

01170

6
23

**Control por Retroalimentación de Salida:
Aplicación a Sistemas Electromecánicos**

Pablo Madero Aguirre

Tesis dirigida por:

Dr. Gerardo Espinosa Pérez

Dr. Martín Velasco Villa

Maestría en Ingeniería Eléctrica

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

1996



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicatoria

A mis padres y hermanos.

Agradecimientos

A Gerardo Espinosa y Martín Velasco, por haberme permitido trabajar con ellos así como por todo el tiempo que invirtieron en la dirección de este trabajo.

A los doctores Jaime Moreno y Vicente Parra al igual que a Gerardo Guerrero, por haber aceptado formar parte del jurado y por los enriquecedores comentarios y sugerencias que hicieron sobre este trabajo.

A la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería (DEPFI-UNAM), por darme la oportunidad de estudiar en la Universidad.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por el apoyo económico que me dieron los últimos dos años.

A la Coordinación de Automatización del Instituto de Ingeniería, por todas las facilidades que me brindaron para la realización de esta tesis.

A mis amigos, por definición.

Índice

Resumen	iv
1 Introducción	1
1.1 Motivación y antecedentes	1
1.2 Objetivo y presentación del problema	1
1.3 Contribuciones	2
1.4 Estructura de la tesis	2
2 Modelado de Sistemas Electromecánicos	3
2.1 Ecuaciones Euler-Lagrange	3
2.2 Propiedades de una clase de sistemas Euler-Lagrange	8
2.3 Modelo Euler-Lagrange para sistemas electromecánicos	13
3 Control por Moldeo de Energía	18
3.1 Sistemas actuados	18
3.2 Sistemas subactuados	19
4 Control de Sistemas Electromecánicos	24
4.1 Formulación del problema	24
4.2 Control sin sensores de variables mecánicas.	25
4.3 Control con término integral para sistemas electromecánicos	32
5 Resultados de Simulación	45
6 Conclusiones	53
Apéndice A	55
Apéndice B	57
Referencias	58

Resumen

En este trabajo se propone un par de esquemas de control para resolver el problema de regulación de posición de un sistema electromecánico. Se considera que este tipo de sistemas puede ser modelado con parámetros concentrados y el modelo se obtiene al emplear las ecuaciones Euler-Lagrange. El primer esquema de control emplea el enfoque conocido como moldeo de energía con inyección de amortiguamiento, lo que conduce a un controlador por retroalimentación de salida sin sensores de posición o velocidad mecánica. El segundo controlador incluye adicionalmente un término integral sobre el error de posición mecánica. Esto permite eliminar el error de estado estacionario que se presenta cuando se desconocen las condiciones iniciales de la parte eléctrica del sistema que es actuada.

Capítulo 1

Introducción

1.1 Motivación y antecedentes

Dentro del conjunto de sistemas físicos, los sistemas electromecánicos establecen una clase muy relevante desde el punto de vista de la ingeniería. Su relevancia radica en el hecho de que se les puede encontrar formando parte en una gran variedad de dispositivos. Además, el hecho de que en la actualidad se requiera de modelos más completos, que no desprecien la naturaleza eléctrica o mecánica de aquellos sistemas que presentan ambas, ha dado como resultado que el viejo principio de considerar sistemas mecánicos o eléctricos *puros* sea cada vez menos considerado. Es así que actualmente deba considerarse una clase de dispositivos, cuya estructura está basada en las interacciones resultantes de la presencia de una parte de naturaleza eléctrica y otra mecánica.

Entre otras clasificaciones, a los sistemas electromecánicos se les puede dividir en sistemas electromecánicos que almacenan energía magnética y en sistemas electromecánicos que almacenan energía eléctrica. La diferencia entre estas dos clases es que mientras la primera genera fuerza mecánica a partir de energía almacenada en inductores, la segunda realiza esta tarea usando capacitores.

Por una parte, los sistemas electromecánicos pertenecen a la clase de sistemas *subactuados*, es decir sistemas con más estados que entradas de control y, en algunos casos comunes, no todo su estado es medible. Por otro lado, el desarrollo actual en áreas tales como la mecánica de precisión, los altos desempeños demandados por las nuevas aplicaciones industriales (e.g. robótica, vehículos eléctricos) y la nueva tendencia industrial relacionada con el deseo de usar el menor número posible de dispositivos de medición, hacen que la tarea de controlar estos sistemas esté lejos de ser trivial, dando como resultado que el desarrollo de nuevas estrategias de control sea una labor muy importante. Lo anterior conduce a que, desde la óptica de la ingeniería de control, los sistemas electromecánicos constituyan un problema muy interesante.

Tradicionalmente, el problema de controlar sistemas electromecánicos se ha resuelto empleando técnicas de control clásico [6]; sin embargo, el deseo de tener mejores desempeños ha motivado el uso de otro tipo de enfoques. Un ejemplo en este sentido es [11], donde se aplica la estrategia de control conocida como linealización por retroalimentación (*feedback linearization*) para controlar sistemas electromecánicos.

1.2 Objetivo y presentación del problema

El objetivo es proveer una ley de control general que se pueda aplicar a cualquier sistema electromecánico, sin importar si pertenece a la clase que almacena energía magnética o eléctrica. Más aún, enfocando dispositivos en los que no es posible descartar efectos *parasíticos* de origen inductivo y/o capacitivo, la ley de control propuesta se diseña para

manejar sistemas electromecánicos modelados de acuerdo a [5], [12] que pueden contar con elementos inductivos y capacitivos en su estructura.

Como filosofía de diseño se usa la metodología conocida como *moldeo de energía con inyección de amortiguamiento* [8]. Este enfoque explota a un nivel fundamental las propiedades físicas del sistema, en particular las de disipación de energía. Esta metodología proviene de la mecánica clásica [2], fue introducida a la teoría de control por [10] y se ha empleado para resolver diversos problemas de control aprovechando las propiedades físicas que exhiben algunos sistemas, por ejemplo en [3] donde se controlan robots flexibles y en [7] donde se trata con máquinas eléctricas.

El problema particular aquí considerado, se inspira en el trabajo [8] donde se presenta un controlador por retroalimentación de salida para una clase de sistemas Euler-Lagrange (EL) subactuados. Esta clase incluye sistemas cuyas coordenadas generalizadas de posición están disponibles para ser medidas (no sus coordenadas generalizadas de velocidad como los sistemas aquí tratados, donde las coordenadas de posición eléctrica son cargas o flujos) y con la estructura de una clase de sistemas mecánicos.

1.3 Contribuciones

La contribución principal de esta tesis es proponer dos estrategias de control que realizan la **regulación de posición** de un sistema electromecánico. La idea fundamental es lograr la regulación sin actuar directamente sobre el subsistema mecánico.

En un primer acercamiento, la ley de control se genera únicamente a partir de variables eléctricas cuya medición es factible desde el punto de vista práctico, es decir, a partir de señales de corriente o voltaje. Esto permite hacer el moldeo de energía y la inyección de amortiguamiento manipulando exclusivamente la parte eléctrica del sistema.

Posteriormente, se asume medible el vector de posición mecánica y con base a [9], [1] se añade a la primera ley de control propuesta un término integral, el cual elimina el error de estado estacionario que presenta la primera ley de control propuesta cuando se desconocen las coordenadas iniciales de la parte eléctrica actuada.

1.4 Estructura de la tesis

Lo que resta del trabajo queda dividido de la siguiente manera: en el capítulo 2 se presentan los fundamentos del modelado para sistemas electromecánicos usando las ecuaciones Euler-Lagrange; en el capítulo 3 se incluyen resultados relacionados con el control por moldeo de energía para sistemas Euler-Lagrange actuados y subactuados; en el capítulo 4 se formula propiamente el problema que se resuelve y se presentan los resultados principales del trabajo; en el capítulo 5 se muestran resultados de simulación obtenidos al emplear los esquemas propuestos en el capítulo 4; en el capítulo 6 se presentan las conclusiones; y finalmente se incluyen dos apéndices así como las referencias consultadas.

Capítulo 2

Modelado de Sistemas Electromecánicos

En este capítulo se presenta el modelo de parámetros concentrados que se obtiene al emplear las ecuaciones Euler-Lagrange con los sistemas electromecánicos. Primeramente se resume la deducción de las ecuaciones EL, luego se presentan algunas propiedades generales de los sistemas EL y finalmente se genera el modelo para la clase de plantas con la que se trabaja en esta tesis.

2.1 Ecuaciones Euler-Lagrange

Una forma de describir con alta precisión el comportamiento dinámico de los sistemas electromecánicos es a partir de modelos con parámetros concentrados. Entre las técnicas de modelado para sistemas físicos con parámetros concentrados, una de las más usadas es la que emplea la formulación lagrangiana. Las ecuaciones Euler-Lagrange pueden deducirse usando cálculo variacional, y cuando se emplean para analizar sistemas físicos tienen varias ventajas, entre otras: se establece una terminología común para todo tipo de sistemas físicos (mecánicos, eléctricos, térmicos, etc.), empleando variables generalizadas; luego, usando un único principio fundamental, como el principio de Hamilton, se determinan completamente las ecuaciones de movimiento de manera sistemática.

De acuerdo con [12], la idea principal detrás del modelado a partir de las ecuaciones Euler-Lagrange obtenidas con base en el cálculo variacional es que la trayectoria dinámica de un sistema puede ser descrito encontrando el extremo de ciertas funciones integrales. Este enfoque emplea fundamentalmente un conjunto de "principios integrales", esto es, principios que se relacionan con el movimiento total del sistema. El principio integral usualmente considerado es el principio de Hamilton.

Según el principio de Hamilton, la trayectoria descrita por la función de estado \mathcal{L} se determina encontrando un extremo (usualmente un mínimo) de la función I . Se dice que el lagrangiano \mathcal{L} es una *función de estado* ya que, en un instante de tiempo dado, sólo depende del valor del estado en ese instante y no de su historia pasada.

El enunciado del principio de Hamilton es el siguiente: La variación de la integral en el tiempo del lagrangiano \mathcal{L} entre dos puntos terminales fijos $q_i(t_1)$ y $q_i(t_2)$ debe ser cero. Para expresar formalmente el principio de Hamilton, defina la función I tal que

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_1, \dots, q_N; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N; t) dt \quad (2.1.1)$$

donde q_i representa a las coordenadas generalizadas y \dot{q}_i a las velocidades generalizadas.

El principio de Hamilton puede entenderse como una restricción sobre la trayectoria que las N coordenadas $q_i(t)$ siguen al ir del punto t_1 al t_2 , la restricción es que las

Capítulo 2. Modelado de Sistemas Electromecánicos

coordenadas siguen una trayectoria tal que la función I es un extremo (usualmente un mínimo).

La condición para un extremo de I es que la variación de esta función sea igual a cero,

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_1, \dots, q_N; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N; t) dt = 0 \quad (2.1.2)$$

sujeta a las siguientes condiciones en la frontera

$$\delta q_i(t_1) = 0 \quad \text{y} \quad \delta q_i(t_2) = 0 \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (2.1.3)$$

En las dos últimas ecuaciones el símbolo δ significa variación independiente del tiempo tal y como se usa en el cálculo de variaciones, y es análogo a una diferencial en el cálculo diferencial ordinario.

La ecuación (2.1.2) establece el principio de Hamilton. A continuación se considera la ecuación (2.1.2) donde, por simplicidad, se asume que $N=1$. Se desea investigar las relaciones que deben existir entre las coordenadas q_i y sus derivadas \dot{q}_i para satisfacer la ecuación (2.1.2) bajo las condiciones dadas por (2.1.3).

Considere que $q_0(t)$ es una función que minimiza a I , elijase cualquier función $\eta(t)$ que sea continuamente diferenciable y que se haga cero al evaluarla en las condiciones de frontera $q(t_1)$ y $q(t_2)$. Entonces para cualquier variable real α , la función

$$q(t, \alpha) = q_0(t) + \alpha \eta(t) \quad (2.1.4)$$

habrá de satisfacer las condiciones de frontera. La integral

$$I(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_0(t) + \alpha \eta(t); \dot{q}_0(t) + \alpha \dot{\eta}(t); t) dt \quad (2.1.5)$$

obtenida de sustituir (2.1.4) y su derivada en (2.1.1), sólo depende de α y, más aún, la función $I(\alpha)$ tiene un punto extremo cuando $\alpha = 0$. Esto último es claro de (2.1.4) y de la definición de $q_0(t)$. Como la función $I(\alpha)$ sólo depende de la variable real α , entonces el punto extremo de la función —que es $\alpha = 0$ de acuerdo con lo expuesto arriba— también debe satisfacer la condición usual para los extremos de funciones de una sola variable, esto es

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = 0 \quad \text{cuando} \quad \alpha = 0. \quad (2.1.6)$$

La ecuación (2.1.6) es la condición para encontrar el extremo; además, a través de esta expresión se relacionan el cálculo diferencial con el cálculo de variaciones.

Aplicando (2.1.6) a (2.1.5) se tiene que

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \eta(t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{\eta}(t) \right] dt = 0. \quad (2.1.7)$$

Ahora denótese por δq a la variación de la función $q(t)$ con respecto a la función verdadera $q_0(t)$ de la siguiente forma

Capítulo 2. Modelado de Sistemas Electromecánicos

$$\delta q = q(t) - q_0(t) = \alpha \eta(t) \quad (2.1.8)$$

y de manera similar con $\delta \dot{q}$

$$\delta \dot{q} = \dot{q}(t) - \dot{q}_0(t) = \alpha \dot{\eta}(t) \quad (2.1.9)$$

luego defínase la variación de la función de estado $\delta \mathcal{L}$ como

$$\delta \mathcal{L} = \mathcal{L}(q(t, \alpha); \dot{q}(t, \alpha); t) - \mathcal{L}(q_0(t); \dot{q}_0(t); t) \quad (2.1.10)$$

expandiendo en series de Taylor el primer término del lado derecho de (2.1.10) alrededor de $q_0(t)$ y de $\dot{q}_0(t)$, conservando sólo hasta los términos de primer orden se obtiene

$$\delta \mathcal{L} = [q(t, \alpha) - q_0(t)] \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + [\dot{q}(t, \alpha) - \dot{q}_0(t)] \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \quad (2.1.11)$$

sustituyendo (2.1.8) y (2.1.9) en (2.1.11) resulta

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \alpha \eta(t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \alpha \dot{\eta}(t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \quad (2.1.12)$$

de (2.1.7) y (2.1.12)

$$\alpha \frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L} dt = 0 \quad (2.1.13)$$

Definiendo la variación de I como

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_0(t) + \alpha \eta(t); \dot{q}_0(t) + \alpha \dot{\eta}(t); t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_0(t); \dot{q}_0(t); t) dt$$

de donde

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} [\mathcal{L}(q_0(t) + \alpha \eta(t); \dot{q}_0(t) + \alpha \dot{\eta}(t); t) - \mathcal{L}(q_0(t); \dot{q}_0(t); t)] dt$$

y usando (2.1.10) se obtiene que

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L} dt = 0 \quad (2.1.14)$$

Una vez obtenida la relación fundamental (2.1.14) se considera de nuevo el caso general en el que N no es necesariamente 1. Con esto se obtiene

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = 0. \quad (2.1.15)$$

Para simplificar (2.1.15) se integra por partes el segundo término para obtener

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i dt = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt \quad (2.1.16)$$

dado que δq_i se hace cero al ser evaluado en t_1 y t_2 , el primer término del lado derecho de (2.1.16) es cero. Sustituyendo (2.1.16) en (2.1.15) y agrupando términos se obtiene

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt = 0. \quad (2.1.17)$$

Capítulo 2. Modelado de Sistemas Electromecánicos

Dado que todas las coordenadas generalizadas son linealmente independientes por definición, no existirá ninguna ecuación de restricción entre ellas, por lo que se concluye que (2.1.17) se cumple si y sólo si el término dentro del paréntesis cuadrado es cero, es decir la ecuación (2.1.17) debe cumplirse sin importar la variación δq_k de cualquier coordenada q_k , resultando

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.1.18)$$

La ecuación (2.1.18) es conocida como la ecuación Euler-Lagrange [12].

Para poder determinar la estructura de \mathcal{L} considere que, según (2.1.1) \mathcal{L} es una función de estado dependiente de las coordenadas q_i , las velocidades \dot{q}_i y del tiempo t . Si el lagrangiano es $\mathcal{L}(q_1, \dots, q_N; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N; t)$ entonces su diferencial total está dada por

$$d\mathcal{L}(q_1, \dots, q_N; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N; t) = \sum_{k=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} dq_k + \sum_{k=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt. \quad (2.1.19)$$

Para determinar a \mathcal{L} a partir de (2.1.19), considérese que, como \mathcal{L} es una función de estado, se puede escoger una trayectoria de integración que mantenga a todas las \dot{q}_i constantes para integrar con respecto a q_i , para posteriormente mantener a todas las q_i constantes al integrar con respecto a \dot{q}_i . Más aún, esta integral puede llevarse a cabo para un valor específico del tiempo t^* . Una trayectoria así es perfectamente válida porque el lagrangiano \mathcal{L} queda determinado únicamente por los valores finales de las variables y no por la trayectoria de integración. De esta manera considérese al lagrangiano definido por la siguiente integral

$$\mathcal{L} = \int_{q_1, \dots, q_N; 0, \dots, 0; t^*}^{q_1, \dots, q_N; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N; t^*} \int_{0, \dots, 0; 0, \dots, 0; t^*}^{q_1, \dots, q_N; 0, \dots, 0; t^*} d\mathcal{L}(q_1, \dots, q_N; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N; t) \quad (2.1.20)$$

donde los términos con prima denotan a los términos variables sobre los cuales se realizará la integración. Sustituyendo (2.1.19) en (2.1.20) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q_1, \dots, q_N; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N; t) = & \int_{0, \dots, 0}^{q_1, \dots, q_N} \sum_{k=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}(q_1, \dots, q_N; 0, \dots, 0; t)}{\partial q_k} dq_k \\ & + \int_{0, \dots, 0}^{\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N} \sum_{k=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}(q_1, \dots, q_N; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N; t)}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k. \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

El primer término del lado derecho de (2.1.21) expresado como

$$\int_{0, \dots, 0}^{q_1, \dots, q_N} \sum_{k=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}(q_1, \dots, q_N; 0, \dots, 0; t)}{\partial q_k} dq_k$$

es una función de q_i y de t , pero es completamente independiente de las velocidades del sistema. En el caso de sistemas físicos esto es exactamente la definición del negativo de la energía potencial de un sistema conservativo [12].

Capítulo 2. Modelado de Sistemas Electromecánicos

El segundo término del lado derecho en (2.1.21) se identifica a continuación. El término

$$\int_{0, \dots, 0}^{\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N} \sum_{k=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}(q_1, \dots, q_N; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N; t)}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k$$

es función de los valores finales de q_i y de las velocidades generalizadas del sistema. La última expresión tiene exactamente la forma que toma la función de energía cinética en sistemas conservativos [12]. Para sistemas físicos no lineales esta función recibe el nombre de co-energía cinética.

Con lo anterior, la función de estado \mathcal{L} queda definida de la siguiente manera

$$\mathcal{L}(q_1, \dots, q_N; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) = T'(q_1, \dots, q_N; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) - V(q_1, \dots, q_N) \quad (2.1.22)$$

donde se ha hecho la simplificación adicional de eliminar la dependencia explícita del tiempo tanto en el lagrangiano como en las funciones de energía.

En (2.1.22) T' es la co-energía cinética y V la energía potencial. Obsérvese que hasta este punto las ecuaciones (2.1.18) y (2.1.22) no involucran términos no conservativos, es decir términos que disipan o suministran energía al sistema. Para introducir términos de esta naturaleza en la ecuación (2.1.18), se modifican las funciones de co-energía cinética y de energía potencial en (2.1.22) obteniéndose un lagrangiano más general

$$\mathcal{L}_{FQ}(q_1, \dots, q_N; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) = (T' + T'_F) - (V + V_Q) \quad (2.1.23)$$

donde se ha definido

$$T'_F = \int_0^t \mathcal{J}(\dot{q}) dt$$

siendo $\mathcal{J}(\dot{q})$ una función de disipación de energía que depende sólo del vector de velocidades generalizadas, esta función sirve para modelar el efecto de la fricción viscosa y en la literatura [5], [12] recibe el nombre de función de disipación de Rayleigh; por otra parte, V_Q es un potencial no conservativo resultado de fuerzas de restricción no conservativas.

Defínase a las fuerzas de restricción no conservativas como $Q_i = Q_i(t)$. Entonces, la energía potencial no conservativa V_Q que resulta de las fuerzas de restricción no conservativas se puede definir como

$$V_Q = - \int_{0, \dots, 0}^{q_1, \dots, q_N} \sum_{i=1}^N Q_i(t) dq_i = - \sum_{i=1}^N \int_{0, \dots, 0}^{q_1, \dots, q_N} Q_i(t) dq_i = - \sum_{i=1}^N Q_i(t) q_i$$

Así, todas las fuerzas no conservativas independientes de las coordenadas y velocidades generalizadas pueden verse simplemente como las fuerzas externas aplicadas a la parte conservativa del sistema en las terminales donde estas fuerzas de restricción actúan. Ejemplos clásicos de fuerzas no conservativas son los voltajes aplicados en las terminales de un sistema eléctrico, el torque aplicado a la flecha de un generador, etc.

