8
2-4j

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PROPUESTA DEL CONTENIDO Y DESARROLLO DE UN CURSO DE OPCIONES EN LA FACULTAD DE CIENCIAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

CARLOS ARMENDARIZ ANIEVAS

DIRECTOR DE TESIS: M. EN C. RICARDO MEDINA ALVAREZ

MEXICO, D. F. 1996

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVPNºMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: "Propuesta del Contenido y Desarrollo de un curso de Opciones en la Facultad de Ciencias"

realizado por Carlos Armendáriz Anievas

con número de cuenta 8935120-2, pasante de la carrera de Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario M. en C. Ricardo Medina Alvarez

Propietario M. en C. Agustín Ontiveros Pineda

Propietario Act. María del Pilar Alonso Reyes

Suplente Act. Claudia Carrillo Quiroz Claudia Carrillo Q.

Suplente Act. Gerardo Loredo Fuentes

Claudia Carrillo Q.
Consejo Departamental de Matemáticas
Act. Claudia Carrillo Quiroz

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a todas las personas que me apoyaron para realizar el presente trabajo, a quienes con todo respeto y cariño lo dedico.

A mis padres:

Carlos Armendáriz Carrillo
Sara Anievas de Armendáriz

" Por la enorme confianza y el gran amor que siempre me han dado. Porque son mi ejemplo a seguir "

A mi abuelita:

Leopoldina Carrillo Canseco

" Porque de ella he aprendido a ver la vida con optimismo "

A mis hermanas:

Jésica Armendáriz Anievas
Sara P. Armendáriz Anievas
Guadalupe Armendáriz Anievas

" Su consejos, su apoyo y su amor me alientan a seguir siempre adelante "

A mis amigos y compañeros:

"Porque la verdadera amistad es el mejor equipo que se puede tener en la vida. Gracias "

Un particular agradecimiento a las personas que me brindaron parte de su tiempo, conocimiento y experiencia incondicionalmente:

M en C. Ricardo Medina Alvarez
M en C. Agustín Ontiveros Pineda
Act. María del Pilar Alonso Reyes
Act. Claudia Carrillo Quiroz
Act. Gerardo Loredo Fuentes

A la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)

" Por el invaluable tesoro que me ha dado "

A todos los profesores de la Facultad de Ciencias

" Por su paciencia "

PROPUESTA DEL CONTENIDO Y DESARROLLO DE UN CURSO DE *OPCIONES* EN LA FACULTAD DE CIENCIAS

ÍNDICE

" Donde el mundo cese de ser el escenario de nuestras esperanzas y deseos personales, donde lo afrontemos como seres libres, admirando, preguntando y observando, ahí entraremos al reino del Arte y de la Ciencia "

Albert Einstein.

INTRODUCCIÓN

OBJETIVO DE LA TESIS

En la última década, se ha visto una verdadera explosión en el número y volumen de nuevos instrumentos financieros en todos lo mercados mundiales, así como también el riesgo se ha convertido en uno de los términos más populares dentro del ámbito financiero. Esto quiere decir que la preocupación por cubrirse de variaciones en tasas de interés, tipos de cambio, precios de cierto producto, etc. ha creado la necesidad de utilizar estos instrumentos financieros con los cuales, inversionistas, banqueros e instituciones financieras hacen frente al riesgo de mercado.

Debido a la gran importancia que tienen las **Opciones** actualmente en las finanzas internacionales, y a lo que representan para las grandes instituciones, un instrumento de cobertura contra el riesgo de mercado, se ha considerado necesario realizar un trabajo que permita entender mejor su funcionamiento así como sus diversas aplicaciones. De este modo, la finalidad es plantear una "Propuesta del contenido y desarrollo de un curso de Opciones en la Facultad de Ciencias" y que se convierta en un curso "Introductorio", pero que al mismo tiempo abarque a dicho instrumento de manera "extensa" (suficiente) y con cierto nivel de formalidad. Para lo cual, es necesario tener un poco de nociones sobre ciertas áreas que son fundamentales para el análisis y desarrollo del tema. Específicamente las áreas que tienen que ver por ejemplo, con la valuación de las opciones son: un poco de probabilidad y estadística, álgebra, cálculo diferencial e integral y ecuaciones diferenciales. Sin olvidar que las opciones son un instrumento financiero, así que la teoría financiera juega también un papel muy importante.

La teoría utilizada para el análisis de las opciones se basa principalmente en dos conceptos:

1. ***El valor presente***
2. ***La volatilidad***

Al valuar las opciones, los dos conceptos anteriores pueden ser interpretados de la siguiente manera:

1. ***¿Cuánto vale hoy?***
2. ***¿Cuánto y cómo se mueven las variables que determinan su valor?***

La respuesta a estas preguntas es siempre matemática, pues la primera se refiere al área de las matemáticas financieras y la segunda requiere de un conocimiento en las áreas ya antes mencionadas. De aquí la idea de proponer un curso de opciones en la Facultad de Ciencias, ya que el nivel de matemáticas que en ella se imparte es el necesario y facilita, en cierto modo, el análisis y comprensión de las opciones, las cuales por su complejidad no son tan fáciles de abordar.

El desarrollo de las opciones ha tenido lugar, en su mayor parte, fuera del mundo de habla hispana (Nueva York, Londres y Tokio) y es en cierto modo un acontecimiento reciente, de tal modo que no existe aún una terminología completa equivalente en español; por lo tanto, cuando sea necesario, se mantendrá el uso de alguno de los términos en inglés, y en otros casos, aparecerá el término en español con su equivalencia en inglés entre paréntesis.

ORGANIZACIÓN

Los capítulos han sido estructurados de manera que el lector, al terminar el curso, cuente con las herramientas básicas para el desarrollo y aplicación de las Opciones, tomando en consideración que será necesario ampliar los conocimientos sobre el tema, si es que después de este curso nace el interés de dedicarse más formalmente al estudio de las Opciones.

Siendo así, en el primer capítulo se definen los términos que están más relacionados con el análisis de las opciones y que se utilizan frecuentemente en los demás capítulos. Otras definiciones se refieren a los tipos de riesgo que existen dentro del mundo financiero así como a los tipos de mercados que existen, en donde se pueden negociar las opciones. Además, el capítulo contiene los antecedentes históricos de dicho instrumento.

El segundo capítulo está constituido en general, por la estructura principal de un contrato de opción, los tipos de contratos que existen, así como las posibles posiciones que un inversionista puede tomar en el contrato. También, se muestran gráficamente los perfiles de pérdidas/ganancias y a medida que se va desarrollando el capítulo, se manejan ejemplos para facilitar la teoría.

El tercer capítulo consta principalmente del análisis y desarrollo de los métodos y modelos para valuar las opciones, específicamente el modelo Binomial y la fórmula Black-Scholes, para lo cual, se introducen conceptos como el del valor intrínseco y extrínseco, los límites del valor de una opción, la paridad put-call, algunas propiedades estadísticas y funciones de probabilidad estrictamente necesarias para el desarrollo del tema. Igualmente, se muestran algunos ejemplos.

En el capítulo cuarto se analizan los parámetros principales de las opciones (concepto de griegas). En el capítulo quinto y último se describen las principales estrategias con opciones que se manejan en los mercados mundiales.

CAPÍTULO 1 : DEFINICIONES PREVIAS

Para tener un panorama más amplio en el estudio y análisis de las opciones, es necesario dar algunas definiciones:

Opción[1]**:** Es un contrato que otorga el derecho mas no la obligación de comprar o vender cierta cantidad de un activo o bien subyacente a un determinado precio, en un determinado día y bajo ciertas características.

1. 1 RIESGO

Riesgo:

1) Inseguridad susceptible o no de ser medida.
2) Posibilidad de que el rendimiento esperado de una inversión no se materialice.
3) Matemáticamente el **riesgo** puede ser visto como: **La desviación estándar de la función de distribución de rendimiento.**

Riesgo de Mercado: Las pérdidas potenciales a futuro como consecuencia de movimientos aleatorios del mercado, que asumen propiedades estadísticas.

1. 1 . 1 CLASIFICACIÓN DEL RIESGO

Dentro del área financiera, los riesgos pueden clasificarse de la siguiente manera:

CLASIFICACIÓN DE LOS RIESGOS		
RIESGOS INTRÍNSECOS	**RIESGOS EXTRÍNSECOS**	
Riesgo Crediticio	**Riesgo de Mercado**	• **Riesgo Cambiario** • **Riesgo de Tasas de Interés** • **Riesgo de Precios**
Riesgo de Liquidez	**Riesgo de Producción**	
	Otros (inflación, una guerra, etc.)	

Tabla 1.1

RIESGOS INTRÍNSECOS: *Son los riesgos propios de la actividad de una compañía, es decir, no susceptibles de cobertura:*

Riesgo Crediticio: *Las pérdidas potenciales debido a la incapacidad de la contraparte de cumplir con sus obligaciones.* Supóngase una compañía fabricante de chamarras de piel, esta compañía adquiere pieles y diseños, emplea obreros y renta instalaciones para producir las chamarras con la expectativa de venderlas a un precio superior a su costo de elaboración.

---

[1] En el segundo capítulo se trata con detalle las características principales de un contrato de opción.

Ahora bien, esta compañía puede llegar a tener problemas relacionados con la fabricación y venta de las chamarras de piel, su capacidad para enfrentar dichos problemas determina su solvencia o riesgo crediticio.

Riesgo de Liquidez: *La incapacidad de una compañía de invertir sus bienes que no tienen liquidez.*
Liquidez: Un bien puede ser más o menos líquido según su mayor o menor facilidad en ser cambiado por otro, con pocas transferencias intermedias y con poca pérdida o sin ella. Se dice también que el grado de liquidez de un bien depende de la facilidad de cambiarlo en dinero.

RIESGOS EXTRÍNSECOS: *Son aquellos en los que la compañía no tiene ningún control, es decir, son los que se atribuyen al comportamiento de la economía en general (que afectan a cualquier empresa):*

Riesgo Cambiario: *El riesgo de una variación en las ganancias netas como resultado de movimientos en un cierto tipo de cambio.*
Tipo de Cambio: Precio relativo de una moneda que se expresa en términos de unidad de otra moneda.
Tipo de Cambio Cruzado: Es el tipo de cambio implícito en las cotizaciones de otros dos tipos de cambio.Por ejemplo, si se tiene las cotizaciones **USD/DM** y **USD/JY**, entonces la cotización implicita está dada por : **(USD/DM) / (USD/JY) = JY/DM .**

Riesgo de Tasas de Interés: *El riesgo de una variación en las ganancias netas como resultado de cambios en las tasas de interés.*

Riesgo de Precios: *El riesgo a cambios adversos en los precios de ciertas materias primas*, es decir, la incertidumbre sobre el nivel que pueden alcanzar los precios a futuro.

Riesgo de Producción: *La incertidumbre sobre la cantidad que será vendida o comprada de algún producto o materia prima en un futuro.*

1. 2 TIPOS DE MERCADO

Los Mercados Extrabursátiles ("Over-the-Counter" (OTC)): *Son mercados en donde los contratos se negocian de forma bilateral y el riesgo de incumplimiento (riesgo crediticio) es asumido por ambas partes.* Los contratos son hechos según la situación y conveniencia del comprador y vendedor (no estandarizados), proporcionan una cobertura mejor, ya que son hechos ***"a medida"***.

Los Mercados "Organizados" (Exchanges): *La principal diferencia con los mercados (OTC) radica en que en los Mercados Organizados existe una* ***cámara de compensación*** *que se interpone entre ambas partes y que asume el riesgo crediticio del mercado de opciones.* Los contratos son negociados a través de la cámara de compensación y son

hechos según los lineamientos que el mercado establece (estandarizados en términos de vencimiento, precio, cantidad y tipo de contrato).
Cámara de Compensación(Clearinghouse): Es la entidad que se encarga de asegurar a los participantes del contrato que sus derechos podrán ser ejercidos independientemente de la situación financiera de la contraparte, es decir, asume el riesgo crediticio, para lo cual exige depósitos de garantía(margen o clearing margins).

1. 3 PARTICIPANTES DEL MERCADO DE OPCIONES

Cubridor del Riesgo: *Es la persona o institución que realiza operaciones de* ***cobertura.***
Cobertura: *Protegerse contra el riesgo de mercado,* es decir, protegerse contra cambios adversos en precios, tasas de interés y tipos de cambio.

Especulador: *Es la persona o institución que realiza operaciones de* ***especulación.***
Especulación: *Asumir posiciones con el propósito de obtener utilidades que resulten de movimientos del mercado.*
Función en el Mercado: Proporcionar información al mercado de un posible comportamiento a futuro.

Arbitrajista: *Es la persona o institución que realiza operaciones de* ***arbitraje.***
Arbitraje: *El arbitraje se define como la compra y venta simultánea de un bien o activo en distintos lugares, lo cual permite explotar ganancias sin riesgos debido a la discrepancia de precios.*
Función en el Mercado: Mantener el nivel de los precios en los diferentes mercados y frenar posibilidades de fuertes fluctuaciones o disparos, así como tendencias a cambios bruscos en las cotizaciones.
Arbitraje espacial: *Aprovecha las discrepancias en las cotizaciones de los* ***tipos de cambio.***
Arbitraje triangular: *La diferencia con el arbitraje espacial radica en identificar el tipo de* ***cambio cruzado.***

Intermediarios: Los intermediarios pueden ser **corredores de opciones comerciadas en bolsa (mercados organizados)** y **operadores de opciones del mercado extrabursátil (OTC)**. Los primeros, a cambio de una comisión, reciben órdenes de los clientes para comprar o vender opciones; también pueden operar por cuenta propia. Los segundos, son los bancos comerciales y bancos de inversión que en todo momento están dispuestos a comprar o vender estos instrumentos a un cierto precio.

1. 4 ANTECEDENTES HISTÓRICOS DE LAS OPCIONES

Los contratos de opción son una de las piezas fundamentales de un mercado financiero moderno. En países como España y Francia, las opciones se asocian con las reformas de los mercados de valores y su negociación es un síntoma de la modernización de los mercados de dichos países.

La idea de que las opciones equivalen a innovación financiera en realidad oculta una larga historia, pues si se retrocede en el tiempo, se encontrará que los fenicios, los griegos y los romanos negociaban contratos con cláusulas de opción sobre las mercancías que transportaban en sus naves. Por ejemplo, Katz (1990) describe la anécdota de la importante ganancia que obtuvo el famoso filósofo, matemático y astrónomo griego Thales, invirtiendo en opciones sobre << aceitunas >> basándose en una previsión acertada de la cosecha.

El primer mercado de opciones con cierto nivel de << organización >> aparece en Holanda en el siglo XVII. En dicho mercado se negociaban opciones a comprar o vender bulbos de tulipán en una fecha futura predeterminada. Mediante estos contratos, los comerciantes holandeses se aseguraban el precio de compra de las partidas de tulipanes que deberían servir a sus clientes en el futuro y los agricultores podían comprar el derecho a vender su cosecha futura a un precio predeterminado (opciones de venta). En 1640, el mercado conoció una época de fuertes oscilaciones de precios que provocó la quiebra de muchos especuladores y el incumplimiento de compromisos de otros en las opciones que habían vendido, lo que extendió la idea en Europa de que los mercados de opciones eran muy peligrosos y excesivamente especulativos. En 1688 un judío español asentado en Amsterdam, José de la Vega[2], publicó el libro "Confusión de Confusiones" en el que describe las costumbres y prácticas en vigor en la Bolsa de Amsterdam. Describe en detalle el funcionamiento del mercado a plazo ("forward") sobre acciones como las de la entonces muy importante Dutch East India Company y en particular muestra el primer testimonio escrito sobre el uso de opciones sobre acciones, además de la etimología de la propia palabra **opción:**

"Llamáronle los Flamencos *Opsie*, derivado del verbo latino *Optio Optionis*, que significa elección, por quedar a elección del que lo da el poder pedir o entregar la partida al que lo recibe... pues desea el que desembolsa el premio elegir lo que más le convenga, y en falta siempre puede dejar de elegir lo que desea."

José de la Vega muestra también el siguiente ejemplo:

" Están las acciones al presente precio de 580; parécenos que por el gran retorno que se espera de la India, aumento de la Compañía, reputación de los géneros, repartición (dividendo) que se promete, y paz de la Europa subirán a mucho mayor número del que logran. No me delibero, sin embargo, a comprar partidas efectivas, por que temo que si me faltaren estos designios podrá alcanzarme un despeño o sucederme un desaire. Llégome pues a los que dicen que toman estas opciones, propóngoles cuánto quieren por quedarme obligados a entregar cada partida a 600; hasta tal plazo, ajusto el premio, escríbolo luego en el banco y sé que no puedo perder más de lo que desembolso, con que todo lo que suben de 600, gano, y lo que bajen no me sirve de ansia para el juicio, ni de inquietud para la honra, ni de sobresalto para el sosiego; si llegando a 600, poco más o menos, mudo de opinión y penetro que no se halla todo tan pomposo como se entendía, vendo las partidas sin peligro,

[2]El primer tratado que analizó estos contratos es de José de la Vega en su obra *Confusión de Confusiones*, editada en 1688 y traducida posteriormente a varios idiomas.

porque todo lo que bajen es ganancia, y como el que recibió el dinero está obligado a entregármelas al precio acordado, aunque suban de él, no puedo sentir otra pérdida que la de la opción, ni llorar otro castigo que el del premio".

A principios del siglo XVIII, en Inglaterra comenzaron a negociarse opciones sobre las acciones de las principales compañías comerciales. El escándalo provocado por la fuerte caída de precios de la South Sea Company en el otoño de 1720, atribuido en parte a la especulación con opciones sobre acciones de esta compañía, ocasionó que el mercado de opciones fuese declarado ilegal. Esta prohibición estuvo vigente hasta el inicio del siglo XX, aunque también es cierto que se siguieron haciendo operaciones sobre opciones de forma semiclandestina.

Mientras tanto, en América (E.U.), las operaciones con opciones también fueron prohibidas. En 1936, las opciones sobre mercancías básicas (options on commodities o commodity options) tales como algodón, trigo, arroz, maíz, avena, cebada, centeno, linaza, mantequilla, huevos y papas no podían ser comercializadas. La lista continuó creciendo dando como resultado la desaparición de las opciones sobre mercancías básicas (commodities) en los mercados de Estados Unidos. Sin embargo, este tipo de opciones continuó prosperando en Londres, encontrándose opciones sobre cocoa, café, plata, azúcar, cobre y zinc. A principios de 1970, la popularidad de las opciones de Londres se había extendido.

La semilla que germinó en las opciones bursátiles se plantó en 1968, cuando el Chicago Board of Trade, mejor conocido por sus contratos de futuros, comisionó un estudio para explorar la posibilidad de ofrecer contratos de futuros sobre acciones de bolsa, pero el estudio no recomendó contratos a futuro, sino opciones sobre acciones. Así surgió el Chicago Board Options Exchange (CBOE) en 1972 que, en abril del siguiente año, comenzó a comercializar opciones sobre acciones de bolsa, iniciando con 16 opciones tipo call, es decir, opciones de compra sobre 16 acciones que figuran en el índice del New York Stock Exchange (NYSE).

El mercado de opciones que se comercian en bolsa tuvo un éxito espectacular. A sólo cinco años de su inicio, el CBOE negociaba diariamente diez millones de opciones sobre acciones. En 1975, se adhirieron otras cuatro importantes bolsas de valores de los Estados Unidos de Norteamérica: Amex, Philadelphia, Pacific y MidWest y en 1977, se comenzaron a negociar opciones tipo put, es decir, opciones de venta. Actualmente sólo se necesita echar un vistazo a un ejemplar del Wall Street Journal para ver las cotizaciones diarias al cierre de las 200 opciones sobre acciones del CBOE (tanto de compra como de venta), además del S&P 100 Stock Index (de las llamadas *blue chips* o acciones selectas, las 100 acciones más cotizadas del New York Stock Exchange) y opciones sobre bonos de la Tesorería de Estados Unidos. El volumen promedio diario actual de los contratos comerciados en el CBOE es cercano a la impresionante cifra de 500 mil contratos.

En octubre de 1982, el Chicago Board of Trade comenzó a negociar opciones sobre contratos a futuro de T-Bonds (los instrumentos que reflejan las tasas de interés de largo plazo en Estados Unidos). Estas primeras opciones sobre futuros resultaron un éxito debido a que los participantes las utilizaron para especular, aunque también para cubrir sus posiciones en el mercado de futuros de T-Bonds y sus exposiciones al riesgo de tasas de interés en dólares.

En mayo de 1985, el Index and Options Division del Chicago Mercantile Exchange introdujo opciones sobre su contrato a futuro en depósitos de **eurodólares**[3]. En un lapso de tiempo muy corto, estas opciones alcanzaron cifras impresionantes, con un volumen promedio diario en 1990 de 27 113 contratos.

Las opciones comerciadas en bolsa sobre divisas aparecieron después de las opciones sobre futuros de T-Bonds y antes de las correspondientes a futuros de eurodólares. Sin embargo, no lo hicieron en los innovadores mercados de futuros de Chicago, sino en el Philadelphia Stock Exchange (PHLX). Esta bolsa negocia opciones sobre las ocho divisas más importantes en el mercado de cambios interbancario: yen, marco alemán, libra esterlina, franco suizo, franco francés, dólar canadiense, dólar australiano y ECU (European Currency Unit). Dichas divisas se cotizan en términos del dólar estadounidense.

Así, se puede observar que el desarrollo de las opciones, ya sea en el mercado Over-The-Counter (OTC) o en los mercados organizados, tiene una larga e interesante historia tanto en el continente Europeo (principalmente Inglaterra y Holanda) así como en el continente Americano (principalmente en los Estados Unidos). A pesar de los problemas tan grandes que se han originado debido a la comercialización de opciones, a tal grado que ha sido prohibida, actualmente los mercados de opciones se encuentran regulados por la Securities Exchange Commission (SEC) y por la Commodity Futures Trading Commission (CFTC).

[3]Un eurodólar es un dólar depositado en un banco de los Estados Unidos o en un banco foráneo, pero dichos bancos están fuera de los Estados Unidos. La tasa de interés del eurodólar (Eurodollar interest rate) es la tasa de interés ganada sobre los eurodólares depositados por un banco con otro banco. También es conocida como la tasa LIBOR (London Interbank Offer Rate).

CAPÍTULO 2: EL CONTRATO DE OPCIÓN: CARACTERÍSTICAS BÁSICAS

¿Qué es una Opción?

Una Opción es un contrato que otorga a su poseedor el derecho, mas no la obligación, de comprar o vender cierta cantidad de un activo o bien subyacente a un determinado precio, en un determinado día y bajo ciertas características. Para adquirir este derecho, el comprador de la opción (poseedor) paga una **prima** al vendedor de la opción (o emisor de la opción). Cuando el poseedor ejerce su derecho de comprar o vender, el emisor tiene la **obligación** de vender o comprar cierta cantidad del activo subyacente al precio acordado, entonces, se dice que **la opción ha sido ejercida.**

De acuerdo con la definición anterior, existen dos posibilidades en un contrato de opción:

Contrato	*Comprador de la Opción*	*Vendedor de la Opción*
POSIBILIDAD 1	derecho a comprar	obligación de vender
POSIBILIDAD 2	derecho a vender	obligación de comprar

Por lo tanto, existen dos tipos de contratos de opciones, los cuales se conocen como:

Contrato	*Comprador de la Opción*	*Vendedor de la Opción*
Contrato tipo *Call*	derecho a comprar	obligación de vender
Contrato tipo *Put*	derecho a vender	obligación de comprar

Antes de continuar con la explicación de las dos clases de contratos de opciones que existen, es necesario definir las siguientes variables, las cuales son parte fundamental para el análisis y valuación de dichos contratos, además de ser el complemento para acabar de definir lo que es un contrato de opción:

Precio de Ejercicio (Strike Price): Es el precio de compra o de venta del activo o bien subyacente, garantizado en el contrato de opción al momento en que se ejerce el derecho adquirido.

Fecha de Expiración (expiration date): Es la última fecha en la cual puede ejercerse la opción.

Activo o bien subyacente (underlying asset): Las opciones pueden ser sobre índices accionarios, acciones, divisas, tasas de interés, contratos de futuros, swaps, bienes de consumo (café, cocoa, arroz, centeno, trigo, maíz, etc.), materias primas (petróleo, oro, plata, zinc, cobre, etc.) y ganado. Al conjunto formado por los bienes de consumo y materias primas se le conoce como ***commodities (mercancías básicas)*** y cualquier elemento de la lista anterior es un *activo* o *bien subyacente.* Incluso se pueden encontrar **opciones sobre**

opciones, que sería un contrato que otorga a su poseedor el derecho, mas no la obligación, de **comprar** o **vender** un **contrato de opción** a un determinado **precio**, en un **determinado día** y **bajo ciertas características.**

Prima (premium): Es el precio o costo del contrato (precio de la opción).

Es importante aclarar que el derecho que una opción concede, algunas veces no es el derecho de comprar o vender un activo, sino simplemente el derecho a efectuar una transacción determinada a un periodo de tiempo dado. Esto se debe a que es imposible hacer una entrega fisica de un índice o un swap, por ejemplo, una opción sobre un swap es una transacción bilateral que representa intercambios de flujos de efectivo. En otros casos, la opción simplemente otorga el derecho a recibir una cantidad determinada de dinero si se dan una serie de circunstancias determinadas, en este caso se encuentran las opciones sobre índices accionarios (por ejemplo, un aumento del S&P500 por encima de cierto valor base). En cambio, sí se pueden entregar fisicamente ciertos bienes o activos, como por ejemplo: maíz, trigo, 100 acciones de TELMEX, dólares, etc..

2.1 EL CONTRATO TIPO *CALL* Y EL CONTRATO TIPO *PUT*

- ***El contrato tipo call* otorga a su poseedor el derecho, mas no la obligación, de *comprar* cierta cantidad de un activo o bien subyacente a un determinado precio, en un determinado día y bajo ciertas características.**

- ***El contrato tipo put* otorga a su poseedor el derecho, mas no la obligación, de *vender* cierta cantidad de un activo o bien subyacente a un determinado precio, en un determinado día y bajo ciertas características.**

Ejemplos:

CONTRATO TIPO CALL

Una opción call (call option) puede ser sobre **100 acciones de TELMEX (en las casas de bolsa de Estados Unidos, las opciones tienen que ser sobre lotes de 100 acciones)**, con un **precio de ejercicio de $40.** Supóngase que **el precio actual de la acción en el mercado (precio spot) es de $38** y la **fecha de expiración de la opción es el 15 de diciembre de 1996.** El **precio de la opción (prima) por adquirir una acción es de $5.** Si un **inversionista compró** esta opción, entonces su inversión inicial fue de $500 ($5 x 100). Si llegado el tiempo en que expira la opción, el precio de la acción para ese día es menor que $40, por ejemplo $25, el inversionista claramente escogerá no ejercer su derecho, pues no tendría sentido comprar a $40 una acción que tiene un valor de mercado de $25. Bajo estas circunstancias, el inversionista pierde completamente la inversión inicial de $500. Si el precio de la acción es mayor que $40 para ese día, el inversionista obviamente ejercerá su derecho. Supóngase que el precio de la acción muestra ser de $55 en el mercado de valores, ejerciendo la opción, el inversionista puede comprar 100 acciones a $40 por acción. Si las acciones son vendidas inmediatamente, el inversionista genera una ganancia de $15 por acción, o $1500 en total, sin tomar en cuenta costos de transacción. Cuando el costo inicial de la opción (prima) es tomado en cuenta, las ganancias netas para el inversionista son de $1000.

Existen casos en los que el inversionista, aunque ejerza la opción, experimentará pérdidas. Supóngase que en el ejemplo anterior, el precio de la acción de TELMEX para la fecha de expiración de la opción es de $42, el inversionista ejerceria la opción para así, tener una ganancia total de 100 × ($42 – $40) = $200. Considerando que tuvo una inversión inicial de $500 (pérdida total) entonces experimenta en realidad una pérdida neta de $300 y sus ganancias netas serían cero. Podría argumentarse que sería mejor que el inversionista no ejerciera la opción bajo estas circunstancias, sin embargo, el no ejercer la opción traería como consecuencia una pérdida neta de $500 (pues no habría ganancias totales), peor a los $300 del caso en que el inversionista ejerce la opción.

Por otro lado, **si el inversionista es el emisor de la opción,** es decir, el que vende (bajo las mismas condiciones del ejemplo anterior) y si se toma el caso en que el precio de la acción muestra ser de $55 y el comprador decide ejercer, **el inversionista estará obligado a vender 100 acciones a $40 por acción,** experimentando así una pérdida total de $1500. Considerando la inversión inicial de $500 que el comprador de la opción realiza, la pérdida neta del inversionista es de $1000. Cuando el comprador no ejerce, el inversionista tiene como ganancia neta la inversión de $500.

CONTRATO TIPO PUT

Una opción put (put option) puede ser **sobre 100 acciones de IBM,** con un **precio de ejercicio de $70.** Supóngase que **el precio actual de la acción en el mercado es de $65** y la **fecha de expiración de la opción es en tres meses.** El **precio de la opción put (prima) por vender una acción es de $7.** Si un **inversionista compró esta opción,** entonces su inversión inicial fue de $700. Si llegado el tiempo en que expira la opción put, el precio de la acción para ese día es menor que $70, el inversionista claramente escogerá ejercer su derecho, pues puede comprar en el mercado a un precio más bajo y vender más caro al ejercer su derecho. Por ejemplo, supóngase que el precio de la acción muestra ser de $55 al vencimiento de la opción, entonces, el inversionista puede comprar 100 acciones a $55 por acción en el mercado de valores, si el inversionista ejerce su derecho, genera una ganancia de $15 por acción, o $1500 en total (pues ejerce su derecho de vender a $70 cada acción) sin tomar en cuenta costos de transacción. Cuando el costo inicial de la opción es tomado en cuenta ($7 por acción), las ganancias netas para el inversionista son de $800. Si el precio de la acción al vencimiento de la opción es más alto que el precio de ejercicio, el inversionista no ejercerá su derecho (pues no tendría sentido comprar en el mercado más caras las acciones y ejercer su derecho para venderlas más baratas), bajo estas circunstancias, el inversionista pierde completamente la inversión inicial de $700.

Igual que en el contrato tipo call, algunas veces el inversionista ejerce la opción y sin embargo experimenta pérdidas. Supóngase que en el ejemplo anterior, el precio de la acción de IBM para la fecha de expiración de la opción es de $68, el inversionista ejercería la opción para así, tener una ganancia total de 100 × ($70 − $68) = $200, considerando la inversión inicial de $700 (pérdida total), experimenta en realidad una pérdida neta de $500. Es claro que el no ejercer la opción traería como consecuencia una pérdida neta de $700, peor que $500 cuando el inversionista ejerce la opción, así que bajo estas circunstancias, también se debe ejercer.

Si el **inversionista es el emisor de la opción** (bajo las mismas condiciones del ejemplo anterior) y si se toma el caso en que el precio de la acción muestra ser de $55 y el comprador decide ejercer, **el inversionista estará obligado a comprar 100 acciones a $70 por acción,** experimentando así una pérdida total de $1500. Considerando la inversión inicial de $700 que el comprador de la opción realiza, la pérdida neta del inversionista es de $800. Cuando el comprador no ejerce, el inversionista tiene una ganancia neta de $700.

Si se analiza un poco el desarrollo de los ejemplos que se han expuesto, con todas sus variantes y posibilidades, se pueden concluir dos cosas:

1) • **Una opción call será ejercida siempre que el precio de mercado del activo o bien subyacente (al vencimiento) supere el precio de ejercicio (ejerzo mi derecho para comprar barato y vendo caro en el mercado).** En otros casos no se ejercerá.

• **Una opción put será ejercida siempre que el precio de mercado del activo o bien subyacente (al vencimiento) esté por debajo del precio de ejercicio (compro barato en el mercado y ejerzo mi derecho para así vender caro).** En otros casos no se ejercerá.

De aquí se deriva cierta terminología relacionada con el precio de ejercicio y el precio del activo al vencimiento, que representa los estados en los que se pueden encontrar ambos contratos:

• Cuando el precio del activo subyacente es **mayor** que el precio de ejercicio al tiempo de expiración de la **opción call,** se dice que la opción está ***in-the-money,*** si es **igual** al precio de ejercicio, se dice que la opción está ***at-the-money*** y si es **menor** al precio de ejercicio, se dice que la opción está ***out-of-the-money.***

• Por el contrario, cuando el precio del activo subyacente es **mayor** que el precio de ejercicio al tiempo de expiración de la **opción put,** se dice que la opción está ***out-of-the-money,*** si es **igual** al precio de ejercicio, se dice que la opción está ***at-the-money*** y si es **menor** al precio de ejercicio, se dice que la opción está ***in-the-money.***

2) Existen dos posiciones que se pueden tomar en ambos contratos de opciones:

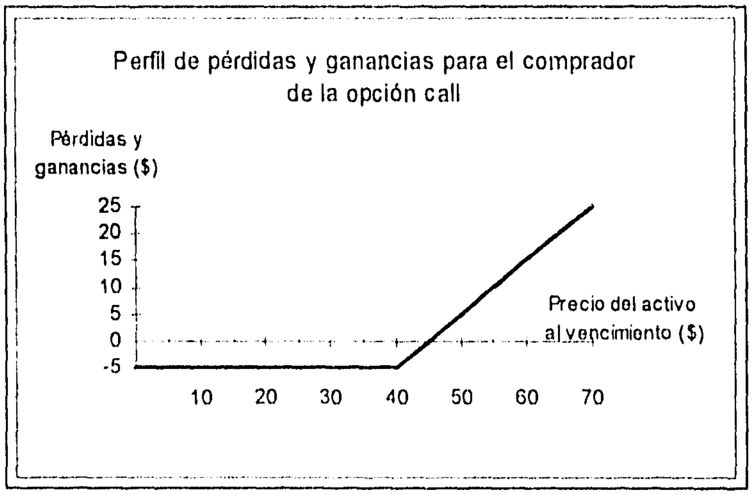
1.- Que el inversionista sea el *comprador* de la opción (o poseedor).
2.- Que el inversionista sea el *vendedor* de la opción (o emisor de la opción).

Cuando el inversionista es el **comprador**, se dice que toma una **posición larga (long position)** en un contrato de opción; cuando el inversionista es el **vendedor**, se dice que toma una **posición corta (short position)** en un contrato de opción.

Es interesante aclarar que ambas posiciones, la posición larga y la posición corta, tienen el **comportamiento de un juego de suma cero, pues lo que una posición gana (pierde), la otra lo pierde (gana)**, es decir, las ganancias (pérdidas) del inversionista que tiene la posición larga son las pérdidas (ganancias) del inversionista que tiene la posición corta.

A continuación, se muestra gráficamente los perfiles de pérdidas y ganancias de las dos posiciones que puede tomar el inversionista en los contratos tipo call y put. Las gráficas están basadas en los ejemplos antes mostrados:

POSICIÓN LARGA

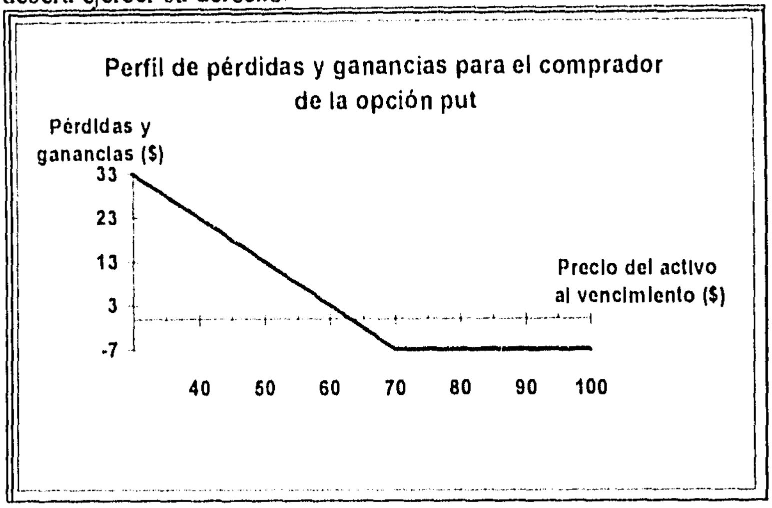


Gráfica 2.1

Como se puede observar en la gráfica 2.1, si el precio del activo al vencimiento es menor al precio de ejercicio, que se supuso de $40, el inversionista no ejerce su derecho, de tal modo que sus **pérdidas totales están limitadas por la prima de $5** por acción y sus ganancias totales son cero. Por otro lado, si el precio del activo es mayor que el precio de ejercicio, el inversionista ejerce su derecho logrando **ganancias totales que pueden ser muy grandes, en teoría ilimitadas**, aún considerando la inversión inicial de $500 (ó $5 por acción). Nótese en la misma gráfica lo siguiente:

- Aún cuando el precio del activo sea mayor que el precio de ejercicio, para que el inversionista experimente algún tipo de ganancias netas, es necesario que el precio del activo sea mayor que el **precio de ejercicio más la prima** (en este caso $40+$5=45). Si el precio del activo es igual a $45, el inversionista obtiene una ganancia total de $500. Considerando la inversión inicial de $500 (pérdida total), entonces su situación real queda en términos de no pérdidas no ganancias. Si el precio del activo es mayor que $40 pero menor que $45, el inversionista, aunque está ejerciendo, tendrá **pérdidas totales mayores que sus ganancias**

totales, así que sus ganancias netas serán cero y sus pérdidas netas serán menores de $500, que es mejor que perder los $500. De aquí que, siempre que el precio del activo o bien subyacente sea mayor que el precio de ejercicio, el poseedor de una posición larga en una opción call deberá ejercer su derecho.



