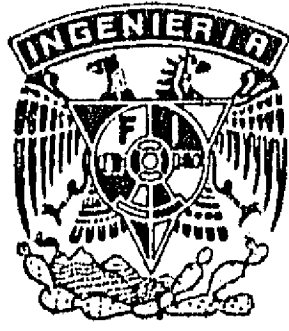


01183



DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO  
Facultad de Ingeniería

↑  
2g

**PROPAGACIÓN DEL OLEAJE EN LA  
PROXIMIDAD DE LA COSTA**

ÓSCAR ARTURO FUENTES MARILES

TESIS DOCTORAL

PRESENTADA A LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE  
POSGRADO DE LA

FACULTAD DE INGENIERÍA  
DE LA  
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

COMO REQUISITO PARA OBTENER  
EL GRADO DE  
DOCTOR EN INGENIERÍA  
(HIDRÁULICA)

DIRIGIDA POR:  
PROF. JOSÉ LUIS SÁNCHEZ BRIBIESCA

CIUDAD UNIVERSITARIA  
1996

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# TESIS CON FALLA DE ORIGEN

## Propagation of waves and induced currents.

The waves and the induced currents have a crucial effect on the studies into coastal development, harbour design or breakwater. Several methods are proposed to calculate the wave propagation. It is obtained the wave field on a two dimensional horizontal rectangular grid covering the computational area. The refraction, diffraction, partial reflection and the wave breaking are included. The wave-induced currents generated directly by action of swell and wind waves are obtained.

The basic equations for surface water waves, the equations to compute wave transformation sea ward of surf zone and equations to obtained induced-currents are deduced. Several mathematical models of the wave field and induced-currents are proposed. These models were derived by introducing differences that provide additional terms in higher-order derivatives so as to cancel out terms otherwise appearing in the truncation error. It is established a particular treatment of boundary conditions. Some examples are included.

... lo harías por el Rey. -¡No, lo haría por tí!

A mi esposa Paty, con todo mi amor. Amiga, compañera  
y alma de los mejores proyectos de mi vida.

A mis hijos Óscar y Beto con mucho cariño esperando,  
junto con su madre, que realicen sus planes y anhelos personales.

A la memoria de mi padre Óscar y mi abuelita Pachita.

A mi mamá Ana María con amor, por todo lo que me ha dado  
en la vida, y a mis hermanas Gloria, Lety, Paty, Sonia, Chela,  
Chiquis y Lupita.

A mi tío Raúl, con gran afecto.

A mis sobrinos y sobrinas, con cariño.

A mi suegra Doña Margarita por sus buenos  
deseos y amor hacia mi familia.

A mis cuñados y cuñadas, por su amistad e  
interés en las personas de mi hogar.

### TESTIMONIO DE GRATITUD:

Al Profesor José Luis Sánchez Bribiesca por hacerme participe de sus sabios consejos, sus conocimientos y su calidad humana. Ha sido un gran ejemplo para mí y un gran honor intervenir en algunos de sus múltiples trabajos.

Muchas gracias.

## *Resumen*

Determinar el oleaje cerca de las costas o de obras marítimas es muy importante para diversos estudios de la Hidráulica Marítima, como son los de diseño de estructuras marinas, operación de obras o los procesos costeros. Los planteamientos tradicionales para llevar a cabo esta determinación son limitados y poco precisos.

Se proponen varios métodos para calcular la propagación de las olas hacia la costa tomando en cuenta a la refracción, difracción y reflexión en forma simultánea, y para obtener las corrientes que induce el oleaje. Se deducen las ecuaciones fundamentales de la Mecánica de fluidos que sirven de apoyo a la teoría lineal del oleaje en tres dimensiones espaciales y, a partir de ellas se obtienen las ecuaciones básicas para calcular la propagación de las olas y de corrientes que originan.

Para obtener las características de las olas cuando avanzan a otras condiciones de profundidad donde pueden existir obstáculos para su desplazamiento, se requiere de procedimientos numéricos donde los errores de discretización sean pequeños y de un planteamiento adecuado de las condiciones de frontera. Se propusieron ecuaciones de diferencias finitas de este tipo y se presenta la deducción y justificación de las condiciones. Se incluyen varios ejemplos de aplicación de los métodos de propagación y de corrientes.

# INDICE

	Página
1. INTRODUCCIÓN .....	1
2. ECUACIONES DE MOVIMIENTO DE UN FLUIDO .....	4
2.1 Ecuación del balance de una propiedad asociada a la masa .....	5
2.1.1 <i>La propiedad por unidad de masa <math>q</math> es un escalar</i> .....	8
2.1.2 <i>La propiedad por unidad de masa <math>q</math> es un vector</i> .....	9
2.2 Ecuación de conservación de masa .....	11
2.3 Ecuación de conservación de cantidad de movimiento .....	12
2.4 Ecuación de la energía .....	16
2.4.1 <i>Flujo de energía por unidad de área</i> .....	18
2.5 Flujo con potencial .....	20
3. TEORÍA LINEAL DEL OLEAJE EN TRES DIMENSIONES ESPACIALES ...	23
3.1 Hipótesis .....	23
3.2 Condiciones de frontera .....	24
3.2.1 <i>Condición para el fondo</i> .....	25
3.2.2 <i>Condición cinemática para la superficie libre</i> .....	26
3.2.3 <i>Condición dinámica para la superficie libre</i> .....	26
3.3 Función potencial .....	26
3.4 Ecuación de dispersión .....	30
3.5 Presión .....	32
3.6 Velocidad de las partículas de agua .....	33
3.7 Desplazamiento de las partículas de agua .....	33
3.8 Energía del oleaje .....	37
3.9 Razones de flujo .....	38
3.10 Celeridad de un tren de ondas .....	40
4. REFRACCIÓN Y DIFRACCIÓN COMBINADAS .....	44
4.1 Ecuaciones de partida .....	44
4.1.1 <i>Ecuación de Laplace</i> .....	44
4.1.2 <i>Ecuación para la condición de superficie libre</i> .....	44
4.1.3 <i>Ecuación para la condición de fondo</i> .....	45
4.1.4 <i>Ecuación del potencial <math>\phi</math></i> .....	45



## INDICE

	Página
4.2	Deducción de la ecuación pendiente suave . . . . . 45
4.2.1	<i>Etapa 1. Sustitución del potencial en las ecuaciones 4.1 a 4.3 . . . . . 46</i>
4.2.2	<i>Etapa 2. Condición de frontera en el fondo en términos de la profundidad . . . . . 48</i>
4.2.3	<i>Etapa 3. Flujo de energía . . . . . 50</i>
4.2.4	<i>Etapa 4. Simplificaciones en la ecuación 4.21 por linealidad . . . . . 51</i>
4.3	Ecuación de pendiente suave con base en un potencial exponencial . . . . . 55
4.3.1	<i>Empleo de las ecuaciones de refracción-difracción . . . . . 58</i>
4.4	Versión de la ecuación de pendiente suave que incluye a la variable en el tiempo . . . . . 60
4.5	Difracción pura . . . . . 64
4.6	Refracción pura . . . . . 64
4.6.1	<i>Dibujo de los rayos de onda u ola . . . . . 65</i>
4.6.2	<i>Refracción pura en un fondo donde las batimétricas son rectas y paralelas . . . . . 66</i>
5.	MODELO NUMÉRICO DE REFRACCIÓN-DIFRACCIÓN . . . . . 70
5.1	Ecuaciones en diferencias finitas de refracción-difracción . . . . . 71
5.2	Método para calcular la refracción y difracción . . . . . 73
5.2.1	<i>Obtención de los componentes del gradiente de la función de fase . . . . . 73</i>
5.2.2	<i>Cálculo de la altura de ola . . . . . 76</i>
5.2.3	<i>Revisión del valor del gradiente de la función de fase . . . . . 76</i>
5.2.4	<i>Secuencia de cálculo . . . . . 77</i>
5.3	Ejemplos . . . . . 78
6.	MODELO NUMÉRICO DE REFRACCIÓN-DIFRACCIÓN-REFLEXIÓN . . . . . 86
6.1	Ecuaciones de diferencias finitas del modelo de refracción-difracción-reflexión . . . . . 87
6.1.1	<i>Ecuaciones para las razones de flujo . . . . . 87</i>
6.1.2	<i>Ecuación de continuidad . . . . . 91</i>

# INDICE

	Página
6.2	Condiciones de frontera ..... 97
6.2.1	<i>Oleaje en una frontera con coeficiente de refracción <math>K_L</math></i> 98
6.2.2	<i>Oleaje incidente en la zona de estudio</i> ..... 101
6.2.3	<i>Interpolaciones</i> ..... 103
6.3	Método propuesto para calcular la refracción-difracción-reflexión 105
6.4	Ejemplos de aplicación ..... 106
7.	CORRIENTES INDUCIDAS POR EL OLAJE ..... 114
7.1	Ecuaciones de corrientes ..... 114
7.1.1	<i>Ecuación de conservación de masa</i> ..... 115
7.1.2	<i>Ecuación de conservación de cantidad de movimiento</i> .. 118
7.2	Ecuaciones de movimiento basadas en la teoría lineal ..... 127
8.	MODELO NUMÉRICO DE CORRIENTES INDUCIDAS POR EL OLAJE 130
8.1	Ecuación de conservación de cantidad de movimiento en la dirección $x$ ..... 130
8.2	Ecuación de conservación de cantidad de movimiento en la dirección $y$ ..... 133
8.3	Ecuación de continuidad ..... 135
8.4	Condiciones de frontera ..... 139
8.4.1	<i>Obstáculo al paso del agua</i> ..... 139
8.4.2	<i>Orillas perpendiculares a la línea de costa que delimitan la región en estudio</i> ..... 140
8.4.3	<i>Línea de mar abierto por donde incide el oleaje</i> ..... 141
8.5	Ejemplos de aplicación ..... 141
9.	CONCLUSIONES ..... 144
	BIBLIOGRAFÍA ..... 147
	APÉNDICE A ..... 150
	APÉNDICE B ..... 155

## 1. INTRODUCCIÓN

Para algunos estudios de Ingeniería Hidráulica Marítima es necesario tomar en cuenta las características que presentan las olas en cierta zona de interés. Para disponer de ellas, con frecuencia se recurre a propagar el oleaje desde aguas profundas. En esta acción, el oleaje sufre modificaciones por refracción, difracción y reflexión.

La evaluación cuantitativa del campo de oleaje es muy útil para diversas aplicaciones ingenieriles; entre estas se puede citar el diseño de puertos, la estimación de las corrientes cerca de la costa, difusión de una sustancia en el mar, los procesos costeros y la selección del peso de los componentes de una escollera.

En los estudios convencionales de propagación del oleaje cada uno de los fenómenos que origina los cambios en el oleaje es analizado en forma independiente, lo que facilita su cálculo; pero descarta la relación simultánea que existe entre ellos en las olas reales. Además, la obtención de las particularidades de las olas en regiones con otra profundidad se hace con base en hipótesis simplificadoras que pueden originar poca precisión en los resultados. Tales son los casos de los planos de refracción que sólo se definen cuando la batimetría es regular y no provoca cruce de los rayos de onda, o de los diagramas de difracción que únicamente son válidos para fondo horizontal y paredes rectas que no reflejan al oleaje.

Al principio de la década de los setenta, Berkhoff derivó la ecuación de "pendiente suave" que describe el proceso completo de transformación de ondas lineales tomando

en cuenta al mismo tiempo tanto a la refracción como a la difracción. En ella aparece como variable dependiente al potencial de la velocidad compleja. Sin embargo, como no es sencillo obtener la solución de esta ecuación, se han propuesto versiones reducidas de ella, como la llamada aproximación parabólica que requiere de correcciones en aguas reducidas y un planteamiento complicado de las condiciones de frontera.

En este trabajo se trata de explicar los fenómenos de transformación que sufre el oleaje y se proponen algunos métodos para propagar al oleaje hasta regiones cercanas a la costa. Uno de los métodos considera la combinación simultánea de refracción, difracción y rompiente. En otro se agrega la reflexión del oleaje para obtener las características del oleaje que cerca de las obras marítimas. La tesis también tiene como objetivo calcular las corrientes marinas que induce el oleaje.

En este escrito se presentan los fundamentos y la deducción de las ecuaciones necesarias con la intención de comprender los fenómenos principales y proponer métodos para calcular la propagación del oleaje. De éstos se trata de establecer el grado de aproximación, las hipótesis admitidas y sus limitaciones. En estas tareas se incluye una revisión de algunos estudios que sobre el tema se han realizado recientemente.

En el capítulo 2 se describen las ecuaciones fundamentales de la Hidráulica sobre las cuales se basan las teorías analíticas de oleaje. En el capítulo 3 se deducen las ecuaciones de teoría lineal del oleaje en dos dimensiones horizontales que son útiles para los análisis simultáneos de refracción, difracción y reflexión.

En el capítulo 4 se deduce la ecuación de refracción-difracción, básica para los estudios de propagación del oleaje. Esto permite conocer las ventajas y limitaciones de la ecuación principal para propagar el oleaje.

