00382

1
29

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Q-ALGEBRAS DE CLIFFORD, Q-ESPINORES, Y SU GRUPO DE SPIN ASOCIADO.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

DOCTOR EN CIENCIAS FISICAS

P R E S E N T A

ADRIANA MARCELA CRISCUOLO Coiradas

DIRECTOR DE TESIS: DR. MARCOS ROSENBAUM PITLUCK

MEXICO, D.F. 1996

RESÚMEN

Este trabajo se basa en una generalización, a álgebras no conmutativas, de la teoría de espinores de Cartan. Se comienza con una deformación de las álgebras de Clifford, efectuada a través de un operador de trenza tipo Hecke correspondiente a una deformación cuántica del grupo $SL(n, \mathbb{C})$. A partir de esta "q-álgebra de Clifford", se introducen los espacios cuánticos Euclideanos subyacentes compatibles con la estructura "*", equivalente a una operación adjunta de la mecánica cuántica clásica. Se construyen los operadores de Dirac y Laplace para estos espacios deformados. Sin embargo, la condición de Hecke sobre el operador de trenza, dificulta la interpretación de la operación * cuando se aplica a espacios cuánticos pseudo-Euclideanos. La acción de ésta sobre operadores de derivación no preserva el espacio de derivadas parciales, sino que resulta en un espacio de fase no lineal. A fin de salvar esta dificultad técnica, se reemplaza el operador Hecke por un operador de trenza involutivo que genera la misma álgebra exterior para el espacio espinorial. Se introduce así una nueva álgebra no-conmutativa, con una estructura * consistente, sobre el q-espacio (pseudo)-Euclideano. El espacio dual de operadores de derivadas parciales adquiere una estructura * que lo preserva.

Por otra parte, siguiendo las ideas originales de Cartan, se construyen:

1) El operador B, que determina el grupo deformado $Spin(4)$, como el producto cuadrático de los generadores del álgebra de Clifford, que coactúa sobre el espacio vectorial generado por las componentes espinoriales, y que equivaldría

a una rotación propia en el espacio (pseudo)-Euclideano de cuatro dimensiones en el caso no deformado.

2) Los generadores del álgebra no conmutativa de coordenadas, como el producto cuadrático de los generadores del álgebra no conmutativa del espacio espinorial.

De la expresión de B, como función de las coordenadas del espacio (pseudo)-Euclideano, se obtienen las relaciones de conmutación de sus elementos matriciales y se encuentra que si bien no satisfacen las propiedades de un grupo cuántico, satisfacen las propiedades de un grupo trenzado. Su representación matricial es $\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})\underline{\times}SL(2,\mathbb{C})$ y su espacio de representación $\mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$. De la misma manera, a partir del álgebra de las coordenadas, puede encontrarse el álgebra no-conmutativa generada por las componentes espinoriales que determinan el espacio espinorial $\mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$.

Finalmente, como resultado originalmente interesante, se encuentra un grupo trenzado ortogonal especial que coactúa sobre el q-espacio, cuya representación matricial es $B_1\underline{\otimes}B_2 \in SL(2,\mathbb{C})\underline{\otimes}SL(2,\mathbb{C})$ y con espacio de representación $\mathcal{S}_1\underline{\otimes}\mathcal{S}_2$. Se obtiene así un morfismo suryectivo, no inyectivo, que en el límite clásico correspondería a la doble cobertura del grupo ortogonal especial $SO(4-h,h)$.

This work is based on a generalization to noncommutative algebras of Cartan's spinor theory. One begins with a deformation of the Clifford algebras, realized through a Hecke-type braid operator which corresponds to a quantum deformation of the group $SL(n)$. Building on this q-Clifford algebra, one introduces the underlying quantum Euclidean spaces that are compatible with the * structure equivalent to the adjoint operation of quantum mechanics. One constructs the Dirac and Laplace operators for those deformed spaces. However, the Hecke condition for the braid operator complicates the interpretation of the * operation when applied to pseudo-Euclidean quantum spaces. Its action on the derivation operators does not preserve the space of partial derivatives, rather it turns out to give a nonlinear phase space. In order to escape from this technical difficulty, one replaces the Hecke operator by a non-involutive braid operator which generates the same exterior algebra for the spinor space. One thus obtains a new non-commutative algebra, with a consistent * structure, over the (pseudo)-Euclidean q-space. The dual space of partial derivative operators aquires a * algebra which preserves it. Furthermore, following Cartan's ideas one constructs

1) The operator which determines the deformation of the group $Spin(4)$, as the quadratic product of the generators of the Clifford algebra, which coacts on the vector space generated by the spinorial components.

2) The generators of the non-commutative algebra of the coordinates, as the quadratic product of the generators of the non-commutative algebra of the spinorial space.

The spin group operator turns out to give a braid group determined by the commutation relation of the coordinates of the (pseudo)-Euclidean space. One obtains a special orthogonal braid group which coacts on the q-space. One finds a surjective, non-injective morphism, which in the classical limit would correspond to the double covering of the orthogonal special group $SO(4-h,h)$.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La geometría no conmutativa y, en particular, los grupos cuánticos y trenzados surgen como una propuesta para atacar los problemas básicos que plantean las teorías físicas a la escala de la longitud de Planck. En efecto, a estas distancias, el concepto de localización deja de tener sentido operacional como puede verse a partir de principios básicos de la física. Según el principio de incertidumbre de Heisenberg, una localización Δx espacial puede alcanzarse aplicando una transferencia de momento p del orden de $\frac{\hbar}{\Delta x}$ y, consecuentemente, una energía del orden $\frac{\hbar c}{\Delta x}$. De acuerdo con la teoría de la relatividad, a esta energía le corresponde una masa gravitacional $m = \frac{\hbar}{c\Delta x}$ que genera un campo gravitacional. Para Δx muy pequeño, este campo puede ser tan grande que bloquee completamente a una cierta región de observación. Una estimación de las dimensiones lineales de esta región puede obtenerse suponiendo que el campo gravitacional es centralmente simétrico con la métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = (c^2 - \frac{2km}{r})dt^2 - r^2(sin^2\theta d\phi^2 + d\theta^2) - \frac{dr^2}{1 - \frac{2km}{c^2 r}},$$

con $k = 6.67 \times 10^{-8} \frac{cm^3}{gr seg^2}$ la constante gravitacional. La métrica es singular para el radio de Schwartzschild $r = \frac{2km}{c^2} = \frac{2k\hbar}{c^3\Delta x}$, indicando que $\Delta x \cdot r \sim \frac{\hbar k}{c^3} = \lambda_P^2 = (1.6 \times 10^{-33})^2 cm^2$. Así pues, la longitud de onda de Planck, λ_P, parece ser un límite inferior a la posible precisión de la medición de la posición.

Estas limitaciones en la posible precisión de localización de eventos en el espacio-tiempo, deben ser una característica de una teoría cuántica que incorpore a la gravitación. Investigaciones sobre posibles mecanismos conducentes a dichas limitaciones, se han realizado en el contexto de:

- Teorías de Cuerdas,

- Gravitación Cuántica no-perturbativa de Ashtekar, basada en teorías de lazos,

- Geometría no conmutativa y Grupos Cuánticos.

Sin embargo, como se verá en el primer capítulo, se han encontrado recientemente relaciones entre estas tres líneas de investigación.

Estas distintas maneras de atacar el problema han dado lugar a diferentes visiones del espacio-tiempo, cuando los efectos gravitacionales a distancias pequeñas son necesariamente fuertes. La geometría se deforma. Dentro de la geometría no conmutativa, uno obtiene una extensión del principio de incerteza de Heisenberg: los operadores representando las coordenadas del espacio-tiempo no conmutan entre sí. Pero si deformamos la geometría del espacio, necesitaremos deformar también su grupo de simetría; el resultado de esta deformación da origen a los grupos cuánticos y trenzados.

Si aplicaramos estas ideas a teorías de unificación, si bien los rangos de energías involucrados no son tan altos como los que involucra una teoría incluyendo la interacción gravitacional, los efectos de un espacio cuántico repercutirían en el cálculo de las integrales de Feynman. Se espera que el parámetro de deformación de la geometría establezca en forma natural una longitud de onda de corte para estas integrales.

La idea principal de nuestro trabajo consiste en aplicar tales deformaciones al álgebra de Clifford de los operadores de spin con las siguientes finalidades:

1) Obtener a partir de ella un espacio cuántico y su cálculo diferencial.

2) Obtener una ecuación análoga a la ecuación de Dirac. Si existen soluciones a dicha ecuación, sería posible la existencia de fermiones en espacios cuánticos por lo menos en forma teórica. Si bien en este trabajo no nos concentramos en la búsqueda de tales soluciones, su existencia ha sido demostrada en [1].

3) Obtener la relación entre los pseudogrupos $Spin(4)$ y $SO(4-h,h)$, siguiendo las ideas geométricas de Cartan [2].

Con el propósito de hacer esta tesis autocontenida, se presentan en la primera parte dos capítulos de naturaleza introductoria conteniendo historia, aplicaciones y definiciones básicas relacionadas con la geometría no conmutativa y grupos cuánticos. Los siguientes capítulos se concentran en el trabajo de investigación, involucrando el estudio de las deformaciones del álgebra de Clifford, desde el punto de vista de grupos cuánticos, y la construcción de los pseudogrupos $Spin(4)$ y $SO(4-h,h)$, así como sus espacios subyacentes, dentro del contexto de grupos trenzados.

PRIMERA PARTE

IDEAS PRELIMINARES

CAPÍTULO I

RESEÑA HISTÓRICA DE LOS GRUPOS CUÁNTICOS Y DE LA GEOMETRÍA NO CONMUTATIVA

I.1. Grupos Cuánticos: desde los orígenes hasta el presente.

Puede decirse que el origen de los Grupos Cuánticos tiene lugar en el año mil novescientos sesenta y siete con el trabajo de C. N. Yang [3], en donde se da una solución exacta al problema de N-cuerpos con una función delta como interacción repulsiva en una dimensión. Como parte de esta solución aparece la siguiente expresión funcional

$$_{\alpha\alpha'}R_{\gamma\gamma'}(u-v)\ _{\gamma\alpha''}R_{\beta\gamma''}(u)\ _{\gamma'\gamma''}R_{\beta'\beta''}(v) = _{\alpha'\alpha''}R_{\gamma'\gamma''}(v)\ _{\alpha\gamma''}R_{\gamma\beta''}(u)\ _{\gamma\gamma'}R_{\beta\beta'}(u-v), \tag{1}$$

donde $({}_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta}(u))$, con $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, ..., N$, son una colección de funciones de un parámetro complejo u.

En el año mil novescientos setenta y uno, R. Baxter encuentra la función de partición exacta para un modelo de red de ocho vértices de la mecánica estadística [4]. Éste es una generalización del modelo de red de seis vértices o "modelo del tipo hielo". En él, cada vértice representa la posición de un átomo (oxígeno para el caso del hielo) y, con cada uno de los cuatro iones de hidrógeno que lo rodea, crea un dipolo eléctrico que se representa por una flecha vertical u horizontal. A cada una de estas flechas se le asigna un signo + ó −, dependiendo si la flecha sale del vértice o entra a él. De esta manera, a cada vértice se le asigna una configuración, y con ella una energía ϵ_j, cuando se indican los cuatro signos correspondientes a las cuatro flechas. El número de configuraciones permitidas depende del modelo. En el modelo de seis vértices, hay seis configuraciones determinadas por la "regla del hielo" de Slater (1941): en cada vértice de la red hay dos flechas que entran y dos que salen. En el modelo de ocho vértices, son ocho las configuraciones permitidas, debido a que se rige por la ley de que cada vértice admite sólo un número par de flechas que entran (Sutherland, Fan y Wu, 1970). El modelo de seis vértices fue resuelto por Lieb (1967), basándose en un argumento de Bethe para las autofunciones de la matriz de transferencia: se escriben como producto de n monomios, cada uno de grado x_i, en la variable compleja z_i. Este método se basa en conservar el número n de flechas que entran verticalmente en cada fila de vértices de la red. El conjunto $\{x_i,\ i = 1, ..., n | 1 \leq x_1 < x_2 < ... < x_n \leq N\}$ indica las posiciones de las flechas, siendo N el número de vértices en cada fila de la red. Baxter propone resolver este modelo sin apelar al argumento de Bethe, usando el método que él llama de "matrices de transferencia que conmutan", y lo aplica en la resolución del modelo de ocho vértices.

Todos los modelos de la mecánica estadística se proponen para evaluar la función de partición Z de un sistema termodinámico, pues a partir de ella se obtienen todos los observables termodinámicos estadísticos. En los modelos de red mencionados, que son exactos, la función de partición se expresa como:

$$Z_{N,M} = tr(V_N)^M,$$

donde M es el número de filas de la red y V_N es la matriz de transferencia, de

2^N por 2^N, con coeficientes

$$V_{\bar{\alpha},\bar{\beta}} = \sum_{\mu_1} \cdots \sum_{\mu_N} \prod_{i=1}^{N} w(\mu_i, \alpha_i|\beta_i, \mu_{i+1}),$$

donde $\bar{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$ y $\bar{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_N)$, con $\alpha_i, \beta_i = \pm 1$, especifican, respectivamente, los N espines (flechas) verticales ubicados por debajo y por encima de la fila de vértices y

$$w(\mu_i, \alpha_i|\beta_i, \mu_{i+1}) = exp(-\frac{\epsilon_j}{kT}),$$

es el peso de Boltzmann correspondiente al vértice i con configuración j, especificada por las flechas horizontales izquierda, $\mu_i = \pm 1$, y derecha, $\mu_{i+1} = \pm 1$, y por las flechas verticales inferior, α_i, y superior, β_i. T es la temperatura absoluta a la que se encuentra el sistema y k es la constante de Boltzmann.

Encontrar los puntos críticos del sistema (puntos en los cuales el sistema sufre un cambio de fase), es equivalente a encontrar las singularidades de la energía libre $f(H,T) = -kT\ lim_{N,M\to\infty}(NM)^{-1}lnZ_{N,M}(H,T)$, donde H es algún campo externo que actúa sobre el sistema y siendo $N, M \to \infty$ el límite termodinámico. En este límite, $Z \sim |\Lambda_{máx}|^M$, donde $\Lambda_{máx}$ es el autovalor de la matriz de transferencia con mayor valor absoluto. Por lo tanto, habiendo encontrado la forma funcional de $\Lambda_{máx} = \Lambda_{máx}(H,T)$, es posible encontrar el punto crítico, (H_c, T_c), estudiando las singularidades de $f(H,T) = -kTln|\Lambda_{máx}|$.

El método de matrices de transferencia que conmutan se basa en encontrar un conjunto completo de operadores que conmutan, entre los cuales se encuentra la matriz de transferencia en forma operacional, y el conjunto de autovectores y autovalores comunes.

Sean V_N y V'_N dos matrices de transferencia con parámetros respectivos

(ϵ_j, T) y (ϵ'_j, T'). Por cálculo directo, se obtiene que:

$$(V_N V'_N)_{\alpha,\beta} = tr \prod_{i=1}^{N} S(\alpha_i, \beta_i),$$

y

$$(V'_N V_N)_{\alpha,\beta} = tr \prod_{i=1}^{N} S'(\alpha_i, \beta_i),$$

donde $S(\alpha_i, \beta_i)$ es una matriz de cuatro por cuatro, con filas (μ, ν) y columnas (μ', ν'), y elementos matriciales

$$S(\mu, \nu|\mu', \nu'|\alpha_i, \beta_i) = \sum_{\gamma} w(\mu, \alpha_i|\gamma, \mu') w'(\nu, \gamma|\beta_i, \nu').$$

S' se define de la misma forma que S, pero con w y w' intercambiados.

Resulta que, $V_N V'_N = V'_N V_N$ si y sólo si existe una matriz no singular de cuatro por cuatro, M, tal que:

$$S(\alpha, \beta) = M S'(\alpha, \beta) M^{-1}. \tag{1.1}$$

Si escribimos los elementos matriciales de M como $w(\mu, \nu|\mu', \nu')$, (1.1) se escribe como:

$$\begin{aligned} &\sum_{\gamma,\mu'',\nu''} w(\mu, \alpha|\gamma, \mu'') w'(\nu, \gamma|\beta, \nu'') w''(\nu'', \mu''|\nu', \mu') \\ &= \sum_{\gamma,\mu'',\nu''} w''(\nu, \mu|\nu'', \mu'') w'(\mu'', \alpha|\gamma, \mu') w(\nu'', \gamma|\beta, \nu'). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Esta ecuación es conocida con el nombre de *Relación estrella-triángulo* y es una generalización de la relación obtenida por Onsager y Wannier (1945), en la resolución de un modelo de Ising sobre una red exagonal plana. Escrita en términos de operadores U_i de construcción de vértices de la red, toma la forma de una ecuación de trenza parametrizada [Apéndice 4, (A.17)]:

$$U_{i+1} U'_i U''_{i+1} = U''_i U'_{i+1} U_i, \tag{1.3}$$

donde U_i es la matriz con elementos

$$(U_i)_{\bar{\alpha},\bar{\beta}} = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i,i+1}}^{N} \delta(\alpha_j,\beta_j)w(\alpha_i,\alpha_{i+1}|\beta_i,\beta_{i+1}).$$

En los modelos de vértices, cada peso de Boltzmann se considera como una variable. Este conjunto de variables pueden parametrizarse en términos de otras, v_j, no necesariamente reales, tal que las primeras sean funciones enteras de las segundas. En el caso del modelo de red de seis vértices, estas funciones son las hiperbólicas, y en el caso del modelo de ocho vértices, son las elípticas Jacobianas. Si del conjunto de las v_i se toma una variable compleja, u, y todas las demás se consideran constantes, todos los elementos de la matriz $V_N = V_N(u)$ son funciones enteras de u.

Reescribiendo la relación estrella-triángulo (1.2) y su versión operacional (1.3), en términos de las variables v_i, éstas se reducen a las expresiones:

$$u' = u + u'',$$

$$U_{i+1}(u)U_i(u')U_{i+1}(u'-u) = U_i(u'-u)U_{i+1}(u')U_i(u), \tag{1.4}$$

$\forall u, u' \in \mathbf{C}$. Con esta parametrización, $V_N(u)V_N(u') = V_N(u')V_N(u)$, $\forall u, u' \in \mathbf{C}$ y, por lo tanto, los autovectores comunes no dependerán de la variable u.

Baxter encuentra otra serie de operadores que conmutan con $V_N(u)$ para definir completamente sus autovalores, $\Lambda(u)$. El detalle de este procedimiento puede encontrarse en [4]. Nuestro objetivo es el análisis de las relaciones (1.1) a (1.4), desde un punto de vista diferente:

Consideremos nuevamente la matriz de transferencia $V_N(u)$ en su forma operacional:

$$V_N(u) : X \to X,$$

$$V_N(u)(x_{\vec{\beta}}) = x_{\vec{\alpha}} V_{\vec{\alpha},\vec{\beta}}(u),$$

donde $X := \bigotimes_{i=1}^{N} \mathbb{C}^2$, $\{x_{\vec{\alpha}}\}$ es una base para X y $V_{\vec{\alpha},\vec{\beta}}(u)$ son los elementos matriciales:

$$V_{\vec{\alpha},\vec{\beta}}(u) = tr \prod_{i=1}^{N} L_{\alpha_i}^{\beta_i}(u),$$

donde $L_{\alpha_i}^{\beta_i}(u) \in M(2, \mathbb{C})$ son las matrices con elementos $w(\mu, \alpha_i|\beta_i, \nu)$. Sea el operador $L(u) \in End(\mathbb{C}^2 \otimes V)$, donde V es un espacio vectorial auxiliar de dimensión n sobre el campo complejo. Este operador es una extensión de $L_{\alpha_i}^{\beta_i}(u) \in End(\mathbb{C}^2)$, indicando la posibilidad de que los índices μ, ν de sus elementos matriciales tengan un rango de valores mayor que dos. De la misma manera, sea el operador $L_i(u) \in End(X \otimes V)$, la extensión del operador $V_N(u)$, definido por:

$$L_i(u) = \bigotimes_{j=1}^{i-1} I \otimes L(u) \bigotimes_{j=i+1}^{N} I.$$

Luego, $(V_{\vec{\alpha},\vec{\beta}}(u))_{\vec{\alpha},\vec{\beta}}$ es la matriz del operador:

$$V_N(u) = tr_V S_N(u),$$

donde $S_N(u) = \prod_{i=1}^{N} L_{N+1-i}(u)$ y $tr_V : End(X \otimes V) \rightarrow End(X)$. Tomando $End(X \otimes V) = X \otimes V \otimes X^* \otimes V^*$, donde X^* y V^* son los espacios duales de X y V respectivamente, la tr_V se obtiene contrayendo sobre $V \otimes V^*$. Los elementos de $End(X \otimes V)$ pueden reescribirse en términos de las matrices $M(n, End(X))$ y, desde este punto de vista, la tr_V se obtiene sumando los elementos diagonales.

Encontrar el conjunto de matrices V_N que conmutan para distintos parámetros, es equivalente a encontrar una matriz invertible $R(u'') \in M(n^2, End(X))$, que esté en el centro de $End(X)$, tal que:

$$R(u' - u)(S_N(u) \otimes S_N(u'))R^{-1}(u' - u) = S_N(u') \otimes S_N(u). \quad (1.5)$$

Efectivamente, debido a que $tr_{V\otimes V}RMR^{-1} = tr_{V\otimes V}M$ y $tr_{V\otimes V}P \otimes Q = tr_V P tr_V Q$, se obtiene:

$$tr_V S_N(u) tr_V S_N(u') = tr_V S_N(u') tr_V S_N(u),$$

y por lo tanto:

$$V_N(u)V_N(u') = V_N(u')V_N(u),$$

$\forall u, u' \in \mathbf{C}$. Nótese la analogía de la relación (1.5) con (1.1).

Por otra parte, S_N es el producto de matrices L_i. Luego, si existe una matriz invertible $R(u'')$, tal que:

$$R(u'')(L_i(u) \otimes L_i(u'))R^{-1}(u'') = (L_i(u') \otimes L_i(u)), \tag{1.6}$$

$\forall i = 1, ..., N$, $u, u' \in \mathbf{C}$ y $u' = u + u''$, entonces las matrices de transferencia $V_N(u)$ y $V_N(u')$ conmutan, $\forall u, u' \in \mathbf{C}$. Efectivamente, como

$$(L_i(u))_{kl}(L_j(u'))_{mr} = (L_j(u'))_{mr}(L_i(u))_{kl}, \tag{1.7}$$

$\forall i \neq j = 1, ..., N$ y $\forall k, l, m, r = 1, ..., n$, pues los operadores L_i y L_j actúan sobre diferentes factores en el producto tensorial, entonces por cálculo directo se observa que:

$$(L_i(u) \otimes L_i(u'))(L_j(u) \otimes L_j(u')) = (L_i(u)L_j(u) \otimes L_i(u')L_j(u')). \tag{1.8}$$

Luego, aplicando las propiedades (1.6) y (1.8), se obtiene la ecuación (1.5).

Sean $T_1 := L_i \otimes I$ y $T_2 := I \otimes L_i$; luego, (1.6) se reescribe como:

$$R(u' - u)T_1(u)T_2(u') = T_2(u)T_1(u')R(u' - u). \tag{1.9}$$

Sea $(e_\alpha)_{\alpha=1,\dots,n}$ una base para V y $R(u)$ una transformación lineal:

$$R(u) : V \otimes V \to V \otimes V,$$

tal que:

$$R(u)(e_\alpha \otimes e_\beta) = (e_\gamma \otimes e_\delta) \ \ {}_{\gamma\delta}R_{\alpha\beta}(u),$$

donde las funciones ${}_{\gamma\delta}R_{\alpha\beta}(u)$ son los elementos de la matriz $R(u)$. Con esta definición, tenemos tres operadores en $V \otimes V \otimes V$:

$$R_{1,2}(u)(e_\gamma \otimes e_{\gamma'} \otimes e_{\gamma''}) = (e_\alpha \otimes e_{\alpha'} \otimes e_{\gamma''}) \ \ {}_{\alpha\alpha'}R_{\gamma\gamma'}(u),$$

$$R_{1,3}(u)(e_\gamma \otimes e_{\gamma'} \otimes e_{\gamma''}) = (e_\alpha \otimes e_{\gamma'} \otimes e_{\alpha''}) \ \ {}_{\alpha\alpha''}R_{\gamma\gamma''}(u),$$

$$R_{2,3}(u)(e_\gamma \otimes e_{\gamma'} \otimes e_{\gamma''}) = (e_\gamma \otimes e_{\alpha'} \otimes e_{\alpha''}) \ \ {}_{\alpha'\alpha''}R_{\gamma'\gamma''}(u).$$

De la misma manera,

$$T_j(u) : V \otimes V \to V \otimes V,$$

$j = 1, 2$, es una transformación lineal, tal que:

$$T_1(u)(e_\alpha \otimes e_\beta) = L_i(u)(e_\alpha) \otimes e_\beta,$$

$$T_2(u)(e_\alpha \otimes e_\beta) = e_\alpha \otimes L_i(u)(e_\beta),$$

con

$$L_i(u)(e_\alpha) = e_\beta \ \ (L_i(u))_{\beta\alpha}.$$

Extendiendo la definición de $T_j(u)$ a un triple producto tensorial, obtenemos de (1.9):

$$R_{1,2}(u' - u)T_1(u)T_2(u')T_3(u'') = T_2(u)T_1(u')T_3(u'')R_{1,2}(u' - u).$$

Aplicando esta relación para desplazarnos de $T_1(u)T_2(u')T_3(u'')$ a $T_3(u)T_2(u')T_1(u'')$, obtenemos dos caminos diferentes:

$$R_{2,3}R_{1,3}R_{1,2}T_1T_2T_3 = T_3T_2T_1R_{2,3}R_{1,3}R_{1,2},$$

y

$$R_{1,2}R_{1,3}R_{2,3}T_1T_2T_3 = T_3T_2T_1R_{1,2}R_{1,3}R_{2,3}.$$

Estas dos relaciones indican que el elemento $E = (R_{1,2}R_{1,3}R_{2,3})^{-1}(R_{2,3}R_{1,3}R_{1,2})$ conmuta con todos los productos triples $T_1(u)T_2(u')T_3(u'')$. Para evitar que esta condición de conmutación establezca nuevas constricciones sobre las matrices $L_i(u)$, entonces, $E = a1$ con $a \in \mathbb{C}$. Tomando el determinante a ambos lados de esta relación, $a = 1$. Luego,

$$R_{1,2}(u' - u) \;\; R_{1,3}(u) \;\; R_{2,3}(u') = R_{2,3}(u') \;\; R_{1,3}(u) \;\; R_{1,2}(u' - u), \qquad (2)$$

$\forall u, u' \in \mathbb{C}$. Escribiendo esta relación en términos de los coeficientes matriciales de $R(u)$, se reobtiene la ecuación (1). Nótese la similitud de la ecuación (1) con la relación estrella-triángulo (1.2).

La expresión (1) recibe así el nombre de "Ecuación de Yang-Baxter" y la ecuación (2) es su forma más compacta. Como la relación estrella-triángulo (1.4), la ecuación (2) es una versión parametrizada de la ecuación de la trenza.

En resúmen, el problema de encontrar los autovalores de la matriz de transferencia lleva a resolver las ecuaciones (1.6) y (1). Baxter encuentra una solución particular de (1), usando ecuaciones diferenciales, e involucra funciones elípticas Jacobianas, en el modelo de ocho vértices, y funciones trigonométricas, en el modelo de seis vértices.

Consideremos familias de soluciones de (2), $R(u,\psi)$, que dependen del parámetro ψ, tales que $R(u,\psi)|_{\psi=0} = I$ es la transformación identidad en $V\otimes V$. Las primeras derivadas, $r(u) = \frac{\partial R}{\partial \psi}(u,\psi)|_{\psi=0}$, satisfacen la ecuación:

$$[r_{1,2}(u-v) \ , \ r_{1,3}(u) + r_{2,3}(v)] + [r_{1,3}(u) \ , \ r_{2,3}(v)] = 0, \qquad (3)$$

llamada "Ecuación Clásica de Yang-Baxter". Esta ecuación está involucrada en el estudio de sistemas completamente integrables en mecánica clásica. Sus soluciones fueron obtenidas por A.A. Belavin y V.G. Drinfel'd [5], usando las propiedades de álgebras de Lie semisimples. Con el fin de obtener soluciones trigonométricas a la ecuación de Yang Baxter (1), Kulish, Reshetikhin y Sklyanin [6] introdujeron una deformación del álgebra envolvente del álgebra de Lie $sl(2)$. Así fue como surgió un nuevo objeto matemático: el grupo cuántico. Drinfel'd [7] introduce formalmente la noción de grupo cuántico, para obtener soluciones de la ecuación de Yang-Baxter (1), a partir de algunas soluciones de la ecuación clásica de Yang-Baxter. Obtiene estos nuevos objetos por deformación de las álgebras envolventes de álgebras de Lie. Esta técnica y sus derivadas han sido muy exitosas en la resolución de problemas en diversos campos de la física y la matemática. A continuación, se describirán algunos ejemplos que muestran como la ecuación de Yang-Baxter y sus soluciones deformadas aparecen naturalmente en el campo de la física teórica.

Modelos cuánticos sobre una red.

Con este ejemplo veremos como los grupos cuánticos aparecen por primera vez a partir de un modelo físico. Durante los años de mil novecientos setenta y ocho y setenta y nueve, L.D. Faddeev, E.K. Sklyanin y L.A. Takhtajan [8], desarrollaron un método para obtener soluciones exactas para ciertas clases de campos cuánticos. Éste es conocido como el método inverso de dispersión cuántico (QISM) y tiene aplicaciones a teorías de redes en dos dimensiones de la mecánica estadística y a modelos teóricos en 1+1 dimensiones. El QISM es una extensión del método inverso de dispersión clásico (ISM), utilizado para la obtención de soluciones exactas de algunos modelos de la mecánica hamiltoniana clásica y de la teoría clásica de campos. La expresión principal de la formulación hamiltoniana del ISM puede deformarse pasando del continuo a una red de la siguiente manera:

$$\{L_n(\lambda) \ \overset{\circ}{,} \ L_m(\nu)\} = [r(\lambda - \nu) \quad , \quad L_n(\lambda) \otimes L_n(\nu)] \ \delta_{nm},$$

donde $L_n(\lambda) = Pexp \int_{x_n}^{x_{n+1}} U(x,\lambda) \ dx$ es una matriz que aparece en el problema lineal auxiliar, dependiendo de un parámetro espectral λ, y $U(x,\lambda)$ es la respectiva matriz pero del contínuo; { } es el corchete de Poisson y $r(\lambda)$ es una matriz clásica satisfaciendo la ecuación de Yang-Baxter clásica. La solución a esta fórmula para modelos discretos viene dada por el grupo de Poisson-Lie. Cuando se cuantiza, la expresión anterior se convierte en

$$\check{R}(\lambda - \nu) \ \ L_n(\lambda) \otimes L_n(\nu) = L_n(\nu) \otimes L_n(\lambda) \ \ \check{R}(\lambda - \nu), \tag{4}$$

siendo $\check{R}(\lambda)$ una matriz que satisface la ecuación de Yang-Baxter (1). Nótese que la ecuación (4) es la ecuación (1.6). Para indicar el paso a la cuantización, los autores denominan "ecuación de Yang-Baxter cuántica" a la ecuación (1). La solución de la fórmula (4), $L_n(\lambda)$, será un nuevo objeto llamado "Grupo Cuántico".

Teoría de nudos.

La relación entre grupos cuánticos y la teoría de nudos comienza con el trabajo de Reshetikhin y Turaev [9], cuando reconstruyen la teoría de Jones en términos de las matrices cuánticas R, soluciones a la ecuación de Yang-Baxter. Por otra parte, E. Witten [10] encontró que los invariantes de nudos pueden representarse por una integral funcional con la acción de Chern-Simons, pudiendo ser escrito en el lenguaje de álgebras no-conmutativas tal como lo señala Drinfel'd.

L.Kauffman [11] consideró la amplitud de probabilidad para un diagrama de Feynman en una dimensión espacial y el tiempo, utilizando diagramas de nudos. En el cálculo de dicha amplitud involucra una matriz que representa un cruce en el diagrama, encontrando que la misma es solución de la ecuación de Yang-Baxter.

Deformaciones de grupos de simetrías.

"El escaso entendimiento de la física a distancias muy cortas indica que la estructura del espacio tiempo a pequeña escala no debería estar adecuadamente descrita por la geometría clásica del continuo. A la escala de Planck, uno espera que la noción de geometría clásica tenga que ser generalizada incorporando efectos cuánticos. Hasta el presente no se conoce ninguna alternativa convincente, pero han sido propuestas varias posibilidades; una de ellas es la introdución en la física de la geometría no conmutativa ... Ciertamente, ésta fue una de las motivaciones detrás del trabajo sobre deformaciones de los grupos de Lorentz y Poincaré y del espacio de Minkowski en términos del parámetro q y por supuesto detrás del programa de Connes sobre geometría no conmutativa" [12].

La idea de borrosidad del espacio-tiempo se remonta a la década del sesenta, y cabe mencionar los trabajos de G. Kac [13], M.Takesaki[14] y R.Penrose [15] a este respecto. En la actualidad, la idea de que una teoría para la resolución de la gravedad cuántica debería llevar a espacios "discretos", es conocida.

