



00382

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

A  
2ej

FACULTAD DE CIENCIAS  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

**CUANTIZACION DE SISTEMAS  
CON CONSTRICCIONES**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE  
DOCTOR EN CIENCIAS (FISICA)

P R E S E N T A

JOSE ANTONIO R. GARCIA ZENTENO

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

MEXICO, D. F.

1996



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**  
*DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO*

**CUANTIZACION DE SISTEMAS  
CON CONSTRICCIONES**

**T E S I S**  
**QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE**  
**DOCTOR EN CIENCIAS (FISICA)**  
**P R E S E N T A**  
**JOSE ANTONIO R. GARCIA ZENTENO**

**DIRECTOR DE TESIS: DR. JOSE DAVID VERGARA OLIVER**  
**CO-DIRECTOR DE TESIS: DR. LUIS FERNANDO URRUTIA RIOS**

**MEXICO, D. F.**

**1996**

# lo

cción	1
os básicos	7
odo de Dirac	8
1 Acción extendida	14
Condiciones de norma	18
Cuantización canónica de sistemas con constricciones	20
4 Ejemplo	23
2.1 BFV	24
1 Construcción de la carga BRST	27
2.2 Observables BRST	30
2.3 Teoría cuántica	35
Principio de acción de Schwinger	41
<b>Método de Dirac versus método de Faddeev-Jackiw</b>	<b>46</b>
Reducción directa en el método de Dirac	46
Método de Faddeev-Jackiw	51
Comparación con el método de Dirac	53
8.1 1.1 Representación canónica de la superficie de constricción	57
2 Equivalencia del método de Dirac's con el método de Faddeev- Jackiw	59
2.4.1 Análisis F-J	59
2.4.2 Análisis de Dirac	63
3 Ejemplo	65
6 Algunos comentarios sobre la relación entre BRST-BFV y el método F-J	69
7 Conclusiones	73
<b>BRST-BFV para sistemas no estacionarios</b>	<b>76</b>
3.1 Método de Dirac para sistemas no estacionarios	79
3.2 Reformulación del problema en términos de una acción para- metrizada	83
3.3 Método de Batalin-Tyutin en el caso no esacionario	85

3.4	BRST-BFV en el caso no estacionario . . . . .	91
3.4.1	Integral de Trayectoria . . . . .	96
3.4.2	Formalismo de operadores BRST-BFV para sistemas no estacionarios . . . . .	98
3.5	Observaciones finales . . . . .	100
3.6	Cuantización BRST-BFV del rotor bidimensional dependiente del tiempo . . . . .	102
<b>4</b>	<b>BRST-BFV y el principio de acción de Schwinger</b>	<b>109</b>
4.1	Acción cuántica BRST-BFV . . . . .	112
4.2	Partícula no relativista parametrizada . . . . .	118
4.3	Partícula relativista . . . . .	123
4.4	Partícula reativista con espín . . . . .	126
<b>5</b>	<b>Principio variacional y términos de frontera</b>	<b>134</b>
5.1	Principio variacional y condiciones sobre los extremos . . . . .	135
5.2	Faddev-Jackiw para sistemas invariantes ante reparametriza- ciones . . . . .	144
5.3	Términos de punta y principio de acción de Schwinger . . . . .	145
5.4	Modelo de Banks-O'Loughlin . . . . .	148
<b>A</b>	<b>Apéndice</b>	<b>155</b>
A.1	Variables fermiónicas . . . . .	155
A.2	Mecánica clásica con variables de Grassmann . . . . .	158
A.2.1	Acción extendida: incorporación de la signos apropiados . . . . .	159
A.2.2	Términos de frontera . . . . .	161
A.2.3	Integral funcional sobre el sector de los fantasmas . . . . .	162
A.3	Transformaciones de la estructura simpléctica y espacio fase reducido: Fórmula de Faddeev . . . . .	165
	<b>Bibliografía</b>	<b>167</b>

3.4	BRST-BFV en el caso no estacionario . . . . .	91
3.4.1	Integral de Trayectoria . . . . .	96
3.4.2	Formalismo de operadores BRST-BFV para sistemas no estacionarios . . . . .	98
3.5	Observaciones finales . . . . .	100
3.6	Cuantización BRST-BFV del rotor bidimensional dependiente del tiempo . . . . .	102
<b>4</b>	<b>BRST-BFV y el principio de acción de Schwinger</b>	<b>109</b>
4.1	Acción cuántica BRST-BFV . . . . .	112
4.2	Partícula no relativista parametrizada . . . . .	118
4.3	Partícula relativista . . . . .	123
4.4	Partícula relativista con espín . . . . .	126
<b>5</b>	<b>Principio variacional y términos de frontera</b>	<b>134</b>
5.1	Principio variacional y condiciones sobre los extremos . . . . .	135
5.2	Faddev-Jackiw para sistemas invariantes ante reparametriza- ciones . . . . .	144
5.3	Términos de punta y principio de acción de Schwinger . . . . .	145
5.4	Modelo de Banks-O'Loughlin . . . . .	148
<b>A</b>	<b>Apéndice</b>	<b>155</b>
A.1	Variables fermiónicas . . . . .	155
A.2	Mecánica clásica con variables de Grassmann . . . . .	158
A.2.1	Acción extendida: incorporación de la signos apropiados . . . . .	159
A.2.2	Términos de frontera . . . . .	161
A.2.3	Integral funcional sobre el sector de los fantasmas . . . . .	162
A.3	Transformaciones de la estructura simpléctica y espacio fase reducido: Fórmula de Faddeev . . . . .	165
	<b>Bibliografía</b>	<b>167</b>

## Abstract of the thesis

### "Quantization of gauge systems"

*Author: José Antonio R. García Zenteno*

The investigation of alternative methods of quantization of gauge theories is a relevant area of the current research in theoretical and mathematical physics. The objective of these methods is twofold: from one hand the study of the theories that describe the fundamental interactions of nature and for the other the quantization of the general theory of relativity. In addition of a general review of the BRST-BFV quantization method we present a proof of the equivalence of the Faddeev-Jackiw approach to gauge theories with the standard Dirac method. Next we extend the BRST-BFV formulation to the case of non-stationary systems by reformulating the original problem as a new problem that presents reparametrization invariance and show that with an appropriate norm condition we can recover the original problem in a straightforward way. We show also that the Fradkin-Vilkovisky theorem is valid in this case. The generalization of the conventional approach of Batalin and Tyutin to the non-stationary case is also achieved. The analysis of the BRST-BFV operational method is worked out in the framework of the Schwinger action principle. This formulation allows us to perform a transparent analysis of the boundary terms that appears in variational principles with fermionic variables as well in consistent formulations when some gauge fixing conditions are imposed. We present some examples of all of these investigations that clarify substantially the exposition. Finally by using the BRST-BFV formulation just obtained we present a consistent analysis of the boundary terms in variational principles that describe constrained systems with gauge fixed constraints that does not fulfill the end point conditions of the original action principle. As a final example we work out the Banks model of gravity in two dimensions.

## Resumen de la Tesis de Doctorado

### "Cuantización de sistemas con constricciones"

*Autor: Antonio García Zenteno*

Esta tesis se inscribe dentro de la investigación de métodos de cuantización alternativos de teorías de norma. Estos métodos cumplen un doble objetivo: comprender mejor los métodos de cuantización de las teorías que describen las interacciones fundamentales de la naturaleza, y cuantizar la teoría de la relatividad general. Además de presentar una revisión general sobre el estado actual del método de cuantización hamiltoniano BRST-BFV, en esta tesis se compara el método de Faddeev-Jackiw con el método de Dirac, para analizar teorías de norma, mostrando que son equivalentes. En el Capítulo 3, se extiende el método BRST-BFV a sistemas no estacionarios, mostrando que en este caso es también aplicable teorema de Fradkin-Vilkovisky, sobre la independencia de las condiciones de norma de la acción efectiva. Este teorema se muestra usando argumentos conocidos del caso no estacionario, tanto en el marco de la integral funcional como usando el formalismo de operadores BRST-BFV. Se presenta también, la extensión al caso no Abelian y no estacionario del método de conversión de Batalin-Tyutin, usado para convertir constricciones de segunda clase en constricciones de primera clase. Este método es completamente sistemático y permite, en principio, la conversión de cualquier teoría con constricciones, en una teoría de norma. En el Capítulo 4 se analiza en detalle el método BRST-BFV en la formulación de operadores, usando el principio de acción de Schwinger. En este contexto se presentan los ejemplos de la partícula libre, reparametrizada, relativista y con spin, mostrando la importancia de los términos de frontera y de las condiciones BRST-BFV invariantes, para la correcta cuantización de estos sistemas. El método BRST-BFV, basado en el principio de acción de Schwinger, es completamente general y se propone como una alternativa a la integral funcional, en aquellos casos donde los problemas de ordenamiento de factores, en el paso de la teoría clásica a la teoría cuántica, juegan un papel crucial. Por último se analizan los problemas que producen las condiciones de norma no accesibles, a nivel de la teoría cuántica, no permitiendo mostrar la equivalencia entre el procedimiento de cuantización reducida y la cuantización covariante. En el marco del formalismo de operadores se muestra que añadiendo términos de frontera apropiados a la acción efectiva cuántica, es posible recuperar la equivalencia de los procedimientos antes mencionados cuando no hay obstrucciones topológicas ni ambigüedades de ordenamiento. Se presenta el ejemplo del modelo de Banks en gravitación de dimensión  $1+1$ , en normas canónicas.

**TESIS**

**COMPLETA**

*It is a remarkable occurrence  
that the road to progress has invariably  
been toward enlarging the number of  
variables and introducing a more powerfull  
symmetry rather than conversely aiming at  
reducing the number of variables and  
eliminating the symmetry [58].*

## INTRODUCCIÓN

En las primeras décadas de este siglo se estableció que la física a escala microscópica está determinada por la mecánica cuántica. Dos observaciones fundamentales han decantado en el transcurso del tiempo: a) La naturaleza se comporta de manera diferente a escalas diferentes, b) Las cuatro interacciones fundamentales en la física están basadas en la invariancia ante simetrías de norma locales. Requerir invariancia ante este tipo de simetrías genera interacciones entre las partículas [87]. Estas interacciones están confirmadas experimentalmente por el modelo estandar (SM) para la interacción electrodébil y la cromodinámica cuántica (QCD) para la interacción fuerte, dos ejemplos de teorías de campo con simetrías de norma locales. Estas simetrías están basadas en los grupos de Lie  $SU(2) \times U(1)$  para la interacción electrodébil y  $SU(3)$  para la interacción fuerte y son características de las teorías de Yang-Mills (teorías con simetrías internas). Este no es el único tipo de simetrías locales que aparecen en la física. La gravedad, por ejemplo, que es la otra de las interacciones fundamentales, tiene la característica de ser invariante ante reparametrizaciones locales, i.e., el grupo de simetría es el grupo de difeomorfismos. En los últimos años se han realizado múltiples esfuerzos para obtener una teoría cuántica de la gravedad. Aunque la teoría general de la relatividad no es perturbativamente renormalizable [66], la existencia de modelos perturbativamente no renormalizables que pueden resolverse exactamente ha abierto una enorme brecha para el estudio no perturbativo de la gravedad[6].

Uno de los intentos más relevantes para obtener una teoría cuántica de la gravedad está relacionado con el descubrimiento de la supersimetría, una simetría que relaciona los grados de libertad bosónicos y fermiónicos. Du-

rante algún tiempo se pensó que el modelo de la gravitación cuántica basado en la supersimetría, conocido como supergravedad, sería un buen candidato para cuantizar la gravedad. Usando este formalismo muchas divergencias en las funciones de correlación desaparecen debido a cancelaciones entre infinitos que provienen del sector bosónico y el sector fermiónico de la teoría. Sin embargo, no todas las divergencias se cancelan de este modo y la supergravedad resulta también no renormalizable. En la búsqueda de una teoría unificada renormalizable que incluya a la gravedad se cree aún que la supersimetría podría jugar un papel muy relevante. Aunque existen indicios teóricos de que la supersimetría podría ser una simetría fundamental de la naturaleza, su confirmación experimental no se ha llevado al cabo.

Otro lugar donde la supersimetría juega un papel importante es en las llamadas teorías de cuerdas propuestas para unificar las cuatro interacciones fundamentales. Estas teorías son otro ejemplo de teorías de norma. El grupo de simetría es aquí el de las transformaciones conformes y es de dimensión infinita. Es importante observar que toda teoría de norma es una teoría con constricciones —relaciones entre las variables dinámicas que describen al sistema— pero no toda teoría con constricciones es una teoría de norma.

La mecánica cuántica ha tenido un impacto decisivo en el desarrollo de la física teórica y aplicada de este siglo. No obstante, es una teoría relativamente poco entendida en comparación con la descripción clásica de la dinámica. Por ello, es usual partir de teorías clásicas bien definidas para posteriormente plantear el problema de su cuantización. La relación entre la mecánica cuántica y la mecánica clásica ha sido siempre conflictiva. Problemas tales como si la teoría clásica define de manera única la correspondiente teoría cuántica o la cuantización de teorías clásicas con constricciones son áreas de investigación muy activas en la física teórica. Actualmente existen varios métodos para cuantizar teorías con constricciones como el método de Dirac [30], la cuatización de lazos [6] o la cuantización geométrica [91]. Sin embargo, la cuantización de la teoría general de la relatividad se ha resistido a la aplicación de cualquier método hasta ahora conocido. Parte del problema se debe a que en las teorías que presentan invariancia de norma no todos los grados de libertad que describen al sistema son físicos. Algunos de ellos transforman ante las simetrías de norma. Estos grados de libertad no físicos deben eliminarse sin destruir la covariancia de la teoría. Por ejemplo, para el electromagnetismo los grados de libertad físicos son sólo dos. Sin embargo, la teoría se formula en términos de cuatro campos de norma  $A_\mu$ . La descripción

del fotón en términos de cuatro campos, en lugar de solamente dos, se debe a la covariancia de Lorentz. Es necesario mantener esta covariancia manifiesta en la descripción tanto a nivel clásico como cuántico ya que la simetría de norma puede usarse para probar la renormalizabilidad y/o la unitariedad de la teoría.

La necesidad de recurrir a métodos de cuantización alternativos proviene de varios frentes. Por un lado, comprender a fondo las teorías clásicas con constricciones tratando de encontrar sus propiedades intrínsecas independientes del álgebra de constricciones y formular de manera genérica el procedimiento para fijar las condiciones de norma. Por otro lado, cuando se calculan amplitudes de transición, usando la integral funcional, la suma sobre las trayectorias diverge debido a que se realiza sobre trayectorias equivalentes, relacionadas entre sí por transformaciones de norma. Fue demostrado en los sesenta que este problema puede resolverse cuando el álgebra de constricciones forma un grupo de Lie introduciendo variables que anti-conmutan, los fantasmas de Faddeev-Popov [33]. Pero cuando las constantes de estructura son funciones de las variables del espacio fase, el método no tiene una base firme. Además, conduce a una respuesta incorrecta en el caso de álgebras abiertas: la matriz  $S$  deja de ser invariante de norma y unitaria.

Posteriormente, se descubrió que puede usarse una simetría, la supersimetría BRST (Becchi, Rouet, Stora y Tyutin) [21] para resolver el problema desde una perspectiva general. Las simetrías de norma de la teoría pueden replantarse en términos de una supersimetría global cuyo generador es nilpotente y la condición sobre los estados físicos se reduce al estudio de la cohomología de este operador.

Un método completamente general fue desarrollado en el marco del formalismo hamiltoniano por E. S. Fradkin y colaboradores [39]. Nos referiremos a esta propuesta como el método BFV (Batalin-Fradkin-Vilkovisky). Este método no es solamente útil en la formulación de la integral de trayectoria donde el generador BRST es piedra angular en la construcción de la acción efectiva, sino que también es muy poderoso en la formulación de operadores. Algunas características relevantes de este método son:

1. Es aplicable a álgebras abiertas.
2. La transformación BRST, base de todo el formalismo, tiene significado intrínseco. Aparece como un objeto clásico asociado a la estructura de los sistemas Hamiltonianos.

3. Basado en el formalismo Hamiltoniano hace contacto directo con técnicas de cuantización en el espacio de Hilbert.
4. Como resultado de la aplicación de este método se obtiene una expresión bien definida para la medida en la integral funcional. Además, los elementos de matriz entre estados físicos son invariantes ante distintas elecciones de las condiciones de norma.
5. Producto interno en espacio fase extendido. Herramienta de la teoría de perturbaciones homológica y cohomología.

Dentro de este contexto la tesis que presento tiene los siguientes objetivos: a) Introducir al lector en la poderosas técnicas del método BRST-BFV [40]. En el capítulo 1 se presenta una revisión del método de Dirac analizando la llamada conjetura de Dirac: en un sistema con constricciones todas las constricciones de primera clase generan simetrías de norma. Esto nos conduce a presentar la acción extendida, construida de tal manera que sea invariante ante todas las transformaciones de norma generadas por las constricciones de primera clase. Se presenta también la equivalencia entre este formalismo y la propuesta usual en términos de la acción total [62]. Analizamos brevemente el problema de la elección de norma en el caso de normas canónicas notando que las condiciones de norma canónicas deben ser accesibles. Posteriormente presentamos el método BRST-BFV como una extensión del método de Dirac enfatizando la construcción clásica de la carga BRST y los observables BRST, como propiedades intrínsecas de los sistemas hamiltonianos con constricciones. Discutimos brevemente la cuantización del formalismo BRST-BFV clásico notando que el operador BRST debe ser hermitiano y nilpotente. Estas propiedades pueden utilizarse como una guía para resolver problemas de ordenamiento de factores. Notamos también que si estas propiedades no se cumplen la teoría podría ser anómala: el álgebra de constricciones se rompe a nivel cuántico. Nuestro objetivo no es discutir problemas de regularización sino características generales del método BRST-BFV. Por último se presenta una introducción al principio de acción de Schwinger [81] que será utilizado en capítulos posteriores. b) Mostrar la equivalencia entre el procedimiento de reducción de Faddeev-Jackiw (FJ) con el de Dirac [43]. En el capítulo 2 presentamos el método de Faddeev-Jackiw [34] que es un procedimiento de reducción muy eficiente para encontrar las variables del espacio fase reducido y que no necesita de la clasificación de Dirac. El

método está basado en el análisis de la estructura simpléctica del espacio fase y sus transformaciones en el proceso de reducción. Resulta muy ilustrativo, analizarlo desde la perspectiva del método de Dirac ya que aclara el origen geométrico del paréntesis de Dirac y de la clasificación de las constricciones en primera y segunda clase. La prueba de equivalencia no es trivial debido a que el proceso de elección de norma y la eliminación de las cantidades que no son invariantes de norma no son claros en el método FJ. c) Extender el análisis del método BRST-BFV al caso de sistemas no estacionarios [41]. En el capítulo 3 se realiza tal extensión. Para ello fue necesario revisar el procedimiento de Dirac en el caso de sistemas dependientes del tiempo. La dependencia explícita en el tiempo complica la descripción de los sistemas con constricciones debido a que la evolución temporal modifica tanto la superficie de restricción como el álgebra de constricciones. Esto conduce a que la dinámica en el espacio fase no sea generada por una transformación de norma. Este problema no puede atacarse directamente ya que es posible mostrar que no existe la correspondiente formulación canónica. La manera de resolver este problema es convertir el sistema original en un sistema invariante ante reparametrizaciones extendiendo el espacio fase al promover al tiempo como una variable dinámica adicional. Esto no sólo permite recuperar la descripción canónica sino que simplifica enormemente el análisis del método BRST-BFV. La construcción de sistemas con constricciones de primera clase explícitamente dependientes del tiempo es intrincada. Por ello, hemos considerado de interés analizar también el método de Batalin-Tyutin [16] para convertir sistemáticamente constricciones de segunda clase en constricciones de primera clase. Este método tiene muchas semejanzas formales con la construcción de la carga BRST y los invariantes BRST. A partir de esta observación es posible extenderlo al caso de sistemas no estacionarios. La extensión al caso de sistemas no abelianos es trivial aunque las consecuencias de tal extensión no han sido suficientemente estudiadas. e) Formular el método de operadores BRST-BFV en el contexto del principio de acción de Schwinger [42]. El capítulo 4 está dedicado a formular la acción efectiva cuántica a partir de la correspondiente acción clásica, BRST invariante. En su definición puede haber problemas de ordenamiento de factores. Suponiendo que la teoría no es anómala y que la correspondiente teoría cuántica puede formularse, usamos esta acción como punto de partida para analizar la dinámica en la perspectiva del principio de acción de Schwinger, introducido en el capítulo 1. Como resultado, obtenemos una formulación del

método BRST-BFV de operadores consistente, en la que los términos de frontera en el principio de acción pueden tratarse de manera transparente. Esta formulación tiene la ventaja adicional de tratar con transparencia los problemas de ordenamiento de factores que en la integral funcional se asocian a distintas maneras de llevar al cabo la discretización inherente a su definición. Se presentan los ejemplos de las partículas, reparametrizada, relativista y con espín para ilustrar el método. f) Estudiar la equivalencia entre el procedimiento de reducción-quantización con el de cuantización-reducción, usando el principio de acción de Schwinger, definiendo correctamente el principio de acción clásico, usado como punto de partida. En el capítulo 5 revisamos el problema de definir correctamente el principio de acción cuando se usan normas canónicas no accesibles. Partiendo del análisis realizado en [59] usando la integral funcional, se propone una versión de operadores de estas ideas en el marco del principio de Schwinger. Se presenta un ejemplo con interacción de gravedad en  $1+1$  dimensiones en normas canónicas.

Por último agradezco profundamente a los Doctores José David Vergara y Luis Fernando Urrutia por su colaboración durante el desarrollo de esta tesis. Al Instituto de Ciencias Nucleares, departamento de Gravitación y Teoría de Campo por las facilidades brindadas. Al Instituto de Física, en especial al departamento de Física Teórica. A la Universitat de Barcelona Departament d'Estructura i Constituents de la Matèria, especialmente a los Doctores Joaquim Gomis y Josep Maria Pons.

# CAPÍTULO 1

## CONCEPTOS BÁSICOS

Muchas teorías de interés para la física, desde el modelo estandar para las interacciones fuertes, débiles y electromagnéticas hasta la teoría general de la relatividad de Einstein y las teorías que proponen unificar las interacciones fundamentales, como la supergravedad y las teorías de cuerdas, pueden entenderse de una manera genérica y unificada como sistemas con constricciones. Todas estas teorías de norma se caracterizan por la existencia de relaciones (constricciones) entre las variables originales del espacio fase, junto con la presencia de funciones arbitrarias en las soluciones de las ecuaciones de movimiento. El procedimiento de cuantización de tales sistemas es muy distinto de los correspondientes procedimientos de cuantización estandar (como el procedimiento de cuantización canónico o la aplicación de la integral de trayectoria) para los sistemas sin constricciones. La aplicación directa de estos métodos al caso de sistemas con constricciones produce resultados contradictorios. El primer método sistemático para cuantizar sistemas con constricciones fue propuesto por Dirac [30]. La extensión de este procedimiento al caso de álgebras abiertas se conoce como método BRST-BFV[39] para el caso hamiltoniano y método de Batalin-Vilkovisky[14] para el caso lagrangiano, ambos en el contexto de la cuantización via la integral de trayectoria y en el formalismo de operadores. Estos métodos han sido aplicados con éxito a una gran variedad de problemas tales como la supergravedad[68], las teorías de campo topológicas[90] y las supercuerdas[55], para mencionar algunos casos de interés.

En este capítulo revisaremos algunos conceptos básicos que usaremos a lo largo del trabajo de tesis. Una introducción al material que aquí analizaremos puede verse en [40]. Otras referencias básicas son [58][61]. Los métodos básicos para tratar sistemas con constricciones de una manera sistemática han sido muy estudiados. Sin embargo no existen acuerdos generales que permitan elegir, sin discusión, un método entre otros. Este capítulo pretende, no

sólo introducir al lector en las enormes posibilidades del método BRST-BFV, sino unificar la notación que usaremos y tomar posición frente a las distintas interpretaciones y discusiones que alrededor de este método se han desarrollado en los últimos años. Comenzaremos revisando el método de Dirac para después realizar una breve introducción al método de cuantización canónica. Después analizaremos algunos aspectos relevantes del método BRST-BFV clásico para presentar los dos caminos básicos hacia la cuantización: la integral de trayectoria y la formulación de operadores. Por último introduciremos al lector a los conceptos básicos del principio de acción de Schwinger que aplicaremos en capítulos posteriores.

## 1.1 MÉTODO DE DIRAC

El análisis clásico de sistemas con constricciones, (incluyendo aquéllos invariantes ante reparametrizaciones) que pueden deducirse de un principio variacional, fue planteado por Dirac [30] y Bergmann [4] a principios de los años cincuenta. El principal interés de Dirac era entonces, construir un formalismo hamiltoniano para la teoría de la relatividad general con el objetivo de realizar su cuantización. Sus esfuerzos desembocaron en el formalismo ADM (Arnold-Deser-Misner) construido en los años sesenta [5]. La aplicación del trabajo de Dirac a teorías de norma, como el electromagnetismo o las teorías de Yang-Mills, se realizó posteriormente, en los setenta, donde se plantearon por primera vez las relaciones de conmutación básicas para el electromagnetismo en la norma de Coulomb, obtenidas anteriormente usando métodos heurísticos y ahora entendidas como una consecuencia del paréntesis de Dirac [54]. También en los años setenta, se construyó la versión geométrica del método de Dirac [49] y en los ochenta se demostró la equivalencia entre la teoría de Dirac hamiltoniana no extendida y el análisis lagrangiano [19]. La equivalencia entre el formalismo de Dirac extendido y el formalismo lagrangiano se mostró posteriormente [62].

Con respecto a la cuantización, Dirac propuso un programa donde las constricciones clásicas se implementan como operadores en el espacio de Hilbert, se promueven los paréntesis de Dirac a  $i\hbar$  veces el conmutador y se exige la invariancia de los estados del espacio de Hilbert ante transformaciones de norma. Este método tiene la ventaja de no requerir ningún procedimiento para fijar la norma. La equivalencia de este método con el lla-

mado método de reducción, (*i.e.* cuando se eliminan los grados de libertad de norma, antes de cuantizar) es aún un punto de controversia [71].

Las características básicas del método de Dirac, en la formulación lagrangiana o hamiltoniana son: a) tratar con todas las variables del espacio fase, respetando así las simetrías originales de la teoría, b) la construcción de un algoritmo para determinar, con un procedimiento definido, la superficie de constricción, donde el movimiento se lleva al cabo, c) separar los grados de libertad no-físicos de aquellos que son relevantes para la descripción dinámica de la teoría.

El objeto de esta sección es revisar los conceptos básicos del método de Dirac ya que el método BRST-BFV es una extensión de éste.

Comenzaremos planteando el principio de acción

$$S_L = \int_{t_1}^{t_2} L(q^i, \dot{q}^i, t) dt \quad i = 1 \dots N, \quad (1.1)$$

donde el lagrangiano es singular, *i.e.*

$$\det \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right) = 0. \quad (1.2)$$

La acción (1.1) es una funcional que contiene información sobre la clase de trayectorias a las que se aplica. Por ejemplo, pueden fijarse  $q^i(t_1) = q_1^i$  y  $q^i(t_2) = q_2^i$  en los extremos. Esta información, usualmente sobrentendida, es equivalente a las condiciones iniciales usadas al resolver las ecuaciones de movimiento. En el caso de sistemas con constricciones, esta información es de fundamental importancia puesto que el sistema está restringido a moverse en una hipersuperficie del espacio configuración. En consecuencia su dinámica debe ser consistente con las condiciones iniciales que se usan para resolver las ecuaciones de movimiento. Más adelante veremos el tipo de inconsistencias (tanto a nivel clásico como cuántico) que surgen por no tomar en consideración esta información.

Como consecuencia de (1.2) no todas las velocidades pueden obtenerse como función de los momentos, definidos de la manera usual por,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(q, \dot{q}), \quad (1.3)$$

y de las coordenadas. Esto implica la existencia de  $m_1$  relaciones

$$\phi_{A_1}(q, p) \approx 0, \quad A_1 = 1 \dots m_1. \quad (1.4)$$

En la notación de Dirac estas relaciones son llamadas *constricciones primarias*. Estas restringen el movimiento en el espacio fase a una hipersuperficie de dimensión  $2N - m_1$  llamada *superficie de restricción primaria*.

Otra consecuencia de que la matriz (1.2) no tenga rango máximo es que el hamiltoniano canónico definido por

$$H_c = \dot{q}^j p_j - L(q^i, \dot{q}^i, t), \quad (1.5)$$

no está únicamente determinado como función de  $p_i, q^i$  ya que las coordenadas y momentos no son independientes, están relacionados por (1.4). Como consecuencia, el hamiltoniano canónico está determinado de manera única solamente sobre la superficie de restricción primaria y puede extenderse de manera arbitraria a todo el espacio fase mediante

$$H_T = H_c + \lambda^{A_1} \phi_{A_1}, \quad (1.6)$$

donde  $\lambda^{A_1}$  son multiplicadores de Lagrange arbitrarios.

El hamiltoniano total (1.6) genera la evolución temporal del sistema y por consistencia requerimos que las constricciones primarias sean cantidades conservadas *sobre* la superficie de restricción: la evolución temporal de cualquier punto de esta superficie debe permanecer en ella durante el transcurso del tiempo. Esto implica

$$\dot{\phi}_{A_1} = \{\phi_{A_1}, H_T\} = \{\phi_{A_1}, H_c\} + \lambda^{B_1} \{\phi_{A_1}, \phi_{B_1}\} \approx 0, \quad (1.7)$$

donde  $\{A, B\}$  denota el paréntesis de Poisson usual. De aquí pueden resultar distintos escenarios: a) el lado derecho de (1.7) es una nueva restricción, b) es posible despejar algún multiplicador de Lagrange en términos del resto de las variables y, c) (1.7) es una identidad. Si la condición de consistencia da lugar a nuevas constricciones, que denotaremos como  $\phi_{A_2}(q, p)$ , llamadas *constricciones secundarias*, obtendremos una nueva superficie de restricción definida ahora por  $\Gamma = \{\phi_{A_1} = 0, \phi_{A_2} = 0\}$ . El algoritmo de estabilización

---

<sup>1</sup> Usaremos la notación de Dirac donde el símbolo  $\approx$  (igualdad débil) se usa para remarcar el hecho de que estas funciones puede igualarse a cero *después* de que todos los paréntesis de Poisson donde ellas intervienen han sido calculados, i.e. son cero *sólo* sobre la superficie de restricción. Además las constricciones pueden ser bosónicas o fermiónicas de acuerdo a su paridad de Grassmann. En esta sección consideraremos el caso bosónico.

ha comenzado: aplicamos nuevamente la condición de consistencia sobre las constricciones secundarias y en algunos casos, una nueva generación de constricciones aparecerá. El procedimiento termina cuando ya no se generan nuevas constricciones.

Al final de este procedimiento obtendremos un conjunto de constricciones

$$\phi_A \approx 0, \quad A = m_1 + m_2 + \dots m_N, \quad (1.8)$$

donde  $m_N$  denota el número de constricciones de la  $N$ -ésima generación.<sup>2</sup> Consideremos ahora los paréntesis de Poisson entre las constricciones (1.8),

$$\{\phi_A, \phi_B\} = C_{AB}^C \phi_C + C_{AB}, \quad (1.9)$$

donde  $C_{AB}^C$  y  $C_{AB}$  son funciones de  $q, p$ . En el caso en que  $C_{AB}$  no sea de rango máximo, existirán constricciones con paréntesis de Poisson débilmente cero entre ellas. Estas funciones denotadas por  $G_a(q, p)$ ,  $a = 1 \dots p$ , se llaman *constricciones de primera clase*,

$$\{G_a, G_b\} = C_{ab}^c(q, p) G_c. \quad (1.10)$$

El paréntesis de Poisson de las constricciones restantes que denotaremos por  $\chi_\alpha$ ,  $\alpha = 1 \dots s$ , tendrá la forma

$$\{\chi_\alpha, \chi_\beta\} \approx C_{\alpha\beta}(q, p), \quad (1.11)$$

donde la matriz  $C_{\alpha\beta}$  es antisimétrica e invertible. Si no fuera este el caso habría, entre las constricciones  $\chi_\alpha$ , algunas constricciones de primera clase. Estas funciones se llaman *constricciones de segunda clase*. Nótese que el número de éstas debe ser par en el caso bosónico.

En general una función del espacio fase se llama de primera clase si su paréntesis de Poisson con todas las constricciones es débilmente cero y de segunda clase en caso contrario. En el caso de sistemas independientes del tiempo es siempre posible construir el hamiltoniano de primera clase

$$\{H, G_a\} = V_a^b G_b, \quad (1.12)$$

---

<sup>2</sup>Las constricciones pueden ser funcionalmente independientes (caso irreducible) o dependientes (caso reducible). En el segundo caso, la extracción del conjunto de constricciones independientes puede destruir simetrías manifiestas y/o localidad espacio-temporal. Su análisis es un tópico aparte [58]. Consideraremos el caso irreducible.

que en la mayoría de los casos coincide con el hamiltoniano total. Supondremos que las constricciones (1.8) satisfacen las condiciones de regularidad [58]. Esto implica que pueden usarse como coordenadas del espacio fase. En particular, si  $z^\lambda(y_r)$ ,  $z^\lambda = (q^i, p_i)$ ,  $i = 1 \dots N$ ,  $r = 2N - M$ , donde  $M$  es el número total de constricciones, son las ecuaciones paramétricas de la superficie representada por las constricciones (1.8), deberá cumplirse que la matriz,

$$\frac{\partial z^\lambda}{\partial y^r}, \quad (1.13)$$

sea de rango máximo. Una de las características geométricas más importantes del espacio fase es la existencia de la *estructura simpléctica* que define el paréntesis de Poisson. Si denotamos las coordenadas del espacio fase por  $z^\mu$ ,  $\mu = 1 \dots 2N$ , definiremos el paréntesis de Poisson básico por

$$\sigma^{\mu\nu} = \{z^\mu, z^\nu\}. \quad (1.14)$$

Requerimos también que este tensor de rango 2 cumpla las siguientes propiedades

$$\det \sigma^{\mu\nu} \neq 0 \quad (1.15)$$

$$\sigma^{\lambda\mu}{}_{,\rho} \sigma^{\nu\rho} + \sigma^{\nu\lambda}{}_{,\rho} \sigma^{\mu\rho} + \sigma^{\mu\nu}{}_{,\rho} \sigma^{\lambda\rho} = 0, \quad (\text{Identidad de Jacobi}). \quad (1.16)$$

La definición del paréntesis de Poisson entre dos funciones cualesquiera  $F, G$  del espacio fase será,

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial z^\mu} \sigma^{\mu\nu} \frac{\partial G}{\partial z^\nu}. \quad (1.17)$$

En coordenadas canónicas,  $z^\mu = (q^i, p_i)$ , y la matriz  $\sigma$  tiene la forma

$$\sigma^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

La matriz  $\sigma^{\mu\nu}$  es invertible (veáse (1.15)), y su inversa, denotada por  $\sigma_{\mu\nu}$ , hereda las siguientes propiedades,

$$\det \sigma_{\mu\nu} \neq 0, \quad (1.19)$$

$$\sigma_{\lambda\mu,\nu} + \sigma_{\nu\lambda,\mu} + \sigma_{\mu\nu,\lambda} = 0, \quad (\sigma \text{ es cerrada}). \quad (1.20)$$

Esta 2-forma con las propiedades (1.19)-(1.20), define la estructura simpléctica del espacio fase.

La forma simpléctica inducida sobre la superficie de restricción por la estructura simpléctica del espacio fase es,<sup>3</sup>

$$\sigma_{rs} = \sigma_{\mu\nu} \frac{\partial z^\mu}{\partial y^r} \frac{\partial z^\nu}{\partial y^s}, \quad (1.22)$$

donde la forma inducida (1.22) hereda la propiedad de ser cerrada pero, en general, no es invertible.

Supongamos una superficie de restricción definida por las restricciones de primera clase  $G_a = 0$ . El campo vectorial hamiltoniano asociado a estas funciones se define por

$$X_a^\lambda = \sigma^{\lambda\mu} \partial_\mu G_a, \quad (1.23)$$

donde los vectores  $X_a$  son funcionalmente independientes ya que hemos supuesto que las restricciones cumplen las condiciones de regularidad y son irreducibles. Un campo vectorial  $Y^\lambda$  es tangente a la superficie de restricción si  $Y^\lambda \partial_\lambda G_a \approx 0$ . En particular, los vectores  $X_a$  son tangentes a la superficie de restricción ya que

$$X_a^\lambda \partial_\lambda G_a = \{G_b, G_a\} \approx 0, \quad (1.24)$$

por lo tanto generan simetrías del sistema ya que mapean puntos de la superficie de restricción sobre la misma superficie y las funciones  $G_a$  tienen paréntesis de Poisson cero con el hamiltoniano de primera clase (1.12). La forma de estas transformaciones es

$$X_a^\lambda \partial_\lambda F = \{F, G_a\}. \quad (1.25)$$

Como veremos más adelante, ésta es la estructura de las transformaciones infinitesimales de norma.

Con argumentos semejantes puede mostrarse que los campos hamiltonianos asociados a restricciones de segunda clase no generan transformaciones de simetría puesto que no son tangentes a la superficie de restricción y por tanto mapean puntos de la superficie de restricción fuera de ésta. En efecto, si

---

<sup>3</sup>Si  $x^{\lambda'} = x^{\lambda'}(x^\alpha)$  es una transformación de coordenadas, la matriz  $\sigma^{\lambda\mu}$  transforma como un tensor de rango 2

$$\sigma^{\lambda\mu} = \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\beta} \sigma^{\alpha\beta}. \quad (1.21)$$

$$Z_{\alpha}^{\lambda} = \sigma^{\lambda\mu} \partial_{\mu} \chi_{\alpha}, \quad (1.26)$$

es el campo asociado a la superficie  $\chi_{\alpha} = 0$ , entonces

$$Z_{\beta}^{\lambda} \partial_{\lambda} \chi_{\alpha} = \{\chi_{\beta}, \chi_{\alpha}\} = C_{\beta\alpha} \neq 0. \quad (1.27)$$

Esto muestra que las constricciones de segunda clase no generan transformaciones de simetría.

Con el hamiltoniano total puede construirse la correspondiente acción total definida por

$$S_T = \int_{t_1}^{t_2} (\dot{q}^i p_i - H_T) dt. \quad (1.28)$$

Las ecuaciones de movimiento obtenidas desde este principio variacional son equivalentes a las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenidas desde la acción (1.1).<sup>4</sup>

### 1.1.1 ACCIÓN EXTENDIDA

La presencia de funciones arbitrarias en la acción (1.28) conduce a que la dinámica no este únicamente determinada. Nótese que sólo los multiplicadores asociados con las constricciones primarias de primera clase permanecen. Esto se debe a que los multiplicadores asociados a las constricciones de segunda clase siempre pueden despejarse en términos de las variables del espacio fase.

En particular, esto implica que las constricciones de primera clase son las responsables de la arbitrariedad que aparece en la dinámica. Ya mostramos usando argumentos geométricos, que las constricciones de primera clase generan simetrías sobre la superficie de restricción mientras que las de segunda clase no lo hacen. Estrictamente, sólo las constricciones de primera clase primarias generan transformaciones de norma, pues solamente éstas tienen asociado un multiplicador de Lagrange arbitrario. Sin embargo es posible argumentar que las otras constricciones de primera clase también son generadores de transformaciones de norma ("conjetura de Dirac").

<sup>4</sup>La transformación  $p(q, \dot{q}) \rightarrow \dot{q}(q, p)$  no es invertible. Sin embargo es posible convertirla en una transformación invertible en un espacio más grande, añadiendo como variables dinámicas a los multiplicadores  $\lambda^{\alpha}$ . Esto implica que los principios variacionales (1.1) y (1.28) son equivalentes. Usando a  $p$  y  $\lambda$  como "campos auxiliares"[56], eliminándolos con la ayuda de sus propias ecuaciones de movimiento es posible partir de (1.28) y recuperar (1.1).

Aunque la conjetura de Dirac puede probarse bajo ciertas restricciones [62] sigue siendo un punto polémico. Como existen buenas razones para pensar que la conjetura de Dirac es válida en general (por ejemplo, el paréntesis de Poisson de dos constricciones primarias de primera clase es proporcional a una restricción de primera clase cualesquiera) adoptaremos aquí el llamado *formalismo extendido*.<sup>5</sup> Este formalismo consiste en "subir" todas las constricciones a la acción construyendo una acción extendida. Esta acción tiene mucho más simetría que la acción canónica, i.e. es invariante ante todas las transformaciones de norma generadas por todas las constricciones de primera clase. Un punto muy importante es demostrar que esta acción es equivalente a la acción canónica. Esto es posible y fue realizado por los autores de [62], donde se presenta un método general para obtener las simetrías de la acción lagrangiana original, conociendo aquéllas de la acción extendida. La idea general es la siguiente: partiendo de la acción lagrangiana (1.1) es claro que el número de parámetros arbitrarios en sus correspondientes transformaciones de norma debe ser igual a la redundancia que presenta la dinámica, i.e., al número de parámetros arbitrarios en las soluciones de las ecuaciones de movimiento. Las transformaciones de norma de esta acción tienen la estructura

$$\delta_i q^i = f^i(q, \dot{q}, \ddot{q}, \dots, \epsilon^\alpha, \dot{\epsilon}^\alpha, \ddot{\epsilon}^\alpha, \dots). \quad (1.29)$$

Dos transformaciones de norma son equivalentes si difieren por una transformación trivial

$$\delta q^i = \delta_i q^i + \int \rho^{ij}(t, t') \frac{\delta S_L}{\delta q^j(t')} dt', \quad \rho^{ij}(t, t') = -\rho^{ji}(t', t), \quad (1.30)$$

donde  $\frac{\delta S_L}{\delta q^j(t')}$  son las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a la variable  $q^j$  al tiempo  $t'$  y  $\rho^{ij}$  es una matriz antisimétrica arbitraria. Para obtener las transformaciones (1.29) es posible usar el formalismo de Dirac y aplicar las siguientes ideas. Supongamos un sistema con constricciones de primera clase de las cuales  $m_1$  son primarias. La acción total puede construirse usando las ideas de la sección anterior. Esta acción es completamente equivalente a la acción lagrangiana y tiene  $m_1$  funciones arbitrarias, no determinadas por las

<sup>5</sup>Es necesario hacer notar que es posible desarrollar toda la teoría de Dirac sin esta suposición [51]. Pero el método de cuantización de Dirac depende fuertemente de este supuesto y hasta ahora no existe una propuesta alternativa.

ecuaciones de movimiento. Construyamos ahora el formalismo extendido

$$S_E[q^i, p_i, \lambda^a] = \int dt(p_i \dot{q}^i - H_c - \lambda^a G_a), \quad (1.31)$$

donde ahora aparecen todas las constrictiones de primera clase en la acción. Esta acción tiene las siguientes simetrías de norma

$$\delta_\epsilon q^i = \{q^i, G_a\} \epsilon^a, \quad \delta_\epsilon p_i = \{p_i, G_a\} \epsilon^a, \quad \delta_\epsilon \lambda^a = \dot{\epsilon}^a + \lambda^c \epsilon^b C_{bc}^a - \epsilon^b V_b^a \quad (1.32)$$

donde  $\epsilon^a$  son parámetros arbitrarios que dependen del tiempo solamente. Las funciones de estructura están dadas por (1.10) y las funciones  $V_b^a$  por (1.12). Esto puede mostrarse observando que: a)  $\delta_\epsilon(p\dot{q}) = \delta_\epsilon p \dot{q} - \dot{p} \delta_\epsilon q + (p \delta_\epsilon \dot{q})$ , b)  $\delta_\epsilon H_c = \{H_c, \epsilon^a G_a\} = \epsilon^a V_a^b G_b$  (usando (1.12)) y c)  $\delta_\epsilon(\lambda^a G_a) = \delta_\epsilon \lambda^a G_a + \lambda^a \delta_\epsilon G_a = \delta_\epsilon \lambda^a G_a + \lambda^a \epsilon^b C_{ab}^c G_c$  (usando (1.10)). De aquí podemos escribir la variación de la acción extendida en la forma

$$\delta_\epsilon S_E = \int dt(\dot{\epsilon}^a - \epsilon^b V_b^a - \lambda^c \epsilon^b C_{cb}^a - \delta_\epsilon \lambda^a) G_a + \left[ \epsilon_a p_i \frac{\partial G_a}{\partial p_i} - \epsilon^a G_a \right]_{t_1}^{t_2}, \quad (1.33)$$

donde hemos usado la expresión

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (1.34)$$

y hemos considerado que las constrictiones  $G_a$  no dependen explícitamente del tiempo (este caso particular lo trataremos en detalle en el capítulo 3). La expresión (1.33) será sólo función de los puntos extremos si los multiplicadores de Lagrange transforman como (1.32). En particular, escogiendo  $\epsilon^a(t_1) = 0$  y  $\epsilon^a(t_2) = 0$  este término es cero.

Con el objeto de tratar las transformaciones de norma como transformaciones canónicas, definimos [62]

$$\delta_\mu F = \{F, G\}, \quad G = \mu^a G_a, \quad (1.35)$$

$$\delta_\mu \lambda^a = \frac{D\mu^a}{Dt} + \lambda^c \mu^b C_{bc}^a - \mu^b V_b^a + \{\mu^a, H_E\}, \quad (1.36)$$

donde  $\mu^a(q, p, \lambda, \dot{\lambda}, \ddot{\lambda}, \dots)$ ,  $H_E = H_c + \lambda^a G_a$  y

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \lambda^a \frac{\partial}{\partial \lambda^a} + \dot{\lambda}^a \frac{\partial}{\partial \dot{\lambda}^a} + \dots \quad (1.37)$$

Estas transformaciones de norma canónicas son también simetrías de la acción extendida. La demostración sigue el mismo camino de la ya expuesta.<sup>6</sup> De hecho, no son simetrías nuevas, pues difieren por transformaciones de norma triviales de las transformaciones de norma (1.32). Nótese que ahora los multiplicadores de Lagrange transforman de manera distinta. Esta extensión de las transformaciones de norma usuales (1.32) es de crucial importancia para comparar las simetrías de la acción extendida con aquéllas de la acción lagrangiana original.

Para obtener las simetrías de la acción lagrangiana es necesario imponer las condiciones de norma  $\lambda^{A_2} = 0, \lambda^{A_3} = 0, \dots$ , en la acción extendida, donde  $\lambda^{A_n}$  son los multiplicadores de Lagrange asociados a la generación  $n$ -ésima de constricciones de primera clase. Estas condiciones implican un conjunto de ecuaciones algebraicas que relacionan a los parámetros  $\mu^a$ . Es posible mostrar constructivamente [62] que estos parámetros pueden escribirse como función de las coordenadas y momentos, los  $m_1$  multiplicadores de Lagrange arbitrarios, un parámetro arbitrario que corresponde al último  $\mu^a$  que generalmente se denota como  $\epsilon$ , y sus derivadas respecto al tiempo.

$$\mu^k = f^k(q, p, \lambda^{A_1}, \dot{\lambda}^{A_1}, \ddot{\lambda}^{A_1}, \dots, \epsilon, \dot{\epsilon}, \dots), \quad k = 1 \dots a - 1. \quad (1.38)$$

Posteriormente se eliminan  $\lambda^{A_1}$  y  $p$  usando sus propias ecuaciones de movimiento, para obtener las simetrías de norma lagrangianas cuya estructura general es (1.29).

Como colorario de este análisis se obtiene que el número de generaciones de constricciones de primera clase es igual al máximo orden de la derivada respecto al tiempo del parámetro  $\epsilon$  más uno. Para detalles referimos al lector a [62]. Este formalismo tiene la ventaja de ser invariante ante redefiniciones de las constricciones y generaliza el análisis [51] que corresponde al caso en que  $\mu^a$  es una función del tiempo solamente. Si las condiciones

$$\{G_{m_i}, G_{m_1}\} = \text{constricciones primarias de primera clase}, \quad (1.39)$$

$$V_{m_i}^{m_i} \text{ independiente de } q \text{ y } p, \quad (1.40)$$

se cumplen para  $i \geq 2$ , siempre es posible construir una solución  $\mu^a(t)$  que depende solamente del tiempo [47]. Hay que notar que redefiniendo las constricciones y el hamiltoniano de primera clase es posible satisfacer las condiciones (1.40).

<sup>6</sup>La correspondiente demostración la presentamos en el apéndice para el caso que involucra variables de Grassmann.

### 1.1.2 CONDICIONES DE NORMA

La clasificación de las constricciones en primera y segunda clase se realiza tomando en cuenta su carácter como generadoras de transformaciones de norma. Las constricciones de primera clase generan transformaciones de simetría de norma, mientras que las de segunda clase no mapean estados físicos en estados físicos. Las constricciones de segunda clase solamente reducen la dimensión del espacio fase y no tienen asociada ninguna simetría de la acción.

Cuando en un sistema aparecen constricciones de primera clase, la teoría es degenerada y es necesario imponer constricciones adicionales para determinar de manera única la dinámica. Estas constricciones se llaman *condiciones de norma*. Las variables físicas pueden definirse como aquellas variables dinámicas que además de ser invariantes de norma tienen la característica de ser independientes de la elección de la condición de norma.

Hay dos tipos de condiciones de norma: canónicas y no-canónicas. Las primeras dependen de las variables del espacio fase y reducen el número de grados de libertad. El espacio fase reducido, donde sólo aparecen las variables físicas, ha perdido las simetrías originales de la teoría. Por otro lado, las segundas son condiciones sobre los multiplicadores de Lagrange y tienen efecto en el espacio fase extendido, donde todos los grados de libertad son independientes, pero sólo algunos de ellos son físicos.

Las condiciones de norma canónicas

$$C_b(q, p) \approx 0, \quad (1.41)$$

deben tener la propiedad de ser accesibles. Para explicar este concepto es necesario recurrir al principio variacional extendido (1.31). Consideremos la clase de trayectorias  $\{q^i(t), p_i(t), \lambda^a(t)\}$  cuyos extremos están fijos  $q^i(t_1) = q_1^i, q^i(t_2) = q_2^i$ .<sup>7</sup> Dadas las condiciones de norma (1.41) es necesario que

<sup>7</sup>Es posible fijar variables distintas en los extremos. Por ejemplo,  $q^i(\tau_1) = q_1^i$  y  $p_i(\tau_2) = p_2^i$ , en cada extremo. En general, es posible fijar las combinaciones  $Q^i(q(\tau_2), p(\tau_2), \tau_2) = Q_2^i$  y  $Q^i(q(\tau_1), p(\tau_1), \tau_1) = Q_1^i$  con la condición  $\{Q^i, Q^j\} = 0$  (a tiempos iguales). En estos casos es necesario modificar el principio variacional añadiendo un término de punta apropiado. La idea básica es realizar una transformación canónica de tal modo que las nuevas coordenadas sean las funciones de las variables canónicas que se quieren fijar en los extremos. Este término tiene importantes consecuencias al cuantizar la teoría usando la integral de trayectoria. En el Capítulo 5 presentaremos con detalle estas ideas, tanto desde el punto de vista clásico como cuántico. Para más detalle ver [59] y el Capítulo 5.

estas funciones cumplan con los valores previamente fijados en los extremos. En caso contrario debe ser posible usar una sucesión de transformaciones infinitesimales de norma para transformar las funciones (1.41) en otras que cumplan con las condiciones previamente impuestas en los extremos. Si esto no es posible se dice que las condiciones de norma no son accesibles.

Por otra parte, el número de condiciones (1.41) debe ser igual al número de variables redundantes en la dinámica y éste es igual al número total de constricciones de primera clase independientes. Con el objeto de eliminar la arbitrariedad contenida en los multiplicadores de Lagrange, la condición,<sup>8</sup>

$$\det[C_b, G_a] \neq 0, \quad (1.42)$$

debe cumplirse. Por tanto, tenemos ahora un conjunto de constricciones de segunda clase que pueden tratarse usando el correspondiente paréntesis de Dirac que definiremos más adelante. Una consecuencia importante que se deriva de este hecho es el conteo de los grados de libertad en un sistema con constricciones *El conteo de los grados de libertad se realiza entonces como sigue:  $2F = 2N - s - 2p$ , donde  $F$  es el número de grados de libertad físicos,  $N$  es el número de grados de libertad en el espacio fase original,  $s$  es el número de constricciones de segunda clase y  $p$  el correspondiente a las constricciones de primera clase.*

Como las transformaciones de norma deben anularse en los puntos extremos de la acción con el objeto de no cambiar las condiciones de frontera inicialmente impuestas, debe escogerse,

$$\epsilon^a(t_1) = \epsilon^a(t_2) = 0. \quad (1.43)$$

La cuestión es entonces: ¿puede eliminarse la redundancia en la descripción de la dinámica por medio de condiciones de norma?, i.e., ¿es posible imponer condiciones de norma que respeten la condición (1.43)? Observemos que no es posible imponer cualquier condición de norma ya que tal condición debe conectarse via una transformación de norma con el conjunto de variables fijadas previamente en los extremos, lo que en general, viola (1.43) y por tanto modifica las condiciones frontera del principio de acción.

Otra alternativa es usar normas de la forma

<sup>8</sup>Esta condición debe cumplirse globalmente. De otra manera podrían obtenerse obstrucciones de Gribov que no permiten fijar la norma de manera global [52].

$$\dot{\lambda}^a = f^a(q, p, \lambda), \quad (1.44)$$

que están construidas de tal manera que las condiciones (1.43) sean las condiciones iniciales de una ecuación diferencial de segundo orden, ya que  $\lambda$  transforma con la primera derivada respecto al tiempo de  $\epsilon$  (ver (1.32)).

### 1.1.3 CUANTIZACIÓN CANÓNICA DE SISTEMAS CON CONSTRICCIONES

Dado un conjunto de constricciones  $G_\alpha, \chi_\alpha$ , podemos ahora plantear el problema de la cuantización. En principio, hay varias posibilidades para cuantizar un sistema con constricciones. Un camino es eliminar los grados de libertad de norma a nivel clásico y después cuantizar el sistema reducido. En general, este procedimiento conlleva la pérdida de simetrías manifiestas del problema, como por ejemplo la covariancia de Lorentz. También es cierto que frecuentemente el sistema reducido tiene una estructura muy complicada y que es difícil realizarlo cuánticamente. Por ello Dirac implementó el siguiente procedimiento.

Las constricciones de segunda clase pueden eliminarse usando el paréntesis de Dirac

$$\{A, B\}^* = \{A, B\} - \{A, \chi_\alpha\} C^{\alpha\beta} \{\chi_\beta, B\} \quad (1.45)$$

donde  $C^{\alpha\beta}$  es la inversa de la matriz  $C_{\alpha\beta}$  definida por (1.11). Este paréntesis tiene la importante propiedad de que cualquier función en el espacio fase tiene paréntesis de Dirac cero con cualquier restricción de segunda clase. Esto permite implementar las constricciones de segunda clase directamente en la acción y reducir grados de libertad, obteniendo una teoría hamiltoniana *no canónica*<sup>9</sup>. El paréntesis de Dirac está dado por la estructura simpléctica inducida sobre la superficie de restricción  $\chi_\alpha = 0$ , ver (1.22). Es posible mostrar que esta estructura es de rango máximo y por tanto invertible [58].

En general, es muy difícil hallar una representación cuántica de este paréntesis. Esta es la razón principal para estudiar métodos alternativos que permitan, añadiendo variables, convertir constricciones de segunda clase en constricciones de primera clase, (ver Sección 3.3).

Después de efectuar la reducción de las constricciones de segunda clase a nivel clásico, el procedimiento de cuantización es el siguiente,

<sup>9</sup>Los paréntesis básicos no serían los definidos por las coordenadas de Darboux. Es posible obtener un paréntesis de Dirac canónico pero esto implica transformaciones que en general no son locales.