En el capítulo 5 se propone un método numérico para obtener planos de oleaje tomando en cuenta simultáneamente a la difracción y la refracción. En él se contemplan las zonas cáusticas, donde los modelos convencionales de refracción no son aplicables.

Para analizar la reflexión en los modelos matemáticos de refracción-difracción se formulan otras ecuaciones, que agregan otra variable independiente a la ecuación de refracción-difracción.

En el capítulo 6 se presenta la descripción de este proceso y, se desarrolla un procedimiento para obtener la refracción-difracción-reflexión del oleaje. También se

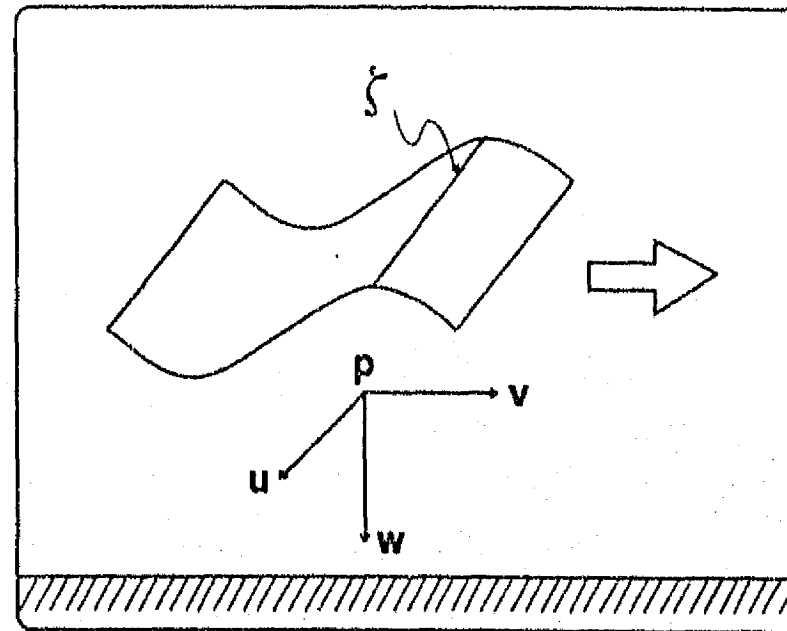
describe un ejemplo que muestra la aplicación del modelo de refracción-difracción a un caso real, donde la batimetría del fondo marino tiene cambios fuertes de profundidad.

En el capítulo 7 se describe cómo se forman las corrientes por oleaje y se deducen las ecuaciones fundamentales para el cálculo de estas corrientes.

En el capítulo 8 se dedica a la presentación de un método para obtener las corrientes por oleaje y se incluyen dos ejemplos que muestran el cálculo las corrientes marinas; uno corresponde a una playa sin obras marítimas y, el otro, a una zona que tiene una estructura que altera el movimiento del agua.

En el capítulo 9 se establecen conclusiones y se señalan varias recomendaciones sobre el trabajo realizado.

Finalmente, en dos apéndices se exponen varias ecuaciones que sirvieron de apoyo para el trabajo y algunos desarrollos matemáticos útiles para describir las aproximaciones numéricas de las ecuaciones en las que se basó el método de refracción-difracción-reflexión del oleaje.



## 2. ECUACIONES DE MOVIMIENTO DE UN FLUIDO

En este capítulo se deduce la ecuación general de balance de Reynolds. A partir de ella se obtienen las ecuaciones de conservación de masa (ecuación de continuidad), conservación de cantidad de movimiento para un flujo sin rozamiento (ecuación de Euler) y la de conservación de energía (primera ley de la termodinámica). Estas expresiones sirven de base para la teoría lineal en dos dimensiones espaciales horizontales del oleaje.

El capítulo se divide en dos partes; en la primera, se encuentra la expresión general de balance y de ella, las ecuaciones de movimiento de los fluidos. En la segunda, se deducen las ecuaciones básicas para el estudio de oleaje.

El comportamiento de los fluidos en movimiento y los cambios que sufren cuando se les aplican fuerzas y momentos, dependen de los fenómenos de transferencia. Estos fenómenos se refieren a la capacidad de los fluidos en movimiento de llevar materiales y propiedades (masa, calor, cantidad de movimiento y en general cualquier característica observable en el fluido) de un lugar a otro; así como, al modo en que se difunden y transmiten a través de ellos.

Con base en la observación de estos fenómenos, se han fundamentado tres importantes principios de transferencia: los de masa, cantidad de movimiento y calor. A ellos les corresponden respectivamente los postulados de conservación de la materia, la segunda ley de Newton y el de la conservación de la energía (primera ley de la termodinámica).

Adicionalmente se emplean otras leyes físicas y del medio continuo, que si bien tienen una aplicación más restringida que las anteriores, permiten describir algunos aspectos moleculares de los fluidos en términos de cantidades macroscópicas.

El fluido que ocupa toda una porción del espacio como una sola especie se conoce como fluido homogéneo. El agua es un fluido de este tipo cuando es comprimida, calentada o movida y no cambia de estado.

La porción del espacio que contiene un fluido homogéneo con superficies perpendiculares o tangenciales a las velocidades del flujo se conoce como volumen de control. Las superficies tangenciales de tal volumen casi siempre corresponden a fronteras sólidas encima de las cuales tiene lugar el flujo, o bien a la superficie libre del agua; en las otras superficies el flujo entra al volumen de control o sale de él.

### 2.1 Ecuación del balance de una propiedad asociada a la masa

Sea una cierta propiedad  $q$  por unidad de masa del fluido. La ecuación del balance de esta propiedad en un volumen de control  $V$  finito cuya superficie es  $S$  (figura 2.1).

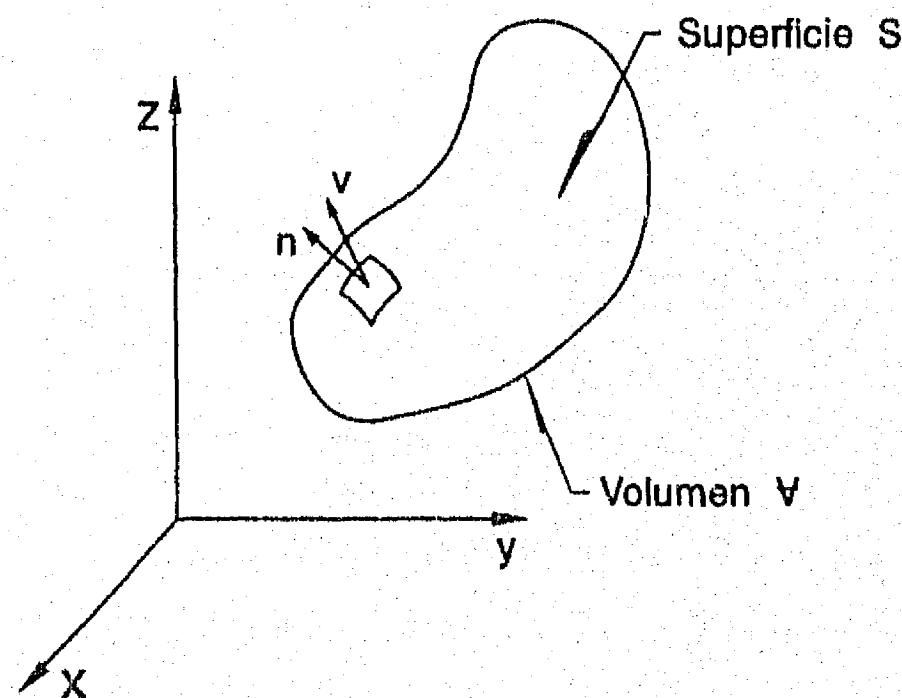


Figura 2.1 Volumen de control.

En la figura 2.2 se muestra un volumen de control fijo respecto al sistema de referencia. La propiedad  $q$  encerrada en él ocupa el volumen marcado con  $A$  en el tiempo  $t$  y  $C$  en el tiempo  $t + \Delta t$ . La propiedad  $q$  dentro del volumen de control en el tiempo  $t$  es igual a la que existe en él para el tiempo  $t + \Delta t$  más la que se ha creado o destruido dentro del volumen de control,  $d(\rho q)$ , es decir

$$(\rho_A q_A + \rho_B q_B)_t = (\rho_B q_B)_{t+\Delta t} + (\rho_C q_C)_{t+\Delta t} + d(\rho q)$$

al dividir entre  $\Delta t$  y ordenar se puede escribir:

$$\frac{(\rho_A q_A)_t - (\rho_C q_C)_{t+\Delta t}}{\Delta t} + \frac{d(\rho q)}{\Delta t} = \frac{(\rho_B q_B)_{t+\Delta t} - (\rho_B q_B)_t}{\Delta t} \quad (2.1)$$

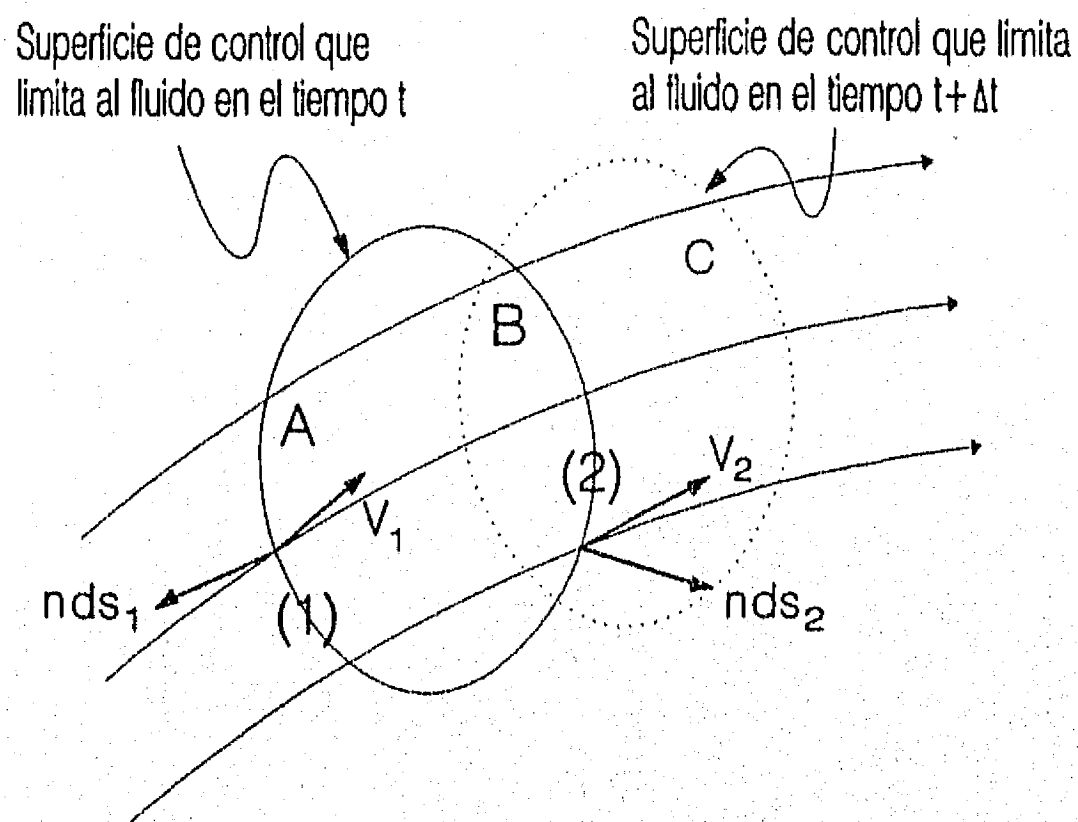


Figura 2.2. Volumen de control en dos tiempos distintos.

- *Primer término de la ecuación de balance.*

El primer término de la ecuación 2.1 representa la diferencia entre el flujo de la propiedad  $q$  que entra al volumen de control a través de la sección 1 y el que sale a través de la sección 2, por lo que

$$\left( \frac{(\rho_A q_A)_t - (\rho_C q_C)_{t+\Delta t}}{\Delta t} \right)_S = \iint_S (\rho q) v_n dS_1 - \iint_S (\rho q) v_n dS_2$$

donde  $v_n$  es el componente del vector de velocidad normal a la superficie  $S$  del volumen de control. El miembro derecho de la igualdad se puede escribir como



$$\iint_S (\rho q) v_n dS_1 - \iint_S (\rho q) v_n dS_2 = - \iint_S (\rho q) v \cdot n dS$$

- Segundo término de la ecuación de balance

El segundo término de la ecuación 2.1 corresponde a la creación o destrucción en el tiempo de la propiedad  $q$  dentro del volumen de control se expresa como

$$\frac{d(\rho q)}{\Delta t} = \iiint_V D(\rho q) dV$$

- Segundo miembro de la ecuación de balance

En el límite y al considerar todo el volumen de control, el segundo miembro de la ecuación 2.1 se transforma en la rapidez de variación respecto al tiempo de la propiedad  $q$  contenida en el volumen original, esto es

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \rho_B q_B \right)_V = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (\rho q) dV$$

De esta manera, la ecuación 2.1 se puede escribir

$$- \iint_S (\rho q) v \cdot n dS + \iiint_V D(\rho q) dV = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (\rho q) dV$$

donde  $\rho$  es la masa específica del fluido,  $v$  es el vector de velocidad del flujo,  $n$  es un vector unitario perpendicular a la superficie  $S$  (positivo cuando está dirigido hacia fuera del volumen de control  $V$ ).

