

52  
Rej



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**RENORMALIZACION AMBIENTALMENTE  
AMIGABLE**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:**

**F I S I C O**

**P R E S E N T A**

**ADOLFO ZAMORA RAMOS**



DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES  
DIRECTOR DE TESIS: CHRISTOPHER R. STEPHENS

1986  
FACULTAD DE CIENCIAS  
RECCION ESCOLAR

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule  
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: "Renormalización Ambientalmente Amigable".

realizado por Adolfo Zamora Ramos

con número de cuenta 8828009-1 , pasante de la carrera de Física

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis	
Propietario	OR. CHRISTOPHER RHODES STEPHENS STEVENS
Propietario	DR. GERMINAL COCHO GIL
Propietario	DR. ANTONMARIA MINZONI ALESSIO
Suplente	OR. JUAN CARLOS LOPEZ VIEYRA
Suplente	DR. FERNANOO MATIAS MORENO YNTRIAGO

*Chil*  
*G. Cocho*  
*A/a*  
*Juan Carlos Lopez Vieyra*  
*Fernando Matias Moreno Yntriago*

Consejo Departamental de Física  
OR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS TORRES  
OR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS TORRES

# **Renormalización Ambientalmente Amigable**

**Dedico este trabajo  
a todas las personas que  
de alguna manera u otra  
han creido en mi**

## Prefacio

---

El objetivo que se ha perseguido al escribir esta tesis es introducir una teoría que comenzó a desarrollarse hace menos de una década, ---renormalización ambientalmente amigable. Aunque esta teoría puede verse enmarcada dentro del contexto de la teoría del grupo de renormalización, representa un refinamiento de ésta en el sentido que ya toma en cuenta los efectos que el "ambiente" produce sobre el sistema físico. Este es un aspecto importante y no tratado por los métodos comunes de regularización. Ya en sí el grupo de renormalización es referido como "uno de los descubrimientos más profundos en la ciencia" porque es una teoría acerca de las teorías. En este trabajo utilizamos los fenómenos críticos para introducir las ideas en las que se basa el grupo de renormalización ya que es este contexto el que facilita el entendimiento de conceptos que de otra manera serían difíciles de entender. Para dar una visión clara de la física que queremos describir en el contexto de la teoría de renormalización, y en particular de renormalización ambientalmente amigable, iniciamos el primer capítulo mostrando algunos ejemplos típicos de fenómenos críticos y toda una serie de fenomenología que se conoce de ellos. En el segundo capítulo introducimos una serie de modelos que intentan describir la fenomenología que se observa. Algunos de estos modelos se resuelven exactamente dentro del marco de la mecánica estadística y el resto tiene una función de partición que puede escribirse como una integral funcional en términos de campos continuos. De estos últimos, tomamos un bien conocido representante para introducir las técnicas funcionales en el capítulo 3, que es la llamada teoría de Landau-Ginzburg-Wilson o teoría de  $\lambda\phi^4$ . Nuestra filosofía es que todo el trabajo hecho en estos tres capítulos es sólo una introducción al problema central, pero no por eso debe ser menospreciado. De hecho, es todo este trabajo el que permite visualizar la existencia de problemas que requieren de una teoría especial para ser tratados, ---la teoría del grupo de renormalización. Es con este tópico que iniciamos el capítulo 4. Notamos que existen, esencialmente, dos formas del grupo de renormalización. Una que corresponde a un mapeo exacto entre hamiltonianos que conduce a un hamiltoniano con un menor número de grados de libertad. De hecho, en el sentido estricto este conjunto de transformaciones entre los parámetros de los hamiltonianos es solo un semigrupo porque las transformaciones carecen de inversa. La otra, el grupo de renormalización en el contexto de teoría de campos, que se basa en la idea de reparametrización. Esta formulación, aunque más abstracta es más

general. Dentro de este contexto de los grupos de renormalización en teoría de campos, en los que renormalización es equivalente a reparametrización, es que podemos localizar la teoría de renormalización ambientalmente amigable.

Para finalizar este prefacio quisiera agradecer el gran apoyo académico del Dr. Chris Stephens, quien me introdujo en el área de teoría de campos aplicada a fenómenos críticos y tuvo la paciencia para continuar en esto hasta el final. Estoy agradecido, también, con los estudiantes que colaboran con el grupo de renormalización ambientalmente amigable por sus valiosos comentarios, oportunas discusiones y la ayuda en algunos cálculos que no son simples, en particular a José Antonio Santiago. Agradezco, también la amabilidad del Dr. Juan Carlos López Vieyra por sus valiosas aportaciones a la versión anterior de este manuscrito. Al Dr. Tim Minzoni, Dr. Germinal Cocho, y al Dr. Matías Moreno, agradezco, por último, sus invaluable comentarios y discusiones. Sin su ayuda esta tesis no hubiera sido la misma.

# Contenido

---

<b>Prefacio</b> . . . . .	xi
<b>Capítulo 1. Fenomenología de las Transiciones de Fase</b> . . . . .	1
1.1 Descripción de las Transiciones de Fase y Puntos Críticos . . . . .	2
1.2 Comportamiento Crítico . . . . .	5
1.3 La Hipótesis de Escalamiento . . . . .	8
1.4 Universalidad . . . . .	10
1.5 Escalamiento de Tamaño Finito . . . . .	12
1.6 Invariancia Conforme . . . . .	15
<b>Capítulo 2. Modelos en una Red Hipercúbica</b> . . . . .	16
2.1 Modelo de Ising . . . . .	17
2.2 El Modelo de Ising Unidimensional . . . . .	20
2.3 El Modelo de Ising en Dos Dimensiones . . . . .	22
2.4 Teoría de Campo Promedio . . . . .	24
2.5 El Modelo de Ising $d$ -dimensional . . . . .	29
2.5.1 La Teoría Gaussiana . . . . .	34
2.5.2 Exponentes Críticos en la Teoría Gaussiana . . . . .	36
2.6 Modelo de Heisenberg Generalizado . . . . .	38
2.7 Límites Interesantes . . . . .	41
<b>Capítulo 3. Teoría de Campos</b> . . . . .	46
3.1 La Función de Partición . . . . .	47
3.1.1 Diagramas de Feynman de las Funciones Desconectadas . . . . .	49
3.2 La Funcional Generadora de las Funciones Conectadas . . . . .	52
3.2.1 Diagramas de Feynman de las Funciones Conectadas . . . . .	54
3.2.2 Representación en el Espacio de Momentos . . . . .	57
3.3 Transformación de Legendre. La Acción Efectiva . . . . .	58

<b>Capítulo 4. La Teoría del Grupo de Renormalización</b> . . . . .	63
4.1 Renormalización para el Modelo de Ising Unidimensional . . . . .	64
4.2 El Grupo de Renormalización como Grupo de Reparametrización . . . . .	69
4.3 Renormalización de la Teoría de $\lambda\varphi^4$ . . . . .	71
4.3.1 La Ecuación del Grupo de Renormalización a $T = T_c$ . . . . .	71
4.3.2 Puntos Fijos, Escalamiento, y Dimensiones Anómalas . . . . .	74
4.3.3 La Ecuación del Grupo de Renormalización a $T > T_c$ . . . . .	75
4.3.4 Renormalización del Vértice de Dos Puntos. Constantes de Renormalización . . . . .	78
4.3.4 Expansión en $\epsilon$ de los Exponentes Críticos . . . . .	82
4.4 Renormalización Ambientalmente Amigable . . . . .	86
<b>Conclusiones</b> . . . . .	90
<b>Apéndice A. Relación entre las Funciones de Correlación del Modelo de Ising</b> . . . . .	91
<b>Apéndice B. Cálculo de Integrales Útiles</b> . . . . .	96
<b>Apéndice C. Evaluación de Algunos Diagramas Usando Parámetros de Feynman</b> . . . . .	98
<b>Referencias</b> . . . . .	102

## Capítulo 1

---

# FENOMENOLOGIA DE LAS TRANSICIONES DE FASE

En este capítulo y a lo largo de esta tesis estaremos tratando principalmente con transiciones de fase de segundo orden, aunque a veces nos referiremos a algunas de primer orden. Pero, ¿qué queremos decir con transición de fase?

Una transición de fase simplemente significa un cambio en la fase de un sistema termodinámico, donde una fase se entiende como una componente homogénea.

Existen varias maneras de clasificar las transiciones de fase, una, conocida como la *clasificación de Ehrenfest* propone llamar a una transición de fase de "*n*-ésimo orden" si cualquier derivada de orden menor que *n* de la energía libre con respecto a cualquiera de sus parámetros, evaluada en cualquier punto accesible al sistema es continua, pero cualquier derivada de orden *n* de la energía libre tiene una discontinuidad en la transición de fase.

Otra clasificación, que es la que asumiremos en este trabajo, es:

• Llamaremos *transición de fase de primer orden* a aquella que presente discontinuidades en las derivadas de primer orden de la energía libre. Por consiguiente, en este tipo de transiciones habrá discontinuidades en la entropía, el volumen o la magnetización y por lo general se generará calor latente.

Unos ejemplos que corresponden a este tipo de clasificación pueden encontrarse en la transición hielo-agua y la transición superconductividad-conductividad de un material en presencia de campo magnético externo. Por otra parte,

• llamaremos *transición de fase de segundo orden* a cualquiera que presente discontinuidades en las derivadas de orden mayor que uno. Estas tendrán continuidad en las derivadas de primer orden de la energía libre, pero pueden o no presentar discontinuidades en todas las derivadas de orden superior. Es decir, en este tipo de transiciones habrá continuidad en la entropía, el volumen o la magnetización a través del punto de transición y por lo general no se generará calor latente.

Algunos ejemplos de esta clase son, la transición líquido-vapor en el punto crítico, la transición superconductividad-conductividad de un material en ausencia de campo magnético externo y la transición ferromagnética en el punto de Curie, entre otros.

De aquí en adelante seguiremos la convención de llamar *fenómenos críticos* a aquellos que ocurren en las transiciones de fase de segundo orden.

## 1.1 Descripción de las Transiciones de Fase y Puntos Críticos

Para un mejor entendimiento de los fenómenos críticos conviene comenzar con un par de ejemplos. El primero de ellos, ya mencionado en la anterior introducción, corresponde al fenómeno que ocurre en una transición líquido-vapor a través del punto crítico. De hecho, históricamente, el primer punto crítico que se descubrió fué en una transición de fase de este tipo, cuando se estudiaba el comportamiento del dióxido de carbono ( $\text{CO}_2$ ).

Supongamos que estamos estudiando el comportamiento del  $\text{CO}_2$  contenido en un tubo sellado a una densidad promedio de aproximadamente  $0.5 \text{ g/cm}^3$  y a una presión aproximada a las 72 atm. A una temperatura cercana a los  $29^\circ\text{C}$  uno ve un menisco muy agudo que separa el líquido (abajo) del vapor (arriba). Uno puede seguir el comportamiento de las densidades del líquido y vapor mediante el uso de unas cuantas esferas de una densidad aproximada a los  $0.48 \text{ g/cm}^3$ , la cual difiere ligeramente entre cada una de ellas. Estas esferas simplemente se dejan flotar en el sistema. Cuando el tubo se calienta hasta una temperatura de aproximadamente  $30^\circ\text{C}$ , uno se encuentra con un cambio muy grande en las dos densidades. Sin embargo, una esfera que tenga la "densidad crítica" permanece flotando en el menisco. Existe aún una fina interfase entre los dos fluidos, pero la densidad de cada uno de ellos se ha ido aproximando a la del otro. El aumento en la temperatura del fluido hasta una temperatura de aproximadamente  $31^\circ\text{C}$  produce el fenómeno de opalescencia crítica. Si el  $\text{CO}_2$ , que es muy transparente en la región visible del espectro, se ilumina desde un lado, uno observa una fuerte intensidad de luz dispersada. Esta tiene un color azul cuando se observa en la dirección normal a la iluminación, pero tiene un aspecto café-naranja cuando se observa en la dirección de la iluminación con la luz viniendo desde atrás. Finalmente, cuando la temperatura se incrementa unas cuantas centésimas de grado, la opalescencia desaparece y el fluido se vé totalmente claro otra vez. Además, el menisco que antes separaba el líquido del vapor desapareció. De hecho todas las diferencias entre las dos fases se han ido y sólo queda una fase fluida bastante homogénea arriba de la temperatura crítica,  $T_c \approx 31.04^\circ\text{C}$ .

Podemos visualizar este fenómeno de una manera más clara si lo representamos en un diagrama de fase ( $P, T$ ) como el de la figura 1.1. Las tres primeras etapas de la transición descrita anteriormente corresponden a los puntos  $a$ ,  $b$  y  $c$  sobre la curva de presión de vapor. Nótese que  $T_c$  y  $P_c$  son los valores críticos de la temperatura y presión respectivamente a los cuales se observa la opalescencia crítica. Cuando la temperatura aumenta aún más, el sistema sigue una curva de densidad constante (la "isocora crítica"). Todo el proceso es completamente reversible; consecuentemente, es posible ir del punto 1 (líquido) al punto 2 (vapor) ya sea suavemente por la curva  $\Gamma_1$  a lo largo de la cual las propiedades del

fluido cambian suave y continuamente mediante una transición de fase de segundo orden, o a través de la curva  $\Gamma_2$ , a lo largo de la cual ocurre una transición de fase de primer orden con una discontinuidad en la densidad, energía interna, etc. Cuando nos acercamos al punto crítico, las densidades  $\rho_{liq}$  y  $\rho_{vap}$  se vuelven más y más cercanas, hasta que se enpalman en el punto crítico.

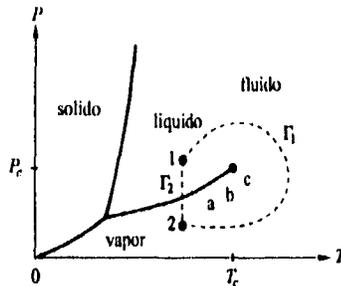


Fig. 1.1 Diagrama  $(P, T)$  para un sistema físico típico.

El segundo ejemplo, quizá menos familiar para nosotros, corresponde a una transición ferromagnética en el punto crítico.

Consideremos ahora, una barra de hierro a temperatura ambiente sometida a un campo magnético intenso  $h$ , paralelo a su eje. Si el campo es lo suficientemente intenso, la barra se encontrará casi completamente magnetizada. Y al disminuirla poco a poco la intensidad del campo hasta llegar a  $h = 0$ , notamos que la magnetización  $M$  irá disminuyendo también, pero no llegará a cero. Es decir, aún a campo cero habrá una magnetización. A esta magnetización se le suele denominar magnetización espontánea y se le denota por  $M_0$ .<sup>1</sup>

Sabemos, de lo que observamos en el laboratorio, que cuando invertimos la orientación del campo  $h$ , la magnetización también se invierte. Por esta razón  $M$  debe ser una función impar de  $h$ . Y por el argumento anterior,  $M$  debe ser discontinua en  $h = 0$ , pues cuando  $h \rightarrow 0^+$ ,  $M \rightarrow M_0$  y cuando  $h \rightarrow 0^-$ ,  $M \rightarrow -M_0$ .

Esta discontinuidad en la magnetización es muy parecida a la discontinuidad en la densidad en una transición de fase líquido-vapor. Más adelante daremos una prueba explícita de esta aseveración.

La barra de hierro sufre una transición de fase cuando  $h = 0$ , cambiando repentinamente de magnetización negativa a positiva. En un experimento real, la discontinuidad se oculta tras la carencia de equilibrio termodinámico de la barra y ocurre el fenómeno de

<sup>1</sup> Es importante hacer notar que el comportamiento ferromagnético ó paramagnético de la barra depende sensiblemente del proceso que lo llevó a su estado final. Por ejemplo, si el "proceso de enfriamiento" es cuasiestático y reversible entonces la barra llegará a ser ferromagnética, no así si el proceso es irreversible.

histéresis. Pero, si el hierro es suave y está sujeto a cambios mecánicos, se encuentra un comportamiento muy cercano al de la gráfica 1.2. ( $T < T_c$ )

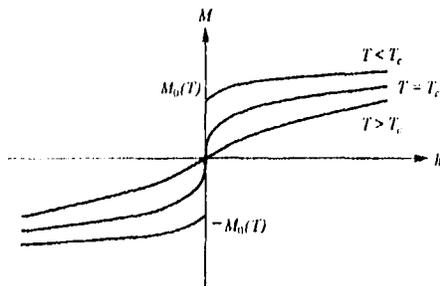


Fig. 1.2 Gráfica de  $M(h)$  para  $T < T_c$ ,  $T = T_c$  y  $T > T_c$ .

Todos los comentarios anteriores se aplican a una barra de hierro a temperatura ambiente. Ahora supongamos que incrementamos la temperatura  $T$  de la barra sólo un poco. Se encuentra experimentalmente que  $M(h)$  tiene una gráfica similar pero con  $M_0$  menor que la anterior. Finalmente, si incrementamos  $T$  hasta el valor crítico  $T_c$ ,  $M_0$  se anula y  $M(h)$  se vuelve una función continua con pendiente (susceptibilidad) infinita en  $h = 0$  (figura 1.2,  $T = T_c$ ).

Si  $T$  se incrementa aún más,  $M(h)$  sigue siendo una función continua, y para cualquier  $T > T_c$ , se vuelve una función analítica para  $h = 0$  (figura 1.2,  $T > T_c$ ). En este caso la susceptibilidad no sólo ya no es infinita sino que es una función analítica también.

Todas estas observaciones pueden resumirse convenientemente si consideramos el plano  $(T, h)$  como el de la figura 1.3.

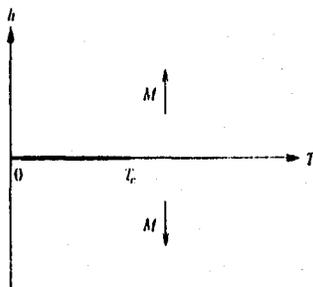


Fig. 1.3 El semiplano  $(T, h)$  mostrando el corte sobre el cual  $M$  es discontinua.

Notamos que hay un corte a lo largo del eje  $T$  que va desde  $0$  hasta  $T_c$ . La magnetización

$M$  es una función analítica tanto de  $T$  como de  $h$  en los semiplanos  $h > 0$  y  $h < 0$ , excepto en los puntos del corte, donde es discontinua.

El corte es una línea de transiciones de fase. A su punto final  $(T_c, 0)$  se le conoce como *punto crítico*. De las razones expuestas anteriormente concluimos que la función  $M(h, T)$  debe ser no analítica en este punto. Uno de los aspectos más interesantes de la mecánica estadística y de la teoría de campos es el estudio del comportamiento singular, o mejor dicho del comportamiento no analítico de algunas cantidades físicas cerca de los puntos críticos.

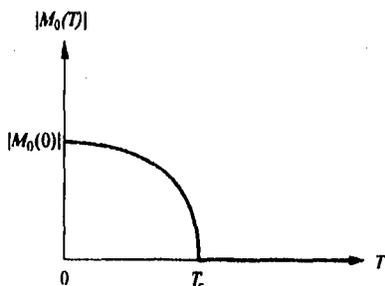


Fig. 1.4 La magnetización espontánea  $M_0$  como función de la temperatura.

Para finalizar este ejemplo, definimos la *magnetización espontánea* de manera precisa mediante la ecuación

$$M_0(T) = \lim_{h \rightarrow 0^+} M(h, T), \quad (1.1)$$

como se puede notar el límite se toma a través de valores positivos de  $h$ . El módulo de la magnetización espontánea tiene una gráfica del tipo que se muestra en la figura 1.4, siendo positiva para  $T < T_c$  y cero para  $T > T_c$ .

## 1.2 Comportamiento Crítico

Cuando un sistema termodinámico se aproxima a una transición de fase de segundo orden ocurren fenómenos muy notables, muchos de los cuales tienen naturaleza termodinámica y pueden observarse, como ya se ha mencionado antes, mediante experimentos cuasiestáticos o calcularse a partir de la mecánica estadística en equilibrio.

Uno de ellos, el *comportamiento cooperativo de largo rango*, determina las características importantes de la transición.

Es posible notar que la escala de las correlaciones es grande cuando, por ejemplo, se observa el fenómeno de la opalescencia crítica en el punto crítico líquido-gas. El incremento

“dramático” en la dispersión de la luz es un resultado directo del hecho que las regiones del tamaño de unas cuantas micras (la longitud de onda de la luz visible) están fluctuando coherentemente.

En un sistema magnético, la divergencia de la *susceptibilidad a campo cero*,  $\chi(T)$ , refleja la naturaleza del largo rango de las correlaciones entre los momentos magnéticos. Uno caracteriza este rango mediante la *longitud de correlación*  $\xi$ .

Así pues, a medida que el sistema se acerca al punto crítico, varias cantidades físicas muestran no analiticidades y lo que se observa experimentalmente es que el comportamiento que siguen es el de una ley de potencias.

Hasta ahora hemos mencionado la longitud de correlación y la susceptibilidad magnética. Si denotamos por  $\langle \delta\varphi(x)\delta\varphi(0) \rangle$  a la *función de correlación* de la cantidad fluctuante  $\delta\varphi$  en los puntos  $x$  y  $0$ , tenemos que su comportamiento es

$$\langle \delta\varphi(x)\delta\varphi(0) \rangle \underset{|x| \rightarrow \infty}{\sim} e^{-|x|/\xi}, \quad T \neq T_c, \quad (1.2)$$

y el comportamiento asintótico de la longitud de correlación cuando el sistema se acerca a la temperatura crítica es

$$\xi \sim \begin{cases} |T - T_c|^{-\nu}, & T > T_c \\ |T - T_c|^{-\nu'}, & T < T_c \end{cases}. \quad (1.3)$$

Para el caso en que estudiamos un ferromagneto,  $\varphi(x)$  es el momento magnético local en la posición  $x$  y  $\delta\varphi$  es su valor relativo al promedio. Para un líquido,  $\varphi(x)$  es la diferencia entre la densidad local en  $x$  y la densidad promedio en el punto crítico. Para sistemas como superfluidos el campo fluctuante no es observable directamente, es un *parámetro de orden* complejo.

A pesar de la gran variedad de sistemas físicos, uno puede usar un lenguaje único, basado en “algún” campo como parámetro de orden. Este parámetro de orden, que generalmente no es único, tiene la característica de ser cero para ciertos valores de los parámetros del sistema “arriba” de la temperatura crítica y ser no-nulo para los mismos valores de los parámetros pero “debajo” de la temperatura crítica. Tal es el caso de la magnetización en un ferromagneto, la cual es cero cuando  $h = 0$  y  $T > T_c$  pero es diferente de cero para  $h = 0$  cuando  $T < T_c$ .

En el marco de este lenguaje, definimos el parámetro de orden  $\varphi$ , y la susceptibilidad  $\chi$  como la respuesta del sistema (el cambio en el parámetro de orden promedio) cuando se aplica un campo externo infinitesimal que se acopla linealmente con el parámetro de orden. Se observa que para temperaturas cercanas a la temperatura crítica  $T_c$ ,

$$\chi \sim \begin{cases} |T - T_c|^{-\gamma}, & T > T_c \\ |T - T_c|^{-\gamma'}, & T < T_c \end{cases}. \quad (1.4)$$

Nuevamente puede haber una variedad de situaciones. En un líquido,  $\chi$  es la compresibilidad; en un superfluido, no es una cantidad física; en un ferromagneto de Heisenberg, puede ser un tensor de susceptibilidad con componentes longitudinales y transversales.

Si el sistema se encuentra exactamente a la temperatura crítica  $T_c$ , la función de correlación decrece como

$$\langle \delta\varphi(x)\delta\varphi(0) \rangle \underset{|x| \rightarrow \infty}{\sim} |x|^{-(d-2+\eta)}, \quad T = T_c, \quad (1.5)$$

donde  $d$  es el número de dimensiones espaciales.

El calor específico a campo externo constante, para  $T \rightarrow T_c$ , se comporta como

$$C_h \sim \begin{cases} |T - T_c|^{-\alpha}, & T > T_c \\ |T - T_c|^{-\alpha'}, & T < T_c \end{cases}, \quad (1.6)$$

donde  $\alpha = 0$  a veces implica una singularidad logarítmica.

En muchos sistemas uno puede medir una curva de coexistencia, donde líquido y gas coexisten en equilibrio en el caso de un fluido, ó en un sistema magnético, es el comportamiento de la magnetización como función de la temperatura a campo externo nulo. Se encuentra experimentalmente que cuando el sistema no está sometido a campo externo, i.e.  $h = 0$ , el parámetro de orden cerca de la temperatura crítica se comporta como

$$\varphi \sim |T - T_c|^\beta, \quad (1.7)$$

Si ahora consideramos la aproximación a la temperatura crítica,  $T = T_c$ , pero a campo externo no-nulo, el parámetro de orden puede escribirse como

$$\varphi \sim h^{1/\delta}. \quad (1.8)$$

Este último caso describe la aproximación al punto crítico líquido a  $T = T_c$ , pero a presión  $P \neq P_c$  ó la aproximación al punto crítico ferromagnético a  $T = T_c$ , pero a campo externo  $h \neq 0$ .

A las cantidades  $\alpha, \alpha', \beta, \gamma, \gamma', \eta, \nu, \nu',$  y  $\delta$  se les conoce como *exponentes críticos*. Experimentalmente se ha encontrado que estos exponentes no son enteros ni fracciones simples. Teóricamente, también, se han calculado valores para los exponentes críticos de algunos sistemas físicos; estos se presentan en la tabla 1.1.<sup>3</sup>

La mayoría de estos valores se obtuvieron mediante cálculos analíticos, excepto los de los modelos tridimensionales ( $d = 3$ ), los cuales fueron obtenidos numéricamente. De esta tabla, podemos notar que los exponentes críticos dependen de la dimensionalidad  $d$ .

Una última cuestión es especificar que la notación que hemos estado utilizando en las anteriores expresiones,  $f(x) \sim x^\mu$ , se lee " $f$  se comporta como  $x^\mu$ ", y significa

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln f(x)}{\ln x} = \mu^+. \quad (1.9)$$

<sup>3</sup>Esta tabla fué tomada de D. J. Amit, *Field Theory, the Renormalisation Group, and Critical Phenomena*, McGraw-Hill 1978, excepto los datos para el modelo de Heisenberg, estos fueron tomados de J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford 1990.

Tabla 1.1 Valores de los exponentes críticos para algunos sistemas físicos ( $\epsilon = 4 - d$ ).

Exponente	Teoría de Campo Promedio	Modelo de Ising $d = 2$	Modelo de Ising $d = 3$	Modelo de Heisenberg $d = 3$	Modelo Esferico $\epsilon > 0$
$\alpha$ $\alpha'$	0	0 0	0.12	-0.08	$-\epsilon/(2-\epsilon)$
$\beta$	1/2	1/8	0.31	0.38	1/2
$\gamma$ $\gamma'$	1	7/4	1.25	1.38 no definido	$2/(2-\epsilon)$
$\nu$ $\nu'$	1/2	1	0.64	0.715	$1/(2-\epsilon)$
$\delta$	3	15	5.0		$(6-\epsilon)/(2-\epsilon)$
$\eta$	0	1/4	0.04	0.05	0

### 1.3 La Hipótesis de Escalamiento

Asumamos la terminología de los fenómenos magnéticos para describir con mayor claridad las ideas de esta sección. Así, el parámetro de orden será la magnetización  $M$ , el campo externo será un campo magnético externo  $h$  aplicado al sistema, y el parámetro que utilizamos para estudiar el comportamiento crítico es la temperatura  $T$  (para  $h = 0$ ).

La idea de escalamiento, sugerida por primera vez por B. Widom en 1965, consiste en escribir la parte asintótica de la energía libre ó la ecuación de estado como una función homogénea de las variables. Por ejemplo, la ecuación de estado describe una relación entre la magnetización, la temperatura y el campo magnético. En general la podemos escribir como

$$h = M^\delta f(M, t), \quad \text{con } t = |T - T_c|. \quad (1.10)$$

Widom propuso que, cerca del punto crítico,  $f$  debería depender de una sola variable de tal forma que

$$h = A_1 M^\delta f(Bt/M^{1/\beta}), \quad t \rightarrow 0. \quad (1.11)$$

Los exponentes  $\delta$  y  $\beta$  son los exponentes críticos definidos en la sección anterior y  $A_1$  y  $B$  son amplitudes. El descubrimiento impactante de Widom fue que  $A_1$ ,  $B$  y  $T_c$  pueden escogerse de tal manera que los datos experimentales de diferentes materiales (Fe, Ni, etc) satisfacen la ecuación (1.11) con la misma función  $f$ .

De manera análoga, uno escribe la relación para la parte singular de la energía libre

en la forma

$$F(t, h) = A_0 t^{2-\alpha} g(Dt/h^{1/\beta\delta}), \quad t \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0, \quad (1.12)$$

donde nuevamente  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\delta$  son los exponentes críticos,  $A_0$  y  $D$  son amplitudes, y  $g$  es una función que se determina experimentalmente.

A partir de estas expresiones homogéneas, uno puede derivar relaciones entre los exponentes críticos a las cuales comunmente se les refiere como *leyes de escalamiento*.

Consideremos, por ejemplo, la ecuación (1.11) y supongamos que

$$f(y) \rightarrow y^\mu, \quad \text{cuando } y = \frac{t}{M^{1/\beta}} \rightarrow 0. \quad (1.13)$$

De estas dos ecuaciones, (1.11) y (1.13), concluimos que

$$\frac{\partial h}{\partial M} \sim t^\mu M^{\delta - \frac{\mu}{\beta} - 1}, \quad t \rightarrow 0, \quad (1.14)$$

pero, sabemos que  $\chi^{-1} = \partial h / \partial M \sim t^\gamma$  cuando  $t \rightarrow 0$ . Por lo tanto concluimos que  $\mu = \gamma$  y entonces

$$\delta - \frac{\gamma}{\beta} - 1 = 0. \quad (1.15)$$

Esta es la ley de escalamiento de Widom.

De manera similar, partiendo de la ecuación (1.12) para la energía libre, podemos derivar la relación

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2, \quad (1.16)$$

que se conoce como la ley de escalamiento de Rushbrooke.

Además, a partir de la función de correlación ó *función de dos puntos* en el lenguaje de la teoría de campos, podemos derivar

$$\gamma = (2 - \eta)\nu, \quad (1.17)$$

que es la ley de escalamiento de Fisher, y otra ley de escalamiento que envuelve la dimensionalidad  $d$  del espacio explícitamente, esta es

$$\nu d = 2 - \alpha, \quad (1.18)$$

y se conoce como la ley de Josephson. Debido a la dependencia en la dimensionalidad, esta última relación es un ejemplo de una *ley de hiperescalamiento*.

Anteriormente se pensaba que las leyes de hiperescalamiento no eran satisfechas de manera exacta como lo son las leyes de escalamiento. Esto, debido a que el trabajo numérico llevado a cabo en el modelo de Ising tridimensional parecía indicar pequeñas discrepancias de las leyes de hiperescalamiento. Sin embargo, se ha demostrado que esas discrepancias son producto de las aproximaciones, y actualmente se sabe que las relaciones

en la forma

$$F(t, h) = A_0 t^{2-\alpha} g(Dt/h^{1/\beta\delta}), \quad t \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0, \quad (1.12)$$

donde nuevamente  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\delta$  son los exponentes críticos,  $A_0$  y  $D$  son amplitudes, y  $g$  es una función que se determina experimentalmente.

A partir de estas expresiones homogéneas, uno puede derivar relaciones entre los exponentes críticos a las cuales comunmente se les refiere como *leyes de escalamiento*.

Consideremos, por ejemplo, la ecuación (1.11) y supongamos que

$$f(y) \rightarrow y^\mu, \quad \text{cuando } y = \frac{t}{M^{1/\beta}} \rightarrow 0. \quad (1.13)$$

De estas dos ecuaciones, (1.11) y (1.13), concluimos que

$$\frac{\partial h}{\partial M} \sim t^\mu M^{\delta - \frac{\mu}{\beta} - 1}, \quad t \rightarrow 0, \quad (1.14)$$

pero, sabemos que  $\chi^{-1} = \partial h / \partial M \sim t^\gamma$  cuando  $t \rightarrow 0$ . Por lo tanto concluimos que  $\mu = \gamma$  y entonces

$$\delta - \frac{\gamma}{\beta} - 1 = 0. \quad (1.15)$$

Esta es la ley de escalamiento de Widom.

De manera similar, partiendo de la ecuación (1.12) para la energía libre, podemos derivar la relación

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2, \quad (1.16)$$

que se conoce como la ley de escalamiento de Rushbrooke.

Además, a partir de la función de correlación ó *función de dos puntos* en el lenguaje de la teoría de campos, podemos derivar

$$\gamma = (2 - \eta)\nu, \quad (1.17)$$

que es la ley de escalamiento de Fisher, y otra ley de escalamiento que envuelve la dimensionalidad  $d$  del espacio explícitamente, esta es

$$\nu d = 2 - \alpha, \quad (1.18)$$

y se conoce como la ley de Josephson. Debido a la dependencia en la dimensionalidad, esta última relación es un ejemplo de una *ley de hiperescalamiento*.

Anteriormente se pensaba que las leyes de hiperescalamiento no eran satisfechas de manera exacta como lo son las leyes de escalamiento. Esto, debido a que el trabajo numérico llevado a cabo en el modelo de Ising tridimensional parecía indicar pequeñas discrepancias de las leyes de hiperescalamiento. Sin embargo, se ha demostrado que esas discrepancias son producto de las aproximaciones, y actualmente se sabe que las relaciones

de hiperescalamiento se satisfacen. Sin embargo, para Hamiltonianos con interacciones de largo rango que van como leyes de potencias se sabe que las relaciones de hiperescalamiento no se satisfacen.

Volviendo a las relaciones de escalamiento, ecuaciones (1.15)-(1.18), uno puede derivar las relaciones arriba o abajo de  $T_c$  y puede darse cuenta que los exponentes son simétricos alrededor de la transición, i.e. que  $\alpha = \alpha'$ ,  $\gamma = \gamma'$  y  $\nu = \nu'$ . En consecuencia, uno puede concluir que de las ecuaciones (1.15)-(1.18), sólo dos exponentes son independientes. Así, basta conocer sólo dos de los exponentes críticos para calcular los restantes a partir de las leyes de escalamiento.

Se ha determinado que las relaciones de escalamiento, ecuaciones (1.15) (1.18), son satisfechas exactamente por el modelo de Ising bidimensional, y por el modelo esférico. Así, los resultados experimentales y cálculos, tanto exactos como numéricos, de varios modelos apoyan fuertemente la hipótesis.

## 1.4 Universalidad

Ya hemos visto que algunos sistemas físicos, por ejemplo un fluido en tres dimensiones y una barra ferromagnética, pueden describirse usando el lenguaje de los parámetros de orden. El hecho notable ahí es que, a pesar de que los sistemas se ven distintos desde un punto de vista microscópico, se comportan "exactamente" en la misma forma cuando se acercan a sus puntos críticos. A esta identidad en el comportamiento de los sistemas, que a priori se dirían distintos, se le denomina *universalidad*. De hecho, experimentalmente se encuentra el mismo conjunto de exponentes críticos para ambos sistemas. Sin embargo, no todos los sistemas físicos presentan el mismo comportamiento crítico; pero existen conjuntos de ellos que sí lo hacen. En la mayoría de los casos, los únicos factores que determinan las propiedades críticas son la dimensionalidad del espacio,  $d$ , y el número de componentes del parámetro de orden,  $n$ . Para sistemas magnéticos, por ejemplo, el parámetro de orden es la magnetización, y su dimensionalidad es el número de componentes necesarias para describir el vector de espín. La mayoría de los sistemas con los mismos valores de  $d$  y  $n$  pertenecen a la misma *clase de universalidad* y poseen los mismos exponentes críticos. Por ejemplo, los ferromagnetos que son parecidos al modelo de Ising tridimensional, los fluidos, las mezclas de líquidos y ciertas aleaciones son miembros de la misma clase de universalidad (con  $d = 3$  y  $n = 1$ ), así que las gráficas de sus propiedades deben tener el mismo aspecto cerca del punto crítico.

La interpretación de algunos otros valores de  $d$  y  $n$  puede resultar menos obvia, y valores como  $n = -2$  pueden definirse matemáticamente pero no corresponden a algún sistema físico. El modelo  $XY$  y el de Heisenberg son análogos al de Ising, pero describen ferromagnetos cuyos vectores de espín tienen dos y tres componentes respectivamente.

A manera de ejemplo, conviene presentar un esquema de algunos sistemas físicos con el

modelo teórico que los representa, el parámetro de orden que se utiliza para su descripción y la clase de universalidad a la que pertenecen. Este esquema se presenta en la siguiente tabla 1.2.<sup>3</sup>

Tabla 1.2 Clases de Universalidad.

Clase de Universalidad		Modelo Teórico	Sistema Físico	Parámetro de Orden
$d = 2$	$n = 1$	Modelo de Ising bidimensional	Películas absorbidas	Densidad superficial
	$n = 2$	Modelo XY en dos dimensiones	Películas de Helio - 4	Amplitud de la fase superfluida
	$n = 3$	Modelo de Heisenberg bidimensional		Magnetización
$d > 2$	$n = \infty$	Modelo esférico	Ninguno	
$d = 3$	$n = 0$	Camino aleatorio sin intersecciones	Conformación de polímeros de cadena larga	Densidad de finales de cadena
	$n = 1$	Modelo de Ising tridimensional	Ferromagneto uniaxial	Magnetización
			Fluido cerca de un punto crítico	Diferencia de densidad entre las fases
			Mescla cerca del punto de disolución	Diferencia de concentración
			Aleación cerca de una transición orden-desorden	Diferencia de concentración
	$n = 2$	Modelo XY en tres dimensiones	Ferromagneto plano	Magnetización
			Helio-4 cerca de la transición superfluida	Amplitud de la fase superfluida
$n = 3$	Modelo de Heisenberg en tres dimensiones	Ferromagneto isotrópico	Magnetización	
$d \leq 4$	$n = -2$		Ninguno	
	$n = 3/2$	Cromodinámica cuántica	Quarks ligados en protones, neutrones, etc.	