De (2.1.23) se obtiene la ecuación Euler-Lagrange que considera también fuerzas no conservativas

Capítulo 2. Modelado de Sistemas Electromecánicos

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + Q_k - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k} = 0.$$

Ordenando términos y escribiendo la última ecuación en forma vectorial, siendo $q = [q_1, \dots, q_k, \dots, q_N]^T$, $\dot{q} = [\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k, \dots, \dot{q}_N]^T$, $Q = [Q_1, \dots, Q_k, \dots, Q_N]^T$ se obtiene

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{F}(\dot{q})}{\partial \dot{q}} = Q \quad (2.1.24)$$

De esta manera (2.1.24) representa las ecuaciones que determinan el comportamiento dinámico de un sistema lagrangiano rígido. La sección 2.3 se basará en la ecuación (2.1.24) para obtener las ecuaciones dinámicas de los sistemas electromecánicos considerados en este trabajo.

2.2 Propiedades de una clase de sistemas Euler-Lagrange

Aquí se presentan algunas propiedades de estabilidad interna [8] y entrada-salida (E/S) [8] de los sistemas EL que resultarán ser de gran importancia en lo que resta de este trabajo. Antes de enunciar estas propiedades es importante hacer algunas suposiciones sobre las funciones de co-energía cinética, de energía potencial, de disipación de Rayleigh y sobre las entradas al sistema dadas por Q .

Las siguientes suposiciones tienen por objeto fundamental restringir el estudio a los sistemas con estructura física, así como facilitar el análisis de este tipo de sistemas.

Suposición 2.2.1. Se asume que la estructura de la función de co-energía cinética es una forma cuadrática

$$T'(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} \quad (2.2.1)$$

y sobre la matriz de inercias $D(q)$ se asume que es simétrica y positiva definida

$$D(q) = D^T(q) > 0, \quad \forall q \in \mathcal{R}^n \quad (2.2.2)$$

Suposición 2.2.2. Se asume que la función de energía potencial está acotada por abajo, es decir

$$V(q) \geq c; \quad \forall q \in \mathcal{R}^n, \quad c > -\infty \quad (2.2.3)$$

Suposición 2.2.3. Se hace la suposición de que el efecto de las fuerzas de disipación, es decir aquellas fuerzas generadas por la función de disipación de Rayleigh, es cero si el sistema está en equilibrio, es decir

$$\left. \frac{\partial \mathcal{F}(\dot{q})}{\partial \dot{q}} \right|_{\dot{q}=0} = 0 \quad (2.2.4)$$

Capítulo 2. Modelado de Sistemas Electromecánicos

Suposición 2.2.4. La función de disipación de Rayleigh tiene la propiedad de definir un operador pasivo (respectivamente, estrictamente pasivo) sin dinámica

$$\dot{q} \mapsto \frac{\partial \mathcal{J}(\dot{q})}{\partial \dot{q}} \quad (2.2.5)$$

esto es,

$$\dot{q}^T \frac{\partial \mathcal{J}(\dot{q})}{\partial \dot{q}} \geq \alpha \|\dot{q}\|^2 \quad (2.2.6)$$

se cumple para todo $\dot{q} \in \mathcal{R}^n$ y $\alpha \geq 0$ (respectivamente, $\alpha > 0$).

Suposición 2.2.5. Las entradas al sistema, representadas por las fuerzas no conservativas independientes de las coordenadas y velocidades generalizadas denotadas por Q , estarán dadas por una matriz de entrada M y un vector de control u

$$Q = Mu; \quad M \in \mathcal{R}^{n \times m}; \quad u \in \mathcal{R}^m; \quad m \leq n \quad (2.2.7)$$

En la suposición 2.2.1 se observa que la estructura de la co-energía cinética, dada por (2.2.1), es completamente análoga a la función de energía cinética comúnmente empleada en el análisis de sistemas mecánicos lineales, $\frac{1}{2}mv^2$; además, el hecho de que a la matriz $D(q)$ se le llame matriz de inercias y se le pida que sea positiva definida también se debe a la analogía que se hace con la masa m que aparece en la función de energía cinética de los sistemas mecánicos lineales. En la suposición 2.2.2, el pedir que la función de energía potencial esté acotada por abajo es muy razonable desde el punto de vista de los sistemas con estructura física. Las suposiciones 2.2.3 y 2.2.4, además de ser físicamente razonables, permiten emplear de manera fundamental las fuerzas disipativas para poder concluir —más adelante en este trabajo— estabilidad asintótica del control propuesto.

Con lo anterior es ahora posible presentar algunas propiedades de los sistemas EL. Entre las propiedades de disipación de la energía que tienen los sistemas aquí considerados, una de las importantes es la siguiente:

Proposición 2.2.6 [8] (Pasividad, propiedad E/S). Un sistema EL define un operador pasivo de las entradas u a $M^T \dot{q}$. Esto es, existe $\beta \in \mathcal{R}$ tal que

$$\langle u | M^T \dot{q} \rangle \geq \beta$$

para toda $u \in \mathcal{L}_{2e}^m$ (donde \mathcal{L}_{2e}^m representa el espacio extendido de funciones cuadráticamente integrables de dimensión m). Este mapeo es estrictamente pasivo a la salida si la función de disipación de Rayleigh define un operador estrictamente pasivo a la entrada. En este caso

$$\langle u | M^T \dot{q} \rangle \geq \alpha \|M^T \dot{q}\|_2^2 + \beta$$

para algún $\alpha > 0$, $\beta \in \mathcal{R}$ y toda $u \in \mathcal{L}_{2e}^m$.

◇◇◇

Capítulo 2. Modelado de Sistemas Electromecánicos

Prueba. La propiedad se establece comenzando por considerar la derivada con respecto al tiempo del hamiltoniano, definido como la energía total del sistema, es decir

$$\mathcal{H}(q, \dot{q}) = T'(q, \dot{q}) + V(q)$$

Para obtener tal derivada se considera lo siguiente

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \ddot{q} \quad (2.2.8)$$

Donde el segundo término del lado derecho puede escribirse también como

$$\left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right]^T \ddot{q} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right]^T \dot{q} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right]^T \dot{q} \quad (2.2.9)$$

sustituyendo (2.2.9) en (2.2.8)

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} \dot{q} + \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right]^T \dot{q} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right]^T \dot{q} \quad (2.2.10)$$

agrupando términos en (2.2.10) se obtiene

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} \right]^T \dot{q} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right]^T \dot{q} - \mathcal{L}(q, \dot{q}) \quad (2.2.11)$$

de (2.1.24) se observa que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} = Mu - \frac{\partial \mathcal{J}(\dot{q})}{\partial \dot{q}} \quad (2.2.12)$$

mientras que, de acuerdo con [2],

$$\mathcal{H}(q, \dot{q}) = \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \dot{q} - \mathcal{L}(q, \dot{q}) \quad (2.2.13)$$

de esta manera, sustituyendo (2.2.12) y (2.2.13) en (2.2.11) se obtiene

$$\left[Mu - \frac{\partial \mathcal{J}(\dot{q})}{\partial \dot{q}} \right]^T \dot{q} = \mathcal{H}(q, \dot{q}) \quad (2.2.14)$$

$$u^T M^T \dot{q} - \left(\frac{\partial \mathcal{J}(\dot{q})}{\partial \dot{q}} \right)^T \dot{q} = \mathcal{H}(q, \dot{q})$$

integrando de 0 a t

$$\int_0^t u^T M^T \dot{q} dt - \int_0^t \left(\frac{\partial \mathcal{J}(\dot{q})}{\partial \dot{q}} \right)^T \dot{q} dt = \mathcal{H}(q, \dot{q}) - \mathcal{H}(0,0)$$

$$\underbrace{\mathcal{H}(q, \dot{q}) - \mathcal{H}(0,0)}_{\text{energía almacenada}} + \underbrace{\int_0^t \left(\frac{\partial \mathcal{J}(\dot{q})}{\partial \dot{q}} \right)^T \dot{q} dt}_{\text{disipada}} = \underbrace{\int_0^t u^T M^T \dot{q} dt}_{\text{suministrada}} \quad (2.2.15)$$

Como la estructura de la función de co-energía cinética, dada en la suposición 2.2.1, es una forma cuadrática y dado que la función de energía potencial está acotada por abajo según la suposición 2.2.2, es claro que

$$\mathcal{H}(q, \dot{q}) \geq c \quad (2.2.16)$$

Capítulo 2. Modelado de Sistemas Electromecánicos

de (2.2.15) y (2.2.16) se tiene que

$$\mathcal{H}(q, \dot{q}) = \int_0^t u^T M^T \dot{q} dt - \int_0^t \left(\frac{\partial \mathcal{J}(\dot{q})}{\partial \dot{q}} \right)^T \dot{q} dt + \mathcal{H}(0,0) \geq c$$

de aquí

$$\langle u | M^T \dot{q} \rangle \geq c - \mathcal{H}(0,0) + \int_0^t \left(\frac{\partial \mathcal{J}(\dot{q})}{\partial \dot{q}} \right)^T \dot{q} dt$$

definiendo $\beta = c - \mathcal{H}(0,0)$ y aplicando la desigualdad (2.2.6) se obtiene

$$\langle u | M^T \dot{q} \rangle \geq \beta + \alpha \int_0^t \|\dot{q}\|^2 dt$$

$$\langle u | M^T \dot{q} \rangle \geq \beta + \alpha \|\dot{q}\|_2^2$$

y de esta manera se establece la propiedad. □□□

Observación 2.2.7 De la ecuación (2.2.14) se observa que una forma de estabilizar al sistema Euler-Lagrange, asegurando que la energía total sea estrictamente decreciente ($\dot{\mathcal{H}}(\cdot, \cdot) < 0$), es seleccionando un compensador que defina un operador estrictamente pasivo $-M^T \dot{q} \mapsto u$. Lo cual no es otra cosa que una retroalimentación proporcional de las velocidades generalizadas.

Observación 2.2.8 Nótese que el operador $u \mapsto M^T \dot{q}$ puede ser estrictamente pasivo a la salida aun si la energía no se disipa "en todas direcciones", es decir no se requiere que aparezcan todas y cada una de las velocidades generalizadas en el lado derecho de (2.2.6). De esta forma, es suficiente con asegurar que

$$\dot{q}^T \frac{\partial \mathcal{J}(\dot{q})}{\partial \dot{q}} \geq \alpha \|M^T \dot{q}\|^2$$

Por otra parte, una de las propiedades de estabilidad interna que caracterizan a los sistemas Euler-Lagrange es la siguiente:

Proposición 2.2.9 [8] (estabilidad global y asintótica (GAS) con amortiguamiento completo). Los puntos de equilibrio de un sistema EL con $u = 0$ son $(q, \dot{q}) = (\bar{q}, 0)$ donde \bar{q} es la solución de $\frac{\partial \mathcal{V}(q)}{\partial q} = 0$. El equilibrio es único y estable si la energía potencial es

una función estrictamente convexa, es decir si $\frac{\partial^2 V(q)}{\partial q^2} \geq \varepsilon I_n > 0$. Más aún, el equilibrio es asintóticamente estable si la función de disipación de Rayleigh es estrictamente pasiva a la entrada. ◇◇◇

Prueba. El primer enunciado se establece al sustituir $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = T'(q, \dot{q}) - V(q)$, $Q = Mu$ con $u = 0$ en (2.1.24) y evaluar en $\dot{q} = 0$ haciendo uso de (2.2.4):

Capítulo 2. Modelado de Sistemas Electromecánicos

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} = Mu - \frac{\partial \mathcal{J}(\dot{q})}{\partial \dot{q}}$$

evaluando en $u = 0$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial (T'(q, \dot{q}) - V(q))}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial (T'(q, \dot{q}) - V(q))}{\partial q} = - \frac{\partial \mathcal{J}(\dot{q})}{\partial \dot{q}}$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T'(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial (T'(q, \dot{q}) - V(q))}{\partial q} = - \frac{\partial \mathcal{J}(\dot{q})}{\partial \dot{q}}$$

de la suposición 2.2.1 $T'(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q}$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} \right) + \frac{\partial V(q)}{\partial q} = - \frac{\partial \mathcal{J}(\dot{q})}{\partial \dot{q}}$$

$$\frac{d}{dt} (D(q) \dot{q}) - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} \right) + \frac{\partial V(q)}{\partial q} = - \frac{\partial \mathcal{J}(\dot{q})}{\partial \dot{q}}$$

evaluando en $\dot{q} = 0$ para obtener los puntos de equilibrio resulta

$$\frac{\partial V(q)}{\partial q} = 0$$

la solución de la última ecuación, $(q, \dot{q}) = (\bar{q}, 0)$, define los puntos de equilibrio del sistema EL.

Si $V(q)$ es estrictamente convexa entonces se cumple que

$$\frac{\partial^2 V(q)}{\partial q^2} \geq \epsilon I > 0$$

por lo que el punto de equilibrio $(q, \dot{q}) = (\bar{q}, 0)$ es un mínimo de $V(q)$ y además es único.

La estabilidad del equilibrio puede establecerse de la siguiente manera: Se propone como función candidata de Lyapunov a la energía total del sistema (lo que es habitual en el análisis de sistemas EL) más un término constante c_1

$$\mathcal{X}(q, \dot{q}) = T'(q, \dot{q}) + V(q) + c_1$$

donde $c_1 \doteq -V(\bar{q})$ para asegurar que $\mathcal{X}(\bar{q}, 0) = 0$. Derivando con respecto al tiempo la función candidata de Lyapunov se obtiene la ecuación (2.2.14)

$$\dot{\mathcal{X}}(q, \dot{q}) = \dot{q}^T Mu - \dot{q}^T \frac{\partial \mathcal{J}(\dot{q})}{\partial \dot{q}}$$

evaluando en $u = 0$ se tiene

$$\dot{\mathcal{X}}(q, \dot{q}) = -\dot{q}^T \frac{\partial \mathcal{J}(\dot{q})}{\partial \dot{q}}$$

aplicando la desigualdad (2.2.6)

Capítulo 2. Modelado de Sistemas Electromecánicos

$$\dot{\mathcal{V}}(q, \dot{q}) = -\dot{q}^T \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \dot{q}} \leq -\alpha \|\dot{q}\|^2, \quad \alpha \geq 0$$

lo que implica estabilidad en el sentido de Lyapunov.

Si la función de disipación de Rayleigh es estrictamente pasiva a la entrada, entonces $\alpha > 0$ lo que implica lo siguiente

$$\dot{\mathcal{V}}(q, \dot{q}) < 0 \quad \forall \dot{q} \neq 0, \quad \text{si } \dot{q} = 0 \text{ entonces } q = \bar{q}$$

de esta manera, invocando el principio de invariancia de LaSalle (ver el enunciado completo de este principio en el apéndice A al final de este trabajo) se concluye que el equilibrio es asintóticamente estable.

□□□

Observación 2.2.10. Es importante subrayar el hecho de que la proposición 2.2.6 sobre pasividad es independiente de la forma de la función de energía potencial. Este hecho, junto con la proposición 2.2.9, permite separar de manera natural las tareas del controlador en la de moldear la energía potencial para estabilizar en el equilibrio adecuado y la de hacer al punto de equilibrio asintóticamente estable.

2.3 Modelo EL para sistemas electromecánicos

El modelo para el sistema electromecánico generalizado se puede obtener, siguiendo a [5], al considerar que el lagrangiano total de la planta está formado por una parte mecánica y otra eléctrica. En este trabajo el lagrangiano total de la planta se define como

$$\mathcal{L}_p(q_p, \dot{q}_p) = T'_m(q_m, \dot{q}_m) + T'_e(q_m, \dot{q}_e) - V_m(q_m) - V_e(q_m, q_e) \quad (2.3.1)$$

el lagrangiano para el subsistema mecánico es

$$\mathcal{L}_m(q_m, \dot{q}_m) = T'_m(q_m, \dot{q}_m) - V_m(q_m) \quad (2.3.2)$$

mientras que el lagrangiano del subsistema eléctrico es

$$\mathcal{L}_e(q_m, q_e, \dot{q}_e) = T'_e(q_m, \dot{q}_e) - V_e(q_m, q_e) \quad (2.3.3)$$

donde $q_m \in \mathcal{R}^m$ representa las coordenadas generalizadas de origen mecánico, $q_e \in \mathcal{R}^e$ las de origen eléctrico y para el sistema electromecánico completo se tiene como vector de coordenadas generalizadas

$$q_p = \begin{bmatrix} q_m^T & q_e^T \end{bmatrix}^T \in \mathcal{R}^{m+e} \quad (2.3.4)$$

Para aclarar los argumentos de las funciones de energía que aparecen en las ecuaciones (2.3.1-2.3.3) considere el sistema electromecánico de la figura 2.3.1

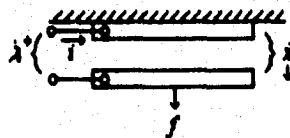
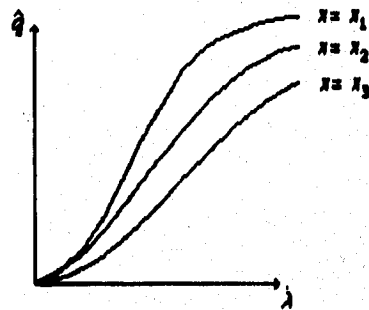


Figura 2.3.1

Capítulo 2. Modelado de Sistemas Electromecánicos

El dispositivo aquí presentado almacena energía eléctrica mediante un campo eléctrico (el caso en que el sistema almacena energía eléctrica mediante a un campo magnético es completamente análogo [5]). En la figura aparecen dos placas conductoras las cuales están dispuestas de tal forma que si existe un voltaje λ entre ellas, entonces se genera un campo eléctrico que almacena energía eléctrica. La placa inferior es movable con respecto a la superior, siendo \dot{x} la velocidad de la placa inferior con respecto a la superior y f la fuerza aplicada a la placa inferior.

Una manera de describir el comportamiento dinámico de esta clase de dispositivos es mediante sus curvas características, las cuales en este caso son gráficas de la carga acumulada \hat{q} en función de la diferencia de potencial λ . Estas curvas se grafican para distintas posiciones fijas de la placa inferior en la gráfica 2.3.2.



Gráfica 2.3.2

La función de energía para un dispositivo como el de la figura 2.3.1 puede obtenerse fijando la posición mecánica en su valor final, para luego hacer crecer el valor de carga eléctrica desde cero hasta su valor final, resultando

$$V_e(\hat{q}, x) = \int_0^{\hat{q}} \lambda(\hat{q}, x) d\hat{q}.$$

Similarmente, la función de co-energía para un dispositivo como el de la figura 2.3.1 puede obtenerse fijando la posición mecánica en su valor final, para luego hacer crecer el valor de λ desde cero hasta su valor final, resultando

$$T_e'(\lambda, x) = \int_0^{\lambda} \hat{q}(\lambda, x) d\lambda.$$

Volviendo a considerar las ecuaciones (2.3.1-2.3.3) es claro que

$$\mathcal{L}_p(q_p, \dot{q}_p) = \mathcal{L}_m(q_m, \dot{q}_m) + \mathcal{L}_e(q_m, q_e, \dot{q}_e)$$

Sobre las funciones de co-energía mecánica y eléctrica se asume que son de la estructura descrita en (2.2.1) y (2.2.2)

$$T_m'(q_m, \dot{q}_m) = \frac{1}{2} \dot{q}_m^T D_m(q_m) \dot{q}_m; D_m(q_m) = D_m^T(q_m) > 0, \forall q_m \in \mathcal{R}^m \quad (2.3.5)$$

$$T_e'(q_m, \dot{q}_e) = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T D_e(q_m) \dot{q}_e; D_e(q_m) = D_e^T(q_m) > 0, \forall q_m \in \mathcal{R}^m \quad (2.3.6)$$

mientras que las funciones de energía potencial son acotadas por abajo siguiendo la suposición 2.2.2

Capítulo 2. Modelado de Sistemas Electromecánicos

$$V_m(q_m) \geq c_m; \quad c_m \in \mathfrak{R} \quad (2.3.7)$$

$$V_e(q_m, q_e) \geq c_e; \quad c_e \in \mathfrak{R} \quad (2.3.8)$$

Con objeto de que el modelo sea lo más general posible, se asume que existen términos disipativos en el sistema electromecánico tanto en la parte mecánica como en la eléctrica. Estos términos disipativos pueden ser modelados mediante la función de disipación de Rayleigh y su estructura se asume de la siguiente forma

$$\mathcal{J}_m(\dot{q}_m) = \frac{1}{2} \dot{q}_m^T R_m \dot{q}_m; \quad R_m \in \mathfrak{R}^{m \times m}; \quad R_m = R_m^T > 0 \quad (2.3.9)$$

$$\mathcal{J}_e(\dot{q}_e) = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T R_e \dot{q}_e; \quad R_e \in \mathfrak{R}^{e \times e}; \quad R_e = R_e^T > 0 \quad (2.3.10)$$

La estructura dada en (2.3.9) y (2.3.10) es la que presentan los amortiguadores mecánicos y resistores eléctricos con comportamiento lineal. Además, la estructura asumida en las últimas dos ecuaciones permite cumplir con las suposiciones 2.2.3 y 2.2.4 sobre la función de disipación de Rayleigh.