- a) reemplazar las variables canónicas por los operadores correspondientes,  
 b) usar la regla de correspondencia,

$$[\hat{A}, \hat{B}]_{\pm} = i\hbar \{A, B\}^{\mp}, \quad (1.46)$$

donde  $[\hat{A}, \hat{B}]_{\pm}$  es el conmutador estandar  $AB - BA$ , a menos de que los dos operadores que intervienen sea impares, en cuyo caso se trata del anticonmutador  $AB + BA$ .

c) Para remover los grados de libertad de norma es necesario un criterio adicional que seleccione los "estados físicos". Para ello se implementan las condiciones,

$$\hat{G}_a |\psi\rangle = 0, \quad (1.47)$$

que provienen de exigir que los estados del espacio de Hilbert sean invariantes ante transformaciones de norma,

$$e^{i\epsilon^a \hat{G}_a} |\psi\rangle = |\psi\rangle. \quad (1.48)$$

Implementar la condición (1.47) puede ser muy complicado en la práctica (por ejemplo, la ecuación de Wheeler-DeWitt en gravitación), por lo que frecuentemente es más eficiente calcular la acción clásica efectiva y usar la integral de trayectoria de Feynman.

d) Los observables en la teoría cuántica, serán aquellos operadores hermiticos que sean invariantes ante transformaciones de norma,

$$\hat{F} = \hat{F}^\dagger \text{ observable} \iff \delta \hat{F} = [\hat{F}, \epsilon^a \hat{G}_a] = 0. \quad (1.49)$$

Este método está construido de tal manera que selecciona los estados físicos sin necesidad de fijar una norma. Sin embargo, tiene algunos inconvenientes: La versión cuántica del álgebra de constricciones (1.10) debe ser consistente con la condición (1.47). En el caso en que sea posible escribir a nivel cuántico la expresión

$$[\hat{G}_a, \hat{G}_b] = i\hbar \hat{C}_{ab}^c \hat{G}_c, \quad (1.50)$$

donde las funciones de estructura pueden adquirir correcciones de orden  $\hbar$ , entonces

$$[\hat{G}_a, \hat{G}_b] |\psi\rangle = 0, \quad (1.51)$$

se satisface como consecuencia de (1.47). Sin embargo, existen sistemas en los que no es posible realizar cuánticamente el álgebra de constricciones (1.10).

El problema es que las constricciones clásicas de primera clase pueden convertirse en constricciones de segunda clase a nivel cuántico, de manera que,

$$[\hat{G}_a, \hat{G}_b] = i\hbar \hat{C}_{ab}^c \hat{G}_c + \hbar^2 \hat{D}_{ab}. \quad (1.52)$$

Estas correcciones son consecuencia de problemas de ordenamiento en los factores. La existencia de sistemas cuánticos distintos que tienen el mismo límite clásico no es propio de los sistemas con constricciones, es un problema general de la relación entre la mecánica clásica y su correspondencia cuántica. En los casos extremos donde  $\hat{D}_{ab}$  tiene determinante distinto de cero, la condición (1.47) reduce el espacio de Hilbert a  $|\psi\rangle = 0$ . Tales sistemas se dice que son *anómalos*.

Otra fuente de posibles inconsistencias proviene de la extensión cuántica de que el hamiltoniano sea una función de primera clase (1.12)

$$[\hat{H}_0, \hat{G}_a] = i\hbar \hat{V}_a^b \hat{G}_b + \hbar^2 \hat{C}_a. \quad (1.53)$$

En este caso el hamiltoniano y la evolución temporal no será invariante de norma.

El segundo problema importante es que el método de Dirac no nos proporciona una regla para definir el producto escalar que permite la interpretación probabilística en la teoría cuántica. Un esquema alternativo, que permite en principio la construcción de un producto escalar, es [85].

Finalmente mencionaremos que aún en el caso en que  $\hat{D}_{ab}$  ó  $\hat{C}_a$  sean distintos de cero el procedimiento de cuantización BRST-BFV que discutiremos en la sección 2, puede dar resultados consistentes. Estos casos justifican la necesidad de usar el formalismo BRST e introducir el espacio fase extendido añadiendo grados de libertad adicionales, los llamados *fantasmas*. Además el método BRST-BFV nos permite, en principio, la construcción del producto escalar en la teoría cuántica.

### 1.1.4 EJEMPLO

Con el objeto de ilustrar de manera transparente algunas ideas expuestas en esta sección consideremos la acción del campo electromagnético libre

$$S_0[A_\mu] = \int d^4x \left( -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right), \quad (1.54)$$

donde  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . La acción es invariante ante las transformaciones de norma

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \epsilon. \quad (1.55)$$

Como estas transformaciones involucran al parámetro  $\epsilon$  junto con su primera derivada respecto al tiempo, esta teoría debe tener dos constricciones de primera clase, una primaria y la otra secundaria. Por tanto, el número total de grados de libertad será,  $4-2=2$ . Construiremos ahora la teoría hamiltoniana. Los momentos canónicos son

$$\pi^0 = 0, \quad \pi^i = F^{i0}, \quad (1.56)$$

y el paréntesis básico es,

$$\{A_\mu(\vec{x}), \pi^\nu(\vec{x}')\} = \delta_\mu^\nu \delta(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (1.57)$$

Tenemos, entonces, una restricción primaria,

$$\phi_1 = \pi^0 = 0. \quad (1.58)$$

El hamiltoniano canónico es

$$H_c = H_0 + \int d^3x A_0(-\partial_i \pi^i), \quad (1.59)$$

donde

$$H_0 = \int d^3x \left( \frac{1}{2} \pi^i \pi_i + \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} \right). \quad (1.60)$$

La condición de consistencia sobre  $\phi_1$  resulta

$$\phi_2 = -\pi^i_{,i} = 0, \quad (1.61)$$

que no es otra cosa más que la ley de Gauss ( $-\pi^i_{,i} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ ,  $E^i = F^{0i}$ ) y que aparece aquí como restricción secundaria. No hay constricciones adicionales y el álgebra de constricciones es

$$\{\phi_1(\vec{x}), \phi_1(\vec{x}')\} = 0, \quad \{\phi_1(\vec{x}), \phi_2(\vec{x}')\} = 0, \quad \{\phi_2(\vec{x}), \phi_2(\vec{x}')\} = 0, \quad (1.62)$$

$$\{H_c, \phi_1(\vec{x})\} = \phi_2(\vec{x}), \quad \{H_c, \phi_2(\vec{x})\} = 0, \quad (1.63)$$

debido a que

$$\{H_0, \phi_1(\vec{x})\} = \{H_0, \phi_2(\vec{x})\} = 0. \quad (1.64)$$

La acción extendida es

$$S_E[\pi^\mu, A_\mu, \lambda^1, \lambda^2] = \int d^4x (\pi^i \dot{A}_i + \pi^0 \dot{A}_0 - H_c - \lambda^1 \phi_1 - \lambda^2 \phi_2), \quad (1.65)$$

y es invariante ante las transformaciones de norma generadas por  $\int (\epsilon^1 \phi_1 + \epsilon^2 \phi_2) dx$ ,

$$\delta A_0 = \epsilon^1, \quad \delta \pi^0 = 0, \quad (1.66)$$

$$\delta A_i = \partial_i \epsilon^2, \quad \delta \pi^i = 0, \quad (1.67)$$

$$\delta \lambda^1 = \epsilon^1, \quad \delta \lambda^2 = \epsilon^2 - \epsilon^1. \quad (1.68)$$

La acción total se obtiene imponiendo la condición de norma  $\lambda^2 = 0$  y es

$$S_T[\pi^\mu, A_\mu, \lambda^1] = \int d^4x (\pi^i \dot{A}_i + \pi^0 \dot{A}_0 - H_c - \lambda^1 \phi_1), \quad (1.69)$$

quedando la invariancia residual,

$$\delta A_0 = \epsilon, \quad \delta A_i = \partial_i \epsilon, \quad \delta \lambda^1 = \bar{\epsilon}, \quad (1.70)$$

( $\delta \pi^0 = \delta \pi^i = 0$ ) con  $\epsilon = \epsilon^2$ . Si eliminamos  $\pi^0, \pi^i$  y  $\lambda^1$  de la acción total usando para ello sus propias ecuaciones de movimiento, obtenemos la acción original y las transformaciones de norma coinciden con (1.55). Es costumbre eliminar de (1.69) solamente los campos auxiliares  $\lambda^1, \pi^0$  obteniendo el resultado usual

$$S_T[\pi^\mu, A_i, A_0] = \int d^4x (\pi^i \dot{A}_i - H_0 - A_0 \phi_2). \quad (1.71)$$

Es por ello que usualmente se considera la componente  $A_0$  como el multiplicador de Lagrange asociado a la ley de Gauss.

## 1.2 BRST-BFV

El propósito de esta sección es dar una introducción breve a algunos conceptos básicos del método de cuantización BRST-BFV. Nos centraremos en los aspectos hamiltonianos de la simetría BRST. Esta exposición está basada en las referencias [40], [61], [58] a las que referimos al lector para más detalles. El correspondiente análisis lagrangiano puede verse en [14].

Uno de los problemas fundamentales de la física teórica es la cuantización de sistemas con grados de libertad de norma. Existen varios métodos para cuantizar teorías de norma como por ejemplo, el método de Dirac (expuesto en la sección anterior), el método de cuantización de lazos [6], el método de cuantización geométrica [91], entre otros. La principal dificultad en la cuantización se debe a que las simetrías de norma están asociadas al hecho de que no todos los grados de libertad son "físicos" y por tanto hay un sector de la teoría que debe ser eliminado sin destruir la covariancia. Los estados físicos son invariantes ante transformaciones de norma. Cuando se calculan los elementos de matriz del operador evolución entre un estado inicial y un estado final previamente definidos, usando la integral funcional, se encuentra que la suma sobre todas las trayectorias posibles, entre estos estados, diverge debido a las simetrías de norma de la teoría. Esto se debe a que existe una infinidad de trayectorias que son equivalentes; están relacionadas entre sí por transformaciones de norma. En los años sesenta se mostró que este problema puede resolverse en el caso donde las funciones de estructura del álgebra de constricciones son constantes (en tal caso las constricciones forman un álgebra de Lie). Pero cuando las funciones de estructura dependen de las variables del espacio fase, es necesario recurrir a métodos alternativos. Para la teoría de Yang-Mills este problema fue resuelto introduciendo variables que anticonmutan, los llamados fantasmas de Faddeev-Popov. Los fantasmas fueron introducidos por Feynman [37] al tratar el desarrollo perturbativo de una teoría de Yang-Mills. Él notó que para mantener la unitariedad era necesario considerar diagramas adicionales en los que intervenían partículas no observables. Se les dio el nombre de fantasmas, porque a pesar de transformar como escalares ante el grupo de Lorentz tienen estadística de fermión. En este sentido, violan el teorema de espín-estadística y por ello se declaran como no-observables. Posteriormente, Faddeev y Popov [33] notaron que para mantener la idea básica de que el propagador pueda escribirse proporcional a la exponencial de la acción es necesario "subir" a la acción un factor que aparece como consecuencia de la medida. A este procedimiento le llamaron la "representación integral". De esta manera pueden construirse las reglas de Feynman de la teoría y mantener la unitariedad. Para ello introdujeron los famosos fantasmas de Faddeev-Popov.

Tiempo después, Becchi, Rouet y Stora e independientemente Tyutin [21], mostraron que la acción efectiva (aquella que depende de los fantasmas) tiene una simetría sorprendente: la supersimetría BRST. Esta simetría

tiene tres propiedades: a) Es el residuo de la simetría de norma cuando se ha fijado la norma, b) es global y no local como la simetría de norma, c) es una supersimetría: el parámetro es un número impar de Grassmann y mezcla variables con distinta paridad de Grassmann. La primera aplicación de esta simetría para cuantizar teorías de norma fue realizada en [72]. Posteriormente, un procedimiento completamente general fue desarrollado, usando como base el formalismo hamiltoniano, por E.S. Fradkin y colaboradores [39]. Es común referirse a este método de cuantización como el método de Batalin-Fradkin-Vilkovisky (BRST-BFV). Este procedimiento, no solamente es útil en la formulación de la integral de trayectoria [61], donde la simetría BRST es la piedra angular en la construcción de la acción efectiva, sino también en la formulación de operadores [18]. El método BRST-BFV tiene las siguientes características: a) Es aplicable al caso de álgebras abiertas (aquellas que cierran solamente cuando se utilizan las ecuaciones de movimiento), b) la simetría BRST tiene significado intrínseco, i.e., no depende de la estructura dinámica de la teoría sino solamente del álgebra de constricciones. Es, por tanto, independiente de las condiciones de norma y está asociada a la estructura de los sistemas hamiltonianos con constricciones, c) la teoría cuántica resultante es unitaria, d) la medida en la integral funcional está determinada por la medida de Liouville en el espacio fase extendido (aquél que contiene a las variables dinámicas de la teoría, más los fantasmas y sus correspondientes momentos conjugados, llamados antifantasmas), e) el procedimiento depende de la estructura geométrica de la superficie de construcción y no de la manera particular en cómo se defina dicha superficie, i.e., es invariante ante redefiniciones de las constricciones.

Sin embargo, este método tiene la desventaja de romper la covariancia explícita de la teoría a la cual se aplica, debido a que está basado en el formalismo hamiltoniano. Por ello Batalin y Vilkovisky (BV) [14] propusieron el correspondiente método lagrangiano, llamado formalismo de anticampos. En este procedimiento se introducen nuevos objetos, llamados anticampos, asociados a cada variable dinámica de la teoría, incluyendo los fantasmas. La paridad de Grassmann de los anticampos es opuesta a la de su variable asociada. En el espacio de campos y anticampos se introduce una estructura simpléctica impar, llamada antibracket. Este formalismo permite interpretar el procedimiento para fijar la norma en términos de una transformación canónica (definida como aquellas transformaciones que dejan invariante la estructura del antibracket) en el espacio campo-anticampo. Una desventaja

importante de este método es que no propone un mecanismo sistemático para calcular la medida en la integral funcional. Esta medida es, en general, altamente no trivial. Sin embargo, es siempre posible recurrir al método BRST-BFV para intentar construir la medida lagrangiana. En este sentido, estos dos métodos se complementan.

Aunque el método de cuantización BRST-BFV es muy general, no se aplica directamente a sistemas con constricciones de segunda clase. Es necesario eliminar a nivel clásico este tipo de constricciones antes de aplicar las ideas del método BRST-BFV. Esto, en principio, no es un problema pero puede ser muy complicado en la práctica ya que existen ambigüedades con la representación cuántica de los paréntesis de Dirac y problemas con el ordenamiento de factores y la localidad. Una posible solución a este problema es convertir las constricciones de segunda clase en constricciones de primera clase añadiendo un número apropiado de variables. Una prescripción general para realizar tal extensión, es el método de conversión de Batalin-Tyutin (BT) [16]. Posteriormente revisaremos las ideas básicas de este método (ver Sección 3.3).

### 1.2.1 CONSTRUCCIÓN DE LA CARGA BRST

¿Cuál es la correspondiente carga de Noether de la simetría BRST? Esta carga no depende de la estructura dinámica de la teoría, *i.e.* de la forma explícita del hamiltoniano ni de la condición de norma. Depende solamente de la estructura del álgebra de constricciones. Por tanto es una propiedad intrínseca y puede construirse en general como sigue<sup>10</sup>: El primer paso es asociar a cada restricción de primera clase  $G_a$  un fantasma  $\eta^a$  y su correspondiente momento conjugado, también conocido como antifantasma  $\mathcal{P}_a$ ,

$$\{\eta^b, \mathcal{P}_a\} = \{\mathcal{P}_a, \eta^b\} = -\delta_a^b, \quad (1.72)$$

donde  $\epsilon(\mathcal{P}_a) = \epsilon(\eta^a) = 1$ ,  $(\eta^a)^* = \eta^a$  y  $(\mathcal{P}_a)^* = -\mathcal{P}_a$ .<sup>11</sup> Estas variables canónicas independientes tienen paréntesis de Poisson cero con el resto de las variables. El espacio fase resultante se llama espacio fase extendido.

<sup>10</sup>Por simplicidad supondremos constricciones reales y bosónicas. Los factores apropiados para el caso general se introducirán en el Capítulo 4.

<sup>11</sup>Denotamos por  $\epsilon(A)$  la paridad de Grassman de  $A$ . Para detalles referimos al lector al apéndice.

Una estructura adicional que juega un papel importante en la elección del sector físico de la teoría, es el número de fantasma, definido por

$$\mathcal{G}(q^i) = 0, \quad \mathcal{G}(p_i) = 0, \quad \mathcal{G}(\eta^a) = 1, \quad \mathcal{G}(\mathcal{P}_a) = -1 \quad (1.73)$$

donde el número de fantasma del producto de dos variables es igual a la suma de sus respectivos números de fantasma.

La carga BRST se construye exigiendo las siguientes propiedades

1.  $\Omega$  es real:  $\Omega^* = \Omega$ ,
2.  $\Omega$  tiene número de fantasma 1:  $\mathcal{G}(\Omega) = 1$ ,
3.  $\Omega$  tiene paridad de Grassmann 1:  $\epsilon(\Omega) = 1$ ,
4.  $\Omega$  es nilpotente:  $\{\Omega, \Omega\} = 0$ .

La propiedad 4 nos permite resolver para la carga BRST y la solución es

$$\Omega = \sum_{n \geq 0} \eta^{a_{n+1}} \dots \eta^{a_1} U_{a_1 \dots a_{n+1}}^{(n) b_1 \dots b_n} \mathcal{P}_{b_n} \dots \mathcal{P}_{b_1}, \quad (1.74)$$

con la condición de frontera

$$\left. \frac{\partial \Omega}{\partial \eta^a} \right|_{\eta=0, \mathcal{P}=0} = U_a^{(0)} \equiv G_a, \quad (1.75)$$

donde  $U^{(n)}$  son las llamadas funciones de estructura. Conociendo  $U^{(0)}$  es posible calcular todas las funciones de estructura restantes, via un algoritmo bien definido [61]. Los primeros términos de la serie son

$$\Omega = \eta^a G_a - \frac{1}{2} \eta^b \eta^c C_{cb}^a \mathcal{P}_a + \dots, \quad (1.76)$$

donde .... significa términos de orden mayor en el número de fantasmas y  $C_{ab}^c$  son las funciones de estructura del álgebra de constrictiones.

La solución es única hasta una transformación canónica en el espacio fase extendido. En particular

$$\Omega' = \Omega + \{K, \Omega\}, \quad (1.77)$$

donde  $K$  es una función arbitraria, es solución de la propiedad 4, si  $\Omega$  lo es. El origen de las funciones de estructura está relacionado con la consistencia del álgebra de constrictiones. Se dice que la teoría es de rango  $N$  si todas las funciones de estructura para  $N \leq n + 1$  son cero. El rango de una teoría no es una propiedad intrínseca. Consideremos por ejemplo una teoría de Yang-Mills

$$\{G_a, G_b\} = C_{ab}^c G_c, \quad (1.78)$$

donde  $C_{ab}^c$  son constantes. En este caso

$$\Omega = \eta^a G_a - \frac{1}{2} \eta^b \eta^c C_{cb}^a P_a. \quad (1.79)$$

Es conocido que dada un álgebra de constrictiones es siempre posible construir (localmente) la correspondiente álgebra abeliana redefiniendo las constrictiones por nuevas constrictiones equivalentes. En este caso la carga BRST tendrá la estructura

$$\Omega = \eta^a F_a, \quad \{F_a, F_b\} = 0. \quad (1.80)$$

Por tanto, distintas cargas BRST pueden representar a la misma teoría.

Es muy notable que la estructura de los sistemas clásicos con constrictiones esté contenida en la transformación de BRST. En particular, el formalismo es invariante ante la redefinición de las constrictiones en el espacio fase extendido. Las diferentes teorías que resultan de fijar de una manera específica la condición de norma, están relacionadas entre sí por una transformación canónica. En efecto, supongamos una superficie de constricción definida por  $G_a \approx 0$ . De manera equivalente esta misma superficie puede describirse por

$$G_a(q, p) \rightarrow \bar{C}_a = M_a^b(q, p) G_b(q, p), \quad (1.81)$$

donde  $M_a^b$  es invertible. Si  $M_a^b = \delta_a^b + \epsilon_a^b(q, p)$ , donde  $\epsilon_a^b$  es un parámetro infinitesimal, es posible construir el generador de la transformación canónica que conecta las dos descripciones, usando el generador

$$C = \eta^a \epsilon_a^b P_b. \quad (1.82)$$

Este generador nos permite relacionar la carga BRST

$$\Omega = \eta^a G_a + \dots, \quad (1.83)$$

con la carga

$$\bar{\Omega} = \eta_a \bar{G}_a + \dots, \quad (1.84)$$

de tal modo que

$$\delta\Omega = \bar{\Omega} - \Omega = \{\Omega, C\}. \quad (1.85)$$

Por tanto, las dos cargas (1.83) y (1.84) están relacionadas por una transformación canónica. Es en este sentido que representan al mismo sistema.

Con el objeto de ilustrar cómo estas ideas están relacionadas con la elección de norma, consideremos dos hamiltonianos totales

$$H_T = H_c + \lambda^a G_a, \quad \bar{H}_T = H_c + \lambda^a \bar{G}_a, \quad (1.86)$$

donde  $G_a$  y  $\bar{G}_a$  son distintas representaciones de la misma superficie de restricción (1.81). El hamiltoniano  $\bar{H}_T$  puede reescribirse como

$$\bar{H}_T = H_c + \lambda^a M_a^b G_b = H_c + \bar{\lambda}^b G_b, \quad (1.87)$$

donde  $\bar{\lambda}^b \equiv \lambda^a M_a^b$ . Los dos hamiltonianos  $H_T$  y  $\bar{H}_T$  representan al mismo sistema dinámico y difieren solamente en que sus respectivos multiplicadores de Lagrange son distintos. Fijando  $\lambda^a$ , podríamos decir que los dos hamiltonianos difieren porque están evaluados en dos condiciones de norma distintas. Sin embargo, sus cargas BRST están relacionadas por una transformación canónica (1.85). Por tanto, podemos concluir que la carga BRST es independiente de la condición de norma.

### 1.2.2 OBSERVABLES BRST

Los observables clásicos son funciones invariantes de norma  $A_0(q, p)$ , *i.e.* funciones que tienen paréntesis de Poisson débilmente cero con las restricciones

$$\{A_0, G_a\} \approx 0. \quad (1.88)$$

Dos observables  $A_0$  y  $A'_0$  se consideran equivalentes si difieren por un término que se anula sobre la superficie de restricción

$$A'_0 = A_0 + k^a G_a, \quad (1.89)$$

donde  $k^a$  son funciones arbitrarias. Definimos ahora la extensión BRST del observable  $A_0$  como una función en el espacio fase extendido con las siguientes propiedades

- i)  $A|_{\eta=p=0} = A_0(q, p)$ ,
- ii)  $\mathcal{G}(A) = 0$ , número de fantasma cero,
- iii)  $\{A, \Omega\} = 0$ , es BRST invariante.

La solución de la propiedad (iii) con la condición inicial dada por la propiedad (i) es

$$A = \sum_{n \geq 0} \eta^{b_n} \dots \eta^{b_1} U_{b_1, \dots, b_n}^{a_1, \dots, a_n} \mathcal{P}_{a_n} \dots \mathcal{P}_{a_1}. \quad (1.90)$$

La extensión BRST (1.90) no es única, ya que

$$A' = A + \{K, \Omega\}, \quad (1.91)$$

es solución de la propiedad (ii), si  $A$  lo es, donde  $K$  tiene número de fantasma  $-1$ . En particular el hamiltoniano invariante BRST,  $H_{BRST}$ , que es el ingrediente básico de la acción BRST,  $S_{BRST}$  se construye de esta manera

$$\{H_{BRST}, \Omega\} = 0, \quad (1.92)$$

Los primeros términos de la serie son

$$H_{BRST} = H_c + \eta^a V_a^b \mathcal{P}_b + \dots, \quad (1.93)$$

donde ... significa términos que tienen al menos cuatro fantasmas y  $V_a^b$  está definida por (1.12). Fradkin y Vilkovisky [15] mostraron que un cambio en la condición de norma en la integral de trayectoria cambia al hamiltoniano en la forma

$$H_{eff} \rightarrow H_{BRST} + \{\Psi, \Omega\}. \quad (1.94)$$

Por tanto, este cambio debe ser irrelevante para la dinámica. Las trayectorias en el espacio fase extendido generadas por  $H_{BRST}$

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H_{BRST}\}, \quad (1.95)$$

son tales que si los fantasmas son inicialmente cero  $\eta^a(t=0) = \mathcal{P}_a(t=0) = 0$  permanecen así, ya que el hamiltoniano BRST tiene número de fantasma cero. Así las trayectorias solución de (1.95) se proyectan al espacio fase original donde la dinámica es generada por  $H_c$ .

Las ecuaciones de movimiento (1.95) tienen fija la norma (son equivalentes a poner todos los multiplicadores de Lagrange iguales a cero). Esta norma es, en general, no accesible [59]. Para elegir distintas normas es posible usar la propiedad (1.94), donde  $\Psi$  se conoce como el fermión de norma ya que su número de fantasmas debe ser  $-1$  y contiene toda la arbitrariedad en la dinámica generada por  $H_{eff}$ .

Con el objeto de incorporar un mecanismo para fijar condiciones de norma arbitrarias en BRST-BFV es necesario incluir a los multiplicadores de Lagrange como variables dinámicas, así como sus momentos canónicos asociados

$$\{\lambda^a, \pi_b\} = -\{\pi_b, \lambda^a\} = \delta_b^a. \quad (1.96)$$

Para que no se incremente el número de grados de libertad de la teoría, imponemos como constricciones  $\pi_a \approx 0$ . Estas constricciones son de primera clase y generan desplazamientos en los multiplicadores de Lagrange. Estos desplazamientos son irrelevantes para la dinámica ya que los multiplicadores de Lagrange son arbitrarios. El nuevo conjunto de constricciones es

$$G_A = (\pi_a, G_a), \quad (1.97)$$

con  $A = 1 \dots 2n$ , ( $n$  es el número de constricciones de primera clase originales). El siguiente paso es introducir los fantasmas correspondientes a estas nuevas constricciones y sus momentos o antifantasmas, como se conocen en la jerga BRST-era. Es conveniente definir el conjunto completo de fantasmas y antifantasmas como

$$\eta^A = (-i\mathcal{P}^a, C^a), \quad \mathcal{P}_A = (i\bar{C}_a, \bar{P}_a), \quad (1.98)$$

que cumplen las siguientes relaciones canónicas

$$\{C^a, \bar{C}_b\} = \{C^a, \mathcal{P}^b\} = \{\bar{C}_a, \bar{P}_b\} = \{\bar{P}_a, \mathcal{P}^b\} = 0 \quad (1.99)$$

$$\{\bar{P}_a, C^b\} = \{\mathcal{P}^b, \bar{C}_a\} = -\delta_a^b \quad (1.100)$$

con las propiedades  $\epsilon(\mathcal{P}_A) = \epsilon(\eta^A) = 1$ ,  $(\eta^A)^\ast = \eta^A$ ,  $(\mathcal{P}_A)^\ast = -\mathcal{P}_A$ , como es convencional para el caso de constricciones bosónicas. Impondremos también la condición de que las variables añadidas tengan paréntesis de Poisson cero con las variables originales. El espacio fase extendido, equipado con la estructura simpléctica canónica

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (1.101)$$

queda definido por las variables  $(q^i, p_i, \lambda^a, \pi_a, \eta^A, \mathcal{P}_A)$ . La carga BRST es ahora

$$\Omega = \eta^A G_A - \frac{1}{2} \eta^A \eta^B C_{BA}^C \mathcal{P}_C + \dots = -i \mathcal{P}^a \pi_a + C^a G_a - \frac{1}{2} C^a C^b C_{ba}^c \bar{\mathcal{P}}_c + \dots \quad (1.102)$$

donde  $C_{ab}^c$  son las funciones de estructura del álgebra de constricciones original. Nótese que  $C_{AB}^C$  es cero para  $A, B, C = 1 \dots n$  y corresponde a  $C_{ab}^c$  para  $A, B, C = n \dots 2n$ . Es común denotar por  $\Omega^{\min}$  a

$$\Omega^{\min} = C^a G_a - \frac{1}{2} C^a C^b C_{ab}^c \bar{\mathcal{P}}_c + \dots, \quad (1.103)$$

que es la carga BRST correspondiente al sector mínimo (espacio fase extendido donde aun no se han promovido los multiplicadores de Lagrange a variables dinámicas).

La acción efectiva asociada al hamiltoniano efectivo (1.94) es

$$S_{eff} = \int_{t_1}^{t_2} dt (\dot{q}^i p_i - \lambda^a \dot{\pi}_a + \dot{C}^a \bar{\mathcal{P}}_a + \dot{\bar{C}}_a \mathcal{P}^a - H_{eff}), \quad (1.104)$$

donde  $q^i(t_1) = q_1^i, q^i(t_2) = q_2^i$  y el resto de las variables deben fijarse en los extremos de tal manera que la acción cumpla con dos propiedades muy importantes:

a) ser invariante bajo la transformación de BRST  $\delta_\Omega S_{eff} = \{\Omega, S_{eff}\}$ .  $H_{eff}$  es invariante por construcción y el término cinético contribuye con

$$\delta S_{eff} = \left[ \frac{\partial \Omega}{\partial p_i} p_i + \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda^a} \lambda^a + \frac{\partial \Omega}{\partial \mathcal{P}^a} \mathcal{P}^a + \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\mathcal{P}}_a} \bar{\mathcal{P}}_a - \Omega \right]_{t_1}^{t_2}. \quad (1.105)$$

Esta expresión se anula si se elijen las condiciones BRST-invariantes en los extremos

$$\begin{aligned}
C^a(t_2) &= C^a(t_1) = 0, \\
\bar{C}_a(t_2) &= \bar{C}_a(t_1) = 0, \\
\pi_a(t_2) &= \pi_a(t_1) = 0,
\end{aligned}
\tag{1.106}$$

más las condiciones escogidas para las variables del espacio fase original. Para mostrar que, en efecto, las condiciones (1.106) son invariantes BRST calculemos

$$\delta_{\Omega} C^a = \{C^a, \Omega\} = -\frac{1}{2} C^c C^b C_{bc}^a + \mathcal{O}[(C)^n \bar{P}^m] \quad n \geq 4, \quad m \geq 1 \tag{1.107}$$

$$\delta_{\Omega} \bar{C}_a = \{\bar{C}_a, \Omega\} = i\pi_a, \tag{1.108}$$

$$\delta_{\Omega} \pi_a = \{\pi_a, \Omega\} = 0. \tag{1.109}$$

Estas variaciones se anulan en los extremos dados por (1.106) y por tanto son BRST invariantes. Esto se debe a la estructura del algoritmo de construcción de la carga BRST. La carga BRST depende de  $\mathcal{P}^a$  y  $\pi_a$  solamente a través del sector no mínimo, y el sector mínimo depende de  $C^a$ ,  $\bar{P}_c$  y de las coordenadas del espacio fase original.

b) Ser invariante de norma. Esto significa que ante un cambio del fermión de norma  $\Psi$  la acción efectiva es invariante (teorema de Fradkin Vilkovisky (FV))[15].

Comunmente se escoge como fermión de norma

$$\Psi = i\bar{C}_a \chi^a - \bar{P}_a \lambda^a \tag{1.110}$$

donde  $\chi^a$  no depende de los fantasmas ni de sus momentos conjugados y es tal que  $(\chi^a)^* = \chi^a$ .

Para ilustrar el procedimiento de construcción de la acción efectiva consideremos el caso de una teoría tipo Yang-Mills. En tal caso la carga BRST (1.102) es

$$\Omega = -i\mathcal{P}^a \pi_a + C^a G_a - \frac{1}{2} C_a \bar{C}_b C_{ab}^c \bar{P}_c. \tag{1.111}$$

El hamiltoniano efectivo tendrá la estructura

$$H_{eff} = H_c + i\bar{C}_a \delta_C \chi^a - \chi^a \pi_a + \lambda^a G_a - \lambda^a C^b C_{ba}^c \bar{P}_c + i\bar{P}_a \mathcal{P}^a, \tag{1.112}$$

donde  $\delta_C \chi^a = \{\chi^a, C^b G_b\}$ , que corresponde a las transformaciones de norma (1.25), reemplazando el parámetro  $\epsilon^a$  por  $C^a$ . Nótese que en este caso el

parámetro de la transformación es fermiónico. Las ecuaciones de movimiento, calculadas desde la acción efectiva (1.104), para los antifantasma  $\mathcal{P}^a$  y  $\hat{\mathcal{P}}_a$  son

$$\hat{\mathcal{C}}_a - i\bar{\mathcal{P}}_a = 0, \quad \dot{\mathcal{C}}^a + \lambda^c \mathcal{C}^b \mathcal{C}_{bc}^a + i\mathcal{P}^a = 0. \quad (1.113)$$

Resolviendo para  $\mathcal{P}^a$  y  $\bar{\mathcal{P}}_a$  y sustituyendo en la acción efectiva obtenemos

$$S_\Psi = S_E + S^{gf} + S^g \quad (1.114)$$

donde  $S_E$  es la acción extendida y

$$S^{gf} = \int dt (\dot{\lambda}^a + \chi^a) \pi_a, \quad S^g = \int dt \bar{\mathcal{C}}_a \delta_C (\dot{\lambda}^a + \chi^a). \quad (1.115)$$

La condición de norma impuesta por  $\Psi$  es

$$\dot{\lambda}^a + \chi^a = 0. \quad (1.116)$$

Así, la acción resultante consta de tres partes, i) La acción original que es invariante de norma, ii) un término que rompe la invariancia de norma, determinando los multiplicadores de Lagrange como función del resto de las variables, iii) un término que contiene a los fantasmas. Este término es el responsable de cambiar la medida en la integral funcional de tal manera que la integración se realiza solamente sobre trayectorias invariantes de norma.

### 1.2.3 TEORÍA CUÁNTICA

Para implementar el método BRST-BFV en mecánica cuántica es necesario realizar como operadores en un espacio de Hilbert, no solamente las variables dinámicas del espacio fase original, sino también los fantasmas y antifantasma

$$\hat{\mathcal{P}}_a \hat{\eta}^b + \hat{\eta}^b \hat{\mathcal{P}}_a = -i\delta_a^b, \quad (1.117)$$

$$\hat{\eta}^a \psi = \eta^a \psi, \quad \hat{\mathcal{P}}^a \psi = \frac{1}{i} \frac{\partial \psi}{\partial \eta^a}, \quad (1.118)$$

que definen un álgebra de Clifford con  $2n$  generadores donde  $n$  es el número de constricciones de primera clase.

A diferencia del caso clásico, aquí no hay garantía de que la condición

$$[\hat{\Omega}, \hat{\Omega}] = 2\hat{\Omega}^2 = 0,^{12} \quad (1.119)$$

se cumpla, ya que los problemas de ordenamiento de factores son de crucial importancia. Requerimos también que  $\Omega$  sea un operador hermítico. Supondremos que es posible encontrar un ordenamiento tal que estas condiciones se cumplen y que también es posible hallar una solución cuántica a

$$[\hat{H}_{BRST}, \hat{\Omega}] = 0. \quad (1.120)$$

Siguiendo la teoría clásica definimos el operador de número de forma equivalente a (1.73), de modo que

$$[\hat{z}, \hat{\mathcal{G}}] = 0, \quad [\hat{\eta}^a, \hat{\mathcal{G}}] = +\hat{\eta}^a, \quad [\hat{\mathcal{P}}_a, \hat{\mathcal{G}}] = -\hat{\mathcal{P}}_a, \quad (1.121)$$

donde  $\hat{\mathcal{G}} = -i\hat{\eta}^a \hat{\mathcal{P}}_a$  y  $\hat{z}$  representa cualquier variable dinámica del espacio fase original. De manera análoga definimos un observable BRST en teoría cuántica como aquél operador que cumpla con, a)  $[\hat{A}, \hat{\mathcal{G}}] = 0$ , (número de fantasma cero), b)  $[\hat{A}, \hat{\Omega}] = 0$ , (BRST-invariante). Identificaremos dos observables cuando

$$\hat{A} \sim \hat{A}' + [\hat{K}, \hat{\Omega}], \quad (1.122)$$

con  $\hat{K}$  un operador arbitrario. Para que esta identificación sea posible, a nivel de la teoría cuántica, es necesario que los elementos de matriz entre "estados físicos" de los operadores  $\hat{A}$  y  $\hat{A}'$  coincidan

$$\langle \psi | \hat{A} | \phi \rangle = \langle \psi | \hat{A}' | \phi \rangle, \quad (1.123)$$

que es equivalente a requerir

$$\langle \psi | \hat{K} \hat{\Omega} | \phi \rangle + \langle \psi | \hat{\Omega} \hat{K} | \phi \rangle = 0. \quad (1.124)$$

Esta condición es válida para todo  $\hat{K}$  si los estados físicos son aniquilados por el operador BRST

$$\hat{\Omega} | \psi \rangle = 0, \quad (1.125)$$

---

<sup>12</sup>se sobrentiende que  $[\cdot, \cdot]$  es el anticonmutador. Si las dos variables que interviene son fermiónicas esta operación denotará el anticonmutador. Si alguna de ellas es bosónica denotará el conmutador.

y  $\Omega$  es un operador hermitiano. Esta es la condición básica para elegir el sector físico de la teoría en el formalismo BRST-BFV y reemplaza a la condición de Dirac (1.47). Mientras la condición de Dirac implica  $n$  ecuaciones (una para cada constricción de primera clase), la condición BRST (1.125) es una sola ecuación. El precio que se paga por ello es que las soluciones de la condición (1.125) no están determinadas de manera única. En necesario separar las soluciones (1.125) en dos clases: Las llamadas soluciones triviales y aquéllas que forman el sector físico de la teoría. El formalismo general para resolver este problema se conoce como cohomología BRST [58]. Si  $|\psi\rangle$  es solución de la condición (1.125) entonces

$$|\psi\rangle' = |\psi\rangle + \hat{\Omega}|\chi\rangle, \quad (1.126)$$

con  $|\chi\rangle$  arbitrario, es también solución.  $|\psi\rangle$  es un estado físico si pertenece al  $\text{Ker } \hat{\Omega} = \{|\psi\rangle, \text{ tal que } \hat{\Omega}|\psi\rangle = 0\}$ , donde  $\text{Ker}$  es el núcleo del operador BRST. Se dice que estos estados son BRST-cerrados. La imagen del operador  $\hat{\Omega}$  está definida por  $\text{Im } \hat{\Omega} = \{|\psi\rangle \text{ tal que } |\psi\rangle = \hat{\Omega}|\psi'\rangle\}$ , con  $|\psi'\rangle$  arbitrario. Estos estados se llaman BRST-exactos. Nótese que  $\hat{\Omega}|\psi\rangle = 0$ , si  $|\psi\rangle$  está en la imagen de  $\hat{\Omega}$ , y por tanto estará también en el  $\text{Ker } \hat{\Omega}$ . Con el objeto de definir el espacio físico es necesario construir las clases de equivalencia con la identificación (1.126). Esto implica que el espacio físico está dado por el espacio cociente

$$\frac{\text{Ker } \hat{\Omega} = \text{BRST-cerrados}}{\text{Im } \hat{\Omega} = \text{BRST-exactos}}. \quad (1.127)$$

El álgebra definida en este espacio cociente es conocida como la cohomología BRST.

El producto escalar en el espacio de Hilbert extendido lo denotaremos por  $(\psi, \chi)$ . Este producto escalar es tal que las variables clásicas reales pasarán a ser operadores hermitianos. Análogamente las variables clásicas imaginarias pasarán a ser operadores antihermíticos. Esto implica, en particular, que la carga BRST y el hamiltoniano BRST serán operadores hermitianos

$$\hat{\Omega}^\dagger = \hat{\Omega} \rightarrow (\psi, \hat{\Omega}\chi) = (\hat{\Omega}\psi, \chi), \quad \hat{H}_{BRST}^\dagger = \hat{H}_{BRST}. \quad (1.128)$$

Si  $|\psi\rangle$  es un estado físico, el producto escalar en (1.128), es cero. Por tanto este producto es degenerado (no positivo) e implica la existencia de estados

con norma negativa.<sup>13</sup> Por la misma razón todos los estados de la forma  $\hat{\Omega}|\chi\rangle$  con  $\chi$  arbitrario no contribuyen a amplitudes entre estados físicos.

La condición sobre los estados físicos (1.125) posee las siguientes propiedades: a) Es lineal y por tanto selecciona un subespacio del espacio de Hilbert extendido. b) Los observables BRST dados por  $[\hat{A}, \hat{\Omega}] = 0$  mapean el espacio físico sobre sí mismo. c) Los observables triviales definidos por  $[\hat{K}, \hat{\Omega}]$  tienen elementos de matriz nulos entre estados físicos

$$\langle \psi_1 | [\hat{K}, \hat{\Omega}] | \psi_2 \rangle = 0. \quad (1.131)$$

### 1.2.3.1 INTEGRAL FUNCIONAL

Uno de los métodos más poderosos para calcular el propagador de un sistema cuya evolución clásica es conocida, es la integral de trayectoria. Este método es especialmente eficiente en el marco del formalismo BRST-BFV por las razones siguientes: a) La medida en la integral funcional está bien definida; es la medida de Liouville en el espacio fase extendido, b) la integral de trayectoria es invariante ante cambios arbitrarios en el fermión de norma. Por tanto el resultado que se obtiene con este método no depende de la elección de norma. Este es el contenido del teorema de Fradkin-Vilkovisky [15].

El operador de evolución  $\exp(-iH_{eff}t)$  conmuta con la carga BRST ya que el hamiltoniano es un observable. Además, es unitario ya que  $H_{eff}$  es hermitico. Esto significa que globalmente la evolución temporal deja invariante el espacio de estados físicos. Esto implica también unitariedad en el sub-espacio de estados físicos. Si el producto escalar  $(\psi_1, \psi_2)$  entre dos estados físicos es positivo definido, cuando los estados de norma cero han sido factorizados, se obtiene una teoría cuántica satisfactoria. Esto sucede en los casos usuales. Pero en general, esta factorización no es trivial.

<sup>13</sup>Es importante mencionar que existen otras propuestas donde  $\Omega$  no es hermitico bajo un producto escalar en el espacio de Hilbert extendido, no degenerado [67] ( $(\Omega\phi, \Omega\chi) = 0$  para todo  $\phi$  en el espacio fase extendido, implica  $\Omega\chi = 0$ ). En este caso se define la carga co-BRST por

$$(\Omega\psi, \phi) \equiv (\psi, \bar{\Omega}\phi) \quad (1.129)$$

Luego se define el operador

$$\Delta \equiv \bar{\Omega}\Omega + \Omega\bar{\Omega}. \quad (1.130)$$

La condición sobre los estados físicos es ahora  $\Delta\psi = 0$ .

Hemos asumido que la teoría no tiene anomalías. En la presencia de anomalías el operador evolución podría no mapear el subespacio físico sobre sí mismo. Esto lleva a serias dificultades.

Nótese que la amplitud de transición  $\langle \psi_1 | \exp(-iHt) | \psi_2 \rangle$  es invariante ante el cambio en el hamiltoniano  $H \rightarrow H + [\Psi, \Omega]$  si  $\psi_1$  y  $\psi_2$  son estados físicos. Por tanto para definir la integral funcional

$$Z_\psi = \int \mathcal{D}\mu \exp iS_{eff}, \quad (1.132)$$

donde la acción efectiva es (1.104) y la medida es

$$\mathcal{D}\mu = \mathcal{D}p\mathcal{D}q\mathcal{D}\pi\mathcal{D}\lambda\mathcal{D}\bar{C}\mathcal{D}P\mathcal{D}C\mathcal{D}\bar{P}, \quad (1.133)$$

es necesario especificar condiciones BRST-invariantes en los extremos de tal modo que el resultado de la integral funcional sea BRST invariante y por tanto físico.

### 1.2.3.2 FORMALISMO DE OPERADORES

Los métodos de cuantización basados en la formulación de operadores tienen la ventaja de no requerir el proceso de discretización necesario para realizar la integral funcional. Esto permite tener un control directo sobre los problemas de ordenamiento de factores.

Las ecuaciones fundamentales del método de operadores son las siguientes

$$[\hat{\Omega}, \hat{\Omega}] = 0, \quad \hat{\Omega} = \hat{\Omega}^\dagger, \quad \epsilon(\hat{\Omega}) = 1, \quad \mathcal{G}(\hat{\Omega}) = 1, \quad (1.134)$$

$$[\hat{H}_{BRST}, \hat{\Omega}] = 0, \quad \hat{H}_{BRST} = \hat{H}_{BRST}^\dagger, \quad \epsilon(H_{BRST}) = 0, \quad \hat{\mathcal{G}}(\hat{H}_{BRST}) = 0, \quad (1.135)$$

además de la condición sobre los estados físicos (1.125). Dos observaciones fundamentales permiten mostrar que la carga BRST puede construirse en mecánica cuántica. Primero, eligiendo un ordenamiento es posible construir la solución a las ecuaciones cuánticas (1.134) y (1.135) siempre y cuando la teoría no sea anómala. Segundo, dada una función clásica, es siempre posible construir su símbolo y a partir de aquí construir el operador correspondiente. Existe un producto llamado producto  $*$  para símbolos. Reescribiendo las ecuaciones básicas del método BRST-BFV en términos de símbolos y usando el producto entre símbolos, puede seguirse paso a paso la construcción clásica

y obtener los correspondientes operadores cuánticos al final. Que ambos procedimientos coinciden ha sido mostrado en [18].

Por ejemplo, la siguiente prescripción permite comparar los resultados que se obtienen al aplicar el método de Dirac con aquellos obtenidos usando BRST-BFV [58]: 1) Escribir  $\hat{\Omega}$  en orden  $\eta - \mathcal{P}$ . 2) Definir las constricciones cuánticas como los operadores que están multiplicados por  $\eta^a$  en la carga BRST con  $\mathcal{P} = 0$ . Esta definición tiene las siguientes propiedades: a)  $G_a$  son de primera clase,  $[\hat{G}_a, \hat{G}_b] = i\hat{C}_{ab}^c \hat{G}_c$ , con las funciones de estructura al lado izquierdo. Esto se sigue de  $\hat{\Omega}^2 = 0$ . b) Tanto  $\hat{G}_a$  como  $\hat{C}_{ab}^c$  difieren de sus correspondientes funciones clásicas por términos de orden  $\hbar$  que provienen del ordenamiento  $\eta - \mathcal{P}$  en la carga BRST. Estas correcciones no pueden obtenerse usando el método de Dirac.

Denotaremos cualquier operador asociado a una variable dinámica específica del espacio fase extendido por  $\Gamma$ . Su evolución temporal en el intervalo  $(t_i, t_f)$  está determinada por las ecuaciones de movimiento de Heisenberg y es generada por el hamiltoniano efectivo

$$i\partial_t \hat{\Gamma} = [\hat{\Gamma}, \hat{H}_{eff}], \quad \hat{H}_{eff} = \hat{H} - i[\hat{\Psi}, \hat{\Omega}], \quad (1.136)$$

donde

$$[\hat{H}, \hat{\Omega}] = 0, \quad \hat{H} = \hat{H}^\dagger, \quad \epsilon(\hat{H}) = 0, \quad \hat{G}(\hat{H}) = 0, \\ \hat{\Psi} = -\hat{\Psi}^\dagger, \quad \epsilon(\hat{\Psi}) = 1, \quad \hat{G}(\hat{\Psi}) = -1. \quad (1.137)$$

El fermión de norma  $\hat{\Psi}$  implementa las condiciones de norma en la teoría. Nótese que este operador puede tener problemas de ordenamiento que deben ser resueltos previamente. En este operador está contenida toda la arbitrariedad en la dinámica. La independencia de norma del sector físico de la teoría puede mostrarse como sigue [18]: sea  $\hat{\Gamma}_\Psi(t)$  el conjunto de soluciones de las ecuaciones (1.136), con la condición inicial  $\hat{\Gamma}(t_i)$ , obtenidas usando un fermión de norma particular  $\hat{\Psi}$ . Las condiciones iniciales son independientes de la norma y deben ser BRST invariantes. Ante la transformación infinitesimal  $\hat{\Psi} \rightarrow \hat{\Psi} + \delta\hat{\Psi}$ , los operadores  $\hat{\Gamma}$  cambian por

$$\hat{\Gamma}_{\hat{\Psi}+\delta\hat{\Psi}} = \mathcal{U}^{-1} \hat{\Gamma}_\Psi \mathcal{U} \quad (1.138)$$

donde el operador  $\mathcal{U}$  está definido por  $\mathcal{U} = \exp(-[\hat{\Omega}, \int_{t_i}^{t_f} \delta\hat{\Psi} dt])^{14}$  de modo

<sup>14</sup>La definición de este operador está motivada por el siguiente argumento: Consideremos

que la transformación (1.138) puede escribirse como

$$\hat{\Gamma}_{\Psi+\delta\Psi} = \hat{\Gamma}_{\Psi} + [[\hat{\Omega}, \int_{t_i}^t \delta\hat{\Psi} dt'], \hat{\Gamma}_{\Psi}]. \quad (1.141)$$

Para operadores BRST invariantes obtenemos

$$\delta_{\Psi}\hat{F} \equiv \hat{F}(\hat{\Gamma}_{\Psi+\delta\Psi}) - \hat{F}(\hat{\Gamma}_{\Psi}), \quad (1.142)$$

con

$$\delta_{\Psi}\hat{F} = [\hat{\Omega}, [\int_{t_i}^t \delta\hat{\Psi}(t') dt', \hat{F}]], \quad (1.143)$$

donde hemos usado la identidad de Jacobi y el hecho de que  $F$  es BRST invariante. Por tanto los elementos de matriz de la variación (1.143) relativos a dos estados físicos cualesquiera son cero

$$\langle \psi_1 | \delta_{\Psi}\hat{F} | \psi_2 \rangle = 0. \quad (1.144)$$

Esto implica que los elementos de matriz entre operadores físicos no dependen de la forma de  $\hat{\Psi}$  y por tanto no dependen de la condición de norma.

### 1.3 PRINCIPIO DE ACCIÓN DE SCHWINGER

Existen dos formulaciones lagrangianas de la mecánica cuántica. Una de ellas es la integral funcional [38] y la otra (inapropiadamente identificada como la versión diferencial de la integral funcional [95]) es el principio de Schwinger [81]. Aunque a nivel formal las dos formulaciones son comparables, existen ciertas razones para pensar que los resultados obtenidos aplicando una formulación o la otra, pueden diferir. La duda principal proviene de que la integral funcional requiere de un proceso de discretización que no está

dos extensiones BRST del operador  $\hat{A}_0$

$$\hat{A} = \hat{A}_0 + [\hat{\Omega}, \hat{\Psi}], \quad \hat{A}' = \hat{A}_0 + [\hat{\Omega}, \hat{\Psi}'] \quad (1.139)$$

y supongamos que  $\hat{\Psi}$  y  $\hat{\Psi}'$  difieren infinitesimalmente. En tal caso

$$\delta\hat{A} = \hat{A}' - \hat{A} = [\hat{\Omega}, \delta\hat{\Psi}] \quad (1.140)$$

donde  $\delta\hat{\Psi} = \hat{\Psi}' - \hat{\Psi}$ . Sin embargo,  $\Psi$  es una funcional de la trayectoria (como los multiplicadores de Lagrange). De ahí la definición del operador  $\mathcal{U}$ .

definido de manera única y que se asocia a los problemas de ordenamiento de factores. Además, la medida en la integral funcional es un objeto complejo que depende de la topología del espacio de trayectorias. Por otra parte, el principio de acción, basado en el formalismo de operadores, permite un control directo sobre los problemas de ordenamiento de factores en el paso de funciones clásicas a sus correspondientes operadores en mecánica cuántica. Por ello hemos considerado conveniente desarrollar las ideas planteadas en las secciones anteriores en el marco del principio de acción de Schwinger. Hay pocos antecedentes sobre el desarrollo del principio de acción para sistemas con constricciones. Para el caso de constricciones de segunda clase puede verse [27]. En el caso de constricciones de primera clase, un análisis covariante detallado, puede verse en [42]. Proponemos usar el principio de acción partiendo de la acción efectiva BRST (1.104), que como ya observamos no es invariante de norma, sino que es invariante bajo la transformación supersimétrica global de BRST. Por tanto esta acción corresponde a un sistema cuya norma está "fija". Esto nos proporciona un marco adecuado para desarrollar el principio de acción para sistemas con constricciones de primera clase. Un antecedente en esta dirección es [80]. En esta sección presentaremos una introducción a los elementos básicos del principio de acción. Posteriormente, en el capítulo 4, formularemos el método BRST-BFV usando el principio de acción.

El principio de acción de Schwinger puede verse como una generalización del principio de Weiss [82] de la mecánica clásica al caso cuántico. El principio de Weiss afirma que ante variaciones arbitrarias de las coordenadas en la acción

$$S = \int_{t'}^{t''} L(\dot{q}, q, t) dt, \quad (1.145)$$

se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange requiriendo

$$\delta S = G(t'') - G(t'), \quad (1.146)$$

donde las funciones  $G$  son términos de frontera. Esto significa que la variación de la acción no depende de la trayectoria que conecta los puntos extremos, basta que cumpla las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange. La forma explícita de los términos de frontera depende de las variables dinámicas que se fijan en los extremos en la acción (1.145). Por ejemplo, si se fijan las coordenadas  $q$  en los extremos  $t''$  y  $t'$ , entonces

$$G(t) = (p\delta q - H\delta t)|_t, \quad (1.147)$$

donde  $H$  es el correspondiente hamiltoniano y la notación es tal que  $p\delta q = p_i\delta q^i$ , sumando sobre todos los grados de libertad del sistema. En los casos donde no se presente confusión usaremos una notación sin índices para no complicar la exposición de las ideas.

A nivel cuántico, el principio de acción de Weiss se reemplaza por el correspondiente principio de acción de Schwinger que afirma que las variaciones arbitrarias de los elementos de matriz del operador de evolución, dados por  $\langle a''|U(t'', t')|b' \rangle \equiv \langle a''t''|b't' \rangle$  están dadas por

$$\delta \langle a''t''|b't' \rangle = i \langle a''t''| \delta \left( \int_{t'}^{t''} L(\dot{q}, \hat{q}, t) dt \right) |b't' \rangle. \quad (1.148)$$

Además, la variación del operador hermitiano de acción  $\hat{S} = \int_{t'}^{t''} L(\dot{q}, \hat{q}, t) dt$  dependerá solamente de operadores evaluados en los extremos, de tal manera que

$$\delta \left( \int_{t'}^{t''} L(\dot{q}, \hat{q}, t) dt \right) = G(\hat{A}'', t'') - G(\hat{B}', t'), \quad (1.149)$$

donde  $\hat{A}''$  denota un conjunto completo de operadores que conmutan al tiempo  $t''$  cuyos valores propios son  $a''$ , y análogamente para los operadores  $\hat{B}'$  en  $t'$ . Dicho de otra manera, la variación del propagador está dada por los elementos de matriz correspondientes a la variación de un solo operador hermitiano: el operador acción.

Una elección conveniente para el lagrangiano cuántico es el lagrangiano de primer orden  $\hat{L} = \frac{1}{2} (\hat{p}\dot{q} + \dot{q}\hat{p}) - H(\hat{q}, \hat{p}, t)$ , donde  $H(\hat{q}, \hat{p}, t)$  es el operador hamiltoniano hermitico construido, como es usual, desde la definición de los momentos  $\hat{p} = \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}}$ . Las ecuaciones de movimiento resultantes son las ecuaciones de Hamilton en versión de operadores cuánticos

$$\dot{\hat{q}} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{p}}, \quad \dot{\hat{p}} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{q}}, \quad (1.150)$$

y la identificación de los generadores (1.147) en los extremos es

$$G(\hat{q}, \hat{p}) = \hat{p}\delta\hat{q} - \hat{H}\delta t \equiv G_{\delta q} + G_{\delta t}, \quad (1.151)$$

donde hemos supuesto que el operador  $\hat{q}$  está fijo en los extremos.

En este punto es necesario especificar el carácter de operador de las variaciones  $\delta\hat{q}$ ,  $\delta\hat{p}$ , que implica los resultados anteriores. Cuando se trata con operadores bosónicos (fermiónicos), llamados operadores de primera (segunda) especie en la notación de Schwinger, las correspondientes variaciones satisfacen las relaciones de conmutación (anticomutación) para elementos pares (impares) en una álgebra de Grassmann.

Considerando una transformación canónica que intercambie el papel de  $\hat{q}$  y  $\hat{p}$  es posible identificar al generador de las transformaciones infinitesimales en  $\hat{p}$  como  $G_{\delta\hat{p}} = -\hat{q}\delta\hat{p}$ . La expresión anterior para los generadores de las transformaciones correspondientes, junto con su interpretación cuántica como generadores de transformaciones unitarias, nos conduce al conmutador general

$$[\hat{A}, \hat{G}_{\delta\hat{p}}] = i\hbar\delta_{\hat{p}}(\hat{A}), \quad (1.152)$$

de donde se deducen las relaciones básicas de conmutación (anticomutación) para las variables del espacio fase, tomando en consideración las propiedades de conmutación (anticomutación) de los parámetros asociados a las transformaciones anteriores.<sup>15</sup> En lo que sigue tomaremos  $\hbar = 1$ .