Desde el punto de vista de la teoría cuántica de campos, es interesante analizar el comentario de F. Müller-Hoissen [16]: "...Los intervalos espacio temporales son medidos con partículas de prueba. Pero la resolución es limitada por las propiedades mecánico-cuánticas de la longitud de onda de las partículas. Con el propósito de sondear el espacio tiempo a cada vez más pequeñas escalas de longitud, se necesitan partículas cada vez más pesadas, correspondiendo a longitudes de onda cada vez más pequeñas. Pero a medida que éstas se vuelven más pesadas, ya no podrán ser vistas como partículas de prueba puesto que sus efectos sobre el espacio tiempo (curvatura) no podrán ser despreciados ..., Esta idealización podría ser responsable de los insuperables problemas que uno encuentra cuando trata de entender la interacción gravitacional como mediada por los "gravitones"...Esto motiva a buscar un concepto que podría reemplazar la noción de espacio tiempo y sobre el cual podría ser basada una teoría física...Si a una escala de longitud suficientemente pequeña las coordenadas se vuelven operadores no conmutativos, será imposible medir la posición de la partícula exactamente. En esta forma uno esperaría superar las divergencias del ultravioleta de la teoría cuántica de campos convencional, que resultan de las contribuciones de oscilaciones del campo en un punto."

Lo anterior se aplica cuando el parámetro de deformación q del espacio-tiempo tiene dimensiones de longitud, asociándolo de esta manera con la longitud de onda de corte.

Otra aplicación interesante a la teoría cuántica de campos es la relacionada con la regularización de infinitos tal como lo sugiere S. Majid [17]. A causa de que todos los grupos de Lie clásicos tienen q-análogos naturales, la regularización preserva las simetrías de la teoría en la forma de grupos de simetría cuánticos. Se reemplaza la integración invariante sobre el espacio de momentos Euclideano, por una integración invariante sobre el grupo cuántico de q-espacio de momentos. Las cantidades se hacen finitas cuando $q \neq 1$ y divergen en el caso $q = 1$.

Los Grupos Cuánticos generalizarían así el concepto de simetría , pudiéndose extender a grupos de norma, de isometrías y teorías conformes. En particular, en teorías de campo conformes, se ha observado que muchas de las propiedades de las funciones de correlación son exactas a las propiedades de grupos cuánticos [18]. Esta relación con grupos cuánticos es aplicable a teorías de cuerdas, que son teorías conformes en 1+1 dimensiones.

Podríamos mencionar muchas otras aplicaciones de los grupos cuánticos y su cálculo deformado a teorías físicas, como por ejemplo a la mecánica estadística (modelos de Ising, ecuaciones maestras, caminos al azar, etc.) y a teorías cuánticas de campo topológicas en cuatro dimensiones [19]. Además, es importante destacar que en la formulación de la gravedad cuántica en términos de las variables de lazos, se ha encontrado que los grados de libertad cinemáticos son las q-redes de spin (deformaciones de las redes de spin) [20].

Sin embargo, no debemos olvidar que los Grupos Cuánticos no son más que un ejemplo contenido en una teoría mucho más general: el de la geometría no conmutativa.

I.2. Geometría no Conmutativa. Conceptos Básicos.

Es bien conocida la existencia de sistemas algebraicos que no obedecen la ley conmutativa $ab = ba$; como por ejemplo, la multiplicación de matrices y el álgebra de los operadores de la mecánica cuántica. Sin embargo, hasta hace poco menos de dos décadas, esta propiedad no parecía tener mucha relevancia sobre la estructura geométrica del espacio; es decir, las funciones coordenadas no perdían su conmutatividad. Fue hasta los años ochenta, con la aparición de los grupos cuánticos, que surgió la idea de Alain Connes de trabajar con problemas geométricos modelados por una estructura algebraica no conmutativa. Para aclarar estas ideas recordemos que una colección de elementos con una operación de suma y de multiplicación satisfaciendo ciertas propiedades constituyen un álgebra. Si la multiplicación satisface la ley conmutativa, el álgebra es llamada conmutativa. Supongamos tener un espacio ya sea vectorial, topológico o con estructura de variedad. La estructura algebraica asociada a este espacio es la colección de funciones sobre él. Un ejemplo de tales funciones sobre una variedad son las coordenadas. Durante los años sesenta y setenta, Alexander Grothendieck y su escuela, demostraron que el álgebra de funciones sobre un espacio contiene mucha información de su geometría. Es importante aclarar que la estructura de esta álgebra debe ser *conmutativa*. Sin embargo, existen espacios, generalmente de dimensión alta y geométrica o topológicamente complicados, para los cuales el álgebra de funciones no da suficiente información. Citemos algunos ejemplos de ello [21]:

1. El espacio de universos de Penrose,

2. El espacio de hojas de una foliación,

3. El espacio de representaciones unitarias irreducibles de un grupo discreto,

4. El espacio de fase en la mecánica cuántica,

5. La zona de Brillouin en el efecto Hall cuántico,

6. El espacio-tiempo.

Para salvar estas y otro tipo de dificultades, Connes propuso modificar la idea de A. Grothendieck, construyendo un álgebra de funciones *no conmutativa*. Notemos la seria consecuencia geométrica de esta idea: las funciones coordenadas del espacio dejan de satisfacer la propiedad de conmutación. Para construir este tipo de álgebras, Connes se basa en la teoría de álgebras de operadores, introducidas en los años treinta por F. Murray y J. von Neumann con el propósito de ser aplicada al estudio de la mecánica cuántica. Siguiendo estas ideas básicas, reemplaza funciones por operadores. La siguiente dificultad es la de obtener información geométrica a partir de esta álgebra no conmutativa de operadores. Para ello construye la teoría de *cohomología cíclica*. Ésta es una teoría de integración para la geometría no conmutativa, obteniendo a través de ella invariantes topológicos y geométricos del espacio subyacente. Los objetos matemáticos involucrados se llaman *cociclos cíclicos* y representan modelos abstractos de ciertas integrales múltiples. Éstos dependen de parámetros que son elementos del álgebra y, además, satisfacen propiedades básicas de integración que permiten desarrollar técnicas en el contexto de la geometría no conmutativa.

CAPÍTULO II

FORMALISMO MATEMÁTICO

II.1. Diferentes Construcciones de un Grupo Cuántico.

Desde la cuarta década de este siglo se conocen las álgebras de Hopf que pudieran tener propiedades no conmutativas. Se originan con los trabajos de H.Hopf [22] sobre anillos de cohomología de grupos de Lie.

Los grupos cuánticos tienen la estructura de un álgebra de Hopf no conmutativa y no co-conmutativa; sin embargo, existen diferentes enfoques en cuanto a su definición. Comenzando con los orígenes, Faddeev y la escuela de Leningrado [8] definen un grupo cuántico en términos de la matriz cuántica $\hat{R}$ que satisface la ecuación de Yang-Baxter cuántica. Drinfel'd [23] define un grupo cuántico como una deformación del álgebra universal envolvente de un álgebra de Lie y Woronowicz [24], los define en términos de álgebras C^* no conmutativas, en analogía con la teoría clásica de grupos topológicos. Por último, Manin [25] define los grupos cuánticos vía la geometría algebraica no conmutativa, deformando la teoría algebraica de grupos de tal forma que los elementos matriciales satisfagan un número finito de ecuaciones polinomiales. En las cuatro formulaciones los grupos cuánticos tienen la estructura de álgebra de Hopf. A continuación se explicará detalladamente este concepto y el punto de vista de cada uno de estos autores; la relación entre ellos puede verse con detalle en [26].

II.2. Nociones sobre Álgebras de Hopf.

La definición de un álgebra de Hopf involucra una terminología generalmente poco usual. Debido a ello, nos referiremos primero a conceptos básicos relacionados con su estructura.

II.2.1. Álgebras.

Definición:

Un álgebra sobre un anillo K es un triplete (A, M, u), donde A es un K-espacio vectorial [Apéndice 2], $M : A \otimes A \rightarrow A$ es un mapeo lineal llamado multiplicación y $u : K \rightarrow A$ es un mapeo lineal llamado el mapeo unidad, tal que los siguientes diagramas son conmutativos:

i) Asociatividad de M:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{I \otimes M} & A \otimes A \\ M \otimes I \downarrow & & \downarrow M \\ A \otimes A & \xrightarrow{M} & A \end{array}$$

que significa:

$$M(I \otimes M)(a \otimes b \otimes c) = M(M \otimes I)(a \otimes b \otimes c), \tag{5}$$

siendo I el mapeo identidad. Es decir, $a(bc) = (ab)c, \quad \forall a, b, c \in A$.

ii) Unitariedad:

$$\begin{array}{ccccc} & & A \otimes A & & \\ & u \otimes I \nearrow & \uparrow & \nwarrow I \otimes u & \\ K \otimes A & & \downarrow M & & A \otimes K \\ & i \searrow & A & \swarrow i & \end{array}$$

que significa:

$$M(u \otimes I)(k \otimes a) = i(k \otimes a), \qquad M(I \otimes u)(a \otimes k) = i(a \otimes k), \tag{6}$$

con i el isomorfismo natural en A, $a \in A$ y $k \in K$. Es decir, $u(k)a = ka = au(k)$.

Notar que $u(1_K) = 1_A$ y $u(k) = k1_A$; es decir, u mapea la identidad de K en la identidad de A.

Morfismos de Álgebras:

Sean (A, M_A, u_A) y (B, M_B, u_B) álgebras y $f : A \to B$ un mapeo lineal; entonces f es un mapeo de álgebras si se satisfacen:

i) $f(M_A(a \otimes b)) = M_B(f(a) \otimes f(b))$, $\forall a, b \in A$,

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{f \otimes f} & B \otimes B \\ M_A \downarrow & & \downarrow M_B \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

ii) $f(1_A) = 1_B$,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ u_A \nwarrow & & \nearrow u_B \\ & K & \end{array}$$

A continuación se "dualizan" los diagramas (o propiedades) anteriores para obtener otro concepto importante.

II.2.2. Coálgebras.

Definición:

Una coálgebra es un triplete (C, ϕ, ϵ), donde C un espacio vectorial, $\phi : C \to C \otimes C$ es un mapeo lineal llamado comultiplicación y $\epsilon : C \to K$ es un mapeo lineal llamado counidad, tal que los siguientes diagramas son conmutativos:

i) Coasociatividad de ϕ:

$$\begin{tikzcd} C\otimes C\otimes C & C\otimes C \arrow[l, "I\otimes\phi"'] \\ C\otimes C \arrow[u, "\phi\otimes I"] & C \arrow[l, "\phi"'] \arrow[u, "\phi"'] \end{tikzcd}$$

que significa:

$$(I\otimes\phi)\phi(a)=(\phi\otimes I)\phi(a); \tag{7}$$

es decir, $\sum_{(a)} a_1\otimes\phi(a_2)=\sum_{(a)}\phi(a_1)\otimes a_2$, donde hemos usado la notación usual $\phi(a)=\sum_{(a)} a_1\otimes a_2$.

Nótese que esta propiedad es dual a la propiedad asociativa del álgebra.

ii) Counitariedad:

$$\begin{tikzcd} & C\otimes C \arrow[dl, "\epsilon\otimes I"'] \arrow[dr, "I\otimes\epsilon"] & \\ K\otimes C & & C\otimes K \\ & C \arrow[uu, "\phi"] \arrow[ul, "i"] \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

que significa:

$$(\epsilon\otimes I)\phi(a)=i(a),\quad (I\otimes\epsilon)\phi(a)=i(a), \tag{8}$$

donde i es el isomorfismo natural en $K\otimes C$ ó $C\otimes K$ respectivamente. Es decir, $\epsilon(a_1)\otimes a_2=1_K\otimes a\simeq a$ y $a_1\otimes\epsilon(a_2)=a\otimes 1_K\simeq a$.

Esta propiedad es dual a la propiedad unitaria del álgebra.

Co-conmutatividad:

Una coálgebra C es co-conmutativa si y sólo si

$$T\phi=\phi, \tag{9}$$

con $T(a \otimes b) = b \otimes a$, la permutación canónica o trenza trivial.

Morfismos de Coálgebras:

Si (C, ϕ_C, ϵ_C) y (D, ϕ_D, ϵ_D) tienen estructura de coálgebras y $g : C \to D$ es un mapeo lineal, entonces g es un mapeo de coálgebras si se satisfacen las siguientes propiedades:

i) $\phi_D(g(c)) = g(c_1) \otimes g(c_2)$,

$$\begin{tikzcd} C \otimes C \arrow[r, "g \otimes g"] & D \otimes D \\ C \arrow[u, "\phi_C"] \arrow[r, "g"] & D \arrow[u, "\phi_D"'] \end{tikzcd}$$

ii) $\epsilon_D(g(c)) = \epsilon_C(c)$,

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\epsilon_C"'] & & D \arrow[dl, "\epsilon_D"] \\ & K & \end{tikzcd}$$

II.2.3. Biálgebras.

Definición:

$(H, M, u, \phi, \epsilon)$, o simplemente H, recibe el nombre de biálgebra, si tiene estructura de álgebra, de coálgebra y si se satisfacen:

i) $\phi(1) = 1 \otimes 1$,

ii) $\phi(gh) = \phi(g)\phi(h) = \sum_{(g),(h)} g_1 h_1 \otimes g_2 h_2$,

iii) $\epsilon(1) = 1$,

iv) $\epsilon(gh) = \epsilon(g)\epsilon(h)$, (10)

indicando que ϕ y ϵ son mapeos de álgebras.

Existe otra definición que puede ser encontrada usualmente en la literatura:

H es una biálgebra si tiene estructura de álgebra, de coálgebra y M y u son mapeos de coálgebras.

Proposición:

Las dos definiciones anteriores son equivalentes [27].

II.2.4. La Antípoda.

Proposición [27]:

Si (C,ϕ,ϵ) es una coálgebra y (A,M,u) es un álgebra, entonces $(Hom(C,A), M_{Hom(C,A)}, u$ tiene estructura de álgebra con:

$$M_{Hom(C,A)} : Hom(C,A) \otimes Hom(C,A) \longrightarrow Hom(C,A),$$

$$M_{Hom(C,A)}(f \otimes g) := M(f \otimes g)\phi$$

y

$$u_0 : K \longrightarrow Hom(C,A),$$

$$u_0(k)(c) := \epsilon(c)u(k),$$

$\forall c \in C,\ \ k \in K.$

La multiplicación se conoce usualmente con el nombre de "convolución" y se nota con el símbolo $*$.

Notemos que la unidad en $Hom(C,A)$ es $u_0(1_K) = u\epsilon$; es decir:

$f * u\epsilon = u\epsilon * f = f, \ \ \forall f \in Hom(C,A).$

Sea H una biálgebra con subyacentes álgebra H^A y coálgebra H^C. Por la proposición anterior, $Hom(H^C, H^A)$ tiene estructura de álgebra y $u\epsilon$ es el elemento unidad. El mapeo lineal identidad, $I(h) = h$, pertenece a esta álgebra y cumple un rol especial:

Definición:

Un elemento $S \in Hom(H^C, H^A)$ es una "*Antípoda*" para H si y sólo si

$$S * I = u\epsilon = I * S. \tag{11}$$

Si H tiene una antípoda, ésta es única. Notar que S es la inversa de I bajo la convolución $*$.

II.2.5. Álgebras de Hopf.

Definición:

Una biálgebra con una antípoda es un *álgebra de Hopf*. Se llamará *conmutativa*, si el álgebra subyacente es conmutativa; o bien *co-conmutativa*, si su coálgebra es co-conmutativa.

A continuación mencionaremos ciertas propiedades que adquiere la antípoda cuando se tiene una estructura de biálgebra.

Proposición [27]:

Sea H un álgebra de Hopf con antípoda S. Entonces:

1) $S(gh) = S(h)S(g)$,

2) $S(1) = 1$,

3) $\epsilon S = \epsilon$,

4) $T(S \otimes S)\phi = \phi S$,

donde $g, h \in H$ y $T(g \otimes h) = h \otimes g$ es la permutación canónica.

5) Las siguientes relaciones son equivalentes:

$$a) \sum_{(h)} S(h_{(2)})h_{(1)} = u\epsilon(h),$$

$$b) \sum_{(h)} h_{(2)}S(h_{(1)}) = u\epsilon(h),$$

$$c) SS = I,$$

6) Si H es conmutativa o co-conmutativa, entonces $SS = I$.

Ejemplos:

1) Sea G un grupo finito. El álgebra $\mathbb{C}G$ del grupo G, es el espacio de combinaciones lineales $\sum_{g \in G} c_g g$, donde los coeficientes c_g son números complejos. Se le da una estructura de álgebra con la multiplicación, que se obtiene por extensión de la multiplicación en el grupo G; es decir:

$$(\sum_g c_g g)(\sum_h c_h h) = \sum_{g,h} c_g c_h (gh).$$

La estructura de coálgebra viene dada por:

$$\phi(g) = g \otimes g,$$

$$\epsilon(g) = 1,$$

con $g \in G$, y extendiendo linealmente a los elementos de $\mathbb{C}G$.

El elemento inverso del grupo G induce la antípoda para $\mathbb{C}G$ como:

$$S(g) = g^{-1},$$

$\forall g \in G$, y extendiendo linealmente para todo elemento de $\mathbb{C}G$.

Puede demostrarse que $\mathbb{C}G$ tiene estructura de álgebra de Hopf co-conmutativa, y es conmutativa si y sólo si G es un grupo conmutativo.

2) Sea G un grupo finito y $F(G)$ el conjunto de mapeos $f : G \to \mathbb{C}$, con $\mathbb{C}$ el campo complejo. La aplicación de f sobre $\mathbb{C}G$ se define canónicamente como:

$$< \, , \, >: F(G) \times \mathbb{C}G \to \mathbb{C},$$

$$< f, \sum_g c_g g > = \sum_g c_g f(g).$$

El espacio $F(G)$ tiene estructura de álgebra de Hopf y es el espacio dual del álgebra de Hopf $\mathbb{C}G$ del ejemplo anterior. La multiplicación del álgebra es el producto usual de funciones valuadas en los complejos y los mapeos de la coálgebra son:

$$(\phi f)(g, h) = f(gh),$$

$$\epsilon(f) = f(1),$$

donde, en la primera expresión, se ha identificado el espacio $F(G) \otimes F(G)$ con el espacio $F(G \otimes G)$ por :

$$(f_1 \otimes f_2)(g, h) = f_1(g) f_2(h).$$

La antípoda se define como:

$$S(f)(g) = f(g^{-1}).$$

Como las funciones f están valuadas en los complejos, esta álgebra de Hopf resulta siempre conmutativa. Por otra parte, es co-conmutativa si y sólo si G es conmutativo.

3) Supongamos que G es un grupo afin algebraico; es decir, un grupo de Lie conexo [Apéndice 1] de dimensión finita que admite una representación

matricial con entradas que satisfacen un número finito de relaciones polinomiales. Por ejemplo, el grupo $SL(n,\mathbb{C}) = \{g \in M(n,\mathbb{C}) | det(g) = 1\}$.

Sea g el álgebra de Lie de G y $\mathcal{U}$g su álgebra universal envolvente. Es decir, el álgebra asociativa y no conmutativa generada por los elementos de g con el corchete de Lie:

$$[x,y] = xy - yx,$$

$\forall x, y \in$ g. Puede demostrarse que los mapeos:

$$\phi(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x,$$

$$\epsilon(x) = 0,$$

son mapeos de álgebras [27]; por lo tanto, $\mathcal{U}$g tiene estructura de biálgebra por la proposición II.2.3. La estructura de álgebra de Hopf se completa con la antípoda definida por:

$$S(x) = -x.$$

La extensión para cualquier elemento de $\mathcal{U}$g, se realiza teniendo en cuenta que $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$.

Esta álgebra de Hopf resulta co-conmutativa y es conmutativa si y sólo si lo es g, esto es si y sólo si G es abeliano.

Nota: Cabe aclarar que la estructura de álgebra de Hopf, dada para $\mathcal{U}$g, vale para cualquier álgebra de Lie g. La hipótesis de grupo afín algebraico será necesaria para la prueba de la existencia de una deformación de $\mathcal{U}$g, en la definición de Drinfel'd. Efectivamente, sólo para este tipo de estructura, se ha encontrado un algoritmo que nos permite calcular la deformación.

4) Sea G un grupo afín algebraico y $C[G]$ el espacio de las funciones polinomiales en las entradas matriciales valuadas en los complejos. Este espacio es un álgebra de Hopf, llamada el álgebra coordenada de G, con la estructura dada en el ejemplo 2.

Las álgebras de Hopf que hemos ejemplificado hasta ahora, son conmutativas o bien co-conmutativas. Los grupos cuánticos, en general, no tienen ninguna de estas dos propiedades y se obtienen por deformación de las anteriores: la definición de Drinfel'd y Jimbo generaliza el ejemplo 3; la de Manin, el ejemplo 4; y la de Woronowicz, es una variante del anterior, donde se reemplaza G por un grupo topológico compacto y $C[G]$ por el álgebra de funciones contínuas sobre G.

II.2.6. Grupos Cuánticos.

Hemos visto que los grupos cuánticos son álgebras de Hopf no conmutativas y no co-conmutativas. Sin embargo, el objeto considerado como tal, puede variar según el punto de vista de distintos autores, no existiendo hasta el presente una definición universalmente aceptada. A continuación presentaremos las cuatro versiones conocidas, sin entrar en excesivo detalle debido a la complejidad de las mismas. Se darán las referencias correspondientes para los lectores que encuentren interés en ellas.

Definición de Drinfel'd [23]:

Sea un álgebra de Lie g. Una cuantización de g es un álgebra de Hopf A, definida sobre el álgebra $\mathbb{C}[[h]]$ de series de potencias en un parámetro indeterminado h, tal que $A/hA \simeq \mathcal{U}g$ como álgebras de Hopf. Además, A debe ser completo y topológicamente libre como $\mathbb{C}[[h]]$-módulo.

Notemos que todo elemento de A puede ser multiplicado por series de potencias de h, en vez de los números complejos. El espacio de órbitas de A, A/hA, es propiamente $\mathcal{U}g$ cuando $h = 0$ y tiene su estructura de álgebra de Hopf. La expresión topológicamente libre significa que, $\forall n \geq 1$, A/h^nA es libre como módulo sobre el álgebra de dimensión finita $\mathbb{C}[[h]]/h^n$. Que sea completo significa que si $\{a_n\}$ es una secuencia de elementos de A tal que $\forall l \in \mathbb{N}_0$ $\exists N = N(l) \in \mathbb{N}$, tal que $\forall n, m > N$, $a_n - a_m$ es divisible por h^l, entonces $\exists a \in A$ tal que $\forall l \in \mathbb{N}_0$, $\exists N = N(l) \in \mathbb{N}$, tal que $\forall n > N$, $a - a_n$ es divisible por h^l. Un ejemplo de tal secuencia es $\{a_n = \sum_{l=0}^{n} \frac{h^l a^l}{l!}\}$ con límite e^{ha}, $\forall a \in A$.

A continuación daremos un ejemplo de esta definición. Para el caso del álgebra de Lie semisimple $sl(2)$, se tiene:

$$[H, X_{\pm}] = \pm 2X_{\pm}, \qquad [X_+, X_-] = \frac{q^H - q^{-H}}{q - q^{-1}}, \quad q = e^h,$$

y reglas de consistencia para productos tensoriales de representaciones, dados en términos del coproducto:

$$\phi(H) = H \otimes 1 + 1 \otimes H,$$

$$\phi(X_{\pm}) = X_{\pm} \otimes q^{\frac{H}{2}} + q^{-\frac{H}{2}} \otimes X_{\pm}.$$

Definición de Manin [25]:

Sea G un grupo afín algebraico y $C(G)$ el álgebra de Hopf conmutativa, no co-conmutativa, de las funciones polinomiales en las entradas matriciales del grupo. Deformar G para obtener un grupo cuántico, es interpretado como deformar $C(G)$, de tal forma que las funciones asociadas con cada elemento matricial del "grupo" ya no conmuten. Manin "cuantiza" el plano imponiendo sobre sus coordenadas la relación

$$xy = e^h yx.$$

La simetría ordinaria del plano bajo el grupo $GL(2)$ se rompe. Este "rompimiento de simetría" desaparece si se imponen relaciones de conmutación no triviales entre las entradas matriciales. Se obtiene así el grupo cuántico $GL_q(2)$, con $q = e^h$ pudiendo tomar h como la constante de Planck en teorías físicas. La deformación resultante para $GL(2)$ y, subsecuentemente, para $SL(2)$, es la misma que la obtenida por Faddeev, Reshetikhin y Takhtajan dada en el ejemplo que sigue. Sin embargo, la forma de obtención es diferente. Se comienza con las matrices

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}).$$

Se construyen las funciones polinomiales sobre este grupo

$$C[SL(2, \mathbb{C})] = \mathbb{C}[a, b, c, d]/(ad - bc - 1),$$

donde los generadores a, b, c, d son las funciones sobre los elementos matriciales de T. Se le da a $C[SL(2, \mathbb{C})]$ una estructura de álgebra de Hopf, con un coproducto que se obtiene dualizando el producto usual de matrices y aplicando la fórmula:

$$\begin{aligned} \phi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (T, T') &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (T.T') \\ &= \begin{pmatrix} a \otimes a + b \otimes c & a \otimes b + b \otimes d \\ c \otimes a + d \otimes c & c \otimes b + d \otimes d \end{pmatrix} (T \otimes T'). \end{aligned}$$

Se deforma el álgebra de Hopf $C[SL(2, \mathbb{C})]$, cambiando la multiplicación. Para ello se construye primero la deformación del álgebra de funciones polinomiales $C[\mathbb{C}^2] = \mathbb{C}[x,y]/(xy - yx)$, teniendo en cuenta la relación de Heisenberg dada más arriba. De esta forma definimos:

$$C_q[\mathbb{C}^2] = \mathbb{C}[x,y]/(xy - qyx).$$

Considerando la acción del grupo $SL(2,\mathbb{C})$ sobre los vectores del espacio $\mathbb{C}^2$,

$$\pi : M(2,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2,$$

y dualizando, se obtiene el mapeo dual de álgebras:

$$\pi^* : C[\mathbb{C}^2] \to C[M(2,\mathbb{C})] \otimes C[\mathbb{C}^2],$$

dado por

$$\begin{pmatrix} \pi^*(x) \\ \pi^*(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \otimes x + b \otimes y \\ c \otimes x + d \otimes y \end{pmatrix}.$$

Pidiendo que el mapeo dual sea un homomorfismo de álgebras, puede encontrarse la primera mitad de las relaciones de conmutación no triviales entre los elementos matriciales de $C_q[M(2,\mathbb{C})]$. La segunda mitad se encuentra siguiendo el mismo razonamiento para la acción transpuesta de π.

El determinante deformado se obtiene por dualización del determinante usual, resultando el mapeo de álgebras

$$det_q^* : C[\mathbb{C}] \to C_q[M(2,\mathbb{C})],$$

tal que $det_q^*(1) \equiv Det_q \in C_q[M(2,\mathbb{C})]$; es decir, este homomorfismo está determinado por la imágen del único generador de $C[\mathbb{C}]$. Hay dos posibles elecciones para este elemento,

$$Det_q = ad - qbc, \quad ó \quad Det_q = ad - q^{-1}bc.$$

Con la condición

$$\phi(Det_q)(T, T') = Det_q(T.T') = Det_q(T) \otimes Det_q(T'),$$

la única posibilidad para el determinante es la primera.

Definición de Woronowicz [24]:

Si se considera un grupo topológico compacto y las funciones contínuas sobre él, las deformaciones se realizarán entre álgebras de Hopf C^* [Apéndice 1].

Sea A un álgebra C^* con unidad. Si A es conmutativa, de acuerdo a la teoría de Gelfand-Naimark, A es isomórfica al álgebra de todas las funciones contínuas valuadas en los complejos y definidas sobre un espacio topológico compacto. Si A es no-conmutativa, no existe un resultado análogo. Sin embargo, uno podría tratar los elementos de A como funciones contínuas valuadas en los complejos, sobre un objeto similar a un espacio topológico compacto. Este objeto se llama espacio compacto no-conmutativo o pseudoespacio. En base a estas ideas, Woronowicz define un espacio compacto no-conmutativo, provisto con una estructura de grupo y lo llama "pseudogrupo matricial compacto".

Definición:

Sea A una álgebra C^* con unidad y el conjunto, $M(n, A)$, de todas las matrices $n \times n$ con entradas en A. Sea $u = (u_{ij})_{i,j=1}^{n} \in M(n, A)$.

El par $G = (A, u)$ se llama *"pseudogrupo matricial compacto"*, si se satisfacen las siguientes propiedades:

1) La subálgebra-$*$ $\mathcal{A}$ (subálgebra de A, tal que $a^* \in \mathcal{A}$, $\forall a \in \mathcal{A}$), generada por los elementos matriciales de u y u^*, es densa en A.

2) Existe un único homomorfismo de álgebras C^*, $\phi : A \to A \otimes A$; es decir, un homomorfismo de álgebras con la propiedad $\phi(a^*) = \phi(a)^*$, tal que:

$$\phi(u_{kl}) = \sum_r u_{kr} \otimes u_{rl},$$

$\forall k, l = 1, ..., n$. ϕ recibe el nombre de *coproducto.*

3) Existe un único mapeo lineal antimultiplicativo $\kappa : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, llamado la *antípoda*, tal que

$$\kappa(\kappa(a^*)^*) = a,$$

$\forall a \in \mathcal{A}$, y tal que u es invertible:

$$\sum_k \kappa(u_{lk}) u_{km} = \delta_{lm} I,$$

$$\sum_k u_{mk} \kappa(u_{kl}) = \delta_{ml} I,$$

donde I es la unidad en A.

Algunos ejemplos de esta definición son: el grupo compacto de matrices G, donde $A = C(G)$ es conmutativa, y los grupos $SU(n)$ deformados o *"grupos cuánticos"*, donde A es no-conmutativa.

Nótese que la subálgebra $\mathcal{A}$, tiene estructura de álgebra de Hopf con una única counidad definida como $\epsilon(u_{ij}) = \delta_{ij}$ y que resulta un caracter-$*$ [24]. La existencia de la counidad es consecuencia de la definición anterior.

Teorema [29]:

Sea A el álgebra C^* generada por los elementos matriciales de u, tal que:

$$\sum_k u_{kl}^* u_{km} = \delta_{lm} I,$$

$$\sum_k u_{mk} u_{lk}^* = \delta_{lm} I,$$

$$\sum_{\pi \in S_n} (-\mu)^{l(\pi)} u_{\pi_1 \zeta_1} u_{\pi_2 \zeta_2} \ldots u_{\pi_n \zeta_n} = (-\mu)^{l(\zeta)} I,$$

donde π y ζ son elementos del grupo S_n de permutaciones de orden n, $l(\pi)$ es el número mínimo de transposiciones en la descomposición de π y $\mu \in [0, 1]$. Luego, $G = (A, u)$ es un pseudogrupo matricial compacto, que será denotado por $S_\mu U(n)$. En el límite $\mu = 1$, $S_\mu U(n)$ se reduce al grupo compacto de matrices $SU(n)$, con A conmutativa.

Definición de Faddeev [8]:

En el capítulo I hemos comentado como Faddeev y su escuela encuentran un objeto, que denominan grupo cuántico, a partir de la expresión:

$$RT_1T_2 = T_2T_1R, \tag{12}$$

donde la matriz $R \in M(n^2, \mathbf{C})$ es solución de la ecuación de Yang-Baxter cuántica. En la ecuación (12) $T_1 = T \otimes I$ y $T_2 = I \otimes T$, con I la identidad en $M(n, \mathbf{C})$ y $T = \{t_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n} \in M(n, A)$. T recibe el nombre de matriz cuántica y genera el álgebra $A = \mathbf{C} < t_{ij} >$ de polinomios no conmutativos en las n^2 variables t_{ij}.

Sea I_R el ideal en el álgebra A generado por los elementos $RT_1T_2 - T_2T_1R$. El álgebra cociente

$$A_R = A/I_R,$$

se llama el álgebra de funciones sobre el álgebra de matrices cuánticas de rango n, asociada a la matriz R. Esta definición significa que, A_R, es el álgebra de polinomios en las n^2 variables no conmutativas, t_{ij}, las cuales satisfacen las relaciones (12). A_R tiene estructura de biálgebra con un coproducto definido como:

$$\phi(t_{ij}) = t_{ik} \otimes t_{kj},$$

y una counidad definida por:

$$\epsilon(t_{ij}) = \delta_{ij}.$$

Por simplicidad llamaremos a A_R *el álgebra de la matriz cuántica.*

Sea $R = R(q)$ la matriz fundamental [35], asociada con series clásicas de las álgebras de Lie simples, dependiendo de un parámetro de deformación $q \in \mathbf{C}$, por ejemplo $q = e^h$, con la propiedad $R(q)|_{q=1} = I$. $R = R(q)$ es una matriz en el producto tensorial de orden 2 de la representación vectorial de la correspondiente álgebra de Lie.

Se define un mapeo lineal, $\tilde{S}$, sobre los generadores t_{ij} en el álgebra $A_{R(q)}$ y un "determinante cuántico", $det_q(T) \in A_{R(q)}$, como:

$$\tilde{S}(t_{ij}) = (-q)^{i-j} \hat{t}_{ij},$$

y

$$det_q(T) = \sum_{\pi \in S_n} (-q)^{l(\pi)} t_{1\pi_1} \ldots t_{n\pi_n},$$

donde $\hat{t}_{ij}$ son los cofactores cuánticos definidos por:

$$\hat{t}_{ij} = \sum_{\pi \in S_{n-1}} (-q)^{l(\pi)} t_{1\pi_1} \ldots t_{i-1\pi_{i-1}} t_{i+1\pi_{i+1}} \ldots t_{n\pi_n},$$

donde π es un elemento del grupo simétrico S_{n-1}, $l(\pi)$ es la longitud de la permutación π (número mínimo de transposiciones en π) y $\pi = (\pi_1, ..., \pi_{i-1}, \pi_{i+1}, ..., \pi_n) = \pi(1, ..., j-1, j+1, ..., n)$.