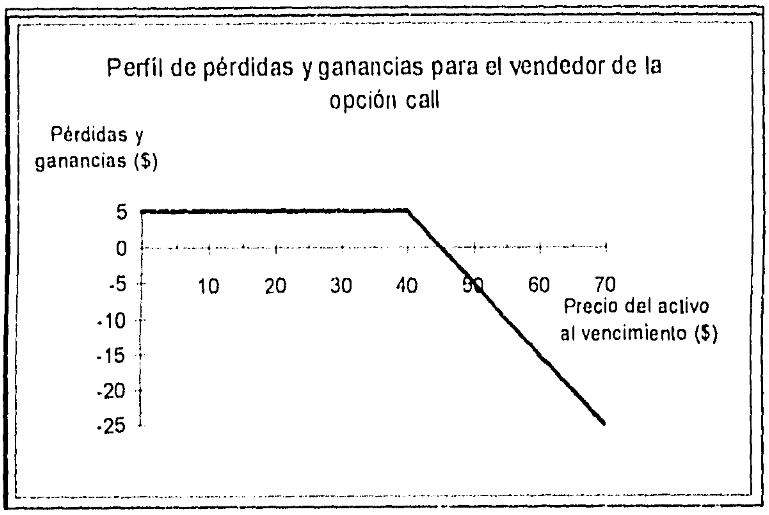
Gráfica 2.2

En la gráfica 2.2, si el precio del activo o bien subyacente es mayor al precio de ejercicio, que se supuso de $70, el inversionista no ejerce su derecho, de tal modo que sus **pérdidas totales están limitadas por la prima de $7** por acción y sus ganancias totales son cero. Si el precio del activo es menor que el precio de ejercicio, el inversionista ejerce su derecho logrando **ganancias que pueden ser grandes, pero limitadas**, además de descontarle a dichas ganancias la inversión inicial de $700 (ó $7 por acción). Es importante observar en la misma gráfica lo siguiente:

- Aunque el precio del activo sea menor que el precio de ejercicio, para que el inversionista experimente algún tipo de ganancias netas es necesario que el precio del activo sea **menor que el precio de ejercicio menos la prima** ($70-$7=$63). Si el precio del activo es igual $63, el inversionista obtiene una ganancia total de $700, considerando la inversión inicial de $700 (pérdida total), su situación real queda en términos de no pérdidas no ganancias. Si el precio del activo es menor que $70 pero mayor que $63, el inversionista, aunque está ejerciendo, tendrá **pérdidas totales mayores que sus ganancias totales,** así que sus pérdidas netas serán menores que $700 y sus ganancias netas serán cero. De aquí que, siempre que el precio del activo o bien subyacente sea menor que el precio de ejercicio, el poseedor de una posición larga en una opción put deberá ejercer su derecho.

POSICIÓN CORTA

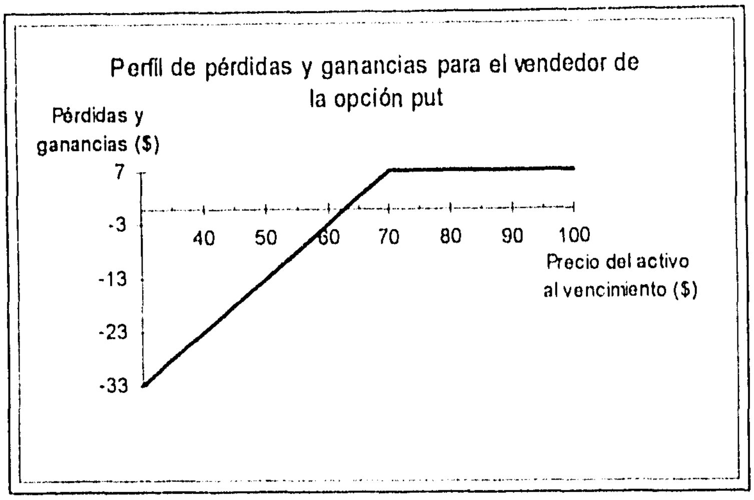
En la gráfica 2.3, si el precio del activo o bien subyacente es menor al precio de ejercicio, el inversionista (ahora vendedor de la opción call) gana a lo más la inversión inicial ($500 o $5 por acción) que el comprador de la opción realiza. Entonces, es claro que las **ganancias totales del inversionista están limitadas por la prima de $5** por acción y no tiene pérdidas totales pues el comprador no ejerce su derecho. Si el precio del activo es mayor que el precio de ejercicio, el comprador de la opción ejerce su derecho y el inversionista sufre **pérdidas totales que pueden ser muy grandes** (ya que tiene la obligación de entregar el activo al precio acordado), aún considerando la inversión inicial que representa una ganancia total de $500. **En teoría, dichas pérdidas pueden ser ilimitadas.**



Gráfica 2.3

Igual que en las posiciónes anteriores, es necesario hacer notar lo siguiente en la gráfica 2.3:

- Cuando el precio del activo es mayor que el precio de ejercicio, el comprador de la opción ejerce su derecho, entonces, el inversionista tiene la obligación de entregar el activo a un precio más bajo, pero sufrirá pérdidas siempre y cuando el precio del activo **sea mayor que el precio de ejercicio más la prima** ($40+$5=$45). Si el precio del activo es igual a 45, el inversionista experimenta una pérdida total de $500 y una ganancia total también de $500 por concepto de la inversión inicial del comprador, entonces, al igual que en las posiciones anteriores, su situación real queda en términos de no pérdidas no ganancias. Si el precio del activo es mayor que $40, pero menor que $45, el inversionista, aunque tiene la obligación de entregar el activo a un precio más bajo, **sus ganancias totales superan a sus pérdidas totales**, por lo tanto, sus ganancias netas serán menores a $500 y sus pérdidas netas serán cero.



Gráfica 2.4

En la gráfica 2.4, si el precio del activo o bien subyacente es mayor al precio de ejercicio, el inversionista (ahora vendedor de la opción call) gana a lo más la inversión inicial del comprador de la opción. Entonces, es claro que **las ganancias totales del inversionista están limitadas por la prima de $7** por acción y no tiene pérdidas totales pues el comprador no ejerce su derecho. Si el precio del activo es menor que el precio de ejercicio, el comprador de la opción ejerce su derecho y el inversionista sufre pérdidas que pueden ser muy grandes (ya que tiene la obligación de comprar el activo a un precio más elevado), aún cuando se considere la inversión inicial de $700, pero dichas **pérdidas son limitadas.** También se puede observar en la gráfica 2.4 lo siguiente:

• Si el precio del activo es menor que el precio de ejercicio, el comprador de la opción ejerce su derecho, entonces el inversionista, aunque tiene la obligación de comprar el activo a un precio más alto, sufrirá pérdidas siempre y cuando el precio del activo sea **menor que el precio de ejercicio menos la prima** ($70-$7=$63). Si el precio del activo es igual a 63, el inversionista experimenta una pérdida total de $700 y una ganancia total también de $700 por concepto de la inversión inicial del comprador, entonces, su situación real queda en términos de no pérdidas no ganancias. Si el precio del activo es menor que $70 pero mayor que $63, el inversionista tendrá **ganancias totales mayores que sus pérdidas totales**, por lo tanto, sus ganancias netas serán menores a $700 y sus pérdidas netas serán cero.

A continuación, se muestran dos tablas en donde se generalizan los posibles casos que puede encontrar un inversionista al tomar cualquiera de las dos posiciones en una opción call y put. Además, se hace una sustitución simultánea de los valores supuestos en los ejemplos que se han estado manejando a modo de facilitar las expresiones:

GENERALIZACIÓN PARA LA OPCIÓN CALL

Sea

X = Precio de ejercicio. (X = 40)
S = Precio actual del activo o bien subyacente en el mercado. (S = 38)
S_T = Precio del activo o bien subyacente al vencimiento. (S_T = ?)
c = Prima o precio de la opción. (c = 5)

Supónganse los siguientes valores para S_T: 25 , 42 , 55

CONTRATO TIPO CALL					
POSICIÓN LARGA (compra) **Sobre una acción**		**SIN TOMAR EN CUENTA COSTOS DE TRANSACCIÓN**			
Si	***Situación en el contrato***	***Ganancias totales***	***Pérdidas totales***	***Ganancias netas***	***Pérdidas netas***
$S_T < X$ (25 < 40)	No ejerce out-of-the-money	0	c (c = 5)	0	c (c = 5)
$S_T = X$ (40 = 40)	No ejerce at-the-money	0	c (c = 5)	0	c (c = 5)
$X < S_T < X+c$ (40 < 42 < 45)	Ejerce in-the-money	$(S_T - X)$ (42 − 40 = 2)	c (c = 5)	0 ver 1)	$c - (S_T - X)$ 5 - (42 - 40) = 3
$S_T = X+c$ (45 = 40 + 5)	Ejerce in-the-money	$(S_T - X)$ (45 − 40 = 5)	c (c = 5)	0 ver 2)	0
$S_T > X+c$ (55 > 40 + 5)	Ejerce in-the-money	$(S_T - X)$ (55 − 40 = 15)	c (c = 5)	$(S_T - X) - c$ (55 - 40) - 5 = 10	0 ver 3)
EXPECTATIVAS DEL MERCADO: Una fuerte alza en el precio del activo o bien subyacente.					
POSICIÓN CORTA (venta) **Sobre una acción**		**SIN TOMAR EN CUENTA COSTOS DE TRANSACCIÓN**			
Si	***Situación en el contrato***	***Ganancias totales***	***Pérdidas totales***	***Ganancias netas***	***Pérdidas netas***
$S_T < X$ (25 < 40)	No le ejercen out-of-the-money	c (c = 5)	0	c (c = 5)	0
$S_T = X$ (40 = 40)	No le ejercen at-the-money	c (c = 5)	0	c (c = 5)	0
$X < S_T < X+c$ (40 < 42 < 45)	Le ejercen in-the-money	c (c = 5)	$(S_T - X)$ (42 − 40 = 2)	$c - (S_T - X)$ 5 - (42 - 40) = 3	0 ver 1)
$S_T = X+c$ (45 = 40 + 5)	Le ejercen in-the-money	c (c = 5)	$(S_T - X)$ (45 − 40 = 5)	0	0 ver 2)
$S_T > X+c$ (55 > 40 + 5)	Le ejercen in-the-money	c (c = 5)	$(S_T - X)$ (55 − 40 = 15)	0 ver 3)	$(S_T - X) - c$ (55 - 40) - 5 = 10
EXPECTATIVAS DEL MERCADO: Una baja en el precio del activo o precios mas o menos estables.					

Tabla 2.1

POSICIÓN LARGA
1) Como $X < S_T < X+c \Rightarrow (S_T - X) < c$; quiere decir que las ganancias totales son menores a las pérdidas totales, por lo tanto, las ganancias netas son cero y las pérdidas netas son $= c - (S_T - X)$.
2) Como $S_T = X+c \Rightarrow (S_T - X) = c$; quiere decir que las ganancias totales son igual a las pérdidas totales, por lo tanto, las ganancias y pérdidas netas son cero.
3) Como $S_T > X+c \Rightarrow c < (S_T - X)$; quiere decir que las pérdidas totales son menores que las ganancias totales, por lo tanto, las pérdidas netas son cero y las ganancias netas $= (S_T - X) - c$.
POSICIÓN CORTA
1) Como $X < S_T < X+c \Rightarrow (S_T - X) < c$; quiere decir que las pérdidas totales son menores a las ganancias totales, por lo tanto, las pérdidas netas son cero y las ganancias netas son $= c - (S_T - X)$.
2) Como $S_T = X+c \Rightarrow (S_T - X) = c$; quiere decir que las pérdidas totales son igual a las ganancias totales, por lo tanto, las pérdidas y ganancias netas son cero.
3) Como $S_T > X+c \Rightarrow c < (S_T - X)$; quiere decir que las ganancias totales son menores que las pérdidas totales, por lo tanto, las ganancias netas son cero y las pérdidas netas $= (S_T - X) - c$.
Lo que representa para la posición larga ganancias, para la posición corta representa pérdidas y lo que representa pérdidas para la posición larga, son ganancias para la posición corta. Así que estrictamente son flujos de efectivo positivos y negativos.

continuación de la Tabla 2.1

GENERALIZACIÓN PARA LA OPCIÓN PUT

($X = 70$, $S = 65$, $c = 7$ y $S_T = 55, 68, 85$)

CONTRATO TIPO PUT					
POSICIÓN LARGA (compra) Sobre una acción		**SIN TOMAR EN CUENTA COSTOS DE TRANSACCIÓN**			
Si	***Situación en el contrato***	***Ganancias totales***	***Pérdidas totales***	***Ganancias netas***	***Pérdidas netas***
$S_T > X$ (85 > 70)	No ejerce out-of-the-money	0	c (c = 7)	0	c (c = 7)
$S_T = X$ (70 = 70)	No ejerce at-the-money	0	c (c = 7)	0	c (c = 7)
$X-c < S_T < X$ (63 < 68 < 70)	Ejerce in-the-money	$(X - S_T)$ (70 – 68 = 2)	c (c = 7)	0 ver 1)	$c - (X - S_T)$ 7 - (70 - 68) = 5
$S_T = X-c$ (63 = 70 – 7)	Ejerce in-the-money	$(X - S_T)$ (70– 63 = 7)	c (c = 7)	0 ver 2)	0
$S_T < X-c$ (55 < 70 – 7)	Ejerce in-the-money	$(X - S_T)$ (70 – 55 = 15)	c (c = 7)	$(X - S_T) - c$ (70 - 55) - 7 = 8	0 ver 3)
EXPECTATIVAS DEL MERCADO: Una fuerte caída en el precio del activo.					
POSICIÓN CORTA (venta) Sobre una acción		**SIN TOMAR EN CUENTA COSTOS DE TRANSACCIÓN**			
Si	***Situación en el contrato***	***Ganancias totales***	***Pérdidas totales***	***Ganancias netas***	***Pérdidas netas***
$S_T > X$ (85 > 40)	No le ejercen out-of-the-money	c (c = 7)	0	c (c = 7)	0
$S_T = X$ (70 = 70)	No le ejercen at-the-money	c (c = 7)	0	c (c = 7)	0
$X-c < S_T < X$ (63 < 68 < 70)	Le ejercen in-the-money	c (c = 7)	$(X - S_T)$ (70 – 68 = 2)	$c-(X - S_T)$ 7 - (70 - 68) = 5	0 ver 1)
$S_T = X-c$ (63 = 70 – 7)	Le ejercen in-the-money	c (c = 7)	$(X - S_T)$ (70 – 63 = 7)	0	0 ver 2)
$S_T < X-c$ (55 < 70 – 7)	Le ejercen in-the-money	c (c = 7)	$(X - S_T)$ (70 – 55 = 15)	0 ver 3)	$(X - S_T) - c$ (70 - 55) - 7 = 8
EXPECTATIVAS DEL MERCADO: Una alza en el precio del activo. También esta posición puede tener la expectativa de precios estables (variaciones mínimas).					

Tabla 2.2

POSICIÓN LARGA

1) Como $X - c < S_T < X \Rightarrow (X - S_T) < c$; quiere decir que las ganancias totales son menores a las pérdidas totales, por lo tanto, las ganancias netas son cero y las pérdidas netas son $= c - (X - S_T)$.

2) Como $S_T = X - c \Rightarrow (X - S_T) = c$; quiere decir que las ganancias totales son igual a las pérdidas totales, por lo tanto, las ganancias y pérdidas netas son cero.

3) Como $S_T < X - c \Rightarrow c < (X - S_T)$; quiere decir que las pérdidas totales son menores que las ganancias totales, por lo tanto, las pérdidas netas son cero y las ganancias netas $= (X - S_T) - c$.

POSICIÓN CORTA

1) Como $X - c < S_T < X \Rightarrow (X - S_T) < c$; quiere decir que las pérdidas totales son menores a las ganancias totales, por lo tanto, las pérdidas netas son cero y las ganancias netas son $= c - (X - S_T)$.

2) Como $S_T = X - c \Rightarrow (X - S_T) = c$; quiere decir que las pérdidas totales son igual a las ganancias totales, por lo tanto, las pérdidas y ganancias netas son cero.

3) Como $S_T < X - c \Rightarrow c < (X - S_T)$; quiere decir que las ganancias totales son menores que las pérdidas totales, por lo tanto, las ganancias netas son cero y las pérdidas netas $= (X - S_T) - c$.

Es fácil observar que lo que representa para la posición larga ganancias, para la posición corta representa pérdidas y lo que representa pérdidas para la posición larga, son ganancias para la posición corta. Estrictamente representan flujos de efectivo positivos y negativos.

continuación de la Tabla 2.2

En las tablas 2.1 y 2.2 se muestra de manera general e informal las pérdidas y ganancias de las dos posiciones que se pueden tomar en un contrato de opción call y put. Las tablas 2.3 y 2.4 muestran formalmente los pagos (flujos de efectivo) de las posiciones de cada contrato, **sin tomar en cuenta costos de transacción (por simplicidad):**

PAGOS DE UNA OPCIÓN CALL SIN CONSIDERAR COSTOS DE TRANSACCIÓN

Si **X** es el precio de ejercicio y S_T es el precio final (o el precio al momento de ejercer) del activo subyacente, los pagos de un posición larga en una opción call son:

$$\max(S_T - X, 0) - c$$

Esto refleja el hecho de que la opción será ejercida si $S_T > X$ y no será ejercida si $S_T \leq X$.

El resultado para la posición corta es entonces:

$$c - \max(S_T - X, 0)$$

$$\text{ó} \quad c + \min(X - S_T, 0)$$

Tabla 2.3

PAGOS DE UNA OPCIÓN PUT SIN CONSIDERAR COSTOS DE TRANSACCIÓN

Si **X** es el precio de ejercicio y S_T es el precio final (o el precio al momento de ejercer) del activo subyacente, los pagos de un posición larga en una opción call son:

$$\max(X - S_T, 0) - c$$

Esto refleja el hecho de que la opción será ejercida si $S_T > X$ y no será ejercida si $S_T \leq X$.

El resultado para la posición corta es entonces:

$$c - \max(X - S_T, 0)$$

$$\text{ó} \quad c + \min(S_T - X, 0)$$

Tabla 2.4

2.2 LAS OPCIONES *EUROPEAS* Y LAS OPCIONES *AMERICANAS*

Existe una distinción entre tipos de opción que concierne a las fechas en las que está permitido ejercer los derechos que la opción otorga:

Una opción *Europea* puede ser ejercida únicamente en *una sola fecha: su fecha de vencimiento*

Una opción *Americana* puede ser ejercida en *cualquier fecha* hasta su fecha de vencimiento.

Aunque en algunos casos su valor puede ser idéntico, en general las opciones americanas son más valiosas que las europeas, ambas sobre el mismo activo (mismo precio de ejercicio y misma fecha de vencimiento), dado que otorgan más derechos que las europeas. Una opción americana tiene que valer por lo menos, lo mismo que una opción europea análoga, porque si es ejercida hasta su vencimiento se comporta exactamente igual, además, es posible que tenga más valor porque en algunos casos puede resultar ventajoso ejercerla antes de su vencimiento.

La mayoría de las opciones que son comercializadas en bolsa son Americanas; sin embargo, las opciones Europeas son generalmente más fáciles de analizar y muchas de las propiedades de las opciones Americanas son frecuentemente deducidas del análisis de las Europeas.

2.3 EL DEPÓSITO DE GARANTÍA: *MARGEN*

El tipo estándar de margen que se utiliza en casi todas las bolsas es el conocido como **Premium Paid Options**. En este sistema, el único que está sometido a margen es el vendedor de la opción. Existe otro sistema de márgenes, The London International Financial Futures Exchange (LIFFE Margining System), donde tanto el comprador como el emisor de la opción están sujetos a margen (este margen es específicamente para opciones sobre futuros).

DEFINICIONES:

Cuenta de Margen (margin account): En los mercados organizados, al entrar en un contrato de opciones, los corredores de bolsa (brokers) requieren que el emisor de la opción deposite cierta cantidad de dinero en una cuenta de margen. Los corredores de bolsa a su vez deben mantener una cuenta de margen con la Cámara de Compensación.

Margen Inicial (initial margin): Es la cantidad de dinero que debe depositar el emisor de la opción en la cuenta de margen, en el momento en que se cierra el contrato con el comprador.

Revalorizar (marking to market): Al final de cada día de negociación, la cuenta de margen es ajustada para reflejar las pérdidas/ganancias del inversionista (emisor), según el precio final del activo subyacente para ese día con respecto al precio de ejercicio.

Margen de Mantenimiento (maintenance margin): Es una cierta cantidad de dinero establecida para garantizar que el balance en la cuenta de margen nunca llegue a ser negativa, este margen es menor al margen inicial.

Margen requerido (margin required): Es el margen inicial para los días subsecuentes según el precio del activo

Llamada a margen (margin call): Si el balance de la cuenta de margen cae por debajo del margen de mantenimiento, el inversionista recibe una llamada a margen para que actualice la cuenta de margen al valor del margen inicial para el siguiente día. Si el balance de la cuenta cae por debajo del margen requerido, el invercionista nuevamente recibe una llamada a margen para actualizar la cuenta hasta este margen.

Margen de Variación (variation margin): Es la cantidad extra depositada por el inversionista para actualizar la cuenta de margen. Si el inversionista no actualiza la cuenta con este margen, el corredor de bolsa cierra la posición vendiendo el contrato.

El sistema Premium Paid Options considera que dado que la máxima pérdida para el comprador de una opción está representada por el valor de la prima, sólo se requiere depósito de garantía (margen) por parte del emisor de la opción quien es el único que está expuesto a un mayor riesgo, es decir, requiere mantener una inversión (depósito) en la cuenta de margen debido a que el corredor del inversionista y la casa de cambio quieren estar seguros de que no dejará de pagar en caso de que la opción sea ejercida.

El monto del margen requerido para el emisor depende de las siguientes circunstancias:

- **Ser el emisor de Opciones al descubierto (Naked Options)**

Se dice que **una opción está al descubierto cuando el emisor de la opción no posee el activo o bien subyacente, es decir, no tiene una *posición compensatoria*[1] sobre el activo subyacente sobre el cual esta emitiendo la opción,** por ejemplo, en caso de que el comprador de una opción call decida ejercer su derecho, el emisor deberá salir al mercado y comprar en ese momento el bien subyacente, cuyo precio será más elevado de cuando emitió la opción, para entregarlo más barato.

El **margen inicial** es el resultado **mayor** de los siguientes dos cálculos:

1. Un total del 100% de las ganancias de la venta de la opción más el 20% del precio del activo o bien subyacente menos la cantidad por la cual la opción esta out-of-the money.

2. Un total del 100% de las ganancias de la venta de la opción más el 10% del precio del activo o bien subyacente (margen mínimo).

El **margen de mantenimiento** es calculado del mismo modo que el margen inicial, pero reemplazando las ganancias de la venta de la opción por el precio actual de la opción en el

[1] El emisor debe compensar su posición corta en la opción, adoptando una posición larga en el activo subyacente, en el caso de una call. En una put, el emisor compensa su posición corta en la opción, tomando una posición corta en el activo subyacente.

mercado. Para opciones sobre índices en general, el 20% de los cálculos anteriores es reemplazado por un 15%.

Ejemplo:

Un inversionista **emite** cuatro contratos de opciones tipo call sobre acciones de KODAK (hay que recordar que los contratos se negocian sobre lotes de 100 acciones). El precio de la opción por adquirir una acción es de **$5**, el precio de ejercicio es de **$40**, y el precio de una acción en el mercado es de **$38**.

Como la opción está **$2 out-of-the-money,** el primero de los dos cálculo da:

$$\boxed{400[5 + (0.2 \times 38) - 2] = 4{,}240}$$

El segundo cálculo da:

$$400[5 + (0.1 \times 38)] = 3{,}520$$

Por lo tanto, el ***margen inicial*** requerido es **$4,240**, ya que es el mayor de los dos resultados. Nótese que si la opción hubiera sido put, estaría **$2 in-the-money** y el margen inicial requerido sería:

$$400[5 + (0.2 \times 38)] = 5{,}040$$

El ***margen de mantenimiento*** está dado por el siguiente cálculo:

$$5 + 400[(0.2 \times 38) - 2] = 2{,}245\ ,$$

así que los $2,245 servirán para asegurar el balance de la cuenta de margen.

Supóngase ahora que las acciones de KODAK suben de **$38** a **$43** y el precio de la opción sube de **$5** a **$7**, entonces, el mercado exigiría automáticamente al vendedor ***(llamada a margen)*** un ***margen de variación*** según los siguientes cálculos:

$$\boxed{\textbf{1.}\ 400[7 + (0.2 \times 43)] = 6{,}240}$$

$$\textbf{2.}\ 400[7 + (0.1 \times 43)] = 4{,}520$$

Así que el ***margen requerido*** sería de **$6,240** y el **margen de variación** sería:

$$\$6{,}240 - \$4{,}240 = \mathbf{\$2{,}000}$$

Por el contrario, si la acción baja de $38 a $36 y la prima de $5 a $3, entonces, de acuerdo a los dos cálculos se tiene que:

1. $400[3 + (0.2 \times 36) - 4] = 2{,}480$

$$\boxed{\textbf{2. } 400[3 + (0.1 \times 36)] = 2{,}640}$$

El ***margen requerido*** es de **$2,640**, por lo tanto, se liberan **$1600** = $4,240 – $2,640 del depósito inicial.

En todos los casos, las ganancias por concepto de la venta de las opciones ($2000), pueden ser usadas para formar parte de la cuenta de margen.

- **Ser el emisor de Opciones cubiertas (Covered Options)**

Se dice que **una opción está cubierta cuando el emisor de la opción posee el activo o bien subyacente, es decir, tiene una *posición compensatoria* sobre el activo subyacente sobre el cual está emitiendo la opción.**

Emitir opciones cubiertas implica adquirir mucho menos riesgo que emitir opciones al descubierto, pues lo peor que puede pasar es que el emisor tenga que vender ciertas acciones que ya posee, a un precio menor al del mercado pero mayor al precio en que las compró al inicio del contraro.

Si las opciones cubiertas están out-of-the-money o in-the-money, no se requiere margen. Las acciones que ya posee el emisor pueden ser ***liquidadas mediante una cuenta de margen***[2], y la ganancia que el emisor recibe por la venta de las opciones puede ser utilizada como depósito para dicha cuanta.

Ejemplo:

Un inversionista decide comprar 200 acciones (toma una posición larga en las acciones) de GM (General Motors) mediante una cuenta de margen y emitir 2 opciones tipo call sobre las mismas acciones de GM. El precio de la acción es $63, el precio de ejercicio es de $60 y el precio de la opción es $7. La cuenta de margen le permite al inversionista pedir prestado el 50% del precio de la acción menos la cantidad por la cual la opción está in-the-money. En este caso, la opción esta $3 in-the-money, así que el emisor puede pedir prestado:

$$\mathbf{0.5(\$63 \times 200) - (3\$ \times 200) = \$5{,}700}$$

El emisor también puede usar las ganancias recibidas por la venta de la opción, $7 × 200, para depositarlas en la cuenta de margen de las acciones. Las acciones cuestan: **$63 × 200 = $12,600.** La cantidad mínima requerida por los corredores del emisor para la cuenta de margen de las acciones es:

$$\mathbf{\$12{,}600 - \$5{,}700 - \$1{,}400 = \$5{,}500}$$

[2] Cuando un inversionista compra acciones, puede liquidarlas ya sea pagando en efectivo o mediante una cuanta de margen. El margen inicial es comúnmente el 50% del valor de la acción y el margen de mantenimiento es usualmente el 25% del valor de las acciones.

CAPÍTULO 3 : VALUACIÓN DE LAS OPCIONES

En apartados anteriores se han manejado varios ejemplos en donde se han supuesto ciertos valores, entre ellos la prima (cantidad que debe pagar el comprador de la opción por adquirir el derecho de comprar o vender). Ahora corresponde determinar realmente cuál debe ser el valor de esa prima de acuerdo a las características de las opciones.

La valuación de las opciones es quizá uno de los temas más importantes, además de ser el más complicado. Como ya se mencionó en el capítulo anterior, las Opciones Europeas son más faciles de analizar y muchos de sus resultados sirven perfectamete para deducir y explicar las propiedades de las Opciones Americanas. Por lo tanto, este capítulo, estará enfocado principalmete al análisis de las **Opciones Europeas sobre acciones**, pues el trabajar con acciones también facilita su estudio. La valuación de las opciones sobre otros activos o bienes subyacentes, varía de las opciones sobre acciones principalmente en lo que se refiere a **margen** y **costos de transacción,** pero en términos generales, la base es la misma.

3.1 VALOR *INTRÍNSECO* Y VALOR *EXTRÍNSECO*

El valor (o la prima) de una opción se puede dividir en dos componentes:

- **El *Valor Intrínseco* (Intrinsec Value).**
- **El *Valor Extrínseco* (Extrinsec Value o Valor en el Tiempo (Time Value)).**

El **valor intrínseco** se puede definir como el **valor de ejercicio** que tendría una opción en un momento determinado, si se ejerce inmediatamente, es decir, **la cantidad por la cual la opción está in-the-money al momento en que el comprador adquiere la opción. En otros casos, el valor intrínseco será nulo.** Formalmente se tiene:

$$\mathbf{VI_c = MAX[S - X, 0]} \textbf{ para una opción call.}$$

$$\mathbf{VI_p = MAX[X - S, 0]} \textbf{ para una opción put.}$$

Siendo:

VI_c, VI_p = valor intrínseco de una opción call y una opción put respectivamente.
S = precio actual del activo subyacente (precio en este momento).
X = precio de ejercicio

Ejemplo:

En el CBOE (Chicago Board Options Exchange) las opciones CALL sobre las acciones de IBM, serie junio y precio de ejercicio de \$40, cotizan a \$3.5 (lotes de 100 acciones). La acción de IBM tiene un precio de \$42 (en este momento). De acuerdo con las expresiones anteriores, se tiene que

$$\mathbf{VI_c = \$42 - \$40 = \$2}\ ,$$

pero como es un contrato de opción call sobre un lote de 100 acciones, entonces:

$$\mathbf{VI_c = (\$42 - \$40)100 = \$200}$$

El valor intrínseco, es una referencia del precio de la opción en cada momento, ya que el precio del contrato (prima) debe valer al menos su valor intrínseco. En el ejemplo, el valor intrínseco es de \$2 por acción, entonces, el contrato debe valer al menos \$200 que es la cantidad que el comprador de la opción obtendría en caso de ejercer en ese momento su derecho, por lo que sólo estará dispuesto a vender su contrato siempre y cuando obtenga por él, al menos el mismo beneficio que obtendría al ejercerlo.

Por otra parte, el comprador de una opción estará dispuesto a pagar un importe superior al valor intrínseco si espera que los precios en el mercado hasta el vencimiento de la opción puedan modificarse, de tal forma que obtenga un beneficio superior al valor intrínseco, entonces, el vendedor de una opción, exigiría una prima superior al valor intrínseco para cubrirse precisametnte de la variación de los precios que para él representen pérdidas. **A esta diferencia entre la prima y el valor intrínseco se le denomina *valor extrínseco* o valor en el tiempo.**

En el ejemplo anterior, la prima era de \$3.5, por lo que el valor extrínseco de la opción para una acción de IBM es:

$$\mathbf{VE_c = PRIMA - V_c}$$

$$\mathbf{= \$3.5 - \$2 = \$1.5}\ ,$$

como son 100 acciones, entonces: $\$1.5 \times 100 = \$150$.

De acuerdo con lo anterior, se puede afirmar lo siguente:

- Cuando una opción tiene un **valor intrínseco positivo**, entonces, está **in-the-money.**

S > X para las opciones call.
X > S para las opciones put.

Esto es debido a que al ejercerlas, producen un beneficio.

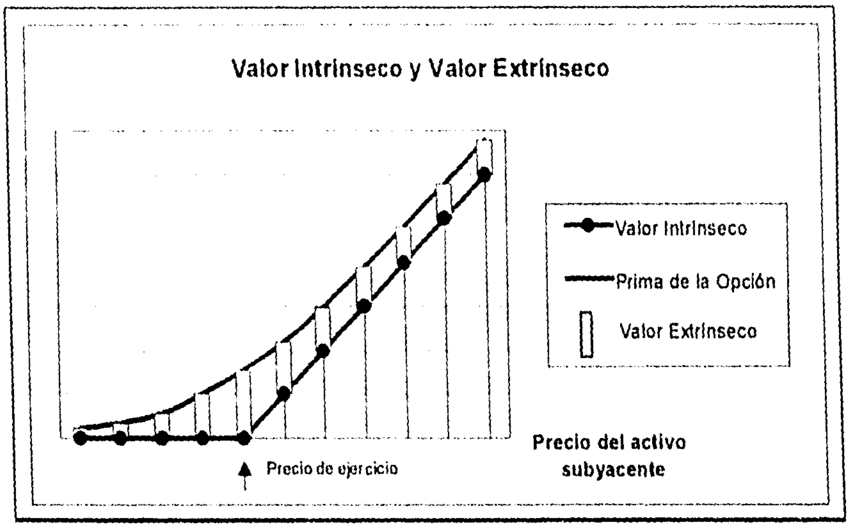
- Cuando una opción tiene un **valor intrínseco nulo**, entonces, existen dos posibilidades:

1) que S = X para opciones call y put, entonces están at-the-money

Esto es debido a que al ejercerlas, no producen ni beneficio ni pérdida.

2) que $S < X$ para las opciones call.
y $X < S$ para las opciones put.

Esto es debido a que no se ejercen (su ejercicio se traduce en pérdidas), pues están **out-of-the-money.**



Gráfica 3.1 Opción tipo Call.

En la gráfica 3.1 se muestra el valor intrinseco y extrínseco (valor en el tiempo) de una opción call en función del precio del activo subyacente. Se puede observar cómo el valor intrínseco sólo toma valores a partir de precios superiores al precio de ejercicio y su función es una recta. **El valor extrínseco viene determinado por la diferencia entre la curva de la prima de la opción y la recta del valor intrínseco,**

pero, realmente ¿qué es el valor extrínseco de una opción?

El valor extrínseco de una opción **es la valoración que hace el mercado de las probabilidades de mayores beneficios con la opción si el movimiento del precio del activo subyacente es favorable.** Entonces, el valor extrínseco tiene un componente claramente probabilístico, así que en su determinación tendrá una importancia decisiva la distribución estadística que se suponga para las variaciones futuras del precio del activo subyacente.

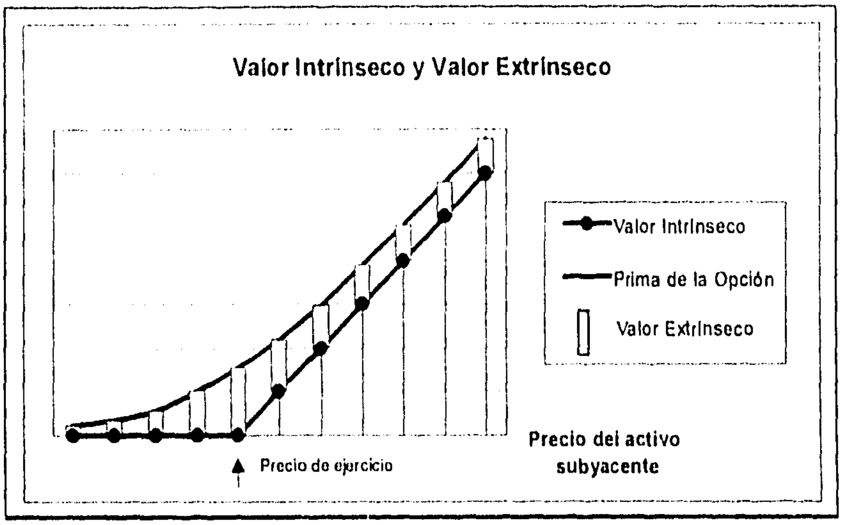
También en la gráfica 3.1 se puede observar que:

1. Las opciones **out-of-the-money sólo tienen valor extrínseco,** es decir, en la determinación de la prima los agentes sólo consideran las posibilidades de una evolución

Esto es debido a que al ejercerlas, no producen ni beneficio ni pérdida.

2) que $S < X$ para las opciones call.
y $X < S$ para las opciones put.

Esto es debido a que no se ejercen (su ejercicio se traduce en pérdidas), pues están **out-of-the-money.**



Gráfica 3.1 Opción tipo Call.

En la gráfica 3.1 se muestra el valor intrínseco y extrínseco (valor en el tiempo) de una opción call en función del precio del activo subyacente. Se puede observar cómo el valor intrínseco sólo toma valores a partir de precios superiores al precio de ejercicio y su función es una recta. **El valor extrínseco viene determinado por la diferencia entre la curva de la prima de la opción y la recta del valor intrínseco,**

pero, realmente ¿qué es el valor extrínseco de una opción?

El valor extrínseco de una opción **es la valoración que hace el mercado de las probabilidades de mayores beneficios con la opción si el movimiento del precio del activo subyacente es favorable.** Entonces, el valor extrínseco tiene un componente claramente probabilístico, así que en su determinación tendrá una importancia decisiva la distribución estadística que se suponga para las variaciones futuras del precio del activo subyacente.