Para permitir que no necesariamente todas las coordenadas de origen eléctrico estén actuadas, el vector de coordenadas eléctricas se divide así

$$q_e = \begin{bmatrix} q_{e_1}^T & q_{e_2}^T \end{bmatrix}^T; \quad q_{e_1} \in \mathfrak{R}^{e_1}; \quad q_{e_2} \in \mathfrak{R}^{e_2}; \quad e = e_1 + e_2 \quad (2.3.11)$$

siendo q_{e_1} las coordenadas eléctricas no actuadas y q_{e_2} las actuadas.

Como matriz y vector de entrada a la planta se tiene

$$M_p = \begin{bmatrix} 0_{(m+e_1) \times e_2} \\ I_{e_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{m \times e_2} \\ M_e \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{(m+e) \times e_2}; \quad u_p = u_{e_2} \in \mathfrak{R}^{e_2} \quad (2.3.12)$$

donde la matriz de entrada a la parte eléctrica del sistema se le da la siguiente estructura

$$M_e = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{e_2} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{e \times e_2} \quad (2.3.13)$$

de tal forma que se cumple

$$q_{e_2} = M_e^T q_e \quad (2.3.14)$$

De esta manera, la única entrada considerada para el sistema es

$$u_{e_2} \in \mathfrak{R}^{e_2} \quad (2.3.15)$$

dejando a toda la parte mecánica y a las coordenadas eléctricas denotadas por q_{e_1} sin entrada de control.

Aplicando la ecuación (2.1.24) al lagrangiano dado en (2.3.1) cuya estructura se define en (2.3.4-2.3.8) se obtiene el modelo general para los sistemas electromecánicos

Capítulo 2. Modelado de Sistemas Electromecánicos

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} D_m(q_m)\ddot{q}_m + \dot{D}_m(q_m)\dot{q}_m \\ D_e(q_m)\ddot{q}_e + \dot{D}_e(q_m)\dot{q}_e \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial(\dot{q}_m^T D_m(q_m)\dot{q}_m)}{\partial q_m} + \frac{\partial(\dot{q}_e^T D_e(q_m)\dot{q}_e)}{\partial q_m} \\ 0 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \frac{\partial V_m(q_m)}{\partial q_m} + \frac{\partial V_e(q_m, q_e)}{\partial q_m} \\ \frac{\partial V_e(q_m, q_e)}{\partial q_e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_m\dot{q}_m \\ R_e\dot{q}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{e2} \end{bmatrix} u_{e2} \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

En este trabajo, el vector q_m denota posición mecánica por lo que para aclarar la notación, en lo que resta de este capítulo, se emplea

$$q_m = x \in \mathcal{R}^m \quad (2.3.17)$$

en el mismo sentido, la matriz $D_m(q_m)$ representa a la inercia presente en el sistema, es decir a las masas cuando la parte mecánica es traslacional, por lo que se emplea también

$$D_m(q_m) = M(x) \in \mathcal{R}^{m \times m} \quad (2.3.18)$$

En lo concerniente a la parte eléctrica, cuando el análisis se realiza por nodos, las coordenadas generalizadas tienen unidades de flujo magnético, la co-energía cinética es la que se almacena en campos eléctricos, es decir en capacitores, y la energía potencial es la que se almacena en campos magnéticos, es decir en inductores. Con esto se tiene [5]

$$q_e = \lambda \in \mathcal{R}^e \quad (2.3.19)$$

$$D_e(q_m) = C(x) \in \mathcal{R}^{e \times e} \quad (2.3.20)$$

$$T_e'(q_m, \dot{q}_e) = \frac{1}{2} \dot{\lambda}^T C(x) \dot{\lambda} \in \mathcal{R} \quad (2.3.21)$$

$$V_e(q_m, q_e) = W_{mg}(x, \lambda) \in \mathcal{R} \quad (2.3.22)$$

Por otra parte, cuando el análisis se realiza por mallas, las coordenadas generalizadas tienen unidades de carga eléctrica, la co-energía cinética es la que se almacena en campos magnéticos, es decir en inductores, y la energía potencial es la que se almacena en campos eléctricos, es decir en capacitores. Con esto se tiene [5]

$$q_e = \hat{q} \in \mathcal{R}^e \quad (2.3.23)$$

$$D_e(q_m) = L(x) \in \mathcal{R}^{e \times e} \quad (2.3.24)$$

$$T_e'(q_m, \dot{q}_e) = \frac{1}{2} \dot{\hat{q}}^T L(x) \dot{\hat{q}} \in \mathcal{R} \quad (2.3.25)$$

$$V_e(q_m, q_e) = W_e(x, \hat{q}) \in \mathcal{R} \quad (2.3.26)$$

Cuando el análisis de la parte eléctrica se realiza por nodos el modelo que se obtiene al sustituir (2.3.17-2.3.22) en (2.3.16) es

Capítulo 2. Modelado de Sistemas Electromecánicos

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} M(x)\ddot{x} + \dot{M}(x)\dot{x} \\ C(x)\dot{\lambda} + \dot{C}(x)\lambda \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial(\dot{x}^T M(x)\dot{x})}{\partial x} + \frac{\partial(\dot{\lambda}^T C(x)\lambda)}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} \frac{\partial V_m(x)}{\partial x} + \frac{\partial W_{mg}(x,\lambda)}{\partial x} \\ \frac{\partial W_{mg}(x,\lambda)}{\partial \lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_m \dot{x} \\ R_e \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{e_2} \end{bmatrix} u_{e_2}
 \end{aligned} \tag{2.3.27}$$

mientras que cuando el análisis se realiza por mallas el modelo que se obtiene al sustituir (2.3.17-2.3.18) y (2.3.23-2.3.26) en (2.3.16) es

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} M(x)\ddot{x} + \dot{M}(x)\dot{x} \\ L(x)\ddot{q} + \dot{L}(x)\dot{q} \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial(\dot{x}^T M(x)\dot{x})}{\partial x} + \frac{\partial(\dot{q}^T L(x)\dot{q})}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} \frac{\partial V_m(x)}{\partial x} + \frac{\partial W_o(x,\dot{q})}{\partial x} \\ \frac{\partial W_o(x,\dot{q})}{\partial \dot{q}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_m \dot{x} \\ R_e \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{e_2} \end{bmatrix} u_{e_2}
 \end{aligned} \tag{2.3.28}$$

Capítulo 3

Control por Moldeo de Energía

En este capítulo se presentan algunos resultados relacionados con la filosofía de diseño de la estrategia de control conocida como moldeo de energía [8], [10]. En esta filosofía se considera de manera fundamental a la estructura física de la planta, aprovechando sus propiedades para poderla controlar. Los resultados aquí presentados son el punto de partida para obtener los resultados principales de este trabajo que aparecen en el siguiente capítulo.

Primeramente se introduce el caso tratado en [10] donde la planta es completamente actuada —es decir hay tantas entradas de control como grados de libertad— y posteriormente se muestra el resultado reportado en [8] para controlar sistemas subactuados.

3.1 Sistemas actuados

Considere, como en [10], un sistema mecánico generalizado que cumple con las suposiciones 2.2.1-2.2.5. Donde al lagrangiano del sistema se le denota por

$$L_p(q_p, \dot{q}_p) = T_p(q_p, \dot{q}_p) - V_p(q_p),$$

con matriz de entrada

$$M_p \in \mathcal{R}^{n_p \times m_p}$$

asumiendo que tiene rango completo por columnas, y con vector de entradas de control

$$u_p \in \mathcal{R}^{m_p}.$$

Entonces, aplicando la ecuación Euler-Lagrange, despreciando como en [10] los términos disipativos

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L_p(q_p, \dot{q}_p)}{\partial \dot{q}_p} \right] - \frac{\partial L_p(q_p, \dot{q}_p)}{\partial q_p} = M_p u_p$$

se obtienen las ecuaciones dinámicas del sistema.

Cabe mencionar en este momento que para el caso particular cuando se tiene el mismo número de entradas de control que grados de libertad, es decir para sistemas completamente actuados, se cumple que $m_p = n_p$, y la matriz de entrada es invertible.

Considerando el problema de estabilizar esta clase de sistemas en un punto arbitrario $\bar{q}_p = [\bar{q}_{p_1}, \dots, \bar{q}_{p_{n_p}}]^T \in \mathcal{R}^{n_p}$, se observa en [10] que, desde el punto de vista de los

sistemas mecánicos, el equilibrio del sistema estará en el punto deseado y será asintóticamente estable si la función de energía potencial tiene un mínimo en dicho punto y el sistema está completamente amortiguado, es decir, tiene una función de disipación definida positiva. Con base en lo anterior se propone la siguiente ley de control para estabilizar sistemas mecánicos

Capítulo 3. Control por Moldeo de Energía

$$u_p = -\frac{\partial V_0^T(q_p)}{\partial q_p} + \frac{\partial V_p^T(q_p)}{\partial q_p} - \bar{Q}\dot{q}_p \quad (3.1.1)$$

Al usar (3.1.1) en (2.1.24) se observa que el segundo término del lado derecho de la ley de control sirve para cancelar el término debido a la función de energía potencial original del sistema; el primer término introduce una nueva función de energía potencial con el fin de poner el equilibrio en el lugar deseado; y el tercer término, donde $\bar{Q} = \bar{Q}^T > 0$, consigue, mediante una retroalimentación de velocidades generalizadas, que haya una función de disipación definida positiva. Para garantizar que el punto de equilibrio es único se emplean argumentos similares a los usados en la proposición 2.2.9.

El haber cambiado la función de energía potencial del sistema provoca que la energía total del sistema en lazo cerrado esté dada por

$$\bar{H}_p(q_p, \dot{q}_p) = T_p'(q_p, \dot{q}_p) + V_0(q_p) \quad (3.1.2)$$

En [10] se muestra que la función de energía total en lazo cerrado cumple como función candidata de Lyapunov para probar la estabilidad asintótica del sistema. Derivando (3.1.2) con respecto al tiempo y evaluando a lo largo de las trayectorias del sistema se obtiene

$$\dot{\bar{H}}_p(q_p, \dot{q}_p) = -\dot{q}_p^T \bar{Q} \dot{q}_p \quad (3.1.3)$$

luego, invocando el principio de invariancia de LaSalle (ver apéndice A), se concluye la estabilidad asintótica del equilibrio.

Observación 3.1.1. En la ecuación (3.1.1) se observa que cuando no se consideran términos debidos a la función de disipación de Rayleigh, es decir cuando $\mathcal{J}_p(\dot{q}_p) = 0$, como en [10], la derivada del hamiltoniano, y por lo tanto la estabilidad asintótica del equilibrio, queda determinada únicamente por la entrada al sistema.

Este esquema marca el inicio del control por moldeo de energía y resume las ideas fundamentales de esta filosofía de diseño. Sin embargo, las dos desventajas importantes que tiene la estrategia propuesta en [10] son: la suposición de que la función de energía potencial original es conocida para poder cancelarla y que se tiene que medir todo el estado para contar con un sistema completamente actuado.

3.2 Sistemas subactuados

En esta parte se generaliza el resultado presentado en la sección anterior en el sentido de relajar la suposición de que todas las coordenadas son actuadas, esto es, aquí sólo una parte del vector de coordenadas generalizadas será actuado. Esta hipótesis permite ampliar la aplicación de la metodología de control por moldeo de energía a plantas subactuadas, en las cuales no es posible cancelar términos de energía potencial ni tampoco inyectar amortiguamiento en la parte no actuada.

Capítulo 3. Control por Moldeo de Energía

En los resultados presentados en [8] se encuentra una metodología que permite regular sistemas subactuados modelados mediante las ecuaciones Euler-Lagrange. La idea principal del trabajo mencionado es que la interconexión de sistemas EL resulta en un nuevo sistema EL, conservando las propiedades particulares presentadas por esta clase de sistemas. De esta forma la co-energía cinética total será igual a la suma de las co-energías cinéticas de los sistemas que se interconectan, sucediendo lo mismo con la energía potencial total del sistema compuesto. Siendo la planta un sistema EL, se propone un controlador con estructura EL haciendo depender a su función de energía potencial de las coordenadas actuadas y medibles de la planta, de esta manera la planta y el controlador quedan debidamente interconectados. La energía potencial del controlador también desempeña la función de moldear apropiadamente la energía potencial del lazo cerrado. En [8] se asume que la planta es un sistema que carece de función de disipación, por lo que se usa un controlador que contiene un término disipativo y así se consigue que el sistema en lazo cerrado esté suficientemente amortiguado. Esta metodología se detalla a continuación.

Considere al sistema cuyo comportamiento dinámico es descrito por (2.1.24) con el vector de coordenadas generalizadas divididas de la siguiente manera

$$q_p = \begin{bmatrix} q_{p_1} \\ q_{p_2} \end{bmatrix}; q_{p_1} \in \mathcal{R}^{n_p-r}, q_{p_2} \in \mathcal{R}^r \quad (3.2.1)$$

donde q_{p_1} denota las coordenadas no actuadas y q_{p_2} las coordenadas actuadas y disponibles para ser medidas. El controlador está definido por el lagrangiano

$$\mathcal{L}_c(q_c, q_{p_2}, \dot{q}_c) = T'_c(q_c, \dot{q}_c) - V_c(q_c, q_{p_2}) \quad (3.2.2)$$

donde $q_c \in \mathcal{R}^{n_c}$ representa las coordenadas generalizadas de este nuevo sistema.

Definiendo al vector de coordenadas generalizadas en lazo cerrado como

$$q_{LC} = \begin{bmatrix} q_c \\ q_p \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{n_c+n_p} \quad (3.2.3)$$

el lagrangiano del sistema en lazo cerrado estará dado por

$$\mathcal{L}_{LC}(q_{LC}, \dot{q}_{LC}) = T'_{LC}(q_{LC}, \dot{q}_{LC}) - V_{LC}(q_{LC}) \quad (3.2.4)$$

donde

$$\begin{aligned} T'_{LC}(q_{LC}, \dot{q}_{LC}) &= T'_p(q_p, \dot{q}_p) + T'_c(q_c, \dot{q}_c) \\ V_{LC}(q_{LC}) &= V_p(q_p) + V_c(q_c, q_{p_2}) \end{aligned}$$

para la función de disipación de Rayleigh en lazo cerrado se tiene algo semejante

$$\mathcal{J}_{LC}(\dot{q}_{LC}) = \mathcal{J}_p(\dot{q}_p) + \mathcal{J}_c(\dot{q}_c)$$

con lo anterior, las ecuaciones dinámicas para el sistema en lazo cerrado están dadas por

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_p(q_p, \dot{q}_p)}{\partial \dot{q}_p} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}_p(q_p, \dot{q}_p)}{\partial q_p} + \frac{\partial \mathcal{J}_p(\dot{q}_p)}{\partial \dot{q}_p} = M_p u_p$$

con

Capítulo 3. Control por Moldeo de Energía

$$u_p = -\frac{\partial V_c(q_c, q_{p2})}{\partial q_{p2}} \quad (3.2.5)$$

y

$$M_p = \begin{bmatrix} 0 & (n_p - r) \times r \\ I_r \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n_p \times r} \quad (3.2.6)$$

para la planta y

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_c(q_c, q_{p2}, \dot{q}_c)}{\partial \dot{q}_c} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}_c(q_c, q_{p2}, \dot{q}_c)}{\partial q_c} + \frac{\partial \mathcal{V}_c(\dot{q}_c)}{\partial \dot{q}_c} = 0 \quad (3.2.7)$$

para el controlador.

Cabe hacer notar cómo (3.2.5), donde se ha seleccionado a la energía potencial del controlador dependiente de las coordenadas medibles de la planta, permite interconectar apropiadamente a la planta con el controlador.

La idea presentada en [8] puede enunciarse de la siguiente manera: Si las coordenadas están amortiguadas y $V_c(q_c, q_{p2})$ se escoge de tal forma que domine a $V_{LC}(q_{LC})$ y la haga estrictamente convexa, entonces el punto de equilibrio, determinado por $V_c(q_c, q_{p2})$, es único y asintóticamente estable.

Esta idea está contenida en la siguiente proposición, fundamentada en las proposiciones 2.2.6 y 2.2.9.

Proposición 3.2.1. [8] Considere la planta EL dada por (2.1.24) y asuma lo siguiente

A.1 Se cumple la siguiente implicación ($u_p = \text{cte.}$ y $\dot{q}_{p2} = 0$) $\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} q_p = \text{cte.}$

A.2 Se puede encontrar una función $V_{c2}(q_{p2}) : \mathfrak{R}^r \rightarrow \mathfrak{R}^+$ tal que

$$\frac{\partial^2 V_{c2}(q_{p2})}{\partial q_{p2}^2} \geq \epsilon I_{n_p}; \quad \epsilon > 0 \quad (3.2.8)$$

donde

$$V_1(q_p) \doteq V_p(q_p) + V_{c2}(q_{p2}) \quad (3.2.9)$$

y

$$\left. \frac{\partial V_1(q_p)}{\partial q_p} \right|_{q_p = \bar{q}_p} = 0; \quad \bar{q}_p = q_{pd} \quad (3.2.10)$$

Bajo estas condiciones, el controlador EL dado según (3.2.7) donde

$$\dot{q}_c^T \frac{\partial \mathcal{V}_c(\dot{q}_c)}{\partial \dot{q}_c} \geq \alpha \|\dot{q}_c\|^2 \quad (3.2.11)$$

para algún $\alpha > 0$, y

Capítulo 3. Control por Moldeo de Energía

$$V_c(q_c, q_{p_2}) = \frac{1}{2}(q_c + A_1 q_{p_2})^T A_2 (q_c + A_1 q_{p_2}) + V_{c_2}(q_{p_2}) \quad (3.2.12)$$

con A_1 una matriz de rango completo y $A_2 > 0$, resuelve el problema de estabilización global por retroalimentación de salida. $\diamond \diamond \diamond$

Sobre la proposición 3.2.1 se comenta lo siguiente.

La suposición A.1, que en [8] recibe el nombre de condición de propagación de la disipación, se puede entender así: cuando el sistema amortiguado, es decir el controlador, tiende asintóticamente su valor mínimo de energía potencial, *i.e.* su punto de equilibrio, las velocidades generalizadas de la planta se van a cero. En consecuencia q_p llega a un valor constante \bar{q}_p . El controlador se encarga de moldear la energía potencial en lazo cerrado de tal forma que este valor constante sea el valor deseado.

Observación 3.2.2. De (2.2.14) es claro que si se consideran plantas que carecen de términos disipativos y además se suponen no medibles las velocidades generalizadas de la planta, entonces el lado izquierdo de (2.2.14) no puede hacerse menor a cero. Esto implica que no se puede concluir la estabilidad asintótica de este tipo de plantas sin recurrir a la suposición A.1. Por otro lado, si se cuenta con una planta cuyo modelo incluye términos disipativos y/o se asumen medibles las velocidades generalizadas de la parte actuada de la planta, entonces sí es posible conseguir que el lado izquierdo de (2.2.14) sea menor a cero, garantizando así la estabilidad asintótica de la planta sin necesidad de emplear A.1. En particular, este trabajo se encuentra en el segundo caso, es decir si se considera que existen términos disipativos y se asumen medibles algunas velocidades generalizadas, por lo que en lo que resta del trabajo no será necesario hacer uso de A.1.

Observación 3.2.3. En A.2, el primer término de (3.2.12) puede ser visto como la energía potencial del filtro lineal

$$y(s) = \left[(sI + A_2)^{-1} A_1 s \right] v(s)$$

que se propone en [3] para aproximar mediante $y(s)$ la derivada con respecto al tiempo de alguna función diferenciable $v(s)$. Esto se observa más claramente si se propone (3.2.12) como la energía potencial del controlador, asumiendo adicionalmente que las matrices A_1 y A_2 son diagonales, se escoge $T'_c(q_c, \dot{q}_c) = 0$ y $\mathcal{J}_c(\dot{q}_c) = \frac{1}{2} \dot{q}_c^T \dot{q}_c$, para obtener la ecuación dinámica del controlador al sustituir los parámetros propuestos en (3.2.7), resultando:

$$\dot{q}_c = -A_2 (q_c + A_1 q_{p_2}) \Rightarrow q_c = -(sI + A_2)^{-1} A_2 A_1 q_{p_2} \quad (3.2.13)$$

donde $s = d/dt$.

Anteriormente, en (3.2.5), se tenía que

$$u_p = -\frac{\partial V_c(q_c, q_{p_2})}{\partial q_{p_2}} = -A_1 A_2 (q_c + A_1 q_{p_2}) - \frac{\partial V_{c_2}(q_{p_2})}{\partial q_{p_2}} \quad (3.2.14)$$

Capítulo 3. Control por Moldeo de Energía

sustituyendo (3.2.13) en (3.2.14) se obtiene

$$u_p = -A_1 A_2 \left(-(sI + A_2)^{-1} A_2 A_1 q_{p2} + A_1 q_{p2} \right) - \frac{\partial V_{c2}(q_{p2})}{\partial q_{p2}}$$

$$u_p = -A_1 A_2 (sI + A_2)^{-1} \left[(sI + A_2) - A_2 \right] A_1 q_{p2} - \frac{\partial V_{c2}(q_{p2})}{\partial q_{p2}}$$

$$u_p = -A_1 A_2 (sI + A_2)^{-1} (sI) A_1 q_{p2} - \frac{\partial V_{c2}(q_{p2})}{\partial q_{p2}}$$

Como A_1 y A_2 son diagonales, entonces

$$u_p = - \left[A_1^2 A_2 (sI + A_2)^{-1} (sI) \right] q_{p2} - \frac{\partial V_{c2}(q_{p2})}{\partial q_{p2}} \quad (3.2.15)$$

siendo el primer término del lado derecho en (3.2.15) la derivada aproximada de q_{p2} . De esta manera, en (3.2.15) se puede apreciar que la función desempeñada por el primer término de (3.2.12) es introducir amortiguamiento a la planta a través de la retroalimentación de una aproximación de sus velocidades generalizadas; mientras que la función que desempeña el segundo término en (3.2.12) es moldear la energía potencial de lazo cerrado, explicándose así la exclusión del primer término de (3.2.12) en la definición (3.2.9). Aquí se puede afirmar que cuando algunas velocidades de la planta estén disponibles para medición, será posible cambiar la estructura del primer término de (3.2.12) por alguna otra más conveniente.