<sup>3</sup> Tomada de K. G. Wilson, *Sc. Am.*, Vol. 241, No. 2 (1979).

Para finalizar esta sección tenemos algunos comentarios pertinentes. El primero de ellos es que en ocasiones se habla de un conjunto distinto de parámetros que conforman las clases de universalidad, que son, el grupo de simetría del Hamiltoniano (no el de la red, si es que hay una) y la misma dimensionalidad  $d$  del espacio. Otro aspecto que juega un papel importante para la clasificación de las clases de universalidad es el hecho de si las fuerzas son de corto rango o no. Como ya vimos, las leyes de hiperescalamiento son válidas si las fuerzas son de corto rango pero no lo son cuando las fuerzas son de largo rango y van como leyes de potencias.

El segundo es que las leyes de escalamiento tienen un rango más amplio de universalidad que los exponentes críticos. Esto lo decimos porque los exponentes críticos son los mismos para una clase de universalidad (con la misma  $d$  y  $n$ ), pero las leyes de escalamiento son válidas para sistemas de distintas clases. Por ejemplo, las leyes de escalamiento de Widom, Rushbrooke y Fisher son satisfechas por sistemas de distintas  $d$  y  $n$ . La ley de Josephson es satisfecha por sistemas con la misma  $n$  y para  $d \leq d_c$ , donde a  $d_c$  se le conoce como la dimensión crítica. Como ya hemos mencionado, la ley de Josephson satisface lo que se conoce como hiperescalamiento. Se tiene entonces que los sistemas que satisfacen hiperescalamiento presentan un menor rango de universalidad que los que obedecen sólo las leyes de escalamiento. Como veremos en el siguiente capítulo, la teoría de campo promedio predice una mayor universalidad para los exponentes críticos.

## 1.5 Escalamiento de Tamaño Finito

Las singularidades en las funciones termodinámicas asociadas con un punto crítico ocurren sólo en el límite termodinámico, en el cual el volumen  $V$  del sistema y el número  $N$  de grados de libertad va a infinito con la "densidad"  $\rho = N/V$  fija. Es sólo en este límite que la energía libre, o cualquier otra cantidad termodinámica, es una función singular de la temperatura ó de los campos externos.

Por otra parte, los sistemas que se estudian en un experimento real pueden tener un número grande de grados de libertad, pero ni  $N$  ni  $V$  son infinitos. Sin embargo, tales sistemas exhiben transiciones de fase que aparentemente parecen deberse a un comportamiento singular de las funciones termodinámicas. Aún más, en muchos casos las singularidades observadas están de acuerdo con las predicciones basadas en cálculos que envuelven el límite termodinámico. Esto nos lleva naturalmente a plantearnos las siguientes preguntas ¿Es "una mera casualidad" que los resultados experimentales concuerden con las predicciones ó es que los efectos debidos al tamaño finito están más allá de la resolución experimental? ¿Cuáles son los efectos, si hay alguno, de restringir nuestros cálculos a sistemas finitos? ¿Eos efectos son de alguna manera precursores del verdadero comportamiento crítico del sistema infinito? Si hay, ¿podemos explotar los efectos de tamaño finito para extraer el comportamiento límite a partir de cálculos numéricos en sistemas pequeños

ó a partir de simulaciones en sistemas grandes pero aún finitos? Estas son algunas de las preguntas que trataremos en los capítulos sucesivos. De hecho, algunas de estas cuestiones son las que, como veremos en el último capítulo, hacen necesaria la introducción de grupos de renormalización que dependen del "ambiente". Por ahora, podemos discutir algunas de las ideas que nos ocuparán entonces. El límite termodinámico envuelve el hecho de permitirle al sistema bajo consideración que todas sus dimensiones tiendan a infinito, pero si algunas de esas dimensiones permanecen finitas, el comportamiento termodinámico se modifica. Un ejemplo de esta modificación ocurre al estudiar un sistema termodinámico en un hipercilindro de radio finito. En el límite termodinámico, las fluctuaciones críticas están correlacionadas sobre una distancia del orden de la longitud de correlación  $\xi$  y como hemos visto en las secciones anteriores esta longitud de correlación tiende a infinito cuando el sistema se acerca a la temperatura crítica. Obviamente, en el caso del cilindro, la longitud de correlación puede tender a infinito en la dirección del eje pero no puede hacerlo en la dirección radial porque en esa dirección el sistema no es infinito. Es en estos casos en los que se debe ser cuidadoso con las definiciones. Por ejemplo, la longitud de correlación puede definirse como la escala de longitud que gobierna el decaimiento exponencial  $e^{-r/\xi}$ , con  $r$  la distancia de la función de correlación del parámetro de orden. Para sistemas con interacciones de corto rango se piensa que la longitud de correlación es de orden unidad (salvo constantes). Como ya mencionamos, la longitud de correlación  $\xi$  diverge en el punto crítico. Si consideramos que algunas de las dimensiones son finitas, de orden  $L$ , entonces mientras que  $\xi/L$  es pequeña esperamos efectos pequeños en las cantidades termodinámicas. De esta forma, sólo en sistemas que se encuentran muy cerca del punto crítico, y por lo tanto  $\xi \approx L$ , esperamos ver efectos de escalamiento de tamaño finito que son relevantes. Esos efectos pueden describirse en términos de una reducción efectiva de la dimensionalidad. Si el modelo es finito en todas sus direcciones, entonces para  $\xi \gg L$  es efectivamente 0-dimensional. Tal sistema no puede presentar una singularidad termodinámica. El efecto del tamaño finito es el de "redondear" las singularidades del punto crítico sobre una región en el espacio de parámetros para los cuales  $\xi \approx L$ . Si todas, excepto una de las dimensiones son finitas, habrá un *entrecruzamiento* a un comportamiento cuasi-unidimensional sin singularidades verdaderas, pero con algún comportamiento anómalo. Si  $d'$  de las  $d$  dimensiones son infinitas, habrá un entrecruzamiento a un comportamiento crítico con los exponentes característicos de  $d'$  dimensiones. El escalamiento de tamaño finito, como se formuló desde sus inicios, trata con la manera en la que ocurren ese redondeamiento y el entrecruzamiento. En un sistema de tamaño finito, hay generalmente tres escalas de longitud involucradas,  $\xi$ ,  $L$  y la longitud microscópica  $a$ , la última de las cuales gobierna el rango de las interacciones. Las cantidades termodinámicas, así, pueden depender de los cocientes adimensionales  $\xi/a$  y  $L/a$ . La hipótesis de escalamiento de tamaño finito asume que, cerca del punto crítico, la longitud microscópica desaparece. Así, si consideramos una cantidad tal como la susceptibilidad magnética  $\chi$ , que se comporta como  $\xi^{7/\nu}$  cerca del punto crítico en el sistema infinito, entonces en la geometría caracterizada por el tamaño

$L$ ,

$$\chi = \xi^{\gamma/\nu} \phi(\xi/L), \quad (1.19)$$

donde  $\xi$  la longitud de correlación en el sistema infinito y  $\phi(y)$  es una función de escalamiento con la propiedad de que  $\phi(y) \rightarrow$  constante cuando  $y \rightarrow 0$ . Si utilizamos el hecho que  $\xi \sim |T - T_c|^{-\nu}$ , con  $T_c$  la temperatura crítica del sistema infinito, la anterior ecuación puede escribirse en la forma equivalente

$$\chi = L^{\gamma/\nu} \tilde{\phi} \left( L^{1/\nu} (T - T_c) \right), \quad (1.20)$$

donde ahora  $\tilde{\phi}$  es otra función de escalamiento. Si el sistema es cuasi-cero ó unidimensional entonces  $\chi$  se supone una función analítica de la temperatura. De esta forma  $\tilde{\phi}(z)$  debe ser una función suave de  $z$  con un pico para algún valor  $z = z_0$ , de ancho  $l$ . Una gráfica de  $\chi$  como función de  $T$  tendrá entonces un pico (bajo la hipótesis de escalamiento de tamaño finito).

Si la dimensionalidad  $d'$  de un sistema excede la dimensión crítica más baja, entonces la ecuación (1.20) aún dará información útil. En ese caso esperaríamos que  $\chi$  divergiera como  $|T - T_c(L)|^{-\gamma'}$ , donde  $\gamma'$  es el exponente  $d'$ -dimensional. Comparando ésto con la ecuación (1.20) vemos que  $\tilde{\phi}$  debe tener una singularidad de la forma  $|z - z_0|^{-\gamma'}$  para alguna constante  $z_0$ . Así, cerca de esta singularidad

$$\chi \sim L^{(\gamma-\gamma')/\nu} |T - T_c - z_0 L^{-1/\nu}|^{-\gamma'}, \quad (1.21)$$

de tal manera que  $T_c(L) - T_c \propto L^{-1/\nu}$ , y la amplitud de la singularidad se comporta como  $L^{(\gamma-\gamma')/\nu}$ . La función de escalamiento  $\phi$  es universal y contiene información sobre las dos regiones críticas diferentes, una asociada con  $d$  dimensiones y la otra con  $d'$  dimensiones. Experimentalmente, se sabe que el escalamiento de tamaño finito raras veces se aplica. El régimen donde la longitud de correlación es del mismo orden que las dimensiones lineales es difícil de estudiar debido a la presencia de otros efectos como las impurezas, gravedad, etc. A pesar de ello se han reportado éxitos en la materia. La mayor utilidad se ha tenido en el análisis numérico de los datos en sistemas finitos. Una aplicación importante se tiene en el estudio de sistemas cuánticos a baja temperatura. Ahí sabemos que las fluctuaciones cuánticas ya son comparables a las fluctuaciones térmicas y no pueden despreciarse. Además los sistemas cuánticos en  $d$  dimensiones pueden tener puntos críticos a  $T = 0$ . A temperatura finita,  $T$ , la representación en términos de la integral de caminos de Feynman para un sistema cuántico finito de dimensionalidad  $d$  es equivalente a la de un sistema clásico de dimensionalidad  $d + 1$  con la dimensión extra siendo periódica de tamaño finito  $\beta = 1/k_B T$ . Este tipo de comportamiento de entrecruzamiento dimensional también nos ocupará al estudiar la teoría de renormalización ambientalmente amigable.

## Capítulo 2

---

# MODELOS EN UNA RED HIPERCUBICA

Ya hemos visto el comportamiento fenomenológico de un sistema físico cuando se acerca a una transición de fase. De hecho, ya tenemos caracterizado cualitativamente el comportamiento de algunas cantidades termodinámicas asociadas al sistema en la vecindad del punto crítico. La tarea ahora es desarrollar algunos modelos matemáticos que pretendan describir sistemas físicos para explicar ese comportamiento y obtener resultados cuantitativos que nos provean de un marco conceptual y operacional para entender los fenómenos críticos. En particular calcular los exponentes críticos y las funciones de escalamiento. Ya hemos visto, también, que no es necesario estudiar todos los diferentes sistemas, basta con analizar alguno de los miembros de la misma clase de universalidad. Con esta idea en mente, vemos de la tabla 1.2 que podemos escoger a los sistemas físicos que se pueden modelar como ferromagnetos en una red hipercúbica  $d$ -dimensional para obtener las características esenciales de toda la clase de universalidad. Eso es precisamente lo que vamos a hacer en este capítulo, estudiar algunos modelos de ferromagnetos. Comenzaremos por el más simple de ellos: el modelo de Ising. Primero lo definiremos de manera precisa y luego tomaremos el modelo unidimensional, con el cual, concluiremos que no es posible tener una transición de fase en los modelos unidimensionales que se describen mediante un parámetro de orden de una sola componente y que están sujetos a fuerzas de interacción de corto rango. Luego expondremos algunos resultados para el modelo de Ising en dos dimensiones, el cual sí presenta transición de fase. Estos modelos serán tratados con los métodos de la mecánica estadística (por medio de la matriz de transferencia), como se resolvieron (esencialmente) por primera vez. Después de estos, presentaremos la primera aproximación para el modelo de Ising  $d$ -dimensional, la teoría de campo promedio "clásica", y calcularemos los exponentes críticos, con lo cual veremos que esta aproximación predice "demasiada universalidad", pues los exponentes serán los mismos independientemente de  $d$ . Con esto concluiremos los métodos de la mecánica estadística e iniciaremos el camino hacia la teoría de campos. La manera como la introduciremos será construyendo una representación para el modelo de Ising  $d$ -dimensional en términos de integrales fun-

## 1.6 Invariancia Conforme

Aunque la invariancia conforme fué aplicada por primera vez al estudio de los fenómenos críticos en la década de los 70's, ha sido hasta la década pasada que se ha encontrado su utilidad en el entendimiento de las amplitudes del escalamiento de tamaño finito. Esto comenzó con el progreso analítico de sistemas bidimensionales. La idea básica es simple; las funciones de correlación en el punto crítico deberían de transformarse simplemente no sólo ante cambios de escala, como discutiremos después, sino también bajo las más generales *transformaciones conformes*, las cuales corresponden localmente a transformaciones de escala con el factor de reescalamiento  $b$  dependiente de la posición. Entendiendo esto, la estrategia básica es usar mapeos conformes para relacionar funciones de correlación en una geometría a aquellas en una geometría más simple.

Una de las geometrías más simples a considerar es la de un cilindro de altura infinita y de radio  $L$  con condiciones de frontera periódicas. Esto se debe a que permite la aplicación de los métodos de las matrices de transferencia. El primer resultado de la invariancia conforme es que la longitud de correlación  $\xi_i$  en la dirección radial está relacionada a las dimensiones de escalamiento  $x_i$  mediante la ecuación

$$\xi_i^{-1} \sim 2\pi x_i / L. \quad (1.22)$$

Nótese que el hecho de que  $\xi_i \sim L$  es un resultado del escalamiento de tamaño finito. Lo que si es notable es que la amplitud queda determinada. La relación (1.22), de hecho, fué primero conjeturada de estudios exactos y numéricos de varios modelos. Sin embargo, las predicciones de la invariancia conforme van más allá de ésta. Se sabe que, además,  $\xi_i^{-1}$  está dada en términos del cociente de los eigenvalores principales de la matriz de transferencia, y por lo tanto la ecuación (1.22) proporciona información acerca de los eigenvalores principales. De hecho, la invariancia conforme predice todo el espectro de la matriz de transferencia (al menos de aquellos estados que se vuelven degenerados cuando  $L \rightarrow \infty$ ). No daremos una demostración de esto, pero si discutiremos en detalle algunas de las aseveraciones hechas anteriormente cuando lleguemos a la sección de renormalización ambientalmente amigable en el capítulo 4. En los siguientes capítulos pretendemos, primero, introducir modelos que se describen en términos de redes y obtener su representación en teoría de campos, luego estudiarlos, y notando las "sutilezas" que aparecen de considerar parámetros que no son los adecuados, introducir el grupo de renormalización, por último, como el análogo de estas dos últimas secciones, darnos cuenta que los sistemas están condicionados por su ambiente; razón que nos llevará naturalmente a considerar grupos de renormalización que dependen del ambiente.

cionales. En esta representación, como veremos, el problema es demasiado general y por consiguiente más complicado aún. Si pudiéramos evaluar exactamente la integral funcional, tendríamos resuelto el problema del modelo de Ising en una red hipercúbica  $d$ -dimensional. Sin embargo, ésto no es posible y tenemos que conformarnos con resolver aproximaciones. La aproximación donde conservamos términos sólo hasta segundo orden del campo en el Hamiltoniano nos llevará a la teoría gaussiana. La siguiente aproximación que se obtiene al considerar el Hamiltoniano, ahora a cuarto orden, conduce a la teoría de Landau-Ginzburg-Wilson. Esta será el tema principal en el siguiente capítulo. Para finalizar, generalizaremos la función de partición del modelo de Ising  $d$ -dimensional a la de un modelo  $d$ -dimensional en el que cada espín es un vector con  $n$  componentes. De este modelo, examinaremos algunos límites de interés, como son  $n \rightarrow \infty$  (el modelo esférico),  $n$  finito y  $T \rightarrow 0$  ó  $n$  finito y  $T \rightarrow \infty$ . También, al tomar el límite  $n \rightarrow 1$ , demostraremos que la generalización es correcta, pues el modelo se reducirá al de Ising.

## 2.1 Modelo de Ising

Este es el modelo para un ferromagneto o antiferromagneto anisótropo en una red. Lenz y Ising lo estudiaron por primera vez en 1925 y demostraron que en una dimensión,  $d = 1$ , el modelo no presenta transición de fase para  $T > 0$ . Ellos concluyeron, incorrectamente, que el modelo no presenta transición de fase a temperatura "finita" ( $T > 0$ ) para  $d > 1$  y que por lo tanto este modelo no puede describir sistemas ferromagnéticos reales. Años después, en 1944, Lars Onsager resolvió exactamente este modelo para el caso  $d = 2$  pero sin campo externo y demostró que el modelo de Ising sí presenta una transición de fase para una temperatura  $T_c > 0$ . Hasta ahora, nadie ha resuelto de manera exacta el modelo bidimensional en presencia de campo externo y el mismo modelo para  $d \geq 3$  aún sin campo externo. Sin embargo, se han obtenido resultados numéricos.

El sistema considerado en un modelo de Ising es un arreglo de  $N$  puntos fijos que forman una red periódica  $d$ -dimensional. La estructura de la red puede, por ejemplo, ser cúbica (hipercúbica), triangular (hipertriangular), hexagonal (hiperhexagonal), etc. Asociada a cada vértice  $i$  de la red se tiene una variable de espín  $s_i$ <sup>4</sup> ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), la cual es una función que puede tomar únicamente los valores  $+1$  ó  $-1$ , que se asocian a dos posibles estados. Cuando  $s_i = +1$ , se dice que el  $i$ -ésimo vértice tiene espín hacia arriba; pero si  $s_i = -1$ , entonces se dice que tiene espín hacia abajo. Un conjunto dado de números  $\{s_i\} = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$  especifica una configuración del sistema. La energía del sistema en

<sup>4</sup> En este capítulo estaremos tratando sólo con el modelo de Ising "clásico" en el que con la palabra espín queremos decir momento magnético, el cual sólo puede tomar los valores  $+1$  ó  $-1$ . Esta variable bivaluada es una entidad similar pero más simple que la variable de espín  $S$  de la mecánica cuántica, cuya componente  $x$  para espín total  $S = 1/2$  puede tomar los dos valores  $S^x = \pm 1/2$ .

la configuración especificada por  $\{s_i\}$  se define como<sup>5</sup>

$$E\{s_i\} = - \sum_{i,j} J_{ij} s_i s_j - \sum_i h_i s_i, \quad (2.1)$$

donde el primer sumando representa la energía debida a la interacción entre espines, la cual está pesada por el factor  $J_{ij}$ , y el segundo, la energía de la interacción del campo externo  $h$  con cada uno de los espines  $s_i$ . Notamos que para valores positivos de  $J$ , el mínimo de energía del sistema se obtiene cuando todos los espines son paralelos; cuando esto sucede decimos que se trata de un ferromagneto. Por el contrario, para valores negativos de  $J$ , el mínimo de energía del sistema se obtiene cuando todos los espines son antiparalelos entre sí; en este caso decimos que se trata de un antiferromagneto. Sin embargo, el caso más general ocurre cuando la matriz  $J$  tiene eigenvalores tanto positivos como negativos, tal es el caso de los llamados vidrios de espines. Una cuestión que vale la pena remarcar es que aunque una configuración del sistema queda especificada por  $N$  números  $s_1, s_2, \dots, s_N$ , el valor de la energía (2.1) es, en general, degenerado.

A partir de la energía del sistema para cada uno de los posibles estados  $\{s_i\}$ , ecuación (2.1), podemos construir la función de partición<sup>6</sup>

$$Z\{h_i\} = \sum_{\{s_i\}} e^{-\beta E\{s_i\}}, \quad (2.2)$$

donde el índice  $\{s_i\}$  en la suma denota todas las posibles configuraciones del sistema y hemos usado la definición termodinámica  $\beta = 1/k_B T$ , con  $k_B$  la constante de Boltzmann y  $T$  la temperatura.

Conociendo esta función de partición podemos calcular la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado  $\{s\}$  mediante la relación

$$P\{s\} = \frac{e^{-\beta E\{s\}}}{Z}. \quad (2.3)$$

Además, si denotamos por  $X$  a alguna propiedad observable del sistema, tal como su energía total ó magnetización, cuyo valor es  $X\{s\}$  para el estado  $\{s\}$ , entonces el valor de su promedio termodinámico observado es

$$\langle X\{s\} \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{s\}} X\{s\} e^{-\beta E\{s\}}, \quad (2.4)$$

<sup>5</sup> Esta es la expresión general para la energía de una configuración de espines en un modelo de Ising  $d$ -dimensional. Nótese que la magnitud de la interacción  $J_{ij}$  puede variar para distintas parejas de espines, asimismo el campo magnético externo  $h_i$  puede variar de punto a punto.

<sup>6</sup> El formalismo de las funciones de partición fué introducido por John Willard Gibbs en 1902 con la finalidad de calcular funciones termodinámicas tales como la magnetización  $M(h, T)$  partiendo de las fuerzas microscópicas entre las componentes del sistema.

el cual está normalizado de tal manera que  $\langle 1 \rangle = 1$ . Esta ecuación nos permite definir las funciones de correlación desconectadas entre espines. Por ejemplo, para el caso de los dos espines  $s_k$  y  $s_l$ , es

$$\langle s_k s_l \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{s_i\}} s_k s_l e^{-\beta E\{s_i\}}. \quad (2.5)$$

Asimismo, definimos la función de correlación conectada entre los espines  $s_k$  y  $s_l$  a través de la ecuación

$$\langle s_k s_l \rangle_c = \langle s_k s_l \rangle - \langle s_k \rangle \langle s_l \rangle. \quad (2.6)$$

Estas ecuaciones (2.5) y (2.6) pueden generalizarse con un poco más de álgebra para el caso de  $N$  espines arbitrarios.

Podemos relacionar la función de partición  $Z$  con la energía libre de Helmholtz  $F$  mediante la ecuación

$$F(h, T) = -k_B T \ln Z\{h\}, \quad (2.7)$$

de esta expresión es posible obtener algunas funciones termodinámicas como son

$$U(h, T) = -k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{F}{k_B T} \right), \quad \text{energía interna,} \quad (2.8)$$

$$C(h, T) = \frac{\partial U}{\partial T}, \quad \text{capacidad calorífica,} \quad (2.9)$$

$$M(h, T) = -\frac{\partial F}{\partial h}, \quad \text{magnetización.} \quad (2.10)$$

A la cantidad  $M(0, T) = M_0(T)$  se le llama magnetización espontánea. Cuando esta es diferente de cero, se dice que el sistema es ferromagnético. En realidad, la manera rigurosa de definir la magnetización espontánea es, como lo hicimos en el capítulo anterior, por medio de la ecuación (1.1).

Otra cantidad de interés es la susceptibilidad<sup>7</sup> magnética de una sustancia, la cual está definida como

$$\chi(h, T) = \frac{\partial M(h, T)}{\partial h}, \quad (2.11)$$

y también lo es la longitud de correlación  $\xi$  que se define a partir del comportamiento asintótico de la función de correlación conectada para  $T$  "lejos" de  $T_c$

$$\langle s_k s_l \rangle_c \sim |r_k - r_l|^{-\tau} e^{-\frac{|r_k - r_l|}{\xi}}, \quad \text{cuando } |r_k - r_l| \rightarrow \infty. \quad (2.12)$$

donde  $\tau$  es algún número.

<sup>7</sup> Propiamente dicho,  $\chi(h, T)$  es la susceptibilidad isotérmica. Nótese que algunas otras cantidades termodinámicas pueden definirse al punto  $s_i$  por el simple cambio de la derivada parcial  $\partial/\partial h$  por la derivada funcional  $\delta/\delta h(s_i)$  cuando el campo  $h$  varía de punto a punto. Esto es importante cuando se estudian sistemas inhomogéneos.

Ahora vamos a definir operacionalmente los exponentes críticos en el caso de un sistema ferromagnético. Para hacer esto es conveniente utilizar la variable adimensional  $t = (T - T_c)/T_c$  conocida como la temperatura reducida.

Como se espera en una transición de fase, las funciones termodinámicas y la longitud de correlación presentan no analiticidades en el punto crítico ( $h = t = 0$ ). El comportamiento no analítico de estas funciones alrededor de estos puntos puede describirse mediante simples potencias no-enteras de  $t$ . Estos exponentes  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  y  $\nu$  son llamados exponentes críticos y se definen mediante las relaciones

$$C_h \sim |t|^{-\alpha}, \quad \text{cuando } t \rightarrow 0^+. \quad (2.13)$$

$$M_0 \sim |t|^\beta, \quad \text{cuando } t \rightarrow 0^-. \quad (2.14)$$

$$\chi \sim |t|^{-\gamma}, \quad \text{cuando } t \rightarrow 0^+, h = 0. \quad (2.15)$$

$$M \sim h^{1/\delta}, \quad \text{cuando } h \rightarrow 0, t = 0. \quad (2.16)$$

$$\xi \sim |t|^{-\nu}, \quad \text{cuando } t \rightarrow 0, M = 0. \quad (2.17)$$

También, el comportamiento de la función de correlación conectada en el punto crítico no es más un decaimiento exponencial, sino más bien uno como ley de potencias. Este comportamiento define el exponente crítico  $\eta$  mediante la relación

$$\langle s_h s_l \rangle_c \sim |r_h - r_l|^{-(d-2+\eta)}, \quad \text{cuando } |r_h - r_l| \rightarrow \infty. \quad (2.18)$$

En todas estas expresiones la notación  $f \sim x^\lambda$  tiene el significado expuesto en la ecuación (1.9). Todo lo anterior nos provee de un marco operacional para calcular las cantidades físicas relevantes del modelo de Ising  $d$ -dimensional. En la siguiente sección vamos a considerar el caso particular del modelo de Ising en una dimensión.

## 2.2 El Modelo de Ising Unidimensional

El caso unidimensional del modelo de Ising corresponde a una cadena de  $N$  espines, cada uno de los cuales interactúa únicamente con sus dos vecinos más cercanos y con un campo magnético externo. Si suponemos que la interacción entre todos los espines es la misma y que el campo magnético aplicado es homogéneo, encontramos que la energía de la configuración especificada por  $\{s_1, \dots, s_N\}$  es

$$E\{s_i\} = -J \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1} - h \sum_{i=1}^N s_i. \quad (2.19)$$

Si además imponemos la condición de frontera periódica

$$s_{N+1} = s_1, \quad (2.20)$$

hacemos que la cadena de espines sea topológicamente semejante a un círculo. En ese caso la expresión para la función de partición es

$$Z\{h\} = \sum_{s_1} \sum_{s_2} \dots \sum_{s_N} e^{\beta \sum_{i=1}^N (J s_i s_{i+1} + h s_i)}, \quad (2.21)$$

donde cada  $s_i$  toma los valores  $\pm 1$  independientemente de los demás.

El paso importante para evaluar esta función de partición es darse cuenta que puede expresarse en términos de matrices. Para lograr esto, reescribamos la expresión (2.21) utilizando la condición de frontera (2.20), lo que da

$$Z\{h\} = \sum_{s_1} \sum_{s_2} \dots \sum_{s_N} e^{\sum_{i=1}^N (K s_i s_{i+1} + \frac{1}{2} H (s_i + s_{i+1}))}, \quad (2.22)$$

donde hemos compactado un poco la notación mediante la introducción de las definiciones  $K = \beta J$  y  $H = \beta h$ . Ahora definamos como  $\mathbf{T}$  a la matriz de  $2 \times 2$  cuyos elementos son

$$\langle s | \mathbf{T} | s' \rangle = e^{(K s s' + \frac{1}{2} H (s + s'))}, \quad s, s' = \pm 1, \quad (2.23)$$

y que está ordenada de la manera usual

$$\begin{aligned} \langle +1 | \mathbf{T} | +1 \rangle &= e^{(K+H)}, \\ \langle -1 | \mathbf{T} | -1 \rangle &= e^{(K-H)}, \\ \langle +1 | \mathbf{T} | -1 \rangle &= \langle -1 | \mathbf{T} | +1 \rangle = e^{-K}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

De esta forma, una representación explícita para  $\mathbf{T}$  es

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} e^{(K+H)} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{(K-H)} \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Usando estas definiciones podemos escribir la ecuación (2.22) en la forma

$$\begin{aligned} Z\{h\} &= \sum_{s_1} \sum_{s_2} \dots \sum_{s_N} \langle s_1 | \mathbf{T} | s_2 \rangle \langle s_2 | \mathbf{T} | s_3 \rangle \dots \langle s_N | \mathbf{T} | s_1 \rangle \\ &= \sum_{s_1} \langle s_1 | \mathbf{T}^N | s_1 \rangle = \text{Tr} \mathbf{T}^N = \lambda_+^N + \lambda_-^N, \end{aligned} \quad (2.26)$$

donde  $\lambda_+$  y  $\lambda_-$  son los eigenvalores de  $\mathbf{T}$  y  $\lambda_+ \geq \lambda_-$ . De la ecuación (2.25), obtenemos las expresiones para los eigenvalores de la matriz  $\mathbf{T}$

$$\lambda_{\pm} = e^K \left[ \cosh(H) \pm \sqrt{\sinh^2(H) + e^{-4K}} \right], \quad (2.27)$$

así, vemos que  $\lambda_+ > \lambda_-$  para cualquier valor de  $h$ . De la ecuación (2.26) vemos que cuando  $N \rightarrow \infty$  sólo el eigenvalor  $\lambda_+$  es relevante debido a que

$$\frac{1}{N} \ln Z\{h\} = \ln \lambda_+ + \frac{1}{N} \ln \left[ 1 + \left( \frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^N \right] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \ln \lambda_+. \quad (2.28)$$

Utilizando la definición (2.7), encontramos que la energía libre de Helmholtz por espín está dada como

$$\frac{1}{N} F(h, T) = -k_B T K - k_B T \ln \left[ \cosh(H) + \sqrt{\sinh^2(H) + e^{-4K}} \right], \quad (2.29)$$

y entonces, de la ecuación (2.10), la magnetización por espín es

$$\frac{1}{N} M(h, T) = \frac{\sinh(H)}{\sqrt{\sinh^2(H) + e^{-4K}}}. \quad (2.30)$$

De esta expresión obtenemos inmediatamente el resultado de que para cualquier valor de  $T > 0$ ,

$$\frac{1}{N} M(0, T) = 0, \quad (2.31)$$

y por lo tanto podemos concluir que a temperatura finita ( $T > 0$ ) el modelo de Ising unidimensional no presenta magnetización espontánea y por consiguiente una transición de fase. La razón física de esto radica en que a cualquier temperatura no cero la configuración promedio está determinada por dos tendencias opuestas que compiten: La tendencia a alinear completamente todos los espines para minimizar la energía, y la tendencia a orientarlos aleatoriamente para maximizar la entropía. Para el modelo de Ising unidimensional, la tendencia hacia el alineamiento siempre cede debido a la existencia de sólo dos vecinos cercanos por cada espín.

### 2.3 El Modelo de Ising en Dos Dimensiones

En esta sección presentaremos algunos de los resultados calculados para el modelo de Ising bidimensional, los cuales refuerzan la hipótesis de escalamiento. La solución analítica a este modelo (en ausencia de campo externo), como lo dijimos anteriormente, se debe a Lars Onsager, quien lo resolvió mediante una generalización del método de la matriz de transferencia presentado en la sección anterior. El primer resultado importante que surgió con esta solución es que se tiene una transición de fase para  $T_c > 0$ .

Los resultados que aquí se presentan se obtienen considerando una red cuadrada de  $N = l^2$  espines,  $l$  renglones y  $l$  columnas con condiciones de frontera periódicas. Esto es, con la condición de que los  $(l+1)$ -ésimos renglón y columna sean idénticos a los primeros

(renglón y columna), respectivamente. Las condiciones de frontera se pueden representar geoméricamente pidiendo que la red cuadrada tenga una simetría toroidal. Se considera interacción sólo entre los vecinos más cercanos con la misma magnitud  $J$  y campo externo  $h = 0$ .

De esta manera, se encuentra que la energía libre por espín está dada como

$$f(T) = -k_B T \ln(2 \cosh 2K) - \frac{k_B T}{2\pi} \int_0^\pi d\phi \ln \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - \delta^2 \sin^2 \phi} \right), \quad (2.32)$$

donde

$$\delta^2 = \frac{2 \sinh 2K}{\cosh^2 2K}, \quad -1 \leq \delta^2 \leq 1, \quad (2.33)$$

con  $K = \beta J$ , como ya la hemos definido antes.

La energía interna por espín es

$$u(T) = -k_B T K \coth(2K) \left[ 1 + \frac{2}{\pi} (2 \tanh^2 2K - 1) \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \delta^2 \sin^2 \phi}} \right], \quad (2.34)$$

y la capacidad calorífica por espín es

$$c(T) = \frac{2k_B}{\pi} (K \coth 2K)^2 \left\{ 2 \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \delta^2 \sin^2 \phi}} - 2 \int_0^{\pi/2} d\phi \sqrt{1 - \delta^2 \sin^2 \phi} - 2(1 - \tanh^2 2K) \left[ \frac{\pi}{2} + (2 \tanh^2 2K - 1) \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \delta^2 \sin^2 \phi}} \right] \right\}. \quad (2.35)$$

La integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \delta^2 \sin^2 \phi}}, \quad (2.36)$$

tiene una singularidad en  $\delta = 1$ . Esta singularidad corresponde a la transición de fase. De la ecuación (2.33) vemos que la temperatura a la que ocurre la transición de fase está dada por

$$\frac{2 \sinh 2\beta_c J}{\cosh^2 2\beta_c J} = 1, \quad (2.37)$$

lo cual conduce a la ecuación

$$k_B T_c \approx (2.269)J. \quad (2.38)$$

Cerca de  $T_c$ , el calor específico por espín se comporta como

$$c(T) \approx \frac{2k_B}{\pi} \left( \frac{2J}{k_B T_c} \right)^2 \left[ -\ln \left| 1 - \frac{T}{T_c} \right| + \ln \left( \frac{k_B T_c}{2J} \right) - \left( 1 + \frac{\pi}{4} \right) \right], \quad (2.39)$$

i.e., se aproxima a infinito logarítmicamente cuando  $|T - T_c| \rightarrow 0$ . Así concluimos que el exponente crítico

$$\alpha = \alpha' = 0. \quad (2.40)$$

Onsager también demostró que

$$\beta = \frac{1}{8}, \quad (2.41)$$

el cual ya es muy diferente del valor clásico de  $1/2$ . Onsager anunció este resultado con su publicación, pero demoró en publicar su derivación. La primera publicación para el cálculo de  $\beta$  se debe a C. N. Yang. Onsager también calculó la función de correlación de la cual uno encuentra

$$\nu = \nu' = 1, \quad (2.42)$$

que difiere del valor clásico  $1/2$ . Finalmente, desarrolló los cálculos que conducen a la demostración de que

$$\eta = \frac{1}{4}, \quad (2.43)$$

en desacuerdo con la predicción clásica,  $\eta = 0$ . Otros investigadores mostraron que los exponentes críticos

$$\gamma = \gamma' = \frac{7}{4} \quad \text{y} \quad \delta = 15, \quad (2.44)$$

que difieren, también, de los valores clásicos  $\gamma = \gamma' = 1$  y  $\delta = 3$ .

Notemos que los mismos exponentes críticos se aplican a todos los modelos de Ising bidimensionales independientemente de la forma de la red. Además, estos valores de los exponentes satisfacen todas las relaciones de escalamiento e hipereescalamiento derivadas en el primer capítulo. Desafortunadamente no ha sido posible verificar la ley de escalamiento de la ecuación de estado debido a que el modelo no ha sido resuelto en presencia de un campo externo. Sin embargo, el escalamiento de las funciones de correlación pares puede verificarse en detalle.

## 2.4 Teoría de Campo Promedio

En esta sección vamos a estudiar el modelo que hemos venido tratando pero en la aproximación de campo promedio. Ya hemos visto que, en el modelo de Ising, los momentos magnéticos interactúan a primeros vecinos, pero aún con esta simplificación y suponiendo una anisotropía que hace que estos momentos magnéticos sólo puedan orientarse en dos direcciones "opuestas", no ha sido posible solucionar exactamente el problema más que hasta dos dimensiones y a campo externo cero. El problema radica en que las interacciones entre espines complican la manera de calcular la función de partición. Para superar este hecho, Weiss propuso sustituir el sistema de espines interactuantes por uno en el que cada

espín estaría sujeto a un *campo externo efectivo* creado por sus  $2d$  vecinos más cercanos, más el campo aplicado. Ahora estamos interesados en obtener resultados en la aproximación de campo promedio y para llegar a ella proponemos comenzar por escribir, primero, la energía del modelo de Ising que definimos en la sección 2.1, con el campo externo  $h$  constante y sin interacción entre ellos. Esta es

$$E\{s_i\} = -h \sum_{i=1}^N s_i. \quad (2.45)$$

En este caso, es fácil deducir, a partir de la definición (2.2), que la función de partición para este sistema es

$$Z = [2 \cosh(H)]^N, \quad (2.46)$$

y por lo tanto, al utilizar las ecuaciones (2.7) y (2.10), obtenemos la expresión para la magnetización por espín

$$\mu \equiv \frac{1}{N} M(h, T) = \tanh(H). \quad (2.47)$$

Si ahora suponemos, como lo hizo Weiss, que como el campo magnético efectivo  $h_i$  es debido a los momentos magnéticos de los espines restantes, entonces debería ser proporcional a  $\mu$ .