También en la gráfica 3.1 se puede observar que:

1. Las opciones **out-of-the-money sólo tienen valor extrínseco,** es decir, en la determinación de la prima los agentes sólo consideran las posibilidades de una evolución

favorable (o desfavorable para los vendedores de la opción) de los precios del subyacente.

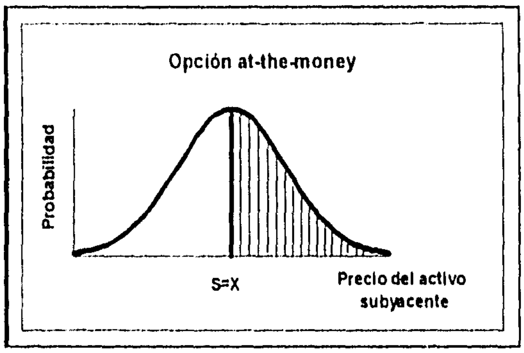
2. Las opciones **in-the-money son las que tienen el menor valor extrínseco,** además, conforme la opción está más in-the-money (mayor valor intrínseco), el valor extrínseco es menor.

3. Las opciones **at-the-money son las que tienen el máximo valor extrínseco.** Entonces, el **valor extrínseco de una opción se maximiza cuando S = X.**

¿Por qué el valor extrínseco tiene este comportamiento?

La respuesta a esta pregunta está basada en lo siguiente:

Al valorar las opciones, se asume que el **mercado es eficiente,** es decir, los precios reflejan plenamente toda la información relevante para el correspondiente activo; entonces, bajo este supuesto, la mejor estimación del precio futuro sería el precio actual y los precios tendrían una distribución normal (Gráfica 3.2). En la gráfica 3.2, el área sombreada representa la probabilidad de que **S > X,** es decir, que la opción permita beneficios en su ejercicio. Cuando la opción call está at-the-money, existe una probabilidad de **aproximadamente**[1] un 50% de obtener beneficios al ejercerla.

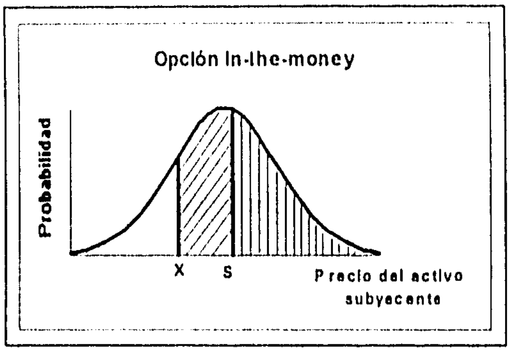


Gráfica 3.2 Distribución de probabilidad de los precios del activo subyacente.

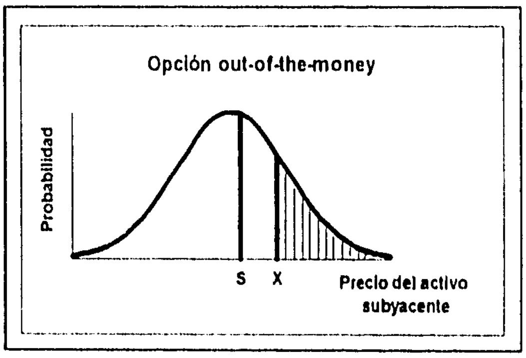
Cuando la opción está in-the-money (Gráfica 3.3), existen probabilidades de ganar más valor intrínseco (área de rayas verticales), pero también existe la posibilidad de perder parte del valor intrínseco actual con una evolución desfavorable de los precios (área de rayas diagonales), por lo que siempre el valor extrínseco de una opción in-the-money será inferior al valor extrínseco de una opción at-the-money.

[1]En realidad es ligeramente superior al 50%, por la hipótesis manejada generalmente en los modelos de valoración de opciones de una **distribución lognormal** de las variaciones de los precios del activo. Esto se puede ver en el apartado ***3.6 El modelo de Black-Scholes***, del presente trabajo.

En el caso de una opción out-of-the-money (Gráfica 3.4), el área sombreada es inferior a la correspondiente de la gráfica 3.2., es decir, su valor extrínseco es inferior al de una opción at-the-money.



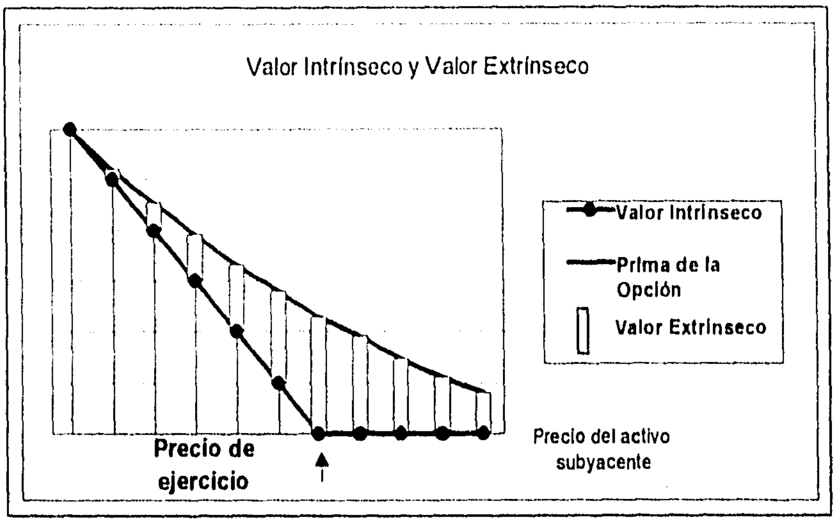
Gráfica 3.3 Distribución de probabilidad de los precios del activo subyacente.



Gráfica 3.4 Distribución de probabilidad de los precios del activo subyacente.

Para las opciones put, los razonamientos anteriores son análogos (haciendo los cambios necesarios). En la Gráfica 3.5 se puede observar la evolución de la prima, el valor intrínseco y el valor temporal de una opción put en función de los precios del activo subyacente. Se puede observar cómo cuando la opción comienza a estar muy in-the-money, el valor extrínseco de la opción se anula, más aún, este valor, en el caso de las opciones put europeas, puede llegar a ser negativo.

Dado que el valor total (prima) de una opción es igual a la suma del valor intrínseco y el valor extrínseco, una forma de valorar opciones sería calcular ambos componentes y luego sumarlos. Algunos modelos de valoración se orientan por este camino y otros optan por calcular directamente el valor teórico de la opción. Este tipo de modelos de valuación serán introducidos en los siguientes apartados.



Gráfica 3.5 Opción tipo Put.

3.2 FACTORES QUE INTERVIENEN EN EL PRECIO DE UNA OPCIÓN

Son seis los factores que afectan el precio de una opción:

1. **El precio actual del activo subyacente.**
2. **La volatilidad del activo subyacente.**
3. **Los Dividendos (sólo para opciones sobre acciones).**
4. **La tasa de interés libre de riesgo.**
5. ***La fecha de expiración.***
6. ***El precio de ejercicio.***

En la tabla 3.1 se muestra con un signo (+) o con un signo (–) la influencia que tiene un **aumento** o **alza** del correspondiente factor sobre la prima de la opción. Los cuatro primeros factores vienen determinados por los mercados, es decir, son **exógenos** al contrato de opción, los dos últimos suponen características específicas de cada contrato de opción, por lo cual, se les denomina determinantes **endógenos** del valor de la opción.

	EUROPEAS		AMERICANAS	
FACTOR	Opción Call	Opción Put	Opción Call	Opción Put
Precio subyacente	+	–	+	–
Volatilidad	+	+	+	+
Dividendos	–	+	–	+
Tasa de interés	+	–	+	–
Fecha expiración	?	?	+	+
Precio ejercicio	–	+	–	+

Tabla 3.1 Efectos en la prima de una opción debido a una alza de los factores.

A continuación se explica el efecto de cada uno de los seis factores sobre la prima de la opción, cuando sufren cambios en sus valores.

3.2.1 DETERMINANTES EXÓGENOS

1. El precio del activo subyacente

Los movimientos de los precios del activo subyacente tienen una influencia muy clara en el valor de una opción. Las **alzas** de precios del activo o bien subyacente provocan un **aumento de las primas de las opciones tipo call y descensos de las primas de las opciones tipo put.** Las **bajas** de precios tienen el efecto contrario: **suben las primas de las opciones put** y **bajan las primas de las opciones call.** Estos efectos se pueden observar en las Gráficas 3.1 y 3.5 (apartado 3.1) para una opción call y una opción put respectivamente. La explicación de tales comportamientos es la siguiente: Si VI_c y VI_p son los valores intrínsecos de una opción call y una opción put, respectivamente, sabemos entonces que:

$$VI_c = MAX[S - X,0]$$

$$VI_p = MAX[X - S,0]$$

Así que un aumento de S (precio actual del subyacente), aumentará el valor intrínseco de las opciones tipo call y reducirá el valor intrínseco de las opciones tipo put. Un descenso de S, disminuirá el valor intrínseco de las opciones call y aumentará el valor intrínseco de las opciones put.

2. La volatilidad del activo subyacente

La volatilidad se refiere al posible rango de variaciones de los precios del activo subyacente. Estadísticamente, es la dispersión del rendimiento del activo subyacente, definiendo como rendimiento a las variaciones del precio. Los incrementos de volatilidad producen aumentos de las primas para ambas modalidades de opciones. La explicación es la siguiente:

- Cuanto mayor volatilidad tenga el activo subyacente, el rango de precios al vencimiento de la opción será mayor, lo que implica un riesgo superior para los vendedores de opciones y mayores probabilidades de beneficio para los compradores; en consecuencia, el mercado de opciones traducirá los aumentos de volatilidad en aumentos de precios y a la inversa.

3. Los Dividendos (sólo para opciones sobre acciones)

En un mercado de acciones se puede asumir que los dividendos suponen una reducción de las cotizaciones en la medida en que los inversionistas (accionistas) "descuentan" del precio de cada acción los dividendos repartidos, entonces, dado el impacto desfavorable que tienen sobre el precio del activo subyacente, los dividendos afectarán positivamente al valor de las opciones put y de forma negativa al valor de las opciones call. Este concepto de dividendos es válido para las opciones sobre acciones e índices bursátiles, pero se puede hacer una interpretación para otros activos subyacentes:

- En opciones sobre divisas, el equivalente al dividendo es el tipo de interés de la divisa en cuestión, esto es, un mayor tipo de interés de la divisa afecta negativamente a las opciones tipo call y positivamnete a las opciones tipo put.

En síntesis, **los pagos que realice al activo subyacente por diferentes conceptos, en función de su naturaleza, afectan *negativamente* a las opciones call y *positivamente* a las opciones put.** Esto será cierto siempre que se suponga que estos pagos (dividendos) afecten negativamente al precio del subyacente.

4. La tasa de interés libre de riesgo.

Los efectos de un movimiento en la tasa de interés libre de riesgo, afecta el precio de las opciones de manera menos importante que los otros factores. Al incrementarse las tasas de interés en una economía, **la tasa esperada de crecimiento del precio del activo subyacente tiende a incrementarse.** Sin embargo, **el valor presente de cualquier flujo de efectivo futuro recibido por el poseedor de la opción decrece.** Estos dos efectos tienden a decrementar el valor de una opción put, de aquí que el precio de una opción put declina cuando la tasa de interés libre de riesgo se incrementa. En el caso de opciones call, el primer efecto tiende a incrementear su precio, mientras que el segundo efecto tiende a decrementarlo. Puede demostrarse que el primer efecto siempre domina al segundo, así que, el precio de las opciones call siempre se incrementa cuando la tasa de interés libre de riesgo se incrementa

Es importante enfatizar que estos resultados asumen que todas las demás variables no sufren cambios. En la práctica, cuando las tasas de interés crecen (decrecen), el precio de las acciones tiende a decrementarse (incrementarse), entonces, una opción de venta vale más (menos) y una opción call vale menos (más)

3.2.2 DETERMINANTES ENDÓGENOS

5. La fecha de expiración.

Recordando la definición del valor extrínseco, el efecto del plazo sobre el valor de una opción es el siguiente: **A mayor plazo, una opción tendrá mayor valor extrínseco,** entonces, **una opción americana (que puede ser ejercida antes de la fecha de expiración) tipo call o put vale más,** pues el poseedor de dicha opción tiene más oportunidades para ejercer cuando haya cambios favorables del activo subyacente, antes del vencimiento. **Conforme se va acercando el día en que expira la opción, el valor extrínseco tiende a cero,** así que las oportunidades para ejercer también disminuyen, por lo tanto, el precio de la opción americana disminuye conforme se acerca la fecha en que expira.

Una opción europea (que sólo puede ser ejercida hasta la fecha de expiración) tipo call o put, sobre un activo que paga dividendos, no necesariamente vale más cuando el plazo es mayor, pues no existe ninguna posibilidad de ejercer cuando haya cambios favorables en el precio del activo antes de la fecha de expiración. Igual que en el caso anterior, el precio de una opción europea disminuye conforme se acerca la fecha de expiración, pues hay menos probabilidades de cambios favorables en el activo subyacente.

Considérese dos opciones call europeas sobre una acción, una con un tiempo de expiración a un mes, la otra con un tiempo de expiración a dos meses. Supóngase que se esperan dividendos en seis semanas. Como ya se explicó anteriormente, estos dividendos causarán que el precio de la acción decline. La opción con la fecha de expiración más corta está fuera del tiempo en que se esperan los dividendos, lo cual puede ocasionar que aumente su valor. Esto refleja el hecho de que no necesariamente.una opción europea tipo call o put vale más cuando el plazo es mayor.

6. El precio de ejercicio.

La relación entre precio de ejercicio y valor de la opción es la siguiente: Para las opciones de compra, el valor será mayor cuanto menor sea el precio de ejercicio (pues existe una probabilidad más grande de que el precio del activo subyacente supere al de ejercicio) y para las opciones de venta un mayor precio de ejercicio supondrá una mayor prima de la opción.

3. 3 LÍMITES DEL VALOR DE UNA OPCIÓN

La valoración de las opciones se puede realizar mediante un enfoque de arbitraje. En este contexto, **el arbitraje significa que se pueden obtener beneficios comprando y vendiendo activos sin tomar riesgos.**

3. 3.1 SUPUESTOS Y NOTACIÓN

El establecimiento de los límites teóricos para el valor de las opciones exige asumir previamente ciertas hipótesis que permiten, fundamentalmente, que el arbitraje funcione sin trabas. Estas hipótesis son las siguientes:

1. No existen impuestos y costos de transacción (corretajes, diferenciales entre precios de compra y venta en el mercado, etc.).
2. Los activos son completamente divisibles, es decir, se puede comprar 1.65 acciones o vender medio contrato de opción.
3. Se pueden vender los activos en *descubierto* (o a crédito) sin límites, esto es, se puede vender una acción sin poseerla previamente con el compromiso de entrega en una fecha posterior.

4. No se exigen depósitos de garantía a la venta de opciones y a las ventas en descubierto.
5. Se puede prestar y tomar prestado al mismo tipo de interés (tasa libre de riesgo).
6. Cualquier ganancia o pérdida está sujeta a la misma tasa de de impuestos.
7. Todas las transacciones se pueden realizar de forma simultánea.
8. Las transacciones se realizan sin que afecten a los precios del mercado, es decir, que el mercado no se vea influido por las transacciones de un agente económico en particular.

Además, se debe asumir que los participantes del mercado están preparados para tomar ventaja de las oportunidades de arbitraje. Esto significa que cualquier oportunidad de arbitraje desaparece rápidamente, así que, para cuestiones analíticas, es válido suponer también que no hay oportunidades de arbitraje.

Evidentemente estos supuestos o hipótesis no se cumplen en su totalidad en los mercados financieros actuales. Ahora bien, generalmente su incumplimiento afecta sólo en el hecho de que los precios de las opciones se alejan ligeramente de sus límites teóricos.

Otro aspecto que cabe mencionar es el hecho de que las tasas de interés que se manejarán durante los siguientes apartados y capítulos, serán **tasas compuestas continuamente.** Esto se debe a que la convención de periodicidad más frecuente en teoría financiera es el uso de tasas de interés continuas.

Existen muchas maneras de cotizar una misma tasa de interés o tasa interna de rendinmiento (TIR) dependiendo de los usos y costumbres de cada mercado. En general casi todas las formas de cotizar una tasa de interés se basa en especificar dos parámetros que definen la convención usada:

- **La periodicidad** - cuántas veces al año se paga la tasa de interés.
- **La convención de calendario usada** - cómo se ha de contar los días en un período para calcular cúanto interés se ha de pagar.

Sea **C** la cantidad que se obtendrá al invertir **P** durante **n** años a una tasa de interés **r** anual. Si la tasa es compuesta una vez al año, entonces se tiene que:

$$\mathbf{C = P(1 + r)^n} \quad ,$$

si la tasa es compuesta **m** veces por año, entonces,

$$\mathbf{C = P(1 + r/m)^{m\,n}}$$

Supóngase **P = $100, r = 10% anual y n = 1**(se está considerando un año). Si la tasa es compuesta una vez al año (m = 1), la cantidad obtenida al invertirt **P** sería:

$$\mathbf{C = 100(1 + .1)^1 = 110} \quad ,$$

si la tasa es compuesta dos veces al año, es decir m = 2 (semestral), entonces,

$$C = 100(1 + .1/2)^{2(1)} = 110.25$$

si m = 4 (trimestral) $\Rightarrow$ $C = 100(1 + .1/4)^{4(1)} = 110.38$
si m = 12 (mensual) $\Rightarrow$ $C = 100(1 + .1/12)^{12(1)} = 110.47$
si m = 52 (semanal) $\Rightarrow$ $C = 100(1 + .1/52)^{52(1)} = 110.51$
si m = 365 (diaria) $\Rightarrow$ $C = 100(1 + .1/365)^{356(1)} = 110.52$,

tomando el límite cuando **m** tiende a infinito de $P(1 + r/m)^{m\,n}$, se llega a la siguiente expresión:

$$\lim_{m \to \infty} P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m\,n} = Pe^{rn},$$

la cual sirve para las tasas de interés contiuas, dónde e es la constante **2.71828**. En el ejemplo se tiene que **P = 100, n = 1 y r = 0.1,** así que, la cantidad **C** obtenida al invertir **P** durante un año a una tasa del 10% anual **compuesta continuamente** sería:

$$C = 100e^{.01} = 110.52,$$

que coinside (hasta dos decimales) con la cantidad obtenida para una tasa compuesta diariamente. En la práctica una tasa de interés en base diaria viene a ser casi equivalente a una tasa continua. Si R_1 es la tasa de interés compuesta continuamente y R_2 es la tasa equivalente compuesta **m** veces por año, entonces se tiene que:

$$e^{R_1} = \left(1 + \frac{R_2}{m}\right)^{m},$$

lo que significa que $R_1 = m \ln(1+R_2/m)$ y $R_2 = m(e^{R_1/m} - 1)$. Estas ecuaciones pueden ser utilizadas para convertir tasas compuestas **m** veces por año a tasas compuestas continuamente y viceversa.

Descontar cierta cantidad de dinero a una tasa de interés **r** compuesta continuamente durante **n** años involucra la expresión $Ce^{-r\,n}$.

Las tasas de interés continuas tienen la desventaja de que no se usan en ningún mercado, pero su uso en teoría financiera es universal porque simplifican enormemente las ecuaciones.

NOTACIÓN:

S : Precio actual del activo subyacente.
X : Precio de ejercicio de la opción.

T : Tiempo de expiración de la opción.
t : Tiempo actual (Tiempo transcurrido).
$\Rightarrow$ **(T−t)** = ***tiempo remanente***, es decir, el tiempo que falta para la fecha de expiración. Ambas variables son medidas en años.
S_T : Precio del activo subyacente al vencimiento (al tiempo T).
r : Tasa de interés ***libre de riesgo*** **compuesta continuamente** para una inversión con fecha de vencimiento **T.**

Se considera **tasa libre de riesgo** al rendimiento sobre una inversión libre de riesgo. En México, la tenencia de un CETE a 28 días se considera una inversión sin riesgo, ya que la garantía de este título es el Gobierno Federal Mexicano (nadie puede en teoría ser más solvente que el Gobierno Federal). El plazo del título es tan corto que minimiza el riesgo por inflación y el riesgo de mercado. En teoría, el rendimiento de cualquier bien es igual a la tasa libre de riesgo más un premio por riesgo.

C : Precio de una opción call Americana por acción
P : Precio de una opción put Americana por acción
c : Precio de una opción call Europea por acción
p : Precio de una opción put Europea por acción
σ : Volatilidad del precio del activo subyacente

3. 3. 2 LÍMITES SUPERIORES E INFERIORES

Los límites superior e inferior no dependen de ningún supuesto en particular sobre los factores que afectan al precio de las opciones, sólo hay que asumir que $\mathbf{r > 0}$. Si el precio de la opción está por encima del límite superior o por debajo del límite inferior, entonces, hay oportunidades de beneficio para los arbitrajistas.

LÍMITES SUPERIORES

Una **opción call Americana o Europea** nunca puede valer más que el precio del activo o bien involucrado, por lo tanto, el precio del activo subyacente es una cota superior para el precio de la opción:

$$c \leq S \quad \text{y} \quad C \leq S$$

Si lo anterior no se cumpliera, un arbitrajista podría fácilmente hacer una ganancia sin riesgo comprando el activo y vendiendo la opción call, entonces, la ganancia para ambos casos sería: **prima – S.**

Una **opción put Americana o Europea** nunca puede valer más que el precio de ejercicio, sin importar qué tan bajo pudiera llegar a estar el precio del activo. Entonces:

$$\mathbf{p \leq X \quad \text{y} \quad P \leq X}$$

Para **opciones Europeas** se sabe que al tiempo T, la opción no valdrá más que **X**, entonces, al inicio del contrato, la opción no puede valer más que el valor presente de **X:**

$$p \leq Xe^{-r(T-t)} \text{ con } t = 0$$

Y para **opciones Americanas** no es válida la expresión anterior, ya que hay posibilidades de ejercicio antes de la fecha de vencimiento. Si lo anterior no sucediera, un arbitrajista podría igualmente hacer ganancias sin riesgo emitiendo la opción e invirtiendo el resultado de la venta (p) a la tasa de interés libre de riesgo.

LÍMITES INFERIORES PARA OPCIONES CALL Y PUT SOBRE ACTIVOS QUE NO PAGAN DIVIDENDOS

Opciones Europeas:

Una cota inferior para el precio de una **opción call Europea** sobre un activo que no paga dividendos es:

$$S - Xe^{-r(T-t)}$$

Antes de dar un argumento más formal de la expresión anterior, se mostrará un ejemplo numérico:

Ejemplo:

Supóngase que **S** = \$20, **X** = \$18, **r** = 10% anual, **T** = 1 año, y **t** = 0. En este caso,

$$S - Xe^{-r(T-t)} = 20 - 18e^{-0.1} = 3.71; \text{ ie, } \$3.71$$

Considérese el caso donde el precio de la opción call Europea es **\$3.00**, el cual es menor que el valor teórico mínimo de **\$3.71.** Un arbitrajista puede comprar la opción call y tomar una posición corta en el activo, esto dará como resultado un flujo de efectivo de:

$$\$20.00 - \$3.00 = \$17.00,$$

si esta cantidad es invertida por un año al **10%** anual, los \$17.00 crecen a **$17e^{0.1}$= \$18.79.** Al final del año, la opción expira, si el precio del activo es mayor que **\$18**, el arbitrajista ejerce la opción a un precio de ejercicio de **\$18,** cierra su posición corta sobre el activo y genera una ganancia de:

$$\$18.79 - \$18.00 = \$0.79$$

Si el precio del activo es menor que \$18, el activo es comprado en el mercado y la posición corta es cerrada. El arbitrajista entonces, genera incluso una ganancia mayor. Por ejemplo, si el precio del activo es \$17, las ganancias son:

$$\$18.79 - \$17.00 = \$1.79$$

Para dar un argumento más formal, se construyen los siguientes portafolios:

Portafolio A	Una **opción call Europea** *más* una cantidad en efectivo igual a $Xe^{-r(T-t)}$
Portafolio B	*Una acción.*

En este momento el portafolio **A** tiene un valor de **c+** $Xe^{-r(T-t)}$. Si el efectivo es invertido a la tasa de interés libre de riesgo, crecerá hasta el valor de **X** a un tiempo **T:**

$$\frac{X e^{r(T-t)}}{e^{r(T-t)}} = X$$

Si $S_T > X$**,** la opción call es ejercida en el tiempo **T** con un valor de ejercicio de $(S_T - X)$ y como el efectivo para el tiempo **T** vale **X**, entonces se tiene que el portafolio al tiempo **T** vale:

$$(S_T - X) + X = S_T$$

Si $S_T < X$**,** la opción call expira sin valor de ejercicio y el portafolio **A** al teimpo **T** vale **X** . Por lo tanto, al tiempo **T**, el portafolio **A** vale:

$$\max(S_T, X)$$

El portafolio **B** en este momento vale **S** y al tiempo **T**, S_T, así que el portafolio **A** siempre vale igual o más que el portafolio **B** al tiempo **T**. Ahora bien, en ausencia de oportunidades de arbitraje, el argumento anterior debe cumplirse **para este momento (para hoy),** entonces:

Valor del portafolio A (en este momento) ≥ Valor del portafolio B (en este momento), es decir:

$$c + Xe^{-r(T-t)} \geq S$$
$$\Rightarrow c \geq S - Xe^{-r(T-t)}$$

Como lo peor que le puede pasar a un contrato de opción, es que expire sin valor de ejercicio, su valor (prima) debe ser positivo o cero. Esto significa que $c \geq 0$ y por lo tanto,

$$c \geq \max\left(S - Xe^{-r(T-t)}, 0\right) \qquad (3.1)$$

Ejemplo:

Considérese una opción call Europea sobre un activo que no paga dividendos (antes de la fecha de vencimiento). El precio del activo es de \$51, el precio de ejercicio es \$50, la fecha de vencimiento es a 6 meses, y la tasa de interés libre de riesgo es del 12% anual. En este caso, $S = 51$, $X = 50$, $T = ½$ de año, $t = 0$, y $r = 0.12$. Si se sustituyen los valores en (3.1), resulta que una cota inferior para el precio de la opción es:

$$S - Xe^{-r(T-t)} \text{, ya que } S > X$$

$$51 - 50e^{-0.12 \times 0.5} = \$3.91$$

Para una **opción put Europea** sobre un activo que no paga dividendos, una cota inferior para su precio es:

$$Xe^{-r(T-t)} - S$$

Supóngase que $S = \$37$, $X = \$40$, $r = 5\%$ anual, $T = 0.5$ años, y $t = 0$. Entonces,

$$Xe^{-r(T-t)} - S = 40e^{-0.05 \times 0.5} - 37 = 2.01$$

Considérese que el pecio de la opción put Europea es \$1.00, que es menor que el valor mínimo teórico de \$2.01. Un arbitrajista puede pedir prestado \$38.00 por 6 meses para comprar tanto la opción put como el activo. Al final de los 6 meses, el arbitrajista tendrá que devolver $38e^{0.05 \times 0.5} = \$38.96$. Si el precio del activo está por debajo de \$40.00, el arbitrajista ejerce la opción para vender el activo en \$40.00, devuelve el préstamo, y genera una ganancia de:

$$\$40.00 - \$38.96 = \$1.04$$

Si el precio del activo es mayor a \$40.00, el arbitrajista no ejerce, vende el activo, y devuelve el préstamo generando incluso una ganancia mayor. Por ejemplo, si el precio del activo es de \$42.00, las ganancias del arbitrajista son:

$$\$42.00 - \$38.96 = \$3.04$$

Para un argumento más formal, considérese los dos portafolios siguientes:

Portafolio C	Una **opción put Europea** *más* **Una acción.**
Portafolio D	una cantidad en efectivo igual a $Xe^{-r(T-t)}$

En este momento el portafolio **C** tiene un valor de **(p+S)**. Si $S_T < X$, la opción del portafolio **C** es ejercida al tiempo **T** con un valor de ejercicio de $(X - S_T)$ y la acción tendría un valor de S_T. Por lo tanto, el valor del portafolio al tiempo **T** es:

$$(X - S_T) + S_T = X$$

Si $S_T > X$, la opción put expira sin valor de ejercicio y el portafolio **C** al tiempo **T** vale S_T. Por lo tanto, el portafolio **C** al tiempo **T** vale:

$$\max(S_T, X)$$

Asumiendo que el efectivo es invertido a la tasa de interés libre de riesgo, crecerá hasta el valor de **X** a un tiempo **T**:

$$\frac{X e^{r(T-t)}}{e^{r(T-t)}} = X$$

Entonces, el valor del portafolio **D** al teimpo **T** es **X**, así que, el portafolio **C** siempre es mayor o igual al valor del portafolio **D**, al tiempo **T**. De acuerdo con lo anterior y en ausencia de oportunidades de arbitraje, se debe cumplir **para este momento**, que el portafolio **C** debe valer más o igual que el portafolio **D**, entonces:

Valor del portafolio C (en este momento) ≥ Valor del portafolio D (en este momento), es decir:

$$p + S \geq Xe^{-r(T-t)}$$
$$\Rightarrow p \geq Xe^{-r(T-t)} - S$$

Como lo peor que le puede pasar a un contrato de opción es que expire sin valor de ejercicio, su valor debe ser positivo o cero, esto significa que $p \geq 0$ y por lo tanto,

$$p \geq \max(Xe^{-r(T-t)} - S, 0) \tag{3.2}$$

Ejemplo:

Considérese una opción put Europea sobre un activo que no paga dividendos (antes de la fecha de vencimiento) . El precio del activo es de $38, el precio de ejercicio es $40, la fecha de vencimiento es a 3 meses, y la tasa de interés libre de riesgo es del 10% anual. En este caso, $S = 38$, $X = 40$, $T = 1/4$ de año , $t = 0$, y $r = 0.10$. Sustituyendo los valores en (3.2), resulta que una cota inferior para el precio de la opción es:

$$Xe^{-r(T-t)} - S \quad , \text{ ya que } X > S$$

$$40e^{-0.1 \times 0.25} - 38 = \$1.01$$

Opciones Americanas:

La característica principal que distingue a opciones Americanas de opciones Europeas, es que pueden ser ejercidas antes de la fecha de vencimiento **T**, es decir, después del inicio del contrato se puede ejercer a un tiempo **t** (o faltando **T− t** para que expire la opción).

Debido a que el derecho de ejercer antes de la fecha de vencimiento no puede tener un valor negativo, es decir, no se le puede pagar a un inversionista para ser inducido a tomar privilegios, las dos condiciones siguientes son válidas:

$$C(S,T;X) \geq c(S,T;X)$$

$$\text{y} \qquad P(S,T;X) \geq p(S,T;X)$$

donde:

c(S,T;X) = Precio opción call Europea con precio de ejercicio **X**, fecha de vencimiento T y precio actual del activo subyacente **S**.
p(S,T;X) = Precio opción put Europea con precio de ejercicio **X**, fecha de vencimiento T y precio actual del activo subyacente **S**.
C(S,T;X) = Precio opción call Americana con precio de ejercicio **X**, fecha de vencimiento T y precio actual del activo subyacente **S**.
P(S,T;X) = Precio opción put Americana con precio de ejercicio **X**, fecha de vencimiento T y precio actual del activo subyacente **S**.

Estas dos condiciones no implican que las opciones Americanas tendrán valores mayores que las opciones Europeas, sino que no tendrán valores menores. El derecho de ejercer antes de la fecha de vencimiento puede no tener valor positivo, pero nunca tendrá un valor negativo.

Como las opciones Americanas no pueden ser vendidas a un valor menor al de una opción Europea, una cota inferior para las opciones Americanas es la cota inferior de la correspondiente opción Europea con el mismo precio de ejercicio y tiempo de expiración. La opción Americana tiene el beneficio adicional de que puede ser ejercida inmediatamente para recibir el valor de ejercicio **S − X** para una call y **X− S** para una put, esto significa que la cota inferior para la opción Americana es la cota inferior de la opción Europea o el valor de ejercicio actual, el cual es mayor. Siendo así, las cotas inferiores son:

$$C(S,T;X) \geq \max\left(S - Xe^{-r(T-t)},\, 0,\, S-X\right) \tag{3.3}$$

$$\text{y} \qquad P(S,T;X) \geq \max\left(Xe^{-r(T-t)} - S,\, 0,\, X-S\right) \tag{3.4}$$

Analizando las cotas anteriores, se puede observar que el ejercer antes de la fecha de vencimiento una **opción call** puede no ser óptimo, pues:

$$Xe^{-r(T-t)} < X$$
$$\Rightarrow S - Xe^{-r(T-t)} > S - X \,;$$

Lo cual refleja el hecho de que ejercer hasta la fecha de vencimiento T, genera ganancias mayores que al ejercer antes de la fecha de vencimiento.

Para una opción put, puede ser vantajoso ejercer antes de la fecha de vencimiento, igualmente:

$$Xe^{-r(T-t)} < X$$
$$\Rightarrow Xe^{-r(T-t)} - S < S - X \,;$$

entonces, ejercer hasta la fecha de vencimiento T, genera ganancias menores que al ejercer antes de la fecha de vencimiento.

IMPLICACIONES AL EJERCER UNA OPCIÓN CALL Y PUT AMERICANA ANTES DE LA FECHA DE VENCIMIENTO

Como ya se mencionó, puede **no ser óptimo ejercer** antes de la fecha de vencimiento, **una opción call Americana sobre un activo que no paga dividendos.**

Para ilustrar lo anterior, considérese una opción call Americana sobre un activo que no paga dividendos, con un mes de plazo. El precio del activo es de $50 y el precio de ejercicio es de $40. La opción esta muy in-the-money y el poseedor (inversionista) de la opción probablemente estará tentado a ejercer inmediatamente. Sin embargo, si el inversionista planea quedarse con el activo por más de un mes, ejercer inmediatamente no sería la mejor estrategia, lo más conveniente sería mantener la opción y ejercerla hasta el final del mes. Entonces, el precio de ejercicio de $40 es pagado un mes después. Esto significa que se gana un interés sobre los $40, por un mes. Como el activo no paga dividendos, ningún ingreso del mismo es sacrificado. Una razón aún mayor para esperar y no ejercer inmediatamente es que existe la posibilidad (remota, pero existe) de que el precio del activo caiga por debajo de $40 en un mes. En este caso, el inversionista no ejerce y estará satisfecho de que la desición de ejercer antes de la fecha de vencimiento no haya sido tomada.

Este argumento muestra que no existe ninguna ventaja al ejercer antes de la fecha de vencimiento, si el inversionista (comprador de la opción) planea retener el activo por el resto del tiempo que falta para que expire la opción (un mes, en el ejemplo).

Para un argumento más formal, se tienen los siguientes portafolios:

Portafolio E	Una **opción call Americana** *más* una cantidad en efectivo igual a $Xe^{-r(T-t)}$
Portafolio F	*Una acción.*

El valor de la cantidad en efectivo del portafolio **E**, al vencimiento **T**, es **X**. En cualquier momento **t**, antes de la fecha de vencimiento, su valor es $Xe^{-r(T-t)}$, si la opción es ejercida en el tiempo **t**, el valor del portafolio **E** es:

$$S - X + Xe^{-r(T-t)}$$

La expresión anterior siempre es menor a S cuando **t < T** pues **r > 0**. Entonces, el portafolio **E** siempre tiene un valor menor al valor del portafolio **F** si la opción es ejercida antes de la fecha de vencimiento. Si la opción se retiene hasta el vencimiento, el valor del portafolio **E** al tiempo **T** es:

$$\max(S_T, X)$$

El valor del portafolio **F**, al tiempo **T**, es S_T. Siempre existe la posibilidad de que $S_T < X$. Esto significa que el portafolio **E** siempre vale igual o más que el portafolio **F**.

Con todo esto, se ha mostrado que el portafolio **E** vale menos que el portafolio **F** cuando la opción es ejercida inmediatamente, pero vale al menos lo mismo que el portafolio **F** si el poseedor de la opción ejerce hasta la fecha de vencimiento **T**. De aquí que una opción call Americana sobre un activo que no paga dividendos nunca debe ser ejercida antes de la fecha de vencimiento. Por lo tanto, una opción call Americana sobre un activo que no paga dividenos vale lo mismo que la correspondiente opción Europea sobre el mismo activo:

$$C = c$$

Puede **ser vantajoso ejercer una opción put Americana que no paga dividendos antes de la fecha de vencimiento.** En cualquier momento, durante su vigencia, una opción put siempre debe ser ejercida antes de la fecha de vencimiento, **si está suficientemente in-the-money.**

Para ilustrar lo anterior, se manejará un ejemplo con suposiciones extremas: Supóngase que el precio de ejercicio de una opción put es de $10 y el precio del activo subyacente es *virtualmente cero*. Ejerciendo inmediatamente, un inversionista genera una ganancia inmediata de $10. Si el inversionista espera hasta el vencimiento, la ganancia al ejercer podría ser menor a $10 pero no podría ser mayor que $10, ya que precios negativos del activo, son imposibles. Más aún, recibir $10 ahora es preferible a recibir $10 en el futuro, por lo tanto, la opción debe ser ejercida inmediatamente.