Puede probarse [35] que se satisface la relación :

$$T\tilde{S}(T) = \tilde{S}(T)T = det_q(T)I,$$

con $\tilde{S}(T) = (\tilde{S}(t_{ij}))_{i,j=1}^{n}$, de donde concluimos que $det_q(T)$ pertenece al centro del álgebra $A_{R(q)}$ (conmuta con todos los elementos de $A_{R(q)}$). La condición $det_q(T) \neq 0$ permite definir la antípoda S como:

$$S(T) = \frac{\tilde{S}(T)}{det_q(T)}.$$

Sea $\mathbb{C}_q^n$ el álgebra de funciones polinomiales en las n variables no conmutativas, x_i, siguiendo las relaciones [35]:

$$R_{ij}{}^{kl} x_k x_l = q x_j x_i.$$

$\mathbb{C}_q^n$ se denomina el álgebra de funciones sobre el espacio vectorial cuántico de dimensión n o *espacio vectorial cuántico.*

La expresión dada para el $det_q(T)$ viene de la estructura de $A_{R(q)}$-comódulo izquierdo $(A_{R(q)}, \mathbb{C}_q^n, \delta)$, tal como se definirá en *II.4.2*, donde la coacción δ sobre los generadores x_i es:

$$\delta(x_i) = t_{ij} \otimes x_j.$$

Como se verá más adelante, esta coacción puede ser extendida naturalmente al álgebra exterior cuántica $(\mathbb{C}_q^n)^\wedge$, obteniendo por cálculo directo que

$$\delta(x_1 \wedge ... \wedge x_n) = det_q(T) \otimes (x_1 \wedge ... \wedge x_n).$$

De la propiedad (19) del comódulo, se obtiene que el coproducto del determinante es

$$\phi(det_q(T)) = det_q(T) \otimes det_q(T).$$

Definición:

El álgebra $A_{R(q)}$ con esta antípoda y este determinante se llamará el álgebra de funciones sobre el grupo cuántico. Por simplicidad se denomina a esta álgebra *grupo cuántico*.

Como ejemplo daremos el caso de los grupos cuánticos $GL_q(2)$ y $SL_q(2)$, dados en términos de la matriz

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

con las relaciones de conmutación

$$ab = qba, \qquad ac = qca, \qquad bc = cb,$$

$$bd = qdb, \qquad cd = qdc, \qquad ad - da = (q - q^{-1})bc,$$

que se obtienen de la relaciones (12) con $R(q) = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & q-q^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$, y el determinante

$$det_q(T) = ad - qbc.$$

La condición $det_q(T) = 1$ define el grupo cuántico $SL_q(2)$.

Es importante destacar que estas matrices no forman un grupo, pues la ley de clausura sólo es válida para matrices cuyos respectivos elementos matriciales conmutan entre sí. En este caso la nueva matriz producto pertenece al grupo cuántico o "pseudogrupo", satisfaciendo las reglas de conmutación dadas en el ejemplo. Esta propiedad se expresa a través del coproducto de T, que es un homomorfismo de álgebras.

II.3. Grupos Trenzados.

Los grupos trenzados fueron introducidos por primera vez por S. Majid [28], en el año mil novescientos ochenta y nueve, y subsecuentemente estudiados en numerosos trabajos dentro del contexto de la *geometría trenzada*. Si bien los grupos cuánticos aparecieron diez años antes, éstos resultan un caso particular de los primeros. A continuación daremos algunos conceptos básicos sobre el tema.

Definición:

Un grupo trenzado B es un álgebra de Hopf trenzada.

Un álgebra de Hopf trenzada satisface los mismos axiomas de un álgebra de Hopf con una variante en el producto tensorial. La extensión de la multiplicación del álgebra B a la multiplicación del álgebra producto tensorial $B \otimes B$, agrega el operador de trenza en su definición. Explícitamente tendremos:

$$(a \otimes c)(b \otimes d) = a\Psi(c \otimes b)d, \tag{13.a}$$

con Ψ: $B \otimes B \rightarrow B \otimes B$ un isomorfismo satisfaciendo:

1) La condición del exágono

$$\Psi_{B\otimes B,B} = (\Psi \otimes I)(I \otimes \Psi),$$
$$\Psi_{B,B\otimes B} = (I \otimes \Psi)(\Psi \otimes I). \tag{13.b}$$

2) Los diagramas de funtorialidad

$$\Psi(m \otimes I) = (I \otimes m)\Psi_{B\otimes B,B},$$

$$\Psi(I \otimes m) = (m \otimes I)\Psi_{B,B\otimes B}, \tag{13.c}$$

$$\Psi_{B\otimes B,B}(\phi \otimes I) = (I \otimes \phi)\Psi,$$

$$\Psi_{B,B\otimes B}(I \otimes \phi) = (\phi \otimes I)\Psi, \tag{13.d}$$

que expresan la compatibilidad con la multiplicación y el coproducto, y

$$(I \otimes \Psi)\Psi_{B\otimes B,B} = \Psi_{B\otimes B,B}(\Psi \otimes I), \tag{13.e}$$

que es la ecuación de la trenza.

El álgebra $B \otimes B$ con la multiplicación (13.a) recibirá el nombre de *producto tensorial trenzado* y se denotará como $B\underline{\otimes}B$.

Es así como la definición de álgebra de Hopf se verá afectada en la definición de biálgebra, cuando se establezca la compatibilidad entre el coproducto y la multiplicación. Para distinguir la introducción del espacio $B\underline{\otimes}B$, llamaremos a esta biálgebra ***biálgebra trenzada***. Concretamente, un álgebra de Hopf trenzada es:

1) un álgebra, tal como se definió en *II.2.1*,

2) una coálgebra, como en *II.2.2*,

tal que:

3) ϕ y ϵ son mapeos de álgebras trenzadas, en el sentido de la definición dada en *II.2.1* e introduciendo la expresión (13.a) en la relación $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$.

4) existe la antípoda S, tal como se define en *II.2.4*.

Los puntos 1), 2) y 3) definen la biálgebra trenzada. Además, en la proposición *II.2.5*, deben cambiarse los puntos 1 y 4 por:

$$S(ab) = M\Psi(S \otimes S)(a \otimes b),$$

y

$$\phi S = (S \otimes S)\Psi\phi,$$

respectivamente.

Algunos grupos trenzados tienen una estructura adicional, llamada cuasitriangular, si existe una matriz $R = \sum_i \alpha_i \otimes \beta_i \in B \otimes B$, llamada la matriz universal trenzada, tal que satisface los siguientes axiomas:

$$T(\phi(a))R = R\phi(a), \tag{14}$$

y

$$\begin{aligned}(\phi \otimes I)R &= R^{13}R^{23},\\ (I \otimes \phi)R &= R^{13}R^{12},\end{aligned} \tag{15}$$

con $T(a\otimes b) = (b\otimes a)$ y $R^{13} = \alpha_i\otimes 1\otimes\beta_i$, $R^{23} = 1\otimes\alpha_i\otimes\beta_i$, $R^{12} = \alpha_i\otimes\beta_i\otimes 1 \in B\otimes B\otimes B$.

De los axiomas (14) y (15), es posible obtener la ecuación de Yang-Baxter cuántica en la forma:

$$R^{12}R^{13}R^{23} = R^{23}R^{13}R^{12}.$$

Notemos también que la relación (14) define en forma concreta la no co-conmutatividad, y si $R = 1 \otimes 1$, la coálgebra resulta co-conmutativa.

Los grupos cuánticos aparecen cuando se satisface la estructura cuasitriangular y el producto tensorial es el usual; es decir, cuando el operador de trenza Ψ es el operador T en las relaciones (13.a). En este caso obtenemos un álgebra de Hopf cuasitriangular y un ejemplo de ello son las deformaciones de las álgebras universales envolventes de Drinfel'd.

II.4. Sobre Módulos y Comódulos.

Las siguientes definiciones representan la acción de un pseudogrupo (grupo cuántico) sobre un espacio vectorial, y serán de uso frecuente en los siguientes capítulos.

II.4.1. Definición de Módulo:

Un A-módulo derecho es una terna (A, V, w) tal que:

1) (A, M, u) es una K-álgebra,

2) V es un K-espacio vectorial,

3) $w : V \otimes A \to V$ es un mapeo lineal, llamado la acción, que satisface las siguientes propiedades:

$$w(v \otimes u(k)) = vk, \tag{16}$$

y

$$w(v \otimes a \cdot_M b) = w(w(v \otimes a) \otimes b), \tag{17}$$

con $k \in K$, $v \in V$ y $a, b \in A$.

En otras palabras, la ecuación (16) dice que w hereda la propiedad unitaria del álgebra; y la (17), que hereda la propiedad asociativa. Si denotamos $w(v \otimes a) := v.a$, la expresión (17) se lee $v.(a._{M}b) = (v.a).b$.

Esta definición puede dualizarse como sigue:

II.4.2. Definición de Comódulo:

Un C-comódulo izquierdo es una terna (C, V, δ), tal que:

1) (C, ϕ, ϵ) es una coálgebra,

2) V un K-espacio vectorial,

3) $\delta : V \rightarrow C \otimes V$ es un mapeo lineal, llamado la coacción, tal que satisface:

$$(\epsilon \otimes I)\delta(v) \simeq v, \tag{18}$$

y

$$(I \otimes \delta)\delta(v) = (\phi \otimes I)\delta(v), \tag{19}$$

$\forall v \in V$. Nótese que δ hereda la propiedad counitaria y coasociativa de la coálgebra.

Las definiciones anteriores pueden modificarse de manera que valgan para módulo izquierdo y comódulo derecho respectivamente.

SEGUNDA PARTE

EL MODELO DEL GRUPO CUÁNTICO

CAPÍTULO III

ÁLGEBRAS DE CLIFFORD CUÁNTICAS A PARTIR DE REPRESENTACIONES ESPINORIALES

En este capítulo se presentan las álgebras de Clifford deformadas, en base a una generalización cuántica de la teoría de espinores de Cartan. Para ello, utilizaremos el formalismo de grupos cuánticos de bimódulos bicovariantes. Luego, aplicaremos esta teoría al caso específico del grupo cuántico $SL_q(n, \mathbb{C})$.

Para facilitar la comprensión del contenido matemático de este capítulo, puede hacerse uso del Apéndice que contiene definiciones básicas y aclaraciones específicas.

III.1. Los operadores de Clifford.

En la teoría clásica de Cartan [2], los espinores son considerados como elementos de un álgebra graduada exterior sobre uno de los dos subespacios isotrópicos que constituyen el espacio vectorial total W. Este espacio es plano; es decir, su producto interno o escalar, $< , >: W \times W \to \mathbb{C}$, puede escribirse en cualquier base ortonormal Cartesiana como:

$$< \mathbf{w}, \mathbf{w} >= \sum_{i=1}^{m-h} w^i w^i - \sum_{i=m-h+1}^{m} w^i w^i,$$

donde $\mathbf{w} \in W$, w^i es la i-ésima coordenada del vector $\mathbf{w}$, m es la dimensión de W y h es un número entero que no depende de la base, llamado la signatura, que indica el número negativo de términos en la expresión de la distancia $< \mathbf{w}, \mathbf{w} >$.

El espacio W puede ser Euclideano ($h = 0$) o pseudo-Euclideano ($1 \leq h \leq m-1$). Si su dimensión es par, $m = 2n$, se podrá escribir $W = V \oplus V'$ y si es impar, $m = 2n+1$, escribiremos $W = M \oplus V \oplus V'$. El espacio M es un espacio vectorial de dimensión uno; los espacios V y V' son isotrópicos, mutuamente duales y de dimensión n. Es decir, si $\{e_i\}_{i=1,...,n}$ es una base para V y $\{e'_i\}_{i=1...n}$ es una base para V', entonces la condición de isotropía dice que:

$$< e_i, e_j >= 0,$$
$$< e'_i, e'_j >= 0,$$

y

$$< e'_i, e_j >= \delta_{ij}. \tag{20}$$

La base $\{e_i, e'_i\}_{i=1...n}$ es una base isotrópica para W.

La última de estas relaciones expresa la dualidad entre los espacios V y V', pudiendo reescribirse como:

$$e'_i(e_j) = \delta_{ij}. \tag{21}$$

De esta manera, todo elemento $\mathbf{w} \in W$ puede expresarse en forma única como:

$$\mathbf{w} = x^0 \hat{e}_0 + x + f, \tag{22}$$

con $\hat{e}_0$ el vector unitario base de M, $x \in V$ y $f \in V'$.

Los espinores estarán basados sobre V, pudiendo ser escritos como:

$$\xi = \sum_{p=0}^{n} \xi^{(p)}, \tag{23}$$

con $\xi^{(p)} \in V^{\wedge p}$, tal que

$$\xi^{(p)} = \sum_{\substack{i_1 < \ldots < i_p \\ i_j = 1 \ldots n}} \xi^{i_1 \ldots i_p} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}, \tag{24}$$

con $\xi^{i_1 \ldots i_p} \in \mathbb{C}$; tal que si $p = 0$, $\xi^{i_0} := \xi^0$ y $e_{i_0} := 1$. Obtenemos así la descripción del álgebra graduada exterior o de Grassmann [Apéndice 2], que notaremos $V^\wedge$. Los generadores del álgebra de Clifford [Apéndice 4] actuando sobre un espinor ξ, son transformaciones lineales H en W al espacio vectorial de endomorfismos sobre el espacio de espinores $V^\wedge$; es decir:

$$H : W \to End_{\mathbb{C}}(V^\wedge),$$

con

$$H(\mathrm{w}) : V^\wedge \to V^\wedge,$$

tal que:

$$H(\mathrm{w})\xi = x \wedge \xi + \imath_f \xi + x^0 S\xi, \tag{25}$$

donde S es el operador paridad que actúa sobre un espinor homogéneo $\xi^{(p)} \in V^{\wedge p}$ de acuerdo a

$$S\xi^{(p)} = (-1)^p \xi^{(p)},$$

y la contracción, $\imath_f$, es un mapeo lineal que será definido teniendo en cuenta la inclusión $V^{\wedge k} \subset V^{\otimes k}$ y la dualidad (21) como:

$$\imath_f(\eta^{(k)}) = \sum \eta^{i_1 \ldots i_k} f(e_{i_1})\, e_{i_2} \otimes \ldots \otimes e_{i_k},$$

para $\eta^{(k)} \in V^{\otimes k}$. Notemos que $H(x)$ actúa sobre un espinor homogéneo aumentando su grado en uno, mediante la operación producto exterior $\wedge$, y $H(f)$ restándole un grado mediante la contracción.

En nuestra construcción deformada, que llamaremos "cuántica", comenzaremos con un espacio vectorial V provisto de un operador de trenza [Apéndice 5], $\sigma : V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}$, que satisface:

1) la relación de trenza

$$(\sigma \otimes I)(I \otimes \sigma)(\sigma \otimes I) = (I \otimes \sigma)(\sigma \otimes I)(I \otimes \sigma), \tag{26}$$

2) la condición de Hecke

$$\sigma^2 = (1-q)\sigma + q1, \tag{27}$$

con $q \in \mathbb{R}$. La relación (26) es la versión categórica de la ecuación de Yang-Baxter cuántica (2), y por lo tanto σ estará relacionado con la solución matricial R. El operador σ trenza el producto tensorial $V^{\otimes 2}$ en forma no trivial; es decir:

$$\sigma(e_i \otimes e_j) = \sigma_{ij}{}^{kl} \;\; e_k \otimes e_l, \tag{28}$$

siendo los coeficientes $\sigma_{ij}{}^{kl}$ funciones del parámetro q en los reales. La segunda propiedad dice que este operador es "q-involutivo". Nótese que en el límite $q = 1$, obtenemos la propiedad involutiva usual y el operador de trenza resulta el trivial;

es decir, $\sigma(e_i \otimes e_j) = e_j \otimes e_i$. Este caso es el no deformado, relacionado con una matriz $R = I$. Los grupos que se derivan de ella son los grupos clásicos.

El espacio V, junto con σ, el espacio dual V', el campo complejo $\mathbf{C}$ y el producto tensorial usual, genera una categoría monoidal trenzada [Apéndice 6].

Las relaciones (20) a (22), que definen al espacio W, continuarán siendo válidas en la teoría cuántica. Los espinores seguirán siendo elementos de un álgebra de Grassmann, pero con un producto exterior deformado construido a través de un operador A que llamaremos el "$q - antisimetrizador$". Este operador se define, siguiendo el trabajo de Woronowicz [29], como:

$$A = \sum_{n \geq k \geq 0}^{\oplus} A_k, \tag{29}$$

con A_k definido sobre $V^{\otimes k}$ por

$$A_k = \sum_{\pi \in S_k} (-1)^{l(\pi)} \sigma_\pi, \tag{30}$$

donde σ_π son operadores obtenidos reemplazando transposiciones, en la descomposición minimal de la permutación π, por los correspondientes operadores de trenza escritos en función de σ y $l(\pi)$ es la longitud de π. Usando la condición de Hecke (27), puede probarse que [29]:

$$A_k^2 = c_k A_k, \tag{31}$$

con

$$c_k = \left(\sum_{\pi \in S_k} q^{l(\pi)} \right);$$

es decir, A es un operador de proyección, módulo una constante multiplicativa, en cada $V^{\otimes k}$.

Vemos entonces que cada operador A_k produce la antisimetrización de todo elemento $\eta^{(k)} = \sum_{i_1,\ldots,i_k} \eta^{i_1\ldots i_k}\, e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_k} \in V^{\otimes k}$, y A de todo elemento $\eta = \sum_{k=0,\ldots,n} \eta^{(k)} \in V^{\otimes}$.

Con las condiciones anteriores podemos definir $V^{\wedge}$, el álgebra exterior [Apéndice 2] trenzada de V, como $V^{\otimes}/J$ donde $V^{\otimes}$ es el álgebra tensorial de V y J es el ideal [Apéndice 3] de $V^{\otimes}$ generado por $Ker(A)$. De la relación (31), obtenemos que:

$$V^{\otimes} = Ker(A) \oplus Im(A), \tag{32}$$

y por lo tanto,

$$V^{\otimes}/J \simeq Im(A), \tag{33}$$

pudiendo identificar $V^{\wedge}$ con $Im(A)$, un subespacio de $V^{\otimes}$. Explícitamente,

$$[\varphi + Ker(A)] \quad \leftrightarrow \quad A(\varphi),$$

donde $\varphi \in V^{\otimes}$.

Esta identificación nos permite definir una transformación lineal $\imath_f : V^{\wedge} \to V^{\wedge}$ para todo $f \in V'$ dada por:

$$\imath_f(\eta^{(k)}) = \sum \eta^{i_1\ldots i_k} f(e_{i_1})\; e_{i_2} \otimes \ldots \otimes e_{i_k}, \tag{34}$$

para $\eta^{(k)} \in V^{\otimes k}$. Pediremos que esta operación, llamada la contracción entre V' and V, sea funtorial satisfaciendo los diagramas (63).

Con estas operaciones podemos definir, para todo $w \in W$, una acción sobre $V^{\wedge}$ por medio de la relación (25); es decir, un mapeo $H : W \to End_{\mathbb{C}}(V^{\wedge})$. Puede probarse [Apéndice 4] que el álgebra generada por $H(W)$ es isomórfica a $Cl(W) = W^{\otimes}/J$, donde J es el ideal generado por los elementos

$$x \otimes y + q^{-1}\sigma(x \otimes y), \tag{35}$$

$$x \otimes f + \sigma(x \otimes f) - < \sigma(x \otimes f) >, \tag{36}$$

$$f \otimes x + \sigma^{-1}(f \otimes x) - f(x), \tag{37}$$

$$f \otimes g + q^{-1}\sigma(f \otimes g), \tag{38}$$

donde $x, y \in V$; $f, g \in V'$ y $<\ ,\ >: V' \otimes_{\mathbb{C}} V \to \mathbb{C}$ denota la contracción. El símbolo σ es la notación para todos los operadores de trenza que serán obtenidos a partir de $\sigma(V^{\otimes 2})$, definido en (28).

Esta construcción se explicará en detalle en las próximas secciones.

III.2. La Construcción de los Operadores de Trenza.

Para obtener los operadores de trenza sobre todo el espacio W a partir de aquel definido sobre V, es necesario introducirnos primeramente en la teoría de bimódulos bicovariantes sobre grupos cuánticos compactos. A continuación daremos los conceptos básicos de esta teoría siguiendo el trabajo de Woronowicz [30].

III.2.1. Sobre Bimódulos Bicovariantes.

Definición:

Sea Γ un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y $G = (\mathcal{A}, u)$ un grupo cuántico compacto con álgebra de Hopf $\mathcal{A}$, tal como fue definido en *II.2.6* en la definición de Woronowicz.

Un bimódulo bicovariante Γ sobre un grupo cuántico compacto G es:

1) un bimódulo $(\mathcal{A}, \Gamma, {}_\Gamma w, w_\Gamma)$; es decir, un $\mathcal{A}$-módulo derecho y un $\mathcal{A}$-módulo izquierdo, tal como se definió en *II.4.1*. Por simplicidad, denotaremos ${}_\Gamma w(\theta \otimes a) := \theta a$ y $w_\Gamma(a \otimes \theta) := a\theta$, $\forall \theta \in \Gamma$, $a \in \mathcal{A}$.

2) Un bicomódulo $(\mathcal{A}, \Gamma, {}_\Gamma\phi, \phi_\Gamma)$, donde ${}_\Gamma\phi$ es la coacción derecha

$$ {}_\Gamma\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma \otimes \mathcal{A}, $$

y ϕ_Γ es la coacción izquierda

$$ \phi_\Gamma : \Gamma \rightarrow \mathcal{A} \otimes \Gamma, $$

satisfaciendo las propiedades definidas en *II.4.2*:

$$ (id \otimes \epsilon){}_\Gamma\phi = id, \tag{39} $$

$$ (\epsilon \otimes id)\phi_\Gamma = id, \tag{40} $$

$$ (id \otimes \phi){}_\Gamma\phi = ({}_\Gamma\phi \otimes id){}_\Gamma\phi, \tag{41} $$

$$ (\phi \otimes id)\phi_\Gamma = (id \otimes \phi_\Gamma)\phi_\Gamma, \tag{42} $$

con una relación de compatibilidad entre ambas coacciones dada por:

$$ (\phi_\Gamma \otimes id){}_\Gamma\phi = (id \otimes {}_\Gamma\phi)\phi_\Gamma; \tag{43} $$

3) con las siguientes relaciones de compatibilidad entre ambas estructuras:

$$_{\Gamma}\phi(a\theta) = \phi(a)_{\Gamma}\phi(\theta), \tag{44}$$

$$_{\Gamma}\phi(\theta a) = _{\Gamma}\phi(\theta)\phi(a), \tag{45}$$

$$\phi_{\Gamma}(a\theta) = \phi(a)\phi_{\Gamma}(\theta), \tag{46}$$

$$\phi_{\Gamma}(\theta a) = \phi_{\Gamma}(\theta)\phi(a). \tag{47}$$

Sea $V = {}_{inv}\Gamma = \{v \in \Gamma | \phi_{\Gamma}(v) = I \otimes v\}$, es decir todos los elementos invariantes izquierdos en Γ. El espacio V tiene una estructura natural de $\mathcal{A}$-módulo derecho dada por:

$$v \circ a := \kappa(a^{(1)}) v a^{(2)}, \tag{48}$$

donde $\kappa : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ es la antípoda. Este elemento pertenece a V y resulta:

$$v \circ a = P(va), \tag{49}$$

donde $P : \Gamma \rightarrow V$ es la proyección canónica sobre el espacio de elementos invariantes V. Efectivamente, recordemos el siguiente lema dado por Woronowicz: Existe una única proyección lineal

$$P : \Gamma \rightarrow {}_{inv}\Gamma,$$

tal que

$$P(a\theta) = \epsilon(a)P(\theta),$$

$\forall a \in \mathcal{A}$ y $\theta \in \Gamma$. Además, $\forall \theta \in \Gamma$ tenemos

$$\theta = \sum_k a_k P(\theta_k),$$

donde $a_k \in \mathcal{A}$ y $\theta_k \in \Gamma$, tal que

$$\phi_\Gamma(\theta) = \sum_k a_k \otimes \theta_k.$$

Este mapeo viene dado por:

$$P(\theta) = \sum_k \kappa(a_k)\theta_k. \tag{50}$$

Aplicando la relación (47) al elemento va, se tiene

$$\begin{array}{rcl} \phi_\Gamma(va) & = & (I \otimes v)(a^{(1)} \otimes a^{(2)}) \\ & = & a^{(1)} \otimes va^{(2)}, \end{array}$$

y por el lema anterior resulta

$$\begin{array}{rcl} P(va) & = & \kappa(a^{(1)})va^{(2)} \\ & = & v \circ a. \end{array}$$

Nótese además que el espacio V es invariante derecho:

$$_\Gamma\phi(V) \subseteq V \otimes \mathcal{A}. \tag{51}$$

Este resultado se obtiene aplicando la propiedad (43) a un elemento $v \in V$. Explícitamente

$$
\begin{aligned}
(\phi_\Gamma \otimes id)_\Gamma\phi(v) &= (id \otimes {}_\Gamma\phi)\phi_\Gamma(v) \\
&= (id \otimes {}_\Gamma\phi)(I \otimes v) \\
&= I \otimes {}_\Gamma\phi(v),
\end{aligned}
$$

resultado que indica que ${}_\Gamma\phi(v) \in V \otimes \mathcal{A}$.

De esta forma puede definirse una aplicación $u : V \to V \otimes \mathcal{A}$, la restricción de ${}_\Gamma\phi$ sobre V. Este mapeo, llamado la *representación de G*, indica que V tiene una estructura de $\mathcal{A}$-comódulo.

Las estructuras de módulo y comódulo de V se encuentran relacionadas de la siguiente manera:

$$
u(v \circ a) = \sum_k v_k \circ a^{(2)} \otimes \kappa(a^{(1)}) c_k a^{(3)}, \tag{52}
$$

con

$$
u(v) = \sum_k v_k \otimes c_k. \tag{53}
$$

Para ver este resultado, se aplican las relaciones (48),(44),(45) y la propiedad 4 del capítulo *II.2.5*, obteniendo

$$
\begin{aligned}
u(v \circ a) &= \phi(\kappa(a^{(1)}))u(v)\phi(a^{(2)}) \\
&= T(\kappa \otimes \kappa)\phi(a^{(1)})u(v)\phi(a^{(2)}) \\
&= (\kappa(a^{(2)}) \otimes \kappa(a^{(1)}))(v_k \otimes c_k)\phi(a^{(3)}) \\
&= \kappa(a^{(2)})v_k a^{(3)} \otimes \kappa(a^{(1)})c_k a^{(4)} \\
&= v_k \circ a^{(2)} \otimes \kappa(a^{(1)})c_k a^{(3)},
\end{aligned}
$$

donde se utilizó la ecuación (53) y la regla de descomposición del coproducto $(\phi \otimes id)\phi(a) = a^{(1)} \otimes a^{(2)} \otimes a^{(3)}$.

Recordemos el siguiente teorema dado por Woronowicz en su formalismo de bimódulos bicovariantes. Sea $\{v_i\}$ una base en el espacio vectorial V. Entonces, todo elemento $\theta \in \Gamma$ es de la forma

$$\theta = \sum_i a_i v_i,$$

donde los elementos $a_i \in \mathcal{A}$ y se encuentran unívocamente determinados. De este modo, es posible definir el isomorfismo, $I : \mathcal{A} \otimes V \to \Gamma$, dado por:

$$I(a \otimes v) = av, \tag{54}$$

que nos permite identificar todo elemento de Γ con uno de V. (Notar que $av \in \Gamma$ pues es el producto en Γ y no debe confundirse con $v \circ a \in V$). Por lo tanto, podemos definir la estructura de $\mathcal{A}$-módulo derecho sobre Γ mediante

$$(a \otimes v)b = ab^{(1)} \otimes (v \circ b^{(2)}), \tag{55}$$

y las estructuras de $\mathcal{A}$-comódulo sobre Γ como

$$\phi_\Gamma(a \otimes v) = a^{(1)} \otimes a^{(2)} v, \tag{56}$$

$$_\Gamma\phi(a \otimes v) = \sum_k a^{(1)} \otimes v_k \otimes a^{(2)} c_k. \tag{57}$$

De esta manera, Γ queda completamente determinado por $(V, u, \circ)$.

Sea $\sigma : \Gamma \otimes \Gamma \to \Gamma \otimes \Gamma$ el operador de trenza canónico dado en [30]. Éste viene dado por

$$\sigma(v_j \otimes v_i) = \sum f_{jk}(c_{li}) v_l \otimes v_k,$$

donde $\{v_i\}$ es una base de V; $c_{li} \in \mathcal{A}$ tales que $u(v_i) = \sum_k v_k \otimes c_{ki}$, satisfaciendo las relaciones $\phi(c_{ji}) = \sum_k c_{jk} \otimes c_{ki}$ y $\epsilon(c_{ji}) = \delta_{ji}$, en tanto que f_{ji} son funcionales lineales sobre $\mathcal{A}$. El operador σ así definido es un homomorfismo de bimódulos; es decir, satisface las siguientes propiedades:

$$\sigma(a\theta) = a\sigma(\theta),$$

$$\sigma(\theta a) = \sigma(\theta)a, \tag{58.a}$$

$$(id \otimes \sigma)\phi_\Gamma^{\otimes 2} = \phi_\Gamma^{\otimes 2}\sigma,$$

$$(\sigma \otimes id)_\Gamma\phi^{\otimes 2} = {}_\Gamma\phi^{\otimes 2}\sigma, \tag{58.b}$$

donde $\phi_\Gamma^{\otimes 2}$ y ${}_\Gamma\phi^{\otimes 2}$ son las extensiones naturales de las coacciones al producto $\Gamma \otimes \Gamma$.

El operador σ también satisface la ecuación de la trenza (26), es invertible y único.

Proposición:

Sea $\sigma : V \otimes V \to V \otimes V$ la parte invariante izquierda del operador de trenza definido más arriba. Son válidas las siguientes identidades:

$$\sigma(\eta \otimes \theta) = \sum_k \theta_k \otimes \eta \circ c_k, \tag{59.a}$$

$$\sigma^{-1}(\theta \otimes \eta) = \sum_k \eta \circ \kappa^{-1}(c_k) \otimes \theta_k. \tag{59.b}$$

Demostración:

Puede probarse fácilmente que los operadores definidos por el lado derecho de las relaciones (59) satisfacen las propiedades (58) y la relación de la trenza. Por la unicidad del operador σ, resulta que las igualdades (59) son válidas.

Recíprocamente, sea un espacio vectorial V con una representación de G sobre V $u : V \to V \otimes \mathcal{A}$, con una estructura $\circ$ de $\mathcal{A}$-módulo derecho sobre V, tal que se satisface (52). Entonces, el espacio definido por $\Gamma = \mathcal{A} \otimes V$, junto con las relaciones (54)-(57), resulta un bimódulo bicovariante con $V = {}_{inv}\Gamma$.

III.2.2. El Bimódulo Bicovariante Dual.

Sea Γ el bimódulo bicovariante sobre G determinado por $(V, u, \circ)$. El correspondiente bimódulo dual, Γ', puede ser especificado por $(V', u^c, \circ)$, donde $u^c : V' \to V' \otimes \mathcal{A}$ es la *representación conjugada o contragradiente* y $\circ$ es la estructura de $\mathcal{A}$-módulo sobre V' definida por:

$$< f \circ a, \theta > = < f, \theta \circ \kappa^{-1}(a) >, \tag{60}$$

con $f \in V'$, $\theta \in V$ y $<,>$ es la contracción definida en (34).

Generalizando las ideas de Woronowicz, concluimos que para todo Γ_1 y Γ_2, bimódulos bicovariantes, existe un isomorfismo de bimódulos canónico $\sigma : \Gamma_1 \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma_2 \to \Gamma_2 \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma_1$. Sea V_i el espacio de elementos invariantes de Γ_i. La parte invariante izquierda de este operador es el isomorfismo $\sigma : V_1 \otimes V_2 \to V_2 \otimes V_1$, explícitamente dado en (59.a), donde ahora $\eta \in V_1$ y $\theta \in V_2$. Su inversa viene dada por (59.b).

Sea $\mathcal{T}_G$ la *categoría de bimódulos bicovariantes sobre G*. Los morfismos de esta categoría son los homomorfismos de bimódulos; es decir, $f : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ tal que satisfacen:

$$f(a\theta) = af(\theta),$$

$$f(\theta a) = f(\theta)a,$$

$$(id \otimes f)\phi_{\Gamma_1} = \phi_{\Gamma_2} f,$$

$$(f \otimes id)_{\Gamma_1}\phi = {}_{\Gamma_2}\phi f.$$

Con los operadores de trenza canónicos, $\mathcal{T}_G$ resulta una *categoría monoidal trenzada* [31]. Llamaremos σ a todos los operadores de trenza que aparecen en la categoría $\mathcal{T}_G$. Los morfismos de bimódulos deberán ser compatibles con σ de acuerdo a las relaciones siguientes:

$$\sigma(f \otimes id) = (id \otimes f)\sigma,$$

$$\sigma(id \otimes f) = (f \otimes id)\sigma. \qquad (61)$$

Sean Γ_1 y Γ_2 bimódulos bicovariantes determinados por $(V_1, u_1, \circ)$ y $(V_2, u_2, \circ)$ respectivamente. Luego, el bimódulo producto, $\Gamma = \Gamma_1 \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma_2$, estará determinado por $(V, u, \circ)$ donde $V = V_1 \otimes V_2$, u es el producto de u_1 y u_2 y $\circ$ viene dado por:

$$(\theta \otimes \eta) \circ a = \left(\theta \circ a^{(1)}\right) \otimes \left(\eta \circ a^{(2)}\right). \qquad (62)$$

El bimódulo producto también pertenece a la categoría monoidal trenzada.