Capítulo 4

Control de Sistemas Electromecánicos

En este capítulo se presentan los resultados principales de este trabajo. Con base en lo expuesto en los capítulos 2 y 3 en este capítulo se muestra un par de esquemas de control que resuelven el problema que a continuación se formula. El primer esquema que se presenta funciona siempre que las condiciones iniciales de las coordenadas eléctricas actuadas sean conocidas, de lo contrario se tiene un error de estado estable. En el segundo esquema se adiciona un término integral a la ley de control, lo que permite resolver —aunque localmente— el problema sin error de estado estable aun cuando las condiciones iniciales de las coordenadas eléctricas actuadas son desconocidas.

4.1 Formulación del problema

El problema que se analiza en la sección 4.2 de este capítulo puede enunciarse de la siguiente manera:

Considere un sistema electromecánico como el de la sección 2.3, compuesto por e puertos eléctricos, donde se asume que sólo $e_2 \leq e$ son actuados, y de m puertos no actuados de origen mecánico. Los e puertos eléctricos se relacionan con elementos inductivos o capacitivos pero sólo las derivadas de las coordenadas asociadas con los puertos actuados se asumen disponibles para medición. Además, se asume que los puertos mecánicos tienen una estructura tal que los elementos relacionados con ellos pueden almacenar energía cinética y potencial, *i.e.* existen masas y resortes en el subsistema mecánico dejando opcional la situación en que aparecen elementos disipativos. Entonces encuentre un controlador tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (q_m - q_{m_d}) = 0$$

donde q_m son las posiciones mecánicas actuales y q_{m_d} es el vector constante de posiciones mecánicas deseadas.

El controlador que se propone resolverá el problema expuesto siempre y cuando todas las condiciones iniciales de las coordenadas eléctricas relacionadas con los e_2 puertos actuados sean conocidas. Si tales condiciones iniciales se desconocen entonces existirá un error de estado estable de magnitud proporcional a la diferencia entre las condiciones iniciales del controlador y las reales.

Las características principales del controlador propuesto en este trabajo son:

- Es un controlador por retroalimentación de salida en el sentido de que sólo las corrientes o voltajes *medibles* se usan en su estructura,
- Es un controlador *sin sensores*, ya que ninguna variable mecánica se requiere para conseguir el objetivo deseado, y
- Está globalmente definido, *i.e.* ningún punto singular aparece en su estructura.

Capítulo 4. Control de Sistemas Electromecánicos

Su principal desventaja es que se asumen *conocidos los parámetros del modelo*.

Para eliminar el error de estado estable que puede tener el controlador anterior, el enunciado del problema se modifica permitiendo medir las coordenadas de origen mecánico. El medir estas coordenadas hace posible que en la sección 4.3 del trabajo se añada un término integral a la ley de control inicialmente sugerida. Este término integra el error de posición mecánica y elimina el error de estado estable. El controlador de la sección 4.3 será robusto ante la incertidumbre en las condiciones iniciales de la parte eléctrica del sistema, mientras que sus demás características serán similares a las del controlador presentado en la sección 4.2, exceptuando el hecho de que tendrá sensores en la parte mecánica.

Para demostrar la estabilidad del segundo esquema de control se sigue un procedimiento similar al presentado en [9], donde se obtienen condiciones sobre el valor máximo de la ganancia integral que permiten no perder la estabilidad.

4.2 Control sin sensores de variables mecánicas

El resultado principal de esta sección, un controlador dinámico por retroalimentación de salida sin sensores de variables mecánicas, se presenta en la siguiente proposición. Este esquema de control se basa en los resultados de [8], cuyos aspectos principales se incluyen en la sección 3.2 de este trabajo. Las suposiciones necesarias para enunciar esta proposición son:

Suposición 4.2.1. Las velocidades generalizadas de origen eléctrico \dot{q}_{e_2} , con q_{e_2} definido como en (2.3.14), son las únicas variables disponibles para ser medidas.

Suposición 4.2.2. La matriz y el vector de entrada a la planta están dados por (2.3.12).

Suposición 4.2.3. Los parámetros del sistema son conocidos.

Suposición 4.2.4. Existe una función de energía potencial para el controlador, $V_c(q_c, w)$, donde

$$\dot{w} = \dot{q}_{e_2}; \quad w(0) = w_0 \Rightarrow w = q_{e_2} - q_{e_2}(0) + w(0) \quad (4.2.1)$$

tal que la función $V_p(q_p) + V_c(q_c, w)$ es estrictamente convexa y permite regular las coordenadas generalizadas mecánicas a su valor deseado.

En este momento es preciso decir que la suposición 4.2.1 es muy razonable desde el punto de vista de las aplicaciones, ya que no es posible medir directamente a las coordenadas eléctricas q_{e_2} . Cabe subrayar el hecho de que si se midieran las coordenadas mecánicas para realizar el moldeado de energía, es decir si la función de energía potencial del controlador EL fuera función de q_m , al momento de aplicar las ecuaciones EL aparecería un término del controlador actuando sobre las coordenadas mecánicas, lo que implicaría

Capítulo 4. Control de Sistemas Electromecánicos

que el sistema no fuera más un sistema subactuado. Es por esto que en el diseño del controlador de esta sección se insiste en *no* medir coordenadas mecánicas.

La suposición 4.2.2 asegura que se trabajará con sistemas subactuados, lo que restringe al sistema electromecánico a no tener entrada en la parte mecánica.

La suposición 4.2.3 representa el problema de tener que contar con un sistema cuyos parámetros sean perfectamente conocidos, lo cual es muy difícil desde el punto de vista práctico.

La suposición 4.2.4 es semejante a la suposición A.2 de la proposición 3.2.1 y permite que el punto de equilibrio sea único y esté en el lugar deseado. Por otra parte, la necesidad de introducir la variable w radica en el hecho de que desde el punto de vista práctico resulta imposible medir directamente a las coordenadas generalizadas de origen eléctrico (carga eléctrica o flujo de enlace).

En la siguiente proposición se muestra un esquema de control basado en [8], que emplea las ideas fundamentales de la técnica de moldeo de energía con inyección de amortiguamiento.

Proposición 4.2.5. Considere las suposiciones 4.2.1-4.2.4 y al sistema electromecánico dado por (2.3.16) con una ley de control por retroalimentación dinámica de salida

$$u_{e_2} = u_1 + u_2$$

donde

$$u_1 = -\frac{\partial V_c(q_c, w)}{\partial q_2}$$

es el término que acopla de manera natural a la planta con un controlador EL ubicando el equilibrio del sistema en el lugar deseado, y

$$u_2 = -K_2 \dot{q}_{e_2}; \quad K_2 = K_2^T > 0; \quad K_2 \in \mathcal{R}^{e_2 \times e_2} \quad (4.2.2)$$

inyecta amortiguamiento al sistema al retroalimentar la salida de la planta, la cual se considera como las velocidades eléctricas que pueden ser medibles prácticamente. La dinámica del controlador EL está dada por

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_c(q_c, w, \dot{q}_c)}{\partial \dot{q}_c} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}_c(q_c, w, \dot{q}_c)}{\partial q_c} + \frac{\partial \mathcal{V}_c(\dot{q}_c)}{\partial \dot{q}_c} = 0$$

con parámetros dados por

$$\mathcal{L}_c(q_c, w, \dot{q}_c) = \frac{1}{2} \dot{q}_c^T D_c(q_c) \dot{q}_c - V_c(q_c, w) \quad (4.2.3)$$

donde $q_c \in \mathcal{R}^c$ representa las coordenadas generalizadas del controlador.

La función de energía potencial para el controlador se escoge como

$$V_c(q_c, w) = \frac{1}{2} q_c^T A_2 q_c + V_{c_2}(w) \quad (4.2.4)$$

$$V_{c_2}(w) = \frac{1}{2} (w - \delta)^T K_1 (w - \delta) \quad (4.2.5)$$

Capítulo 4. Control de Sistemas Electromecánicos

$$\delta = K_1^{-1} g_{p_2}(\bar{q}_p) + \bar{q}_{e_2} \quad (4.2.6)$$

donde $K_1 = K_1^T > 0$ y $A_2 > 0$, q_p igual que en (2.3.4) y el vector $g_{p_2}(\bar{q}_p)$ definido como

$$g_{p_2}(\bar{q}_p) = \frac{\partial V_e(q_m, q_e)}{\partial q_{e_2}} \Big|_{\bar{q}_p}; \quad \bar{q}_p = \begin{bmatrix} \bar{q}_m \\ \bar{q}_{e_1} \\ \bar{q}_{e_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{m_d} \\ * \\ * \end{bmatrix} \quad (4.2.7)$$

donde * indica cualquier valor real acotado.

La función de co-energía cinética para el controlador EL se define de acuerdo con la suposición 2.2.1 como

$$T'_c(q_c, \dot{q}_c) = \frac{1}{2} \dot{q}_c^T D_c(q_c) \dot{q}_c; \quad D_c(q_c) = D_c^T(q_c) > 0, \quad \forall q_c \in \mathcal{N}^c \quad (4.2.8)$$

A la función de disipación de Rayleigh $\mathcal{J}_c(\dot{q}_c)$ del controlador se le pide que cumpla con las suposiciones 2.2.3 y 2.2.4, y que tenga la siguiente estructura

$$\mathcal{J}_c(\dot{q}_c) = \frac{1}{2} \dot{q}_c^T R_c \dot{q}_c; \quad R_c = R_c^T > 0 \quad (4.2.9)$$

Bajo estas condiciones, si $w_0 = q_{e_2}(0)$ entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (q_m - q_{m_d}) = 0$$

de otra manera, si $w_0 \neq q_{e_2}(0)$ entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (q_m - q_{m_d}) = \xi$$

con ξ proporcional a la diferencia entre w_0 y $q_{e_2}(0)$. ◇ ◇ ◇

Prueba. El sistema en lazo cerrado queda determinado por el lagrangiano del sistema dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{LC}(q_{LC}, \dot{q}_{LC}) = & T'_c(q_c, \dot{q}_c) + T'_m(q_m, \dot{q}_m) + T'_e(q_m, \dot{q}_e) \\ & - V_c(q_c, w) - V_m(q_m) - V_e(q_m, q_e) \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

donde las funciones de co-energía cinética $T'_c(q_c, \dot{q}_c)$, $T'_m(q_m, \dot{q}_m)$ y $T'_e(q_m, \dot{q}_e)$ tienen una estructura como la que se define en (4.2.8), (2.3.5) y (2.3.6), respectivamente, mientras que la función de energía potencial del controlador $V_c(q_c, w)$ se define en (4.2.4-4.2.7), y $V_m(q_m)$, $V_e(q_m, q_e)$ cumplen con (2.3.7) y (2.3.8). Adicionalmente se considera que

$$q_{LC} = \begin{bmatrix} q_c^T & q_m^T & q_{e_1}^T & q_{e_2}^T \end{bmatrix}^T \quad (4.2.11a)$$

$$\bar{q}_{LC} = \begin{bmatrix} \bar{q}_c^T & \bar{q}_{m_d}^T & \bar{q}_{e_1}^T & \bar{q}_{e_2}^T \end{bmatrix}^T \quad (4.2.11b)$$

Capítulo 4. Control de Sistemas Electromecánicos

$$\bar{q}_{LC} = q_{LC} - \bar{q}_{LC} = \left[\bar{q}_c^T \quad \bar{q}_m^T \quad \bar{q}_{e_1}^T \quad \bar{q}_{e_2}^T \right]^T \in \mathcal{R}^{c+m+e} \quad (4.2.11c)$$

donde \bar{q}_c es punto de equilibrio de las coordenadas generalizadas del controlador q_c .
Aplicando la ecuación Euler-Lagrange dada por (2.1.24) a (4.2.10) resulta

$$\begin{bmatrix} D_c(q_c)\dot{q}_c + \dot{D}_c(q_c)q_c \\ D_m(q_m)\dot{q}_m + \dot{D}_m(q_m)q_m \\ D_e(q_m)\dot{q}_e + \dot{D}_e(q_m)q_e \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial(\dot{q}_c^T D_c(q_c)\dot{q}_c)}{\partial q_c} \\ \frac{\partial(\dot{q}_m^T D_m(q_m)\dot{q}_m)}{\partial q_m} + \frac{\partial(\dot{q}_e^T D_e(q_m)\dot{q}_e)}{\partial q_m} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial V_c(q_c, w)}{\partial q_c} \\ \frac{\partial V_m(q_m)}{\partial q_m} + \frac{\partial V_e(q_m, q_e)}{\partial q_m} \\ \frac{\partial V_e(q_m, q_e)}{\partial q_e} + \frac{\partial V_c(q_c, w)}{\partial q_e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_c \dot{q}_c \\ R_m \dot{q}_m \\ R_e \dot{q}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_e u_2 \end{bmatrix} \quad (4.2.12)$$

donde los parámetros de la planta están definidos por las ecuaciones (2.3.1-2.3.15) y los del controlador por (4.2.1-4.2.9).

Desarrollando los términos de la energía potencial del controlador en (4.2.12) se tiene

$$\begin{bmatrix} D_c(q_c)\dot{q}_c + \dot{D}_c(q_c)q_c \\ D_m(q_m)\dot{q}_m + \dot{D}_m(q_m)q_m \\ D_e(q_m)\dot{q}_e + \dot{D}_e(q_m)q_e \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial(\dot{q}_c^T D_c(q_c)\dot{q}_c)}{\partial q_c} \\ \frac{\partial(\dot{q}_m^T D_m(q_m)\dot{q}_m)}{\partial q_m} + \frac{\partial(\dot{q}_e^T D_e(q_m)\dot{q}_e)}{\partial q_m} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial V_c(q_c, w)}{\partial q_c} \\ \frac{\partial V_m(q_m)}{\partial q_m} + \frac{\partial V_e(q_m, q_e)}{\partial q_m} \\ \frac{\partial V_e(q_m, q_e)}{\partial q_e} + M_e \frac{\partial V_c(q_c, w)}{\partial q_{e_2}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_c \dot{q}_c \\ R_m \dot{q}_m \\ R_e \dot{q}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_e u_2 \end{bmatrix} \quad (4.2.13)$$

realizando operaciones con el término de energía potencial del controlador se tiene

$$\frac{\partial V_c(q_c, w)}{\partial q_{e_2}} = \left(\frac{\partial w}{\partial q_{e_2}} \right) \frac{\partial V_c(q_c, w)}{\partial w} \quad (4.2.14)$$

donde de acuerdo con (4.2.1)

$$\frac{\partial w}{\partial q_{e_2}} = I_{e_2} \quad (4.2.15)$$

sustituyendo (4.2.15), (4.2.4) y (4.2.5) en (4.2.14) se tiene

$$\frac{\partial V_c(q_c, w)}{\partial q_{e_2}} = K_1(w - \delta) \quad (4.2.16)$$

Definiendo

$$u_1 = -\frac{\partial V_c(q_c, w)}{\partial q_{e_2}} = -K_1(w - \delta) \quad (4.2.17)$$

Capítulo 4. Control de Sistemas Electromecánicos

como la entrada que conecta a la planta con el controlador y moldea la energía potencial se obtiene finalmente, al sustituir (4.2.17) en (4.2.13),

$$\begin{bmatrix} D_c(q_c)\ddot{q}_c + \dot{D}_c(q_c)\dot{q}_c \\ D_m(q_m)\ddot{q}_m + \dot{D}_m(q_m)\dot{q}_m \\ D_e(q_e)\ddot{q}_e + \dot{D}_e(q_e)\dot{q}_e \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial(\dot{q}_c^T D_c(q_c)\dot{q}_c)}{\partial q_c} \\ \frac{\partial(\dot{q}_m^T D_m(q_m)\dot{q}_m)}{\partial q_m} + \frac{\partial(\dot{q}_e^T D_e(q_e)\dot{q}_e)}{\partial q_m} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.18)$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{A_2 q_c}{\partial V_m(q_m)} + \frac{\partial V_e(q_m, q_e)}{\partial q_m} \\ \frac{\partial V_e(q_m, q_e)}{\partial q_e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_c \dot{q}_c \\ R_m \dot{q}_m \\ R_e \dot{q}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_e(u_2 + u_1) \end{bmatrix}$$

Para obtener el punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado, considere la ecuación (4.2.18) evaluada en $\dot{q}_{LC} = 0$, con lo que resulta

$$\begin{bmatrix} \frac{A_2 q_c}{\partial V_m(q_m)} + \frac{\partial V_e(q_m, q_e)}{\partial q_m} \\ \frac{\partial V_e(q_m, q_e)}{\partial q_e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_e u_1 \end{bmatrix} \quad (4.2.19)$$

entonces, para encontrar el punto de equilibrio se deben hallar las soluciones \bar{q}_{LC} que satisfacen la ecuación (4.2.19).

Sustituyendo (4.2.17) en (4.2.19) y usando (2.3.13) se genera

$$\begin{bmatrix} \frac{A_2 q_c}{\partial V_m(q_m)} + \frac{\partial V_e(q_m, q_e)}{\partial q_m} \\ \frac{\partial V_e(q_m, q_e)}{\partial q_{e_1}} \\ \frac{\partial V_e(q_m, q_e)}{\partial q_{e_2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -K_1(w - \delta) \end{bmatrix} \quad (4.2.20)$$

Para obtener el punto de equilibrio debe encontrarse una \bar{q}_{LC} que satisfaga a la ecuación (4.2.20). En este sentido, y considerando que siempre existen \bar{q}_{e_1} , \bar{q}_{e_2} que satisfacen la última ecuación para una q_m , esta ecuación tiene solución única si

$$\left. \frac{\partial V_e(q_m, q_e)}{\partial q_{e_2}} \right|_{\bar{q}_p} + K_1(\bar{w} - \delta) = 0 \quad (4.2.21)$$

De (4.2.21) y usando la definición (4.2.7) se tiene

$$\delta = K_1^{-1} g_{p_2}(\bar{q}_p) + \bar{w} \quad (4.2.22)$$

de acuerdo con (4.2.1)

$$\bar{w} = \bar{q}_{e_2} - q_{e_2}(0) + w(0) \quad (4.2.23)$$

Capítulo 4. Control de Sistemas Electromecánicos

definiendo

$$\Delta = w(0) - q_{e_2}(0) \quad (4.2.24)$$

y sustituyendo (4.2.23) y (4.2.24) en (4.2.22) se obtiene

$$\delta = K_1^{-1} g_{p_2}(\bar{q}_p) + \bar{q}_{e_2} + \Delta \quad (4.2.25)$$

Sin embargo, el parámetro Δ no es implantable ya que las condiciones iniciales de las coordenadas eléctricas actuadas son desconocidas. De esta manera, comparando las ecuaciones (4.2.6) y (4.2.25), se concluye que el usar el valor de δ propuesto en (4.2.6) generará un error de estado estable proporcional a Δ .

Para probar que el sistema en lazo cerrado dado por (4.2.18) es asintóticamente estable considere la siguiente función candidata de Lyapunov, la cual no es otra cosa que la energía total del sistema completo más una constante c_{LC}

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{LC}(\bar{q}_{LC}, \dot{q}_{LC}) = & T'_c(q_c, \dot{q}_c) + T'_m(q_m, \dot{q}_m) + T'_e(q_e, \dot{q}_e) \\ & + V_c(q_c, w) + V_m(q_m) + V_e(q_m, q_e) + c_{LC} \end{aligned} \quad (4.2.26)$$

donde $c_{LC} \doteq -V_c(\bar{q}_c, \bar{w}) - V_m(q_{m_d}) - V_e(q_{m_d}, \bar{q}_e)$ se emplea para garantizar que $\mathcal{H}_{LC}(0,0) = 0$. Derivando (4.2.26) con respecto al tiempo se obtiene, siguiendo (2.2.14),

$$\dot{\mathcal{H}}_{LC}(\bar{q}_{LC}, \dot{q}_{LC}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_e u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial V_c(q_c)}{\partial \dot{q}_c} \\ \frac{\partial V_m(q_m)}{\partial \dot{q}_m} \\ \frac{\partial V_e(q_e)}{\partial \dot{q}_e} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{q}_c \\ \dot{q}_m \\ \dot{q}_e \end{bmatrix} \quad (4.2.27)$$

realizando operaciones y sustituyendo (2.3.9), (2.3.10), (4.2.2) y (4.2.9) en (4.2.27) se obtiene

$$\dot{\mathcal{H}}_{LC}(\bar{q}_{LC}, \dot{q}_{LC}) = -\dot{q}_c^T R_c \dot{q}_c - \dot{q}_m^T R_m \dot{q}_m - \dot{q}_e^T R_e \dot{q}_e - \dot{q}_e^T K_2 M_e^T \dot{q}_e \quad (4.2.28)$$

Considerando la ecuación (2.3.14), el último término a la derecha en (4.2.28) se modifica resultando

$$\dot{\mathcal{H}}_{LC}(\bar{q}_{LC}, \dot{q}_{LC}) = -\dot{q}_c^T R_c \dot{q}_c - \dot{q}_m^T R_m \dot{q}_m - \dot{q}_e^T R_e \dot{q}_e - \dot{q}_e^T M_e K_2 M_e^T \dot{q}_e \quad (4.2.29)$$

De la ecuación (4.2.29) se puede concluir que la derivada de la función de Lyapunov propuesta es semidefinida negativa. Por otra parte, se observa que esta derivada sólo puede ser cero cuando $\dot{q}_{LC} = 0$, por lo que al recurrir al principio de invariancia de LaSalle (apéndice A) se prueba la estabilidad asintótica del sistema en lazo cerrado.