Desde las ecuaciones (1.148) y (1.149), la expresión final para variaciones

<sup>15</sup>Generalizando (1.152) podemos escribir

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\delta_{\hat{B}}\hat{A}, \quad (1.153)$$

donde

$$\delta_{\hat{B}}\hat{A} = \frac{\widehat{\partial A}}{\partial \hat{q}^i} \delta_{\hat{B}}\hat{q}^i + \frac{\widehat{\partial A}}{\partial \hat{p}_i} \delta_{\hat{B}}\hat{p}_i, \quad (1.154)$$

y

$$\delta_{\hat{B}}\hat{q}^i = [\hat{q}^i, \hat{B}], \quad \delta_{\hat{B}}\hat{p}_i = [\hat{p}_i, \hat{B}]. \quad (1.155)$$

En particular, la expresión cuántica de la estructura simpléctica es

$$[\hat{z}^A, \hat{z}^B] = \widehat{\sigma^{AB}}, \quad (1.156)$$

donde  $\hat{z}^A$  son los operadores asociados a las variables del espacio fase (no necesariamente canónicas). Así, el paréntesis de Dirac en el espacio fase reducido tendrá la expresión cuántica

$$[\hat{z}^r, \hat{z}^s] = \widehat{\sigma^{rs}}, \quad (1.157)$$

donde  $\hat{z}^r$  denota las variables del espacio fase reducido (en general, no canónicas). Estas relaciones son correctas hasta problemas de ordenamiento.

arbitrarias del propagador es entonces,

$$\delta\langle a''t''|b't'\rangle = i\langle a''t''|G(A'',t'') - G(B',t')|b't'\rangle. \quad (1.158)$$

Para usar estas expresiones como una herramienta en la práctica debemos resolver las ecuaciones de movimiento de Heisenberg del sistema en términos de los operadores  $A''$ ,  $B'$  cuyos valores propios están fijos en los puntos extremos. De esta manera podremos obtener los elementos de matriz correspondientes en (1.158), como solución del conjunto de ecuaciones diferenciales parciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q''}\langle q'',t''|q',t'\rangle &= i\langle q'',t''|p(t'')|q',t'\rangle \\ \frac{\partial}{\partial t''}\langle q'',t''|q',t'\rangle &= -i\langle q'',t''|H(t'')|q',t'\rangle \\ \frac{\partial}{\partial q'}\langle q'',t''|q',t'\rangle &= -i\langle q'',t''|p(t')|q',t'\rangle \\ \frac{\partial}{\partial t'}\langle q'',t''|q',t'\rangle &= i\langle q'',t''|H(t')|q',t'\rangle. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones deben ser integradas con alguna condición de frontera adicional que implica la existencia de un conjunto completo de estados en el espacio de Hilbert. Por ejemplo, la condición de normalización

$$\lim_{t'' \rightarrow t'} \langle q'',t''|q',t'\rangle = \delta(q'' - q'). \quad (1.159)$$

En otras palabras, necesitamos escoger un conjunto completo de operadores que conmutan en el espacio de Hilbert para construir los estados físicos y poder especificar los números cuánticos en los puntos extremos, que además de contener toda la información dinámica del sistema, deben ser compatibles con la dinámica. Esto no está garantizado *a priori* en el caso de sistemas con constricciones.

## CAPÍTULO 2

### COMPARACIÓN ENTRE EL MÉTODO DE DIRAC Y EL MÉTODO DE FADDEEV-JACKIW

Recientemente Faddeev y Jackiw [34] propusieron un método alternativo al método de Dirac para analizar sistemas con constricciones. Este método no necesita, en principio, clasificar las constricciones en clases (primera y segunda) ni en generaciones (primarias, secundarias....). A primera vista esto parecería muy sorprendente ya que, como hemos visto, las simetrías de norma de una teoría están relacionadas con las constricciones de primera clase. Sin embargo, mostraremos en este capítulo que el análisis de Faddeev-Jackiw y el de Dirac son equivalentes [43]. De hecho, el primero es un método de reducción y por tanto será equivalente al método de Dirac en alguna elección específica de las condiciones de norma. Analizaremos primero, cómo puede obtenerse el espacio fase reducido en el esquema de Dirac, para después exponer las ideas básicas del método de Faddeev-Jackiw. Posteriormente, compararemos los dos procedimientos y dedicaremos una sección final a las conclusiones.

#### 2.1 REDUCCIÓN DIRECTA EN EL MÉTODO DE DIRAC

Una observación, no muy usada en la práctica, es que es posible implementar fuertemente las constricciones a nivel de la acción extendida (1.31). Pasando por alto el problema de la destrucción o pérdida de simetrías manifiestas que un proceso tal lleva consigo, es interesante analizarlo en detalle, puesto que permite una mejor comprensión geométrica del método de Dirac.

Que las constricciones pueden usarse para reducir el espacio fase puede verse como sigue[58]:

Consideremos el caso en que solamente hay constricciones de segunda

clase. La acción extendida tiene la forma

$$S_E[q^n(t), p_n(t), u^\alpha(t)] = \int (p_n \dot{q}^n - H_c - u^\alpha \chi_\alpha) dt, \quad (2.1)$$

donde las constricciones de segunda clase  $\chi_\alpha = 0$  se implementan usando los multiplicadores de Lagrange como variables dinámicas  $u^\alpha$ . Denotaremos por  $y^r$  las coordenadas del espacio fase reducido. Al implementar las constricciones de segunda clase en la acción (2.1), el término cinético experimentará la transformación

$$p_n \dot{q}^n = a_r(y) \dot{y}^r, \quad (2.2)$$

hasta una derivada total respecto al tiempo. Por otra parte, el hamiltoniano total  $H_c - u^\alpha \chi_\alpha$ , transformará, dando origen a una nueva función que depende del sector reducido, i.e. únicamente de las variables físicas sobre la superficie de restricción. Denotaremos esta función por  $h(y)$ . La acción reducida será

$$S_R[y^r] = \int (a_r(y) \dot{y}^r - h(y)) dt, \quad (2.3)$$

y difiere de la acción extendida (2.1) por un término de borde. El lagrangiano reducido es

$$L_R(y^r, \dot{y}^r) = a_r(y) \dot{y}^r - h(y), \quad (2.4)$$

cuyas ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\left( \frac{\partial a_r}{\partial y^s} - \frac{\partial a_s}{\partial y^r} \right) \dot{y}^s + \frac{\partial h}{\partial y^r} = 0. \quad (2.5)$$

Estas ecuaciones tienen forma hamiltoniana -aunque no canónica- donde la dinámica es generada por el hamiltoniano  $h(y)$  y la estructura simpléctica, es

$$\sigma_{rs} = \frac{\partial a_s}{\partial y^r} - \frac{\partial a_r}{\partial y^s}, \quad (2.6)$$

que define el paréntesis de Poisson en el espacio fase reducido, dado por

$$\{y^r, y^s\} = \sigma^{rs}(y) \quad (2.7)$$

donde  $\sigma^{rs}$  es la inversa de la matriz (2.6). Que esta matriz es invertible se debe a que las constricciones son de segunda clase y que por tanto la acción (2.1) no presenta simetrías de norma y su dinámica está completamente determinada.

No hay funciones arbitrarias en las soluciones de las ecuaciones de movimiento y es siempre posible despejar a las aceleraciones en términos del resto de las coordenadas y las velocidades. Dos funciones arbitrarias, que dependen de las variables del espacio reducido tendrán, consecuentemente, el paréntesis

$$\{F(y), G(y)\} = \frac{\partial F}{\partial y^r} \sigma^{rs} \frac{\partial G}{\partial y^s}. \quad (2.8)$$

Mostraremos a continuación que este paréntesis es el paréntesis de Dirac en el espacio fase reducido. ¿Cómo se relaciona la definición usual de los paréntesis de Dirac (1.45) con el paréntesis definido por (2.7)? Esta pregunta puede resolverse de la siguiente manera. Primero, es necesario observar que los paréntesis de Dirac usuales están definidos en todo el espacio fase. La estructura simpléctica que genera estos paréntesis es

$$\sigma^{*ij} = \sigma^{ij} - \bar{\sigma}^{ij}, \quad (2.9)$$

donde  $\sigma^{ij}$  es la estructura del espacio fase original  $\{z^i, z^j\} = \sigma^{ij}$ ,  $z^i, i = 1 \dots 2N$  son las variables del espacio fase (no necesariamente canónicas) y

$$\bar{\sigma}^{ij} = \sigma^{il} \frac{\partial \chi_\alpha}{\partial z^l} C^{\alpha\beta} \frac{\partial \chi_\beta}{\partial z^n} \sigma^{nj}. \quad (2.10)$$

De esta manera los paréntesis de Dirac (1.45) pueden escribirse como

$$\{A, B\}^* = \frac{\partial A}{\partial z^i} \sigma^{*ij} \frac{\partial B}{\partial z^j}. \quad (2.11)$$

Realicemos ahora una transformación no canónica definida por

$$z^i \rightarrow y^r(z), \chi_\alpha(z), \quad \alpha = 1 \dots s, \quad r = 1 \dots R, \quad (2.12)$$

donde  $R = 2N - s$ ,  $s$  es el número de constricciones de segunda clase y las variables  $y^r$  coinciden con las variables de la acción reducida (2.3)<sup>17</sup>. Supondremos que esta transformación tiene inverso  $z^i(y, \chi) \rightarrow y, \chi$ . A una función

<sup>17</sup>Para realizar la comparación entre el paréntesis de Dirac usual (1.45) y el paréntesis reducido (2.7) es necesario suponer que el proceso de eliminación de variables que conduce a la acción reducida (2.3) es el mismo que se aplicará para reducir el paréntesis de Dirac usual (1.45). Esto conduce a una descripción del espacio fase reducido en términos de las mismas variables, haciendo así posible la comparación.

arbitraria de las variables del espacio fase original  $f(z)$  le corresponderá una función de las nuevas variables definida por  $f(z(y, \chi)) \equiv F(y, \chi)$ , cuya restricción al espacio fase reducido denotaremos por  $F(y, \chi)|_{\chi_\alpha=0} = \tilde{F}(y)$ . El paréntesis de Dirac (2.11), aplicado a dos funciones de las nuevas coordenadas es

$$\{F(y(z), \chi(z)), G(y(z), \chi(z))\}^* = \frac{\partial F}{\partial y^r} \sigma^{rs} \frac{\partial G}{\partial y^s}, \quad (2.13)$$

donde hemos usado

$$\frac{\partial F}{\partial z^i} = \frac{\partial F}{\partial y^r} \frac{\partial y^r}{\partial z^i} + \frac{\partial F}{\partial \chi_\alpha} \frac{\partial \chi_\alpha}{\partial z^i}, \quad (2.14)$$

la propiedad de que el paréntesis de Dirac entre una función arbitraria y una constricción de segunda clase es cero y

$$\sigma^{rs}(z) = \{y^r(z), y^s(z)\}^*. \quad (2.15)$$

Aplicando la transformación no canónica (2.12) a esta matriz, obtenemos una nueva matriz  $\Sigma^{rs}(y, \chi)$ , cuya restricción a la superficie de constricción es  $\tilde{\Sigma}^{rs}(y)$  y define los paréntesis

$$\tilde{\Sigma}^{rs}(y) \equiv \{y^r, y^s\}. \quad (2.16)$$

Nótese que  $\tilde{\Sigma}^{rs}(y)$  es la proyección de  $\sigma_{ij}^*$  sobre la superficie de constricción

$$\tilde{\Sigma}^{rs}(y) = \sigma^{*ij} \frac{\partial z^i}{\partial y^r} \frac{\partial z^j}{\partial y^s}. \quad (2.17)$$

Como la acción reducida (2.3) puede obtenerse a partir de la acción extendida (2.1) mediante la aplicación de la transformación (2.12), los paréntesis (2.16) y (2.7) deben coincidir y por tanto,  $\sigma^{rs}(y) = \tilde{\Sigma}^{rs}(y)$ . Esto implica que  $\sigma_r$  es la estructura simpléctica inducida por el paréntesis de Dirac (2.11) sobre la superficie de constricción.

Estas observaciones pueden usarse para calcular el paréntesis de Dirac en el espacio fase reducido de manera directa: se resuelven las constrictiones de segunda clase en la acción (2.1) y se reconoce el paréntesis de Dirac en el término cinético, usando la definición de la estructura simpléctica, en términos de la 1-forma  $a_r(y)$  (ver (2.6)). Consideremos el siguiente ejemplo [28]:

$$S_E = \int (p_i \dot{q}^i - \frac{1}{2} q^i \dot{q}^i + \lambda^i \chi_i) dt, \quad (2.18)$$

donde  $\chi_i = p_i + \frac{1}{2}B\epsilon_{ij}q^j$ ,  $i, j = 1, 2$ ,

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

y  $B$  una constante. Las constricciones son de segunda clase

$$\{\chi_i, \chi_j\} = B\epsilon_{ij}, \quad (2.20)$$

y los paréntesis de Dirac son

$$\{q^i, p_j\}^* = \frac{1}{2}\delta_j^i, \quad \{q^i, q^j\}^* = \frac{1}{B}\epsilon^{ij}, \quad \{p_i, p_j\}^* = \frac{4}{B}\epsilon_{ij}, \quad (2.21)$$

donde  $\epsilon^{ij}$  es la inversa de (2.19). La correspondiente acción reducida (eliminado  $p_i$ ) es

$$S_R = \int \left( -\frac{1}{2}B\epsilon_{ij}q^j\dot{q}^i - \frac{1}{2}q^i q^i \right) dt, \quad (2.22)$$

que conduce a los paréntesis

$$\{q^i, q^j\} = \frac{1}{B}\epsilon^{ij}, \quad (2.23)$$

usando la definición de la estructura simpléctica (2.6). Este paréntesis coincide con el paréntesis de Dirac sobre el espacio fase reducido (ver (2.21)). Es interesante observar que en coordenadas canónicas este sistema es un oscilador armónico en el espacio fase reducido, con un grado de libertad. Aplicando la transformación canónica (que diagonaliza los paréntesis de Dirac)

$$Q^1 = p_1 + \frac{1}{2}Bq^2, \quad P_1 = \frac{p_2 - \frac{B}{2}q^1}{B}, \quad Q^2 = \frac{p_2 + Bq^1}{B}, \quad P_2 = p_1 + \frac{B}{2}q^2, \quad (2.24)$$

cuyo generador es  $S = Bq^2(P_1 + \frac{1}{2}q^1) + q^1 P_2 + P_1 P_2$ , se obtiene

$$L = P_2 \dot{Q}^2 - \frac{1}{2}(P_2^2 + (Q^2)^2). \quad (2.25)$$

Analizaremos ahora el caso en que todas las constricciones son de primera clase,  $\gamma_a = 0$  e independientes. También en este caso, es posible resolver las constricciones y substituir en la acción. Sin embargo, este procedimiento no es de gran utilidad ya que las ecuaciones de movimiento resultantes sobre

la superficie de constricción han perdido su estructura canónica. La manera usual de sortear esta dificultad es introducir condiciones de norma en la línea de lo expuesto en la sección 1.2, Capítulo 1. En tal caso las constricciones de primera clase, más las condiciones de norma, serán un conjunto de constricciones de segunda clase y la reducción procede via la discusión previa. Por otra parte, las condiciones de norma no-canónicas, no pueden insertarse en la acción de manera directa sin producir pérdida de información dinámica. Tómese, por ejemplo, el caso  $\lambda^a = 0$ . Implementando estas condiciones en la acción, se pierde la información de la superficie de constricción. Para analizar en detalle el proceso de reducción en el caso de constricciones de primera clase, es conveniente introducir algunos conceptos.

Al implementar la reducción de las constricciones de primera clase, la estructura simpléctica original cambia en la forma dada por la ecuación (1.22), que define la nueva estructura simpléctica sobre la superficie de constricción. Puede demostrarse [58], que el rango de la estructura simpléctica proyectada es  $N - M - k$ , donde  $N$  es la dimensión del espacio fase original,  $N - M$  es la dimensión de la superficie de constricción y  $k$  el número de constricciones de primera clase. La singularidad de  $\sigma_{ij}$  implica que, en general, los paréntesis de Poisson no pueden construirse, ya que éstos están determinados por la matriz inversa de la estructura simpléctica. Por esta razón, aunque técnicamente correcto, reducir directamente las constricciones de primera clase conduce a ecuaciones de movimiento no hamiltonianas. Una característica fundamental del método F-J es notar que la información dinámica perdida en este proceso no afecta al sector físico de la teoría.

## 2.2 MÉTODO DE FADDEEV-JACKIW

Comenzaremos revisando las ideas principales del método F-J. Para detalles referimos al lector a [34]. Para ello, consideremos un lagrangiano de primer orden

$$L = a_n(\xi)\dot{\xi}^n - H(\xi), \quad (2.26)$$

cuya estructura simpléctica definida por (2.6) es singular. En caso contrario, el lagrangiano (2.26) no representa un sistema con constricciones. La correspondiente teoría hamiltoniana está generada por el hamiltoniano  $H(\xi)$ , donde las coordenadas del espacio fase  $\xi^n$ , no son canónicas. En el caso en que la 1-forma,  $a_n(\xi)$  de lugar a una estructura simpléctica singular, es

siempre posible efectuar una transformación de Darboux, desde las variables  $\xi^n$ , a unas nuevas variables, parcialmente canónicas  $\xi^n \rightarrow (p_j, q^j, z_A)$ , donde  $z_A$  son funciones de Casimir del paréntesis

$$\{F(q, p, z), G(q, p, z)\} = \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p^i} - \frac{\partial G}{\partial q^i} \frac{\partial F}{\partial p^i}, \quad \{z_A, z_B\} = 0, \quad (2.27)$$

Esta transformación está definida por

$$\sigma'_{kl} = \sigma_{ij}(\xi) \frac{\partial Q^i(\xi)}{\partial \xi^k} \frac{\partial Q^j(\xi)}{\partial \xi^l}, \quad (2.28)$$

de tal manera que la nueva estructura simpléctica tenga la forma

$$\sigma'_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

donde los dos primeros bloques representan a las coordenadas canónicas  $q, p$ , y el tercer bloque representa las coordenadas  $z$ . Qué sea posible resolver este conjunto de ecuaciones, al menos localmente, es el contenido del llamado teorema de Darboux.<sup>18</sup>

Reescribiendo el lagrangiano (2.26) en estas nuevas coordenadas resulta

$$L = p_i \dot{q}^i - H(z, q, p), \quad (2.30)$$

donde  $i < n$ . Nótese que las coordenadas  $z$  no aparecen en el término cinético y consecuentemente la estructura simpléctica nueva tiene la forma (2.29). Las ecuaciones de Euler-Lagrange de este lagrangiano son

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}, \quad \frac{\partial H}{\partial z_A} = 0. \quad (2.31)$$

De la última ecuación podrán despejarse algunas coordenadas  $z_A$  en términos del resto de las variables. En general, no podrán despejarse aquellas variables

<sup>18</sup>El teorema de Darboux asegura que en una variedad diferenciable  $M$  (en este caso una superficie de constricción), equipada con una estructura de Poisson, es siempre posible (localmente) encontrar coordenadas  $P_\alpha, Q^\alpha, z_A$  tales que  $\{Q^\alpha, P_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}$  y  $\{z_A, z_B\} = 0$ . Las coordenadas  $z_A$  son llamadas *funciones Casimir* [78, 64].

que aparezcan linealmente en la función hamiltoniana  $H(z, q, p)$ . Después de eliminar tantas coordenadas  $z_A$  como sea posible, obtendremos el lagrangiano

$$L = p_i \dot{q}^i - h(q, p) - z^l \phi_l(q, p), \quad (2.32)$$

con  $l < A$ , donde las coordenadas  $z^l$  son un subconjunto de las coordenadas originales  $z_A$  y las funciones  $\phi_l$  son las *constricciones verdaderas*, en la terminología de Faddeev y Jackiw.

El siguiente paso consiste en implementar en la función lagrangiana (2.32) las constricciones  $\phi_l = 0$  y reducir el número de grados de libertad. Esto producirá un lagrangiano de la forma (2.26), y el procedimiento comienza de nuevo. El algoritmo termina cuando se obtiene una estructura simpléctica no-singular, (y a partir de ella podremos construir los correspondientes paréntesis de Dirac), o cuando ya no se generen, por este procedimiento, nuevas constricciones.

Nótese que en este método no es necesario recurrir al espacio fase que contiene a la superficie de restricción. Todos los cálculos se realizan siempre sobre la superficie de restricción. Por tanto, este método está basado en el espacio fase reducido, donde se encuentra la información física relevante para la descripción dinámica. No es necesario tampoco recurrir a la clasificación de Dirac para las constricciones. Además, las constricciones primarias nunca aparecen, pues el procedimiento es puramente lagrangiano. No obstante, como mostraremos en las siguientes secciones, la clasificación de las constricciones en primera y segunda clase permanece codificada, en cierta medida, en la información dinámica de las variables  $z_A$ .

### 2.3 COMPARACIÓN CON EL MÉTODO DE DIRAC

De manera distinta al método de Dirac, el de F-J es un método de reducción al espacio de las variables físicas. Al menos formalmente, este procedimiento parece más simple. Hemos considerado apropiado comparar los dos procedimientos, para ver en que difieren o coinciden, en su caso, y cuales son las ventajas de uno u otro. Mientras que el método de Dirac permite analizar los sistemas con constricciones conservando todas las variables durante el proceso, -manteniendo simetrías, que de otra manera, serían no manifestadas o en el caso de simetrías de norma importantes se perderían irremediablemente- el método F-J tiene como objetivo, a corto plazo, encontrar las variables del espacio físico.

Como hemos visto, el método de Dirac permite la posibilidad de reducir variables directamente. De hecho, la adopción del paréntesis de Dirac (el paréntesis asociado a la estructura simpléctica definida en la superficie de constricción de segunda clase, como la proyección de la estructura simpléctica del espacio fase, sobre esta superficie de constricción) permite eliminar tantas variables como constricciones de segunda clase. Hemos visto también, que esta reducción es posible en el caso en el que algunas constricciones de primera clase están presentes, aunque la estructura simpléctica proyectada sobre la superficie de constricción, resulte degenerada. Esto implica que algunas variables dinámicas y sus ecuaciones de movimiento asociadas, pueden desaparecer.

En el método F-J, el proceso de reducción permite la obtención de las ecuaciones de movimiento para el conjunto de variables físicas, desechando en cada paso información irrelevante para la dinámica. Las variables que en el procedimiento de Dirac están relacionadas por las constricciones, o que serán grados de libertad de norma, son rápidamente eliminadas en el método F-J. Este hecho explica la eficiencia de este método: no produce información superflua que va a ser descartada posteriormente. En el método de Dirac, esta información superflua se mantiene hasta el final. Como ejemplo consideremos el hamiltoniano total

$$H_T = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + q^1 p_3 + q^2 q^3 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2, \quad (2.33)$$

al que aplicaremos, primero, el método de Dirac. Las constricciones primarias son  $p_1 \approx 0$  y  $p_2 \approx 0$ . Las condiciones de consistencia aplicadas a estas constricciones producen las constricciones secundarias  $p_3 \approx 0$  y  $q^3 \approx 0$ . Una nueva estabilización conduce a las constricciones terciarias  $q^2 \approx 0$  y  $q^1 \approx 0$ . Por último, las condiciones de consistencia, sobre estas constricciones terciarias, permite despejar los multiplicadores de Lagrange,  $\lambda_1 = -p_1$  y  $\lambda_2 = -p_2$ . Al final obtenemos un sistema con constricciones de segunda clase cuyo número de grados de libertad físicos es cero.

El método de F-J, parte del correspondiente lagrangiano de primer orden

$$L = \dot{q}^i p_i - H_T, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.34)$$

Implementando las constricciones primarias se obtiene el lagrangiano

$$L' = \dot{q}^3 p_3 - q^1 p_3 - q^2 q^3, \quad (2.35)$$

donde  $q^1$  y  $q^2$  juegan el papel de las variables  $z_A$ , son funciones de Casimir del paréntesis de Dirac

$$\{q^3, p_3\} = 1, \quad (2.36)$$

en el espacio fase reducido. De las ecuaciones de Euler-Lagrange del lagrangiano (2.35) no es posible despejar  $q^1$  ni  $q^2$  en términos del resto de las variables, por tanto, estas variables juegan el papel de multiplicadores de Lagrange. Las constricciones verdaderas serán  $p_3 = 0$  y  $q_3 = 0$ , que corresponden a las constricciones secundarias en el algoritmo de Dirac. El siguiente paso es implementar estas constricciones en el lagrangiano (2.35). El resultado es cero y el sistema no tiene grados de libertad físicos, coincidiendo con el obtenido usando el procedimiento de Dirac. ¿Qué sucedió con las constricciones terciarias y con el despeje de los multiplicadores de Lagrange? Ciertamente las constricciones terciarias son, en este caso, irrelevantes para la descripción del espacio físico. Diríamos, no son observables, en el lenguaje de Dirac. Desde este punto de vista, tampoco es importante despejar los multiplicadores de Lagrange en términos del resto de las variables. Como las constricciones primarias han desaparecido ¿en qué lugar se encuentra contenida la información de que estas constricciones son irrelevantes para la dinámica? Uno de los objetivos de este Capítulo es responder a esta pregunta.

Como se deduce del ejemplo anterior, el método de F-J es muy eficiente. Obviamente esta eficiencia pagará un precio. Aparte de las dificultades técnicas involucradas en la transformación de Darboux (2.28), el proceso de reducción indiscriminada de variables conlleva las dificultades propias de los procesos de reducción [71] en general: la pérdida de covariancia y en algunos casos de las propiedades de localidad en teoría de campo. Es importante mencionar que el método de cuantización BRST se encuentra precisamente "en la otra orilla" de estos procedimientos "reduccionistas". En cualquier versión del formalismo BRST el conjunto de variables, en lugar de reducirse ( y así perder localidad, covariancia ...etc.) se extiende agregando nuevas variables (fantasmas, antifantasmas...).

Más allá de los problemas de covariancia o localidad está el importante fenómeno de las anomalías de norma al pasar a la teoría cuántica, i.e., simetrías clásicas, que debido a procedimientos de regularización, necesarios en el programa de cuantización, no devienen simetrías cuánticas, (ver sección 1.3). El procedimiento de reducir la teoría clásica y luego cuantizar

pasará por alto este fenómeno, dando lugar a inequivalencias entre las teorías cuánticas resultantes.

El análisis covariante del espacio fase reducido (conocido como procedimiento simpléctico covariante) fue propuesto inicialmente en [88]. Para un exámen comparativo de este procedimiento con la reducción hamiltoniana y los paréntesis de Peierls veáse [13]. La relación entre la formulación lagrangiana de primer orden y los paréntesis de Dirac fue estudiada en [63]. Por otra parte los resultados obtenidos usando el método F-J, han sido comparados con los correspondientes resultados usando el método de Dirac en casos simples [73], (estructura simpléctica constante), sin probar la equivalencia general entre los dos procedimientos. Un análisis desde el punto de vista del llamado procedimiento de reducción simpléctico, ha sido realizado por los autores de [11], donde no es necesario aplicar de manera directa la transformación de Draboux (2.28), implicada en el procedimiento original de F-J. La idea general es obtener en cada paso del algoritmo los vectores propios nulos de la estructura simpléctica y añadir los multiplicadores de lagrange resultantes como variables dinámicas. Algunas aplicaciones del método F-J pueden encontrarse en [26, 10, 79, 92, 93] y su extensión al caso de constricciones fermiónicas para el caso de estructuras simplécticas constantes en [50]. Recientemente los autores de [77] compararon el programa de cuantización de Dirac (imponiendo condiciones de norma) consistente en promover los paréntesis de Dirac a los correspondientes conmutadores con el obtenido directamente al aplicar el procedimiento de F-J.

El propósito de esta sección es analizar y explicar en detalle la equivalencia del procedimiento de Dirac y el de F-J. Esta equivalencia no es trivial puesto que no es claro como el método F-J descarta información que en el método de Dirac, no parece, a primera vista, relacionada con grados de libertad de norma. No es claro, cómo el método F-J selecciona los grados de libertad físicos descartando cualquier variable adicional en cada paso del algoritmo. Veremos también que aunque la clasificación de las constricciones en primera clase y segunda clase no es necesaria en el método F-J, ésta permanece ahí y es posible seguir el rastro, al menos parcialmente, de la clasificación estandar de Dirac.

Para realizar la comparación es conveniente usar la versión del formalismo de Dirac propuesta en [49] conocido como formalismo presimpléctico. En esta versión, en cada paso del algoritmo se obtiene una nueva forma simpléctica (los paréntesis de Dirac) y algunas constricciones de primera clase, i.e., se

aplican las condiciones de consistencia a las constricciones de segunda clase, obteniendo algunos multiplicadores de Lagrange como función del resto de las coordenadas. Posteriormente, estas constricciones se eliminan construyendo los paréntesis de Dirac. Las condiciones de consistencia aplicadas a las constricciones de primera clase resultan en la potencial generación de nuevas constricciones. El algoritmo termina cuando no surgen nuevas constricciones. Al final se obtiene una teoría de norma en un espacio fase parcialmente reducido (todas las constricciones de segunda clase son fuertemente cero) cuya estructura simpléctica es el paréntesis de Dirac. La reducción final se obtiene imponiendo tantas condiciones de norma como constricciones de primera clase se obtengan.

En el caso del método F-J, en cada paso del algoritmo implementamos las constricciones en el lagrangiano y diagonalizamos (por medio de una transformación de Darboux) la estructura simpléctica resultante. Como resultado obtenemos nuevas constricciones, que via el proceso de reducción dan lugar a una nueva estructura simpléctica, que puede ser degenerada, o no degenerada. El procedimiento continua hasta que se obtiene una estructura simpléctica no-degenerada, que da lugar a los paréntesis de Dirac en el espacio fase reducido. Es conveniente saber que este algoritmo termina cuando en un estadio todas las constricciones son de segunda clase, (y su reducción construye los paréntesis de Dirac en el espacio fase reducido) o todas son de primera clase y su paréntesis de Poisson con el hamiltoniano son cero.

Para comparar los dos procedimientos trabajaremos en coordenadas que permitan una *representación canónica de la superficie de restricción*. En estas coordenadas los paréntesis de Dirac son diagonales. Supondremos que todas las constricciones satisfacen las condiciones de regularidad, i.e., su gradiente sobre la superficie de restricción es diferente de cero. Esta suposición es crucial, ya que sin ella los resultados obtenidos con un método serán en general, distintos de los correspondientes resultados obtenidos con el otro.

### 2.3.1 REPRESENTACIÓN CANÓNICA DE LA SUPERFICIE DE CONSTRUCCIÓN

Supongamos una superficie de restricción, en el espacio fase  $(q^i, p_i)$ , definida por las constricciones,  $\gamma_\alpha \approx 0$  de primera clase y  $\chi_\alpha \approx 0$  de segunda clase, conjunto que denotaremos por  $\Gamma = \{\phi; \approx 0\}$ . Queremos plantear la transformación de coordenadas canónica, con la propiedad de que las nuevas coor-

denadas  $Q^i, P_i$ , sean tales que la superficie de restricción  $\Gamma$ , sea localmente equivalente a la superficie  $\Gamma_C = \{P_\alpha = 0, Q^\alpha = 0, P_n = 0\}$ . El número de pares canónicos  $(P_\alpha, Q^\alpha)$ , restringidos a anularse es igual a la mitad del número de restricciones de segunda clase. El número de momentos  $P_\alpha$ , será igual al número de restricciones de primera clase. Que siempre es posible realizar esta transformación es el contenido del teorema de Darboux relativo lineal.<sup>19</sup>

Una manera de justificar la construcción de esta transformación canónica es la siguiente. Primero, es necesario redefinir la superficie de restricción  $\Gamma$  reemplazándola por una representación *abeliana* equivalente

$$\bar{\phi}_j = M_{jk}(p_n, q^n)\phi_k, \quad \det M_{jk} \neq 0, \quad (2.37)$$

de tal manera que  $\{\bar{\gamma}_\alpha, \bar{\gamma}_\beta\} = 0$  y  $\{\bar{\chi}^\alpha, \bar{\chi}^\beta\} = \delta_{\beta^\alpha}$ , donde  $\bar{\chi}^\alpha$  se escogerán como las nuevas coordenadas y  $\bar{\chi}_\beta$  como sus nuevos momentos asociados. Por tanto, aquí los índices  $\alpha, \beta$  corren desde uno hasta la mitad del número total de restricciones de segunda clase. El siguiente paso es construir la transformación canónica. Definimos las nuevas variables  $P_\alpha = \bar{\gamma}_\alpha(q, p)$ ,  $Q^\alpha = \bar{\chi}^\alpha(q, p)$  y  $P_\beta = \bar{\chi}_\beta(q, p)$ . La función generadora  $S(q^i, P_\alpha, P_r, P_\beta)$  satisface las siguientes ecuaciones

$$P_\alpha = \bar{\gamma}_\alpha(q^i, \frac{\partial S}{\partial q^i}), \quad P_\beta = \bar{\chi}_\beta(q^i, \frac{\partial S}{\partial q^i}), \quad (2.38)$$

y la condición de consistencia

$$Q^\alpha = \bar{\chi}^\alpha(q^i, \frac{\partial S}{\partial q^i}) = -\frac{\partial S}{\partial P_\alpha}. \quad (2.39)$$

Estas ecuaciones deben resolverse en términos de  $R$  constantes de integración, denotadas por  $P_r$  que corresponden a las variables del espacio fase reducido. El resto de las variables se obtienen a partir de

$$Q^\alpha = -\frac{\partial S}{\partial P_\alpha}, \quad Q^r = -\frac{\partial S}{\partial P_r}, \quad p_i = \frac{\partial S(q^i, P_i)}{\partial q^i}. \quad (2.40)$$

<sup>19</sup>Ver V.I. Arnol'd and A.B. Givental', Symplectic Geometry, en Encyclopaedia of Mathematical Sciences Vol. 4, Springer-Verlag 1990. De esta referencia citamos el llamado "Teorema de Darboux relativo lineal": Una variedad simpléctica de rango  $2r$  y dimensión  $2r+k$  está dada en coordenadas de Darboux apropiadas por las ecuaciones  $q_{r+k+1} = \dots q_n = 0$  y  $p_{r+1} = \dots p_n = 0$ .

Si la función  $S(q^i, P_i)$  existe (y esto siempre es cierto localmente) la transformación

$$(q^i, p_i) \rightarrow (Q^r, P_r, Q^\alpha, P_\alpha, Q^\sigma, P_\sigma) \quad (2.41)$$

será canónica y la superficie de restricción será ahora  $\bar{\Gamma} = \{P_\alpha = 0, Q^\sigma = 0, P_\sigma = 0\}$ . En tal caso tendremos una *representación canónica de la superficie de restricción*.<sup>20</sup> Nótese que el hecho de que las restricciones cumplan las condiciones de regularidad es crucial para que la transformación canónica exista.

## 2.4 EQUIVALENCIA DEL MÉTODO DE DIRAC'S CON EL MÉTODO DE FADDEEV-JACKIW

Tomaremos como punto de partida el hamiltoniano canónico  $H_c(q, p)$  y el conjunto de restricciones primarias  $\phi_\mu = 0$ . Podemos ahora construir el lagrangiano de primer orden<sup>21</sup>

$$L = p_i \dot{q}^i - H_c(q, p) - \lambda^\mu \phi_\mu. \quad (2.42)$$

Los multiplicadores de Lagrange son  $\lambda^\mu$ , que tomaremos como funciones arbitrarias del tiempo -hasta que algunos de ellos queden determinados por el algoritmo de consistencia-. Las ecuaciones de movimiento para  $L$  conducen a las ecuaciones usuales de Hamilton-Dirac para sistemas con restricciones.

### 2.4.1 ANÁLISIS F-J

El objetivo de esta sección es reescribir el método F-J usando como punto de partida el lagrangiano de primer orden (2.42), con el objeto de adaptarlo a una comparación transparente con el método de Dirac.

Como hemos visto, en el método F-J se eliminan tantas variables como restricciones  $\phi_\mu$  -que ahora son holonómicas- simplemente resolviendo e

<sup>20</sup>Es interesante notar que el formalismo BRST en el espacio fase extendido (incluyendo fantasmas, antifantasmas...) permite encontrar la transformación canónica que relaciona dos diferentes representaciones de la superficie de restricción que difieren infinitesimalmente. Este hecho está en la base del resultado que asegura que la carga BRST es única hasta una transformación canónica en el espacio fase extendido. Ver sección 1.3

<sup>21</sup>Este lagrangiano de primer orden siempre puede construirse, pero no es un requisito para aplicar el método de F-J. Si se tiene un lagrangiano de primer orden singular no es necesario construir las restricciones primarias para aplicar F-J.

insertando estas constricciones en el lagrangiano (2.42). Si llamamos  $x^*$  el conjunto de variables que restan después de la reducción, el lagrangiano reducido tomara la forma,<sup>22</sup>

$$L' = a_s(x)\dot{x}^s - H(x), \quad (2.43)$$

para algunas funciones  $a_s$  y  $H$ . En este punto puede aplicarse una transformación de Darboux,

$$x^* \longrightarrow Q^r, P_r, Z_a \quad (2.44)$$

tal que  $L'$  regrese a la forma canónica (2.42),

$$L' = P_r \dot{Q}^r - H'(Q^r, P_r, Z_a) \quad (2.45)$$

Las variables,  $Z_a$ , no tienen contraparte canónica. Esto refleja el hecho de que la superficie de constricción primaria tiene asociada una estructura pre-simpléctica y no una estructura simpléctica no degenerada. Estas variables  $Z_a$  juegan el papel de variables auxiliares. De hecho usando sus propias ecuaciones de movimiento algunas de ellas pueden eliminarse (las que no pueden eliminarse juegan el papel de multiplicadores de Lagrange y por tanto pueden considerarse también como variables auxiliares, como veremos a continuación). Denotaremos por  $Z_{a_1}$  al máximo número de este tipo de variables que pueden ser eliminadas y por  $Z_{a_2}$  al resto. En otras palabras, las ecuaciones de movimiento de las variables  $Z_{a_1}$ ,

$$\frac{\partial H'}{\partial Z_{a_1}} = 0, \quad (2.46)$$

permiten despejar a las variables  $Z_{a_1}$  en términos del resto de las variables,

$$Z_{a_1} = f_{a_1}(Q^r, P_r, Z_{a_2}), \quad (2.47)$$

junto con algunas otras posibles relaciones que no contienen a las variables del tipo  $Z_{a_1}$ ,

$$f_{a_2}(Q^r, P_r) = 0. \quad (2.48)$$

Aquí  $a_2$  denota el número máximo de relaciones independientes del tipo (2.48).

<sup>22</sup>Nótese que el tipo de índice o subíndice utilizado tiene información sobre el tipo de variable y el rango de valores que el índice o subíndice puede tomar.

Ahora procedemos a una nueva reducción: eliminamos las variables del tipo  $Z_{a_1}$ , sustituyendo (2.47) en (2.45). De este modo obtendremos

$$L_R = P_r \dot{Q}^r - H''(Q^r, P_r, Z_{a_2}). \quad (2.49)$$

Pero ahora la dependencia de  $H''$  con respecto a las variables  $Z_{a_2}$  no podrá ser más que lineal -por construcción- ya que de otra manera existirán variables del tipo  $Z_{a_2}$  que podrían ser eliminadas por el procedimiento anterior, en flagrante contradicción con el hecho de que hemos escogido el número máximo de variables que pueden ser eliminadas, por tanto,

$$L_R = P_r \dot{Q}^r - H_R(Q^r, P_r) - Z_{a_2} f_{a_2}(Q^r, P_r). \quad (2.50)$$

Aquí  $f_{a_2}$  es una representación equivalente de las constricciones definidas por (2.48) y hemos obtenido un lagrangiano reducido, en un espacio fase reducido que tiene la misma forma que (2.42). Esto finaliza el primer paso en el algoritmo del método F-J. Las variables  $Z_{a_2}$  juegan, desde ahora, el papel de multiplicadores de Lagrange. Ahora el procedimiento se repite nuevamente hasta que no aparezcan más variables del tipo  $Z$  en el formalismo. Las variables restantes serán las variables físicas asociadas con los "grados de libertad verdaderos" del sistema en el espacio fase reducido.

Ahora estamos listos para analizar el procedimiento de reducción, adaptado para una comparación transparente con el método de Dirac. Regresemos a nuestro lagrangiano original (2.42). Las constricciones  $\phi_\mu = 0$  pueden clasificarse en primera y segunda clase. Es entonces posible cambiar a un conjunto equivalente de constricciones: la representación canónica de la superficie de constricción.

Redefiniendo los multiplicadores de Lagrange  $\eta^\mu = M^{-1\mu}_\nu \lambda^\nu$  podemos escribir el lagrangiano original en términos de las nuevas variables como,

$$L = P_i \dot{Q}^i - \bar{H}_c(Q^i, P_i) - \eta^a P_a - \eta^l P_l - \bar{\eta}^j Q^j, \quad (2.51)$$

donde hemos descartado una derivada total  $\dot{F}(Q, P)$  que proviene del término  $p_i \dot{q}^i = P_i \dot{Q}^i + \dot{F}(Q, P)$ . La acción inducida en el espacio fase reducido difiere débilmente de la acción en todo el espacio fase por un término de borde que es precisamente  $F(Q, P)$  evaluado en los puntos extremos que están fijos en el principio variacional. Este punto requiere atención especial por lo que le

dedicaremos una sección aparte en el Capítulo 5.<sup>23</sup> Es importante notar que este término puede no ser invariante bajo las transformaciones de norma generadas por las constricciones de primera clase [58]. Para los problemas que pueden aparecer con la consistencia entre términos de frontera y las condiciones de norma al nivel del principio variacional veáse [59] y el Capítulo 5.

Con esta representación canónica de la superficie de constricción, el método F-J puede reconstruirse como sigue: Implementando las constricciones  $P_a = 0$ ,  $Q^a = 0$ ,  $P_\alpha = 0$ , en (2.51) obtenemos

$$L' = P_r \dot{Q}^r - H'(Q^r, P_r, Q^a) \quad (2.52)$$

donde  $H'(Q^r, P_r, Q^a) = \bar{H}_c(Q^r, P_r, Q^a, P_a = 0, Q^l = 0, P_l = 0)$ . De esta manera obtenemos directamente (2.45) y el método continua como antes. Es importante notar que aquí hemos obtenido otra información: las variables  $Z_a$  corresponden a las variables  $Q^a$ , que son las variables canónicas conjugadas a las constricciones de primera clase  $P_a$ .

Nótese también que los lagrangianos (2.52) y (2.45) coinciden. Este hecho puede explicarse como sigue: La transformación de Darboux (2.44), esencialmente no canónica, aparece aquí como una transformación canónica en un espacio más grande —el espacio fase completo en el que la superficie de constricción está inmersa—. Esta no es más que una particular instancia de como el procedimiento de añadir nuevas variables —en este caso las variables exteriores a la superficie de constricción, que son parte de las variables del espacio fase— puede generar simetrías. En este caso una transformación no-canónica se convierte en una transformación canónica. Extendiendo la transformación de Darboux, a todo el espacio fase, añadiendo variables proporcionales a las constricciones  $P_a, Q^a, P_\beta$ , construimos una transformación canónica que coincide con la transformación de Darboux sobre la superficie de constricción. Más adelante veremos un ejemplo.

<sup>23</sup>Añadir derivadas totales no cambia el contenido dinámico de la teoría, pues las ecuaciones de movimiento son exactamente las mismas. Sin embargo, es importante notar que el término derivada total puede contener información dinámica como de hecho sucede para los sistemas invariantes bajo reparametrizaciones. Además hay que ser muy cuidadoso cuando se imponen condiciones de norma puesto que en ese caso un término como este puede hacer accesible una condición de norma que no lo era o puede volver inaccesible una condición de norma que era accesible. Para detalles ver [59].

## 2.4.2 ANÁLISIS DE DIRAC

Consideremos ahora el método de Dirac. Usando el cambio de base de las constricciones y la transformación canónica (2.41), podemos ahora desarrollar el algoritmo de Dirac. Comenzaremos desde el hamiltoniano canónico  $\bar{H}_c(Q^i, P_i)$  y las constricciones  $P_a = 0$ ,  $Q^a = 0$ ,  $P_a = 0$ . El hamiltoniano de Dirac inicial es

$$\bar{H}_c(Q^i, P_i) + \eta^a P_a + \eta^\alpha P_\alpha + \bar{\eta}^\alpha Q^\alpha. \quad (2.53)$$

Aplicando el algoritmo de estabilización a las constricciones de segunda clase  $Q^\alpha$ ,  $P_\alpha$  determinamos  $\eta^\alpha = 0$ ,  $\bar{\eta}^\alpha = 0$ . Implementado ahora, de manera trivial, los paréntesis de Dirac, (coinciden con los de Poisson en la representación canónica) eliminamos todas las constricciones de segunda clase. El nuevo hamiltoniano de Dirac en este espacio fase parcialmente reducido —para las variables  $Q^r$ ,  $P_r$ ,  $Q^a$ ,  $P_a$ —, es

$$H'(Q^r, P_r, Q_a) + \eta^a P_a, \quad (2.54)$$

donde  $H'(Q^r, P_r, Q_a) = \bar{H}_c(Q^r, P_r, Q^a, P_a = 0, Q^l = 0, P_l = 0)$ . Podemos imponer  $P_a = 0$  dentro del hamiltoniano canónico ya que este hamiltoniano está determinado de manera única sólo sobre la superficie de restricción y puede extenderse de manera arbitraria fuera de esta superficie. Consideremos ahora el algoritmo de estabilización para las constricciones de primera clase  $P_a$ . Obtenemos así las constricciones secundarias

$$\dot{P}_a = \{P_a, H'\} = -\frac{\partial H'}{\partial Q^a} = 0, \quad (2.55)$$

que no son otra cosa que (2.46). Podemos dividir, como hemos hecho anteriormente, estas constricciones secundarias entre aquellas que permiten la eliminación de las variables  $Q^a$  y el resto. Usando la misma notación  $a = (a_1, a_2)$ , y teniendo (2.46) y (2.47) en mente, (2.55) puede escribirse como

$$Q^{a_1} - f_{a_1}(Q^r, P_r, Q^{a_2}) = 0, \quad f_{a_2}(Q^r, P_r) = 0. \quad (2.56)$$

Ahora procedamos al segundo paso del método de Dirac. Es bien conocido que en esta formulación del algoritmo de Dirac [49] cada paso consta de la posible determinación de algunos multiplicadores de Lagrange y la posible generación de nuevas constricciones. En nuestro caso puede verse de inmediato que la estabilización del primer conjunto de constricciones secundarias

en (2.56),  $Q^{a_1} - f_{a_1}(Q^r, P_r, Q^{a_2}) = 0$ , permite determinar los multiplicadores  $\eta_{a_1}$ , mientras que la estabilización del segundo conjunto,  $f_{a_2}(Q^r, P_r) = 0$ , conduce a la potencial posibilidad de que nuevas constricciones se generen -constricciones terciarias-.

En el lenguaje de Dirac, las constricciones  $Q^{a_1} - f_{a_1}(Q^r, P_r, Q^{a_2}) = 0$  inducen el cambio de estatus de parte de las, hasta ahora constricciones primarias de primera clase,  $P_a = 0$ , a constricciones de segunda clase. Más específicamente,  $P_{a_1} = 0$  son las constricciones que ahora serán de segunda clase. Con este nuevo conjunto de constricciones,  $P_{a_1} = 0$ ,  $Q^{a_1} - f_{a_1}(Q^r, P_r, Q^{a_2}) = 0$ , podemos construir el correspondiente paréntesis de Dirac y eliminar las variables canónicas  $P_{a_1}$ ,  $Q^{a_1}$ . Obtenemos ahora un nuevo hamiltoniano reducido

$$H''(Q^r, P_r, Q^{a_2}) + \eta^{a_2} P_{a_2}, \quad (2.57)$$

en el espacio fase definido por las variables canónicas  $Q^r$ ,  $P_r$ ,  $Q^{a_2}$ ,  $P_{a_2}$ .  $H''$  es  $H'$  con la sustitución de  $Q^{a_1}$  usando (2.56). El argumento desarrollado anteriormente nos dice que la dependencia de  $H''$  con respecto a  $Q^{a_2}$  es a lo más lineal. El hamiltoniano de Dirac es, por tanto,

$$H_R(Q^r, P_r) + Q^{a_2} f_{a_2}(Q^r, P_r) + \eta^{a_2} P_{a_2}, \quad (2.58)$$

Nótese que el último sumando tiene efecto solamente en las ecuaciones de movimiento para las variables  $Q^{a_2}$ , que devienen, desde ahora, funciones arbitrarias:

$$\dot{Q}^{a_2} = \eta^{a_2}, \quad (2.59)$$

Este hecho peculiar permite una reducción más, que usualmente no se lleva al cabo en el método de Dirac: podemos eliminar el último sumando en (2.58), reinterpretar  $Q^{a_2}$  como nuevos multiplicadores de Lagrange y reducir el paréntesis canónico a las variables  $Q^r$  y  $P_r$ . La dinámica para este conjunto reducido de variables, permanecerá sin cambios. De este modo, obtenemos una dinámica descrita por

$$H_R(Q^r, P_r) + Q^{a_2} f_{a_2}(Q^r, P_r), \quad (2.60)$$

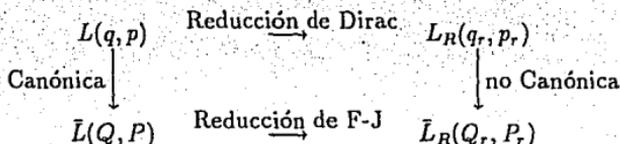
donde  $Q^{a_2}$  juegan el papel de multiplicadores de Lagrange. Hemos llegado al mismo resultado obtenido anteriormente, después del primer paso en la aplicación del método F-J, (2.50).

Para resumir, un paso del método F-J corresponde a un paso y medio del correspondiente método de Dirac, más la adopción de los paréntesis de Dirac después de cada paso y la conversión de los multiplicadores de Lagrange restantes (aquí  $\eta^{a2}$ ) por el conjunto de variables (aquí  $Q^{a2}$ ) que son de hecho sus primitivas, de acuerdo a (2.59). Aquí se ve con toda claridad cuales son las variables que el método de F-J está descartando en cada paso: las constricciones de primera y segunda clase y las variables canónicas conjugadas a las constricciones de primera clase  $Q^a$ . Estas, que no son invariantes de norma desaparecerán en el paso siguiente dando origen a otras nuevas variables con estas características.

## 2.5 EJEMPLO

En ejemplos específicos puede ser difícil comparar los resultados obtenidos por los dos procedimientos expuestos, el de Dirac y el de F-J. Puede suceder que el lagrangiano reducido, obtenido usando el método de Dirac, coincida exactamente con el correspondiente lagrangiano obtenido usando F-J -como en el caso en que tenemos sólo constricciones primarias de segunda clase-. Otra posible instancia es que los lagrangianos resultantes estén relacionados por una transformación canónica -como en el caso en que se escoge una condición de norma en el método de Dirac diferente de aquella implícita en el método F-J, i.e, imponer como condición de norma todos los grados de libertad de norma iguales a cero-. La situación puede ser un tanto más complicada en el caso en que los dos lagrangianos reducidos no puedan relacionarse por una transformación canónica. En tal caso la transformación que los relaciona será no-canónica -como sucede cuando en algún paso del procedimiento F-J el conjunto de constricciones (2.48) es vacío-. Esta situación puede aparecer ya que al implementar las constricciones (2.47) usando el método F-J, no se altera la estructura simpléctica del lagrangiano (2.45), mientras que usando el formalismo de Dirac las constricciones de segunda clase originarán un paréntesis de Dirac que, en general, no es diagonal. En cualquier caso, es siempre posible recurrir a la prueba de equivalencia entre los dos métodos, expuesta en la sección anterior, para analizar la forma explícita de la transformación que conecta los dos lagrangianos reducidos. La situación general

puede ilustrarse con el siguiente diagrama



donde la transformación no-canónica, puede calcularse explícitamente, como la restricción a la superficie de constricción de la transformación canónica que relaciona los dos lagrangianos en el espacio fase completo. Nótese que esta transformación no-canónica surge como consecuencia de que en el proceso de reducción, usando F-J, es necesario realizar una transformación de Darboux en cada paso del algoritmo.

El objeto de esta sección es presentar un ejemplo que permita ilustrar las ideas expuestas en los párrafos anteriores.

Consideremos el sistema dinámico representado por el siguiente lagrangiano de primer orden[83].

$$L = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 - H_c(q, p) - \lambda \phi_1 \quad (2.61)$$

donde

$$H_c = \frac{1}{2}(p_1 - q_2)^2 - \frac{\beta}{2}(q_1 - q_2)^2, \quad \phi = p_2 - (1 - \alpha)q_1, \quad (2.62)$$

con  $\alpha \neq \beta$ . Al aplicar la condición de consistencia a la constricción  $\phi$ , resulta una constricción secundaria

$$\phi_2 = \alpha(p_1 - q_2) - \beta(q_1 - q_2) = 0, \quad (2.63)$$

que ante una nueva estabilización produce

$$\alpha\beta(q_1 - q_2) - \beta(p_1 - q_2) - \gamma\lambda = 0, \quad (2.64)$$

donde  $\gamma \equiv \alpha^2 - \beta$ . Es fácil mostrar que las constricciones son de segunda clase, si  $\gamma \neq 0$  y de primera clase cuando  $\gamma = 0$ . En el primer caso, ( $\gamma \neq 0$ ), la implementación de las constricciones produce el lagrangiano reducido

$$L_R = \frac{\gamma}{\alpha - \beta} \dot{q}_1 p_1 + \frac{1}{2} \frac{\beta\gamma}{(\alpha - \beta)^2} (p_1 - q_1)^2. \quad (2.65)$$

Otras reducciones equivalentes pueden obtenerse. Aquí hemos escogido eliminar  $q_2, p_2$  de las constricciones (2.63) y (2.64).

Los correspondientes paréntesis de Dirac son

$$\{q_1, q_2\}_D = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad \{q_1, p_1\}_D = \frac{\alpha - \beta}{\gamma}, \quad \{q_2, p_2\}_D = \frac{\alpha(1 - \alpha)}{\gamma}, \quad (2.66)$$

$$\{p_1, p_2\}_D = \frac{(1 - \alpha)(\beta - \alpha)}{\gamma}, \quad \{q_1, p_2\}_D = 0, \quad \{q_2, p_1\}_D = -\frac{\beta}{\gamma}. \quad (2.67)$$

Nótese que los paréntesis de Dirac en el espacio reducido pueden leerse directamente del lagrangiano reducido (2.65).

En el segundo caso ( $\gamma = 0$ ) el procedimiento de reducción estandar puede realizarse imponiendo condiciones de norma. Las condiciones de norma naturales serían  $q_2 = 0, p_1 = 0$  y el lagrangiano reducido es cero, como esperabamos, pues el sistema no tiene grados de libertad.

Condiciones de norma accesibles de la forma  $q_1 = \chi_1(q, p), q_2 = \chi_2(q, p)$ , donde  $\chi_1$  no depende de  $q_1$  y  $\chi_2$  no depende de  $q_2$ , que suponemos fijan la norma sin ambigüedades conducen, en general, a lagrangianos reducidos que pueden escribirse como la derivada total respecto al tiempo de alguna función de las coordenadas y los momentos. Este hecho significa que estas dos distintas maneras de fijar la norma dan origen a diferentes lagrangianos que están relacionados por una transformación canónica.

Pasemos ahora a analizar el problema desde la perspectiva del método F-J. En el caso  $\gamma \neq 0$  el primer paso del algoritmo (implementar  $\phi_1 = 0$ ) produce el lagrangiano reducido

$$L = \dot{q}_1(p_1 - (1 - \alpha)q_2) - H_c(q, p), \quad (2.68)$$

hasta una derivada total respecto al tiempo. Podemos ahora diagonalizar la estructura simpléctica de este lagrangiano, por medio de la transformación de Darboux

$$P_1 = p_1 - (1 - \alpha)q_2 \quad Q_1 = q_1 \quad Q_2 = q_2, \quad (2.69)$$

que conduce al lagrangiano

$$L' = \dot{Q}_1 P_1 - \frac{1}{2}(P_1 - \alpha Q_2)^2 + \frac{\beta}{2}(Q_1 - Q_2)^2 \quad (2.70)$$

en coordenadas canónicas. Nótese que  $Q_2$  juega el papel de variable del tipo  $Z$ . De la condición (2.46), se sigue que

$$Q_2 = \frac{\alpha P_1 - \beta Q_1}{\gamma}. \quad (2.71)$$

Del análisis general realizado previamente deducimos que esta restricción jugará el papel de una restricción de segunda clase. Eliminando  $Q_2$  del lagrangiano (2.70), resulta

$$L_R = \dot{Q}_1 P_1 + \frac{\beta}{2\gamma} (P_1 - \alpha Q_1)^2. \quad (2.72)$$

Que este lagrangiano no coincide con el correspondiente lagrangiano (2.65), obtenido usando el procedimiento de reducción de Dirac, puede resultar sorprendente, a primera vista. De hecho, estos dos lagrangianos están relacionados por una transformación no-canónica que corresponde a la restricción sobre la superficie de restricción de la transformación canónica

$$(q_1, q_2, p_1, p_2) = (Q_1, Q_2, P_1 + (1 - \alpha)Q_2, P_2 + (1 - \alpha)Q_1), \quad (2.73)$$

que da lugar a la representación canónica de la superficie de restricción dada por  $P_2 = 0, Q_2 - \frac{\alpha P_1 - \beta Q_1}{\gamma} = 0$ . Hay que remarcar que esta transformación es una extensión particular, fuera de la superficie de restricción, de la transformación de Darboux (2.69). Por tanto la transformación no-canónica que relaciona los dos lagrangianos es

$$(q_1, p_1) = (Q_1, P_1 + \frac{(1 - \alpha)(\alpha P_1 - \beta Q_1)}{\gamma}). \quad (2.74)$$

Aplicando esta transformación al lagrangiano de Dirac (2.65) recuperamos precisamente el resultado obtenido usando el método F-J (2.72).