Formalmente se pueden considerar los siguientes dos portafolios:

Portafolio G	Una **opción put Americana** *más* **una acción**
Portafolio H	Una cantidad en efectivo igual a $Xe^{-r(T-t)}$

Si la opción es ejercida al tiempo t < T, el portafolio **G** vale :

$$(X - S) + S = X$$

mientras que el portafolio **H** vale $Xe^{-r(T-t)}$. Por lo tanto, el portafolio **G** vale más que el portafolio **H**. Si la opción se retiene hasta el vencimiento, el portafolio **G** vale:

$$(X - S_T) + S_T = X \quad , \quad \text{si } S_T < X$$

$$\text{y} \qquad S_T \quad , \quad \text{si } S_T > X$$

$$\Rightarrow \textbf{vale el } \max(X, S_T),$$

mientras que el portafolio **H** vale **X**. Por lo tanto, el portafolio **G** vale igual o más que el portafolio **H**. Nótese que si la opción es ejercida antes de la fecha de vencimiento, el portafolio **G** vale más que el portafolio **H** y si es ejercida hasta la fecha de vencimiento, el portafolio **G** vale al menos lo que el portafolio **H**, por lo tanto, no se puede argumentar que **P=p,** pues en este caso sí resultó conveniente ejercer antes de la fecha de vencimiento, así que la condición más fuerte en este caso es:

$$P \geq X - S,$$

entonces, una opción put Americana sobre un activo que no paga dividendos, siempre debe ser ejercida antes de la fecha de vencimiento. De acuerdo con esto, **P > p.**

3.3.3 OTROS LÍMITES

EL EFECTO DE LOS DIVIDENDOS

En el análisis de los límites, presentado en el apartado 3.3.2 , se ha asumido que las opciones son sobre activos que no pagan dividendos. Ahora corresponde discutir el impacto de los dividendos en los limites superiores e inferiores de cada modalidad de opciones.

En los Mercados Organizados de Estados Unidos, las opciones sobre activos, generalmente tienen 8 meses de madurez. **Los dividendos pagaderos durante la vigencia de la opción, pueden ser comúnmente predecidos con una precisión bastante razonable.**

Utilizando los argumentos mostrados en el apartado 3.3.2 y definiendo a **D** como el **valor presente de los dividendos durante la vigencia de la opción (y se supondrá que son pagados un día antes del día en que se decretan),** se tiene que los límites inferiores para **opciones Europeas** son redefinidos como:

$$c \geq \max(S - D - Xe^{-r(T-t)}, 0) \qquad \textbf{para una call Europea} \qquad (3.5)$$

$$\text{y} \qquad p \geq \max(Xe^{-r(T-t)} + D - S, 0) \qquad \textbf{para una put Europea} \qquad (3.6)$$

Para opciones Americanas se tiene

$$C \geq \max(S - D - Xe^{-r(T-t)}, 0, S - X) \qquad \textbf{para una call Americana} \qquad (3.7)$$

y $$P \geq \max(Xe^{-r(T-t)} + D - S, 0, X - S) \qquad \textbf{para una put Americana} \qquad (3.8)$$

Cuando se esperan dividendos, no se puede afirmar que una opción call Americana no será ejercida antes de la fecha de vencimiento. Algunas veces, es óptimo ejercer este tipo de opciones inmediatamente antes del día en que ocurran los dividendos. Esto es debido a que los dividendos causarán que el precio del activo sufra una caída, haciendo a la opción menos atractiva para los inversionistas, pero bajo otras circunstancias, no es óptimo ejercer una opción call Americana antes del vencimiento.

DOS OPCIONES EQUIVALENTES CON DISTINTO PRECIO DE EJERCICIO

El precio de una **opción call Europea o Americana** no puede ser inferior al de otra opción equivalente con un precio de ejercicio superior:

$$c(S,T; X_1) \geq c(S,T;X_2) \quad , \text{con} \quad X_1 \leq X_2$$

y $$C(S,T; X_1) \geq c(S,T;X_2) \quad , \text{con} \quad X_1 \leq X_2$$

Si lo anterior no se cumpliera, un arbitrajista podria comprar las opciones con un precio de ejercicio X_1 y venderlas con un precio de ejercicio X_2. En términos generales, los resultados serían los siguientes:

Precio al vencimiento	***Opción que se ejerce***	***Beneficio***
$S_T \leq X_1 \leq X_2$	Ninguna	Diferencia de primas capitalizada
$X_1 < S_T < X_2$	Opción con precio de ejercicio X_1	$S_T - X_1$ mas deferencia de primas capitalizada
$X_1 \leq X_2 < S_T$	Las dos	$X_2 - X_1$ mas diferencia de primas capitalizada

Análogamente, para **opciones put Americanas o Europeas,** se tiene:

$$p(S,T; X_2) \geq p(S,T;X_1) \quad , \text{con} \quad X_1 \leq X_2$$

y $$P(S,T; X_2) \geq P(S,T;X_1) \quad , \text{con} \quad X_1 \leq X_2$$

DOS OPCIONES EQUIVALENTES CON DISTINTA FECHA DE VENCIMIENTO

En este caso, para opciones tipo call Americanas o Europeas sobre activos que no pagan dividendos se tiene:

$$c(S,T_1;X) \geq c(S,T_2;X) \qquad , \text{con} \quad T_1 \geq T_2$$

y $$C(S,T_1;X) \geq C(S,T_2;X) \qquad , \text{con} \quad T_1 \geq T_2$$

Como ya se vió en apartados anteriores, el mayor plazo de vencimiento se debe reflejar en un mayor valor de la opción, en especial cuando se trata de una opción Europea sobre un activo que no paga dividendos, pues de no ser así, no necesariamente se cumple la desigualdad.

Igualmente, para opciones put Americanas o Europeas:

$$p(S,T_1;X) \geq p(S,T_2;X) \qquad , \text{con} \quad T_1 \geq T_2$$

y $$P(S,T_1;X) \geq P(S,T_2;X) \qquad , \text{con} \quad T_1 \geq T_2$$

3. 4 PARIDAD PUT-CALL

Ya se ha definido que **P** y **C** son los precios de opciones put y call Americanas respectivamente, mientras **p** y **c** son los precios de opciones put y call Europeas. Las variables, **P, p, C, c** son funciones de **S, X, T, t,** r y la volatilidad denotada con **σ.** Se ha mostrado que para opciones sobre activos que no pagan dividendos, **C = c** y **P > p** , cuando **r > 0.**

Ahora se mostrará una ralación muy importante entre **p** y **c**. Considérese el siguiente análisis con dos portafolios (se utilizará el portafolio A y C ya antes estudiados):

Portafolio A	Una **opción call Europea** *más* una cantidad en efectivo igual a $\mathbf{Xe^{-r(T-t)}}$
Portafolio C	Una **opción put Europea** *más* **una acción**

En este momento, el portafolio **A** tiene un valor de **c+** $\mathbf{Xe^{-r(T-t)}}$. Si el efectivo es invertido a la tasa de interés libre de riesgo, crecerá hasta el valor de **X** a un tiempo **T:**

$$\frac{Xe^{r(T-t)}}{e^{r(T-t)}} = X$$

Si $S_T > X$**,** la opción call es ejercida en el tiempo **T** con un valor de ejercicio de $(S_T - X)$ y como el efectivo para el tiempo T vale X, entonces se tiene que el portafolio **A,** al tiempo **T** vale:

$$(S_T - X) + X = S_T$$

Si $S_T < X$, la opción call expira sin valor de ejercicio y el portafolio **A** al teimpo **T** vale **X**. Por lo tanto, al tiempo **T**, el portafolio **A** vale:

$$\max(S_T, X)$$

El portafolio **C** en este momento vale p+S. Si $S_T < X$, la opción put es ejercida en el tiempo T con un valor de ejercicio de ($X - S_T$) y la acción al tiempo T, vale S_T, entonces, el portafolio **C** al tiempo **T** vale.

$$(X - S_T) + S_T = X$$

Si $S_T > X$, la opción put expira sin valor de ejercicio y el portafolio **C** al tiempo **T** vale S_T, por lo tanto, al tiempo **T**, el portafolio **C** vale:

$$\max(S_T, X)$$

Como se puede observar, ambos portafolios valen lo mismo al tiempo **T**. Dado que las opciones son Europeas, no pueden ser ejercidas antes de la fecha de expiración, entonces, los portafolios **A, C,** deben tener el mismo valor en este momento. Esto significa que:

$$c + Xe^{-r(T-t)} = p + S \tag{3.9}$$

La relación (3. 9) es conocida como la ***paridad put-call,*** la cual muestra que **el valor de una opción *call Europea* con un cierto valor de ejercicio y fecha de expiración, puede ser *deducida* del valor de una opción *put Europea* con el mismo precio de ejercicio y fecha de expiración y viceversa. Si la ecuación (3. 9) no se cumple, habrá oportunidades de arbitraje.** Entonces, mediante la paridad put-call, podemos encontrar:

$$p = c - S + Xe^{-r(T-t)} \tag{3.10}$$

La ecuación (3.10) significa que el precio de una opción put Europea sobre un activo que no paga dividendos, debe ser igual al valor combinado de una opción call sobre el mismo activo, con el mismo precio de ejercicio y fecha de vencimiento que la opción put, una posición corta sobre el activo y una inversión libre de riesgo igual al valor presente del precio de ejercicio. Del mismo modo:

$$c = p + S - Xe^{-r(T-t)} \tag{3.11}$$

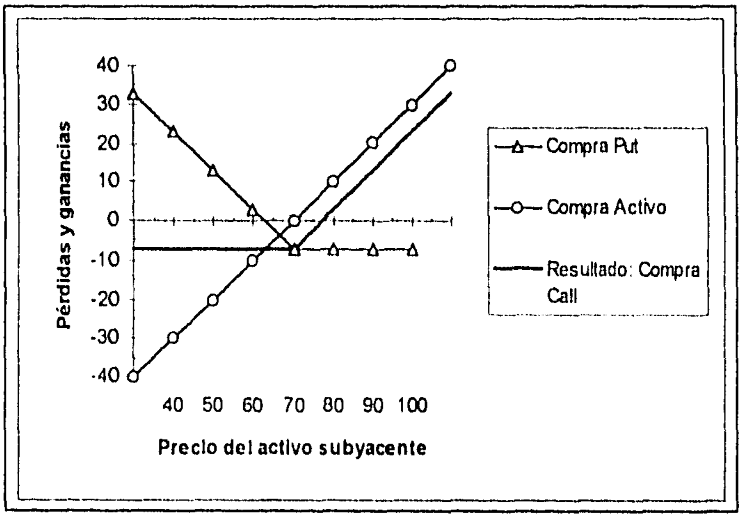
La ecuación (3.11) muestra que el precio de una opción call Europea sobre un activo que no paga dividendos, debe ser igual al precio de una opción put Europea sobre el mismo activo, ambas con las mismas características (mismo precio de ejercicio y fecha de expiracióin), más una cantidad igual al valor actual del activo subyacente menos el precio de una inversión libre de riesgo igual al valor presente del precio de ejercicio.

Si cualquiera de estas relaciones es violada y no hay costos de transacción, márgenes e impuestos, un arbitrajista puede obtener una ganancia segura sin una inversión inicial,

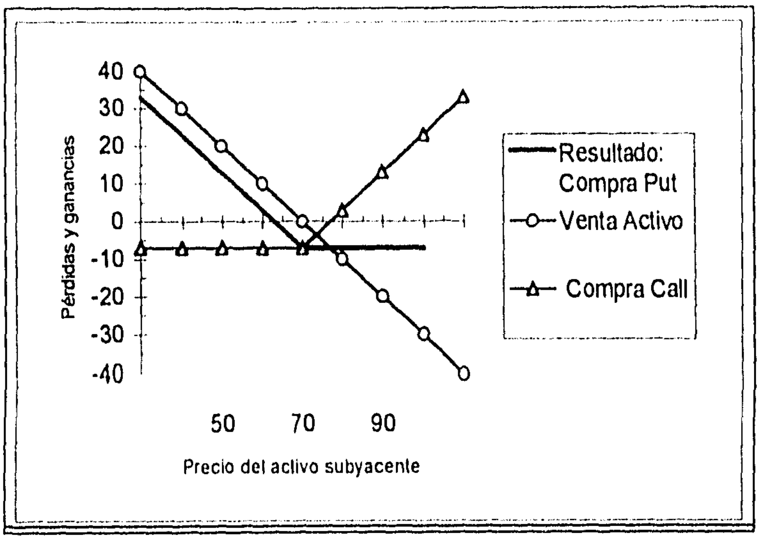
vendiendo la opción que esté relativamente sobrevaluada y usando las ganancias para **comprar la opción relativamente subvaluada junto con las posiciones apropiadas relacionadas con el activo subyacente y un instrumento de deuda.** Esta última operación, genera una ***opción sintética,*** que cubre completamnete el riesgo asociado con la posición corta sobre la opción sobrevaluada.

Por ejemplo, si los precios de las opciones call están demasiado altos con relación a los precios de las opciones put, un arbitrajista puede asegurar una ganancia libre de riesgo, vendiendo una opción call y simultáneamente comprar una opción put; pedir prestado una cantidad igual a $\mathbf{X}e^{-r(T-t)}$ a la tasa libre de riesgo y comprar el activo subyacente. Este procedimiento genera una posición **larga sintética sobre una opción call,** que balancea la posición corta sobre la opción call. Esto se puede ver en la **Gráfica 3.6** con valores supuestos y ambas opciones at-the-money.

Alternativamente, si los precios de las opciones put, están muy por arriba en relación con los precios de las opciones call, un arbitrajista puede asegurar una ganancia sin riesgo, vendiendo la opción put sobrevaluada y simultáneamente comprar la opción call, vender el activo subyacente y prestar una cantidad igual a $\mathbf{X}e^{-r(T-t)}$ a la tasa libre de riesgo. Ahora, este procedimiento genera una posición **larga sintética sobre una opción put,** que balancea la posición corta sobre la opción put (ver Gráfica 3.7) .



Gráfica 3.6 En esta gráfica se puede observar que, al tomar una posición larga en una put con precio c = 7, precio de ejercicio **X** = 70, precio actual del activo subyacente **S** = 70 y al tomar una posición larga sobre el activo subyacente, resulta una estrategia que crea la compra de una opción call, con las mismas características de la opción put. Este resultado no es más que una suma de funciones, es decir, la recta de posibles ganancias de la compra de la opción put, al sumarla con el segmento de recta de pérdidas de la compra del activo, da como resultado una constante c = -7 (que es la prima que hay que pagar para comprar la call). Ahora, si se suman la recta de pérdidas de la compra de la put, al no ejercerla, más el segmento de recta de ganancias de la compra del activo, el resultado muestra ser el mismo segmento de recta, pero transladado c = 7 unidades, sobre el eje de las abscisas. Ambos resultados generan la compra de una opción call.



Gráfica 3.7 En esta gráfica se puede observar que, al tomar una posición larga en una call con precio c = 7, precio de ejercicio **X = 70,** precio actual del activo subyacente S = 70 y al tomar una posición corta sobre el activo subyacente, resulta una estrategia que crea la compra de una opción put, con las mismas cáracterísticas de la opción call. Este resultado no es más que una suma de funciones, es decir, la recta de posibles ganancias de la compra de la opción call, al sumarla con el segmento de recta de pérdidas de la venta del activo, da como resultado una constante c = -7 (que es la prima que hay que pagar para comprar la put). Si se suman la recta de pérdidas de la compra de la call al no ejercerla, más el segmento de recta de ganancias de la venta del activo, el resultado muestra ser el mismo segmento de recta, pero transladado c = -7 unidades, sobre el eje de las abscisas. Con ambos resultados, se genera la compra de una opción put.

Ejemplo:

En el CBOE (Chicago Board Options Exchange), la cotización de las opciones sobre acciones de COCA-COLA Co., precio de ejercicio de **$40** y vencimiento a **tres meses** es la siguiente:

Opciones call → prima = $6
Opciones put → prima = $2

Además se conocen los siguientes datos:

En la Bolsa de Nueva York las acciones cotizan a **$43.**
La tasa de interés libre de riesgo es del **6% anual,**

Según la paridad put-call, el precio de la opción put debería ser igual a:

$$p = c - S + Xe^{-r(T-t)}$$
$$\Rightarrow p = \$6 - \$43 + 40e^{-0.06 \times 0.25} = \$2.40$$

Las opciones put cotizan a **$2,** que es un valor que está por debajo del precio teórico, por lo que se pueden realizar las siguientes operaciones de arbitraje:

Como el precio de la opción call está demasiado alto en relación con el precio de la opción put, un arbitrajista puede asegurar una ganancia libre de riesgo del siguiente modo:

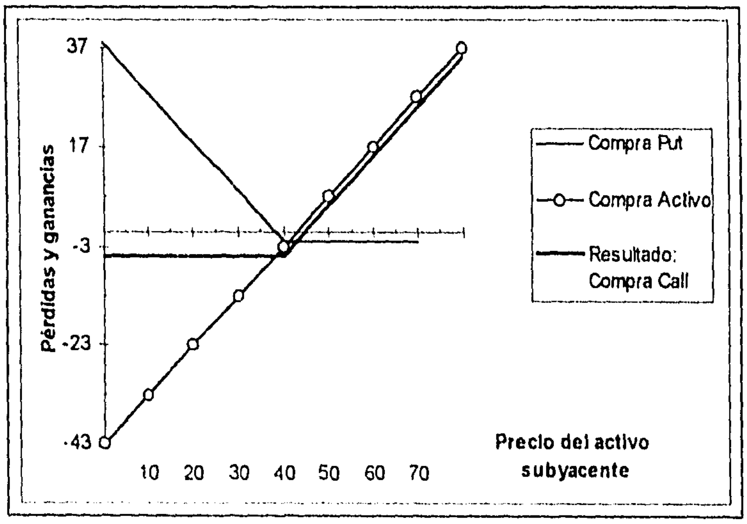
• vender una opción call sobre una acción de COCA-COLA. Entonces, el arbitrajista genera una ganancia de **$6**, que le servirá para:

• Simultáneamente comprar una opción put sobre la misma acción, lo cual le costaría **$2**, por lo tanto, sus ganancias netas serían de $6–$2 = **$4.00** .

• Comprar a crédito una acción de COCA-COLA a la tasa de interés libre de riesgo. Como el arbitrajista tiene una ganancia de **$4.00**, el préstamo sólo sería de **$43** – **$4** = **$39**, así que al final de los tres meses, el arbitrajista tendrá que regresar los **$39** invertidos a la tasa de interés libre de riesgo, es decir:

$$39e^{0.06 \times .25} = \$39.58$$

Los dos últimos procedimientos generan una posición **larga sintética sobre una opción call,** que balancea la posición corta de la opción sobre la acción de COCA-COLA. Esto se puede ver en la Gráfica 3.8 .



Gráfica 3.8

Los resultados al vencimiento de las opciones son:

Caso 1. A los tres meses $S_T \leq X = 40$

El arbitrajista ejerce la opción put y recibe **$40.00.** La opción call no es ejercida. Además, el arbitrajista paga el crédito de **$39**, con sus intereses, es decir, paga **$39.58** .

El beneficio generado en este caso es: **$40.00 – $39.58 = $0.42 .**

Caso 2. A los tres meses $S_T > X = 40$

Al arbitrajista le ejercen la opción call a $40 y paga el crédito, es decir, el beneficio para el arbitrajista también es de **$0.42.** Esta posibilidad de arbitraje se intentaría aprovechar por todos los agentes del mercado, lo cual conduciría los precios a un nivel en el que se cumpliera la paridad put-call.

La paridad put-call es válida sólo para opciones Europeas, sin embargo, es posible derivar algunas relaciones entre los precios de las opciones put y call Americanas sobre activos que no pagan dividendos.

Como $\mathbf{P} > \mathbf{p}$, entonces, de la ecuación (3.10) es válido lo siguiente:

$$\mathbf{P} > c - S + Xe^{-r(T-t)}$$

$$\text{y como } c = \mathbf{C}, \Rightarrow \mathbf{P} > C - S + Xe^{-r(T-t)} \tag{3.12}$$

EFECTO DE LOS DIVIDENDOS EN LA PARIDAD PUT-CALL

Cuando hay dividendos durante la vigencia de las opciones, la paridad put-call tiene una cierta variante, entonces, la ecuación (3.9) se modifica de la siguiente manera:

$$c + \mathbf{D} + Xe^{-r(T-t)} = p + S$$

Redefiniendo los portafolios A y C, utilizando el mismo argumento y utilizando la definición de D, ya antes mencionada, se puede llegar a la igualdad anterior.

3.5 EL MODELO BINOMIAL

Antes de introducir el Modelo Binomial para valuación de opciones, es necesario dar ciertas definiciones y recordar algunas ditribuciones de probabilidad, las cuales están relacionadas fuertemente con el modelo binomial. Este modelo de valuación supone que la evolución de los precios del activo subyacente sigue un ***proceso binomial*** sobre períodos discretos, además de utilizar el ***principio del mundo neutral al riesgo* y que no hay oportunidades de arbitraje.**.

3.5.1 LA DISTRIBUCIÓN BERNOULLI Y LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Si un experimento **X** tiene dos posibles resultados, **"éxito"**, **"fracaso"**, representados por las letras **E** y **F** y sus probabilidades son respectivamente **p**, y **1 – p (también denotada con q)**, entonces, este experimento es llamado un **ensayo Bernoulli.** Si una variable aleatoria **x** es definida como **1** si el ensayo Bernoulli resulta en términos de "éxito" (E) y **0** si el mismo ensayo resulta en términos de "fracaso" (F), entonces **x** tiene una **distribución de probabilidad Bernoulli (o función de densidad)** con parámetros **p = P(éxito).**

Definición:

Una variable aleatoria **x** tiene una **distribución Bernoulli**, y se conoce como variable aleatoria Bernoulli, si y sólo si, su **función de densidad** está dada por:

$$f_x(x;p) = P[X = x] = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} & \text{para } x = 0,1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde el parámentro p satisface $0 \le p \le 1$.

Las secuencias de **ensayos Bernoulli** se conocen como **ensayos repetidos**, entonces, para obtener la fórmula de la probabilidad de **"x éxitos en n ensayos repetidos"**, cuando el número de ensayos es fijo, el parámetro p (la probabilidad de un éxito) es el mismo para cada ensayo y cuando todos los ensayos son independientes, es necesario observar que la probabilidad de obtener **x éxitos y (n – x) fracasos en su orden específico, es decir,**

$$\underbrace{\text{EEEEE...EEE}}_{\text{x éxitos}}\underbrace{FFFFF...FFF}_{\text{n-x fracasos}}$$

es

$$\text{ppppp...ppp}qqqqq...qqq = p^x q^{n-x}$$

Existe un probabilidad **p** para cada éxito, una probabilidad **(1–p) = q** para cada fracaso y las **x** probabilidades **p** y **(n – x)** probabilidades **q** se multiplican entre sí en virtud de la suposición de **independencia.** Como esta probabilidad se aplica a **una secuencia cualquiera de n ensayos en los que hay x éxitos y (n – x) fracasos,** sólo se tiene que contar cuántas secuencias de este tipo hay y después multiplicar $p^x q^{n-x}$ por ese número. El número de formas en que se pueden seleccionar los **x** ensayos, los cuales serán éxitos, es :

$$\frac{n!}{x!(n-x)!} = \binom{n}{x}$$

Por lo tanto, la probabilidad de obtener "x éxitos en n ensayos" es $\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$.

Definición:

Una variable aleatoria **x** tiene una **distribución binomial** y se conoce como variable aleatoria binomial, sí y sólo sí, su **función de densidad** está dada por:

$$f_x(x;n,p) = P[X = x] = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} & \text{para } x = 0,1,2,\ldots,n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por consiguiente, el número de éxitos en n ensayos es una variable aleatoria que tiene una distribución binomial con los parámetros n y p. El nombre de **"distribución binomial"** se deriva de los valores de $\mathbf{f_X(x;n,p)}$ para $\mathbf{x = 0,1,2,\ldots,n}$. Estos valores son los términos sucesivos de la expansión binomial de $[(1-p) + p]^n = (1)^n = 1$, donde,

$$(q+p)^n = \binom{n}{0}q^n + \binom{n}{1}p^1q^{n-1} + \binom{n}{2}p^2q^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n}p^n$$

Es fácil observar que

$$\binom{n}{0}q^n = f_X(0;n,p),\ \binom{n}{1}p^1q^{n-1} = f_X(1;n,p),\ \text{y en general, } f_X(x;n,p) = \binom{n}{x}p^xq^{n-x}.$$

Como $\mathbf{f_X(x;n,p)}$ es positivo para $\mathbf{x} = 0,1,\ldots,n$ y $\sum_x f_X(x;n,p) = \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}p^xq^{n-x} = (q+p)^n = 1$,

ya que $\mathbf{(q + p) = 1}$, entonces, $\mathbf{f_X(x;n,p)}$ satisface las propiedades necesarias de una función de densidad, así que,

$F_X(x) = P[X \leq x] = \sum_x f_x(x;n,p)$, es la *función de distribución* o **distribución acumulativa de x**.

3.5.2 EL COMPORTAMIENTO DE LOS PRECIOS DEL ACTIVO SUBYACENTE COMO UN PROCESO ESTOCÁSTICO

Una variable cuyo **valor evoluciona en el tiempo de manera aleatoria** está siguiendo un proceso estocástico.

Según los valores que pueda tomar la variable estocástica en cuestión, el proceso estocástico puede clasificarse como ***de variable discreta*** o ***de variable continua***. Un proceso de variable discreta puede ser, por ejemplo, el número obtenido al tirar un dado, ya que los únicos resultados posibles son los números enteros del uno al seis, nunca saldrá 4.4678. Un proceso de variable continua podría ser la temperatura diurna al mediodía, ya que la temperatura no tiene por qué tener ningún valor especial.

De manera análoga, se pueden definir procesos estocásticos ***de tiempo continuo*** o ***de tiempo discreto***. Un proceso de tiempo discreto es aquel cuya variabilidad no cambia constantemente de valor, sino que sólo lo hace en ciertos momentos determinados. Si se denota a $\mathbf{S_T}$ como el valor de una acción en una **T-ésima** unidad de tiempo, se puede representar su evolución mediante una familia de variables aleatorias $\{S_0, S_1, \ldots\}$ clasificadas por el parámetro ***de tiempo discreto T.*** El número $\mathbf{X_t}$ de accidentes automovilísticos en una ciudad durante el intervalo $\mathbf{[0, t]}$ aumenta la colección de variables aleatorias $\{X_t : t \geq 0\}$ clasificadas por el ***parámetro de tiempo continuo t.*** Los valores que toma $\mathbf{X_t}$ son llamados sus estados y los cambios en el valor de X_t reciben el nombre de ***transiciones*** entre sus estados

Definición:

Por proceso estocástico se entiende una familia de variables aleatorias $\{T_n : n \geq 0\}$, donde n es un punto en un espacio N, llamado ***espacio parametral*** y donde para cada $n \in N$, T_n es un punto en un espacio S, llamado ***espacio de estados.***

Se puede imaginar la familia $\{\mathbf{T_n} : \mathbf{n} \geq 0\}$ como la trayectoria de una partícula que se mueve "al azar" en el espacio $\mathbf{S}$, siendo $\mathbf{T_n}$ su posición en el instante **n.** Un registro de una de estas trayectorias se conoce como ***realización*** del proceso.

En general, los activos financieros suelen seguir procesos de variable discreta (por ejmplo, las acciones suelen tomar valores que son múltiplos de 1/8 = .125 dólares), pero es frecuente tratarlos como si fuesen de variable continua porque en la práctica los movimientos mínimos permitidos son tan pequeños que no importa mucho la distinción, además, el cálculo integral y diferencial continuo es más fácil que el discreto. En cuanto al tiempo, podría decirse que los activos financieros siguen procesos de tiempo discreto también, ya que casi todos los mercados cierran al menos una vez al día y durante este tiempo los pecios no pueden cambiar. En la práctica, **los precios siguen cambiando aún cuando el mercado está cerrado**[1], ya que el precio de apertura no tiene por qué ser el precio de cierre del día anterior. Por lo tanto resulta convencional suponer que el **proceso estocástico seguido por los activos financieros es un proceso de variable continua y tiempo continuo.**

3.5.2.1 CAMINATA ALEATORIA SIMPLE

Considérese el proceso estocástico como la trayectoria del precio de un activo que se mueve a lo largo de un eje con pasos de **una unidad de tiempo.** En el tiempo $\mathbf{n = 0}$, el precio del activo vale **S,** en el tiempo $\mathbf{n = 1}$, el precio del activo aumenta de **S** a **Su,** o disminuye de **S** a **Sd** $(\mathbf{u > 1;\ d < 1})$, con las probabilidades respectivas de **p** y $\mathbf{q = 1-p}$. En el tiempo **n,** el precio del activo se mueve de su posición actual $\mathbf{T_{n-1}}$, $\mathbf{Su^z d^{n-1-z}(u-1)}$ unidades de distancia hacia la derecha (aumenta) o $\mathbf{Su^z d^{n-1-z}(1-d)}$ unidades hacia la izquierda (disminuye), donde **(u-1)** es el incremento proporcional, **(1-d)** es el decremento proporcional y **z** es el número de veces que la acción sube, por lo tanto, **(n–z)** es el número de veces que la acción baja, con $\mathbf{0 \leq z \leq n}$. Este proceso estocástico tiene un ***espacio parametral de tiempo discreto*** $N = \{0,1,2,\ldots\}$, donde para cada $n \in N$, T_n es un punto en un espacio $S = \{\mathbf{Sd^z, Sud^{z-1}, Su^2d^{z-2}, \ldots, Su^{z-2}d^2, Su^{z-1}d, Su^z}\}$, llamado ***espacio de estados discreto***.

Supóngase que $\mathbf{X_n}$ denota las **pérdidas/ganancias** de una acción en el **n-ésimo** período, es decir, el movimiento ya sea a la alza o a la baja de la posición $\mathbf{T_{n-1}}$ a la posición $\mathbf{T_n}$ en el

[1]Algunos estudiosos han demostrado que cambian menos cuando el mercado está cerrado. Fama, E. "The bahaviour of Stock Market Prices" Journal of Business 38 (1965) 34-105.

tiempo **n**. De acuerdo con ésto, el ***proceso de desplazamiento*** **(incremento/decremento)** $\{X_n\}$ asociado con $\{T_n\}$ es una secuencia **de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas** con la siguiente distribución:

$$P[X_n = Su^z d^{n-z}(u-1)\,] = p, \qquad P[X_n = Su^z d^{n-z}(1-d)\,] = q = 1-p$$

para cada $n \geq 0$ y $0 \leq z \leq n$.

El ***proceso de posición*** $\{T_n\}$ está dado entonces por:

$$T_n := X_1 + \ldots + X_n, \qquad T_0 = 0 \quad \text{(Si es que la acción comienza con un valor de cero).}$$

Definición:

El proceso estocástico $\{T_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ es llamado ***una caminata aleatoria simple.*** El proceso relacionado $T_n^x = T_n + x$, $n = 0,1,2,\ldots$ es llamado ***una caminata aleatoria simple con punto inicial x.***

Si X_n es el desplazamiento del precio de la acción en el n-ésimo período, entonces $T_0^x = x$ es el precio actual **S** del activo y T_n^x es el precio del activo al tiempo **n.**

Ahora corresponde determinar la distribución de T_n^x. Para calcular la probabilidad de que $\{T_n^x = y\}$ hay que contar el número de incrementos durante el ***trayecto*** de **x** a **y** en **n** períodos.De este modo, se sabe que **z** es el número de veces que la acción sube, es decir, el número de veces que el valor **S** de la acción en T_0^x es multiplicado por **u**, entonces, **(n-z)** es el número de veces que el valor de la acción es multiplicado por **d.** Para el n-ésimo período, se tiene que los posibles valores de la acción son $Su^z d^{n-z}$, **donde** $z = 0,1,2,\ldots,n$. La probabilidad de tener un **valor y** de la acción que haya tenido **z** aumentos y **(n–z)** descensos en **n** períodos es $p^z(1-p)^{n-z}$. Como existen diversas formas de que la acción llegue a cierto valor **y**, entonces se tiene que:

$$P(T_n^x = y) = \begin{cases} \binom{n}{z} p^z (1-p)^{n-z} & \textbf{para } 0 \leq z \leq n \\ 0 & \textbf{en otro caso} \end{cases}$$

Esto quiere decir que el precio del activo puede representarse por medio de un ***porceso binomial*** **sobre períodos discretos.**

Haciendo analogía con el desarrollo anterior de las caminatas aleatorias, se pueden mostrar ejemplos del Modelo Binomial para calcular el precio de una opción a ***un período, dos períodos*** y generalizar a ***n períodos,*** lo cual se estudia en los siguientes apartados.

3.5.3 MODELO BINOMIAL A UN PERÍODO

Sin oportunidades de arbitraje

Considérese una situación en donde el precio actual de una acción **que no paga dividendos** es **$20** y se sabe que al final de **3 meses** el precio de la acción será **$22 con probabilidad p** ó **$18 con probabilidad q = (1–p).** Bajo esta suposición, se quiere valuar una opción call europea para comprar la acción en **$21** en **3** meses. Esta opción tendrá uno de dos valores al final de los 3 meses. Si el precio de la acción cambia de **$20** a **$22**, el valor de la opción será **$1**; Si el precio de la acción cambia de **$20 a $18**, el precio de la opción será cero.

precio de la acción = $22
precio de la opción = max(S_T – X,0)
= max (22 – 21, 0) =1

p

precio de la acción = $20

1 – p

precio de la acción = $18
precio de la opción = max(S_T – X,0)
= max (18 – 21, 0) =0

Aparentemente un argumento bastante sencillo puede ser usado para valuar la opción call en este ejemplo, para lo cual sólo hay que suponer que no hay **oportunidades de arbitraje para un inversionista,** además del planteamiento de las siguientes hipótesis:

1. No existen impuestos y costos de transacción (corretajes, diferenciales entre precios de compra y venta en el mercado, etc.).
2. Los activos son completamente divisibles, es decir, se puede comprar 1.65 acciones o vender medio contrato de opción.
3. Se pueden vender los activos en *descubierto* (o a crédito) sin límites, esto es, se puede vender una acción sin poseerla previamente con el compromiso de entrega en una fecha posterior.
4. No se exigen depósitos de garantía a la venta de opciones y a las ventas en descubierto.
5. Se puede prestar y tomar prestado al mismo tipo de interés (tasa libre de riesgo).
6. Cualquier ganancia o pérdida está sujeta a la misma tasa de de impuestos.
7. Todas las transacciones se pueden realizar de forma simultánea.
8. Las transacciones se realizan sin que afecten a los precios del mercado, es decir, que el mercado no se vea influido por las transacciones de un agente económico en particular.
9. **El precio del subyacente evoluciona según un proceso binomial multiplicativo.**
10. **El activo subyacente no paga dividendos**

Siendo así, se construye un portafolio el cual está constituido **por la acción** y **por la opción.** Este portafolio será construido de tal forma que no exista incertidumbre sobre su valor al final de los **3** meses, entonces el argumento es que, como el portafolio está libre de riesgo, las ganancias derivadas de él deben ser igual a la tasa libre de riesgo. Esto permite saber el precio de la construcción del portafolio y por lo tanto el precio de la opción. Debido a que hay dos instrumentos (la acción y la opción) y sólo dos posibles resultados para ambos, siempre es posible construir un portafolio libre de riesgo.

Para ver más claro lo anterior, se construirá el siguiente portafolio de tal forma que sea libre de riesgo:

Considérese un portafolio que consiste de una **posición larga en Δ acciones** de un activo y una **posición corta en una opción call Europea sobre el mismo activo. ¿Cuál será el valor de Δ que hace al portafolio estar libre de riesgo?**. Si el precio del activo se incrementa de **20** a **22**, el valor de las acciones es **22Δ** y el valor de la opción call es **$1**, así que el valor total del portafolio es **22Δ – 1**. Si el precio del activo se decrementa de **20** a **18**, el valor de las acciones es **18Δ** y el valor de la opción call es **cero**, de tal forma que el valor total del portafolio es **18Δ**. El portafolio está libre de riesgo si el valor de **Δ** es escogido de tal forma que el valor final del portafolio sea el mismo para los dos precios alternativos del activo. Es decir:

$$22\Delta - 1 = 18\Delta$$

$$\Rightarrow \Delta = 0.25$$

Un portafolio libre de riesgo es, por lo tanto:

Adquirir una posición larga en: 0.25 acciones Adquirir una posición corta en: 1 opción

Si el precio de la acción se incrementa hasta **22**, el valor del portafolio es:

$$[\,22\,(0.25)\,] - 1 = 4.5$$

Si el precio de la acción se decrementa hasta **18**, el valor del portafolio es:

$$18\,(0.25) = 4.5$$

Es fácil observar que si el precio del producto se decrementa o se incrementa, el valor del portafolio es siempre **4.5** al vencimiento de la opción.

Un portafolio libre de riesgo debe, en ausencia de oportunidades de arbitraje, ganar la tasa de interés libre de riesgo. En el ejemplo anterior, supóngase una tasa libre de riesgo de **12%** anual, por lo tanto, el valor del portafolio en este momento debe ser el valor presente de **4.5, es decir,**

$$4.5e^{-0.12(0.25)} = 4.367$$

El precio del activo en este momento es de **$20**. El precio de la opción es denotado por c. El valor del portafolio hoy es por lo tanto, **[22 (0.25)] – c = 5–c,** entonces se tiene que:

$$5 - c = 4.367$$
$$\Rightarrow \quad c = 0.633$$

Lo anterior muestra que en ausencia de oportunidades de arbitraje (pues no hay discrepancia en los dos precios posibles del portafolio), el valor actual de la opción debe ser **$0.633**. Si el valor de la opción fuera más de **0.633**, el portafolio costaría menos de **4.367** y ganaría más que la tasa libre de riesgo. Si el valor de la opción fuera menos que **0.633**, vendiendo el portafolio proporcionaría una forma de pedir dinero pestado a menos que la tasa libre de riesgo.