De hecho, este campo efectivo se puede expresar en la forma

$$h_i = h + \sum_j J_{ij}(s_j) + \sum_j J_{ij}(s_j - \langle s_j \rangle). \quad (2.48)$$

Aquí, el primer término es el campo externo, el segundo es el campo promedio y el último es la fluctuación del promedio, el cual no consideraremos en este análisis. Si consideramos que las interacciones  $J_{ij}$  son las mismas para cualquier pareja de espines y que los momentos magnéticos se encuentran posicionados en los vértices de una red hipercúbica  $d$ -dimensional, entonces el número de vecinos de cada espín es  $2d$ , y el campo efectivo resulta ser

$$h_i = h + 2dJ\mu. \quad (2.49)$$

Es claro ahora que si desde el principio hubiéramos supuesto que los espines en la red estaban sujetos al campo efectivo  $h_i$ , hubiera sido posible escribir  $\beta h_i$  en lugar de  $H$ . Haciendo esto en la ecuación (2.47) encontramos

$$\mu = \tanh(H + 2dJ\beta\mu). \quad (2.50)$$

Ahora podemos calcular la magnetización espontánea escribiendo  $H = 0$  en la ecuación anterior. De esta manera obtenemos

$$\mu = \tanh(2dJ\beta\mu). \quad (2.51)$$

El resultado de esta ecuación puede visualizarse rápidamente por la intersección de las gráficas de la figura 2.1. Como puede notarse, para  $T > T_c \equiv 2dJ/k_B$ , la curva  $\tanh$  permanece debajo de la recta  $\mu$ , y la única intersección se tiene en  $\mu = 0$ . En cambio, para  $T < T_c$ , hay además dos intersecciones en  $\mu = \pm\mu_0(T)$ . De esta forma surge una no-analicidad debido a la manera en como la solución cambia cuando  $T$  varía. Por lo tanto, en teoría de campo promedio encontramos que la temperatura crítica es

$$T_c = 2dJ/k_B. \quad (2.52)$$

Sabiendo que este modelo predice la existencia de comportamiento crítico, nuestra intención en lo que resta de la sección será calcular los exponentes críticos.

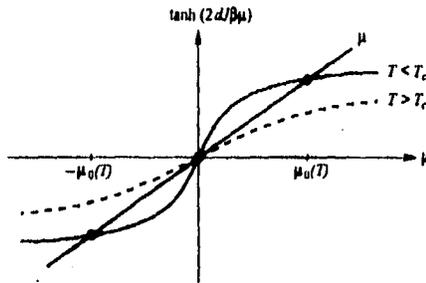


Fig. 2.1 Solución gráfica de la teoría de campo promedio para la magnetización espontánea por espín.

Primero simplifiquemos las ecuaciones mediante la introducción del parámetro  $\tau = T_c/T$ . Al utilizar una identidad bien conocida para la tangente hiperbólica de una suma, vemos que es posible reescribir la ecuación (2.50) en la forma

$$\mu = \frac{\tanh H + \tanh \mu\tau}{1 + \tanh H \tanh \mu\tau}, \quad (2.53)$$

y al resolver esta ecuación para la  $\tanh H$ , encontramos

$$\tanh H = \frac{\mu - \tanh \mu\tau}{1 - \mu \tanh \mu\tau}. \quad (2.54)$$

Para  $\mu$  pequeña, podemos hacer una expansión en potencias de  $\mu$ , y al conservar términos sólo a orden cúbico, obtenemos

$$\tanh H \approx \mu(1 - \tau) + \mu^3 \left( \tau(1 - \tau) + \frac{\tau^3}{3} \right). \quad (2.55)$$

De esta ecuación podemos calcular los exponentes  $\beta$  y  $\delta$ . Para encontrar el primero, ponemos  $H = 0$  y al hacer tender  $T \rightarrow T_c^-$  llegamos al comportamiento de la magnetización

espontánea por espín

$$\mu_0^2 \approx 3 \frac{(T_c - T)}{T_c}, \quad (2.56)$$

de donde, utilizando la ecuación (2.14), leemos el exponente crítico  $\beta = 1/2$ .

Ahora, al estudiar el comportamiento de la magnetización exactamente a la temperatura crítica cuando el campo  $H \rightarrow 0$ , obtenemos de la ecuación (2.55)

$$H \sim \mu^3, \quad (2.57)$$

por lo cual, de la ecuación (2.16), concluimos que  $\delta = 3$ .

Del comportamiento de la susceptibilidad isotérmica  $\chi$ , la cual se calcula haciendo  $\tanh H \approx H$ , para  $H$  pequeño en la ecuación de estado (2.55) y luego derivándola [de acuerdo a la ecuación (2.11)] respecto de  $h$  a temperatura constante,

$$\frac{1}{k_B T} = \chi(1 - \tau) + 3\mu^2 \chi \left( \tau - \tau^2 + \frac{\tau^3}{3} \right). \quad (2.58)$$

Para  $T > T_c$ ,  $\mu = 0$  y por lo tanto, de la anterior ecuación se encuentra el comportamiento

$$\chi = \frac{1}{k_B T - T_c}, \quad (2.59)$$

de acuerdo a la ecuación (2.15), concluimos que el exponente  $\gamma$  tiene el valor  $\gamma = 1$ .

Ahora podemos comprobar que el exponente  $\gamma' = \gamma$ . Para ello tomamos la ecuación (2.56), que es para  $T < T_c$ . Al sustituirla en (2.58) encontramos

$$\chi = \frac{1}{2k_B T - T_c}, \quad (2.60)$$

lo cual muestra que la divergencia de la susceptibilidad debajo de la temperatura de transición está gobernada por el exponente  $\gamma' = \gamma = 1$ . El cálculo del exponente crítico  $\alpha$ , que gobierna el comportamiento del calor específico cerca de la transición por su parte muestra que el calor específico tiene una discontinuidad a  $T = T_c$ . Es decir,  $\alpha = 0$ . Otra manera de obtener este resultado es a partir de la ley de escalamiento de Rushbrooke, ecuación (1.16).

Resta calcular los exponentes  $\nu$  de la longitud de correlación, y  $\eta$  de la función de correlación. Para calcular el primero de ellos recordamos la definición de la función de correlación, ecuación (2.6), y la escribimos, en la manera en que lo haremos en lo sucesivo, como

$$G(x_i - x_j) = \langle s_i s_j \rangle - \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle, \quad (2.61)$$

donde  $x_i$  es la posición del espín  $s_i$ . Como veremos más adelante, ó lo que es lo mismo, como podemos notar de la expresión para la energía y la función de partición, dadas por las

ecuaciones (2.1) y (2.2) respectivamente, los valores promedio de los espines  $\langle s_i \rangle$ ,  $\langle s_i s_j \rangle$ , etc., pueden obtenerse por diferenciación de la función de partición con respecto a las componentes del campo  $h$  en las direcciones  $i, j$ , etc.

En la misma forma como lo hicimos en la ecuación (2.5), pero usando un campo externo homogéneo  $h$ , obtenemos

$$\sum_i \langle s_i \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{s_i\}} \sum_i s_i e^{-\beta E\{s_i\}} = \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial H_i}, \quad (2.62)$$

$$\sum_{ij} \langle s_i s_j \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{s_i\}} \sum_{ij} s_i s_j e^{-\beta E\{s_i\}} = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial H_i \partial H_j}. \quad (2.63)$$

Al usar estas relaciones para reescribir la susceptibilidad encontramos

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{k_B T \partial^2 \ln Z}{N \partial H^2} \\ &= \frac{(k_B T)^{-1}}{N} \sum_{ij} \{ \langle s_i s_j \rangle - \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle \} \\ &= \frac{(k_B T)^{-1}}{N} \sum_{ij} G(x_i - x_j) \\ &= (a^d k_B T)^{-1} \int d^d x G(x). \end{aligned} \quad (2.64)$$

En el último paso, hemos usado el hecho que la distancia entre los espines vecinos  $a$  es una distancia muy pequeña comparada con la escala de longitud característica del sistema y por ello es posible reemplazar la suma por la  $a^{-d}$  veces la integral. Notamos que el resultado que hemos escrito es importante porque conecta la divergencia  $\chi$  con la función de correlación de dos puntos  $G$ . Escribiendo ahora esta expresión para la función de correlación de dos puntos en la forma<sup>8</sup>

$$G(x) \sim \frac{e^{-|x|/\xi}}{|x|^{(d-1)/2} \xi^{(d-3)/2}}, \quad (2.65)$$

donde  $\xi$  es la longitud de correlación. Usando el hecho que el exponente  $\gamma = 1$ , introduciendo la expresión anterior para la función de dos puntos dentro de la integral encontramos la ecuación

$$|T - T_c|^{-1} \sim \int dx \frac{x^{d-1} e^{-|x|/\xi}}{|x|^{(d-1)/2} \xi^{(d-3)/2}}, \quad (2.66)$$

<sup>8</sup> Una prueba explícita de que es posible hacer esto se da en el Libro de N. Goldenfeld, *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group*, Addison-Wesley 1992.

donde hemos absorbido la integral sobre los ángulos, y ahora esta  $x$  ya es un escalar a diferencia de la anterior donde todavía era un vector. Aplicando, por último, el truco de escalamiento mediante la introducción de la variable adimensional  $u = x/\xi$  vemos que la integral ya se puede expresar independientemente de  $\xi$  como

$$|T - T_c|^{-1} \sim \int du u^{(d-1)/2} e^{-\tau \xi^2}, \quad (2.67)$$

de esta ecuación leemos inmediatamente que la longitud de correlación diverge como

$$\xi \sim |T - T_c|^{-1/2}, \quad (2.68)$$

y entonces el exponente  $\nu = 1/2$  en la aproximación de campo promedio. Ya para finalizar esta sección, utilizamos la relación de escalamiento de Fisher, ecuación (1.17), para concluir que el valor del exponente  $\eta$  en campo promedio es  $\eta = 0$ . Como se sabe, de la ecuación (2.18), el comportamiento de la función de dos puntos a exactamente la temperatura crítica y para distancias grandes es el que describe el exponente  $\eta$  esencialmente.

## 2.5 El Modelo de Ising $d$ -dimensional

Como hemos mencionado desde la primera sección del capítulo, el modelo de Ising no ha sido resuelto de manera exacta más que hasta  $d = 2$  ( $h = 0$ ). Lo que pretendemos en esta sección es introducir otro formalismo, alternativo al de la matriz de transferencia para evaluar (en principio) la función de partición del modelo  $d$ -dimensional. La idea es cambiar de representación para expresar la función de partición en términos de campos continuos. Es decir funciones que toman valores en el intervalo  $(-\infty, \infty)$ . Como veremos, en esta representación de campos, la función de partición es una integral funcional bastante difícil y más que simplificarse, el problema parece más complicado. No obstante, es posible obtener resultados en algunos límites de interés.

Consideremos el caso general del modelo de Ising en  $d$  dimensiones, esto es, el caso en que los espines interactúan entre sí (no necesariamente sólo los vecinos más cercanos) con magnitud  $J_{ij}$  y están sujetos a un campo magnético externo  $h_i$  que puede variar de espín a espín.

Estas suposiciones nos permiten considerar la expresión general para la función de partición dada por la ecuación (2.2)

$$Z\{H_i\} = \sum_{\{s_i\}} e^{\sum_{i,j} K_{ij} s_i s_j + \sum_i H_i s_i}, \quad (2.69)$$

donde nuevamente hemos escrito  $K_{ij} = \beta J_{ij}$  y  $H_i = \beta h_i$ .

La idea ahora es implementar transformaciones a la ecuación (2.69) que permitan escribir esta función de partición en términos de variables continuas. La primera de ellas, conocida como la *transformación de Hubbard-Stratonovich*, es

$$\int \prod_{i=1}^N dx_i e^{-\frac{1}{2}x_i V_{ij}^{-1} x_j + s_i x_i} = [\det(4\pi V_{ij})]^{1/2} e^{s_i V_{ij} s_j}, \quad (2.70)$$

en ella se ha usado la convención de Einstein<sup>9</sup> y resulta como generalización natural de la integral Gaussiana

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2 + sx} = 2\sqrt{\pi a} e^{s^2/a}. \quad (2.71)$$

Un comentario pertinente acerca de esta transformación es que para poder llevarla a cabo se requiere que la matriz  $V_{ij}$  sea definida positiva y simétrica. Sin embargo, cuando estas condiciones sobre la matriz no se tienen, la transformación puede implementarse únicamente en un sentido formal. En nuestro caso, la matriz  $K_{ij}$  es en principio arbitraria, pero cuando imponemos la condición de que cada espín interactúe únicamente con sus vecinos más cercanos, esta matriz toma una forma que es simétrica pero no definida positiva. No obstante, podemos escribir  $K_{ij}$  como la suma de dos matrices, una de las cuales es simétrica y positiva definida, y la otra resulta en un factor constante para la función de partición. Físicamente esto corresponde al hecho de que estamos seleccionando otro nivel de referencia para medir la energía.

De esta forma, escribimos la matriz  $K_{ij} = V_{ij} - A\delta_{ij}$  en (2.69), con  $V_{ij}$  una matriz definida positiva y simétrica, y  $A$  una constante positiva; luego utilizando la ecuación (2.70) con la convención de Einstein reescribimos la función de partición en la forma

$$\begin{aligned} Z(H_i) &= \sum_{\{s_i\}} e^{s_i K_{ij} s_j + H_i s_i} \\ &= \sum_{\{s_i\}} e^{s_i V_{ij} s_j + H_i s_i - s_i A \delta_{ij} s_i} \\ &= e^{-NA} \sum_{\{s_i\}} [\det(4\pi V_{ij})]^{-1/2} \int \prod_{i=1}^N d\varphi_i e^{-\frac{1}{2}\varphi_i V_{ij}^{-1} \varphi_j + (\varphi_i + H_i) s_i} \\ &= e^{-NA} \sum_{\{s_i\}} [\det(4\pi V_{ij})]^{-1/2} \int \prod_{i=1}^N d\varphi_i e^{-\frac{1}{2}(\varphi_i - H_i) V_{ij}^{-1} (\varphi_j - H_j) + \varphi_i s_i} \end{aligned} \quad (2.72)$$

donde al final hemos efectuado el cambio de variable  $\varphi_i \rightarrow \varphi_i - H_i$ . Notamos que la suma

<sup>9</sup> La aparición de índices repetidos lleva implícita una suma, en este caso desde 1 hasta  $N$ .

sobre configuraciones<sup>10</sup> sólo actúa en el último sumando de la exponencial, de éste tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{\{\sigma_i\}} e^{\varphi_i \sigma_i} &= \prod_{i=1}^N (e^{\varphi_i} + e^{-\varphi_i}) \\ &= \prod_{i=1}^N (2 \cosh \varphi_i) \\ &= e^{\sum_i \ln 2 + \sum_i \ln(\cosh \varphi_i)}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Al sustituir este resultado en la última expresión para  $Z\{H_i\}$ , ecuación (2.72), obtenemos

$$Z\{H_i\} = C \int \prod_{i=1}^N d\varphi_i e^{-\frac{1}{2}(\varphi_i - H_i)V_{ij}^{-1}(\varphi_j - H_j) + \sum_i \ln(\cosh \varphi_i)}, \quad (2.74)$$

donde  $C = e^{-NA} [\det(4\pi V_{ij})]^{-1/2} 2^N$ . Vale la pena hacer un comentario aquí. Notamos que el primer término correspondiente a la "parte cinética" (el primer sumando en la exponencial) contiene un factor  $V_{ij}^{-1}$  y ello le hace ser no-local. Esto se tiene cuando  $V_{ij}$  representa interacciones "locales" que conectan vecinos más cercanos, interacción a segundos vecinos, etc., pero no se tiene cuando las interacciones son de largo rango ó aún infinito.

En cambio, el "término de interacción" (último sumando en la exponencial), sí es local porque no contiene términos que conecten  $\varphi_i$  con  $\varphi_j$ . Para eliminar esta no-localidad de la parte cinética, llevamos a cabo el cambio de variables

$$\psi_i = \frac{1}{2} V_{ij}^{-1} \varphi_j, \quad (2.75)$$

por lo cual obtenemos

$$Z\{H_i\} = C' e^{-\frac{1}{2} H_i V_{ij}^{-1} H_j} \int \prod_{i=1}^N d\psi_i e^{-\psi_i V_{ij} \psi_j + H_i \psi_i + \sum_i \ln(\cosh 2V_{ij} \psi_i)}, \quad (2.76)$$

con  $C' = e^{-NA} [\det((2\pi)^{-1} V_{ij})]^{1/2} 2^N$ .

De esta expresión para la integral funcional  $Z$  podemos darnos cuenta que hemos cambiado la no-localidad del término cinético al término de interacción. Naturalmente estamos de acuerdo en que la no-localidad de ésta expresión es un resultado de la introducción de

<sup>10</sup> Esta suma restringe el modelo al caso del de Ising, i.e.  $\sigma_i$  sólo puede tomar los valores  $+1$  ó  $-1$ . En el caso general en que el espín es un vector unitario con  $n$  componentes (modelo de Heisenberg generalizado), la suma se convierte en un producto de integrales sobre la superficie de la esfera  $n$ -dimensional unitaria (véase la sección 2.6).

sobre configuraciones<sup>10</sup> sólo actúa en el último sumando de la exponencial, de éste tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{\{s_i\}} e^{\varphi_i s_i} &= \prod_{i=1}^N (e^{\varphi_i} + e^{-\varphi_i}) \\ &= \prod_{i=1}^N (2 \cosh \varphi_i) \\ &= e^{\sum_i \ln 2 + \sum_i \ln(\cosh \varphi_i)}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Al sustituir este resultado en la última expresión para  $Z\{H_i\}$ , ecuación (2.72), obtenemos

$$Z\{H_i\} = C \int \prod_{i=1}^N d\varphi_i e^{-\frac{1}{2}(\varphi_i - H_i)V_{ij}^{-1}(\varphi_j - H_j) + \sum_i \ln(\cosh \varphi_i)}, \quad (2.74)$$

donde  $C = e^{-NA} [\det(4\pi V_{ij})]^{-1/2} 2^N$ . Vale la pena hacer un comentario aquí. Notamos que el primer término correspondiente a la "parte cinética" (el primer sumando en la exponencial) contiene un factor  $V_{ij}^{-1}$  y ello le hace ser no-local. Esto se tiene cuando  $V_{ij}$  representa interacciones "locales" que conectan vecinos más cercanos, interacción a segundos vecinos, etc., pero no se tiene cuando las interacciones son de largo rango ó aún infinito.

En cambio, el "término de interacción" (último sumando en la exponencial), sí es local porque no contiene términos que conecten  $\varphi_i$  con  $\varphi_j$ . Para eliminar esta no-localidad de la parte cinética, llevamos a cabo el cambio de variables

$$\psi_i = \frac{1}{2} V_{ij}^{-1} \varphi_j, \quad (2.75)$$

por lo cual obtenemos

$$Z\{H_i\} = C' e^{-\frac{1}{2} H_i V_{ij}^{-1} H_j} \int \prod_{i=1}^N d\psi_i e^{-\psi_i V_{ij} \psi_j + H_i \psi_i + \sum_i \ln(\cosh 2V_{ij} \psi_i)}, \quad (2.76)$$

con  $C' = e^{-NA} [\det((2\pi)^{-1} V_{ij})]^{1/2} 2^N$ .

De esta expresión para la integral funcional  $Z$  podemos darnos cuenta que hemos cambiado la no-localidad del término cinético al término de interacción. Naturalmente estamos de acuerdo en que la no-localidad de ésta expresión es un resultado de la introducción de

<sup>10</sup> Esta suma restringe el modelo al caso del de Ising, i.e.  $s_i$  sólo puede tomar los valores  $+1$  ó  $-1$ . En el caso general en que el espín es un vector unitario con  $n$  componentes (modelo de Heisenberg generalizado), la suma se convierte en un producto de integrales sobre la superficie de la esfera  $n$ -dimensional unitaria (véase la sección 2.6).

campos continuos  $\psi_i$  que no aparecía en la representación discreta. Este es el precio que irremediamente tuvimos que pagar por llevar a cabo el "cambio de variables" entre la variable discreta  $s_i$  y la continua  $\psi_i$ , mediante la transformación de Hubbard-Satratonovich.

A pesar del inconveniente, que representa la no-localidad, esta es la expresión "más adecuada" para la función de partición del modelo de Ising  $d$ -dimensional en el espacio de configuraciones que se obtiene con los métodos de la teoría de campos. Como puede verse, esta es una integral funcional (pues  $\psi_i = \psi(\pi_i)$ ) que es difícil de resolver debido al último término del integrando. En realidad no se conoce un método para resolver exactamente este tipo de integrales, sólo es posible obtener aproximaciones (analíticas ó numéricas).

La complicación en el cálculo de la integral funcional en su representación en el espacio de configuraciones nos lleva a intentar resolverla en su representación en el espacio de momentos. Con este objetivo en mente, llevamos la integral (2.76) a su representación en el espacio de momentos mediante una transformación de Fourier de la forma

$$\psi_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} \psi(\mathbf{k}). \quad (2.77)$$

Ahora, para simplificar el álgebra, supongamos que cada espín interactúa sólo con sus  $2d$  vecinos más cercanos. De esta forma podemos representar la matriz  $K_{ij}$  (en el caso ferromagnético) como<sup>11</sup>

$$K_{ij} = B(\delta_{i+1,j} + \delta_{i-1,j}), \quad (2.78)$$

y la matriz  $V_{ij}$  en la forma

$$V_{ij} = A\delta_{ij} + B(\delta_{i+1,j} + \delta_{i-1,j}). \quad (2.79)$$

En realidad estas expresiones son sólo una abreviación para

$$K_{ij} = B(\delta_{i_1+1, \dots, i_d, j} + \delta_{i_1-1, \dots, i_d, j}) + \dots + B(\delta_{i_1, \dots, i_d+1, j} + \delta_{i_1, \dots, i_d-1, j}), \quad (2.80)$$

$$V_{ij} = A\delta_{i_1, \dots, i_d, j} + B(\delta_{i_1+1, \dots, i_d, j} + \delta_{i_1-1, \dots, i_d, j}) + \dots + B(\delta_{i_1, \dots, i_d+1, j} + \delta_{i_1, \dots, i_d-1, j}), \quad (2.81)$$

donde, se ha usado el índice  $j$  en vez de  $j_1, \dots, j_d$ , para compactar un poco la notación. Un comentario acerca de las matrices  $K$  y  $V$  es que cada uno de los términos en  $\delta_{ij}$  representa la interacción del espín que se encuentra en la posición  $l = (l_1, \dots, l_d)$  de la red hipercúbica  $d$ -dimensional con el espín cuya posición es  $j = (j_1, \dots, j_d)$ . Así, se ve de las ecuaciones (2.80) y (2.81) que hay justamente  $2d$  términos en  $\delta_{ij}$ , correspondientes a las interacciones del espín  $l$  con sus  $2d$  vecinos más cercanos, siendo  $l$  un espín arbitrario, y que la magnitud de esta interacción (normalizada por  $\beta$ ) es  $B$ .

<sup>11</sup> En el caso antiferromagnético, simplemente cambiamos  $B$  por  $-B$ , manteniendo  $B > 0$ .

En esta representación, podemos escribir, término por término, el exponente del integrando de la ecuación (2.76), esto es

$$\begin{aligned} -\psi_i V_{ij} \psi_j &= -\frac{1}{N} \sum_{i,j} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i} \psi(\mathbf{k}) (A\delta_{ij} + B(\delta_{i+1,j} + \delta_{i-1,j})) e^{-i\mathbf{l} \cdot \mathbf{x}_j} \psi(\mathbf{l}) \\ &= -\sum_{\mathbf{k}} \psi(\mathbf{k}) \psi(-\mathbf{k}) E_d^+(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned} H_i \psi_i &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i H_i \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i} \psi(\mathbf{k}) \\ &= \sum_{\mathbf{k}} H(-\mathbf{k}) \psi(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (2.83)$$

$$\begin{aligned} \sum_i \ln(\cosh 2V_{ij} \psi_j) &= \sum_i \ln \left( \cosh \frac{2}{\sqrt{N}} \sum_j (A\delta_{ij} + B(\delta_{i+1,j} + \delta_{i-1,j})) \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j} \psi(\mathbf{k}) \right) \\ &= \sum_i \ln \left( \cosh \frac{2}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i} \psi(\mathbf{k}) E_d^+(\mathbf{k}) \right), \end{aligned} \quad (2.84)$$

para llegar a estos resultados, hemos escrito explícitamente las sumas correspondientes a la convención de Einstein, hemos denotado (implícitamente) por  $a = |\mathbf{a}|$  a la distancia entre espines vecinos en la retícula y hemos utilizado una transformación de Fourier para  $H_i$  de la forma de la ecuación (2.77). Además, hemos utilizado los eigenvalores de  $V_{ij}$

$$E_d^+(\mathbf{k}) = A + 2Bd - 4B \sum_{i=1}^d \text{sen}^2 \left( \frac{\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{a}}{2} \right), \quad (2.85)$$

donde  $\frac{\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{a}}{2} = \frac{\pi n_i}{2(N+1)}$  con  $n_i = 1, \dots, N$ , y hemos utilizado las identidades

$$\frac{1}{N} \sum_j e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j} = \delta(\mathbf{k}), \quad (2.86)$$

$$\sum_l \delta(\mathbf{k} + \mathbf{l}) f(\mathbf{l}) = f(-\mathbf{k}). \quad (2.87)$$

El último paso para tener la representación en el espacio de momentos es transformar la forma cuadrática de la exponencial que está fuera de la integral y la medida  $\prod_{i=1}^N d\psi_i$  de la integral funcional (2.76). El cálculo de la forma cuadrática es análogo al que se llevó a cabo en la ecuación (2.82) y la medida se transforma de una manera simple, el determinante de la transformación es 1. Llevando a cabo la transformación, obtenemos

$$\begin{aligned} Z(H) &= C' e^{-\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} H(\mathbf{k}) |E_d^+(\mathbf{k})|^{-1} H(-\mathbf{k})} \int \prod_{\mathbf{k}} d\psi(\mathbf{k}) \\ &\times e^{-\sum_{\mathbf{k}} \psi(\mathbf{k}) \psi(-\mathbf{k}) E_d^+(\mathbf{k}) + \sum_{\mathbf{k}} H(-\mathbf{k}) \psi(\mathbf{k}) + \sum_i \ln \left( \cosh 2 \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i} \psi(\mathbf{k}) E_d^+(\mathbf{k}) \right)}. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Esta integral funcional es la función de partición del modelo de Ising  $d$ -dimensional en la representación de campos en el espacio de momentos.

### 2.5.1 La Teoría Gaussiana

Hasta aquí hemos calculado expresiones generales para la función de partición en el espacio de configuraciones y de momentos para el modelo de Ising  $d$ -dimensional, dadas por las ecuaciones (2.76) y (2.88) respectivamente. Como se ha venido comentando, no se conoce solución exacta para este tipo de integrales. De hecho las únicas integrales funcionales para las que se conoce una solución exacta son las gaussianas. Esto nos lleva a resolverlas de manera aproximada. La primera aproximación que se ocurre es tomar sólo la parte gaussiana de la ecuación (2.88) y poner el campo externo  $H = 0$ . En esta aproximación, sólo falta tomar la parte cuadrática del último término de la exponencial, para tener la aproximación gaussiana.

Tomemos, pues, la expansión en serie de potencias de este término alrededor de  $x = 0$ , i.e. consideremos

$$\ln(\cosh x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \dots, \quad (2.89)$$

entonces la contribución de este factor a segundo orden es

$$\sum_i \ln(\cosh 2 \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i} \psi(\mathbf{k}) E_d^+(\mathbf{k})) \approx 2 \sum_{\mathbf{k}} \psi(\mathbf{k}) E_d^+(\mathbf{k}) \psi(-\mathbf{k}) E_d^+(-\mathbf{k}), \quad (2.90)$$

por lo cual la parte libre del hamiltoniano puede escribirse en la forma

$$H_0 \equiv \int dx \mathcal{H}_0 = \sum_{\mathbf{k}} [E_d^+(\mathbf{k}) - 2|E_d^+(\mathbf{k})|^2] \psi(\mathbf{k}) \psi(\mathbf{k}). \quad (2.91)$$

Dado que nos interesa el comportamiento crítico donde  $ka \ll 1$ , expandemos el primer factor en la suma de la expresión anterior en potencias de  $|k|$  y conservamos términos hasta segundo orden. Para ello, utilizamos la expresión para los eigenvalores  $E_d^+(\mathbf{k})$  dada por la ecuación (2.85). De esta tenemos

$$E_d^+(\mathbf{k}) \approx V_0(1 - c^2 k^2), \quad (2.92)$$

donde  $V_0 = A + 2Bd$  y  $c^2 = \frac{Bda^2}{A + 2Bd}$ , y por tanto podemos escribir el hamiltoniano libre como

$$H_0 = \sum_{\mathbf{k}} V_0 [(1 - 2V_0) + (4V_0 - 1)c^2 k^2] \psi(\mathbf{k}) \psi(-\mathbf{k}), \quad (2.93)$$

el primer factor después de la suma puede interpretarse como  $m^2 + k^2$  y por definición, se tiene la temperatura crítica cuando el parámetro de masa  $m$  es cero. Esto sucede cuando

$V_0 = 1/2$  ó lo que es lo mismo, cuando

$$A + 2Bd = \frac{1}{2}, \quad (2.94)$$

esta es una expresión que es físicamente difícil de tratar puesto que  $A$  representa esencialmente un corrimiento arbitrario en la energía de interacción de cada espín con sus  $2d$  vecinos más cercanos, que está determinada sólo por la condición  $A > 2Bd$ . Esto provoca una arbitrariedad en la definición de la temperatura crítica. Para salvar este problema podemos poner  $A = 0$  y entonces, puesto que  $B = \beta J$  con  $J$  la energía de interacción entre espines, podemos escribir, cuando  $m = 0$  ( $T = T_c^M$ , la temperatura crítica en la aproximación de campo promedio):

$$T_c^M = 4dJ. \quad (2.95)$$

Ahora podemos hacer una expansión de  $\mathcal{H}_0$  para temperaturas cercanas a  $T_c$ . En ese caso podemos escribir

$$1 - 2V_0 \approx \frac{T - T_c^M}{T_c^M} + O(T - T_c^M)^2 \quad (2.96)$$

$$4V_0 - 1 \approx 1 + O(T - T_c^M) \quad (2.97)$$

$$V_0 \approx \frac{1}{2} + O(T - T_c^M), \quad (2.98)$$

y por tanto para temperaturas en la vecindad de  $T_c^M$

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \left[ \frac{T - T_c^M}{T_c^M} + c^2 \mathbf{k}^2 \right] \psi(\mathbf{k}) \psi(-\mathbf{k}). \quad (2.99)$$

Finalmente, haciendo el cambio de variable  $\phi = c\psi$  e introduciendo la definición del parámetro de masa  $m^2 = \frac{1}{c^2} \frac{T - T_c^M}{T_c^M}$ , podemos escribir la ecuación (2.99) en la forma

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} [m^2 + k^2] \phi(\mathbf{k}) \phi(-\mathbf{k}). \quad (2.100)$$

Nótese que el espacio de la red,  $a$ , no aparece explícitamente así que es posible tomar el límite continuo directamente. Esto, en particular, nos interesa porque queremos llegar a una descripción en términos de campos continuos en la cual se facilite la introducción del formalismo de "teoría de campos". Este límite puede tomarse en la representación del espacio de configuraciones a través de las transformaciones  $(\psi_{i+1} - \psi_i)/a \rightarrow \nabla_i \psi$ ,  $\psi \rightarrow a^{d/2-1} \psi$ ,  $\sum_i \rightarrow a^{-d} \int d^d x$ ; de tal manera que uno llega al resultado

$$H_0 = \frac{1}{2} \int d^d x [(\nabla \varphi)^2 + m^2 \varphi^2]. \quad (2.101)$$

Al escribir este hamiltoniano libre en la integral funcional, poner  $H = 0$  y hacer el cambio en la medida de ésta, obtenemos la teoría gaussiana

$$Z\{0\} = C'' \int [d\varphi] e^{-\frac{1}{2} \int d^d x [(\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2]}, \quad (2.102)$$

en la que hemos usado la notación  $[d\varphi] = \prod d\varphi(x)$ .

### 2.5.2 Exponentes Críticos en la Teoría Gaussiana

Comencemos con la expresión para el hamiltoniano libre en el espacio de momentos, ecuación (2.100), y calculemos algunas de las propiedades de la teoría libre. Como un primer paso podemos calcular la función de correlación

$$G_0(\mathbf{k}) = \langle \phi(\mathbf{k})\phi(-\mathbf{k}) \rangle_0 = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(\mathbf{k})\phi(-\mathbf{k}) e^{-\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} (m^2 + k^2)\phi(\mathbf{k})\phi(-\mathbf{k})}}{\int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} (m^2 + k^2)\phi(\mathbf{k})\phi(-\mathbf{k})}}, \quad (2.103)$$

que es la transformada de Fourier de  $G_0(x)$ , i.e.

$$G_0(x) = \langle \phi(x)\phi(0) \rangle_0 = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} G_0(\mathbf{k}), \quad (2.104)$$

y en el límite  $V \rightarrow \infty$  se convierte en

$$G_0(x) = \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} G_0(\mathbf{k}). \quad (2.105)$$

Esta es una manera operacional de obtener las funciones de correlación, pero la manera más natural de obtenerlas es por medio de derivadas funcionales con respecto a una fuente de la funcional generadora. Con esto en mente, agregamos a  $H_0$  el término de fuente  $\sum_{\mathbf{k}} H(\mathbf{k})\phi(-\mathbf{k})$  y entonces de (2.100) inferimos inmediatamente que

$$G_0(\mathbf{k}) = \left[ \frac{1}{Z_0[H]} \frac{\partial^2 Z_0[H]}{\partial H(\mathbf{k}) \partial H(-\mathbf{k})} \right] \Big|_{H=0}, \quad (2.106)$$

donde denotamos por  $Z_0[H]$  a la funcional generadora de la teoría con campo externo

$$\begin{aligned} Z_0[H] &= \int \mathcal{D}\phi e^{-\sum_{\mathbf{k}} [(k^2 + m^2)\phi(\mathbf{k})\phi(-\mathbf{k}) + \phi(\mathbf{k})H(-\mathbf{k})]} \\ &= e^{\frac{1}{2}(k^2 + m^2)^{-1} H(\mathbf{k})H(-\mathbf{k})} \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} (k^2 + m^2)\phi(\mathbf{k})\phi(-\mathbf{k})}, \end{aligned} \quad (2.107)$$

y hemos hecho la traslación en el campo  $\phi(\mathbf{k}) \rightarrow \phi(\mathbf{k}) - (k^2 + m^2)^{-1} H(\mathbf{k})$ .

De las dos últimas expresiones concluimos que

$$G_0(\mathbf{k}) = (k^2 + m^2)^{-1}, \quad (2.108)$$

con la cual podemos calcular algunos exponentes críticos.

La susceptibilidad está dada por

$$\chi = G_0(\mathbf{k} = 0) = m^{-2} \sim |T - T_c^M|^{-1}, \quad (2.109)$$

y por lo tanto  $\gamma = 1$ .

También el comportamiento de la función de correlación para  $|T - T_c^M| \rightarrow 0$  (i.e. para  $m \rightarrow 0$ ) es

$$G_0(\mathbf{k}) = k^{-2}, \quad (2.110)$$

por lo cual tenemos  $\eta = 0$ , independientemente del valor de  $d$ .

Definiendo la longitud de correlación mediante la relación

$$\xi^2 = \frac{1}{2d} \frac{\int dx x^2 G(x)}{\int dx G(x)}, \quad (2.111)$$

ésta, se puede expresar en términos de  $G(k)$  por

$$\xi^2 = - \left[ \frac{1}{G(k)} \frac{\partial G(k)}{\partial k^2} \right] \Big|_{k=0}. \quad (2.112)$$

Utilizando la ecuación (2.108) encontramos que

$$\xi = m^{-1} \sim |T - T_c^M|^{-1/2}, \quad (2.113)$$

de donde inferimos inmediatamente que  $\nu = 1/2$ .

Por último, podemos calcular el exponente crítico  $\alpha$  del calor específico. Para ello, llevamos a cabo la integral gaussiana de la ecuación (2.107) y calculamos el logaritmo de la función de partición. De este último tenemos

$$\ln Z_0[H] = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \ln(k^2 + m^2) + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} H(\mathbf{k})(k^2 + m^2)^{-1} H(-\mathbf{k}) + \frac{N}{2} \ln(2\pi). \quad (2.114)$$

Luego, utilizando las definiciones (2.8) y (2.9), encontramos la expresión para el calor específico  $C$

$$C = -\frac{k_B T}{NT_c^M} \sum_{\mathbf{k}} (k^2 + m^2)^{-1} + \frac{k_B T^2}{2NT_c^M{}^2} \sum_{\mathbf{k}} (k^2 + m^2)^{-2}, \quad (2.115)$$

en el límite continuo, para  $|\mathbf{k}| < \Lambda$ , el comportamiento dominante en  $T - T_c^M$  de esta expresión está dado por

$$C \sim \int^{\Lambda} \frac{d^d k}{(k^2 + m^2)^2} \\ \sim \frac{\Gamma(2 - d/2)}{(T - T_c^M)^{2 - d/2}}, \quad (2.116)$$

para  $d \leq 4$ , el calor específico diverge debido a la singularidad infrarroja. En este caso el exponente  $\alpha$  es

$$\alpha = \frac{4 - d}{2}. \quad (2.117)$$

Nótese que todos los exponentes de la teoría Gaussiana son los mismos que los de la teoría de campo promedio, excepto  $\alpha$ . Uno se preguntaría ¿porqué ocurre esto? La razón es simple, debido a que no hay interacciones las fluctuaciones no pueden estar acopladas y por lo tanto no pueden contribuir a las funciones de correlación. También, debido a que no hay interacciones la teoría no existe para  $T < T_c^M$ , entonces este modelo no es "tan real" aunque sea exactamente soluble.