Cuando el volumen de control permanece fijo respecto a un nivel de referencia y el fluido ocupa todo el volumen de control a tiempos posteriores, la integral de volumen es independiente del tiempo; y por lo tanto, la derivada respecto al tiempo puede efectuarse dentro de la integral, por lo que la expresión anterior queda

$$- \iint_S (\rho q) v \cdot n dS + \iiint_V D(\rho q) dV = \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho q) dV \quad (2.2)$$

Esta es la ecuación de balance de una propiedad  $q$  asociada a la masa (corresponde a la ecuación de Reynolds). El primer sumando se refiere a la cantidad de la propiedad  $q$  que atraviesa la superficie  $S$  en la unidad de tiempo, el segundo, a la posibilidad de creación o destrucción de la propiedad  $q$  dentro del volumen  $V$  en la unidad de tiempo. La suma de ambos es igual a la rapidez de variación de la propiedad  $q$  contenida en el volumen  $V$ .

Respecto a la integral de superficie de la ecuación 2.2 se plantean dos casos distintos de acuerdo con el tipo, escalar ó vectorial que es la propiedad  $q$ .

### 2.1.1 La propiedad por unidad de masa $q$ es un escalar

Con base en las propiedades del producto escalar (Tabla 2.1, al final de este capítulo) se puede escribir

$$-\iint_S (\rho q) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = -\iint_S (\rho q \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS$$

Para un campo de velocidades continuo y diferenciable, del teorema de la divergencia de Gauss (Tabla 2.2, al final de este capítulo) se tiene

$$\iint_S (\rho q \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot (\rho q \mathbf{v}) dV \quad (2.3)$$

De acuerdo con la igualdad anterior, la ecuación 2.2 se puede escribir como

$$-\iiint_V \nabla \cdot (\rho q \mathbf{v}) dV + \iiint_V D(\rho q) dV = \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho q) dV$$

o bien

$$\iiint_V \left( \nabla \cdot (\rho q \mathbf{v}) - D(\rho q) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho q) \right) dV = 0$$

Como el volumen  $V$  es arbitrario, el integrando debe ser nulo y en consecuencia se tiene que

$$\nabla \cdot (\rho q) \mathbf{v} - D(\rho q) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho q) = 0 \quad (2.4)$$

Esta es la ecuación de balance de una propiedad escalar  $q$  por unidad de masa en forma diferencial.

### 2.1.2 La propiedad por unidad de masa $q$ es un vector

Cuando la literal  $q$  que aparece en la ecuación 2.2 representa a una variable vectorial  $q$  se requiere de un planteamiento distinto al anterior. Sea el vector  $I$  igual a la integral de superficie que aparece en esta ecuación, es decir

$$I = \iint_S (\rho q) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS$$

como  $\rho$  es escalar (propiedad 2 de la Tabla 2.1) se puede escribir

$$I = \iint_S q (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (2.5)$$

Si se multiplica por un vector arbitrario constante  $a$

$$a \cdot I = \iint_S a \cdot q (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (2.6)$$

Dado que  $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  es un escalar, por la propiedad 3 de la Tabla 2.1

$$a \cdot q (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = (a \cdot q) (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})$$

Como  $(a \cdot q)$  es un escalar (por la misma propiedad)

$$(a \cdot q) (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = \rho \mathbf{v} (a \cdot q) \cdot \mathbf{n}$$

De esta manera, la ecuación 2.6 queda

$$a \cdot I = \iint_S [\rho \mathbf{v} (a \cdot q)] \cdot \mathbf{n} dS$$

Por el teorema de la divergencia (Tabla 2.2), la integral anterior es igual a

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{I} = \iiint_V \nabla \cdot [\rho \mathbf{v} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{q})] dV \quad (2.7)$$

Puesto que  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{q}$  es escalar, el integrando puede escribirse como (propiedad 7, Tabla 2.1)

$$\nabla \cdot [\rho \mathbf{v} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{q})] = [\nabla \cdot \rho \mathbf{v}] (\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}) + [\nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{q})] \cdot \rho \mathbf{v} \quad (2.8)$$

Por la propiedad conmutativa del producto escalar, (propiedad 1, Tabla 2.1), el segundo sumando de la ecuación anterior se puede escribir como

$$[\nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{q})] \cdot \rho \mathbf{v} = \rho \mathbf{v} \cdot [\nabla (\mathbf{q} \cdot \mathbf{a})]$$

Como  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}$  es escalar, por la propiedad 11 de la Tabla 2.1

$$[\nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{q})] \cdot \rho \mathbf{v} = [\rho \mathbf{v} \cdot \nabla] (\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}) \quad (2.9)$$

sustituyendo la ecuación 2.9 en la 2.8 se tiene

$$\nabla \cdot [\rho \mathbf{v} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{q})] = [\nabla \cdot \rho \mathbf{v}] (\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}) + [\rho \mathbf{v} \cdot \nabla] (\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}) \quad (2.10)$$

o bien, por la propiedad asociativa del producto escalar

$$\nabla \cdot [\rho \mathbf{v} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{q})] = \{ [\nabla \cdot \rho \mathbf{v}] \mathbf{q} + [\rho \mathbf{v} \cdot \nabla] \mathbf{q} \} \cdot \mathbf{a}$$

o bien, por la propiedad conmutativa

$$\nabla \cdot [\rho \mathbf{v} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{q})] = \mathbf{a} \cdot \{ [\nabla \cdot \rho \mathbf{v}] \mathbf{q} + [\rho \mathbf{v} \cdot \nabla] \mathbf{q} \} \quad (2.11)$$

Si se toma en cuenta a la ecuación 2.11 en la ecuación 2.7

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{I} = \iiint_V \mathbf{a} \cdot \{ [\rho \mathbf{v} \cdot \nabla] \mathbf{q} [\nabla \cdot \rho \mathbf{v}] \mathbf{q} + [\rho \mathbf{v} \cdot \nabla] \mathbf{q} \} dV$$

Como  $\mathbf{a}$  es un vector constante puede escribirse

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{a} \cdot \iiint_V \{ + [\rho \mathbf{v} \cdot \nabla] \mathbf{q} [\nabla \cdot \rho \mathbf{v}] \mathbf{q} + [\rho \mathbf{v} \cdot \nabla] \mathbf{q} \} dV$$

de donde

$$\mathbf{I} = \iiint_V \{ + [\rho \mathbf{v} \cdot \nabla] \mathbf{q} [\nabla \cdot \rho \mathbf{v}] \mathbf{q} + [\rho \mathbf{v} \cdot \nabla] \mathbf{q} \} dV \quad (2.12)$$

Al tomar en cuenta a la ecuación 2.12 en la ecuación 2.5

$$\iint_S q(\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \iiint_V \{ + [\rho \mathbf{v} \cdot \nabla] q + [\nabla \cdot \rho \mathbf{v}] q + [\rho \mathbf{v} \cdot \nabla] q \} dV \quad (2.13)$$

Sustituyendo la ecuación 2.13 en la 2.2 se obtiene

$$- \iiint_V \{ + [\rho \mathbf{v} \cdot \nabla] q + [\nabla \cdot \rho \mathbf{v}] q + [\rho \mathbf{v} \cdot \nabla] q \} dV + \\ + \iiint_V D(\rho q) dV = \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho q) dV$$

así,

$$\iiint_V \left[ [\nabla \cdot \rho \mathbf{v}] q + [\rho \mathbf{v} \cdot \nabla] q + D(\rho q) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho q) \right] dV = 0 \quad (2.14)$$

como el volumen  $V$  es arbitrario se cumple

$$\boxed{(\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) q + (\rho \mathbf{v} \cdot \nabla) q - D(\rho q) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho q) = 0} \quad (2.15)$$

Esta cual es la ecuación de balance de una propiedad vectorial  $q$  por unidad de masa escrita en su forma diferencial.

## 2.2 Ecuación de conservación de masa

Al considerar que  $q$  es un escalar y que además es igual a uno ( $q = 1$ ) se obtiene la expresión para el balance de masa (ecuación de continuidad). Cuando no existe creación o destrucción de masa dentro del volumen de control

$$D(\rho q) = D(\rho 1) = 0$$

Por lo que la ecuación 2.4 queda como

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0 \quad (2.16)$$

Al desarrollar el operador divergencia en coordenadas cartesianas se puede escribir

$$\frac{\partial}{\partial x} \rho u + \frac{\partial}{\partial y} \rho v + \frac{\partial}{\partial z} \rho w + \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0 \quad (2.16')$$

La ecuación 2.16 (o 2.16') es conocida como ecuación de continuidad.

Cuando  $\rho$  es constante, las ecuaciones 2.16 se reducen respectivamente a

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{v} = 0} \quad (2.17)$$

y

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} v + \frac{\partial}{\partial z} w = 0} \quad (2.17')$$

La ecuación 2.17 corresponde a la ecuación de continuidad para un fluido incompresible.

### 2.3 Ecuación de conservación de cantidad de movimiento

Si ahora la propiedad  $q$  es un vector igual a la velocidad  $\mathbf{v}$  del fluido, la ecuación 2.14 queda como

$$\iiint_{\mathcal{V}} [(\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) \mathbf{v} + (\rho \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] - D(\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) d\mathcal{V} = \mathbf{0}$$

Ahora la función  $D(\rho \mathbf{q})$  resulta ser igual a  $D(\rho \mathbf{v})$ . Ella corresponde a la creación o disminución de la cantidad de movimiento por unidad de masa ( $\rho \mathbf{v}$ ) dentro del volumen de control. Esta función es igual al impulso de las fuerzas exteriores (gravedad, presión, fricción,...). A ellas se les clasifica en fuerzas de cuerpo  $\mathbf{F}$  y de superficie  $\mathbf{k}$  por lo que

$$\iiint_{\mathcal{V}} D(\rho \mathbf{v}) d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{F} d\mathcal{V} + \iint_S \mathbf{k} dS \quad (2.18)$$

donde  $\mathbf{F}$  representa a la fuerza de cuerpo por unidad de masa (desarrollada por los campos magnéticos o gravitacionales que actúan sobre la masa dentro del volumen  $\mathcal{V}$ ) y  $\mathbf{k}$  la fuerza por unidad de área que existe sobre la superficie  $S$ , incluye a la fuerza

normal a la frontera (función de la presión) y a la tangencial a esta frontera (en términos del esfuerzo cortante, está relacionada con la viscosidad).

Cuando la viscosidad es despreciada, la fuerza que actúa sobre la superficie puede representarse como una función de la presión  $p$  en términos del vector unitario perpendicular a esta superficie, es decir

$$\mathbf{k} = -n p \quad (2.19)$$

de este modo, el segundo sumando de la ecuación 2.18 queda

$$\iint_S \mathbf{k} \, dS = - \iint_S (n p) \, dS \quad (2.20)$$

Tal como se ha hecho antes, al formar el producto punto con un vector arbitrario constante  $\mathbf{a}$  resulta que

$$\iint_S \mathbf{k} \cdot \mathbf{a} \, dS = - \iint_S \mathbf{n} \cdot (p \mathbf{a}) \, dS \quad (2.21)$$

Ahora, por el teorema de la divergencia (inciso 2.1.1), de esta ecuación se encuentra

$$\iint_S \mathbf{k} \cdot \mathbf{a} \, dS = - \iiint_V \nabla \cdot (p \mathbf{a}) \, dV$$

Por otro lado, de las propiedades del operador nabla se sabe que (propiedad 5, Tabla 2.1),

$$\nabla \cdot (p \mathbf{a}) = (\nabla p) \cdot \mathbf{a} + p (\nabla \cdot \mathbf{a})$$

Pero ya que  $\mathbf{a}$  es un vector constante (por ejemplo, para un sistema cartesiano en el espacio las derivadas de  $\mathbf{a}$  respecto a  $x$ ,  $y$ , y  $z$  son nulas),  $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$ , de modo que la ecuación anterior se reduce a

$$\nabla \cdot (p \mathbf{a}) = (\nabla p) \cdot \mathbf{a}$$

Así resulta que

$$\iiint_V \nabla \cdot (p \mathbf{a}) \, dV = \iiint_V (\nabla p) \cdot \mathbf{a} \, dV$$

por lo que la ecuación 2.21 queda

$$\iint_S \mathbf{k} \cdot \mathbf{a} \, dS = - \iiint_V (\nabla p) \cdot \mathbf{a} \, dV$$

o bien,

$$\iint_S \mathbf{k} \, dS = - \iiint_V \nabla p \, dV$$

Si se sustituye esta expresión en la ecuación 2.7 se llega a

$$\iiint_V D(\rho \mathbf{v}) \, dV = \iiint_V \rho \mathbf{F} \, dV - \iiint_V \nabla p \, dV \quad (2.22)$$

Al considerar la ecuación 2.22 en la ecuación 2.17 se encuentra que

$$\iiint_V \left[ (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) \mathbf{v} + (\rho \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \rho \mathbf{F} - \nabla p + \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0$$

ya que el volumen  $V$  es arbitrario se tiene

$$(\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) \mathbf{v} + (\rho \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \rho \mathbf{F} + \nabla p + \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) = 0$$

Tomando en cuenta la ecuación de continuidad (ecuación 2.16) en el primer sumando se puede escribir

$$\left( - \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \mathbf{v} + (\rho \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \rho \mathbf{F} + \nabla p + \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) = 0$$

al desarrollar el producto de la derivada del último término y simplificar

$$\rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \rho \mathbf{F} + \nabla p + \rho \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} = 0$$

al dividir entre  $\rho$

$$- (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} = 0 \quad (2.23)$$

Por otra parte, por la propiedad del operador nabla para los vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  con derivadas parciales se sabe que (propiedad 12, Tabla 2.1)



$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})$$

Cuando

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{v}$$

se tiene que

$$\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 2(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + 2\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$$

de donde

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$$

por la identidad anterior, la ecuación 2.23 queda como

$$\boxed{-\frac{1}{2} \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} = 0} \quad (2.24)$$

La expresión anterior se conoce como ecuación de Euler.