Es importante notar que la contracción entre V y V' es funtorial de manera natural. Es decir, es un morfismo dentro de la categoría monoidal trenzada $\mathcal{T}_G$ y, por lo tanto, satisface las relaciones de compatibilidad con el operador de trenza σ dadas por (61). Veamos ésto con el siguiente lema:

Los diagramas

$$\begin{array}{ccc} V' \otimes V \otimes \Psi & \stackrel{(\sigma \otimes id)(id \otimes \sigma)}{\longrightarrow} & \Psi \otimes V' \otimes V \\ <,> \otimes id \downarrow & & \downarrow id \otimes <,> \\ \mathbf{C} \otimes \Psi & \stackrel{\longrightarrow}{\simeq} & \Psi \otimes \mathbf{C} \end{array} \qquad (63.a)$$

$$\begin{array}{ccc} \Psi \otimes V' \otimes V & \stackrel{(id \otimes \sigma)(\sigma \otimes id)}{\longrightarrow} & V' \otimes V \otimes \Psi \\ id \otimes <,> \downarrow & & \downarrow <,> \otimes id \\ \Psi \otimes \mathbf{C} & \stackrel{\longrightarrow}{\simeq} & \mathbf{C} \otimes \Psi \end{array} \qquad (63.b)$$

con $\Psi \in \{V, V'\}$, son conmutativos.

Demostración:

Probaremos el primer diagrama. El segundo puede verificarse en forma similar. Por cálculo directo, utilizando las definiciones (59.a) y (60), las propiedades (41), 5.b de la sección *II.2.5* para κ^{-1} y (39), tenemos

$$\begin{aligned} (id \otimes <,>)(\sigma \otimes id)(id \otimes \sigma)(f \otimes \theta \otimes \eta) &= (id \otimes <,>)(\sigma \otimes id)(f \otimes \textstyle\sum_l \eta_l \otimes \theta \circ d_l) \\ &= (id \otimes <,>)(\textstyle\sum_l \eta_l \otimes f \circ d_l^{(1)} \otimes \theta \circ d_l^{(2)}) \\ &= \textstyle\sum_l \eta_l \otimes < f \circ d_l^{(1)}, \theta \circ d_l^{(2)} > \\ &= \textstyle\sum_l \eta_l \otimes < f, (\theta \circ d_l^{(2)}) \circ \kappa^{-1}(d_l^{(1)}) > \\ &= \textstyle\sum_l \eta_l \otimes < f, \theta \circ (d_l^{(2)} \kappa^{-1}(d_l^{(1)})) > \\ &= \textstyle\sum_l \eta_l \otimes < f, \theta \epsilon(d_l) > = \eta \otimes < f, \theta >, \end{aligned}$$

donde $\sum_l \eta_l \otimes d_l = u(\eta)$ ó $u^c(\eta)$ dependiendo de la elección de Ψ.

III.2.3. El Grupo Cuántico $SL_q(n, \mathbf{C})$.

Para construir el álgebra de Clifford cuántica, aplicaremos la teoría anterior al caso específico del grupo especial lineal deformado, pues es el grupo de simetría correspondiente al espacio de espinores deformado. Siguiendo la referencia [32], sea el espacio vectorial $V = \mathbf{C}^n$ y el operador lineal $\sigma : V \otimes V \to V \otimes V$ dado por

$$\sigma(e_i \otimes e_j) = \mu(e_j \otimes e_i), \qquad i < j$$

$$\sigma(e_i \otimes e_i) = e_i \otimes e_i,$$

$$\sigma(e_i \otimes e_j) = \mu(e_j \otimes e_i) + (1 - \mu^2)(e_i \otimes e_j) \qquad i > j, \tag{64}$$

donde $\mu \in (-1, 1)\backslash\{0\}$. Este operador satisface la propiedad de Hecke con $q = \mu^2$.

A continuación se dará una deformación del grupo $SL(n, \mathbf{C})$, siendo equivalente a aquella obtenida a través de la definición de la matriz R, tal como se explicó en *II.2.6*. Sea $\mathcal{H}$ el álgebra generada por los elementos u_{ij} $(i, j \in \{1, \ldots, n\})$ y las relaciones

$$\sum_{kl} {\sigma_{kl}}^{ij} u_{km} u_{ln} = \sum_{kl} u_{ik} u_{jl} {\sigma_{mn}}^{kl}, \tag{65}$$

$$\sum_{\pi \in S_n} (-\mu)^{l(\pi)} u_{\pi_1 \varsigma_1} \ldots u_{\pi_n \varsigma_n} = (-\mu)^{l(\varsigma)}, \tag{66}$$

donde u_{ij} son los elementos matriciales de la representación fundamental (53); es decir, $u : V \to V \otimes \mathcal{A}$ con

$$u(e_i) = \sum_j e_j \otimes u_{ji},$$

donde e_i son los vectores base.

Las relaciones (65) se obtienen de la ecuación (58.b) que indica que el operador σ intercambia el cuadrado de la representación fundamental. Éstas determinan las relaciones de conmutación del álgebra no-conmutativa $\mathcal{H}$, y son equivalentes a las relaciones (12) $RT_1T_2 = T_2T_1R$. La relación (66) corresponde a la deformación de aquella que expresa el requerimiento para el determinante clásico. Geométricamente significa que la reducción de la n-ésima potencia de u sobre el subespacio de dimensión uno $V^{\wedge n} \subseteq V^{\otimes n}$, da una representación trivial. Explícitamente, si w es el elemento de volúmen en $V^{\wedge n}$

$$u^n(w) = w \otimes 1,$$

indicando que el determinante cuántico es 1.

La estructura de álgebra de Hopf para $\mathcal{H}$ se completa con:

i) el coproducto $\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, dado por

$$\phi(u_{ij}) = \sum_k u_{ik} \otimes u_{kj}, \tag{67}$$

ii) la counidad $\epsilon : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$, donde

$$\epsilon(u_{ij}) = \delta_{ij}, \tag{68}$$

iii) la antípoda $\kappa : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, dada por

$$\kappa(u_{ij}) = (-\mu)^{i-j} \sum_{\pi \in S_{n-1}} u_{\pi_1 1} \ldots u_{\pi_{i-1} i-1} u_{\pi_{i+1} i+1} \ldots u_{\pi_n n}. \tag{69}$$

Las relaciones (65)-(69) determinan la estructura de álgebra de Hopf no-conmutativa, no-coconmutativa para el grupo cuántico $SL_\mu(n, \mathbb{C})$, con representación matricial u_{ij}.

Nótese que el operador σ es tomado de la teoría de los grupos cuánticos $S_\mu U(n)$, que son objetos cuánticos compactos. Ésto no impone ninguna restricción a nuestra construcción, pues las álgebras de Hopf representando ambos grupos son isomorfas y la única diferencia entre ellas es que el álgebra $\mathcal{A}$, representando $S_\mu U(n)$, posee la estructura $*$. En otras palabras, $\mathcal{A}$ es generada por u_{ij} y por los elementos matriciales de su representación contragradiente $\kappa(u)^T = u^*$, mientras que $\mathcal{H}$ lo es sólo por u_{ij}.

III.3. El Álgebra de Clifford Deformada.

En esta sección presentaremos un método de construcción general de álgebras de Clifford deformadas asociadas con espacios (pseudo)-Euclideanos de dimensión *par*. La idea geométrica principal de Cartan dentro del contexto clásico, seguirá siendo aplicada al contexto cuántico. Ésta consiste en interpretar el espacio de espinores como el álgebra exterior construida sobre V, uno de los dos subespacios isotrópicos en los cuales se descompone el espacio vectorial total. El álgebra exterior será el espacio cociente con respecto a la forma cuadrática asociada con el producto escalar en W. Este producto también relaciona en forma natural a los subespacios V y V' a través de la dualidad. Es por ello que comenzaremos la construcción a partir del espacio V, provisto de las estructuras dadas por (48) a (59), con el operador de trenza definido en (64). Es así que los espinores quedarán construidos a partir del grupo cuántico $SL_q(n,\mathbb{C})$ y su representación fundamental. Por otra parte, con las estructuras del bimódulo dual dadas en *III.2.2*, específicamente usando la relación (60) con las relaciones (59.a) y (59.b), encontraremos los operadores de trenza actuando sobre $V'\otimes V$, $V\otimes V'$ y $V'\otimes V'$. Finalmente, a partir de ellos, daremos las relaciones que satisfacen los generadores del álgebra $H(W)$, que como ya hemos explicado en III.1, resulta naturalmente isomorfa al álgebra de Clifford $Cl(W)$.

Sin embargo, antes de especializar la trenza para el caso del grupo cuántico $SL_q(n,\mathbb{C})$, daremos la deformación del álgebra de Clifford para cualquier grupo cuántico compacto G.

III.3.1. Consideraciones Generales.

Sea G un grupo cuántico compacto y $\mathcal{A}$ el álgebra de funciones polinomiales sobre él. La estructura de grupo cuántico es la de un álgebra de Hopf con el coproducto $\phi:\mathcal{A}\to\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$, la counidad $\epsilon:\mathcal{A}\to\mathbb{C}$ y la antípoda $\kappa:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$, dados en (67)-(69). El resultado de aplicar $(n-1)$ veces el coproducto a un elemento $a\in\mathcal{A}$ se denotará por $a^{(1)}\otimes\ldots\otimes a^{(n)}$. Sea el espacio vectorial V con $u:V\to V\otimes\mathcal{A}$ una representación irreducible de G, y tal que V posee una estructura de $\mathcal{A}$-módulo derecho $\circ$ con la condición de compatibilidad (52). Sean $\Gamma\in\mathcal{T}_G$, el bimódulo bicovariante determinado por $(V,u,\circ)$, y $V^\wedge$, el álgebra exterior de V con la multiplicación $m^\wedge: V^\wedge\otimes V^\wedge\to V^\wedge$. Debido a que por construcción $V^\wedge\cong{}_{inv}\Gamma^\wedge$, $V^\wedge$ pertenece a la categoría $\mathcal{T}_G$. Por lo tanto, $m^\wedge$ es un morfismo de la categoría y satisface las relaciones de funtorialidad (61):

$$\sigma(m^\wedge\otimes id)=(id\otimes m^\wedge)(\sigma\otimes id)(id\otimes\sigma), \tag{70}$$

$$\sigma(id \otimes m^\wedge) = (m^\wedge \otimes id)(id \otimes \sigma)(\sigma \otimes id). \tag{71}$$

Efectivamente, aplicando $m^\wedge$ a la relación (62), obtenemos que

$$(\theta\eta) \circ a = (\theta \circ a^{(1)})(\eta \circ a^{(2)}),$$

y por lo tanto, usando también la relación (41), obtenemos:

$$\begin{aligned} \sigma(m^\wedge \otimes id)(\theta \otimes \eta \otimes \zeta) &= \sum_k \zeta_k \otimes (\theta\eta) \circ c_k = \sum_k \zeta_k \otimes (\theta \circ c_k^{(1)})(\eta \circ c_k^{(2)}) \\ &= \sum_k (id \otimes m^\wedge)(\sigma \otimes id)(\theta \otimes \zeta_k \otimes \eta \circ c_k) \\ &= (id \otimes m^\wedge)(\sigma \otimes id)(id \otimes \sigma)(\theta \otimes \eta \otimes \zeta), \end{aligned}$$

$\forall \zeta, \theta, \eta \in V^\wedge$, donde $\sum_k \zeta_k \otimes c_k = u^\wedge(\zeta)$ y $u^\wedge : V^\wedge \to V^\wedge \otimes \mathcal{A}$ es la extensión multiplicativa natural de u. La propiedad (71) se prueba en forma similar. Estas identidades expresan la funtorialidad de $m^\wedge$ con respecto al operador de trenza natural en $V^\wedge$.

Sea la acción $H : W \to End(V^\wedge)$, de vectores de $V \oplus V' = W$ sobre $V^\wedge$, dada por las fórmulas

$$H(x)\xi = x \wedge \xi, \tag{72}$$

$$H(f)\xi = (f \otimes id)\xi = \iota_f \xi, \tag{73}$$

donde $x \in V$, $f \in V'$.

Para cada $f \in V'$, el mapeo $\iota_f : V^\wedge \to V^\wedge$ satisface la siguiente regla de Leibniz trenzada:

$$\iota_f(\theta\eta) = \iota_f(\theta)\eta + (-1)^{\partial\theta} m^\wedge \sigma^{-1}(\iota_f \otimes id)\sigma(\theta \otimes \eta), \tag{74}$$

donde $\partial\theta$ significa el grado de θ.

La demostración se obtiene aplicando las definiciones de ι_f y de $V^\wedge$.

Proposición:

Se satisfacen las siguientes identidades [33]:

$$H(x)H(y) + \frac{1}{q}\sum_k H(y_k)H(x_k) = 0, \tag{75}$$

$$H(f)H(g) + \frac{1}{q}\sum_l H(g_l)H(f_l) = 0, \tag{76}$$

$$H(f)H(x) + \sum_i H(x_i)H(f_i) = f(x), \tag{77}$$

$$H(y)H(g) + \sum_j H(g_j)H(y_j) = \sum_j g_j(y_j), \tag{78}$$

donde $x, y \in V$, $f, g \in V'$ y

$$\sum_k y_k \otimes x_k = \sigma(x \otimes y),$$

$$\sum_l g_l \otimes f_l = \sigma(f \otimes g),$$

$$\sum_i x_i \otimes f_i = \sigma^{-1}(f \otimes x),$$

$$\sum_j g_j \otimes y_j = \sigma(y \otimes g).$$

Demostración:

Las identidades (75) y (76) vienen directamente de la definición de álgebras de Clifford, recordando que éstas son naturalmente isomorfas a las álgebras exteriores sobre V y V' respectivamente (ver relaciones (A.10) y (A.11) del Apéndice). Además, hay que tener en cuenta la relación (33), $V^\wedge \simeq Im(A)$ e

$Im(A) \simeq Ker(I + \sigma/q)$, donde $I + \sigma/q$ es el proyector sobre el subespacio de elementos σ-simétricos de $V \otimes V$. El mismo razonamiento se aplica a $V'^{\wedge}$.

Las identidades (77) y (78) son mutuamente equivalentes. Demostraremos (77), observando primero que la contracción entre V' y $V^{\wedge}$ puede ser naturalmente extendida al mapeo $\iota : V'^{\wedge} \otimes V^{\wedge} \to V^{\wedge}$, tal que

$$\iota_{uw} = \iota_u \iota_w,$$

$\forall u, w \in V'^{\wedge}$, donde $\iota_{uw}(x) = \iota(uw \otimes x)$. Además, se satisface la propiedad funtorial de la contracción extendida a ι, que está dada por:

$$\sigma(\iota \otimes id) = (id \otimes \iota)(\sigma \otimes id)(id \otimes \sigma), \tag{79}$$

$$\sigma(id \otimes \iota) = (\iota \otimes id)(id \otimes \sigma)(\sigma \otimes id). \tag{80}$$

Usando las definiciones (72) y (73), la regla de Leibniz trenzada (74) y la propiedad (80), obtenemos por cálculo directo

$$\begin{array}{rcl} H(f)H(x)\xi & = & f(x)\xi - m^{\wedge}\sigma^{-1}(\iota_f \otimes id)\sigma(x \otimes \xi) \\ & = & f(x)\xi - m^{\wedge}\sigma^{-1}(\iota \otimes id)(id \otimes \sigma)(f \otimes x \otimes \xi) \\ & = & f(x)\xi - m^{\wedge}(id \otimes \iota)(\sigma^{-1} \otimes id)(f \otimes x \otimes \xi) \\ & = & f(x)\xi - \sum_i H(x_i)H(f_i)\xi. \end{array}$$

Con esta proposición podemos definir el álgebra de Clifford deformada.

Definición:

Se llama [33]*el álgebra de Clifford cuántica asociada a* (V, σ), al álgebra asociativa con unidad generada por el espacio vectorial $W = V \oplus V'$ y por las relaciones:

$$xy + \frac{1}{q}\sum_k y_k x_k = 0, \tag{81}$$

$$fg + \frac{1}{q}\sum_l g_l f_l = 0, \tag{82}$$

$$fx + \sum_i x_i f_i = f(x), \tag{83}$$

y se denota por $Cl(W, \sigma)$.

Las relaciones que definen el álgebra $Cl(W, \sigma)$ pueden escribirse en forma compacta como:

$$\vartheta\eta + \sum_k \eta_k \vartheta_k = \psi(\vartheta, \eta),$$

con $\sum_k \eta_k \otimes \vartheta_k = \tau(\vartheta \otimes \eta)$, donde $\tau \colon W^{\otimes 2} \to W^{\otimes 2}$ es el operador de trenza dado por la matriz en bloque

$$\tau = \begin{pmatrix} \sigma/q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^{-1} & 0 \\ 0 & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma/q \end{pmatrix}$$

y ψ es la forma bilineal en W.

Para finalizar esta sección, definimos el álgebra de Clifford deformada asociada con espacios (pseudo)-Euclideanos de dimensión impar, como el álgebra generada por el espacio

$$W = V \oplus V' \oplus M,$$

donde M es un espacio de dimensión uno, por las relaciones (81) a (83) y por un elemento S que satisface $S^2 = 1$, $Sx + xS = 0$ y $Sf + fS = 0$, $\forall x \in V$ y $f \in V'$.

III.3.2. El Operador de Trenza y el Álgebra de Clifford para $SL_q(n,\mathbb{C})$.

En la sección anterior hemos obtenido una deformación del álgebra de Clifford para cualquier grupo cuántico compacto G. En adelante, aplicaremos esta construcción para el grupo cuántico $SL_q(n,\mathbb{C})$.

Sea un álgebra de Clifford generada por un espacio vectorial total W de dimensión $2n$, con base $\{e_i, e_i'\}$, y con representación del grupo cuántico $SL_q(n,\mathbb{C})$ sobre V dada por $u(e_i) = \sum_j e_j \otimes u_{ji}$. De las relaciones (75)-(78), se llegan a los siguientes resultados:

$$H(e_i')H(e_j) + \sum_{k,l} (\sigma^{-1})_{ij}{}^{kl} H(e_k)H(e_l') = \delta_{ij}E, \tag{84}$$

donde

$$\sigma^{-1}(e_i' \otimes e_j) = \sum_{k,l} (\sigma^{-1})_{ij}{}^{kl} e_k \otimes e_l', \tag{85}$$

y E es el operador identidad. La relación inversa viene dada por

$$H(e_i)H(e_j') + \sum_{k,l} (\sigma)_{ij}{}^{kl} H(e_k')H(e_l) = \eta_{ij}E, \tag{86}$$

con

$$\sigma(e_i \otimes e_j') = \sum_{k,l} (\sigma)_{ij}{}^{kl} e_k' \otimes e_l, \tag{87}$$

y

$$\eta_{ij} \equiv \sum_l (\sigma)_{ij}{}^{ll}. \tag{88}$$

También tenemos

$$H(e_i)H(e_j) + \frac{1}{\mu^2}\sum_{k,l}(\sigma)_{ij}{}^{kl}H(e_k)H(e_l) = 0, \tag{89}$$

donde

$$\sigma(e_i \otimes e_j) = \sum_{k,l}(\sigma)_{ij}{}^{kl}e_k \otimes e_l, \tag{90}$$

y

$$H(e_i')H(e_j') + \frac{1}{\mu^2}\sum_{k,l}(\sigma)_{ij}{}^{kl}H(e_k')H(e_l') = 0, \tag{91}$$

donde

$$\sigma(e_i' \otimes e_j') = \sum_{k,l}(\sigma)_{ij}{}^{kl}e_k' \otimes e_l'. \tag{92}$$

Para obtener los operadores de trenza, usaremos el formalismo de bimódulos bicovariantes. Denotaremos con $\tilde{\sigma}$ los operadores canónicos dados por la fórmula (59.a). Módulo una constante multiplicativa, $\tilde{\sigma}: V \otimes V \to V \otimes V$ coincide con el operador $\sigma: V \otimes V \to V \otimes V$ de la fórmula (64). La condición $\tilde{\sigma} = \beta\sigma$, con $\beta \in \mathbb{R}^+$, fija la estructura $\circ$ de $\mathcal{A}$–módulo derecho sobre V. Aplicando (59),(64) y haciendo uso de la relación

$$\kappa^{-1}(u) = F^{-1}\kappa(u)F, \tag{93}$$

donde $\kappa(u) = u^\dagger$ y $F : V \to V$ es el operador de trenza canónico [34] entre u y su doble contragradiente u^{cc}, que en nuestro caso viene dado explícitamente por $Fe_k = \mu^{2k-n-1}e_k$, obtenemos expresiones para $e_i \circ u_{kj}$ y $e_i \circ u^*_{kj}$. Usando la definición (60) de $\circ$ en el espacio dual, obtenemos expresiones para $e'_i \circ u_{kj}$ y $e'_i \circ u^*_{kj}$.

Las estructuras de $\mathcal{A}$-módulo derecho sobre V y V' (dadas explícitamente en el Apéndice 7) nos permiten calcular los operadores de trenza restantes. Usando las expresiones (59.a) y (59.b) obtenemos

$$\tilde{\sigma}(e_i \otimes e'_i) = \frac{1}{\beta}e'_i \otimes e_i + \frac{1-\mu^{-2}}{\beta}\sum_{k<i}\mu^{2(i-k)}e'_k \otimes e_k,$$

$$\tilde{\sigma}(e_i \otimes e'_j) = \frac{1}{\beta\mu}e'_j \otimes e_i, \qquad i \neq j;$$

$$\tilde{\sigma}^{-1}(e'_i \otimes e_i) = \beta e_i \otimes e'_i + \beta(1-\mu^2)\sum_{k<i} e_k \otimes e'_k,$$

$$\tilde{\sigma}^{-1}(e'_i \otimes e_j) = \beta\mu e_j \otimes e'_i, \qquad i \neq j;$$

$$\tilde{\sigma}(e'_i \otimes e_i) = \frac{1}{\beta}e_i \otimes e'_i + \frac{1-\mu^{-2}}{\beta}\sum_{k>i} e_k \otimes e'_k,$$

$$\tilde{\sigma}(e'_i \otimes e_j) = \frac{1}{\beta\mu}e_j \otimes e'_i, \qquad i \neq j;$$

$$\tilde{\sigma}(e'_i \otimes e'_i) = \beta e'_i \otimes e'_i,$$

$$\tilde{\sigma}(e'_i \otimes e'_j) = \beta(1-\mu^2)e'_i \otimes e'_j + \mu\beta e'_j \otimes e'_i, \qquad i < j;$$

$$\tilde{\sigma}(e'_i \otimes e'_j) = \beta\mu e'_j \otimes e'_i, \qquad i > j. \tag{94}$$

Podemos renormalizar estos operadores de trenza $\tilde{\sigma}$, en forma tal que se vuelvan extensiones del operador de Hecke inicial $\sigma : V \otimes V \to V \otimes V$, multiplicando por β los operadores actuando sobre $V \otimes V'$ y $V' \otimes V$ y dividiendo por β el operador de trenza en $V' \otimes V'$. Llamaremos σ a todos estos nuevos operadores. A partir de la condición del determinante cuántico (66), se obtiene que $\beta = \mu^{(1-n)/n}$.

Para el caso particular de cuatro dimensiones, el álgebra de Clifford cuántica generada por $H(W)$ resulta:

$$H(e_i)H(e'_j) + L_{ij}{}^{kl}H(e'_k)H(e_l) = \eta_{ij}E, \tag{95}$$

con

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu^{-1} & 0 \\ 0 & \mu^{-1} & 0 & 0 \\ (\mu^2 - 1) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix};$$

$$H(e_i)H(e_j) + M_{ij}{}^{kl}H(e_k)H(e_l) = 0, \tag{96}$$

con

$$M = \mu^{-2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & \mu & (1-\mu^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

y

$$H(e'_i)H(e'_j) + M'_{ij}{}^{kl}H(e'_k)H(e'_l) = 0, \tag{97}$$

con

$$M' = \mu^{-2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\mu^2) & \mu & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para el caso de 4 dimensiones, también es posible construir el álgebra de Clifford anterior por cálculo directo. Para este propósito, se aplica la definición de la acción del operador H, en cada elemento de la base, sobre un espinor $\xi = \xi^0 + \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 + \xi^3 e_1 \wedge e_2$. Por ejemplo, la doble acción de $H(e_1)H(e_1')$ sobre ξ resulta en

$$H(e_1)H(e_1')\xi = e_1 \wedge (\iota_{e_1'}\xi) = \xi^1 e_1 + \xi^3 e_1 \wedge e_2,$$

y en forma similar,

$$H(e_1')H(e_1)\xi = \iota_{e_1'}(e_1 \wedge \xi) = \xi^0 + \xi^2 e_2.$$

Sumando estas dos expresiones se obtiene

$$(H(e_1)H(e_1') + H(e_1')H(e_1))\,\xi = E\xi,$$

que coincide con el resultado anterior.

Finalmente, consideremos el operador dado en [35] $\hat{R} = PR$, donde R es solución de la ecuación de Yang-Baxter correspondiente al grupo cuántico $SL_q(2, \mathbb{C})$ y donde P es el operador de permutación aplicado a los dos primeros índices de la matriz R. Se verifica que $\hat{R}$ satisface la condición de Hecke (27) y la relación de trenza (26). En forma matricial tenemos

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} \mu^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu^{-1}-\mu & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix}.$$

En nuestro caso

$$\mu^{-1}\sigma = \begin{pmatrix} \mu^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \mu^{-1}-\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix},$$

con σ el operador de trenza sobre $V \otimes V$, satisfaciendo también la condición de Hecke y de trenza. Ambas matrices están relacionadas por la transformación de similitud

$$S\hat{R}S^{-1} = \mu^{-1}\sigma,$$

con

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De esta manera hemos obtenido la relación entre la matriz R, que determina el grupo cuántico $SL_q(2, \mathbb{C})$ según la definición de Faddeev, y el operador σ de la teoría de representaciones de grupos cuánticos compactos de Woronowicz, que establece las relaciones de anticonmutación del álgebra de Clifford.

CAPÍTULO IV

q-ÁLGEBRAS DE CLIFFORD Y q-OPERADOR DE DIRAC

En este capítulo usaremos el álgebra de Clifford deformada para construir un q–espacio y un cálculo diferencial asociado. También construiremos el q-operador de Dirac y el q-operador de Klein-Gordon a partir del álgebra de Clifford dual. Definiremos una estructura * consistente con el álgebra, que nos permitirá describir el q–espacio real Euclideano y el correspondiente cálculo diferencial. También describiremos un interesante fenómeno puramente cuántico, relacionado con la no unicidad de nuestras álgebras de Clifford y de las álgebras de las coordenadas y derivaciones.

IV.1. Un Cálculo Diferencial en la Base Isotrópica.

Sea el mapeo $\langle\ ,\ \rangle : W \times W \to \mathcal{B}$, donde $\mathcal{B}$ es el álgebra generada por las coordenadas w^α en la base isotrópica $e_\alpha = \{e_i, e_i'\}_{i=1}^n$ de W. $\mathcal{B}$ queda completamente determinada por los elementos de matriz que figuran en las relaciones del álgebra de Clifford

$$2\langle e_\alpha, e_\beta\rangle = \psi_{\alpha\beta} = (e_\alpha e_\beta + m\tau(e_\alpha \otimes e_\beta)),$$

y por la condición bilineal $\langle \mathbf{w}, \mathbf{z}\rangle = w^\alpha z^\beta \langle e_\alpha, e_\beta\rangle$, donde $\langle e_\alpha, e_\beta\rangle$ es el producto escalar en W definido por las relaciones (20). Este mapeo resulta τ–simétrico por construcción; es decir, $\langle \mathbf{w}, \mathbf{z}\rangle = \langle \tau(\mathbf{w} \otimes \mathbf{z})\rangle$. Efectivamente, comparando la expresión anterior con la (78), obtenemos $\langle y, g\rangle = \frac{1}{2}\sum_j g_j(y_j) = \sum_j \langle g_j, y_j\rangle = \langle \sigma(y \otimes g)\rangle$, $\forall y \in V$, $g \in V'$. De esta manera, hemos introducido un *"producto escalar deformado"* que tiene el límite clásico.

Siguiendo la teoría clásica de Cartan, asumiremos que se satisface la propiedad fundamental de la transformación de espinores, $H(\mathbf{w})$, asociada con el vector w; es decir

$$H(\mathbf{w})H(\mathbf{w}) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle E. \tag{98}$$

Manteniendo esta relación en el caso cuántico, es posible preservar la interpretación geométrica de la transformación $H(\mathbf{u})$, como inversiones en un subespacio perpendicular al vector unitario $\mathbf{u}$. La relación (98) nos dice que $H(\mathbf{w})H(\mathbf{w})$ es un operador escalar; y por lo tanto, simétrico:

$$\sum_{\alpha\beta} w^\alpha w^\beta \otimes e_\alpha \otimes e_\beta \in B \otimes Im(I + \tau). \tag{99}$$

Esta relación es equivalente a

$$0 = [id \otimes (1 - \tau_1)](w^\alpha w^\beta \otimes e_\alpha \otimes e_\beta), \tag{100}$$

donde τ_1 es un operador en W que satisface

$$Ker(I - \tau_1) = Im(I + \tau);$$

es decir

$$(I - \tau_1)(I + \tau) = 0.$$

Teniendo en cuenta que el operador τ definido sobre los espacios $V^{\otimes 2}$ y $V'^{\otimes 2}$ satisface la condición de Hecke (27), encontramos que una solución para esta relación viene dada por:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^{-1} & 0 \\ 0 & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix},$$

donde, como ya hemos mencionado en el capítulo anterior, σ representa todas las extensiones funtoriales del operador de trenza σ en V.

De la expresión (100) obtenemos la siguiente álgebra para las coordenadas w^α:

$$w^\alpha w^\beta = m\tau_1^T (w^\alpha \otimes w^\beta). \tag{101}$$

En forma explícita,

$$\begin{aligned} w^i w^j &= \mu w^j w^i, \qquad i<j \\ w'^i w'^j &= \mu^{-1} w'^j w'^i, \qquad i<j \\ w^i w'^j &= \mu w'^j w^i, \qquad i \neq j \\ w^i w'^i &= w'^i w^i + \sum_{l>i} (1-\mu^2) w'^l w^l. \end{aligned} \tag{102}$$

Notemos que esta álgebra es esencialmente la misma que aquella obtenida en la referencia [24]. La diferencia principal entre ellas es que las relaciones (102) han sido obtenidas por la condición (98) impuesta sobre el álgebra de Clifford.

Para completar el álgebra, necesitamos construir un álgebra Σ de q-derivaciones simbólicas $\{\partial_i, \partial'_i\}_{i=1}^{n}$. Las relaciones para Σ se obtienen dualizando las relaciones (101). Notemos que $T\eta^T T$ es el operador de trenza que actúa sobre el espacio dual, donde η es el operador de trenza en el espacio de coordenadas y T el operador de transposición usual. Este operador se obtiene de los diagramas funtoriales para el mapeo contracción. Luego, el álgebra simétrica para el espacio Σ es:

$$\begin{aligned} \partial_i\partial_j &= \mu^{-1}\partial_j\partial_i, \qquad i<j; \\ \partial'_i\partial'_j &= \mu\partial'_j\partial'_i, \qquad i<j; \\ \partial_i\partial'_j &= \mu\partial'_j\partial_i, \qquad i\neq j; \\ \partial_i\partial'_i &= \partial'_i\partial_i + \sum_{l<i}(1-\mu^2)\partial'_l\partial_l. \end{aligned} \tag{103}$$

Para completar el cálculo, definiremos la regla de Leibniz trenzada con acciones a izquierda y derecha de la q-derivada. La regla de Leibniz con derivaciones por la izquierda viene dada por:

$$\partial_\alpha w^\beta = \delta^\beta_\alpha + \mathcal{T}^{-1}{}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\epsilon}{}^{\gamma} w^\epsilon \partial_\gamma. \tag{104}$$

Los coeficientes de la ecuación (104) se obtienen de la relación funtorial

$$(id\otimes c)(\mathcal{T}^{-1}\otimes id)(\partial_\alpha\otimes w^\beta\otimes w^\gamma) = (c\otimes id)(id\otimes\eta)(\partial_\alpha\otimes w^\beta\otimes w^\gamma), \tag{105}$$

donde c es la contracción. Esta ecuación nos permite encontrar la relación entre $\mathcal{T}^{-1}$ y el operador de trenza $\eta = \tau^T$ en el espacio de coordenadas (módulo constantes multiplicativas), obteniendo

$$\mathcal{T}^{-1}{}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\epsilon}{}^{\gamma} = \eta^{\beta\gamma}{}_{\alpha\epsilon}, \tag{106}$$

con

$$\eta \equiv \begin{cases} \mu^{-2}\sigma^T, & (\alpha,\beta) = (i,j) \\ \mu^{-2}(\sigma)^T, & (\alpha,\beta) = (i',j') \\ (\tilde{\sigma}^{-1})^T, & (\alpha,\beta) = (i',j) \\ (\sigma)^T, & (\alpha,\beta) = (i,j'). \end{cases}$$

Explícitamente, usando (104)-(106), obtenemos

$$\begin{gathered} \partial_i w^j = \mu^{-1} w^j \partial_i, \qquad i \neq j \\ \partial_i w^i = 1 + \mu^{-2} w^i \partial_i + (\mu^{-2} - 1) \sum_{k<i} w^k \partial_k, \\ \partial'_i w'^j = \mu^{-1} w'^j \partial'_i, \qquad i' \neq j' \\ \partial'_i w'^i = 1 + \mu^{-2} w'^i \partial'_i + (\mu^{-2} - 1) \sum_{k>i} w'^k \partial'_k, \\ \partial'_i w^j = \mu w^j \partial'_i, \quad i < j \\ \partial'_i w^j = \mu w^j \partial'_i + (1 - \mu^2) w^i \partial'_j, \qquad i > j \\ \partial'_i w^i = w^i \partial'_i, \\ \partial_i w'^j = \mu^{-1} w'^j \partial_i, \\ \partial_i w'^j = \mu^{-1} w'^j \partial_i + (1 - \mu^{-2}) \mu^{2(i-j)} w'^i \partial_j, \qquad i > j \\ \partial_i w'^i = w'^i \partial_i. \end{gathered} \tag{107}$$

En forma similar, obtenemos la regla de Leibniz con q-derivación por la derecha:

$$w^\beta \bar{\partial}_\alpha = \delta^\beta_\alpha + \eta^{\gamma\beta}{}_{\epsilon\alpha} \bar{\partial}_\gamma w^\epsilon, \tag{108}$$

donde

$$\eta \equiv \begin{cases} \mu^{-2}\sigma^T, & (\beta,\alpha) = (j,k) \\ \mu^{-2}(\sigma)^T, & (\beta,\alpha) = (j',k') \\ (\sigma^{-1})^T, & (\beta,\alpha) = (j',k) \\ (\sigma)^T, & (\beta,\alpha) = (j,k'). \end{cases}$$

Explícitamente

$$\begin{gathered}
w^j \bar{\partial}_k = \mu^{-1} \bar{\partial}_k w^j, \qquad j \neq k, \\
w^j \bar{\partial}_j = 1 + \mu^{-2} \bar{\partial}_j w^j + (\mu^{-2} - 1) \sum_{i>j} \bar{\partial}_i w^i, \\
w'^j \bar{\partial}'_k = \mu^{-1} \bar{\partial}'_k w'^j, \qquad j \neq k, \\
w'^j \bar{\partial}'_j = 1 + \mu^{-2} \bar{\partial}'_j w'^j + (\mu^{-2} - 1) \sum_{i<j} \bar{\partial}'_i w'^i, \\
w'^j \bar{\partial}_k = \mu \bar{\partial}_k w'^j + (1 - \mu^2) \bar{\partial}_j w'^k, \qquad j < k \\
w'^j \bar{\partial}_k = \mu \bar{\partial}_k w^{j'}, \qquad j > k \\
w'^j \bar{\partial}_j = \bar{\partial}_j w'^j, \\
w^j \bar{\partial}'_k = \mu^{-1} \bar{\partial}'_k w^j + (1 - \mu^{-2}) \mu^{2(k-j)} \bar{\partial}'_j w^k, \quad j < k \\
w^j \bar{\partial}'_k = \mu^{-1} \bar{\partial}'_k w^j, \qquad j > k \\
w^j \bar{\partial}'_j = \bar{\partial}'_j w^j.
\end{gathered} \tag{109}$$

Las derivaciones derechas e izquierdas están relacionadas con la diferencial por las siguientes expresiones simbólicas

$$d = \sum_{\alpha} dw^{\alpha} \partial_{\alpha} = \sum_{\alpha} \tilde{\partial}_{\alpha} dw^{\alpha}. \tag{110}$$

Nótese que todas las expresiones obtenidas en esta sección son automáticamente consistentes, pues todas las construcciones se realizan dentro de una categoría monoidal trenzada. Es importante destacar que este cálculo no es único; su obtención completa puede verse en [36].