El caso en el que hay constricciones de primera clase, cuando la condición  $\gamma = 0$  se cumple, puede calcularse de manera similar. La primera reducción produce

$$L = \dot{Q}_1 P_1 - \frac{1}{2} P_1^2 + \frac{\alpha^2}{2} Q_1^2 + Q_2 (\alpha P_1 - \alpha^2 Q_1), \quad (2.75)$$

después de diagonalizar apropiadamente, usando la transformación de Darboux (2.69). Es necesario hacer notar que el lagrangiano (2.75) tiene la forma

(2.50), donde  $Q_2$  juega el papel de multiplicador de Lagrange. La restricción secundaria,

$$P_1 - \alpha Q_1 = 0, \quad (2.76)$$

no permite obtener  $Q_2$  como función del resto de las variables, cosa que esperábamos, pues ahora la restricción es de primera clase. Como hemos señalado, esta es la condición que permite asegurar que esta restricción puede clasificarse como una restricción de primera clase. Al implementar (2.76), en el lagrangiano (2.75), obtenemos un lagrangiano reducido que es la derivada total respecto al tiempo de una función. Concluimos, entonces, que el(los) lagrangiano(s) reducido(s) obtenidos por el método de Dirac y aquéllos obtenidos por el procedimiento de reducción de F-J son completamente equivalentes. Difieren, en el peor de los casos, por una transformación canónica.

## 2.6 ALGUNOS COMENTARIOS SOBRE LA RELACIÓN ENTRE BRST-BFV Y EL MÉTODO F-J

Las teorías de norma tienen la característica de estar descritas por más variables de aquéllas que son necesarias para la descripción de los grados de libertad físicos independientes. Estos grados de libertad resurgen como aquéllas variables que son invariantes ante transformaciones de norma. Resulta entonces, un tanto paradójico, que en el estudio de estos sistemas la tendencia sea hacia aumentar el número de variables en el espacio fase en lugar de reducir el número de variables y así simplificar la descripción dinámica. Ya hemos mencionado los motivos que han impulsado esta tendencia: añadir variables y disponer de simetrías más poderosas en lugar de reducir y eliminar simetrías. El paradigma, en esta dirección es, tal vez, el método de cuantización BRST-BFV. En el otro extremo se encuentra el método de F-J, donde la reducción se produce a ultranza: obtener el espacio fase reducido tan pronto como sea posible.

Pese a esta enorme diferencia, ¿existe alguna relación, a nivel clásico, entre las dos propuestas? La respuesta es sí, y ésta se encuentra contenida en la cohomología BRST. Este procedimiento selecciona, tanto a nivel clásico como cuántico, el sector físico de la teoría. Vista desde esta perspectiva, la cohomología BRST debe ser equivalente a un procedimiento de reducción. Se ocurre, entonces, usar esta poderosa herramienta para obtener las variables

fundamentales que describen completamente el sector físico de la teoría –las variables BRST-cerradas–, para posteriormente, reescribir la acción efectiva en términos de estas variables. Sucederá, entonces –y eso lo hemos aprendido del método F-J– que la parte cinética de esta acción se tornará no-canónica. Esta acción dependerá de las variables físicas más –posiblemente– un término BRST exacto, pues deberá seguir siendo invariante BRST. Aplicando una transformación de Darboux es posible construir la acción efectiva canónica en el espacio fase reducido. Mostraremos por medio de un ejemplo que este es precisamente el caso.

Consideremos el Lagrangiano de Maxwell-Dirac [34]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi, \quad (2.77)$$

donde  $\gamma^\mu$  son las matrices de Dirac,  $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ ,  $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$  y  $F_{\mu\nu}$  definido en la sección 1.4. Aplicando el algoritmo de Dirac a este lagrangiano obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\vec{\pi} \cdot \dot{\vec{A}} + i\psi^\dagger\dot{\psi} - H_c + A_0(\nabla \cdot \vec{\pi} - \rho), \\ H_c &= \frac{1}{2}(\pi^2 + B^2) - \psi^\dagger\vec{\alpha} \cdot (i\nabla + e\vec{A})\psi, \end{aligned} \quad (2.78)$$

donde  $\rho \equiv \psi^\dagger\psi$ ,  $\alpha_i = \gamma^0\gamma^i$  y las relaciones de conmutación básicas son

$$\{A_\mu(\vec{x}), \pi^\nu(\vec{x}')\} = \delta_\mu^\nu\delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad \{\psi(\vec{x}), \psi^\dagger(\vec{x}')\} = -i\delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2.79)$$

Como puede deducirse del análisis realizado en la sección 1.4 para la electrodinámica, aquí también aparecen dos constricciones de primera clase, una primaria y una secundaria –la ley de Gauss–<sup>24</sup> En el lagrangiano de primer orden (2.78) estamos usando la convención de interpretar a  $A_0$  como el multiplicador de Lagrange de la ley de Gauss que ahora aparece como la única restricción primaria, pues  $\pi_0$  y el multiplicador de Lagrange  $\lambda_1$  han sido eliminados como campos auxiliares. Para detalles ver la sección 1.4

Usando el método de F-J, la reducción puede implementarse si los vectores  $\vec{\pi}$  y  $\vec{A}$  se separan en su parte transversal y longitudinal

$$\vec{\pi} = \vec{\pi}^T + \vec{\pi}^L, \quad \vec{A} = \vec{A}^T + \vec{A}^L, \quad (2.80)$$

<sup>24</sup>En realidad este sistema tiene también, constricciones de segunda clase. Su eliminación es inmediata y produce los paréntesis de Dirac (2.79).

donde  $\nabla \cdot \vec{\pi}^T = 0$  y  $\nabla \cdot \vec{A}^T = 0$ . Las partes longitudinales pueden reescribirse como

$$\vec{\pi}^L = \nabla \pi^L, \quad \vec{A}^L = \nabla A^L, \\ \pi^L = \Delta^{-1}(\nabla \cdot \vec{\pi}), \quad A^L = \Delta^{-1}(\nabla \cdot \vec{A}), \quad (2.81)$$

donde  $\Delta^{-1}$  es el operador inverso del operador de Laplace  $\nabla^2$ , o función de Green.<sup>25</sup> Definimos ahora  $A = \nabla \cdot \vec{A}$  y análogamente  $\pi = \nabla \cdot \vec{\pi}$ . La ley de Gauss es ahora  $\pi^L = -\Delta^{-1}\rho$ . Aplicando esta división de los vectores  $\vec{\pi}$  y  $\vec{A}$  al lagrangiano (2.78) y usando la ley de Gauss, obtenemos, (hasta términos de borde)

$$\mathcal{L} = -\vec{\pi}^T \cdot \dot{\vec{A}}^T + \rho \Delta^{-1} \dot{A} + i\psi^\dagger \dot{\psi} - H_c \quad (2.83)$$

donde

$$H_c = \frac{1}{2}((\pi^T)^2 - \rho \nabla^{-1} \rho + B^2) + \psi^\dagger \vec{\alpha} \cdot (i\nabla + \vec{A})\psi. \quad (2.84)$$

Aquí hemos usado la identidad

$$\nabla \cdot (\phi A) = A \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot A, \quad (2.85)$$

donde  $A$  es un campo vectorial y  $\phi$  un campo escalar cualesquiera. La transformación de Draboux [34]

$$\psi \rightarrow \exp\{i\Delta^{-1}A\}\psi \quad (2.86)$$

tiene el efecto de cancelar la parte no-canónica del término cinético con una contribución que proviene del término cinético de los fermiones  $i\psi^\dagger \dot{\psi}$  y eliminar  $\vec{A}^L$  del hamiltoniano. Así el hamiltoniano es función solamente de  $\vec{A}^T$  ya que  $B = \nabla \times \vec{A}^T$ . Realizando esta transformación se obtiene el lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\vec{\pi}^T \cdot \dot{\vec{A}}^T + i\psi^\dagger \dot{\psi} - H_c \quad (2.87)$$

<sup>25</sup>Este operador actúa de la siguiente manera

$$\Delta^{-1} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d^3 \vec{x}'}{|\vec{x}' - \vec{x}|} \quad (2.82)$$

donde

$$H_c = \frac{1}{2}((\vec{\pi}^T)^2 - \rho \nabla^{-1} \rho + B^2) + \psi^\dagger \vec{\alpha} \cdot (i \nabla + \vec{A}^T) \psi. \quad (2.88)$$

Este es el lagrangiano reducido. Es interesante observar que se trata del lagrangiano en la norma de Coulomb  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ . En la elección de variables para el espacio fase reducido se encuentra codificada la norma.

Analicemos ahora el mismo ejemplo desde la perspectiva del método BRST-BFV. Construimos la acción efectiva promoviendo el multiplicador  $A_0$  a variable dinámica junto con su multiplicador de Lagrange  $\pi_0$ . El resultado es

$$S_{eff} = \int d^4x (-\vec{\pi} \cdot \vec{A} + \pi_0 \dot{A}_0 + i \psi^\dagger \dot{\psi} + \dot{\mathcal{P}} + \dot{\mathcal{C}} \mathcal{P} - H_c) + \int dt \{ \Psi, \Omega \}, \quad (2.89)$$

donde hemos usando el hecho de que el hamiltoniano BRST invariante coincide con el hamiltoniano canónico (2.78). La carga BRST es

$$\Omega = \int (-i \mathcal{P} \pi_0 + \mathcal{C} (\nabla \cdot \vec{\pi} - \rho)) d^3x, \quad (2.90)$$

y genera las siguientes transformaciones sobre las variables del espacio fase extendido

$$\begin{aligned} s(\Delta^{-1} A) = \mathcal{C}, \quad s\mathcal{C} = 0, \quad s\vec{\mathcal{P}} = \nabla \cdot \vec{\pi} - \rho, \quad s(\nabla \cdot \vec{\pi} - \rho) = 0, \\ sA_0 = -i\mathcal{P}, \quad s\mathcal{P} = 0, \quad s\vec{\mathcal{C}} = i\pi_0, \quad s\pi_0 = 0, \\ s\vec{A}^T = 0, \quad s\vec{\pi}^T = 0. \end{aligned} \quad (2.91)$$

donde hemos usado las relaciones de conmutación

$$\{\vec{\mathcal{P}}(\vec{x}), \mathcal{C}(\vec{x}')\} = -\delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad \{\mathcal{P}(\vec{x}), \vec{\mathcal{C}}(\vec{x}')\} = -\delta(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (2.92)$$

Las variables  $\mathcal{C}$ ,  $(\nabla \cdot \vec{\pi} - \rho)$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\pi_0$  son las variaciones BRST de  $(\Delta^{-1} A)$ ,  $\vec{\mathcal{P}}$ ,  $A_0$ ,  $\vec{\mathcal{C}}$  respectivamente. Solamente los campos transversales  $\vec{\pi}^T$  y  $\vec{A}^T$  son BRST cerrados. Es posible mostrar que el espacio físico puede describirse completamente con estas variables [58]. Por tanto la cohomología BRST queda completamente determinada por estos dos vectores del espacio físico. Podemos ahora reescribir la acción efectiva (2.89) en términos de estas variables más un término BRST exacto. El resultado después de diagonalizar es

$$\begin{aligned} S_{eff} = \int d^4x (-\vec{\pi}^T \cdot \vec{A}^T + i \psi^\dagger \dot{\psi} - H_c + s(i\mathcal{C} \dot{A}_0 + \vec{\mathcal{P}} \dot{A}) \\ + \frac{1}{2}(s\vec{\mathcal{P}} \nabla^{-1} \vec{\mathcal{P}} + \vec{\mathcal{P}} \nabla^{-1} \rho)) + \int dt \{ \Psi, \Omega \}. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Concluimos observando que esta acción coincide con la acción obtenida por el método de F-J y que la elección de las variables del espacio físico, -la solución de la cohomología BRST- determina la condición de norma.

## 2.7 CONCLUSIONES

Hemos demostrado que los procedimientos de Dirac y F-J son equivalentes. En el camino, encontramos algunas observaciones que arrojan luz sobre los procedimientos de reducción en general y en particular sobre el método de F-J. Citaremos algunas:

*I.* Identificamos a las constricciones que dependen de las coordenadas como un sub conjunto de las constricciones secundarias, que tienen la remarkable propiedad de convertir parte de las constricciones primarias de primera clase, en constricciones de segunda clase. Aquí es donde la antigua clasificación de Dirac reaparece en el método de F-J.

*II.* Hemos dicho que algunas -o posiblemente todas- de las relaciones  $f_{a_2}(P_r, Q^r) = 0$ , (que son constricciones secundarias que no alteran el carácter de primera o segunda clase de las constricciones primarias) pueden no aparecer. Desde el punto de vista del método de Dirac esto sucede cuando el número de constricciones secundarias -independientes- es menor que el número de constricciones primarias de primera clase. Esto implica la existencia de constricciones primarias de primera clase, que ante la condición de consistencia, no producen nuevas constricciones. Estas constricciones permanecerán como constricciones de primera clase ya que conmutan con el hamiltoniano canónico. El número de ellas es la diferencia entre los dos números antes mencionados.

*III.* Nótese que si comenzamos el segundo paso en el algoritmo del método (2.50), insertando las constricciones  $f_{a_2}(Q^r, P_r) = 0$  en  $L_R$ , toda la información de las variables  $Q^{a_2}$  desaparece. De esta manera en el método F-J no se encuentra rastro, ni ecuaciones de movimiento, de estas variables. De manera muy distinta, en la versión del método de Dirac que hemos utilizado, estas variables juegan el papel de multiplicadores de Lagrange; o se determinan como función del resto de las variables  $P_r, Q^r$ , o permanecen arbitrarias (y por tanto son grados de libertad de norma). En este punto del algoritmo no sabemos el destino particular -entre las posibilidades mencionadas- para estas variables, pero sin importar cual de las dos posibilidades se presente,

sabemos de antemano que estas variables no conllevan ninguna información física relevante para el sistema y por tanto nunca formarán parte de los grados de libertad físicos. Esta es la razón de la maravillosa eficiencia del método F-J, ya mencionada en la introducción: desaparecer este tipo de variables tan pronto como sea posible, en lugar de cargar con ellas hasta el final, como usualmente se hace en el marco de la reducción de Dirac.

IV. Desde una perspectiva geométrica el procedimiento de construcción de las variables  $P_i, Q^i$ , empezando en la representación canónica de la superficie de constricción (2.37) y terminando en la transformación canónica (2.41), es equivalente a extender, fuera de la superficie de constricción, la complicada transformación de Darboux (2.44), piedra angular del método F-J. Esto puede visualizarse como sigue: realizamos una transformación de coordenadas, desde las coordenadas originales del espacio fase  $p_i, q^i$ , a nuevas coordenadas  $x^\alpha, \phi_\mu$ , donde  $q^i(x^\alpha), p_i(x^\alpha)$  son las ecuaciones paramétricas de la superficie de constricción y  $\phi_\mu = 0$ , son las constricciones. La aplicación de esta transformación a la estructura simpléctica original, produce una nueva estructura simpléctica, que en general, no será canónica. Sabemos que siempre es posible (localmente), por medio de una transformación de Darboux, reescribir esta estructura simpléctica en forma canónica, obteniendo además, un conjunto de variables del tipo  $Z$  que son funciones de Casimir de la nueva estructura simpléctica. Extendiendo fuera de la superficie de constricción, a la transformación de Darboux, obtenemos la transformación canónica (2.41), usada en el texto. La extensión es arbitraria y esto refleja el hecho de que la transformación canónica (2.41) no es única.

En algunos casos, cuando la matriz  $M_\mu^\nu$  en la ecuación (2.37), es fácil de encontrar, el procedimiento presentado aquí puede usarse como un método alternativo para construir la transformación de Darboux (2.44). Desde este punto de vista, el método de Dirac más la transformación canónica (2.41), que diagonaliza los paréntesis de Dirac, se reduce al método de F-J.

V. Como hemos mencionado, el método F-J es un procedimiento eficiente para reducir y obtener las variables físicas de un sistema con constricciones. El método es técnicamente diferente pero los resultados que produce pueden compararse con los resultados obtenidos usando procedimientos de reducción standard. Si se introducen condiciones de norma para eliminar grados de libertad que no actúan en el sector físico, se obtiene una versión equivalente

al resultado obtenido usando la reducción F-J.<sup>26</sup> Esto implica, en particular, que el método de F-J presenta el mismo tipo de problemas (posible pérdida de covariancia, localidad, o anomalías) cuando se usa como punto de partida para la cuantización. De manera que, como método de cuantización, es también, un método de cuantización con lágrimas[34].

---

<sup>26</sup>Es posible mostrar, en general, que la equivalencia entre el método F-J y el de Dirac no depende de la condición de norma, usando para ello el procedimiento de la ref. [47].

## CAPÍTULO 3

### MÉTODO BRST-BFV PARA SISTEMAS NO ESTACIONARIOS

Los problemas que se presentan al extender el método de Dirac para analizar sistemas que incluyen constricciones que dependen explícitamente del tiempo han sido estudiados en [76, 44, 31]. Basándonos en estos análisis es posible desarrollar sistemáticamente la generalización del método de cuantización BRST-BFV para el caso de sistemas no estacionarios [41]. Para este tipo de sistemas el hamiltoniano no es una cantidad conservada. Esto implica que en la descripción dinámica, el generador de la evolución temporal (operador de evolución en mecánica cuántica) es explícitamente dependiente del tiempo. Por tanto, al transcurrir el tiempo el sistema evoluciona de tal manera que el generador de la dinámica cambia punto a punto. En el caso de sistemas con constricciones, además de la evolución temporal del sistema, la superficie de restricción experimenta cambios conforme el tiempo transcurre. La condición de consistencia sobre la dinámica (1.7) requiere que el sistema evolucione de tal modo que nunca abandone la superficie de restricción. Esto complica la descripción dinámica al grado de que la proyección de la estructura simpléctica del espacio fase original, sobre la superficie de restricción, resulta dependiente del tiempo y la evolución no está generada por una transformación canónica. Como consecuencia, aunque las ecuaciones de movimiento son hamiltonianas, no pueden escribirse de manera cerrada, en términos de un paréntesis de Poisson. La definición de observable es ahora ligeramente distinta. En contraste al caso estacionario, aquí el hamiltoniano *no* es una función de primera clase. Las simetrías de norma evolucionan con el tiempo manteniendo siempre su carácter de simetrías. Por ello, es en general muy difícil construir sistemas con constricciones de primera clase explícitamente dependientes del tiempo. Como las constricciones de segunda clase no generan simetrías, la construcción de sistemas con este tipo de constricciones es mucho más sencilla. Por otra parte, el método BRST-BFV se

aplica al caso de sistemas con constricciones de primera clase. Por tanto, es de considerable interés analizar en detalle el procedimiento de Batalin-Tyutin [17], que consiste en añadir variables al espacio fase original, con el objeto de convertir las constricciones de segunda clase en constricciones de primera clase, especialmente en el caso de sistemas no estacionarios. En este Capítulo analizaremos con detalle la extensión de este método al caso no estacionario y su modificación para analizar teorías no abelianas (conversión no abeliana).

El propósito de este capítulo es poner en claro algunos aspectos de los sistemas no estacionarios con constricciones y mostrar que la ruta natural en el análisis de este tipo de sistemas conduce a reescribirlos en forma parametrizada como ha sido propuesto en [58]. Normalmente el movimiento de un sistema se describe en términos de variables canónicas que evolucionan al transcurrir el tiempo. Se supone que este "tiempo" tiene significado físico directo, aunque en sí mismo, no es una variable dinámica como el resto de las variables del espacio fase. Es posible construir formulaciones de la dinámica donde el tiempo físico se considera como una variable dinámica adicional y la evolución del sistema se describe en términos de un parámetro arbitrario  $s$ . Este parámetro no tienen significado físico y el formalismo es, por tanto, invariante ante redefiniciones de  $s$ . En tal caso, se dice que el formalismo es covariante. En la práctica, los sistemas covariantes surgen de dos maneras distintas: i) a partir de un sistema donde el tiempo físico no está incluido como una variable canónica y se realiza una parametrización de la teoría para convertirla en un sistema covariante. Este procedimiento es, en principio, siempre realizable. b) El sistema es originalmente covariante. El paradigma de una teoría física covariante es la relatividad general.

El proceso inverso, i.e., a partir de una teoría covariante construir el correspondiente sistema cuya evolución se realiza en términos de un tiempo físico, no siempre puede realizarse. En los sistemas covariantes, el movimiento es generado por las transformaciones de norma de la teoría. Esto se debe a que el hamiltoniano canónico es cero y el hamiltoniano extendido es una combinación lineal de las constricciones de primera y segunda clase incluyendo la constricción que genera la invariancia ante reparametrizaciones del parámetro  $s$ . La incorporación del tiempo como una variable canónica adicional no sólo permite una descripción más simétrica de la dinámica sino que también es muy útil para tratar sistemas con dependencia temporal explícita. Como hemos señalado, esta dependencia complica el formalismo ya que las condi-

ciones de consistencia involucran un término adicional y no pueden, por tanto, formularse en términos del paréntesis de Poisson solamente. Esta dificultad y otras relacionadas desaparecen cuando se promueve el tiempo físico a una variable dinámica adicional. La evolución será ahora canónica (gobernada por el nuevo parámetro  $s$ ), la superficie de restricción ya no cambia al transcurrir el tiempo y las definiciones usuales de simetría de norma y observable son directamente aplicables. El precio que se paga por ello es extender el espacio fase original, de dimensión  $2n$ , a un nuevo espacio de dimensión  $2n+2$ , añadiendo las variables canónicas  $t, \pi_t$ . Como resultado, la descripción parametrizada involucra una restricción de primera clase adicional, asociada con la invariancia ante reparametrizaciones, que es justamente  $H_0 + \pi_t$ , donde  $H_0$  es el hamiltoniano canónico original. Es precisamente esta restricción la que garantiza que la teoría parametrizada sea equivalente a la teoría original.

Siguiendo esta propuesta, extenderemos el espacio fase original, construyendo un sistema que evoluciona canónicamente respecto a un nuevo parámetro  $s$ , que supondremos crece de manera monótona. Para este sistema podemos construir el propagador usando la formulación estandar del método BRST-BFV propuesta en la sección 1.2. Presentaremos la prueba de equivalencia, entre la descripción parametrizada y la original, tanto en la formulación de la integral de trayectoria, como en la formulación de operadores. Mostraremos que es posible eliminar las variables adicionales  $s$  y  $\pi_t$ , en los dos esquemas, recuperando el sistema original, en un procedimiento que podríamos llamar des-parametrización del sistema y que implica imponer una condición de norma que permita reducir la restricción responsable de la invariancia ante reparametrizaciones. Construiremos la carga BRST así como el hamiltoniano BRST-invariante y recuperaremos el teorema de Fradkin-Vilkovisky. Nuestro resultado final, después de fijar parcialmente la norma y eliminar las variables  $\pi_t$  y  $s$  en favor de  $t$ , contiene -como en el caso estacionario- una función arbitraria en el hamiltoniano efectivo, que juega el papel del fermión de norma. Que la integral funcional, y por tanto los elementos de matriz del operador evolución, son invariantes ante cambios infinitesimales arbitrarios de esta función es el contenido del teorema de Fradkin-Vilkovisky. Este teorema ha sido demostrado para el caso estacionario en [15] (ver sección 1.2.3.2). Aplicado las ideas de esta demostración al sistema parametrizado, puede mostrarse que este teorema sigue siendo válido para el caso no estacionario.

En este trabajo no consideraremos la cuantización de sistemas con constricciones de segunda clase usando el paréntesis de Dirac para después promoverlo al correspondiente conmutador en mecánica cuántica. Ya hemos expuesto los inconvenientes de tal procedimiento. Como el método BRST-BFV es consistente, aún en casos en los que el método de Dirac no lo es, nos parece apropiado promover el método BRST-BFV al estatus de prescripción general para cuantizar cualquier sistema con constricciones. Como este método requiere reducir el sector de constricciones de segunda clase de la teoría, proponemos como alternativa, usar el método de Batalin-Tyutin [16].

El material de este capítulo está organizado de la siguiente manera: en la sección 3.1 estudiamos la extensión del método de Dirac para sistemas no estacionarios. En la sección 3.2 mostramos cómo la propuesta de Gitman y Tyutin [44], surge naturalmente a partir de la parametrización del sistema no estacionario original. En la sección 3.3 introducimos el método de Batalin-Tyutin (BT) generalizándolo al caso no-abeliano y no-estacionario. Mostraremos cómo las expresiones para el caso no-estacionario pueden usarse, excepto que las condiciones de frontera en las relaciones recursivas para el hamiltoniano deben modificarse, de  $H_0$  a  $H_0 + \pi_1$ . En la sección 3.4 construiremos, a partir de la acción parametrizada, el formalismo BRST-BFV para sistemas no estacionarios, usando primero la formulación de la integral de trayectoria y después la formulación de operadores. La sección 3.5 la dedicaremos a algunas observaciones finales y recomendaciones de tipo práctico. Finalmente en la sección 3.6 ilustraremos las ideas expuestas usando un ejemplo simple y transparente: el rotor bidimensional con radio dependiente del tiempo. Este problema tiene constricciones de segunda clase que, usando el método BT, convertiremos en constricciones de primera clase. Para obtener el operador evolución aplicaremos el método de cuantización BRST-BFV desarrollado en la sección previa 3.4. El resultado del propagador obtenido por este procedimiento coincide con el resultado obtenido mediante otros procedimientos.

### 3.1 MÉTODO DE DIRAC PARA SISTEMAS NO ESTACIONARIOS

Comenzaremos la discusión con una introducción al método de Dirac para sistemas no estacionarios. Esta extensión no es directa ya que la condición

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

de consistencia (1.7) es ahora distinta. Mostraremos a continuación que los paréntesis de Dirac no determinan completamente la evolución dinámica ya que aparece un término adicional impidiendo que la evolución temporal se pueda escribir en términos de una estructura simpléctica. En otras palabras, la evolución temporal del sistema ya no es canónica (no está generada por una sucesión de transformaciones canónicas infinitesimales (ver [45]). La ruta directa para resolver este problema es convertir el problema inicial en un problema invariante ante reparametrizaciones. Así, el sistema será independiente del tiempo pero en un espacio fase más grande -aquél que incluye al tiempo  $t$  y su momento conjugado  $\pi_t$  como coordenadas canónicas-. El punto es ahora mostrar que el número de grados de libertad permanece igual, *i.e.*, que la descripción original es totalmente equivalente a la descripción parametrizada. En esta sección analizaremos en detalle estos aspectos.

Consideremos un sistema descrito por las variables  $(q^i, p_j)$ , en un espacio fase de dimensión  $2n$ , cuyo hamiltoniano canónico denotaremos por  $H_0(q, p, t)$ , el conjunto de constricciones de primera clase por  $\{\psi_A(q, p, t)\}$ , y el conjunto de constricciones de segunda clase por  $\{\phi_\alpha(q, p, t)\}$ . Supondremos que todas estas funciones de las variables del espacio fase dependen explícitamente del tiempo. La descripción canónica de un sistema tal está determinada por la acción extendida

$$S_E = \int (p_i \dot{q}^i - H_0 - \lambda^\alpha \phi_\alpha - \mu^A \psi_A) dt, \quad (3.1)$$

donde  $\lambda^\alpha$  y  $\mu^A$  son multiplicadores de Lagrange. Supondremos también que este sistema es consistente, *i.e.*, que las condiciones de estabilización

$$\frac{d\phi_\alpha}{dt} \approx 0, \quad \frac{d\psi_A}{dt} \approx 0, \quad (3.2)$$

se satisfacen idénticamente y por tanto no hay constricciones adicionales en el problema, de tal manera que su descripción completa está contenida en la acción (3.1). La evolución temporal de una función arbitraria que depende explícitamente del tiempo  $F(q, p, t)$  está dada por

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H_E\}, \quad (3.3)$$

donde  $H_E = H_0 + \mu^A \psi_A + \lambda^\alpha \phi_\alpha$  es el hamiltoniano extendido del sistema. La condición de consistencia (3.2) aplicada a las constricciones de segunda

clase permite resolver para los multiplicadores de Lagrange  $\lambda^\alpha$ . Sustituyendo estos multiplicadores en (3.3) resulta

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H_0\}^* + \mu^\Lambda \{F, \psi_\Lambda\}^* - \{F, \phi_\alpha\} C^{\alpha\beta} \frac{\partial \phi_\beta}{\partial t}, \quad (3.4)$$

donde  $\{ \ }^*$  denotan los paréntesis de Dirac en el espacio fase completo  $(q^i, p_j)$

$$\{ , \}^* = \{ , \} - \{ , \phi_\alpha\} C^{\alpha\beta} \{ \phi_\beta, \}, \quad (3.5)$$

y la matriz  $C_{\alpha\beta} = \{ \phi_\alpha, \phi_\beta\}$ , que en general depende del tiempo, es invertible. Denotamos su inverso por  $C^{\alpha\beta}$ .

El último término del lado izquierdo de (3.4) rompe la estructura canónica de las ecuaciones de movimiento *i.e.*, la evolución temporal ya no es (como en el caso estacionario) generada por una transformación canónica. Más aún, puede mostrarse que este término extra no puede integrarse al paréntesis de Dirac añadiendo una pieza apropiada al hamiltoniano  $H_0$  [76]. Si éste fuera el caso sería entonces posible construir una función  $H'$  de las variables del espacio fase tal que

$$- \{F, \phi_\alpha\} C^{\alpha\beta} \frac{\partial \phi_\beta}{\partial t} = \{F, H'\}^*. \quad (3.6)$$

Es fácil mostrar que esta ecuación no es consistente. Si  $F$  es cualquier restricción de segunda clase  $F = \phi_\gamma$ , el lado derecho de (3.6) es cero, mientras que, en general, el lado izquierdo no lo es. Por tanto, no existe una función  $H'$  que añadida al hamiltoniano original  $H_E$  permita reescribir la evolución temporal en términos del paréntesis de Dirac. <sup>27</sup>

<sup>27</sup>Es posible, usando el formalismo de Faddeev-Jackiw, desarrollado en el capítulo previo, mostrar que la evolución temporal no puede describirse en términos de una estructura simpléctica. Consideremos, para ello, un sistema con constricciones de segunda clase dependientes del tiempo. La reducción directa en la acción extendida (3.1) nos conduce a una acción reducida de la forma

$$S_R = \int dt (a_i(y, t) \dot{y}^i - h(y, t)), \quad (3.7)$$

donde la 1-forma  $a_i$  es ahora dependiente del tiempo. Las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a esta acción son

$$\dot{y}^i = \{y^i, h\}_R^* - \sigma^{ij} \frac{\partial a_j}{\partial t}, \quad (3.8)$$

escritas en términos del paréntesis de Dirac reducido. En general, el último término no puede incorporarse al paréntesis de Dirac y la estructura canónica de las ecuaciones de movimiento se ha perdido.

Existen al menos dos caminos para recuperar la estructura canónica de la evolución temporal para el caso no estacionario.

Uno de ellos fue desarrollado por Mukunda [76] y se reduce a encontrar un cambio apropiado de coordenadas en el espacio fase, en la línea de lo expuesto en el capítulo anterior. La idea básica es incluir a las constricciones de segunda clase como nuevas coordenadas. Para obtener un conjunto completo de coordenadas en el espacio fase se añaden variables extra de tal manera que el nuevo conjunto de coordenadas (no necesariamente canónico) sea una base equivalente del espacio fase. Las variables añadidas corresponden a los grados de libertad físicos en el caso en que no hay constricciones de primera clase. En este nuevo sistema de coordenadas es posible redefinir el Hamiltoniano de tal manera que las ecuaciones de movimiento pueden escribirse en términos del paréntesis de Dirac correspondiente, sin ningún término adicional. Este procedimiento, en principio correcto, es difícil de implementar en la práctica puesto que la transformación no-canónica implicada es difícil de encontrar. El problema es equivalente a aislar los grados de libertad físicos y por tanto a efectuar su reducción. Como hemos mencionado, esto implica perder simetrías manifiestas que son parte de la descripción en el espacio fase original.

Otro camino posible fue explorado por Gitman y Tyutin [44] y consiste en expandir el espacio fase añadiendo un par de variables canónicas conjugadas que son el tiempo  $t$  y su momento conjugado  $\pi_t$  de tal modo que  $\{t, \pi_t\} = 1$ . En este caso la ecuación de evolución (3.4) puede escribirse como el paréntesis de Dirac de manera cerrada

$$\frac{dF}{dt} \approx \{F, H_0 + \pi_t + \mu^A \psi_A\}^*, \quad (3.9)$$

donde el paréntesis se evalúa en el espacio fase completo  $q^i, p_j, t, \pi_t$ . Un punto conceptual que debe ser remarcado en esta propuesta es la cuestión de si la teoría original y la extendida –para la cual hay, en principio, un grado de libertad adicional– son equivalentes.

### 3.2 REFORMULACIÓN DEL PROBLEMA EN TÉRMINOS DE UNA ACCIÓN PARAMETRIZADA

En esta sección consideraremos la versión invariante ante reparametrizaciones de la acción (3.1)

$$S = \int \left( p_i \frac{dq^i}{ds} - \frac{dt}{ds} (H_0(q, p, t) + \lambda^\alpha \phi_\alpha + \mu^\Lambda \psi_\Lambda) \right) ds, \quad (3.10)$$

donde supondremos que la propiedad  $\frac{dt}{ds} \neq 0$  se cumple. Las variables  $t$  y  $\pi_i$  han sido promovidas a variables dinámicas de modo que la dimensión del espacio fase es ahora  $2n + 2$ .

Aplicando el procedimiento de Dirac estandard a la acción (3.10) obtenemos las constricciones primarias

$$\psi = \pi_t + H_0(q, p, t) \approx 0, \quad \phi_\alpha(q, p, t) \approx 0, \quad \psi_\Lambda(q, p, t) \approx 0. \quad (3.11)$$

El hamiltoniano canónico es cero y el hamiltoniano total  $\tilde{H}_T = \tilde{\mu}(\pi_t + H_0) + \tilde{\mu}^\Lambda \psi_\Lambda + \tilde{\lambda}^\alpha \phi_\alpha$  describe la evolución con respecto al parámetro  $s$ . Aplicaremos ahora las condiciones de consistencia sobre las constricciones primarias, observando que ninguna de ellas es explícitamente dependiente del parámetro  $s$ . El primer resultado es

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_\Lambda}{ds} &\approx \tilde{\mu} \{ \psi_\Lambda, \pi_t + H_0 \}_{p, q, t, \pi_t} = \tilde{\mu} \left( \frac{\partial \psi_\Lambda}{\partial t} + \{ \psi_\Lambda, H_0 \}_{p, q, t, \pi_t} \right) \\ &= \tilde{\mu} \left( \frac{\partial \psi_\Lambda}{\partial t} + \{ \psi_\Lambda, H_0 \} \right) \approx \tilde{\mu} \frac{d\psi_\Lambda}{dt}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde los paréntesis de Poisson sin subíndices se calculan con respecto a las variables del espacio fase original  $q^i, p_j$ . La segunda igualdad en (3.12), se sigue de que las funciones involucradas no dependen de  $\pi_t$ . Concluimos que  $\frac{d\psi_\Lambda}{ds} \approx 0$ , idénticamente, en virtud de (3.2). Ahora calcularemos

$$\frac{d\phi_\alpha}{ds} \approx \tilde{\mu} \{ \phi_\alpha, \pi_t + H_0 \}_{q, p, t, \pi_t} + \tilde{\lambda}^\beta \{ \phi_\alpha, \phi_\beta \} \approx 0, \quad (3.13)$$

que nos permite determinar los multiplicadores de Lagrange asociados a las constricciones de segunda clase

$$\tilde{\lambda}^\alpha \approx -\tilde{\mu} C^{\alpha\beta} \{ \phi_\beta, \pi_t + H_0 \}_{q, p, t, \pi_t}. \quad (3.14)$$

Finalmente, obtenemos

$$\frac{d\psi}{ds} \approx \bar{\lambda}^\alpha \{ \psi, \phi_\alpha \}_{p,q,t,\pi_i} = \bar{\lambda}^\alpha \{ \pi_i + H_0, \phi_\alpha \} = \frac{1}{\bar{\mu}} \bar{\lambda}^\alpha C_{\alpha\beta} \bar{\lambda}^\beta, \quad (3.15)$$

que nuevamente es cero en virtud de la antisimetría de la matriz  $C_{\alpha\beta}$ . Del análisis previo concluimos que: (i) no hay constricciones secundarias, (ii) las constricciones  $\psi_A$  y  $\phi_\alpha$  retienen su carácter de primera y segunda clase respectivamente, como esperábamos y (iii) la nueva restricción  $\psi$  es de primera clase. Es precisamente esta última propiedad la que garantiza la equivalencia entre la descripción original (3.1) y la descripción parametrizada (3.10) del sistema, permitiendo que el número de grados de libertad sea el mismo en las dos descripciones.<sup>28</sup>

Ahora, consideremos la ecuación de evolución para una función arbitraria  $F(q, p, t)$ , que no depende de  $\pi_i$  ni explícitamente de  $s$ . Tenemos

$$\frac{dF}{ds} = \{F, \tilde{H}_T\}_{p,q,t,\pi_i} \approx \bar{\mu} \{F, \pi_i + H_0\}_{q,p,t,\pi_i}^* + \bar{\mu}^\Lambda \{F, \psi_A\}_{q,p,t,\pi_i}, \quad (3.18)$$

donde el último paréntesis de Poisson es idéntico al calculado en el espacio fase original, debido a la independencia de ambas funciones en  $\pi_i$ . En particular obtenemos

$$\frac{dt}{ds} = \bar{\mu} \neq 0, \quad (3.19)$$

que permite calcular directamente  $\frac{dF}{dt}$  en la formulación parametrizada. Comparando (3.9) con (3.18) y haciendo la identificación  $\bar{\mu}^\Lambda = \bar{\mu}\mu^\Lambda$ , obtenemos el resultado

$$\{F, \pi_i + H_0\}_{q,p,t,\pi_i}^* \approx \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H_0\}^* - \{F, \phi_\alpha\} C^{\alpha\beta} \frac{\partial \phi_\beta}{\partial t}, \quad (3.20)$$

<sup>28</sup>Aplicando el método de Faddeev-Jackiw podemos demostrar de manera directa que el sistema parametrizado y el sistema original son equivalentes. Para ello consideremos el lagrangiano

$$L = p_i \dot{q}^i + \pi_i \dot{t} - \bar{\mu}(\pi_i + H_0) - \bar{\mu}^\Lambda \psi_A - \bar{\lambda}^\alpha \phi_\alpha, \quad (3.16)$$

obtenido al aplicar el método de Dirac al sistema parametrizado (3.10). La reducción de la restricción  $H_0 + \pi_i \approx 0$  conduce al lagrangiano parcialmente reducido

$$L_R = p_i \dot{q}^i - H_0 \dot{t} - \bar{\mu}^\Lambda \psi_A - \bar{\lambda}^\alpha \phi_\alpha. \quad (3.17)$$

Este lagrangiano coincide con el lagrangiano parametrizado identificando  $\bar{\mu}^\Lambda = \dot{\mu}^\Lambda$  y  $\bar{\lambda}^\alpha = \dot{\lambda}^\alpha$ .

que muestra como la contribución no-canónica en el lado derecho de la ecuación (3.20) se incorpora en la descripción canónica del espacio fase extendido que contiene ahora una restricción adicional  $\pi_t + H_0 \approx 0$  de primera clase. Una consecuencia importante de (3.20), que será utilizada más adelante, es la siguiente afirmación

$$\{F, \pi_t + H_0\}_{q,p,t,\pi_t} \approx \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H_0\}. \quad (3.21)$$

La acción extendida resultante de aplicar el método de Dirac a la acción parametrizada será

$$S_E = \int_{s_1}^{s_2} ds (p_i \dot{q}^i + \pi_t \dot{t} - H_E), \quad (3.22)$$

donde  $H_E = \bar{\mu}(\pi_t + H_0) + \bar{\mu}^A \psi_A + \bar{\lambda}^\alpha \phi_\alpha$ . Esta acción tiene  $A = 1 \dots m$  generadores de transformaciones de norma más la transformación generada por la restricción responsable de la invariancia ante reparametrizaciones. Esta última genera la transformación

$$\delta q^i = \dot{q}^i \epsilon, \quad \delta p_i = \dot{p}_i \epsilon, \quad \delta t = \dot{t} \epsilon, \quad \delta \pi_t = \dot{\pi}_t \epsilon, \quad (3.23)$$

$$\delta \bar{\mu} = (\dot{\bar{\mu}} \epsilon), \quad \delta \bar{\mu}^A = (\dot{\bar{\mu}}^A \epsilon), \quad \delta \bar{\lambda}^\alpha = (\dot{\bar{\lambda}}^\alpha \epsilon). \quad (3.24)$$

La acción  $S_E$  es invariante ante esta transformación si  $\epsilon(s_1) = \epsilon(s_2) = 0$ . Esta transformación no es independiente del resto de transformaciones de norma ya que es proporcional a las ecuaciones de movimiento y puede escribirse en términos de una transformación de norma trivial. Nótese que  $q$  y  $p$  transforman como escalares mientras que los multiplicadores de Lagrange transforman como densidades escalares.

### 3.3 MÉTODO DE BATALIN-TYUTIN EN EL CASO NO ESATACIONARIO

El método de Batalin-Tyutin [16] tiene el objetivo de transformar las restricciones de segunda clase en restricciones de primera clase, sorteando las dificultades que los paréntesis de Dirac producen al cuantizar la teoría. Recientemente, este método ha sido aplicado a una gran variedad de problemas

[94], de los cuales, tal vez, el más interesante sea el campo de Proca, analizado en detalle en versión hamiltoniana y lagrangiana en [8].<sup>29</sup> La idea básica del método BT consiste en extender el espacio fase original añadiendo un número apropiado de variables con el objetivo de transformar el álgebra de constricciones original en un álgebra de constricciones de primera clase sin cambiar el número total de grados de libertad. El hamiltoniano original (y en general, cualquier observable) debe extenderse también, de tal manera que preserve el carácter de primera clase de las constricciones extendidas, sin generar nuevas constricciones. Por simplicidad asumiremos que todas las coordenadas y las constricciones son bosónicas.

Supongamos un sistema descrito en un espacio fase  $2n$ -dimensional con coordenadas  $(q^i, p_i)$ , y hamiltoniano  $H_0(q, p, t)$ . Supondremos que la teoría contiene solamente constricciones de segunda clase  $\chi_\alpha(q, p, t)$ , funcionalmente independientes,  $\{\chi_\alpha, \chi_\beta\} = C_{\alpha\beta}$ ,  $\det C_{\alpha\beta} \neq 0$ . Siguiendo a Batalin y Tyutin [16], introduciremos nuevos grados de libertad, cuyo número es igual al de las constricciones de segunda clase originales, con los paréntesis de Poisson

$$\{q^i, p_i\} = \delta_j^i, \quad \{z^\mu, z^\nu\} = \omega^{\mu\nu}, \quad (3.25)$$

donde suponemos que la matriz antisimétrica  $\omega^{\mu\nu}$ , es constante, de igual rango en toda la superficie de restricción e invertible. Denotemos por  $\tau_\alpha = \tau_\alpha(p, q, z, t)$  las constricciones de primera clase resultantes, en el espacio extendido  $(q, p) \oplus (z)$ , con la propiedad

$$\{\tau_\alpha, \tau_\beta\} = C_{\alpha\beta}^\gamma(q, p, t)\tau_\gamma, \quad (3.26)$$

(conversión no abeliana)<sup>30</sup> y las condiciones

$$\tau_\alpha(p, q, 0, t) = \chi_\alpha(p, q, t) \equiv \tau_\alpha^{(0)}(p, q, t). \quad (3.27)$$

<sup>29</sup>En esta referencia se obtiene el campo de Stückelberg como consecuencia de las variables añadidas del método BT.

<sup>30</sup>La correspondiente conversión abeliana se obtiene escogiendo  $C_{\alpha\beta}^\gamma = 0$ . Es posible elegir las funciones de estructura del álgebra de constricciones de tal manera que dependan también de las nuevas coordenadas  $z$ . Las posibilidades que brinda la conversión no abeliana no han sido suficientemente investigadas. En principio, esta posibilidad permitiría, en algunos casos, simplificar la aplicación del método BT. Otra ventaja es que puede resultar de interés construir un álgebra de constricciones particular con el objeto de construir una simetría de norma que puede ser relevante en la teoría.

Se entiende que el paréntesis de Poisson se calcula en el espacio fase extendido

$$\begin{aligned} \{A(q, p, z, t), B(q, p, z, t)\} &= \{A, B\}_{q,p} + \{A, B\}_z \\ &= \frac{\partial A}{\partial q^i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q^i} \frac{\partial A}{\partial p_i} + \frac{\partial A}{\partial z^\mu} \omega^{\mu\nu} \frac{\partial B}{\partial z^\nu}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

El problema es encontrar las constricciones de primera clase  $\tau_\alpha$  en el espacio fase extendido. Este problema es muy parecido al problema de encontrar la carga BRST y puede plantearse de manera análoga resolviendo constructivamente, en serie, usando la expansión

$$\tau_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_\alpha^{(n)}, \quad (\tau_\alpha^{(n)} \sim z^n), \quad (3.29)$$

en potencias de las variables  $z^\mu$ , y exigido que la condición de primera clase se cumpla a cada orden en  $z$ . La construcción explícita es como sigue. Para detalles ver [16]. Sustituyendo la expansión (3.29) en la propuesta del álgebra de primera clase (3.26), obtenemos la escalera de relaciones

$$\{\tau_\alpha^{(0)}, \tau_\beta^{(0)}\} + \{\tau_\alpha^{(1)}, \tau_\beta^{(1)}\}_z = C_{\alpha\beta}^\gamma \tau_\gamma^{(0)}. \quad (3.30)$$

$$\{\tau_\alpha^{(1)}, \tau_\beta^{(0)}\} + \{\tau_\alpha^{(0)}, \tau_\beta^{(1)}\} + \{\tau_\alpha^{(1)}, \tau_\beta^{(2)}\}_z + \{\tau_\alpha^{(2)}, \tau_\beta^{(1)}\}_z = C_{\alpha\beta}^\gamma \tau_\gamma^{(1)}, \quad (3.31)$$

$$\{\tau_{[\alpha}^{(1)}, \tau_{\beta]}^{(n+1)}\}_z + B_{\alpha\beta}^{(n)} = 0, \quad (3.32)$$

donde

$$\begin{aligned} B_{\alpha\beta}^{(n)} &\equiv \frac{1}{2} B_{[\alpha\beta]}^{(n)} \equiv \sum_{m=0}^n \{\tau_\alpha^{(n-m)}, \tau_\beta^{(m)}\}_{(p,q)} \\ &+ \sum_{m=0}^{n-2} \{\tau_\alpha^{(n-m)}, \tau_\beta^{(m+2)}\}_z - C_{\alpha\beta}^\gamma \tau_\gamma^{(n)} \quad n \geq 2. \end{aligned} \quad (3.33)$$

La primera relación es a orden cero en  $z$ , la segunda a orden uno y la última a orden  $n$ . Definiendo

$$\tau_\alpha^{(1)} = X_{\alpha\beta}(p, q) z^\beta, \quad (3.34)$$

podemos reescribir (3.30) como:

$$X_{\alpha\mu} \omega^{\mu\nu} X_{\beta\nu} = -C_{\alpha\beta} + C_{\alpha\beta}^\gamma \tau_\gamma^{(0)}. \quad (3.35)$$

La solución  $X(q, p, t)$  a esta ecuación está determinada hasta una transformación simpléctica arbitraria  $S$ :

$$X_{\alpha\mu} \rightarrow X_{\alpha\beta} S_{\mu}^{\beta}, \quad S_{\mu}^{\beta} \omega^{\mu\nu} S_{\nu}^{\sigma} = \omega^{\beta\sigma}. \quad (3.36)$$

Usando la definición de las funciones  $B_{\alpha\beta}^{(k)}$  para  $k = 1 \dots n-1$  es posible mostrar que las  $B$ 's cumplen la relación  $\{\tau_{\alpha}^{(1)}, B_{\beta\gamma}^{(n)}\} + (\alpha\beta\gamma) = 0$ . Esta relación y el hecho de que las funciones  $B^{(n)}$  son homogéneas de grado  $n$  en  $z$  permiten construir  $\tau$  en forma iterativa

$$\tau_{\alpha}^{(n+1)} = -\frac{1}{n+2} z^{\mu} \omega_{\mu\nu} X^{\nu\rho} B_{\rho\alpha}^{(n)} \quad n \geq 1. \quad (3.37)$$

Nótese que en nuestro caso los coeficientes de la expansión dependen explícitamente del tiempo. Hasta aquí, la construcción para el caso no estacionario es idéntica a la correspondiente construcción para el caso estacionario.

El siguiente paso es construir el hamiltoniano extendido y en general, los observables de la teoría correspondiente. El hamiltoniano extendido debe cumplir las siguientes propiedades

1. Debe reducirse al hamiltoniano original  $H_0$  en el límite  $z^{\mu} = 0$ .
2. Debe preservar en el tiempo la estructura de las constricciones de primera clase  $\tau_{\alpha}$ , que dependen explícitamente del tiempo, de tal manera que

$$\frac{d\tau_{\alpha}}{dt} = \frac{\partial\tau_{\alpha}}{\partial t} + \{\tau_{\alpha}, H\}_{p,q,z} \approx \{\tau_{\alpha}, H + \pi_t\}_{p,q,z,t,\pi_t} \approx 0, \quad (3.38)$$

donde la primera igualdad débil en (3.38) es una consecuencia directa de (3.21) en la sección previa. Esta es la equivalencia básica que nos permitirá obtener una solución directa al caso no estacionario a partir de la solución del caso estacionario. En el segundo caso (que denotaremos con una barra sobre las cantidades relevantes), supongamos que las constricciones de segunda clase originales  $\chi_{\alpha}(q, p)$  han sido transformadas al conjunto de primera clase  $\{\bar{\tau}_{\alpha}(p, q, z)\}$ . Las ecuaciones que determinan el hamiltoniano extendido son

$$\{\bar{\tau}_{\alpha}, \bar{H}\}_{(p,q,z)} = \bar{V}_{\alpha}^{\beta}(q, p) \tau_{\beta}. \quad (3.39)$$

De manera completamente análoga a la construcción de las funciones BRST-invariantes, la solución a la ecuación (3.39) se propone como una serie en potencias de las variables añadidas  $z$ ,

$$\bar{H} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{H}^{(n)}, \quad \bar{H}^{(n)} \sim z^n, \quad (3.40)$$

con la condición de frontera

$$\bar{H}^{(0)} = \bar{H}_0. \quad (3.41)$$

Usando argumentos similares al caso de la construcción del álgebra de primera clase (3.26), es posible construir la solución de la ecuación (3.39) en forma recursiva [16]

$$\bar{H}^{(n+1)} = -\frac{1}{n+1} z^\mu \omega_{\mu\nu} X^{\nu\rho} \bar{G}_\rho^{(n)}, \quad n \geq 0, \quad (3.42)$$

donde  $\omega_{\mu\nu}$  es la inversa de  $\omega^{\mu\nu}$  definida en (3.25) y  $X^{\mu\nu}$  es la inversa de  $X_{\mu\nu}$ , que es solución de (3.35). Las relaciones de recurrencia para las funciones  $\bar{G}_\rho^{(n)}$  son [16]

$$\begin{aligned} \bar{G}_\alpha^{(0)} &\equiv \{\bar{\tau}_\alpha^{(0)}, \bar{H}^{(0)}\}_{(p,q)} - \bar{V}_\alpha^\beta \tau_\beta^{(0)}, \\ \bar{G}_\alpha^{(1)} &\equiv \{\bar{\tau}_\alpha^{(1)}, \bar{H}^{(0)}\}_{(p,q)} + \{\bar{\tau}_\alpha^{(0)}, \bar{H}^{(1)}\}_{(p,q)} + \{\bar{\tau}_\alpha^{(2)}, \bar{H}^{(1)}\}_{(z)} - \bar{V}_\alpha^\beta \tau_\beta^{(1)}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_\alpha^{(n)} &\equiv \{\bar{\tau}_\alpha^{(n)}, \bar{H}^{(0)}\}_{(p,q)} + \sum_{m=1}^n \{\bar{\tau}_\alpha^{(n-m)}, \bar{H}^{(m)}\}_{(p,q)} + \sum_{m=0}^{n-2} \{\bar{\tau}_\alpha^{(n-m)}, \bar{H}^{(m+2)}\}_{(z)} \\ &\quad + \{\bar{\tau}_\alpha^{(n+1)}, \bar{H}^{(1)}\}_{(z)} - \bar{V}_\alpha^\beta \tau_\beta^{(n)}, \end{aligned}$$

donde los paréntesis de Poisson se calculan con respecto a las variables indicadas en sus respectivos subíndices.

Ahora regresemos al caso no estacionario, donde la condición para obtener el correspondiente hamiltoniano extendido es

$$\{\tau_\alpha, H + \pi_t\}_{p,q,z,t,\pi_t} = V_\alpha^\beta(q, p, t) \tau_\beta \approx 0, \quad (3.44)$$

de acuerdo a (3.38). Observemos que la solución de (3.44) en el espacio fase extendido  $(q, p, z, t, \pi_t)$  tiene exactamente la misma forma que la solución

de (3.39), después de realizar el cambio  $\tilde{H} \rightarrow H + \pi_t$ . Con este objetivo definiremos ahora

$$H + \pi_t = \sum_{n=0}^{\infty} H^{(n)}, \quad H^{(n)} \sim z^n. \quad (3.45)$$

Como el término  $\pi_t$  en el lado izquierdo de (3.45) contribuye sólo a orden cero en  $z$ , la condición de frontera en la ecuación anterior será

$$H^{(0)} = H_0(q, p, t) + \pi_t. \quad (3.46)$$

De esta manera, las expresiones para las funciones  $H^{(n)}$ ,  $n \geq 1$ , en la Ec. (3.45) están dadas por las ecuaciones (3.42) y (3.43), donde quitaremos ahora la barra para indicar explícitamente la dependencia temporal del hamiltoniano y de las constricciones. Los paréntesis de Poisson que tienen subíndices  $(q, p)$  se calculan ahora en el espacio fase extendido  $(q, p, t, \pi_t)$ . Observemos que la dependencia explícita de las funciones  $H^{(n)}$  en las variables  $\pi_t$  aparece sólo en  $H^{(0)}$ . De modo que el hamiltoniano final  $H$  será una función de  $q, p, z$  y  $t$  solamente.

El procedimiento de expansión en serie puede aplicarse para calcular la correspondiente extensión de cualquier observable  $A_0(q, p, t)$  del problema original. Más aún, si calculamos los paréntesis de Poisson de dos funciones extendidas cualesquiera y restringimos el resultado a  $z = 0$ , recuperaremos los paréntesis de Dirac correspondientes al problema original. Es decir

$$\begin{aligned} \{A, B\}_{(q,p,t,\pi_t,z)}|_{z=0} &= \{A^{(0)}, B^{(0)}\} + \{A^{(1)}, B^{(1)}\}_{(z)} \\ &= \{A^{(0)}, B^{(0)}\} - \{A^{(0)}, \phi_\alpha\} C^{\alpha\beta} \{\phi_\beta, B^{(0)}\} \\ &= \{A_0, B_0\}^*, \end{aligned} \quad (3.47)$$

donde  $\{, \}^*$  es el paréntesis de Dirac original,  $A^{(0)} = A_0$  y  $B^{(0)} = B_0$ . Recordamos al lector que todos los paréntesis sin subíndices deben calcularse en las variables del espacio fase original  $(q, p)$ . Otro caso de interés es cuando  $B = H$ , ( $B_0 = H_0 + \pi_t$ ), para el cual

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt}|_{z=0} &= \{A, H\}_{(q,p,t,\pi_t,z)}|_{z=0} = \{A_0, H_0 + \pi_t\}_{(q,p,t,\pi_t)}^* \\ &= \frac{\partial A_0}{\partial t} + \{A_0, H_0\}^* - \{A_0, \phi_\alpha\} C^{\alpha\beta} \frac{\partial \phi_\beta}{\partial t}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

que es exactamente la relación (3.4), suponiendo que no hay constricciones de primera clase. Nótese que en el caso en que algunas constricciones de primera clase están presentes originalmente, el procedimiento de conversión de las constricciones de segunda clase, en general, destruirá el carácter de primera clase de las constricciones originales. Esto puede remediarse tratando a estas constricciones como observables, i.e., aplicando a cada una de ellas el procedimiento aplicado al hamiltoniano.