Cuando la fuerza  $\mathbf{F}$  tiene la propiedad de que el trabajo que realiza es independiente de la trayectoria, se dice que es conservativa. Se sabe que la condición necesaria y suficiente para que sea conservativa es  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ . Además, las fuerzas que son conservativas se pueden expresar como el gradiente de una función escalar ( $\Omega$ ), por ello se propone que

$$\mathbf{F} = -\nabla\Omega \quad (2.25)$$

Al sustituir la ecuación 2.25 en la 2.24 se obtiene la ecuación de conservación de cantidad de movimiento, que se expresa como

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla\Omega = 0} \quad (2.26)$$

En coordenadas cartesianas equivale a estas tres expresiones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \Omega}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0$$

## 2.4 Ecuación de la energía

Cuando la propiedad por unidad de masa  $q$  es un escalar que es igual a la energía  $e$ , la ecuación 2.2 se puede escribir como

$$D(\rho e) = \iint_S \rho e \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho e dV$$

en este caso,  $D(\rho e)$  representa al cambio de la energía por unidad de masa ( $\rho e$ ) dentro del volumen de control con el tiempo, es decir

$$D(\rho e) = \frac{dE}{dt}$$

por lo que ahora se tiene que

$$\frac{dE}{dt} = \iint_S (\rho e) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho e dV \quad (2.27)$$

Como la primera ley de la termodinámica establece que "La diferencia entre el calor que un sistema (volumen de control) intercambia con sus alrededores y el trabajo hecho por éste depende solamente de los estados (condiciones en el volumen de control de acuerdo con sus características observables) final e inicial del mismo".

A esta diferencia se le acostumbra llamar cambio de energía (es una característica observable en el volumen de control). En forma de ecuación la ley anterior se expresa como

$$dE = dQ - dW$$

Siendo  $dE$  el cambio de energía del sistema,  $dQ$  el calor suministrado al sistema por sus alrededores y  $dW$  el trabajo hecho por el sistema sobre sus contornos.

Al dividir la ecuación anterior entre la diferencial del tiempo ( $dt$ ) se encuentra

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} \quad (2.28)$$

Ya que el trabajo  $dW$  hecho por el sistema, incluye al realizado por los esfuerzos normales (debidos a la presión  $dW_p$ ) que actúan sobre la superficie  $S$ , al desarrollado por los esfuerzos tangenciales ( $dW_t$ ) en la superficie  $S$  cuando el fluido externo adyacente está en movimiento; al efectuado sobre un elemento giratorio ( $dW_f$ ) dentro del volumen de control, en este caso transmitido fuera del volumen a través de una flecha rotatoria (figura 2.4), resulta que

$$dW = dW_p + dW_t - dW_f$$

Al tomar en cuenta a la ecuación 2.28 en la ecuación de balance de energía por unidad de masa (ecuación 2.27) se tiene que

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \iint_S \rho e \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho e dV \quad (2.29)$$

La expresión anterior establece que la variación respecto al tiempo del calor agregado al sistema menos el trabajo hecho por el sistema es igual al cambio de energía a través de la superficie del volumen de control más la modificación respecto al tiempo de la energía dentro de tal volumen.

El cambio de calor ( $dQ$ ) y de trabajo ( $dW$ ) relacionan al sistema con otros. La energía asociada con la masa del sistema ( $e$ ) se acostumbra separarla en tres partes, a saber: interna  $e_u$  (depende de la temperatura del fluido, está relacionada con el comportamiento molecular y atómico), potencial  $\Omega$  (función del campo gravitacional) y cinética  $(1/2)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})$ , por lo cual

$$e = e_u + \Omega + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

Cuando no existe transferencia de calor,  $e_u = 0$ , por lo que

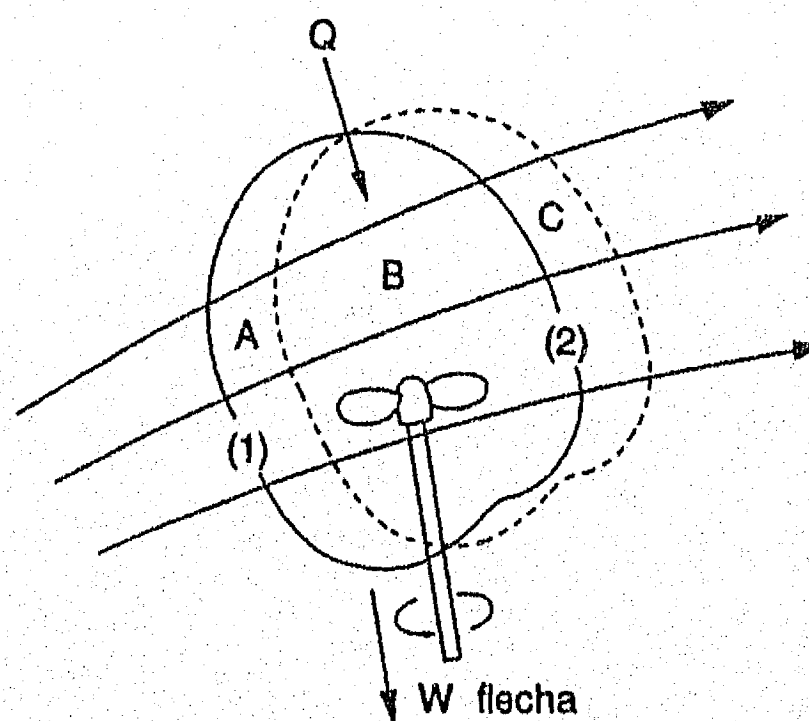


Figura 2.3 Trabajo transmitido fuera del volumen de control por una flecha rotatoria.

$$e = \Omega + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \quad (2.30)$$

#### 2.4.1 Flujo de energía por unidad de área

Si en la ecuación 2.27 no existe cambio a través de la superficie y se toma en cuenta a la ecuación 2.29 resulta

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \left( \Omega + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) dV$$

Al miembro del lado izquierdo de la expresión anterior se le conoce como flujo de energía.

Si el volumen de control es ocupado en su totalidad por el fluido y este volumen no cambia con el tiempo, la integral de volumen es independiente del tiempo y, en consecuencia la derivada parcial se puede escribir dentro de la integral, así

$$\frac{dE}{dt} = \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( \Omega + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) dV$$

Como la energía potencial ( $\Omega$ ) es independiente del tiempo, se tiene

$$\frac{dE}{dt} = \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) dV \quad (2.31)$$

Por otra parte, al multiplicar a la ecuación 2.26 por  $\rho \mathbf{v}$  mediante el producto punto se obtiene

$$\rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} - \rho \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} + \nabla p \cdot \mathbf{v} + \rho \nabla \Omega \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.32)$$

Con la intención de simplificar esta ecuación se analizan cada uno de sus términos.

Puesto que el vector producto vectorial es perpendicular al plano que forman sus factores, el vector  $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$  es perpendicular a  $\mathbf{v}$  y por tanto

$$\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.33)$$

Por otra parte, usando esta propiedad de la derivación vectorial

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} = 2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \mathbf{v}$$

se tiene que

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \quad (2.34)$$

Como  $p$  es escalar (propiedad 2, Tabla 2.1)

$$\nabla p \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot p \mathbf{v} \quad (2.35)$$

de forma semejante, cuando la masa específica  $\rho$  es constante, se puede escribir

$$\rho \nabla \Omega \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \rho \Omega \mathbf{v} \quad (2.36)$$

También se expresa como

$$\frac{1}{2} \rho \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \nabla \left( \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{v}$$

dado que  $(1/2) \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$  es escalar al desarrollar el producto punto (propiedad 5, Tabla 2.1) se tiene

$$\nabla \left( \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \left( \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{v} - \left( \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \nabla \cdot \mathbf{v}$$

Por otra parte, por la ecuación 2.16 se tiene que

$$\nabla \left( \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \left\{ \left( \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \mathbf{v} \right\} \quad (2.37)$$

Al tomar en cuenta a las ecuaciones 2.16 y 2.30 a 2.34 en la ecuación 2.29 se llega a

$$\rho \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) + \nabla \cdot \left( \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \mathbf{v} + \nabla \cdot p \mathbf{v} + \nabla \cdot \rho \Omega \mathbf{v} = 0$$

por la propiedad asociativa del producto punto respecto a la suma (propiedad 2, Tabla 2.1), resulta

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) + \nabla \cdot \left[ \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + p + \rho \Omega \right] \mathbf{v} = 0$$

o bien

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = - \nabla \cdot \left( \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \bar{p} + \rho \Omega \right) \mathbf{v}$$

Si se sustituye la expresión anterior en la ecuación 2.28 se encuentra

$$\frac{dE}{dt} = - \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \left( \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + p + \rho \Omega \right) \mathbf{v} d\mathcal{V}$$

Por el teorema de la divergencia (inciso 2.1.1) para

$$\mathbf{b} = \left( \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + p + \rho \Omega \right) \mathbf{v}$$

se tiene

$$\iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \left( \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + p + \rho \Omega \right) \mathbf{v} d\mathcal{V} = \iint_{\mathcal{S}} \left( \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + p + \rho \Omega \right) \mathbf{v} dS$$

Se llama vector flujo de energía  $\mathbf{B}$  por unidad de área de superficie al integrando del segundo miembro de la expresión anterior, es decir

$$\mathbf{P} = \left( \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + p + \rho \Omega \right) \mathbf{v} \quad (2.38)$$

## 2.5 Flujo con potencial

Cuando se cumple con  $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , se afirma que el movimiento del fluido es irrotacional. En estas condiciones se puede plantear una función escalar  $\phi$  tal que la velocidad es igual al gradiente de esta función, es decir

$$\mathbf{v} = \nabla \phi \quad (2.39)$$

Al sustituir la expresión anterior en la ecuación de continuidad para un fluido incompresible y homogéneo (ecuación 2.36) se obtiene

$$\nabla \cdot (\nabla \phi) = 0 \quad (2.40)$$

que también se puede escribir así,

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2.41)$$

la cual es conocida como ecuación de Laplace.

Al sustituir la ecuación 2.36 en la ecuación vectorial de movimiento (ecuación 2.26) y tomando en cuenta que  $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ , se encuentra

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi + \frac{1}{2} \nabla(\nabla \phi \cdot \nabla \phi) + \frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \Omega = 0 \quad (2.42)$$

que es igual a

$$\nabla \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi + \frac{p}{\rho} + \Omega \right] = 0 \quad (2.42')$$

al integrar, se obtiene la llamada ecuación de Bernoulli,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi \cdot \nabla \phi) + \frac{p}{\rho} + \Omega = f(t) \quad (2.43)$$

donde  $f(t)$  es una constante de integración que depende del tiempo.

Como el campo de velocidad no cambia si una función de tiempo arbitraria se suma a la función potencial  $\phi$ , entonces  $f(t)$  puede considerarse igual a cero.

Para un campo de fuerzas gravitacional donde la aceleración  $g$  es negativa en la dirección de  $z$ , el potencial de la fuerza externa  $\Omega$  es igual a

$$\Omega = gz \quad (2.44)$$

En estas condiciones, la ecuación de Bernoulli resulta ser igual a

$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi \cdot \nabla \phi) + \frac{p}{\rho} + gz = 0} \quad (2.45)$$

Al multiplicar por  $\rho$  a la ecuación 2.42 y después de ordenar términos se obtiene

$$-\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2} \rho (\nabla \phi \cdot \nabla \phi) + p + \rho gz = 0 \quad (2.46)$$

Al tomar en cuenta a las ecuaciones 2.36, 2.41 y 2.43 en la 2.35 se encuentra que el vector flujo de energía  $\mathbf{P}$  por unidad de superficie para flujo potencial esta dado como

$$\boxed{\mathbf{P} = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \phi} \quad (2.47)$$

Tabla 2.1

Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  tres funciones vectoriales. Además  $\phi$  y  $\psi$  funciones escalares. Todas las funciones son derivables en los puntos de una región del espacio.

