y^v H^w) \\
&\qquad = g(\textstyle\sum_{i,j,r,s} c_{i,j,r,s} X^{\otimes i} Y^{\otimes j} H^{\otimes r} K^{\otimes s} \otimes X^{\otimes u} Y^{\otimes v} H^{\otimes w}) \\
&\qquad = g(X^{\otimes a} Y^{\otimes b} H^{\otimes c} \otimes X^{\otimes n} Y^{\otimes m} H^l \otimes X^{\otimes u} Y^{\otimes v} H^{\otimes w}).
\end{aligned}
$$

Similarmente,

$$
\begin{aligned}
&\alpha_t(X^a Y^b H^c, \alpha_t(X^n Y^m H^l, X^u Y^v H^w)) \\
&\qquad = g(X^{\otimes a} Y^{\otimes b} H^{\otimes c} \otimes X^{\otimes n} Y^{\otimes m} H^l \otimes X^{\otimes u} Y^{\otimes v} H^{\otimes w})
\end{aligned}
$$

por lo que α_t es asociativa sobre U, y por ende sobre U_t.

Para que α_t sea deformación sólo resta hacer ver que $\alpha_t|_{t=0}$ sea el producto de U. Pero,

$$\alpha_t(X,Y) - \alpha_t(Y,X) = senh\,(\mu H t)/senh\,(\mu t),$$

$$\alpha_t(H,X) - \alpha_t(X,H) = 2X, \ \alpha_t(H,Y) - \alpha_t(Y,X) = -2Y$$

que en $t = 0$ son las relaciones que definen al álgebra envolvente universal U de $\mathcal{G} = sl_2(k)$. Por lo que $\alpha_t|_{t=0}$ es el producto de U.

Construyamos ahora la comultiplicación. Definimos,

$$\Delta_t : U \to U_t \otimes_{k_t} U_t, \ X^m Y^n H^l \mapsto \Delta_t(X)^m \Delta_t(Y)^n \Delta_t(H)^l$$

donde los valores de $\Delta_t(X), \Delta_t(Y), \Delta_t(H)$, estan dados en el enunciado del inciso ii del teorema 25, pag. 107. Extendiendo por k_t-linealidad se obtiene,

$$\Delta_t : U_t \to U_t \hat{\otimes}_{k_t} U_t \simeq U_t \otimes_{k_t} U_t.$$

En particular, para s entero, $\Delta_t(K^s) = K^s \otimes K^s$, como ya antes se calculó. Probemos que Δ_t es morfismo de álgebras.

Ahora U_t está equipado con α_t deformación del producto de U. Extendiendo coeficientes α_t induce una estructura de C-álgebra sobre V. Con tal estructura consideremos a $V \otimes_C V$ como C-álgebra. Por otro lado, Δ_t induce de manera natural un morfismo C-lineal, $W_o \to V \otimes_C V$ el cual se extiende a un morfismo de C-álgebras

$$\tilde{\Delta}_t : \otimes(W_o) \to V \otimes_C V,\ u_1 \otimes \ldots \otimes u_n \mapsto \Delta_t(u_1)\ldots\Delta_t(u_n).$$

Obsérvese que $J(W_o)$ está generado por

$$\begin{gathered} X \otimes Y - Y \otimes X - \tfrac{K^2 - K^2}{q^2 - q^{-2}} \\ H \otimes X - X \otimes H - 2X, H \otimes Y - Y \otimes H - 2Y, \\ K^i \otimes K^j - K^j \otimes K^i,\ i,j = \pm 1, \pm 2 \\ K \otimes X - q^2 X \otimes K, K \otimes Y - q^{-2} Y \otimes K, \end{gathered}$$

y que $\tilde{\Delta}_t$ los anula (por la discusión anterior sobre la deducción de Δ_t). Así $\tilde{\Delta}_t$ induce

$$\tilde{\tilde{\Delta}}_t : \otimes(W_o)/J(W_o) \to V \otimes_C V,\ \gamma(u_1 \otimes \ldots \otimes u_n) \mapsto \Delta_t(u_1)\ldots\Delta_t(u_n)$$