□□□

Sobre las proposición 4.2.5 se hacen las siguientes observaciones.

Observación 4.2.6. El problema que causa el desconocer las condiciones iniciales importa sólo cuando existen capacitores en el sistema electromecánico. Si el sistema contiene

Capítulo 4. Control de Sistemas Electromecánicos

únicamente elementos inductivos, entonces resulta muy razonable suponer que el vector de flujo magnético es cero inicialmente.

Observación 4.2.7. Es importante resaltar el hecho de que el controlador se diseña sin suponer la medición de ninguna coordenada mecánica. Esto permite seguir trabajando dentro del contexto de los sistemas EL subactuados; sin embargo, conduce a perder robustez ante la incertidumbre en las condiciones iniciales eléctricas.

Observación 4.2.8. La inclusión del estado del controlador w se debe a la imposibilidad de medir prácticamente cargas eléctricas o flujos de enlace. Por otro lado, la estructura de este estado es un simple integrador de velocidades generalizadas de origen eléctrico. Además, se dice que el controlador es por retroalimentación dinámica de salida ya que en la ley de control sólo se requiere de w , q_c y de \dot{q}_{e2} . Esquemáticamente se presenta el controlador en la figura 4.2.9.

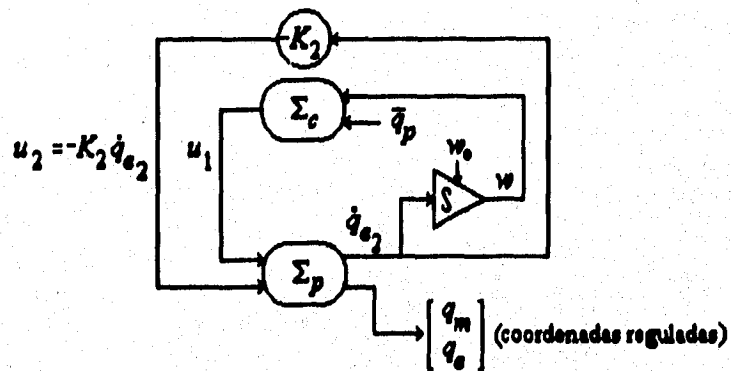


Figura 4.2.9.

Observación 4.2.10. Nótese también que la suposición de que existen términos disipativos en la planta no impone ninguna restricción. Estos términos podrían ser cero y la ecuación (4.2.29) aún sería seminegativa definida gracias a la existencia del término de retroalimentación de velocidades generalizadas de origen eléctrico.

Observación 4.2.11. El efecto de la incertidumbre sobre las condiciones iniciales puede apreciarse al considerar el lado derecho de la ecuación (4.2.20) junto con la ecuación (4.2.24), de aquí queda claro que el punto equilibrio deseado, \bar{q}_{LC} , se desplaza por un vector cuya magnitud es $-K_1 \Delta$ hasta otro punto de equilibrio, \bar{q}_{LC}^* . Esto se puede apreciar en la figura 4.2.12

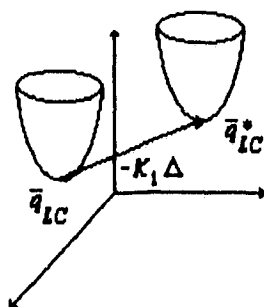


Figura 4.2.12

Observación 4.2.13. Cabe mencionar que el primer término de la función de energía potencial del controlador, el cual aparece en la ecuación (4.2.4), difiere del primer término de la función que se propone en [8], y que en este trabajo aparece en la ecuación (3.2.12). Esta diferencia se debe a que en [8] se requiere de la estructura dada por (3.2.12) para obtener la derivada aproximada de las coordenadas generalizadas que se asumen medibles, q_{p_2} ; mientras que en el controlador propuesto en esta sección, al suponerse medible \dot{q}_{e_2} , tal derivada aproximada deja de ser requerida, lo que permite proponer un controlador con estructura más simple que en [8].

4.3 Control con término integral para sistemas electromecánicos

Para eliminar el error de estado estable que presenta el esquema de control de la sección anterior, con base en lo reportado en [9] (ver también [1]), se propone añadir a la ley de control un término que integra el error existente entre las coordenadas mecánicas deseadas y las actuales.

Considérese el sistema en lazo cerrado de la forma

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{LC}(q_{LC}, \dot{q}_{LC})}{\partial \dot{q}_{LC}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}_{LC}(q_{LC}, \dot{q}_{LC})}{\partial q_{LC}} + \frac{\partial \mathcal{F}_{LC}(\dot{q}_{LC})}{\partial \dot{q}_{LC}} = u_{LC} \quad (4.3.1)$$

con lagrangiano en lazo cerrado dado por (4.2.10) como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{LC}(q_{LC}, \dot{q}_{LC}) = & T'_c(q_c, \dot{q}_c) + T'_m(q_m, \dot{q}_m) + T'_e(q_m, \dot{q}_e) \\ & - V_c(q_c, w) - V_m(q_m) - V_e(q_m, q_e) \end{aligned}$$

donde las funciones de co-energía cinética $T'_c(q_c, \dot{q}_c)$, $T'_m(q_m, \dot{q}_m)$ y $T'_e(q_m, \dot{q}_e)$ tienen una estructura como la que se define en (4.2.8), (2.3.5) y (2.3.6), respectivamente, mientras que la función de energía potencial del controlador $V_c(q_c, w)$ se define en (4.2.4-4.2.7), y $V_m(q_m)$, $V_e(q_m, q_e)$ cumplen con (2.3.7) y (2.3.8). Además, el vector de coordenadas generalizadas en lazo cerrado se define al igual que en (4.2.11a) como

$$q_{LC} = \begin{bmatrix} q_c \\ q_p \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{c+m+e}$$

y el vector de entrada en lazo cerrado, u_{LC} , está dado por

Capítulo 4. Control de Sistemas Electromecánicos

$$u_{LC} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_{e_2} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{c+m+e} \quad (4.3.2)$$

donde es claro una vez más que sólo una parte de las coordenadas eléctricas, definida de acuerdo con (2.3.14), serán actuadas.

Bajo estas condiciones el sistema puede escribirse al igual que en (4.2.12) como

$$\begin{bmatrix} D_c(q_c)\ddot{q}_c + \dot{D}_c(q_c)\dot{q}_c \\ D_m(q_m)\ddot{q}_m + \dot{D}_m(q_m)\dot{q}_m \\ D_e(q_m)\ddot{q}_e + \dot{D}_e(q_m)\dot{q}_e \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial(\dot{q}_c^T D_c(q_c)\dot{q}_c)}{\partial q_c} \\ \frac{\partial(\dot{q}_m^T D_m(q_m)\dot{q}_m)}{\partial q_m} + \frac{\partial(\dot{q}_e^T D_e(q_m)\dot{q}_e)}{\partial q_m} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial V_c(q_c, w)}{\partial q_c} \\ \frac{\partial V_m(q_m)}{\partial q_m} + \frac{\partial V_e(q_m, q_e)}{\partial q_m} \\ \frac{\partial V_e(q_m, q_e)}{\partial q_e} + \frac{\partial V_c(q_c, w)}{\partial q_e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_c \dot{q}_c \\ R_m \dot{q}_m \\ R_e \dot{q}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_e u_{e_2} \end{bmatrix}$$

Considere ahora las siguientes suposiciones

Suposición 4.3.1. El vector q_m es medible y la dimensión de este vector es igual a la dimensión del vector de coordenadas generalizadas eléctricas actuadas, es decir

$$\dim(q_{e_2}) = \dim(q_m) = e_2 \quad (4.3.3)$$

Suposición 4.3.2. La matriz R_e definida en la ecuación (2.3.10) tiene la siguiente estructura

$$R_e = \begin{bmatrix} R_{e_1} & 0 \\ 0 & R_{e_2} \end{bmatrix}; R_{e_1} \in \mathcal{R}^{e_1 \times e_1}, R_{e_1} > 0; R_{e_2} \in \mathcal{R}^{e_2 \times e_2}, R_{e_2} > 0 \quad (4.3.4)$$

Adicionalmente considere que la matriz $D_e(q_m)$ se divide de la siguiente manera

$$D_e(q_m) = \begin{bmatrix} D_{e_{11}}(q_m) & D_{e_{12}}(q_m) \\ D_{e_{21}}(q_m) & D_{e_{22}}(q_m) \end{bmatrix} \quad (4.3.5)$$

donde

$$D_{e_{11}}(q_m) = D_{e_{11}}^T(q_m) > 0; D_{e_{11}}(q_m) \in \mathcal{R}^{e_1 \times e_1} \quad (4.3.6)$$

$$D_{e_{22}}(q_m) = D_{e_{22}}^T(q_m) > 0; D_{e_{22}}(q_m) \in \mathcal{R}^{e_2 \times e_2} \quad (4.3.7)$$

$$D_{e_{12}}(q_m) = D_{e_{21}}^T(q_m); D_{e_{12}}(q_m) \in \mathcal{R}^{e_1 \times e_2} \quad (4.3.8)$$

De acuerdo con las suposiciones anteriores y con la partición de la matriz $D_e(q_m)$, el sistema (4.2.12) puede reescribirse como

Capítulo 4. Control de Sistemas Electromecánicos

$$D_{LC}(q_{LC})\dot{q}_{LC} + \frac{\partial V_{LC}(q_{LC})}{\partial q_{LC}} + \dot{D}_{LC}(q_{LC})\dot{q}_{LC} + R_{LC}\dot{q}_{LC} - \frac{\partial}{\partial q_{LC}} \left(\frac{1}{2} \dot{q}_{LC}^T D_{LC}(q_{LC}) \dot{q}_{LC} \right) = u_{LC} \quad (4.3.9)$$

donde

$$D_{LC}(q_{LC}) = \begin{bmatrix} D_c(q_c) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_m(q_m) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{e_{11}}(q_m) & D_{e_{12}}(q_m) \\ 0 & 0 & D_{e_{21}}(q_m) & D_{e_{22}}(q_m) \end{bmatrix} \quad (4.3.10)$$

$$\frac{\partial V_{LC}(q_{LC})}{\partial q_{LC}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_c(q_c, w)}{\partial q_c} \\ \frac{\partial V_m(q_m) + \partial V_e(q_m, q_e)}{\partial q_m} \\ \frac{\partial V_e(q_m, q_e)}{\partial q_{e_1}} \\ \frac{\partial V_e(q_e, q_m) + \partial V_c(q_c, w)}{\partial q_{e_2}} \end{bmatrix} \quad (4.3.11)$$

$$\dot{D}_{LC}(q_{LC}) = \begin{bmatrix} \dot{D}_c(q_c) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{D}_m(q_m) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{D}_{e_{11}}(q_m) & \dot{D}_{e_{12}}(q_m) \\ 0 & 0 & \dot{D}_{e_{21}}(q_m) & \dot{D}_{e_{22}}(q_m) \end{bmatrix} \quad (4.3.12)$$

$$R_{LC} = \begin{bmatrix} R_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{e_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{e_2} \end{bmatrix} \quad (4.3.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_{LC}} \left(\frac{1}{2} \dot{q}_{LC}^T D_{LC}(q_{LC}) \dot{q}_{LC} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial (\dot{q}_c^T D_c(q_c) \dot{q}_c)}{\partial q_c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial (\dot{q}_m^T D_m(q_m) \dot{q}_m)}{\partial q_m} & E_{23} & E_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.14)$$

donde

Capítulo 4. Control de Sistemas Electromecánicos

$$E_{23} = \left(\frac{\partial(\dot{q}_{e1}^T D_{e11}(q_m)\dot{q}_{e1})}{\partial q_m} + \frac{\partial(\dot{q}_{e2}^T D_{e21}(q_m)\dot{q}_{e1})}{\partial q_m} \right)$$

$$E_{24} = \left(\frac{\partial(\dot{q}_{e2}^T D_{e22}(q_m)\dot{q}_{e2})}{\partial q_m} + \frac{\partial(\dot{q}_{e1}^T D_{e12}(q_m)\dot{q}_{e2})}{\partial q_m} \right)$$

Para aclarar lo que se pretende con la siguiente proposición, considérese el caso en que las condiciones iniciales son conocidas ($\Delta = 0$), por lo que no es necesario añadir un término integral a la entrada, es decir, ésta es como en la sección anterior y las ecuaciones del sistema en lazo cerrado están dadas por (4.2.12). Entonces, al evaluar (4.2.12) en $(\tilde{q}_{LC}, \dot{q}_{LC}) = (0, 0)$, donde \tilde{q}_{LC} está dada según (4.2.11c) como

$$\tilde{q}_{LC} = q_{LC} - \bar{q}_{LC} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_c^T & \tilde{q}_m^T & \tilde{q}_{e1}^T & \tilde{q}_{e2}^T \end{bmatrix}, \quad (4.3.15)$$

para obtener los puntos de equilibrio resulta

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial V_c(q_c, w)}{\partial q_c} \\ \frac{\partial(V_m(q_m) + V_e(q_e, q_m))}{\partial q_m} \\ \frac{\partial V_e(q_e, q_m)}{\partial q_{e1}} \\ \frac{\partial(V_e(q_e, q_m) + V_c(q_c, w))}{\partial q_{e2}} \end{bmatrix}_{\tilde{q}_{LC}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.16)$$

Ahora considérese el caso en que las condiciones iniciales son desconocidas ($\Delta \neq 0$) y se adiciona un término integral a la entrada, de tal forma que ésta está dada por

$$u_{e2} = -K_2 \dot{q}_{e2} + z \quad (4.3.17)$$

con K_2 definida en (4.2.2) y z es la solución de

$$\dot{z} = -K_1(q_m - q_{mJ}) = -K_1 \tilde{q}_m; \quad z(0) = z_0 \in \mathcal{R}^{e2} \quad (4.3.18)$$

donde

$$K_1 \doteq \text{diag}\{k_{1i}\} \in \mathcal{R}^{e2 \times e2}; \quad k_{1i} > 0 \forall i \quad (4.3.19)$$

Entonces, al evaluar el sistema en lazo cerrado (4.3.9) en $(\tilde{q}_{LC}, \dot{q}_{LC}) = (0, 0)$ para obtener los puntos de equilibrio se tiene

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial V_c(q_c, w)}{\partial q_c} \\ \frac{\partial(V_m(q_m) + V_e(q_e, q_m))}{\partial q_m} \\ \frac{\partial V_e(q_e, q_m)}{\partial q_{e1}} \\ \frac{\partial(V_e(q_e, q_m) + V_c(q_c, w))}{\partial q_{e2}} - z_{ss} \end{bmatrix}_{\tilde{q}_{LC}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.20)$$

Capítulo 4. Control de Sistemas Electromecánicos

donde $z_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t)$.

Considérese el último elemento de las ecuaciones vectoriales (4.3.16) y (4.3.20)

$$\left. \frac{\partial V_e(q_e, q_m)}{\partial q_{e_2}} \right|_{\bar{q}_{LC}} + \left. \frac{\partial V_c(q_c, q_{e_2})}{\partial q_{e_2}} \right|_{\bar{q}_{LC}} = 0 \quad (4.3.21)$$

$$\left. \frac{\partial V_e(q_e, q_m)}{\partial q_{e_2}} \right|_{\bar{q}_{LC}} + \left. \frac{\partial V_c(q_c, q_{e_2} + \Delta)}{\partial q_{e_2}} \right|_{\bar{q}_{LC}} - z_{ss} = 0 \quad (4.3.22)$$

restando la ecuación (4.3.21) a la ecuación (4.3.22) se tiene que el equilibrio del sistema con término integral a la entrada estará en el lugar deseado si y sólo si

$$z_{ss} = \left[\frac{\partial V_c(q_c, q_{e_2} + \Delta)}{\partial q_{e_2}} - \frac{\partial V_c(q_c, q_{e_2})}{\partial q_{e_2}} \right] \Big|_{\bar{q}_{LC}}$$

sustituyendo (4.2.4) y (4.2.5) en la última ecuación y realizando las derivadas resulta

$$z_{ss} = [K_1(\bar{q}_{e_2} + \Delta - \delta) - K_1(\bar{q}_{e_2} - \delta)]$$

simplificando esta última ecuación se obtiene

$$z_{ss} = K_1 \Delta \quad (4.3.23)$$

El valor que alcanza z en estado estacionario es tal que compensa el efecto de la incertidumbre sobre las condiciones iniciales de la parte eléctrica. Esto lleva a lograr el objetivo de regulación sin error de estado estacionario. Gráficamente esto puede visualizarse en la figura 4.3.3

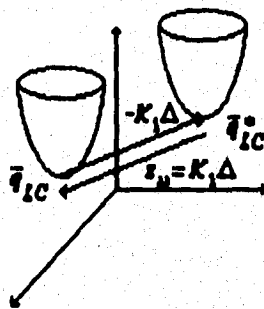


Figura 4.3.3

Para garantizar que (4.3.23) se cumple, y que por lo tanto el punto de equilibrio del sistema cuya entrada es (4.3.17) está en el lugar deseado, se presenta la siguiente proposición, cuya prueba se basa en la construcción de una función candidata de Lyapunov para el sistema en lazo cerrado con derivada negativa definida en $(\bar{q}_{LC}, \dot{q}_{LC})$.

Proposición 4.3.4. Considere el sistema electromecánico descrito por (4.3.9), donde los parámetros del controlador se definen en (4.2.2-4.2.9), con entrada de control u_{e_2} dada por (4.3.17-4.3.19) como

$$u_{e_2} = -K_2 \dot{q}_{e_2} + z$$

Capítulo 4. Control de Sistemas Electromecánicos

con K_2 definida en (4.2.2) y z es la solución de

$$\dot{z} = -K_I(q_m - q_{m_d}) = -K_I \tilde{q}_m ; \quad z(0) = z_0 \in \mathfrak{R}^{e_2}$$

donde

$$K_I \doteq \text{diag}\{k_{I_i}\} \in \mathfrak{R}^{e_2 \times e_2}; k_{I_i} > 0 \forall i$$

y

$$I_{e_2} > \frac{1}{\varepsilon} K_I ; \varepsilon > 0 ; \varepsilon \in \mathfrak{R}^+ \quad (4.3.24)$$

Bajo estas condiciones, considerando las suposiciones 4.2.1-4.2.4 y 4.3.1-4.3.2, si $q_{e_2}(0)$, $q_m(0)$ son acotadas entonces la entrada de control garantiza que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (q_m - q_{m_d}) = 0 \quad \diamond \diamond \diamond$$

Prueba. Defínase

$$\tilde{z} = z - z_{ss} \quad (4.3.25)$$

luego, defina al vector de estado para el sistema considerado en esta sección, de acuerdo con (4.3.15), como

$$X = [\tilde{q}_{LC}^T, \dot{q}_{LC}^T, \tilde{z}^T]^T \quad (4.3.26)$$

de tal forma que el único punto de equilibrio para el sistema es

$$X = 0. \quad (4.3.27)$$

Ahora comienza la construcción de la función candidata de Lyapunov proponiendo inicialmente la energía total del sistema más una constante c_1

$$V_1(\tilde{q}_{LC}, \dot{q}_{LC}) = \frac{1}{2} \dot{q}_{LC}^T D_{LC}(q_{LC}) \dot{q}_{LC} + V_{LC}(q_{LC}) + c_1 \quad (4.3.28)$$

donde $c_1 \doteq -V_{LC}(\tilde{q}_{LC})$ se utiliza para garantizar que $V_1(0,0) = 0$. Derivando (4.3.28) con respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{V}_1 = \left(u_{LC} - \frac{\partial V_{LC}(q_{LC})}{\partial q_{LC}} \right)^T \dot{q}_{LC} = -\dot{q}_{LC}^T R_{LC} \dot{q}_{LC} - \dot{q}_{e_2}^T K_2 \dot{q}_{e_2} + \dot{q}_{e_2}^T z \quad (4.3.29)$$