1.  $A \cdot B = B \cdot A$
2.  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
3.  $m (A \cdot B) = (m A) \cdot B = A \cdot (m B) = (A \cdot B) m$ , siendo  $m$  un escalar
4.  $\nabla (\phi + \psi) = \nabla \phi + \nabla \psi$
5.  $\nabla \cdot (A + B) = \nabla \cdot A + \nabla \cdot B$
6.  $\nabla \times (A + B) = \nabla \times A + \nabla \times B$
7.  $\nabla \cdot (\phi A) = (\nabla \phi) \cdot A + \phi (\nabla \cdot A)$
8.  $\nabla \times (\phi A) = (\nabla \phi) \times A + \phi (\nabla \times A)$
9.  $\nabla \cdot (A \times B) = B \cdot (\nabla \times A) - A \cdot (\nabla \times B)$
10.  $\nabla \times (A \times B) = (B \cdot \nabla) A - B (\nabla \cdot A) - (A \cdot \nabla) B + A (\nabla \cdot B)$
11.  $A \cdot (\nabla \phi) = (A \cdot \nabla) \phi$
12.  $\nabla (A \cdot B) = (B \cdot \nabla) A + (A \cdot \nabla) B + B \times (\nabla \times A) + A \times (\nabla \times B)$
13.  $\nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla^2 \phi$ ,  $\phi$  tiene derivadas parciales segundas continuas
14.  $\nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0}$
15.  $\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0$
16.  $\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla (\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$ ,  $A$  tiene derivadas parciales segundas continuas

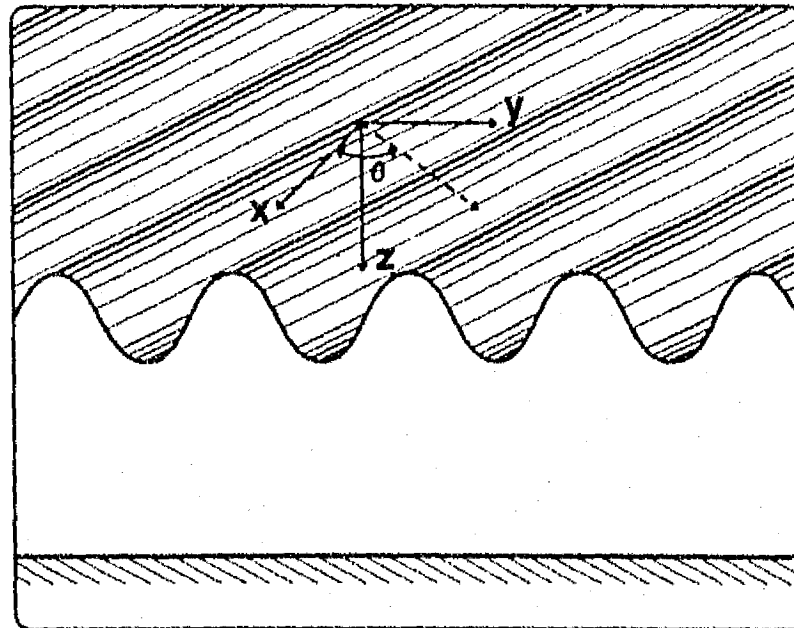
Tabla 2.2 Teorema de la divergencia.

Para un volumen  $V$  limitado por una superficie cerrada  $S$  y  $b$  una función vectorial de posición con derivadas continuas se cumple que

$$\iint_S b \cdot n \, dS = \iiint_V \nabla \cdot b \, dV$$

siendo  $n$  la normal exterior (positiva) a  $S$ .





### 3. TEORÍA LINEAL DEL OLAJE EN TRES DIRECCIONES ESPACIALES

En este capítulo se deducen para dos coordenadas espaciales en un plano horizontal las ecuaciones de la teoría lineal del oleaje que se requieren en los estudios de refracción, difracción, reflexión y rompiente.

Para encontrar las ecuaciones básicas del oleaje de la teoría lineal se requieren de varias hipótesis y de establecer algunas condiciones de frontera.

#### 3.1 Hipótesis

- a) El flujo es potencial. Por ello la velocidad se plantea en términos de la función potencial  $\phi$  como

$$v = \nabla \phi$$

- b) Los términos cuadráticos de velocidad son pequeños. Por lo que

$$\nabla \phi \cdot \nabla \phi = 0 \quad (3.1)$$

- c) El componente de la velocidad vertical en el fondo del mar es nulo

$$(w)_{z=-h} = 0 \quad (3.2)$$

- d) Debido al carácter oscilatorio del oleaje, la elevación de la superficie libre se puede escribir como una función periódica del tipo

$$\zeta = a \cos (k_x x + k_y y - \sigma t) \quad (3.3)$$

donde

$$k_x = k \cos \alpha \quad (3.4)$$

$$k_y = k \operatorname{sen} \alpha \quad (3.5)$$

$\alpha$  representa a la dirección de avance del oleaje (figura 3.1). Además,  $\sigma$  corresponde a la frecuencia angular que es igual a  $2\pi/T$  siendo  $T$  el período.

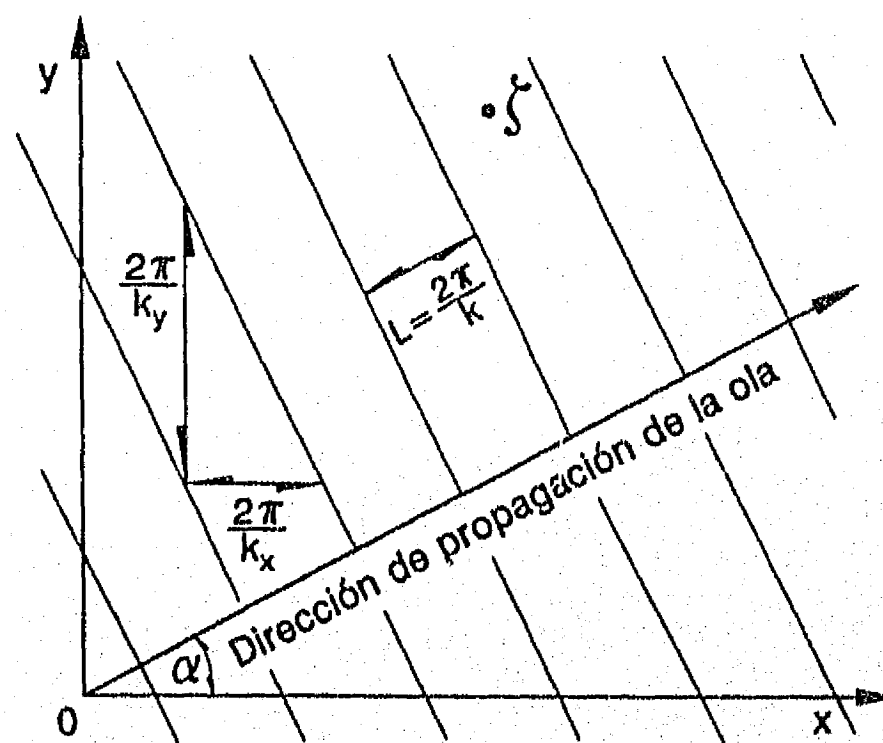


Figura 3.1 Propagación de la ola en la dirección  $\alpha$ .

e) La función  $\phi$  varía cíclicamente. Se expresa en la forma siguiente

$$\phi = \phi (x, y, z, t) = Z (z) f (x, y, t) \quad (3.6)$$

donde

$$f (x, y, t) = \operatorname{sen} (k_x x + k_y y - \sigma t) \quad (3.7)$$

### 3.2 Condiciones de frontera

Para encontrar el potencial  $\phi$  y la presión  $p$  que cumplen con la ecuación de Laplace (ecuación 2.37) y con la ecuación de Bernoulli (ecuación 2.43) se requieren tres condiciones de frontera, las cuales se describen a continuación.

### 3.2.1 Condición para el fondo

Se considera que el fondo del mar (figura 3.2) esta dado por la función de  $x$  y  $y$  como

$$z = -h(x, y) \quad (3.8)$$

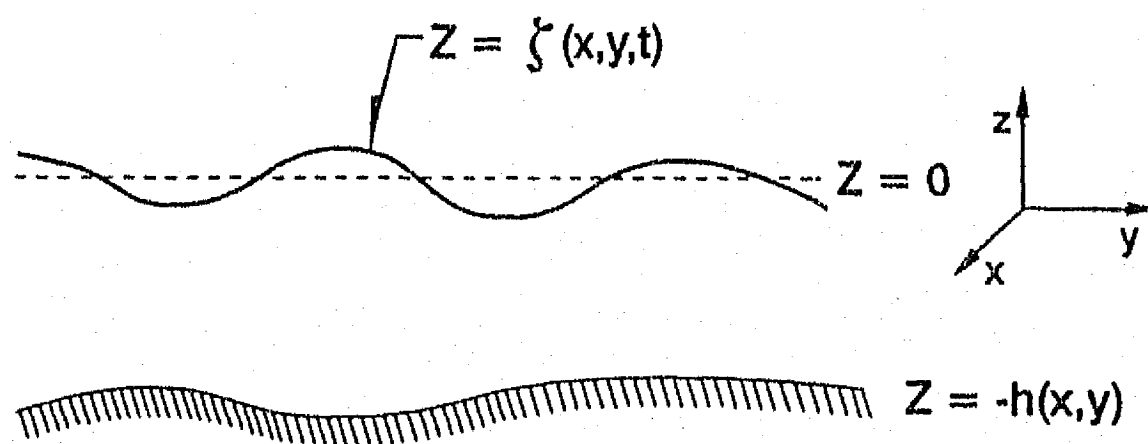


Figura 3.2 Condiciones de frontera en la superficie libre y en el fondo.

Sí se establece que

$$b = h(x, y) + z \quad (3.9)$$

la derivada total de  $b$  respecto a  $t$  es igual a

$$\frac{db}{dt} = \frac{\partial b}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial b}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial b}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

o bien

$$\frac{db}{dt} = \frac{\partial b}{\partial x} u + \frac{\partial b}{\partial y} v + \frac{\partial b}{\partial z} w$$

al escribir las velocidades en términos de la función potencial resulta

$$\frac{db}{dt} = \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

si se toma en cuenta a la ecuación 3.9 se llega a

$$0 = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (3.10)$$

válida para  $z = -h(x, y)$ .

### 3.2.2 Condición cinemática para la superficie libre

Para la superficie libre (figura 3.2) se propone

$$z = \zeta(x, y, t)$$

la derivada total respecto a  $t$  de esta función es

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (3.11)$$

que también se puede escribir como

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (3.12)$$

para  $z = \zeta(x, y, t)$ .

### 3.2.3 Condición dinámica para la superficie libre

La ecuación de Bernoulli (ecuación 2.45) para la superficie libre ( $p = 0$ ,  $z = \zeta$ ) queda como

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi \cdot \nabla \phi) + g\zeta = 0 \quad (3.13)$$

## 3.3 Función potencial

Al tomar en cuenta a la ecuación 3.1 en la 3.13 se obtiene

$$\zeta + \frac{1}{g} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = 0 \quad (3.14)$$

donde  $z = \zeta$ .

Al derivar respecto a  $t$  a la ecuación 3.14 se obtiene

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.15)$$

Por otra parte, del desarrollo en serie de Taylor para una función  $f$  (de  $z$  y otras variables) respecto a  $z$  se obtiene que

$$(f)_{z+\Delta z} = (f)_z + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_z \Delta z + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_z \frac{\Delta z^2}{2!} + \dots$$

para  $f = \frac{\partial \phi}{\partial z}$  la expresión anterior queda

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{z+\Delta z} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_z + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}\right)_z \Delta z + \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3}\right)_z \frac{\Delta z^2}{2!} + \dots$$

cuando  $z = 0$  y  $\Delta z = \zeta$  se encuentra

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{z=\zeta} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{z=0} + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}\right)_{z=0} \Delta z + \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3}\right)_{z=0} \frac{\Delta z^2}{2!} + \dots$$

despreciando los términos que contienen derivadas de orden mayor o igual a 2 resulta

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{z=\zeta} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{z=0}$$

Por otra parte, al despreciar los términos de segundo orden de la ecuación 3.12 se encuentra que

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{z=\zeta}$$

Al considerar la ecuación 3.16 se obtiene

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{z=0}$$

Si se sustituye la expresión anterior en la ecuación 3.15 se llega a

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.17)$$

Al tomar en cuenta a la ecuación 3.6 en el segundo sumando de la ecuación 3.17 se escribe

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\sigma^2}{g} \phi = 0 \quad (3.18)$$

la cual es válida para  $z = 0$ .