morfismo de C-álgebras asociativas bien definido. Utilizando 5.37, pag. 127,

$$\begin{aligned} \Delta_t(\alpha_t(X^aY^bH^c, X^mY^nH^l)) &= \Delta_t(\sum_{i,j,r,s} c_{i,j,r,s} X^iY^jH^rK^s) \\ &= \sum_{i,j,r,s} c_{i,j,r,s} \Delta_t(X)^i \Delta(Y)^j \Delta_t(H)^r \Delta(K)^s \end{aligned}$$

donde

$$\gamma(X^{\otimes a}Y^{\otimes b}H^{\otimes c} \otimes_C X^{\otimes m}Y^{\otimes n}H^{\otimes l}) = \sum_{i,j,r,s} c_{i,j,r,s}\gamma(X^{\otimes i}Y^{\otimes j}H^{\otimes r}K^{\otimes s})$$

por lo que

$$\begin{aligned} \Delta_t(\alpha_t(X^aY^bH^c, X^mY^nH^l)) &= \tilde{\tilde{\Delta}}_t(\gamma(X^{\otimes a}Y^{\otimes b}H^{\otimes c} \otimes_C X^{\otimes m}Y^{\otimes n}H^{\otimes l})) \\ &= \tilde{\tilde{\Delta}}_t(\gamma(X^{\otimes a}Y^{\otimes b}H^{\otimes c}))\tilde{\tilde{\Delta}}_t(\gamma(X^{\otimes m}Y^{\otimes n}H^{\otimes l})) \\ &= \Delta_t(X^aY^bH^c)\Delta_t(X^mY^nH^l) \end{aligned}$$

de donde se sigue que Δ_t es de k_t-álgebras.

Como Δ_t es morfismo de álgebras, para hacer ver coasociativa, sólo hay que hacerlo ver en los generadores H, X, Y, lo cual se cumple por construcción. Similarmente se trata la counidad. Veamos ahora la antípoda. Como

$$\begin{gathered} (X \otimes K)(K^{-1} \otimes X) = q^4(K^{-1} \otimes X)(X \otimes K), \\ (Y \otimes K)(K^{-1} \otimes Y) = q^{-4}(K^{-1} \otimes Y)(Y \otimes K) \end{gathered}$$

(análogamente a 5.21, pag. 104),

$$
\begin{aligned}
&\alpha_t(Id\otimes\eta_t)\Delta_t(X^nY^mH^l)\\
&= \alpha_t(Id\otimes\eta_t)(X\otimes K+K^{-1}\otimes X)^m(Y\otimes K+K^{-1}\otimes Y)^n\\
&\qquad (H\otimes 1+1\otimes H)^l\\
&= \sum_{i=0,j=0,u=0}^{m,n,l}\left[\begin{matrix} m\\ i\end{matrix}\right]_{q^t}\left[\begin{matrix} n\\ j\end{matrix}\right]_{q^{-t}}\binom{l}{u}\alpha_t(Id\otimes\eta_t)(K^{-1}\otimes X)^i\\
&\qquad (X\otimes K)^{m-i}(K^{-1}\otimes Y)^j(Y\otimes K)^{n-j}(H\otimes 1)^u(1\otimes H)^{l-u}\\
&= \sum_{i=0,j=0,u=0}^{m,n,l}\left[\begin{matrix} m\\ i\end{matrix}\right]_{q^t}\left[\begin{matrix} n\\ j\end{matrix}\right]_{q^{-t}}\binom{l}{u}\alpha_t(Id\otimes\eta_t)\\
&\qquad (K^{-i}X^{m-i}K^jY^{n-j}H^u\otimes X^iK^{m-i}Y^jK^{n-j}H^{u-l})\\
&= \sum_{i=0,j=0,u=0}^{m,n,l}\left[\begin{matrix} m\\ i\end{matrix}\right]_{q^t}\left[\begin{matrix} n\\ j\end{matrix}\right]_{q^{-t}}\binom{l}{u}\alpha_t q^{2(m-i)j}(Id\otimes\eta_t)\\
&\qquad (K^{-i}X^{m-i}K^jY^{n-j}H^u\otimes X^iY^jH^{u-l}K^{m-i+n-j}\\
&= \sum_{i=0,j=0,u=0}^{m,n,l}\left[\begin{matrix} m\\ i\end{matrix}\right]_{q^t}\left[\begin{matrix} n\\ j\end{matrix}\right]_{q^{-t}}\binom{l}{u}q^{2(m-i)j}\\
&\qquad K^{-i}X^{m-i}K^jY^{n-j}H^u(-1)^{i+j+l-u}q^{2(i-j)}H^{u-l}K^{m-i+n-j}Y^jX^i\\
&= \sum_{i=0,j=0,u=0}^{m,n,l}\left[\begin{matrix} m\\ i\end{matrix}\right]_{q^t}\left[\begin{matrix} n\\ j\end{matrix}\right]_{q^{-t}}q^{2(m-i)j}q^{2(i-j)}\\
&\qquad K^{-i}X^{m-i}K^jY^{n-j}(-1)^{i+j}(H-H)^uK^{m-i+n-j}Y^jX^i\\
&= 0,
\end{aligned}
$$