GENERALIZACIÓN

El argumento antes presentado puede generalizarse considerando el activo cuyo precio es S y una opción call Europea sobre el mismo producto cuyo valor actual es **c**. Supóngase que la opción dura por un tiempo **T** y que durante el tiempo de vida de la opción, el precio del producto puede incrementarse de **S** a un nuevo valor **Su** con probabilidad **p**, o decrementarse de **S** a un nuevo valor **Sd** con probabilidad **1–p (u > 1;d < 1).** El incremento proporcional en el precio del producto cuando hay un movimiento ascendente es **u – 1**; el decremento proporcional en el precio del producto cuando hay un movimiento descendente es **1 – d.** Si el precio del activo (stock price) se incrementa a **Su**, entonces considérese que el precio de la opción será $\mathbf{c_u}$, si el precio se decrementa a **Sd**, considérese que el precio de la opción será $\mathbf{c_d}$;

$$\begin{array}{lcl} & & \mathbf{Su} \\ & \overset{p}{\nearrow} & \mathbf{c_u = max(Su - X, 0)} \\ \text{precio del activo} = \mathbf{S} & & \\ \text{precio de la opción} = \mathbf{c} & & \\ & \underset{1-p}{\searrow} & \mathbf{Sd} \\ & & \mathbf{c_d = max(Sd - X, 0)} \end{array}$$

De la misma forma que en el ejemplo anterior, supóngase un portafolio que consiste de **una posición larga en Δ** acciones y **una posición corta en una opción.** Igualmente se requiere calcular el valor de **Δ** que haga al portafolio libre de riesgo. Si hay un movimiento ascendente en el precio del producto, el valor del portafolio al vencimiento de la opción será:

$$\mathbf{Su\Delta - c_u}$$

Si hay un movimiento descendente en el precio del producto, el valor del portafolio al vencimiento de la opción será:

$$\mathbf{Sd\Delta - c_d}$$

Las dos expresiones anteriores son iguales cuando:

$$\mathbf{Su\Delta - c_u = Sd\Delta - c_d}$$
$$\Rightarrow \mathbf{Su\Delta - Sd\Delta = c_u - c_d}$$
$$\Rightarrow \mathbf{\Delta(Su - Sd) = c_u - c_d}, \quad \therefore \quad \text{la } \Delta \text{ que cumple con la ecuación es:}$$
$$\Delta = \frac{\mathbf{c_u - c_d}}{\mathbf{Su - Sd}}$$

En este caso el portafolio es libre de riesgo y debe ganar la tasa de interés libre de riesgo. La ecuación $\Delta = \frac{\mathbf{c_u - c_d}}{\mathbf{Su - Sd}}$ muestra que Δ es la razón de cambio en el precio de la opción con respecto al precio del producto.

Si se denota la tasa de interés libre de riesgo con **r**, el valor presente del portafolio debe ser :

$$\left[\mathbf{Su\Delta - c_u}\right]\mathbf{e}^{-rT}$$

Se sabe que el precio del producto en este momento es **S**, por lo tanto, el valor del portafolio hoy es **SΔ–c**, entonces:

$$\mathbf{S\Delta - c} = \left[\mathbf{Su\Delta - c_u}\right]\mathbf{e}^{-rT}$$

Sustituyendo $\Delta = \frac{\mathbf{c_u - c_d}}{\mathbf{Su - Sd}}$ en la ecuación anterior se tiene que:

$$\mathbf{S}\left(\frac{\mathbf{c_u - c_d}}{\mathbf{Su - Sd}}\right) - \mathbf{c} = \left[\mathbf{Su}\left(\frac{\mathbf{c_u - c_d}}{\mathbf{Su - Sd}}\right) - \mathbf{c_u}\right]\mathbf{e}^{-rT}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathbf{c_u - c_d}}{\mathbf{u - d}} - \mathbf{c} = \left[\frac{\mathbf{c_u u - c_d u}}{\mathbf{u - d}} - \mathbf{c_u}\right]\mathbf{e}^{-rT}$$

$$\Rightarrow c = -\left[\frac{c_u u - c_d u}{u-d} - c_u\right]e^{-rT} + \frac{c_u - c_d}{u-d}$$

$$\Rightarrow c = \left[\frac{-c_u u}{u-d} + \frac{c_d u}{u-d} + c_u\right]e^{-rT} + \frac{c_u - c_d}{u-d}$$

$$\Rightarrow c = -\frac{c_u u e^{-rT}}{u-d} + \frac{c_d u e^{-rT}}{u-d} + c_u e^{-rT} + \frac{c_u - c_d}{u-d}$$

$$\Rightarrow c = e^{-rT}\left[\frac{-c_u u}{u-d} + \underbrace{\frac{c_d u}{u-d} + c_u}_{\substack{\text{sumando estos té rmiros} \\ \text{da como resultado (2)}}} + \frac{c_u - c_d}{u-d}e^{rT}\right] \text{ ----------- (1)}$$

$$\frac{c_d u}{u-d} + c_u = \frac{c_d u + c_u(u-d)}{u-d} = \frac{c_d u + c_u u - c_u d}{u-d} \text{ -------------------- (2)}$$

Sustituyendo (2) en (1) queda :

$$c = e^{-rT}\left[\frac{-c_u u}{u-d} + \frac{c_d u + c_u u - c_u d}{u-d} + \frac{c_u - c_d}{u-d}e^{rT}\right]$$

$$\Rightarrow c = e^{-rT}\left[\frac{-c_u u + c_d u + c_u u - c_u d}{u-d} + \frac{c_u - c_d}{u-d}e^{rT}\right]$$

$$\Rightarrow c = e^{-rT}\left[\frac{c_d u - c_u d}{u-d} + \frac{c_u - c_d}{u-d}e^{rT}\right]$$

$$\Rightarrow c = e^{-rT}\left[\frac{c_d u - c_u d}{u-d} + \frac{c_u e^{rT} - c_d e^{rT}}{u-d}\right]$$

$$\Rightarrow c = e^{-rT}\left[\frac{c_u e^{rT} - c_u d + c_d u - c_d e^{rT}}{u-d}\right]$$

$$\Rightarrow c = e^{-rT}\left[\frac{c_u\left(e^{rT} - d\right)}{u-d} + \frac{c_d\left(u - e^{rT}\right)}{u-d}\right]$$

$$\text{Sea } \frac{e^{rT} - d}{u - d} = p \Rightarrow \frac{u - e^{rT}}{u - d} = 1 - p,$$

$$\text{pues } 1 - \frac{e^{rT} - d}{u - d} = \frac{(u - d) - (e^{rT} - d)}{u - d} = \frac{u - d - e^{rT} + d}{u - d} = \frac{u - e^{rT}}{u - d}$$

$$\Rightarrow c = e^{-rT}[c_u p + c_d(1 - p)]$$

Con $c = e^{-rT}[c_u p + c_d(1-p)]$ y sustituyendo los valores de p y 1– p, se puede calcular el precio de una opción utilizando el modelo binomial de "un solo paso".

Antes de la generalización, se empezó el tema con un ejemplo numérico, como ya se tiene la ecuación general, se calculará nuevamente el precio de la opción de dicho ejemplo:

Se tiene que $u = 1.1$, $d = 0.9$, $r = 0.12$, $T = 0.25$, $c_u = 1$, $c_d = 0$.

$p = \dfrac{e^{0.03} - 0.9}{1.1 - 0.9} = 0.6523 \quad \Rightarrow \quad c = e^{-0.03}[0.6523(1) + 0.3477(0)] = 0.633$, que es el mismo valor que se obtuvo al principio.

La fórmula $c = e^{-rT}[c_u p + c_d(1-p)]$ para valuar opciones en un período, no involucra las probabilidades de una alza o baja del precio del activo. La razón principal es que la opción no se está valuando en términos absolutos, es decir, su valor está siendo calculado en términos del precio del activo subyacente. Las probabilidades de movimientos futuros a la alza o a la baja ya han sido incorporados en el precio del activo. De esto resulta que no se necesitan tomar dichas probabilidades nuevamente cuando las opciones son valuadas en términos del precio del activo subyacente.

3.5.3.1 PRINCIPIO DE UN MUNDO NEUTRAL AL RIESGO

Aunque no sea necesario hacer ninguna suposición sobre las probabilidades de una alza o una baja del precio del activo, es común interpretar la variable **p** como la probabilidad de un movimiento ascendente del precio del activo y la variable **1 – p** como la probabilidad de un movimiento descendente del precio del activo. De acuerdo con ésto, la expresión:

$$pc_u + (1 - p)c_d,$$

es la ganancia esperada de la opción. Con esta interpretación de p, la ecuación $c = e^{-rT}[c_u p + c_d(1-p)]$ indica que el valor de la opción en este momento es su valor futuro esperado, descontado a la tasa libre de riesgo.

Ahora se verá cual es la ganancia esperada del activo cuando la probabilidad de un movimiento a la alza se asume **p**.

El precio esperado del activo al tiempo T, $E(S_T)$, está dado por:

$$E(S_T) = pSu + (1-p)Sd$$
$$= pS(u-d) + Sd$$

$$\text{como } p = \frac{e^{rT}-d}{u-d} \Rightarrow E(S_T) = \frac{e^{rT}-d}{u-d}S(u-d)+Sd$$

$$= (e^{rT}-d)S+Sd$$
$$= Se^{rT}-Sd+Sd$$
$$\Rightarrow E(S_T) = Se^{rT}$$

Lo anterior refleja que **el precio del activo crece en promedio a la tasa libre de riesgo.** Tomar a **p** igual a la probabilidad de un movimiento a la alza, equivale a asumir que el rendimineto sobre el activo es igual a la tasa libre de riesgo. Para que esto se cumpla, hay que suponer que todos los individuos del mundo son **neutros al riesgo,** lo que es igual a un ***mundo neutral al riesgo.*** Esto quiere decir que **los inversionistas no requieren una compensación por el riesgo que asumen** y **el rendimiento esperado de todos los activos es la tasa libre de riesgo.** Un principio general muy importante en la valuación de opciones se conoce precisamente como ***valuación neutral al riesgo,*** el cual establece que se puede asumir con completa libertad, que el ***mundo es neutral al riesgo*** al valuar las opciones.

Regresando al ejemplo antes mencionado, donde el precio actual del activo es de \$20 y se moverá ya sea a \$22 o a \$18 al final de 3 meses, la opción call Europea tiene un precio de ejercicio de \$21 y fecha de expiración a 3 meses, la tasa de interés libre de riesgo es del 12% anual.

Sea **p** la probabilidad de un movimiento a la alza del precio del activo en un mundo neutral al riesgo, siendo así, el rendimiento esperado sobre el activo debe ser la tasa libre de riesgo, ésto significa que **p** debe satisfacer:

$$22p + 18(1-p) = 20e^{0.12(0.25)}$$
$$\Rightarrow 4p = 20e^{0.12(0.25)} - 18$$
$$\Rightarrow p = 0.6523$$

Al final de tres meses, la opción call tiene una probabilidad de 0.6523 de valer 1 y una probabilidad de 0.3477 = (1−p) de valer cero, entonces, el rendimiento esperado de la opción es:

$$pc_u + (1 - p)c_d$$

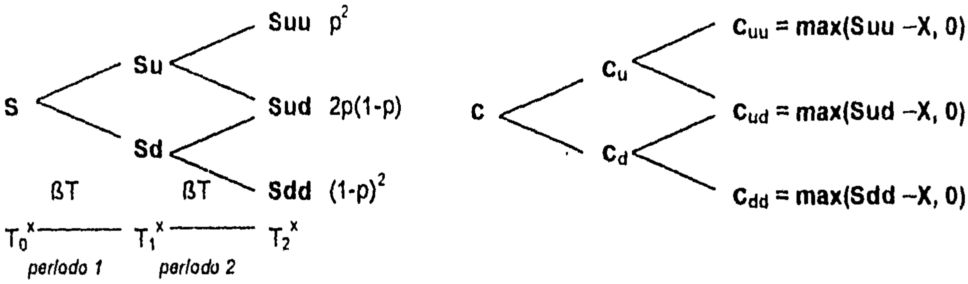
$$\Rightarrow \textbf{sustituyendo, } 0.6523(1) + 0.3477(0) = \$0.6523$$

El valor anterior descontado a la tasa libre de riesgo, $\mathbf{0.6523e^{-0.12(0.25)}} = \mathbf{0.633}$, da como resultado el mismo valor obtenido anteriormente bajo las suposiciones de **no oportunidades de arbitraje,** ésto quiere decir que suponer que no hay oportunidades de arbitraje y suponer **un mundo neutro al riesgo** dan los mismos resultados.

3.5.4 MODELO BINOMIAL: EXTENSIÓN A *n* PERÍODOS

Ahora se hará la extensión a **n** periodos tomando nuevamente una opción call Europea.

Con **dos períodos (n=2)**, el diagrama de evolución del precio del activo subyacente y del precio de la opción sería como se muestra en los dos ***árboles binomiales*** siguientes:

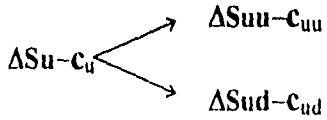


Para dos períodos se puede aplicar nuevamente el argumento que se utilizó para un período, siendo así, se tiene que estimar $\mathbf{c_u}$ y $\mathbf{c_d}$ a partir de los valores intrínsecos conocidos en $\mathbf{T_2^x}$, posteriormente se aplica la ecuación $c = e^{-rT}\left[c_u p + c_d(1 - p)\right]$, que es la que se utiliza para un periodo para calcular **c.**

En $\mathbf{T_1^x}$ el activo subyacente vale **Su** o **Sd,** si se toma sólo el caso en que vale **Su,** su evolución para el siguiente período sería **Suu** o **Sud** y el precio de la opción evoluciona de $\mathbf{c_u}$, a $\mathbf{c_{uu}}$ o $\mathbf{c_{ud}}$. Igual que para el caso de un período, se puede construir un portafolio libre de riesgo de la siguiente manera:

- Comprar Δ acciones del activo subyacente.
- Vender la opción call Europea

Entonces el precio del portafolio sería $\mathbf{\Delta Su - c_u}$. De acuerdo con los dos posibles valores que puede tomar **Su,** la evolución del portafolio sería:



Para que el portafolio sea libre de riesgo, Δ debe cumplir la siguiente igualdad:

$$\Delta Suu - c_{uu} = \Delta Sud - c_{ud}$$

La igualdad anterior implica que el valor final del portafolio debe ser el mismo para los dos valores posibles que puede tomar **Su**, entonces,

$$\Delta = \frac{c_{uu} - c_{ud}}{(u-d)Su},$$

Con esta **Δ**, el portafolio está libre de riesgo y debe ganar la tasa de interés libre de riesgo. Si se denota nuevamente a **r** como la tasa de interés libre de riesgo y βT ***como la longitud de cada período***[1] (n), en años, se debe cumplir que:

$$\Delta Su - c_u = [\Delta Suu - c_{uu}]e^{-r\beta T} = [\Delta Sud - c_{ud}]e^{-r\beta T}$$

Si se sustituye $\Delta = \dfrac{c_{uu} - c_{ud}}{(u-d)Su}$, y se despeja c_u, se obtiene:

$$c_u = e^{-r\beta T}\,[\,c_{uu}\,p + c_{ud}(1-p)\,] \text{ con } p = \frac{e^{r\beta T} - d}{u-d}$$

Si el valor del activo subyacente cambia de **S** a **Sd**, su evolución para el siguiente periodo sería **Sud** o **Sdd** y el precio de la opción evoluciona de c_d, a c_{ud} o c_{dd}. De forma análoga, situándose en T_1 y para un valor del subyacente de **Sd**, por el mismo procedimiento, se obtiene:

$$c_d = e^{-r\beta T}\,[\,c_{ud}\,p + c_{dd}(1-p)\,]$$

Si se sustituye $c_u = e^{-r\beta T}\,[\,c_{uu}\,p + c_{ud}(1-p)\,]$ y $c_d = e^{-r\beta T}\,[\,c_{ud}\,p + c_{dd}(1-p)\,]$ en $c = e^{-r\beta T}[c_u p + c_d(1-p)]$, se obtiene que:

$$c = e^{-2r\beta T}\,[\,c_{uu}\,p^2 + 2p(1-p)c_{ud} + (1-p)^2\,c_{dd}\,]$$

como $c_{uu} = \max[Su^2 - X, 0]$, $c_{ud} = \max[Sud - X, 0]$ y $c_{dd} = \max[Sd^2 - X, 0]$, **entonces,**

$$\boxed{c = e^{-2r\beta T}\,[\,p^2 \max[Su^2 - X, 0] + 2p(1-p)\max[Sud - X, 0] + (1-p)^2 \max[Sd^2 - X, 0]\,]}$$

[1] **Si βT es la longitud de cada período, y n es el número de períodos, entonces, $n\beta T = T$, por lo que $\beta T = T/n$.**

La ecuación anterior, es la expresión del valor de una opción call Europea según el método binomial para dos períodos.

Para **n períodos**, el precio del activo subyacente evolucionará según el diagrama 3.1:

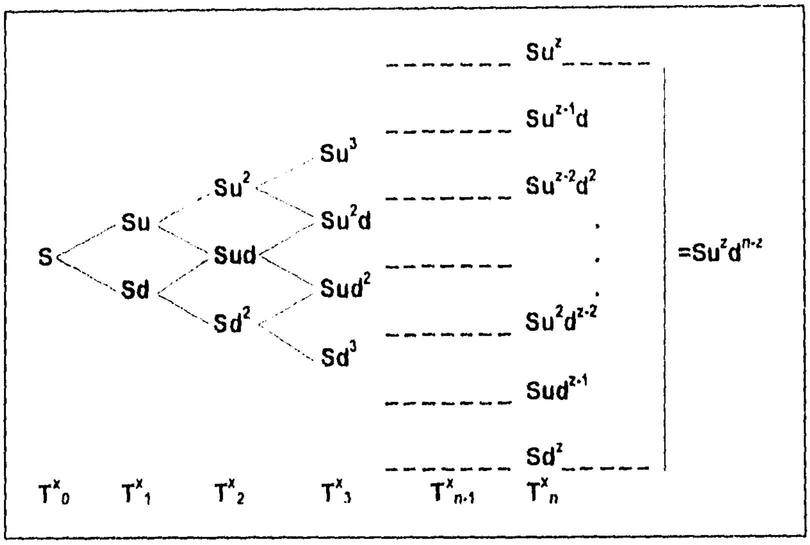


Diagrama 3.1 Evolución del activo subyacente según el proceso binomial multiplicativo en n períodos

Como ya se mencionó anteriormente (ejemplo de la caminata aleatoria), si $\mathbf{X_n}$ es el desplazamiento del precio de la acción en el n-ésimo periodo, entonces $\mathbf{T_0^x = x}$ es el precio actual **S** del activo y $\mathbf{T_n^x}$ es el precio del activo al tiempo **n**. De acuerdo con esto, $\mathbf{Su^zd^{n-z}}$ son los posibles valores que puede tomar $\mathbf{T_n^x}$. Si z es el número de veces que **S** se multiplica por **u** y **(n-z)** es el número de veces que **S** se multiplica por **d**, entonces,

$$\mathbf{P(T_n^x = Su^zd^{n-z})} = \begin{cases} \binom{n}{z} p^z(1-p)^{n-z} & \textbf{para } 0 \le z \le n \\ 0 & \textbf{en otro caso} \end{cases}$$

donde $\binom{n}{z}$ representan las posibles formas (caminos) para llegar a $\mathbf{Su^zd^{n-z}}$.

El valor de la opción evolucionará según el diagrama 3.2.

Nuevamente utilizando el principio de un mundo neutral al riesgo y suponiendo que la opción es sobre un activo que no paga dividendos, la valoración de la opción admite dos caminos:

1. Calcular los valores intrínsecos al final de los n períodos y por un procedimiento recursivo calcular el valor de la opción en cada nodo del diagrama 3.2, mediante la expresión siguiente:

$$c_{n-1} = e^{-r\beta T} \left[c_{nu}\, p + c_{nd}(1-p) \right] \quad \text{con} \quad p = \frac{e^{r\beta T} - d}{u - d}$$

donde:

c_{n-1} = valor de la opción en un nodo de **n-1**

c_{nu} = valor de la opción en **n**, cuando el precio del activo subyacente se multiplica por **u**, de **n-1** a **n**.

c_{nd} = valor de la opción en n, cuando el precio del activo subyacente se multiplica por **d**, de **n-1** a **n**.

El cálculo se inicia en **n**, último período asumido para la valoración. A partir de los valores intrínsecos en **n** (Diagrma 3.2) se calculan los valores c_{n-1} y conforme **n** disminuye, se calcula recursivamente c_{n-1} hasta el valor de la opción **c** en el momento actual (**n** = **0**).

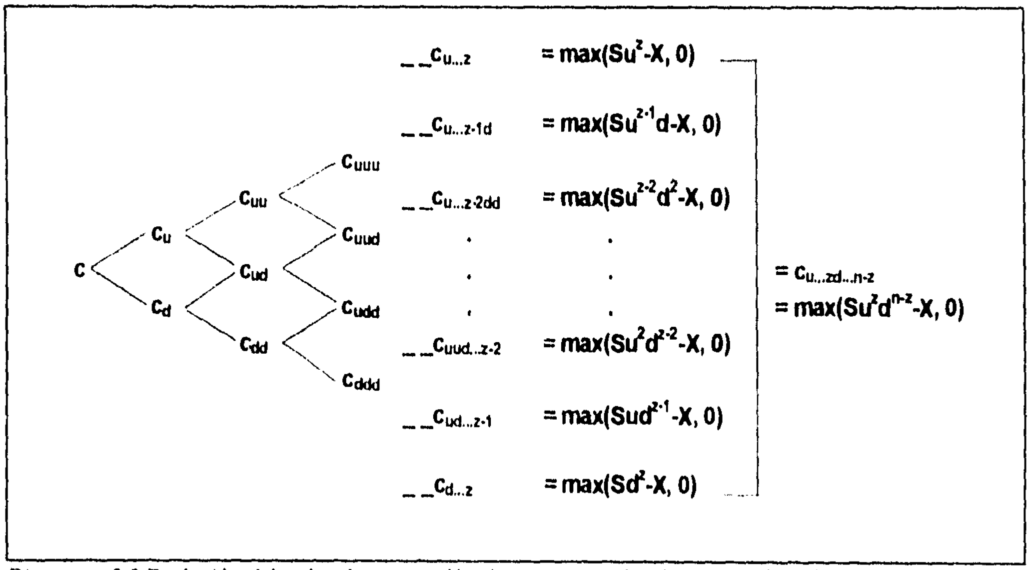


Diagrama 3.2 Evolución del valor de una opción de compra según el proceso binomial multiplicativo en n períodos del subyacente.

2. Si se observan los diagramas 3.1 y 3.2, se puede hacer una extensión de la ecuación que se obtuvo para dos períodos, además de utilizar el hecho de que:

$$P(T_n^z = Su^z d^{n-z}) = \begin{cases} \binom{n}{z} p^z (1-p)^{n-z} & \text{para } 0 \leq z \leq n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De este modo, se obtiene que:

$$c = e^{-nr\beta T}\left\{\sum_{z=0}^{n}\left(\frac{n!}{z!(n-z)!}\right)p^z(1-p)^{n-z}\,\mathrm{MAX}\left[Su^z d^{n-z} - X,\ 0\right]\right\}$$

La expresión anterior es la ***fórmula general*** de evaluación de una opción de compra Europea para **n períodos.**

Del mismo modo, el valor de una **opción put Europea** para **n** períodos se puede expresar por:

1. $p_{n-1} = e^{-r\beta T}\left[\, p_{nu}\, p + p_{nd}(1-p)\,\right]$ con $p = \dfrac{e^{r\beta T} - d}{u-d}$ **(forma recursiva)**

2. $p = e^{-nr\beta T}\left\{\sum_{z=0}^{n}\left(\frac{n!}{z!(n-z)!}\right)p^z(1-p)^{n-z}\,\mathrm{MAX}\left[X - Su^z d^{n-z},\ 0\right]\right\}$ **(fórmula general)**

La diferencia entre ambas fórmulas es que aún cuando la fórmula general es técnicamente correcta, sólo es aplicable cuando se conocen todas las circunstancias bajo las cuales un inversionista preferiría ejercer la opción antes de la fecha de vencimiento, si no se conoce ésto, no se tiene una forma de calcular el valor esperado. Para opciones Americanas, es necesario utilizar la forma recursiva, pues es necesario entrar dentro del "árbol binomial" para realizar ajustes, pues existe la posibilidad de ejercer antes de la fecha de vencimiento en caso de que en algún nodo se observe alguna ganancia.

Según el modelo binomial, la probabilidad de tener **z** evoluciones favorables (multiplicación por u) del precio del activo subyacente, en **n** períodos, es igual a:

$$\frac{n!}{z!(n-z)!}p^z(1-p)^{n-z}, \quad 0 \leq z \leq n$$

La suma de estas probabilidades debe ser igual a 1, es decir,

$$\sum_{z=0}^{n}\left(\frac{n!}{z!(n-z)!}\right)p^z(1-p)^{n-z} = 1$$

Si se define a **w** como el número entero mínimo de alzas del activo subyacente para que la opción esté in-the-money en **n** períodos, entonces por extensión, la probabilidad de tener un número mínimo de alzas del activo es igual a:

$$\mathbf{P[T_n^z \geq Su^w d^{n-w}] = P[precio\ subyacente \geq Su^w d^{n-w}]} = \sum_{z=w}^{n}\left(\frac{n!}{z!(n-z)!}\right)p^z(1-p)^{n-z}$$

Sea $\mathbf{Z(w;n,p)} = \sum_{z=w}^{n}\left(\frac{n!}{z!(n-z)!}\right)p^z(1-p)^{n-z}$, **donde Z(w;n,p)** es la ***función de distribución de la ley binomial complementaria.*** Esta función da la probabilidad acumulada de un número **w** de alzas en el precio del subyacente para **n** períodos cuando la probabilidad de una alza de un período a otro es **p**.

En una opción call Europea, la condición necesaria para que la opción esté in-the-money es:

$$\mathbf{Su^w d^{n-w} > X}$$

Despejando **w**, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Su^w d^{n-w} > X} &\Rightarrow \mathbf{\ln S + w\ln u + n\ln d - w\ln d > \ln X} \\
&\Rightarrow \mathbf{w(\ln u - \ln d) > \ln(X/S) - n\ln d} \\
&\Rightarrow \mathbf{w > \frac{\ln(X/S) - n\ln d}{\ln(u/d)}} \\
&\Rightarrow \mathbf{w > \frac{\ln(X/Sd^n)}{\ln(u/d)}}
\end{aligned}$$

Para z < w, max($Su^z d^{n-z}$ – X, 0) = 0, pues la opción está out-of-the-money.
Para z > w, max($Su^z d^{n-z}$ – X, 0) > 0, pues la opción está in-the-money.

Si **w > n**, la opción al vencimiento estará siempre fuera de dinero, por lo que **c = 0.** Por lo tanto, **w** es un valor crítico para estimar el valor de una opción.

En base a los razonamientos anteriores, la expresión general del modelo binomial se puede expresar del siguiente modo:

$$\mathbf{c = e^{-nr\beta T}\left\{\sum_{z=w}^{n}\left(\frac{n!}{z!(n-z)!}\right)p^z(1-p)^{n-z}\left[Su^z d^{n-z} - X,\ 0\right]\right\}}$$

Si se desarrolla la expresión anterior, se llega a que:

$$c = S\left\{\sum_{z=w}^{n}\left(\frac{n!}{z!(n-z)!}\right)p^z(1-p)^{n-z}\left(\frac{u^z d^{n-z}}{e^{r\beta Tn}}\right)\right\} - Xe^{-r\beta Tn}\left\{\underbrace{\sum_{z=w}^{n}\left(\frac{n!}{z!(n-z)!}\right)p^z(1-p)^{n-z}}_{\text{esta expresión es } z(w;n,p)}\right\}$$

si se toma $p^z(1-p)^{n-z}\left(\frac{u^z d^{n-z}}{e^{r\beta Tn}}\right)$ del primer té rmino,se puede agrupar de la siguiente manera:

$$\left(\frac{pu}{e^{r\beta T}}\right)^z\left(\frac{(1-p)d}{e^{r\beta T}}\right)^{n-z} = \left(\frac{p^z u^z}{e^{r\beta T}}\right)\left(\frac{(1-p)^{n-z}d^{n-z}}{e^{r\beta T(n-z)}}\right) = p^z(1-p)^{n-z}\frac{u^z d^{n-z}}{e^{r\beta Tn}}$$, entonces,

se puede tomar $p' = \frac{pu}{e^{r\beta T}}$ y $1-p' = \frac{(1-p)d}{e^{r\beta T}}$. Si se sustituye p' y $1-p'$ en

$$c = S\left\{\sum_{z=w}^{n}\left(\frac{n!}{z!(n-z)!}\right)p^z(1-p)^{n-z}\left(\frac{u^z d^{n-z}}{e^{r\beta Tn}}\right)\right\} - Xe^{-r\beta Tn}Z[w;n,p] \quad ,$$

$$\Rightarrow c = S\left\{\sum_{z=w}^{n}\left(\frac{n!}{z!(n-z)!}\right)p'^z(1-p')^{n-z}\right\} - Xe^{-r\beta Tn}Z[w;n,p]$$

$$\Rightarrow c = S\,Z[w;n,p'] - Xe^{-r\beta Tn}Z[w;n,p]$$

La expresión **$c = SZ[w;n,p'] - Xe^{-r\beta Tn}Z[w;n,p]$, es la *fórmula general* del valor de una *opción de compra* en base a la ley binomial complementaria.**

Por la paridad put-call, $p = c - S + Xe^{-r\beta Tn}$. Si se reemplaza el valor de c, se obtiene:

$$p = Xe^{-r\beta Tn}\{1 - Z[w;n,p]\} - S\{1 - Z[w;n,p']\},$$

que es la fórmula general del valor de una *opción de venta* según la ley binomial complementaria.

3.6 EL MODELO DE BLACK-SCHOLES

El método que se presentará en este apartado está basado en una ecuación que apareció por primera vez en un famoso estudio de **Fisher Black y Myron Scholes en 1973**[4] con una derivación algo más complicada.

3.6.2 PROCESOS DE MARKOV Y LA EFICIENCIA DÉBIL DEL MERCADO

Un proceso estocástico posee la **propiedad de Markov** cuando su **estado actual** es la **única variable necesaria para predecir su futuro**, su estado anterior y su evolución histórica no afectan a las predicciones sobre su futuro. Considérese un proceso estocástico de variable discreta $\{X_n\}$. Se puede pensar en $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ como **"el pasado"**, X_n como **"el presente"** y $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$ como **"el futuro"** del proceso relativo al tiempo **n.** La ley de evolución de un proceso estocástico comúnmente es pensada en términos de **la probabilidad condicional del futuro dados los estados presente y pasado del proceso.** En el caso de una secuencia de variables aleatorias independientes o de una caminata aleatoria simple, esta distribución condicional no depende del pasado.

Definición:

Un proceso estocástico $\{X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots\}$ posee la **propiedad de Markov** si para cada n y m, la distribución condicional de $X_{n+1}, \ldots, X_{n+m}$ **dado** $X_0, X_1, \ldots, X_n$ es la misma que su distribución condicional dado X_n sola. Un proceso que posee la propiedad de Markov es llamado un **proceso de Markov**. Si además, el **espacio de estados del proceso es contable**, el proceso Markov es llamado una **cadena de Markov.**

Para este método, la suposición común es que los activos financieros siguen procesos de Markov y toda la información que afecta a su precio está contenida en su valor actual; no se pueden hacer predicciones sobre su evolución ni obtener información adicional sobre la distribución de sus probabilidades basándose en el pasado. El valor actual es la única variable que se toma en cuenta.

Supóngase que el precio actual de una acción de CEMEX es $100, si el precio de la acción sigue un proceso de Markov, las predicciones del futuro no deben verse afectadas por el precio de hace una semana, un mes, o un año. Lo único relevante para la información requerida es el hecho de que el precio es actualmente $100.

La propiedad de Markov formula la llamada ***"eficiencia débil"*** de un mercado, hipótesis según la cual el precio anual contiene toda la información disponible sobre un activo y por lo tanto, los analistas de acciones, bonos o divisas no pueden obtener rendimientos superiores a la media mediante análisis de gráficas de precios históricos.

---

[4]Black, F&M. Scholes "The Pricing of Options on Corporate Liabilities" *Journal of Political Economy* 81 (1973) 637-659.

3.6.2 PROCESOS DE WIENER

Un proceso de Wiener es un caso especial de proceso estocástico de importante aplicación en finanzas. Una variable z sigue un proceso de Wiener cuando sus cambios Δz en un pequeño intervalo de tiempo Δt tiene dos propiedades:

1. Δz está relacionada con Δt mediante la ecuación

$$\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

donde ε es una variable aleatoria con **distribución normal, media** ***cero*** **y varianza** 1. Esta propiedad implica que Δz tiene a su vez una **distribución normal con media** ***cero*****, varianza Δt y desviación estándar $\sqrt{\Delta t}$.**

2. Los valores de Δz en dos intervalos de tiempo Δt son independientes. Esto equivale a decir que el proceso es un proceso Markov.

El proceso obtenido en el límite $\Delta t \to 0$ es un proceso de Wiener.

Considérese ahora el incremento en el valor de **z** durante un período de tiempo **T** relativamente largo. Esto se puede denotar por **z(T) – z(0).** Lo anterior puede ser visto como la suma de los incrementos en **z** en **N** pequeños intervalos de tiempo de longitud **Δt,** donde

$$N = \frac{T}{\Delta t}$$

Así que

$$z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}$$

donde ε_i **(i = 1,2,3, . . . ,N)** son variables aleatorias con **distribución normal, media cero** y **varianza 1.** De la propiedad 2, las ε_i's son independientes entre sí. De la ecuación $z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}$ se sabe que **z(T) – z(0)** se distribuye normalmente con

media de [z(T) – z(0)] = 0

varianza de [z(T) – z(0)] = NΔt = T

desviación estándar de [z(T) – z(0)] = $\sqrt{T}$

Estos resultados están basados en la propiedad de la distribución normal que dice: **Si una variable Y es igual a la suma de N variables independientes normalmente distribuidas**

X_i ($1 \leq i \leq N$), entonces Y tiene a su vez una distribución normal. La media de Y es igual a la suma de las medias de las X_i's, la varianza de Y es igual a la suma de las varianzas de las X_i's.

De acuerdo con lo anterior, en cualquier intervalo de tiempo de longitud T, el incremento en el valor de una variable que sigue un proceso de Wiener, se **distribuye normal, con media cero y desviación estándar $\sqrt{T}$**, lo cual deja claro el por qué es preferible definir a Δz como el producto de ε y $\sqrt{\Delta t}$ en vez de ε y Δt. Las varianzas son aditivas para distribuciones normales independientes; las desviaciones estándar no lo son.

En cálculo es común pasar de cambios pequeños, al límite, cuando los cambios pequeños tienden a cero. Entonces, $\Delta y/\Delta x$ se convierte en dy/dx en el límite, cuando los cambios tienden a cero. Lo mismo se puede hacer cuando se trata de procesos estocásticos de tiempo continuo. **El proceso obtenido en el límite $\Delta t \to 0$ es un proceso de Wiener,** entonces la ecuación $\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$, se convierte en:

$$dz = \varepsilon\sqrt{dt}$$

Generalización

Supóngase que el valor **z**, de una variable que sigue un proceso Wiener es inicialmente **25** y el tiempo es medido en años. Al final de **1** año, el valor de la variable se distribuye normal con media **25** y desviación estándar **1.** Al final de **2** años, se distribuye normal con media **25** y desviación estándar de $\sqrt{2}$. La desviación estándar mide la incertidumbre del valor de la variable en un determinado tiempo en el futuro. Este proceso Wiener tiene una tasa de desplazamiento de **cero** (evolución) y una tasa de variación de **1.** La tasa de desplazamiento de cero significa que el valor esperado de **z** en cualquier tiempo futuro es igual a su valor actual. La tasa de variación de **1** significa que la variación del cambio en z en un intervalo de tiempo de longitud **T** es **($1 \times T$). Un proceso de Wiener se puede generalizar incluyendo un término que es una función determinística del tiempo transcurrido y una varianza por unidad de tiempo que no sea necesariamente 1. Entonces, el proceso Wiener generalizado para una variable x puede ser definido en términos de dz de la siguiente manera:**

$$dx = adt + bdz$$

donde **a** y **b** son constantes.

El término **adt** representa la parte determinística de la evolución de **x**, lo que se llama **"drift"** y que corresponde a la tendencia general del movimiento de **x**, es decir, **x** tiene una tasa esperada de desplazamiento de **a** por unidad de tiempo. Sin el término **bdz,** la ecuación **$dx = adt + bdz$** cambiaría por la ecuación **$dx = adt$**, la cual implica que :

$\frac{dx}{dt} = a \quad \Rightarrow \quad x = x_0 + at$, **pues si se integra dx = adt por ambos lados, se tiene que**

$$x = at + c$$

donde $\mathbf{x_0}$ es el valor de **x** en el tiempo **cero.** En un intervalo de tiempo de longitud T, **x** crece a razón de la suma **aT**.