Para resolver la ecuación de Laplace (ecuación 2.38) para las condiciones de frontera (ecuaciones 3.2 y 3.18), se sustituye en esta ecuación a la ecuación 3.6 dando como resultado

$$-\frac{1}{f} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} \quad (3.19)$$

Para resolver la ecuación diferencial anterior se plantea que sus miembros derecho e izquierdo sean iguales a una constante, sea tal constante igual a  $k^2$ , por lo cual

$$-\frac{1}{f} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = k^2 \quad (3.20)$$

y

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = k^2 \quad (3.21)$$

La solución general de la última ecuación diferencial es

$$Z = A e^{kz} + B e^{-kz} \quad (3.22)$$

Al sustituir las ecuaciones 3.7 y 3.22 en la 3.6 resulta

$$\phi = (A e^{kz} + B e^{-kz}) \text{sen}(k_x x + k_y y - \sigma t) \quad (3.23)$$

cuando se deriva respecto a  $z$  se encuentra

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = (A k e^{kz} - B k e^{-kz}) \text{sen}(k_x x + k_y y - \sigma t) \quad (3.24)$$

Según la ecuación 3.2, para  $z = -h$  se tiene

$$(w)_{z=-h} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=-h} = (A k e^{-kh} - B k e^{kh}) \text{sen}(k_x x + k_y y - \sigma t) = 0$$

por lo tanto

$$A k e^{-kh} - B k e^{kh} = 0$$

o bien

$$A e^{-kh} - B e^{kh} = 0 \quad (3.25)$$

haciendo

$$A e^{-kh} = B e^{kh} = \frac{D}{2}$$

se plantea que

$$A = \frac{D}{2} e^{kh} \quad \text{y} \quad B = \frac{D}{2} e^{-kh}$$

de este modo la ecuación 3.22 queda expresada como

$$Z = \frac{D}{2} e^{k(z+h)} + \frac{D}{2} e^{-k(z+h)} = D \cosh[k(z+h)] \quad (3.26)$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.7 y 3.26 en la ecuación 3.6 resulta

$$\phi = D \cosh[k(z+h)] \operatorname{sen}(k_x x + k_y y - \sigma t)$$

Como la derivada parcial respecto al tiempo de la expresión anterior es

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\sigma D \cosh[k(z+h)] \cos(k_x x + k_y y - \sigma t)$$

para  $z=0$ ,

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=0} = -\sigma D \cosh(kh) \cos(k_x x + k_y y - \sigma t)$$

Por la ecuación 3.14 se puede escribir así

$$\zeta = \frac{1}{g} \sigma D \cosh(kh) \cos(k_x x + k_y y - \sigma t)$$

Si se compara esta expresión con respecto a la 3.3 se deduce que

$$D = \frac{ag}{\sigma} \frac{1}{\cosh(kh)} \quad (3.28)$$

por que la ecuación 3.27 queda

$$\phi = \frac{ag}{\sigma} \frac{\cosh[k(z+h)]}{\cosh(kh)} \operatorname{sen}(k_x x + k_y y - \sigma t) \quad (3.29)$$

Esta expresión corresponde al potencial de velocidades de la teoría lineal en dos dimensiones espaciales horizontales.

### 3.4 Ecuación de dispersión

Al tomar en cuenta a la ecuación 3.28 en la 3.26 resulta

$$Z = \frac{ag}{\sigma} \frac{\cosh[k(z+h)]}{\cosh(kd)} \quad (3.30)$$

Por otra parte, de la ecuación 3.23 se encuentra que

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = (Ae^{kz} + Be^{-kz}) \sigma^2 \operatorname{sen}(k_x x + k_y y - \sigma t)$$

para  $z = 0$  se obtiene

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = (A + B) \sigma^2 \operatorname{sen}(k_x x + k_y y - \sigma t) \quad (3.31)$$

La ecuación 3.24 para  $z = 0$  es igual a

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = (Ak - Bk) \operatorname{sen}(k_x x + k_y y - \sigma t) \quad (3.32)$$

De acuerdo con las ecuaciones 3.31 y 3.32, la ecuación 3.17 queda igual a

$$(A+B) \sigma^2 \operatorname{sen}(k_x x + k_y y - \sigma t) = -g(Ak - Bk) \operatorname{sen}(k_x x + k_y y - \sigma t)$$

al simplificar

$$(\sigma^2 - gk) A + (\sigma^2 + gk) B = 0 \quad (3.33)$$

Las ecuaciones 3.25 y 3.33 forman un sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuyas incógnitas son  $A$  y  $B$ . Para que este sistema tenga solución distinta de la trivial se requiere que el determinante de su matriz de coeficientes sea nulo, es decir

$$\begin{vmatrix} e^{-kh} & -e^{kh} \\ (\sigma^2 - gk) & (\sigma^2 + gk) \end{vmatrix} = 0$$

al desarrollar

$$(\sigma^2 + gk) e^{-kh} + (\sigma^2 - gk) e^{kh} = 0$$

de donde

$$\sigma^2 = gk \frac{e^{kh} - e^{-kh}}{e^{kh} + e^{-kh}}$$



o sea

$$\sigma^2 = gk \tanh(kh) \quad (3.34)$$

Esta es la ecuación de dispersión; relaciona a la frecuencia angular  $\sigma$  con el número de onda  $k$ . Cabe recordar que la frecuencia angular se define en términos del período  $T$  como

$$\sigma = \frac{2\pi}{T} \quad (3.35)$$

y que el número de onda se expresa en función de la longitud de onda  $L$  así

$$k = \frac{2\pi}{L} \quad (3.36)$$

por lo que, de acuerdo con la definición de celeridad,  $C = L/T$ , se tiene que

$$C = \frac{\sigma}{k} \quad (3.37)$$

Tomando en cuenta a las ecuaciones 3.37 y 3.36 en la 3.34 se obtiene

$$C = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kh)} = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{L}} \quad (3.38)$$

Al elevar al cuadrado

$$C^2 = \frac{gL}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{L} \quad (3.39)$$

Sustituyendo  $L = CT$  y reduciendo

$$C = \frac{gT}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{L} \quad (3.40)$$

Al escribir la longitud de ola en función de la celeridad se llega a

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{L} \quad (3.41)$$

Con la ecuación anterior se determina la longitud de la onda en función del período y la profundidad.

De la ecuación 3.41 o bien de la expresiones 3.34 y 3.35 se tiene

$$\frac{4\pi^2}{gT^2} = k \tanh(kh) \quad (3.42)$$

Cuando la profundidad  $h$  es mayor que  $L/2$  la función tangente hiperbólica de  $(2\pi h)/L$  es aproximadamente igual a 1 y en estas condiciones, de la ecuación 3.38 se tiene

$$C = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}} \quad (3.43)$$

Esta expresión es útil para calcular la celeridad en aguas profundas.

Para valores de  $h$  menores a  $L/20$ , la tangente hiperbólica de  $(2\pi h)/L$  es prácticamente igual a  $(2\pi h)/L$ , por ello la ecuación 3.38 se reduce a

$$C = \sqrt{gh} \quad (3.44)$$

la cual permite obtener la celeridad en aguas bajas o poco profundas. En la figura 3.3 se muestra el cambio de la celeridad para los dos casos anteriores.

### 3.5 Presión

Por otra parte, cuando en la ecuación de Bernoulli (ecuación 2.43) se considera la ecuación 3.1 resulta

$$p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho g z$$

si se sustituye la ecuación 3.29 y se toma en cuenta a la ecuación 3.3 de la superficie libre 5 se encuentra

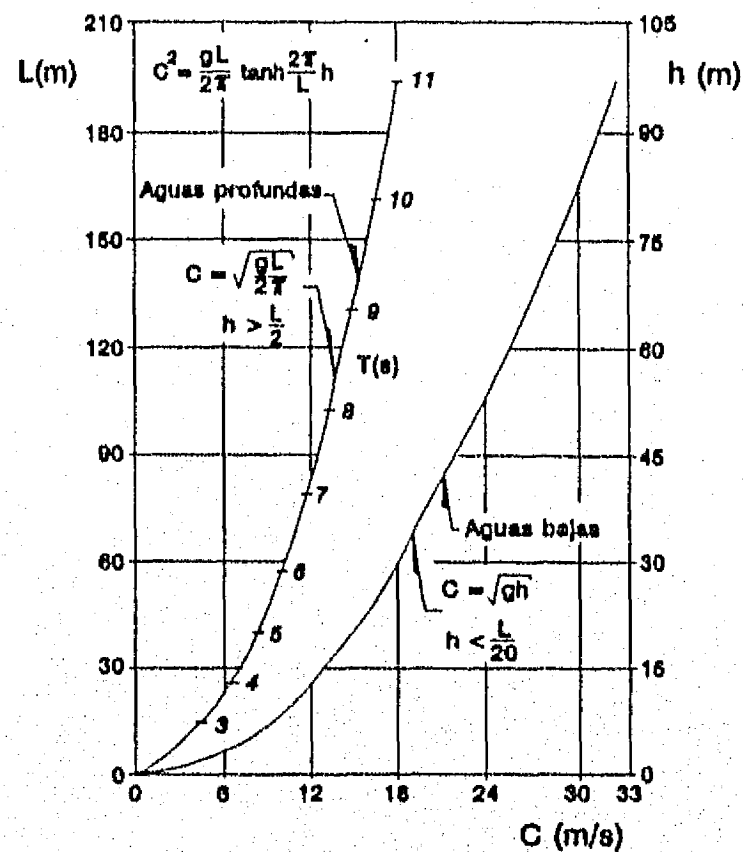


Figura 3.3 Celeridad del oleaje en función de la profundidad  $h$ .

$$p = \rho g \frac{\cosh[k(z+h)]}{\cosh(kh)} \zeta - \rho g z \quad (3.45)$$

Con la expresión 3.45 es posible obtener la presión en el punto  $(x, y, z)$  cuando son conocidas la elevación de la superficie libre del mar (es función de  $x, y$  y  $t$ ) y la profundidad  $z$ .

### 3.6 Velocidad de las partículas de agua

Los componentes de la velocidad de las partículas de agua debidas al oleaje se obtienen sustituyendo la expresión del potencial (ecuación 3.29) en la ecuación 2.36:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{k_x a g}{\sigma} \frac{\cosh[k(z+h)]}{\cosh(kh)} \cos(k_x x + k_y y - \sigma t) \quad (3.46)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{k_y a g}{\sigma} \frac{\cosh[k(z+h)]}{\cosh(kh)} \cos(k_x x + k_y y - \sigma t) \quad (3.47)$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{k a g}{\sigma} \frac{\sinh[k(z+h)]}{\cosh(kh)} \sin(k_x x + k_y y - \sigma t) \quad (3.48)$$

Según las ecuaciones 3.46 y 3.47, los componentes horizontales de velocidad ( $u, v$ ) tienen la misma fase de movimiento que la superficie libre  $\zeta$  (figura 3.4).

### 3.7 Desplazamiento de las partículas de agua

Las velocidades de las partículas de agua se pueden expresar como

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \phi(x, y, z, t)}{\partial x} \quad (3.49a)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \phi(x, y, z, t)}{\partial y} \quad (3.49b)$$

$$w = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \phi(x, y, z, t)}{\partial z} \quad (3.49c)$$

Si el movimiento de las partículas de agua se considera a partir de una posición media  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  se tiene