Para eliminar el último término a la derecha en (4.3.29) y para que la función candidata de Lyapunov incluya a \tilde{z} se propone

$$V_2(\tilde{q}_{e_2}, \tilde{z}) = \frac{\varepsilon}{2} \left(z - \frac{K_I}{\varepsilon} q_{e_2} \right)^T K_I^{-1} \left(z - \frac{K_I}{\varepsilon} q_{e_2} \right) + c_2 \quad (4.3.30)$$

donde $c_2 \doteq -\frac{\varepsilon}{2} \left(z_{ss} - \frac{K_I}{\varepsilon} \tilde{q}_{e_2} \right)^T K_I^{-1} \left(z_{ss} - \frac{K_I}{\varepsilon} \tilde{q}_{e_2} \right)$ para que $V_2(0,0) = 0$. Derivando (4.3.30) con respecto al tiempo se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \varepsilon \left(z - \frac{K_I}{\varepsilon} q_{e_2} \right)^T K_I^{-1} \left(\dot{z} - \frac{K_I}{\varepsilon} \dot{q}_{e_2} \right) \\ \dot{V}_2 &= -\varepsilon \tilde{z}^T \tilde{q}_m - z^T \dot{q}_{e_2} + q_{e_2}^T K_I \tilde{q}_m + q_{e_2}^T \frac{K_I}{\varepsilon} \dot{q}_{e_2} \end{aligned} \quad (4.3.31)$$

Capítulo 4. Control de Sistemas Electromecánicos

Finalmente, para eliminar el primer término a la derecha en (4.3.31), se propone

$$V_3(\tilde{q}_m, \dot{q}_e) = \varepsilon \begin{bmatrix} 0_{1 \times e_1} & \tilde{q}_m^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{e_{11}}(q_m) & D_{e_{12}}(q_m) \\ D_{e_{21}}(q_m) & D_{e_{22}}(q_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{e_1} \\ \dot{q}_{e_2} \end{bmatrix}$$

$$V_3(\tilde{q}_m, \dot{q}_e) = \varepsilon \left[\tilde{q}_m^T D_{e_{21}}(q_m) \dot{q}_{e_1} + \tilde{q}_m^T D_{e_{22}}(q_m) \dot{q}_{e_2} \right] \quad (4.3.32)$$

Derivando (4.3.32) con respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{V}_3 = \varepsilon \tilde{q}_m^T \left[D_{e_{21}}(q_m) \ddot{q}_{e_1} + D_{e_{22}}(q_m) \ddot{q}_{e_2} + \dot{D}_{e_{21}}(q_m) \dot{q}_{e_1} + \dot{D}_{e_{22}}(q_m) \dot{q}_{e_2} \right]$$

$$+ \varepsilon \dot{q}_m^T \left[D_{e_{21}}(q_m) \dot{q}_{e_1} + D_{e_{22}}(q_m) \dot{q}_{e_2} \right] \quad (4.3.33)$$

pero, de acuerdo a (4.3.9)

$$D_{e_{21}}(q_m) \ddot{q}_{e_1} + D_{e_{22}}(q_m) \ddot{q}_{e_2} = u_{e_2} - \dot{D}_{e_{21}}(q_m) \dot{q}_{e_1} - \dot{D}_{e_{22}}(q_m) \dot{q}_{e_2}$$

$$- \frac{\partial V_e(q_m, q_e)}{\partial q_{e_2}} - \frac{\partial V_c(q_c, w)}{\partial q_{e_2}} - R_{e_2} \dot{q}_{e_2} \quad (4.3.34)$$

entonces, sustituyendo (4.3.34) junto con (4.3.17) en (4.3.33), esta última ecuación se reduce a

$$\dot{V}_3 = \varepsilon \tilde{q}_m^T \left[-K_2 \dot{q}_{e_2} + z - \frac{\partial V_e(q_m, q_e)}{\partial q_{e_2}} - \frac{\partial V_c(q_c, w)}{\partial q_{e_2}} - R_{e_2} \dot{q}_{e_2} \right]$$

$$+ \varepsilon \dot{q}_m^T \left[D_{e_{21}}(q_m) \dot{q}_{e_1} + D_{e_{22}}(q_m) \dot{q}_{e_2} \right] \quad (4.3.35)$$

Con lo anterior se tiene como función candidata de Lyapunov a:

$$V(\tilde{q}_{LC}, \dot{q}_{LC}, \tilde{z}) = \sum_{i=1}^3 V_i = \frac{1}{2} \dot{q}_{LC}^T D_{LC}(q_{LC}) \dot{q}_{LC} + V_{LC}(q_{LC}) + c_1 + c_2$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2} \left(z - \frac{K_I}{\varepsilon} q_{e_2} \right)^T K_I^{-1} \left(z - \frac{K_I}{\varepsilon} q_{e_2} \right) + \varepsilon \tilde{q}_m^T \left[D_{e_{21}}(q_m) \dot{q}_{e_1} + D_{e_{22}}(q_m) \dot{q}_{e_2} \right] \quad (4.3.36)$$

y la derivada con respecto al tiempo de la candidata de Lyapunov es:

$$\dot{V}(\tilde{q}_{LC}, \dot{q}_{LC}) = \sum_{i=1}^3 \dot{V}_i = -\dot{q}_{LC}^T R_{LC} \dot{q}_{LC} - \dot{q}_{e_2}^T K_2 \dot{q}_{e_2} + q_{e_2}^T K_I \tilde{q}_m + q_{e_2}^T \frac{K_I}{\varepsilon} \dot{q}_{e_2}$$

$$+ \varepsilon \tilde{q}_m^T \left[-K_2 \dot{q}_{e_2} - \frac{\partial V_e(q_m, q_e)}{\partial q_{e_2}} - \frac{\partial V_c(q_c, w)}{\partial q_{e_2}} - R_{e_2} \dot{q}_{e_2} \right] + \varepsilon \dot{q}_m^T \left[D_{e_{21}}(q_m) \dot{q}_{e_1} + D_{e_{22}}(q_m) \dot{q}_{e_2} \right] \quad (4.3.37)$$

Ahora se particiona a las ecuaciones (4.3.36) y (4.3.37) con objeto de obtener condiciones sobre ε que garanticen $V(\tilde{q}_{LC}, \dot{q}_{LC}, \tilde{z}) \geq 0$ y $\dot{V}(\tilde{q}_{LC}, \dot{q}_{LC}) < 0$.

La función de Lyapunov (4.3.36) se divide de la siguiente forma

$$V(\tilde{q}_{LC}, \dot{q}_{LC}, \tilde{z}) = W_1 + W_2 + W_3 \quad (4.3.38)$$

donde

Capítulo 4. Control de Sistemas Electromecánicos

$$W_1 = \frac{\varepsilon}{2} \left(z - \frac{K_I}{\varepsilon} q_{e2} \right)^T K_I^{-1} \left(z - \frac{K_I}{\varepsilon} q_{e2} \right) + c_2 \quad (4.3.39)$$

$$W_2 = \frac{1}{4} \dot{q}_{LC}^T D_{LC}(q_{LC}) \dot{q}_{LC} + V_{LC}(q_{LC}) + c_1 \quad (4.3.40)$$

$$W_3 = \frac{1}{4} \dot{q}_{LC}^T D_{LC}(q_{LC}) \dot{q}_{LC} + \varepsilon \tilde{q}_m^T \left[D_{e21}(q_m) \dot{q}_{e1} + D_{e22}(q_m) \dot{q}_{e2} \right] \quad (4.3.41)$$

De acuerdo con (4.3.30) y con la definición de c_2 la función W_1 definida en (4.3.39) es positiva definida.

La función W_2 definida en (4.3.40) también es positiva definida debido a que el primer término es cuadrático, mientras que el término de energía potencial está acotado por debajo y c_1 se ha definido de tal forma que sumada con el mínimo de $V_{LC}(q_{LC})$ vale cero.

Para analizar a la función W_3 se inicia desarrollando su primer término resultando

$$\begin{aligned} W_3 = & \frac{1}{4} \left[\dot{q}_c^T D_c(q_c) \dot{q}_c + \dot{q}_m^T D_m(q_m) \dot{q}_m \right] + \frac{1}{4} \dot{q}_{e1}^T D_{e11}(q_m) \dot{q}_{e1} \\ & + \frac{1}{4} \dot{q}_{e1}^T D_{e12}(q_m) \dot{q}_{e2} + \frac{1}{4} \dot{q}_{e2}^T D_{e21}(q_m) \dot{q}_{e1} + \frac{1}{4} \dot{q}_{e2}^T D_{e22}(q_m) \dot{q}_{e2} \\ & + \varepsilon \tilde{q}_m^T \left[D_{e21}(q_m) \dot{q}_{e1} + D_{e22}(q_m) \dot{q}_{e2} \right] \end{aligned} \quad (4.3.42)$$

luego, se le particiona de la siguiente forma

$$W_3 = W_{30} + W_{31} + W_{32} + W_{33} \quad (4.3.43)$$

donde

$$\begin{aligned} W_{30} = & \frac{1}{4} \left[\dot{q}_c^T D_c(q_c) \dot{q}_c + \dot{q}_m^T D_m(q_m) \dot{q}_m \right] \\ W_{31} = & \frac{1}{8} \dot{q}_{e2}^T D_{e22}(q_m) \dot{q}_{e2} + \frac{1}{2} \dot{q}_{e2}^T D_{e21}(q_m) \dot{q}_{e1} + \frac{1}{8} \dot{q}_{e1}^T D_{e11}(q_m) \dot{q}_{e1} \end{aligned} \quad (4.3.44)$$

$$W_{32} = \frac{1}{8} \dot{q}_{e2}^T D_{e22}(q_m) \dot{q}_{e2} + \varepsilon \tilde{q}_m^T D_{e22}(q_m) \dot{q}_{e2} \quad (4.3.45)$$

$$W_{33} = \frac{1}{8} \dot{q}_{e1}^T D_{e11}(q_m) \dot{q}_{e1} + \varepsilon \tilde{q}_m^T D_{e21}(q_m) \dot{q}_{e1} \quad (4.3.46)$$

Primeramente se observa que W_{30} es claramente una función positiva definida. Considerando ahora (4.3.44), la función W_{31} puede acotarse de la siguiente forma

$$W_{31} \geq \frac{1}{8} \lambda_m(D_{e22}(q_m)) \|\dot{q}_{e2}\|^2 - \frac{1}{2} \sigma_1 \|\dot{q}_{e1}\| \|\dot{q}_{e2}\| + \frac{1}{8} \lambda_m(D_{e11}(q_m)) \|\dot{q}_{e1}\|^2 \quad (4.3.47)$$

donde $\lambda_m(\cdot)$ denota valor característico mínimo, $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana y σ_1 es el valor singular máximo de la matriz $D_{e21}(q_m)$. En el apéndice B, al final de este trabajo, se muestra como acotar términos de la forma $g_1^T G g_2$ donde la matriz G no es cuadrada.

Cabe mencionar que el signo negativo que aparece en el segundo término de la ecuación (4.3.47) se considera así para tener el peor de los casos, es decir, el caso en que el segundo término de (4.3.44), que no tiene signo definido, es negativo.

Capítulo 4. Control de Sistemas Electromecánicos

A continuación se considera lo siguiente: sean

$$a, b \in \mathfrak{R}^+ \text{ tales que } a + b = 1; 0 < a < 1; 0 < b < 1 \quad (4.3.48)$$

ahora con (4.3.48) se reescribe (4.3.47) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} W_{31} \geq & \frac{1}{8} \lambda_m(D_{e_{22}}(q_m)) \|\dot{q}_{e_2}\|^2 - \frac{1}{2} a \sigma_1 \|\dot{q}_{e_1}\| \|\dot{q}_{e_2}\| \\ & - \frac{1}{2} b \sigma_1 \|\dot{q}_{e_1}\| \|\dot{q}_{e_2}\| + \frac{1}{8} \lambda_m(D_{e_{11}}(q_m)) \|\dot{q}_{e_1}\|^2 \end{aligned} \quad (4.3.49)$$

de (4.3.49) se tiene que si

$$\frac{1}{8} \lambda_m(D_{e_{22}}(q_m)) \|\dot{q}_{e_2}\|^2 - \frac{1}{2} a \sigma_1 \|\dot{q}_{e_1}\| \|\dot{q}_{e_2}\| \geq 0 \quad (4.3.50)$$

$$\text{y } \frac{1}{8} \lambda_m(D_{e_{11}}(q_m)) \|\dot{q}_{e_1}\|^2 - \frac{1}{2} b \sigma_1 \|\dot{q}_{e_1}\| \|\dot{q}_{e_2}\| \geq 0 \quad (4.3.51)$$

entonces $W_{31} \geq 0$.

De (4.3.50)

$$\frac{4a\sigma_1}{\lambda_m(D_{e_{22}}(q_m))} \leq \frac{\|\dot{q}_{e_2}\|}{\|\dot{q}_{e_1}\|} \quad (4.3.52)$$

y de (4.3.51)

$$\frac{\|\dot{q}_{e_2}\|}{\|\dot{q}_{e_1}\|} \leq \frac{\lambda_m(D_{e_{11}}(q_m))}{4b\sigma_1} \quad (4.3.53)$$

entonces, de (4.3.52) y (4.3.53)

$$\begin{aligned} \frac{4a\sigma_1}{\lambda_m(D_{e_{22}}(q_m))} & \leq \frac{\lambda_m(D_{e_{11}}(q_m))}{4b\sigma_1} \\ 16ab\sigma_1^2 & \leq \lambda_m(D_{e_{11}}(q_m)) \lambda_m(D_{e_{22}}(q_m)) \end{aligned} \quad (4.3.54)$$

la desigualdad (4.3.54) siempre se cumple escogiendo a y b apropiadamente, concluyendo así que $W_{31} \geq 0$.

Para determinar la positividad de la función W_{32} considere lo siguiente:

Se inicia acotando la ecuación (4.3.45)

$$W_{32} \geq \frac{1}{8} \lambda_M(D_{e_{22}}(q_m)) \|\dot{q}_{e_2}\|^2 - \varepsilon \lambda_M(D_{e_{22}}(q_m)) \|\tilde{q}_m\| \|\dot{q}_{e_2}\| \quad (4.3.55)$$

donde $\lambda_M(\cdot)$ denota al valor característico máximo. Para que se cumpla con $W_{32} \geq 0$ basta pedir que el lado derecho de (4.3.55) sea mayor o igual que cero, es decir

$$\frac{1}{8} \lambda_M(D_{e_{22}}(q_m)) \|\dot{q}_{e_2}\|^2 - \varepsilon \lambda_M(D_{e_{22}}(q_m)) \|\tilde{q}_m\| \|\dot{q}_{e_2}\| \geq 0 \quad (4.3.56)$$

simplificando (4.3.56) se obtiene

$$\frac{1}{8} \|\dot{q}_{e_2}\| - \varepsilon \|\tilde{q}_m\| \geq 0 \quad (4.3.57)$$

despejando ε de (4.3.57) resulta

$$\varepsilon \leq \frac{1}{8} \frac{\|\dot{q}_{e_2}\|}{\|\tilde{q}_m\|} \quad (4.3.58)$$

Capítulo 4. Control de Sistemas Electromecánicos

La desigualdad (4.3.58) impone una cota superior al valor máximo que puede tomar ε , por lo que se requiere de un ε suficientemente pequeña para que la última desigualdad se cumpla.

La positividad de la función W_{33} se analiza de manera similar a la de W_{32} . Se acota la ecuación (4.3.46) resultando

$$W_{33} \geq \frac{1}{8} \lambda_m(D_{e_{11}}(q_m)) \|\dot{q}_{e_1}\|^2 - \varepsilon \sigma_1 \|\tilde{q}_m\| \|\dot{q}_{e_1}\| \quad (4.3.59)$$

Pidiendo que el lado derecho de (4.3.59) sea mayor o igual que cero se cumple con la condición $W_{33} \geq 0$, esto es

$$\frac{1}{8} \lambda_m(D_{e_{11}}(q_m)) \|\dot{q}_{e_1}\|^2 - \varepsilon \sigma_1 \|\tilde{q}_m\| \|\dot{q}_{e_1}\| \geq 0 \quad (4.3.60)$$

simplificando (4.3.60) se obtiene

$$\frac{1}{8} \lambda_m(D_{e_{11}}(q_m)) \|\dot{q}_{e_1}\| - \varepsilon \sigma_1 \|\tilde{q}_m\| \geq 0 \quad (4.3.61)$$

despejando ε de (4.3.61) resulta

$$\varepsilon \leq \frac{\lambda_m(D_{e_{11}}(q_m)) \|\dot{q}_{e_1}\|}{8 \sigma_1 \|\tilde{q}_m\|} \quad (4.3.62)$$

La desigualdad (4.3.62), al igual que la desigualdad (4.3.58), impone una cota superior al valor máximo que puede tomar ε , por lo que se requiere de un ε suficientemente pequeña para que (4.3.62) se cumpla.

Resumiendo el análisis de la función candidata de Lyapunov (4.3.36), se puede decir que esta función será positiva definida siempre que se cumplan las condiciones dadas en (4.3.54), (4.3.58) y (4.3.62). Como se expuso anteriormente, la condición (4.3.54) siempre se cumple escogiendo de manera adecuada las constantes a y b definidas en (4.3.48). Por otra parte, las condiciones dadas en (4.3.58) y (4.3.62) se cumplen siempre que ε sea suficientemente pequeña.

A continuación se inicia el análisis de la derivada de la función de Lyapunov (4.3.37) partiéndola de la siguiente forma

$$\dot{V}_{LC}(\tilde{q}_{LC}, \dot{q}_{LC}) = \chi_1 + \chi_2 \quad (4.3.63)$$

dónde

$$\begin{aligned} \chi_1 = & -\frac{1}{2} \left(\dot{q}_m^T R_m \dot{q}_m + \dot{q}_{e_2}^T K_2 \dot{q}_{e_2} \right) + q_{e_2}^T K_1 \tilde{q}_m - \dot{q}_c^T R_c \dot{q}_c + \tilde{q}_m^T \left[-K_2 \dot{q}_{e_2} - R_{e_2} \dot{q}_{e_2} \right] \\ & - \dot{q}_e^T R_e \dot{q}_e + \tilde{q}_m^T \left[D_{e_{21}}(q_m) \dot{q}_{e_1} + D_{e_{22}}(q_m) \dot{q}_{e_2} \right] - \tilde{q}_m^T \left[\frac{\partial V_e(q_m, q_e)}{\partial q_{e_2}} + \frac{\partial V_c(q_c, w)}{\partial q_{e_2}} \right] \end{aligned} \quad (4.3.64)$$

y

$$\chi_2 = -\frac{1}{2} \left(\dot{q}_m^T R_m \dot{q}_m + \dot{q}_{e_2}^T K_2 \dot{q}_{e_2} \right) + q_{e_2}^T \frac{K_1}{\varepsilon} \dot{q}_{e_2} \quad (4.3.65)$$

Capítulo 4. Control de Sistemas Electromecánicos

De (4.3.63) es claro que si $\chi_1 < 0$ y $\chi_2 < 0$ entonces $\dot{V}_{LC}(\tilde{q}_{LC}, \dot{q}_{LC}) < 0$.

Acotando (4.3.64) y (4.3.65) se obtienen las siguientes dos desigualdades

$$\begin{aligned} \chi_1 \leq & -\frac{1}{2} \left(\lambda_m(R_m) \|\dot{q}_m\|^2 + \lambda_m(K_2) \|\dot{q}_e\|^2 \right) + \varepsilon \|q_{e2}\| \|\tilde{q}_m\| - \lambda_m(R_c) \|\dot{q}_c\|^2 \\ & + \varepsilon \|\tilde{q}_m\| \|\dot{q}_{e2}\| \lambda_M(K_2) + \varepsilon \|\tilde{q}_m\| \|\dot{q}_{e2}\| \lambda_M(R_{e2}) - \lambda_m(R_e) \|\dot{q}_e\|^2 + \varepsilon \|\dot{q}_m\| \|\dot{q}_{e1}\| \sigma_1 \\ & + \varepsilon \|\dot{q}_m\| \|\dot{q}_{e2}\| \lambda_M(D_{e22}(q_m)) + \varepsilon \|\tilde{q}_m\| \left[\left\| \frac{\partial V_o(q_m, q_e)}{\partial q_{e2}} \right\| + \left\| \frac{\partial V_c(q_c, w)}{\partial q_{e2}} \right\| \right] \end{aligned} \quad (4.3.66)$$

y

$$\chi_2 \leq -\frac{1}{2} \left(\lambda_m(R_m) \|\dot{q}_m\|^2 + \lambda_m(K_2) \|\dot{q}_e\|^2 \right) + \frac{1}{\varepsilon} \|q_{e2}\| \|\dot{q}_{e2}\| \lambda_M(K_I) \quad (4.3.67)$$

Partiendo de (4.3.66) y (4.3.67) se generan las siguientes condiciones sobre ε que garantizan $\chi_1 < 0$ y $\chi_2 < 0$.