El término **bdz** representa la parte aleatoria y por lo tanto impredecible del movimiento de **x**, el **"ruido"** por así decirlo, presente en la **"señal"**. La constante **b** es la desviación estándar del término aleatorio. La suma de este "ruido" es b veces un proceso Wiener. Si se recuerda que $\mathbf{\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}}$ **y** $\mathbf{dx = adt + bdz}$, entonces, en un pequeño intervalo de tiempo **Δt,** el cambio en el valor de **x**, **Δx**, está dado por:

$$\Delta x = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

donde ε es una variable aleatoria con distribución normal, media **cero** y varianza 1. Entonces **Δx** tiene una distribución normal con:

$$\text{media de } \Delta x = a\Delta t$$

$$\text{desviación estándar de } \Delta x = b\sqrt{\Delta t}$$

$$\text{varianza de } \Delta x = b^2\Delta t$$

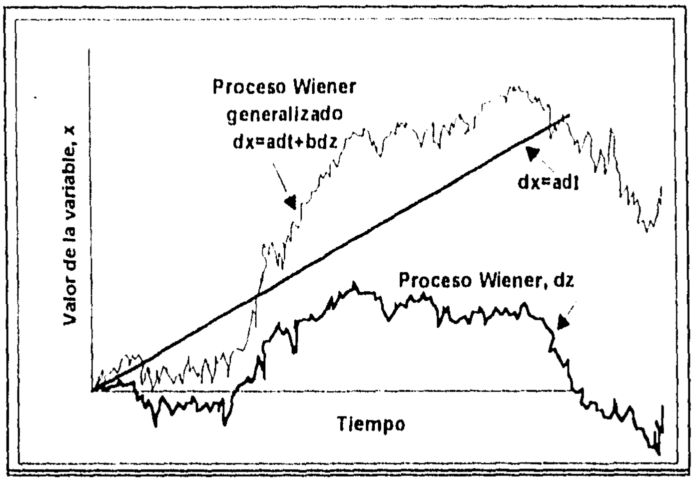
Por lo anterior, el cambio en el valor de **x** en cualquier intervalo de tiempo **T** se distribuye normal con:

$$\text{media de } x = aT$$

$$\text{desviación estándar de } x = b\sqrt{T}$$

$$\text{varianza de } x = b^2T$$

Así que el proceso Wiener generalizado, dado por **dx = adt + bdz,** tiene una tasa esperada de desplazamiento (es decir, desplazamiento promedio por unidad de tiempo) de **a** y tasa de variación (es decir, variación por unidad de tiempo) de $\mathbf{b^2}$. Lo anterior se ilustra en la gráfica 3.10:



Gráfica 3.10 Proceso Wiener generalizado; a= 0.3, b=1.5

Ejemplo:

Considérese una situación donde la posición del efectivo de una compañía, medido en miles de pesos, sigue un proceso Wiener con un "drift" de **20** por año y tasa de variación de **900** por año. Inicialmente, la posición del efectivo es **50.** Al final de **1** año la posición del efectivo tendrá una distribución normal con media de **(50+20) = 70** y desviación estándar de $\sqrt{900}$**=30.** Al final de **6** meses tendrá una distribución normal con media de **[50+.5(20)] = 60** y desviación estándar de $\sqrt{900(.5)} = \sqrt{450} = 21.21$.

3.6.3 EL PROCESO Y LEMA DE ITO

Los **procesos de Ito** son una generalización del **proceso de Wiener** en que **a** y **b** pueden a su vez ser funciones determinísticas del valor de **x** y del tiempo transcurrido **t**. Algebraicamente un proceso **Ito** puede escribirse como:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz$$

donde **dz** es un proceso de Wiener con "drift" de **a** y tasa de variación de b^2. El *lema de Ito* afirma que cualquier función **f(x, t)** de **x** y **t** sigue a su vez el proceso:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}b^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial x}bdz$$

donde **dz** sigue siendo el mismo proceso de Wiener. Así que **f** también sigue un proceso de Ito, con tasa de desplazamiento("drift") de:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}b^2\right)$$

y una tasa de variación de:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 b^2$$

Debido a que el lema de Ito es un resultado importante, además de que se utilizará más adelante, se desarrolla su prueba en el **Anexo**, al final de esta tesis.

3.6.4 EL PROCESO SEGUIDO POR LOS PRECIOS DEL ACTIVO SUBYACENTE

Suena lógico suponer que el precio de un activo sigue un proceso Wiener generalizado, es decir, que tiene una tasa esperada de desplazamiento constante y una tasa de variación constante. Sin embargo, este modelo no logra captar un aspecto clave de los precios del activo. Este aspecto se refiere a que el porcentaje de rendimiento esperado, requerido por el inversionista de un activo, es independiente al precio del activo. Si un inversionista requiere como rendimiento esperado el 14% anual cuando el precio del activo es $10, entonces, también requerirá el 14% anual cuando el precio del activo sea $50.

La suposición de que el precio de un activo tiene una tasa esperada de desplazamiento constante, muestra ser inapropiada y necesita ser reemplazada por el supuesto de que el desplazamiento esperado, expresado como una proporción del precio del activo, es constante. Esto implica que si **S** es el precio del activo, la tasa esperada de desplazamiento en S es **μS**, para algún parámetro constante **μ**. De este modo, en un intervalo de tiempo pequeño, **Δt**, el incremento esperado en **S** es **μSΔt**. El parámetro **μ**, es la tasa esperada de rendimiento sobre el activo, expresada en forma decimal.

Si la tasa de variación del precio del activo siempre es cero, el modelo implica que

$$dS = \mu S dt$$

entonces,

$$\frac{dS}{S} = \mu dt, \text{ si se integra en ambos lados,}$$
$$\Rightarrow \int \frac{dS}{S} = \mu \int dt$$
$$\Rightarrow \ln S = \mu t$$
$$\Rightarrow S = e^{\mu t}, \text{ más aun, } S = S_0 e^{\mu t}$$

donde S_0 es el precio del activo al tiempo cero.

La ecuación $S = S_0 e^{\mu t}$, muestra que cuando la tasa de variación es cero, el precio del activo crece en una tasa compuesta continuamente de μ, por unidad de tiempo.

En la práctica, seguramente, el precio de una acción muestra tener bastante volatilidad. Un supuesto razonable es que la varianza del porcentaje de rendimiento en un pequeño período de tiempo Δt, es la misma sin considerar el precio del activo, en otras palabras, un inversionista tiene la misma incertidumbre sobre el porcentaje de rendimiento, cuando el precio del activo es \$50 como cuando es \$10. Defínase σ^2 como la tasa de variación del cambio proporcional en el precio del activo. Esto significa que $\sigma^2\Delta t$ es la varianza del cambio proporcional en el precio del activo en el tiempo Δt, y $\sigma^2 S^2 \Delta t$ es la varianza del cambio real en el precio del activo S, durante Δt. La tasa de variación instantánea de S, es por lo tanto, $\sigma^2 S^2$.

Los argumentos anteriores sugieren que S puede ser representado por un proceso de Ito, el cual tiene una tasa instantánea esperada de desplazamiento μS y una tasa de variación instantánea $\sigma^2 S^2$. Esto puede escribirse como:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

ó

$$\frac{dS}{S} = \mu\, dt + \sigma\, dz$$

La ecuación $\frac{dS}{S} = \mu\, dt + \sigma\, dz$, es el modelo más usado como comportamiento del precio del activo. La variable σ se conoce comúnmente como la ***volatilidad*** del precio del activo. La variable μ es su ***tasa esperada de rendimiento.***

Ejemplo:

Considérese un activo que no paga dividendos, tiene una volatilidad de **30%** anual y genera un rendimiento esperado del **15%** anual compuesto continuamente. En este caso, $\mu = 0.15$ y $\sigma = 0.30$. El proceso para el precio del activo es:

$$\frac{dS}{S} = 0.15dt + 0.30dz$$

Si S es el precio del activo en un cierto período de tiempo y ΔS es el incremento en el precio del activo, en el próximo pequeño intervalo de tiempo,

$$\Rightarrow \frac{\Delta S}{S} = 0.15\Delta t + 0.30\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

donde ε es una variable aleatoria con distribución normal, media cero y varianza **1**. Considérese un intervalo de tiempo de **1 semana = 0.0192 de año** y supóngase que el precio inicial del activo es de **\$100**. Entonces $\Delta t = 0.0192$, $S = 100$ y

$$\Delta S = 100(0.00288 + 0.0416\varepsilon)$$

El último resultado muestra que el incremento en el precio del activo es una variable aleatoria con distribución normal, media igual a **\$0.288** y desviación estándar de **\$4.16.**

El modelo del comportamiento del precio del activo que se ha desarrollado, $\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz$, se conoce como ***movimiento Browniano geométrico***. La versión de tiempo discreto del modelo es:

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

El lado izquierdo de la ecuación anterior es el rendimiento proporcional generado por el activo en un período pequeño de tiempo Δt. El término $\mu \Delta t$ es el valor esperado de tal rendimiento, mientras que el término $\sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}$ es el componente estocástico del rendimiento. La varianza del componente estocástico y por consiguiente, del rendimiento en general, es $\sigma^2 \Delta t$. La ecuación muestra que $\Delta S/S$ se distribuye normal, con media $\mu \Delta t$ y desviación estándar $\sigma \sqrt{\Delta t}$, es decir,

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \Phi(\mu \Delta t, \sigma \sqrt{\Delta t})$$

donde $\Phi(m, s)$ representa una distribución normal con media m y desviación estándar s.

3.6.4.1 LA PROPIEDAD LOGNORMAL DE LOS PRECIOS DEL ACTIVO

Se ha argumentado que $dS = \mu S dt + \sigma S dz$, con μ y σ constantes, es un modelo razonable de los movimientos del precio del activo. **Por el lema de Ito**, se sabe que el proceso seguido por una función **f(S, t)** es:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz$$

Nótese que tanto **S** como **f** son afectados por la misma fuente subyacente de incertidumbre **dz**.

Ahora se utilizará el lema de Ito para derivar el proceso seguido por **lnS:** Defínase

$$f = \ln S$$

Como $$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

si se sustituyen en $df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz$, entonces el proceso seguido por **f** es:

$$df = \left(\frac{1}{S} \mu S + 0 + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{S^2} \right) \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{1}{S} \sigma S dz$$

$$\Rightarrow df = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz$$

Como μ y σ son constantes, entonces la ecuación anterior indica que **f** sigue un proceso Wiener generalizado, con una tasa constante de desplazamiento de $\mu - \sigma^2/2$ y una tasa constante de variación de σ^2, esto significa que el cambio en **f**, entre el tiempo actual **t** y algún tiempo en el futuro **T**, se distribuye normal, con

$$\textbf{media} \quad \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)(T - t) \qquad \textbf{y varianza} \qquad \sigma^2 (T - t)$$

El valor de **f** en el tiempo **t** es **lnS** y su valor en el tiempo **T** es $\ln S_T$, donde S_T es el precio del activo en el tiempo **T**, por lo tanto, su cambio durante el intervalo de tiempo **T – t** es:

$$\ln S_T - \ln S$$

Así que
$$\ln S_T - \ln S \sim \Phi \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)(T - t),\ \sigma \sqrt{T - t} \right]$$

Una variable tiene una distribución lognormal, si el logaritmo natural de la variable tiene una distribución normal. Esta variable puede tomar valores entre ***cero*** e ***infinito***. La expresión anterior muestra que el modelo del comportamiento del precio del activo, $dS = \mu S dt + \sigma S dz$, implica que

$$\ln S_T - \ln S \sim \Phi \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)(T - t),\ \sigma \sqrt{T - t} \right]$$

donde S_T es el precio del activo en el tiempo futuro **T**; **S** es el precio del activo en el tiempo actual **t** y $\Phi(m, s)$ representa una distribución normal con media ***m*** y desviación estándar *s*. De las propiedades de la distribución normal (estandarización), de la expresión anterior se tiene que:

$$\ln S_T \sim \Phi\left[\ln S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t),\ \sigma\sqrt{T-t}\right]$$

Demostración:

Se sabe que el modelo del comportamiento del precio del activo está dado por:

$$\mathbf{dS = \mu Sdt + \sigma Sdz},$$

y por el lema de Ito se sabe que una función **f**, de **S** y **t** sigue el proceso:

$$\mathbf{df} = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma Sdz$$

Si se define a **f = lnS**, entonces, por el lema de Ito y sustituyendo en el proceso anterior,

$$\mathbf{df} = \left(\frac{1}{S}\mu S + 0 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{S^2}\right)\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{1}{S}\sigma Sdz$$

$$\Rightarrow \mathbf{df} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz$$

La expresión anterior puede ser vista en su forma discreta, entonces:

$$\Delta f = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\Delta z, \quad \textbf{como } \Delta t = (T-t), \ \mathbf{y}\ \Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \Delta f = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\varepsilon\sqrt{T-t}$$

Así que $\Delta f \sim \Phi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t),\ \sigma\sqrt{T-t}\right]$.

El valor de **f** en el tiempo **t** es **lnS** y su valor en el tiempo **T** es **ln**S_T, donde S_T es el precio del activo en el tiempo **T,** su cambio durante el intervalo de tiempo T− t es **Δf = ln**S_T **−lnS,** por lo tanto,

$$\ln S_T - \ln S \sim \Phi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t),\ \sigma\sqrt{T-t}\right]$$

Como ε es una variable aleatoria con **distribución normal, media cero y varianza 1 (normal estándar),** entonces, se debe cumplir que:

$$\varepsilon = \frac{x - \mu}{\sigma} \Rightarrow \varepsilon = \frac{(\ln S_T - \ln S) - \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)\right]}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

$$\Rightarrow \ln S_T = \varepsilon\sigma\sqrt{T - t} + \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)\right] + \ln S$$

$$\textbf{Por lo tanto, } \ln S_T \sim \Phi\left[\ln S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t),\ \sigma\sqrt{T - t}\right]$$

■

Otro resultado muy importante es que:

$$\ln S_T = \varepsilon\sigma\sqrt{T - t} + \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)\right] + \ln S$$

$$\Rightarrow S_T = S e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T - t + \sigma\varepsilon\sqrt{T - t}}$$

El análisis anterior muestra que S_T tiene una distribución lognormal.

Ejemplo:

Considérese un activo con un precio inicial de **\$40,** un rendimiento esperado del **16% anual,** y una volatilidad del **20% anual.** La distribución de probabilidad del precio del activo, S_T, en **6 meses,** está dada por:

$$\ln S_T \sim \Phi\left[\ln S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t),\ \sigma\sqrt{T - t}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \ln S_T \sim \Phi\left[\ln 40 + \left(0.16 - \frac{0.04}{2}\right)(0.5),\ 0.2\sqrt{0.5}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \ln S_T \sim \Phi(3.758,\ 0.141)$$

Existe un 95% de probabilidad de que una variable normalmente distribuida tenga un valor dentro de dos desviaciones estándar de su media. Para construir un intervalo de confianza del **95%**, se hace lo siguiente:

Tómese $\alpha = 0.05$, entonces se quiere la $P(-z_{\alpha/2} < \varepsilon < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha = .95$. Se sabe que

$$\varepsilon = \frac{\left(\ln S_T - \ln S\right) - \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]}{\sigma\sqrt{T-t}}$$, **entonces, se deduce que**

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\left(\ln S_T - \ln S\right) - \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]}{\sigma\sqrt{T-t}} < z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$= P\left[\ln S + \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right] - z_{\alpha/2}(\sigma\sqrt{T-t}) < \ln S_T < \ln S + \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right] + z_{\alpha/2}(\sigma\sqrt{T-t})\right] = 1-\alpha$$

Así que un intervalo para $\ln S_T$, está dadopor:

$$\ln S + \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right] - z_{\alpha/2}(\sigma\sqrt{T-t}) < \ln S_T < \ln S + \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right] + z_{\alpha/2}(\sigma\sqrt{T-t})$$

Buscando en tablas se tiene que $z_{\alpha/2} = 1.96$ **y sustituyendo los valores del ejemplo,**

$$\Rightarrow \ln 40 + \left[\left(0.16 - \frac{0.04}{2}\right)(0.5)\right] - 1.96(0.2\sqrt{0.5}) < \ln S_T < \ln 40 + \left[\left(0.16 - \frac{0.04}{2}\right)(0.5)\right] + 1.96(0.2\sqrt{0.5})$$

$$= 3.481 < \ln S_T < 4.034$$

Lo anterior se puede escribir como

$$= e^{3.481} < S_T < e^{4.034}$$
$$= 32.49 < S_T < 56.48$$

De este modo, existe un 95% de probabilidad de que el **precio del activo en 6 meses** caiga entre **32.49** y **56.48**

3.6.5 LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE BLACK-SCHOLES

Ahora corresponde derivar la **ecuación diferencial de *Black-Scholes***, para lo cual, es necesario hacer las siguientes suposiciones:

1. El precio del activo sigue el proceso **$dS = \mu Sdt + \sigma Sdz$**, con μ y σ constantes.
2. Es permitida ***la venta en corto***[5] de activos con el completo uso de las ganancias.
3. No hay costos de transacción o impuestos, los activos son perfectamente divisibles.
4. No hay dividendos durante la vigencia de la opción.
5. No hay oportunidades de arbitraje libres de riesgo.
6. La comercialización de activos es continua.
7. La tasa de interés libre de riesgo **r**, es constante y es la misma para cualquier periodo.

Ya se ha asumido que el precio S del activo sigue el proceso:

$$dS = \mu Sdt + \sigma Sdz \quad \text{, y su versión discreta es } \Delta S = \mu S\Delta t + \sigma S\Delta z$$

Supóngase que **f** es el precio de una opción sobre un activo de precio **S.** La variable **f** debe ser una función de S y **t,** siendo así, se tiene nuevamente la ecuación:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma Sdz$$

y su versión discreta

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S\Delta z$$

donde, de las ecuaciones discretas, **ΔS** y **Δf** son los cambios en **S** y **f** en un pequeño intervalo de tiempo **Δt.** La **Δz** que aparece en las ecuaciones discretas es la misma, es decir, los procesos Wiener que relacionan a **f** y **S** son los mismos. De aquí que escogiendo un portafolio del activo y de la opción, el proceso Wiener puede ser eliminado.

[5]La venta en corto involucra la venta de activos que no se poseen. Cuando el precio del activo cae, genera ganancias, cuando sube, genera pérdidas. Después de un tiempo, y según como haya evolucionado el precio del activo, éste tiene que ser recomprado y regresado a la entidad que hizo el préstamo del mismo.

El portafolio apropiado es:

- -1 **Contrato de Opción**
- $+\dfrac{\partial f}{\partial S}$ **Acciones**

El poseedor de este portafolio tiene una posición corta sobre un contrato de opción y una posición larga sobre una cantidad ∂ **f** / ∂ **S** de acciones. Determínese a **Π** como el valor del portafolio, por definición,

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S$$

El cambio **ΔΠ** en el valor del portafolio, en el tiempo **Δt**, está dado por

$$\Delta\Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S$$

Sustituyendo los valores de las ecuaciones discretas **Δf** y **ΔS** en la ecuación anterior, se tiene:

$$\Delta\Pi = -\frac{\partial f}{\partial S}\mu S\Delta t - \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\Delta t - \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S\Delta z + \frac{\partial f}{\partial S}\mu S\Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S\Delta z$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t$$

Como la ecuación anterior no involucra **Δz**, el portafolio **Π** debe ser libre de riesgo durante el tiempo **Δt**, es decir, el portafolio **Π** es independiente del riesgo de movimientos aleatorios en el valor de **S**. Durante el pequeño intervalo de tiempo **Δt**, el portafolio no tiene el menor riesgo, por lo que su rendimiento ha de ser **r**, la tasa de interés libre de riesgo del mercado:

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t$$

Sustituyendo los valores de $\Delta\Pi$ y de Π, entonces:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t = r\left(f-\frac{\partial f}{\partial S}S\right)\Delta t$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial t}+rS\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$$

La ecuación anterior, es la **ecuación diferencial de *Black-Scholes*.**

La ecuación de Black-Scholes tiene muchas soluciones que corresponden entre otras a la multitud de posibles instrumentos derivados (forward, swap, etc.). La solución que se usará, en particular para las opciones, dependerá de las ***condiciones límite*** que se establezcan, estos límites son los que definen una opción Europea. En este caso, las condiciones límite principales para una opción call y put Europea son:

$$\mathbf{c = max(S-X, 0) \quad y \quad p = max(X-S, 0)}$$

Un punto muy importante sobre el portafolio $\boldsymbol{\Pi}$, en la derivación de la **ecuación diferencial de *Black-Scholes*,** es que no esta permanentemente libre de riesgo. El portafolio carece de riesgo sólo durante un pequeño período de tiempo infinitesimal. Cuando **S** y **t** cambian, $\partial f / \partial S$ también cambia. Para mantener el portafolio libre de riesgo, es necesario cambiar continuamente las proporciones relativas de la opción y del activo en el portafolio.

3.6.6 VALORACIÓN DE OPCIONES EUROPEAS - *LA FÓRMULA DE BLACK-SCHOLES*

Tómese el caso de una opción call Europea (una vez calculado el valor de la call se puede obtener el valor de la put por arbitraje gracias a la paridad put-call). Al vencimiento el valor de la opción viene dado por:

$$\mathbf{max(S_T - X, 0)}$$

El valor esperado **E** de una opción call Europea al vencimiento, en un mundo neutral al riesgo es:

$$\mathbf{E[max(S_T - X, 0)]}$$

Por el argumento de la valuación neutral al riesgo, el precio **c** de una opción call Europea es el valor de la expresión anterior descontado a la tasa de interés **r** libre de riesgo (valor presente), es decir,

$$\mathbf{c = e^{-r(T-t)}\, E[max(S_T - X, 0)]}$$

En un mundo neutral al riesgo $\ln S_T$ tiene la distribución ya conocida, pero reemplazando μ por r, esto es:

$$\ln S_T \sim \Phi\left[\ln S + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t),\ \sigma\sqrt{T-t}\right]$$

Por definición de esperanza, se tiene que:

$$E[\max(S_T - X,0)] = \int \max[S_T - X,0] f(S_T) dS_T$$

$$= \int_X^\infty (S_T - X) f(S_T) dS_T$$

donde $f(S_T)$ es la función de densidad de probabilidad en un mundo neutral al riesgo. Por lo tanto,

$$c = e^{-r(T-t)} \int_X^\infty (S_T - X) f(S_T) dS_T$$

La integral de la ecuación anterior se simplifica si se hace la sustitución $S_T = e^u$, donde claramente $u = \ln S_T$. Con ésto, se puede usar la función explícita para la distribución $\Phi(\ln S_T)$:

$$\Phi(\ln S_T) = \Phi(u)$$

$$\Rightarrow \Phi(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u - \lambda(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2\right] \text{, donde } \lambda = r - \frac{\sigma^2}{2}$$

con lo que el valor de la opción se reduce a:

$$c = e^{-r(T-t)} \int_{\ln X}^\infty (e^u - X)\Phi(u) du = e^{-r(T-t)} \int_{\ln X}^\infty e^u \Phi(u) du - X e^{-r(T-t)} \int_{\ln X}^\infty \Phi(u) du$$

De la ecuación anterior resulta que el segundo término puede escribirse como:

$$X e^{-r(T-t)} \int_{\ln X}^\infty \Phi(u) du = X e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

donde N es la distribución normal acumulada (no densidad de probabilidad). Para integrar el primer término hay que hacer algo de álgebra:

$$e^{-r(T-t)}\int_{\ln X}^{\infty} e^{u}\Phi(u)du = \int_{\ln X}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{u-r(T-t)} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\lambda(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2} du,$$

$\Rightarrow e^{u-r(T-t)} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\lambda(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2} = e^{u-r(T-t)+\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\lambda(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2\right]}$, **tomando el exponente de e, se tiene:**

$$u - r(t') + \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\lambda(t')}{\sigma\sqrt{t'}}\right)^2\right] = \frac{-2\sigma^2 t'(u - rt') + u^2 + \lambda^2 t'^2 - 2ut'\lambda}{-2\sigma^2 t'} =$$

$$= \frac{u^2 - 2ut'(\lambda+\sigma^2) + t'^2(\lambda^2 + 2r\sigma^2)}{-2\sigma^2 t'} = \frac{[u-(\lambda+\sigma^2)t']^2 - \sigma^2 t'\left(\lambda - r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{-2\sigma^2 t'} \quad \ldots.(1)$$

sustituyendo en (1) $\lambda = r - \frac{\sigma^2}{2}$ **, se tiene que :**

$$(1) = \frac{\left[u - \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)t'\right]^2}{-2\sigma^2 t'} \text{ , donde } t' = (T - t)$$

Con la expresión anterior, la integral del primer término se torna más fácil, de tal modo que combinando el resultado del primer término con el resultado del segundo término, se obtiene el valor de la opción:

$$c = e^{-r(T-t)}\int_{\ln X}^{\infty}(e^{u} - X)\Phi(u)du = SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2) \quad \text{, donde}$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/X) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Como **c = C**, la ecuación anterior también da el valor de una opción call Americana sobre un activo que no paga dividendos. El valor de una opción put Europea puede ser calculado de manera similar que el de la opción call Europea. De este modo, se tiene que:

$$p = Xe^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

Otra forma de llegar al valor de la opción put Europea es mediante la paridad put-call.

El modelo de Black-Scholes es utilizado casi universalmente para valorar opciones Europeas, pero existen casos en los que no es aplicable; por ejemplo, no se pueden valorar opciones Americanas, pues el modelo no intenta calcular bajo qué circunstancias es óptimo ejercer una opción antes de su fecha de vencimiento, en este caso, es necesario utilizar el método binomial, el cual como ya se mostró, permite valuar perfectamente opciones Americanas.

Ejemplo:

Considérese una situación donde el precio del activo **6** meses antes de la fecha de expiración de una opción es **$42,** el precio de ejercicio de la opción es **$40,** la tasa de interés libre de riesgo es **10% anual** y la volatilidad es **20% anual.** Esto significa que **S = 42, X = 40, r = 0.1, σ = 0.2, T–t = 0.5,** entonces,

$$d_1 = \frac{\ln 1.05 + 0.12 \times 0.5}{0.2\sqrt{0.5}} = 0.7693, \qquad d_2 = \frac{\ln 1.05 + 0.08 \times 0.5}{0.2\sqrt{0.5}} = 0.6278$$

$$\text{y} \quad Xe^{-r(T-t)} = 40e^{-0.05} = 38.049$$

Así que si la opción es una **call Europea,** su valor **c** está dado por:

$$c = 42N(0.7693) - 38.049N(0.6278)$$

si la opción es una **put Europea,** su valor **p** está dado por:

$$p = 38.049N(-0.6278) - 42N(-0.7693)$$

Utilizando las tablas para **N(x),** cuando $x \leq 0$ y cuando $x \geq 0$, e interpolando, se tiene que:

$$N(0.7693) = 0.7791, \qquad N(-0.7693) = 0.2209$$

$$N(0.6278) = 0.7349, \qquad N(-0.6278) = 0.2651$$

Por lo tanto, $\quad c = 4.76 \quad$ y $\quad p = 0.81$

CAPÍTULO 4 : PARÁMETROS BÁSICOS DE UNA OPCIÓN : CONCEPTO DE GRIEGAS

Uno de los esquemas de cobertura más sofisticado utilizado por las personas que comercian con opciones, es aquél en el que se intenta construir un portafolio inmune a pequeños cambios en el precio del activo subyacente, durante el pequeño intervalo de tiempo siguiente. Este procedimiento se conoce como ***cobertura delta***. De acuerdo con ésto, los comerciantes tienen que tomar en cuenta dos parámetros que se conocen como ***gamma*** y ***vega***. ***Gamma* es la tasa de cambio del valor del portafolio con respecto a delta; *vega* es la tasa de cambio del portafolio con respecto a la volatilidad del activo.** Con una gamma de cero, se puede crear un portafolio relativamente insensible a cambios importantes en el precio del activo; con una vega de cero, se puede crear un portafolio insensible a cambios en la volatilidad del activo. Otros parámetros son ***theta*** y ***rho***. ***Theta* es la tasa de cambio del valor del portafolio con respecto al paso del tiempo** y ***rho* es la tasa de cambio con respecto a la tasa de interés libre de riesgo.**

4. 1 DELTA

Al desarrollar el modelo binomial para valuar opciones (capítulo 3), se utilizó por primera vez el parámetro **Δ**. Este parámetro está definido como **la tasa de cambio del precio de la opción con respecto al precio del activo subyacente.** También se puede ver como la pendiente de la curva que relaciona el precio de la opción con el precio del activo subyacente. Supóngase que la delta de una opción call Europea sobre un activo que no paga dividendos es **0.6**, ésto significa que cuando el precio del activo cambia por una pequeña cantidad, el precio de la opción cambia por aproximadamente **60%** de dicha cantidad, de acuerdo con ésto,

$$\Delta = \frac{\Delta c}{\Delta S}$$

donde **ΔS** es un pequeño cambio en el precio del activo y **Δc** es el cambio correspondiente en el precio de la opción call Europea.

4. 1. 1 COBERTURA DELTA

Considérese una **opción call** con una **delta de 0.6.** Supóngase que el precio de la opción es **\$10** y el precio del activo es **\$100**. Se puede pensar en un inversionista quien ha vendido **20** contratos de opción, es decir, opciones para comprar **2,000** acciones, pues cada contrato tiene que ser por **100** acciones. La posición del inversionista podría ser cubierta comprando **0.6(2,000) = 1,200 acciones.** Las ganancias (pérdidas) de la posición sobre las opciones tienden a ser compensadas por las pérdidas (ganancias) de la posición sobre el activo. Por ejemplo, si el precio del activo se incrementa **\$1** (produciendo una ganancia de **\$1,200** sobre las acciones compradas), el precio de la opción tenderá a incrementarse **0.6(\$1) = \$0.60** (produciendo una pérdida de **\$1,200** sobre las opciones emitidas), si el precio del activo se decrementa **\$1** (produciendo una pérdida de **\$1,200** sobre las acciones compradas), el precio de la opción tenderá a decrementarse **\$0.60** (produciendo una ganancia de **\$1,200** sobre las acciones emitidas).

En este ejemplo, la delta de la posición sobre las opciones es **0.6(−2,000) = −1,200.** En otras palabras, el inversionista pierde **1,200ΔS** cuando el precio del activo se incrementa **ΔS.** La delta del activo es por definición **1.0** y la posición larga en **1,200** acciones tiene una delta de **+1,200.** La delta de todo el portafolio, es decir, la delta global (tomando la posición larga sobre las acciones y la posición corta sobre las opciones) es cero, pues **−1,200+1,200 = 0.** Esto quiere decir que **la delta de la posición sobre las acciones compensa la delta de la posición sobre las opciones,** por lo tanto el portafolio compuesto por ambas posiciones es ***delta neutral.***

Es importante aclarar que el portafolio permanece ***delta neutral*** **(cubierto)** sólo durante un período de tiempo relativamente corto, debido a que delta cambia; en la práctica, cuando una **cobertura delta** es implementada, la cobertura tiene que ser ajustada periódicamente, a este procedimiento se le conoce como ***rebalanceo.*** En el ejemplo anterior, al final de **3** días el precio del activo podría incrementarse a **\$110.** Un incremento en el precio del activo conduce a un incremento en delta. Supóngase que delta aumenta de **0.60** a **0.65,** esto significaría que un extra de **0.05(2,000) = 100** acciones tendrían que ser compradas para mantener el portafolio delta neutral. Este tipo de esquemas de cobertura que involucran ajustes frecuentes se conocen como ***esquemas de cobertura dinámica.***

Por otro lado, la delta de una opción está fuertemente relacionada con el análisis de Black-Scholes mostrado en el capítulo anterior. Recordando un poco dicho análisis, es posible construir un portafolio libre de riesgo que consista de una posición sobre una opción y una posición sobre el activo subyacente de la opción. Expresado en términos de Δ, el portafolio **Black-Scholes** es:

- −1 **Opción**
- +Δ **acciones (activos)**

Utilizando la nueva terminología, se puede asegurar que el análisis de Black-Scholes para valuar opciones está basado en la construcción de un portafolio **delta neutral,** tomando en consideración que el rendimiento del portafolio debe ser la tasa de interés libre de riesgo.

Dado que se tiene una fórmula explícita para el precio de las opciones Europeas, se pueden tomar sus derivadas parciales con respecto a los parámetros que determinan su valor para calcular cómo cubrir su riesgo. En particular es frecuente definir a ***delta*** como **la primer derivada parcial del precio de la opción con respecto al subyacente, así que para una opción call Europea sobre un activo que no paga dividendos se tiene que:**

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S} = N(d_1), \qquad \text{con } d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

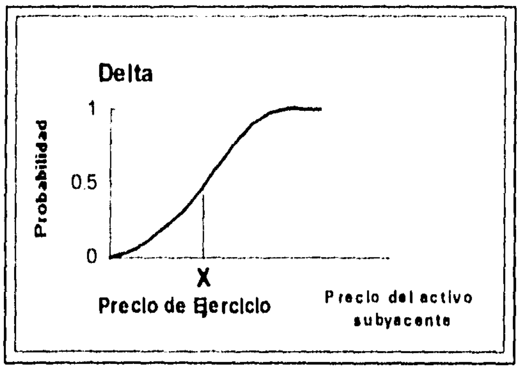
Usar una *cobertura delta* para una **posición** corta sobre una opción call Europea involucra mantener una posición larga sobre $N(d_1)$ acciones en cualquier tiempo dado. Igualmente, utilizar una cobertura delta para una **posición larga** sobre una opción call Europea involucra mantener una posición corta sobre $N(d_1)$ acciones en cualquier tiempo dado.

Para una opción put Europea sobre un activo que no paga dividendos, se tiene que delta está dada por:

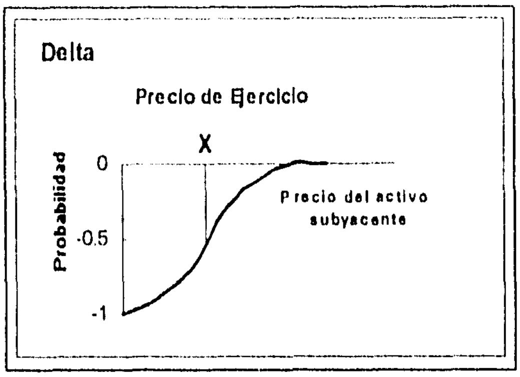
$$\Delta = \frac{\partial p}{\partial S} = -N(-d_1) = N(d_1) - 1 < 0, \qquad \text{con } d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Se puede observar que ahora la delta es negativa, lo que significa que una **posición larga** sobre una opción put debe ser cubierta con una **posición larga sobre el activo subyacente** y una **posición corta** sobre una opción put debe ser cubierta con una **posición corta** sobre el activo subyacente.

Así, la delta puede variar entre **0** y **1** para las opciones call y entre **–1** y **0** para las opciones put. En el caso de una opción call (Gráfica 4.1), cuando la opción está muy **out-of-the-money**, la delta está próxima a **0** ya que una variación pequeña del precio del subyacente no cambia su situación. Si la opción está **at-the-money,** la **delta** se aproxima a **0.5**, es decir, una variación de un punto de cotización del subyacente se traduce en una variación de **0.5** puntos en la prima de la opción. Cuando la opción esta **in-the-money**, la delta se va acercando a **1**, conforme el valor intrínseco de la opción aumenta. Análogamente, si la opción put está muy **in-the-money,** su delta tendrá un valor próximo a **–1,** si está **at-the-money**, el valor de la delta estará próximo a **–0.5,** y se aproximará a **0** cuanto más esté **out-of-the-money** (Gráfica 4.2).



Gráfica 4.1 Variación de la delta de una opción call en función del precio del activo subyacente.



Gráfica 4.2 Variación de la delta de una opción put en función del precio del activo subyacente.

Como se puede observar en las gráficas 4.1 y 4.2, **la delta de una opción también puede ser vista como la probabilidad de que la opción sea ejercida.** Este razonamiento es totalmente válido ya que el valor absoluto de las deltas proporciona la probabilidad de ejercicio de las correspondientes opciones. Cuando están muy in-the-money la probabilidad es muy alta (cerca de 1), cuando están at-the-money se sitúa alrededor del 50% (0.5) y cuanto más out-of-the-money esté la opción, más improbable será su ejercicio y precisamente la delta estará próxima a cero. De hecho, si se calculan las deltas con base en el modelo de Black-Scholes, se obtendrán directamente probabilidades.

4. 1. 2 FACTORES QUE AFECTAN LA DELTA DE UNA OPCIÓN

Call o put. Las opciones call suben de precio al subir el subyacente, por lo que tienen delta positiva, mientras que las opciones put suben de precio al bajar el subyacente, por lo que su delta es negativa.

Nivel del subyacente. Ya se mencionó que si una opción call está muy in-the-money, el precio del subyacente está muy por encima del precio de ejercicio, por lo que su delta es esencialmente el 100% porque la probabilidad de ejercicio es casi 1, mientras que si está muy out-of-the-money, el precio del subyacente se encuentra muy por debajo del precio de ejercicio, por lo que su delta es casi 0% pues la probabilidad de ejercicio es esencialmente cero. Cuando una opción está at-the-money, su delta es aproximadamente 50%.