Un último comentario. En el caso de constricciones de segunda clase, lineales en las variables del espacio fase, es posible construir la solución general para las constricciones de primera clase correspondientes y para el hamiltoniano de primera clase asociado, de manera cerrada [2]. En efecto, en este caso simple la corrección a orden lineal

$$\tau_\alpha = \chi_\alpha + X_{\alpha\beta} z^\beta. \quad (3.49)$$

Definiendo  $\tilde{y}^\mu = z^\alpha B_\alpha^\mu$ , donde  $B_\alpha^\mu = \omega_{\alpha\beta} X^{\beta\gamma} \{\chi_\gamma, y^\mu\}$ , con la notación  $y^\mu, \mu = 1 \dots 2N$ , para las coordenadas del espacio fase original, es posible obtener de manera *cerrada* la solución para el correspondiente hamiltoniano de primera clase, mediante

$$\tilde{H} = H_c(\xi), \quad (3.50)$$

donde  $\xi = y - \tilde{y}$ . Los observables de la teoría son funciones de  $\xi$ . Esto se debe a que

$$\{\xi^\mu, \xi^\nu\} = \{y^\mu, y^\nu\}^*, \quad (3.51)$$

donde  $\{, \}^*$  denota el correspondiente paréntesis de Dirac asociado a las constricciones de segunda clase originales. Además

$$\{\tau_\alpha, \xi^\mu\} = 0, \quad (3.52)$$

y por tanto los observables de la teoría son funciones arbitrarias de  $\xi^\mu$ .

### 3.4 BRST-BFV EN EL CASO NO ESTACIONARIO

Como el método de Batalin-Tyutin nos permite transformar constricciones de segunda clase a constricciones de primera clase, incluyendo el caso en el que hay dependencia explícita respecto al tiempo, podemos ahora analizar el método de cuantización BRST-BFV y su posible aplicación a un sistema no estacionario arbitrario. El objeto de esta sección es reformular los resultados

de [17] (y extender algunos resultados de [61]) para el caso no estacionario y revisar la posible aplicabilidad del teorema de Fradkin-Vilkovisky en este tipo de situaciones. Por simplicidad tomaremos sólo el caso bosónico.

Para probar que el método BRST-BFV es aplicable al caso de sistemas dependientes del tiempo, consideremos el problema invariante ante reparametrizaciones, definido por la acción (3.10), pero con constricciones de primera clase solamente. Supondremos que las constricciones de segunda clase han sido transformadas a constricciones de primera clase usando el método de BT expuesto en la sección anterior.

Nuestra propuesta consiste en aplicar el procedimiento BRST-BFV a este problema. Demostraremos que al imponer una condición de norma canónica conveniente, escogiendo apropiadamente el fermión de norma e integrando sobre las variables adicionales  $t$  y  $\pi_t$  y los fantasmas, estaremos en posición de obtener una expresión para la correspondiente formulación BRST-BFV en el caso del problema no estacionario dado por la acción (3.1) -con constricciones de primaria clase. Mostraremos también que los mismos resultados pueden obtenerse desde la formulación de operadores.

Este procedimiento puede considerarse como el inverso del procedimiento que conduce, a partir de la acción original (3.1), a la obtención de la acción invariante bajo reparametrizaciones, (3.10).

Como sabemos de la discusión de la sección 3.2, la invariancia ante reparametrizaciones introduce una restricción adicional  $\psi$ , de modo tal que el conjunto completo de constricciones de primera clase es ahora

$$\psi = \pi_t + H_0 \approx 0, \quad \psi_A(q, p, t) \approx 0. \quad (3.53)$$

Por otra parte, el álgebra de constricciones del problema original (no parametrizado) es

$$\frac{\partial \psi_A}{\partial t} + \{\psi_A, H_0\} = V_A^C \psi_C, \quad \{\psi_A, \psi_B\} = C_{AB}^C(q, p, t) \psi_C. \quad (3.54)$$

Introduciremos el índice  $a = (0, A)$ , de tal modo que  $\psi_0 = \psi$  y consideraremos el espacio fase en las variables canónicas  $q, p, t, \pi_t$ , que evolucionan con el parámetro arbitrario  $s$ . Con esta notación, extenderemos el álgebra (3.54) en la forma

$$\{\psi_a, \psi_b\} = C_{ab}^c \psi_c, \quad (3.55)$$

donde las funciones de estructura  $C_{ab}^c$  pueden depender de  $q, p, t$  y no dependen de  $\pi_t$ . Esto se debe a que  $V_A^C(q, p, t) = C_{A0}^C(q, p, t)$  y  $C_{AB}^0 = 0$ . Siguiendo

los pasos esbozados en la introducción general (Capítulo 1) podemos plantear la construcción de la carga BRST de la siguiente manera:

Denotando por  $G_a = (\psi, \psi_A)$ , las  $m + 1$  constricciones, introducimos los fantasmas asociados,  $\eta^a$  y sus momentos conjugados  $\mathcal{P}_a$ , cuya relación de conmutación básica es

$$\{\mathcal{P}_a \eta^b\} = -\delta_a^b, \quad (3.56)$$

y su paridad de Grassman es impar ya que hemos supuesto que las constricciones  $G_a$  son bosónicas.

Denotaremos a la carga BRST en el espacio extendido  $(z^\mu, \eta^a, \mathcal{P}_a)$ , donde  $z^\mu = (q, p, t, \pi_t)$ , por  $\tilde{\Omega}$ . La idea básica es ahora mostrar explícitamente la dependencia de  $\tilde{\Omega}$  en las variables canónicas:  $t, \pi_t, \eta^0, \mathcal{P}_0$ . Con este objeto dividiremos  $\tilde{\Omega}$  en la forma

$$\tilde{\Omega} = \eta^a G_a + \text{"más"} = \eta^0 G_0 + \eta^A G_A + \text{"más"} \quad (3.57)$$

donde "más" indica todos los términos de orden mayor en los fantasmas. Haciendo explícita la dependencia de  $\tilde{\Omega}$  respecto a  $\eta^0$ , definimos a las funciones  $h$  y  $\Omega$  como

$$\tilde{\Omega} = \eta^0 h + \Omega. \quad (3.58)$$

Probaremos que  $h = \pi_t + H_{BRST}$ , donde  $H_{BRST}$  es el hamiltoniano BRST-invariante asociado al problema explícitamente dependiente del tiempo. Tanto  $H_{BRST}$  como  $\Omega$  dependen solamente de las variables  $t, q, p, \eta^A, \mathcal{P}_A$  y no dependen de  $\mathcal{P}_0$  ni de  $\pi_t$ . Para mostrar esto es necesario detallar la construcción de la carga BRST.

Recordemos que la carga BRST es solución de la relación

$$\{\tilde{\Omega}, \tilde{\Omega}\} = 0. \quad (3.59)$$

Para resolver esta ecuación se propone un desarrollo en serie de la forma<sup>31</sup>

$$\tilde{\Omega} = \sum_{p \geq 0} \binom{p}{\tilde{\Omega}}, \quad \binom{0}{\tilde{\Omega}} = \eta^a G_a \quad (3.61)$$

<sup>31</sup>La construcción de la carga BRST y del hamiltoniano BRST-invariante puede hacerse de manera análoga a la construcción de las constricciones de primera clase  $\tau_a$  y el hamiltoniano de primera clase del método BT. La diferencia es que ahora el desarrollo se realiza en términos de los fantasmas. Las ecuaciones básicas son

$$\{\Omega, \Omega\} = 0, \quad \Omega = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{\Omega}, \quad \binom{n}{\Omega} \sim \eta^n \mathcal{P}^{n-1},$$

donde  $\overset{(p)}{\Omega}$  es un polinomio de orden  $p$  en  $\mathcal{P}$ . En términos de las funciones de estructura (ver (1.74))  $\overset{(p)}{U}_{b_{p+1} \dots b_1}^{a_1 \dots a_p}(z^\mu)$  que dependen solamente de las variables del espacio fase original  $z^\mu$ , los polinomios  $\overset{(p)}{\Omega}$  son

$$\overset{(p)}{\Omega} = \eta^{b_1} \dots \eta^{b_{p+1}} \overset{(p)}{U}_{b_{p+1} \dots b_1}^{a_1 \dots a_p}(z^\mu) \mathcal{P}_{a_p} \dots \mathcal{P}_{a_1}. \quad (3.62)$$

Sustituyendo el desarrollo (3.61) en (3.59) obtenemos el conjunto de ecuaciones

$$\delta \overset{(p+1)}{\Omega} + D = 0, \quad (3.63)$$

igualando los términos del mismo orden en  $\mathcal{P}$ . Aquí  $\delta$  denota la diferencial de Kozul-Tate [58] cuyas propiedades básicas son

$$\delta^2 = 0, \quad \delta \mathcal{P}_a = -G_a, \quad \delta z^\mu = 0, \quad \delta \eta^a = 0, \quad (3.64)$$

y que opera sobre un producto de variables del espacio fase extendido en la forma  $\delta(AB) = A\delta B + (-)^{\epsilon_B}(\delta A)B$ . Aprovechando el hecho de que el paréntesis de Poisson en el espacio fase extendido es

$$\{A, B\} = \{A, B\}_z + \{A, B\}_{\eta, \mathcal{P}}, \quad (3.65)$$

el término  $\overset{(p)}{D}$  en (3.63) puede escribirse en la forma

$$\overset{(p)}{D} = \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=0}^p \{ \overset{(k)}{\Omega}, \overset{(p-k)}{\Omega} \}_z + \sum_{k=0}^{p-1} \{ \overset{(k+1)}{\Omega}, \overset{(p-k)}{\Omega} \}_{\eta, \mathcal{P}} \right]. \quad (3.66)$$

Nótese la analogía de esta expresión con la obtenida en el análisis del método BT (ver (3.33), (3.43)). Utilizando la solución (3.63) es posible construir la

$$\{ \Omega, H \} = 0, \quad H = \sum_{n=0}^{\infty} \overset{(n)}{H}, \quad \overset{(n)}{H} \sim \eta^n \mathcal{P}^n,$$

con las condiciones iniciales

$$\overset{(1)}{\Omega} = \eta^A G_A, \quad \overset{(0)}{H} = H_0. \quad (3.60)$$

carga BRST. Con  $p = 0$  y la condición inicial (3.61), es posible obtener  $\Omega^{(1)}$ , usando (3.63). Conociendo ésta y con  $p = 2$ , se obtiene  $\Omega^{(2)}$ . El procedimiento continua hasta que alguna  $\Omega^{(p)}$  es cero y con ella puede mostrarse que los términos de orden más alto son también cero. Aplicaremos esta construcción al caso parametrizado. Para  $p = 0$  obtenemos

$$\delta \Omega^{(1)} = -\frac{1}{2} \{ \Omega^{(0)}, \Omega^{(0)} \}_z = -\frac{1}{2} \eta^a \eta^b C_{ab}^c \mathcal{P}_c, \quad (3.67)$$

de donde

$$\Omega^{(1)} = \frac{1}{2} \eta^A \eta^B C_{AB}^C \mathcal{P}_C + \eta^0 (\eta^B V_B^C \mathcal{P}_C). \quad (3.68)$$

Para obtener este resultado hemos usado las propiedades de las funciones de estructura  $C_{ab}^c$  antes citadas. Por tanto a primer orden, la carga BRST es

$$\bar{\Omega} = \eta^0 (G_0 + \eta^B V_B^C \mathcal{P}_C) + \eta^A G_A + \frac{1}{2} \eta^a \eta^b C_{AB}^C \mathcal{P}_C. \quad (3.69)$$

Algunas observaciones generales vienen al caso: (i) La dependencia a orden cero en  $\pi_t$  proviene solamente de  $\Omega^{(0)} = \eta^0 (\pi_t + H_0(q, p, t)) + \eta^A G_A(q, p, t)$ .

(ii) Los polinomios de orden mayor  $\Omega^{(p)}$  pueden depender de  $\pi_t$  a través del término  $\{ \Omega^{(p)}, \Omega^{(0)} \}$ . Este paréntesis de Poisson no introduce una dependencia

adicional en  $\pi_t$ , pero produce un término proporcional a  $\frac{\partial}{\partial t} \Omega^{(p)}$  que no estaba presente en el caso independiente del tiempo. (iii) La dependencia en  $\mathcal{P}_0$

desaparece ya que  $C_{ab}^0 = 0$ . (Tanto  $\Omega^{(0)}$  como  $\Omega^{(1)}$  no dependen de  $\mathcal{P}_0$ . De aquí se sigue que  $\Omega^{(p)}$  no dependerá de  $\mathcal{P}_0$ . Esto se deduce de la estructura del algoritmo (3.63)).

Estas observaciones permiten concluir que  $\Omega$ , en la relación (3.58), no depende de  $\eta^0$ ,  $\mathcal{P}_0$  ni de  $\pi_t$ . Además, por analogía con la construcción de los operadores BRST invariantes, podemos concluir que el término que multiplica al fantasma  $\eta^0$  en (3.58), es precisamente  $h = \pi_t + H_{BRST}$ , i.e., se construye la serie para el hamiltoniano BRST invariante (ver (1.93)). Una demostración de estos hechos puede hacerse por inducción como se muestra en el teorema 6.1 de la Ref. [61].

La nilpotencia de  $\tilde{\Omega}$ , junto con la dependencia específica en las variables canónicas de las funciones involucradas conduce a las propiedades

$$\{\Omega, \Omega\} = 0, \quad (3.70)$$

$$\{h, \Omega\} = 0 = \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \{H_{BRST}, \Omega\}. \quad (3.71)$$

La propiedades anteriores, junto con la expresión final que obtendremos para el operador de evolución, una vez que han sido realizadas las integrales correspondientes sobre las variables añadidas, conduce a la interpretación de  $\Omega$  y  $H_{BRST}$  como la carga BRST y el hamiltoniano BRST correspondientes al problema original, no estacionario. Una vez más, enfatizamos que estas dos cantidades han sido obtenidas directamente usando la construcción canónica de la carga BRST  $\tilde{\Omega}$ .

### 3.4.1 INTEGRAL DE TRAYECTORIA

Ahora mostraremos que la integral funcional conduce al resultado correcto, una vez que las integrales sobre las variables añadidas se ha llevado al cabo. Aplicando directamente el método BRST-BFV, promovemos los multiplicadores de Lagrange  $\lambda^a$ ,  $a = 0, 1, 2, \dots, m$  a variables dinámicas, junto con sus momentos conjugados  $\pi_a$ , tales que

$$\{\pi_a, \lambda^b\} = -\delta_a^b. \quad (3.72)$$

Imponemos como constricciones adicionales  $\pi_a \approx 0$ , para no cambiar el contenido dinámico de la teoría. Denotando por  $G_\alpha$ , las  $2m + 2$  constricciones (incluyendo  $\pi_0 \approx 0$ ,  $\pi_A \approx 0$ ), definiremos los vectores (ver (1.98))

$$G_\alpha = (\pi_a, \psi_a), \quad \eta^\alpha = (-i\mathcal{P}^a, \mathcal{C}^a), \quad \mathcal{P}_\alpha = (i\tilde{\mathcal{C}}_a, \tilde{\mathcal{P}}_a), \quad (3.73)$$

con  $G_0 = (\pi_0, \psi_0 \equiv \psi)$  y donde  $(\mathcal{P}^a, \tilde{\mathcal{C}}_a)$  junto con  $(\mathcal{C}^a, \tilde{\mathcal{P}}_a)$  son pares canónicos conjugados de variables de Grassman impares.

La acción efectiva del sistema es entonces

$$S_{eff} = \int_{s_1}^{s_2} \left( \frac{dq^i}{ds} p_i + \frac{dt}{ds} \pi_t - \lambda^a \frac{d\pi_a}{ds} + \frac{d\eta^\alpha}{ds} \mathcal{P}_\alpha - \tilde{H}_{eff} \right) ds, \quad (3.74)$$

con

$$\tilde{H}_{eff} = \tilde{H}_{BRST} - \{\tilde{K}, \tilde{\Omega}\}, \quad (3.75)$$

donde  $\tilde{H}_{BRST}$  es idénticamente cero debido a la invariancia ante reparametrizaciones. El operador de evolución está dado por

$$Z_{\tilde{K}} = \int \mathcal{D}\mu \exp(iS_{eff}), \quad (3.76)$$

donde  $\mathcal{D}\mu$  es la medida de Liouville en el espacio extendido  $z^\mu, t, \pi_t, \lambda^a, \pi_a, \eta^\alpha, \mathcal{P}_\alpha$ . La idea es realizar las correspondientes integrales funcionales en el operador de evolución (3.76), de tal manera que resulte el operador de evolución asociado al problema original, dependiente del tiempo. Con este propósito escogemos el fermión de norma canónico

$$\tilde{K} = \frac{i}{\epsilon} \bar{C}_0 \chi^0 - \bar{P}_0 \lambda^0 + K'. \quad (3.77)$$

Aquí  $K'$  es un fermión de norma arbitrario que no depende de las coordenadas y momentos con índice 0 en el espacio fase extendido, pero que puede depender del parámetro  $s$ .

La forma explícita de la función  $\chi^0$  será seleccionada usando el criterio de que fije completamente y sin ambigüedades la invariancia de norma asociada a la invariancia ante reparametrizaciones. Sustituyendo el fermión de norma (3.77) previamente escogido y teniendo en mente la carga BRST completa

$$\tilde{\Omega} = -i\mathcal{P}^0 \pi_0 + C^0 h + \Omega(q, p, t, C^A, \bar{P}_A), \quad (3.78)$$

en la ecuación (3.75) obtenemos

$$H_{eff} = -\frac{1}{\epsilon} \chi^0 \pi_0 - \frac{i}{\epsilon} \bar{C}_0 \{\chi^0, h\} C^0 - \lambda^0 h - i\bar{P}_0 \mathcal{P}^0 - \{K', \Omega\}. \quad (3.79)$$

Usando (3.79) en la acción efectiva, haciendo el cambio de variables de integración

$$\bar{C}_0 \rightarrow \epsilon \bar{C}_0 \quad \pi_0 \rightarrow \epsilon \pi_0, \quad (3.80)$$

cuyo superjacobiano<sup>32</sup> es uno, y escogiendo como condición de norma

$$\chi^0 = \frac{s_1 - s}{S} T - t_1 + t, \quad (3.81)$$

donde  $T \equiv t_2 - t_1$ ,  $S \equiv s_2 - s_1$ , estamos en condiciones de implementar la norma canónica  $\chi^0 = 0$  y de garantizar que las condiciones de borde en el

<sup>32</sup>Para la definición del superjacobiano véase el apéndice Grassmanología.

principio variacional se satisfacen (es una condición de norma accesible). La acción efectiva puede reescribirse como

$$S_{eff}^{K'} = \int_{s_1}^{s_2} ds \left( \frac{dq^i}{ds} p_i + \frac{dt}{ds} \pi_t + \frac{d\mathcal{P}^A}{ds} \bar{C}_A + \frac{d\mathcal{C}^A}{ds} \bar{\mathcal{P}}_A - \lambda^A \frac{d\pi_A}{ds} + \{K', \Omega\} \right. \\ \left. + \frac{d\mathcal{C}^0}{ds} \bar{\mathcal{P}}_0 + \pi_0 \chi^0 + i\bar{C}_0 \{\chi^0, h\} \mathcal{C}^0 + i\bar{\mathcal{P}}_0 \mathcal{P}^0 + \lambda^0 h \right), \quad (3.82)$$

donde  $\{\chi^0, h\} = 1$  y hemos tomado el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ . Integrado funcionalmente sobre los fantasmas  $\mathcal{C}^0, \mathcal{P}_0, \bar{C}_0, \bar{\mathcal{P}}_0$ , y sobre  $\lambda_0$  obtenemos una delta funcional que usaremos para integrar sobre  $\pi_t$ . Después integramos sobre  $\pi_0$  para obtener una delta funcional de la condición de norma, que nos permitirá integrar sobre  $t$ . La acción efectiva se reduce a

$$S_{eff}^{K'} = \int_{s_1}^{s_2} ds \left( \frac{dq^i}{ds} p_i + \frac{d\mathcal{P}^A}{ds} \bar{C}_A + \frac{d\mathcal{C}^A}{ds} \bar{\mathcal{P}}_A - \lambda^A \frac{d\pi_A}{ds} - \frac{T}{S} H_{BRST} + \{K', \Omega\} \right), \quad (3.83)$$

con

$$t = \frac{s - s_1}{S} T + t_1. \quad (3.84)$$

Si ahora redefinimos el fermión de norma de la siguiente manera:  $K' = \frac{T}{S} K$  y usamos (3.84) para escribir  $ds = \frac{S}{T} dt$ , obtendremos la acción efectiva

$$S_{eff}^K = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{dq^i}{dt} p_i + \frac{d\mathcal{P}^A}{dt} \bar{C}_A + \frac{d\mathcal{C}^A}{dt} \bar{\mathcal{P}}_A - \lambda^A \frac{d\pi_A}{dt} \right. \\ \left. - H_{BRST}(q, p, t) + \{K, \Omega\} \right) \quad (3.85)$$

que corresponde a la acción efectiva del problema original, no estacionario cuya carga BRST y hamiltoniano BRST inavriate son precisamente  $\Omega$  y  $H_{BRST}$  obtenidos en la sección previa.

### 3.4.2 FORMALISMO DE OPERADORES BRST-BFV PARA SISTEMAS NO ESTACIONARIOS

El objeto de la siguiente exposición es mostrar que el procedimiento de "desparametrización", realizado usando la integral funcional, puede llevarse al cabo mediante el formalismo de operadores del método BRST-BFV. Para

ello, es necesario partir de la acción efectiva en su versión cuántica. Esto significa que ha sido posible construir la carga BRST y el hamiltoniano efectivo resolviendo todos los problemas de ordenamiento de factores que aparecen al escribir las cantidades clásicas, en sus correspondientes versiones cuánticas. Supondremos, por tanto, que no aparecen anomalías que obstruyan la posible construcción de la carga BRST, ni del hamiltoniano BRST invariante. Para detalles a cerca de la acción efectiva cuántica referimos al lector a [42] y al capítulo 4 de esta tesis. Por el momento basta suponer que la versión cuántica de la acción efectiva (3.82) puede construirse obteniendo

$$S_{eff}^{K'} = \int_{s_1}^{s_2} ds \left( \langle\langle \frac{dq^i}{ds} p_i + \frac{dt}{ds} \pi_t - \lambda^A \frac{d\pi_A}{ds} + \frac{dC^0}{ds} \bar{\mathcal{P}}_0 + \frac{d\bar{C}_A}{ds} \mathcal{P}^A + \frac{dC^A}{ds} \bar{\mathcal{P}}_A \rangle\rangle - \chi^0 \pi_0 + i\bar{C}_0 C^0 + i\bar{\mathcal{P}}_0 \mathcal{P}^0 + \lambda^0 h - i\{K', \Omega\} \right) + BT. \quad (3.86)$$

$\langle\langle \rangle\rangle$  significa simetrizar los productos de los operadores correspondientes.  $BT$  representa términos que complementan el principio variacional con el objeto de que esté bien definido y que dependen de las variables (operadores) que se fijan en los extremos. Es necesario tener presente que dependiendo de la manera particular en la que se fije la norma pueden aparecer términos adicionales en el principio variacional, cuyo objeto es que las condiciones de norma se cumplan idénticamente en los extremos (para detalles ver Capítulo 5). Como la acción cuántica debe ser hermitiana con el objeto de que el correspondiente operador de evolución sea unitario, adoptaremos la regla estandar de promover las variables clásicas reales (imaginarias) a operadores hermitianos (antihermitianos), simetrizando los productos de operadores cuando sea necesario. Por tanto, los operadores  $q^i, p_i, t, \pi_t, \lambda^a, \pi_a$  serán hermitianos y los operadores  $\mathcal{P}^a, \bar{\mathcal{P}}_a$  serán antihermitianos, mientras que  $C^a, \bar{C}_a$  serán hermitianos, si las constricciones tienen paridad de Grassmann par, como supondremos es el caso. Las relaciones de conmutación (anti-conmutación) entre las variables básicas son

$$[q^i, p_j] = i\delta_j^i, \quad [t, \pi_t] = i, \quad [\lambda^a, \pi_b] = i\delta_b^a, \quad \{\bar{C}_a, \mathcal{P}^b\} = \{\bar{\mathcal{P}}_a, C^b\} = -i\delta_a^b. \quad (3.87)$$

Para reducir parcialmente la acción cuántica (3.86) observemos lo siguiente: a) la ecuación de Heisenberg asociada a la variación de  $\pi_t$  resulta

$$\frac{dt}{ds} + \lambda^0 = 0. \quad (3.88)$$

b) Los fantasmas asociados a la constricción que genera la invariancia ante reparametrizaciones desaparecen como consecuencia de sus propias ecuaciones de movimiento.

c) Las constricciones  $h = 0$  y  $\chi^0 = 0$  se implementan fuertemente debido a la variación respecto a  $\lambda^0$  y  $\pi_0$  respectivamente. De  $\chi^0 = 0$  se sigue que  $\frac{dt}{ds} = \frac{T}{S}$ . Efectuando la reducción correspondiente obtenemos la acción

$$S_{eff}^{K'} = \int_{s_1}^{s_2} ds \left( \left\langle \left\langle \frac{dq^i}{ds} p_i - \lambda^A \frac{d\pi_A}{ds} + \frac{d\bar{C}_A}{ds} p^A + \frac{dC^A}{ds} \bar{p}_A \right\rangle \right\rangle \right) \quad (3.89)$$

$$- \frac{T}{S} H_{BRST} - i\{K', \Omega\} \Big) + BT. \quad (3.90)$$

Redefiniendo  $K' = \frac{T}{S}K$  (recordamos al lector que esta redefinición es siempre posible debido a que los elementos de matriz del operador evolución entre estados físicos son independientes de la forma del fermión de norma -teorema de Fradkin-Vilkovisky-) y notando que

$$t = \frac{s - s_1}{S} T + t_1, \quad (3.91)$$

como consecuencia de  $\chi^0 = 0$ , podemos reescribir (3.90) en la forma

$$S_{eff}^K = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \left\langle \left\langle \frac{dq^i}{dt} p_i - \lambda^A \frac{d\pi_A}{dt} + \frac{d\bar{C}_A}{dt} p^A + \frac{dC^A}{dt} \bar{p}_A \right\rangle \right\rangle \right) - H_{BRST} + i\{K, \Omega\} \Big) + BT, \quad (3.92)$$

que corresponde a la acción cuántica del problema original no estacionario. Nótese que nuevamente aparecen  $H_{BRST}$  y  $\Omega$  como el hamiltoniano BRST invariante y la carga BRST del problema no estacionario.

### 3.5 OBSERVACIONES FINALES

El resultado principal de este capítulo, es el contenido en la acción reducida (3.85) o (3.92) y muestra que el método BRST-BFV es aplicable al caso dependiente del tiempo.

Estas expresiones nos permiten plantear la discusión de la posible aplicabilidad del teorema de Fradkin-Vilkovisky, que asegura que estos resultados

son independientes de la condición de norma  $\chi_0 = 0$  usada para reducir la acción. Siguiendo los pasos de la demostración hecha en [15] para el caso de sistemas independientes del tiempo, puede verificarse que  $S_{eff}$ , dada por el sistema extendido que incluye la invariancia ante reparametrizaciones (3.82) es en efecto independiente de la forma del fermión de norma  $K'$ . Como la arbitrariedad del fermión de norma inicial (3.77) está contenida en  $K$ , podemos asegurar que la integral funcional (3.82) es también independiente de la forma del fermión de norma (siempre que se escoja apropiadamente para evitar problemas de regularización).

Observemos que la expresión (3.85) es la que podríamos haber esperado excepto por la condición (3.71) sobre  $H_{BRST}$  que implica la afirmación de que  $\Omega$  es una carga conservada explícitamente dependiente del tiempo. Ya que  $H_{BRST}$  es dependiente del tiempo, el resultado de que no sea un observable BRST parece un tanto razonable. Es importante mencionar que (3.71), es invariante ante el cambio  $H_{BRST} \rightarrow H_{BRST} + [K, \Omega]$  independientemente del hecho de que  $H_{BRST}$  sea o no un observable.

Antes de cerrar esta sección haremos unos comentarios que nos permitan un cálculo directo de  $\Omega$  y  $H_{BRST}$  para ser usados en (3.82), sin tener que recurrir a la construcción parametrizada en cada caso particular. Partiendo de (3.70), junto con las propiedades de las funciones involucradas, concluimos que la construcción de las funciones de estructura que permiten construir la carga BRST  $\Omega$ , no cambia respecto al caso estacionario, excepto por la dependencia explícita respecto al tiempo que ahora aparece.

Sin embargo, (3.71) implica que algunas modificaciones aparecen cuando se construye  $H_{BRST}$  en el caso dependiente del tiempo. Para hacer contacto con la construcción estandar recordemos que (3.71) puede reescribirse como

$$\{\Omega, H_{BRST} + \pi_t\}_{(\dots, t, \pi_t)} = 0, \quad (3.93)$$

que tiene exactamente la misma forma que la ecuación correspondiente que satisface el hamiltoniano BRST en el caso independiente del tiempo, excepto por la extensión del espacio fase en las variables  $(t, \pi_t)$ . Ya que sabemos la solución del primer caso [61], podemos aplicarla directamente al caso no estacionario definiendo

$$H_{BRST} + \pi_t = \sum_{n \geq 0} H^{(n)}, \quad (3.94)$$

donde la única diferencia es, otra vez, la condición de frontera

$$H^{(0)} = H_0 + \pi_i. \quad (3.95)$$

En este sentido, la situación es similar a la extensión usada en el método de BT descrito en la sección 3.3. Sin embargo, en el presente caso, la expansión en serie (3.94) se realiza en términos de los fantasmas y antifantasmas de tal modo que cada término de la serie  $H^{(n)}$  tiene número de fantasma cero. Las relaciones de recurrencia detalladas que permiten la construcción de las funciones  $H^{(n)}$  conocidas  $H^{(N)}$  con  $N < n$  puede encontrarse en [61]. Por completez las reescribiremos aquí

$$\{H, \Omega\} = 0, \quad H = \overset{(0)}{H} + \sum_{p \geq 1} \overset{(p)}{H}, \quad \overset{(0)}{H} = H_0 \quad (3.96)$$

$$\delta \overset{(p+1)}{H} + \overset{(p)}{M} = 0 \quad (3.97)$$

$$\overset{(p)}{M} = \left[ \sum_{k=0}^p \{ \overset{(p-k)}{H}, \Omega \}_z + \sum_{k=0}^p \{ \overset{(k)}{H}, \Omega \}_{\eta, p} \right]. \quad (3.98)$$

### 3.6 CUANTIZACIÓN BRST-BFV DEL ROTOR BIDIMENSIONAL DEPENDIENTE DEL TIEMPO

Para ilustrar, de manera transparente, las propiedades generales del método de cuantización BRST-BFV, en el marco de la integral de trayectoria, descrito en este capítulo, discutiremos el ejemplo del rotor bidimensional, cuyo radio depende explícitamente del tiempo. Siguiendo los comentarios de la sección 3.5, trataremos el problema de manera directa usando los resultados (3.70), (3.71), (3.85) y la definición de la acción (3.82), obtenidos en las secciones previas, en lugar de plantear desde el comienzo la versión parametrizada del sistema.

El lagrangiano del sistema puede escribirse como

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \lambda(r - a(t)), \quad (3.99)$$

donde  $m$  es la masa de la partícula,  $r, \theta$  son coordenadas polares en el plano,  $a(t)$  es el radio, que depende del tiempo, y  $\lambda$  es un multiplicador de Lagrange. Los momentos asociados son  $p_r = m\dot{r}$  y  $p_\theta = mr^2\dot{\theta}$ , y conducen al

hamiltoniano total

$$H_T = H_0 + \lambda(r - a) = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + \lambda(r - a), \quad (3.100)$$

junto con las constricciones

$$\xi_1 = r - a(t) \approx 0, \quad \xi_2 = p_r - m\dot{a}(t) \approx 0. \quad (3.101)$$

La condición de compatibilidad  $\frac{d\xi_2}{dt} \approx 0$ , nos permite determinar el multiplicador  $\lambda$

$$\lambda = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - m\ddot{a}. \quad (3.102)$$

De esta manera del procedimiento de Dirac finaliza y concluimos que las constricciones (3.101) son de segunda clase y dependientes del tiempo.

Con el objeto de aplicar el método de cuantización BRST-BFV es necesario convertir estas constricciones en constricciones de primera clase. Para ello aplicaremos el método de conversión de BT descrito en la sección 3.3 a las constricciones  $\xi_1, \xi_2$ . Añadimos, entonces, dos variables canónicas conjugadas  $q$  y  $\pi$ , de tal manera que  $\{q, \pi\} = 1$ . La aplicación directa del método conduce a las constricciones de primera clase

$$\tau_1 = \xi_1 + q, \quad \tau_2 = \xi_2 - \pi. \quad (3.103)$$

El hamiltoniano total  $H_T$ , en el espacio fase extendido, puede construirse usando las ecuaciones (3.45), (3.46), (3.42) y (3.43). Alternativamente podemos usar las observaciones contenidas en la ecuación (3.50) ya que la corrección, para construir las constricciones de primera clase a partir de las constricciones de segunda clase originales, es lineal. Comenzando con

$$H^{(0)} = H_{T0} + \pi_1 = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + \lambda(r - a) + \pi_1, \quad (3.104)$$

calculamos los primeros tres términos de la expansión (3.45)

$$\begin{aligned} H^{(1)} &= -q \left( \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \lambda - m\ddot{a} \right) - \pi \left( \frac{p_r}{m} - \dot{a} \right), \\ H^{(2)} &= \frac{1}{2m} \left( 3q^2 \frac{p_\theta^2}{r^4} + \pi^2 \right), \\ H^{(3)} &= -\frac{6q^3 p_\theta^2}{4m r^5}. \end{aligned} \quad (3.105)$$

De estas relaciones podemos inferir que la forma del hamiltoniano extendido de primera clase tendrá la estructura de la serie binomial  $(q+r)^{-2}$ . Por tanto el resultado es

$$H_T = \frac{1}{2m} \left[ \pi_\eta^2 + \frac{p_\theta^2}{Q^2} \right] + \lambda(Q - a(t)) + m\ddot{a}(Q/2 - \eta) + \dot{a}(\pi_Q - \pi_\eta/2), \quad (3.106)$$

donde hemos introducido las nuevas variables canónicas

$$\eta = \frac{1}{2}(r - q), \quad \pi_\eta = p_r - \pi, \quad Q = r + q, \quad \pi_Q = \frac{1}{2}(p_r + \pi). \quad (3.107)$$

La expresión anterior (3.106) preserva en el tiempo el carácter de primera clase de las constricciones (3.103). El hamiltoniano extendido es  $\mathcal{H}_E = \mathcal{H}_0 + \lambda^\alpha \tau_\alpha$  donde  $\mathcal{H}_0$  está definido en la ecuación (3.106) substrayendo el término  $\lambda\tau_1$ . La correspondiente función lagrangiana de primer orden tendrá la estructura

$$L_E = -\dot{\pi}_Q Q + p_\theta \dot{\theta} + \pi_\eta \dot{\eta} - \frac{1}{2m} \left[ \pi_\eta^2 + \frac{p_\theta^2}{Q^2} \right] - m\ddot{a}(Q/2 - \eta) - \dot{a}(\pi_Q - \pi_\eta/2) - \lambda(Q - a) - \sigma(\pi_\eta - m\dot{a}) \quad (3.108)$$

Siguiendo la formulación estandar del método BRST-BFV, definimos los vectores

$$\begin{aligned} G_\alpha &= (\pi_\lambda, \pi_\sigma, Q - a, \pi_\eta - m\dot{a}), \\ \eta^\alpha &= (-i\mathcal{P}^1, -i\mathcal{P}^2, \mathcal{C}^1, \mathcal{C}^2), \\ \mathcal{P}_\alpha &= (i\bar{\mathcal{C}}_1, i\bar{\mathcal{C}}_2, \bar{\mathcal{P}}_1, \bar{\mathcal{P}}_2), \end{aligned} \quad (3.109)$$

donde los dos últimos corresponden a los fantasmas y antifantasmas asociados con las constricciones de primera clase  $G_\alpha$  y cuyos paréntesis de Poisson son  $\{\eta^\alpha, \mathcal{P}_\beta\} = \{\mathcal{P}_\beta, \eta^\alpha\} = -\delta_\beta^\alpha$ . La carga BRST está dada por

$$\Omega = -i\mathcal{P}^1 \pi_\lambda - i\mathcal{P}^2 \pi_\sigma + \mathcal{C}^1(Q - a) + \mathcal{C}^2(\pi_\eta - m\dot{a}). \quad (3.110)$$

El operador de evolución está determinado por la acción efectiva mediante la relación  $Z = \int \mathcal{D}\mu \exp(iS_{eff})$ , donde  $\mathcal{D}\mu$  es la medida de Liouville correspondiente al espacio fase extendido que contiene a las variables adicionales

usadas al convertir las constricciones originales a constricciones de primera clase. De acuerdo al resultado (3.85) la expresión para  $S_{eff}$  es

$$S_{eff} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \dot{q}^i p_i - \lambda^a \dot{\pi}_a + \dot{\eta}^a \mathcal{P}_a - H_{eff} \right). \quad (3.111)$$

El hamiltoniano efectivo está definido por  $H_{eff} = H_{BRST} - \{K, \Omega\}$ , donde  $K$  es el fermión de norma. Como el hamiltoniano extendido  $H_E$  satisface (3.71) coincide con el hamiltoniano BRST invariante  $H_{BRST} = H_E$ . Imponiendo la condición de norma  $K = \bar{\mathcal{P}}_1 \lambda + \bar{\mathcal{P}}_2 \sigma$ , el hamiltoniano efectivo puede reescribirse como

$$H_{eff} = \frac{1}{2m} \left( \pi_\eta^2 + \frac{p_\theta^2}{Q^2} \right) + i\bar{\mathcal{P}}_1 \mathcal{P}^1 + i\bar{\mathcal{P}}_2 \mathcal{P}^2 \\ + \lambda(Q - a) + \sigma(\pi_\eta - m\dot{a}) + m\ddot{a} \left( \frac{Q}{2} - \eta \right) + \dot{a} \left( \pi_Q - \frac{\pi_\eta}{2} \right) \quad (3.112)$$

y la acción efectiva será

$$S_{eff} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ p_\theta \dot{\theta} + \pi_\eta \dot{\eta} - \dot{\pi}_Q Q - \dot{\pi}_\lambda \lambda - \dot{\pi}_\sigma \sigma + \dot{\mathcal{P}}^1 \bar{\mathcal{C}}_1 + \dot{\mathcal{P}}^2 \bar{\mathcal{C}}_2 + \dot{\mathcal{C}}^1 \bar{\mathcal{P}}_1 \right. \\ \left. + \dot{\mathcal{C}}^2 \bar{\mathcal{P}}_2 - \frac{p_\theta^2}{2mQ^2} - \frac{\pi_\eta^2}{2m} - m\ddot{a} \left( \frac{Q}{2} - \eta \right) - \dot{a} \left( \pi_Q - \frac{\pi_\eta}{2} \right) - i\bar{\mathcal{P}}_1 \mathcal{P}^1 \right. \\ \left. - i\bar{\mathcal{P}}_2 \mathcal{P}^2 - \lambda(Q - a) - \sigma(\pi_\eta - m\dot{a}) \right]. \quad (3.113)$$

Ahora impondremos las condiciones apropiadas en los extremos de tal manera que sean BRST invariantes. Estas condiciones nos garantizan que la solución de las ecuaciones de movimiento asociadas a la acción efectiva es única, una vez que se especifican las condiciones iniciales. En nuestro caso, los fantasmas y antifantasmas no están acoplados con el resto de las variables dinámicas. Las ecuaciones de movimiento para los fantasmas son de segundo orden

$$\ddot{\bar{\mathcal{C}}}^k = 0, \quad \ddot{\mathcal{C}}^k = 0. \quad (3.114)$$

Por tanto es suficiente escoger las siguientes condiciones en los extremos para este sector

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^1(t_1) &= \mathcal{C}^2(t_1) = \mathcal{C}^1(t_2) = \mathcal{C}^2(t_2) = 0, \\ \bar{\mathcal{C}}^1(t_1) &= \bar{\mathcal{C}}^2(t_1) = \bar{\mathcal{C}}^1(t_2) = \bar{\mathcal{C}}^2(t_2) = 0. \end{aligned} \quad (3.115)$$

Las ecuaciones de movimiento restantes son

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_\theta &= 0 & \dot{\theta} - \frac{p_\theta}{mQ^2} &= 0, \\
 \dot{\pi}_\eta - m\dot{a} &= 0 & \dot{\eta} - \pi_\eta/m + \dot{a}/2 - \sigma &= 0, \\
 \dot{\pi}_Q - \frac{p_\theta^2}{mQ^3} + \frac{m\ddot{a}}{2} + \lambda &= 0 & \dot{Q} - \dot{a} &= 0, \\
 \dot{\lambda} &= 0 & \dot{\pi}_\lambda + Q - a &= 0, \\
 \dot{\sigma} &= 0 & \dot{\pi}_\sigma + \pi_\eta - m\dot{a} &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.116}$$

En particular, éstas implican  $\dot{\pi}_\lambda = 0 = \dot{\pi}_\sigma$  de tal manera que podemos imponer las siguientes condiciones en los extremos

$$\pi_\lambda(\tau_1) = \pi_\lambda(\tau_2) = \pi_\sigma(\tau_1) = \pi_\sigma(\tau_2) = 0, \tag{3.117}$$

que nos garantizan que  $\pi_\lambda(t) = 0 = \pi_\sigma(t)$ . De este modo recuperamos las constricciones originales  $Q - a = 0$  y  $\pi_\eta - m\dot{a} = 0$  como consecuencia de las ecuaciones de movimiento. Las ecuaciones diferenciales restantes que desacoplan el sistema de ecuaciones (3.116) son

$$\ddot{\eta} - \frac{1}{2}\ddot{a} = 0, \quad \ddot{\theta} + \frac{2p_\theta}{ma^3}\dot{\theta} = 0, \quad \ddot{\pi}_Q + \frac{3p_\theta^2}{ma^4}\dot{a} + m\ddot{a} = 0. \tag{3.118}$$

Para obtener soluciones únicas a estas ecuaciones de movimiento es necesario fijar en los extremos las variables correspondientes. Denotando por  $z(t_1) = z_1$ ,  $z(t_2) = z_2$  los valores correspondientes a las variables  $\theta$ ,  $\eta$  y  $a$ , fijas en los extremos, podemos escribir  $p_\theta$ ,  $\sigma$ ,  $\lambda$  fijos en los extremos, en términos de estas condiciones iniciales, resultando

$$\begin{aligned}
 p_\theta &= \frac{m(\theta_2 - \theta_1)}{\int_{t_1}^{t_2} a^{-2} dt}, & \sigma &= \frac{\eta_2 - \eta_1}{t_2 - t_1} - \frac{a_2 - a_1}{2(t_2 - t_1)}, \\
 \lambda &= \frac{p_\theta^2}{m(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} a^{-3} dt - \frac{m(\dot{a}_2 - \dot{a}_1)}{t_2 - t_1} - \frac{\pi_{Q_2} - \pi_{Q_1}}{t_2 - t_1}.
 \end{aligned} \tag{3.119}$$

Ahora estamos en posición de especificar los valores fijos en los extremos para el resto de las variables. Escogiendo

$$\eta_1 = \frac{1}{2}a(t_1) \quad \eta_2 = \frac{1}{2}a(t_2), \tag{3.120}$$

se sigue que  $\sigma(t) = 0$ . Por último, escogiendo

$$\pi_{Q_1} = \pi_{Q_2} = 0, \quad (3.121)$$

recuperamos el multiplicador de lagrange correcto (3.119) para el caso estacionario. Concluimos que todas las ecuaciones de movimiento con las condiciones iniciales escogidas son consistentes y BRST-invariantes.

Ahora calcularemos la integral

$$Z = \int \mathcal{D}P^1 \mathcal{D}\bar{P}_1 \mathcal{D}C^1 \mathcal{D}\bar{C}_1 \mathcal{D}P^2 \mathcal{D}\bar{P}_2 \mathcal{D}C^2 \mathcal{D}\bar{C}_2 \\ \mathcal{D}\pi_\eta \mathcal{D}\eta \mathcal{D}p_\theta \mathcal{D}\theta \mathcal{D}\pi_Q \mathcal{D}Q \mathcal{D}\pi_\lambda \mathcal{D}\lambda \mathcal{D}\pi_\sigma \mathcal{D}\sigma \exp[iS_{eff}]. \quad (3.122)$$

La integración sobre los fantasmas resulta en un factor  $T^2$  donde  $T = \tau_2 - \tau_1$ , de tal manera que  $Z$  se reduce a

$$Z = T^2 \int \mathcal{D}\pi_\eta \mathcal{D}\eta \mathcal{D}p_\theta \mathcal{D}\theta \mathcal{D}\pi_Q \mathcal{D}Q \mathcal{D}\pi_\lambda \mathcal{D}\lambda \mathcal{D}\pi_\sigma \mathcal{D}\sigma \\ \exp \left[ i \int_{\tau_1}^{\tau_2} dt (p_\theta \dot{\theta} + \pi_\eta \dot{\eta} - \dot{\pi}_Q Q - \dot{\pi}_\lambda \lambda - \dot{\pi}_\sigma \sigma - \frac{p_\theta^2}{2mQ^2} - \frac{\pi_\eta^2}{2m} \right. \\ \left. - m\ddot{a} \left( \frac{Q}{2} - \eta \right) - \dot{a} \left( \pi_Q - \frac{\pi_\eta}{2} \right) - \lambda(Q - a) - \sigma(\pi_\eta - m\dot{a}) \right] \quad (3.123)$$

El resto de las integrales funcionales se calculan usando la siguiente expresión general

$$\int \mathcal{D}q \quad \mathcal{D}p \exp i \int_{t_1}^{t_2} dt (p\dot{q} + F(p; z) + q\dot{g}(t)) = \\ \int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \quad \exp i \{ p_0(q_1 - q_2) + q_1(g(t_2) - g(t_1)) \} \times \\ \exp i \int_{t_1}^{t_2} dt F(p_0 + g(t) - g(t_2); z), \quad (3.124)$$

donde la variable  $p$  está libre en los extremos, mientras que  $q$  está fija mediante las condiciones  $q(t_1) = q_1, q(t_2) = q_2$ . Hemos denotado por  $z$  cualquier otra variable involucrada y por  $g(t)$  una función arbitraria del tiempo.

La integral sobre  $\sigma, \pi_\sigma, \lambda, \pi_\lambda$  corresponde al caso  $g = 0$  y resulta

$$Z = T^2 \int d\sigma_0 d\lambda_0 \mathcal{D}\pi_\eta \mathcal{D}\eta \mathcal{D}p_\theta \mathcal{D}\theta \mathcal{D}\pi_Q \mathcal{D}Q \\ \exp \left[ i \int_{\tau_1}^{\tau_2} dt (p_\theta \dot{\theta} + \pi_\eta \dot{\eta} - \dot{\pi}_Q Q - \frac{p_\theta^2}{2mQ^2} - \frac{\pi_\eta^2}{2m} \right. \\ \left. - m\ddot{a} \left( \frac{Q}{2} - \eta \right) - \dot{a} \left( \pi_Q - \frac{\pi_\eta}{2} \right) - \lambda_0(Q - a) - \sigma_0(\pi_\eta - m\dot{a}) \right] \quad (3.125)$$

Las integrales funcionales restantes sobre  $\eta$ ,  $\pi_\eta$  y  $Q$ ,  $\pi_Q$  pueden realizarse aplicando también la fórmula previa. La integración respecto de  $\lambda_0$  y  $\sigma_0$  contribuyen cada una, con un factor  $1/T$  y producen las funciones  $\delta$  adecuadas. El resultado final es

$$Z = \int \mathcal{D}p_\theta \mathcal{D}\theta \exp \left[ i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left( p_\theta \dot{\theta} - \frac{p_\theta^2}{2ma^2(\tau)} - \frac{m}{2} \dot{a}^2(\tau) \right) \right]. \quad (3.126)$$

El último término en la expresión resultante para  $Z$  proviene del término  $p_\tau^2/(2m)$  del principio variacional original. Este término es una derivada total respecto al tiempo y contribuye a  $Z$  con un factor de fase global. La expresión resultante para  $Z$ , hasta el factor de fase antes mencionado es [70]

$$Z = \langle \theta_2 \tau_2 | \theta_1 \tau_1 \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \exp \left[ in(\theta_2 - \theta_1) - i \frac{n^2}{2m} \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \frac{1}{a^2(\tau)} \right] \quad (3.127)$$

De esta manera hemos recuperado el resultado conocido de la expresión para el propagador del rotor rígido bidimensional cuyo radio depende del tiempo.

## CAPÍTULO 4

### MÉTODO BRST-BFV Y EL PRINCIPIO DE ACCIÓN DE SCHWINGER

Dentro de los posibles métodos de cuantización de sistemas clásicos, como el método de cuantización canónica, la integral funcional o el método de cuantización geométrica se encuentra el principio de acción de Schwinger propuesto inicialmente en [81] con el doble objetivo de formular un método de cuantización covariante y con la posibilidad de involucrar, entre sus variables dinámicas, grados de libertad fermiónicos. Este principio puede aplicarse a un sistema cuántico arbitrario y parte de una formulación de operadores de la acción lagrangiana. Para detalles de su formulación referimos al lector a la sección 1.6 y referencias ahí citadas. La importancia de este principio ha motivado recientemente su aplicación al caso de sistemas con constricciones. Por ejemplo, en la referencia [27], se ha mostrado que en el caso de constricciones de segunda clase, este principio conduce a las relaciones de conmutación (anticomutación) correctas: aquéllas obtenidas mediante los paréntesis de Dirac. Otra aplicación de este principio de acción ha sido calcular los elementos de matriz BRST invariantes del operador de evolución en los casos de la partícula libre relativista sin espín y con espín[80], que previamente habían sido obtenido usando la formulación BRST-BFV en el marco de la integral de trayectoria en [46, 20, 57]. Desafortunadamente, el cálculo de la Ref. [80] hace uso incorrecto de las condiciones BRST invariantes en los extremos, dando lugar a una base incorrecta de los estados físicos en los tiempos inicial y final.

En este capítulo introduciremos la versión de operadores de la acción BRST-BFV para un sistema arbitrario con constricciones de primera clase, inspirada en el principio de acción de Schwinger[42]. Esta acción está definida de tal manera que incorpora las condiciones apropiadas -BRST-invariantes- en los extremos. Esta formulación cumple un objetivo doble: se presenta como una alternativa a la integral funcional y como un método general para

tratar de manera transparente los términos de frontera que complementan el principio variacional, tanto en el caso de sistemas con grados de libertad fermiónicos, como en casos donde es necesario añadir términos de frontera para obtener un principio variacional consistente cuando se fija una norma canónica inicialmente no accesible[59]. Es conocido que la integral funcional presenta serios problemas, tanto en la definición de la medida, como en el hecho de que el proceso de discretización, involucrado en su definición, no es único.<sup>33</sup> Como consecuencia, la teoría de transformaciones hamiltoniana (transformaciones canónicas, teoría de Hamilton-Jacobi) no puede implementarse en la integral funcional sin ambigüedades [84]. Otro problema relacionado a éste es que dos principios variacionales equivalentes (que difieren por un término de frontera que es una derivada total respecto al tiempo de una función arbitraria), no conducen a resultados equivalentes usando la integral funcional. El principio de acción de Schwinger, partiendo de la formulación de operadores, tiene la ventaja sobre la integral funcional de controlar de manera directa todos los problemas de ordenamiento de factores que puedan aparecer al calcular los elementos de matriz involucrados. Sin embargo, es un método relativamente menos poderoso que la integral funcional, pues implica resolver las ecuaciones de Heisenberg para calcular el propagador. La identificación del principio de Schwinger como la versión diferencial de la integral funcional es, en general, incorrecta puesto que los dos procedimientos pueden conducir a resultados distintos, como en los casos en que los problemas de ordenamiento de factores sean relevantes. Una

---

<sup>33</sup>Es posible usar el principio de acción de Schwinger para calcular el operador evolución entre dos tiempos infinitesimalmente cercanos. Esto permite, en algunos casos, obtener una "regla de discretización" para usarla en la integral funcional.

diferencia fundamental<sup>34</sup> entre estos dos procedimientos es que en el primero la información dinámica está contenida en las trayectorias solución de las ecuaciones de movimiento de Heisenberg compatibles con el principio variacional cuántico con sus condiciones sobre los puntos extremos incorporadas. Aunque la variación de los elementos de matriz del propagador no depende de la trayectoria particular que une los puntos extremos, esta trayectoria debe ser solución de las ecuaciones de movimiento cuánticas. Por otra parte, en la integral funcional la información dinámica relevante está contenida en el símbolo de la acción clásica. Aquí no es importante si la trayectoria que une los puntos extremos es solución de las ecuaciones de movimiento.

Como aplicación de este principio de acción cuántico y como una propuesta alternativa al procedimiento de la integral funcional, calcularemos detalladamente los propagadores correspondientes a la partícula no relativista, la partícula relativista y la partícula relativista con espín. En los cálculos presentados aquí se escogen apropiadamente las condiciones sobre los puntos extremos, lo que nos permitirá formular la teoría general de manera consistente y aclarar algunos puntos incorrectos que aparecen en [80].

El capítulo está organizado como sigue: en la sección 4.1 construiremos la acción cuántica BRST-BFV que es el ingrediente básico del principio de acción de Schwinger. En las siguientes secciones 4.2, 4.3, 4.4, presentamos los correspondientes cálculos de los propagadores para los casos particulares antes mencionados. Estos cálculos los haremos imponiendo condiciones de norma no canónicas. En particular presentaremos la formulación correcta del principio de acción para los sistemas con grados de libertad fermiónicos y mostraremos cómo la incorporación de los términos de frontera apropiados es de gran utilidad en el cálculo explícito del propagador correspondiente.

<sup>34</sup>Usando la misma notación que en la sección 1.6 podríamos escribir la variación del propagador entre los tiempos  $\tau'$  y  $\tau''$  en términos de la integral funcional de la siguiente manera

$$\delta\langle\tau''|\tau'\rangle = i \int \delta\left(\int_{\tau'}^{\tau''} Ld\tau\right) e^{i \int_{\tau'}^{\tau''} Ld\tau} \mathcal{D}q. \quad (4.1)$$

De aquí se sigue el principio de Schwinger[95]

$$\delta\langle\tau''|\tau'\rangle = i\langle\tau''|\int \delta\left(\int_{\tau'}^{\tau''} Ld\tau\right)|\tau'\rangle. \quad (4.2)$$

Esta deducción es, en general, incorrecta ya que la medida en la integral funcional puede ser altamente no trivial.