IV.2. La Aparición Natural del Álgebra de Clifford Dual.

Como ya hemos visto, a partir del álgebra $Cl(W, \sigma)$, es posible construir un q-análogo del álgebra de funciones polinomiales sobre W. Esta álgebra es generada por W y por las relaciones que resultan del requirimiento de que la expresión

$$(\sum_{i} e_i' w_i' + e_i w_i)^2 = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle,$$

sea un "escalar". Se obtiene entonces el álgebra simétrica trenzada $\mathcal{B}$ sobre W con operador de trenza τ_1^T. Sin embargo, utilizando las relaciones de conmutación para las derivadas, se encuentra que el cuadrado del *operador de Dirac* simbólico definido por

$$\nabla = \sum_{i} e_i' \partial_i' + e_i \partial_i,$$

no es un escalar. Es por ello que se adopta un punto de vista diferente, introduciendo una nueva álgebra de Clifford tal que ∇^2 sea un operador escalar y que las relaciones entre las derivadas parciales sean las definidas en (103).

En otras palabras, buscamos un operador de trenza $\tilde{\tau} : W^{\otimes 2} \to W^{\otimes 2}$, que esté relacionado con $T\tau_1 T$ de la misma manera que τ con τ_1^T (ver ecuaciones(99) y (101)). Explícitamente

$$\tilde{\tau} = T\tau^T T; \tag{111}$$

es decir, el operador de trenza dual al operador τ. Por lo tanto, la expresión para el operador Laplaciano se reduce a

$$\Delta = \nabla^2 = \sum_i \partial_i^t \partial_i. \tag{112}$$

En el caso clásico, ambas álgebras de Clifford coinciden; en el caso deformado, no hay razón para favorecer *a priori* un álgebra sobre la otra. Desde la perspectiva del desarrollo de un formalismo análogo al Hamiltoniano, pudiera ser posible la necesidad de trabajar simultáneamente con ambas álgebras, pues una está conectada directamente con la invariancia de la "distancia" y la otra con la invariancia de la "energía".

Notemos que el álgebra de Clifford dual cambia el rol de coordenadas y derivadas; es decir, el álgebra de coordenadas, que se obtiene de ella pidiendo que $< \mathbf{w}, \mathbf{w} >$ sea un escalar, será la determinada por las relaciones (103) y, consecuentemente, el álgebra de las correspondientes derivadas será (101). Aplicando nuevamente la condición sobre el Laplaciano, se vuelve al punto de partida obteniendo el álgebra de Clifford original con operador de trenza τ.

IV.3. El q-Espacio Real y su Cálculo Diferencial.

Sea $\mathcal{W}$ el álgebra generada por las coordenadas w^α, las derivadas derechas e izquierdas, y las relaciones dadas en *IV.1.* Definiremos una operación involutiva y antimultiplicativa, que denotaremos como *, tal que actúe sobre el álgebra $\mathcal{W}$ en forma compatible con sus estructuras. Esta operación será la análoga de la operación adjunta para el caso deformado.

La construcción de esta operación para el caso de un espacio pseudo-Euclideano, nos introduce al espacio de fase con combinaciones entre las coordenadas y las derivaciones operacionalmente complicadas [37]. La causa de este inconveniente está en la elección de un operador de trenza que satisface la relación de Hecke. Esta dificultad será resuelta en el capítulo seis, definiendo un operador de trenza involutivo. Por esta causa, en lo que sigue, nos referiremos al caso de un espacio Euclideano y, en particular, de cuatro dimensiones, pudiendo generalizarse a dimensión arbitraria.

En la base isotrópica $\{e_i, e_i'\}_{i=1}^2$ del espacio vectorial W, la operación $*$ será definida análogamente al caso clásico como:

$$\begin{aligned} e_1^* &= e_1', \qquad e_1'^* = e_1, \\ e_2^* &= e_2', \qquad e_2'^* = e_2. \end{aligned} \tag{113}$$

Esta operación induce la operación * para las derivadas parciales:

$$\begin{aligned} (\partial_1)^* &= \bar{\partial}_1', \qquad (\partial_2)^* = \bar{\partial}_2', \\ (\partial_1')^* &= \bar{\partial}_1, \qquad (\partial_2')^* = \bar{\partial}_2. \end{aligned} \tag{114}$$

La $*$ se extiende a toda el álgebra $\mathcal{W}$ con las propiedades siguientes:

$$*^2 = id,$$

$$(w^\alpha w^\beta)^* = w^{\beta *} w^{\alpha *},$$

$$(\partial_\alpha w^\beta)^* = w^{\beta *}(\partial_\alpha)^*,$$

$$(w^\alpha \bar{\partial}_\beta)^* = (\bar{\partial}_\beta)^* w^{\alpha *}.$$

Con estas propiedades, el álgebra es consistente.

Definimos *realidad* por medio de la condición $w^* = w$. Con las definiciones dadas en (113) y (114), los operadores de Dirac y Laplaciano resultan *reales.*

Es importante mencionar que la estructura * no es única. Otra posibilidad es adoptar el punto de vista del "plano cuántico"; es decir, considerar la invariancia de * bajo la acción natural de un cierto grupo cuántico. Si recordamos lo explicado en la sección *III.2.3*, para nuestro ejemplo, este grupo debe ser $S_\mu U(2)$. Explícitamente, la estructura * viene dada por

$$\begin{aligned} w^{1*} &= w'^1, \\ w'^{1*} &= w^1, \\ w^{2*} &= \mu^2 w'^2, \\ w'^{2*} &= \mu^{-2} w^2, \end{aligned} \tag{115}$$

y

$$\begin{aligned} (\partial_1)^* &= \mu^2 \bar{\partial}_1', \\ (\partial_2)^* &= \bar{\partial}_2', \\ (\partial_1')^* &= \mu^{-2} \bar{\partial}_1, \\ (\partial_2')^* &= \bar{\partial}_2. \end{aligned} \tag{116}$$

Con las relaciones (115) y la condición de realidad $w^* = w$, obtenemos la estructura * para la base isotrópica $\{e_i, e_i'\}$. Esto nos permite definir una base "real" de vectores $\{a_i\}_{i=1}^4$

$$\begin{aligned}
a_1 &= e_1 + e_1', \\
a_2 &= e_2 + \mu^2 e_2', \\
a_3 &= i(e_1 - e_1'), \\
a_4 &= i(\mu^2 e_2 - e_2'). \qquad (117)
\end{aligned}$$

Haciendo uso de estas relaciones, obtenemos

$$\langle a_i, a_j \rangle \equiv g_{ij} \equiv \begin{cases} 1, & \text{i=j=1 ó i=j=3} \\ \frac{1}{2}(1+\mu^{-2}), & \text{i=j=2} \\ \frac{\mu^2}{2}(1+\mu^2), & \text{i=j=4} \\ \frac{i}{2}(1-\mu^2), & \text{i=2,j=4} \\ \frac{-i}{2}(1-\mu^2), & \text{i=4,j=2} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Notemos que los coeficientes g_{ij} pueden ser interpretados como los coeficientes de una "q-métrica ", que aparecerá en la q-álgebra de Clifford correspondiente a la base real

$$a_i a_j + m\tau(a_i \otimes a_j) = 2g_{ij}. \qquad (118)$$

En la base (117), las coordenadas de un vector "real", $A \in W$, vienen dadas en términos de las coordenadas isotrópicas por:

$$A^1 = \frac{1}{2}(w^1 + w'^1),$$

$$A^2 = \frac{1}{2}(w^2 + \mu^2 w'^2),$$
$$A^3 = \frac{i}{2}(w'^1 - w^1),$$
$$A^4 = \frac{i}{2}(-\mu^{-2} w^2 + w'^2). \tag{119}$$

Substituyendo las relaciones (119) en el álgebra (102), obtenemos las relaciones de conmutación para las A^i:

$$A^2 A^4 = A^4 A^2,$$
$$A^2 A^1 - iA^2 A^3 = \mu(A^1 A^2 - iA^3 A^2),$$
$$A^3 A^4 + iA^1 A^4 = \mu^{-1}(A^4 A^3 + iA^4 A^1),$$
$$A^1 A^3 - A^3 A^1 = \frac{i}{2}(\mu^{-2} - 1)(A^2 A^2 + \mu^4 A^4 A^4). \tag{120}$$

Aplicando las relaciones (115) a la forma fundamental $\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = w'^1 w^1 + w'^2 w^2$, se obtiene que la q-distancia es real. Por otra parte, también resulta central al álgebra $\mathcal{B}$; es decir, conmuta con todos sus elementos. En consecuencia, podemos reescribirla como $cI_{\mathcal{B}}$, con $c \in \mathbb{R}$, indicando que $< \mathbf{w}, \mathbf{w} >$ es una cantidad que podría ser medida. Si escribimos la q-distancia en términos de las coordenadas "reales", tenemos

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = A^i A^j g_{ij} = A^1 A^1 + A^3 A^3 + \frac{1}{2}(1 + \mu^{-2})(A^2 A^2 + \mu^4 A^4 A^4), \tag{121}$$

que resulta la métrica Euclideana en el límite clásico. Por todas estas causas, la forma bilineal $< \mathbf{w}, \mathbf{w} >$ es una buena definición de distancia.

Las q-derivaciones, $\{\frac{\partial}{\partial A^i}\}$, correspondientes a las coordenadas reales A^i, se obtienen directamente aplicando la regla de la cadena

$$\frac{\partial}{\partial A^i} = \frac{\partial w^j}{\partial A^i}\frac{\partial}{\partial w^j} \equiv \frac{\partial w^j}{\partial A^i}\partial_j.$$

Por cálculo directo obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial A^1} &= \partial_1 + \partial_1', \\
\frac{\partial}{\partial A^2} &= \partial_2 + \mu^{-2}\partial_2', \\
\frac{\partial}{\partial A^3} &= i(\partial_1 - \partial_1'), \\
\frac{\partial}{\partial A^4} &= i(\mu^2\partial_2 - \partial_2'),
\end{aligned} \tag{122}$$

con $\frac{\partial A^i}{\partial A^j} = \delta_{ij}$, $\left(\frac{\partial}{\partial A^i}\right)^* = \frac{\bar{\partial}}{\partial A^i}$.

Notemos que, en contraste con la solución sugerida en [38], donde la conjugación de las derivadas parciales involucran términos no lineales de orden arbitrario, nuestra operación * preserva el espacio de derivadas, intercambiando las estructuras derecha e izquierda.

Otra forma de construcción de un cálculo diferencial se da en [37], donde se definen los observables Laplaciano y distancia en una forma diferente a la desarrollada en este capítulo. Nuestro formalismo se basa únicamente en la teoría general de álgebras de Clifford, y todos los objetos construidos provienen naturalmente de ella.

CAPÍTULO V

GRUPOS CUÁNTICOS A PARTIR DE ÁLGEBRAS DE CLIFFORD

Nuestra teoría general sobre álgebras de Clifford cuánticas, basada en una deformación de la teoría de espinores de Cartan, puede ser aplicada a la construcción de diferentes q-grupos asociados a los espacios Euclideanos y pseudo-Euclideanos subyacentes, así como a la construcción de sus correspondientes grupos cuánticos de spin.

Efectivamente, a partir del operador de trenza del álgebra de coordenadas, se construye la matriz R que satisface la ecuación de Yang-Baxter, y siguendo el procedimiento dado en [35], se obtienen las relaciones de conmutación para los generadores del álgebra de Hopf que corresponden a las entradas matriciales del grupo cuántico $GL_q(2n)$.

La representación fundamental del mismo viene de la estructura de comódulo del álgebra $\mathcal{B}$ de coordenadas sobre el grupo cuántico. Requiriendo que el grupo cuántico obtenido deje invariante la forma bilineal, resultan los grupos $O_q(2n-h,h)$ asociados con las posibles signaturas $(2n-h,h)$ de los q-espacios.

Por otra parte, se construye un mapeo bilineal definido en el espacio de espinores como:

$$(\psi, \eta) = [\psi^T, C\eta],$$

donde C es el operador métrico en el espacio de espinores, construido por deformación de aquel dado por Cartan para su teoría clásica; T es la operación antimultiplicativa e involutiva que mapea linealmente espinores en el espacio dual y $[,]$ es un producto interno para espinores definido como

$$[\psi^T, \eta] = \sum_{p=0}^{n} \sum_{k_1 < \ldots < k_p} \psi^{k_1 \ldots k_p} \eta^{k_1 \ldots k_p}.$$

El grupo cuántico de spin, $Spin_q(2n)$, se construye introduciendo una matriz cuántica diagonal en bloque, dando al álgebra generada por sus entradas una estructura de álgebra de Hopf y tal que:

1) Cada bloque matricial tenga determinante uno.

2) El mapeo bilineal del espacio espinorial sea central.

3) La forma fundamental del espacio espinorial sea invariante bajo la coacción.

4) Se satisfaga

$$(\delta(\psi), H(e_\alpha)\delta(\psi)) = \sum_{\beta} t_{\alpha\beta} \otimes (\psi, H(e_\beta)\psi),$$

con $t_{\alpha\beta}$ los generadores del q-grupo ortogonal y δ la coacción del grupo de spin sobre el espacio de espinores.

La relación 4) establece el homomorfismo entre los pseudogrupos de spin y ortogonal.

Los detalles de esta construcción están contenidos en un trabajo recientemente sometido a publicación [39].

TERCERA PARTE

EL MODELO DEL GRUPO TRENZADO

CAPÍTULO VI

EL ÁLGEBRA DE CLIFFORD ASOCIADA AL OPERADOR DE TRENZA INVOLUTIVO

VI.1. El Operador de Trenza Involutivo.

En el capítulo *III* de este trabajo, se presentó una teoría general de álgebras de Clifford cuánticas, basada en una generalización cuántica de la teoría de espinores de Cartan. En ella, los subespacios V, V' y $\mathbb{C}$, con el producto tensorial usual, generan una categoría monoidal trenzada. El operador de trenza asociado, $\sigma : V \otimes V \to V \otimes V$, satisface la condición de Hecke, $\sigma^2 = (1-\mu^2)\sigma + \mu^2 I$, y viene definido por:

$$\sigma(e_i \otimes e_j) = \mu(e_j \otimes e_i), \qquad i < j$$

$$\sigma(e_i \otimes e_i) = e_i \otimes e_i,$$

$$\sigma(e_i \otimes e_j) = \mu(e_j \otimes e_i) + (1-\mu^2)(e_i \otimes e_j) \qquad i > j,$$

donde $\{e_i\}_{i=1}^n$ es una base de V. Recordemos que σ es el operador de trenza canónico de Woronowicz, proviniendo de la teoría de bimódulos bicovariantes sobre el grupo cuántico compacto $S_\mu U(n, \mathbb{C})$.

Los generadores $H(e_i)$ del álgebra de Clifford, $Cl(V, \sigma)$, satisfacen las relaciones

$$H(e_i)H(e_j) + \frac{1}{\mu^2}\sum_{k,l}(\sigma)_{ij}{}^{kl}H(e_k)H(e_l) = 0, \tag{123}$$

donde

$$\sigma(e_i \otimes e_j) = \sum_{k,l}(\sigma)_{ij}{}^{kl}e_k \otimes e_l.$$

Sin embargo, esta misma álgebra puede ser obtenida considerando un operador de trenza involutivo:

$$\tau(e_i \otimes e_j) = \mu^{-1}(e_j \otimes e_i), \qquad i < j$$
$$\tau(e_i \otimes e_i) = e_i \otimes e_i,$$
$$\tau(e_i \otimes e_j) = \mu(e_j \otimes e_i), \qquad i > j. \tag{124}$$

Para el estudio de categorías monoidales trenzadas, Mac Lane agregó el requerimiento de que el operador de trenza fuese involutivo. La condición de Hecke, que debilita la involutividad, aparece por primera vez en la construcción de soluciones de la ecuación de Yang-Baxter cuántica que no cumplen la condición unitaria [35], para los grupos cuánticos $GL_q(n, \mathbb{C})$ y $SL_q(n, \mathbb{C})$. Se encuentra que el operador definido por: $\hat{R} = TR$, donde $R \in End(V \otimes V)$ satisface la ecuación (2) y T es el operador de permutación, satisface la ecuación de la trenza y la condición de Hecke. Si R satisface la condición unitaria, entonces $\hat{R}$ es involutivo.

Con este operador podemos construir el álgebra de Clifford asociada al espacio total W, obteniendo los operadores de trenza involutivos $\bar{\tau} : V' \otimes V \rightarrow V \otimes V'$, $\bar{\tau}^{-1} : V \otimes V' \rightarrow V' \otimes V$ y $\hat{\tau} : V' \otimes V' \rightarrow V' \otimes V'$. Para ello, hacemos uso de los diagramas pentagonales (62) y (63) definidos dentro de la estructura de categoría, dados por:

$$\begin{array}{ccc} V'\otimes V\otimes \Psi & \xrightarrow{(\bar{\tau}\otimes id)(id\otimes\tau)} & \Psi\otimes V'\otimes V \\ <,>\otimes id\downarrow & & \downarrow id\otimes <,> \\ \mathbf{C}\otimes\Psi & \xrightarrow{\simeq} & \Psi\otimes\mathbf{C} \end{array} \qquad (125)$$

$$\begin{array}{ccc} \Psi\otimes V'\otimes V & \xrightarrow{(id\otimes\hat{\tau})(\hat{\tau}\otimes id)} & V'\otimes V\otimes \Psi \\ id\otimes <,>\downarrow & & \downarrow <,>\otimes id \\ \Psi\otimes\mathbf{C} & \xrightarrow{\simeq} & \mathbf{C}\otimes\Psi \end{array} \qquad (126)$$

Aplicando (125) al producto tensorial de los correspondientes vectores base y usando las relaciones (124), obtenemos:

$$\bar{\tau}(e_i'\otimes e_j) = \mu(e_j\otimes e_i'), \qquad i<j$$

$$\bar{\tau}(e_i'\otimes e_i) = e_i\otimes e_i',$$

$$\bar{\tau}(e_i'\otimes e_j) = \mu^{-1}(e_j\otimes e_i'), \qquad i>j. \qquad (127)$$

En forma similar, de (126) y (127), se obtiene:

$$\hat{\tau}(e_i'\otimes e_j') = \mu^{-1}(e_j'\otimes e_i'), \qquad i<j$$

$$\hat{\tau}(e_i'\otimes e_i') = e_i'\otimes e_i',$$

$$\hat{\tau}(e_i'\otimes e_j') = \mu(e_j'\otimes e_i'), \qquad i>j. \qquad (128)$$

Consecuentemente, $\tau=\hat{\tau}$, $\bar{\tau}=\bar{\tau}^{-1}$ y $Cl(W,\tau)$ se encuentra determinada por la relaciones:

$$H(e_i)H(e_j)+\sum_{k,l}\tau_{ij}{}^{kl}H(e_k)H(e_l)=0,$$

$$H(e_i')H(e_j') + \sum_{k,l} \tau_{ij}{}^{kl} H(e_k')H(e_l') = 0,$$

$$H(e_i')H(e_j) + \sum_{k,l} \bar{\tau}_{ij}{}^{kl} H(e_k)H(e_l') = \delta_{ij} E,$$

$$H(e_i)H(e_j') + \sum_{k,l} \bar{\tau}_{ij}{}^{kl} H(e_k')H(e_l) = \eta_{ij} E, \tag{129}$$

donde E es la identidad en el álgebra de Clifford y $\eta_{ij} = \sum_l \bar{\tau}_{ij}{}^{ll} = \delta_{ij}$. De las relaciones (124), (127) y (128), puede verificarse que el operador de trenza involutivo para el álgebra de Clifford, determinado por la matriz en bloque

$$\rho = \begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\tau} & 0 \\ 0 & \bar{\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau \end{pmatrix}, \tag{130}$$

satisface la ecuación de la trenza

$$(\rho \otimes id)(id \otimes \rho)(\rho \otimes id) = (id \otimes \rho)(\rho \otimes id)(id \otimes \rho).$$

*VI.2. La Estructura * y el Álgebra de Coordenadas.*

A continuación introduciremos una operación involutiva y antimultiplicativa

$$* : W \to W,$$

consistente con la estructura del álgebra de Clifford. Su acción sobre el campo $\mathbb{C}$ se reduce a la operación compleja conjugada. Se define su extensión al producto tensorial, $W \otimes W$, como:

$$(e_i \otimes e_j)^* = * \otimes * T(e_i \otimes e_j) = e_j^* \otimes e_i^*,$$

donde T es el operador de permutación estandar. La solución para $\{e_i^*, e_i'^*\}$ será tal que el operador de trenza (130) satisfaga la condición de suficiencia:

$$*\otimes *T\rho = \rho * \otimes * T. \qquad (131)$$

La condición (131) indica que ρ es un homomorfismo de bimódulos-$*$ (ver ecuaciones (58)).

Con este propósito, para evitar la única solución trivial $\mu^2 = 1$, debemos generalizar el álgebra a una multiparamétrica, mediante el cambio $\mu \to \mu_{ij}$ en las relaciones (124),(127) y (128), tal que:

$$\mu_{ii} = 1, \qquad 1 \le i \le n$$

$$\mu_{ij} = \mu_{ji}^{-1} \in \mathbb{C}, \; |\mu_{ij}| = 1, \qquad \text{para } i,j \le n-h \text{ ó } i,j \ge n-h+1$$

$$\mu_{ij} = \mu_{ji}^{-1} \in \mathbb{R}, \qquad \text{para} \begin{cases} i \le n-h & j \ge n-h+1 \\ j \le n-h & i \ge n-h+1 \end{cases}, \qquad (132)$$

donde h denota el número negativo de términos en la signatura de la métrica del espacio clásico pseudo-Euclideano.

Sean

$$e_i^* = e_i', \; i = 1, \ldots, n-h$$

$$(e_i')^* = e_i, \; i = 1, \ldots, n-h$$

$$e_i^* = e_i, \; i = n-h+1, \ldots, n$$

$$(e_i')^* = e_i', \; i = n-h+1, \ldots, n. \qquad (133)$$

Con estas relaciones el álgebra de Clifford se preserva ante la acción de la estructura $*$. Las expresiones (133) coinciden con la conjugación compleja clásica para la base isotrópica.

Definiendo un *q-vector real* en W como aquel que satisface $\mathbf{w}^* = \mathbf{w}$, de las relaciones (133) se obtiene que, la acción de la operación * sobre sus coordenadas es:

$$(w^i)^* = w'^i,\ i = 1, \ldots, n-h$$
$$(w'^i)^* = w^i,\ i = 1, \ldots, n-h$$
$$(w^i)^* = w^i,\ i = n-h+1, \ldots, n$$
$$(w'^i)^* = w'^i,\ i = n-h+1, \ldots, n. \tag{134}$$

Análogamente al caso del álgebra de Clifford construida mediante un operador de trenza del tipo Hecke, obtendremos un álgebra de coordenadas no conmutativa, bajo el requerimiento de que la propiedad fundamental de las transformaciones de espinores se preserve en el caso cuántico; es decir,

$$H(\mathbf{w})H(\mathbf{w}) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle E, \tag{135}$$

donde $\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = w'^1 w^1 + \ldots + w'^n w^n$ es la forma fundamental. Usando la linealidad de $H(\mathbf{w})$ y las relaciones del álgebra de Clifford (129), se obtiene

$$w^i w^j = m\bar{\tau}(w^i \otimes w^j) = \mu_{ij} w^j w^i,$$
$$w'^i w^j = m\tau(w'^i \otimes w^j) = \mu_{ij}^{-1} w^j w'^i,$$
$$w^i w'^j = m\tau(w^i \otimes w'^j) = \mu_{ij}^{-1} w'^j w^i,$$
$$w'^i w'^j = m\bar{\tau}(w'^i \otimes w'^j) = \mu_{ij} w'^j w'^i, \tag{136}$$

con m el mapeo multiplicación.

Nótese que $\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle$ es real y central al álgebra, permitiendo definir el concepto de distancia. Nótese también que el operador involutivo correspondiente al álgebra (136) puede obtenerse de (130) mediante el cambio $\mu_{ij} \leftrightarrow \mu_{ij}^{-1}$. Por este motivo resulta evidente que este nuevo operador, que llamaremos $\hat{R}$, satisface la relación de trenza. Además, definiendo un operador R por

$$R = T\hat{R}, \tag{137}$$

obtenemos un operador diagonal y, por lo tanto, que satisface la ecuación de Yang-Baxter. Explícitamente, en notación matricial,

$$R = \begin{pmatrix} T\mp & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T\mp \end{pmatrix}. \tag{138}$$

Denotaremos con $\mathcal{B}$ al álgebra polinomial no conmutativa generada por las $2n$ variables $w^1, \ldots, w^n, w'^1, \ldots, w'^n$ y con $\mathcal{B}_{\hat{R}}$ al álgebra cociente, $\mathcal{B}/\mathcal{I}_{\hat{R}}$, donde $\mathcal{I}_{\hat{R}}$ es el ideal en $\mathcal{B}$ generado por los elementos $(1 - \hat{R})(w \otimes w)$. Luego, $\mathcal{B}_{\hat{R}}$ es el álgebra de funciones sobre el espacio cuántico de $2n$ dimensiones asociado con la matriz $\hat{R}$.

VI.3. El Cálculo Diferencial de Primer Orden.

En esta sección construiremos un cálculo diferencial de primer orden para el álgebra $\mathcal{B}_{\hat{R}}$, siguiendo el procedimiento dado en *IV.1.*

El álgebra de las q-derivaciones simbólicas, que se obtiene dualizando las expresiones (136), satisface las siguientes relaciones:

$$\partial_i \partial_j = \mu_{ij} \partial_j \partial_i,$$

$$\partial'_i \partial_j = \mu_{ij}^{-1} \partial_j \partial'_i,$$

$$\partial_i \partial'_j = \mu_{ij}^{-1} \partial'_j \partial_i,$$

$$\partial'_i \partial'_j = \mu_{ij} \partial'_j \partial'_i. \tag{139}$$

Nótese que estas expresiones son idénticas a las relaciones (136) que determinan el álgebra de coordenadas, debido a que el operador de trenza $\hat{R}$ resulta autodual.

La regla de Leibniz trenzada con derivaciones por la izquierda resulta ser:

$$\partial_\beta w^\gamma = \delta^\gamma_\beta + \tau^{\gamma\alpha}{}_{\beta\lambda} w^\lambda \partial_\alpha. \tag{140}$$

Explícitamente:

$$\partial_j w^i = \delta_j{}^i + \mu_{ji}^{-1} w^i \partial_j,$$

$$\partial'_j w^i = \mu_{ji} w^i \partial'_j,$$

$$\partial_j w'^i = \mu_{ji} w'^i \partial_j,$$

$$\partial'_j w'^i = \delta_j{}^i + \mu_{ji}^{-1} w'^i \partial'_j, \tag{141}$$

La regla de Leibniz con derivaciones por la derecha es:

$$w^\gamma \bar{\partial}_\beta = \delta^\gamma_\beta + \tau^{\rho\gamma}{}_{\sigma\beta} \bar{\partial}_\rho w^\sigma. \tag{142}$$

Nótese que en este caso particular, donde el operador τ resulta igual a su transpuesto τ^T, ambas reglas de Leibniz son idénticas. Efectivamente

$$\tau^{\rho\gamma}{}_{\sigma\beta} = (T\tau T)^{\gamma\rho}{}_{\beta\sigma} = (\tau^*)^{\gamma\rho}{}_{\beta\sigma},$$

y como τ es autodual, resulta que:

$$\tau^{\rho\gamma}{}_{\sigma\beta} = \tau^{\gamma\rho}{}_{\beta\sigma},$$

indicando que (142) es igual a (140). Por lo tanto, las derivaciones derecha e izquierda son equivalentes, siendo dos representaciones del mismo operador de derivación ∂_α.

Por este motivo, se define una estructura * sobre las derivaciones sin hacer distinción entre acción derecha e izquierda. Sea:

$$(\partial_i)^* = \partial_i', \; i = 1, \ldots, n-h$$

$$(\partial_i')^* = \partial_i, \; i = 1, \ldots, n-h$$

$$(\partial_i)^* = \partial_i, \; i = n-h+1, \ldots, n$$

$$(\partial_i')^* = \partial_i', \; i = n-h+1, \ldots, n, \qquad (143)$$

operación que resulta compatible con las estructuras del álgebra, tanto para métricas Euclideanas como pseudo-Euclideanas.

Nótese también que el álgebra de Clifford definida con el operador de trenza involutivo es autodual; por lo tanto, la forma fundamental, $\langle \mathrm{w}, \mathrm{w} \rangle$, y el operador Laplaciano, $\Delta = \sum_i \partial_i' \partial_i$, resultan simultáneamente escalares.

Obsérvese que con la matriz (138) podríamos construir los grupos cuánticos asociados al álgebra de coordenadas, definida por las relaciones (136), siguiendo el método de la escuela de Faddeev. Nuestro objetivo, sin embargo, es estudiar los grupos trenzados asociados con dichas álgebras. Este es el tema del siguiente capítulo.

CAPÍTULO VII

EL GRUPO TRENZADO ASOCIADO CON TRANSFORMACIONES ESPINORIALES

VII.1. *Construcción del Grupo Trenzado.*

Hasta ahora hemos obtenido un álgebra de Clifford deformada a través de un operador de trenza involutivo, el álgebra de coordenadas $B_{\hat{R}}$ del espacio (pseudo)-Euclideano y un cálculo diferencial. Sin embargo, en vez de considerar el pseudogrupo que coactúa sobre el espacio cuántico generado por estas coordenadas, nos concentraremos en la construcción del pseudogrupo que coactúa sobre el espacio generado por las componentes espinoriales.

Para empezar, observemos que la acción de los operadores, $H(e_\alpha)$, sobre los espinores puede verse como un producto determinado por las relaciones:

$$H_i \cdot 1 = e_i,$$

$$H_i \cdot e_j = e_i \wedge e_j,$$

$$H_i' \cdot e_j = \iota_{e_i'} e_j = e_i'(e_j) = \delta_{ij}, \tag{144}$$

donde $\{e_i\}$ es la base isotrópica en V, $\{e_i'\}$ es la base recíproca en V' y $H_i \equiv H(e_i)$, $H_i' \equiv H(e_i')$. De esta forma, podemos definir un q-espinor como:

$$\xi = \sum_{p=0}^{n} \sum_{k_1 < \ldots < k_p} \xi^{k_1 \ldots k_p} H_{k_1} \ldots H_{k_p} \cdot 1, \tag{145}$$

donde las 2^n componentes, $\xi^{k_1 \ldots k_p}$, son los generadores de un álgebra no conmutativa que llamaremos $\mathcal{S}$.

En la teoría clásica de Cartan, la acción del operador $H(\mathrm{w}) = \sum_{i=1}^{n}(w^i H_i + w'^i H_i')$ sobre espinores, con w un vector real unitario, corresponde a una reflexión en el hiperplano perpendicular a w. Luego, un producto par de operadores de Clifford, actuando sobre el espacio espinorial, corresponde a una rotación propia sobre vectores.

Sea el operador definido por:

$$B = H(\mathbf{x})H(\mathbf{y}),$$

donde las componentes $\{x^1, \ldots, x^n, x'^1, \ldots, x'^n\}$ e $\{y^1, \ldots, y^n, y'^1, \ldots, y'^n\}$ no conmutan entre sí, sino que satisfacen las relaciones (136), y los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son "reales" e unitarios; es decir, $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}$, $\mathbf{y}^* = \mathbf{y}$ y $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = 1$.