## 2.6 Modelo de Heisenberg Generalizado

En esta sección vamos a llevar a cabo la generalización del modelo de Ising  $d$ -dimensional al caso en que cada uno de los espines es un vector unitario con  $n$  componentes que puede tomar cualquier valor en la esfera unitaria. Este modelo contendrá entonces como casos particulares al modelo de Heisenberg ( $n = 3$ ), al modelo XY ( $n = 2$ ) y al modelo de Ising ( $n = 1$ ), entre otros.

Como pudimos darnos cuenta en la sección anterior, hasta la ecuación (2.72), el número de componentes del espín en el modelo de Ising  $d$ -dimensional era arbitrario, pero al llevar a cabo la suma sobre configuraciones (2.73) restringimos este número de componentes a sólo una y además pedimos que el espín sólo pudiera tomar los valores  $+1$  ó  $-1$ . Para sobrepasar esta restricción, debemos tomar en cuenta la generalización de la suma sobre las configuraciones de los espines del sistema

$$\sum_{\{s_i\}} e^{s_i \cdot s_j}, \quad (2.118)$$

al caso en que  $s_i$  es un vector unitario con  $n$  componentes. No es difícil darse cuenta que en este caso la suma sobre configuraciones es un producto de integrales<sup>13</sup> sobre el elemento

<sup>13</sup> Una integral por cada espín.

de ángulo sólido; esto es

$$\prod_1^n \int d\Omega_n e^{\varphi_i \theta_i}. \quad (2.119)$$

El problema ahora es evaluar esta integral, para lo cual usamos el sistema de coordenadas esféricas en  $n$  dimensiones. Fijando el eje "polar" a la dirección del campo externo  $\varphi_i$ , tenemos que

$$\int d\Omega_n e^{\varphi_i \theta_i} = \int d\Omega_n e^{|\varphi_i| \cos \theta_i}, \quad (2.120)$$

donde

$$d\Omega_n = (\sin \theta_1)^{n-2} (\sin \theta_2)^{n-3} \cdots \sin \theta_{n-2} d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_{n-1}, \quad (2.121)$$

con  $0 < \theta_i < \pi$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-2$  y  $0 < \theta_{n-1} < 2\pi$ .

La integración sobre los ángulos  $\theta_i$ ,  $i = 2, \dots, n-1$ , es inmediata y dá un valor constante  $K$ ; sólo resta la integración sobre  $\theta_1$ , es decir

$$\int d\Omega_n e^{\varphi_i \theta_i} = K \int d\theta_1 (\sin \theta_1)^{n-2} e^{|\varphi_i| \cos \theta_1}, \quad (2.122)$$

pero el valor de esta integral<sup>18</sup> es

$$\int d\Omega_n e^{\varphi_i \theta_i} = K \sqrt{\pi} \left( \frac{2}{|\varphi_i|} \right)^{\frac{n-2}{2}} \Gamma \left( \frac{n-1}{2} \right) I_{\frac{n-1}{2}}(|\varphi_i|), \quad (2.123)$$

y el valor de  $K$  es

$$\begin{aligned} K &= \int (\sin \theta_2)^{n-3} (\sin \theta_3)^{n-4} \cdots \sin \theta_{n-2} d\theta_2 d\theta_3 \cdots d\theta_{n-1} \\ &= 2\pi \int (\sin \theta_2)^{n-3} (\sin \theta_3)^{n-4} \cdots \sin \theta_{n-2} d\theta_2 d\theta_3 \cdots d\theta_{n-2} \\ &= 2\pi (\sqrt{\pi})^{n-3} \prod_{m=1}^{n-3} \Gamma \left( \frac{m+1}{2} \right) / \Gamma \left( \frac{m+2}{2} \right), \end{aligned} \quad (2.124)$$

en el último paso hemos usado la identidad

$$\begin{aligned} \int_0^\pi d\theta (\sin \theta)^k &= 2 \int_0^{\pi/2} d\theta (\sin \theta)^k \\ &= \Gamma \left( \frac{k+1}{2} \right) \Gamma \left( \frac{1}{2} \right) / \Gamma \left( \frac{k+2}{2} \right) \\ &= \sqrt{\pi} \Gamma \left( \frac{k+1}{2} \right) / \Gamma \left( \frac{k+2}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.125)$$

<sup>18</sup> Tomada de I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic New York 1980.

Después de unas simplificaciones, obtenemos

$$\int d\Omega_n e^{\varphi_i \theta_i} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \prod_{m=1}^{n-3} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right) |\varphi_i|^{-\frac{n-3}{2}} I_{\frac{n-3}{2}}(|\varphi_i|), \quad (2.126)$$

pero

$$\prod_{m=1}^{n-3} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right) = \left[\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\right]^{-1}, \quad (2.127)$$

y por lo tanto el valor de la integral es

$$\int d\Omega_n e^{\varphi_i \theta_i} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} |\varphi_i|^{-\frac{n-3}{2}} I_{\frac{n-3}{2}}(|\varphi_i|). \quad (2.128)$$

De esta forma, tenemos la generalización

$$\begin{aligned} \sum_{\{\theta_i\}} e^{\varphi_i \theta_i} &\rightarrow \prod_{i=1}^N \int d\Omega_n e^{\varphi_i \theta_i} \\ &= (2\pi)^{\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^N |\varphi_i|^{-\frac{n-3}{2}} I_{\frac{n-3}{2}}(|\varphi_i|) \\ &= (2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{\sum_{i=1}^N \ln \left[ |\varphi_i|^{-\frac{n-3}{2}} I_{\frac{n-3}{2}}(|\varphi_i|) \right]}, \end{aligned} \quad (2.129)$$

que al ser sustituida en la ecuación (2.72) da

$$\begin{aligned} Z\{H_i\} &= (2\pi)^{\frac{1}{2}} C' 2^{-N} e^{-\frac{1}{2} H_i V_{ij}^{-1} H_j} \\ &\times \int \prod_{i=1}^N d\psi_i e^{-\psi_i V_{ij} \psi_j + H_i \psi_i + \sum_{i=1}^N \ln \left[ |2V_{ij} \psi_j|^{-\frac{n-3}{2}} I_{\frac{n-3}{2}}(|2V_{ij} \psi_j|) \right]}. \end{aligned} \quad (2.130)$$

Esta es la expresión para la función de partición del modelo de Heisenberg cuyo parámetro de orden tiene  $n$  componentes expresada en su representación del espacio de configuraciones.

Si ahora seguimos el álgebra que antes hicimos para llegar a las expresiones en el espacio de momentos, obtenemos

$$\begin{aligned} Z\{H\} &= (2\pi)^{\frac{1}{2}} C' 2^{-N} e^{-\frac{1}{2} H(\mathbf{k}) E_{\mathbf{k}}^{-1} H(-\mathbf{k})} \\ &\times \int \prod_{\mathbf{k}} d\psi(\mathbf{k}) e^{-\sum_{\mathbf{k}} \psi(\mathbf{k}) \psi(-\mathbf{k}) E_{\mathbf{k}}^{-1} + \sum_{\mathbf{k}} H(-\mathbf{k}) \psi(\mathbf{k})} \\ &\times e^{\sum_{\mathbf{k}} \ln \left[ \left| \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{\mathbf{k}'} e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}} \psi(\mathbf{k}') E_{\mathbf{k}'}^{-1} \right|^{-\frac{n-3}{2}} I_{\frac{n-3}{2}} \left( \left| \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{\mathbf{k}'} e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}} \psi(\mathbf{k}') E_{\mathbf{k}'}^{-1} \right| \right) \right]}, \end{aligned} \quad (2.131)$$

la cual es la expresión general para la función de partición en el espacio de momentos.

## 2.7 Límites Interesantes

Ya tenemos expresiones para la función de partición del modelo más general que pretendemos estudiar, pero como se puede ver estas son extremadamente complicadas. Vamos a considerar entonces algunos de los casos relevantes de interés físico, como son, el comportamiento del sistema cuando su temperatura se acerca a cero ( $T \rightarrow 0$ ), el comportamiento asintótico para altas temperaturas ( $T \rightarrow \infty$ ), y los casos límite cuando  $n \rightarrow 1$  y cuando  $n \rightarrow \infty$ . De los dos últimos esperamos recobrar el modelo de Ising y obtener el modelo esférico respectivamente.

Comencemos con el límite  $n \rightarrow 1$ . Para tomar este límite, podemos usar el último exponente de la ecuación (2.131) y la expresión para la función de Bessel<sup>14</sup>

$$I_{\pm(m+\frac{1}{2})}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \left[ e^z \sum_{\kappa=0}^m \frac{(-1)^\kappa (m+\kappa)!}{\kappa!(m-\kappa)!(2z)^\kappa} \pm (-1)^{m+1} e^{-z} \sum_{\kappa=0}^m \frac{(m+\kappa)!}{\kappa!(m-\kappa)!(2z)^\kappa} \right], \quad (2.132)$$

en el límite  $n \rightarrow 1$  vemos de (2.131) que necesitamos la expresión para  $I_{-\frac{1}{2}}$ . Podemos obtenerla de la anterior, haciendo  $m = 0$  y tomando el signo menos. De esta manera, la ecuación se reduce a

$$\begin{aligned} I_{-\frac{1}{2}}(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} [e^z + e^{-z}] \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^{-1/2} \cosh z, \end{aligned} \quad (2.133)$$

o lo que es equivalente,

$$z^{1/2} I_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cosh z. \quad (2.134)$$

Al introducir este resultado en la última exponencial de la ecuación (2.131), obtenemos

$$e^{\sum_i \ln [z^{1/2} I_{-\frac{1}{2}}(z)]} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{N}{2}} e^{\sum_i \ln(\cosh z)}, \quad (2.135)$$

con

$$z = \left| \frac{2}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i} \psi(\mathbf{k}) E_{\mathbf{k}}^+(\mathbf{k}) \right|, \quad (2.136)$$

<sup>14</sup> Tomada de I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, Op. Cit.

entonces, al sustituir (2.135) y (2.136) en la ecuación (2.131) encontramos la expresión para la función de partición

$$Z\{H\} = C' e^{-\frac{1}{2}H(\mathbf{k})[E_d^+(\mathbf{k})]^{-1}H(-\mathbf{k})} \int \prod_{\mathbf{k}} d\psi(\mathbf{k}) \\ \times e^{-\sum_{\mathbf{k}} \psi(\mathbf{k})\psi(-\mathbf{k})E_d^+(\mathbf{k}) + \sum_{\mathbf{k}} H(-\mathbf{k})\psi(\mathbf{k}) + \sum_i \ln \left( \cosh \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_i} \psi(\mathbf{k}) E_d^+(\mathbf{k}) \right)}, \quad (2.137)$$

con lo cual recuperamos la función de partición del modelo de Ising  $d$ -dimensional, ecuación (2.88).

Ahora tomemos el límite  $n \rightarrow \infty$ . Para hacer esto, nuevamente podemos usar la última exponencial de la ecuación (2.131) y la expansión asintótica para la función de Bessel de orden entero<sup>15</sup>

$$I_\nu(\nu z) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \frac{e^{\nu\eta}}{(1+z^2)^{\frac{1}{2}}} \left\{ 1 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{u_\kappa(t)}{\nu^\kappa} \right\}, \quad (2.138)$$

donde  $\nu = \frac{n-2}{2} \gg 1$  es un entero, y  $t$ ,  $\eta$  y  $u$  son funciones de  $z$  dadas por

$$t = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}, \quad \eta = \sqrt{1+z^2} + \ln \frac{z}{1+\sqrt{1+z^2}}, \quad (2.139)$$

$$u_{\kappa+1}(t) = \frac{1}{2} t^2 (1-t^2) u_\kappa'(t) + \frac{1}{8} \int_0^t (1-5\tau^2) u_\kappa(\tau) d\tau, \quad u_0(t) = 1. \quad (2.140)$$

Como  $\nu \rightarrow \infty$ , el término dominante en la ecuación (2.138) es

$$I_\nu(\nu z) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \frac{e^{\nu\eta}}{(1+z^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.141)$$

y por lo tanto,

$$(\nu z)^{-\nu} I_\nu(\nu z) \sim \frac{(\nu z)^{-\nu} e^{\nu\eta}}{\sqrt{2\pi\nu} (1+z^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.142)$$

Al sustituir ahora este resultado en la exponencial, obtenemos

$$e^{\sum_i \ln [(\nu z)^{-\nu} I_\nu(\nu z)]} = (2\pi)^{-\frac{1}{2}N} e^{-\frac{1}{2} \sum_i \ln \nu} e^{\sum_i [-\nu \ln(\nu z) + \nu \eta - \frac{1}{2} \ln(1+z^2)]}, \quad (2.143)$$

donde

$$z = \frac{1}{\nu} \left| \frac{2}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_i} \psi(\mathbf{k}) E_d^+(\mathbf{k}) \right|, \quad (2.144)$$

<sup>15</sup> Tomada de M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover New York 1968.

sustituyendo (2.143) y (2.144) en la ecuación (2.131) encontramos la expresión para la función de partición del modelo esférico ( $n \rightarrow \infty$ )

$$Z\{H\} = C'(2\pi)^{\frac{N(n-1)}{2}} 2^{-N} e^{-\frac{1}{2}H(\mathbf{k})|E_d^+(\mathbf{k})|^{-1}H(-\mathbf{k})} e^{-\frac{1}{2}\sum_i \ln \nu} \int \prod_{\mathbf{k}} d\psi(\mathbf{k}) \\ \times e^{-\sum_{\mathbf{k}} \psi(\mathbf{k})\psi(-\mathbf{k})E_d^+(\mathbf{k}) + \sum_{\mathbf{k}} H(-\mathbf{k})\psi(\mathbf{k}) + \sum_i \ln[-\nu \ln(\nu z) + \nu \eta - \frac{1}{2} \ln(1+z^2)]}. \quad (2.145)$$

Ahora tomemos el límite  $z \rightarrow \infty$  ( $T \rightarrow 0$ ). Para hacer esto, nuevamente podemos usar la última exponencial de la ecuación (2.131) y la expansión asintótica para la función de Bessel de orden entero<sup>16</sup>

$$I_\nu(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left\{ 1 - \frac{\mu-1}{8z} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)}{2!(8z)^2} - \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)}{3!(8z)^3} + \dots \right\}, \quad (2.146)$$

donde  $z \gg 1$ ,  $\nu = \frac{n-2}{2}$  es un entero, y  $\mu = 4\nu^2$ . Dado que  $z \rightarrow \infty$ , el término dominante en la ecuación (2.146) es

$$I_\nu(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}, \quad (2.147)$$

de donde, tenemos

$$z^{-\nu} I_\nu(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z^{\nu+\frac{1}{2}}}}. \quad (2.148)$$

nuevamente, el resultado de sustituir la expresión anterior en la última exponencial de la ecuación (2.131) es

$$e^{\sum_i \ln [z^{-\nu} I_\nu(z)]} = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} e^{\sum_i [z^{-(\nu+\frac{1}{2})} \ln z]}, \quad (2.149)$$

con

$$z = \left| \frac{2}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i} \psi(\mathbf{k}) E_d^+(\mathbf{k}) \right|, \quad (2.150)$$

sustituyendo (2.149) y (2.150) en la ecuación (2.131) encontramos la expresión para la función de partición

$$Z\{H\} = C'(2\pi)^{\frac{N}{2}(n-1)} 2^{-N} e^{-\frac{1}{2}H(\mathbf{k})|E_d^+(\mathbf{k})|^{-1}H(-\mathbf{k})} \int \prod_{\mathbf{k}} d\psi(\mathbf{k}) \\ \times e^{-\sum_{\mathbf{k}} \psi(\mathbf{k})\psi(-\mathbf{k})E_d^+(\mathbf{k}) + \sum_{\mathbf{k}} H(-\mathbf{k})\psi(\mathbf{k}) + \sum_i [z^{-(\nu+\frac{1}{2})} \ln z]}, \quad (2.151)$$

la cual es la expresión para el caso límite  $z \rightarrow \infty$ .

<sup>16</sup> Tomada de M. Abramowitz, I. A. Stegun, Op. Cit.

Por último, tomemos el límite  $z \rightarrow 0$  ( $T \rightarrow \infty$ ). Para hacer esto, nuevamente podemos usar la última exponencial de la ecuación (2.131) y la forma límite de la función de Bessel de orden entero<sup>17</sup> para pequeños argumentos

$$I_\nu(z) \sim \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}, \quad (2.152)$$

donde  $z \ll 1$ ,  $\nu = \frac{n-2}{2} \neq -1, -2, \dots$   
de ésta, tenemos

$$z^{-\nu} I_\nu(z) \sim [2^\nu \Gamma(\nu+1)]^{-1}. \quad (2.153)$$

Al sustituir este resultado en la última exponencial de la ecuación (2.131), obtenemos

$$e^{\sum_i \ln [z^{-\nu} I_\nu(z)]} = e^{-\sum_i \ln [2^\nu \Gamma(\nu+1)]}, \quad (2.154)$$

con

$$z = \left| \frac{2}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i} \psi(\mathbf{k}) E_{\mathbf{k}}^{\dagger}(\mathbf{k}) \right|, \quad (2.155)$$

sustituyendo (2.154) y (2.155) en la ecuación (2.131) encontramos la expresión para la función de partición

$$\begin{aligned} Z(H) = & C' \pi^{\frac{N}{2}} \left[ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \right]^{-N} e^{-\frac{1}{2} H(\mathbf{k}) |E_{\mathbf{k}}^{\dagger}(\mathbf{k})|^{-1} H(-\mathbf{k})} \int \prod_{\mathbf{k}} d\psi(\mathbf{k}) \\ & \times e^{-\sum_{\mathbf{k}} \psi(\mathbf{k}) \psi(-\mathbf{k}) E_{\mathbf{k}}^{\dagger}(\mathbf{k}) + \sum_{\mathbf{k}} H(-\mathbf{k}) \psi(\mathbf{k})}, \end{aligned} \quad (2.156)$$

la cual es la expresión para el caso límite  $z \rightarrow 0$ .

Con todo esto, hemos obtenido las integrales funcionales en la representación en el espacio de momentos para algunos modelos. Como podemos notar de la ecuación (2.137), la generalización del modelo de Ising al caso de un modelo de espines con  $n$  componentes es correcta pues el caso particular de la función de partición del modelo de Heisenberg generalizado se reduce sin problemas a la integral funcional que encontramos para el modelo de Ising  $d$ -dimensional.

Examinamos otros límites de interés los cuales pueden servir como puntos de inicio para llevar al cabo métodos de aproximación. Por ejemplo, en los límites  $n \rightarrow \infty$  y  $T \rightarrow 0$  debe ser posible resolver la integral funcional por el método de descensos rápidos. Dado que estamos interesados en la región crítica, es claro que los límites  $T \rightarrow 0$  y  $T \rightarrow \infty$  no servirán como buenos puntos para iniciar una aproximación que tome en cuenta el comportamiento crítico. El límite  $n \rightarrow \infty$  puede servir como punto inicial para una expansión en potencias de  $1/n$  que puede capturar aspectos importantes del comportamiento crítico, pero en el

<sup>17</sup> Tomada de M. Abramowitz, I. A. Stegun, Op. Cit.

siguiente capítulo queremos presentar un método basado más en una expansión alrededor de la teoría gaussiana - la teoría de perturbaciones.

La última integral funcional, ecuación (2.156), que resulta al tomar el límite de temperatura infinita sí es simple, corresponde a la teoría gaussiana, lo cual es de esperarse porque sabemos que cuando  $T \rightarrow \infty$  los grados de libertad de un sistema actúan independientemente y esta es precisamente la característica de la teoría Gaussiana, describe un sistema en el que no hay interacciones.

El último resultado es la conmutación de los límites

$$\lim_{n \rightarrow 1} \lim_{z \rightarrow \infty} Z\{H\} = \lim_{z \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow 1} Z\{H\}, \quad (2.157)$$

$$\lim_{n \rightarrow 1} \lim_{z \rightarrow 0} Z\{H\} = \lim_{z \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow 1} Z\{H\}. \quad (2.158)$$

Estos se obtienen directamente de las ecuaciones (2.151), (2.156) y (2.88).

En resumen, en este capítulo describimos algunos modelos exactamente solubles y encontramos los exponentes críticos asociados a estos. Sin embargo, como pudimos darnos cuenta, en los casos generales esto no es posible y aún en la representación en términos de campos continuos tuvimos que hacer aproximaciones. Vimos que la aproximación de campo promedio predijo demasiada universalidad y que los valores de los exponentes críticos no están de acuerdo con los resultados experimentales. Vimos, también, que la teoría gaussiana predice la dependencia en la dimensionalidad en al menos un exponente y esto muestra que ya toma en cuenta las fluctuaciones, al menos las existentes en el modelo. Sin embargo, esto no es suficiente, porque la teoría no da cuenta de los exponentes  $\beta$  y  $\delta$ . También predice los mismos valores para los exponentes críticos como la teoría de campo promedio.

Esto nos motiva a continuar en este camino y considerar la aproximación del Hamiltoniano al siguiente orden en los campos, el cual puede escribirse, cuando se desprecian términos que dependen de los momentos, como  $\lambda\varphi^4/4!$  para los sistemas que presentan la simetría  $\varphi \rightarrow -\varphi$ . Esa será la tarea para el siguiente capítulo. Desarrollar sistemáticamente la teoría de perturbaciones en lo que se conoce como la teoría de Landau-Ginsburg-Wilson ó la teoría de  $\lambda\varphi^4$ .

## Capítulo 3

---

# TEORIA DE CAMPOS

En el capítulo anterior vimos que es posible desarrollar modelos matemáticos que capturan algunos aspectos importantes de los fenómenos críticos. Se consideraron dos modelos exactamente solubles —el modelo de Ising en una y dos dimensiones. Las soluciones mostraron características importantes que si existen en el mundo real: exponentes críticos diferentes a aquellos predichos por la teoría de campo promedio y la ausencia de una transición de fase en el modelo de Ising en una dimensión. Desafortunadamente las soluciones exactas no son generalizables a  $d > 2$ ,  $n > 1$ . Esto hace necesario desarrollar métodos de aproximación. Dado que la región crítica debe admitir una descripción en términos de una teoría de campos, introdujimos, a través de la transformación de Hubbard-Stratonovich, una representación en términos de campos continuos. La aproximación más simple fue despreciar las "interacciones" y considerar el modelo gaussiano. Desafortunadamente esto nos condujo a exponentes críticos iguales a los encontrados en la aproximación de campo promedio, excepto para el calor específico, el cual muestra una dependencia en la dimensionalidad  $d$  y entonces captura algo cualitativamente diferente a la teoría de campo promedio. La cuestión ahora es desarrollar un modelo basado en la teoría de campos que pueda describir de una mejor manera los fenómenos críticos. Dado que las fluctuaciones son importantes en la región crítica y que no existen en las funciones de correlación de la teoría gaussiana, es necesario considerar una teoría con interacciones. Es un hecho desafortunado que generalmente las teorías de campos con interacciones no sean exactamente solubles y por lo tanto sea necesario utilizar algún método de aproximación. Uno de los más comunes es la teoría de perturbaciones.

Así, el objeto de este capítulo es desarrollar de manera sistemática los conceptos y técnicas de la teoría de campos, como son las funciones de correlación, funcionales generadoras, transformaciones de Legendre, expansiones en teoría de perturbaciones y en lasos. Para ello utilizaremos la teoría de  $\lambda\phi^4$  (también conocida como teoría de Landau-Ginsburg-Wilson) por dos razones; la primera es su "simplicidad" pedagógica y la segunda, porque es la primera aproximación a una teoría con interacciones que describe ferromagnetos cuyo parámetro de orden tiene la simetría  $\phi \rightarrow -\phi$ . Como veremos, esta teoría contiene la

interacción más relevante en el infrarojo, lo cual es una característica fundamental en los fenómenos críticos.

En este capítulo consideraremos la teoría de campos y la teoría de perturbaciones en un contexto general y abstracto. Regresaremos a los fenómenos críticos explícitamente en el siguiente capítulo.

Comenzaremos definiendo las cantidades de interés que son las funciones de correlación. Primero, las desconectadas que contienen términos asociados a los diagramas de las fluctuaciones del "vacío" y los diagramas conectados. Calcularemos estas funciones sólo a primer orden. Luego, estudiaremos la funcional generadora de las funciones conectadas y calcularemos las funciones de dos y cuatro puntos a tercer orden. Por último, utilizando una transformación de Legendre, estudiaremos la acción efectiva para determinar las funciones de vértice. Todos estos cálculos se llevarán a cabo utilizando las técnicas de la teoría de perturbaciones.

### 3.1 La Función de Partición

Comencemos con la teoría de un campo escalar  $\varphi(x)$  en un espacio-tiempo  $d$ -dimensional euclidiano descrita por el Hamiltoniano<sup>18</sup>

$$H[\varphi] = \int d^d x \mathcal{H}(\varphi, \nabla\varphi), \quad (3.1)$$

donde la densidad Hamiltoniana  $\mathcal{H}$  está dada por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + V(\varphi), \quad (3.2)$$

con  $V(\varphi) = \frac{\lambda}{4!}\varphi^4$  en la teoría de  $\lambda\varphi^4$ .

La función de partición está definida por la integral funcional

$$Z[J] = \int [d\varphi] e^{-H[\varphi] + \int d^d v J(v)\varphi(v)}, \quad (3.3)$$

donde  $J$  representa una fuente externa "formal"; formal en el sentido de que diferenciación de  $Z$  con respecto a  $J$  genera las funciones de Green desconectadas. Esto es

$$G^{(N)}(x_1, x_2, \dots, x_N) = \left. \frac{\delta}{\delta J_1} \frac{\delta}{\delta J_2} \dots \frac{\delta}{\delta J_N} Z[J] \right|_{J=0}, \quad (3.4)$$

<sup>18</sup> A las teorías de campos escritas en términos de funciones de partición que dependen de la función de Hamilton se las denomina *teorías estadísticas de campos* por su analogía con la mecánica estadística, y a las teorías de campos que se escriben en términos de la acción se las denomina *teorías cuánticas de campos*, también por su analogía con el formalismo de Feynman de las integrales de caminos de la mecánica cuántica.

ó bien, pueden ser escritas como los coeficientes de la expresión funcional

$$Z[J] = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \int d^d x_1 \cdots d^d x_N J_1 \cdots J_N G^{(N)}(x_1, \dots, x_N), \quad (3.5)$$

donde hemos usado la notación  $J_i = J(x_i)$ .

El primer paso es evaluar, hasta donde sea posible, la función de partición definida por las ecuaciones (3.1) - (3.3). Para ello, podemos notar que

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} e^{\int d^d y J(y)\varphi(y)} = \varphi(x) e^{\int d^d y J(y)\varphi(y)}, \quad (3.6)$$

y por lo tanto, para cualquier polinomio  $V(\varphi)$ , se cumple la relación

$$V \left[ \frac{\delta}{\delta J(x)} \right] = V[\varphi(x)]. \quad (3.7)$$

Debido a esta identidad, podemos escribir la función de partición (3.3) como

$$Z[J] = e^{-\int d^d x V \left[ \frac{\delta}{\delta J(x)} \right]} \int [d\varphi] e^{-H_0[\varphi] + \int d^d y J(y)\varphi(y)}, \quad (3.8)$$

donde  $H_0$  es el Hamiltoniano de la teoría gaussiana, i.e.

$$H_0 = \int d^d x \left[ \frac{1}{2} (\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right]. \quad (3.9)$$

Podemos llevar a cabo una integración utilizando el teorema de la divergencia. De esta forma, si el campo  $\varphi$  y sus derivadas se anulan en la frontera, tenemos que

$$H_0 = \int d^d x \left[ -\frac{1}{2} \varphi \nabla^2 \varphi + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right]. \quad (3.10)$$

Del integrando de esta ecuación vemos que es conveniente definir el operador

$$\hat{A} = -\nabla^2 + m^2, \quad (3.11)$$

así, al completar cuadrados, podemos escribir la función hamiltoniana en términos del operador  $\hat{A}$  como

$$H_0 = \int d^d x J(y)\varphi(y) = \int d^d x \left[ \frac{1}{2} (\hat{A}^{1/2} \varphi - J \hat{A}^{-1/2})^2 - \frac{J^2}{2} \hat{A}^{-1} \right], \quad (3.12)$$

al sustituir este resultado en la ecuación (3.8) y evaluar la integral gaussiana obtenemos

$$Z[J] = \left[ \det (2\pi \hat{A}^{-1}) \right]^{1/2} e^{-\int d^d x V \left[ \frac{\delta}{\delta J(x)} \right]} e^{\int d^d y J(y) G(y-x) J(x)}, \quad (3.13)$$

donde  $G_0(y-z)$  es el inverso del operador  $\hat{A}$ , i.e.  $G_0(y-z)$  es la función de Green asociada al operador  $\hat{A}$  y por lo tanto satisface la ecuación diferencial parcial

$$(-\nabla^2 + m^2)G_0(y-z) = \delta(y-z). \quad (3.14)$$

Al resolver esta ecuación por medio de una descomposición en las componentes de Fourier de  $G_0$  de la forma<sup>19</sup>

$$G_0(y-z) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k e^{-ik(y-z)} G_0(k), \quad (3.15)$$

obtenemos la expresión para  $G_0$

$$G_0(y-z) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k \frac{e^{-ik(y-z)}}{k^2 + m^2}. \quad (3.16)$$

Si tuvieramos la posibilidad de evaluar totalmente el operador definido por la exponencial de la ecuación (3.13), las ecuaciones (3.13) y (3.16) nos darían la solución exacta para la función de partición de la teoría de  $\lambda\varphi^4$ . Sin embargo, como se puede notar, el operador tiene un número infinito de derivadas y por lo tanto sólo podemos evaluar la funcional utilizando aproximaciones. Por supuesto, la aproximación más popular es la de teoría de perturbaciones y como tenemos un parámetro, podemos intentar obtener una serie de perturbaciones para la función de partición en potencias de  $\lambda$ .

### 3.1.1 Diagramas de Feynman de las Funciones Desconectadas

Nuestra intención ahora es calcular las funciones de correlación desconectadas de la teoría de  $\lambda\varphi^4$ , las cuales obtendremos como series de perturbaciones en el parámetro  $\lambda$ . De hecho, sólo calcularemos las funciones de dos y cuatro puntos a primer orden, pues como veremos, la función de partición genera diagramas desconectados que no tienen mayor relevancia en la teoría. Pretendemos, mejor, dar una visión más amplia de las distintas funcionales generadoras y del tipo de diagramas que generan. Por ello, dedicamos un cálculo más completo de las funciones de correlación conectadas. Para este cálculo, la manera como procederemos será evaluar la función de partición (3.13) a primer orden en  $\lambda$  y luego utilizar la definición (3.4) para obtener las funciones de correlación a ese orden.

Empecemos escribiendo la función  $V(\varphi) = \lambda\varphi^4/4!$  y con ello la función de partición (3.13) a primer orden

$$Z[J] = A_0 \left[ 1 - \int d^d x \frac{\lambda}{4!} \left( \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 \right] e^{\int d^d y d^d z J(y) G_0(y-z) J(z)}, \quad (3.17)$$

<sup>19</sup> Si utilizamos la transformación de Fourier con el factor simétrico  $(2\pi)^{-d/2}$ , obtenemos

$$G_0(y-z) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int d^d k \frac{e^{-ik(y-z)}}{k^2 + m^2}.$$

donde hemos definido la constante  $A_0 = [\det(2\pi\hat{A}^{-1})]^{1/2}$ .

Para simplificar la notación absorbamos  $A_0$  en una redefinición de  $Z[J]$ , lo que equivale a escribir  $A_0 = 1$  en (3.17), y definamos

$$B = \frac{1}{2} \int d^d y d^d z J(y) G_0(y-z) J(z), \quad (3.18)$$

Con esto, al calcular las derivadas funcionales de la exponencial en la función de partición, encontramos

$$Z[J] = e^B \left[ 1 - \frac{\lambda}{4!} \int d^d x (3B_{xx}^2 + 6B_x^2 B_{xx} + B_x^4) \right], \quad (3.19)$$

donde, ahora, hemos introducido la notación

$$B_x \equiv \frac{\delta B}{\delta J(x)}, \quad (3.20)$$

$$B_{xx} \equiv \frac{\delta^2 B}{\delta J^2(x)}. \quad (3.21)$$

Con esta forma para la funcional generadora, ecuación (3.19), ya podemos calcular las funciones de correlación desconectadas de dos y cuatro puntos a primer orden en  $\lambda$ . Sólo tenemos que usar la definición de la ecuación (3.4), i.e. tenemos que calcular derivadas funcionales de  $Z$  con respecto a la fuente  $J$  a los puntos  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  y después evaluar en  $J = 0$ . Notando, de las ecuaciones (3.18), (3.20), (3.21) y del hecho que  $G_0(y-z) = G_0(z-y)$ , que

$$B_x = \int d^d z G_0(x-z) J(z), \quad (3.22)$$

$$B_{xx} = G_0(x-x). \quad (3.23)$$

obtenemos la expresión para  $G^{(2)}$

$$\begin{aligned} G^{(2)}(x_1 x_2) &= G_0(x_1 - x_2) - \frac{\lambda}{2} \int d^d x G_0(x_1 - x) G_0(x - x) G_0(x - x_2) \\ &\quad - \frac{\lambda}{8} G_0(x_1 - x_2) \int d^d x G_0^2(x - x) + O(\lambda^2). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Esta ecuación tiene la siguiente representación en términos de diagramas de Feynman

$$G^{(2)}(x_1 x_2) = \text{---} - \frac{\lambda}{2} \text{---} \bigcirc \text{---} - \frac{\lambda}{8} \text{---} \bigcirc \bigcirc \text{---} + O(\lambda^2). \quad (3.25)$$

De igual manera, al calcular las derivadas con respecto a  $J$  a los puntos  $x_3$  y  $x_4$ , y evaluar después en  $J = 0$ , obtenemos la expresión para la función de Green de cuatro puntos

$$\begin{aligned}
 G^{(4)}(x_1 x_2 x_3 x_4) = & G_0(x_1 - x_2)G_0(x_3 - x_4) \\
 & + G_0(x_1 - x_3)G_0(x_2 - x_4) + G_0(x_1 - x_4)G_0(x_2 - x_3) \\
 & - \frac{\lambda}{2} G_0(x_1 - x_2) \int d^d x G_0(x_3 - x)G_0(x - x)G_0(x - x_4) \\
 & - \frac{\lambda}{2} G_0(x_2 - x_3) \int d^d x G_0(x_4 - x)G_0(x - x)G_0(x - x_1) \\
 & - \frac{\lambda}{2} G_0(x_3 - x_4) \int d^d x G_0(x_1 - x)G_0(x - x)G_0(x - x_2) \\
 & - \frac{\lambda}{2} G_0(x_4 - x_1) \int d^d x G_0(x_2 - x)G_0(x - x)G_0(x - x_3) \\
 & - \frac{\lambda}{2} G_0(x_1 - x_3) \int d^d x G_0(x_2 - x)G_0(x - x)G_0(x - x_4) \\
 & - \frac{\lambda}{2} G_0(x_2 - x_4) \int d^d x G_0(x_1 - x)G_0(x - x)G_0(x - x_3) \\
 & - \frac{\lambda}{8} G_0(x_1 - x_2)G_0(x_3 - x_4) \int d^d x G_0^2(x - x) \\
 & - \frac{\lambda}{8} G_0(x_1 - x_3)G_0(x_2 - x_4) \int d^d x G_0^2(x - x) \\
 & - \frac{\lambda}{8} G_0(x_1 - x_4)G_0(x_2 - x_3) \int d^d x G_0^2(x - x) \\
 & - \lambda \int d^d x G_0(x_1 - x)G_0(x_2 - x)G_0(x_3 - x)G_0(x_4 - x) \\
 & + O(\lambda^2). \tag{3.26}
 \end{aligned}$$

De manera análoga, a esta ecuación se le representa en términos de diagramas de Feynman en la forma

$$\begin{aligned}
 G^{(4)}(x_1 x_2 x_3 x_4) = & \left( \text{---} + 2 \text{ permas} \right) - \frac{\lambda}{2} \left( \overline{\text{O}} + 5 \text{ permas} \right) \\
 & - \frac{\lambda}{8} \left( \overline{\text{OO}} + 2 \text{ permas} \right) - \lambda \chi + O(\lambda^2). \tag{3.27}
 \end{aligned}$$

donde hemos usado la abreviación "permas" para permutaciones.

Vamos a dar ahora una breve explicación acerca de estas funciones de correlación y de los correspondientes diagramas de Feynman. Para la función de dos puntos, al primer diagrama, representado por la línea recta se le conoce como *propagador libre* y corresponde a la solución exacta de la función de Green en la teoría sin interacciones ( $\lambda = 0$ ). Los siguientes términos, representados por la línea recta unida al ciclo ó lazo y la línea recta

separada de los dos lazos unidos, representan las correcciones a primer orden de la teoría con interacciones. Al tercer diagrama, y a todos los que constan de dos líneas separadas, se les conoce como *gráficas del vacío*; pero a los diagramas como el segundo se les conoce como *diagramas conectados*. Como una convención, estaremos entendiendo que los puntos extremos de cada diagrama corresponden a los puntos  $x_1$  y  $x_2$  en los que evaluamos la fuente  $J$  después de calcular las derivadas funcionales de la función de partición. A estos puntos se les conoce como puntos externos. Por el contrario, a puntos como el de la intersección del lazo con la línea recta del segundo diagrama en la expansión (3.25) se les conoce como puntos internos y en la ecuación (3.24) están representados por el punto  $x$ . De igual manera, los tres primeros términos de la ecuación (3.27) representados por gráficas del vacío, tienen por puntos externos a  $x_1, x_2, x_3$  y  $x_4$ , los cuales convendremos poner a partir del extremo superior izquierdo de la gráfica en el sentido en que giran las manecillas del reloj. Nuevamente, el punto interno  $x$  está representado por la intersección del lazo con el propagador libre en la gráfica del segundo término y por la intersección de los dos lazos en el diagrama del tercer término. El último diagrama, el cual es conectado, tiene las mismas características.