#### 4.1. ACCIÓN CUÁNTICA BRST-BFV

Como el principio de acción no contiene una prescripción particular para construir la acción cuántica, seguiremos el procedimiento usual para definir la acción cuántica a partir de la acción clásica del problema.<sup>35</sup> Siempre que se parte de un sistema clásico para construir el correspondiente sistema cuántico es necesario resolver consistentemente todos los problemas de ordenamiento de factores que aparecen al asociar a las funciones clásicas sus correspondiente operadores. No existe una prescripción global que permita resolver este tipo de problemas en todos los casos. Como un ejemplo particular de ordenamiento de factores consideremos el ordenamiento de Weyl definido por

$$\hat{F}(\hat{z}) = \int \hat{\Omega}(\xi) \hat{F}(\xi) d^n \xi, \quad \Omega(\xi) = \exp(-i\hat{z} \cdot \xi), \quad \hat{z} \cdot \xi = \hat{z}^A \xi_A = \sigma^{AB} \hat{z}_a \hat{\xi}_B, \quad (4.3)$$

donde  $\hat{F}$  es

$$\hat{F}(\xi) = \int \exp(iz \cdot \xi) F(z) d^n z. \quad (4.4)$$

Aquí  $F(z)$  es la función clásica y  $\hat{F}(z)$  es el operador correspondiente, ordenado con la regla de Weyl,  $z$  denota el conjunto de coordenadas del espacio fase (no necesariamente canónicas) y  $\sigma^{AB}$  es la inversa de la estructura simpléctica que define los paréntesis de Poisson en el espacio fase. Si  $F(z)$  es el símbolo de la función clásica, el ordenamiento de Weyl consiste en reemplazar las variables dinámicas clásicas  $z$  por sus operadores  $\hat{z}$ . Por ejemplo, en el caso de coordenadas canónicas  $x, p$  la regla anterior conduce a

$$xp \rightarrow \frac{1}{2}(xp + px), \quad x^2p \rightarrow \frac{1}{3}(x^2p + xpx + px^2), \quad xpx \rightarrow (x^2p + xpx + px^2). \quad (4.5)$$

Para un sistema con constricciones, una propuesta es construir la acción clásica independiente de norma que se obtiene de aplicar el método BRST-BFV [58]. La acción resultante tiene la ventaja de ser invariante ante una transformación global, la transformación BRST. Como consecuencia todas las coordenadas canónicas en el espacio fase extendido son independientes.

<sup>35</sup>A nivel de la integral funcional un procedimiento posible para construir la "acción clásica" a partir de la definición del propagador se presenta en [65]. Este procedimiento permite obtener las acciones clásicas usuales en los casos de la partícula libre y la partícula libre relativista. De especial interés resultan las discrepancias que se obtienen en el caso de la partícula de espín 1/2.

Esto implica que podemos usar el principio de acción de Schwinger tal como lo hemos expuesto en la sección 1.3.

Comenzaremos planteando la acción clásica de un sistema descrito por las coordenadas canónicas  $q^i, p_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), que tiene constricciones de primera clase  $G_a(p, q)$  ( $a = 1, \dots, m$ ), y cuyo hamiltoniano de primera clase es  $H_0(q, p)$

$$G_a(q, p) \approx 0 \quad (4.6)$$

$$\{G_a, G_b\}_{PB} = C_{ab}{}^c(q, p)G_c, \quad \{G_a, H_0\}_{PB} = V_a{}^c(q, p)G_c, \quad (4.7)$$

donde  $\{, \}_{PB}$  denota el paréntesis de Poisson clásico. Supondremos, por simplicidad, que todas las constricciones de segunda clase han sido eliminadas.

Consideremos el principio variacional para las trayectorias  $q^i(\tau)$ ,  $p_i(\tau)$ ,  $\lambda^a(\tau)$ , con las siguientes condiciones en los extremos  $\tau'$  y  $\tau''$  ( $\lambda^a(\tau)$  denotan los multiplicadores de Lagrange asociados a las constricciones de primera clase (4.7)),

$$Q^i(q(\tau'), p(\tau'), \tau') = Q^i, \quad Q^i(q(\tau''), p(\tau''), \tau'') = Q^{i'}, \quad (4.8)$$

donde  $Q^i(q, p, \tau)$  forman un conjunto completo de variables que conmutan

$$\{Q^i, Q^j\}_{PB} = 0, \quad (\text{a tiempos iguales}). \quad (4.9)$$

La acción para este principio variacional es

$$S[q^i(\tau), p_i(\tau), \lambda(\tau)] = \int_{\tau'}^{\tau''} (p_i \dot{q}^i - H_0 - \lambda^a G_a) d\tau - B(\tau'') + B(\tau'), \quad (4.10)$$

para las trayectorias cuyos puntos inicial y final son (4.8), donde la función del espacio fase  $B(q, p, \tau)$  es tal que

$$p_i \delta q^i = P_i \delta Q^i + \delta B, \quad (4.11)$$

para  $\tau$  fijo [60]. Aquí, los  $P_i$  son los momentos conjugados a las  $Q^i$ ,

$$\{P_i, P_j\}_{PB} = 0, \quad \{Q^i, P_j\}_{PB} = \delta_j^i. \quad (4.12)$$

De esta manera la variación de la acción (4.10), evaluada sobre las trayectorias solución de sus correspondientes ecuaciones de Euler-Lagrange, es cero, como consecuencia de  $\delta Q^i(\tau') = \delta Q^i(\tau'') = 0$ . Supondremos que (4.10) es

la acción resultante que surge de la aplicación sistemática del procedimiento de Dirac. Esto es, no hay más constricciones en el problema y además las constricciones de segunda clase han sido eliminadas usando alguno de los procedimientos mencionados en esta tesis: paréntesis de Dirac, reducción directa o el método de BT. En particular, esto significa que ya hemos implementado todas las condiciones de consistencia  $\dot{G}_a \approx 0$ .

Con el objeto de construir la acción efectiva BRST-BFV de acuerdo a lo expuesto en el Capítulo 1, introduciremos los apropiados signos que aparezcan al considerar tanto variables fermiónicas como bosónicas. Supondremos que todas nuestras variables de configuración son reales y tienen paridad de Grassmann definida. Escogeremos también la función lagrangiana de manera que sea real y par. Si alguna coordenada  $\theta$  es fermiónica (su paridad de Grassmann es impar), su correspondiente momento  $p_\theta$  será imaginario e impar, de tal manera que  $\dot{\theta}p_\theta$  sea real y par. Supondremos además, que todas las constricciones son reales.<sup>36</sup> Éstas pueden ser pares o impares. En el segundo caso  $\lambda^a$  es imaginario e impar, de modo tal que  $\lambda^a G_a$  sea real y par. Siguiendo la prescripción estandar del método BRST-BFV, promoveremos los multiplicadores de Lagrange a variables dinámicas introduciendo sus correspondientes momentos conjugados  $\pi_a$ , e imponiendo las constricciones adicionales  $\pi_a \approx 0$  de tal manera que tendremos ahora  $2n$  constricciones de primera clase  $G_A = (\pi_a, G_a) \approx 0$ . La paridad de Grassmann  $\epsilon$  de las nuevas variables es tal que  $\epsilon(\pi_a) = \epsilon(\lambda^a) = \epsilon(G_a) \equiv \epsilon_a$ . El siguiente paso consiste en introducir los fantasmas  $\eta^A$  junto con los correspondientes antifantasmas  $\mathcal{P}_A$ , canónicamente conjugados, de modo que  $\epsilon(\eta^A) = \epsilon(\mathcal{P}_A) = \epsilon_a + 1$ . Introduciendo los factores de signo apropiados, los vectores (1.98) son

$$\eta^A = (-(i)^{\epsilon_a+1} \mathcal{P}^a, \mathcal{C}^a), \quad \mathcal{P}_A = ((i)^{\epsilon_a+1} \bar{\mathcal{C}}_a, \bar{\mathcal{P}}_a). \quad (4.13)$$

<sup>36</sup>Es posible formular el método BRST-BFV cuando las constricciones son complejas[1]. Sin embargo en este caso aparecen nuevas posibilidades que deben ser analizadas aparte. Este tipo de constricciones han adquirido importancia debido a los desarrollos de la formulación de la teoría de la gravedad en términos de las variables de Ashtekar[6]. Sería necesario revisar la aplicación del método BRST-BFV a la teoría de la gravedad [7] y al caso en 2+1 dimensiones [48] en variables de Ashtekar, teniendo en cuenta las posibilidades que aparecen al formular el método BRST-BFV con constricciones complejas. Es también de interés analizar, en este contexto, el problema de las "condiciones de realidad" como constricciones adicionales que permiten obtener los grados de libertad reales de la teoría[75][86].

La acción efectiva BRST-BFV clásica puede entonces escribirse

$$S_{BRST} = \int_{\tau'}^{\tau''} \left( \dot{q}^i p_i - \lambda^a \dot{\pi}_a + \bar{C}_a \mathcal{P}^a + C^a \bar{\mathcal{P}}_a - H_{BRST} \right) d\tau - [B]_{\tau'}^{\tau''}, \quad (4.14)$$

donde la integral se extiende sobre todas las trayectorias que cumplen las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} Q'(q(\tau'), p(\tau'), \tau') &= Q'', & Q'(q(\tau''), p(\tau''), \tau'') &= Q''', \\ C^a(\tau') &= C^a(\tau'') = 0, & \bar{C}_a(\tau') &= \bar{C}_a(\tau'') = 0, \\ \pi_a(\tau') &= \pi_a(\tau'') = 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

En la Ec.(4.14),  $H_{BRST} = H_c - \{\Psi, \Omega\}_{PB}$ ,  $H_c$  es el hamiltoniano canónico,  $\Psi$  es el fermión de norma y  $\Omega$  es la carga BRST cuya paridad de Grassmann es impar y satisface  $\{\Omega, \Omega\}_{PB} = 0$ . Reescribimos aquí la forma general de la carga BRST incorporando los factores de signo apropiados

$$\Omega = -(i)^{\epsilon_a+1} \mathcal{P}^a \pi_a + C^a G_a + \text{"más"}, \quad (4.16)$$

donde "más" denota términos de orden mayor en los fantasmas. El algoritmo sistemático para construir la carga BRST ya ha sido presentado y puede verse en las secciones 1.2 y 3.4.

En todas las aplicaciones que consideraremos en este capítulo impondremos como condición de norma

$$\Psi = \bar{\mathcal{P}}_a \lambda^a, \quad (4.17)$$

(normas no-canónicas) observando que  $\Psi$  tiene paridad de Grassmann impar. Este fermión de norma conduce a la norma no canónica  $\lambda^a = 0$ . Con estas convenciones podemos leer directamente de la acción (4.14) los paréntesis de Poisson para las variables fundamentales<sup>37</sup>

$$\begin{aligned} \{p_i, q^j\}_{PB} &= -\delta_i^j = (-)^{\epsilon(q^j)+1} \{q^j, p_i\}_{PB} \\ \{\pi_a, \lambda^b\}_{PB} &= -\delta_a^b = (-)^{\epsilon_a+1} \{\lambda^b, \pi_a\}_{PB} \\ \{\mathcal{P}^a, \bar{C}_b\}_{PB} &= -\delta_b^a = (-)^{\epsilon_a} \{\bar{C}_b, \mathcal{P}^a\}_{PB} \\ \{\bar{\mathcal{P}}_a, C^b\}_{PB} &= -\delta_a^b = (-)^{\epsilon_a} \{C^b, \bar{\mathcal{P}}_a\}_{PB}. \end{aligned}$$

La acción (4.14) tiene dos propiedades fundamentales:

<sup>37</sup>La diferencia de signo entre las variables bosónicas y fermiónicas se explica en el apéndice: Grassmanología.

- (i) todas las variables involucradas son independientes (ya no hay relaciones entre ellas). Esta propiedad implica, en particular, que la medida en la integral de trayectoria está determinada por la medida de Liouville en el espacio fase extendido. El volumen en este espacio fase se conserva, obedeciendo la ecuación de continuidad: todo estado en el espacio fase está únicamente determinado y la arbitrariedad asociada a la invariancia de norma ha desaparecido.
- (ii) La simetría remanente en la acción (4.14) es una supersimetría global generada por la carga BRST (4.16), que impone condiciones sobre los puntos extremos del principio variacional de tal modo que sean BRST invariantes (ver discusión en la sección 1.2.2). De otra manera la acción (4.14) no será BRST invariante ante esta transformación.

La acción efectiva clásica (4.14) es nuestro punto de partida para construir la correspondiente versión cuántica. Promoveremos todas las variables reales (imaginarias)  $A$ , incluyendo a los fantasmas, a sus correspondientes operadores hermiticos (anti-hermiticos)  $\hat{A}$ . Como la acción cuántica debe ser hermitiana con el objeto de preservar el carácter unitario de la teoría, adoptaremos el reemplazo estandar para extender productos de variables clásicas reales en productos hermitianos de operadores hermitianos

$$(i)^{\epsilon(A)\epsilon(B)} AB \rightarrow \frac{1}{2} (i)^{\epsilon(A)\epsilon(B)} (\hat{A}\hat{B} + (-1)^{\epsilon(A)\epsilon(B)} \hat{B}\hat{A}) \equiv \langle\langle \hat{A}\hat{B} \rangle\rangle. \quad (4.18)$$

Observemos que las propiedades de operador supuestas para las variaciones  $\delta\hat{A}$ ,  $\delta\hat{B}$  garantizan precisamente que  $\delta \langle\langle \hat{A}\hat{B} \rangle\rangle = (\delta\hat{A})B + A(\delta\hat{B})$ . En particular, la prescripción anterior debe ser aplicada al término cinético y al término de frontera en la acción cuántica. La cuestión del ordenamiento de factores en la función hamiltoniana efectiva debe ser resuelta por algún procedimiento. Esto implica, en particular, que debemos construir las constricciones de primera clase cuánticas y la carga BRST cuántica con un ordenamiento prescrito. Es muy importante verificar que el operador asociado a la carga BRST cumpla con dos características básicas: (i) ser hermitiano, y (ii) ser nilpotente. Nótese que es necesario tener una prescripción del producto escalar con respecto al cual el operador BRST sea hermitiano. Si tal ordenamiento no existe esto puede considerarse como un síntoma de la presencia de alguna anomalía cuántica, en la línea de lo discutido previamente en la sección 1.2.3. El formalismo BRST-BFV tiene la ventaja de

ser consistente aún en casos en los que el método de Dirac no lo es. Por ejemplo [36], para el caso de constricciones lineales en los momentos, los observables lineales en los momentos  $Z = Z^i(q)p_i$ , son formalmente hermitianos si los vectores de estado  $\psi$  se consideran como densidades de peso  $1/2$  ( $\hat{Z}\psi = -iZ^i\partial_i\psi - \frac{1}{2}Z^i_i\psi$ )<sup>38</sup>. El ordenamiento simétrico hermitiano  $\xi_a^i(q)p_i \rightarrow \frac{1}{2}(\xi_a^i(q)p_i + p_i\xi_a^i(q))$  y  $\eta\eta\mathcal{P} \rightarrow \frac{1}{2}(\eta\eta\mathcal{P} + \mathcal{P}\eta\eta)$ <sup>39</sup> donde  $G_a = \xi_a^i(q)p_i$  son las constricciones clásicas de primera clase, permite construir la carga BRST cuántica como un operador hermitiano y nilpotente, resolviendo la anomalía que aparece en el formalismo de Dirac si se considera  $\psi$  como densidad de peso  $1/2$ . Supondremos aquí que es posible construir la carga BRST cuántica con las propiedades mencionadas.

La expresión cuántica del término de frontera será discutida en cada caso particular y depende de los operadores que se fijen en los extremos. Su forma nos será dictada por su correspondiente estructura clásica. Cuando se realiza la variación de la acción (4.14) respecto a alguna variable dinámica particular la prescripción (4.18) permite identificar apropiadamente los generadores cuánticos en los extremos, conduciendo a las relaciones de (anti-)conmutación básicas para esa variable dinámica. Este resultado es una consecuencia directa del principio de acción de Schwinger.

De acuerdo a las prescripciones anteriores la extensión cuántica de la carga BRST debe conducir a un operador hermitiano  $\hat{\Omega}^\dagger = \hat{\Omega}$  tal que  $\{\hat{\Omega}, \hat{\Omega}\} = 2\hat{\Omega}^2 = 0$ , donde  $\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$  denota el correspondiente anti-conmutador. El hamiltoniano canónico junto con el fermión de norma deben promoverse también a operadores  $\hat{H}_c$  (hermitiano) y  $\hat{\Psi}$  (antihermitiano) respectivamente, mientras que el operador hamiltoniano efectivo definido por  $\hat{H}_{BRST} = \hat{H}_c + i\{\hat{\Psi}, \hat{\Omega}\}$ , es por construcción hermitico. A nivel cuántico el hamiltoniano BRST invariante debe ser solución de la ecuación de operadores  $[\hat{\Omega}, \hat{H}_{BRST}] = 0$ , donde  $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$  denota el correspondiente

<sup>38</sup>Una propuesta que intenta extender este análisis a observables más generales puede verse en [85][53]

<sup>39</sup>Este ordenamiento implica que los vectores de estado  $\psi$  deben tratarse como densidades de peso  $1/2$  en el espacio  $(q, \eta)$  (i.e.,  $\psi$  transforma con la raíz cuadrada del superdeterminante de la transformación  $q, \eta \rightarrow q', \eta'$ )

$$\psi(q, \eta) \rightarrow \text{sdet} \left| \frac{\partial(q, \eta)}{\partial(q', \eta')} \right|^{1/2} \psi(q(q', \eta'), \eta(q', \eta')). \quad (4.19)$$

conmutador. Esta ecuación implica, en particular, que la carga BRST es conservada a nivel cuántico.

De esta manera, la acción cuántica tendrá la forma

$$\hat{S}_{BRST} = \int_{\tau'}^{\tau''} \left( \langle \dot{q}^i \hat{p}_i - \dot{\lambda}^a \hat{\pi}_a + \hat{C}_a \hat{p}^a + \hat{C}^a \hat{p}_a \rangle - \hat{H}_{BRST} \right) d\tau - [\hat{B}]_{\tau'}^{\tau''}. \quad (4.20)$$

Los vectores base del espacio de Hilbert al tiempo inicial  $\tau'$ ,  $|Q^i, C'^a, \bar{C}'_a, \pi'_a\rangle$ , están etiquetados por sus correspondientes valores propios, que satisfacen

$$\hat{Q}^i |Q^i, C'^a, \bar{C}'_a, \pi'_a\rangle = Q^i |Q^i, C'^a, \bar{C}'_a, \pi'_a\rangle \quad (4.21)$$

$$\hat{C}^a |Q^i, C'^a, \bar{C}'_a, \pi'_a\rangle = \bar{C}_a |Q^i, C'^a, \bar{C}'_a, \pi'_a\rangle = \hat{\pi}_a |Q^i, C'^a, \bar{C}'_a, \pi'_a\rangle = 0, \quad (4.22)$$

en consistencia con las condiciones a la frontera clásicas (4.15). Expresiones análogas son válidas para los vectores base al tiempo final  $\tau''$ .

La invariancia de la acción, ante la transformación BRST cuántica, está contenida en la expresión  $\delta_{\hat{\Omega}} \hat{S}_{BRST} = i[\hat{\Omega}, \hat{S}_{BRST}] = 0$ . La invariancia BRST de las amplitudes de transición  $\langle a''t'' | \hat{S} | b't' \rangle$  está garantizada, siempre y cuando los estados sean invariantes ante esta transformación, i.e.,  $\hat{\Omega} |a''t''\rangle = \hat{\Omega} |b't'\rangle = 0$ .

## 4.2 PARTÍCULA NO RELATIVISTA PARAMETRIZADA

Es el objeto de esta sección exponer en detalle el cálculo del propagador de la partícula libre parametrizada en la norma no canónica  $\lambda = 0$  usando el principio de acción de Schwinger y la versión de la acción cuántica BRST-BFV. La acción clásica de este sistema es

$$S = \int_{\tau'}^{\tau''} L d\tau = \frac{m}{2} \int_{\tau'}^{\tau''} \frac{\dot{x}^2}{t} d\tau. \quad (4.23)$$

Definimos  $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ ,  $p_t = \frac{\partial L}{\partial \dot{t}}$  como los momentos canónicamente conjugados a las coordenadas  $x$  y  $t$  respectivamente. Aquí el punto significa derivar respecto al parámetro  $\tau$ . En este caso, el hamiltoniano canónico  $H_c$  es cero y la aplicación del método de Dirac conduce a la constricción

$$G = H_0 + p_t \approx 0, \quad (4.24)$$

donde

$$H_0 \equiv \frac{p_x^2}{2m}. \quad (4.25)$$

La aplicación del principio de acción comienza con la construcción de la acción efectiva cuántica. Usando las ideas expuestas en la sección previa, la acción cuántica es

$$\hat{S}_{BRST} = \int_{\tau'}^{\tau''} \left( \langle\langle \hat{x}\hat{p}_x + \hat{i}\hat{p}_t - \hat{\lambda}\hat{\pi} + \hat{C}\hat{P} + \hat{C}'\hat{P}' \rangle\rangle - \hat{H}_{BRST} \right) d\tau + \langle\langle \hat{x}'\hat{p}'_x + \hat{i}'\hat{p}'_t \rangle\rangle, \quad (4.26)$$

donde

$$\hat{H}_{BRST} = i\{\hat{\Psi}, \hat{\Omega}\}, \quad \hat{\Psi} = \hat{P}\hat{\lambda}, \quad \hat{\Omega} = -i\hat{P}\hat{\pi} + \hat{C}\left(\frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \hat{p}_t\right). \quad (4.27)$$

Con el objeto de simplificar la notación y como todas las variables dinámicas que aparecen en el problema son operadores, quitaremos el sombrero sobre las variables relevantes, esperando no crear confusión. Cuando alguna expresión particular lo requiera volveremos a la notación usual.

La aplicación del principio de acción (4.26) conduce a las ecuaciones de movimiento de Heisenberg, escritas de manera formal en las Ecs. (1.150), en términos del hamiltoniano BRST invariante, junto con la siguiente identificación de los generadores de las transformaciones en los extremos

$$\delta\hat{S}_{BRST} = i\left(p_x''\delta x'' + x'\delta p_x' + p_t''\delta t'' + t'\delta p_t' - \lambda''\delta\pi'' + \lambda'\delta\pi' - \bar{P}''\delta C'' + \bar{P}'\delta C' - P''\delta\bar{C}'' + P'\delta\bar{C}' - H''_{BRST}\delta\tau'' + H'_{BRST}\delta\tau'\right), \quad (4.28)$$

donde el símbolo ''('') denota la evaluación del operador correspondiente en  $\tau = \tau'$  ( $\tau = \tau''$ ) respectivamente. De acuerdo a la propiedad (1.152), la ecuación (4.28) implica las siguientes relaciones de (anti)conmutación a tiempos iguales

$$[x, p_x] = [t, p_t] = [\lambda, \pi] = i, \quad \{\bar{C}, P\} = \{\bar{P}, C\} = -i. \quad (4.29)$$

La ecuación (4.28) también implica que los valores propios, fijos en los puntos extremos, corresponden a los operadores

$$p_x(\tau'), \quad p_t(\tau'), \quad \pi(\tau'), \quad C(\tau'), \quad \bar{C}(\tau'), \quad (4.30)$$

$$x(\tau''), t(\tau''), \pi(\tau''), C(\tau''), \bar{C}(\tau''), \quad (4.31)$$

lo que significa que hemos seleccionado la siguiente base para los operadores en el espacio de Hilbert.

$$\{ |p'_x, p'_t, \pi', C', \bar{C}', \tau' \rangle \equiv |\tau' \rangle \}, \quad \{ |x'', t'', \pi'', C'', \bar{C}'', \tau'' \rangle \equiv |\tau'' \rangle \}, \quad (4.32)$$

en los puntos inicial y final, respectivamente. Los valores propios  $\pi', \pi'', \pi', C', C'', \bar{C}', \bar{C}''$  son cero, de acuerdo a la Ec. (4.22). Nuestra notación es tal que  $A''$  ( $A'$ ) se usa para los valores propios en los extremos, correspondientes a los operadores  $A(\tau'')$  ( $A(\tau')$ ). Sin embargo, para no complicar la notación, denotaremos con la misma letra al operador y a su valor propio esperando no generar confusión.

De las relaciones de (anti)conmutación (4.29) podemos verificar que el operador carga BRST construido en (4.27) es hermitiano y nilpotente. También, la invariancia BRST de la base (4.32) puede verificarse directamente. El cálculo del hamiltoniano efectivo puede ahora realizarse conduciendo a

$$H_{BRST} = i\bar{P}P + \lambda G, \quad (4.33)$$

que es un operador hermitiano que satisface  $[H_{BRST}, \Omega] = 0$ . Las ecuaciones de movimiento pueden ahora escribirse. Explícitamente resultan

$$\begin{aligned} \dot{p}_x = 0, \quad \dot{x} - \frac{\lambda p_x}{m} = 0, \quad \dot{p}_t = 0, \quad \dot{t} - \lambda = 0, \quad \dot{\pi} + G = 0, \quad \dot{\lambda} = 0, \\ \dot{P} = 0, \quad \dot{\bar{C}} - i\bar{P} = 0, \quad \dot{\bar{P}} = 0, \quad \dot{C} + iP = 0. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Ahora pasaremos al cálculo del propagador. El primer paso consiste en resolver las ecuaciones de movimiento para los operadores relevantes, con las condiciones iniciales (4.30) y (4.31). Obtenemos, como solución general

$$p_x = p'_x, \quad x(\tau) = x' + \frac{\lambda p_x}{m}(\tau - \tau'), \quad p_t = p'_t, \quad t(\tau) = t' + \lambda(\tau - \tau'), \quad (4.35)$$

$$\pi(\tau) = \pi' - G(\tau - \tau'), \quad \lambda = \lambda', \quad (4.36)$$

$$P = P', \quad \bar{C}(\tau) = \bar{C}' + i\bar{P}(\tau - \tau'), \quad \bar{P} = \bar{P}', \quad C(\tau) = C' - iP(\tau - \tau'). \quad (4.37)$$

Los operadores constantes de integración se denotan aquí por el símbolo ' (evaluados en  $\tau = \tau'$ ) y se especificarán posteriormente de acuerdo a las condiciones iniciales (4.32). Una expresión ligeramente distinta para la variación

del propagador, obtenida de (4.28), es

$$\begin{aligned} \delta\langle\tau''|\tau'\rangle &= i\langle\tau''|p'_x\delta x'' + x'\delta p'_x + p'_i\delta t'' + t'\delta p'_i - \lambda'(\delta\pi'' - \delta\pi') \\ &\quad - \bar{\mathcal{P}}'(\delta C'' - \delta C') - \mathcal{P}'(\delta\bar{C}'' - \delta\bar{C}') - H_{BRST}(\delta\tau'' - \delta\tau')|\tau'\rangle. \end{aligned} \quad (4.38)$$

El siguiente paso consiste en calcular los elementos de matriz involucrados. Después de incorporar las condiciones iniciales apropiadas (4.32), en las soluciones (4.35)-(4.37), podemos escribir  $H_{BRST}$  en términos de los operadores fijos en los extremos  $C', C'', \bar{C}', \bar{C}''$ , junto con los operadores constantes  $\lambda$  y  $G$ . El resultado es

$$H_{BRST} = \frac{i}{(\tau'' - \tau')^2} (\bar{C}''C'' - \bar{C}''C' + C''\bar{C}' + \bar{C}'C' + (\tau'' - \tau')) + \lambda'G \quad (4.39)$$

donde hemos *ordenado* (los operadores '' a la izquierda y los operadores ' a la derecha) correctamente esta expresión usando el anticonmutador

$$\{\bar{C}', C''\} = -(\tau'' - \tau'), \quad (4.40)$$

que se calcula usando las soluciones (4.35)-(4.37) junto con la relaciones de (anti)conmutación (4.29) a tiempos iguales. La hermiticidad de la Ec. (4.39) puede verificarse explícitamente usando nuevamente la relación (4.40).

Todos los términos cuyos elementos de matriz involucran valores propios de operadores que están fijos a cero en los extremos no contribuyen al propagador final como es el caso de los fantasmas y antifantasmas  $\mathcal{C}$  y  $\bar{\mathcal{C}}$ . Además, la invariancia ante reparametrizaciones implica que el propagador sea independiente de los valores extremos del parámetro  $\tau$ . Esto sucederá así, siempre que los elementos de matriz de  $H_{BRST}$  se anulen. Para mostrar que éste es precisamente el caso, calcularemos los elementos de matriz del multiplicador  $\lambda = \lambda'$ . Esto puede hacerse como sigue: (i) multiplicar por la izquierda la primera Ec. (4.36) por  $\lambda$  y tomar el apropiado elemento de matriz a ambos lados de la ecuación resultante, (ii) usar el hecho de que los valores propios de  $\pi$  están fijos a cero en los extremos, junto con las relaciones de conmutación de  $\lambda$  y  $\pi$ . El resultado es

$$(\tau'' - \tau')\langle\tau''|\lambda|\tau'\rangle = -\frac{i\langle\tau''|\tau'\rangle}{(p_x'^2/2m) + p_i'}, \quad (4.41)$$

que implica que  $\langle\tau''|H_{BRST}|\tau'\rangle = 0$ . Como es usual necesitamos ahora reescribir la variación (4.38) en forma *ordenada*. En nuestro caso, este procedimiento debe aplicarse también a los operadores  $x', p'_i$  y  $t'$ . Usando las

ecuaciones de movimiento correspondientes obtenemos

$$\begin{aligned} \delta\langle\tau''|\tau'\rangle &= i\langle\tau''|p_x'\delta x'' + (x'' - \frac{\lambda' p_x'}{m}(\tau'' - \tau'))\delta p_x' + p_t'\delta t'' \\ &+ (t' - \lambda'(\tau'' - \tau'))\delta p_t'|\tau'\rangle. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Finalmente, después de sustituir los elementos de matriz de  $\lambda$ , podemos integrar el sistema de ecuaciones diferenciales parciales (ver (1.159)) correspondiente obteniendo el resultado

$$\langle x'', t'', \tau'' | p_x', p_t', \tau' \rangle = \exp\{ip_x'x'' + ip_t't''\} / [(p_x'^2/2m) + p_t'], \quad (4.43)$$

que corresponde al propagador correcto de la partícula libre parametrizada.

Un punto importante que debemos enfatizar es el siguiente: supongamos que hemos construido la versión invariante ante reparametrizaciones de una teoría arbitraria con hamiltoniano  $H_0$ , introduciendo el parámetro  $\tau$  en completa analogía con el ejemplo considerado en esta sección (ver sección 3.2). Bajo estas circunstancias, el hamiltoniano extendido será proporcional a la restricción de primera clase

$$p_t + H_0(q, p) \approx 0, \quad (4.44)$$

que genera la invariancia ante reparametrizaciones. En la representación de Schroedinger los estados  $\psi$  son funciones de  $q, t, \tau$ . La correspondiente ecuación de Schroedinger es

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = H_E \psi = \mu^0 \left( \frac{i}{\hbar} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + H_0 \psi \right) \right), \quad (4.45)$$

donde  $\mu^0$  es el multiplicador de Lagrange correspondiente a la restricción (4.44). Por otro lado, la condición de Dirac sobre los estados físicos es<sup>40</sup>

$$\left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} + H_0 \right) \psi = 0. \quad (4.46)$$

Por tanto la ecuación (4.45) implica que los estados físicos no dependen de  $\tau$ . Consecuentemente el propagador será también independiente de  $\tau$ . En otras

<sup>40</sup>Nótese que esta condición corresponde a la ecuación de Schroedinger del sistema no reparametrizado cuyo hamiltoniano es  $H_0$ .

palabras, los elementos de matriz del hamiltoniano extendido entre estados físicos deben ser nulos.

El mismo argumento es válido para los elementos de matriz del hamiltoniano BRST invariante entre estados físicos. Como  $H_{BRST} = i\{\Psi, \Omega\}$  sus elementos de matriz entre estados físicos son cero independientemente de la condición de norma implementada por  $\Psi$ . Estas propiedades básicas, que hemos verificado explícitamente en el caso de la partícula no relativista parametrizada, se encuentran en contradicción con los resultados presentados en la Ref. [80].

### 4.3 PARTÍCULA RELATIVISTA

Antes de realizar el cálculo del propagador correspondiente a la partícula libre relativista enfatizaremos algunos puntos importantes inferidos directamente del ejemplo anterior: (i) en los casos donde la dinámica del sector fantasmas-antifantasmas se desacople del resto de las variables dinámicas, el hamiltoniano efectivo tendrá la misma forma que el considerado en la Ec. (4.39), excepto que  $G$  deberá reemplazarse por la constricción de primera clase correspondiente; (ii) siempre es posible calcular los elementos de matriz del multiplicador de Lagrange asociado a la constricción que genera la invariancia ante reparametrizaciones, imponiendo la condición de que los elementos de matriz del hamiltoniano BRST invariante sean cero.

Con estas ideas en mente realizaremos el cálculo del propagador de la partícula libre relativista usando la versión de operadores del método BRST-BFV. Comenzaremos a partir de la acción clásica

$$S = \int_{\tau'}^{\tau''} d\tau \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda} \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu - \lambda m^2 \right), \quad (4.47)$$

que es invariante ante reparametrizaciones si  $\lambda$  transforma como multiplicador de Lagrange<sup>41</sup>. Usaremos aquí la métrica de Minkowsky con la con-

<sup>41</sup>La invariancia de norma de cualquier problema parametrizado está relacionada con su invariancia ante reparametrizaciones por las siguientes razones: Consideremos un sistema invariante ante reparametrizaciones con constricciones de primera clase denotadas por  $\gamma_a$ , ( $a = 0, 1, 2, \dots, m$ ). La acción extendida de este problema es

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau (p_\mu \dot{q}^\mu - H_E), \quad H_E = \mu^a \gamma_a, \quad (4.48)$$

vención estandar  $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ . La correspondiente constricción de primera clase es

$$G = p^\mu p_\mu + m^2 \approx 0. \quad (4.51)$$

Como punto de partida para la versión cuántica del problema tomaremos la acción efectiva

$$S_{BRST} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\langle\langle x^\mu p_\mu - \lambda \dot{\pi} + \dot{\mathcal{C}}\mathcal{P} + \dot{\mathcal{C}}\bar{\mathcal{P}} \rangle\rangle - H_{BRST}) d\tau + \langle\langle x^\mu p'_\mu \rangle\rangle, \quad (4.52)$$

donde

$$H_{BRST} = i\{\Psi, \Omega\}, \quad \Psi = \bar{\mathcal{P}}\lambda, \quad \Omega = -i\mathcal{P}\pi + \mathcal{C}(p^\mu p_\mu + m^2), \quad (4.53)$$

que tiene la misma estructura que la Ec.(4.27) excepto por la forma explícita de la constricción  $G$ . Aquí hemos quitado los sombreros en los operadores, para simplificar la notación. De manera completamente análoga al ejemplo anterior construimos las relaciones de conmutación

$$[x^\mu, p_\nu] = i\delta_\nu^\mu, \quad [\lambda, \pi] = i, \quad (4.54)$$

mientras que las asociadas a los fantasmas están dadas por las Ecs. (4.29). El hamiltoniano BRST invariante es

$$H_{BRST} = i\dot{\bar{\mathcal{P}}}\mathcal{P} + \lambda(p^2 + m^2), \quad (4.55)$$

junto con la forma explícita de las ecuaciones de movimiento

$$\dot{p}_\mu = 0, \quad \dot{x}^\mu - 2\lambda p^\mu = 0, \quad \dot{\pi} + G = 0, \quad \dot{\lambda} = 0, \quad (4.56)$$

donde  $\mu^a$  son los multiplicadores de Lagrange y  $\gamma^0$  es la constricción de primera clase asociada a la invariancia ante reparametrizaciones. Esta acción es invariante ante  $\delta q = \dot{q}\epsilon$ ,  $\delta p = \dot{p}\epsilon$ ,  $\delta\mu^a = (\mu^a\epsilon)$ ,  $\epsilon(\tau_1) = \epsilon(\tau_2) = 0$ . Esta transformación puede obtenerse como una transformación de norma con parámetro  $\epsilon^a = \mu^a\epsilon$ . En nuestro caso particular

$$\delta x^\mu = \{x^\mu, \epsilon G\}, \quad \delta p_\mu = \{p_\mu, \epsilon G\}, \quad \delta\lambda = \dot{\epsilon}, \quad (4.49)$$

y la variación de la acción es

$$\delta S = \epsilon \left( p_\mu \frac{\partial G}{\partial p_\mu} - G \right) \Big|_1^2 = \epsilon (p^2 - m^2) \Big|_1^2. \quad (4.50)$$

Esta variación es cero si  $\epsilon(\tau_1) = \epsilon(\tau_2) = 0$ .

$$\dot{\mathcal{P}} = 0, \quad \dot{\bar{\mathcal{C}}} - i\dot{\bar{\mathcal{P}}} = 0, \quad \dot{\mathcal{P}} = 0, \quad \dot{\mathcal{C}} + i\dot{\mathcal{P}} = 0. \quad (4.57)$$

La solución de estas ecuaciones es

$$p_\mu = p_\mu', \quad x^\mu(\tau) = x^{\mu'} + 2\lambda p_\mu(\tau - \tau'), \quad (4.58)$$

$$\pi(\tau) = \pi' - G(\tau - \tau'), \quad \lambda = \lambda', \quad (4.59)$$

$$\bar{\mathcal{P}} = \bar{\mathcal{P}}', \quad \bar{\mathcal{C}}(\tau) = \bar{\mathcal{C}}' + i\bar{\mathcal{P}}(\tau - \tau'), \quad \mathcal{P} = \mathcal{P}', \quad \mathcal{C}(\tau) = \mathcal{C}' - i\mathcal{P}(\tau - \tau'), \quad (4.60)$$

donde los operadores primados denotan las constantes de integración a determinarse de acuerdo a las condiciones frontera que se elijan. Las condiciones en los extremos BRST invariantes se escogen en completa analogía al problema previo, fijando los operadores

$$p_\mu(\tau'), \quad \pi(\tau'), \quad \mathcal{C}(\tau'), \quad \bar{\mathcal{C}}(\tau'), \quad (4.61)$$

$$x^\mu(\tau''), \quad \pi(\tau''), \quad \mathcal{C}(\tau''), \quad \bar{\mathcal{C}}(\tau''), \quad (4.62)$$

en los puntos extremos, lo que implica que la base correspondiente está dada por

$$\{|p_\mu', \pi', \mathcal{C}', \bar{\mathcal{C}}', \tau'\}, \quad \{|x^{\mu''}, \pi'', \mathcal{C}'', \bar{\mathcal{C}}'', \tau''|\}, \quad (4.63)$$

respectivamente. De nuevo, los valores propios,  $\pi', \pi'', \mathcal{C}', \mathcal{C}'', \bar{\mathcal{C}}', \bar{\mathcal{C}}''$  se anulan con el objeto de imponer la invariancia BRST. Como el hamiltoniano efectivo de esta teoría tiene la misma estructura que en el ejemplo anterior, Ec. (4.39), calcularemos los elementos de matriz de  $\lambda$  imponiendo la condición de que los elementos de matriz del hamiltoniano sean nulos. El resultado es

$$(\tau'' - \tau') \langle \tau'' | \lambda | \tau' \rangle = -i \frac{\langle \tau'' | \tau' \rangle}{p'^2 + m^2}, \quad (4.64)$$

en completa analogía con la Ec.(4.41). Ahora calcularemos el propagador. Su variación está dada por

$$\begin{aligned} \delta \langle \tau'' | \tau' \rangle &= i \langle \tau'' | p_\mu' \delta x^{\mu''} + x^{\mu''} \delta p_\mu' - \lambda' (\delta \pi'' - \delta \pi') \\ &- \bar{\mathcal{P}}' (\delta \mathcal{C}'' - \delta \mathcal{C}') - \mathcal{P}' (\delta \bar{\mathcal{C}}'' - \delta \bar{\mathcal{C}}') - H_{BRST} (\delta \tau'' - \delta \tau') | \tau' \rangle. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Usando las soluciones obtenidas en Ecs. (4.58)-(4.60) escritas en términos de los operadores que están fijos en los extremos, obtenemos

$$\delta \langle \tau'' | \tau' \rangle = i \langle \tau'' | p_\mu' \delta x^{\mu''} + (x^{\mu''} - 2\lambda p_\mu' (\tau'' - \tau')) \delta p_\mu' | \tau' \rangle, \quad (4.66)$$

de modo análogo al caso previo.

Finalmente, introduciendo los elementos de matriz de  $\lambda$  e integrando con respecto a los valores propios fijos en los extremos, obtenemos el resultado

$$\langle x^{\mu\prime\prime}, \tau^{\prime\prime} | p_{\mu}^{\prime}, \tau^{\prime} \rangle = \exp\{i p_{\mu}^{\prime} x^{\mu\prime\prime}\} / [p^2 + m^2] \quad (4.67)$$

que es el propagador correcto para la partícula libre relativista.

#### 4.4 PARTÍCULA RELATIVISTA CON ESPÍN

Como ejemplo final consideraremos la partícula libre relativista con espín. Este ejemplo tiene dos constricciones, una bosónica y otra fermiónica, asociadas a la invariancia ante reparametrizaciones que ahora es una supersimetría. La acción clásica de este problema es

$$S = \int_{\tau'}^{\tau''} d\tau (x^{\mu} p_{\mu} + \frac{i}{2} (\dot{\theta}^{\mu} \theta_{\mu} + \dot{\theta}_5 \theta_5) - N \mathcal{H} - M Q_0) - \frac{i}{2} \theta(\tau'') \cdot \theta(\tau') - [B]_{\tau''}^{\tau'}, \quad (4.68)$$

donde las variables  $x^{\mu}, p_{\mu}, N, \mathcal{H}$  son pares y reales, mientras que  $\theta^{\mu}, \theta_5, Q_0$  son impares y reales, y  $M$  es imaginario e impar, de acuerdo a nuestras convenciones generales. Las constricciones de primera clase  $\mathcal{H}$  y  $Q_0$  son<sup>42</sup>

$$\mathcal{H} = p^{\mu} p_{\mu} + m^2, \quad Q_0 = p_{\mu} \theta^{\mu} + m \theta_5. \quad (4.72)$$

Una diferencia básica con los ejemplos anteriores es que algunas variables dinámicas son números de Grassmann. Esto implica que un nuevo término de frontera debe ser agregado al principio variacional, cuyo objeto es garantizar que las ecuaciones de movimiento tengan correctamente impuestas sus condiciones iniciales. La forma explícita de este término es  $-\frac{i}{2} \theta(\tau'') \cdot \theta(\tau') = -\frac{i}{2} (\theta^{\mu}(\tau'') \theta_{\mu}(\tau') + \theta_5(\tau'') \theta_5(\tau'))$  y garantiza las condiciones frontera apropiadas.

<sup>42</sup>Las transformaciones de norma inducidas por las constricciones son en este caso

$$\delta x^{\mu} = \{x^{\mu}, \epsilon \mathcal{H} + \eta Q_0\}, \quad \delta p_{\mu} = \{p_{\mu}, \epsilon \mathcal{H} + \eta Q_0\}, \quad (4.69)$$

$$\delta \theta^{\mu} = \{\theta^{\mu}, \epsilon \mathcal{H} + \eta Q_0\}, \quad \delta \theta_5 = \{\theta_5, \epsilon \mathcal{H} + \eta Q_0\}, \quad (4.70)$$

$$\delta N = \dot{\epsilon} + \eta M, \quad \delta M = \dot{\eta}, \quad (4.71)$$

y  $\delta S = 0$  si  $\epsilon(\tau_1) = \epsilon(\tau_2) = 0$ . Aquel parámetro  $\eta$  tiene paridad de Grassmann impar.

adas para las coordenadas fermiónicas  $\theta^\mu, \theta_5$  fijando las siguientes combinaciones de los valores extremos [57]

$$\frac{1}{2}(\theta^\mu(\tau') + \theta^\mu(\tau'')) \equiv \xi^\mu, \quad \frac{1}{2}(\theta_5(\tau') + \theta_5(\tau'')) \equiv \xi_5, \quad (4.73)$$

que garantizan que las ecuaciones de primer orden que provienen del principio variacional tienen soluciones únicas una vez que se han impuesto las condiciones iniciales (4.73). Podría haber aun más términos de borde en la acción (4.68), relacionados a la elección de las variables que se fijarán en los extremos para las variables restantes. Estos términos se denotan por  $B$  en la acción (4.68). Ahora plantearemos el formalismo BRST clásico para construir la acción efectiva y después cuantizar. Con este fin, introduciremos el vector

$$G_A = (\pi_a, G_a) = (\pi_M, \pi_N, Q_0, \mathcal{H}), \quad a = 1, 2, \quad (4.74)$$

donde las nuevas variables  $\pi_M$  y  $\pi_N$  son los momentos conjugados a los multiplicadores de Lagrange  $M$  y  $N$ . La paridad de Grassmann de las constricciones es tal que  $\epsilon_1 = 1$  y  $\epsilon_2 = 0$ . Los fantasmas y los antifantasmas serán

$$\eta^A = (-\mathcal{P}^1, -i\mathcal{P}^2, C^1, C^2), \quad \mathcal{P}_A = (\bar{C}_1, i\bar{C}_2, \bar{\mathcal{P}}_1, \bar{\mathcal{P}}_2), \quad (4.75)$$

donde  $(\mathcal{P}^1, \bar{C}_1), (C^1, \bar{\mathcal{P}}_1)$  son variables canónicas conjugadas pares, mientras que  $(\mathcal{P}^2, \bar{C}_2), (C^2, \bar{\mathcal{P}}_2)$  son variables canónicas impares. Con estos ingredientes construiremos ahora la carga BRST clásica. La expresión general para el caso en consideración es

$$\Omega = \eta^A G_A - \frac{1}{2}(-1)^{\epsilon_B} \eta^B \eta^C C_{CB}^A \mathcal{P}_A, \quad (4.76)$$

done  $\epsilon_B$  es la paridad de Grassmann de la constricción asociada con el fantasma  $\eta^B$  y  $C_{CB}^A$  son las funciones de estructura del álgebra de constricciones, que está dada por

$$\{Q_0, Q_0\}_{PB} = i\mathcal{H}, \quad \{Q_0, \mathcal{H}\}_{PB} = 0. \quad (4.77)$$

Por tanto, la única función de estructura diferente de cero es  $C_{11}^2 = i$ . Tomando esto en cuenta y haciendo las substitutiones requeridas en la Ec. (4.76) obtenemos

$$\Omega = -\mathcal{P}^1 \pi_M - i\mathcal{P}^2 \pi_N + C^1 Q_0 + C^2 \mathcal{H} + i(C^1)^2 \bar{\mathcal{P}}_2, \quad (4.78)$$

para la carga BRST clásica. La teoría considerada en esta sección es también invariante ante reparametrizaciones y por tanto su hamiltoniano canónico asociado es cero.

Ahora promovemos todas nuestras variables dinámicas a operadores, considerando las siguientes propiedades de realidad:  $x_\mu, p^\mu, N, \pi_N, \bar{\mathcal{P}}_1, C^1, \mathcal{P}^1, \bar{C}_1$  son operadores hermitianos pares,  $\mathcal{P}^2, \bar{\mathcal{P}}_2, M$  son operadores antihermitianos impares y  $\bar{C}_2, C^2, \theta^\mu, \theta_5, \pi_M$  son operadores hermitianos impares. La acción efectiva cuántica que escogeremos tendrá la estructura

$$\begin{aligned}
 S_{BRST} = & \int_{\tau'}^{\tau''} d\tau \left( \langle\langle x^\mu p_\mu + \frac{i}{2}(\dot{\theta}^\mu \theta_\mu + \dot{\theta}_5 \theta_5) - N \dot{\pi}_N - M \dot{\pi}_M \right. \\
 & \left. + \bar{C}_1 \mathcal{P}^1 + \dot{C}_1 \bar{\mathcal{P}}_1 + \bar{C}_2 \mathcal{P}^2 + \dot{C}_2 \bar{\mathcal{P}}_2 \rangle\rangle - H_{BRST} \right) \\
 & + \langle\langle -\frac{i}{2} \theta(\tau'') \cdot \theta(\tau') + x^{\mu'} p_{\mu'} \rangle\rangle, \quad (4.79)
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 H_{BRST} = & i\{\Psi, \Omega\}, \quad \Psi = \bar{\mathcal{P}}_1 M + \bar{\mathcal{P}}_2 N, \\
 \Omega = & -\mathcal{P}^1 \pi_M - i\mathcal{P}^2 \pi_N + C^1 Q_0 + C^2 \mathcal{H} + i(C^1)^2 \bar{\mathcal{P}}_2. \quad (4.80)
 \end{aligned}$$

Las relaciones de (anti)conmutación que surgen del principio de acción cuántico (4.79) son

$$[x_\mu, p_\nu] = i\eta_{\mu\nu} \quad \{\theta^\mu, \theta^\nu\} = -\eta^{\mu\nu} \quad \{\theta_5, \theta_5\} = -1, \quad (4.81)$$

$$\{M, \pi_M\} = -i \quad [N, \pi_N] = i, \quad (4.82)$$

$$[\bar{\mathcal{P}}_1, C^1] = -[C^1, \bar{\mathcal{P}}_1] = [\mathcal{P}^1, \bar{C}_1] = -[\bar{C}_1, \mathcal{P}^1] = -i, \quad (4.83)$$

$$\{\bar{\mathcal{P}}_2, C^2\} = \{C^2, \bar{\mathcal{P}}_2\} = \{\bar{C}_2, \mathcal{P}^2\} = \{\mathcal{P}^2, \bar{C}_2\} = -i. \quad (4.84)$$

Estas relaciones de (anti)conmutación pueden también deducirse del principio de Schwinger, tanto en el caso de variables bosónicas como fermiónicas. En particular, como la acción (4.79) es lineal en  $\dot{\theta}^\mu$  y  $\dot{\theta}^5$  al definir los momentos asociados a estas variables, usando el algoritmo de Dirac, obtenemos dos constricciones de segunda clase. El correspondiente paréntesis de Dirac coincide con (4.81). Con el principio de Schwinger es posible obtener este conmutador usando la propuesta desarrollada en [27]. La carga BRST es hermitiana y es posible verificar que el anticonmutador  $\{\Omega, \Omega\}$  es cero, usando

para la carga BRST clásica. La teoría considerada en esta sección es también invariante ante reparametrizaciones y por tanto su hamiltoniano canónico asociado es cero.

Ahora promovemos todas nuestras variables dinámicas a operadores, considerando las siguientes propiedades de realidad:  $x_\mu, p^\mu, N, \pi_N, \bar{\mathcal{P}}_1, C^1, \mathcal{P}^1, \bar{C}_1$  son operadores hermitianos pares,  $\mathcal{P}^2, \bar{\mathcal{P}}_2, M$  son operadores antihermitianos impares y  $\bar{C}_2, C^2, \theta^\mu, \theta_5, \pi_M$  son operadores hermitianos impares. La acción efectiva cuántica que escogeremos tendrá la estructura

$$S_{BRST} = \int_{\tau'}^{\tau''} d\tau \left( \langle\langle x^\mu p_\mu + \frac{i}{2}(\dot{\theta}^\mu \theta_\mu + \dot{\theta}_5 \theta_5) - N \dot{\pi}_N - M \dot{\pi}_M + \bar{C}_1 \dot{\mathcal{P}}^1 + \dot{C}_1 \bar{\mathcal{P}}_1 + \bar{C}_2 \dot{\mathcal{P}}^2 + \dot{C}_2 \bar{\mathcal{P}}_2 \rangle\rangle - H_{BRST} \right) + \langle\langle -\frac{i}{2} \dot{\theta}(\tau'') \cdot \theta(\tau') + x^{\mu'} p_{\mu'} \rangle\rangle, \quad (4.79)$$

donde

$$H_{BRST} = i\{\Psi, \Omega\}, \quad \Psi = \bar{\mathcal{P}}_1 M + \bar{\mathcal{P}}_2 N, \\ \Omega = -\mathcal{P}^1 \pi_M - i\mathcal{P}^2 \pi_N + C^1 Q_0 + C^2 \mathcal{H} + i(C^1)^2 \bar{\mathcal{P}}_2. \quad (4.80)$$

Las relaciones de (anti)conmutación que surgen del principio de acción cuántico (4.79) son

$$\{x_\mu, p_\nu\} = i\eta_{\mu\nu} \quad \{\theta^\mu, \theta^\nu\} = -\eta^{\mu\nu} \quad \{\theta_5, \theta_5\} = -1, \quad (4.81)$$

$$\{M, \pi_M\} = -i \quad [N, \pi_N] = i, \quad (4.82)$$

$$\{\bar{\mathcal{P}}_1, C^1\} = -[C^1, \bar{\mathcal{P}}_1] = [\mathcal{P}^1, \bar{C}_1] = -[\bar{C}_1, \mathcal{P}^1] = -i, \quad (4.83)$$

$$\{\bar{\mathcal{P}}_2, C^2\} = \{C^2, \bar{\mathcal{P}}_2\} = \{\bar{C}_2, \mathcal{P}^2\} = \{\mathcal{P}^2, \bar{C}_2\} = -i. \quad (4.84)$$

Estas relaciones de (anti)conmutación pueden también deducirse del principio de Schwinger, tanto en el caso de variables bosónicas como fermiónicas. En particular, como la acción (4.79) es lineal en  $\dot{\theta}^\mu$  y  $\dot{\theta}^5$  al definir los momentos asociados a estas variables, usando el algoritmo de Dirac, obtenemos dos constricciones de segunda clase. El correspondiente paréntesis de Dirac coincide con (4.81). Con el principio de Schwinger es posible obtener este conmutador usando la propuesta desarrollada en [27]. La carga BRST es hermitiana y es posible verificar que el anticonmutador  $\{\Omega, \Omega\}$  es cero, usando

las relaciones de anti(conmutación) antes citadas. El cálculo del hamiltoniano BRST invariante es

$$H_{BRST} = -\bar{\mathcal{P}}_1 \mathcal{P}^1 + M \mathcal{Q}_0 + 2iMC^1 \bar{\mathcal{P}}_2 + i\bar{\mathcal{P}}_2 \mathcal{P}^2 + N\mathcal{H}, \quad (4.85)$$

que conduce a la siguiente expresión de la acción efectiva cuántica

$$\begin{aligned} S_{BRST} = & \int_{\tau'}^{\tau''} d\tau \left( \langle\langle x^\mu p_\mu + \frac{i}{2}(\dot{\theta}^\mu \theta_\mu + \dot{\theta}_5 \theta_5) - N\dot{\pi}_N - M\dot{\pi}_M \right. \\ & + \dot{\bar{\mathcal{C}}}_1 \mathcal{P}^1 + \dot{\mathcal{C}}^1 \bar{\mathcal{P}}_1 + \dot{\bar{\mathcal{C}}}_2 \mathcal{P}^2 + \dot{\mathcal{C}}^2 \bar{\mathcal{P}}_2 \rangle\rangle + \bar{\mathcal{P}}_1 \mathcal{P}^1 - M \mathcal{Q}_0 \\ & \left. - 2iMC^1 \bar{\mathcal{P}}_2 - i\bar{\mathcal{P}}_2 \mathcal{P}^2 - N\mathcal{H} \right) \\ & + \langle\langle -\frac{i}{2}\theta(\tau'') \cdot \theta(\tau') + x^{\mu'} p_{\mu'} \rangle\rangle, \quad (4.86) \end{aligned}$$

Las propiedades de realidad de los operadores involucrados son:  $\mathcal{H}$ ,  $H_{BRST}$  son hermitianos pares y  $\mathcal{Q}_0, \Omega$  son hermitianos e impares, mientras que  $\Psi$  es antihermitiano e impar. Las ecuaciones de movimiento correspondientes son

$$\begin{aligned} p^\mu = 0, \quad x^\mu - M\theta^\mu - 2Np^\mu = 0, \quad \dot{\theta}^\mu + iMp^\mu = 0, \quad \dot{\theta}_5 + iMm = 0, \\ \dot{\pi}_M + \mathcal{Q}_0 + 2iC^1 \bar{\mathcal{P}}_2 = 0, \quad \dot{M} = 0, \quad \dot{\pi}_N + \mathcal{H} = 0, \quad \dot{N} = 0, \\ \dot{\mathcal{P}}^1 = 0, \quad \dot{\bar{\mathcal{C}}}_1 + \bar{\mathcal{P}}_1 = 0, \quad \dot{\mathcal{C}}^1 + \mathcal{P}^1 = 0, \quad \dot{\bar{\mathcal{P}}}_1 + 2iM\bar{\mathcal{P}}_2 = 0, \\ \dot{\mathcal{P}}^2 = 0, \quad \dot{\bar{\mathcal{C}}}_2 - i\bar{\mathcal{P}}_2 = 0, \quad \dot{\bar{\mathcal{P}}}_2 = 0, \quad \dot{\mathcal{C}}^2 - 2iMC^1 + i\mathcal{P}^2 = 0. \end{aligned}$$

La solución general a este sistema de ecuaciones es

$$p_\mu = p_{\mu'}, \mathcal{P}^1 = \mathcal{P}^{1'}, M = M', N = N', \mathcal{P}^2 = \mathcal{P}^{2'}, \bar{\mathcal{P}}_2 = \bar{\mathcal{P}}_2', \quad (4.87)$$

$$x^\mu(\tau) = x^{\mu'} + (M\xi^\mu + 2Np^\mu)(\tau - \tau'), \quad (4.88)$$

$$\theta^\mu(\tau) = -iMp^\mu \tau + \xi^\mu + \frac{i}{2}Mp^\mu(\tau'' + \tau'), \quad (4.89)$$

$$\theta_5(\tau) = -iMm\tau + \xi_5 + \frac{i}{2}Mm(\tau'' + \tau'), \quad (4.90)$$

$$C^1(\tau) = C^{1'} - \mathcal{P}^1(\tau - \tau'), \quad (4.91)$$

$$\bar{\mathcal{P}}_1(\tau) = \bar{\mathcal{P}}_1' - 2iM\bar{\mathcal{P}}_2(\tau - \tau'), \quad (4.92)$$

$$\bar{\mathcal{C}}_1(\tau) = \bar{\mathcal{C}}_1' - (\bar{\mathcal{P}}_1' - iM\bar{\mathcal{P}}_2(\tau - \tau'))(\tau - \tau'), \quad (4.93)$$

$$\bar{C}_2(\tau) = \bar{C}'_2 + i\bar{P}_2(\tau - \tau'), \quad (4.94)$$

$$C^2(\tau) = C'^2 + iM(2C'^1 - \mathcal{P}^1(\tau - \tau'))(\tau - \tau') - i\mathcal{P}^2(\tau - \tau'), \quad (4.95)$$

$$\pi_N(\tau) = \pi'_N - \mathcal{H}(\tau - \tau'), \quad (4.96)$$

$$\pi_M(\tau) = \pi'_M - (\mathcal{Q}_0 + i(2C'^1 - \mathcal{P}^1(\tau - \tau'))\bar{P}_2)(\tau - \tau'). \quad (4.97)$$

La notación es la misma que en las secciones previas.