$$x = \bar{x} + \xi_x \quad (3.50a)$$

$$y = \bar{y} + \xi_y \quad (3.50b)$$

$$z = \bar{z} + \xi_z \quad (3.50c)$$

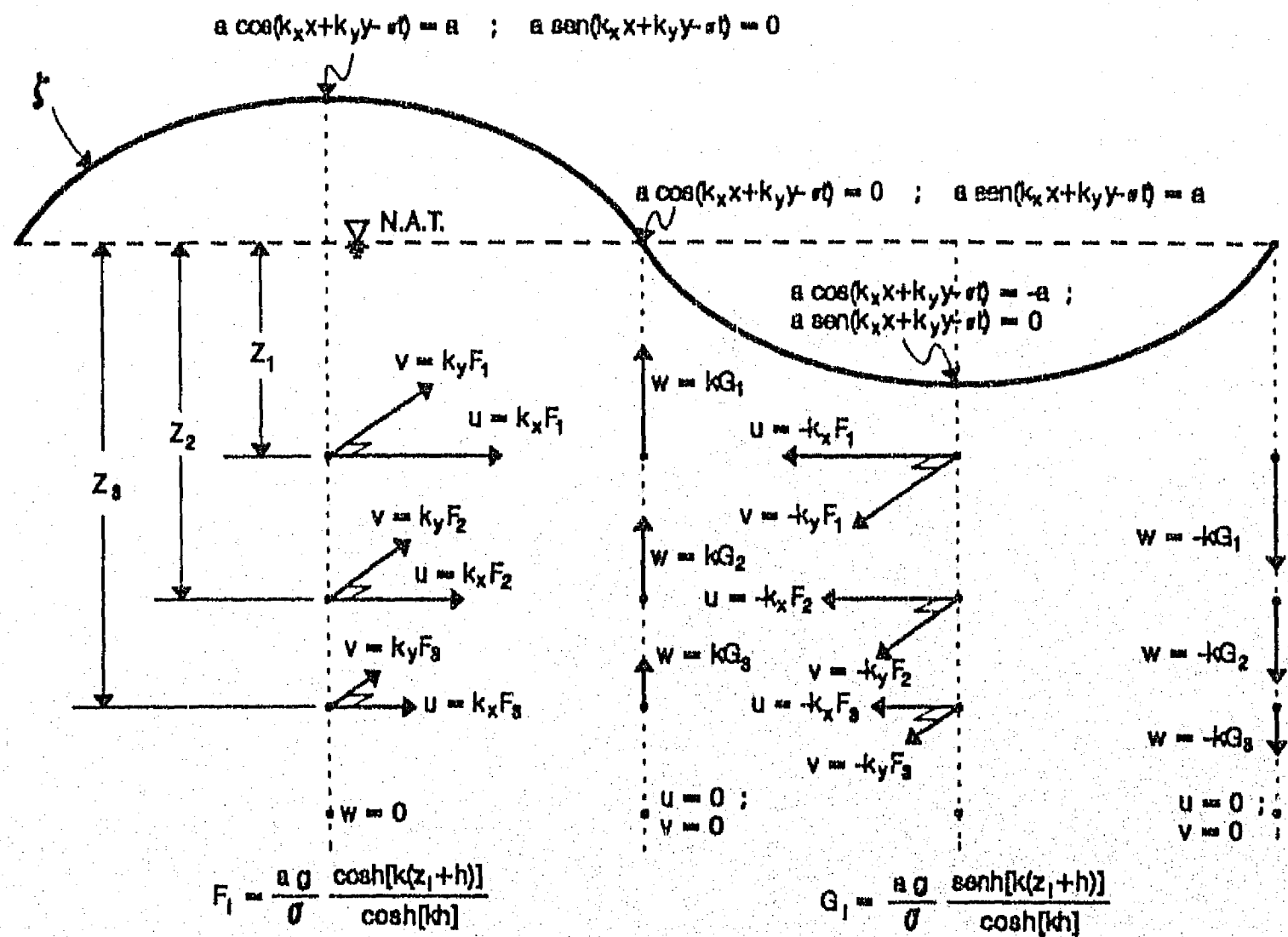


Figura 3.4 Componentes del vector velocidad (u, v, w).

Al sustituir las ecuaciones 3.50 en las 3.49 y luego de expandir en serie de Taylor las expresiones resultantes se llega, para la dirección x a

$$\frac{d\xi_x}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} (\bar{x} + \xi_x, \bar{y} + \xi_y, \bar{z} + \xi_z, t) =$$

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}} + \xi_x \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}} + \xi_y \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \right)_{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}} + \xi_z \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \right)_{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}} + \dots$$

para la dirección y, de forma semejante

$$\frac{d\xi_y}{dt} = \frac{\partial}{\partial y} (\bar{x} + \xi_x, \bar{y} + \xi_y, \bar{z} + \xi_z, t) =$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}} + \xi_x \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x \partial y}\right)_{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}} + \xi_y \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)_{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}} + \xi_z \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y \partial z}\right)_{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}} + \dots$$

para la dirección z, de igual manera

$$\frac{d\xi_z}{dt} = \frac{\partial}{\partial z} (\bar{x} + \xi_x, \bar{y} + \xi_y, \bar{z} + \xi_z, t) =$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}} + \xi_x \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x \partial z}\right)_{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}} + \xi_y \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y \partial z}\right)_{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}} + \xi_z \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)_{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}} + \dots$$

Despreciando los términos que involucran derivadas de orden dos en adelante y tomando en cuenta a la ecuación 3.29, se obtiene

$$\frac{d\xi_x}{dt} = u(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, t) = \frac{k_x a g}{\sigma} \frac{\cosh[k(\bar{z} + h)]}{\cosh(kh)} \cos(k_x \bar{x} + k_y \bar{y} - \sigma t)$$

$$\frac{d\xi_y}{dt} = v(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, t) = \frac{k_y a g}{\sigma} \frac{\cosh[k(\bar{z} + h)]}{\cosh(kh)} \cos(k_x \bar{x} + k_y \bar{y} - \sigma t)$$

$$\frac{d\xi_z}{dt} = w(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, t) = \frac{k_z a g}{\sigma} \frac{\sinh[k(\bar{z} + h)]}{\cosh(kh)} \sin(k_x \bar{x} + k_y \bar{y} - \sigma t)$$

Integrando respecto al tiempo a las tres expresiones anteriores para las condiciones  $\bar{\xi}_x = 0$ ,  $\bar{\xi}_y = 0$  y  $\bar{\xi}_z = 0$  se encuentra

$$\xi_x = -\frac{k_x a g}{\sigma^2} \frac{\cosh[k(\bar{z} + h)]}{\cosh(kh)} \cos(k_x \bar{x} + k_y \bar{y} - \sigma t) \quad (3.51a)$$

$$\xi_y = -\frac{k_y a g}{\sigma^2} \frac{\cosh[k(\bar{z} + h)]}{\cosh(kh)} \cos(k_x \bar{x} + k_y \bar{y} - \sigma t) \quad (3.51b)$$

$$\xi_z = \frac{k_z a g}{\sigma^2} \frac{\sinh[k(\bar{z} + h)]}{\cosh(kh)} \sin(k_x \bar{x} + k_y \bar{y} - \sigma t) \quad (3.51c)$$

de acuerdo con las ecuaciones 3.35 y 3.42

$$\sigma^2 = gk \tanh kh$$

de donde al considerar la relación entre las funciones hiperbólicas tangente, seno y coseno se tiene

$$\frac{gk}{\sigma^2} = \frac{\cosh(kh)}{\sinh(kh)} \quad (3.52)$$

al tomar en cuenta a las ecuaciones 3.4, 3.5 y 3.52 se obtiene

$$\xi_x = -a \cos \alpha \frac{\cosh[k(\bar{z} + h)]}{\sinh(kh)} \operatorname{sen}(k_x \bar{x} + k_y \bar{y} - \sigma t) \quad (3.53a)$$

$$\xi_y = -a \operatorname{sen} \alpha \frac{\cosh[k(\bar{z} + h)]}{\sinh(kh)} \operatorname{sen}(k_x \bar{x} + k_y \bar{y} - \sigma t) \quad (3.53b)$$

$$\xi_z = a \frac{\sinh[k(\bar{z} + h)]}{\sinh(kh)} \cos(k_x \bar{x} + k_y \bar{y} - \sigma t) \quad (3.53c)$$

Al sumar las ecuaciones 3.53a y 3.53b y despejar a la función senoidal

$$\operatorname{sen}(k_x \bar{x} + k_y \bar{y} - \sigma t) = - \frac{\xi_x + \xi_y}{a \frac{\cosh[k(\bar{z} + h)]}{\sinh(kh)} (\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha)} \quad (3.54)$$

Al despejar la función cosenoidal de la expresión 3.53c

$$\cos(k_x \bar{x} + k_y \bar{y} - \sigma t) = - \frac{\xi_z}{a \frac{\sinh[k(\bar{z} + h)]}{\sinh(kh)}} \quad (3.55)$$

De acuerdo con la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}^2(k_x \bar{x} + k_y \bar{y} - \sigma t) + \cos^2(k_x \bar{x} + k_y \bar{y} - \sigma t) = 1 \quad (3.56)$$

Al sustituir las ecuaciones 3.54 y 3.55 en 3.56 resulta

$$\frac{(\xi_x + \xi_y)^2}{\left[ a \frac{\cosh[k(\bar{z} + h)]}{\sinh(kh)} (\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha) \right]^2} + \frac{\xi_z^2}{\left[ a \frac{\sinh[k(\bar{z} + h)]}{\sinh(kh)} \right]^2} = 1 \quad (3.57)$$

La cual muestra que las partículas de agua viajan en una trayectoria elíptica en un plano vertical (figura 3.5).

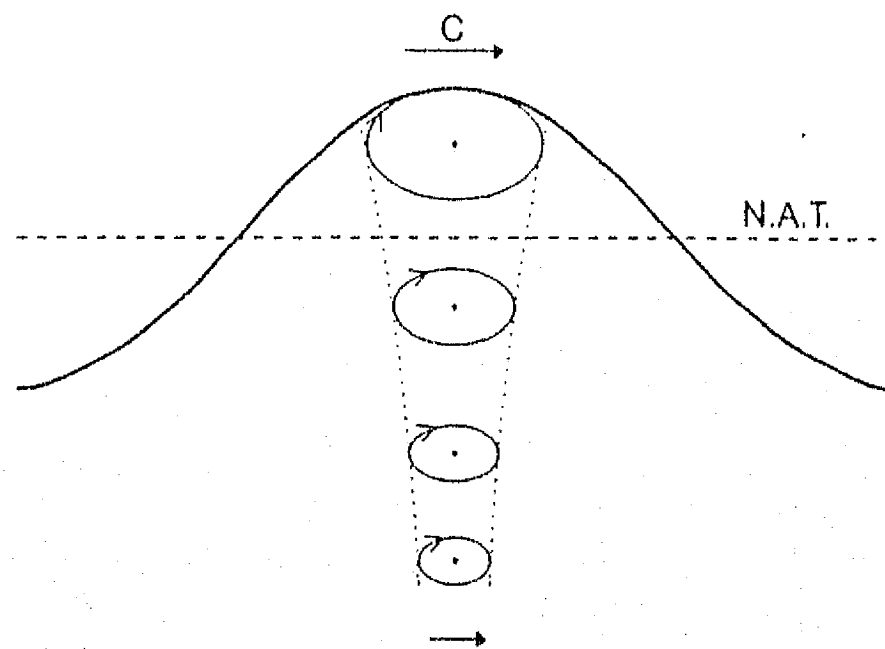


Figura 3.5 Orbitas de las partículas de agua en la dirección de avance del oleaje.

### 3.8 Energía del oleaje

La energía potencial  $E_p$  por unidad de longitud de cresta en una longitud de ola está dada por

$$E_p = \int_0^L \int_0^{\zeta} \rho g z \, dz \, dx = \frac{\rho g}{2} \int_0^L \zeta^2 \, dx \quad (3.58)$$

Sin perder generalidad, se considera el perfil de las olas avanza en la dirección del eje  $x$  ( $y = 0$ ), por lo que de la ecuación 3.3 se obtiene

$$\zeta = a \cos(k_x x - \sigma t)$$

Al sustituir la expresión anterior en la ecuación 3.58 se encuentra que la energía potencial por unidad de longitud de cresta es

$$E_p = \frac{\rho g a^2}{2} \int_0^L \cos^2(k_x x - \sigma t) \, dx = \frac{\rho g a^2}{4} L \quad (3.59)$$

Similarmente, para esta dirección de avance la energía cinética por unidad de cresta en una longitud de ola se obtiene a partir de

$$E_R = \int_0^L \int_0^{\zeta} \frac{\rho}{2} (u^2 + w^2) \, dz \, dx \quad (3.60)$$

al sustituir las ecuaciones 3.46 y 3.48 e integrar se obtiene

$$E_R = \frac{\rho g a^2}{2} L \quad (3.61)$$

La energía total por unidad de longitud de cresta en una longitud de ola es igual a la suma de las energías potencial y cinética por lo que

$$E = E_P + E_R = \frac{\rho g a^2}{2} L \quad (3.62)$$

Se entiende por energía total por unidad de área (el ancho de cresta y la longitud de ola son iguales a 1)

$$\bar{E} = \bar{E}_P + \bar{E}_R = \frac{\rho g a^2}{2}$$

o bien en función de la altura de ola,  $H = 2a$  se tiene

$$\bar{E} = \frac{\rho g H^2}{8} \quad (3.63)$$

### 3.9 Razones de flujo

Cuando en la expresión de movimiento para flujo con potencial (ecuaciones 2.39) se toma en cuenta a las ecuaciones 2.36, 2.41 y 2.51, se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p + gk = 0$$

Por lo que en las direcciones  $x$  y  $y$  se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (3.65)$$

donde  $u$  y  $v$  son los componentes del vector de velocidad según los ejes  $x$  y  $y$  respectivamente.