Por simplicidad, consideraremos $n = 2$. En este caso, el operador B está dado explícitamente por:

$$\begin{gathered} B = H(\mathbf{x})H(\mathbf{y}) = (x'^1 y^1 + x'^2 y^2)1 + (x^1 y^2 - \mu x^2 y^1) H_1 H_2 \\ +(x^1 y'^1 - x'^1 y^1) H_1 H_1' + (x^1 y'^2 - \mu^{-1} x'^2 y^1) H_1 H_2' + (x^2 y'^1 - \mu x'^1 y^2) H_2 H_1' \\ +(x^2 y'^2 - x'^2 y^2) H_2 H_2' + (x'^2 y'^1 - \mu^{-1} x'^1 y'^2) H_2' H_1'. \end{gathered} \tag{146}$$

Su coacción, vía el producto de Clifford, sobre un espinor de Dirac

$$\xi = \xi^0 1 + \xi^1 H_1 \cdot 1 + \xi^2 H_2 \cdot 1 + \xi^{12} H_1 H_2 \cdot 1, \tag{147}$$

resulta

$$
\begin{aligned}
B \otimes \xi = & \left[(x'^1 y^1 + x'^2 y^2) \otimes \xi^0 + (x'^2 y'^1 - \mu^{-1} x'^1 y'^2) \otimes \xi^{12}\right] \cdot 1 \\
& + \left[(x^1 y^2 - \mu x^2 y^1) \otimes \xi^0 + (x^1 y'^1 + x^2 y'^2) \otimes \xi^{12}\right] H_1 H_2 \cdot 1 \\
& + \left[(x^1 y'^1 + x'^2 y^2) \otimes \xi^1 + (x^1 y'^2 - \mu^{-1} x'^2 y^1) \otimes \xi^2\right] H_1 \cdot 1 \\
& + \left[(x^2 y'^1 - \mu x'^1 y^2) \otimes \xi^1 + (x'^1 y^1 + x^2 y'^2) \otimes \xi^2\right] H_2 \cdot 1.
\end{aligned} \tag{148}
$$

Aplicando el ordenamiento de Cartan, en términos de semiespinores del primer tipo seguido por semiespinores del segundo tipo, tendremos en representación matricial:

$$B \otimes \xi = (b^\alpha{}_\beta) \otimes \xi^\beta, \tag{149}$$

donde

$$(\xi) = \begin{pmatrix} \xi^0 \\ \xi^{12} \\ \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \\ \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}, \tag{150}$$

y las entradas de la matriz diagonal en bloque, $(b^\alpha{}_\beta)$, están dadas por:

$$b^1{}_1 = x'^1 y^1 + x'^2 y^2, \quad b^1{}_2 = x'^2 y'^1 - \mu^{-1} x'^1 y'^2,$$

$$b^2{}_1 = x^1 y^2 - \mu x^2 y^1, \quad b^2{}_2 = x^1 y'^1 + x^2 y'^2,$$

$$b^3{}_3 = x^1 y'^1 + x'^2 y^2, \quad b^3{}_4 = x^1 y'^2 - \mu^{-1} x'^2 y^1,$$

$$b^4{}_3 = x^2 y'^1 - \mu x'^1 y^2, \quad b^4{}_4 = x'^1 y^1 + x^2 y'^2,$$

$$b^i{}_{j+2} = 0, \; b^{i+2}{}_j = 0, \; i, j = 1, 2. \tag{151}$$

Haciendo uso de las relaciones (136) para las coordenadas, inmediatamente se tiene:

$$b^1{}_2 b^3{}_4 = \mu^2 b^3{}_4 b^1{}_2, \quad b^1{}_2 b^4{}_3 = \mu^{-2} b^4{}_3 b^1{}_2$$

$$b^2{}_1 b^3{}_4 = \mu^{-2} b^3{}_4 b^2{}_1, \quad b^2{}_1 b^4{}_3 = \mu^2 b^4{}_3 b^2{}_1$$

$$[b^i{}_j, b^l{}_m] = 0, \quad [b^{i+2}{}_{j+2}, b^{l+2}{}_{m+2}] = 0, \quad i, j, l, m = 1, 2. \tag{152}$$

Nótese que los elementos en el mismo bloque de 2×2 conmutan entre ellos.

Los coeficientes $b^i{}_j$ heredan una estructura $*$ de la operación (134) definida para las coordenadas, compatible con las relaciones (152). Explícitamente, para $h = 1$, resulta

$$\begin{aligned} &\mu \in \mathbb{R}, \\ &(b^1{}_1)^* = b^3{}_3, \ (b^1{}_2)^* = -b^3{}_4, \\ &(b^2{}_1)^* = -b^4{}_3, \ (b^2{}_2)^* = b^4{}_4, \end{aligned} \tag{153.a}$$

y, para $h = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} &\mu * = \mu^{-1}, \\ &(b^1{}_1)^* = b^2{}_2, \ (b^1{}_2)^* = -b^2{}_1, \\ &(b^3{}_3)^* = b^4{}_4, \ (b^3{}_4)^* = -b^4{}_3. \end{aligned} \tag{153.b}$$

Nótese que la solución para el espacio de Minkowski ($h = 1$) intercambia los elementos matriciales del bloque superior con los del bloque inferior. En cambio, la solución para el Euclideano ($h = 0$) es cerrada en cada bloque y corresponde a la representación matricial del grupo $SU(2)$.

El siguiente paso es analizar la estructura generada por el operador $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Sea el álgebra cociente $\mathcal{B}_\Psi = \frac{\mathcal{B}}{I_\Psi}$, donde $\mathcal{B}$ es el álgebra generada por los elementos matriciales $b^i{}_j$, heredando esta estructura del álgebra de las coordenadas, en tanto que I_Ψ es el ideal de $\mathcal{B}$ generado por las relaciones (152). En este caso, Ψ resulta un operador cuyos coeficientes son el producto de aquellos correspondientes al operador de trenza $\hat{R}$.

A continuación veremos que $\mathcal{B}_\Psi$ posee una estructura de *grupo trenzado de Majid*, tal como se definió en *II.3*. Efectivamente, la estructura de coálgebra viene dada por un coproducto y una counidad definidos por:

$$\phi(b^i{}_j) = b^i{}_k \otimes b^k{}_j, \quad \epsilon(b^i{}_j) = \delta^i_j. \tag{154}$$

Los mapeos (154) son compatibles con la multiplicación proveniente de la estructura de álgebra trenzada. Puede verificarse la compatibilidad de las relaciones (152) con el coproducto y la counidad, recordando que:

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b),$$

$$\epsilon(ab) = \epsilon(a)\epsilon(b),$$

con

$$(a \otimes c)(b \otimes d) = a\Psi(c \otimes b)d. \tag{155}$$

También se verifica que $\Psi^2 = I$, lo que indica la existencia de la inversa de Ψ, y que se satisfacen las relaciones de funtorialidad (13.c-e). Las relaciones (13.b) se imponen como definición. Por último, tenemos una antípoda dada por $B(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

Antes de pasar al análisis del determinante de la matriz $(b^\alpha{}_\beta)$, debemos primero estudiar en detalle el espacio de espinores generado por las componentes espinoriales y sus relaciones de conmutación.

VII.2. El Espacio de Espinores.

El siguiente paso es encontrar las relaciones que determinan el álgebra de semiespinores. Con este propósito, obtendremos los vectores del espacio (pseudo)-Euclideano de cuatro dimensiones con componentes expresadas en función de las componentes espinoriales. Para ello nos basaremos en la idea original de Cartan, obteniendo vectores isotrópicos, aquellos tales que $(\mathrm{w}, \mathrm{w}) = 0$, a través de la siguiente ecuación:

$$0 = H(\mathrm{w})\xi = \begin{pmatrix} w'_1\psi^1 + w'^2\psi^2 \\ w^1\psi^2 - \mu w^2\psi^1 \\ w^1\varphi^1 - \mu^{-1}w'^2\varphi^2 \\ w^2\varphi^1 + w'^1\varphi^2 \end{pmatrix} \qquad (156)$$

Teniendo en cuenta el límite clásico $\mu \to 1$ para fijar coeficientes, encontramos que una solución de (156) es:

$$w^1 = \psi^1\varphi^2, \quad w'^1 = -\psi^2\varphi^1,$$
$$w^2 = \psi^2\varphi^2, \quad w'^2 = \mu\psi^1\varphi^1. \qquad (157)$$

Generalizando las expresiones (157) para vectores de forma fundamental arbitraria, obtenemos:

$$w^1 = \frac{1}{2}(\psi^1\bar{\varphi}^2 + \bar{\psi}^1\varphi^2),$$
$$w^2 = \frac{1}{2}(\psi^2\bar{\varphi}^2 + \bar{\psi}^2\varphi^2),$$
$$w'^1 = -\frac{1}{2}(\psi^2\bar{\varphi}^1 + \bar{\psi}^2\varphi^1),$$
$$w'^2 = \frac{\mu}{2}(\psi^1\bar{\varphi}^1 + \bar{\psi}^1\varphi^1), \qquad (158)$$

donde las componentes $(\bar{\varphi}^i, \bar{\psi}^j)$ corresponden a un espinor $\bar{\xi}$.

Las expresiones (158) son compatibles con las relaciones de conmutación para las coordenadas (136), si tomamos como relaciones para las componentes espinoriales el caso particular siguiente:

$$
\begin{aligned}
&[\varphi^i, \varphi^j] = 0, \quad [\psi^i, \psi^j] = 0, \\
&\psi^1\varphi^1 = a^{-1}\varphi^1\psi^1, \\
&\psi^1\varphi^2 = \mu a^{-1}\varphi^2\psi^1, \\
&\psi^2\varphi^1 = \mu a^{-1}\varphi^1\psi^2, \\
&\psi^2\varphi^2 = a^{-1}\varphi^2\psi^2,
\end{aligned}
\tag{159}
$$

con $a \in \mathbb{R}$. Estas relaciones son compatibles con la coacción definida en (149) si $a = \mu^{\frac{1}{2}}$. Para obtener este resultado, se aplica la propiedad $\delta(\xi^\alpha\xi^\beta) = \delta(\xi^\alpha)\delta(\xi^\beta)$ y (155). El operador de trenza entre las componentes espinoriales y los elementos matriciales $b^\alpha{}_\beta$ se obtiene escribiendo estos últimos en términos de las coordenadas del espacio, usando (151), y luego en términos de las componentes espinoriales, usando (158).

Hasta ahora hemos obtenido un grupo trenzado relacionado con una deformación del grupo $GL(4,\mathbb{C})$. Efectivamente, los generadores $(b^\alpha{}_\beta)$ determinan una matriz 4×4, una solución para la operación * "no real" y una matriz inversa dada por $B(\mathbf{y},\mathbf{x})$. A continuación veremos que este pseudogrupo es más pequeño y que corresponde a un "subgrupo" del grupo trenzado $SL(4,\mathbb{C})$; exactamente al $\begin{pmatrix} SL(2,\mathbb{C}) & 0 \\ 0 & SL(2,\mathbb{C}) \end{pmatrix}$ deformado.

VII.3. El Determinante del Pseudogrupo.

Debido a que la matriz $(b^\alpha{}_\beta)$ es diagonal en bloque, el mapeo coacción δ puede descomponerse en:

$$
\delta_1 : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{B}_{\Psi_1} \otimes \mathcal{S}_1,
$$

y

$$\delta_2 : \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{B}_{\Psi_2} \otimes \mathcal{S}_2,$$

con

$$\delta_1(\varphi^i) = \sum_{j=1,2} b^i{}_j \otimes \varphi^j, \quad i = 1, 2;$$

$$\delta_2(\psi^i) = \sum_{j=1,2} b^{i+2}{}_{j+2} \otimes \psi^j, \quad i = 1, 2; \tag{160}$$

donde $\mathcal{S}_1$ es el álgebra generada por las componentes espinoriales $\{\varphi_i\}_{i=1,2}$, $\mathcal{S}_2$ es el álgebra generada por $\{\psi_i\}_{i=1,2}$ y $\mathcal{B}_{\Psi_1} = \frac{\mathcal{B}_1}{I_{\Psi_1}}$, con $\mathcal{B}_1$ el álgebra generada por los elementos matriciales $(b^i{}_j)_{j=1,2}^{i=1,2}$ e I_{Ψ_1} el ideal generado por las relaciones de conmutación correspondientes al bloque superior $(b^i{}_j)_{j=1,2}^{i=1,2}$. Análogamente, $\mathcal{B}_{\Psi_2} = \frac{\mathcal{B}_2}{I_{\Psi_2}}$ es el álgebra cociente relacionada con el bloque inferior $(b^{i+2}{}_{j+2})_{j=1,2}^{i=1,2}$ y sus relaciones de conmutación. Nótese que, en este caso, $\Psi_1 = \Psi_2 = T$, la transposición usual.

Luego, es posible extender las coacciones δ_i a las álgebras exteriores trenzadas de $\mathcal{S}_i$, mediante

$$\delta_i^\wedge : \mathcal{S}_i^\wedge \rightarrow \mathcal{B}_{\Psi_i} \otimes \mathcal{S}_i^\wedge,$$

teniendo, en particular,

$$\delta_i^\wedge(\zeta_i) = \Delta_i \otimes \zeta_i, \tag{161}$$

donde ζ_i es el elemento de volúmen en $\mathcal{S}_i^{\wedge 2}$ y $\Delta_i \in \mathcal{B}_{\Psi_i}$, es un elemento que llamaremos *el determinante trenzado*.

Mediante cálculo directo, encontramos que:

$$\Delta_1 = b^1{}_1 b^2{}_2 - b^1{}_2 b^2{}_1,$$

$$\Delta_2 = b^3{}_3 b^4{}_4 - b^3{}_4 b^4{}_3. \tag{162}$$

Además, como $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son vectores unitarios; es decir, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = x'^1 x^1 + x'^2 x^2 = 1$, $\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = y'^1 y^1 + y'^2 y^2 = 1$, resulta que cada bloque matricial tiene determinante uno:

$$\Delta_1 = \Delta_2 = 1. \tag{163}$$

Consecuentemente, de (161) y (163), obtenemos que la extensión del mapeo coacción δ sobre el álgebra exterior trenzada total, $\mathcal{S}^\wedge$, resulta:

$$\begin{gathered} \delta^\wedge(\zeta_1 \wedge \zeta_2) = \delta_1^\wedge(\zeta_1) \wedge \delta_2^\wedge(\zeta_2) \\ = (\Delta_1 \otimes \zeta_1) \wedge (\Delta_2 \otimes \zeta_2) = 1 \otimes (\zeta_1 \wedge \zeta_2), \end{gathered}$$

indicando que

$$\Delta((b^\alpha_\beta)) = 1. \tag{164}$$

Concluimos que el pseudogrupo encontrado corresponde a una deformación del grupo $SL(4, \mathbb{C})$. Nótese que si bien cada bloque tiene características clásicas, sus elementos matriciales conmutan y tiene determinante clásico, no pude ser considerado "clásico". Esto se debe a que sus entradas matriciales pertenecen a un álgebra de Hopf no conmutativa tal que las entradas pertenecientes a un bloque no conmutan con las correspondientes al otro. Sin embargo, por simplicidad, notaremos por $\begin{pmatrix} SL(2,\mathbb{C}) & 0 \\ 0 & SL(2,\mathbb{C}) \end{pmatrix}$ a la representación matricial de $\mathcal{B}_\Psi$.

Otra propiedad interesante relacionada con el grupo trenzado, $\mathcal{B}_\Psi$, es que deja invariante la forma fundamental, resultando una *isometría* tal como en el caso clásico. Por lo tanto, podrá estar relacionado con el grupo ortogonal. Para ver este resultado, debemos primero expresar $\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle$ en términos de las componentes espinoriales. Usando las relaciones (158), se obtiene

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = \frac{1}{4}\mu^{\frac{1}{2}}(\psi^1\bar{\psi}^2 - \bar{\psi}^1\psi^2)(\varphi^2\bar{\varphi}^1 - \bar{\varphi}^2\varphi^1). \tag{165}$$

Luego, se aplica la coacción (149) con la propiedad $\delta(\xi^\alpha\xi^\beta) = \delta(\xi^\alpha)\delta(\xi^\beta)$ y (155); finalmente se usa la propiedad del determimante (163).

VII.4. Producto Interno en el Espacio Espinorial.

Para la construcción de Lagrangianos invariantes, necesitamos introducir un producto escalar bilineal sobre el espacio de espinores $\mathcal{S}$, tal que sea invariante bajo el mapeo coacción (149). Para ello, definiremos una operación T lineal, involutiva y antimultiplicativa, que llamaremos *transpuesta*, tal que mapea linealmente espinores en $\mathcal{S}$ a su espacio dual $\mathcal{S}'$:

$$\xi \in \mathcal{S} \rightarrow \xi^T \in \mathcal{S}'.$$

Esta operación se define por su acción sobre los generadores del álgebra de Clifford como:

$$1^T = 1', H_i^T = H_i', (H_i')^T = H_i, \tag{166}$$

y sobre el producto como:

$$(H_\alpha H_\beta)^T = \rho_{\alpha\beta}{}^{\beta\alpha} H_\beta^T H_\alpha^T, \quad \alpha,\ \beta = 1, 1', 2, 2'; \tag{167}$$

donde ρ es el operador de trenza del álgebra de Clifford (130). Las definiciones (166) y (167) son consistentes con esta álgebra.

Nótese que de las relaciones (144), se deduce que los elementos

$$\{1^T = 1', (H_1 H_2.1)^T = \mu^{-1} 1'.H_2' H_1', (H_1.1)^T = 1' H_1', (H_2.1)^T = 1' H_2'\},$$

forman una base de $\mathcal{S}'$, recíproca a la base $\{1, H_1 H_2.1, H_1.1, H_2.1\}$ de $\mathcal{S}$. Es decir:

$$1^T(1) = 1, \quad (H_i.1)^T (H_j.1) = \delta_{ij}, \quad (H_1 H_2.1)^T (H_1 H_2.1) = \mu^{-1}.$$

Luego, si $\xi \in \mathcal{S}$ con:

$$\xi = \xi^0 1 + \xi^{12} H_1 H_2.1 + \xi^1 H_1.1 + \xi^2 H_2.1; \tag{168}$$

entonces $\xi^T \in \mathcal{S}'$ con:

$$\xi^T = \xi^0 1' + \xi^{12} \mu^{-1} 1' H_2' H_1' + \xi^1 1' H_1' + \xi^2 1' H_2'. \tag{169}$$

Estas relaciones nos permiten definir un producto interno para espinores homogéneos de grado p, como:

$$
\begin{aligned}
[(\xi^{(p)})^T, \eta^{(p)}] &:= \sum_{k_1<\ldots<k_p} \xi^{k_1\ldots k_p}\eta^{k_1\ldots k_p}\rho_{k_1\ldots k_p}^{\;\;k_p\ldots k_1}[1'\cdot H'_{k_p}\ldots H'_{k_1}, H_{k_1}\ldots H_{k_p}\cdot 1] \\
&= \sum_{k_1<\ldots<k_p} \xi^{k_1\ldots k_p}\eta^{k_1\ldots k_p}\rho_{k_1\ldots k_p}^{\;\;k_p\ldots k_1} 1'\cdot H'_{k_p}\ldots H'_{k_1} H_{k_1}\ldots H_{k_p}\cdot 1 \\
&= \sum_{k_1<\ldots<k_p} \xi^{k_1\ldots k_p}\eta^{k_1\ldots k_p}\rho_{k_1\ldots k_p}^{\;\;k_p\ldots k_1}.
\end{aligned}
\tag{170}
$$

Requiriendo que el producto interno de dos espinores respete el grado, tendremos:

$$[\xi^T, \eta] = \sum_{p=0}^{2}\sum_{k_1<\ldots<k_p} \xi^{k_1\ldots k_p}\eta^{k_1\ldots k_p}\rho_{k_1\ldots k_p}^{\;\;k_p\ldots k_1}. \tag{171}$$

Luego, podemos definir un mapeo bilineal como:

$$(\xi, \eta) = [\xi^T, C.\eta], \tag{172}$$

donde C es *el operador métrico* dado por una deformación del operador métrico clásico de la teoría de Cartan, en la forma:

$$C = g(\mu)(-H_1H_2 + \mu^{-\frac{1}{2}}H_1H_2' - H_1'H_2' - \mu^{-\frac{1}{2}}H_2H_1'), \tag{173}$$

con $g(\mu)$ una función polinomial en μ, tal que $g(\mu) \overset{\mu\to 1}{\to} 1$.

En esta forma, tendremos

$$(\xi, \eta) = g(\mu)\{\mu^{-1}(\varphi^1\tilde{\varphi}^2 - \varphi^2\tilde{\varphi}^1) + \mu^{-\frac{1}{2}}(\psi^1\tilde{\psi}^2 - \psi^2\tilde{\psi}^1)\}, \tag{174}$$

donde los términos $\tilde{\varphi}^i$ y $\tilde{\psi}^i$ son las componentes del espinor η. El mapeo (174) satisface:

1) La condición de centralidad, resultando una forma bilineal,

2) El límite clásico cuando $\mu \to 1$,

3) La invariancia bajo la coacción (149).

Para probar el punto 3, veremos primero que

$$(H(\mathrm{x})\xi, H(\mathrm{x})\eta) = (\xi, \eta). \tag{175.a}$$

Por simplicidad, resolveremos este cálculo en forma matricial. Sean las matrices:

$$\xi^T = (\varphi^1,\, \mu^{-1}\varphi^2,\, \psi^1,\, \psi^2\,),$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \mu^{-1} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & -\mu^{-\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Psi(H(\mathrm{x}))^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu^{-\frac{1}{2}}x^1 & \mu^{\frac{1}{2}}x^2 \\ 0 & 0 & -\mu^{\frac{1}{2}}x'^2 & \mu^{\frac{1}{2}}x'^1 \\ \mu^{\frac{1}{2}}x'^1 & -\mu^{-\frac{1}{2}}x^2 & 0 & 0 \\ \mu^{-\frac{1}{2}}x'^2 & \mu^{-\frac{1}{2}}x^1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y

$$H(\mathrm{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x'^1 & x'^2 \\ 0 & 0 & -\mu x^2 & x^1 \\ x^1 & -\mu^{-1}x'^2 & 0 & 0 \\ x^2 & x'^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puede verificarse que:

$$\Psi(H(\mathrm{x}))^T C H(\mathrm{x}) = C, \tag{175.b}$$

y por lo tanto

$$
\begin{aligned}
(H(\mathrm{x})\xi, H(\mathrm{x})\eta) &= [(H(\mathrm{x})\xi)^T, CH(\mathrm{x})\eta] \\
&= \xi^T\Psi(H(\mathrm{x}))^T CH(\mathrm{x})\eta \\
&= \xi^T C\eta = (\xi,\eta).
\end{aligned}
$$

Aquí, el símbolo Ψ representa el operador de trenza entre las coordenadas y las componentes espinoriales.

Luego,

$$
\begin{gathered}
(\delta(\xi),\delta(\eta)) = (H(x)H(y)\xi, H(x)H(y)\eta) \\
= [(H(x)H(y)\xi)^T, CH(x)H(y)\eta] = [(H(x)\xi')^T, CH(x)\eta'] \\
= (\xi',\eta') = (\xi,\eta),
\end{gathered}
\tag{176}
$$

con $\xi' = H(y)\xi$ y $\eta' = H(y)\eta$, donde hemos aplicado la igualdad (175.a) dos veces.

Nótese que si definimos la matriz B^T como:

$$
B^T = \begin{pmatrix} b^1{}_1 & \mu^{-1}b^2{}_1 & 0 & 0 \\ \mu b^1{}_2 & b^2{}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^3{}_3 & b^4{}_3 \\ 0 & 0 & b^3{}_4 & b^4{}_4 \end{pmatrix},
$$

entonces podemos escribir en forma matricial

$$
(B(\mathrm{x},\mathrm{y})\xi)^T = \xi^T B^T.
$$

Además, se satisface la identidad

$$
B^T CB = C, \tag{177}
$$

resultando inmediatamente que

$$
\begin{aligned}
(\delta(\xi),\delta(\eta)) &= \xi^T B^T CB\eta \\
&= \xi^T C\eta \\
&= (\xi,\eta).
\end{aligned}
$$

En estos cálculos se ha tenido en cuenta que la operación T es antimultiplicativa y que, en todos los casos, debe aplicarse el operador de trenza respectivo. También se define $(\xi^\alpha)^T = \xi^\alpha$, y de esto resulta $(x^\alpha)^T = x^\alpha$ y $(b^\alpha{}_\beta)^T = b^\alpha{}_\beta$.

Obsérvese que las relaciones (177) y (175.b) indican que los operadores B y H dejan invariante la métrica del espacio espinorial, con una operación transpuesta y una métrica que tienen el límite clásico para $\mu = 1$. Concluimos entonces que ambas transformaciones deberían pertener a un grupo $\mathcal{P}in(4)$ deformado y, en particular, B pertenecería a un pseudogrupo $\mathcal{S}pin(4)$. Una deformación válida de los grupos $\mathcal{P}in(4)$ y $\mathcal{S}pin(4)$ debe generalizar la definición clásica y tener su límite para $\mu = 1$. Recordando definiciones en el caso no deformado:

$$\mathcal{P}in(4) = \{s \in Cl(W), dim(W) = 4 |\ s = \mathrm{w}_1 ... \mathrm{w}_k,\ \ \mathrm{w}_i = \mathrm{w}_i^* \in W,\ \ |\mathrm{w}_i| = 1\},$$

$$\mathcal{S}pin(4) = \{s \in \mathcal{P}in(4),\ \ \text{con } k \text{ par}\},$$

teniendo ambos conjuntos estructura de grupo.

Debido al isomorfismo del álgebra de Clifford con $H(W)$, estas definiciones pueden reescribirse en términos de productos $s = H(\mathrm{w}_1)...H(\mathrm{w}_k)$.

En nuestra construcción para el caso deformado, el álgebra de Clifford considerada será la cuántica, $Cl(W, \tau)$.

Definición:

Llamaremos *el grupo de spin trenzado de grado 4* al conjunto

$\{s \in Cl(W,\tau),\ dim(W) = 4 |\ s = H(\mathbf{w}_1)...H(\mathbf{w}_{2k}),\quad \mathbf{w}_i = \mathbf{w}_i^* \in W,\quad |\mathbf{w}_i| = 1\}$, y que notaremos $\mathcal{S}pin(4)$.

Nótese que todo $s \in \mathcal{S}pin(4)$ se construye como productos de $B(\mathbf{w}_i; \mathbf{w}_{i+1}) = H(\mathbf{w}_i)H(\mathbf{w}_{i+1})$, con i impar.

Proposición:

Los elementos de $\mathcal{S}pin(4)$ pertenecen al grupo trenzado $\mathcal{B}_\psi$, con representación matricial $\begin{pmatrix} \prod_i B_1^i & 0 \\ 0 & \prod_i B_2^i \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})\underline{\times}SL(2,\mathbb{C})$, con las relaciones de conmutación (152) y espacio de representación $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$.

Notación: El símbolo $\underline{\times}$ significa que, entre las entradas matriciales del primer y segundo elemento del producto cartesiano, existen relaciones de conmutación no triviales.

Demostración:

Consideremos un elemento $s = H(\mathbf{w}_1)...H(\mathbf{w}_{2k})$. Como el álgebra de Clifford es asociativa, podemos agrupar de a pares el producto anterior resultando $s = (H(\mathbf{w}_1)H(\mathbf{w}_2))...(H(\mathbf{w}_{2k-1})H(\mathbf{w}_{2k}))$. Pero como ya hemos demostrado en *VII.1*, cada par, $B(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_{i+1})$, pertenece a un grupo trenzado con representación matricial $\begin{pmatrix} B_1^i & 0 \\ 0 & B_2^i \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})\underline{\times}SL(2,\mathbb{C})$. Luego, s tiene representación matricial

$C = \begin{pmatrix} \prod_i B_1^i & 0 \\ 0 & \prod_i B_2^i \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})\underline{\times}SL(2,\mathbb{C})$. Esto se debe a que cada bloque tiene características clásicas y, por lo tanto, $det(B_j^1 B_j^3 ... B_j^{2k-1}) = \prod_i det(B_j^i) = 1$, para $j = 1, 2$. Además, puede demostrarse por inducción que las relaciones de conmutación para los elementos matriciales, C_m^l, serán las dadas en (152). Por otra parte, los elementos C_m^l son polinomios en los generadores $b^\alpha{}_\beta$; por lo tanto, pertenecen al álgebra de Hopf trenzada $B_{\mathbf{V}}$.

Nótese que el grupo trenzado $\underline{Spin}(4)$ es un *grupo*. Efectivamente, satisface la relación de clausura y $\forall s \in \underline{Spin}(4)$, $s^{-1} = (H(\mathbf{w}_{2k})H(\mathbf{w}_{2k-1}))...(H(\mathbf{w}_2)H(\mathbf{w}_1))$.

En el caso no deformado ($\mu = 1$), $S^3 \times S^3 \simeq Spin(4)$; por lo tanto, todo elemento $s \in Spin(4)$ se asocia con una transformación $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, con $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = 1$. Sin embargo, en el caso $\mu \neq 1$, se dificulta establecer este isomorfismo. Carecemos del concepto de cuaterniones, para definir el homomorfismo 2 a 1 entre $S^3 \times S^3$ y $SO(4)$, y del concepto de doble cubierta única $Spin(4)$ de $SO(4)$, para concluir que $S^3 \times S^3$ y $Spin(4)$ son isomorfos.

De ahora en adelante trabajaremos con la transformación $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, pudiendo construir a partir de ella todo el grupo $\underline{Spin}(4)$.

La deformación para el grupo $\mathcal{P}in(4)$ no será analizada en este trabajo.

CAPÍTULO VIII

LA RELACIÓN ENTRE LOS PSEUDOGRUPOS SPIN Y ORTOGONAL

VIII.1. *Construcción del Grupo Trenzado.*

En esta sección nos concentraremos en obtener el grupo ortogonal especial trenzado a partir del pseudogrupo B.

Aplicando las coacciones respectivas sobre las coordenadas del espacio y sobre las componentes espinoriales, a ambos lados de las relaciones (158), por comparación obtenemos:

$$
\begin{gathered}
t^1{}_1 = b^3{}_3 b^2{}_2, \quad t^2{}_1 = b^4{}_3 b^2{}_2, \\
t^1{}_2 = b^3{}_4 b^2{}_2, \quad t^2{}_2 = b^4{}_4 b^2{}_2, \\
t^1{}_{1'} = -\mu^{-1} b^3{}_4 b^2{}_1, \quad t^2{}_{1'} = -\mu^{-1} b^4{}_4 b^2{}_1, \\
t^1{}_{2'} = b^3{}_3 b^2{}_1, \quad t^2{}_{2'} = b^4{}_3 b^2{}_1, \\
t^{1'}{}_1 = -\mu^{-1} b^4{}_3 b^1{}_2, \quad t^{2'}{}_1 = b^3{}_3 b^1{}_2, \\
t^{1'}{}_2 = -\mu b^4{}_4 b^1{}_2, \quad t^{2'}{}_2 = \mu^2 b^3{}_4 b^1{}_2, \\
t^{1'}{}_{1'} = b^4{}_4 b^1{}_1, \quad t^{2'}{}_{1'} = -\mu b^3{}_4 b^1{}_1, \\
t^{1'}{}_{2'} = -\mu^{-1} b^4{}_3 b^1{}_1, \quad t^{2'}{}_{2'} = b^3{}_3 b^1{}_1.
\end{gathered}
\tag{178}
$$

La matriz $T = (t^{\alpha}{}_{\beta})$ se relaciona con el pseudogrupo obtenido en el capítulo anterior, a través del producto $B_1 \underline{\otimes} B_2 \in SL(2, \mathbb{C}) \underline{\otimes} SL(2, \mathbb{C})$, donde B_1 y B_2 representan los bloques superior e inferior de la matriz total B. Nótese que B_1 y B_2 son respectivos elementos de las álgebras de Hopf trenzadas $\mathcal{B}_{\Psi_1}$ y $\mathcal{B}_{\Psi_2}$, con representación matricial dada por $SL(2, \mathbb{C})$. Tomando en cuenta la trenza Ψ definida por las relaciones (152), estas álgebras de Hopf pertenecen a una categoría monoidal trenzada. Siguiendo la demostración dada por Majid en [28], el producto $\mathcal{B}_{\Psi_1} \underline{\otimes} \mathcal{B}_{\Psi_2}$, es un álgebra de Hopf trenzada que también está en la categoría. Se construye sobre $\mathcal{B}_{\Psi_1} \otimes \mathcal{B}_{\Psi_2}$, con producto $(\cdot_{\mathcal{B}_{\Psi_1}} \otimes \cdot_{\mathcal{B}_{\Psi_2}}) \Psi_{\mathcal{B}_{\Psi_2}, \mathcal{B}_{\Psi_1}}$. En nuestro caso, podemos agregar que hereda la estructura de biálgebra de $\mathcal{B}_{\Psi}$.