### 3.2 La Funcional Generadora de las Funciones Conectadas

En la sección anterior vimos que la función de partición genera las funciones de correlación (funciones de Green) desconectadas. En realidad esta es la manera de decirlo, pero la función de partición genera todas las funciones de Green, tanto las conectadas como las desconectadas. En esta sección veremos que hay una funcional directamente relacionada con la función de partición que genera sólo las funciones conectadas. De hecho, la funcional generadora de las funciones conectadas  $W[J]$  es el equivalente de la energía libre en la mecánica estadística,<sup>20</sup> es decir,  $W[J]$  está definida como

$$W[J] = -\ln Z[J], \quad (3.28)$$

nuevamente, el campo  $J$  representa una fuente externa formal.

A partir de las ecuaciones (3.28) y (3.13) podemos generar una serie de perturbaciones para la funcional  $W[J]$  y con ello podemos calcular de manera perturbativa las funciones de Green conectadas, las cuales pueden definirse mediante la expresión

$$G_c^{(N)}(x_1, x_2, \dots, x_N) = -\frac{\delta}{\delta J_1} \frac{\delta}{\delta J_2} \dots \frac{\delta}{\delta J_N} W[J] \Big|_{J=0}, \quad (3.29)$$

donde, nuevamente, utilizamos la notación  $J_i = J(x_i)$ .

Siguiendo, de manera análoga, el álgebra que llevamos a cabo anteriormente, reescribimos la funcional generadora  $W$  utilizando la expresión general para la función de partición

<sup>20</sup> La funcional  $W[J]$  puede pensarse como la energía libre de Gibbs normalizada por el factor  $k_B T$ .

de la ecuación (3.13). Nuevamente, absorbemos el factor constante en una redefinición de la función de partición<sup>21</sup> y la escribimos de una manera más simplificada usando la definición (3.18) y la del operador

$$\hat{V} = - \int d^d x V \left[ \frac{\delta}{\delta J(x)} \right]. \quad (3.30)$$

Con esto tenemos que es posible escribir la funcional generadora en la forma

$$W[J] = - \ln \left( e^{\hat{V}} e^B \right). \quad (3.31)$$

Ahora, haciendo algunos artificios algebraicos, vemos que es posible reescribir la anterior ecuación en la forma

$$W[J] = -B - \ln(1 + u), \quad (3.32)$$

donde

$$u = e^{-B} \left( e^{\hat{V}} - 1 \right) e^B. \quad (3.33)$$

Con estas dos ecuaciones podemos generar un desarrollo en teoría de perturbaciones de la funcional generadora; simplemente nos damos cuenta de que en la teoría que estamos estudiando  $u$  depende explícitamente de  $\lambda$  a través del operador  $\hat{V}$ , pues  $V = \lambda \phi^4/4!$ . De esta manera el factor entre paréntesis de la ecuación (3.33) controla el orden de la expansión. En esta sección estamos interesados en una expansión a orden cúbico, por ello desarrollamos la exponencial del factor entre paréntesis de  $u$  hasta tercer orden y luego introducimos el resultado en (3.32), donde ahora desarrollamos el logaritmo en su serie de potencias de  $u$  y conservamos sólo los términos hasta orden cúbico en  $\lambda$ . Así, a tercer orden podemos escribir la ecuación (3.33) en la forma

$$u = e^{-B} \left( \hat{V} + \frac{\hat{V}^2}{2!} + \frac{\hat{V}^3}{3!} + O(\lambda^4) \right) e^B, \quad (3.34)$$

y utilizando la serie de Taylor del  $\ln(1 + u)$

$$\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + O(u^4), \quad (3.35)$$

obtenemos

$$W[J] = -B - u_1 - \left( u_2 - \frac{u_1^2}{2} \right) - \left( u_3 - u_1 u_2 + \frac{u_1^3}{3} \right) + O(\lambda^4), \quad (3.36)$$

<sup>21</sup> En realidad este factor constante no juega un papel importante pues las funciones de correlación conectadas no dependen de él.

donde

$$u_1 \equiv e^{-B} \hat{V} e^B, \quad (3.37)$$

$$u_2 \equiv e^{-B} \frac{\hat{V}^2}{2!} e^B, \quad (3.38)$$

$$u_3 \equiv e^{-B} \frac{\hat{V}^3}{3!} e^B, \quad (3.39)$$

ó bien, utilizando la definición (3.30) se pueden escribir explícitamente en la forma

$$u_1 = -e^{-B} \frac{\lambda}{4!} \int d^d x \left( \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 e^B, \quad (3.40)$$

$$u_2 = \frac{e^{-B}}{2!} \left( \frac{\lambda}{4!} \right)^2 \int d^d x d^d x' \left( \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 \left( \frac{\delta}{\delta J(x')} \right)^4 e^B, \quad (3.41)$$

$$u_3 = -\frac{e^{-B}}{3!} \left( \frac{\lambda}{4!} \right)^3 \int d^d x d^d x' d^d x'' \left( \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 \left( \frac{\delta}{\delta J(x')} \right)^4 \left( \frac{\delta}{\delta J(x'')} \right)^4 e^B, \quad (3.42)$$

al calcular estas derivadas y sustituir en (3.36) obtenemos la serie de perturbaciones para  $W[J]$

$$\begin{aligned} W[J] = & -B + \frac{\lambda}{4!} \int d^d x (3B_{xx}^2 + 6B_x^2 B_{xx} + B_x^4) - \frac{\lambda^2}{2!(4!)^2} \int d^d x d^d x' (24B_{xx'}^4 \\ & + 96B_x B_{xx'}^3 B_{x'} + 72B_{xx} B_{xx'}^2 B_{x'x'} + 144B_{xx} B_{xx'}^2 B_x^2 + 72B_x^2 B_{xx'}^2 B_x^2 \\ & + 144B_x B_{xx} B_{xx'} B_{x'} B_{x'x'} + 96B_x B_{xx} B_{xx'} B_x^3 + 16B_x^3 B_{xx'} B_x^3) + O(\lambda^3), \end{aligned} \quad (3.43)$$

donde hemos omitido el término correspondiente a orden cúbico debido a que es demasiado extenso. A partir de esta forma para la funcional generadora podemos generar las funciones conectadas hasta orden cúbico usando la aproximación de teoría de perturbaciones. Eso es de hecho lo que vamos a llevar a cabo en la siguiente sección.

### 3.2.1 Diagramas de Feynman de las Funciones Conectadas

Armados con la expresión para la funcional generadora, ecuación (3.43), sólo resta utilizar la definición (3.29) para obtener las funciones conectadas. La primera que calculamos es la función de Green de dos puntos, i.e. sólo calculamos dos derivadas funcionales de (3.43) con respecto a  $J$  a los puntos  $x_1$  y  $x_2$  respectivamente. De esta forma obtenemos su representación en términos de diagramas de Feynman

$$\begin{aligned}
 G_c^{(2)}(x_1 x_2) = & \frac{\lambda}{2} \text{---} \bigcirc + \frac{\lambda^2}{6} \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc + \frac{\lambda^2}{4} \text{---} \bigcirc \bigcirc + \frac{\lambda^2}{4} \text{---} \bigcirc \bigcirc \\
 & - \frac{\lambda^3}{12} \text{---} \bigcirc \bigcirc - \frac{\lambda^3}{4} \text{---} \bigcirc \bigcirc \text{---} \bigcirc - \frac{\lambda^3}{4} \text{---} \bigcirc \bigcirc \\
 & - \frac{\lambda^3}{8} \text{---} \bigcirc \bigcirc \bigcirc - \frac{\lambda^3}{8} \text{---} \bigcirc \bigcirc \bigcirc - \frac{\lambda^3}{8} \text{---} \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc - \frac{\lambda^3}{8} \text{---} \bigcirc \bigcirc \bigcirc + O(\lambda^4). \quad (3.44)
 \end{aligned}$$

De igual manera, calculando cuatro derivadas de (3.43) con respecto a  $J$  a los puntos  $x_1, x_2, x_3$  y  $x_4$ , obtenemos la expresión para la función de Green conectada de cuatro puntos

$$\begin{aligned}
 G_c^{(4)}(x_1 x_2 x_3 x_4) = & -\lambda \text{---} \bigvee + \frac{\lambda^2}{2} (\text{---} \bigcirc \bigcirc \text{---} + 2 \text{ perms}) + \frac{\lambda^2}{2} (\text{---} \bigvee^6 + 3 \text{ perms}) \\
 & - \frac{\lambda^3}{6} (\text{---} \bigvee + 3 \text{ perms}) - \frac{\lambda^3}{4} (\text{---} \bigcirc \bigcirc \bigcirc \text{---} + 2 \text{ perms}) - \frac{\lambda^3}{2} (\text{---} \bigvee + 5 \text{ perms}) \\
 & - \frac{\lambda^3}{4} (\text{---} \bigcirc \bigcirc \bigcirc + 5 \text{ perms}) - \frac{\lambda^3}{4} (\text{---} \bigvee^6 + 3 \text{ perms}) - \frac{\lambda^3}{2} (\text{---} \bigcirc \bigcirc \text{---} + 3 \text{ perms}) \\
 & - \frac{\lambda^3}{4} (\text{---} \bigvee^6 + 5 \text{ perms}) - \frac{\lambda^3}{4} (\text{---} \bigvee^6 + 3 \text{ perms}) + O(\lambda^4). \quad (3.45)
 \end{aligned}$$

Ahora vamos a explicar la manera de reconstruir las expresiones algebraicas correspondientes a cada uno de estos diagramas de Feynman y la manera de obtener los factores de simetría que aparecen en estos. Comencemos con la función de dos puntos, recordando de la sección anterior que el primer diagrama de la ecuación (3.44), representado por la línea recta, corresponde al propagador libre y que tiene como expresión algebraica asociada a la solución de la teoría sin interacciones (teoría gaussiana)  $G_0(x_1 - x_2)$ . Este propagador libre puede considerarse como la unidad fundamental para la construcción de las funciones de Green porque todos los demás diagramas pueden obtenerse como productos de estos propagadores evaluados ya sea en puntos internos o externos, y tomando en cuenta que por cada propagador evaluado en un punto interno hay una integral sobre todos los posibles valores para ese punto interno. Por ejemplo, para escribir la expresión algebraica correspondiente al diagrama de primer orden de la ecuación (3.44) tomamos en cuenta que tenemos dos puntos externos y uno interno. Por convención, en este capítulo, estamos denotando como  $x, x'$  y  $x''$  a los puntos internos y como  $x_1, x_2, x_3$  y  $x_4$  a los puntos externos. Otra cuestión importante en esta reconstrucción de las expresiones algebraicas, es que cada línea que une cualesquiera dos puntos (para diagramas conectados, uno interno y otro externo) se representa por un propagador libre con la condición de la integración sobre todos los posibles valores para el punto interno. Con estas reglas, vemos que el diagrama a primer orden de la ecuación (3.44) tiene por representación algebraica en el espacio de configuraciones

$$\text{---} \bigcirc = \int d^d x G_0(x_1 - x) G_0(x - x) G_0(x - x_2), \quad (3.46)$$

análogamente se puede ver que se tienen las siguientes expresiones

$$\ominus = \int d^d x d^d x' G_0(x_1 - x) G_0^2(x - x') G_0(x' - x_2), \quad (3.47)$$

$$\underline{\bigcirc} = \int d^d x d^d x' G_0(x_1 - x) G_0(x - x) G_0(x - x') G_0(x' - x') G_0(x' - x_2), \quad (3.48)$$

$$\bigcirc = \int d^d x G_0(x_1 - x) G_0(x - x') G_0(x' - x') G_0(x' - x) G_0(x - x_2), \quad (3.49)$$

y de la misma manera es posible encontrar expresiones para los diagramas a tercer orden de la expresión (3.44). Para saber cuál es el factor de simetría correspondiente a cada diagrama simplemente seguimos las reglas para contar las posibles combinaciones. De esta manera determinamos que el factor de simetría para el diagrama a primer orden de la función de dos puntos es 12, pero como este diagrama tiene un factor de  $\lambda/4!$ , entonces el factor total que aparece en la expresión para la función de Green es el correcto  $\lambda/2$ . De manera completamente análoga se pueden calcular los factores de simetría para el resto de los diagramas y se pueden verificar con los expuestos en este trabajo.

Para la función de correlación conectada de cuatro puntos la situación es completamente análoga. Cada uno de los diagramas tiene cuatro puntos externos  $x_1, x_2, x_3$  y  $x_4$ , y dependiendo del orden al que cada diagrama pertenece, este puede tener uno, dos o tres puntos internos,  $x, x'$  y  $x''$ . Por ejemplo, el diagrama a primer orden y los dos diagramas a segundo orden tienen la representación algebraica

$$\chi = \int d^d x G_0(x_1 - x) G_0(x - x_2) G_0(x_3 - x) G_0(x - x_4), \quad (3.50)$$

$$\times \circ = \int d^d x d^d x' G_0(x_1 - x) G_0(x - x_2) G_0^2(x - x') G_0(x' - x_3) G_0(x_4 - x'), \quad (3.51)$$

$$\chi^{\circ} = \int d^d x d^d x' G_0(x_1 - x) G_0(x - x') G_0(x' - x') G_0(x' - x_2) G_0(x - x_3) G_0(x_4 - x). \quad (3.52)$$

También en este caso podemos calcular los factores de simetría correspondientes, por ejemplo a estos tres diagramas, utilizando la manera usual de contar combinaciones. Así, obtenemos 24 para el factor de simetría del diagrama a primer orden de la función conectada de cuatro puntos, y como este diagrama tiene un factor de  $\lambda/4!$ , entonces se tiene el factor total de  $\lambda$ . Para los diagramas de las ecuaciones (3.51) y (3.52), el factor de simetría es 576, y como los diagramas están multiplicados por  $-\lambda/2!(4!)^2$ , entonces resultan con un factor total de  $-\lambda/2$ . De manera similar pueden verificarse los factores de los diagramas restantes.

### 3.2.2 Representación en el Espacio de Momentos

En esta sección vamos a ejemplificar la manera de hacer la transformación al espacio de momentos de las cantidades físicas de interés: las funciones de Green conectadas. Decimos ejemplificar porque vamos a presentar el cálculo detallado de la manera de cambiar de representación al espacio de momentos sólo para el caso de la función conectada de dos puntos a primer orden. Con este cálculo bastará para inferir las expresiones correspondientes al resto de los diagramas sin tener que llevar a cabo cálculos similares.

Consideremos la función de Green conectada de dos puntos a orden  $\lambda$

$$G_c^{(2)} = \dots - \frac{\lambda}{2} \Omega, \quad (3.53)$$

cuya representación en el espacio de configuraciones es

$$G_c^{(2)}(x_1 x_2) = G_0(x_1 x_2) - \frac{\lambda}{2} \int d^d x G_0(x_1 - x) G_0(x - x_2) G_0(x - x_1). \quad (3.54)$$

Inferiendo de las ecuaciones (3.15) y (3.16), que la representación del propagador libre en el espacio de momentos es

$$G_0(k_i) = \frac{1}{k_i^2 + m^2}, \quad (3.55)$$

podemos escribir (3.54) en la forma

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ik(x_1 - x_2)} G_c^{(2)}(k) &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{ik(x_1 - x_2)}}{k^2 + m^2} - \frac{\lambda}{2} \int d^d x \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{ik(x_1 - x)}}{k^2 + m^2} \\ &\times \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{l^2 + m^2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{e^{ip(x - x_2)}}{p^2 + m^2}, \end{aligned} \quad (3.56)$$

agrupando las exponenciales de la última integral, usando el hecho de que

$$\int \frac{d^d x}{(2\pi)^d} e^{-i(k-p)x} = \delta(k-p), \quad (3.57)$$

y llevando a cabo la integración sobre  $p$ , obtenemos

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ik(x_1 - x_2)} G_c^{(2)}(k) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{ik(x_1 - x_2)}}{k^2 + m^2} - \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{ik(x_1 - x_2)}}{k^2 + m^2} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{l^2 + m^2}, \quad (3.58)$$

de la cual se sigue inmediatamente

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ik(x_1 - x_2)} \left[ G_c^{(2)}(k) - \frac{1}{k^2 + m^2} + \frac{\lambda}{2} \frac{1}{(k^2 + m^2)^2} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{l^2 + m^2} \right] = 0, \quad (3.59)$$

y por lo tanto

$$G_c^{(2)}(k) = \frac{1}{k^2 + m^2} - \frac{\lambda}{2} \frac{1}{(k^2 + m^2)^2} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{l^2 + m^2}. \quad (3.60)$$

esta es la expresión para la función de Green de dos puntos a orden  $\lambda$  en el espacio de momentos. De ella podemos concluir que cada propagador en un diagrama está representado por un factor  $(k^2 + m^2)^{-1}$  y que por cada lazo apareciendo en un diagrama se tiene una integral como la última de la ecuación (3.60). Estas reglas son suficiente para reconstruir las expresiones para los diagramas de las funciones conectadas de la teoría de  $\lambda\varphi^4$  en el espacio de momentos.

### 3.3 Transformación de Legendre. La Acción Efectiva

Hasta ahora hemos considerado dos funcionales generadoras de funciones de correlación, la "función de partición"  $Z[J]$ , la cual da lugar a las funciones de Green desconectadas, y la "funcional generadora"  $W[J]$ , cuyas derivadas funcionales respecto a la fuente  $J$  a los puntos  $x_1, \dots, x_N$  en  $J = 0$  definen las funciones conectadas de  $N$  puntos. Existe, además, otra funcional generadora de funciones conocidas como *vértices propios* ó *funciones de vértice irreducibles de una partícula* (1PI). A esta funcional generadora se le conoce como la *acción efectiva*, se la denota por  $\Gamma[\phi]$  y está expresada como la transformada de Legendre de  $W[J]$  respecto al valor promedio de  $\varphi$ . Esto es

$$\Gamma[\phi] = W[J] + \int d^d y J(y)\phi(y). \quad (3.61)$$

Esta funcional puede entenderse por medio de su análogo en mecánica estadística, la energía libre escrita en términos de la magnetización  $\phi = \langle \varphi \rangle_J$ . Como se espera de cualquier potencial termodinámico, las derivadas respecto a sus argumentos generan cantidades físicas, en este caso, las funciones irreducibles de una partícula. El calificativo "irreducibles" viene del hecho que éstas contienen sólo las funciones de Green conectadas que al hacerles un corte a través de una sola línea interna no se descomponen en dos diagramas (correspondientes a la misma teoría, obviamente). Por ejemplo, el diagrama  $\ominus \circlearrowright$  no es 1PI debido a que al hacerle un corte a través de la línea intermedia obtenemos los dos diagramas  $\ominus$  y  $\circlearrowright$ . Por el contrario, el diagrama  $\times \circlearrowright$  sí lo es, por que a pesar de que se le haga un corte a través de cualquiera de las dos líneas intermedias no es posible separarlo en dos diagramas. Además de estas características, los vértices contienen los diagramas irreducibles pero sin líneas externas. En el ejemplo anterior, el diagrama correspondiente es  $\circ$ .

Al igual que sucedió al considerar la funcional  $W[J]$ , el número de diagramas se redujo considerablemente. Al considerar  $\Gamma[\phi]$  nuevamente obtenemos una reducción en el número de gráficas (orden por orden en teoría de perturbaciones). Una cuestión que podría preocuparnos es saber si el conjunto de vértices es suficiente para reconstruir la teoría que

estamos estudiando. Como veremos más adelante, no sólo es posible reconstruir la teoría en términos de estas funciones, sino que además la formulación en términos de los vértices es elegante y provee las herramientas naturales para el estudio de simetrías rotas en teorías de campos interactuantes. Los vértices son además los candidatos naturales para el estudio de las cuestiones de renormalización porque no contienen líneas internas que no llevan una integral y así son irrelevantes para las divergencias introducidas por las fluctuaciones.

Comencemos escribiendo algunas de las principales propiedades de la acción efectiva. Primero, tomando en cuenta la definición de la integral funcional  $W[J] = -\ln Z[J]$ , tenemos

$$-\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \langle \varphi(x) \rangle \equiv \phi(x). \quad (3.62)$$

Por otra parte, al derivar la ecuación (3.61) con respecto a  $\phi(x)$  obtenemos

$$\frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x)} = \int d^d y \frac{\delta W[J]}{\delta J(y)} \frac{\delta J(y)}{\delta \phi(x)} + \int d^d y \frac{\delta J(y)}{\delta \phi(x)} \phi(y) + J(x), \quad (3.63)$$

que con el uso de la ecuación (3.62) se reduce a

$$\frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x)} = J(x). \quad (3.64)$$

Físicamente, si el sistema se encuentra en un estado de simetría espontáneamente rota, i.e. en un estado magnetizado, entonces

$$\phi(x) = -\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \Big|_{J \rightarrow 0} \rightarrow \phi_0. \quad (3.65)$$

En términos de la acción efectiva, la condición para simetría rota es

$$\left. \frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x)} \right|_{\phi(x)=\phi_0} = 0, \quad (3.66)$$

es decir,  $\Gamma$  tiene un extremo en  $\phi(x) = \phi_0$ , a veces llamado el *campo clásico*. Otra propiedad importante de la función vértice de dos puntos es

$$-\int d^d z \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x) \delta J(z)} \frac{\delta^2 \Gamma[\phi]}{\delta \phi(y) \delta \phi(z)} = \delta(x-y), \quad (3.67)$$

la cual puede obtenerse al derivar la ecuación (3.62) respecto a  $\phi(y)$  y sustituir  $\delta J(x)/\delta \phi(x)$  de (3.64). El resultado importante de esta ecuación es que cuando  $J \rightarrow 0$

$$-\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x) \delta J(z)} \rightarrow G_c^{(2)}(x-z), \quad (3.68)$$

y debido a (3.67) podemos concluir que en ese caso

$$\frac{\delta^2 \Gamma[\phi]}{\delta \phi(y) \delta \phi(z)} \rightarrow [G_c^{(2)}(y-z)]^{-1}, \quad (3.69)$$

Las funciones de vértice de  $N$  puntos  $\Gamma^{(N)}$ , de hecho, están definidas en términos de derivadas funcionales con respecto a  $\phi$ , evaluadas en  $J=0$ , esto es

$$\Gamma^{(N)}(x_1 \dots x_N) = \frac{\delta^N \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x_1) \dots \delta \phi(x_N)} \Big|_{J=0}, \quad (3.70)$$

de ésta última, y de la ecuación (3.69) podemos concluir inmediatamente que

$$\Gamma^{(2)}(x_1 x_2) = [G_c^{(2)}(x_1 x_2)]^{-1}. \quad (3.71)$$

Esta ecuación nos permite demostrar la afirmación de que las funciones vértice contienen sólo gráficas que son IPI sin "patas" externas. Para hacer esto consideremos precisamente la suma de todos los diagramas que son IPI sin patas externas en el espacio de momentos.<sup>22</sup> Denotemos esta suma por  $\Sigma(k)$ . Para el caso de la función de dos puntos a tercer orden  $\Sigma(k)$  es

$$\Sigma(k) = -\frac{\lambda}{2} \text{O} + \frac{\lambda^2}{6} \text{E} + \frac{\lambda^2}{4} \text{C} - \frac{\lambda^3}{12} \text{D} - \frac{\lambda^3}{4} \text{F} - \frac{\lambda^3}{4} \text{G} - \frac{\lambda^3}{8} \text{H} + O(\lambda^4). \quad (3.72)$$

No es difícil darse cuenta que la función de Green conectada de dos puntos puede expresarse en la forma y entonces, de las ecuaciones (3.71)-(3.73) concluimos que

$$\begin{aligned} G_c^{(2)}(k) &= G_0(k) + G_0(k) \Sigma(k) G_0(k) + G_0(k) \Sigma(k) G_0(k) \Sigma(k) G_0(k) + \dots \\ &= (G_0^{-1}(k) - \Sigma(k))^{-1}, \end{aligned} \quad (3.73)$$

y entonces, de las ecuaciones (3.71)-(3.73) concluimos que

$$\Gamma^{(2)}(k) = G_0^{-1}(k) + \frac{\lambda}{2} \text{O} - \frac{\lambda^2}{6} \text{E} - \frac{\lambda^2}{4} \text{C} + \frac{\lambda^3}{12} \text{D} + \frac{\lambda^3}{4} \text{F} + \frac{\lambda^3}{4} \text{G} + \frac{\lambda^3}{8} \text{H} + O(\lambda^4), \quad (3.74)$$

es la expresión para la función de vértice de dos puntos en términos de diagramas de Feynman. De manera análoga, si uno continúa tomando derivadas de la ecuación (3.67) con respecto a  $J$  evaluado a otro punto y reescribe los resultados adecuadamente, se puede dar cuenta que es posible escribir una relación entre la función de Green conectada de  $N$

<sup>22</sup> En esta suma estamos entendiendo que cada diagrama viene acompañado de su respectivo factor de simetría multiplicado por la potencia de la constante de acoplamiento,  $(-1)^m \lambda^m / m!(4!)^m$ .

puntos  $G_c^{(N)}$ , la función de vértice también de  $N$  puntos  $\Gamma^{(N)}$  y una función  $Q^{(N)}$  que contiene todas las gráficas que no son IPI. Esta relación es

$$G_c^{(N)}(x_1, \dots, x_N) = -G_c^{(2)}(x_1, x'_1) \cdots G_c^{(2)}(x_N, x'_N) \Gamma^{(N)}(x'_1, \dots, x'_N) + Q^{(N)}(x_1, \dots, x_N). \quad (3.75)$$

Como un caso particular de ésta se tiene la expresión para la función de vértice de cuatro puntos a tercer orden (dos lazos)

$$\Gamma^{(4)} = \lambda - \frac{3\lambda^2}{2} \bigcirc + \frac{3\lambda^3}{4} \bigcirc\bigcirc + 3\lambda^3 \text{ } \text{ } \text{ } + \frac{3\lambda^3}{2} \bigcirc, \quad (3.76)$$

esta función y el vértice de dos puntos son las representaciones de las funciones de Green más adecuadas para llevar a cabo los cálculos que presentaremos en el siguiente capítulo.

Ya tenemos las herramientas adecuadas para aplicar la teoría de perturbaciones en el contexto de la teoría de campos aplicada a los fenómenos críticos. Hasta ahora hemos trabajado muy formalmente sin pensar mucho en las expresiones explícitas para los diagramas y si están ó no bien definidas. Por ejemplo, en la ecuación (3.74) el diagrama  $\bigcirc$ , en un sistema infinito con invariancia translacional, es

$$\bigcirc = \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{l^2 + m^2}. \quad (3.77)$$

Para momentos  $l$  grandes, el integrando se comporta como  $l^{d-3}$ , así que si el rango de integración es infinito, la integral diverge en el ultravioleta y por lo tanto la expresión no tiene sentido. Sin embargo, al menos para sistemas reales en el laboratorio sabemos que existe un corte en el ultravioleta debido a la existencia de una red y por lo tanto una zona de Brillouin. Así, al menos en el contexto de fenómenos críticos, podemos poner un corte  $\Lambda$  en las integrales aún si representan un sistema continuo, pues en ellos el corte será la representación "gruesa" de la existencia de la red. Sin embargo, si queremos llegar a una buena descripción de los fenómenos críticos que tome en cuenta universalidad (pues es un resultado experimental) tendremos que mostrar que el corte no entra en la física en el infrarrojo. En la teoría cuántica de campos la existencia de un corte es más problemático, sin embargo se debe introducir un corte (u otra forma de regularización) simplemente para hacer que las integrales queden bien definidas como expresiones matemáticas. Dado que los fenómenos críticos son los de mayor interés en esta tesis, asumiremos que existe un "corte". Entonces si cortamos la integral (3.77) se encuentra que a primer orden en  $\lambda$

$$\Gamma^{(2)}(k) \sim k^2 + m^2 + A(d)\lambda\Lambda^{d-2} + B(d)\lambda m^2 \frac{\Lambda^{d-4}}{m}, \quad (3.78)$$

donde  $A(d)$  y  $B(d)$  son constantes que dependen de la dimensión. El aspecto más importante de (3.78) es que, para  $\Lambda$  grande, cada término al siguiente orden en teoría de

perturbaciones es mayor que el del orden anterior y por lo tanto no podemos confiar en esta serie de perturbaciones. En el siguiente capítulo, este hecho nos motivará a introducir el grupo de renormalización cuya utilidad principal será "mejorar" la teoría de perturbaciones.

Por otra parte, al considerar la función de cuatro puntos tenemos que el diagrama relevante al orden de un lazo es

$$O = \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2 + m^2)^2}. \quad (3.79)$$

Para  $d = 4$  esta integral es "mal comportada" en el ultravioleta y esto hace necesario introducir un corte. Para  $d < 4$  es convergente en el ultravioleta y entonces uno podría pensar que la teoría de perturbaciones sería mejor comportada. No obstante, al considerar el límite  $m \rightarrow 0$ , que por supuesto es de gran interés en los fenómenos críticos, vemos que la integral diverge como una potencia negativa de  $k$ . Es decir ahora hay problemas en el infrarrojo. Generalmente la teoría de perturbaciones no será útil debido a problemas en el ultravioleta y/o el infrarrojo. Puesto que estamos interesados más en los fenómenos críticos, consideraremos principalmente el infrarrojo.

Uno puede preguntarse ¿por qué hay problemas con la teoría de perturbaciones? Para contestar esta pregunta vale la pena pensar en el significado de los parámetros  $\lambda$  y  $m$ . Si fuera posible "apagar" las fluctuaciones de la teoría,  $\lambda$  sería igual a la función de cuatro puntos  $\Gamma^{(4)}$ , y  $m^2$  a la función de dos puntos  $\Gamma^{(2)}$ , es decir, los parámetros  $\lambda$  y  $m$  representan los valores de estas funciones en la aproximación de campo promedio. A esto se debe que normalmente se les llame los parámetros "desnudos" y se les denote como  $\lambda_b$  y  $m_b^2$ , respectivamente.

Sin embargo sabemos que las fluctuaciones juegan un papel muy importante en la región crítica y por lo tanto una expansión en términos de parámetros asociados a una teoría que no tiene fluctuaciones irremediablemente fallará.

En el siguiente capítulo mostraremos que mediante la introducción del grupo de renormalización es posible dar una formulación "perturbativa" en la región crítica.

## Capítulo 4

---

# LA TEORIA DEL GRUPO DE RENORMALIZACION

Al finalizar el capítulo anterior hicimos notar que la evaluación perturbativa de las funciones de correlación conduce a problemas serios: términos grandes en la teoría de perturbaciones tanto en el ultravioleta como en el infrarojo. Esto nos preocupa porque sabemos que a partir de las funciones de correlación podemos generar cualquier observable y no es posible que estas funciones de correlación no sean cantidades bien definidas. Estamos, pues, en una situación en la que tenemos un resultado muy grande para una cantidad que debe ser cero ó una cantidad finita. Tal es el caso del inverso de la susceptibilidad en los fenómenos ferromagnéticos, pues la función de vértice de dos puntos evaluada a momento externo cero es exactamente esta cantidad. Por esta razón se espera que la función de vértice de dos puntos a momento externo cero tenga un valor pequeño o cero cerca del punto crítico.

Como vimos anteriormente, el hecho de que existan problemas principalmente en el infrarojo o en el ultravioleta depende de la dimensión. Notamos que el problema principal fué que intentamos usar una teoría de perturbaciones la cual desarrollamos alrededor de una teoría sin fluctuaciones. Explícitamente, un problema particular fué que el parámetro perturbativo  $\lambda$  no es un parámetro adecuado para el desarrollo de perturbaciones ya que es el acoplamiento en la teoría sin fluctuaciones, y como sabemos, en la vecindad de un punto crítico las fluctuaciones juegan un papel muy importante. Es por ello que no podíamos esperar que esta descripción nos diera resultados que describieran "fielmente" la teoría. Sin embargo, no todo está perdido, a pesar de que tenemos series de perturbaciones muy mal comportadas, es posible superar el problema mediante la introducción del método del grupo de renormalización.

En realidad, el grupo de renormalización es mucho más que un método para mejorar una teoría de perturbaciones.

Constituye uno de los desarrollos más importantes de la física teórica de los últimos cincuenta años.<sup>23</sup>

Una hipótesis importante que parece confirmarse con los trabajos basados en el grupo de renormalización es que algunos de los fenómenos, que considerados superficialmente se dirían muy distintos, son idénticos en un nivel más profundo; de tal forma que el comportamiento crítico de los fluidos, los ferromagnetos, las mezclas líquidas y las aleaciones puede describirse mediante una teoría única.

En este capítulo veremos que existen dos formulaciones, muy relacionados en un sentido pero muy diferentes en otro, del grupo de renormalización: una descubierta en los años 40's y 50's (Peterman y Stückelberg, Gell-Mann y Low, Bogoliubov y Shirkov) en el contexto de la teoría cuántica de campos que está basada en la idea de "reparametrización", y la otra, desarrollada en los años 60's y 70's (Kadanoff, Wilson) más enfocada al contexto de los fenómenos críticos que se basa en la noción de "coarse graining".<sup>24</sup> Nuestra intención aquí es concentrarnos en la primera, pero creemos que es instructivo, al menos, introducir la otra en un problema simple y comparar las dos formulaciones. La manera más conveniente de introducir las ideas del grupo de renormalización en el contexto de coarse graining es a través del tratamiento de un modelo de ferromagneto, el más simple de ellos es el modelo de Ising unidimensional. Aunque este modelo puede ser resuelto exactamente y no presenta transición de fase a temperatura no-cero, resulta conceptualmente instructivo implementar el grupo de renormalización en él. Así que comensaremos con este sistema. Después de hacer esto, introduciremos la idea de reparametrización y la aplicaremos a la teoría de  $\lambda\phi^4$  para obtener los exponentes críticos y las funciones de escalamiento. Por último, para finalizar este trabajo, introducimos los ejemplos de ferromagnetos con algunas dimensiones finitas y los ferromagnetos cuánticos; problemas que serán tratados con la teoría de "renormalización ambientalmente amigable".

## 4.1 Renormalización para el Modelo de Ising Unidimensional

En esta sección vamos a implementar la teoría del grupo de renormalización (GR), como un coarse graining,<sup>25</sup> al modelo de Ising unidimensional. Nuestra meta será exponer claramente las ideas esenciales en las que se basa este método para ejemplificar la manera en que la teoría debería ser utilizada en problemas más complicados que si presentan transiciones de fase.

<sup>23</sup> Desde el punto de vista de K. G. Wilson, el grupo de renormalización más que una teoría descriptiva de la naturaleza, es un método general para construir teorías. K. G. Wilson, *Sc. Am.*, Vol. 241, No. 2 (1979).

<sup>24</sup> En esta tesis estaremos utilizando el término "coarse graining" para denotar la acción de sustituir un sistema físico por otro similar pero con un menor número de grados de libertad. Es decir, sustituir un sistema por otro sistema más "grueso".

<sup>25</sup> Estrictamente hablando el grupo de renormalización que se utiliza en el modelo de Ising no es precisamente un grupo en el sentido matemático, pero sí satisface las propiedades de semigrupo.

Consideremos el modelo de Ising unidimensional, i.e., consideremos una cadena de  $N$  espines  $s_i$ , cada uno de los cuales puede tomar sólo los valores  $+1$  ó  $-1$ . Para facilitar la notación de las expresiones supongamos que tenemos un número  $N$  par de ellos. Así, en presencia de campo magnético externo  $h$  podemos escribir la función de partición en la forma

$$\begin{aligned} Z(N, K, H) &= \sum_{s_1, s_2, \dots, s_N = \pm 1} e^{K \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1} + \frac{1}{2} H \sum_{i=1}^N (s_i + s_{i+1})} \\ &= \sum_{s_1, s_2, \dots, s_N = \pm 1} e^{K(s_1 s_2 + s_2 s_3 + \dots + s_{N-1} s_N + s_N s_1) + \frac{1}{2} H[(s_1 + s_2) + (s_2 + s_3) + \dots + (s_N + s_1)]}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde  $K = \beta J = J/k_B T$ ,  $H = \beta h$ , y hemos impuesto la condición periódica  $s_{N+1} = s_1$ .

La primera idea en la teoría del GR es "dividir y vencer". Los problemas con muchos grados de libertad son difíciles de resolver cuando estos grados de libertad se encuentran acoplados. Cerca de un punto crítico, donde el comportamiento colectivo es importante, hay muchos grados de libertad fuertemente acoplados. Si fuese posible relacionar tal sistema a otro con un menor número de grados de libertad ó a un sistema con grados de libertad no "tan fuertemente" acoplados podría resultar más fácil resolver el problema ó al menos sería posible usar una aproximación con más confianza. Es claro, que si fuese posible iterar una relación recursiva que redujera el número de grados de libertad, eventualmente se llegaría a un sistema de un sólo grado de libertad efectivo. Este es el caso ideal porque sabemos que un sistema con un sólo grado de libertad se puede resolver.