Las condiciones de borde que escogeremos aquí son completamente análogas a los casos previos. La única novedad está relacionada con los grados de libertad fermiónicos descritos por las variables  $\theta$ . Con el objeto de dilucidar este punto, consideremos la contribución de los grados de libertad fermiónicos  $\theta^\mu$  a la variación de la acción efectiva,

$$\begin{aligned} \delta_{\theta^\mu} S_{BRST} &= \int_{\tau'}^{\tau''} d\tau \left( \frac{i}{2} \dot{\theta}^\mu \delta \theta_\mu + \frac{i}{2} \delta \dot{\theta}^\mu \theta_\mu - M \delta \theta_\mu p^\mu \right) \\ &- \frac{i}{2} (\delta \theta^\mu(\tau'') \theta_\mu(\tau') + \theta^\mu(\tau'') \delta \theta_\mu(\tau')) \\ &= \int_{\tau'}^{\tau''} d\tau \left( (i\dot{\theta}^\mu - M p^\mu) \delta \theta_\mu \right) + \frac{i}{2} \delta (\theta^\mu(\tau') + \theta^\mu(\tau'')) (\theta_\mu(\tau'') - \theta_\mu(\tau')). \end{aligned} \quad (4.98)$$

Sustituyendo la solución de las ecuaciones de movimiento para  $\theta_\mu$  (4.89), y la definición (4.73) de las variables  $\xi^\mu$ , obtenemos

$$\delta_{\theta^\mu} S_{BRST} = \delta \xi^\mu M p_\mu(\tau'' - \tau'). \quad (4.99)$$

El mismo análisis puede aplicarse a  $\theta_5$ .

Escogeremos los operadores en los puntos extremos

$$p_\mu(\tau') = p'_\mu, \quad x^\mu(\tau'') = x''^\mu \quad (4.100)$$

$$\frac{1}{2}(\theta^\mu(\tau') + \theta^\mu(\tau'')) = \xi^\mu, \quad \frac{1}{2}(\theta_5(\tau') + \theta_5(\tau'')) = \xi_5, \quad (4.101)$$

$$\pi_N(\tau') = \pi_N(\tau'') = C^i(\tau') = C^i(\tau'') = \bar{C}_i(\tau') = \bar{C}_i(\tau'') = 0 \quad i = 1, 2, \quad (4.102)$$

junto con la correspondiente base BRST invariante

$$\begin{aligned} &\{x''^\mu, \pi_N'', \pi_M'', \theta''^\mu(\xi^\mu), \theta''_5(\xi_5), C''^i, \bar{C}_i'', \tau''\}, \\ &\{p'_\mu, \pi_N', \pi_M', \theta'^\mu(\xi^\mu), \theta'_5(\xi_5), C'^i, \bar{C}_i', \tau'\}. \end{aligned} \quad (4.103)$$

Antes de entrar en el cálculo del propagador, reescribiremos el hamiltoniano efectivo (4.85) en forma bien ordenada (operadores primados a la derecha). Con este objetivo, usaremos las ecuaciones de movimiento y las siguientes relaciones de (anti)conmutación a tiempos diferentes

$$\{\bar{C}'_1, C^{1''}\} = -i(\tau'' - \tau'), \quad \{\bar{C}'_2, C^{2''}\} = -(\tau'' - \tau'). \quad (4.104)$$

El resultado es

$$\begin{aligned} H_{BRST} &= \frac{1}{(\tau'' - \tau')^2} [ -(\bar{C}'_1 C^{1''} - \bar{C}'_1 C^{1'} - C^{1''} \bar{C}'_1 + \bar{C}'_1 C^{1'}) \\ &+ i(\bar{C}'_2 C^{2''} - \bar{C}'_2 C^{2'} + C^{2''} \bar{C}'_2 + \bar{C}'_2 C^{2'}) ] \\ &+ M(\xi^\mu p'_\mu + m\xi_5) + N(p'^2 + m^2). \end{aligned} \quad (4.105)$$

Nuevamente, es directo mostrar que  $H_{BRST}$  es hermitiano.

Antes de calcular el propagador es necesario establecer los siguientes resultados. Primero calculemos los elementos de matriz de los multiplicadores de Lagrange  $N$  y  $M$ . Usando las soluciones a las ecuaciones de movimiento, en particular (4.96) y (4.97), puede mostrarse que

$$(\tau'' - \tau') \langle \tau'' | N | \tau' \rangle \mathcal{H}' = -i \langle \tau'' | \tau' \rangle, \quad (\tau'' - \tau') \langle \tau'' | M | \tau' \rangle \mathcal{Q}'_0 = i \langle \tau'' | \tau' \rangle, \quad (4.106)$$

donde  $\mathcal{H}' = (p'^2 + m^2)$  y  $\mathcal{Q}'_0 = \xi^\mu p'_\mu + m\xi_5$ . Estos resultados implican que los elementos de matriz del hamiltoniano BRST invariante se anulan entre estados físicos, tal como esperabamos. Los mismos resultados pueden establecerse usando la solución (4.96) y el hecho de que los elementos de matriz del hamiltoniano BRST invariante son nulos.

La variación general del propagador es

$$\delta \langle \tau'' | \tau' \rangle = i \langle \tau'' | p'_\mu \delta x^{\mu''} + x^{\mu''} \delta p'_\mu + \delta \xi^\mu M p^{\mu''} (\tau'' - \tau') + \delta \xi_5 M m (\tau'' - \tau') | \tau' \rangle. \quad (4.107)$$

Sustituyendo la solución de la ecuación de movimiento para  $x^{\mu''}$  en términos de los operadores fijos en los extremos y usando los resultados (4.106), obtenemos el propagador requerido

$$\langle \tau'' | \tau' \rangle = \exp[i p' \cdot x''] \frac{(p'_\mu \xi^{\mu''} + m\xi_5)}{(p'^2 + m^2)}. \quad (4.108)$$

Un punto delicado que debemos remarcar es el siguiente: los operadores  $\hat{\xi}^\mu$  y  $\hat{\xi}_5$  cumplen las propiedades

$$\hat{\xi}^i{}^2 = -\frac{1}{2}, \quad \hat{\xi}^0 = \frac{1}{2}, \quad \hat{\xi}_5^2 = -\frac{1}{2}, \quad (4.109)$$

debidas a la relación de conmutación para las variables  $\theta$  y a la solución de las ecuaciones de movimiento. No es trivial construir la correspondiente mecánica cuántica (espacio de Hilbert, relaciones de completéz y producto escalar) para operadores que poseen estas características [29], [65]. La construcción de la integral de trayectoria para este tipo de sistemas requiere de la definición de símbolo asociado a una función clásica [23]. En nuestro caso los vectores del espacio de Hilbert definidos en (4.103) deben ser interpretados con precaución. Una posibilidad es introducir los operadores de Grassmann reales  $\zeta^1$  y  $\zeta^2$  y escribir los operadores  $\hat{\xi}^\mu$  y  $\hat{\xi}_5$  en términos de ellos [65]

$$\hat{\xi}^1 = i\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\zeta^1 + \frac{\partial}{\partial\zeta^1}\right), \quad \hat{\xi}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\zeta^1 - \frac{\partial}{\partial\zeta^1}\right) \quad (4.110)$$

$$\hat{\xi}^3 = i\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\zeta^2 + \frac{\partial}{\partial\zeta^2}\right), \quad \hat{\xi}^0 = i\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\zeta^2 - \frac{\partial}{\partial\zeta^2}\right), \quad (4.111)$$

y

$$\hat{\xi}_5 = \frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}\hat{\xi}^\mu\hat{\xi}^\nu\hat{\xi}^\kappa\hat{\xi}^\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\zeta^1\frac{\partial}{\partial\zeta^1} - 1\right)\left(2\zeta^2\frac{\partial}{\partial\zeta^2} - 1\right), \quad (4.112)$$

permitiendo una realización del álgebra de Clifford

$$\{\hat{\xi}^\mu, \hat{\xi}^\nu\} = -\eta^{\mu\nu}, \quad \hat{\xi}_5^2 = -\frac{1}{2}, \quad \{\hat{\xi}_5, \hat{\xi}^\mu\} = 0. \quad (4.113)$$

Estos operadores actúan sobre espinores de la forma

$$\Phi(\zeta^1, \zeta^2) = \phi_2 + \zeta^1\phi_3 - \zeta^2\phi_4 - \zeta^1\zeta^2\phi_1, \quad (4.114)$$

donde todos los coeficientes  $\phi_\alpha$  dependen del momento  $p$ . El producto escalar es

$$\langle\Phi, \Psi\rangle = \int \prod_k d\zeta^k d\bar{\zeta}^k \exp(\bar{\zeta} \cdot \zeta) \Phi^*(\bar{\zeta}) \Psi(\zeta) = \sum_\alpha \phi_\alpha^* \psi_\alpha. \quad (4.115)$$

Para nuestro caso resulta relevante calcular la acción del operador  $Q_0$  sobre estos espinores. El resultado de esta operación es

$$[(\hat{\xi}^\mu p_\mu + m \hat{\xi}_5) \Phi(\zeta^1, \zeta^2)]_\alpha = \frac{i}{\sqrt{2}} [(-i\gamma \cdot p + m) \gamma_5]_{\alpha\beta} \phi_\beta \quad (4.116)$$

en la representación de las matrices de Dirac definida por

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_i \\ i\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad i\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.117)$$

Por tanto se obtiene la siguiente correspondencia

$$\hat{\xi}^\mu \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma^\mu \gamma_5, \quad \hat{\xi}_5 \rightarrow \frac{i}{\sqrt{2}} \gamma_5 \quad (4.118)$$

que permite obtener el propagador correcto en (4.108). El espacio de Hilbert queda, por tanto, dividido en dos sectores, aquél que depende de  $x, p$  y los fantasmas, producto el sector que depende de  $p, \zeta^1, \zeta^2$  definido por el espinor  $\Phi$

$$\begin{aligned} & \{(x^{\mu''}, \pi_{N''}, \pi_{M''}, C^{i''}, \bar{C}_i'', \tau'')\} \otimes \Phi(\zeta^1, \zeta^2), \\ & \{p_\mu', \pi_{N'}', \pi_{M'}', C^{i'}', \bar{C}_i', \tau'\} \otimes \Phi(\zeta^1, \zeta^2). \end{aligned} \quad (4.119)$$

En conclusión, partiendo de la versión cuantizada de la acción efectiva BRST-BFV clásica dada por la ecuación (4.20), y usando el principio de acción de Schwinger con las condiciones apropiadas sobre los extremos, hemos obtenido los propagadores de las partículas en el marco del formalismo de operadores.

## CAPÍTULO 5

### PRINCIPIO VARIACIONAL Y TÉRMINOS DE FRONTERA

En este capítulo revisaremos algunas ideas presentadas en [59] con el doble objetivo de analizarlas dentro del contexto del principio de acción de Schwinger, presentando un ejemplo con interacción, y comentar algunas ideas en relación al método de reducción de Faddeev-Jackiw.

A lo largo del trabajo de tesis hemos puesto énfasis en la necesidad de definir correctamente el principio variacional clásico que se utiliza como punto de partida para su cuantización. En particular hemos señalado la necesidad de incluir, como información dinámica relevante, las condiciones de frontera sobre las trayectorias sobre las que se aplica la funcional de acción. En mecánica clásica esta información puede resultar superflua en una primera instancia. De manera muy distinta, en mecánica cuántica esta información es muy importante, pues lo que aquí interesa es el cálculo del propagador cuya dependencia en las variables dinámicas está determinada justamente por esas condiciones frontera. No considerar esta información con detalle conduce a errores en la interpretación de los resultados o pérdida de información dinámica al efectuar el procedimiento de reducción, ya sea mediante la imposición de una condición de norma particular o en la reducción directa a *la* Faddeev-Jackiw. En [59] se ha mostrado que es posible construir un principio variacional —que difiere del original por términos de frontera— tal que permite fijar condiciones de norma que originalmente no se satisfacen idénticamente en los extremos. Esto permite mostrar la equivalencia entre el proceso de reducción—cuantización con el de cuantizar y después reducir en los casos en que no hay obstrucciones topológicas ni problemas de ordenamiento de factores. Presentaremos en este capítulo una revisión de las ideas contenidas en [59] para aplicarlas posteriormente al principio de acción de Schwinger. Analizaremos también los problemas que presenta el esquema de reducción de Faddeev-Jackiw y por último presentaremos un ejemplo con

interacción para ilustrar las ideas expuestas.

## 5.1 PRINCIPIO VARIACIONAL Y CONDICIONES SOBRE LOS EXTREMOS

Consideremos un sistema con variables canónicas  $q^i, p_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), constricciones de primera clase  $G_a(q, p) \approx 0$  ( $a = 1, \dots, m$ ) y el hamiltoniano de primera clase  $H_0(q, p)$ ,

$$G_a(q, p) \approx 0, \quad (5.1)$$

$$[G_a, G_b] = C_{ab}{}^c(q, p)G_c, \quad [H_0, G_a] = V_a{}^b(q, p)G_b. \quad (5.2)$$

Supondremos, por simplicidad, que las constricciones y las variables dinámicas son todas de paridad de Grassmann par y que el sistema es consistente, i.e. las constricciones  $G_a$  son todas las constricciones que surgen de aplicar el formalismo de Dirac.

Consideremos el siguiente principio variacional:

$$S[q^i(\tau), p_i(\tau), \lambda^a(\tau)] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (p_i \dot{q}^i - H_0 - \lambda^a G_a) d\tau - B(\tau_2) + B(\tau_1) \quad (5.3)$$

donde las las trayectorias están fijas en los extremos  $\tau_1$  y  $\tau_2$  de manera que

$$Q^i(q(\tau_1), p(\tau_1), \tau_1) = Q_1^i, \quad Q^i(q(\tau_2), p(\tau_2), \tau_2) = Q_2^i, \quad (5.4)$$

$$[Q^i, Q^j] = 0 \quad (\text{a tiempos iguales}).$$

Estas variables  $Q^i$  son tantas como las coordenadas  $q^i$  originales y podrían ser las mismas coordenadas ( $Q^i = q^i$ ) o los momentos ( $Q^i = p_i$ ). El término de frontera  $B$  se encarga de que el principio variacional (5.3) tenga correctamente fijadas en los extremos a las variables  $Q^i$  y por tanto será tal que

$$p_i \delta q^i = P_i \delta Q^i + \delta B, \quad (5.5)$$

(para  $\tau$  fijo), donde los  $P_i$ 's son los momentos conjugados a las coordenadas  $Q^i$ 's,

$$[P_i, P_j] = 0, \quad [Q^i, P_j] = \delta^i_j, \quad (5.6)$$

Por ejemplo, si escogemos  $Q^i = q^i$ , el término  $B$  correspondiente será  $B(\tau) = 0$  pero si  $Q^i = p^i$  entonces  $B = p_i q^i$ .

La variación de la acción (5.3) evaluada sobre las trayectorias solución es

$$\delta S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \frac{d}{d\tau} (p_i \delta q^i) - [\delta B]_{\tau_1}^{\tau_2} = 0 \quad (5.7)$$

debido a (5.4) y  $\delta Q^i(\tau_1) = \delta Q^i(\tau_2) = 0$ .

Por otra parte la transformación de norma infinitesimal dada por

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon q^i &= [q^i, \epsilon^\alpha G_\alpha], & \delta_\epsilon p_i &= [p_i, \epsilon^\alpha G_\alpha] \\ \delta_\epsilon \lambda^\alpha &= \frac{\partial \epsilon^\alpha}{\partial \tau} + [\epsilon^\alpha, H_0 + \lambda^b G_b] + \lambda^c \epsilon^b C_{bc}{}^\alpha - \epsilon^b V_b{}^\alpha, \end{aligned} \quad (5.8)$$

cambia la acción original (5.3) por otra acción que difiere de ésta por un término de frontera

$$\delta S = \left[ p_i \frac{\partial(\epsilon^\alpha G_\alpha)}{\partial p_i} - \epsilon^\alpha G_\alpha - \delta_\epsilon B \right]_{\tau_1}^{\tau_2}. \quad (5.9)$$

Aquí los parámetros de norma  $\epsilon^\alpha(q, p, \tau)$  son funciones arbitrarias de  $q^i, p_i$  y  $\tau$ , y los hemos puesto dentro de los paréntesis de Poisson con el objeto de que las transformaciones de norma (5.8) sean a la vez transformaciones canónicas. Nótese que sobre la superficie de restricción es posible ponerlos fuera de los paréntesis de Poisson. Generalmente estos parámetros se escogen de tal manera que  $\epsilon^\alpha(q(\tau_1), p(\tau_1), \tau_1) = \epsilon^\alpha(q(\tau_2), p(\tau_2), \tau_2) = 0$  con el objeto de no cambiar la variación de la acción en los extremos, i. e., la variación de la acción es cero para las trayectorias que cumplen  $\delta Q^i(\tau_1) = \delta Q^i(\tau_2) = 0$ . Sin embargo esto restringe la clase de transformaciones de norma posibles. La acción tiene "menos" simetría de norma al imponer estas condiciones sobre los parámetros de norma.

Estas observaciones resultan de importancia fundamental en el caso en que se requiera imponer condiciones de norma canónicas sobre la dinámica. En particular podría suceder que las condiciones de norma canónicas no se cumplierán idénticamente en los extremos. En tal caso, es posible construir un principio variacional que difiere del original por un término de borde y cuyas variables, fijas en los extremos, son distintas, de modo que ahora las condiciones de norma si se cumplan en los extremos. Con el objeto de no cambiar el contenido dinámico de la teoría estas nuevas variables deberán diferir de las originales por una transformación de norma. Otra manera de

enfocar el mismo problema es realizar una transformación de norma particular, de tal modo que en las nuevas variables definidas por esta transformación, las condiciones de norma nuevas se cumplan idénticamente en los extremos. Esto es posible, pero en general, la transformación de norma que tiene esta propiedad no cumple con  $\varepsilon^a(q(\tau_1), p(\tau_1), \tau_1) = \varepsilon^a(q(\tau_2), p(\tau_2), \tau_2) = 0$ . Como resultado la acción variada tendrá un término de borde que no se anula (ver (5.9)). Esto puede resolverse si se parte de un principio variacional con un término de frontera cuyo objetivo es cancelar el término resultante al variar la acción original con la transformación de norma particular.

Consideremos las condiciones de norma  $\chi^a(Q^i, P_i, \tau)$  con la propiedad

$$\det[\chi^a, G_b] \neq 0 \quad (5.10)$$

y tales que

$$\chi^a(Q^i(\tau_1) = Q_1^i, P_i(\tau_1), \tau_1) \neq 0, \quad \chi^a(Q^i(\tau_2) = Q_2^i, P_i(\tau_2), \tau_2) \neq 0. \quad (5.11)$$

Aplicando una transformación de norma particular a las variables  $Q^i$  obtenemos

$$\bar{Q}^i(\tau_1) \equiv (Q^i - [Q^i, \varepsilon^a G_a])(\tau_1) = Q_1^i, \quad \bar{Q}^i(\tau_2) \equiv (Q^i - [Q^i, \varepsilon^a G_a])(\tau_2) = Q_2^i, \quad (5.12)$$

donde hemos fijado las nuevas variables de tal manera que cumplan con las condiciones impuestas en el principio variacional original. En mecánica cuántica esto es de importancia fundamental, pues nos interesa calcular el propagador entre los puntos  $Q_1$  a  $\tau_1$  y  $Q_2$  a  $\tau_2$ . Si  $|Q_1\rangle$  denota una base completa en el espacio de Hilbert del correspondiente problema en mecánica cuántica al tiempo  $\tau_1$ , tal que  $\hat{Q}(\tau_1)|Q_1\rangle = Q_1|Q\rangle$  y usando una notación análoga  $\hat{Q}(\tau_2)|Q\rangle = Q_2|Q\rangle$ , la transformación de norma (5.8) generará nuevos estados  $|\bar{Q}_1 = Q_1\rangle = \exp(i\varepsilon\hat{G})(\tau_1)|Q_1\rangle$ , tales que  $\hat{Q}(\tau_1)|\bar{Q}_1\rangle = Q_1|Q_1\rangle$  y  $\hat{Q}(\tau_2)|Q_2\rangle = Q_2|Q_2\rangle$  donde  $\hat{Q} = \exp(i\varepsilon G)\hat{Q}\exp(-i\varepsilon G)$ . y cumple las propiedades  $\hat{Q}(\tau_1) = Q_1$  y  $\hat{Q}(\tau_2) = Q_2$ . Es decir, los operadores nuevos tienen los mismos valores propios que los antiguos en los puntos  $\tau_1$  y  $\tau_2$  pero, en general, son distintos en cualquier otro punto. Nótese que el cálculo de cantidades debe realizarse en la base correcta. Cantidades como  $\langle Q_2, \tau_2 | Q_1, \tau_1 \rangle$ , no tienen sentido ya que está expresada en una base que no cumple las condiciones a la frontera correctas y debe reemplazarse por el cálculo de  $\langle \bar{Q}(\tau_2) = Q_2, \tau_2 | \bar{Q}(\tau_1) = Q_1, \tau_1 \rangle$ .

Sobre la superficie de constricción las relaciones (5.12) resultan

$$\bar{Q}^i(\tau_1) \equiv (Q^i - \varepsilon^a [Q^i, G_a])(\tau_1) = Q_1^i \quad \bar{Q}^i(\tau_2) \equiv (Q^i - \varepsilon^a [Q^i, G_a])(\tau_2) = Q_2^i \quad (5.13)$$

Como consecuencia de las condiciones de transversalidad <sup>43</sup> las condiciones de norma deben depender de  $Q^a$ ,  $a = 1 \dots m$  de las variables  $Q^i$ . Por tanto,

$$\bar{Q}^a(\tau_1) \equiv (Q^a - \varepsilon^b [Q^a, G_b])(\tau_1) = Q_1^a \quad \bar{Q}^a(\tau_2) \equiv (Q^a - \varepsilon^b [Q^a, G_b])(\tau_2) = Q_2^a \quad (5.15)$$

Despejando  $Q^a$  de las condiciones de norma

$$\chi^a = Q^a - F^a(Q^i, P_i, \tau) = 0, \quad Q_1^a \neq F^a(\tau_1), \quad Q_2^a \neq F^a(\tau_2) \quad (5.16)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \varepsilon^a(\tau_1) &= ([Q^a, G_b]^{-1}(\tau_1) (Q^a(\tau_1) - \bar{Q}_1^a)) \\ &= ([Q^a, G_b]^{-1}(\tau_1) (F^a(\tau_1) - Q_1^a)), \\ \varepsilon^a(\tau_2) &= ([Q^a, G_b]^{-1}(\tau_2) (Q^a(\tau_2) - \bar{Q}_2^a)) \\ &= ([Q^a, G_b]^{-1}(\tau_2) (F^a(\tau_2) - Q_2^a)). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Es posible construir  $\varepsilon(Q, P, \tau)$  tal que satisfaga las condiciones anteriores. La solución más simple es

$$\varepsilon^a(Q, P, \tau) = ([Q^a, G_b]^{-1}(\tau) (F^a(\tau_1) - (Q_1^a - \frac{\tau - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} (Q_1^a - Q_2^a)))) \quad (5.18)$$

Este parámetro  $\varepsilon$  define la transformación de norma particular que tiene la propiedad deseada. En particular aplicando esta transformación a las condiciones de norma (5.16), obtenemos

$$\bar{\chi}^a = \bar{Q}^a - \left( Q_1^a - \frac{\tau - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} (Q_1^a - Q_2^a) \right) \quad (5.19)$$

<sup>43</sup>Las condiciones de transversalidad implican que las constricciones pueden resolverse —en principio— para  $m$  de los momentos conjugados a las coordenadas  $Q^i$ , digamos  $P_a$ , ( $a = 1 \dots m$ ). Esto será posible si

$$\frac{\partial G_a}{\partial P_i} \text{ es de rango máximo en } G_a \approx 0. \quad (5.14)$$

Consecuentemente las transformaciones de norma cambian los puntos extremos del principio variacional. Este es un requisito indispensable si se quiere obtener nuevas condiciones de norma que se cumplan idénticamente en los extremos.

Así, hemos obtenido unas nuevas condiciones de norma de manera que ahora si cumplen las condiciones sobre los extremos impuestas en el principio variacional original.

¿Cómo se reflejan estas ideas a nivel del principio variacional? Hemos visto que la presencia del término  $B$  en la acción (5.3) tiene el objeto de que la variación de la acción original, evaluada sobre las trayectorias solución correspondientes sea

$$\delta S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \frac{d}{d\tau} (P_i \delta Q^i), \quad (5.20)$$

de manera que  $\delta S = 0$  debido a  $\delta Q^i(\tau_1) = \delta Q^i(\tau_2) = 0$ . Ahora realizaremos una nueva transformación (que coincide con la transformación de norma particular usada para convertir las condiciones de norma originales (5.16) a nuevas condiciones de norma (5.19) que se anulen idénticamente en los extremos) desde las variables  $Q^i$  a las nuevas variables  $\bar{Q}^i$  de modo tal que  $\bar{Q}^i(\tau_1) = Q^i_1$  y  $\bar{Q}^i(\tau_2) = Q^i_2$ . La nueva acción cumplirá la condición

$$\delta \bar{S} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \frac{d}{d\tau} (\bar{P}_i \delta \bar{Q}^i) \quad (5.21)$$

Como  $\delta \bar{Q}^i(\tau_1) = \delta \bar{Q}^i(\tau_2) = 0$ , entonces  $\delta \bar{S} = 0$ . Para construir  $\bar{S}$ , en analogía a (5.3), colocaremos en la acción original un nuevo término  $D$  de tal manera que cuando realicemos la variación de esta acción usando la transformación de norma infinitesimal (5.8) obtengamos

$$\delta_\epsilon \bar{S} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \frac{d}{d\tau} (P_i \delta Q^i) - \delta D|_{\tau_1}^{\tau_2}. \quad (5.22)$$

Esto implica que  $D$  debe cumplir la relación

$$P_i \delta Q^i = \bar{P}_i \delta \bar{Q}^i + \delta_\epsilon D, \quad (5.23)$$

con

$$\bar{P}_i = P_i - [P_i, \epsilon^\alpha G_\alpha]. \quad (5.24)$$

Resolviendo para  $D$  encontramos, a primer orden en  $\epsilon$

$$D = - \left[ P_i \frac{\partial \epsilon^\alpha G_\alpha}{\partial P_i} - \epsilon^\alpha G_\alpha \right]_{\tau_1}^{\tau_2}. \quad (5.25)$$

Por tanto la acción  $\bar{S}$  cuyos extremos están fijos de modo que  $\bar{Q}^i(\tau_1) = Q_1^i$  y  $\bar{Q}^i(\tau_2) = Q_2^i$  será

$$\begin{aligned} \bar{S}[q^i(\tau), p_i(\tau), \lambda^a(\tau)] &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} (p_i \dot{q}^i - H_0 - \lambda^a G_a) d\tau \\ &- \left[ B + P_i \frac{\partial \varepsilon^a G_a}{\partial P_i} - \varepsilon^a G_a \right]_{\tau_1}^{\tau_2} \end{aligned} \quad (5.26)$$

donde  $\varepsilon$  está dado por (5.18).

En conclusión, hay dos tipos de principios variacionales que puede usarse: el primero tiene la estructura

$$\begin{aligned} \bar{S}[q^i(\tau), p_i(\tau), \lambda^a(\tau)] &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} (p_i \dot{q}^i - H_0 - \lambda^a G_a) d\tau \\ &- \left[ B + P_i \frac{\partial \varepsilon^a G_a}{\partial P_i} - \varepsilon_a G_a \right]_{\tau_1}^{\tau_2} \end{aligned} \quad (5.27)$$

y sus extremos están fijos en

$$(Q^i - [Q^i, \varepsilon^a G_a])(\tau_1) = Q_1^i, \quad (Q^i - [Q^i, \varepsilon^a G_a])(\tau_2) = Q_2^i, \quad (5.28)$$

con la condición de norma original (5.16). El segundo tiene la forma del principio variacional original

$$S[\bar{q}, \bar{p}, \bar{\lambda}] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\bar{p}_i \dot{\bar{q}}^i - \bar{H}_0 - \bar{\lambda}^a \bar{G}_a) d\tau + \bar{B} \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} \quad (5.29)$$

donde los extremos están fijos en

$$\bar{Q}^i(\tau_1) = Q_1^i, \quad \bar{Q}^i(\tau_2) = Q_2^i \quad (5.30)$$

y la condición de norma original se reemplaza por (5.19).

Algunos comentarios vienen al caso: a) Las teorías con constricciones lineales en los momentos no necesitan de este análisis ya que el término de borde es automáticamente cero. En estos casos es siempre posible modificar las condiciones de norma de tal manera que cumplan con las condiciones sobre los extremos exigidas por el correspondiente principio variacional, sin modificarlo. b) Este esquema puede usarse para mostrar que el procedimiento de reducir y después cuantizar es equivalente al procedimiento de cuantizar

y después reducir, si no hay obstrucciones topológicas ni problemas de ordenamiento de factores. c) Toda teoría con invariancia ante reparametrizaciones puede tratarse como una teoría de norma usual. En las teorías invariantes ante reparametrizaciones el hamiltoniano es una combinación lineal de las constricciones. Por otra parte, en las teorías tipo Yang-Mills el hamiltoniano es distinto de cero y coincide con la energía total. Sin embargo, esta diferencia "cuelga de un hilo muy delgado", como ha sido señalado en [59]. Una transformación canónica dependiente del tiempo puede convertir una teoría cuyo hamiltoniano es cero en otra cuyo hamiltoniano es distinto de cero. Del mismo modo, una teoría invariante ante reparametrizaciones, al imponer una condición de norma, se convierte en una teoría cuyo hamiltoniano es distinto de cero. Así, las teorías invariantes ante reparametrizaciones pueden tratarse como teorías de Yang-Mills [89],[24]. d) La cuantización en el formalismo de operadores muestra que hay complicaciones adicionales. Si existe alguna obstrucción cuántica a este procedimiento, una condición de norma accesible clásicamente puede no ser accesible cuánticamente. En general, aparecerán problemas de ordenamiento que deben ser analizados caso por caso. e) El formalismo BRST-BFV puede implementarse ayudando a resolver los problemas de ordenamiento con la ventaja adicional de tener la capacidad para trabajar con álgebras abiertas ("más allá" de Faddeev-Popov). f) Para los sistemas que presentan covariancia general, el método de reducción de F-J (ver Cap. 2) es incompleto. En el proceso de reducción se pierde información dinámica por no considerar, como punto de partida, el principio variacional correcto (con los términos de frontera implementados). De esta manera los procedimientos de cuantizar-reducir y reducir-cuantizar no conmutan, aún en casos simples como mostraremos en la siguiente sección. g) El caso de la gravedad en  $2+1$  dimensiones ha sido analizado en [25] usando la integral funcional. Sería de mucho interés proponer condiciones de norma alternativas para mostrar en este caso el funcionamiento de los términos de borde. h) La dificultad principal para tratar el caso fermiónico en este esquema es que el espacio fase es generalmente de dimensión impar. Solamente con la introducción del concepto de símbolo de un operador es posible dar sentido a condiciones a la frontera donde ahora sólo se fija una combinación de variables fermiónicas[23], [58]. Otro problema, en el caso fermiónico, es que el término de borde  $D$  es generalmente cero debido a que las constricciones son lineales en los momentos.

Por último consideraremos un ejemplo simple para exponer cómo funcio-

nan estas ideas en la práctica. Consideremos la acción de la partícula libre parametrizada

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\dot{q}p + \dot{t}p_t - NG) d\tau, \quad (5.31)$$

donde  $G = p_t + \frac{p^2}{2m}$ . Este principio variacional es válido para trayectorias tales que  $q(\tau_1) = q_1, q(\tau_2) = q_2$  y  $t(\tau_1) = t_1, t(\tau_2) = t_2$ . Consideremos la condición de norma canónica

$$\chi = t - T(\tau) = 0. \quad (5.32)$$

En general, esta condición no se cumple en los extremos, i.e.  $t_1 \neq T(\tau_1)$  y  $t_2 \neq T(\tau_2)$ . En este caso  $\varepsilon$  está definido por

$$t - \bar{t} = \varepsilon, \quad (5.33)$$

donde ahora  $\bar{t}(\tau_1) = t_1, \bar{t}(\tau_2) = t_2$ . Por tanto

$$t_1 - T(\tau_1) = \varepsilon(\tau_1), \quad t_2 - T(\tau_2) = \varepsilon(\tau_2), \quad (5.34)$$

y  $\varepsilon(\tau)$  podría escribirse como,

$$\varepsilon(\tau) = T(\tau) - \left( t_1 - \frac{\tau - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} (t_1 - t_2) \right), \quad (5.35)$$

en las nuevas coordenadas la condición de norma es ahora

$$\bar{\chi} = \bar{t} - \left( t_1 - \frac{\tau - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} (t_1 - t_2) \right), \quad (5.36)$$

y el principio variacional es

$$S[q(\tau), p(\tau), t(\tau), N(\tau)] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (p\dot{q} + p_t \dot{t} - NG) d\tau \quad (5.37)$$

$$- \frac{1}{2} [t(\tau_2) - t_2] \frac{p^2(\tau_2)}{m} + \frac{1}{2} [t(\tau_1) - t_1] \frac{p^2(\tau_1)}{m}, \quad (5.38)$$

cuyos extremos fijos son

$$\left( q - \frac{p}{m} t + \frac{p}{m} t_1 \right) (\tau_1) = q_1, \quad \left( q - \frac{p}{m} t + \frac{p}{m} t_2 \right) (\tau_2) = q_2, \quad (5.39)$$

donde  $t(\tau)$  está dado por la condición de norma. Es claro que si  $t(\tau_1) = t_1$  y  $t(\tau_2) = t_2$  este principio variacional se reduce al original. Pero, por ejemplo, en el caso  $t(\tau_1) = 0$  y  $t(\tau_2) = 0$ , el principio variacional contiene un término de borde adicional:

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau (p\dot{q} + p_t \dot{t} - NG) + \frac{1}{2m} [t_2 p^2(\tau_2) - t_1 p^2(\tau_1)]. \quad (5.40)$$

Realizando la transformación de norma particular dada por las ecuaciones (5.8) con  $\varepsilon$  definido por (5.35) obtenemos las nuevas variables

$$Q = q + \frac{p}{m} \left( t_1 + \frac{\tau - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} (t_2 - t_1) \right), \quad P = p. \quad (5.41)$$

Reescribiendo la acción original en estas nuevas variables obtenemos,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} d\bar{\tau} \left( P \frac{dQ}{d\bar{\tau}} - \frac{P^2}{2m} \right), \quad (5.42)$$

donde los puntos fijos en los extremos son ahora  $Q(\tau_1) = q_1, Q(\tau_2) = q_2$  y

$$\bar{\tau} = \frac{\tau - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} (t_2 - t_1) + t_1. \quad (5.43)$$

La acción resultante es la correspondiente a la partícula libre. Nótese que un sistema que inicialmente tenía hamiltoniano cero se ha convertido en una teoría con hamiltoniano distinto de cero. Las dos teorías son equivalentes y describen la partícula libre para la clase de trayectorias que comienzan en  $q_1$  a  $\tau_1$  y terminan en  $q_2$  a  $\tau_2$ .

Alternativamente puede considerarse el principio variacional

$$S[q(\tau), p(\tau), t(\tau), N(\tau)] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (p\dot{q} + p_t \dot{t} - NG) d\tau \quad (5.44)$$

cuyos extremos son

$$q(\tau_1) = q_1, \quad q(\tau_2) = q_2, \quad (5.45)$$

(hemos quitado las barras encima de las variables) y donde la condición de norma es (5.19).

En ambos casos los principios variacionales permiten calcular el propagador correcto ya sea usando la integral de trayectoria o el principio de acción de Schwinger.

## 5.2 FADDEV-JACKIW PARA SISTEMAS INVARIANTES ANTE REPARAMETRIZACIONES

El caso de los sistemas invariantes ante reparametrizaciones requiere atención especial puesto que los términos de frontera que aparecen en el principio variacional son distintos de cero. El procedimiento de reducción de Faddeev-Jackiw, revisado por nosotros en el Capítulo 2, aunque clásicamente correcto, conduce a una acción que no puede usarse como punto de partida en la integral funcional o en el principio de acción de Schwinger. Esto se debe a que comúnmente no se considera la información de las variables fijas en los extremos como información dinámica relevante en el principio variacional que se usa como punto de partida para efectuar la reducción. Como hemos señalado, esta información es muy importante en la construcción de la correspondiente teoría cuántica. Tomando en cuenta esta información, es posible reconstruir la acción en el espacio reducido, de tal manera que no se pierda información dinámica. Con el objeto de ilustrar estas ideas consideremos el ejemplo simple de la sección anterior

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau (\dot{q}p + ip_t - \lambda(p_t + H_0)) \quad (5.46)$$

donde  $H_0 = \frac{1}{2}p^2$ . Sin considerar la información sobre las variables que están fijas en los extremos aplicaremos directamente el método de Faddeev-Jackiw. Resolviendo para  $p_t$  y sustituyendo en la acción

$$S_R = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau (\dot{q}p - iH_0) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{dq}{dt} p - H_0 \right). \quad (5.47)$$

En la segunda igualdad hemos usado explícitamente  $t(\tau_1) = t_1, t(\tau_2) = t_2$ . Supongamos ahora que estamos interesados en fijar una condición de norma tal que  $t = 0$  con  $t(\tau_1) = 0, t(\tau_2) = 0$ . En tal caso el cambio de variable que permite escribir la segunda igualdad en (5.47) no puede realizarse. Además si se sustituye la condición de norma en la acción (5.47) se obtiene un resultado *incorrecto*

$$S_R = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau (\dot{q}p). \quad (5.48)$$

La información dinámica en el espacio reducido a desaparecido! La solución a este problema consiste en considerar el principio variacional correcto desde

el comienzo, *i.e.* partir de (5.38). En tal caso el proceso de reducción se sigue automáticamente en las líneas de lo expuesto en la sección anterior.

Alternativamente, es posible considerar la transformación que permite una "representación canónica de la superficie de constricción" (ver Cap. 2). En las variables definidas por tal transformación, las constricciones son lineales en los momentos y por tanto, no hay necesidad de realizar el análisis expuesto en la sección anterior. Nuevamente esta transformación debe definirse de tal manera que respete las condiciones sobre las variables que se fijan sobre los extremos. En nuestro ejemplo esto conduce precisamente a la transformación definida por (5.41). Resultados similares pueden encontrarse en [35].

### 5.3 TÉRMINOS DE PUNTA Y PRINCIPIO DE ACCIÓN DE SCHWINGER

Aunque no resulta indispensable usar el formalismo BRST-BFV cuando se usan normas canónicas (espacio fase reducido), puede resultar de gran ayuda para controlar algunos problemas de ordenamiento que surgen al transcribir los resultados anteriores a la mecánica cuántica. Nuestro punto de partida es la acción (4.20), que aquí reescribiremos por completez, añadiendo un término de frontera cuyo origen debe ser obtenido usando el formalismo de operadores

$$\hat{S}_{BRST} = \int_{\tau'}^{\tau''} \left( \langle \langle \dot{q}^i \hat{p}_i - \hat{\lambda}^a \hat{\pi}_a + \hat{C}_a \hat{P}^a + \hat{C}^a \hat{P}_a \rangle \rangle - \hat{H}_{BRST} \right) d\tau - \langle \langle \hat{B} \rangle \rangle_{\tau''} + \langle \langle D \rangle \rangle_{\tau'} \quad (5.49)$$

donde el término  $D$  es tal que

$$\langle \langle P_i \delta Q^i \rangle \rangle = \langle \langle \bar{P}_i \delta \bar{Q}^i + \delta D \rangle \rangle \quad (5.50)$$

y la notación  $\langle \langle \rangle \rangle$  se usa para simetrizar los productos de operadores, tal como fue propuesta en el capítulo anterior. Los vectores base del espacio de Hilbert al tiempo inicial  $\tau'$ ,  $|\bar{Q}^i = Q_1^i, C'^a = 0, \bar{C}'_a = 0, \pi'_a = 0\rangle$ , están etiquetados por sus correspondientes valores propios, que satisfacen

$$\hat{Q}_1^i |Q_1^i, C'^a = 0, \bar{C}'_a = 0, \pi'_a = 0\rangle = Q_1^i |Q_1^i, C'^a = 0, \bar{C}'_a = 0, \pi'_a = 0\rangle \quad (5.51)$$

$$\hat{C}_a |Q_1^i, C'^a, \bar{C}'_a, \pi'_a\rangle = \hat{C}_a |Q_1^i, C'^a, \bar{C}'_a, \pi'_a\rangle = \hat{\pi}_a |Q_1^i, C'^a, \bar{C}'_a, \pi'_a\rangle = 0, \quad (5.52)$$

en consistencia con las condiciones a la frontera clásicas (5.4). Expresiones análogas son válidas para los vectores base al tiempo final  $\tau''$ .

Los operadores  $\hat{Q}^i$  están definidos por la transformación de norma cuántica

$$\delta\hat{Q}^i = \hat{Q}^i - \hat{Q}^{\prime i} = -i[\hat{Q}^i, \hat{\mathcal{F}}], \quad (5.53)$$

con expresiones análogas para el resto de las variables, donde el operador hermiteano  $\hat{\mathcal{F}}$  está definido por

$$\hat{\mathcal{F}} = [i\hat{\varepsilon}^a \hat{P}_a, \hat{\Omega}]. \quad (5.54)$$

Con esta definición el operador  $\hat{\mathcal{F}}$  es hermitiano si  $\hat{\Omega}$  y  $\hat{\varepsilon}$  lo son. El efecto de esta operación es reemplazar  $C^a \rightarrow \varepsilon^a$  en la expresión de la carga BRST. El operador  $\hat{\mathcal{F}}$  define el término de borde correcto cuyo límite clásico es precisamente el obtenido en la sección previa (5.25). Esto se debe a que  $C$  y  $\bar{C}$  están fijos a cero en los extremos de modo que la única contribución de la transformación (5.53) en los puntos extremos es  $\varepsilon^a G_a$ , recuperando la expresión generada por la transformación canónica de norma (5.8). La siguiente observación es que la transformación (5.53) produce un cambio en la función  $H_{BRST}$  que puede absorberse redefiniendo el fermión de norma. Aplicando (5.53) a la acción BRST se obtiene, para el término cinético

$$\delta(\hat{\Pi}_A \dot{Z}^A) = \frac{d}{d\tau}(\hat{\Pi}_A \delta Z^A - \hat{\mathcal{F}}) + \frac{\partial \hat{\mathcal{F}}}{\partial \tau}, \quad (5.55)$$

donde  $Z^A \equiv (q^i, \pi_a, C^a, \bar{C}_a)$  y  $\Pi_A \equiv (p_i, \lambda^a, \mathcal{P}^a, \bar{\mathcal{P}}_a)$ . El efecto de esta transformación en el hamiltoniano efectivo es

$$\delta\hat{H}_{eff} = [\hat{H}_{eff}, \hat{\mathcal{F}}] = [\Omega, [H_{BRST} + \{\Psi, \Omega\}, i\varepsilon\bar{\mathcal{P}}]]. \quad (5.56)$$

El resultado de la variación es, por tanto, un término BRST exacto, más un término de frontera. Redefiniendo el fermión de norma de tal manera que el término BRST exacto se cancele (esto es siempre posible porque el resultado es independiente del fermión de norma), obtenemos

$$\delta S_{BRST} = \left( \hat{\Pi}_A \delta Z^A - \hat{\mathcal{F}} \right) \Big|_{\tau_1}^{\tau_2}, \quad (5.57)$$

donde, el fermión de norma es ahora

$$K = -[H_{BRST} + [\Psi, \Omega], i\epsilon^a \bar{P}_a] - \frac{i\partial\epsilon^a \bar{P}_a}{\partial\tau}, \quad (5.58)$$

y hemos usado que  $[H_{BRST}, \Omega] = 0$  además de suponer que  $\Omega$  no depende explícitamente del tiempo. Así, la variación de la acción es un término de punta que coincide con  $D$  ya que los fantasmas  $C, \bar{C}$  y  $\pi$  se anulan en los extremos.

Para imponer a nivel cuántico las condiciones de norma  $\hat{\chi}^a(\hat{q}, \hat{p}) = 0$  en el formalismo BRST-BFV se procede como sigue [39]: Se escoge como fermión de norma

$$\Psi_\epsilon = \hat{P}_a \hat{\lambda}^a + \frac{1}{\epsilon} \hat{C}_a \hat{\chi}^a, \quad (5.59)$$

se realiza el cambio de variable  $\pi_a \rightarrow \epsilon\pi_a, \bar{C}_a \rightarrow \epsilon\bar{C}_a$  (cuyo jacobiano es uno) en la acción (5.49) y se toma el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ . De esta manera las ecuaciones de movimiento resultantes contienen como ecuación de Heisenberg  $\hat{\chi}^a = 0$ . Es importante notar que la propiedad  $\delta(AB) = \delta A B + A \delta B$  es válida si todas las expresiones anteriores se simetrizan correctamente.

Para reformular estas ideas en términos del principio de acción de Schwinger podemos seguir dos caminos equivalentes. El primero consiste en considerar directamente la acción cuántica (5.49) y reconstruir las correctas variaciones en los extremos usando para ello la transformación de norma. En este caso obtendremos

$$\begin{aligned} \langle Q_2^i, \tau_2 | Q_1^i, \tau_1 \rangle &= i \langle Q_2^i, \tau_2 | \bar{P}_i(\tau_2) \delta \bar{Q}^i(\tau_2) - \bar{P}_i(\tau_1) \delta \bar{Q}^i(\tau_1) \\ &\quad - H_{BRST}(\tau_2) \delta \tau_2 + H_{BRST}(\tau_1) \delta \tau_1 | Q_1^i, \tau_1 \rangle, \end{aligned} \quad (5.60)$$

donde hemos descartado las contribuciones de los fantasmas y del sector de los multiplicadores de Lagrange ya que usando la prescripción (5.59) y las condiciones BRST-invariantes no contribuyen a la dinámica en el espacio fase reducido.

De manera equivalente podemos partir de la acción (5.49) sin considerar los términos de frontera y usar la condición de norma transformada  $\bar{\chi}$  que ahora se satisface idénticamente en los extremos. Nótese que por el primer camino puede resultar imposible construir las variaciones correctas en los extremos debido a problemas de ordenamiento de factores. Esto no implica que el problema cuántico no pueda resolverse en una condición de norma

(cuántica) que se satisfaga idénticamente en los extremos. Lo que esto quiere decir es que dos condiciones de norma relacionadas por una transformación de norma en la teoría clásica pueden no estar relacionadas por la correspondiente transformación de norma cuántica. Es, por tanto, siempre posible resolver el problema cuántico partiendo del principio variacional (5.49) sin considerar los términos de punta en una condición de norma que se satisface idénticamente en los extremos.

## 5.4 MODELO DE BANKS-O'LOUGHLIN

El objetivo de esta sección es ilustrar las ideas previas por medio de un ejemplo. Para ello proponemos usar el modelo de Banks-O'Loughlin de gravedad en 1+1 dimensiones en el espacio de Minkowski[9]. Este modelo es mucho más cercano a las ideas de la Relatividad General que los ejemplos previos considerados en [59], donde sólo se presentan ejemplos sin interacción. El cálculo del propagador para este sistema, usando la integral funcional, puede verse en [74]. Aquí utilizaremos el principio de acción de Schwinger obteniendo un resultado que coincide con el correspondiente resultado usando integral funcional y discutiremos brevemente el producto interno en el espacio reducido. Nuestros resultados son una consecuencia directa del análisis presentado en [60] para la partícula libre relativista. La diferencia es que en nuestro caso el hamiltoniano reducido es explícitamente dependiente del tiempo. Aunque los modelos de gravedad en 1+1 dimensiones son una simplificación drástica de la gravedad en 3+1 dimensiones, existen algunos problemas que no son sensibles a la reducción dimensional, como por ejemplo, el problema de la definición del tiempo, que aparece en cualquier teoría invariante ante difeomorfismos. En el modelo de Banks-O'Loughlin los problemas para obtener el propagador covariante son enormes debido a problemas de ordenamiento de factores. Sin embargo, el propagador en el espacio fase reducido es calculable y no presenta problemas de ordenamiento de factores, en contraposición a los resultados obtenidos originalmente en [9].

El punto de partida para construir el modelo de Banks-O'Loughlin es el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left( \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - V(\phi) + D(\phi)R \right), \quad (5.61)$$

construido de tal manera que sea invariante ante difeomorfismos. Aquí  $\phi$  es

un campo escalar,  $g^{\alpha\beta}$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2$  es la métrica cuyo determinante denotamos por  $g$  y  $R$  denota el escalar de Ricci. El estudio de estos modelos ha llevado a la conclusión de que para espacios tiempos con la topología del cilindro el espacio fase corresponde a configuraciones espacialmente homogéneas que se propagan en el tiempo. El elemento de línea puede escribirse en la forma

$$ds^2 = g^2(t)dt^2 - e(t)^2dx^2, \quad (5.62)$$

( $x^1 \equiv t$ ) y la acción es

$$S = \int dt \left( \frac{\dot{D}(\phi)\dot{e}}{g} + \frac{e\dot{\phi}^2}{2g} - egV \right). \quad (5.63)$$

La teoría es invariante ante reparametrizaciones si  $g$  transforma como multiplicador de Lagrange. En forma hamiltoniana esta acción es

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left( \frac{d\phi}{d\tau} \pi_\phi + \frac{d\sigma}{d\tau} \pi_\sigma - g\mathcal{H} \right), \quad (5.64)$$

donde

$$\mathcal{H} = -\frac{\pi_\sigma^2}{2D'^2} + \frac{\pi_\sigma \pi_\phi}{D'} + e^{2\sigma} V \approx 0. \quad (5.65)$$

es la restricción de Wheeler-DeWitt y  $\sigma \equiv \ln e$ .

Por simplicidad seleccionaremos las funciones  $D$  y  $V$  de tal manera que el lagrangiano sea invariante ante traslaciones en  $\phi$ :  $D(\phi) = Q\phi$  y  $V(\phi) = k$  con  $k$  y  $Q$  constantes.

Cuantizaremos el sistema en la norma

$$\chi = \sigma - f(\tau, \pi_\phi), \quad (5.66)$$

donde  $f(\tau, \pi_\phi)$  es arbitraria. Para ello partimos de la acción BRST

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left( \langle \dot{\phi} \pi_\phi + \dot{\sigma} \pi_\sigma - \lambda \dot{\pi} + \bar{C} \mathcal{P} + \dot{C} \bar{\mathcal{P}} - H_{eff} \rangle \right) + \langle \phi \pi_\phi \rangle + D \Big|_{\tau_1}^{\tau_2}, \quad (5.67)$$

donde el término  $D$  resulta

$$D = \langle \epsilon \left( -\frac{\pi_\sigma^2}{2Q^2} + \frac{\pi_\phi \pi_\sigma}{Q} - ke^{2\sigma} \right) \rangle. \quad (5.68)$$

La acción (5.67) es válida para las trayectorias cuyas condiciones sobre los extremos son:

$$\phi(\tau_1) - \varepsilon(\tau_1) \frac{\pi_\sigma}{Q} = \phi_1, \quad \sigma(\tau_1) - \varepsilon(\tau_1) \left( -\frac{\pi_\sigma}{Q^2} + \frac{\pi}{Q} \right) = \sigma_1 \quad (5.69)$$

$$\pi_\phi(\tau_2) = \pi_{\phi_2}, \quad \sigma(\tau_2) - \varepsilon(\tau_2) \left( -\frac{\pi_\sigma}{Q^2} + \frac{\pi}{Q} \right) = \sigma_2,$$

y para el resto de las variables las condiciones BRST invariantes usuales  $C(\tau_1) = C(\tau_2) = \bar{C}(\tau_1) = \bar{C}(\tau_2) = \pi(\tau_1) = \pi(\tau_2) = 0$ . Para construir el hamiltoniano efectivo usamos el fermión de norma

$$\Psi = \frac{i}{\varepsilon} \chi - \bar{P} \lambda, \quad (5.70)$$

donde  $\chi$  está dada por (5.66). La carga BRST es

$$\Omega = -i\mathcal{P}\pi + C\mathcal{H}, \quad \mathcal{H} = \pi_\sigma^2 + A(\pi_\phi, \sigma)\pi_\sigma + B(\pi_\phi, \sigma), \quad (5.71)$$

donde  $A = -2Qp_\phi$  y  $B = -2Q^2k \exp(2\sigma)$ . Usando las relaciones de conmutación

$$[\sigma, \pi_\sigma] = i, \quad [\phi, \pi_\phi] = i, \quad [\lambda, \pi] = i, \quad \{\bar{C}, \mathcal{P}\} = -i, \quad \{\bar{P}, C\} = -i, \quad (5.72)$$

puede mostrarse que la carga BRST es hermitiana y nilpotente. El hamiltoniano efectivo es

$$H_{eff} = \frac{1}{\varepsilon} \chi \pi - \frac{1}{\varepsilon} \bar{C} [\chi, \mathcal{H}] C - i\bar{P}\mathcal{P} - \lambda\mathcal{H}, \quad (5.73)$$

donde

$$[\chi, \mathcal{H}] = i(2\pi_\sigma + A). \quad (5.74)$$

En nuestro caso  $\mathcal{F}$  coincide con  $\langle\langle \varepsilon\mathcal{H} \rangle\rangle$  y las transformaciones de norma son

$$\begin{aligned} \delta\sigma &\equiv \sigma - \bar{\sigma} = \varepsilon(2\pi_\sigma + A), & \delta\pi_\sigma &= -4Q^2k\varepsilon e^{2\sigma}, & \delta\phi &= -2Q\varepsilon\pi_\sigma, & (5.75) \\ \delta\pi_\phi &= 0, & \delta\lambda &= \dot{\varepsilon}, & \delta\pi &= 0, & \delta\mathcal{P} = \delta C = \delta\bar{P} = \delta\bar{C} &= 0. \end{aligned}$$

En este caso  $\varepsilon$  satisface

$$\varepsilon(\tau_1) = (2\pi_\sigma + A)^{-1}(f(\pi_\phi, \tau) - \sigma_1)(\tau_1), \quad (5.76)$$

$$\varepsilon(\tau_2) = (2\pi_\sigma + A)^{-1}(f(\pi_\phi, \tau) - \sigma_1)(\tau_2). \quad (5.77)$$

Podemos resolver para el propagador en la norma "lineal" que está conectada con la condición de norma original por la transformación de norma (5.75)

$$\chi = \sigma - \left( \sigma_1 - \frac{\tau - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} (\sigma_2 - \sigma_1) \right). \quad (5.78)$$

En tal caso la condición de norma se cumple idénticamente en los extremos. Para esta norma la correspondiente acción BRST es

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau (\dot{\phi} \pi_{\phi} + \dot{\sigma} \pi_{\sigma} + \dot{C} \bar{P} - \chi \pi - C \left( \frac{\pi_{\phi}}{Q} - \frac{\pi_{\sigma}}{Q^2} \right) \bar{C} + i \bar{P} \mathcal{P} + \lambda \mathcal{H}) \quad (5.79)$$

obtenida de la acción original haciendo la transformación  $\bar{C} \rightarrow \epsilon \bar{C}$ ,  $\pi \rightarrow \epsilon \pi$  y tomando el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ . Las ecuaciones de movimiento son

$$\dot{\pi}_{\phi} = 0, \quad \dot{\phi} - \frac{\bar{C} C}{Q} + \frac{\lambda \pi_{\sigma}}{Q} = 0, \quad (5.80)$$

$$-\dot{\pi}_{\sigma} + 2k\lambda e^{2\sigma} - \pi = 0, \quad \dot{\sigma} + \frac{\bar{C} C}{Q^2} - \frac{\lambda \pi_{\sigma}}{Q^2} + \frac{\lambda \pi_{\phi}}{Q} = 0, \quad (5.81)$$

$$-\dot{\bar{P}} + \left( \frac{\pi_{\phi}}{Q} - \frac{\pi_{\sigma}}{Q^2} \right) \bar{C} = 0, \quad \dot{C} - i \mathcal{P} = 0, \quad (5.82)$$

$$\left( \frac{\pi_{\phi}}{Q} - \frac{\pi_{\sigma}}{Q^2} \right) C = 0, \quad \bar{P} = 0, \quad (5.83)$$

$$\mathcal{H} = 0, \quad \chi = 0. \quad (5.84)$$

Como consecuencia de las ecuaciones de movimiento los fantasmas desaparecen de la dinámica y  $\pi = 0$  por consistencia del algoritmo de Dirac. Por tanto al reducir resulta

$$\lambda(\tau) = \mp \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\tau_2 - \tau_1} (2\pi_{\sigma}^{\pm} + A)^{-1}, \quad (5.85)$$

$$\phi(\tau) = \phi(\tau_1) + \frac{\partial}{\partial \pi_{\phi}} \int_{\tau_1}^{\tau} \pi_{\sigma}^{\pm},$$

$$\pi_{\sigma}^{\pm} = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 + 4B}}{2}. \quad (5.86)$$

Aplicando el principio de acción obtenemos

$$\begin{aligned} & (\tau_2, \pi_{\phi_2} | \tau_1, \phi_1) \\ = & i(\tau_2, \pi_{\phi_2} | \pi_{\sigma}(\tau_2) \delta \sigma_2 - \pi_{\sigma}(\tau_1) \delta \sigma_1 - \phi(\tau_2) \delta \pi_{\phi_2} - \pi_{\phi}(\tau_1) \delta \phi_1 | \tau_1, \phi) \end{aligned} \quad (5.87)$$

cuya solución es

$$(\tau_2, \pi_{\phi_2} | \tau_1, \phi_1)_{\pm} = \exp(i\pi_{\phi_2} \phi_1) \exp\left(i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \pi_{\sigma}^{\pm}\right). \quad (5.88)$$

Resultado que coincide con el obtenido usando integral funcional en [74].