De (4.3.66)

$$\varepsilon < \frac{\frac{1}{2} \left(\lambda_m(R_m) \|\dot{q}_m\|^2 + \lambda_m(K_2) \|\dot{q}_{e2}\|^2 \right) + \lambda_m(R_c) \|\dot{q}_c\|^2 + \lambda_m(R_e) \|\dot{q}_e\|^2}{\|\tilde{q}_m\| \left[\|q_{e2}\| + \mu \|\dot{q}_{e2}\| + \left\| \frac{\partial V_o(q_m, q_e)}{\partial q_{e2}} \right\| + \left\| \frac{\partial V_c(q_c, w)}{\partial q_{e2}} \right\| \right] + \|\dot{q}_m\| \left(\sigma_1 \|\dot{q}_{e1}\| + \lambda_M(D_{e22}(q_m)) \|\dot{q}_{e2}\| \right)} \quad (4.3.68)$$

donde

$$\mu \doteq \lambda_M(K_2) + \lambda_M(R_{e2}) \quad (4.3.69)$$

y de (4.3.67)

$$\frac{1}{\varepsilon} \lambda_M(K_I) < \frac{\frac{1}{2} \left(\lambda_m(R_m) \|\dot{q}_m\|^2 + \lambda_m(K_2) \|\dot{q}_{e2}\|^2 \right)}{\|q_{e2}\| \|\dot{q}_{e2}\|} \quad (4.3.70)$$

despejando ε de la última desigualdad resulta

$$\varepsilon > \lambda_M(K_I) \frac{2 \|q_{e2}\| \|\dot{q}_{e2}\|}{\lambda_m(R_m) \|\dot{q}_m\|^2 + \lambda_m(K_2) \|\dot{q}_{e2}\|^2} \quad (4.3.71)$$

La desigualdad (4.3.68) impone una nueva cota superior para el valor máximo de ε , mientras que la desigualdad (4.3.71) impone una cota inferior para ε . De esta manera, la derivada de la función candidata de Lyapunov, dada en (4.3.37), será negativa definida siempre que se tenga un ε que esté dentro del rango de valores definido por las desigualdades (4.3.68) y (4.3.71).

Resumiendo el análisis de las condiciones impuestas, se puede observar que (4.3.54) siempre se cumple escogiendo apropiadamente a y b . Las condiciones (4.3.58) y (4.3.62) requieren una ε suficientemente pequeña, lo que a su vez implica de (4.3.71) que K_I debe ser también pequeña. Notando que (4.3.68) depende de los parámetros del controlador, se tiene que escogiendo a éstos de manera adecuada se consigue el resultado

Capítulo 4. Control de Sistemas Electromecánicos

propuesto. Finalmente, de (4.3.36) es claro que $\dot{V}(\tilde{q}_{LC}, \dot{q}_{LC}) = 0 \Leftrightarrow \dot{q}_{LC} = 0$ por lo que invocando el principio de invariancia de LaSalle (apéndice A) se concluye la estabilidad asintótica del esquema de control de la proposición 4.3.4, el cual se muestra esquemáticamente en la figura 4.3.5

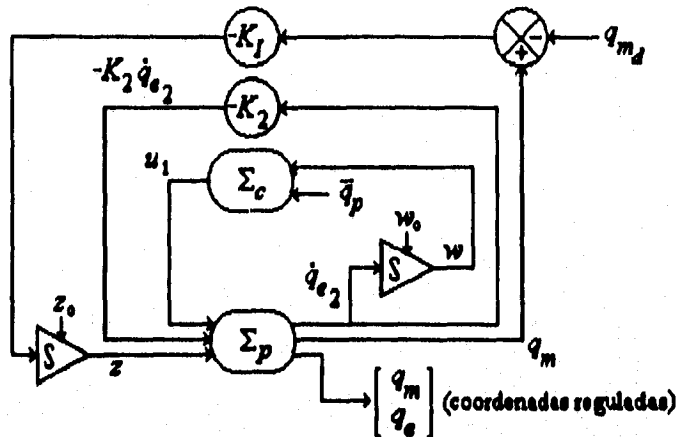


Figura 4.3.5

□□□

Observación 4.3.6. La definición de ε en (4.3.24) implica que

$$\frac{1}{\varepsilon} \lambda_M(K_I) < 1$$

$$\varepsilon > \lambda_M(K_I) \tag{4.3.72}$$

mientras que de (4.3.71) se tiene

$$\varepsilon > \lambda_M(K_I) \frac{2 \|q_{e2}\| \|\dot{q}_{e2}\|}{\lambda_m(R_m) \|q_m\|^2 + \lambda_m(K_2) \|\dot{q}_{e2}\|^2}$$

De esta manera el valor de ε está acotado por debajo por el valor que resulte más grande entre (4.3.71) y (4.3.72). De (4.3.72) se observa que esta cota puede hacerse tan pequeña como sea necesario haciendo pequeño $\lambda_M(K_I)$, y en el caso de (4.3.71) haciendo $\lambda_M(K_I)$ pequeño y/o $\lambda_m(K_2)$ suficientemente grande.

Observación 4.3.7. Del valor mínimo que resulte entre las condiciones dadas en (4.3.58), (4.3.62) y (4.3.68) se obtiene la cota máxima que debe satisfacer ε . De (4.3.58) y (4.3.62) se tiene que estas cotas se satisfacen escogiendo a ε suficientemente pequeña. Por otro lado, de (4.3.68) se observa que haciendo grande el valor de $\lambda_m(K_2)$ y/o de $\lambda_m(R_c)$, la cota máxima impuesta por esta desigualdad puede correrse hacia arriba.

Observación 4.3.8. Es importante hacer notar que los valores característicos máximo y mínimo de la matriz K_2 deben satisfacer el siguiente compromiso, que resulta al considerar (4.3.68) y (4.3.71): de acuerdo con (4.3.68) es deseable que $\lambda_M(K_2)$ sea lo más pequeño posible, ya que de lo contrario la cota superior que esta desigualdad establece puede hacerse muy pequeña; por otro lado, según (4.3.71) se debe procurar que

Capítulo 4. Control de Sistemas Electromecánicos

$\lambda_m(K_2)$ sea lo más grande posible con objeto de lograr que la cota inferior dada en (4.3.71) se tan pequeña como sea posible.

Observación 4.3.9. Se observa el hecho de que todas las desigualdades que involucran divisiones de normas de variables eléctricas, como por ejemplo (4.3.52), obligan a excluir las configuraciones singulares que pudiera tener la parte mecánica. La razón para tener que hacer esto es que de otra forma, en las configuraciones singulares de la parte mecánica, estas desigualdades nunca se cumplirían.

Observación 4.3.10. En las desigualdades (4.3.68) aparece el término $\|\tilde{q}_m\|$ en el denominador, lo que implica que ε estará bien definida siempre que $\|\tilde{q}_m\|$ no sea arbitrariamente grande. Además, aparece el término $\left\| \frac{\partial V_c(q_c, w)}{\partial q_m} \right\|$ también en el denominador, lo que implica, al sustituir en (4.2.16) la definición de w , dada por (4.2.1), junto con la definición de Δ , dada en (4.2.28), que existe un rango de valores en el cual ε está bien definido siempre que Δ no sea arbitrariamente grande. Adicionalmente, el rango de valores en el que puede existir ε —cuyas cotas mínima y máxima se explican en las observaciones 4.3.6 y 4.3.7, respectivamente— estará bien definido si los estados del sistema electromecánico se mantienen dentro de una región del espacio de estados que cumple con las desigualdades presentadas en esta sección.

La observación 4.3.10 establece que la estabilidad asintótica del sistema será sólo local.

Observación 4.3.11. Obsérvese finalmente que el análisis que se realiza en esta sección no consigue sintonizar a K_f ; sino solamente se limita a probar que existen valores para K_f que garantizan la estabilidad asintótica local del esquema de control propuesto.

Observación 4.3.12. El parámetro ε no se utiliza en el esquema de control presentado en esta sección. Sólo ha sido necesario emplearlo para realizar el análisis de estabilidad.

Se concluye de esta sección que, bajo las suposiciones adicionales 4.3.1-4.3.2, el vector de coordenadas mecánicas generalizadas se regula a su valor deseado sin error de estado estable —gracias a la acción integral introducida en (4.3.17-4.3.19)—, aun cuando se desconoce el vector de condiciones iniciales de las coordenadas eléctricas actuadas.

Capítulo 5

Resultados de Simulación

En este capítulo se presentan los resultados conseguidos al simular computacionalmente un sistema electromecánico que está dentro de la clase estudiada en este trabajo.

El sistema considerado se muestra a continuación en la figura 5.1

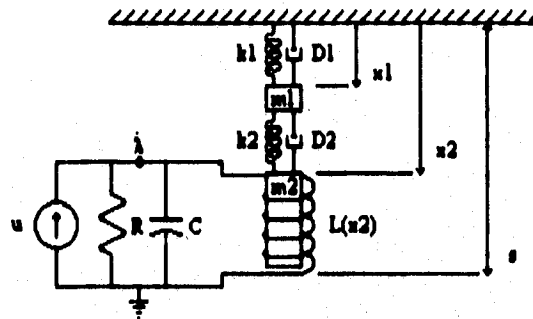


Figura 5.1

Este sistema requiere de tres coordenadas generalizadas para determinar su comportamiento dinámico, dos de origen mecánico y una eléctrica. Como la parte eléctrica tiene a todos sus elementos en paralelo se decide analizarla por nodos, de esta manera la coordenada eléctrica es $\lambda \in \mathcal{R}$. Por otra parte, las dos coordenadas mecánicas se definen tal como se muestra en la figura 5.1, y el vector completo de coordenadas mecánicas tiene la siguiente forma

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^2 \quad (5.1)$$

así, el vector de coordenadas generalizadas de la planta es

$$q_p = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^3 \quad (5.2)$$

El objetivo de control para este caso es regular la posición mecánica x_2 .

Se asume que todos los elementos del sistema están descritos por una relación constitutiva lineal, excepto el inductor, cuyo valor de inductancia está dado por

$$L(x_2) = \frac{B}{s - x_2}; \quad B, s \in \mathcal{R}^+ \quad (5.3)$$

Las funciones de energía que determinan a este sistema en particular son:

$$T_p(x, \dot{x}, \lambda) = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} C \dot{\lambda}^2 \quad (5.4)$$

$$V_p(x, \lambda) = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} L^{-1}(x_2) \lambda^2 \quad (5.5)$$

Capítulo 5. Resultados de Simulación

$$\mathcal{J}_p(\dot{x}, \dot{\lambda}) = \frac{1}{2} D_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} D_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} R^{-1} \dot{\lambda}^2 \quad (5.6)$$

Con las ecuaciones (5.4) y (5.5) se define el lagrangiano para la planta

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p(q_p, \dot{q}_p) = & \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} C \dot{\lambda}^2 \\ & - \frac{1}{2} k_1 x_1^2 - \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2} L^{-1}(x_2) \lambda^2 \end{aligned} \quad (5.7)$$

En la figura 5.1 se aprecia que la única parte actuada del sistema es la eléctrica, de esta manera se tiene

$$m_p u_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^3 \quad (5.8)$$

El modelo para esta planta se obtiene sustituyendo (5.6), (5.7) y (5.8) en (2.1.24), resultando

$$\begin{bmatrix} m_1 \ddot{x}_1 - m_2 \ddot{x}_2 + m_2 \ddot{x}_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 - m_2 \ddot{x}_1 \\ C \ddot{\lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 x_1 - k_2 x_2 + k_2 x_1 \\ k_2 x_2 - k_2 x_1 - \frac{\lambda^2}{2B} \\ B^{-1} \lambda (s - x_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 \dot{x}_1 - D_2 \dot{x}_2 + D_2 \dot{x}_1 \\ D_2 \dot{x}_2 - D_2 \dot{x}_1 \\ R^{-1} \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Para conseguir el objetivo de control se inicia proponiendo un controlador como el sugerido en la sección 4.2 de este trabajo; posteriormente, al momento de realizar las simulaciones, se introduce el término integral presentado en 4.3. Se define la coordenada generalizada del controlador como $q_c \in \mathfrak{R}$ y al vector de coordenadas generalizadas del sistema en lazo cerrado como

$$q_{LC} = \begin{bmatrix} q_c \\ q_p \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^4 \quad (5.10)$$

además la co-energía cinética para el controlador se propone como

$$T'_c(q_c, \dot{q}_c) = 0 \quad (5.11)$$

mientras que la energía potencial se propone según (4.2.4) y (4.2.5) como

$$V_c(q_c, w) = \frac{1}{2} q_c^T A_2 q_c + V_{c_2}(w) \quad (5.12)$$

donde

$$V_{c_2}(w) = \frac{1}{2} (w - \delta)^T K_1 (w - \delta) \quad (5.13)$$

con w definido como en (4.2.1). La función de disipación del controlador es

$$\mathcal{J}_c(\dot{q}_c) = \frac{1}{2} \dot{q}_c^T R_c \dot{q}_c \quad (5.14)$$

El lagrangiano del sistema en lazo cerrado resulta ser

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{LC}(q_{LC}, \dot{q}_{LC}) = & \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} C \dot{\lambda}^2 - \frac{1}{2} k_1 x_1^2 - \frac{1}{2} L^{-1}(x_2) \lambda^2 \\ & - \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2} q_c^T A_2 q_c - \frac{1}{2} (w - \delta)^T K_1 (w - \delta) \end{aligned} \quad (5.15)$$

y las ecuaciones dinámicas generadas al usar (5.15) con (2.1.24) son

Capítulo 5. Resultados de Simulación

$$\begin{bmatrix} 0 \\ m_1 \ddot{x}_1 - m_2 \ddot{x}_2 + m_2 \dot{x}_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 - m_2 \dot{x}_1 \\ C \ddot{\lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_2 q_c \\ k_1 x_1 - k_2 x_2 + k_2 x_1 \\ k_2 x_2 - k_2 x_1 - \frac{\lambda^2}{2B} \\ B^{-1} \lambda (s - x_2) + K_1 (w - \delta) \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

$$+ \begin{bmatrix} R_c q_c \\ D_1 \dot{x}_1 - D_2 \dot{x}_2 + D_2 \dot{x}_1 \\ D_2 \dot{x}_2 - D_2 \dot{x}_1 - \frac{\lambda^2}{2B} \\ R^{-1} \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u \end{bmatrix}$$

donde $u = -K_2 \dot{\lambda}$, con $K_2 > 0$.

A continuación se procede a calcular el valor de δ . Se inicia evaluando (5.16) en $\dot{q}_{LC} = 0$ para obtener los puntos de equilibrio, obteniéndose las siguientes cuatro ecuaciones

$$A_2 q_c = 0 \quad (5.17)$$

$$k_1 \bar{x}_1 - k_2 (\bar{x}_2 - \bar{x}_1) = 0 \quad (5.18)$$

$$k_2 (\bar{x}_2 - \bar{x}_1) - \frac{\bar{\lambda}^2}{2B} = 0 \quad (5.19)$$

$$\frac{\bar{\lambda}(s - \bar{x}_2)}{B} + K_1 (\bar{\lambda} + \Delta - \delta) = 0 \quad (5.20)$$

donde se han usado las ecuaciones (4.2.27) y (4.2.28) para generar la ecuación (5.20).

De (5.17) es claro que $\bar{q}_c = 0$, mientras que de (5.18) se tiene

$$\bar{x}_1 = \frac{k_2 \bar{x}_2}{k_1 + k_2} \quad (5.21)$$

sustituyendo (5.21) en (5.19) se tiene

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{2Bk_1 k_2}{k_1 + k_2} \bar{x}_2} \quad (5.22)$$

y sustituyendo (5.22) en (5.20) se obtiene

$$\delta = \left(1 + \frac{s - \bar{x}_2}{K_1 B}\right) \sqrt{\frac{2Bk_1 k_2}{k_1 + k_2} \bar{x}_2} - \Delta \quad (5.23)$$

Observación 5.2. En (5.21) se observa que \bar{x}_1 queda determinado una vez que se fija \bar{x}_2 .

Ahora se encuentran condiciones sobre los parámetros del controlador para cumplir con la suposición 4.2.4., es decir, para garantizar que $V_{LC}(q_{LC}) = V_p(q_p) + V_c(q_c, w)$ sea estrictamente convexa. Tomando la segunda derivada de $V_{LC}(q_{LC})$ con respecto a q_{LC} se obtiene

Capítulo 5. Resultados de Simulación

$$\frac{\partial^2 V_{LC}(q_{LC})}{\partial q_{LC}^2} = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 & -\frac{\lambda}{B} \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda}{B} & \left(K_1 + \frac{s-x_2}{B}\right) \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Para que

$$\frac{\partial^2 V_{LC}(q_{LC})}{\partial q_{LC}^2} \geq \varepsilon I; \quad \varepsilon > 0 \quad (5.25)$$

se cumpla tienen que cumplirse las siguientes cuatro desigualdades:

$$A_2 > 0 \quad (5.26)$$

$$\begin{vmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & k_1 + k_2 \end{vmatrix} = A_2(k_1 + k_2) > 0 \quad (5.27)$$

$$\begin{vmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{vmatrix} = A_2 \begin{vmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{vmatrix} = A_2 k_1 k_2 > 0 \quad (5.28)$$

$$\begin{vmatrix} A_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 & -\frac{\lambda}{B} \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda}{B} & \left(K_1 + \frac{s-x_2}{B}\right) \end{vmatrix} = A_2 \begin{vmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 & -\frac{\lambda}{B} \\ 0 & -\frac{\lambda}{B} & \left(K_1 + \frac{s-x_2}{B}\right) \end{vmatrix} > 0 \quad (5.29)$$

Nótese que las desigualdades (5.26), (5.27) y (5.28) siempre se cumplen debido a que A_2 , k_1 y k_2 son siempre mayores que cero. Por otra parte, realizando operaciones en (5.29) se obtiene

$$A_2 \left[\frac{\lambda}{B} \begin{vmatrix} k_1 + k_2 & 0 \\ -k_2 & -\frac{\lambda}{B} \end{vmatrix} + \left(K_1 + \frac{s-x_2}{B}\right) \begin{vmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{vmatrix} \right] > 0$$

de donde

$$-\frac{\lambda^2}{B^2} (k_1 + k_2) + \left(K_1 + \frac{s-x_2}{B}\right) k_1 k_2 > 0$$

despejando K_1

$$K_1 > \frac{\lambda^2 (k_1 + k_2)}{B^2 k_1 k_2} - \frac{s-x_2}{B} \quad (5.30)$$

Para analizar (5.30) considérese lo siguiente

$$\lambda_{\max} = \beta \bar{\lambda}; \quad \beta \in \mathfrak{R}; \quad \beta \geq 1 \quad (5.31)$$

$$x_{2\max} = \phi \bar{x}_2; \quad \phi \in \mathfrak{R}; \quad \phi \geq 1 \quad (5.32)$$

usando (5.31) y (5.32) la desigualdad (5.30) puede reescribirse como

$$K_1 > \frac{\beta^2 \bar{\lambda}^2 (k_1 + k_2)}{B^2 k_1 k_2} - \frac{s - \phi \bar{x}_2}{B}$$

sustituyendo (5.22)

$$K_1 > \frac{\beta^2}{B^2} \left(\frac{2Bk_1k_2}{k_1+k_2} \bar{x}_2 \right) \frac{(k_1+k_2)}{k_1k_2} - \frac{s-\phi\bar{x}_2}{B}$$

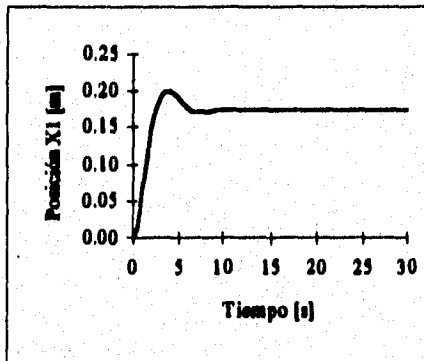
simplificando la última expresión resulta

$$K_1 > -\frac{s}{B} + \frac{1}{B} \left[2\beta^2 + \phi \right] \bar{x}_2 \quad (5.33)$$

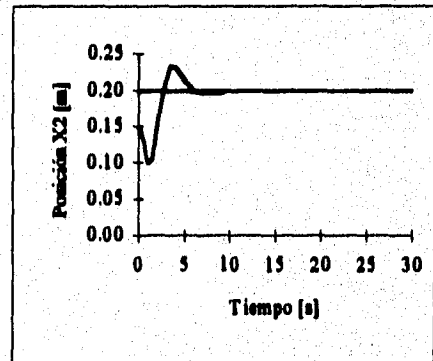
La desigualdad (5.33) implica que K_1 es proporcional a \bar{x}_2 y que K_1 debe ser suficientemente grande para cumplir con (5.25).

Observación 5.3. Se observa que (5.24) no depende de Δ , lo que implica que la función $V_{LC}(q_{LC})$ será estrictamente convexa independientemente de las condiciones iniciales de la planta.

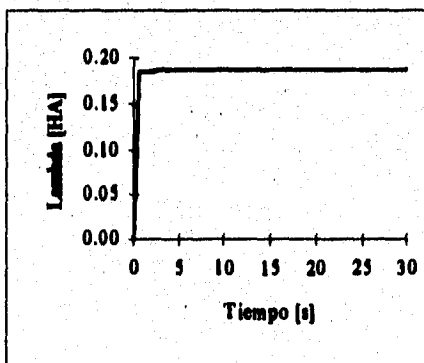
A continuación se muestran las gráficas que resultan de simular el sistema tratado en este capítulo. Para efectos de la simulación se desea regular a $x_{2d}=0.20$ m y se proponen los siguientes valores para los parámetros de la planta: $s=0.50$ m, $m_1=1$ kg, $m_2=2$ kg, $k_1=1$ N/m, $k_2=7$ N/m, $D_1=1$ Ns/m, $D_2=3$ Ns/m, $B=0.10$ Hm, $C=1$ mF, $R=10$ Ω . Por otro lado, los parámetros del controlador son: $K_2=0.002$, $A_2=1$, $R_c=5$, $K_1=100$. Además, se supuso $x_2(0)=0.15$ m, mientras que el resto de las condiciones iniciales se asumen, por ahora, nulas y conocidas.