Así, la idea aquí es tratar de remover una fracción finita de los grados de libertad del sistema mediante una suma sobre ellos. Concretamente, lo que haremos será sumar sobre todos los espines pares (lo mismo obtendríamos con los impares), pero primero reescribimos la función de partición en la forma

$$\begin{aligned} Z(N, K, H) &= \sum_{s_1, s_2, \dots, s_N = \pm 1} \left[ e^{K(s_1 s_2 + s_2 s_3)} e^{\frac{1}{2} H[(s_1 + s_2) + (s_2 + s_3)]} \right] \\ &\quad \times \left[ e^{K(s_2 s_4 + s_4 s_6)} e^{\frac{1}{2} H[(s_2 + s_4) + (s_4 + s_6)]} \dots \left[ e^{K(s_{N-1} s_N + s_N s_1)} e^{\frac{1}{2} H[(s_{N-1} + s_N) + (s_N + s_1)]} \right] \right]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} Z(N, K, H) &= \sum_{s_1, s_2, \dots, s_{N-1} = \pm 1} \left[ e^{K(s_1 + s_2) + \frac{1}{2} H[(s_1 + 1) + (1 + s_2)]} \right. \\ &\quad \left. + e^{-K(s_1 + s_2) + \frac{1}{2} H[(s_1 - 1) + (-1 + s_2)]} \right] \dots \left[ e^{K(s_{N-1} + s_1) + \frac{1}{2} H[(s_{N-1} + 1) + (1 + s_1)]} \right. \\ &\quad \left. + e^{-K(s_{N-1} + s_1) + \frac{1}{2} H[(s_{N-1} - 1) + (-1 + s_1)]} \right]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Notamos que, en la expresión anterior, los grados de libertad pares ya no aparecen. El hecho de llevar a cabo la suma sobre cada uno de los espines pares ha removido la mitad

de los grados de libertad del sistema. Si el espacio de la "red" inicial era  $a$ , al llevar a cabo esta suma obtenemos una "nueva" red cuyo espacio es  $2a$ .

La segunda idea importante de la teoría del GR consiste en reescribir esta función de partición parcialmente sumada en una forma que la haga parecerse a la que originalmente se tiene para una cadena de  $N/2$  espinos con posiblemente distintos parámetros, como son la constante de acoplamiento  $K$  y el campo magnético aplicado  $H$  en este caso. Si esta reparametrización es posible, podemos desarrollar una relación de recurrencia con la cual podemos calcular  $Z(N, K, H)$  partiendo de un sistema con otra constante de acoplamiento y campo aplicado, por ejemplo  $K = K_0 > 0$ ,  $H = H_0 \ll 1$ . Así, buscamos una función de  $K$  y  $H$ , llamémosla  $f(K, H)$ , una nueva constante de acoplamiento  $K'$  y un nuevo campo aplicado  $H'$  tales que

$$e^{K(s_i+s_j)+\frac{1}{2}H[(s_i+1)+(1+s_j)]} + e^{-K(s_i+s_j)+\frac{1}{2}H[(s_i-1)+(-1+s_j)]} = f(K, H)e^{K's_i+s_j+\frac{1}{2}H'(s_i+s_j)}, \quad (4.4)$$

para cualquier valor de  $s_i, s_j = \pm 1$ . Si somos capaces de encontrar estas cantidades, entonces podremos escribir la función de partición en la forma

$$\begin{aligned} Z(N, K, H) &= \sum_{s_1, s_2, \dots, s_{N-1} = \pm 1} f(K, H)e^{K's_1+s_2+\frac{1}{2}H'(s_1+s_2)} \\ &\times f(K, H)e^{K's_2+s_3+\frac{1}{2}H'(s_2+s_3)} \dots f(K, H)e^{K's_{N-1}+s_N+\frac{1}{2}H'(s_{N-1}+s_N)} \\ &= [f(K, H)]^{N/2} Z(N/2, K', H'), \end{aligned} \quad (4.5)$$

la cual será la relación de recurrencia buscada. Una transformación como esta es llamada una *transformación de Kadanoff*.

Para determinar las cantidades  $K'$ ,  $f(K, H)$  y  $H'$ , nos damos cuenta que de la expresión (4.4) con los valores de  $s_i, s_j = \pm 1$  sólo podemos obtener tres relaciones. La primera corresponde al caso  $s_i = s_j = 1$ ,

$$e^{2K+2H} + e^{-2K} = f(K, H)e^{K'+H}, \quad (4.6a)$$

la segunda es para  $s_i = s_j = -1$

$$e^{-2K} + e^{2K-2H} = f(K, H)e^{K'-H}, \quad (4.6b)$$

y la última para  $s_i = s_j = \pm 1$ , que es

$$e^H + e^{-H} = f(K, H)e^{-K'}. \quad (4.6c)$$

Resolviendo estas tres ecuaciones en términos de  $f(K, H)$ ,  $K'$  y  $H'$  obtenemos

$$K' = \frac{1}{4} \ln \left[ (\cosh H)^{-2} \cosh(2K+H) \cosh(2K-H) \right], \quad (4.7a)$$

$$f(K, H) = 2 \cosh H \left[ (\cosh H)^{-2} \cosh(2K+H) \cosh(2K-H) \right]^{\frac{1}{4}}, \quad (4.7b)$$

$$H' = H + \frac{1}{2} \ln \left[ \cosh(2K+H) (\cosh(2K-H))^{-1} \right]. \quad (4.7c)$$

Aún no hemos llevado a cabo la suma representada en la ecuación (4.5), pero notamos que si hubieramos intentado resolver el problema donde la constante de acoplamiento tuviera el valor de  $K'$ , el campo externo hubiera sido  $H'$  y hubiera habido sólo  $N/2$  espines, entonces exactamente esta expresión hubiera aparecido. Por tanto hemos demostrado que la función de partición  $Z(N, K, H)$  para  $N$  espines que interactúan con una constante de acoplamiento  $K$  y campo externo  $H$  está relacionada a la función de partición  $Z(N/2, K', H')$  para  $N/2$  espines, constante de acoplamiento  $K'$  y campo externo  $H'$  por la ecuación (4.5).

Para un sistema grande sabemos cual es la dependencia en  $N$  de  $Z$ . Debido a que creemos que la energía libre de Helmholtz  $F$  es proporcional al tamaño del sistema<sup>20</sup> se debe tener que

$$\ln Z(N, K, H) = N\zeta(K, H). \quad (4.8)$$

Salvo un factor de  $-k_B T$ ,  $N\zeta(K, H)$  es la energía libre de Helmholtz, y puesto que las energías libres son cantidades extensivas, esperamos que  $\zeta(K, H)$  sea intensiva, es decir, independiente del tamaño del sistema.

De la ecuación (4.5) obtenemos

$$\ln Z(N, K, H) = \frac{N}{2} \ln f(K, H) + \ln Z(N/2, K', H'), \quad (4.9)$$

luego, usando (4.8) encontramos que

$$\zeta(K, H) = \frac{1}{2} \ln f(K, H) + \frac{1}{2} \zeta(K', H'), \quad (4.10)$$

y debido a (4.7b) tenemos finalmente

$$\zeta(K', H') = 2\zeta(K, H) - \ln \left\{ 2 \cosh H \left[ (2 \cosh H)^{-2} \cosh(2K + H) \cosh(2K - H) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (4.11)$$

A las ecuaciones (4.7) y (4.11) se les llama las ecuaciones del grupo de renormalización. Se les llama de esta manera porque describen transformaciones que obedecen las propiedades de un grupo (en realidad de semigrupo, porque carecen de inversa) y proveen un esquema de renormalización.

Si se conoce la función de partición para un valor específico de la constante de acoplamiento  $K$ , ó equivalentemente de la temperatura  $T$ , y del campo externo  $H$ , estas ecuaciones dan relaciones de recurrencia que pueden utilizarse para calcular el valor de  $Z$  para otros valores de  $K$  y  $H$ . Usando las ecuaciones (4.7a), (4.7c) y (4.11) esta recurrencia, ó "renormalización", es en general hacia valores más pequeños de  $K$ , esto es,  $K'$  es en general menor que  $K$ .

La aplicación sucesiva de las ecuaciones del GR puede representarse mediante un "diagrama de flujo". Cada iteración llevada a cabo usando las ecuaciones (4.7a) y (4.7c)

<sup>20</sup> Una prueba explícita de este punto para algunos sistemas de espines ha sido dada por R. B. Griffiths, *J. Math. Phys.* 5, 1215 (1964).

conduce a valores de  $K$  y  $H$  sobre alguna de las líneas de la figura 4.1. Los valores de  $K'$  y  $H'$ , que resultan de cada iteración, se encuentran "adelante" (tomando el sentido de las flechas) de los anteriores  $H$  y  $K$ .

Existen puntos,  $(K = \infty, H = 0)$ ,  $(K = \infty, H = \pm\infty)$  y una línea,  $K = 0$ , para los cuales la recurrencia no cambia los valores de  $K$  y  $H$ . A esos valores de  $K$  y  $H$  que permanecen invariantes ante la aplicación del "grupo de renormalización" se les llama *puntos fijos*. El hecho que no haya interrupción en el flujo entre  $K = 0$  y  $K = \infty$  (i.e., no hay puntos fijos a  $K \neq 0$  finita) significa que no hay posibilidad de una transición de fase en el modelo de Ising unidimensional.

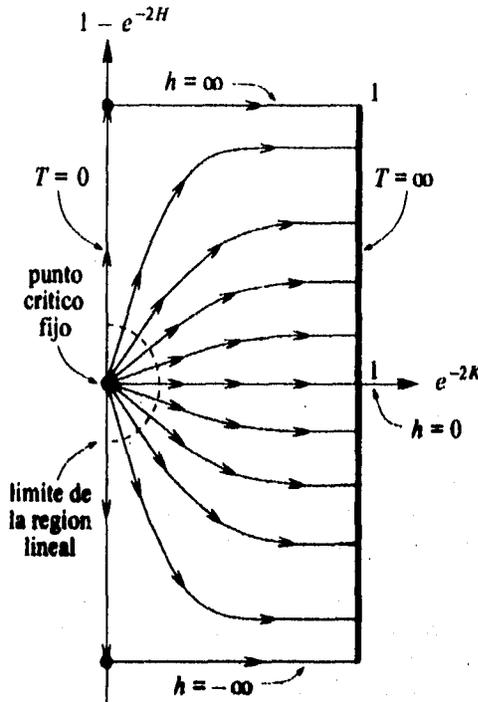


Fig. 4.1 Diagrama de flujo en el plano  $(T, H)$  para el grupo de renormalización de "decoración" del modelo de Ising unidimensional. Los puntos fijos aislados están representados por los puntos de la línea  $T = 0$ . Una línea de puntos fijos ocurre a  $T = \infty$ .

La remoción de la mitad de los grados de libertad del sistema ha permitido transfor-

mar el problema en uno casi idéntico pero con una escala de longitud más grande y por consiguiente con una longitud de correlación más pequeña (relativa al espacio de la nueva red,  $2a$ ).

Podemos ver esta aseveración de la siguiente manera. Si consideramos la razón entre la longitud de correlación del sistema y el espacio de la red actual,  $\xi/2a$ , vemos que en términos del espacio de la red inicial es  $(\xi/2)/a$ . Es decir, en términos del espacio de la red inicial, la longitud de correlación parece ser la mitad de la que se tenía antes de llevar a cabo la suma. Además, en este ejemplo unidimensional, la remoción de la mitad de los grados de libertad ha conducido a un sistema con una constante de acoplamiento más pequeña.

Podemos entender físicamente este fenómeno. Puesto que no hay orden a largo alcance (excepto a  $T = 0$ , ó equivalentemente  $K \rightarrow \infty$ ), entonces escalas de longitud más grandes están asociadas a menor orden, y por lo tanto a una  $K$  menor. Mediante la remoción de algunos grados de libertad cambiamos por una  $K$  más pequeña y casi transformamos el problema a uno con un acoplamiento más débil en el cual  $K$  es cercano a cero. Cerca de un punto fijo trivial, tal como  $(K = 0, H = 0)$ , las propiedades se calculan fácilmente usando teoría de perturbaciones.

Nótese que en los puntos fijos para el sistema,  $(K = \infty, H = 0)$ ,  $(K = \infty, H = \pm\infty)$ , la red se encuentra totalmente ordenada, y en la línea de puntos fijos  $K = 0$ , totalmente desordenada. Cuando está completamente ordenada, el sistema parece ser el mismo, independientemente de la escala de longitud con la cual sea visto. Un argumento similar se tiene en el caso de desorden total. La invariancia ante una transformación de la escala de longitud es una característica esencial de los puntos fijos del GR, aún cuando son los puntos fijos triviales  $(K = \infty, H = 0)$ ,  $(K = \infty, H = \pm\infty)$ , ó la línea  $K = 0$ .

Para sistemas que sí exhiben transiciones de fase tales como el modelo de Ising bidimensional, esperaríamos encontrar un diagrama de flujo con puntos fijos no triviales que asociaríamos a la transición de fase.

## 4.2 El Grupo de Renormalización como Grupo de Reparametrización

Antes de introducir el grupo de renormalización, pensado como reparametrización, en el contexto de la teoría de campos, vamos a estudiar un ejemplo sencillo para mostrar su generalidad.

Imaginemos una barra elástica fija a uno de sus extremos, como la que se muestra en la figura 4.2, que está sujeta a una fuerza externa, por ejemplo la gravitacional, presión debido a un fluido que se mueve, etc. La forma de la barra puede especificarse mediante el ángulo  $\theta$  entre la tangente a la barra y la dirección vertical como una función de la distancia  $l$  a lo largo de la barra desde un punto fijo, es decir mediante la función  $\theta(l)$ . Si las propiedades de la barra así como la fuerza externa son homogéneas a lo largo de su

longitud; i.e. independientes de  $l$ , entonces  $\theta(l)$  puede expresarse como una función  $\Theta(l, \theta_0)$  que depende también del ángulo de desviación  $\theta_0$  en el punto fijo desde el cual se mide  $l$ . Probablemente  $\Theta$  podría depender, además, de otros argumentos como parámetros asociados a la composición del material con el que está construida la barra, fuerzas de reacción, etc., pero en este contexto no las consideraremos relevantes.

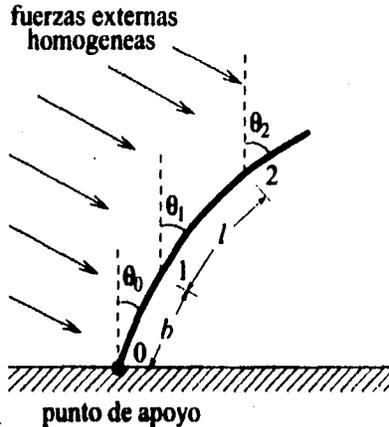


Fig. 4.2 Barra elástica fija en el punto 0 y sujeta a un campo de fuerza homogéneo.

Consideremos dos puntos arbitrarios sobre la barra, 1 y 2, cuyas distancias al punto fijo 0 son  $l_1 = b$  y  $l_2 = b + l$ . Los ángulos  $\theta_i$  en los puntos  $i = 1, 2, 3$  pueden relacionarse mediante la función  $\Theta$  en la forma

$$\theta_1 = \Theta(b, \theta_0), \quad \theta_2 = \Theta(b + l, \theta_0) = \Theta(l, \theta_1). \quad (4.12)$$

Nótese que para obtener la última igualdad de la ecuación anterior tuvimos que referirnos a 1 (en lugar de 0) como el punto que se mantiene fijo. Sustituyendo el valor de  $\theta_1$  en la segunda ecuación de la (4.12) llegamos al resultado que  $\Theta$  satisface la ley de composición

$$\Theta(b + l, \theta_0) = \Theta(l, \Theta(b, \theta_0)), \quad (4.13)$$

por lo cual concluimos que el conjunto de funciones  $\Theta$  forma un grupo al que por razones obvias podemos llamar *grupo de reparametrización*. Nótese también que para derivar la segunda de las ecuaciones (4.12) hemos asumido que la barra es de longitud infinita lo cual preserva la propiedad de homogeneidad del material que mencionamos anteriormente.

Como estaremos viendo en breve, el grupo de renormalización es un tipo especial de grupo de reparametrización que pedice la existencia de comportamiento crítico con la sola suposición de que existe un punto fijo en el espacio de parámetros que permanece invariante ante la aplicación de dicho grupo.

### 4.3 Renormalización de la Teoría de $\lambda\varphi^4$

Ya es tiempo de implementar las ideas desarrolladas anteriormente en el contexto de la teoría de campos. Particularmente, dado nuestro interés en fenómenos críticos, en la teoría de  $\lambda\varphi^4$  en  $d$  dimensiones euclidianas. Comenzamos con la relación fundamental de la teoría de renormalización que expresa la posibilidad de reparametrizar las funciones de Green o los vértices de tal manera que<sup>27</sup>

$$\Gamma^{(N)}(k_i, t(\kappa), \lambda(\kappa), \kappa) = Z_\varphi^{N/2} \Gamma_B^{(N)}(k_i, t_B, \lambda_B, \Lambda), \quad (4.14)$$

donde  $t$  es la desviación de la temperatura crítica,  $\lambda$  es el acoplamiento y  $k_i$  son los momentos externos que satisfacen  $k_i \leq \Lambda$ , con  $\Lambda$  el momento máximo. Los nuevos parámetros/coordenadas (renormalizados) están relacionados a los parámetros originales (desnudos) mediante las siguientes relaciones

$$\lambda(\kappa) = Z_\lambda(\kappa)\lambda_B, \quad t(\kappa) = Z_\varphi^{-1}(\kappa)t_B, \quad \varphi(\kappa) = Z_\varphi^{-1/2}(\kappa)\varphi_B. \quad (4.15)$$

En estas expresiones hemos definido la constante de renormalización de la función de onda  $Z_\varphi$ , la constante de renormalización del operador compuesto  $\varphi^2$ ,  $Z_{\varphi^2}$  y el factor de renormalización del acoplamiento  $Z_\lambda$ . Como veremos, es a través del uso de condiciones de normalización que podemos fijar un sistema particular de nuevas coordenadas. Para muchas teorías es posible probar, orden por orden en teoría de perturbaciones, que es posible reparametrizar consistentemente como sucede en el ejemplo de la sección anterior. Aquí vamos a considerar la ecuación (4.14) como postulado. Como en el caso de la barra, el conjunto de reparametrizaciones forma un grupo en el que las transformaciones están parametrizadas por la "escala" genérica  $\kappa$ . De esta forma, tenemos una familia de reparametrizaciones que depende de un parámetro. En lo que sigue obtendremos resultados exactos y perturbativos que son consecuencia del grupo de renormalización en la teoría de  $\lambda\varphi^4$ .

#### 4.3.1 La Ecuación del Grupo de Renormalización a $T = T_c$

En esta sección introduciremos el grupo de renormalización (GR) en forma diferencial. En particular, derivaremos la ecuación del grupo de renormalización para la teoría de  $\lambda\varphi^4$  a la temperatura crítica. Como puede notarse, la ecuación del GR resulta como consecuencia del hecho que la teoría desnuda no depende de la escala arbitraria de renormalización  $\kappa$  que escogemos para definir nuestros parámetros. Es decir

$$\kappa \frac{d}{d\kappa} \Gamma_B^{(N)} = 0. \quad (4.16)$$

<sup>27</sup>De ahora en adelante convendremos usar la notación que las cantidades sin subíndice son las renormalizadas y las que tienen el subíndice  $B$  son las cantidades "desnudas".

Esta ecuación fundamental expresa la invariancia de la física bajo transformaciones de "coordenadas" y es así el análogo de la covariancia geométrica en la teoría de la relatividad. Representa una invariancia exacta.

El uso de la hipótesis fundamental de la teoría de renormalización, ecuación (4.14), nos permite reescribirla en la forma

$$\left( \kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} - \frac{N}{2} \gamma_{\varphi} \right) \Gamma^{(N)}(k_i, \lambda, \kappa) = 0, \quad (4.17)$$

donde hemos considerado  $t = 0$ . Esta es una consecuencia directa, que se sigue de la segunda ecuación en (4.15) al suponer que estamos estudiando la teoría exactamente a  $t_n = 0$ .<sup>28</sup> Además, hemos definido las funciones

$$\beta(\lambda, \kappa) = \kappa \frac{\partial \lambda}{\partial \kappa}, \quad (4.18)$$

$$\gamma_{\varphi}(\lambda, \kappa) = \kappa \frac{\partial \ln Z_{\varphi}}{\partial \kappa}. \quad (4.19)$$

El problema ahora, es resolver la ecuación diferencial parcial de primer orden especificada por (4.17) con la condición inicial

$$\Gamma^{(N)}(k_i, \lambda, \kappa_0) = \Gamma_0^{(N)}(k_i, \lambda, \kappa_0), \quad (4.20)$$

donde  $\Gamma_0^{(N)}$  es una función escalar "dada". Es posible encontrar la solución exacta a este problema de valores iniciales utilizando el método de características y es lo que haremos a continuación. No vamos a profundizar en la interpretación geométrica de la ecuación y sus soluciones. En lugar de esto vamos a dar una explicación un tanto técnica y por supuesto, una buena referencia para leer acerca de este método.<sup>29</sup> Sabemos que este método nos permite traducir el problema de una ecuación diferencial parcial de primer orden cuasilineal en el de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias conocidas como ecuaciones características. En este caso dichas ecuaciones características pueden escribirse en la forma

$$\frac{d\kappa}{\kappa} = \frac{d\lambda}{\beta} = \frac{2}{N} \frac{d\Gamma^{(N)}}{\gamma_{\varphi} \Gamma^{(N)}}, \quad (4.21)$$

con la misma condición inicial, ecuación (4.20). Con esto, tenemos consistencia entre ambos problemas y podemos comenzar a resolver la ecuación que relaciona los extremos

<sup>28</sup> Es posible ver que cuando  $t_n \neq 0$ , tenemos una teoría de  $\lambda\varphi^4$  igual a la que estudiamos en el capítulo anterior, pero con un corrimiento del parámetro de masa que traslada  $m_0^2$  a  $m_0^2 + t_n$ .

<sup>29</sup> Para una explicación detallada de este método puede consultarse por ejemplo el libro de E. Zauderer, *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*, John Wiley & Sons, 1985.

del sistema (4.21) con la condición inicial (4.20). Este problema es muy simple. La integración es inmediata por el método de separación de variables y se obtiene

$$\Gamma^{(N)}(k_i, \lambda, \kappa) = \Gamma_0^{(N)}(k_i, \lambda, \kappa) e^{\frac{\kappa}{\beta} \int_{\kappa_0}^{\kappa} \frac{d\kappa'}{\kappa'} \gamma_{\nu}}. \quad (4.22)$$

Para simplificar más esta solución introducimos el resultado anterior en la ecuación del grupo de renormalización, ecuación (4.17), y encontramos que  $\Gamma_0^{(N)}$  satisface la ecuación diferencial

$$\left( \kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \Gamma_0^{(N)}(k_i, \lambda, \kappa) = 0. \quad (4.23)$$

ahora vamos a utilizar una manera alternativa para escribir las ecuaciones características de este problema, que es

$$\frac{d\kappa}{du} = \kappa, \quad \frac{d\lambda}{du} = \beta, \quad \frac{d\Gamma_0^{(N)}}{du} = 0, \quad (4.24)$$

con  $u$  un parámetro arbitrario. De esta última, mediante una integración inmediata, concluimos que  $\Gamma_0^{(N)}$  puede escribirse como una "función arbitraria de los momentos externos y una constante". Resultado que podemos escribir como

$$\Gamma_0^{(N)}(k_i, \lambda, \kappa) = F^{(N)}(k_i, C), \quad (4.25)$$

donde  $C$  es una constante que relaciona las variables  $\lambda$  y  $\kappa$ , y  $F^{(N)}$  es una función arbitraria.

Esperamos, entonces, que la solución de las dos primeras ecuaciones del sistema (4.24) proporcione una función de las variables  $\lambda$  y  $\kappa$  igual a una constante. Para resolver estas, y darnos cuenta que esto es realmente de esta manera, notamos que el uso de la regla de la cadena permite escribir el sistema en la forma

$$\frac{d\kappa}{d\lambda} = \frac{\kappa}{\beta}. \quad (4.26)$$

Al separar las variables de esta ecuación y llevar a cabo una integración elemental obtenemos el resultado

$$\ln \left( \frac{\kappa}{\kappa_0} \right) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda'}{\beta(\lambda')} + C_0, \quad (4.27)$$

donde  $C_0$  es una constante de integración. De hecho  $C_0$  es la constante que estamos buscando. Al resolver la ecuación anterior para  $C_0$  e introducirla en lugar de la constante arbitraria  $C$  en (4.25) vemos que la función  $\Gamma^{(N)}$  además de depender de los momentos externos  $k_i$ , depende de un parámetro que tiene la combinación especial

$$\Gamma_0^{(N)}(k_i, \lambda, \kappa) = F^{(N)} \left( k_i, \ln \left( \frac{\kappa}{\kappa_0} \right) - \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda'}{\beta(\lambda')} \right), \quad (4.28)$$

al sustituir este resultado en la expresión (4.22) tenemos finalmente la solución general a la ecuación del grupo de renormalización

$$\Gamma^{(N)}(k_i, \lambda, \kappa) = F^{(N)} \left( k_i, \ln \left( \frac{\kappa}{\kappa_0} \right) - \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda'}{\beta(\lambda')} \right) e^{\frac{N}{2} \int_{\kappa_0}^{\kappa} \frac{d\kappa'}{\kappa'} \gamma_e}. \quad (4.29)$$

Lo primero que se ocurre al tener esta solución es estudiar el comportamiento que presenta al reescalar la escala arbitraria  $\kappa$ . Esto es de interés porque cuando fijamos una escala particular, por ejemplo a la longitud de correlación  $\xi$ , un reescalamiento de ésta nos permite tomar en cuenta distintos valores de la escala con el sólo hecho de variar el factor de escala. De esta forma, si escalamos  $\kappa$  por la cantidad  $\rho$ , lo que hacemos en el segundo argumento de (4.29) mediante la introducción de la expresión

$$\ln \left( \frac{\rho\kappa}{\kappa} \right) - \int_{\lambda(\kappa)}^{\lambda(\rho\kappa)} \frac{d\lambda'}{\beta(\lambda')} = 0, \quad (4.30)$$

obtenemos

$$\Gamma^{(N)}(k_i, \lambda, \kappa) = F^{(N)} \left( k_i, \ln \left( \frac{\rho\kappa}{\kappa_0} \right) - \int_{\lambda(\kappa_0)}^{\lambda(\rho\kappa)} \frac{d\lambda'}{\beta(\lambda')} \right) e^{\frac{N}{2} \int_{\kappa_0}^{\kappa} \frac{d\kappa'}{\kappa'} \gamma_e}, \quad (4.31)$$

donde hemos usado la notación  $\lambda(\kappa_0) = \lambda_0$  y  $\lambda(\kappa) = \lambda$ . Ahora, al separar la anterior integral en una que va de  $\kappa_0$  a  $\rho\kappa$  más otra de  $\rho\kappa$  a  $\kappa$ , obtenemos la relación entre el vértice de  $N$  puntos a la escala  $\kappa$  y el vértice de  $N$  puntos a la escala  $\rho\kappa$

$$\Gamma^{(N)}(k_i, \lambda(\kappa), \kappa) = e^{-\frac{N}{2} \int_{\kappa}^{\rho\kappa} \frac{d\kappa'}{\kappa'} \gamma_e} \Gamma^{(N)}(k_i, \lambda(\rho\kappa), \rho\kappa). \quad (4.32)$$

Vale la pena enfatizar que este reescalamiento o reparametrización juega exactamente el mismo papel que la reparametrización de las condiciones iniciales en el ejemplo de la barra. En este caso el cambio del parámetro de escala  $\rho\kappa$  simplemente dice que tenemos la libertad de escoger cualquier escala para describir la física a otra escala. Este es uno de los aspectos importantes del grupo de renormalización.

### 4.3.2 Puntos Fijos, Escalamiento, y Dimensiones Anómalas

Como vimos en la sección anterior, el cambio de las funciones de vértice, y por consiguiente de las funciones de correlación, bajo un reescalamiento de la escala arbitraria no es simple, lo cual no se espera en una teoría crítica. Sin embargo hay casos especiales en los cuales se recupera el comportamiento simple de escalamiento. Esto sucede si la constante de acoplamiento sin dimensiones  $\bar{\lambda} = \lambda\kappa^{-\epsilon}$  toma un valor tal que cualquier cambio en la

escala de los momentos no la afecta. Es decir, esto sucede cuando  $\lambda$  toma valores para los cuales

$$\bar{\beta}(\bar{\lambda}) = 0, \quad (4.33)$$

donde  $\bar{\beta} = \kappa\partial\bar{\lambda}/\partial\kappa$  es la función  $\beta$  sin dimensiones. A los valores que satisfacen la ecuación anterior se les llama *puntos fijos*.

Considerando la solución a la ecuación del grupo de renormalización, ecuación (4.32), en la cual hacemos análisis dimensional y luego evaluamos en el punto fijo  $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}^*$  obtenemos el resultado<sup>30</sup>

$$\Gamma^{(N)}(k_i, \bar{\lambda}^*, \kappa) = \rho^{(N+d-Nd/2) - \frac{N}{2}\gamma_\varphi(\bar{\lambda}^*)} \kappa^{(N+d-Nd/2)} \Gamma^{(N)}(k_i/\rho\kappa, \bar{\lambda}^*, 1). \quad (4.34)$$

Esta ya es una propiedad de escalamiento simple. Además, de esta expresión se ve que el vértice del lado derecho ya sólo es función del cociente de los momentos externos a la escala  $\rho\kappa$ . Hasta este momento la escala  $\rho\kappa$  había sido arbitraria, pero ahora la fijamos a la física por medio de la condición

$$\rho\kappa = k_i. \quad (4.35)$$

De esta manera el vértice de  $N$  puntos del lado derecho de la ecuación (4.34) está evaluado únicamente en números y es, por consiguiente, un número. En particular  $\Gamma^{(2)}$  se comporta como

$$\Gamma^{(2)}(k) = \rho^{2-\gamma_\varphi(\bar{\lambda}^*)} \kappa^2 \Gamma^{(2)}(k/\rho\kappa), \quad (4.36)$$

y como  $\rho\kappa = k$ , se tiene el comportamiento

$$\Gamma^{(2)}(k) \propto k^{2-\gamma_\varphi(\bar{\lambda}^*)}, \quad (4.37)$$

del cual identificamos inmediatamente el exponente crítico  $\eta$  con

$$\eta = \gamma_\varphi(\bar{\lambda}^*). \quad (4.38)$$

A  $\gamma_\varphi(\bar{\lambda}^*)/2$  a veces se le denomina la *dimensión anómala* del campo  $\varphi$ .

### 4.3.3 La Ecuación del Grupo de Renormalización a $T > T_c$

Ya demostramos que de la única suposición de existencia de un punto fijo del grupo de renormalización se sigue el comportamiento de escalamiento simple dado por la ecuación (4.37). Además, mostramos la existencia del exponente  $\eta$  asociado al comportamiento de la función de correlación de dos puntos en el punto crítico. Ahora, vamos a mostrar que de la existencia de un punto fijo  $\bar{\lambda}^*$  es posible deducir la existencia del exponente crítico  $\nu$  que

<sup>30</sup> Para una explicación en detalle acerca de análisis dimensional puede consultarse por ejemplo el libro de D. J. Amit, *Field Theory, The Renormalization Group, and Critical Phenomena*, McGraw-Hill 1978.

describe el comportamiento de la longitud de correlación en la región crítica. Para hacer esto, consideremos la relación fundamental que expresa la posibilidad de reparametrizar las funciones de vértice de  $N$  puntos, ecuación (4.14), pero ahora a  $t > 0$ ; es decir, a  $T > T_c$ . Consideremos entonces la ecuación del grupo de renormalización, análoga a la (4.17), pero que toma en cuenta el parámetro  $t$

$$\left( \kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} - \frac{N}{2} \gamma_\varphi + \gamma_\varphi t \frac{\partial}{\partial t} \right) \Gamma^{(N)}(k_i, t(\kappa), \lambda(\kappa), \kappa) = 0, \quad (4.39)$$

donde hemos definido ahora

$$\gamma_\varphi t = -\kappa \frac{\partial \ln Z_\varphi^2}{\partial \kappa}, \quad (4.40)$$

resolviendo esta ecuación por el método de características como lo hicimos con la ecuación para  $t = 0$ , obtenemos la solución

$$\Gamma^{(N)}(k_i, \lambda, t, \kappa) = \Phi^{(N)} \left( k_i, \ln \left( \frac{\kappa}{\kappa_0} \right) - \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda'}{\beta(\lambda')}, \ln \left( \frac{\kappa}{\kappa_0} \right) - \int_{t_0}^t \frac{dt'}{\gamma_\varphi t'} \right) e^{\frac{t}{2} \int_{\kappa_0}^{\kappa} \frac{d\kappa'}{\kappa'} \gamma_\nu}. \quad (4.41)$$

Nuevamente, sumando un término igual al de la ecuación (4.30) al segundo argumento de la ecuación anterior y sumando al tercer argumento el término

$$\ln \left( \frac{\rho \kappa}{\kappa} \right) - \int_{t(\kappa)}^{t(\rho \kappa)} \frac{dt'}{\beta(t')} = 0, \quad (4.42)$$

obtenemos

$$\Gamma^{(N)}(k_i, \lambda, t, \kappa) = \Phi^{(N)} \left( k_i, \ln \left( \frac{\kappa}{\kappa_0} \right) - \int_{\lambda(\kappa)}^{\lambda(\rho \kappa)} \frac{d\lambda'}{\beta(\lambda')}, \ln \left( \frac{\kappa}{\kappa_0} \right) - \int_{t(\kappa)}^{t(\rho \kappa)} \frac{dt'}{\gamma_\varphi t'} \right) e^{\frac{t}{2} \int_{\kappa_0}^{\kappa} \frac{d\kappa'}{\kappa'} \gamma_\nu}. \quad (4.43)$$

Separando la integral en la exponencial para escribir el vértice de  $N$  puntos a la escala  $\kappa$  en términos del vértice de  $N$  puntos a la escala  $\rho \kappa$  y haciendo análisis dimensional llegamos a

$$\Gamma^{(N)}(k_i, t(\kappa), \lambda(\kappa), \kappa) = (\rho \kappa)^{N+d-Nd/2} e^{-\frac{t}{2} \int_{\kappa_0}^{\rho \kappa} \frac{d\kappa'}{\kappa'} \gamma_\nu} \Gamma^{(N)}(k_i/\rho \kappa, t(\rho \kappa)/(\rho \kappa)^2, \bar{\lambda}(\rho \kappa), 1). \quad (4.44)$$

Hasta este momento  $\rho$  ha sido un parámetro arbitrario, pero ya vamos a fijarlo a un valor específico  $\rho = \rho_c$  por medio de una condición que simplifique la dependencia del vértice de  $N$  puntos. Vemos, de la ecuación anterior, que una condición adecuada es pedir que el segundo argumento del vértice sea igual a una constante. Por esta razón imponemos la condición

$$t(\rho_c \kappa) = (\rho_c \kappa)^2. \quad (4.45)$$

Al evaluar la expresión para el vértice de  $N$  puntos en  $\rho = \rho_c$  y a su vez en el punto crítico  $\lambda = \bar{\lambda}^*$ , además de introducir la condición anterior obtenemos

$$\begin{aligned} \Gamma^{(N)}(k_i, t(\kappa), \lambda(\kappa), \kappa) &= (\rho_c \kappa)^{N+d-Nd/2} (\rho_c \kappa)^{-N\gamma_{\rho^2/\kappa}} \kappa^{N\gamma_{\rho^2/\kappa}} \Gamma^{(N)}(k_i/\rho_c \kappa, 1, \bar{\lambda}^*, 1) \\ &\propto (\rho_c \kappa)^{N+d-Nd/2} (\rho_c \kappa)^{-N\gamma_{\rho^2/\kappa}} \Psi\left(\frac{k_i}{\rho_c \kappa}\right), \end{aligned} \quad (4.46)$$

de ésta y del comportamiento fenomenológico que vimos en el primer capítulo notamos que  $\Psi$  es una función que sólo depende de  $k_i \xi$ , con

$$\xi \propto \frac{1}{\rho_c \kappa}. \quad (4.47)$$

Por otra parte, para encontrar una expresión para  $t$  utilizamos la ecuación de flujo que obedece  $t(\rho\kappa)$  la cual se deriva fácilmente de la relación entre  $t(\rho\kappa)$  y  $t_\rho$  con  $\rho\kappa$  el parámetro de escala. Esta ecuación es

$$\rho \frac{dt(\rho\kappa)}{d\rho} = t(\rho\kappa) \gamma_{\rho^2}, \quad (4.48)$$

y su solución, la cual se obtiene mediante una integración directa usando separación de variables es

$$t(\rho\kappa) = t(\kappa) e^{\int_{\kappa}^{\rho\kappa} \frac{d\rho}{\rho} \gamma_{\rho^2}}. \quad (4.49)$$

Si evaluamos esta expresión en el parámetro de escalamiento  $\rho_c$  cerca del punto fijo  $\bar{\lambda}^*$  y utilizamos la condición (4.45) obtenemos el resultado que

$$t(\kappa) \propto (\rho_c \kappa)^{2-\gamma_{\rho^2}^*}, \quad (4.50)$$

la cual, al ser combinada con la ecuación (4.47), nos dice que

$$\xi \propto t^{-1/(2-\gamma_{\rho^2}^*)}, \quad (4.51)$$

pero ya hemos visto que el comportamiento de la longitud de correlación en una vecindad del punto crítico está descrita por la relación  $\xi \sim t^{-\nu}$ , con  $\nu$  un exponente crítico. Así que debe cumplirse la relación

$$\frac{1}{2-\gamma_{\rho^2}^*} = \nu, \quad (4.52)$$

y por lo tanto, al introducir los resultados  $t^\nu \propto \rho_c \kappa$ , y el de la ecuación (4.39), en la expresión (4.46), tenemos

$$\Gamma^{(N)}(k_i, t(\kappa), \lambda(\kappa), \kappa) \propto (t^\nu)^{N+d-Nd/2} (t^\nu)^{-N\eta/2} \Psi(k_i t^{-\nu}). \quad (4.53)$$

Sabemos que esta función de vértice en el caso  $N = 2$ ,  $k_i = 0$ , es exactamente el inverso de la susceptibilidad. Así es que, si la función  $\Psi$  está bien definida cerca de  $k_i = 0$ , entonces tenemos que

$$\chi^{-1} = \Gamma^{(2)}(k_i = 0, t(\kappa), \lambda(\kappa), \kappa) \propto (t^\nu)^{2-\eta}. \quad (4.54)$$

Nuevamente, conocemos el comportamiento no analítico de la susceptibilidad en el punto crítico, y sabemos que es de la forma  $\chi \sim t^{-\gamma}$ . Así, al relacionar esta expresión a la anterior (4.54) obtenemos la ley de escalamiento

$$\gamma = \nu(2 - \eta). \quad (4.55)$$

En conclusión, en esta sección hemos deducido la existencia de comportamiento crítico a partir de la suposición de existencia de un punto fijo  $\lambda^*$ . Hemos deducido una relación entre la función de Wilson  $\gamma_\varphi$  y el exponente asociado al comportamiento de la longitud de correlación en una vecindad del punto crítico, ecuación (4.52) y además deducido la existencia de una ley de escalamiento, la ley de escalamiento de Fisher.