Concluyendo, $\mathcal{B}_{\Psi_1} \underline{\otimes} \mathcal{B}_{\Psi_2}$ es un grupo trenzado con representación matricial $B_1 \underline{\otimes} B_2 \in SL(2, \mathbb{C}) \underline{\otimes} SL(2, \mathbb{C})$ y espacio de representación $W = \mathcal{S}_1 \underline{\otimes} \mathcal{S}_2$, que coactúa sobre las coordenadas (x^{α}) a través de:

$$\delta(x^{\alpha}) = t^{\alpha}{}_{\beta} \otimes x^{\beta}. \tag{179}$$

El próximo paso es analizar la estructura * heredada de aquella definida sobre los generadores del grupo trenzado *Spin*. Para el caso del espacio de Minkowski, de las relaciones (153.a) en base isotrópica, obtenemos:

$$(t^1{}_1)^* = t^{1'}{}_{1'}, \quad (t^1{}_2)^* = \mu^{-1} t^{1'}{}_{2},$$

$$(t^1{}_{1'})^* = t^{1'}{}_{1}, \quad (t^1{}_{2'})^* = \mu t^{1'}{}_{2'},$$

$$(t^2{}_1)^* = \mu t^2{}_{1'}, \quad (t^2{}_2)^* = t^2{}_2,$$

$$(t^2{}_{2'})^* = t^2{}_{2'}, \quad (t^{2'}_1)^* = \mu^{-1} t^{2'}_{1'},$$

$$(t^{2'}_2)^* = t^{2'}_2, \quad (t^{2'}_{2'})^* = t^{2'}_{2'}. \tag{180}$$

Podemos verificar que esta solución es compatible con:

1) la coacción (179), tal que se satisface

$$*m\delta(x^\alpha) = mT(*\otimes *)\delta(x^\alpha),$$

2) el coproducto ϕ, tal que

$$\phi((b^\alpha{}_\beta)^*) = (*\otimes *)T\Psi\phi(b^\alpha{}_\beta),$$

donde T es el operador de trenza trivial o transposición.

Finalmente, se obtendrán fórmulas explícitas para el determinante y la antípoda de la matriz T.

VIII.2. Análisis del Determinante y la Antípoda.

Sea $\mathcal{W}$ el espacio vectorial generado por las coordenadas w^α. Recordemos que $\hat{R}: \mathcal{W}^{\otimes 2} \to \mathcal{W}^{\otimes 2}$ es el operador de trenza que define las relaciones de conmutación en el álgebra de coordenadas. Sea $\delta: \mathcal{W} \to \mathcal{T} \otimes \mathcal{W}$ la restricción del mapeo coacción sobre el espacio vectorial de los generadores, con $\mathcal{T}$ el álgebra no conmutativa generada por los elementos matriciales $t^\alpha{}_\beta$. Sea

$$\delta^\wedge : \mathcal{W}^\wedge \to \mathcal{T} \otimes \mathcal{W}^\wedge,$$

la extensión multiplicativa natural del mapeo coacción δ. En particular, tenemos:

$$\delta^{\wedge}(\omega) = \Delta \otimes \omega, \tag{181}$$

con ω el elemento de volúmen en $\mathcal{W}^{\wedge 4}$ y $\Delta \in \mathcal{T}$, un elemento que llamaremos *el determinante trenzado.* De las propiedades del comódulo, se satisface:

$$\phi(\Delta) = \Delta \otimes \Delta, \qquad \epsilon(\Delta) = 1.$$

Asumiendo que $\mathcal{W}^{\wedge}$ es una inmersión en $\mathcal{W}^{\otimes}$, a través del operador de trenza $\hat{R}$, podemos escribir

$$\omega = \sum_{\alpha} w^{\alpha} \otimes s^{\alpha}, \tag{182}$$

donde $\{s^{\alpha}\} \in \mathcal{W}^{\wedge 3}$ es una base para este espacio.

Como $\mathcal{W}^{\wedge 3} \simeq \mathcal{W}$ como espacios vectoriales (sus dimensiones son iguales) luego, podemos escribir:

$$\delta^{\wedge}(s^{\alpha}) = \sum_{\beta} \tilde{t}^{\alpha}{}_{\beta} \otimes s^{\beta}, \tag{183}$$

donde $(\tilde{t}^{\alpha}{}_{\beta}) \in M_4(\tilde{\mathcal{T}})$, con $\tilde{\mathcal{T}}$ el álgebra obtenida agregando a $\mathcal{T}$ la inversa de Δ. De las relaciones del coproducto y la counidad para el determinante, puede verse que ϕ y ϵ admiten extensiones naturales a $\tilde{\mathcal{T}}$ dadas por:

$$\phi(\tilde{t}^{\alpha}{}_{\beta}) = \sum_{\gamma} \tilde{t}^{\alpha}{}_{\gamma} \otimes \tilde{t}^{\gamma}{}_{\beta}, \qquad \epsilon(\tilde{t}^{\alpha}{}_{\beta}) = \delta^{\alpha}{}_{\beta}.$$

Consideremos la matriz escalar, S, dada por

$$w^\alpha \wedge s^\beta = S^{\alpha\beta}\ \omega. \tag{184}$$

La matriz S es diagonal e invertible y resulta $(S^{-1})^{\alpha\beta} = (S^{\alpha\beta})^{-1}$. Explícitamente, por cálculo directo

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{185.a}$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{185.b}$$

Aplicando las relaciones (181) a (184), obtenemos

$$\Delta I = \Psi(\tilde{T})^T T,$$

$$\Delta I = TS\Psi(\tilde{T})^T S^{-1}, \tag{186}$$

donde Ψ simboliza el operador de trenza entre los elementos matriciales de T y las coordenadas w^α y T^T es la matriz transpuesta usual.

De las relaciones (186), obtenemos que la antípoda $S(T) \in M_4(\tilde{T})$ es:

$$S(T) = \Delta^{-1}\Psi(\tilde{T})^T = S\Psi(\tilde{T})^T S^{-1}\Delta^{-1}. \tag{187}$$

Hasta ahora, no se ha usado la construcción de la matriz T como función de B. Si de la relación (181) se calcula explícitamente la fórmula del determinante, obtenemos:

$$\Delta \otimes \omega = \delta^{\wedge}(\omega) = \delta^{\wedge}(A_4(w^1 \otimes w^2 \otimes w'^1 \otimes w'^2))$$

$$= \sum_{\pi \in S_4} (-1)^{l(\pi)} \sigma_\pi(\delta(w^1) \otimes \delta(w^2) \otimes \delta(w'^1) \otimes \delta(w'^2)),$$

donde A_4 es el antisimetrizador en $\mathcal{W}^{\otimes 4}$. Por comparación, obtenemos:

$$\begin{aligned}\Delta = {} & t^1_1 t^2_2 t^{1'}_{1'} t^{2'}_{2'} - t^1_2 t^2_1 t^{1'}_{1'} t^{2'}_{2'} - t^1_{2'} t^2_2 t^{1'}_{1'} t^{2'}_1 + t^1_2 t^2_{1'} t^{1'}_1 t^{2'}_{2'} \\ & - t^1_2 t^2_{1'} t^{1'}_{2'} t^{2'}_1 + t^1_{1'} t^2_2 t^{1'}_{2'} t^{2'}_1 - \mu^2 t^1_{1'} t^2_{2'} t^{1'}_2 t^{2'}_1 + \mu^{-2} t^1_{2'} t^2_{1'} t^{1'}_2 t^{2'}_1 \\ & + t^1_2 t^2_1 t^{1'}_{2'} t^{1'}_{2'} t^{2'}_{1'} + \mu^{-2} t^1_{2'} t^2_2 t^{1'}_1 t^{2'}{}_{1'} + \mu^4 t^1_{1'} t^2_{2'} t^{1'}_1 t^{2'}_2 - t^1_{2'} t^2_{1'} t^{1'}_1 t^{2'}_2 \\ & + t^1_{2'} t^2_1 t^{1'}_{1'} t^{2'}_2 - \mu^{-2} t^1_{2'} t^2_1 t^{1'}_2 t^{2'}_{1'} - t^1_1 t^2_{1'} t^{1'}_2 t^{2'}_{2'} + t^1_1 t^2_{1'} t^{1'}_{2'} t^{2'}_2 \\ & - t^1_1 t^2_2 t^{1'}_{2'} t^{2'}_{1'} + \mu^{-2} t^1_2 t^2_{2'} t^{1'}_{1'} t^{2'}_1 - t^1_2 t^2_{2'} t^{1'}_1 t^{2'}_{1'} - t^1_{1'} t^2_2 t^{1'}_1 t^{2'}_{2'} \\ & - \mu^{-2} t^1_1 t^2_{2'} t^{1'}_{1'} t^{2'}_2 + t^1_1 t^2_{2'} t^{1'}_2 t^{2'}_{1'} + \mu^{-2} t^1_{1'} t^2_1 t^{1'}_2 t^{2'}_{2'} - \mu^{-2} t^1_{1'} t^2_1 t^{1'}_{2'} t^{2'}_2 . \end{aligned} \tag{188}$$

Escribiendo la relación (188) en términos de los generadores $b^\alpha{}_\beta$, obtenemos:

$$\Delta = (\Delta_1)^2 = 1. \tag{189}$$

Este resultado indica que el pseudogrupo T preserva el elemento de volúmen ($\delta^{\wedge}(w) = 1 \otimes w$) y, por lo tanto, podrá ser identificado con una deformación del grupo clásico $SL(4, \mathbb{C})$. Nótese también que la relación (189) en (187) indica que la inversa de la matriz T es su transpuesta con cierta deformación dada por la trenza Ψ, lo que permitiría relacionarla con una deformación del grupo ortogonal $SO(4-h, h, \mathbb{C})$. Para ello, nos queda por verificar si T deja invariante la métrica del espacio W. En el capítulo anterior se probó que la forma fundamental (165) es invariante ante la coacción (149) del pseudogrupo B. Como la matriz T se encuentra determinada por las relaciones de compatibilidad (178) entre las coacciones de ambos pseudogrupos, resulta que la forma fundamental $< \mathbf{w}, \mathbf{w} >$ es invariante ante la coacción (179) del pseudogrupo T. Luego, se tiene:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{w}^T M \mathbf{w} = <\mathbf{w}, \mathbf{w}> &= < \delta(\mathbf{w}), \delta(\mathbf{w}) > \\
&= < T \otimes \mathbf{w}, T \otimes \mathbf{w} > \\
&= \mathbf{w}^T \Psi T^T M T \mathbf{w},
\end{aligned}
$$

resultando:

$$M = \Psi T^T M T,$$

donde $M = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}$ es el tensor métrico correspondiente al espacio W y ΨT^T representa:

$$\left(T \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w'^1 \\ w'^2 \end{pmatrix} \right)^T = \sum_\beta m\Psi(t^\alpha{}_\beta \otimes w^\beta) = \sum_\beta w^\beta t^\alpha{}_\beta \Psi^\alpha{}_\beta{}^\beta := \mathbf{w}^T \Psi T^T.$$

Concluimos entonces que el tensor métrico es invariante ante la coacción de T; por lo tanto, la matriz T coactúa dejando invariante el producto escalar $< \mathbf{w}, \mathbf{y} >$.

Recopilando resultados, el álgebra $\mathcal{T}$ generada por los elementos matriciales $t^\alpha{}_\beta$ determinados por las relaciones (178), satisface los axiomas de un grupo trenzado con una antípoda que resulta ser su *transpuesta trenzada* y determinante igual a la unidad.

Definición:

El álgebra de Hopf trenzada o grupo trenzado, $\mathcal{T} = \mathcal{B}_{\Psi_1} \underline{\otimes} \mathcal{B}_{\Psi_2}$, se llamará *grupo ortogonal especial trenzado* y se notará $\underline{SO}(4-h, h, \mathbf{C})$.

El término $\mathbf{C}$ indica que estamos trabajando en base isotrópica y que, por lo tanto, las entradas matriciales no son en general "reales". Sin embargo, al conocer la solución de la operación * para toda signatura, en el conteo dimensional, que se hace en el límite clásico, deben considerarse las relaciones provenientes de ella.

Nótese que, en nuestro caso particular, $\mathcal{T}$ es un *grupo*. Efectivamente, sean $T, T' \in \mathcal{T}$. Luego, $T.T' = (B_1 B_1' \otimes B_2 B_2')\Psi_{B_2,B_1} = (C_1 \otimes C_2)\Psi_{B_2,B_1}$. Pero como ya se demostró en la proposición del capítulo anterior, los coeficientes C^i_m satisfacen las relaciones de conmutación (152), lo que implica que $T.T' \in \mathcal{T}$.

Hemos encontrado un morfismo que relaciona $\underline{SO}(4-h,h,\mathbb{C})$ con el pseudogrupo $\underline{Spin}$ y que, restringido a la representación matricial cuyas entradas son los generadores, es:

$$F : SL(2,\mathbb{C})\underline{\times}SL(2,\mathbb{C}) \to SL(2,\mathbb{C})\underline{\otimes}SL(2,\mathbb{C}),$$

$$F(B_1 \underline{\times} B_2) = B_1 \underline{\otimes} B_2.$$

Nótese que F es no inyectivo, pues B y $-B$ dan la misma matriz T. Sin embargo, resulta suryectivo por definición; es decir, $F(SL(2,\mathbb{C})\underline{\times}SL(2,\mathbb{C})) = \underline{SO}(4-h,h,\mathbb{C})$.

Si tomamos la solución (153.b), correspondiente a la operación * sobre los elementos matriciales de B para una métrica Euclideana, podemos verificar que $B_i^{-1} = (B_i^T)^*$, para $i = 1, 2$. En este caso, el morfismo F se reduce a:

$$F(SU(2)\underline{\times}SU(2)) = \underline{SO}(4).$$

Si tomamos la solución (153.a), correspondiente a la métrica del espacio de Minkowski, los bloques matriciales B_1 y B_2 no son independientes y el morfismo

F puede restringirse a un bloque matricial:

$$F(SL(2,\mathbb{C})) = \underline{SO}(3,1).$$

Nótese que en el límite clásico obtenemos las relaciones usuales, con los isomorfismos locales:

$$SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C}) \sim SO(4-h,h,\mathbb{C}),$$

$$SU(2) \times SU(2) \sim SO(4),$$

$$SL(2,\mathbb{C}) \sim SO(3,1).$$

Sin embargo, estas relaciones no pueden generalizarse fácilmente al caso deformado. Para ello, necesitamos un concepto similar al de grupo de cobertura simplemente conexo. El hecho de que los grupos deformados no son grupos, debido a que en general no satisfacen la relación de clausura, impide definir el concepto de transformaciones contínuas, que nos llevan de un punto a otro en el espacio a través de sucesivas transformaciones infinitesimales. Luego, el término "simplemente conexo", en teorías geométricas deformadas, pierde sentido. En nuestro caso particular, la relación de clausura se satisface. La dificultad aparece cuando se trata de definir una vecindad alrededor de la identidad y de definir sobre ésta un homeomorfismo al espacio real, obteniendo el concepto de función coordenada contínua y diferenciable. La estructura de variedad, en teorías geométricas deformadas, no queda definida aún.

COMENTARIOS

La finalidad de este trabajo ha sido la construcción de un modelo matemático que contribuya a solucionar problemas existentes en la física teórica, tales como las divergencias en las integrales de Feynman y el problema de la gravedad cuántica. Sin embargo, para llegar a resultados finales que indiquen el éxito de la geometría deformada, queda una larga trayectoria. Efectivamente, las teorías físicas existentes utilizan en su desarrollo herramientas matemáticas tales como teorías topológicas, teoría de medida, cálculo diferencial e integral, etc. Para proponer una teoría física basada en geometría no-conmutativa, primero se debe tener una teoría geométrica que indique como deformar tales herramientas. En este momento, nos encontramos en la etapa de construcción y este trabajo es una pequeña aportación a ella.

Las álgebras de Clifford tienen gran importancia tanto en el área matemática como física. Los generadores de estas álgebras representan los operadores de creación y aniquilación de partículas fermiónicas. La teoría geométrica de Cartan sobre ellas nos permite obtener los homomorfismos que relacionan el grupo de spin con el ortogonal especial y el grupo pin con el ortogonal. Localmente, resultan isomorfos como grupos de Lie. Estos conceptos son de gran utilidad en teorías de partículas elementales. Todas la teorías recientes en esta área están basadas en el trabajo de Wigner sobre clasificación de representaciones irreducibles del grupo $SL(2,\mathbb{C}) \oslash \mathbb{R}^{1,3}$: el producto semidirecto de $SL(2,\mathbb{C})$ y el grupo de traslaciones en el espacio de Minkowski. Los puntos más sobresalientes de este trabajo son:

1) Una partícula elemental es una representación del grupo G de la física, donde estas representaciones deben satisfacer ciertas restricciones físicas.

2) El grupo G de la física es el grupo $SL(2,\mathbb{C}) \oslash \mathbb{R}^{1,3}$; es decir, la doble cubierta del grupo de Poincaré.

Uno espera generalizar estos conceptos básicos a partir de una deformación de las álgebras de Clifford. En este trabajo de tesis, se ha obtenido una deformación de estas álgebras a partir de la teoría clásica de Cartan y la teoría de bimódulos bicovariantes de Woronowicz. Otros autores han obtenido otras deformaciones pero desde un punto de vista diferente. Cabe mencionar el trabajo [40], donde el álgebra se define como una extensión central del álgebra generada por las 1-formas, determinada a partir del álgebra de coordenadas del hiperplano de Manin. En la referencia [41], se define el álgebra de Clifford cuántica a partir de la deformación de las álgebras envolventes de Kac-Moody, dadas por Jimbo y Drinfel'd.

Por otra parte, asumiendo la validez de la propiedad fundamental de la transformación de espinores:

$$H(\mathrm{w})H(\mathrm{w}) = <\mathrm{w},\mathrm{w}> E, \tag{98}$$

se obtienen las relaciones de conmutación del álgebra de coordenadas del espacio-tiempo cuántico. Se construye un álgebra de q-derivaciones, dualizando el operador de trenza que define el álgebra de coordenadas. Se define una regla de Leibniz trenzada con acciones derechas e izquierdas. Los resultados obtenidos para este cálculo diferencial son esencialmente los mismos que los presentados por otros autores, pero la manera de obtención es diferente. Nuestros resultados se obtienen naturalmente del álgebra de Clifford.

La ecuación (98) nos permite identificar la forma fundamental $< w, w > = w^\alpha w^\beta < e_\alpha, e_\beta >$ con un *q-escalar*, en el sentido de que resulta un elemento central al álgebra de coordenadas y, por lo tanto, identificable con un número complejo.

Se define un *q-operador Laplaciano* como $\nabla^2 = \partial_\alpha \partial_\beta < e_\alpha, e_\beta >$. El requerimiento de que ∇^2 sea un operador escalar, obliga a introducir un álgebra de Clifford dual a la inicialmente obtenida. Ello se debe a que el álgebra de las q-derivaciones se define con un operador de trenza dual al correspondiente al álgebra de coordenadas. En el desarrollo de un formalismo análogo al Hamiltoniano, cabría la posibilidad de trabajar simultáneamente con ambas álgebras para incluir los conceptos de *q-distancia* y *q-energía*.

Inicialmente, el álgebra de Clifford fue obtenida a partir de una deformación realizada con un operador de trenza de tipo Hecke. Utilizando un operador de trenza involutivo, se obtiene un álgebra de Clifford autodual; por lo tanto, la forma fundamental y el operador Laplaciano resultan simultáneamente escalares. La utilización de un operador de trenza involutivo trae otras ventajas sobre el operador de tipo Hecke. Permite definir una estuctura $*$ que preserva el álgebra de coordenadas y de derivaciones. Además, simplifica notablemente las relaciones algebraicas y los operadores de derivación a izquierda y a derecha coinciden.

A partir de los generadores del álgebra de Clifford, se construye una deformación de los grupos $\mathcal{S}pin(4)$ y $SO(4-h,h)$. A pesar de que el álgebra de Clifford deformada se obtuvo mediante un operador de trenza correspondiente a un grupo cuántico, los pseudogrupos $\underline{\mathcal{S}pin}(4)$ y $\underline{SO}(4-h,h)$ *no* resultan con una estructura de grupo cuántico; sino, con una estructura de grupo trenzado.

Se prueba que el grupo trenzado $\underline{S}pin(4)$ tiene representación matricial en $SL(2,\mathbb{C})\underline{\times}SL(2,\mathbb{C})$, donde $SL(2,\mathbb{C})$ es el grupo especial lineal no deformado pero entre los coeficientes matriciales del primer y segundo bloque existen relaciones de conmutación no triviales. El grupo trenzado $\underline{SO}(4-h,h)$ tiene una representación matricial $SL(2,\mathbb{C})\underline{\otimes}SL(2,\mathbb{C})$ y espacio de representación $S_1\underline{\otimes}S_2$ (el álgebra de coordenadas del espacio-tiempo).

La relación entre $\underline{S}pin(4)$ y $\underline{SO}(4-h,h)$ viene dada por el morfismo suryectivo y no inyectivo:

$$F : SL(2,\mathbb{C})\underline{\times}SL(2,\mathbb{C}) \rightarrow SL(2,\mathbb{C})\underline{\otimes}SL(2,\mathbb{C}),$$

$$F(B_1\underline{\times}B_2) = B_1\underline{\otimes}B_2.$$

Como un proyecto posterior, se podría tratar de definir una generalización de un isomorfismo local entre ambos pseudogrupos. Las dificultades aparecen en torno a la inexistencia de una estructura análoga a la de variedad. También, sería interesante definir una estructura de grupo trenzado para el producto de las 3-esferas $S^3 \times S^3$ y su relación con q-cuaterniones. Luego, se trataría de establecer un homomorfismo 2 a 1 entre $S^3 \times S^3$ y $\underline{SO}(4)$ y una relación (un isomorfismo si fuera posible) entre $S^3 \times S^3$ y $\underline{S}pin(4)$.

Por otra parte, se podría analizar la existencia de un grupo trenzado $\underline{\mathcal{P}}in$ y buscar su relación con un grupo trenzado ortogonal. Aquí se plantea una pregunta interesante: Existen las reflexiones puras en el contexto de la geometría trenzada?. Para el caso de grupos cuánticos, la respuesta es negativa; toda reflexión viene seguida de una rotación sin poder separar una de otra.

El método de obtención de los grupos trenzados $\underline{Spin}(4)$ y $\underline{SO}(4-h,h)$, desarrollado en este trabajo, pudiera ser generalizado a dimensión arbitraria. Para ello, sería necesario construir un lenguaje algebraico formal adecuado.

Para concluir, se analizará la representación en el espacio de Fock del álgebra de Clifford deformada construida a partir de un operador de trenza involutivo. Si identificamos:

$$H(e_i) := a_i,$$

$$H(e_i') := a_i^\dagger,$$

podríamos pensar en *q-operadores de aniquilación y construcción* respectivamente.

Sin embargo, para que esta identificación esté bien definida, es necesario introducir una operación hermítica $\dagger$, tal que:

$$(H(e_i))^\dagger = H(e_i'),$$

$$\dagger^2 = id.$$

Nótese que la operación transpuesta T, definida en (166), satisface esta condición.

El siguiente paso es construir un espacio de Fock de representaciones. Se define un estado de vacio

$$a_i|0>=0,$$

con $<0|0>=1$, y una base para el espacio de Fock

$$|n_1...n_j...n_n>=(a_n^\dagger)^{n_n}...(a_1^\dagger)^{n_1}|0>,$$

con $n_i = 0, 1$. Usando estas definiciones, se obtiene:

$$a_j|n_1...n_j...n_n> = \delta_{n_j 1}\Pi_{i=j+1}^{n}(-\bar{\tau}_{ji}{}^{ij})^{n_i}|n_1...0...n_n>,$$

$$a_j^{\dagger}|n_1...n_j...n_n> = \delta_{n_j 0}\Pi_{i=j+1}^{n}(-\tau_{ij}{}^{ji})^{n_i}|n_1...1...n_n>,$$

donde $\bar{\tau}$ y τ son los generadores de trenza involutivos definidos en (127) y (124). Teniendo en cuenta estas expresiones, se construyen las matrices de Dirac correspondientes a la representación del espacio de Fock. Como ejemplo, daremos el caso $n = 2$:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a_1^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 \end{pmatrix},$$

$$a_2^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cabe mencionar que, si se cambian sumas por restas en el álgebra de Clifford (129), se obtendrá un álgebra que llamaremos de Weyl deformada, la que se identificaría con el álgebra de los *q-operadores de aniquilación y construcción para bosones*. La construcción del espacio de Fock podría obtenerse en forma similar al caso fermiónico.

APÉNDICE

0. *Grupos.*

Un *grupo* es un conjunto G con una ley de composición interna $G \times G \to G$ por $(x, y) \to xy$, tal que se satisfacen:

1) la ley asociativa:

$$(xy)z = x(yz),$$

$\forall x, y, z \in G.$

2) la existencia de un elemento neutro e, tal que:

$$xe = ex = x,$$

$\forall x \in G.$

3) la existencia de un elemento inverso x^{-1} para cada $x \in G$, tal que:

$$xx^{-1} = x^{-1}x = e.$$

1. *Espacios Topológicos.*

• *Definición*

Un *espacio topológico* $(G, \mathcal{U})$ es un conjunto G con una topología $\mathcal{U}$ sobre G. Una colección $\mathcal{U}$ de subconjuntos de G, llamados abiertos, define una topología si:

1) G y $\emptyset$ son abiertos,

2) toda unión de abiertos es un abierto,

3) toda intersección finita de abiertos es un abierto.

Una *vecindad de un punto* $x \in G$ es un subconjunto de G que contiene un abierto conteniendo a x.

- *Espacio Conexo*

Un espacio topológico G es *conexo*, si no $\exists U_1, U_2 \neq \emptyset$ abiertos de G y disjuntos, tal que $U_1 \bigcup U_2 = G$.

- *Espacio Compacto*

Un espacio topológico G es *compacto*, si es Hausdorff y si toda cubierta de G tiene una subcubierta finita.

Hausdorff o separable significa que $\forall x, y \in G$ con $x \neq y$, $\exists V_x, V_y$ vecindades de x e y respectivamente, tal que $V_x \bigcap V_y = \emptyset$.

Una *cubierta de* G es una colección (U_i) de abiertos de G, tal que $\bigcup U_i = G$. Si la colección (U_i) tiene un número finito de elementos, se llamará *cubierta finita.*

Una *subcubierta* de una cubierta (U_i) es un subconjunto de (U_i) que también es una cubierta.

- *Conjunto Denso*

Un subconjunto A de un espacio topológico G es denso en G si

$A \bigcup \{\textit{puntos de acumulación}\} = G$.

Un punto $x \in G$ es un *punto de acumulación* de A si $(V_x - \{x\}) \bigcap A \neq \emptyset$, $\forall V_x$, vecindad de x.

• *Grupo Topológico*

Un *grupo topológico* es un espacio topológico con estructura de grupo, tal que los mapeos que definen la multiplicación y la inversa son funciones contínuas.

• *Variedades*

Una *variedad de dimensión n* es un espacio topológico separable tal que cada punto posee una vecindad abierta homeomorfa a un abierto de $\mathbb{R}^n$.

Un *homeomorfismo* es una aplicación biyectiva contínua y con inversa contínua entre dos espacios topológicos.

Una *carta* (U, ϕ) es un homeomorfismo ϕ de un abierto U de G en $\mathbb{R}^n$.

Un *atlas de clase* C^k de una variedad es un conjunto de cartas $\{(U_i, \phi_i)\}$ tal que los dominios U_i cubren G y si (U_i, ϕ_i), (U_j, ϕ_j) son dos cartas tales que $U_i \bigcap U_j \neq \emptyset$, entonces $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \bigcap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \bigcap U_j)$ son mapeos de clase C^k.

Una *variedad diferenciable* es una variedad con un atlas C^∞.

• *Grupo de Lie*

Un *Grupo de Lie* es una variedad diferenciable con estuctura de grupo tal que su operación es un mapeo diferenciable.

• *Álgebras* C^*

Un *espacio de Banach* es un espacio vectorial normado y completo.

Una *norma* es un mapeo $\| \ \| : V \rightarrow \mathbb{R}$, donde V es un espacio vectorial sobre K, tal que satisface:

1) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in V$

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \quad \lambda \in K$

3) $\|x\| = 0 \iff x = 0.$

Una secuencia (x_n) de puntos en V es una *secuencia de Cauchy*, si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m > N, \quad \|x_n - x_m\| < \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0.$

Una secuencia (x_i) es *convergente* a $x \in V$ si $\forall V_x, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} | x_n \in V_x, \quad \forall n \geq n_0.$

Un espacio vectorial normado se dice *completo* si toda secuencia de Cauchy es convergente.

Un *álgebra de Banach* A es un espacio de Banach con una estructura de álgebra, tal que $\|ab\| \leq \|a\|.\|b\| \quad \forall a, b \in A.$

• *Definición*

Un *álgebra* C^* es un álgebra de Banach A con una operación $a \rightarrow a^*$, llamada involución, que satisface las siguientes propiedades:

1) $(a+b)^* = a^* + b^*,$

2) $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*, \quad \lambda \in \mathbf{C},$

3) $(ab)^* = b^* a^*,$

4) $(a^*)^* = a,$

5) $\|a^*\| = \|a\|,$

6) $\|a^* a\| = \|a\|^2,$

$\forall a, b \in A$ y $\lambda \rightarrow \bar{\lambda}$ es la operación conjugada en $\mathbf{C}$.

Nota: Todo espacio de Banach es un espacio vectorial topológico, con una topología inducida por la norma $\| \; \|$. Por lo tanto, toda álgebra C^* es un espacio topológico.

2. *Espacios Lineales.*

• *Definición*

Un *espacio lineal o vectorial sobre un campo* K es una colección de elementos V con una operación suma $+ : V \times V \to V$ y una multiplicación escalar $K \times V \to V$, tal que se satisfacen las propiedades:

1) $(v + w) + z = v + (w + z)$,

2) $\exists 0 \in V$, tal que $v + 0 = 0 + v = v$,

3) $\forall v \in V$ existe un elemento $(-v) \in V$, tal que $v + (-v) = (-v) + v = 0$,

4) $v + w = w + v$,

5) $k(v + w) = kv + kw$,

6) $(kl)v = k(lv)$,

7) $(k +_K l)v = kv + lv$,

8) $1_K v = v$, $\qquad (A.1)$

$\forall v, w, z \in V$ y $k, l, 1_K \in K$. Los elementos de V se llaman vectores y los de K escalares.

• *Mapeos Lineales*

Sean V y W espacios vectoriales sobre K. Un *mapeo lineal* es una aplicación $f : V \to W$, tal que satisface:

1) $f(v + v') = f(v) + f(v')$,

2) $f(kv) = kf(v)$, $\qquad (A.2)$

con $v, v' \in V$ y $k \in K$. Si f es biyectiva, entonces se dice que f es un isomorfismo y que V y W son isomorfos como espacios vectoriales.

• *Bases de* V

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n. La colección de elementos de V, $\{e_i\}_{i=1,...,n}$, es una base de V si $\forall v \in V$ existen elementos en K, $\{k_i\}_{i=1,...,n}$, tal que $v = \sum k_i e_i$ en forma única.

• *Subespacios*

Sean los espacios vectoriales V y S, no vacíos, tal que $S \subset V$. S es un subespacio de V, si:

1) $0_V \in S$,

2) si $v, w \in S$, entonces $v +_V w \in S$,

3) si $k \in K$ y $v \in S$, entonces $k \cdot_V v \in S$. $\qquad (A.3)$

Sea $L \subset V$ y S el conjunto de todas las combinaciones lineales de elementos de L. S resulta el subespacio más pequeño de V que contiene a L, y se llama *el subespacio generado por* L.

• *Espacios Duales*

Sea V un espacio vectorial sobre K. El conjunto $Hom_K(V, K) = \{f : V \to K,$ *lineales*$\}$ es un espacio vectorial que se llama *el espacio dual de* V y se denota V^*. Si $v \in V$ y $v^* \in V^*$, el elemento $v^*(v)$ se escribe $< v^*, v >$ y se llama *producto interno*. Una base para V^* son los elementos $\{e_i^*\}_{i=1,...,n}$ tal que $< e_i^*, e_j > = \delta_{ij}$, y se llama base dual de la base $\{e_i\}$ de V.

• *Mapeos Bilineales y Formas Cuadráticas*

Sean V, W y L espacios vectoriales sobre K y el mapeo $f: V \times W \to L$. Si el mapeo $f(v,.) : W \to L$ resulta lineal para todo $v \in V$ y $f(.,w) : V \to L$ es lineal para todo $w \in W$, f se llamará *mapeo bilineal*. Si $L = K$, recibe el nombre de *forma bilineal*.

Un mapeo $Q : V \to K$ es una forma cuadrática sobre V, si:

1) $Q(kv) = k^2 Q(v)$,

2) el mapeo definido por $\psi(v,w) = Q(v+w) - Q(v) - Q(w)$, es una forma bilineal en $V \otimes V$.

En este caso, ψ se llama la forma bilineal asociada a Q y resulta simétrica, dando un producto escalar $\psi(v,w)$. En el caso deformado, resultará "σ-simétrica".

• *Producto Tensorial*

Sean V y W espacios vectoriales sobre K. El producto tensorial $V \otimes W$ se define como $F(V \times W)/R = \{f + R\}_{f \in F}$, donde $F(V \times W)$ es el espacio vectorial generado por $(V \times W)$ y R es el subespacio de F generado por los elementos: $(v+v',w) - (v,w) - (v',w)$, $(v,w+w') - (v,w) - (v,w')$, $(kv,w) - k(v,w)$, $(v,kw) - k(v,w)$, $\forall v,v' \in V$, $w,w' \in W$ y $k \in K$. El producto $V \otimes W$ resulta un espacio vectorial.

Sea la proyección canónica $\pi : F(V \times W) \to V \otimes W$, donde $\pi(f) = f + R$. Si $(v,w) \in V \times W$, se denotará $\pi((v,w)) := v \otimes w$. La restricción de π sobre $V \times W$ es un mapeo bilineal. Por lo tanto, resulta:

$$(v+v') \otimes w = v \otimes w + v' \otimes w,$$

$$v \otimes (w + w') = v \otimes w + v \otimes w',$$

$$(kv) \otimes w = k(v \otimes w) = v \otimes (kw).$$

Esta definición puede generalizarse para k productos y se notará $\bigotimes_{i=1}^{k} V_i$, con cada V_i un espacio vectorial. Este producto tensorial resulta un espacio vectorial con un mapeo multilineal canónico $\pi : V_1 \times ... \times V_k \to \bigotimes_{i=1}^{k} V_i$, tal como se definió para el caso $k = 2$. Se verifica que para todo mapeo multilineal $f : V_1 \times ... \times V_k \to W$, existe un único mapeo lineal $f' : \bigotimes_{i=1}^{k} V_i \to W$ tal que $f = f'\pi$.