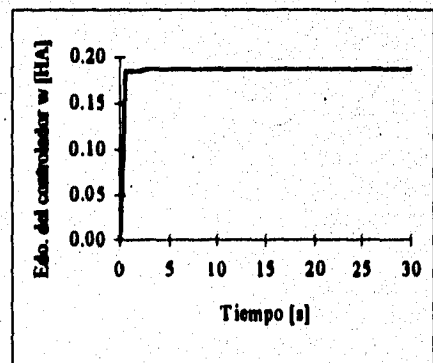
Gráfica 5.4



Gráfica 5.5

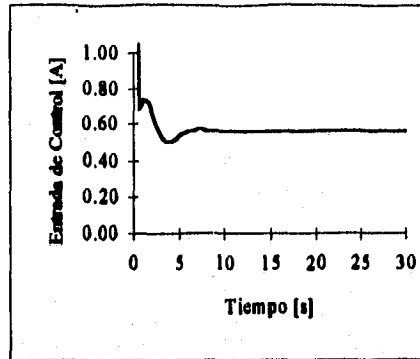


Gráfica 5.6



Gráfica 5.7

Capítulo 5. Resultados de Simulación

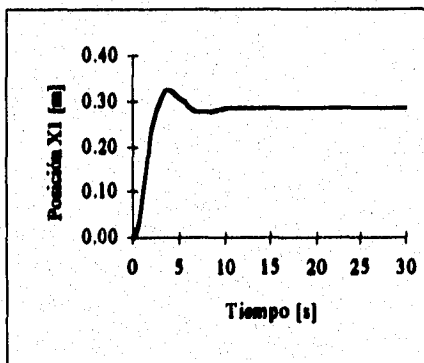


Gráfica 5.8

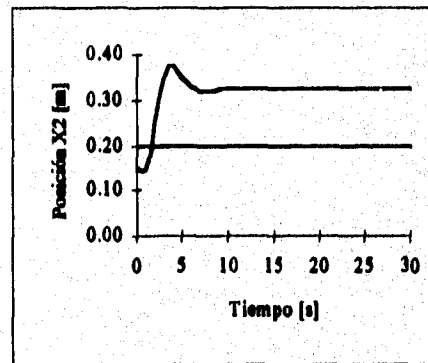
Observación 5.9. En la gráfica 5.5 se aprecia que el valor de x_2 alcanza el valor deseado de 0.2 m. En la gráfica 5.4 se puede verificar que el valor de estado estable de x_1 está dado según (5.23), y con los parámetros propuestos para la planta es $\bar{x}_1 = 0.1750$ m.

Observación 5.10. Las gráficas 5.6 y 5.7 son exactamente iguales. Esto va de acuerdo con la ecuación (4.2.1) y se debe a que se supusieron condiciones iniciales nulas para la parte eléctrica. El valor de estado estable de la entrada en la gráfica 5.8 es cercano a 0.56 A.

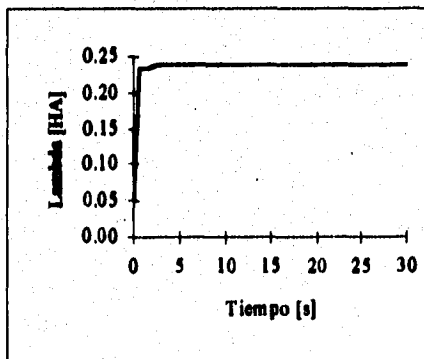
Para evaluar el desempeño del controlador de la proposición 4.2.5 cuando las condiciones iniciales de la parte eléctrica no son cero, se simula el caso en que $\lambda(0) = 0.05$ HA.



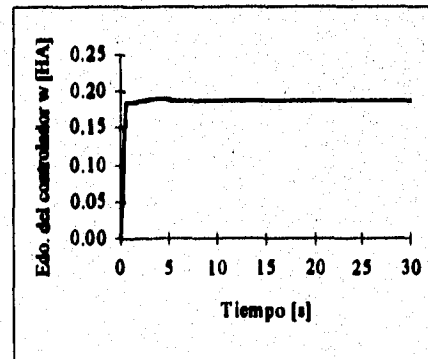
Gráfica 5.11



Gráfica 5.12

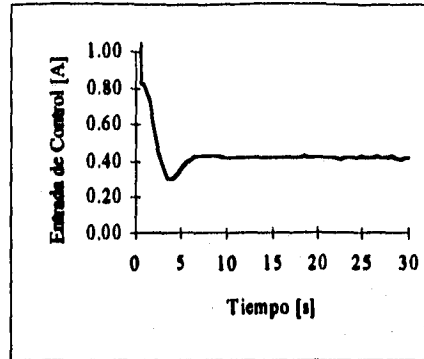


Gráfica 5.13



Gráfica 5.14

Capítulo 5. Resultados de Simulación



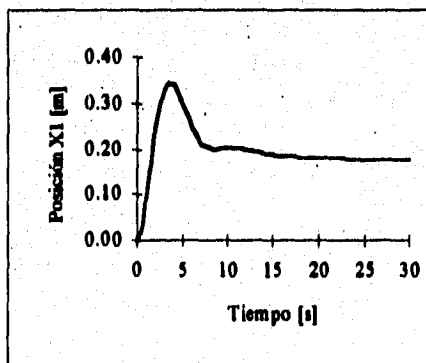
Gráfica 5.15

Observación 5.16. En las gráficas 5.11 y 5.12 se aprecia claramente que el efecto principal que tiene el desconocer las condiciones iniciales de la parte eléctrica actuada es ocasionar un error de estado estable. Se observa que las dos coordenadas mecánicas se estabilizan en un punto que no coincide con el deseado.

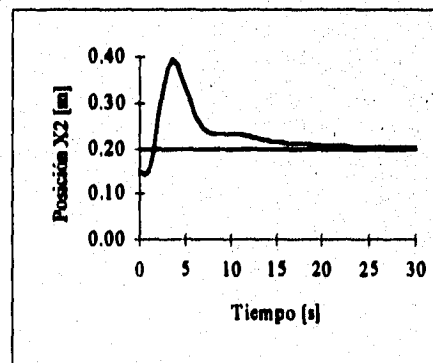
Observación 5.17. A diferencia de la simulación anterior, en este caso las gráficas del flujo magnético, 5.13, y del estado w del controlador, 5.14, no coinciden. Además, se aprecia que la diferencia existente entre ambas variables en estado estable coincide con el valor de la condición inicial de λ . Esto último está de acuerdo con la ecuación (4.2.27).

Observación 5.18. Después de 30 s la señal de entrada que aparece en la gráfica 5.15 alcanza 0.41 A, lo cual es menor que el valor de esta misma señal en la primera simulación (gráfica 5.8). Esto explica porqué las tres coordenadas generalizadas de la planta están fuera de su valor deseado. Esta observación resulta ser clave para proponer el esquema de control con término integral en la entrada.

Ahora se introduce el término integral a la ley de control como se explicó en la sección 4.3. Se considera que la condición inicial de la parte eléctrica es igual que en la simulación anterior, es decir $\lambda(0)=0.05$ HA. El valor de la ganancia integral que se usa para obtener las siguientes gráficas es $K_I = 7.0$ y el estado del término integral está dado por $\dot{z} = -K_I \tilde{x}_1 = -K_I (x_1 - \bar{x}_1)$. Los resultados que se obtuvieron al simular son los siguientes:

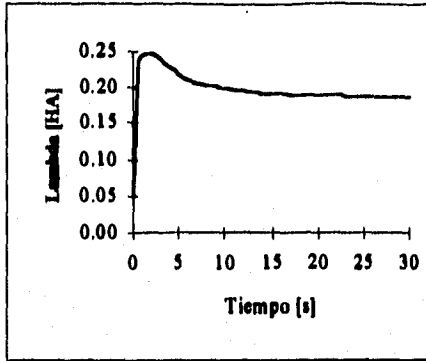


Gráfica 5.19

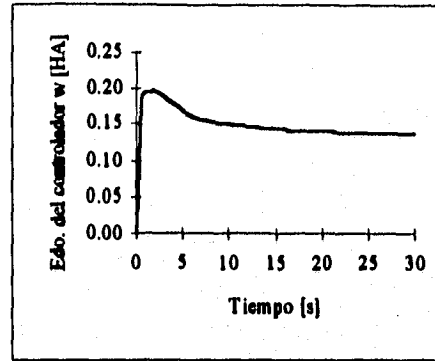


Gráfica 5.20

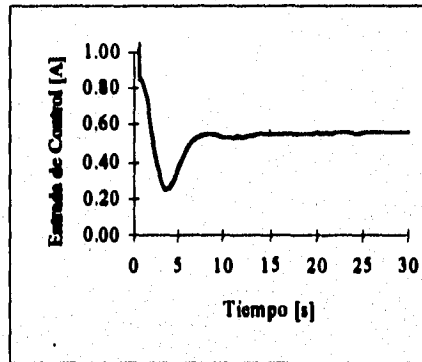
Capítulo 5. Resultados de Simulación



Gráfica 5.21



Gráfica 5.22



Gráfica 5.23

Observación 5.24. En las gráficas 5.19 y 5.20 se puede ver como las dos coordenadas mecánicas van tendiendo a su valor deseado hasta alcanzarlo. Esto prueba la efectividad del término integral añadido.

Observación 5.25. Es preciso hacer notar que el sistema electromecánico con que se trabaja en este capítulo no cumple con la suposición 4.3.1, ya que el vector de coordenadas mecánicas no tiene la misma dimensión que el de coordenadas eléctricas medibles. Sin embargo, el hecho de que el equilibrio de x_1 esté determinado por el de x_2 , como lo indica la ecuación (5.23), impide regular todo el vector de posiciones mecánicas sino sólo una parte de él.

Observación 5.26. Sobre las ganancias del controlador se observa lo siguiente: el valor de la ganancia integral K_I usado en esta última simulación ilustra que, al menos para el ejemplo considerado en este capítulo, si existe un rango de valores en el cuál está definida la variable ε introducida en la sección 4.3; por otro lado, el valor de K_I propuesto en estas simulaciones resulta ser suficiente para garantizar que la condición (5.25) se cumpla.

Capítulo 6

Conclusiones

- Se resolvió el problema de regulación de posición para una clase de sistemas electromecánicos modelables a partir de parámetros concentrados.
- Al emplear las ecuaciones de Euler-Lagrange se pudo apreciar la simplicidad con la que sistemáticamente se obtienen las ecuaciones dinámicas para sistemas del tipo tratado aquí.
- Se obtuvo el modelo general para el sistema electromecánico descrito en [5], además de los modelos particulares obtenidos al analizar la parte eléctrica por nodos y por mallas.
- Para proponer las estrategias de control se partió de los resultados de [8], los cuales, a su vez, generalizan los resultados originales de [10], [1]. De esta manera se pudo aprovechar la estructura física de los sistemas electromecánicos, demostrando así que las técnicas basadas en el moldeo de energía conservan la interpretación física.
- El primer esquema propuesto en la sección 4.2 de este trabajo resuelve el problema de regulación siempre que se tenga un modelo conocido de la planta considerada.
- En el hecho de que la naturaleza de los sistemas eléctricos permita la medición de velocidades generalizadas, *i.e.* corrientes o voltajes, radica una de las principales diferencias entre la ley que aquí se propone y aquellas presentadas en [3], [8], [9], las cuales consideran sistemas mecánicos. Además, este hecho permitió tener un lazo de control con velocidades generalizadas, lo que hizo posible asegurar de manera sencilla — es decir sin necesidad de recurrir a condiciones de propagación de la disipación como la usada en [8]— la estabilidad asintótica del esquema.
- La inclusión del integrador que genera el estimado w en el esquema de control de la sección 4.2 permite emplear los resultados de [8], mantener libre de medición al subsistema mecánico, conseguir que el esquema pueda ser aplicable en la práctica y preservar la simplicidad que ha caracterizado a las leyes de control basadas en el moldeo de energía propuestas en la literatura.
- Se determinó el efecto negativo que tiene el usar un integrador al generar un error de estado estable cuando se desconocen las condiciones iniciales de la parte eléctrica actuada. Por otro lado se determinó que, desde el punto de vista de las aplicaciones, este problema sólo existe cuando el sistema eléctrico contiene elementos capacitivos.
- El haber introducido en el segundo esquema de control propuesto un término integral permitió redondear el resultado obtenido con el primer esquema. Sus principales desventajas son que el esquema requiere de sensores de posición mecánica y que el resultado es sólo local.

Capítulo 6. Conclusiones

- La función de Lyapunov propuesta así como la estrategia usada para analizar la estabilidad del segundo esquema se basan en el desarrollo presentado [9]. Se llegó a una conclusión similar a la obtenida en el trabajo referido al garantizar estabilidad asintótica cuando la matriz K_I es suficientemente pequeña.
- El ejemplo de simulación presentado al final del trabajo sirvió para mostrar el comportamiento de las leyes de control propuestas, así como para ilustrar algunas de las características importantes de las mismas.
- Entre otras de las cuestiones que permanecen por ser tratadas referentes al control de los sistemas electromecánicos, una de las importantes es la siguiente: diseñar observadores que usen velocidades generalizadas eléctricas para estimar al vector de coordenadas eléctricas. Con esto se tendría la posible ventaja de no tener el error de estado estable causado por el integrador, con lo que se podría prescindir del segundo esquema de control presentado en este trabajo. La desventaja potencial que un diseño así tendría es que se perdería la simplicidad característica de los esquemas de control aquí propuestos.
- Una cuestión que aún permanece abierta es la caracterización de la clase de sistemas que cumplen con la suposición 4.2.4.

Apéndice A

Antes de enunciar el Principio de Invariancia de LaSalle considere las siguientes definiciones

Definición A.1. Conjunto invariante: Se dice que un conjunto M es un conjunto invariante con respecto a

$$\dot{x} = f(x) \quad (\text{A.1})$$

si

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \quad \forall t \in \mathfrak{R}$$

Definición A.2. Punto límite: Sea $x(t)$ una solución de (A.1). Un punto z es llamado punto límite de esta solución si existe una secuencia $\{t_n\}$ en \mathfrak{R}_+ tal que $t_n \rightarrow \infty$ y $x(t_n) \rightarrow z$.

Definición A.3. Conjunto límite: Al conjunto de puntos límite se le llama conjunto límite.

Definición A.4. Punto límite positivo: Se dice que un punto p es un punto límite positivo de $x(t)$ si existe una secuencia $\{t_n\}$, con $t_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, tal que $x(t_n) \rightarrow p$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Definición A.5. Conjunto límite positivo: Al conjunto de puntos límite positivos se le llama conjunto límite positivo.

Ahora considere el siguiente lema

Lema A.6 [4]. Si una solución $x(t)$ de (A.1) es acotada para $t \geq 0$, entonces su conjunto límite positivo L^+ es un conjunto no vacío, compacto e invariante. Más aún,

$$x(t) \rightarrow L^+ \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty$$

◇◇◇

Prueba. Ver [4].

Con lo anterior es posible enunciar formalmente el Principio de Invariancia de LaSalle

Principio de Invariancia de LaSalle [4]: Sea Ω un conjunto compacto (cerrado y acotado) con la propiedad de que cada solución de (A.1) que comienza en Ω permanece en Ω para todo tiempo futuro. Sea $V: \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$ una función continuamente diferenciable tal que $\dot{V}(x) \leq 0$ en Ω . Sea E el conjunto de todos los puntos en Ω donde $\dot{V}(x) = 0$. Sea M el más grande conjunto invariante en E . Entonces cada solución que empieza en Ω se aproxima a M cuando $t \rightarrow \infty$.

◇◇◇

Apéndice A

Prueba [4]. Sea $x(t)$ una solución de (A.1) que inicia en Ω . Como $\dot{V}(x) \leq 0$ en Ω , $V(x(t))$ es una función no creciente de t . Como $V(x)$ es continua en el conjunto compacto Ω , está acotada por abajo en Ω . Por lo tanto, $V(x(t))$ tiene un conjunto límite cuando $t \rightarrow \infty$. Nótese también que el conjunto límite positivo L^+ está en Ω porque Ω es un conjunto cerrado. Para cualquier $p \in L^+$, existe una secuencia t_n con $t_n \rightarrow \infty$ y $x(t_n) \rightarrow p$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por continuidad de $V(x)$, $V(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(x(t_n)) = a$. Por lo tanto, $V(x) = a$ en L^+ . Como L^+ es un conjunto invariante (por el Lema A.6), $\dot{V}(x) = 0$ en L^+ . Así

$$L^+ \subset M \subset E \subset \Omega$$

Como $x(t)$ está acotado, $x(t)$ se aproxima a L^+ cuando $t \rightarrow \infty$ (por el Lema A.6). Por lo tanto, $x(t)$ se aproxima a M cuando $t \rightarrow \infty$.

□□□

Apéndice B

Para acotar términos de la forma $g_1^T G g_2$ donde $g_1 \in \mathfrak{R}^n$, $g_2 \in \mathfrak{R}^m$ y $G \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ considere lo siguiente:

Descomponiendo a G en sus valores singulares se tiene

$$G = Q_1 \Sigma Q_2^T$$

donde

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{(r \times r)} & 0_{(r \times (m-r))} \\ 0_{((n-r) \times r)} & 0_{((n-r) \times (m-r))} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n \times m}; \quad Q_1 \in \mathfrak{R}^{n \times n} \text{ y } Q_2 \in \mathfrak{R}^{m \times m}$$

además Q_1 y Q_2 son matrices ortogonales, es decir

$$Q_1^T Q_1 = I_n \text{ y } Q_2^T Q_2 = I_m$$

por otro lado,

$$\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r); \quad r \leq \min(n, m); \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$$

Con lo anterior

$$g_1^T G g_2 = g_1^T Q_1 \Sigma Q_2^T g_2 \quad (\text{B.1})$$

defínase

$$\hat{g}_1 = Q_1^T g_1 = \begin{bmatrix} \hat{g}_{11} \\ \hat{g}_{12} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^n; \quad \hat{g}_{11} \in \mathfrak{R}^r; \quad \hat{g}_{12} \in \mathfrak{R}^{n-r} \quad (\text{B.2})$$

y

$$\hat{g}_2 = Q_2^T g_2 = \begin{bmatrix} \hat{g}_{21} \\ \hat{g}_{22} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^m; \quad \hat{g}_{21} \in \mathfrak{R}^r; \quad \hat{g}_{22} \in \mathfrak{R}^{m-r} \quad (\text{B.3})$$

Sustituyendo (B.2) y (B.3) en (B.1) se obtiene

$$g_1^T G g_2 = \hat{g}_1^T \Sigma \hat{g}_2$$

$$g_1^T G g_2 = \begin{bmatrix} \hat{g}_{11}^T & \hat{g}_{12}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{g}_{21} \\ \hat{g}_{22} \end{bmatrix} = \hat{g}_{11}^T \Sigma_1 \hat{g}_{21} \quad (\text{B.4})$$

de (B.4)

$$|g_1^T G g_2| \leq \sigma_1 \|\hat{g}_{11}\| \|\hat{g}_{21}\| \leq \sigma_1 \|\hat{g}_1\| \|\hat{g}_2\| \quad (\text{B.5})$$

pero

$$\|\hat{g}_1\| = \|g_1\| \text{ y } \|\hat{g}_2\| = \|g_2\| \quad (\text{B.6})$$

prueba

$$\|\hat{g}_1\| = \sqrt{\hat{g}_1^T \hat{g}_1} = \sqrt{g_1^T Q_1 Q_1^T g_1} = \sqrt{g_1^T g_1} = \|g_1\| \quad (\text{igual para } \hat{g}_2) \quad \square \square$$

con (B.5) y (B.6) se concluye que

$$|g_1^T G g_2| \leq \sigma_1 \|g_1\| \|g_2\| \quad (\text{B.7})$$

Referencias

- [1] S. Arimoto and F. Miyazaki, Technical Report METR 90-10, Department of Math. Eng. and Information Physics, University of Tokyo, June 1990
- [2] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, 2nd. ed., 1989.
- [3] R. Kelly, R. Ortega, A. Ailon and A. Loria, 'Global regulation of flexible joint robots using only approximate differenciation', *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 39, No. 6, pp. 1222-1224, 1994.
- [4] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Macmillan Publishing Company, 1992.
- [5] J. Meisel, *Principles of Electromechanical-Energy Conversion*, McGraw-Hill, 1966.
- [6] D. Miu, *Mechatronics: Electromechanics and Contromechanics*, Springer-Verlag, 1993.
- [7] P.J. Nicklasson, R. Ortega and G. Espinosa-Pérez, 'Passivity-based control of the general rotating electrical machine', 33rd IEEE Conference on Decision and Control, Orlando, FL, USA, 1994.
- [8] R. Ortega, A. Loria, R. Kelly and L. Praly, 'On passivity-based output feedback global stabilization of EL systems', *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 5, pp. 313-323, 1995.
- [9] R. Ortega, A. Loria and R. Kelly, 'A semiglobally stable output feedback PI²D regulator for robot manipulators', *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 40, No. 8, pp. 1432-1436, 1995.
- [10] M. Takegaki and S. Arimoto, 'A new feedback method for dynamic control of manipulators', *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 102, pp. 119-125, 1981.
- [11] D. Taylor, 'Pulse-width modulated control of electromechanical systems', *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, No. 4, pp. 524-528, 1992.
- [12] D. C. White and H. H. Woodson, *Electromechanical Energy Conversion*, Wiley, New York, 1959.