#### 4.3.4 Renormalización del Vértice de Dos Puntos. Constantes de Renormalización

Ya hemos encontrado algunos resultados exactos que son consecuencias de la ecuación del grupo de renormalización. Ahora vamos a comenzar los cálculos perturbativos. Primero calcularemos las expresiones para las funciones de vértice en términos de los parámetros renormalizados. Al hacer esto obtendremos los factores que renormalizan los parámetros de la teoría y el campo  $\varphi$ , de los cuales obtendremos expansiones en  $\epsilon = 4 - d$  para el exponente  $\eta$  (a dos lazos) y para el exponente  $\nu$  (a un lazo). Sabiendo que con dos de los exponentes podemos reconstruir los demás por el uso de las relaciones de escalamiento, encontraremos el resto de los exponentes.

Para comenzar estos cálculos escribamos primero la relación más general entre los vértices renormalizados y los vértices desnudos<sup>31</sup>

$$\Gamma^{(N,M)}(k_i, t(\kappa), \lambda(\kappa), \kappa) = Z_\varphi^{N/2} Z_\varphi^M \Gamma_B^{(N,M)}(k_i, t_0, \lambda_0, \Lambda), \quad (4.56)$$

la cual es la forma general de la ecuación fundamental (4.14). Para encontrar los factores involucrados en el cambio de parámetros definido por las ecuaciones (4.15) utilizamos las condiciones de normalización

$$\Gamma^{(2)}(k_i = 0, t, \lambda(\kappa), m = \kappa) = \kappa^2, \quad (4.57)$$

$$\left. \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial k^2}(k, t, \lambda(\kappa), m = \kappa) \right|_{k=0} = 1, \quad (4.58)$$

<sup>31</sup> Estas funciones de vértice pueden definirse a través de la ecuación

$$\Gamma_B^{(N,M)} \equiv \frac{\delta^{N+M} \Gamma_B[\varphi, t]}{\delta \varphi(x_1) \cdots \delta \varphi(x_N) \delta t(y_1) \cdots \delta t(y_M)} \Big|_{J=0}$$

$$\Gamma^{(2,1)}(k_i = 0, t, \lambda(\kappa), m = \kappa) = 1, \quad (4.59)$$

$$\Gamma^{(4)}(k_i = 0, t, \lambda(\kappa), m = \kappa) = \lambda(\kappa). \quad (4.60)$$

Las tres últimas relaciones se utilizan para fijar las tres constantes de renormalización multiplicativas  $Z_\varphi$ ,  $Z_\varphi'$  y  $Z_\lambda$  en términos de una longitud de correlación de referencia  $\kappa^{-1}$ , y la primera se utiliza para fijar la relación entre la longitud de correlación y la temperatura  $t$ . Las expresiones que necesitamos para desarrollar los cálculos perturbativos son las expansiones en lazos de las funciones de vértice involucradas en estas condiciones de normalización, estas son, la función de dos puntos (que consideraremos a dos lazos)

$$\Gamma_B^{(2)}(k) = k^2 + m_s^2 + \frac{\lambda_s}{2} \bigcirc_{m_s} - \frac{\lambda_s^2}{6} \ominus_{m_s} - \frac{\lambda_s^2}{4} \bigcirc_{m_s}, \quad (4.61)$$

el vértice (considerado al orden de un lazo)<sup>22</sup>

$$\Gamma_B^{(2,1)} \equiv \left. \frac{\partial \Gamma_B^{(2)}}{\partial t_s} \right|_{t_s} = 1 - \frac{\lambda_s}{2} \bigcirc_{m_s}, \quad (4.62)$$

y la función de cuatro puntos a momento cero (al orden de un lazo)

$$\Gamma_B^{(4)}(k = 0) = \lambda_s - \frac{3\lambda_s^2}{2} \bigcirc_{m_s, k=0}. \quad (4.63)$$

Por ahora no nos preocuparemos de las expresiones algebraicas representadas por los diagramas de Feynman en las ecuaciones anteriores. Generalmente manipularemos los diagramas como expresiones formales hasta llegar a un punto donde sea necesario introducir expresiones explícitas. En ese momento, utilizaremos los resultados del apéndice C.

Para comenzar a "renormalizar" sustituimos la expansión perturbativa de la función de dos puntos, ecuación (4.61), en la relación fundamental de la teoría de renormalización, ecuación (4.14). Al hacer esto (para  $N = 2$ ) a este orden, obtenemos

$$\Gamma^{(2)}(k, \lambda, m = \kappa) = Z_\varphi \left( k^2 + m_s^2 + \frac{\lambda_s}{2} \bigcirc_{m_s} - \frac{\lambda_s^2}{6} \ominus_{m_s, k} - \frac{\lambda_s^2}{4} \bigcirc_{m_s} \right), \quad (4.64)$$

ahora podemos utilizar la condición de renormalización (4.58). Para ello notamos que en el paréntesis del lado derecho de la ecuación sólo hay dependencia de  $k$  en el primer y cuarto sumandos. Esto último lo expresamos escribiendo un índice  $k$  en este diagrama desde esta ecuación. Así, esta condición implica que

$$1 = Z_\varphi \left( 1 - \frac{\lambda_s^2}{6} \frac{d}{dk^2} \ominus_{m_s, k=0} \right), \quad (4.65)$$

<sup>22</sup> Esta expresión se obtiene al hacer la identificación  $m_s^2 = t_s + \delta m_s^2$  en la expresión (4.61), donde  $m_s^2 = T - T_c^M$ ,  $t_s = T - T_c$  y  $\delta m_s^2 = T_c - T_c^M$ .

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

para evitar confusiones con la notación del último diagrama, aclaremos que lo que estamos queriendo decir con ella es, primero calculamos la derivada con respecto a  $k^2$  y después evaluamos en  $k = 0$  (no al contrario). Resolviendo esta ecuación para  $Z_\varphi$  al orden de dos lazos, notando que a este orden podemos escribir  $m_s = \kappa$ , tenemos

$$Z_\varphi = 1 + \frac{\lambda_s^2}{6} \Phi_{\kappa, k=0}. \quad (4.66)$$

donde hemos introducido la notación  $\frac{d}{dk^2} \Theta \equiv \Phi$ . Esta expresión ya nos da el primer resultado, la constante de renormalización de la función de onda. De esta expresión podemos ver que  $Z_\varphi$  no contiene términos a un lazo, sólo a orden cero y a dos lazos.

Con esta expresión para  $Z_\varphi$  podemos reescribir la función de vértice de dos puntos en la forma

$$\Gamma^{(2)}(k, \lambda, m) = \left(1 + \frac{\lambda_s^2}{6} \Phi_{\kappa, k=0}\right) \left(k^2 + m_s^2 + \frac{\lambda_s}{2} \bigcirc_{m_s} - \frac{\lambda_s^2}{6} \Theta_{m_s, k=0} - \frac{\lambda_s^2}{4} \bigcirc_{m_s}\right), \quad (4.67)$$

ahora aplicamos la condición (4.57) para obtener

$$\kappa^2 = \left(1 + \frac{\lambda_s^2}{6} \Phi_{\kappa, k=0}\right) \left(m_s^2 + \frac{\lambda_s}{2} \bigcirc_{m_s} - \frac{\lambda_s^2}{6} \Theta_{m_s, k=0} - \frac{\lambda_s^2}{4} \bigcirc_{m_s}\right), \quad (4.68)$$

la cual al ser desarrollada y conservar términos hasta segundo orden puede escribirse como

$$\kappa^2 = m_s^2 + \frac{\lambda_s}{2} \bigcirc_{m_s} - \frac{\lambda_s^2}{6} \Theta_{\kappa, k=0} - \frac{\lambda_s^2}{4} \bigcirc_{\kappa} + m_s^2 \frac{\lambda_s^2}{6} \Phi_{\kappa, k=0}, \quad (4.69)$$

donde hemos usado el hecho de que los últimos tres diagramas son de dos lazos y a este orden podemos reemplazar  $m_s$  por  $m = \kappa$ . Falta escribir el primer diagrama en términos de los parámetros renormalizados. Para ello desarrollémoslo a primer orden en potencias de  $\lambda_s$  utilizando la ecuación (4.60). Es claro que basta calcular este diagrama hasta primer orden debido al factor lineal en  $\lambda_s$  que lo acompaña. De este modo, utilizando la expresión integral para el diagrama con la ecuación (4.60) desarrollada a primer orden, podemos escribir

$$\begin{aligned} \bigcirc_{m_s} &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 + \kappa^2 - \frac{\lambda_s}{2} \bigcirc_{\kappa}} \\ &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 + \kappa^2)} \left(1 - \frac{\lambda_s}{2(q^2 + \kappa^2)} \bigcirc_{\kappa}\right)^{-1} \\ &= \bigcirc_{\kappa} + \frac{\lambda_s}{2} \bigcirc_{\kappa}. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Al sustituir este resultado en la ecuación (4.69) vemos que el diagrama  se cancela, luego, al resolver para  $m_B^2$  obtenemos

$$m_B^2 = \kappa^2 - \frac{\lambda_B}{2} \bigcirc_{\kappa} + \frac{\lambda_B^2}{6} \ominus_{\kappa, k=0} - \kappa^2 \frac{\lambda_B^2}{6} \Phi_{\kappa, k=0}. \quad (4.71)$$

Por último, al sustituir esta expresión en la ecuación (4.67) para la función de vértice de dos puntos a segundo orden y hacer las simplificaciones adecuadas, obtenemos

$$\Gamma^{(2)}(k, \lambda, m = \kappa) = k^2 + \kappa^2 - \frac{\lambda_B^2}{6} (\ominus_{\kappa, k} - \ominus_{\kappa, k=0}) + k^2 \frac{\lambda_B^2}{6} \Phi_{\kappa, k=0}. \quad (4.72)$$

Esta es casi la expresión final para la función de dos puntos renormalizada. Sólo falta escribir  $\lambda_B$  en términos del acoplamiento renormalizado  $\lambda$ . Para encontrar una relación entre  $\lambda$  y  $\lambda_B$  utilizamos la condición de renormalización para  $\Gamma^{(4)}$ , ecuación (4.60), y la expansión a un lazo de la misma, ecuación (4.63). De estas obtenemos directamente

$$\lambda(\kappa) = \lambda_B - \frac{3\lambda_B^2}{2} \bigcirc_{\kappa, k=0}, \quad (4.73)$$

donde hemos sustituido  $\kappa$  por  $m_B$  debido a que  $\bigcirc_{m_B, k=0} = \bigcirc_{\kappa, k=0} + O(\lambda_B)$ . Al invertir esta expresión en términos de  $\lambda_B$ , al mismo orden de un lazo, obtenemos

$$\lambda_B = \lambda(\kappa) + \frac{3\lambda^2(\kappa)}{2} \bigcirc_{\kappa, k=0}. \quad (4.74)$$

Por lo tanto vemos que, al orden que estamos trabajando, podemos reemplazar  $\lambda_B^2$  por  $\lambda^2(\kappa)$  en la ecuación (4.72). Al hacer esto, obtenemos la expresión para la función de dos puntos renormalizada

$$\Gamma^{(2)}(k, \lambda, m = \kappa) = k^2 + \kappa^2 - \frac{\lambda^2(\kappa)}{6} (\ominus_{\kappa, k} - \ominus_{\kappa, k=0}) + k^2 \frac{\lambda^2(\kappa)}{6} \Phi_{\kappa, k=0}. \quad (4.75)$$

Es simple darse cuenta que esta expresión cumple la condición de renormalización (4.57). Un comentario acerca de esta función en términos de física es que cuando  $k = 0$ , este vértice es exactamente el inverso de la susceptibilidad. Esto es  $\kappa^2 = \chi^{-1}$ . Además, es posible verificar que a este orden, el vértice de dos puntos a momento externo cero concuerda también con el cuadrado de la longitud de correlación, la cual puede definirse

como  $\left[ \Gamma_B^{(2)} / \frac{\partial \Gamma_B^{(2)}}{\partial k^2} \right]_{k=0}$ .

Ahora vamos a utilizar la relación fundamental entre las funciones renormalizadas y las funciones desnudas, ecuación (4.56), para calcular otra de las constantes de renormalización. Así, notamos que para  $N = 2$ ,  $M = 1$ , se tiene

$$\Gamma^{(2,1)}(k, \lambda, m = \kappa) = Z_\varphi Z_\varphi \Gamma_B^{(2,1)}(k, \lambda_B, m_B). \quad (4.76)$$

utilizando en ésta la condición de renormalización (4.59), la expresión para la función desnuda (4.62) y la expresión para  $Z_\varphi$ , ecuación (4.66), tenemos que a orden de un lazo

$$1 = Z_\varphi^2 \left( 1 - \frac{\lambda_n}{2} \bigcirc_{\kappa, k=0} \right), \quad (4.77)$$

y por lo tanto la constante de renormalización  $Z_\varphi^2$  al orden de un lazo es

$$Z_\varphi^2 = 1 + \frac{\lambda_n}{2} \bigcirc_{\kappa, k=0}. \quad (4.78)$$

Este es un resultado importante que utilizaremos en la siguiente sección cuando calculemos el exponente crítico  $\nu$ .

### 4.3.5 Expansión en $\epsilon$ de los Exponentes Críticos

Para finalizar esta sección vamos a calcular explícitamente los valores de los exponentes críticos de la teoría con interacciones como expansiones en potencias del parámetro  $\epsilon = 4 - d$ . Debido a las pruebas de las secciones precedentes, podemos darnos cuenta que los exponentes críticos de la teoría se calculan a partir de las funciones de Wilson,  $\gamma_\varphi$  y  $\gamma_\varphi^2$  evaluadas en los puntos fijos del grupo de renormalización. A su vez, vimos que los puntos fijos del grupo de renormalización son los valores del acoplamiento sin dimensiones para los cuales la función beta sin dimensiones,  $\bar{\beta}$ , es cero. Esta reflexión nos indica el camino a seguir para llegar a las expresiones. A saber, comenzamos con la función  $\bar{\beta}(\bar{\lambda})$  y encontramos los ceros de esta función, luego calculamos las funciones de Wilson,  $\gamma_\varphi$  y  $\gamma_\varphi^2$ , y las evaluamos en los puntos fijos  $\bar{\lambda}^*$ . Después, de las expresiones encontradas anteriormente, determinamos  $\eta$  y  $\nu$ . Conocidos estos, utilizamos la ley de escalamiento de Fisher, que determinamos en una de las secciones anteriores, para calcular  $\gamma$ . Por último, utilizamos el resto de las leyes de escalamiento e hiperescalamiento para determinar los tres exponentes restantes.

Ya tenemos entendida la manera en la que vamos a resolver el problema, lo que resta ahora es resolverlo. Comencemos calculando la función beta sin dimensiones. Para ello, introduzcamos la constante de acoplamiento sin dimensiones  $\bar{\lambda} = \lambda \kappa^{-\epsilon}$  en la ecuación (4.73) para obtener la expresión

$$\bar{\lambda} = \kappa^{-\epsilon} \left( \lambda_n - \frac{3\lambda_n^2}{2} \bigcirc_{\kappa, k=0} \right), \quad (4.79)$$

luego, utilizando la definición de la función beta sin dimensiones,  $\bar{\beta} = \kappa \partial \bar{\lambda} / \partial \kappa$ , tenemos

$$\bar{\beta} = -\epsilon \bar{\lambda} - \frac{3}{2} \kappa^{\epsilon+1} \bar{\lambda}^2 \frac{d}{d\kappa} \bigcirc_{\kappa, k=0}. \quad (4.80)$$

De esta expresión podemos hallar los puntos fijos del grupo de renormalización al orden de un lazo. Sólo tenemos que encontrar los puntos  $\bar{\lambda}^*$  definidos en (4.36), i.e. los que satisfacen  $\bar{\beta}(\bar{\lambda}^*) = 0$ , pero antes debemos escribir la expansión en  $\epsilon$  del diagrama  $\bigcirc_{\kappa, k=0}$  en (4.80). Podemos calcular esta expansión a partir de la expresión en  $\epsilon$  que encontramos en el apéndice C, ecuación (C.9), esta es

$$\begin{aligned}\bigcirc_{\kappa, k=0} &= \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) (4\pi)^{-2} (4\pi)^{\frac{1}{2}} \kappa^{-\epsilon} \\ &\sim (4\pi)^{-2} \left(\frac{2}{\epsilon} + \ln(4\pi)\right) \kappa^{-\epsilon}.\end{aligned}\quad (4.81)$$

Al introducir esta expresión en la ecuación (4.80), tenemos

$$\bar{\beta} = -\epsilon \bar{\lambda} + \frac{3}{16\pi^2} \bar{\lambda}^2 \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \ln(4\pi)\right). \quad (4.82)$$

De esta ecuación deducimos inmediatamente que un punto fijo es  $\bar{\lambda}_1 = 0$ . Para encontrar el otro, resolvemos la ecuación

$$0 = -\epsilon + \frac{3}{16\pi^2} \bar{\lambda} \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \ln(4\pi)\right), \quad (4.83)$$

en potencias de  $\epsilon$  y encontramos que

$$\bar{\lambda} \approx \frac{16\pi^2}{3} \left(\epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} \ln(4\pi)\right), \quad (4.84)$$

es decir  $\bar{\lambda} = O(\epsilon)$ , y por lo tanto el último término en (4.82) es  $O(\bar{\lambda}^3)$  que ya no estamos considerando. Entonces la otra solución a la ecuación (4.83) se obtiene al considerar sólo el factor 1 dentro del paréntesis. Resolviendo esta ecuación, obtenemos el otro punto fijo  $\bar{\lambda}_2 = 16\pi^2\epsilon/3$  y por lo tanto tenemos las soluciones

$$\bar{\lambda}_1 = 0, \quad \bar{\lambda}_2 = \frac{16\pi^2}{3} \epsilon. \quad (4.85)$$

A la primera de estas se le conoce como *punto fijo gaussiano*, por razones obvias, y al segundo se le denomina el *punto fijo de Wilson-Fisher*.

Como está especificado por la ecuación (4.41), el exponente asociado al comportamiento crítico de la función de correlación,  $\eta$ , es el valor de la función  $\gamma_\varphi$  en un punto fijo. Entonces, para obtener  $\eta$ , necesitamos la expresión para  $\gamma_\varphi$ . Esta la obtenemos utilizando su definición dada por la ecuación (4.19) y la expresión a dos lazos de  $Z_\varphi$  dada por la ecuación (4.66).

De esta forma, obtenemos la expresión diagramática para  $\gamma_\varphi$

$$\gamma_\varphi = \frac{\lambda_\mu^2}{6} \frac{d}{d\kappa} \bigcirc_{\kappa, k=0}. \quad (4.86)$$

Al utilizar la expansión en  $\epsilon$  para la expresión de este diagrama dada en el apéndice C, ecuación (C.21),

$$\begin{aligned}\Phi_{\kappa, k=0} &= -\frac{\kappa^{-2\epsilon}}{(4\pi)^{4-\epsilon}} \frac{1}{2\epsilon} \\ &\sim -\frac{\kappa^{-2\epsilon}}{(4\pi)^4} \frac{1}{2\epsilon} (1 - \epsilon \ln(4\pi)),\end{aligned}\quad (4.87)$$

obtenemos

$$\gamma_\varphi = \frac{\lambda_B^2}{6} \frac{\kappa^{-2\epsilon}}{(4\pi)^{4-\epsilon}} + O(\lambda_B^3). \quad (4.88)$$

Al cambiar el acoplamiento desnudo por el renormalizado, pues a este orden son los mismos, introducir el acoplamiento sin dimensiones, y utilizar la expansión en  $\epsilon$  al orden de un lazo, llegamos a la expresión

$$\gamma_\varphi(\bar{\lambda}) = \frac{\bar{\lambda}^2}{6(4\pi)^4}. \quad (4.89)$$

Por último, al introducir en esta el valor del punto fijo gaussiano vemos que se obtiene el exponente  $\eta$  de la teoría gaussiana,  $\eta = 0$ . Y si sustituimos el valor del punto fijo de Wilson-Fisher encontramos el exponente crítico de la teoría con interacciones al orden de dos lazos<sup>23</sup>

$$\eta = \frac{\epsilon^2}{54}. \quad (4.90)$$

Una nota importante es que este exponente viene del comportamiento de la función de correlación exactamente a  $T = T_c$ . No así para el exponente  $\nu$ , el cual se obtiene para temperaturas ligeramente mayores a la temperatura crítica,  $T > T_c$ .

Ahora queremos calcular el exponente  $\nu$ . Vemos de la ecuación (4.59) que si conocemos la función de Wilson  $\gamma_\varphi$  evaluada en un punto fijo, éste es una consecuencia directa. Por esta razón nos concentraremos en calcular la función  $\gamma_\varphi$  al orden de un lazo. Primero comenzamos con la definición de esta función en términos de la constante de renormalización del operador compuesto  $\varphi^2$ , ecuación (4.43). Dado que hemos calculado  $Z_{\varphi^2}$ , podemos utilizar su expansión a un lazo de la ecuación (4.78) y podemos escribir  $m_s = \kappa$  a este orden. De esta manera, encontramos la expresión

$$\gamma_{\varphi^2} = -\kappa \frac{\lambda_B}{2} \frac{\partial}{\partial \kappa} \bigcirc_{\kappa, k=0}. \quad (4.91)$$

<sup>23</sup> Una nota importante es que  $\eta$  es el único exponente que calcularemos al orden de dos lazos para hacer notar que su expansión en  $\epsilon$  no es idénticamente cero. Más adelante calcularemos  $\nu$  al orden de un lazo y veremos que a ese orden  $\eta = 0$  pues la primera corrección a este valor viene hasta el orden de dos lazos. Además, vale la pena remarcar que para el cálculo a dos lazos del exponente  $\eta$  fué suficiente tener los puntos fijos del grupo de renormalización sólo al orden de un lazo. Esto fué posible debido a que  $Z_\varphi$  sólo contiene términos de orden cero y de dos lazos.

Al sustituir  $\lambda_n$  por  $\lambda$ , pues son los mismos a este orden, e introducir el acoplamiento sin dimensiones  $\lambda = \lambda\kappa^{-\epsilon}$  podemos reescribir la expresión para la función  $\gamma_{\varphi^2}$  como

$$\gamma_{\varphi^2} = -\frac{\bar{\lambda}\kappa^{\epsilon+1}}{2} \frac{\partial}{\partial \kappa} \bigcirc_{\kappa, k=0}. \quad (4.92)$$

En esta ecuación introducimos la expresión en términos de  $\epsilon$  para el diagrama  $\bigcirc_{\kappa, k=0}$ , ecuación (C.9)

$$\begin{aligned} \bigcirc_{\kappa, k=0} &= \frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{(4\pi)^2} (4\pi)^{\frac{1}{2}} \kappa^{-\epsilon} \\ &\sim \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon} \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \ln(4\pi)\right) \kappa^{-\epsilon}, \end{aligned} \quad (4.93)$$

por lo cual obtenemos (a orden de un lazo)

$$\gamma_{\varphi^2}(\bar{\lambda}) = \frac{\bar{\lambda}}{(4\pi)^2}. \quad (4.94)$$

Esta es la expresión importante. El uso de esta función evaluada a un punto fijo, por ejemplo al punto fijo gaussiano  $\bar{\lambda} = 0$ , con la ayuda de la ecuación (4.59) da el valor del exponente  $\nu$  de la teoría gaussiana,  $\nu = 1/2$ . Si sustituimos el valor del punto fijo de Wilson-Fisher para la teoría con interacciones, obtenemos el exponente (a orden de un lazo)

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12}. \quad (4.95)$$

Conocidos  $\eta$  y  $\nu$ , utilizamos la relación entre estos exponentes y el exponente que describe el comportamiento crítico de la susceptibilidad,  $\gamma$ , para encontrar su valor. Esta relación es, la ley de escalamiento de Fisher, ecuación (4.65). De ella concluimos que para el punto fijo de Wilson-Fisher a orden de un lazo se tiene

$$\gamma = 1 + \frac{\epsilon}{6}, \quad (4.96)$$

vale la pena remarcar que hemos usado el valor  $\eta = 0$  en la ley de escalamiento de Fisher porque estamos trabajando a un lazo y a ese orden,  $\eta = 0$ . Luego, siguiendo con el exponente asociado al comportamiento crítico del calor específico, encontramos debido a la ley de hiperescalamiento (Josephson), ecuación (1.18), que al orden de un lazo

$$\alpha = \frac{\epsilon}{6}. \quad (4.97)$$

Ahora utilizamos la ley de escalamiento de Rushbrooke, ecuación (1.16), y encontramos que el exponente asociado al comportamiento crítico del parámetro de orden, a orden de un lazo, es

$$\beta = \frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{6}. \quad (4.98)$$

Por último, el uso de la ley de Widom, ecuación (1.15), da el exponente responsable del comportamiento del parámetro de orden como función del campo externo aplicado al orden de un lazo

$$\delta = 3 + \epsilon. \quad (4.99)$$

Con todo esto, tenemos los exponentes críticos en la teoría con interacciones, los cuales corresponden a la clase de universalidad de los sistemas físicos cuyo parámetro de orden tiene una sola componente ( $n = 1$ ) y dimensionalidad  $d = 4 - \epsilon$ . Un hecho notable aquí es que la teoría está definida para cualquier  $d$  real, inclusive para  $d = 4$ . De hecho, en este caso, los exponentes de la teoría con interacciones (al orden de un lazo) resultan ser los exponentes de la teoría de campo promedio.

#### 4.4 Renormalización Ambientalmente Amigable

En las secciones anteriores vimos como aplicar la teoría de renormalización. En particular, el grupo de renormalización a un cálculo de exponentes críticos. Vimos como el grupo de renormalización en forma diferencial puede servir para "exponenciar" naturalmente la serie de perturbaciones asociada a una cantidad como la susceptibilidad. Usamos la expansión en  $\epsilon$  para encontrar el punto fijo de Wilson-Fisher y consecuentemente los exponentes críticos. En esta sección intentaremos aplicar el grupo de renormalización al cálculo de una función de escalamiento que describe un *entrecruzamiento dimensional* que no se puede describir dentro del marco de la expansión en  $\epsilon$ . Se trata de un ferromagneto en  $d$  dimensiones de tipo Ising cuya geometría es la de una película de tamaño  $L$  con condiciones de frontera periódicas. Veremos que este sistema se encuentra en la misma clase de universalidad que el modelo de Ising en un campo magnético transversal que puede usarse para describir un tipo de ferromagneto cuántico.

Antes de presentar el cálculo vale la pena pensar en cuales son los cambios que se esperan en términos de renormalización aplicada a una película. En términos de coarse graining - muchos. Si pensamos en coarse graining en una película de dos dimensiones de tamaño  $N \times M$  donde  $M \ll N$ . Después de sumar sobre cada tercer renglón y columna, de manera análoga a lo que hicimos en la sección 4.1, llegamos a un sistema efectivo con  $NM/4$  espines. Se puede repetir este proceso  $n$  veces, pero cuando  $2^n = M$ , el proceso ya no puede continuar en la dirección  $M$  aunque sí puede hacerlo en la dirección  $N$ . Vemos entonces que hay un *entrecruzamiento dimensional* en el comportamiento del coarse graining. Para escalas pequeñas ( $2^n \ll M$ ) se parece más a un coarse graining en un sistema de dos dimensiones, pero a escalas grandes ( $2^n \gg M$ ) se parece más a un coarse graining en una dimensión. Así, el coarse graining captura natural e intuitivamente el *entrecruzamiento* en la naturaleza de los grados de libertad efectivos como función de la escala. Dadas las desventajas asociadas con el coarse graining que mencionamos anteriormente, vale la pena pensar en si es posible implementar el grupo de renormalización en forma de

reparametrizaciones de manera que también pueda tomar en cuenta este entrecruzamiento dimensional tanto cualitativa como cuantitativamente.

Hemos visto que una reparametrización puede ser especificada por un conjunto de condiciones de normalización. Entonces buscaremos un conjunto de condiciones que nos permita describir el entrecruzamiento entre  $d$  y  $d - 1$  dimensiones como función de  $L$ . Vimos anteriormente que la renormalización de un sistema con interacciones, en el que se desprecian las interacciones, no sirve para llegar a una descripción confiable del sistema por la simple razón que un sistema con interacciones es extremadamente diferente a un sistema sin interacciones cerca de la temperatura crítica, donde las fluctuaciones juegan un papel muy importante. Un conjunto de condiciones que respetan la existencia de interacciones, ecuaciones (4.57)-(4.60), llevó a un grupo de renormalización que si fué capaz de describir y controlar los efectos de las fluctuaciones aún a la temperatura crítica. La pregunta es, ¿cómo aplicamos la lección aprendida en el caso de una teoría con interacciones a este problema de entrecruzamiento dimensional? Físicamente es claro que los grados de libertad efectivos dependen de  $L$  así que una renormalización "ambientalmente amigable" debe depender de  $L$  también. Para ver esto vamos a renormalizar usando un conjunto de parámetros que no dependen de  $L$  a través de las condiciones de normalización

$$\Gamma^{(2)}(0, t_i(\kappa), \lambda_i(\kappa), L = \infty, \kappa) = \kappa^2, \quad (4.100)$$

$$\Gamma^{(2,1)}(0, t_i(\kappa), \lambda_i(\kappa), L = \infty, \kappa) = 1, \quad (4.101)$$

$$\left. \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial k^2}(k, t_i(\kappa), \lambda_i(\kappa), L = \infty, \kappa) \right|_{k=0} = 1, \quad (4.102)$$

$$\Gamma^{(4)}(0, t_i(\kappa), \lambda_i(\kappa), L = \infty, \kappa) = \lambda_i(\kappa). \quad (4.103)$$

Las tres últimas condiciones sirven para fijar las tres constantes de renormalización multiplicativas (4.15) en términos de una longitud de correlación de referencia  $\kappa^{-1}$ . La primera sirve para fijar la relación entre la longitud de correlación y la temperatura  $t$ . Nótese que estos parámetros están asociados al sistema infinito en  $d$  dimensiones, así que  $t_i \propto T - T_c(\infty)$  y  $\kappa^{-1}$  es una longitud de correlación en el sistema infinito.

Concentrándonos en la renormalización del acoplamiento, la condición (4.103) nos sirve para calcular la función beta

$$\kappa \frac{d\bar{\lambda}_i}{d\kappa} = -(4-d)\bar{\lambda}_i + A(d)\bar{\lambda}_i^2, \quad (4.104)$$

la cual es la misma ecuación que la (4.82) y por lo tanto muestra los puntos fijos encontrados en la sección 4.3.5, i.e. el punto fijo gaussiano y el punto fijo de Wilson-Fisher en  $d$  dimensiones. Sin embargo, dado que sabemos que a escalas  $\kappa < L^{-1}$ , el sistema se parece a un sistema de  $d-1$  dimensiones, esperaríamos ver un punto fijo asociado a  $d-1$  dimensiones el cual nos daría exponentes críticos  $d-1$  dimensionales. Así, vemos que un grupo de

renormalización asociado al sistema infinito no es capaz de describir el región crítica  $d - 1$  dimensional. Es decir que una renormalización independiente de  $L$  no es ambientalmente amigable. Un conjunto adecuado de condiciones de normalización es

$$\Gamma^{(2)}(0, t(\kappa), \lambda(\kappa), L, \kappa) = \kappa^2, \quad (4.105)$$

$$\Gamma^{(2,1)}(0, t(\kappa), \lambda(\kappa), L, \kappa) = 1, \quad (4.106)$$

$$\frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial k^2}(k, t(\kappa), \lambda(\kappa), L, \kappa)|_{k=0} = 1, \quad (4.107)$$

$$\Gamma^{(4)}(0, t(\kappa), \lambda(\kappa), L, \kappa) = \lambda(\kappa). \quad (4.108)$$

Estas condiciones ya dependen explícitamente de  $L$ ;  $t = T - T_c(L)$  y  $\kappa^{-1}$ , la longitud de correlación en las direcciones transversales de la película. Concentrándonos en la función beta, ahora tenemos que

$$\kappa \frac{d\bar{\lambda}_L}{d\kappa} = -(4-d)\bar{\lambda}_L + \frac{3}{2}\bar{\lambda}_L^2 \kappa \frac{d\bar{\circ}}{d\kappa}, \quad (4.109)$$

donde es importante recordar que  $\bar{\circ}$  es una función de  $L$ . En el límite  $L\kappa \rightarrow \infty$ ,  $\kappa(d\bar{\circ}/d\kappa) \rightarrow A(d)$  y recuperamos el resultado (4.104) que muestra el punto fijo  $d$  dimensional. Sin embargo en el límite  $L\kappa \rightarrow 0$ ,  $\kappa(d\bar{\circ}/d\kappa) \rightarrow B(d)/L\kappa$  donde  $B(d)$  es otra constante que depende de  $d$ . Cómo interpretamos este resultado? Integrando la ecuación diferencial (4.109) vemos que en el límite  $L\kappa \rightarrow 0$ ,  $\bar{\lambda}_L \rightarrow L\kappa$  y debemos preguntarnos si esto significa que el acoplamiento va a cero y por lo tanto no hay interacciones. Este hecho no estaría de acuerdo con lo que esperamos, que en este límite el sistema sea efectivamente un sistema  $d - 1$  dimensional. Para resolver este misterio consideremos el cálculo de  $\gamma_{\varphi^3}$ . La condición de normalización (4.107) nos da  $Z_{\varphi^3}$  de la cual es fácil encontrar

$$\gamma_{\varphi^3} = 4\bar{\lambda}_L \kappa^{6-d} \bar{\circ}. \quad (4.110)$$

Dado que  $\nu = 1/(2 - \gamma_{\varphi^3})$ , esperamos que en el límite  $L\kappa \rightarrow 0$ ,  $\gamma_{\varphi^3} \rightarrow (5-d)/3$ , lo cual se espera de los resultados de la sección anterior para un sistema en  $d - 1$  dimensiones. Al tomar el límite  $L\kappa \rightarrow 0$ ,  $\bar{\circ} \sim \kappa^{d-6}/L\kappa$  y aparentemente  $\gamma_{\varphi^3} \rightarrow \infty$ , lo cual no tiene sentido. Sin embargo, como hemos visto,  $\bar{\lambda}_L \sim L\kappa$  va a cero. Como veremos, la divergencia y el cero se cancelan para dar el resultado esperado. Esta cancelación se ve como un milagro solamente porque trabajamos con un acoplamiento  $\lambda$  que es poco natural en el límite  $L\kappa \rightarrow 0$ . Este acoplamiento tiene dimensión  $4 - d$  y está asociado de manera natural con  $d$  dimensiones. Si hubiéramos considerado  $\lambda\varphi^4$  en  $d - 1$  dimensiones habríamos encontrado un acoplamiento de dimensión  $5 - d$ . Si se define el acoplamiento  $\bar{u} = \bar{\lambda}_L/L\kappa$  se encuentra que en el límite  $L\kappa \rightarrow 0$

$$\kappa \frac{d\bar{u}}{d\kappa} = -(5-d)\bar{u} + A(d-1)\bar{u}^2, \quad (4.111)$$

lo cual muestra de manera más clara el punto fijo  $d - 1$  dimensional. Es claro que no podemos cambiar la física a través de un cambio en la notación como entre  $\lambda_L$  y  $u$ . Simplemente, la física se manifiesta más en un cierto límite por el uso de una notación u otra. Es interesante definir otro acoplamiento,  $h$  - el acoplamiento flotante. Este se define por la condición que el coeficiente de  $h^2$  en la función beta que resulta sea uno. Se encuentra

$$\beta(h, z) = -\epsilon(z)h + h^2, \tag{4.112}$$

donde  $\epsilon(z) = 4 - d_{ef}$ ,  $z = L\kappa$  y para condiciones de frontera periódicas

$$\epsilon(z) = 5 - d - (7 - d) \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4\pi^2 n^2}{z^2} \left(1 + \frac{4\pi^2 n^2}{z^2}\right)^{\frac{d-1}{2}}}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{4\pi^2 n^2}{z^2}\right)^{\frac{d-1}{2}}}. \tag{4.113}$$

Cuando  $z \rightarrow \infty$ ,  $\epsilon \rightarrow 4 - d$  y cuando  $z \rightarrow 0$ ,  $\epsilon \rightarrow 5 - d$ . Así, vemos que la función beta (4.112) ya contiene el entrecruzamiento total entre  $d$  y  $d - 1$  dimensiones y como la renormalización ambientalmente amigable es capaz de dar cuenta del comportamiento que es imposible de capturar usando alguna técnica estándar. En términos de  $h$

$$\gamma_{\varphi^2} = \frac{h}{3}, \tag{4.114}$$

y por supuesto a un lazo,  $\gamma_{\varphi} = 0$ .