es decir,

$$\alpha_t(Id\otimes\eta_t)\Delta_t = u_t\epsilon_t$$

ó equivalentemente, Id_{A_t} tiene inverso derecho en el álgebra $Hom_{k_t}(A_t,A_t)$ (producto por convolución). Pero el inverso de Id_{A_t} existe y es por definición la antípoda, (recordar que en las deformaciones las antípodas se cuidan solas). En conclusión η_t es tal antípoda.

Referencias

[1] Delius, G.W. Huffmann, A. *On Quantum Lie Algebras and Quantum Root Systems.* Preprint q-alg/9506017. Jun. 1995.

[2] Drinfeld, V.G. *Quantum Groups.* Proceedings of the International Congress of Mathemathics. Berkeley. 1987. **Yang-Baxter Equation in Integrable Systems.** Advanced Series in Mathematical Physics. Vol. 10. Michio Jimbo Editor. World Scientific. Singapore. 1989.

[3] Frappat, L., Sciarrino S., Sciuto, S., Sorba, P., *Anyonic Realization of the Quantum Affine Lie Algebra $U_q(\widehat{A_{n-1}})$.* Preprint hep-th/9511013. Nov. 1995.

[4] Fuks, D.B., **Cohomology of Infinite-Dimensional Lie Algebras.** Consultants Bureau. New York. 1986.

[5] Gerstenhaber, M. Schack, S. D. *Algebraic Cohomology and Deformation Theory.* **Deformation Theory of Algebras and Structures and Applications.** NATO ASI series. Kluwer Academic Press. The Netherlands. 1988.

[6] Gerstenhaber, M. Schack, S. D. *Algebras, Bialgebras, Quantum Groups, and Algebraic Deformations.* **Deformation Theory and Quantum Groups with Applications to Mathematical Physics.** Contemporary Mathematics. Vol. 134. American Math. Society. Rhode Island. 1992

[7] Gerstenhaber, M. Schack, S. D. *On the Deformation of Algebra Morphisms and Diagrams.* Trans. Amer. Math. Soc. 279. (1983) 1-50.

[8] Hilton, P.J. Stammbach, U. **A Course In Homological Algebra.** Springer-Verlag. New York. 1970.

[9] Hochschild, G.P. **Basic Theory of Algebraic Groups and Lie Algebras.** Springer-Verlag. New York. 1981.

[10] Humphreys, James E. **Introduction to Lie Algebras and Representation Theory.** Springer-Verlag. New York. 1994

[11] Manin, Yu. I. **Quantum Groups and Non-Commutative Geometry** Lecture Notes/Notes de Cours. Les Pubicationes CRM. Université de Montréal. Canada. 1988

[12] Matsumura, H. **Commutative ring theory.** Cambridge University Press, Cambridge. 1986

[13] Pierce, R. S. **Associative Algebras.** Springer-Verlag. New York. 1982.

[14] Pressley, A. Vyjayanthi, C. *Notes on Quantum Groups.* Nuclear Physics B (Proc. Suppl.).pp 207-228. North-Holland. 1990

[15] Stewart, I. **Lie Algebras.** LNM 127. Springer-Verlag. Berlin. 1970

[16] Sudbery, A. *Quantum Lie Algebras of type A_n.* Preprint q-alg/9510004. Oct. 1995.

[17] Sze-Tsen Hu. **Introducción al Álgebra Homológica.** vincens-vives. España. 1974.

[18] Takhtajan, L.A. *Lectures on Quantum Groups.* **Introduction to Quantum Group and Integrable Massive Models of Quantum Field Theory.** Nankai Lectures on Mathematical Physics . Ge, Mo-Lin. Bao-Heng, Zao (Editors). World Scientific. Singapore. 1990