Volatilidad y tiempo hasta el vencimiento. Al aumentar la volatilidad y el tiempo hasta el vencimiento, aumenta la incertidumbre sobre si la opción va a ser ejercida (100% delta) o no (0% delta) y el paso del tiempo va acercando a la opción a su vencimiento, por lo que la delta de las opciones in-the-money disminuye y el de las opciones out-of-the-money aumenta. Ambas empiezan a aproximarse hacia deltas de 50% . En cambio si se considera únicamente al paso del tiempo, la delta de las opciones in-the-money aumenta, igual para las opciones at-the-money y la delta de las opciones out-of-the-money disminuye.

4.2 GAMMA

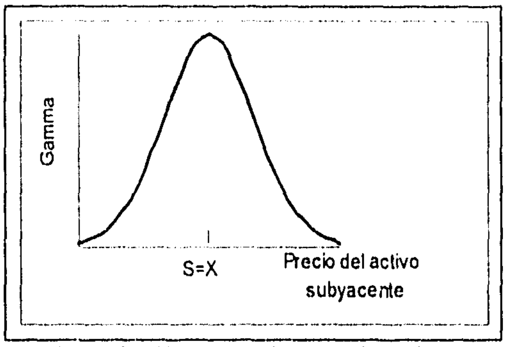
La ***gamma*** a veces se define como la *delta de la delta*, es decir, es **la sensibilidad de la delta a los cambios del precio del activo subyacente.** Lo que indica la velocidad de los ajustes para las posiciones delta neutral. Es frecuente también denominar a la gamma como la ***curvatura*** de una opción. Matemáticamente, ***gamma*** es **la segunda derivada parcial de la prima con respecto al precio del activo subyacente**, o la derivada de la delta con respecto al subyacente, entonces, la **gamma para una opción call o put Europea sobre un activo que no paga dividendos está dada por :**

$$\Gamma = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = \frac{d\Delta}{dS} = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$\text{donde } d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{y} \quad N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Su valor indicará lo que aumenta o disminuye la delta de la opción si el precio del subyacente sube o baja. Por ejemplo, si una opción call tiene una delta de **0.42** y su gamma es de **0.03**, un aumento del precio del activo subyacente de un punto de cotización incrementará la delta a **0.45** y una disminución la reducirá a **0.39.** La gamma, al igual que la delta, también es común expresarla en porcentaje o incluso en número de deltas (en el ejemplo, se tiene una gamma de 3 deltas).

La gamma es idéntica para una call y una put equivalentes, ya que la delta de una put es negativa y una subida de precio del subyacente la desplazará más out-of-the-money, lo que significa que su valor absoluto se reduce. Ésto lo indica la gamma ya que una subida del precio del subyacente se traduce en que el valor de la gamma se suma a la delta de la put lo cual reduce su valor absoluto. Por ejemplo, para una put con una delta de **–57** y una gamma de **3**, la subida de un punto de cotización del precio del subyacente hace que la opción tenga una delta de **–54** (es decir, **–57+3**); lo cual quiere decir que todas las opciones tienen una gamma positiva. La gamma negativa se produce cuando se vende cualquier opción, es decir, cuando se toma una posición corta.



Gráfica 4.3 Gamma de una opción en función del precio del activo subyacente. Se ve claramente que la gamma de una opción se maximiza cuando está at-the-money.

Es necesario distinguir entre carteras de opciones con gamma positiva y carteras de opciones con gamma negativa. Las primeras presentan un perfil global comprador de opciones y las segundas un perfil vendedor de opciones.

En términos operativos, la consecuencia de una cartera gamma negativa es la exigencia de una gestión de cobertura muy rigurosa con operaciones constantes de compra/venta del subyacente para ajustar la delta de la cartera o portafolio.

4. 2. 1 FACTORES QUE AFECTAN LA GAMMA DE UNA OPCIÓN

En la gamma de una opción también influyen el **plazo hasta el vencimiento** y la **volatilidad.** Cuando las opciones se acercan a su vencimiento se producen dos efectos:

1. En las opciones **at-the-money** aumenta radicalmente la gamma.
2. En las opciones **out-of-the-money** así como en las **in-the-money** la gamma tiende a cero.

Los aumentos de la volatilidad hacen disminuir la gamma de las opciones at-the-money y hasta cierto nivel, dichos aumentos incrementan la gamma de las opciones out-of-the-money y de las in-the-money. Los descensos de la volatilidad tienen un efecto contrario, es decir, aumentan la gamma de las opciones at-the-money y la disminuyen en las opciones out-of-the-money e in-the-money.

4.3 THETA

La ***theta*** de una opción mide **la sensibilidad de la prima al paso del tiempo,** es decir, es la **tasa de cambio del valor de la opción con respecto al paso del tiempo (T decrece).** Matemáticamente, ***theta*** es **la derivada parcial de la prima de la opción con respecto al plazo del vencimiento de la opción.** De acuerdo con ésto, para una opción call Europea sobre un activo que no paga dividendos se tiene que:

$$\Theta = \frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rXe^{-r(T-t)}N(d_2) \quad ,$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad , \quad d_2 = \frac{\ln(S/X) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$\text{y} \quad N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Para una opción put Europea sobre un activo que no paga dividendos la theta está dada por:

$$\Theta = \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} + rXe^{-r(T-t)}N(-d_2)$$

Las opciones, como ya se mencionó en el capítulo 3, tienen dos tipos de valor: **el valor intrínseco** que tendrían si fuesen ejercidas hoy y **el valor extrínseco** (o valor en el tiempo), debido a la posibilidad de beneficios. Al llegar al vencimiento el valor extrínseco es cero, y el parámetro ***theta* mide la velocidad de declive del valor extrínseco desde su valor actual hasta cero.** Este declive no es siempre igual; una opción at-the-money a largo plazo pierde muy poco de su valor extrínseco cada día que pasa, mientras que en el último día la misma opción con un día de duración, debe necesariamente perder todo su valor extrínseco restante.

La theta es casi siempre negativa para una opción. Esto es debido a que al decrementarse el plazo de vencimiento, la opción tiende a ser menos valuable.

Theta no es el mismo tipo de parámetro de cobertura como delta y gamma. La razón es que aunque existe cierta incertidumbre sobre el precio futuro del activo, no existe incertidumbre sobre el paso del tiempo. No tiene sentido cubrirse contra el efecto del paso del tiempo sobre una opción o un portafolio de opción.

4.4 LA RELACIÓN ENTRE DELTA, THETA Y GAMMA

Theta es en cierto modo, un parámetro análogo a gamma; si una opción pierde valor con el paso del tiempo es para compensar el hecho de que su comprador habrá ganado dinero en el mercado cubriendo su posición de gamma positiva. Cuando la opción esté at-the-money y próxima al vencimiento su gamma será muy alta, por lo que su poseedor podrá ganar mucho dinero ajustando frecuentemente su delta, pero perderá también mucho dinero con el paso del tiempo debido a la theta de la opción. Si la volatilidad ha sido correctamente valorada, ambos efectos se anularán, de hecho, la ecuación de Black-Scholes refleja esta simetría de acuerdo con lo siguiente:

La **ecuación de Black-Scholes** (capítulo 3) que tiene que satisfacer el precio **f** de cualquier opción sobre un activo que no paga dividendos, está dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$$

como

$$\Theta = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \Delta = \frac{\partial f}{\partial S}, \quad \Gamma = \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$$

entonces

$$\Theta + rS\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma = rf$$

En especial, se sabe que el valor de una opción call Europea está dado por:

$$c = S\,N(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2)$$

así que se debe cumplir que:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + rS\frac{\partial c}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = rc \qquad (1)$$

como

$$\Theta = \frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rXe^{-r(T-t)}N(d_2),$$

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S} = N(d_1), \qquad \Gamma = \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}$$

entonces, sustituyendo sus valores en (1) se tiene que:

$$-\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rXe^{-r(T-t)}N(d_2) + rSN(d_1) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}} = rc$$

$$\Rightarrow -rXe^{-r(T-t)}N(d_2) + rSN(d_1) = rc$$

lo cual muestra que c satisface la ecuación diferencial de Black-Scholes. Para un portafolio delta neutral, **Δ=0**, se tiene que

$$\Theta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma = rc$$

La expresión anterior muestra que cuando theta es fuerte (grande) y positiva, gamma tiende a ser fuerte y negativa, y viceversa.

4.5 VEGA

La ***vega*** de una opción mide **la sensibilidad de la prima a las variaciones de la volatilidad implícita negociada en el mercado**, es decir, es la tasa de cambio del valor de la opción con respecto a la volatilidad del activo subyacente. Matemáticamente, **la vega es la derivada parcial de la prima de una opción con respecto a la volatilidad:**

$$\Lambda = \frac{\partial c}{\partial \sigma} = S\sqrt{T-t}\,N'(d_1)$$

Los incrementos de volatilidad influyen positivamente en las primas de cualquier opción, lo cual explica que todas las opciones tengan una vega positiva. Si una opción tiene una vega de **0.35**, significa que un incremento del **1%** de la volatilidad aumentará su prima en **0.35** puntos de cotización. Por ejemplo, si la prima de la opción es **3.80** para una volatilidad implícita del **14%,** el aumento de la volatilidad negociada en el mercado al **15%** incrementará la prima a **4.15 (ó 3.80 + 0.35)** y a la inversa. Las opciones at-the-money son las que tienen una mayor vega, es decir, son las más sensibles a las alteraciones de la volatilidad. Las opciones out-of-the-money son más sensibles a las variaciones de la volatilidad que las opciones in-the-money.

4.6 RHO

La ***rho*** de una opción es la sensibilidad de la prima al tipo de interés, en otras palabras, es la tasa de cambio del valor de la opción con respecto a la tasa de interés. Matemáticamente, ***rho*** es la derivada parcial de la prima con respecto al tipo de interés:

$$\text{rho} = \frac{\partial c}{\partial r} = X(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2)$$

para una opción call Europea sobre un activo que no paga dividendos,

$$\text{rho} = \frac{\partial p}{\partial r} = -X(T-t)e^{-r(T-t)}N(-d_2)$$

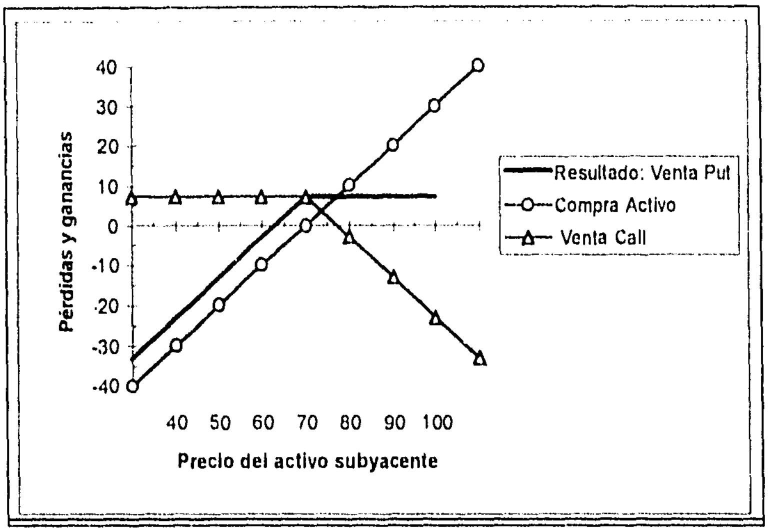
para una opción put Europea sobre un activo que no paga dividendos,

donde $\mathbf{d_2}$ se define igual que como se definió en el parámetro ***theta.***

CAPÍTULO 5 : ESTRATEGIAS CON OPCIONES

5.1 ESTRATEGIAS QUE INVOLUCRAN UNA OPCIÓN Y UN ACTIVO

Existen varias estrategias diferentes que involucran una opción sobre un activo y el mismo activo en sí.

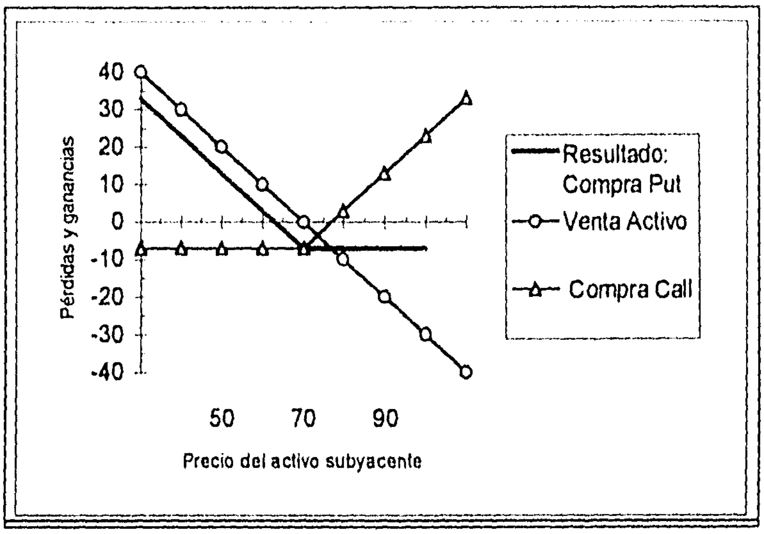


Gráfica 5.1 Perfil de pérdidas y ganancias ***Estrategia 1***

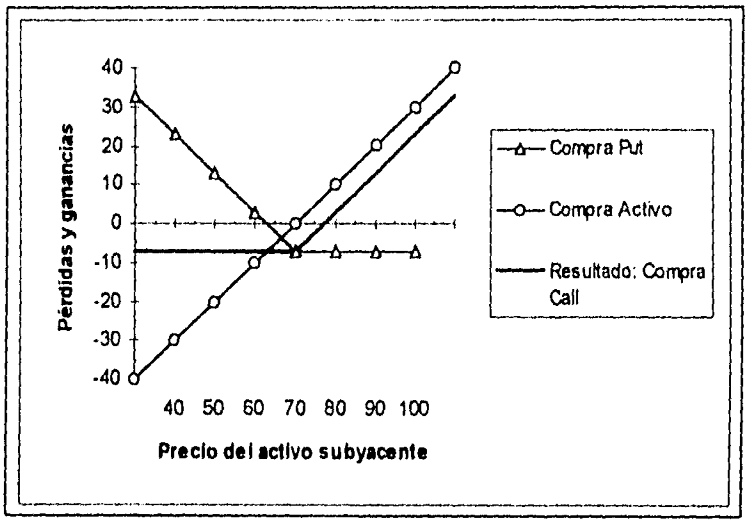
Como se puede observar, la ***Estrategia 1*** (Gráfica 5.1) está basada en un portafolio que consta de una **posición larga sobre un activo más una posición corta en una opción call sobre el mismo activo (donde S = X = 70, c =7 y resulta p=7 con X=70).** La estrategia de inversión representada por este portafolio es conocida como ***Emisión de una Call Cubierta***, pues la posición larga sobre el activo "cubre" o protege al inversionista de la posibilidad de un fuerte incremento en el precio del activo. El resultado se conoce como una ***put sintética,*** pues esta estrategia genera la posición corta sobre una put.

La ***Estrategia 2*** (Gráfica 5.2) está basada en un portafolio que consta de una **posición corta sobre un activo más una posición larga en una opción call sobre el mismo activo (donde S = X = 70, c =7 y resulta p=7 con X=70).** Esta estrategia es lo contrario de **emitir una call cubierta.** El resultado también es una ***put sintética,*** pues la estrategia genera la posición larga sobre una put.

La ***Estrategia 3*** (Gráfica 5.3) consta de un portafolio que involucra la **compra de una opción put sobre cierto activo y la compra del mismo activo (donde S = X = 70, p =7 y resulta c=7 con X=70).** Esta estrategia se conoce como ***Put Preventiva***. El resultado es una ***call sintética,*** pues la estrategia genera la posición larga sobre una call.

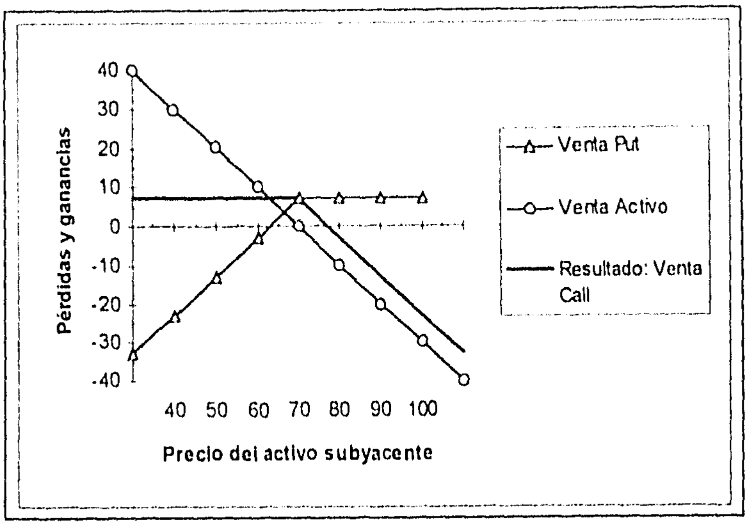


Gráfica 5.2 Perfil de pérdidas y ganancias *Estrategia 2*



Gráfica 5.3 Perfil de pérdidas y ganancias ***Estrategia 3***

La ***Estrategia 4*** (Gráfica 5.4) se basa en un portafolio que consta de una **posición corta sobre un activo más una posición corta en una opción put sobre el mismo activo (donde S = X = 70, p =7 y resulta c=7 con X=70).** Esta estrategia es lo contrario a una **put preventiva.** El resultado también es una ***call sintética,*** pues la estrategia genera la posición corta sobre una call.



Gráfica 5.4 Perfil de pérdidas y ganancias ***Estrategia 4***

Los perfiles de **pérdidas/ganancias** de las **4** estrategias anteriores tienen en general el mismo esquema que los perfiles de pérdidas/ganancias de las posiciones corta y larga para una put y para una call, mostrados en el capítulo 2. Con la paridad **put-call** se puede entender el por qué de esta situación. Del capítulo 3 se puede recordar que la paridad put-call está dada por:

$$p + S = c + Xe^{-r(T-t)}$$

donde **p** es el precio de una opción put Europea, **S** es el precio del activo subyacente, **c** es el precio de una opción call Europea, **X** es el precio de ejercicio de ambas opciones, **r** es la tasa de interés libre de riesgo y **T** es la fecha de expiración de las dos opciones.

La paridad **put-call** muestra que una posición larga en una put combinada con una posición larga sobre el activo subyacente es equivalente a una posición larga en una call más una cantidad de efectivo igual a $Xe^{-r(T-t)}$. Esto explica por qué el perfil de pérdidas/ganancias de la ***Estrategia 3*** es similar al perfil de pérdidas/ganancias de una **posición larga en una call.** La ***Estrategia 4*** es lo contrario a la ***Estrategia 3***, así que conduce a un perfil similar al de una **posición corta en una call.**

La paridad **put-call** también puede ser vista como:

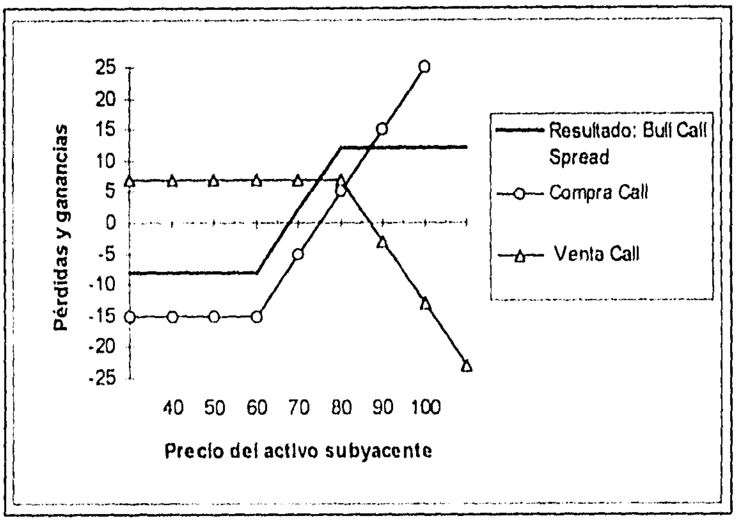
$$S - c = Xe^{-r(T-t)} - p$$

La expresión anterior muestra que una posición larga sobre el activo subyacente combinada con una posición corta en una call es equivalente a una posición corta en una put más una cantidad en efectivo igual a $Xe^{-r(T-t)}$, ésto explica por qué el perfil de pérdidas/ganancias de la ***Estrategia 1*** es similar al de una **posición corta en una put.** La ***Estrategia 2*** es lo contrario a la *Estrategia 1*, por lo tanto, su perfil de pérdidas/ganancias es similar al de una **posición larga en una put.**

5.2 SPREADS

Un *spread* es una estrategia que consiste en tomar una posición en dos o más opciones del mismo tipo (tomar una posición en dos o más opciones tipo call o tipo put), es decir, consiste en la compra de una opción de tipo call o put y la venta simultánea de una opción del mismo tipo pero de distinto precio de ejercicio o vencimiento. El objetivo de esta estrategia es normalmente reducir la prima pagada por una opción que se desea comprar, pero limitando las posibles ganancias.

5. 2. 1 BULL SPREADS



Gráfica 5.5 ***Bull Call Spread*** $(X_1 = 60, X_2 = 80)$

Uno de los tipos más comunes de spreads es el **Bull Spread.** Un inversionista que construye este tipo de estrategia está esperando que el precio del activo subyacente se incremente. En especial, puede construirse mediante **la compra de una opción call sobre un activo con un cierto precio de ejercicio (X_1 = 60 en el esquema) y la venta de una opción call sobre el mismo activo, pero con un precio de ejercicio más alto (X_2 = 80); ambas opciones con la misma fecha de expiración.** A este bull spread se le conoce como ***Bull Call Spread*** (Gráfica 5.5). Como el precio de una opción call siempre decrece cuando el precio de ejercicio se incrementa, el valor de la opción vendida es siempre menor al valor de la opción comprada, por lo tanto, un ***Bull Call Spread*** requiere de una inversión inicial (pues involucra un flujo de efectivo negativo que representa su máxima pérdida).

Como $\mathbf{X_1}$ es el precio de ejercicio de la opción call comprada, $\mathbf{X_2}$ es el precio de ejercicio de la opción call vendida y S_T es el precio del activo en la fecha de expiración de ambas opciones, entonces la estrategia tiene los pagos (pérdidas/ganancias) mostrados en la tabla 5.1 según el precio del activo al vencimiento:

	Sin considerar la inversión inicial requerida por el *Bull Call Spread*		
Si	*Pagos de la posición larga sobre la call*	*Pagos de la posición corta sobre la call*	*Pagos Totales*
$S_T > X_2$	$S_T - X_1$	$X_2 - S_T$	$X_2 - X_1$
$X_1 < S_T \leq X_2$	$S_T - X_1$	0	$S_T - X_1$
$S_T \leq X_1$	0	0	0

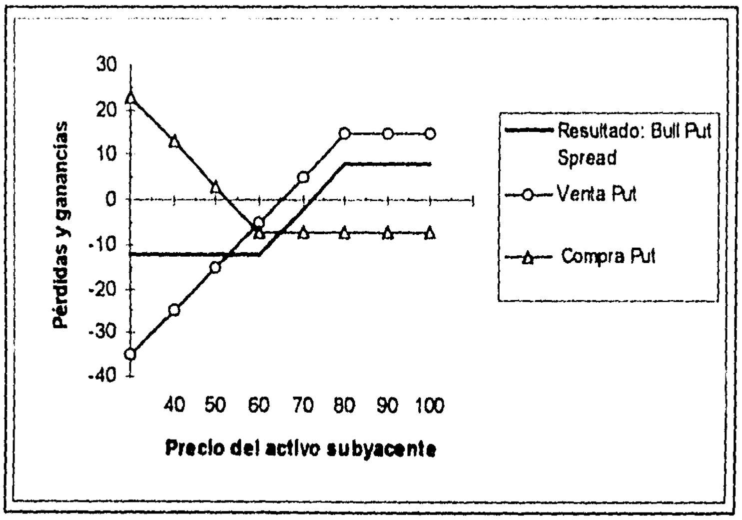
Tabla 5.1

Las ganancias netas se calculan restando a los pagos totales el valor de la inversión inicial requerida, pues la prima de la opción comprada es mayor a la prima de la opción vendida. En el la gráfica 5.5 se puede observar que un ***Bull Call Spread*** tiene pérdidas/ganancias acotadas.

Nótese que para obtener un beneficio, el inversionista que construye esta estrategia, estima pequeños movimientos a la alza en el precio de la acción. En caso de estimar movimientos fuertes a la alza, sólo le convendría comprar una opción call.

Se pueden distinguir 3 tipos de *bull call spreads*:

1. Ambas opciones están inicialmente **out-of-the-money.**
2. Una opción inicialmente **in-the-money**, la otra opción inicialmente **out-of-the-money.**
3. Ambas opciones inicialmente **in-the-money.**

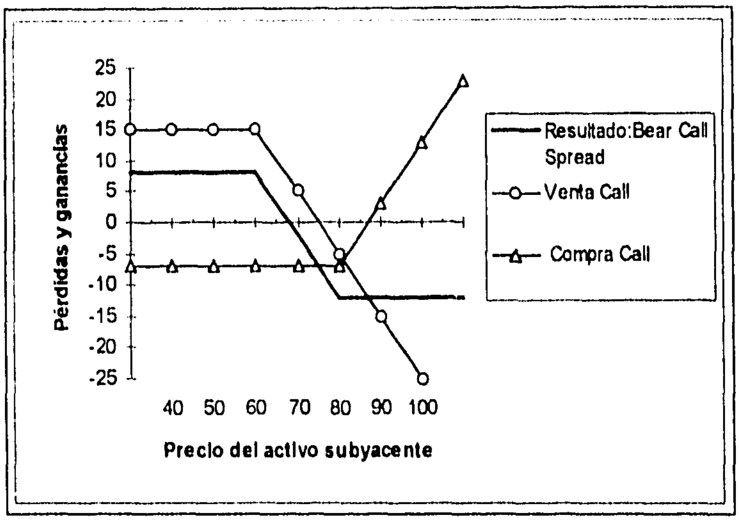


Gráfica 5.6 ***Bull Put Spread*** ($X_1 = 60$, $X_2 = 80$)

Del mismo modo, también se pueden crear **bull spreads** mediante la compra de una opción put con un precio de ejercicio X_1 y la venta de una opción put con un precio de ejercicio X_2, con $X_1 < X_2$ y ambas opciones con la misma fecha de expiración. A este bull spread se le conoce como ***Bull Put Spread*** (Gráfica 5.6). A diferencia del ***Bull Call Spread***, un ***Bull Put Spread*** involucra un flujo de efectivo inicial positivo, ya que para opciones tipo put, cuando el precio de ejercicio se incrementa, el valor de la opción aumenta, entonces, el valor de la opción vendida es mayor al valor de la opción comprada.

El inversionista que adquiere esta estrategia estima un aumento moderado en el precio del activo. También suele adquirirse cuando no hay una completa seguridad de un comportamiento a la alza en el mercado. Se puede observar en la gráfica 5.6 que tanto las pérdidas como las ganancias están limitadas.

5. 2. 2 BEAR SPREADS



Gráfica 5.7 ***Bear Call Spread*** ($X_1 = 60, X_2 = 80$)

A diferencia del **bull spread,** un inversionista que construye un **Bear Spread** está esperando que el precio del activo subyacente se decremente. Este tipo de estrategia puede construirse mediante **la compra de una opción call sobre un activo con un cierto precio de ejercicio X_2 y la venta de una opción call sobre el mismo activo pero con un precio de ejercicio X_1 ($X_1 < X_2$); ambas opciones con la misma fecha de expiración.** A este **bear spread** se le conoce como ***Bear Call Spread*** (Gráfica 5.7), que es lo contrario al ***Bull Call Spread.***

Ahora X_1 es el precio de ejercicio de la opción call vendida, X_2 es el precio de ejercicio de la opción call comprada y S_T es el precio del activo en la fecha de expiración de ambas opciones, entonces en la **tabla 5.2** se pueden observar los pagos de ésta estrategia según el precio del activo al vencimiento.

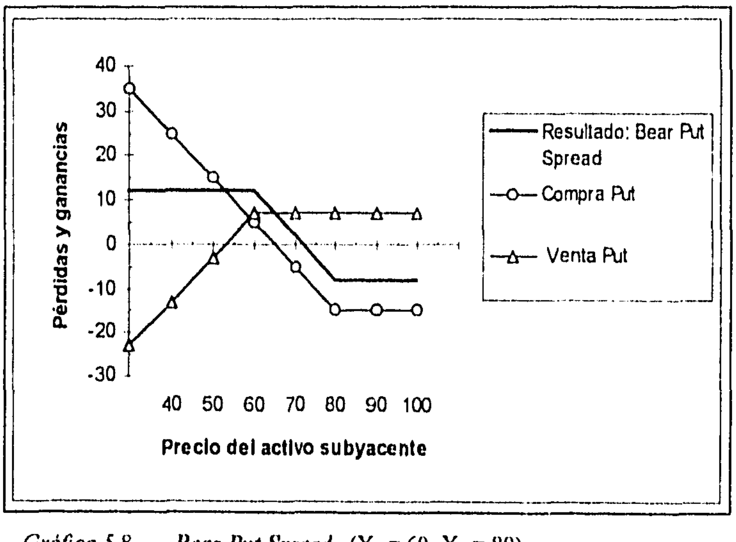
Como ahora el valor de la opción vendida es mayor al valor de la opción comprada, un ***Bear Call Spread*** involucra un flujo de efectivo inicial positivo, así que los pagos netos se calculan sumando a los pagos totales dicho flujo, derivado de la compra/venta de las opciones y que representa la máxima ganancia. En la gráfica 5.7 se puede observar que las pérdidas/ganancias de un ***Bear Call Spread*** están limitadas.

	Sin considerar el flujo de efectivo positivo que involucra el *Bear Call Spread*		
Si	***Pagos de la posición larga sobre la call***	***Pagos de la posición corta sobre la call***	***Pagos Totales***
$S_T > X_2$	$S_T - X_2$	$X_1 - S_T$	$-(X_2 - X_1)$
$X_1 < S_T \leq X_2$	0	$X_1 - S_T$	$-(S_T - X_1)$
$S_T \leq X_1$	0	0	0

Tabla 5.2

Otra modalidad de bear spreads puede ser construida mediante la compra de una opción put con un precio de ejercicio alto **(X_2)** y la venta de una opción put con un precio de ejercicio bajo **(X_1)**, ambas opciones con la misma fecha de expiración. A esta estrategia se le conoce como ***Bear Put Spread*** (Gráfica 5.8), que es lo contrario al ***Bull Put Spread***. Se puede observar en el esquema que se requiere de una inversión inicial, pues el valor de la opción con precio de ejercicio más bajo es menor al valor de la opción que tiene un precio de ejercicio más alto, lo que genera un flujo de efectivo negativo. Además, las pérdidas y ganancias tienen un límite.

El inversionista que hace uso de esta estrategia anticipa una moderada caída en el precio del activo subyacente. Suele emplearse para asegurar una ganancia mayor a las posibles pérdidas.

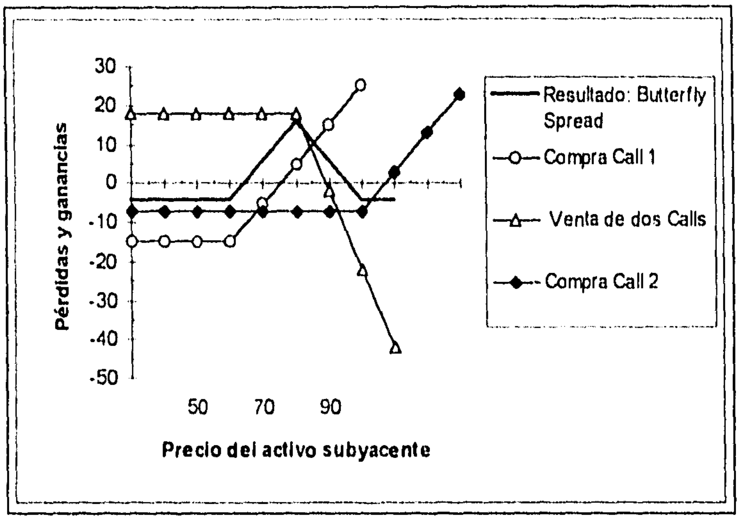


Gráfica 5.8 ***Bear Put Spread*** ($X_1 = 60$, $X_2 = 80$)

5. 2. 3 BUTTERFLY SPREADS

Un ***Butterfly Spread*** (Gráfica 5.9) involucra posiciones con **3** diferentes precios de ejercicio. Se puede construir mediante la **compra de una opción call con un precio de ejercicio X_1** relativamente bajo; la **compra de una opción call con un precio de ejercicio**

X_3 relativamente alto; y la **venta de dos opciones call con un precio de ejercicio** X_2 ($X_1 < X_2 < X_3$). Generalmente el valor de X_2 está cercano al precio actual del activo subyacente.



Gráfica 5.9 ***Butterfly Spread*** utilizando opciones call (X_1 = 60, X_2 = 80, X_3 = 100)

Esta estrategia genera ganancias si el precio del activo permanece cercano a X_2, pero genera pequeñas pérdidas si existe un movimiento del activo subyacente bastante considerable hacia cualquier dirección. Por lo tanto, es una estrategia apropiada para inversionistas que consideran que fuertes movimientos del activo subyacente son poco probables. La estrategia requiere de una pequeña inversión inicial, pues la suma de los valores de las opciones compradas es mayor a la suma de los valores de las opciones vendidas, lo que representa un flujo de efectivo negativo.

Siendo X_1 y X_3 los precios de ejercicio de las opciones compradas, X_2 el precio de ejercicio de las opciones vendidas y de acuerdo al precio del activo subyacente al vencimiento S_T, se tiene que los pagos para un ***Butterfly Spread*** están dados por la tabla 5.3:

	Sin considerar la inversión inicial (flujo de efectivo negativo)			
Si	***Pagos de Compra Call 1***	***Pagos de Compra Call 2***	***Pagos de Venta Calls***	***Pagos Totales***
$S_T \leq X_1$	0	0	0	0
$X_1 < S_T \leq X_2$	$S_T - X_1$	0	0	$S_T - X_1$
$X_2 < S_T \leq X_3$	$S_T - X_1$	0	$-2(S_T - X_2)$	$X_3 - S_T$ *
$S_T > X_3$	$S_T - X_1$	$S_T - X_3$	$-2(S_T - X_2)$	0
***Este resultado es debido a la relación** $X_2 = (X_1+X_3)/2$				

Tabla 5.3

Supóngase que el precio de cierto activo subyacente tiene actualmente un valor de $61. Considérese un inversionista que cree que es poco probable que haya movimientos significantes en el precio del activo. Los precios del mercado para Calls a 6 meses están dados por:

Precio de ejercicio ($)	Precio de la Call ($)
60	15
80	9
100	7

El inversionista puede crear un ***Butterfly Spread*** comprando una call con precio de ejercicio de **$60,** una call con precio de ejercicio de **$100** y vendiendo dos calls con precio de ejercicio igual a **$80.** Entonces la estrategia costaría **$15 + $7 – (2 × $9) = $ 4** (flujo de efectivo negativo que representa una inversión inicial). Si el precio del activo en **6** meses es mayor que **$100** o menor que **$60,** no habría pagos y el inversionista tendría una pérdida neta de **$4.** Si el precio del activo muestra estar entre **$61** y **$99,** el inversionista tendría ganancias. La máxima ganancia, **$16,** ocurre cuando el precio del activo en **6** meses es **$60.** Este ejemplo se puede entender mejor viendo el esquema de esta estrategia (Gráfica 5.9).

Este tipo de estrategia también puede construirse con opciones tipo put. El inversionista compra una put con un precio de ejercicio relativamente bajo, una put con un precio de ejercicio relativamente alto y vende una put con un precio de ejercicio intermedio a los otros dos, utilizando la relación $\mathbf{X_2 = (X_1+X_3)/2}$. Si todas las opciones son Europeas, el uso de opciones tipo put resulta en exactamente el mismo **Butterfly Spread** que utilizando calls.

Un inversionista puede tomar una **posición corta** sobre un ***Butterfly Spread*** siguiendo una estrategia contraria a la que se ha mostrado anteriormente, es decir, se venden opciones con precios de ejercicio $\mathbf{X_1}$ y $\mathbf{X_3}$ y se compran dos opciones con un precio de ejercicio intermedio $\mathbf{X_2}$. Esta estrategia produce una pequeña ganancia si hay movimientos significativos en el precio del activo (su esquema sería lo contrario al esquema del spread con calls que se ha presentado, la ganancia máxima de **16** ahora sería la pérdida máxima, etc.)

5. 2. 4 CALENDAR SPREADS

Hasta ahora se ha asumido que las opciones utilizadas para crear spreads tienen la misma fecha de expiración y diferentes precios de ejercicio. Un ***Calendar Spread*** es una estrategia en donde las opciones utilizadas tienen el mismo precio de ejercicio pero diferente fecha de vencimiento. Se puede construir vendiendo una opción call con un cierto precio de ejercicio y comprando una opción call con una fecha de expiración más larga, pero con el mismo precio de ejercicio. Evidentemente la opción con fecha de expiración mayor, más cara será. Por lo tanto, un **Calendar Spread** requiere de una inversión inicial, pues la opción que se compra tiene más valor que la opción que se vende.