Finalmente, para calcular una función de escalamiento regresamos a la ecuación (4.112). Seleccionamos  $\kappa = \xi_L^{-1}$  donde  $\xi_L$  es la longitud de correlación en el sistema de interés para encontrar

$$(T - T_c(L)) = \int_0^{\xi_L^{-1}} dx x e^{-\int_x^{\xi_L^{-1}} \frac{d^2}{2} h(x)}, \tag{4.115}$$

donde  $\kappa_i$  es una escala microscópica que en el caso  $d < 4$  puede ponerse infinita. La expresión (4.115) nos da la función de escalamiento universal asociada al entrecruzamiento de la longitud de correlación entre el comportamiento crítico  $d$  dimensional y el comportamiento crítico  $d - 1$  dimensional. Esta expresión nos da la relación entre la temperatura y la longitud de correlación en el sistema  $\xi_L$ . Como esperamos, en el límite  $L/\xi_L \rightarrow \infty$ ,  $(T - T_c(L)) \sim \xi_L^{-\nu(d)}$  y en el límite  $L/\xi_L \rightarrow 0$ ,  $(T - T_c(L)) \sim \xi_L^{-\nu(d-1)}$ , donde  $\nu(d) = 1/(2 - (4 - d)/3)$  y  $\nu(d - 1) = 1/(2 - (5 - d)/3)$  son los exponentes críticos correspondientes a  $d$  y  $d - 1$  dimensiones respectivamente.

El caso de un ferromagneto cuántico (modelo de Ising en un campo transversal) es idéntico al caso anterior, salvo los cambios  $(T - T_c(L)) \rightarrow (\Gamma - \Gamma_c(T))$  y  $L \rightarrow 1/T$  donde  $\Gamma$  es el campo magnético transversal y  $\Gamma_c(T)$ , el campo transversal crítico. El límite  $T \rightarrow 0$  corresponde al límite  $L \rightarrow \infty$  en el sistema de tamaño finito y así vemos que un ferromagneto cuántico  $d$  dimensional se parece a un ferromagneto clásico en  $d + 1$  dimensiones en el límite  $T \rightarrow 0$ .

## Conclusiones

---

En esta tesis hemos desarrollado, en cierto detalle, una aproximación al formalismo del grupo de renormalización tanto en la formulación en términos de "coarse graining" como en la formulación en términos de "reparametrización". De esta última hemos obtenido los exponentes críticos de la teoría de  $\lambda\phi^4$  como series de perturbaciones en  $\epsilon = 4 - d$ . Hemos asumido la terminología de la teoría estadística de campos por ser la más accesible e intuitiva para tratar este tipo de formalismo. Esta, a su vez, la hemos desarrollado a partir del conocimiento de la fenomenología de las transiciones de fase y de la transformación de Hubbard-Stratonovich. Además, hemos aplicado el grupo de renormalización al cálculo de una función de escalamiento que describe un entrecruzamiento dimensional que no se puede describir dentro del marco de la expansión en  $\epsilon$ . Este ejemplo, que se trata de un ferromagneto de tipo Ising en  $d$  dimensiones con la geometría de una película de tamaño  $L$  con condiciones de frontera periódicas, fue tratado utilizando la teoría de renormalización ambientalmente amigable, y como se hizo notar a lo largo de esa sección, algún otro método de renormalización de teoría de campos que no toma en cuenta el tamaño finito de algunas de las dimensiones del sistema no hubiera sido útil para describir este comportamiento. Los entrecruzamientos son inducidos por un parámetro asimétrico que puede pensarse como una variable "ambiental", tal como la temperatura, el tamaño del sistema, un campo magnético, etc. El formalismo de renormalización ambientalmente amigable ofrece una aproximación bastante general a la solución de problemas en los que se encuentra comportamiento de entrecruzamiento además del cálculo de funciones de escalamiento. Esta es la idea clave que se encuentra detrás de la noción de entrecruzamiento, la naturaleza cualitativamente diferente de los grados de libertad del sistema son función de la "escala" y del "ambiente". Esta idea implementa una renormalización que es capaz de tomar en cuenta los grados de libertad efectivos en una manera perturbativamente confiable, ---renormalización ambientalmente amigable.

## Apéndice A

### Relación entre las Funciones de Correlación del Modelo de Ising

El objeto de este apéndice es encontrar la relación que guardan las funciones de correlación entre espines  $(s_1 s_2 \cdots s_N)$  con las funciones de correlación asociadas a los campos continuos  $\psi_i$ ,  $(\psi_1 \psi_2 \cdots \psi_N)$ . Esto es de interés porque una tal relación nos provee del conocimiento de los valores esperados de los campos de una representación con respecto a los campos de la otra representación, la cual no es clara a priori debido a la complejidad y el número de transformaciones que llevamos a cabo para pasar de una a la otra.

Primero vamos a considerar las funciones desconectadas, las cuales en términos mecánico-estadísticos representan los "promedios relativos" de las cantidades de interés. O en el lenguaje de la teoría de campos, son el análogo de las funciones de Green desconectadas. Luego consideraremos las funciones conectadas, las cuales pueden ser calculadas a partir de las primeras y son el análogo de las funciones de Green conectadas.

La idea para relacionar las funciones de correlación en ambas representaciones es darnos cuenta que tenemos dos representaciones para la función de partición en el espacio de configuraciones. Una expresada directamente en términos de las variables de espín del sistema, ecuación (A.1), y la otra expresada en términos de los campos  $\psi_i$ , ecuación (A.2).<sup>24</sup>

Podemos caracterizar a cada una de las representaciones para la función de partición poniéndole un subíndice que exprese las variables de las cuales depende explícitamente, esto es

$$Z_s(H_i) = \sum_{\{s_i\}} e^{\sum_{i,j} K_{ij} s_i s_j + \sum_i H_i s_i}, \quad (\text{A.1})$$

$$Z_\psi(H_i) = C' e^{-i H_i V_i^{-1} H_i} \int \prod_{i=1}^N d\psi_i e^{-\psi_i V_i \psi_i + H_i \psi_i + \sum_i \ln(\cosh 2V_i \psi_i)}, \quad (\text{A.2})$$

donde hemos definido la constante  $C'$  como

$$C = e^{-NA} [\det((2\pi)^{-1} V_{ij})]^{1/2} 2^N. \quad (\text{A.3})$$

<sup>24</sup> Estas ecuaciones, (A.1) y (A.2), corresponden a las expresiones (2.60) y (2.76) de la sección 2.5.

Como dijimos, estas dos expresiones (A.1) y (A.2), son representaciones para la misma ecuación. De tal manera que cualquier operación que apliquemos a alguna de ellas dará el mismo resultado que aplicarlo a la otra.

De la ecuación (A.1) nos damos cuenta que al tomar las derivadas funcionales de  $Z_0$  con respecto a  $H_{h_1}, H_{h_2}, \dots, H_{h_N}$  obtenemos los promedios termodinámicos de  $s_{h_1}, s_{h_2}, \dots, s_{h_N}$ , respectivamente. Por esta razón podemos definir la *función de correlación desconectada* entre los espines  $s_{h_1}, s_{h_2}, \dots, s_{h_N}$  en la forma

$$\begin{aligned} \langle s_{h_1}, s_{h_2}, \dots, s_{h_N} \rangle &= \frac{1}{Z_0} \sum_{\{s_i\}} s_{h_1}, s_{h_2}, \dots, s_{h_N} e^{\sum_{i,j} K_{ij} s_i s_j + \sum_i H_i s_i}, \\ &= \frac{1}{Z_0} \frac{\delta^N Z_0 \{H_i\}}{\delta H_{h_1} \delta H_{h_2} \dots \delta H_{h_N}}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

De la misma manera, tomando la definición de promedio de una cantidad observable en la mecánica estadística, definimos la *función de correlación desconectada* entre los campos  $\psi_{h_1}, \psi_{h_2}, \dots, \psi_{h_N}$  en la forma

$$\begin{aligned} \langle \psi_{h_1}, \psi_{h_2}, \dots, \psi_{h_N} \rangle &= \frac{1}{Z_\psi} C e^{-i H_i V_i^{-1} H_i} \\ &\times \int \prod_{i=1}^N d\psi_i \psi_{h_1} \psi_{h_2} \dots \psi_{h_N} e^{-\psi_i V_i \psi_i + H_i \psi_i + \sum_{i,j} \ln(\cosh 2V_{ij} \psi_i \psi_j)}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Por otra parte, al calcular las derivadas funcionales de  $Z_\psi \{H_i\}$  respecto a las fuentes  $H_{h_1}, H_{h_2}, \dots, H_{h_N}$ , donde  $h_i = 1, 2, \dots, N$ , obtenemos las relaciones

$$\begin{aligned} \langle s_{h_1} \rangle &= \frac{1}{Z_\psi} \frac{\delta Z_\psi}{\delta H_{h_1}} \\ &= c_{h_1} + \langle \psi_{h_1} \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} \langle s_{h_1} s_{h_2} \rangle &= \frac{1}{Z_\psi} \frac{\delta^2 Z_\psi}{\delta H_{h_1} \delta H_{h_2}} \\ &= (c_{h_1 h_2} + c_{h_2 h_1}) + c_{h_1} \langle \psi_{h_2} \rangle + c_{h_2} \langle \psi_{h_1} \rangle + \langle \psi_{h_1} \psi_{h_2} \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} \langle s_{h_1} s_{h_2} s_{h_3} \rangle &= \frac{1}{Z_\psi} \frac{\delta^3 Z_\psi}{\delta H_{h_1} \delta H_{h_2} \delta H_{h_3}} \\ &= (c_{h_1 h_2} c_{h_3} + c_{h_2 h_3} c_{h_1} + c_{h_3 h_1} c_{h_2} + c_{h_1} c_{h_2} c_{h_3}) \\ &+ (c_{h_1 h_2} + c_{h_2 h_1}) \langle \psi_{h_3} \rangle + (c_{h_2 h_3} + c_{h_3 h_2}) \langle \psi_{h_1} \rangle + (c_{h_3 h_1} + c_{h_1 h_3}) \langle \psi_{h_2} \rangle \\ &+ c_{h_1} \langle \psi_{h_2} \psi_{h_3} \rangle + c_{h_2} \langle \psi_{h_3} \psi_{h_1} \rangle + c_{h_3} \langle \psi_{h_1} \psi_{h_2} \rangle + \langle \psi_{h_1} \psi_{h_2} \psi_{h_3} \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\langle s_{h_1} s_{h_2} \dots s_{h_N} \rangle = \frac{1}{Z_\psi} \frac{\delta^N Z_\psi}{\delta H_{h_1} \delta H_{h_2} \dots \delta H_{h_N}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum' (c_{k_1 k_2 c_{k_3} k_4} \cdots c_{k_{N-1} k_N} + c_{k_1 k_2 c_{k_3} k_4} \cdots c_{k_{N-3} k_{N-2}} c_{k_{N-1} c_{k_N}} \\
 &+ \cdots + c_{k_1 k_2 c_{k_3} c_{k_4}} \cdots c_{k_{N-1} c_{k_N}} + c_{k_1 c_{k_2} c_{k_3} c_{k_4}} \cdots c_{k_{N-1} c_{k_N}}) \\
 &+ \sum' (\psi_{k_N}) (c_{k_1 k_2 c_{k_3} k_4} \cdots c_{k_{N-3} k_{N-2}} c_{k_{N-1}} + c_{k_1 k_2 c_{k_3} k_4} \cdots c_{k_{N-3} c_{k_{N-2}}} c_{k_{N-1}} \\
 &+ \cdots + c_{k_1 k_2 c_{k_3} c_{k_4}} \cdots c_{k_{N-2} c_{k_{N-1}}} + c_{k_1 c_{k_2} c_{k_3} c_{k_4}} \cdots c_{k_{N-2} c_{k_{N-1}}}) \\
 &+ \sum' (\psi_{k_{N-1}} \psi_{k_N}) (c_{k_1 k_2 c_{k_3} k_4} \cdots c_{k_{N-3} k_{N-2}} + c_{k_1 k_2 c_{k_3} k_4} \cdots c_{k_{N-3} c_{k_{N-2}}} \\
 &+ \cdots + c_{k_1 k_2 c_{k_3} c_{k_4}} \cdots c_{k_{N-2} c_{k_{N-1}}} + c_{k_1 c_{k_2} c_{k_3} c_{k_4}} \cdots c_{k_{N-2} c_{k_{N-1}}}) \cdots \\
 &\vdots \\
 &+ \sum' (\psi_{k_1} \psi_{k_2} \cdots \psi_{k_{N-1}} \psi_{k_N}) c_{k_1} + \langle \psi_{k_1} \psi_{k_2} \psi_{k_3} \cdots \psi_{k_{N-1}} \psi_{k_N} \rangle, \quad (A.9)
 \end{aligned}$$

donde hemos definido

$$\sum' = \sum_{k_i \neq k_j \neq \cdots \neq k_N} \quad (A.10)$$

$$c_{k_i} = -\frac{1}{4} (\delta_{ik_i} V_{ij}^{-1} H_j + H_i V_{ij}^{-1} \delta_{jk_i}), \quad (A.11)$$

$$c_{k_i k_m} = -\frac{1}{4} (V_{k_i k_m}^{-1} + V_{k_m k_i}^{-1}). \quad (A.12)$$

En realidad la ecuación (A.9) sólo es válida para un número par de espines. En el caso de  $N$  impar tenemos esencialmente la misma expresión, sólo que los últimos sumandos de cada factor entre paréntesis cambian un poco.

Si introducimos las nuevas definiciones ( $N \geq 2$ )

$$\begin{aligned}
 a_N^{(par)} &= c_{k_1 k_2 c_{k_3} k_4} \cdots c_{k_{N-1} k_N} + c_{k_1 k_2 c_{k_3} k_4} \cdots c_{k_{N-3} k_{N-2}} c_{k_{N-1} c_{k_N}} \\
 &+ \cdots + c_{k_1 k_2 c_{k_3} c_{k_4}} \cdots c_{k_{N-1} c_{k_N}} + c_{k_1 c_{k_2} c_{k_3} c_{k_4}} \cdots c_{k_{N-1} c_{k_N}} \quad (A.13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_N^{(impar)} &= c_{k_1 k_2 c_{k_3} k_4} \cdots c_{k_{N-3} k_{N-1}} c_{k_N} + c_{k_1 k_2 c_{k_3} k_4} \cdots c_{k_{N-3} c_{k_{N-1}}} c_{k_N} \\
 &+ \cdots + c_{k_1 k_2 c_{k_3} c_{k_4}} \cdots c_{k_{N-1} c_{k_N}} + c_{k_1 c_{k_2} c_{k_3} c_{k_4}} \cdots c_{k_{N-1} c_{k_N}} \quad (A.14)
 \end{aligned}$$

$$a_1^{(par)} = a_1^{(impar)} \equiv c_{k_1} \quad (A.15)$$

podemos escribir las relaciones generales para las funciones de correlación desconectadas en la forma

$N$  par,

$$\begin{aligned}
 \langle s_{k_1} s_{k_2} \cdots s_{k_N} \rangle &= \sum' a_N^{(par)} + \sum' (\psi_{k_N}) a_{N-1}^{(par)} + \sum' (\psi_{k_{N-1}} \psi_{k_N}) a_{N-2}^{(par)} + \cdots \\
 &+ \sum' (\psi_{k_2} \psi_{k_3} \cdots \psi_{k_{N-1}} \psi_{k_N}) a_1^{(par)} + \langle \psi_{k_1} \psi_{k_2} \cdots \psi_{k_{N-1}} \psi_{k_N} \rangle, \quad (A.16)
 \end{aligned}$$

$N$  impar,

$$\begin{aligned}
 \langle s_{k_1} s_{k_2} \cdots s_{k_N} \rangle &= \sum' a_N^{(impar)} + \sum' (\psi_{k_N}) a_{N-1}^{(par)} + \sum' (\psi_{k_{N-1}} \psi_{k_N}) a_{N-2}^{(impar)} + \cdots \\
 &+ \sum' (\psi_{k_2} \psi_{k_3} \cdots \psi_{k_{N-1}} \psi_{k_N}) a_1^{(par)} + \langle \psi_{k_1} \psi_{k_2} \cdots \psi_{k_{N-1}} \psi_{k_N} \rangle. \quad (A.17)
 \end{aligned}$$

Estas son las relaciones entre la función de correlación desconectada de  $N$  espines arbitrarios y las funciones de correlación desconectadas de los  $N$  campos  $\psi_i$ . Como puede notarse, la relación no es simple ya que la función de correlación desconectada de  $m$  "campos discretos"  $s_i$  está relacionada a todas las posibles correlaciones de  $l$  campos continuos  $\psi_i$  ( $l \leq m$ ).

Ahora vamos a calcular las relaciones entre las funciones conectadas. Comencemos definiendo la *función de correlación conectada* de  $N$  espines. Para ello nos damos cuenta que las derivadas funcionales del  $\ln Z_s\{H_i\}$  respecto de  $H_{k_i}$  generan las expresiones que en teoría de campos concuerdan con las funciones de  $N$  puntos conectadas. Por lo tanto, definimos la función de correlación conectada entre  $N$  espines arbitrarios mediante la ecuación

$$\langle s_{k_1} s_{k_2} \dots s_{k_N} \rangle_c = \frac{\delta^N}{\delta H_{k_1} \delta H_{k_2} \dots \delta H_{k_N}} \ln Z_s\{H_i\}. \quad (\text{A.18})$$

De la misma forma, nos damos cuenta que la definición adecuada para las *función de correlación conectada* de los  $N$  campos  $\psi_i$  es

$$\langle \psi_{k_1} \psi_{k_2} \dots \psi_{k_N} \rangle_c = \frac{\delta^N}{\delta H_{k_1} \delta H_{k_2} \dots \delta H_{k_N}} \ln \left[ \frac{Z_\psi\{H_i\}}{C e^{-i H_i V_i^{-1} H_i}} \right]. \quad (\text{A.19})$$

Al calcular las derivadas funcionales representadas en la expresión anterior obtenemos directamente

$$\langle \psi_{k_1} \rangle_c = \langle s_{k_1} \rangle_c - c_{k_1}, \quad (\text{A.20})$$

$$\langle \psi_{k_1} \psi_{k_2} \rangle_c = \langle s_{k_1} s_{k_2} \rangle_c - c_{k_1 k_2}, \quad (\text{A.21})$$

$$\langle \psi_{k_1} \psi_{k_2} \psi_{k_3} \rangle_c = \langle s_{k_1} s_{k_2} s_{k_3} \rangle_c, \quad (\text{A.22})$$

$$\vdots$$

$$\langle \psi_{k_1} \psi_{k_2} \dots \psi_{k_N} \rangle_c = \langle s_{k_1} s_{k_2} \dots s_{k_N} \rangle_c, \quad (\text{A.23})$$

o al invertir estas relaciones para las correlaciones conectadas entre espines en términos de las correlaciones conectadas entre los campos continuos tenemos

$$\langle s_{k_1} \rangle_c = \langle \psi_{k_1} \rangle_c + c_{k_1}, \quad (\text{A.24})$$

$$\langle s_{k_1} s_{k_2} \rangle_c = \langle \psi_{k_1} \psi_{k_2} \rangle_c + c_{k_1 k_2}, \quad (\text{A.25})$$

$$\langle s_{k_1} s_{k_2} s_{k_3} \rangle_c = \langle \psi_{k_1} \psi_{k_2} \psi_{k_3} \rangle_c, \quad (\text{A.26})$$

$$\vdots$$

$$\langle s_{k_1} s_{k_2} \dots s_{k_N} \rangle_c = \langle \psi_{k_1} \psi_{k_2} \dots \psi_{k_N} \rangle_c. \quad (\text{A.27})$$

Estas son las relaciones que guardan las funciones de correlación conectadas de los espines y las funciones de correlación conectadas de los campos  $\psi_i$ . Como puede notarse, estas

relaciones si son simples, pues los valores "promedio" de una sola variable discreta difieren en sólo una constante del valor de la variable continua en la misma posición. Lo mismo sucede para las funciones de correlación conectada de "dos puntos", y para tres o más campos, las funciones de correlación conectadas son exactamente las mismas en ambas representaciones.

## Apéndice B

### Una Integral Útil

Debido a que dos de los principales diagramas que utilizaremos para calcular exponentes críticos en la teoría de  $\lambda\varphi^4$  pueden escribirse (cuando los momentos externos  $k_i = 0$ ) en términos de la siguiente integral

$$J_n(d) = \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2 + m_0^2)^n}, \quad (\text{B.1})$$

en este apéndice nos concentraremos en calcularla. Para hacer esto, comencemos con  $J_1(d)$  y luego procedamos por inducción; pero antes escribamos tres relaciones esenciales para llevar a cabo el cálculo,

$$S^d = \int d\Omega = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}, \quad (\text{B.2})$$

la superficie de la esfera unitaria en  $d$  dimensiones ( $d$ -esfera),<sup>44</sup>

$$\frac{\Gamma(\nu)}{\mu^\nu} = \int_0^\infty dx x^{\nu-1} e^{-\mu x}, \quad (\text{B.3})$$

una expresión que se obtiene fácilmente de la definición común de la función  $\Gamma$  de Euler; y

$$\frac{1}{\mu} = \int_0^\infty dx e^{-\mu x}, \quad (\text{B.4})$$

el caso particular  $\nu = 1$  de la ecuación (B.3).

Utilizando coordenadas esféricas generalizadas a  $d$  dimensiones, podemos escribir inmediatamente el elemento de volumen  $d^d l = l^{d-1} dl d\Omega$ , luego al llevar a cabo la integración sobre los ángulos en (B.1) y sustituir el valor de la superficie de la  $d$ -esfera, ecuación (B.2), obtenemos

$$J_1(d) = \frac{2}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d}{2})} I_1(d), \quad (\text{B.5})$$

<sup>44</sup> En este trabajo asumiremos la convención de llamar  $d$ -esfera a la esfera unitaria "máxima" contenida en un espacio  $d$ -dimensional. De esta forma, la  $d$ -esfera será una variedad de  $d - 1$  dimensiones.

donde

$$I_1(d) = \int_0^{\infty} \frac{dl l^{d-1}}{l^2 + m_a^2}. \quad (\text{B.6})$$

Ahora, usando la ecuación (B.4) con  $\mu = l^2 + m_a^2$  podemos transformar  $I_1(d)$  en la integral doble

$$I_1(d) = \int_0^{\infty} dl l^{d-1} \int_0^{\infty} dx e^{-(l^2 + m_a^2)x}, \quad (\text{B.7})$$

la cual se puede resolver haciendo el cambio de variable  $p = l^2$  e intercambiando el orden de las integrales. Con esto resulta

$$I_1(d) = \frac{\Gamma(\frac{d}{2}) \Gamma(1 - \frac{d}{2})}{2(m_a^2)^{1-d}}. \quad (\text{B.8})$$

Al sustituir este resultado en (B.5), obtenemos directamente

$$J_1(d) = \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{\frac{1}{2}} (m_a^2)^{1-d}}. \quad (\text{B.9})$$

Por otra parte, procediendo por inducción en la ecuación (B.1) con  $n = 1$ , podemos darnos cuenta que

$$J_n(d) = \frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n)} \left( \frac{d}{dm_a^2} \right)^{n-1} J_1(d), \quad (\text{B.10})$$

así al aplicar esta regla en la ecuación (B.9) obtenemos finalmente

$$J_n(d) = \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{\frac{1}{2}} (m_a^2)^{n-d} \Gamma(n)}. \quad (\text{B.11})$$

## Apéndice C

### Cálculo de Algunos Diagramas Usando Parámetros de Feynman

En este apéndice estamos interesados en calcular dos de los diagramas de las funciones de vértice de cuatro y dos puntos que son  $\bigcirc$  y  $\ominus$ . El interés surge en que algunas de las expansiones que utilizamos en los cálculos del grupo de renormalización contienen estos dos diagramas.

Primero calcularemos el diagrama  $\bigcirc$ . Ya hemos aprendido que la representación más simple de estos diagramas es la que tienen en el espacio de momentos, por tal motivo utilizaremos sus representaciones en el espacio de momentos. Asumiremos la convención que hemos adoptado a lo largo de este trabajo, que es denotar con  $k$  a los momentos externos de un diagrama y con la letra  $q$  a los momentos que fluyen por los lazos de dichas gráficas. De esta manera, comenzamos con la expresión integral

$$\bigcirc = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 + m^2) [(k_1 + k_2 - q)^2 + m^2]}. \quad (C.1)$$

Podemos reescribir el integrando de esta ecuación, i.e. los propagadores, mediante la identidad

$$\frac{1}{D_1^{a_1} D_2^{a_2}} = \frac{\Gamma(a_1 + a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \int_0^1 dx \frac{x^{a_1-1} (1-x)^{a_2-1}}{[xD_1 + (1-x)D_2]^{a_1+a_2}}. \quad (C.2)$$

Para nuestro caso de la ecuación (C.1) podemos identificar inmediatamente  $a_1 = a_2 = 1$  y los parámetros de Feynman  $D_1 = q^2 + m^2$ ,  $D_2 = (k_1 + k_2 - q)^2 + m^2$ . Con estas identificaciones y la ayuda de la identidad (C.2), tenemos que es posible reescribir (C.1) como

$$\bigcirc = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \frac{1}{[x(q^2 + m^2) + (1-x)[(k - q)^2 + m^2]]^2}, \quad (C.3)$$

con  $k = k_1 + k_2$ . Haciendo un poco de álgebra con el denominador del integrando podemos darnos cuenta que es posible reescribirlo en la forma

$$[x(q^2 + m^2) + (1-x)[(k - q)^2 + m^2]]^2 = [q^2 - 2qk(1-x) + k^2(1-x) + m^2]^2. \quad (C.4)$$

Luego, llevando a cabo el cambio de variable

$$q' = q - k(1 - x), \tag{C.5}$$

podemos simplificar aún más la ecuación (C.4) para escribirla como

$$[x(q^2 + m^2) + (1 - x)[(k - q)^2 + m^2]]^2 = [q'^2 + k^2x(1 - x) + m^2]^2. \tag{C.6}$$

Entonces al sustituir este resultado en la integral (C.3) e invertir el orden de las integra- ciones llegamos a

$$\bigcirc = \int_0^1 dx \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{[q'^2 + k^2x(1 - x) + m^2]^2}. \tag{C.7}$$

En esta ecuación ya podemos utilizar el resultado (ecuación (B.11)) del apéndice anterior para obtener la expresión general

$$\bigcirc = \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2x(1 - x) + m^2]^{2 - \frac{d}{2}}}. \tag{C.8}$$

Para concluir con este diagrama podemos evaluarlo en  $k_i = 0$  (momentos externos cero),  $m = \kappa$  (una escala arbitraria) y llevar a cabo su expansión en  $\epsilon$  ( $\epsilon = 4 - d$ ). Haciendo esto en la ecuación (C.8) encontramos la expansión

$$\bigcirc_{k_i=0, m=\kappa} = \frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} (4\pi)^{\frac{\epsilon}{2}} \kappa^{-\epsilon}. \tag{C.9}$$

Ahora, tomemos la expresión integral para el siguiente diagrama. Esto es, consideremos

$$\begin{aligned} \Theta &= \int \frac{d^d q_1 d^d q_2}{(2\pi)^{2d}} \frac{1}{(q_1^2 + m^2)(q_2^2 + m^2)[(k - q_1 - q_2)^2 + m^2]} \\ &= \int \frac{d^d q_1}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q_1^2 + m^2)} \int \frac{d^d q_2}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q_2^2 + m^2)[(k - q_1 - q_2)^2 + m^2]}, \end{aligned} \tag{C.10}$$

en esta ecuación identificamos rápidamente la integral sobre  $q_2$ , la cual fué la que calculamos en el diagrama anterior. Utilizando el resultado de la ecuación (C.8) podemos reescribir el diagrama en la forma

$$\Theta = \int \frac{d^d q_1}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q_1^2 + m^2)} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^1 dx \frac{1}{[(k - q_1)^2x(1 - x) + m^2]^{2 - \frac{d}{2}}}. \tag{C.11}$$

Utilizando ahora la ecuación (C.2), reescribimos los propagadores de la anterior como

$$\frac{1}{(q_1^2 + m^2)} \frac{1}{[(k - q_1)^2 x(1-x) + m^2]^{2-d}} = \frac{\Gamma(3-d)}{\Gamma(2-d)} \times \int_0^1 dy \frac{(1-y)^{1-d}}{[y(q_1^2 + m^2) + (1-y)((k - q_1)^2 x(1-x) + m^2)]^{3-d}}. \quad (C.12)$$

Nuevamente hacemos unas simplificaciones algebraicas en el denominador del integrando de la ecuación anterior y vemos que lo podemos escribir en la forma

$$\begin{aligned} [y(q_1^2 + m^2) + (1-y)((k - q_1)^2 x(1-x) + m^2)]^{3-d} &= [(y + x(1-x)(1-y))q_1^2 \\ &\quad - 2kx(1-x)(1-y)q_1 + k^2 x(1-x)(1-y) + m^2]^{3-d}, \end{aligned} \quad (C.13)$$

ahora hacemos el cambio de variable

$$q_1 = q_1 - k \frac{x(1-x)(1-y)}{y + x(1-x)(1-y)}, \quad (C.14)$$

y haciendo unas simplificaciones escribimos el lado derecho de la ecuación (C.13) como

$$\begin{aligned} [y(q_1^2 + m^2) + (1-y)((k - q_1)^2 x(1-x) + m^2)]^{3-d} &= (y + x(1-x)(1-y))^{3-d} \\ &\quad \times \left( q_1'^2 + \frac{k^2 xy(1-x)(1-y)}{(y + x(1-x)(1-y))^2} + \frac{m^2}{y + x(1-x)(1-y)} \right)^{3-d}, \end{aligned} \quad (C.15)$$

con esta ecuación y la (C.12) reescribimos la integral para el diagrama

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{\Gamma(3-d)}{(4\pi)^d} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{(1-y)^{1-d}}{(y + x(1-x)(1-y))^{3-d}} \\ &\quad \times \int \frac{d^d q_1}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q_1^2 + \frac{k^2 xy(1-x)(1-y)}{(y + x(1-x)(1-y))^2} + \frac{m^2}{y + x(1-x)(1-y)})^{3-d}}. \end{aligned} \quad (C.16)$$

En ésta ya podemos calcular la última integral con el uso de la ecuación (B.11). Haciendo esto y simplificando encontramos la expresión general

$$\Theta = \frac{\Gamma(3-d)}{(4\pi)^d} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{(1-y)^{1-d} (y + x(1-x)(1-y))^{d(1-d)}}{(x(1-x)(1-y)(k^2 y + m^2) + m^2 y)^{3-d}}. \quad (C.17)$$

Ahora estamos interesados en evaluar la derivada respecto a  $k^2$  a momento externo cero y hacer una expansión en  $\epsilon$  de esta. Así, al calcular la derivada y evaluar en  $k = 0$ , utilizando el hecho que  $\epsilon = 4 - d$ , obtenemos

$$\frac{d}{dk^2} \Theta_{m=n, k=0} = \frac{(1-\epsilon)\Gamma(-1+\epsilon)}{(4\pi)^4} (4\pi)^\epsilon \kappa^{-2\epsilon} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \\ \times (1-y)^{\frac{1}{2}} xy(1-x) [y+x(1-x)(1-y)]^{-3} [y+x(1-x)(1-y)]^{\frac{1}{2}}. \quad (C.18)$$

Hasta aquí los resultados han sido exactos, pero vamos a comenzar la aproximación mediante un desarrollo en potencias de  $\epsilon$  del integrando de la ecuación anterior. Haciendo esto, llegamos a la expresión

$$\frac{d}{dk^2} \Theta_{m=n, k=0} = \frac{(1-\epsilon)\Gamma(-1+\epsilon)}{(4\pi)^4} (4\pi)^\epsilon \kappa^{-2\epsilon} \left[ \int_0^1 dx \int_0^1 dy f(x, y) \right. \\ \left. + \frac{\epsilon}{2} \int_0^1 dx \int_0^1 dy f(x, y) \ln[(1-y)(y+x(1-x)(1-y))] \right. \\ \left. + \frac{\epsilon^2}{4} \int_0^1 dx \int_0^1 dy f(x, y) \ln(1-y) \ln(y+x(1-x)(1-y)) \right], \quad (C.19)$$

donde hemos definido la función

$$f(x, y) = \frac{xy(1-x)}{[y+x(1-x)(1-y)]^3}. \quad (C.20)$$

Como podemos darnos cuenta, cada una de estas integrales ya es un número real. Tomando en cuenta este hecho, podemos escribir la expresión final para el desarrollo en  $\epsilon$  del diagrama

$$\frac{d}{dk^2} \Theta_{m=n, k=0} = \frac{-\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^4} (4\pi)^\epsilon \kappa^{-2\epsilon} \left[ a_1 + \frac{\epsilon}{2} a_2 + \frac{\epsilon^2}{4} a_3 \right], \quad (C.21)$$

donde las constantes  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$  corresponden a las integrales de la ecuación (C.19) respectivamente. Es posible calcular el comportamiento dominante de esta integral y se puede ver que éste es

$$\Phi_{m=n, k=0} = \frac{-\Gamma(\epsilon)}{2(4\pi)^4} (4\pi)^\epsilon \kappa^{-2\epsilon}, \quad (C.22)$$

donde hemos definido  $\Phi = d\Theta/dk^2$ . Esta es la expresión con la cual concluimos este apéndice.

## Referencias

---

- [1] D. J. Amit, *Field Theory, The Renormalization Group, and Critical Phenomena*, McGraw-Hill New York 1978.
- [2] M. N. Barber, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, Vol. 8, eds C. Domb and J. L. Lebowitz, Academic Press London 1983.
- [3] R. J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Academic Press London 1989.
- [4] T. H. Berlin and M. Kac, "The Spherical Model of a Ferromagnet", *Phys. Rev.*, Vol. 86, No. 6 (1952).
- [5] N. N. Bogoliouov and D. V. Shirkov, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 103 (1955) 203; *ibid.* 391.
- [6] J. L. Cardy (Editor), *Current Physics Sources and Comments, Vol. 2: Finite Size Scaling*, North-Holland 1988.
- [7] D. Chandler, *Introduction to Modern Statistical Mechanics*, Oxford University Press 1987.
- [8] R. P. Feynman and A. P. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill 1965.
- [9] M. E. Fisher, "The Renormalization Group in the Theory of Critical Behavior", *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 46, No. 4, (1974).
- [10] M. E. Fisher, "Scaling, Universality and Renormalization Group Theory", Lectures Presented at the "Advanced Course on Critical Phenomena" held during Jan. 1982 at University of Stellenbosch, South Africa.
- [11] M. E. Fisher, "Phases and Phase Diagrams: Gibb's Legacy Today", Proceedings of the Gibbs Symposium, Yale University, May 15-17, 1989.

- [12] M. Gell-Mann and F. E. Low, *Phys. Rev.* **95** (1954) 1300.
- [13] N. Goldenfeld, *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group*, Addison-Wesley 1992.
- [14] J. A. Hertz, "Quantum Critical Phenomena", *Phys. Rev. B.*, Vol. 14, No. 3 (1976).
- [15] K. Huang, *Statistical Mechanics*, John Wiley & Sons 1987.
- [16] C. Itzykson and J-M Drouffe, *Statistical Field Theory*, Cambridge University Press 1991.
- [17] C. Itzykson and J-B Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill 1980.
- [18] M. Le Bellac, *Quantum and Statistical Field Theory*, Clarendon, Oxford 1991.
- [19] H. J. Maris and L. P. Kadanoff, "Teaching the Renormalization Group", *Am. J. Phys.*, Vol. 46, No. 6 (1978).
- [20] C. Nash, *Relativistic Quantum Fields*, Academic Press London 1980.
- [21] D. O'Connor and C. R. Stephens, "Environmentally Friendly" Renormalization, *J. Mod. Phys. A*, Vol. 9, No. 16 (1994).
- [22] G. Parisi, *Statistical Field Theory*, Addison-Wesley, California 1988.
- [23] P. Pfeuty, "The Quantum-Classical Crossover Critical Behaviour of the Ising Model in a Transverse Field", *J. Phys. C*, Vol. 9, (1976).
- [24] O. Piguet and S. P. Sorella, *Algebraic Renormalization: Perturbative Renormalisation, Symmetries and Anomalies*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1995.
- [25] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*, Benjamin/Cummings 1981.
- [26] L. S. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration*, John Wiley & Sons, New York 1981.
- [27] D. V. Shirkov, "Renormalization Group in Different Fields of Theoretical Physics", Lecture Presented at the KEK Theory Division, 2-3 April, 1991.
- [28] E. Stückelberg and A. Peterman, *Helv. Phys. Acta* **26** (1953) 499.
- [29] M. A. Van Eljck, D. O'Connor and C. R. Stephens, "Critical Temperature and Amplitude Ratios from a Finite Temperature Renormalisation Group", *J. Mod. Phys. A*, Vol. 10, No. 23 (1995).

- [30] K. G. Wilson, "Problems in Physics with Many Scales of Length", *Sc. Am.*, Vol. 241, No. 2 (1979).
- [31] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford 1989.