- *Álgebra Tensorial*

Si en la definición anterior $V_i = V$, $\forall i$, tendremos *el espacio tensorial de grado k de V* y se denota por $V^{\otimes k}$. Si $k = 0$, V^0 es K. Sea $\{e_i\}_{i=1,...,n}$, base de V; entonces $\{(e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_k})\}$, con $i_j = 1, ..., n$, es una base para $V^{\otimes k}$.

La suma directa $\sum_k^{\oplus} V^{\otimes k}$, que se notará $V^{\otimes}$, es un álgebra sobre K cuyo producto es una extensión natural del producto $\otimes$. Se llamará *el álgebra tensorial*. Ésta satisface la *propiedad universal:*

Si $f : V \to A$ es un mapeo lineal con A un álgebra sobre K, entonces existe una única transformación lineal $\bar{f} : V^{\otimes} \to A$, tal que $\bar{f}i = f$, donde $i : V \to V^{\otimes}$ es la inclusión natural definida por $i(v) = v$.

- *Producto Exterior*

Sea $A_k : V^{\otimes k} \to V^{\otimes k}$ la transformación lineal, llamada *el antisimetrizador*, definida por $\sum_{\pi \in S_k} (-1)^{l(\pi)} \pi$, con π una permutación de grado k. Se llama *producto exterior de orden k*, $V^{\wedge k}$, al espacio vectorial cociente $V^{\otimes k}/Ker(A_k)$ y $\pi(\otimes_{i=1}^{k} v_i) = \otimes_{i=1}^{k} v_i + Ker(A_k)$ se llama producto exterior y se denota $v_1 \wedge ... \wedge v_k$.

Se satisface $v_{\pi(1)} \wedge \dots \wedge v_{\pi(k)} = (-1)^{l(\pi)} v_1 \wedge \dots \wedge v_k$.

A_k induce un isomorfismo natural $V^{\wedge k} \simeq Im(A_k)$.

Si $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ es una base de V, entonces $\{(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k})\}$ $(i_1 < i_2 < \dots < i_k)$ forma una base de $V^{\wedge k}$.

Se llama *álgebra exterior o de Grassmann*, $V^{\wedge}$, a la suma directa $\sum_{k=0,\dots,n}^{\oplus} V^{\wedge k}$. Ésta tiene estructura de álgebra con el producto definido como: $x \wedge y = \sum_{p+q=0,\dots,n} x^p \wedge y^q$, con $x, y \in V^{\wedge}$ y $x^p, y^p \in V^{\wedge p}$.

3. *Sobre Ideales y Espacios Cocientes.*

• *Definiciones*

Sea A una K-álgebra e I una subálgebra de A. I es un ideal izquierdo (derecho) del álgebra A, si se satisface:

$$i \in I \Longrightarrow ai \in I, \quad \forall a \in A.$$

Si el ideal es derecho e izquierdo, se llamará ideal.

Sea I un ideal en A. La relación

$$a \sim b \Longleftrightarrow a - b \in I,$$

$a, b \in A$, es una relación de equivalencia. El conjunto

$$A/I = \{[a]\}_{a \in A},$$

con

$$[a] = \{a + i; i \in I\} = a + I,$$

forma un álgebra bajo la multiplicación

$$([a], [b]) \to [a][b] = [ab],$$

y la adición

$$([a],[b]) \longrightarrow [a]+[b]=[a+b].$$

El álgebra A/I se denomina *el álgebra cociente de A por I.*

• *Teorema Fundamental del Isomorfismo*

Sean A y B álgebras, I un ideal de A y $\pi : A \longrightarrow A/I$, el mapeo lineal natural sobre el espacio vectorial cociente, tal que $\pi(a) = [a] = a + I$. Entonces:

1) A/I tiene una única estructura de álgebra tal que π es un mapeo de álgebras.

2) Si $f : A \rightarrow B$ es un mapeo de álgebras, entonces $Ker(f)$ es un ideal.

3) Si $I \subseteq Ker(f)$, entonces existe un único mapeo de álgebras $\tilde{f} : A/I \longrightarrow B$, tal que $\tilde{f}\pi = f$. Si $I = Ker(f)$ y $B = f(A)$, entonces $\tilde{f}$ es un isomorfismo de álgebras.

4. *Álgebras de Clifford.*

• *Definición*

Sea V un espacio vectorial lineal de dimensión n sobre un campo K y Q una forma cuadrática sobre V [Apéndice 2]. Sea $I(Q)$ el ideal de $V^{\otimes}$ [Apéndice 3] generado por los elementos

$$x \otimes x - Q(x).1, \tag{A.4}$$

con $x \in V$. El álgebra cociente

$$V^{\otimes}/I(Q), \tag{A.5}$$

se denota por $Cl(V,Q)$ y se llama álgebra de Clifford.

Propiedades

i) Sean los mapeos canónicos

$$i : V \to V^{\otimes},$$

$$i(x) = x,$$

y el epimorfismo:

$$\pi : V^{\otimes} \to Cl(V, Q),$$

$$\pi(w) = [w],$$

$\forall x \in V$ y $w \in V^{\otimes}$. La composición

$$\pi \circ i : V \to Cl(V, Q),$$

es una inyección lineal ($Ker(\pi \circ \tau) = 0$) y V puede ser visto como un subespacio de $Cl(V, Q)$, vía $\pi \circ i$. Luego, $Cl(V, Q)$ es un álgebra sobre K generada por 1 y V tal que, $\forall x \in V$,

$$x^2 = Q(x).1, \tag{A.6}$$

donde se ha aplicado la multiplicación de ésta en (A.4).

ii) Sea A un álgebra y $f : V \to A$ un mapeo lineal tal que $(f(x))^2 = Q(x).1$, $\forall x \in V$. Por la propiedad universal del álgebra $V^{\otimes}$ y el teorema fundamental del isomorfismo, f puede ser extendida unívocamente a un homomorfismo de álgebras

$$\bar{f} : Cl(V, Q) \to A.$$

iii) Sea ψ una forma simétrica bilineal asociada a Q:

$$\psi(x, y) = Q(x + y) - Q(x) - Q(y), \tag{A.7}$$

con $x, y \in V$. Entonces, por (A.6)

$$xy + yx = \psi(x, y).1, \tag{A.8}$$

$\forall x, y \in V$. Luego, $Cl(V, Q)$ es un álgebra de dimensión 2^n sobre K generada por 1 y V, tal que satisface las relaciones (A.8).

En particular, para $Q = 0$, $Cl(V, Q = 0)$ es el álgebra exterior o de Grassmann sobre V.

• *Aplicación a nuestro caso*

Tomando $\psi(e_i, e_j) = < e_i, e_j > = 0$, donde hemos usado que $\{e_i\}$ es la base isotrópica definida en (20), $Cl(V, Q = 0)$ es un álgebra generada por $\{1, e_i\}$, tal que satisface las relaciones:

$$e_i^2 = 0,$$

$$e_i e_j + e_j e_i = 0. \tag{A.9}$$

En este caso, tenemos:

$$Cl(V) = V^\wedge, \tag{A.10}$$

y análogamente

$$Cl(V') = V'^\wedge. \tag{A.11}$$

En el caso deformado, se cambia (A.8) por:

$$xy + m\tau(x \otimes y) = < x, y > = 0, \tag{A.12}$$

donde m es la multiplicación en el álgebra. Resulta:

$$Cl(V, \tau) = V^\wedge, \tag{A.13}$$

donde ahora el producto $\wedge$ sufre una deformación a través de τ.

Consideremos lo anterior para el espacio total $W = V \oplus V'$. Las relaciones para los vectores base estarán dadas por:

$$e_i e_j + e_j e_i = 0,$$

$$e'_i e'_j + e'_j e'_i = 0,$$

$$e'_i e_j + e_j e'_i = < e'_i, e_j > = \delta_{ij}, \tag{A.14}$$

y por definición

$$Cl(W, Q \neq 0) = W^{\otimes}/J, \tag{A.15}$$

con J el ideal generado por las relaciones (A.14). Se puede obtener el álgebra deformada agregando τ en las relaciones (A.14), como se hizo en (A.12).

En ii), tomando $f = H$, W por V y $A = H(W)$ tal que $H(w)H(w) = < w, w > .1$, $\forall w \in W$, tenemos $\tilde{f} \circ (\pi \circ i) = H$, donde

$$i : W \to W^{\otimes},$$

$$\pi : W^{\otimes} \to Cl(W, Q),$$

$$\tilde{f} : Cl(W, Q) \to H(W),$$

con $\tilde{f}$ el único morfismo de álgebras. El mapeo $\tilde{H} : W^{\otimes} \to H(W)$ satisface que $J = Ker(\tilde{H})$, luego:

$$Cl(W) \simeq H(W), \tag{A.16}$$

como álgebras.

5. *Grupos de Trenzas y Operadores de Trenzas.*

La teoría de grupos de trenzas fue iniciada y desarrollada por E. Artin alrededor de los años veinte y ha sido usada como una herramienta para investigar la teoría de nudos.

Sea un cubo D^3 escrito como $D^2 \times [0,1]$, donde $D^2 = \{(x,y)/0 \leq x, y \leq 1\}$ en $\mathbb{R}^3$. Sean

$$P_i = (i/n+1, 1/2),$$

los puntos en D^2 y sean $2n$ puntos

$$A_i = P_i \times \{1\}$$

y

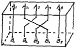
$$B_i = P_i \times \{0\},$$

con $i = 1, 2, \ldots n$. Uniendo A_i con B_{k_i}, donde $(k_1, \ldots, k_n)$ es una permutación de $(1, 2, \ldots, n)$, por medio de las curvas mutuamente disjuntas l_i en D^3, en tal forma que:

1) $l_i \cap \partial D^3 = A_i \cup B_{k_i}$,

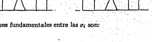
2) $\forall t, \; 0 \leq t \leq 1, \; D_t = D^2 \times \{t\}$ intersecta l_i exactamente en un punto.

Tal configuración recibe el nombre de *trenza de orden n*. Una ilustración de una trenza de orden quinto se representa como sigue:



La relación de equivalencia entre trenzas viene dada por la relación de isotopía. Dos trenzas ζ_1 y ζ_2 son isotópicas, $\zeta_1 \simeq \zeta_2$, si existe un homeomorfismo en D^3, mapeando ζ_1 en ζ_2, tal que éste es una identidad en ∂D^3.

El grupo de trenza de orden n es el grupo formado por la totalidad de $[\zeta]$ y es generado por las clases de equivalencia σ_i, con $i = 1, ..., n-1$, de las trenzas definidas como muestra la figura:



Las relaciones fundamentales entre las σ_i son:

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, \qquad si \mid i-j \mid \geq 2$$

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}. \tag{A.17}$$

Si a este grupo le agregamos la condición de Hecke (27), $\forall\sigma_i$, tendremos un *álgebra de Hecke* $H_{n,q}$ y puede ser interpretada como una deformación del álgebra funcional del grupo simétrico S_n. Una base en $H_{n,q}$ está dada por los elementos $\{[\pi]_q\}_{\pi\in S_n}$, donde $[\pi]_q$ denota el elemento obtenido reemplazando transposiciones por los correspondientes generadores σ_i, en la descomposición minimal de π. En nuestro caso, existe una única representación D_σ del álgebra $H_{n,q}$ en el espacio $V^{\otimes n}$, tal que satisface:

$$D_\sigma(\sigma_i) = I^{i-1} \otimes \sigma \otimes I^{n-i-1}. \tag{A.18}$$

Esta representación será usada en la definición de A_k, con:

$$\sigma_\pi = D_\sigma([\pi]_q). \tag{A.19}$$

Nótese que en nuestro caso la propiedad (26) es la ecuación (A.17) con $i = 1$.

6. *Sobre Categorías.*

• *Definición*

Una *categoría* es una terna $\mathcal{C} = (Obj(\mathcal{C}), Mor(\mathcal{C}), \circ)$, donde:

$$Obj(\mathcal{C}) = \{X, Y, Z, ...\},$$

es la colección de los objetos de la categoría,

$$Mor(\mathcal{C}) = \{H(X,Y)\}_{X,Y \in Obj(\mathcal{C})},$$

con

$$H(X,Y) = \{morfismos \ \ de \ \ XaY\},$$

y $\circ$ es tal que la terna $(H(X,Y) \times H(Y,Z), \circ, H(X,Z))$ es una función; es decir:

$$\circ : H(X,Y) \times H(Y,Z) \to H(X,Z)$$

$$(f,g) \to g \circ f,$$

$\forall X, Y, Z \in Obj(\mathcal{C})$. La flecha $g \circ f$ se llama composición de morfismos y cumple las siguiente propiedades:

i) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$,

ii)$\forall X \in Obj(\mathcal{C})$ existe un único elemento $I_X \in H(X,X)$, llamado morfismo identidad sobre X, tal que $\forall f \in H(X,Y)$, $f \circ I_X = f$ y $\forall g \in H(Z,X)$, $I_X \circ g = g$.

• *Definición*

$\forall X, Y \in Obj(\mathcal{C})$, X e Y son isomórficos, $X \simeq Y$, si existe $f \in H(X,Y)$ y $g \in H(Y,X)$ tal que $g \circ f = I_X$ y $f \circ g = I_Y$.

- *Funtores Covariantes y Contravariantes*

- *Definición*

Dadas las categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, un *funtor covariante* es una asignación $\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ con $\phi \equiv (F, \underline{F})$, tal que

$$F : Obj(\mathcal{C}) \to Obj(\mathcal{D}),$$

$$X \to F(X),$$

es una asignación única y

$$\underline{F} : Mor(\mathcal{C}) \to Mor(\mathcal{D}),$$

$$H(X,Y) \to H(F(X), F(Y)),$$

tal que si $f \in H(X,Y)$ entonces $\underline{F}(f) \equiv f_* \in H(F(X), F(Y))$ y tal que se satisfacen las siguientes propiedades:

i) $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$, con $f \in H(X,Y)$ y $g \in H(Y,Z)$,

ii) $\forall X \in Obj(\mathcal{C})$, $(I_X)_* = I_{F(X)}$.

- *Definición*

Un *funtor contravariante* es una aplicación $\psi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ con $\psi \equiv (G, \tilde{G})$, tal que

$$G : Obj(\mathcal{C}) \to Obj(\mathcal{D})$$

y

$$\tilde{G} : Mor(\mathcal{C}) \to Mor(\mathcal{D}),$$

$$H(X,Y) \to H(G(Y), G(X)),$$

tal que si $f \in H(X,Y)$, entonces $\bar{G}(f) \equiv f^* \in H(G(Y), G(X))$, satisfaciendo las propiedades

i) $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$,

ii) $(I_X)^* = I_{G(X)}$.

• *Equivalencia de Funtores*

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías y $\phi = (F, \underline{F})$, $\delta = (D, \underline{D})$ funtores covariantes. Se dice que $\phi \sim \delta$ si, $\forall X, Y \in Obj(\mathcal{C})$ y $\forall f \in H(X,Y)$, existen isomorfismos $t_X \in H(F(X), D(X))$ y $t_Y \in H(F(Y), D(Y))$ tal que

$$t_Y \circ \underline{F}(f) = \underline{D}(f) \circ t_X.$$

Análogamente, se define la equivalencia para funtores contravariantes.

• *Multiplicación en Categorías*

• *Definición*

Decimos que una categoría $\mathcal{C}$ tiene *multiplicación* o un *producto tensorial*, si existe un funtor covariante

$$\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C},$$

$$X \times Y \to X \otimes Y,$$

tal que

i) $\forall f : X \to X'$ y $g : Y \to Y'$, morfismos de $\mathcal{C}$, se asigna un morfismo $f \otimes g : X \otimes Y \to X' \otimes Y'$,

ii) si $f' : X' \to X''$ y $g' : Y' \to Y''$, entonces $(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = f' \circ f \otimes g' \circ g$,

iii) $I_X \otimes I_Y = I_{X \otimes Y}$.

Extendiendo la definición anterior para $C \otimes C \otimes C \to C$, tenemos dos funtores:

$$(X, Y, Z) \to X \otimes (Y \otimes Z),$$

y

$$(X, Y, Z) \to (X \otimes Y) \otimes Z.$$

Postulamos que los dos funtores dados son equivalentes; es decir, existe una transformación natural a entre ambos funtores tal que

$$a_{X,Y,Z} : X \otimes (Y \otimes Z) \to (X \otimes Y) \otimes Z,$$

es un isomorfismo. La transformación a es llamada una *asociatividad*.

- *La Condición del Pentágono de Mac Lane*

Para moverse de $X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W))$ a $((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W$, podemos seguir dos caminos. Postulando la equivalencia entre ambos, tenemos *la condición del pentágono de Mac Lane*:

$$a_{X \otimes Y, Z, W} \circ a_{X,Y,Z \otimes W} = (a_{X,Y,Z} \otimes I) \circ (a_{X, Y \otimes Z, W}) \circ (I \otimes a_{Y,Z,W}).$$

- *Categorías Monoidales*

- *Definición*

Una categoría C es llamada *monoidal* si tiene una multiplicación $\otimes$, una asociatividad a satisfaciendo la condición del pentágono de Mac Lane y si existe un objeto $I \in C$, llamado el objeto *unidad*, junto con los isomorfismos naturales

$$l_X : I \otimes X \to X$$

y

$$r_X : X \otimes I \to X,$$

tal que se satisfacen las siguientes relaciones:

$$(I_X \otimes r_Y) \circ a^{-1}_{X,Y,I} = r_{(X \otimes Y)},$$

$$l_{(X \otimes Y)} \circ a^{-1}_{I,X,Y} = l_X \otimes I_Y,$$

$$I_X \otimes l_Y \circ a^{-1}_{X,I,Y} = r_X \otimes I_Y.$$

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías monoidales y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor. Tenemos dos funtores de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$:

$$F \otimes_{\mathcal{D}} F : (X, Y) \to F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y),$$

y

$$F \circ \otimes_{\mathcal{C}} : (X, Y) \to F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y).$$

- *Funtor Monoidal*

Un *funtor monoidal* es una terna (F, b, f) donde $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor, b una transformación natural entre los dos funtores definidos más arriba y $f \in H(I_{\mathcal{D}}, F(I_{\mathcal{C}}))$ es un isomorfismo, tal que se satisfacen las siguientes relaciones:

i) $b \circ (I_{F(X)} \otimes b) \circ a^{-1}_{F(X),F(Y),F(Z)} = F(a^{-1}_{X,Y,Z}) \circ b \circ (b \otimes I_{F(Z)})$,

ii) $F(r_X) \circ b \circ (I_{F(X)} \otimes f) = r_{F(X)}$,

iii) $F(l_X) \circ b \circ (f \otimes I_{F(X)}) = l_{F(X)}$.

- *Categorías Monoidales Trenzadas*

Sea C una categoría con producto y los funtores de $C \times C$ a C, definidos por $(X,Y) \to X \otimes Y$ y $(X,Y) \to Y \otimes X$. Postularemos la equivalencia de ambos funtores ; es decir, asumiremos que existe una transformación natural s, tal que $\forall X, Y \in C$

$$s_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X,$$

es un isomorfismo.

La definición de Mac Lane agrega la condición de que $s^2 = I$, pero investigaciones recientes muestran que es mejor desechar esta condición o debilitarla; por ejemplo, deformarla al estilo Hecke.

Dados los objetos X, Y, Z de la categoría, hay dos caminos para ir de $X \otimes (Y \otimes Z)$ a $(Z \otimes X) \otimes Y$. Imponemos que estas dos composiciones den el mismo morfismo, bajo el requerimiento

$$a_{Z,X,Y} \circ s_{X \otimes Y, Z} \circ a_{X,Y,Z} = (s_{X,Z} \otimes I_Y) \circ a_{X,Z,Y} \circ (I_X \otimes s_{Y,Z}).$$

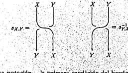
Esta condición se conoce como la condición del hexágono. También impondremos esta relación para $(s_{Y,X})^{-1}$, requiriendo

$$a_{Z,X,Y} \circ (s_{Z,X \otimes Y})^{-1} \circ a_{X,Y,Z} = ((s_{X,Z})^{-1} \otimes I_Y) \circ a_{X,Z,Y} \circ (I_X \otimes (s_{Z,Y})^{-1}).$$

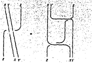
• *Definición*

Una categoría monoidal con una s satisfaciendo los diagramas hexagonales y tal que $l_X = r_X \circ s_{I,X}$ y $r_X = l_X \circ s_{X,I}$, se llama *una categoría monoidal trenzada.*

Introduciremos la notación de Majid para los morfismos $s_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X$ y $s_{Y,X}^{-1} : X \otimes Y \to Y \otimes X$, dada por los operadores de trenza tal como se indica en la figura



Con esta notación, la primera condición del hexágono se dibuja como



• *Ejemplo*

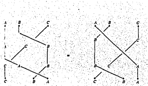
La categoría de las trenzas, $\mathcal{B}$, definida por $Obj(\mathcal{B}) = \mathbb{N} \setminus 0$, $H(m,n) = \emptyset$, si $m \neq n$ y $H(n,n) = B_n$, con B_n el grupo de trenza definido en el punto 4, es una categoría monoidal trenzada.

• *Teorema de Joyal y Street*

Sean dos morfismos construidos mediante cierta composición de los isomorfismos a, r, l y s. Para checar si estos morfismos son equivalentes en todas las categorías monoidales trenzadas, es suficiente checar que las trenzas subyacentes sean las mismas.

• *Ejemplo: La versión categórica de la Ecuación de Yang-Baxter*

Sean los diagramas



Los dos morfismos

$$H((X \otimes Y) \otimes Z, Z \otimes (Y \otimes X)),$$

indicados por los diagramas, corresponden a las composiciones

$$(XY)Z \xrightarrow{a^{-1}} X(YZ) \xrightarrow{I \otimes s} X(ZY) \xrightarrow{a} (XZ)Y \xrightarrow{s \otimes I} (ZX)Y \xrightarrow{a} Z(XY) \xrightarrow{I \otimes s} Z(YX),$$

y

$$(XY)Z \xrightarrow{s \otimes I} (YX)Z \xrightarrow{a^{-1}} Y(XZ) \xrightarrow{I \otimes s} Y(ZX) \xrightarrow{a} (YZ)X \xrightarrow{s \otimes I} (ZY)X \xrightarrow{a^{-1}} Z(YX).$$

Por el teorema anterior, se deduce que ambos morfismos son equivalentes. Efectivamente, si se desliza la cuerda $X - X$ a través de la cuerda $Y - Y$, las trenzas representadas en la figura son las mismas. Usando los operadores de trenza definidos en el punto 4 de este apéndice, la igualdad de estos diagramas viene dada por la relación

$$\sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1,$$

que es la versión categórica de la ecuación de Yang-Baxter.

- *Funtor Monoidal Trenzado*

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías monoidales trenzadas y (F, c, f) un funtor monoidal de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$. Decimos que (F, c, f) es trenzado si se satisface la relación:

$$F(s) \circ c = c \circ s.$$

• *Aplicación a nuestro caso*

Los espacios V, V' y $\mathbb{C}$ son objetos de la categoría de espacios vectoriales. Los morfismos son las transformaciones lineales. Junto con el producto tensorial usual de espacios vectoriales $\otimes$, la asociatividad trivial, el objeto unidad $\mathbb{C}$ y los isomorfismos naturales $\mathbb{C} \otimes X \simeq X \otimes \mathbb{C} \simeq X$, con $X = V, V'$, constituye una categoría monoidal. Considerando el isomorfismo σ sobre $V^{\otimes 2}$ definido en (59.a) y sus extensiones naturales a $V \otimes V'$, $V' \otimes V$ y $V' \otimes V'$, se obtiene una categoría monoidal trenzada.

En la sección *III.2.2* se verá que V y V' determinan bimódulos bicovariantes Γ y su dual Γ' respectivamente, pudiendo extender la categoría monoidal trenzada de espacios vectoriales a la categoría monoidal trenzada $\mathcal{T}_G$ de bimódulos bicovariantes.

7. *Estructuras de $\mathcal{A}$-Módulo sobre V y V' para $SL_q(n, \mathbb{C})$.*

De (58) y (64), obtenemos las siguientes estructuras de $\mathcal{A}$-módulo sobre V:

i) para $i < j$

$$e_i \circ u_{kj} = \delta_{kj} \beta \mu e_i$$

$$e_j \circ u^*_{ii} = \frac{1}{\mu\beta} e_j$$

$$e_j \circ u^*_{ij} = \frac{\mu^2 - 1}{\beta \mu^{2(1+i-j)}} e_i$$

$$e_j \circ u^*_{ik} = 0, \qquad k \neq \{i, j\},$$

ii) para $i > j$

$$e_i \circ u_{ij} = \beta(1-\mu^2)e_j$$

$$e_i \circ u_{jj} = \beta\mu e_i$$

$$e_i \circ u_{kj} = 0, \qquad k \neq \{i,j\}$$

$$e_j \circ u_{ik}^* = \frac{\delta_{ki}}{\beta\mu}e_j,$$

iii) para $i = j$

$$e_i \circ u_{ik}^* = \frac{1}{\beta}\delta_{ik}e_i$$

$$e_i \circ u_{ki} = \delta_{ki}\beta e_i,$$

donde $\beta = \mu^{1-n/n}$ (proveniente de la condición del determinante cuántico).

Usando la definición (60) de $\circ$ en el espacio dual V', obtenemos

i) para $i \neq j$

$$e_i' \circ u_{ji}^* = 0$$

$$e_i' \circ u_{ij}^* = \begin{cases} \beta(1-\mu^2)e_j', & si\ i < j \\ 0, & si\ i > j \end{cases}$$

$$e_i' \circ u_{jj}^* = \beta\mu e_i'$$

$$e_i' \circ u_{kj}^* = 0, \qquad k \neq \{i,j\}$$

$$e_i' \circ u_{kj} = 0, \qquad k \neq \{i,j\}$$

$$e_i' \circ u_{ij} = 0$$

$$e_i' \circ u_{jj} = \frac{1}{\beta\mu} e_i'$$

$$e_i' \circ u_{ji} = \begin{cases} \frac{\mu^2-1}{\beta\mu^2} e_j', & si\ j > i \\ 0, & si\ j < i \end{cases}$$

ii) y las relaciones

$$e_i' \circ u_{ii} = \frac{1}{\beta} e_i'$$

$$e_i' \circ u_{ii}^* = \beta e_i',$$

cuando $i = j$.

Las estructuras de $\mathcal{A}$-modulo sobre V y V' nos permiten calcular los tres operadores de trenza restantes.

REFERENCIAS

[1] P. Podles, *Solutions of Klein-Gordon and Dirac Equations on Quantum Minkowski Spaces*, preprint Univ. California, 1995.

[2] E. Cartan, *The Theory of Spinors*, (Dover, New York, 1966).

[3] C.N. Yang, *Some exact resuts for the many-body problem in one dimension with repulsive delta function interaction*, Physical Review Letters, Vol.19, N.23 (1967) pp 7-9.

[4] R.J. Baxter, *Partition Function of Eight-Vertex Lattice Model*, Stud. Appl. Maths. (MIT), 50 (1971) , 51-69.

R.J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Academic Press.

[5] A.A. Belavin and V.G. Drinfel'd, *Solution of the Classical Yang-Baxter Equation for simple Lie algebras*, Funktsional.Analiz i ego Prilozheniya, Vol.16, N.3 (1982) pp 1-29.

[6] P.P. Kulish, N.Yu. Reshetikhin and E.K. Sklyanin, *Yang-Baxter equations and representation theory*, I, Lett.Math.Phys., 5 (1981), 393-403.

[7] V.G. Drinfel'd, *Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation*, Soviet Math. Dokl., Vol.32 (1985) N1, 1060-1069.

[8] L.D. Faddeev, E.K. Sklyanin and L.A. Takhtajan, *The quantum inverse*

problem, I, Teor.Mat.Fiz., 40 (1979), 194-220,

L.D. Faddeev, N.Yu. Reshetikhin and L.A. Takhtajan, *Quantization of Lie Groups and Lie Algebras*, Leningrad Math. J., 1 (1990), 193.

[9] N.Yu. Reshetikhin, V.G. Turaev, *Ribbon Graphs and their Invariants Derived from Quantum Groups*, Commun.Math.Phys., 127 1 (1990).

[10] E. Witten, *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Commun.Math.Phys. 121 (1989), 351-399.

[11] L. Kauffman, *From knots to quantum groups and back*, Quantum Groups (Argonne, IL, 1990), 1-32, World Sci.Publishing, Teaneck, NJ (1991).

[12] P. Schupp, *Quantum Groups, Non-Conmutative Differential Geometry and Aplications*, Thesis Univ.of California (1993).

[13] G. Kac, *Ring-groups and the principle of duality I and II*, Trudy Moskov.Mat. Obsc., 12, 259 (1963); 13, 84 (1965).

[14] M. Takesaki. *Duality and von Neumann algebras*, Tulane University lecture notes (1970).

[15] R. Penrose, in *Quantum theory and beyond*, ed t.Bastin, Cambridge U Press(1971).

[16] F. Müller-Hoissen, *Differencial calculi on the quantum group $GL_{p,q}(2)$*, J.Phys. A.Math., Gen.25 (1992), 1703-1734.

[17] S. Majid, *On q-Regularization*, Int.J.Mod.Phys.A, Vol 5, N.24 (1990),

4689-4696.

[18] G. Moore and N. Seiberg, Commun. Math. Phys., 123 (1989), 177.

J. Fröhlich, Lectures at Cargèse, 1987.

L. Alvarez-Gaumé, C. Gomez and G. Sierra, Phys. Lett., 220B (1989), 142; Nucl. Phys., B330 (1990), 347.

A. Tsuchiya and Y. Kanie, in *Conformal Field Theory and Solvable Lattice Models*, Advanced Studies in Pure Mathematics, 16 (1988), 297; Lett. Math. Phys., 13 (1987), 303.

[19] L. Crane and I.B. Frenkel, *Four-dimensional topological quantum field theory, Hopf categories, and the canonical bases*, J.Math. Phys., 35 (10) (1994).

[20] C. Rovelli and L. Smolin, *Spin Networks and Quantum Gravity*, preprint (1995).

[21] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press (1994).

[22] H. Hopf, *Uber die Topologie der Gruppen-mannigfaltigkeiten und ihre Verallgemeinerungen*, Ann. of Math., 42 (1941), 22-52.

[23] V.G. Drinfel'd, *Quantum groups*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley,1986.

[24] S.L. Woronowicz, *Compact Matrix Pseudogroups*, Comm. Math. Phys., 111 (1987), 613.

S.L. Woronowicz, *Twisted SU(2) group. An example of a non-commutative differential calculus*, Publ. RIMS Kyoto Univ.23 (1987), 117-181.

[25] Yu.I. Manin, *Quantum groups and non-commutative geometry*, Centre de Recherches Mathématiques, Montréal,1988.

[26] A. Pressley and V. Chari, *Notes on Quantum Groups*, Nucl.Phys.B, 18A (1990) 207-228.

[27] M.E. Sweedler, *Hopf Algebras*, Benjamin, 1969.

[28] S. Majid, *Braided Geometry: A New Approach to Q-Deformations*, Proc. 1st Caribb. Spr. Sch., Guadeloupe, May 1993. CUP.

S.Majid, *Introduction to Braided Geometry and q-Minkowski Space*, Preprint.

[29] S. L. Woronowicz, *Tannaka-Krein duality for compact matrix pseudogroups. Twisted SU(N) groups*, Invent. Math., 93 (1988), 35-76.

[30] S. L. Woronowicz, *Differential Calculus on Compact Matrix Pseudogroups (Quantum Groups)*, Commun. Math. Phys., 122, (1989),125-170.

[31] A. Joyal and R. Street, *Braided Monoidal Categories*, Macquarie Mathematics Reports 850067 (1985) and 860081 (1986).

[32] W. Pusz and S.L. Woronowicz, *Twisted second quantization*, Rep. Math. Phys., 27 (1989), 231-257.

[33] R. Bautista, A. Criscuolo,M. Đurđević, M. Rosenbaum, and J. D. Vergara,

Quantum Clifford algebras from spinor representations, por aparecer en J. Math. Phys. (1996).

[34] P. Podles and S.L. Woronowicz, Comm. Math. Phys., 130 (1990), 381.

[35] L.A. Takhtajan, *Introduction to quantum group and integrable massive models of quantum field theory*, Ed. by M L Ge and B H Zhao, (World Scientific, 1990) p.69.

[36] J.Wess and B. Zumino, *Covariant Differential Calculus on the Quantum Hyperplane*, Nucl. Phys.B (Proc. Suppl.),18B (1990), 302.

[37] O. Ogievetsky and B. Zumino, Lett. Math. Phys., 25 (1992), 121.

[38] S. Majid, J. Math. Phys., 35 (1994), 5025.

[39] A. Criscuolo, M. Đurđević, M. Rosenbaum and J. D. Vergara, *q-Deformed Spin Groups from Quantum Clifford Algebras*, preprint ICN, 1996.

[40] T. Brzeziński, L.C. Papaloucas, J. Rembieliński, *Quantum Clifford Algebras*, Preprint, 1993.

[41] T. Hayashi, *Q-Analogues of Clifford and Weyl Algebras. Spinor and Oscillator Representations of Quantum Enveloping Algebras*, Commun. Math. Phys., 127 (1990), 129-144.

[42] El apendice fue extraído de:

Encyclopedic Dictionary of Mathematics, 2° Edition, The MIT Press, ed. by Kiyosi ito;

Analysis, Manifolds and Physics, Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette, M. Dillard-Bleick, North-Holland, 1982;

Quantum Groups. From coalgebras to Drinfeld algebras, S. Shnider and S. Sternberg, International Press Publications, 1993.