Por ultimo analizaremos el producto interno en el espacio fase reducido. Es conocido [58] que cuando se impone la condición de norma  $\chi = 0$  el producto interno regularizado tiene la estructura

$$(f|g) = \int dq f^* \delta(\chi)[\chi, G]g, \quad (5.89)$$

donde el factor  $\delta(\chi)[\chi, G]$  tiene el doble objetivo de restringir apropiadamente las variables de integración y hacer que el integrando sea invariante de norma. En nuestro caso este factor es  $2\pi_{\sigma}^{\pm} + A$ . Con el objeto de que las funciones de estado que hemos obtenido

$$\psi_p(\phi, \tau) = \exp(ip\phi) \exp\left(i \int d\tau \pi_{\sigma}(p, \tau)^{\pm}\right), \quad (5.90)$$

sean ortogonales, es necesario multiplicarlas por el factor  $(\sqrt{2\pi_{\sigma}^{\pm} + A})^{-1}$ . Este resultado coincide con el correspondiente resultado obtenido en [60] para la partícula libre relativista.

## CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Hemos descrito algunos aspectos generales de los sistemas con constricciones en el contexto del formalismo hamiltoniano. Mostramos la equivalencia del procedimiento de Faddeev-Jackiw con el método de Dirac. Extendimos el análisis BRST-BFV y el método de Batlin-Tyutin al caso de sistemas no estacionarios. Construimos una versión del método BRST-BFV de operadores en el contexto del principio de acción de Schwinger. Analizamos los problemas que las condiciones de norma no accesibles producen a nivel de la formulación del principio variacional original en el formalismo de operadores.

La comparación de los métodos de Faddeev-Jackiw y Dirac es útil para establecer los resultados que se obtienen con el método de reducción FJ en una base firme. En particular arroja luz sobre la versión geométrica del método de Dirac mostrando la interrelación entre las variables de norma y los multiplicadores de Lagrange. La demostración formal de que nuestro resultado es independiente de la condición de norma puede realizarse siguiendo las técnicas desarrolladas en la referencia [47].

En el capítulo 3 mostramos que el método BRST-BFV puede aplicarse a una teoría general incluyendo el caso en donde el hamiltoniano y las constricciones dependen explícitamente del tiempo. Mostramos que la teoría puede describirse en términos de la prescripción estandar BRST-BFV para el correspondiente sistema invariante ante reparametrizaciones. Investigamos también la aplicabilidad del teorema de Fradkin-Vilkovisky para estos sistemas. Encontramos que al menos para el caso en el que se elige una condición de norma lineal que se satisface idénticamente en los extremos, la integral de trayectoria y el formalismo de operadores conducen al mismo resultado: la equivalencia dinámica entre el modelo original explícitamente dependiente del tiempo y el correspondiente modelo reparametrizado. Este resultado puede generalizarse a normas arbitrarias usando las técnicas del capítulo 5.

En el capítulo 4 mostramos que es posible partir de la acción efectiva clásica, invariante ante la transformación de BRST para construir la correspondiente acción efectiva cuántica en el caso de teorías que no presentan anomalías. El principio de acción de Schwinger se usó para construir una versión del formalismo de operadores del método BRST-BFV. Las principales ventajas de tal formulación son: a) control directo en los problemas de ordenamiento de factores. b) Manipulación transparente a los términos de frontera en el caso de sistemas con grados de libertad fermiónicos. c) Ob-

tención de las reglas de conmutación y/o anticonmutación correctas para sistemas con constricciones. Presentamos los ejemplos de las partículas, parametrizada, relativista y con espín. Nuestros resultados coinciden con los propagadores conocidos calculados usando el método BRST-BFV en el marco de la integral funcional. En el camino encontramos interesantes analogías entre el método de operadores y la integral funcional sobre todo en lo que respecta al sector de los fantasmas.

Por último en el capítulo 5 mostramos que el principio de acción de Schwinger es también útil para tratar problemas con constricciones en los que se fijan condiciones de norma no accesibles. Este análisis puede considerarse como una extensión al formalismo de operadores de las ideas presentadas en [59] en el contexto de la integral funcional y muestra que los procedimientos de reducir y cuantizar o cuantizar y reducir conmutan en el caso en que no se presenten obstrucciones topológicas ni problemas de ordenamiento. Presentamos como ejemplo el modelo de Banks-O'Loughlin de gravedad en 1+1 dimensiones en normas canónicas.

Algunas de las tareas que quedan por hacer en este campo son: a) Estudiar la cohomología BRST para teorías anómalas en el contexto del complejo bivariacional [3], [12] b) Analizar los problemas que surgen de tratar constricciones complejas en el formalismo BRST-BFV. c) Estudiar la formulación lagrangiana BV. f) Análisis de problemas de ordenamiento para teorías con constricciones cuadráticas en los momentos usando BRST-BFV.

## APÉNDICE

### GRASSMANOLOGÍA

El objetivo de este apéndice es mostrar la notación y las convenciones utilizadas en el trabajo de tesis, en particular en lo que respecta a las variables de Grassmann. Analizaremos la estructura del espacio fase cuando se presentan grados de libertad fermiónicos considerando los factores de signo apropiados para el caso de sistemas con constricciones fermiónicas. Para detalles referimos al lector a [58] y [23].

#### A.1 VARIABLES FERMIÓNICAS

Un álgebra de Grassmann  $\mathcal{G}_n$  con  $n$  generadores se define como un espacio vectorial sobre los números complejos con las siguientes características: a) Un producto asociativo y bilineal con respecto a la adición y multiplicación por escalares. b) Contiene el elemento unidad respecto a este producto, c)  $\mathcal{G}_n$  es generada por  $n$  elementos  $\xi^A$ ,  $A = 1 \dots n$  que obedecen la relación

$$\xi^A \xi^B + \xi^B \xi^A = 0, \quad (\xi^A)^2 = 0. \quad (\text{A.1})$$

Por tanto, una base de  $\mathcal{G}_n$  es  $\{1, \xi^A, \xi^A \xi^B (A < B), \dots\}$ . La dimensión de este espacio es  $2^n$ . Un elemento genérico tienen la forma

$$g = g_0 + g_A \xi^A + g_{AB} \xi^A \xi^B + \dots + g_{A_1 \dots A_n} \xi^{A_1} \dots \xi^{A_n} \quad (\text{A.2})$$

donde los coeficientes  $g_{AB}$  pueden suponerse totalmente antisimétricos. Los números  $\xi^A$  pueden representarse por matrices de dimensión  $2^n \times 2^n$ . En lo que sigue distinguiremos dos tipos de variables dinámicas como variables pares (conmutan) o variables impares (anticommutan). Las siguientes propiedades se cumplen

$$\theta^\alpha \theta^\beta + \theta^\beta \theta^\alpha = 0, \quad \theta^\alpha \text{ impar} \quad (\text{A.3})$$

$$\theta^\alpha q^i - q^i \theta^\alpha = 0, \quad \theta^\alpha \text{ impar}, \quad q^i \text{ par} \quad (\text{A.4})$$

$$q^i q^j - q^j q^i = 0, \quad q^i \text{ par}, \quad (\text{A.5})$$

Usaremos indistintamente impar o fermiónica y par o bosónico. Podemos realizar estas variables dinámicas en términos de los generadores  $\xi^A$  como

$$q^i(t) = q_0^i(t) + q_{AB}^i \xi^B \xi^A + \dots \quad (\text{A.6})$$

$$\theta^\alpha(t) = \theta_A^\alpha(t) \xi^A + \theta_{ABC}^\alpha \xi^C \xi^B \xi^A + \dots \quad (\text{A.7})$$

donde los coeficientes son números complejos. Es posible construir el álgebra de Grassmann para infinitos generadores. En tal caso la serie (A.7) es infinita.

Los generadores  $\xi^A$  no juegan ningún papel relevante en lo que sigue. Los objetos que intervienen en la descripción física de los sistemas con grados de libertad de Grassmann son las llamadas superfunciones (objetos que viven en el superespacio) cuya forma es

$$f(q, \theta) = f_0(q) + f_\alpha(q) \theta^\alpha + f_{\alpha\beta}(q) \theta^\beta \theta^\alpha + \dots \quad (\text{A.8})$$

donde los coeficientes dependen de las variables  $q$  que conmutan y son totalmente antisimétricos en sus índices.

Las reglas básicas para derivar son las siguientes:

$$\delta_\theta f = \frac{\overrightarrow{\partial} f}{\partial \theta^\alpha} \delta \theta^\alpha = \delta \theta \frac{\overleftarrow{\partial} f}{\partial \theta^\alpha} = - \frac{\overleftarrow{\partial} f}{\partial \theta^\alpha} \delta \theta^\alpha. \quad (\text{A.9})$$

Por ejemplo, si  $f = \theta^1 \theta^2$

$$\delta f = \delta \theta^1 \theta^2 + \theta^1 \delta \theta^2 = -\theta^2 \delta \theta^1 + \theta^1 \delta \theta^2 \quad (\text{A.10})$$

de donde se deduce

$$\frac{\overrightarrow{\partial} f}{\partial \theta^2} = \theta^1, \quad \frac{\overleftarrow{\partial} f}{\partial \theta^2} = -\theta^1, \quad \frac{\overrightarrow{\partial} f}{\partial \theta^1} = -\theta^2, \quad \frac{\overleftarrow{\partial} f}{\partial \theta^1} = \theta^2. \quad (\text{A.11})$$

En general, toda superfunción puede dividirse en una parte par y otra impar

$$f(q, \theta) = f_{\text{par}}(q, \theta) + f_{\text{impar}}(q, \theta), \quad (\text{A.12})$$

donde

$$f_{\text{par}}(q, \theta) = f_0 + f_\alpha \theta^\alpha + \dots \quad (\text{A.13})$$

$$f_{\text{impar}}(q, \theta) = f_\alpha \theta^\alpha + f_{\alpha\beta\gamma} \theta^\beta \theta^\gamma + \dots \quad (\text{A.14})$$

Es conveniente introducir la paridad de Grassman como un número que puede tomar los valores 1 o 0 de acuerdo a si la función es impar o par, respectivamente. Este número tiene las propiedades

$$fg = (-)^{\epsilon f \epsilon g} gf, \quad \epsilon(fg) = \epsilon(f) + \epsilon(g), \quad (\text{A.15})$$

y se suma y multiplica modulo 2. La regla de Leibnitz es en este caso

$$\overleftarrow{\partial} OA = -O \overleftarrow{\partial} A + \overleftarrow{\partial} O A \quad (\text{A.16})$$

y las derivadas derecha  $\rightarrow$  e izquierda  $\leftarrow$  están relacionadas por

$$\overrightarrow{\partial} f = -(-)^{\epsilon f} \overleftarrow{\partial} f, \quad (\text{A.17})$$

donde  $A$  es un superfunción arbitraria y  $O$  es una superfunción impar. Las propiedades de conjugación de los números de Grassmann son, a)  $(AB)^* = B^*A^*$ , b)  $(A^*)^* = A$ , c)  $(\alpha A)^* = \alpha^*A^*$ , donde  $\alpha$  es un número complejo arbitrario. Se dice que  $A$  es real si  $A^* = A$  y es  $A$  es imaginario si  $A^* = -A$ . Nótese que  $\theta^\alpha \theta^\beta$  es imaginario si  $\theta^\alpha$  es real.

La integral sobre variables fermiónicas o integral de Berezin está definida por<sup>44</sup>

$$\int \theta d\theta = 1, \quad \int d\theta = 0. \quad (\text{A.20})$$

Su generalización es inmediata para cualquier número de variables de Grassmann.

<sup>44</sup>Esta definición de la integral para variables de Grassmann puede justificarse como sigue: consideremos la identidad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x+c) dx, \quad (\text{A.18})$$

donde  $c$  es una constante arbitraria. Para el caso de una variable de Grassmann impar esta identidad es

$$\int \phi(\theta) d\theta = \int d\theta (a + b\theta) = aI_0 + bI_1 = (a + bc)I_0 + bI_1, \quad (\text{A.19})$$

donde  $I_0 = \int d\theta$  y  $I_1 = \int \theta d\theta$ . Para mantener la identidad básica (A.18), se obtiene  $I_0 = 0$  y  $I_1$  arbitraria.  $I_1$  se escoge convenientemente como 1.

Dado el cambio de variable  $q^i(q^i, \theta^\alpha)$ ,  $\theta^\alpha(q^i, \theta^\alpha)$  donde  $\epsilon(q^i) = \epsilon(q^i) = 0$ ,  $\epsilon(\theta^\alpha) = \epsilon(\theta^\alpha) = 1$ , definimos el superjacobiano por la matriz

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial q^i}{\partial q^j} & \frac{\partial q^i}{\partial \theta^\alpha} \\ \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial q^j} & \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial \theta^\beta} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.21})$$

El cambio de variable es invertible si  $J$  es invertible

$$J^{-1} = \frac{\overrightarrow{\partial}(q^i, \theta^\alpha)}{\partial(q^j, \theta^\beta)}. \quad (\text{A.22})$$

En general cualquier matriz de la forma

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad (\text{A.23})$$

se llama una supermatriz, si  $A$  y  $D$  son pares y  $B$  y  $C$  impares. En particular  $M_1 M_2$  es una supermatriz si  $M_1$  y  $M_2$  lo son. La supertraza de una supermatriz es

$$\text{str } M = \text{tr } A - \text{tr } D, \quad (\text{A.24})$$

y cumple con la propiedad  $\text{str}(M_1 M_2) = \text{str}(M_2 M_1)$  y  $\text{str}(M_1 + M_2) = \text{str } M_1 + \text{str } M_2$ . El superdeterminante se define por

$$\delta \ln \text{sdet } M = \text{str}(M^{-1} \delta M) \quad (\text{A.25})$$

y cumple la propiedad  $\text{sdet}(M_1 M_2) = \text{sdet}(M_1) \text{sdet}(M_2)$ .

## A.2 MECÁNICA CLÁSICA CON VARIABLES DE GRASSMANN

Si además de los grados de libertad bosónicos se introducen grados de libertad fermiónicos, la acción de un sistema arbitrario tendrá la forma

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q^i, \dot{q}^i, \theta^\alpha, \dot{\theta}^\alpha). \quad (\text{A.26})$$

El correspondiente hamiltoniano puede calcularse de la manera usual con la convención

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad \pi_\alpha = \frac{\overleftarrow{\partial} L}{\partial \dot{\theta}^\alpha}, \quad (\text{A.27})$$

y resulta

$$H = \dot{q}^i p_i + \dot{\theta}^\alpha \pi_\alpha - L. \quad (\text{A.28})$$

Las ecuaciones de movimiento pueden calcularse usando el corchete de Poisson

$$[F, G] = \left( \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q^i} \right) + (-)^{\epsilon_F} \left( \frac{\partial F}{\partial \theta^\alpha} \frac{\partial G}{\partial \pi_\alpha} + \frac{\partial F}{\partial \pi_\alpha} \frac{\partial G}{\partial \theta^\alpha} \right). \quad (\text{A.29})$$

que cumple las propiedades

$$[F, G] = -(-)^{\epsilon_F \epsilon_G} [G, F] \quad (\text{A.30})$$

$$[F, G_1 G_2] = [F, G_1] G_2 + (-)^{\epsilon_F \epsilon_{G_1}} G_1 [F, G_2] \quad (\text{A.31})$$

$$[[F_1, F_2], F_3] + (-)^{\epsilon_{F_1}(\epsilon_{F_2} + \epsilon_{F_3})} [[F_2, F_3], F_1] + (-)^{\epsilon_{F_2}(\epsilon_{F_1} + \epsilon_{F_3})} [[F_3, F_1], F_2] = 0 \quad (\text{A.32})$$

$$\epsilon([F, G]) = \epsilon_F + \epsilon_G. \quad (\text{A.33})$$

### A.2.1 ACCIÓN EXTENDIDA: INCORPORACIÓN DE LA SIGNOS APROPIADOS

Denotaremos las variables del espacio fase, entre las cuales puede haber algunas que pertenezcan a un álgebra de Grassmann, por  $z^A$ ,  $A = 1, \dots, n$ . Las constricciones de primera clase  $\gamma_a(z^A)$ ,  $a = 1, \dots, m$  y sus multiplicadores de Lagrange asociados por  $\lambda^a$ . Asumiremos que las constricciones son reales. Pueden ser pares o impares. En el segundo caso  $\lambda^a$  es imaginario e impar, de tal manera que el término  $\lambda^a \gamma_a$  sea real y par.

La acción extendida tiene la forma

$$S_E(z^a(\tau), \lambda^a(\tau), \mu^a(\tau)) = \int (a_A \dot{z}^A - H(z) - \lambda^a \gamma_a) d\tau \quad (\text{A.34})$$

donde  $H(z)$  es el hamiltoniano canónico. El álgebra de constricciones es

$$[\gamma_a, \gamma_b] = C_{ab}^c \gamma_c, \quad (\text{A.35})$$

$$[H, \gamma_a] = V_a^b \gamma_b \quad (\text{A.36})$$

con las constricciones a la derecha de las funciones de estructura. Las funciones de estructura tienen la siguiente propiedad

$$C_{ab}^c = -(-)^{\epsilon_a \epsilon_b} C_{ba}^c. \quad (\text{A.37})$$

La paridad de las funciones de estructura está determinada por la suma de la paridad de los índices respectivos. Por ejemplo,  $\epsilon(C_{ab}^c) = \epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c$  y  $\epsilon(V_b^a) = \epsilon_a + \epsilon_b$ .

La estructura simpléctica es

$$\sigma_{AB} = -\frac{\partial^R a_A}{\partial z^B} - (-)^{(\epsilon_A+1)(\epsilon_B+1)} \frac{\partial^R a_B}{\partial z^A} \quad (\text{A.38})$$

$$\{z^A, z^B\} = \sigma^{AB} \quad (\text{A.39})$$

$$\{F, G\} = \frac{\partial^R F}{\partial z^A} \sigma^{AB} \frac{\partial^R G}{\partial z^B} \quad (\text{A.40})$$

$$\sigma^{AB} \sigma_{BC} = \delta_C^A, \quad \sigma_{AB} = (-)^{(\epsilon_A+1)(\epsilon_B+1)} \sigma_{BA}, \quad (\text{A.41})$$

y las transformaciones de norma están dadas por

$$\delta F = [F, \epsilon^a \gamma_a] \approx (-)^{\epsilon_F \epsilon_a} \epsilon^a [F, \gamma_a]. \quad (\text{A.42})$$

La paridad de las constricciones de primera clase, los multiplicadores de Lagrange y el parámetro de norma las denotaremos por  $\epsilon_a$ ,  $\epsilon(\lambda^a)$  y  $\epsilon(\epsilon^a)$ , respectivamente. Sus propiedades son las siguientes

$$\epsilon(\gamma_a) = \epsilon_a, \quad \gamma_a^* = \gamma_a \quad (\text{A.43})$$

$$\epsilon(\lambda^a) = \epsilon(\epsilon^a) = \epsilon_a, \quad (\lambda^a)^* = (-)^{\epsilon_a} \lambda^a, \quad (\epsilon^a)^* = (-)^{\epsilon_a} \text{varepsilonpsilon}^a \quad (\text{A.44})$$

y están determinadas por el hecho de que  $\lambda^a \gamma_a$  y  $\epsilon^a \gamma_a$  sean reales y pares. La acción (A.34) es invariante ante las transformaciones del norma

$$\delta z^A = [z^A, \epsilon^a \gamma_a], \quad \delta \lambda^a = \frac{\partial \epsilon^a}{\partial \tau} + [\epsilon^a, H_0 + \lambda^b \gamma_b] + \lambda^c \epsilon^b C_{bc}^a - \epsilon^b V_b^a \quad (\text{A.45})$$

$$\delta_\epsilon S = ([z^A, \epsilon^a \gamma_a] a_A - \epsilon^a \gamma_a) \Big|_{\tau_1}^{\tau_2}. \quad (\text{A.46})$$

Aquí, los parámetros de norma  $\epsilon^a(z^B, \tau)$  son funciones arbitrarias del espacio fase.

Un punto importante acerca de la acción (A.34) es que no podemos fijar en los extremos todas las variables  $z^A$  ya que esto sobredetermina las condiciones iniciales de las ecuaciones de movimiento. Podemos escoger la mitad de ellas con la propiedad

$$\{z^i, z^j\} = 0 \quad (\text{A.47})$$

(conjunto completo). Por ejemplo, en coordenadas canónicas donde  $z^A = (q^i, p_i)$ ,  $i = 1 \dots n$  y  $a_A = (p_i, 0)$  podemos poner  $q(\tau_1) = q_1, q(\tau_2) = q_2$  o los momentos  $p(\tau_1) = p_1, p(\tau_2) = p_2$  o alguna combinación de coordenadas y momentos con la propiedad (A.47).

### A.2.2 TÉRMINOS DE FRONTERA

Con el objeto de ilustrar los problemas que las variables fermiónicas introducen en la definición del espacio fase consideremos la acción

$$S = \int \frac{i}{2} \dot{\theta}^i \theta^j \delta_{ij} dt, \quad (\text{A.48})$$

donde  $i, j = 1, 2, 3$ . Este sistema tiene las siguientes constricciones

$$\chi_i = p_i + \frac{i}{2} \delta_{ij} \theta^j, \quad (\text{A.49})$$

y su hamiltoniano asociado es cero. Estas constricciones son de segunda clase

$$[\chi_i, \chi_k] = -i \delta_{ik}, \quad (\text{A.50})$$

dando origen al paréntesis de Dirac

$$[\theta^i, \theta^j]^* = -i \delta_{ij}. \quad (\text{A.51})$$

Al cuantizar este sistema obtenemos el anticonmutador

$$\hat{\theta}^i \hat{\theta}^j + \hat{\theta}^j \hat{\theta}^i = \delta^{ij}. \quad (\text{A.52})$$

Las ecuaciones de movimiento asociadas a la acción (A.48) son de primer orden y por tanto, no es posible fijar la variable dinámica  $\theta^i$  en los extremos. La manera de resolver este problema es considerar el principio variacional

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{i}{2} \dot{\theta}^i \theta^j \delta_{ij} dt - \frac{i}{2} \theta^i(t_1) \theta^j(t_2) \delta_{ij} \quad (\text{A.53})$$

que fija la combinación  $\theta(t_1) + \theta(t_2) = 2\xi$ . Este resultado se sigue directamente de exigir que el principio variacional de las ecuaciones de movimiento correctas (sin restricciones adicionales) y sus condiciones a la frontera determinen la solución de manera única. El siguiente ejemplo tiene grados de libertad fermiónicos y no presenta constricciones, el lagrangiano es cuadrático en las velocidades. Sin embargo, presenta estados con norma negativa. Consideremos la acción

$$S[A, C, \bar{C}] = \int dt \left( \frac{1}{2} \dot{A}^2 + i \bar{C} \dot{C} \right). \quad (\text{A.54})$$

Los momentos asociados son  $\pi = \dot{A}, \bar{\mathcal{P}} = -i\dot{\bar{C}}, \mathcal{P} = i\dot{C}$  y el hamiltoniano resultante es

$$H = \frac{1}{2}\pi^2 + i\bar{\mathcal{P}}\mathcal{P}. \quad (\text{A.55})$$

Las propiedades de los pares conjugados  $(C, \bar{\mathcal{P}}), (\bar{C}, \mathcal{P})$  son  $C^2 = 0, \bar{C}^2 = 0, \mathcal{P}^2 = 0, \bar{\mathcal{P}}^2 = 0$  y  $C^* = C, \bar{C}^* = \bar{C}, \mathcal{P}^* = -\mathcal{P}, \bar{\mathcal{P}}^* = -\bar{\mathcal{P}}$  junto con las relaciones de anticonmutación

$$C\bar{\mathcal{P}} + \bar{\mathcal{P}}C = -i, \quad \bar{C}\mathcal{P} + \mathcal{P}\bar{C} = -i. \quad (\text{A.56})$$

Nótese que la acción es invariante ante la transformación supersimétrica  $\delta A = \dot{C}\epsilon, \delta C = 0, \delta \bar{C} = i\dot{A}\epsilon$ . Con la representación de estas relaciones de conmutación en términos de  $\gamma_0 \equiv C - i\bar{\mathcal{P}}, \gamma_1 \equiv C + i\bar{\mathcal{P}}$  obtenemos

$$\gamma_0\gamma_1 + \gamma_1\gamma_0 = 0, \quad \gamma_0^2 = -1, \quad \gamma_1^2 = 1. \quad (\text{A.57})$$

La norma de  $\gamma_0$  es negativa en el producto escalar que hace de  $\gamma_0$  un operador hermitiano.

### A.2.3 INTEGRAL FUNCIONAL SOBRE EL SECTOR DE LOS FANTASMAS

En la base del superespacio generado por los fantasmas  $\{1, C, \bar{C}, C\bar{C}\}$  podemos expresar un elemento genérico en este espacio como

$$f = f_0 + f_1 C + f_2 \bar{C} + f_3 C\bar{C}. \quad (\text{A.58})$$

El producto escalar es  $(f|g) = \int f^* g dC d\bar{C}$ . La matriz correspondiente a este producto escalar es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.59})$$

Es fácil ver que  $C\bar{C}$  es vector propio de los operadores  $\hat{C}$  y  $\hat{\bar{C}}$  con valor propio cero ya que

$$\hat{C}X = CX, \quad \hat{\bar{C}}X = \bar{C}X, \quad \hat{\mathcal{P}}X = i\frac{\partial}{\partial C}X, \quad \hat{\bar{\mathcal{P}}}X = i\frac{\partial}{\partial \bar{C}}X. \quad (\text{A.60})$$

Denotaremos a este vector por

$$|\psi_{c=c=0}\rangle. \quad (\text{A.61})$$

El núcleo de la variable  $A(C, \bar{C}; C', \bar{C}')$  es

$$(Af)(C, \bar{C}) = \int dC' d\bar{C}' A(C, \bar{C}; C', \bar{C}') f(C', \bar{C}'), \quad (\text{A.62})$$

y obedece la regla del producto

$$(AB)(C, \bar{C}; C', \bar{C}') = \int dC'' d\bar{C}'' A(C, \bar{C}; C'', \bar{C}'') B(C'', \bar{C}''; C', \bar{C}'). \quad (\text{A.63})$$

En particular los elementos de matriz del operador asociado  $\hat{A}$  entre los estados (A.61) es

$$A(0, 0; 0, 0) = \langle \psi_{c=c=0} | \hat{A} | \psi_{c=c=0} \rangle. \quad (\text{A.64})$$

La integral funcional

$$U(C_f, \bar{C}_f; C_i, \bar{C}_i; t_f - t_i) = \int \mathcal{D}C \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}\mathcal{P} \mathcal{D}\bar{\mathcal{P}} \exp(iS), \quad (\text{A.65})$$

donde  $S$  está dada por

$$S = \int_{t_i}^{t_f} (\dot{C}\bar{\mathcal{P}} + \dot{\bar{C}}\mathcal{P} - H) dt, \quad (\text{A.66})$$

con  $C(t_f) = C_f, \bar{C}(t_f) = \bar{C}_f, C(t_i) = C_i, \bar{C}(t_i) = \bar{C}_i$  describe el símbolo del operador evolución. En particular, el elemento de matriz del *operador* evolución entre los estados (A.61) es

$$\langle \psi_{c=c=0} | \hat{U}(t_f - t_i) | \psi_{c=c=0} \rangle = \int \mathcal{D}C \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}\mathcal{P} \mathcal{D}\bar{\mathcal{P}} \exp(iS), \quad (\text{A.67})$$

con  $C_f = C_i = \bar{C}_f = \bar{C}_i = 0$ .

Como ejemplo consideremos la partícula libre fermiónica obtenida de (A.54) con  $A = 0$ . El hamiltoniano es  $H = i\bar{\mathcal{P}}\mathcal{P}$  y las ecuaciones de movimiento son  $\dot{C} = i\mathcal{P}, \dot{\bar{C}} = -i\bar{\mathcal{P}}, \dot{\mathcal{P}} = 0, \dot{\bar{\mathcal{P}}} = 0$ . La integral de trayectoria sobre el sector de los fantasmas es

$$\langle \psi_{c=c=0} | \exp[-iH(t_f - t_i)] | \psi_{c=c=0} \rangle = \int \mathcal{D}C \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}\mathcal{P} \mathcal{D}\bar{\mathcal{P}} \exp(iS). \quad (\text{A.68})$$

donde la suma se extiende sobre todas las trayectorias con las condiciones de frontera  $C_f = C_i = \bar{C}_f = \bar{C}_i = 0$ . Realizando las integrales funcionales sobre los fantasmas se obtienen dos deltas funcionales de las derivadas respecto al tiempo de los antifantasmas. Esto conduce a una integral común del exponencial de  $\bar{\mathcal{P}}_0 \mathcal{P}_0$  que puede realizarse fácilmente<sup>45</sup> La derivación de este resultado utilizando operadores es

$$\begin{aligned} & \langle \psi_{C=\bar{C}=0} | \exp\{\bar{\mathcal{P}}\mathcal{P}(t_f - t_i)\} | \psi_{C=\bar{C}=0} \rangle \\ &= \langle \psi_{C=\bar{C}=0} | [I + \bar{\mathcal{P}}\mathcal{P}(t_f - t_i)] | \psi_{C=\bar{C}=0} \rangle = t_f - t_i \end{aligned} \quad (\text{A.70})$$

Por tanto, la integral de trayectoria para partículas libres fermiónicas escala con  $(t_f - t_i)$  mientras que para el caso bosónico escala con  $(t_f - t_i)^{-1}$ .

Es útil tener a mano las integrales gaussianas

$$\int \exp\left\{\frac{1}{2} z^a M_{AB} z^B\right\} dz = (2\pi)^{N/2} (\text{sdet } M)^{-1/2}, \quad (\text{A.71})$$

con  $M$  simétrica y la correspondiente integral para el caso de variables de Grassmann

$$\int \exp[-\theta_1^i D_{ij} \theta_2^j] d\theta_1 d\theta_2 = \det D, \quad (\text{A.72})$$

para  $D$  una matriz par arbitraria. La función delta es

$$\int f(\theta) \delta(\theta - \theta_0) = f(\theta_0), \quad \delta(\theta - \theta_0) = \theta - \theta_0 = \int \exp[i(\theta - \theta_0)\pi] \frac{d\pi}{i}. \quad (\text{A.73})$$

<sup>45</sup>Una fórmula básica de la integral funcional es la siguiente

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}p \mathcal{D}q \exp\left\{i \int_{t_1}^{t_2} dt (p\dot{q} + F(p; z) + qG(t))\right\} \\ &= \int dp_0 \exp\{ip_0(q_1 - q_2) + q_1 \int_{t_1}^{t_2} dt G(t)\} \exp\left\{i \int_{t_1}^{t_2} dt F[p_0 + \int_{t_2}^t dt G(t); z]\right\} \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

donde la variable  $q$  está fija en los extremos mediante  $q(t_1) = q_1$ ,  $q(t_2) = q_2$  y  $z$  es cualquier variable adicional.

### A.3 TRANSFORMACIONES DE LA ESTRUCTURA SIMPLÉCTICA Y ESPACIO FASE REDUCIDO: FÓRMULA DE FADDEEV

Ante transformaciones de coordenadas arbitrarias la estructura simpléctica  $\sigma_{AB}$  transforma como un tensor de rango 2

$$\sigma^{AB} = [z^A, z^B], \quad \sigma'^{AB} = [z'^A, z'^B] = \frac{\overrightarrow{\partial} z'^A}{\partial z^C} [z^C, z^D] \frac{\overleftarrow{\partial} z'^B}{\partial z^D}, \quad (\text{A.74})$$

o en notación matricial

$$\sigma' = J \sigma J^T, \quad J = \frac{\overrightarrow{\partial} z'^A}{\partial z^C}. \quad (\text{A.75})$$

Tomado el superdeterminante de esta expresión obtenemos

$$(\text{sdet } \sigma'^{AB})^{1/2} = \text{sdet } \frac{\overrightarrow{\partial} z'}{\partial z} (\text{sdet } \sigma^{AB})^{1/2}. \quad (\text{A.76})$$

Consideremos un sistema con  $\gamma_a$  constricciones de primera clase. Denotaremos las variables del espacio fase reducido por  $z^{*\alpha}$  que están definidas de tal modo que si  $A$  es un observable depende solamente de las variables  $z^*$ .

$$[A, \gamma_a] \approx 0 \rightarrow A \approx A(z^{*\alpha}). \quad (\text{A.77})$$

La estructura simpléctica  $\sigma$  es cerrada,  $\sigma = da$  donde  $a_\alpha$  es el potencial simpléctico asociado a  $\sigma_{\alpha\beta}$ . Los potenciales simplécticos  $a_\alpha(z^{*\beta})$  y  $a_A(z^B)$  (asociado a  $\sigma_{AB}$ ) inducen la misma dos forma sobre la superficie de restricción de donde resulta

$$dz^{*\alpha} a_\alpha \approx dz^A a_A + dM. \quad (\text{A.78})$$

La estructura simpléctica reducida  $\sigma_{\alpha\beta}$  inducida en el espacio fase reducido define los paréntesis de Poisson

$$\sigma^{\alpha\beta} = [z^{*\alpha}, z^{*\beta}]. \quad (\text{A.79})$$

La integral funcional en el espacio reducido será

$$P.I.R = \int [\mathcal{D}z^{*\alpha}] \prod (\text{sdet } \sigma_{\alpha\beta})^{1/2} \exp[iS[z^{*\alpha}(t)]]. \quad (\text{A.80})$$

Supongamos ahora que introducimos las condiciones de norma  $\chi_a$  de tal manera que obtenemos un conjunto de constricciones de segunda clase que denotaremos por  $\chi_p = (\gamma_a, \chi_a)$ .

La integral funcional en el espacio fase reducido puede escribirse en términos de las variables originales  $z^A$  usando la identidad

$$\int \delta(\chi_a) f(z^A) (\text{sdet } C_{\rho\sigma})^{1/2} dz^A = \int f(z^{*\alpha}) (\text{sdet } \sigma_{\alpha\beta})^{1/2} dz^{*\alpha}, \quad (\text{A.81})$$

donde  $f(z^{*\alpha})$  es la función original  $f(z^A)$  proyectada sobre la superficie de restricción y

$$C_{\rho\sigma} = [\chi_\rho, \chi_\sigma]. \quad (\text{A.82})$$

Esta identidad proviene de

$$dz^A = (\text{sdet } \sigma_{\alpha\beta})^{1/2} (\text{sdet } C_{\rho\sigma})^{-1/2} dz^{*\alpha} d\chi_a \quad (\text{A.83})$$

Notando que el superdeterminante de  $C_{\rho\sigma}$  es  $(\text{sdet } [\gamma_a, \chi_b])^2$  obtenemos para la integral de trayectoria la expresión

$$P.I. = \int [\mathcal{D}z^A] \prod_{\alpha,i} \delta(\chi_\alpha) \delta(\gamma_\alpha) \prod_t (\text{sdet } [\gamma_a, \chi_b]) \exp[iS'[z^A(t)]], \quad (\text{A.84})$$

donde hemos usado la identidad (A.81) y  $S'$  difiere de  $S$  por un término de frontera que asegura que

$$S'[z^A(t)] = S[z^{*\alpha}], \quad (\text{A.85})$$

sobre la superficie de restricción  $\gamma_a = 0, \chi_a = 0$ . Las condiciones a la frontera del problema reducido están relacionadas con las correspondientes condiciones a la frontera del espacio fase original mediante  $z^{*\alpha} = z^{*\alpha}(z^A)$ . En particular, si las coordenadas  $z^A$  no son canónicas, la medida de la integral funcional (A.84) debe cambiarse por  $[\mathcal{D}z^A] \prod_t (\text{sdet } \sigma_{AB})^{1/2}$ .

Usando el formalismo BRST podemos describir la integral funcional en la "representación integral"

$$\begin{aligned} P.I. &= \int [\mathcal{D}z^A][\mathcal{D}\lambda^a][\mathcal{D}C^a][\mathcal{D}\bar{C}_a] \prod_{t,a} \delta(\chi_a) \exp[i(S'[z^A(t)] \\ &\quad - \int \lambda^a \gamma_a dt - \int \bar{c}_b \delta_C \chi_b dt)], \end{aligned} \quad (\text{A.86})$$

donde  $\delta_C \chi_b = [\chi_b, C^a \gamma_a]$ . La integral sobre los multiplicadores de Lagrange baja  $\delta(\gamma_a)$ , mientras que la integral sobre los fantasmas baja  $\text{sdet } [\gamma_a \chi_b]$  recuperando el resultado (A.84). Esta expresión es conocida como la fórmula de Faddeev [32].

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] T.J. Allen y D.B. Crossley, Reality conditions, reducibility, and ghosts, *Phys. Rev.* **D52** 1102 (1995).
- [2] R. Amorim y Ashok Das, A note on Abelian conversion of constraints, *Mod. Phys Lett.* **A9** 3543 (1994).
- [3] I.M. Anderson, *The variational bicomplex*, Academic Press, Boston 1994; *Contemp. Math.* **132** 51 (1992).
- [4] J.L. Anderson y P.G. Bergmann, Constraints in covariant field theories, *Phys. Rev.* **83** 1018 (1951); P.G. Bergmann y I. Goldberg, Dirac bracket transformations in phase space, *Phys. Rev.* **98** 531 (1955).
- [5] R. Arnowitt, S. Deser y C.W. Misner, The dynamics of general relativity, in *Gravitation: an introduction to current research*, ed. by L. Witten, Wiley, New York (1962).
- [6] A. Ashtekar, *Lectures on non-perturbative canonical gravity*, Word Scientific (1991).
- [7] A. Ashtekar, P. Mazur y Charles G. Torre, *Phys. Rev.* **D36** 2955 (1987).
- [8] N. Banerjee, R. Banerjee y S. Ghosh, Quantization of second class systems in the Batalin-Tyutin formalism, *Ann. Phys.* **241** 237 (1995).
- [9] T. Banks and M. O'Loughlin, *Nucl. Phys.* **B362** 649 (1991).
- [10] J. Barcelos-Neto y N.R.F. Braga, *J. Math. Phys.* **35** 3497 (1994).
- [11] J. Barcelos-Neto y C. Wotzasek, *Int. J. Mod. Phys.* **A7** 4981 (1992); C. Wotzasek *Ann. Phys.* **243** 76 (1995).
- [12] G. Barnich, F. Brandt y M. Henneaux, Local BRST cohomology in the field antifield formalism: I. General theorems, *Commun. Math. Phys.* **174** 57 (1995).
- [13] G. Barnich, M. Henneaux y C. Schomblond, *Phys. Rev* **D44** R939 (1991).

- [14] I.A. Batalin y G.A. Vilkovisky, *Phys. Lett.* **102B** 27 (1981); *Phys. Lett.* **120B** 166 (1983); *Phys. Rev.* **D28** 2567 (1983); Errata: **D30** 106 (1984); *Nucl. Phys.* **B234** 106 (1984); *J. Math. Phys.* **26** 172 (1985). Para una revisión general ver J. Gomis, J. París y S. Samuel, *Phys. Rep.* **259** 1 (1995).
- [15] Para el caso de constricciones de primera clase la demostración del teorema de F-V fue realizada en I.A. Batalin y G.A. Vilkovisky, *Phys. Lett.* **69B** 309 (1977); y el caso que incluye constricciones de segunda clase fue realizado en E.S. Fradkin y T.E. Fradkina, Quantization of Relativistic systems with boson and fermion first and second class constraints, *Phys. Lett.* **72B** 343 (1978).
- [16] I.A. Batalin y I.V. Tyutin, *Int. J. Mod. Phys.* **A6** 3255 (1991). Ver también, I.A. Batalin y E.S. Fradkin, Operational quantization of dynamical systems subject to second class constraints, *Nucl. Phys.* **B279** 514 (1987).
- [17] I.A. Batalin y S. L. Lyakovich, en Proceedings of the Lebedev Physics Institute, *Group theoretical methods in physics*, Nova Science Publishers, Inc., New York, **187** 57 (1991).
- [18] I.A. Batalin y E.S. Fradkin, Operational quantization of dynamical systems subject to constraints. A further study of the construction, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **49** 145 (1988). I.A. Batalin y E.S. Fradkin, *Riv. Nuovo. Cim.* **9** 1 (1986).
- [19] C. Batlle, J. Gomis, J.M. Pons y N. Roman-Roy, *J. Math. Phys.* **27** 2953 (1986).
- [20] C. Batlle, J. Gomis y J. Roca, *Phys. Rev.* **D40** 1950 (1989).
- [21] C. Becchi, A. Rouet y R. Stora, *Phys. Lett.* **52B** 344 (1974); I.V. Tyutin, Gauge invariance in field theory and statistical mechanics, Lebedev preprint No. 39 (1975).
- [22] C. Becchi, A. Rouet y R. Stora, *Phys. Lett.* **52B** 344 (1974); E.S. Fradkin y G.A. Vilkovisky, CERN Report TH2332 (1977); I.A. Batalin y G.A. Vilkovisky, *Phys. Lett.* **B69** 309 (1977); E.S. Fradkin y T.E. Fradkina, *Phys. Lett.* **B72** 343 (1977).

- [23] F.A. Berezin, *Introduction to Superanalysis*, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht (1987).
- [24] S. Carlip, Observables, gauge invariance and time in  $(2 + 1)$ -dimensional quantum gravity, *Phys. Rev.* **D42** 2647 (1990).
- [25] S. Carlip, A phase space path integral for  $(2+1)$ -dimensional gravity, *Class. Quantum Grav.* **12** 2201 (1995).
- [26] C. Cronström y M. Noga, *Nucl. Phys.* **B428** 449 (1994).
- [27] A. Das y W. Scherer, *Z. Phys.* **C35**, 527 (1987).
- [28] G.V. Dunne, R. Jackiw y C.A. Trugenberger, Topological (Chern-Simons) quantum mechanics, *Phys. Rev.* **D41**, 661 (1990).
- [29] Bryce DeWitt, *Supermanifolds*, Cambridge University Press, New York (1984).
- [30] P.A.M. Dirac, *Can. J. Math.* **2** 129 (1950); *Proc. R. Soc. London A* **246** 326 (1958); P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Yeshiva University, Academic Press, New York (1967).
- [31] J. M. Evans, *Phys. Lett.* **256B** 245 (1991).
- [32] L.D. Faddeev, The Feynman integral for singular lagrangians, *Theor. Math. Phys.* **1** 1 (1970). Reimpreso en L.D. Faddeev, *40 years in mathematical physics*, World Scientific series in 20th century mathematics, Vol. 2, World Scientific, Singapore, 1995.
- [33] L.D. Faddeev y V.N. Popov, Feynman diagrams for the Yang-Mills fields, *Phys. Lett.* **B25** 30 (1967).
- [34] L. Faddeev y R. Jackiw, *Phys. Rev. Lett.* **60** 1692 (1988); R. Jackiw, (Constrained) quantization without tears, en: Proc. 2nd Workshop on constraints theory and quantization methods, Montepulciano, 1993 (World Scientific, Singapore, 1995).
- [35] R. Ferraro y C. Simeone, Canonical gauges in the path integral for parametrized systems, hep-th/9512146.

- [36] R. Ferraro, Marc Henneaux y Marcel Puchin, *J. Math. Phys.* **34** 2757 (1993).
- [37] R.P. Feynman, Quantum theory of gravitation, *Acta Phys. Pol.* **XXIV**, 697 (1963).
- [38] R.P. Feynman y A.R. Hibbs, *Quantum mechanics and path integrals*, McGraw-Hill, New York, 1965; A. Das *Field theory, a path integral approach*, World Scientific, Lecture Notes in Physics, Vol. 52, 1993.
- [39] E.S. Fradkin y G.A. Vilkovisky, Quantization of relativistic systems with constraints: equivalence of canonical and covariant formalisms in quantum theory of gravitational field, CERN Report TH2332 (1977); ver también [15].
- [40] Antonio García Zenteno, Luis F. Urrutia, J. David Vergara y Rodolfo P. Martínez, Introducción a la cuantización de las teorías de norma empleando el método BRST-BFV, *Rev. Méx. Fís.* **40** 476 (1994).
- [41] J. Antonio García, J. David Vergara y Luis F. Urrutia, *Phys. Rev.* **D51** 5806 (1995).
- [42] J. Antonio García, J. David Vergara y Luis F. Urrutia, BRST-BFV quantization and the Schwinger action principle, *Int. J. Mod. Phys.* **A11** 2689 (1995).
- [43] J. Antonio García y J.M. Pons, Equivalence of Faddeev-Jackiw and Dirac approaches for gauge theories, por aparecer en *Int. J. Mod. Phys.*
- [44] D.M. Gitman y I.V. Tyutin, *Quantization of Fields with Constraints*, Springer Verlag, Heidelberg, 1990.
- [45] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison Wesley, Reading, 1980.
- [46] J. Gomis y J. Roca, *Phys. Lett* **B207** 309 (1988).
- [47] J. Gomis, M. Henneaux y J.M. Pons, *Class. Quantum Grav.* **7** 1089 (1990).
- [48] G. González y J. Pullin, BRST analysis of 2+1 gravity, *Phys. Rev.* **D42** 3395 (1990).

- [49] M.J. Gotay, J.M. Nester y G. Hinds, *J. Math. Phys.* **19** 2388 (1978); M.J. Gotay y J.M. Nester, *Ann. Inst. H. Poincaré* **A30** 129 (1979); *Ann. Inst. H. Poincaré* **A32** 1 (1980).
- [50] J. Govaerts, *Int. J. Mod. Phys.* **A5** 3625 (1990). J. Barcelos-Neto y E.S. Cheb-Terrab, *Int. J. Mod. Phys.* **A9** 5563 (1994).
- [51] X. Gràcia y J.M. Pons, *Ann. Phys.* **187** 355 (1989); C. Batlle, J. Gomis y J.M. Pons, *J. Math. Phys.* **30** 1345 (1989).
- [52] V.N. Gribov, Quantization of non-Abelian gauge theories, *Nucl. Phys.* **B139** 1 (1978).
- [53] P. Hájíček, Proceedings 117th WE-Heraeus Seminar: The canonical formalism in classical and quantum general relativity. Bad Honnef, Germany 13-17 Sep. (1993).
- [54] A. Hanson, T. Regge y C. Teitelboim, *Constrained hamiltonian systems*, Rome: Accad. Naz. dei Lincei (1976).
- [55] H. Hata y B. Zwiebach, *Ann. Phys.* **229** 177 (1994).
- [56] M. Henneaux, On the use of auxiliary fields in classical mechanics and in field theory, *Contemporary Mathematics*, **132** 393 (1992). G. Barnich, M. Henneaux y C. Schomblond, Covariant description of the canonical formalism, *Phys. Rev.* **D44** R939 (1991); M. Henneaux, Elimination of the auxiliary fields in the antifield formalism, *Phys. Lett.* **B238** 299 (1990).
- [57] M. Henneaux y C. Teitelboim, *Ann. Phys.* **143**, 127 (1982). C.A.P. Galvao y C. Teitelboim, *J. Math. Phys.* **21**, 1863 (1980).
- [58] M. Henneaux y C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press, 1992.
- [59] M. Henneaux, C. Teitelboim y J.D. Vergara, Gauge invariance for generally covariant systems, *Nucl. Phys.* **B387** 391 (1992).
- [60] M. Henneaux y J. David Vergara, BRST formalism and gauge invariant operators: the example of the free relativistic particle, en *Sakharov*

*Memorial Lectures in Physics*, Ed. L.V. Keldysh and V. Ya, Nova Science, New York 1992. Ver también [59].

- [61] M. Henneaux, Hamiltonian form of the path integral for theories with a gauge freedom, *Phys. Rep.* **126** 1 (1985).
- [62] M. Henneaux, C. Teitelboim y J. Zanelli, Gauge invariance and degree of freedom count, *Nucl. Phys.* **B332** 169 (1990).
- [63] S. Hojman, y L.F. Urrutia, *J. Math. Phys.* **22** 1896 (1981).
- [64] S. Hojman, Nonlagrangian construction of hamiltonian structures, hep-th/9406158.
- [65] J.W. van Holten, Propagators and path integrals, hep-th/9508136.
- [66] G. t'Hooft y M. Veltman, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **20** 69 (1974).
- [67] R. Marnelius, *Nucl. Phys.* **B395** 647 (1993); *Nucl. Phys.* **B412** 817 (1994).
- [68] R.E. Kallosh, *Nucl. Phys.* **B141** 141 (1978).
- [69] M. Kato y K. Ogawa, *Nucl. Phys.* **B212** 443 (1983); S. Hwang, *Phys. Rev.* **D28** 2614 (1983).
- [70] H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics and Polymer Physics*, Word Scientific, Singapore, 1990.
- [71] K. Kuchař, *Phys. Rev.* **D35** 596 (1987); J.D. Romano y R.S. Tate, *Class. Quantum Grav.*, **6** 1487 (1989); K. Schleich, *Class. Quantum Grav.*, **7** 1529 (1990); R. Loll, *Phys. Rev.* **D41** 3785 (1990); P. Ellicot, G. Kunstatter y D.J. Toms, *Mod. Phys. Lett.* **A4** 2397 (1989); G. Kunstatter, *Class. Quantum Grav.* **9** 1469 (1992); M.S. Plyushchay y A.V. Razumov, Dirac versus reduced phase space quantization: relationship of two methods, hep-th/9306017; C. Ordoñez y J.M. Pons, *J. Math. Phys.* **36** 1146 (1995).
- [72] T. Kugo y I. Ojima, Local covariant operator formalism of non-Abelian gauge theories and quark confinement problem, *Prog. Theor. Phys. (Suppl.)* **66** 1 (1979).

- [73] D.S. Kulshreshtha y H.J.W. Müller-Kirsten, *Phys. Rev.* **D43** 3376 (1991).
- [74] R. Linares y J. David Vergara, Boundary terms and canonical gauges in generally covariant systems, Proceedings of CAM 1995 (Mathematical Physics), ed. by L. Vinet *et. al.*
- [75] Hugo A. Morales-Técotl, Luis F. Urrutia y J. David Vergara, Reality conditions for complex Ashtekar variables as second class constraints, gr-qc/9607044.
- [76] N. Mukunda, *Phys. Scripta* **21** 801 (1980).
- [77] H.J.W. Müller-Kirsten y J. Zhang, *Phys. Lett.* **A202** 241 (1995). Ver también, H.J.W. Müller-Kirsten y J. Zhang, *Phys. Lett.* **A200** 243 (1995).
- [78] P.J. Olver, *Applications of Lie groups to differential equations*, Graduate texts in mathematics **107**, Springer Verlag, New York, 1986.
- [79] J.E. Paschalis y P.I. Porfyriadis, *Phys. Lett.* **B355** 171 (1995).
- [80] S.J. Rabello y Arvind N. Vaidya, *Phys. Lett* **B337** 110 (1994).
- [81] J. Schwinger, *Quantum Kinematics and Dynamics*, W.A. Benjamin, New York, 1970; J. S. Schwinger, *Phys. Rev.* **82** 914 (1951); *Phys. Rev.* **91** 713 (1953); Para una introducción ver, L.F. Urrutia y E. Hernández, *Int. Jour. Theor. Phys.* **23** 1105 (1984).
- [82] E.C.G. Sudarshan y N. Mukunda, *Classical Dynamics: a Modern Perspective*, John Wiley, New York, 1974.
- [83] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics*, Lectures Notes in Physics **169**, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [84] Mark S. Swanson, Canonical transformations and path integral measures, hep-th/9406167.
- [85] Ranjeet S. Tate, An algebraic approach to the quantization of constrained systems: finite dimensional examples. Ph. D. dissertation, Syracuse University, (1992), gr-qc/9304043.

- [86] T. Thiemann, Reality conditions inducing transformations for quantum gauge field theory and quantum gravity, *Class. Quant. Grav.*, **13** 1383 (1996).
- [87] R. Utiyama, *Phys. Rev.* 1597 (1956).
- [88] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B276** 291 (1986). C. Crnković y E. Witten en *300 years of gravitation* ed. S. Hawking y W. Israel Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987.
- [89] E. Witten, 2+1 dimensional gravity as an exactly soluble sistem, *Nucl. Phys.* **B331** 46 (1988/89).
- [90] E. Witten, *Comm. Math. Phys* **117** 353 (1988). D. Birmingham, M. Blau, M. Rakowski y G. Thompson, *Phys. Rep.* **209** 129 (1991).
- [91] N. Woodhouse, *Geometric Quantization*, Oxford University Press, New York, 1980.
- [92] C. Wotzasek, *Phys. Rev.* **D46** 2734 (1992).
- [93] Young-Wan Kim, Young-Jai Park y Yongduk Kim, Symplectic quantization of the  $CP^1$  model with a Chern-Simons term, hep-th/9507052.
- [94] Yong-Wan Kim, Young-Jai Park, Kee Yong Kim y Yongduk Kim, Batalin-Tyutin quantization of Self-Dual Massive Theory in three dimensions, *Phys Rev.* **D51** 2943 (1995); N. Banerjee, Subir Ghosh, R. Banerjee, Quantization of  $O(N)$  invariant nonlinear sigma model in the Batalin-Tyutin formalism, *Nucl. Phys.* **B417** 257 (1994); Jung-Ho-Cha, Yong-Wan Kim, Young-Jai Park, Yongduk Kim, Seung-Kook Kim, Won T. Kim, Batalin-Tyutin quantization of chiral Schwinger model *Z. Phys.* **C69** 175 (1995); R. Amorim y J. Barcelos-Neto, BFT quantization of chiral-boson theories, *Phys. Rev.* **D53** 7129 (1996); Ei-Byung Park, Yong-Wan Kim, Young-Jai Park, Yongduk Kim, Won T. Kim, Batalin-Tyutin quantization of Chern-Simons-Proca theory, *Mod. Phys. Lett.* **A10** 1119 (1995); A. Restuccia y J. Stephany, Gauge fixing in extended phase space and path integral quantization of systems with second class constraints, *Phys. Lett* **B305** 348 (1993); Won Tae Kim y Young-Jai Park, Batalin Tyutin quantization of (2+1) dimensional

nonabelian Chern-Simons field theory, *Phys. Lett.* **B336** 376 (1994);  
R. Banerjee y Heinz J. Rothe, Batalin-Fradkin-Tyutin embedding of  
a self-dual model and the Maxwell-Chern-Simons theory, *Nucl. Phys.*  
**B447** 183 (1995).

- [95] W. Yourgrau, S. Mandelstam, *Variational principles in dynamics and quantum theory*, Dover, New York, 1968.