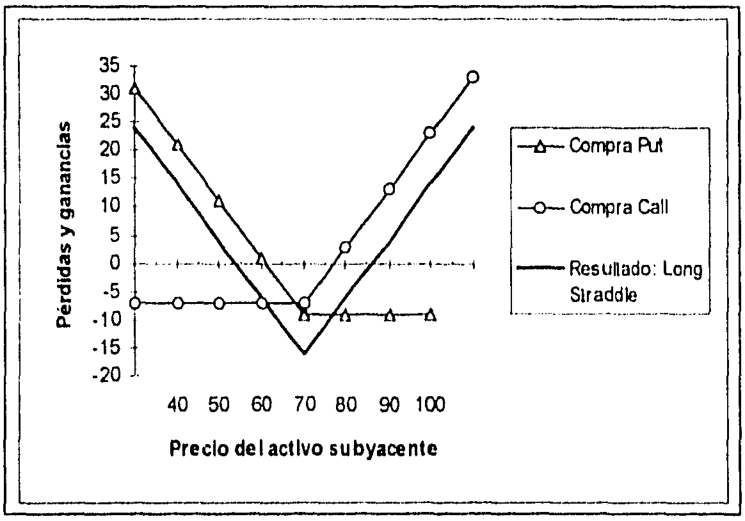
El esquema de esta estrategia es muy similar al de un *Butterfly Spread*. El inversionista genera una ganancia si el precio del activo, en la fecha de expiración de la opción con menor vencimiento, está cercano al precio de ejercicio de la misma opción. Sin embargo, se experimentan pérdidas cuando el precio del activo está significativamente por arriba o por abajo del mismo precio de ejercicio. Entonces, en un **Neutral Calendar Spread,** se escoge un precio de ejercicio cercano al precio actual del activo subyacente. Un **Bullish Calendar Spread** involucra un precio de ejercicio superior al precio del activo, mientras que un **Bearish Calendar Spread** consiste en escoger un precio de ejercicio bajo.

Lo contrario a un *Calendar Spread* se conoce cono un *Reverse Calendar Spread*. En este caso, el inversionista compra una opción con un vencimiento corto y vende una opción con fecha de expiración mayor. Esta estrategia genera una pequeña ganancia si el precio del activo subyacente, en la fecha de expiración de la opción de vencimiento corto, muestra estar significativamente por arriba o por abajo del precio de ejercicio de la misma opción. Sin embargo, conduce a pérdidas bastante considerables si el precio del activo está cerca del precio de ejercicio.

Un *Calendar Spread* se suele utilizar para especular sobre variaciones entre el precio de un activo a diferentes plazos. Por ejemplo, un inversionista que espere un aumento a largo plazo en el precio de un activo, pero que crea que no va a subir inmediatamente, puede comprar una opción call con precio de ejercicio de **$100** a **un año** y vender una opción call con el mismo precio de ejercicio pero a **3 meses** de duración para reducir el costo. Si el activo no sube inicialmente, la opción con vencimiento corto vence sin ser ejercida y el inversionista tiene una call a nueve meses muy barata.

5. 3 STRADDLES

Un *Long Straddle* (posición larga en un Straddle) involucra **la compra de una opción call y una opción put con el mismo precio de ejercicio y fecha de expiración.**



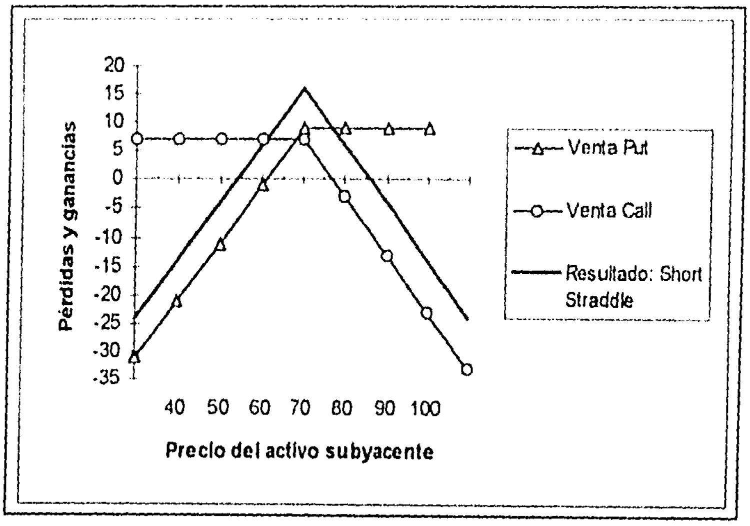
Gráfica 5.10 **Posición Larga en un *Straddle*** (X = 70, c = 7, p = 9)

Como se puede observar en la gráfica 5.10, si para la fecha de expiración de ambas opciones el precio del activo subyacente termina con un valor cercano al precio de ejercicio, el *Long Straddle* conduce a pérdidas moderadas, pues la máxima pérdida que se puede sufrir es la suma de los valores de las dos opciones compradas (esto pasaría si las dos opciones terminaran at-the-money). En cambio, si el precio del activo sufre cambios suficientemente grandes en cualquier dirección, resultarán ganancias bastante considerables.

Un *Long Straddle* es una estrategia apropiada cuando un inversionista está esperando un movimiento bastante fuerte en el precio del activo, pero sin saber en qué dirección será dicho movimiento. A ésta estrategia también se le conoce como *Bottom Straddle*. Es claro que requiere de una inversión inicial representada por las primas de las dos opciones (flujo de efectivo negativo). Sus pagos están dados según la tabla 5.4:

	Sin considerar la inversión inicial		
Si	***Pagos de Compra Call***	***Pagos de Compra Put***	***Pagos Totales***
$S_T < X$	**0**	**$X - S_T$**	**$X - S_T$**
$S_T \geq X$	**$S_T - X$**	**0**	**$S_T - X$**

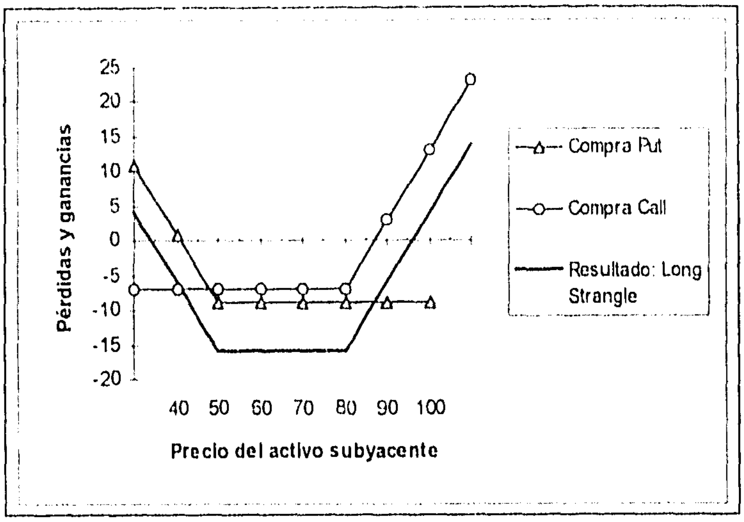
Tabla 5.4



Gráfica 5.11 **Posición Corta en un *Straddle*** (X = 70, c = 7, p = 9)

Un ***Short Straddle*** (Gráfica 5.11), también conocido como ***Top Straddle*** (posición corta en un Straddle), es la estrategia contraria al ***Long Straddle***. **Consiste en la venta de una opción call y una put con el mismo precio de ejercicio y fecha de vencimiento.** Si el precio del activo subyacente para la fecha de expiración termina cercano al precio de ejercicio, el Straddle conduce a ganancias considerables pero acotadas, pues la máxima ganancia está dada por el valor de las dos opciones que se venden si es que terminan at-the-money (flujo de efectivo positivo). Por lo tanto, esta estrategia es apropiada cuando un inversionista estima un estancamiento del mercado, o a lo más, pequeños movimientos en el precio del activo. Si el precio del activo sufre movimientos significativos en cualquier dirección, el inversionista sufre pérdidas bastante considerables y en algunos casos, ilimitadas, por lo que esta estrategia es de riesgo muy alto.

5.4 STRANGLES



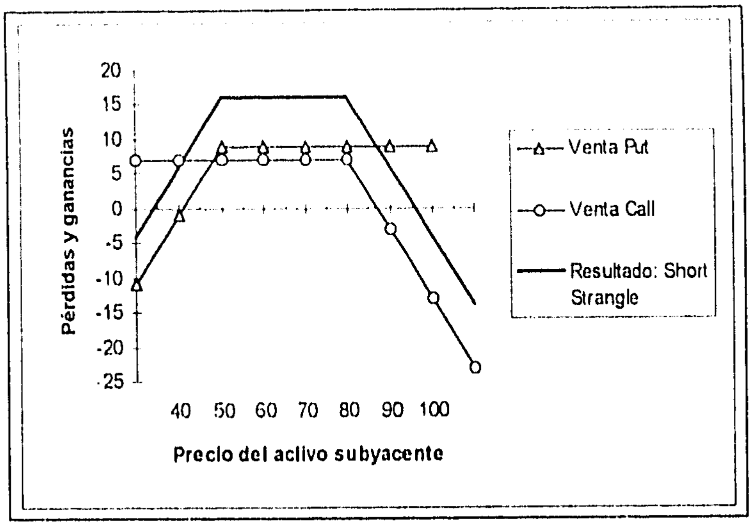
Gráfica 5.12 **Posición larga en un *Strangle*** (X_1 = 50, X_2 = 80, c = 7, p = 9)

En un ***Long Strangle*** (Gráfica 5.12), el inversionista compra una opción put con un precio de ejercicio $\mathbf{X_1}$ y una call con un precio de ejercicio $\mathbf{X_2}$ **($\mathbf{X_1 < X_2}$)**; ambas opciones con la misma fecha de vencimiento. Es una estrategia similar a un ***Long Straddle*** pues el inversionista ha estimado que habrá un movimiento fuerte del precio del activo, pero igualmente no sabe si será un incremento o decremento. Estos movimientos tienen que ser mucho más significativos en comparación con los movimientos del activo requeridos para un ***Long Straddle***, pues sólo así el inversionista genera ganancias.

	Sin considerar la inversión inicial		
Si	***Pagos de Compra Call***	***Pagos de Compra Put***	***Pagos Totales***
$S_T < X_1$	0	$X_1 - S_T$	$X_1 - S_T$
$X_1 \leq S_T \leq X_2$	0	0	0
$S_T > X$	$S_T - X_2$	0	$S_T - X_2$

Tabla 5.5

Es claro que el perfil de pérdidas y ganancias para un ***Long Strangle*** depende de qué tan cerca están los precios de ejercicio entre sí. Mientras más alejados estén, más fuertes tendrán que ser los movimientos del activo para generar alguna ganancia. Cuando el precio del activo se encuentre entre los dos precios de ejercicio, el inversionista perderá a lo más el valor de las opciones compradas, lo cual representa una inversión inicial (flujo de efectivo negativo). De acuerdo con esto, los pagos de esta estrategia están dados por la tabla 5.5.



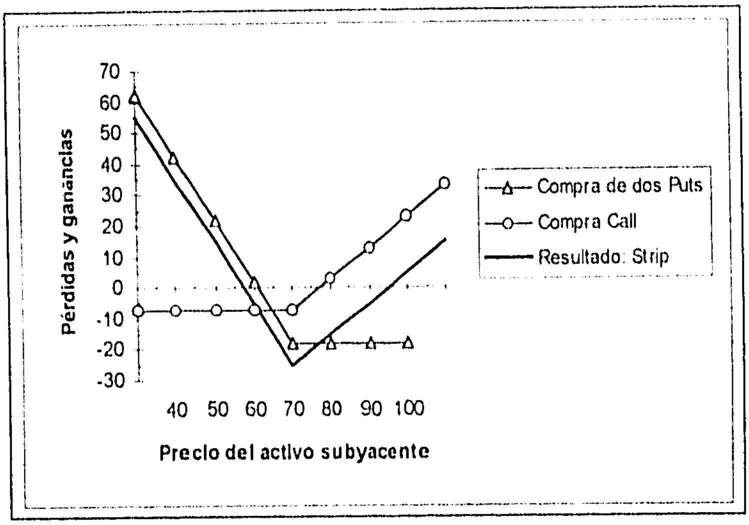
Gráfica 5.13 **Posición Corta en un *Strangle*** ($X_1 = 50$, $X_2 = 80$, $c = 7$, $p = 9$)

Un ***Short Strangle*** (Gráfica 5.13) es la estrategia contraria a un ***Long Strangle.*** Se crea mediante la venta de una opción call con un precio de ejercicio $\mathbf{X_2}$ y la venta de una put con un precio de ejercicio $\mathbf{X_1}$, ambas opciones con la misma fecha de expiración. Cuando el precio del activo se encuentre entre los dos precios de ejercicio, el inversionista ganará, a lo más, el valor de las opciones compradas, lo cual representa un flujo de efectivo positivo. Sin embargo, cuando los precios del activo subyacente se desploman o se elevan, las pérdidas pueden ser muy grandes y en algunos casos (una alza muy fuerte), ilimitadas, por lo tanto, la estrategia también es de alto riesgo.

Esta estrategia es apropiada para inversionistas que consideran poco probable los movimientos fuertes del activo subyacente en cualquier dirección.

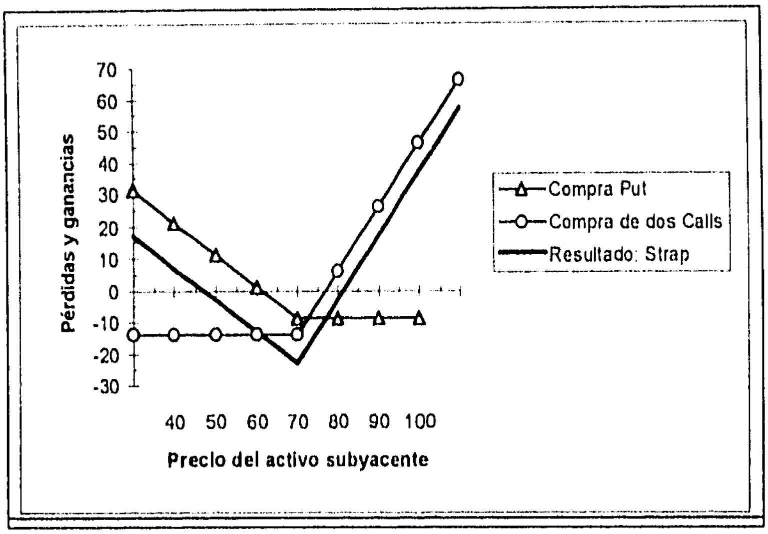
5.5 STRIP

Un ***Strip*** (Gráfica 5.14) consiste en la **compra de una opción call y dos opciones put con el mismo precio de ejercicio y fecha de expiración.** Con esta estrategia, un inversionista estima que habrá un fuerte movimiento del precio del activo subyacente, pero considera que es más probable que dicho movimiento sea a la baja. El análisis de ésta estrategia es muy similar al de un ***Long Straddle***.



Gráfica 5.14 ***Strip*** (X = 70, c = 7, p = 9)

5.6 STRAP



Gráfica 5.15 ***Strap*** (X = 70, c = 7, p = 9)

Un ***Strap*** (Gráfica 5.15) consiste en la **compra de dos opciones call y una put con el mismo precio de ejercicio y fecha de expiración.** Con esta estrategia, un inversionista estima que habrá un fuerte movimiento del precio del activo subyacente, pero ahora considera que es más probable que dicho movimiento sea a la alza, por lo que el análisis de esta estrategia también es muy similar al de un ***Long Straddle***.

COMENTARIOS FINALES

El motivo de proponer un curso de Opciones en la Facultad de Ciencias radica en el hecho de que en la última década se ha visto una verdadera explosión en el número y volumen de nuevos instrumentos financieros en todos los mercados mundiales, que se ha hecho notar, en especial, en los llamados productos derivados, entre los cuales se encuentran las opciones.

El sector financiero, así como los departamentos financieros de compañías cuyas actividades principales no son de índole financiera, se han tenido que adaptar a los nuevos métodos financieros que actualmente existen, por lo que considero necesario que se cuente con un curso que ofrezca las herramientas básicas para poder hacer frente principalmente a las necesidades que el sector financiero requiera.

El contenido y desarrollo del presente trabajo forman en conjunto el material básico que se ha considerado necesario para entender la estructura general de las opciones. Dentro del mismo tema, son muchos los conceptos que están involucrados, lo cual condujo a elaborar el curso de tal forma que, todo el material introductorio requerido para entender el manejo de las opciones, quede en su mayoria cubierto, haciendo uso de los puntos más representativos e importantes.

Todos los capítulos implican un cierto nivel de análisis, el cual varía debido a que cada uno de ellos tiene distintas finalidades. Esto no quiere decir que algún capítulo sea menos importante que otro, pero sí es necesario hacer notar qué capítulos requieren de mayor atención.

El capítulo uno está basado en las definiciones de los términos que más se utilizan en el análisis de las opciones y que se consideraron necesarias a modo de tener un panorama más amplio (quiénes y dónde se negocia dicho instrumento) antes de comenzar a introducir lo que es un contrato de opción . También está constituido por los antecedentes históricos de las opciones. Este capítulo no pueden ser considerado como parte fundamental del curso, pero sí pueden ser visto como el vínculo entre el tema principal y algunos conceptos requeridos para el desarrollo del mismo.

El segundo capítulo es de vital importancia por estar constituido principalmente por las características básicas de un contrato de opción y sus modalidades; puede impartirse con flexibilidad debido a que cuenta con ejemplos y generalizaciones que facilitan su estudio. Es muy importante que este capítulo quede bien comprendido, pues en él se comienzan a manejar términos y conceptos que se continúan utilizando en los capítulos que le suceden.

En el tercer capítulo se hace un análisis más profundo ya que es en realidad la estructura principal de la tesis. Su contenido es de alta formalidad, por lo tanto requiere que su estudio sea con detenimiento. Los dos modelos de valuación de opciones que se presentan, son los de mayor importancia, además de ser los más manejados dentro del ámbito financiero. Estos modelos involucran el manejo de ciertas fórmulas, conceptos y términos de probabilidad, estadística, finanzas y, en especial, en el Modelo de Black-Scholes se manejan algunos resultados necesarios los cuales no tienen sus orígenes en la teoría financiera tradicional, sino en el trabajo de Einstein y Smoluchowski a principios de siglo sobre "Movimiento Browniano" (el movimiento aleatorio de pequeñas partículas de polvo o de polen suspendidas en un gas) y la teoría cinética de los gases. Otros resultados muy importantes en el Modelo de Black-Scholes son el lema de Ito, el cual es mucho más reciente y, obviamente, la ecuación diferencial de Black-Scholes, que junto con sus varias generalizaciones forma la base de la valoración de las opciones.

Cabe mencionar que uno de los primeros intentos formales para obtener una solución al problema de la valuación de opciones, fue el trabajo del eminente matemático **Louis Bachelier**[1] en el año de 1900, quien presenta la primera fórmula seria que pretende calcular el precio de una opción. Este primer modelo tenía varios problemas, entre ellos, el modelo no consideraba el valor del dinero en el tiempo. Por estas razones empezaron a realizarse modificaciones al modelo de Bachelier. En 1973 **Fisher Black y Myron Scholes**[2] publicaron su modelo basado en la idea de que se podían combinar acciones y opciones en un mismo portafolio de tal forma que éste estuviera libre de riesgo, es decir, un portafolio con un valor futuro conocido y fijo. La herramienta matemática empleada por Black-Scholes tendió a obscurecer los principios económicos subyacentes. Es entonces cuando **William Sharpe**[3], profesor de Finanzas de la Universidad de Standford, descubrió una forma de derivar los mismos resultados usando técnicas más elementales, originándose el método para la valuación de opciones conocido como **Modelo Binomial.** Una ventaja de este modelo es que de él se puede derivar el modelo de Black-Scholes y puede emplearse para la valuación de opciones americanas, cosa que no sucede con el de Black-Scholes, que en teoría solo valúa opciones Europeas.

Los capítulos cuarto y quinto, sin ser menos importantes, representan la parte complementaria, pues en ellos se manejan los parámetros básicos de una opción y las posibles estrategias de cobertura que se pueden crear mediante la combinación de varias opciones y el activo subyacente.

Las opciones representan un tema de gran importancia pues son un instrumento que actualmente forma una de las piezas fundamentales de un mercado financiero moderno. Muchos aspectos de las finanzas como la gestión de carteras, la cobertura de riesgos, la selección de una estructura financiera , etc., no se pueden entender sin considerar las posibilidades que ofrecen las opciones, de ahí la importancia de que los alumnos de la Facultad de Ciencias cuenten con estos conocimientos básicos.

---

[1] Louis Bachelier. "Théorie de la Speculation". *Annales de l'Ecole Normale Supèriore*, 17 (1900), 21-86 (París).

[2] F. Black and M. Scholes, "The Pricing of Options on Corporate Liabilities" *Journal of Political Economy*, vol. 81 (1973), pp.637-654.

[3] W. Sharpe, *Investments*, Prentice-Hall, 1978.

ANEXO : DERIVACIÓN DEL LEMA DE ITO

El lema de Ito proviene de hacer una expansión de primer grado en series de Taylor de la función **f(x,t)**. Considérese una función continua y diferenciable **f**, de una variable **x**. Si Δx es un pequeño cambio en **x** y Δf es el pequeño cambio resultante en f, entonces,

$$\Delta f \approx \frac{df}{dx}\Delta x$$

en otras palabras, Δf es aproximadamente igual a la tasa de cambio de **f** con respecto a **x**, multiplicada por Δx. El error involucra términos de orden Δx^2. Si se requiere mayor precisión, puede usarse una expansión en series de Taylor de Δf :

$$\Delta f = \frac{df}{dx}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}\Delta x^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3 f}{dx^3}\Delta x^3 + \ldots$$

Para una función continua y diferenciable **f**, de dos variables **(x , z)**, el resultado análogo con $\Delta f \approx \frac{df}{dx}\Delta x$ es:

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z$$

y la expansión en series de Taylor de Δf es:

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\Delta x \Delta z + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\Delta z^2 + \ldots \qquad \textbf{ecuación (1)}$$

En el límite cuando Δx y Δy tienden a cero, la ecuación anterior resulta:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Una opción es una función de una variable que sigue un proceso estocástico. La ecuación anterior se puede extender a modo de cubrir dicha función. Supóngase que una variable **x** sigue el proceso general de Ito, es decir,

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz$$

y que **f** es una función de **x** y del tiempo **t**. Por analogía con

$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\Delta x \Delta z + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\Delta z^2 + \ldots$, se puede escribir que

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}\Delta x \Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\Delta t^2 + \ldots \qquad \text{ecuación (2)}$$

Ya se ha mostrado que $dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz$ puede escribirse en su forma discreta como:

$$\Delta x = a(x, t)\Delta t + b(x, t)\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

recordando que $$\Delta x = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t} \qquad \textbf{ecuación (3)}$$

La ecuación anterior revela una diferencia muy importante entre la situación en la ecuación **(2)** y la situación en la ecuación **(1)**. Cuando se utilizaron los argumentos de límite para cambiar de la ecuación **(1)** a la ecuación $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial z}dz$, los términos en Δx^2 fueron ignorados debido a que son términos de segundo orden. En cambio, por la ecuación **(3)**,

$\Delta x^2 = \left(a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}\right)^2 = a^2\Delta t^2 + b^2\varepsilon^2\Delta t + 2ab\varepsilon\Delta t\sqrt{\Delta t} \approx b^2\varepsilon^2\Delta t$, **tomando términos en Δt hasta sólo primer orden.**

$$\Rightarrow \Delta x^2 = b^2\varepsilon^2\Delta t + \textbf{términos de mayor orden en } \Delta t \qquad \textbf{ecuación (4)}$$

lo cual muestra que el término que involucra Δx^2 en la ecuación **(2)** tiene un componente que es de orden Δt y que no puede ser ignorado.

La varianza de una distribución normal estándar es **1**. Esto significa que

$$E(\varepsilon^2) - [E(\varepsilon)]^2 = 1$$

donde **E** denota el valor esperado. Como $E(\varepsilon) = 0$, entonces, $E(\varepsilon^2) = 1$, así que el valor esperado de $\varepsilon^2\Delta t$ es Δt. Se puede mostrar que la varianza de $\varepsilon^2\Delta t$ es de orden Δt^2 , y como resultado de esto, $\varepsilon^2\Delta t$ resulta no estocástico e igual a su valor esperado Δt cuando Δt tiende a cero. Con esto, el primer término del lado derecho de la ecuación **(4)** resulta también no estocástico e igual a b^2dt cuando Δt tiende a cero. Con este resultado y tomando el límite cuando Δx y Δt tienden a cero en la ecuación **(2)**, se obtiene:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}b^2dt$$

La expresión anterior es el ***lema de Ito***. Sustituyendo $dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz$, se obtiene:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}b^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial x}bdz$$

BIBLIOGRAFÍA

Bhattacharya, Rabindra Nath, 1937.
STOCHASTIC PROCESSES WITH APPLICATIONS,
1990 J. Wiley , New York.

Canavos, George C.
PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA. APLICACIONES Y MÉTODOS,
1988 McGraw-Hill/Interamericana de México, S.A. de C.V.

Fabozzi, Frank J.
THE HANDBOOK OF FIXED INCOME OPTIONS. Strategies, Pricing and Aplications,
1996, Frank J. Fabozzi Editor.
Irwin, Professional Publishing. Revised Editon.

Franklin R., Edwards.
Cindy W. Ma.
FUTURES AND OPTIONS,
1992 McGraw-Hill, Inc. International Edition, 1992 Economics Series.

Hull, John C.
INTRODUCTION TO FUTURES AND OPTIONS MARKETS,
1995,1991 Prentice-Hall, Inc. A Simon & Schuster Company,
Englewood Cliffs, New Jersey 07632. Second Edition.

Hull, John C.
OPTIONS, FUTURES, AND OTHER DERIVATIVE SECURITIES,
1993, 1989 Prentice-Hall, Inc. A Simon & Schuster Company,
Englewood Cliffs, New Jersey 07632. Second Editon.

Lamothe Fernández, Prosper.
OPCIONES FINANCIERAS. UN ENFOQUE FUNDAMENTAL,
1993 McGraw-Hill / Interamericana de España, S.A. ,
Edificio Valrealty, 1a. planta, Basauri, 17, 28023 Aravaca, Madrid.
Primera Edición en español

Madura, Jeff.
FINANCIAL MARKETS AND INSTITUTIONS,
1992, 1989 West Publishing Company.
Second Edition.

Mansell Carstens, Catherine.
LAS NUEVAS FINANZAS EN MÉXICO,
1992 Editorial Milenio, S.A. de C.V., Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Reg. Núm. 1659. Quinta reimpresión, noviembre de 1994.

Mendenhall, William.
Wackerly, Dennis D.
Scheaffer, Richard L.
MATHEMATICAL STATISTICS WITH APPLICATIONS,
1990 PWS-KENT Publishing Company.
Duxbury Press, An imprint of Wadsworth Publishing Company,
Belmont, California.
Fourth Edition.

Mood, Alexander M.
Graybill, Frankling A.
Boes, Duane C.
INTRODUCTION TO THE THEORY OF STATISTICS,
1998 McGraw-Hill International Editions. Statistics Series, third edition.

Rodriguez de Castro, J.
INTRODUCCION AL ANALISIS DE PRODUCTOS FINANCIEROS DERIVADOS. FUTUROS, OPCIONES, FORWARDS, SWAPS ,
1995 Editorial Limusa, S.A de C.V., Grupo Noriega Editores, Balderas 95, México, D.F.
Primera Edición.

Saunders, Anthony.
RECENT DEVELOPMENTS IN FINANCE,
Anthony Saunders, Editor.
1992 Business one Irwin, Homewood, Illinois 60430.

Siegel, Daniel R.
Siegel, Diane F.
THE FUTURES MARKETS. THE PROFESSIONAL TRADER'S GUIDE TO PORTFOLIO STRATEGIES, RISK MANAGEMENT ARBITRAGE,
1994, 1990 Irwin, Professional Publishing. First Edition.

Stoll, Hans R.
Whaley, Robert E.
FUTURES AND OPTIONS. THEORY AND APPLICATIONS,
1993 South-Western Publishing Co., Cincinnati, Ohio. Current Issues in Finance Series.

Uyemura, Dennis G.
Van Deventer, Donald R.
FINANCIAL RISK MANAGEMENT IN BANKING,
1993 A Bankline Publication, Bankers Publishing Company,
Chicago, Illinois.

COMENTARIOS BIBLIOGRÁFICOS

Los libros presentados en la bibliografía, representan una fuente muy importante para el desarrollo del tema que se propone como un curso mediante esta tesis, estos libros obviamente constituyeron el principal medio de información e investigación para la creación de la misma, por tal razón, se ha considerado necesario hacer mención de los libros que se encontraron más completos en cuanto a *Opciones* se refiere, pues cada uno de ellos maneja el tópico con enfoques diferentes y no todos se adecuan a los fines requeridos

El libro en donde se encontró mayor formalidad en la parte correspondiente a la valuación de las opciones es el de **John C. Hull, *"Options, Futures, and other Derivative Securities"***, el cual muestra un análisis muy completo de los dos modelos de valuación de opciones, el modelo Binomial y el de Black-Scholes, mientras que el libro de **Prosper Lamothe, *"Opciones Financieras. Un enfoque fundamental"***, presenta un desarrollo muy detallado del modelo Binomial, en cambio, el libro de **Rodríguez de Castro** trabaja con el modelo de Black-Scholes principalmente. Otro libro que maneja el tema con bastante amplitud es también el de **John C. Hull, *"Introduction to Futures and Options Markets"***, el cual abarca todos los aspectos relacionados con las opciones, basándose en ejemplos de actualidad.

En cuanto a los demás libros relacionados con el tema, todos contienen excelentes definiciones sobre lo que es un contrato de opción, sus características, los tipos de contratos que existen, los activos o bienes subyacentes sobre los que se puede emitir una opción, etc.. Los ejemplares que explican con más detalle el manejo de las opciones en los mercados de valores mundiales, analizando todas las estrategias posibles que se pueden crear con dicho instrumento son : ***" The Handbook of Fixed Income Options. Strategies, Pricing and Applications"*** **de Frank J. Fabozzi** y ***"Futures and Options. Theory and Applications"*** **de Hans R. Stoll.**

Considerando los dos libros de **John C. Hull** como el material más apegado a las necesidades del presente trabajo (de un curso), se recomiendan como texto. Además, se proponen algunos ejercicios y preguntas semejantes a los de estos libros y otros han sido extraídos de ambos, de manera que se pueda practicar la teoría de cada capítulo. Los ejercicios propuestos se pueden identificar con una (p) que les precede.

EJERCICIOS

PRIMER CAPÍTULO

(p) 1.- ¿ Cuál es la clasificación del los riesgos dentro del área financiera?
(p) 2.- ¿ Qué es la especulación?
(p) 3.- ¿ Qué es el arbitraje y cúal es su función en el mercado?
(p) 4.- ¿ Cuáles son los dos tipos de mercados que existen y cuál es la diferencia entre ellos?
(p) 5.- ¿ Qué es la Cámara de Compensación?

(p) 5.- Defina la *rho* de una opción.

QUINTO CAPÍTULO

1.- Explique dos formas en las que se puede construir un Bear Spread.

2.- ¿Cuándo es apropiado para un inversionista comprar un Butterfly Spread?

3.- Opciones call sobre una acción están disponibles con precios de ejercicio de \$15, \$17½ y \$20 con fechas de expiración en 3 meses. Sus precios son \$4, \$2 y \$½ respectivamente. Explique como pueden ser usadas las opciones para crear un Butterfly Spread. Construya una tabla mostrando la variación de los pagos con respecto al precio de la acción al vencimiento.

4.- ¿Cuál es la diferencia entre un Strangle y un Straddle?

5.- Una opción call con precio de ejercicio de \$50 tiene una prima de \$2 y una opción put con precio de ejercicio de \$45 tiene una prima de \$3. Explique como se puede construir un Strangle con ambas opciones. ¿Cuál es el diagrama de pérdidas/ganancias para el Strangle?.

SEGUNDO CAPÍTULO

(p) 1.- ¿ Qué es una Opción y cuántos tipos de contratos de Opciones existen?

(p) 2.- Defina los siguientes términos: Precio de Ejercicio, Fecha de Expiración, Activo o bien Subyacente, Prima.

(p) 3.- ¿Cuál es la diferencia entre una opción Americana y una Europea?

4.- Un inversionista compra una put Europea sobre una acción por $3. El precio de la acción es $42 y el precio de ejercicio es $40. ¿Bajo que circunstancias el inversionista genera una ganancia y bajo que circunstancias la opción será ejercida? dibuje un diagrama mostrando la variación de las ganancias del inversionista en relación con el precio de la acción (activo o bien subyacente) al vencimiento de la opción. (p) Haga una tabla en donde se muestren todos los casos de la primer pregunta.

5.- Explique la diferencia entre emitir (vender) una opción call y comprar una opción put

TERCER CAPÍTULO

(p) 1.- ¿En cuantos componentes se puede dividir la prima de una opción?. Explique cada componente.

(p) 2.- Mencione los factores que afectan el precio de una opción. Explique brevemente.

3.- ¿Cuál es la cota inferior para el precio de una opción call a 4 meses sobre una acción que no paga dividendos, cuando el precio de la acción es $28, el precio de ejercicio es $25 y la tasa de interés libre de riesgo es del 8% anual?.

4.- El precio de una acción es actualmente $50, se sabe que al final de dos meses el precio será $53 ó $48. La tasa de interés libre de riesgo es del 10% anual compuesta continuamente. ¿Cuál es el valor de una opción call Europea a 2 meses con precio de ejercicio de $49?. Use argumentos de no arbitraje.

5.- El precio de una acción es actualmente $50. Asuma que el rendimiento esperado de la acción es del 18% anual y su volatilidad del 30% anual. ¿Cuál es la distribución de probabilidad del precio de la acción en 2 años? Calcule la media y la desviación estándar de la distribución. Determine un intervalo del 95% de confianza.

CUARTO CAPÍTULO

(p) 1.- Defina la *delta* de una opción.
(p) 2.- Defina la *gamma* de una opción.
(p) 3.- Defina la *theta* de una opción.
(p) 4.- Defina la *vega* de una opción.

SEGUNDO CAPÍTULO

(p) 1.- ¿ Qué es una Opción y cuántos tipos de contratos de Opciones existen?

(p) 2.- Defina los siguientes términos: Precio de Ejercicio, Fecha de Expiración, Activo o bien Subyacente, Prima.

(p) 3.- ¿Cuál es la diferencia entre una opción Americana y una Europea?

4.- Un inversionista compra una put Europea sobre una acción por \$3. El precio de la acción es \$42 y el precio de ejercicio es \$40. ¿Bajo que circunstancias el inversionista genera una ganancia y bajo que circunstancias la opción será ejercida? dibuje un diagrama mostrando la variación de las ganancias del inversionista en relación con el precio de la acción (activo o bien subyacente) al vencimiento de la opción. (p) Haga una tabla en donde se muestren todos los casos de la primer pregunta.

5.- Explique la diferencia entre emitir (vender) una opción call y comprar una opción put

TERCER CAPÍTULO

(p) 1.- ¿En cuantos componentes se puede dividir la prima de una opción?. Explique cada componente.

(p) 2.- Mencione los factores que afectan el precio de una opción. Explique brevemente.

3.- ¿Cuál es la cota inferior para el precio de una opción call a 4 meses sobre una acción que no paga dividendos, cuando el precio de la acción es \$28, el precio de ejercicio es \$25 y la tasa de interés libre de riesgo es del 8% anual?.

4.- El precio de una acción es actualmente \$50, se sabe que al final de dos meses el precio será \$53 ó \$48. La tasa de interés libre de riesgo es del 10% anual compuesta continuamente. ¿Cuál es el valor de una opción call Europea a 2 meses con precio de ejercicio de \$49?. Use argumentos de no arbitraje.

5.- El precio de una acción es actualmente \$50. Asuma que el rendimiento esperado de la acción es del 18% anual y su volatilidad del 30% anual. ¿Cuál es la distribución de probabilidad del precio de la acción en 2 años? Calcule la media y la desviación estándar de la distribución. Determine un intervalo del 95% de confianza.

CUARTO CAPÍTULO

(p) 1.- Defina la *delta* de una opción.
(p) 2.- Defina la *gamma* de una opción.
(p) 3.- Defina la *theta* de una opción.
(p) 4.- Defina la *vega* de una opción.

(p) 5.- Defina la *rho* de una opción.

QUINTO CAPÍTULO

1.- Explique dos formas en las que se puede construir un Bear Spread.

2.- ¿Cuándo es apropiado para un inversionista comprar un Butterfly Spread?

3.- Opciones call sobre una acción están disponibles con precios de ejercicio de \$15, \$17½ y \$20 con fechas de expiración en 3 meses. Sus precios son \$4, \$2 y \$½ respectivamente. Explique como pueden ser usadas las opciones para crear un Butterfly Spread. Construya una tabla mostrando la variación de los pagos con respecto al precio de la acción al vencimiento.

4.- ¿Cuál es la diferencia entre un Strangle y un Straddle?

5.- Una opción call con precio de ejercicio de \$50 tiene una prima de \$2 y una opción put con precio de ejercicio de \$45 tiene una prima de \$3. Explique como se puede construir un Strangle con ambas opciones. ¿Cuál es el diagrama de pérdidas/ganancias para el Strangle?.