Al considerar la ecuación 3.45 en la ecuación 3.46 resulta

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{g \cosh [k(z+h)]}{\cosh(kh)} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0$$

Si se integra respecto a  $z$  de 0 a  $h$  se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h u dz + \frac{\partial \zeta}{\partial x} g \int_0^h \frac{\cosh [k(z+h)]}{\cosh(kh)} dz = 0$$

de donde

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h u dz + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{g}{k} \tanh(kh) = 0$$

de acuerdo con la ecuación 3.38 resulta

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h u dz + c^2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \quad (3.66)$$

Se define como razón de flujo en las direcciones  $x$  (figura 3.6) y  $y$  respectivamente a

$$Q_x = \int_0^h u dz \quad (3.67)$$

$$Q_y = \int_0^h v dz \quad (3.68)$$

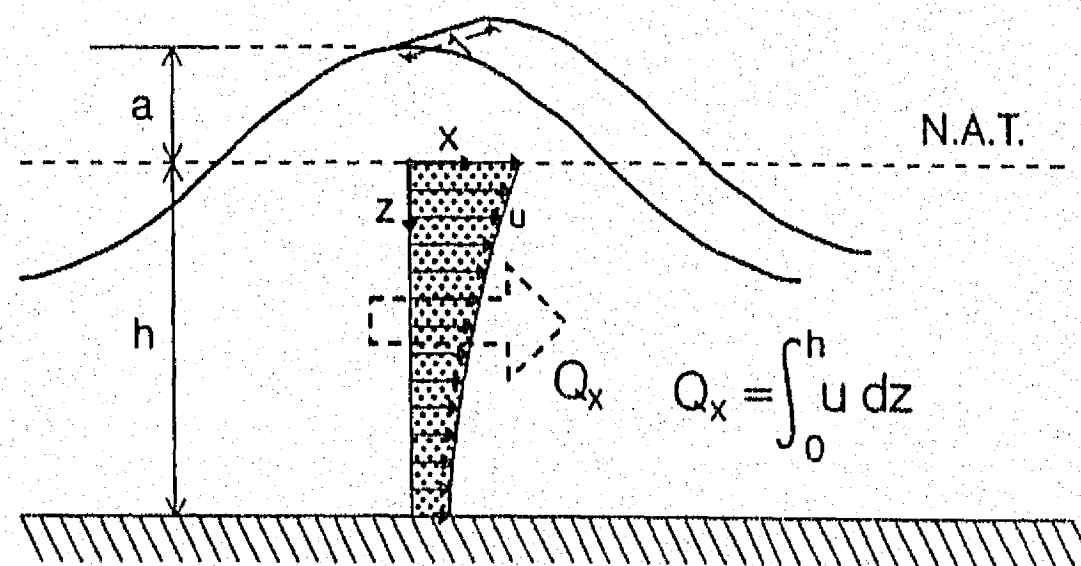


Figura 3.6 Razón de flujo en la dirección  $x$ .

por lo que la ecuación 3.66 se puede escribir como

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_x + c^2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \quad (3.69)$$

de manera similar, a partir de la ecuación 3.65 para la dirección y se llega a obtener

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_y + c^2 \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \quad (3.70)$$

Por otra parte, se considera que si  $u = |V| \cos \alpha$  y  $v = |V| \sin \alpha$

$$Q_x = \cos \alpha \int_0^h |V| dz \quad (3.71)$$

$$Q_y = \sin \alpha \int_0^h |V| dz \quad (3.72)$$

de tal suerte que al dividir la ecuación 3.72 entre la 3.71 se encuentra

$$\alpha = \text{angtan} \frac{Q_y}{Q_x} \quad (3.73)$$

De esta expresión se obtiene la dirección en la cual avanza el oleaje.

### 3.10 Celeridad de un tren de ondas

Cuando se combinan dos ondas con características parecidas que avanzan en la misma dirección se forma un tren de ondas. Para simplificar pasos matemáticos, se escoge como dirección de avance una paralela al eje  $x$  ( $k_x = k$ ), por lo que de la ecuación 2.69 se escribe ( $y = 0$ ) como

$$\zeta = a \cosh(k_1 x - \sigma_2 t + \phi) + a \cos(k_2 x - \sigma_2 t + \phi) \quad (3.74)$$

El ángulo de fase  $\phi$  que, de acuerdo con la dirección de avance de las ondas es constante.

Con base en la identidad trigonométrica siguiente

$$\cos A + \cos B = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

la ecuación 3.74 es equivalente a

$$\zeta = 2a \cos\left(\frac{k_1 x + k_2 x}{2} - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} t + \phi\right) \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2} x - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} t\right) \quad (3.75)$$

ahora, si se considera que

$$k_3 = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad ; \quad \sigma_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

$$k_4 = \frac{k_1 - k_2}{2} \quad ; \quad \sigma_4 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

de las definiciones de números de onda y frecuencia angular se plantea que

$$L_3 = \frac{2\pi}{k_3} = \frac{4\pi}{k_1 + k_2} \quad ; \quad T_3 = \frac{2\pi}{\sigma_3} = \frac{4\pi}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

$$L_4 = \frac{2\pi}{k_4} = \frac{4\pi}{k_1 - k_2} \quad ; \quad T_4 = \frac{2\pi}{\sigma_4} = \frac{4\pi}{\sigma_1 - \sigma_2}$$

Cuando  $k_1$  y  $k_2$  son casi iguales, su promedio prácticamente coincide con el número de onda de cualquiera de las ondas individuales de la ecuación 3.74, lo mismo sucede cuando  $\sigma_2 \approx \sigma_1$  que la frecuencia angular  $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$  se puede confundir con  $\sigma_2$  o  $\sigma_1$ . Sin embargo, la longitud  $L_4$  y el período  $T_4$  tienen un valor mayor al de cualquiera de las ondas individuales (los denominadores de las expresiones de  $L_4$  y  $T_4$  son casi nulos).

La celeridad de la onda relativa a  $L_4$  y  $T_4$  es

$$c_g = \frac{L_4}{T_4} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{k_1 - k_2}$$

tomando en cuenta a la ecuación 3.37 se obtiene que

$$c_g = \frac{k_1 c_1 - k_2 c_2}{k_1 - k_2}$$

en términos de diferencias se puede representa así:

$$c_g = \frac{\Delta(kc)}{\Delta k}$$

Cuando  $\Delta k$  tiende a cero, se obtiene que

$$c_g = \frac{d(kc)}{dk}$$

Al desarrollar la derivada de un producto de funciones se encuentra

$$c_g = c + k \frac{dc}{dk} \quad (3.76)$$

por otra parte, dado que

$$\frac{dc^2}{dk} = 2c \frac{dc}{dk}$$

entonces

$$\frac{dc}{dk} = \frac{1}{2c} \frac{dc^2}{dk}$$

al considerar a la ecuación 3.38 se obtiene

$$\frac{dc}{dk} = \frac{1}{2c} \left( \frac{gh}{k} \operatorname{sech}^2 kh - \frac{g}{k^2} \tanh kh \right)$$

al volver a usar la ecuación 3.38 se escribe

$$\frac{dc}{dk} = \frac{1}{2c} \left( \frac{gh}{k} \operatorname{sech}^2 kh - \frac{c^2}{k} \right)$$

o bien

$$\frac{dc}{dk} = \frac{c}{2k} \left( \frac{gh}{c^2} \operatorname{sech}^2 kh - 1 \right)$$

nuevamente al emplear la ecuación 3.38,

$$\frac{dc}{dk} = \frac{c}{2k} \left( \frac{kh}{\tanh kh} \operatorname{sech}^2 kh - 1 \right)$$

que se puede escribir en términos de las funciones hiperbólicas seno y coseno como

$$\frac{dc}{dk} = \frac{c}{2k} \left( \frac{kh}{\sinh(kh) \cosh(kh)} - 1 \right)$$

de la identidad de las funciones hiperbólicas

$$\sinh 2A = 2 \sinh A \cosh A$$

se tiene que

$$\frac{dc}{dk} = \frac{c}{2k} \left( \frac{2kh}{\sinh 2kh} - 1 \right) \quad (3.77)$$

al sustituir la ecuación 3.77 en la 3.76 se encuentra

$$c_g = c + \frac{c}{2} \frac{2kh}{\sinh 2kh} - \frac{c}{2}$$

que se puede escribir como

$$c_g = c n \quad (3.78)$$

siendo

$$n = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \quad (3.79)$$

La literal  $n$  se acostumbra llamar factor de grupo.

La gráfica de la ecuación 3.75 se muestra en la figura 3.7. Se aprecia que se tiene un conjunto de olas al que se le denomina tren de ondas. La velocidad con la cual se desplaza su envolvente corresponde a  $c_g$ ; a la cual se le conoce como celeridad de grupo.

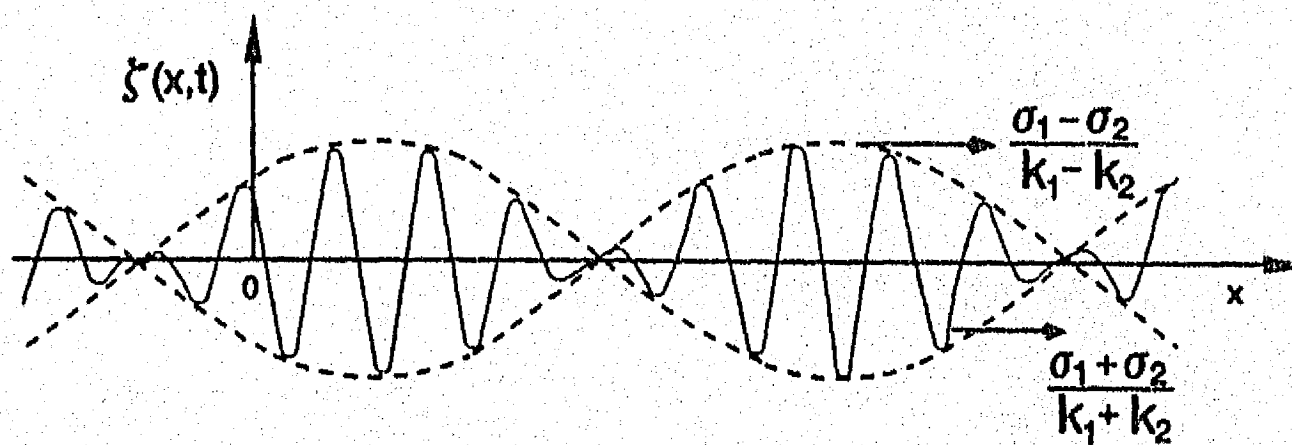
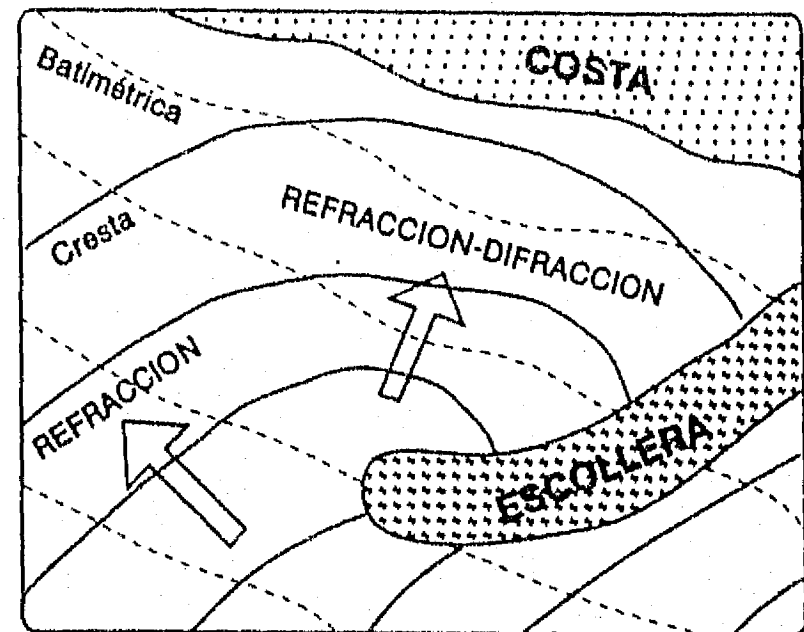


Figura 3.7 Tren de ondas.



#### 4. REFRACCIÓN Y DIFRACCIÓN COMBINADAS

En este capítulo se presenta la deducción de la ecuación que describe al fenómeno de refracción y difracción en forma simultánea. Ella es fundamental para los estudios de propagación del oleaje desde aguas profundas hasta aguas bajas.

##### 4.1 Ecuaciones de partida

La deducción se limita a oleaje lineal y no toma en cuenta la pérdida de energía debida a la fricción o a la ruptura de ola. Las cuatro ecuaciones en que se apoya fueron deducidas en los capítulos 2 y 3, y se listan a continuación.

##### 4.1.1 Ecuación de Laplace

La ecuación de continuidad para un fluido con potencial, incompresible y homogéneo en tres dimensiones espaciales está dado por la ecuación 2.28, a saber

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.1)$$

##### 4.1.2 Ecuación para la condición de superficie libre

Para la superficie libre del agua se requiere cumplir con la ecuación 3.18, es decir

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\sigma^2}{g} \phi = 0 \quad (4.2)$$

#### 4.1.3 Ecuación para la condición de fondo

En el fondo del mar, representado por la función  $z = -h(x,y)$ , se cumple con la ecuación 3.10, es decir

$$\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (4.3)$$

que también se puede escribir como

$$\nabla h \cdot \nabla \phi + \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (4.3')$$

#### 4.1.4 Ecuación del potencial $\phi$

En este caso se propone que el potencial de velocidad se exprese como el producto de dos funciones de la manera siguiente

$$\phi = \phi(x, y, z, t) = Z(h, z) f(x, y, t) \quad (4.4)$$

donde  $Z(h,z)$  se puede escribir mediante una ecuación similar a la 3.30 como

$$Z = \frac{\cosh [k(z + h)]}{\cosh (kh)} \quad (4.5)$$

## 4.2 Deducción de la ecuación pendiente suave

Se propone resolver la ecuación de Laplace (ecuación 3.1) por el método de separación de variables para las condiciones de frontera expresadas por las ecuaciones 4.2 y 4.3. Además se acepta que el potencial de velocidad está dado por la ecuación 4.4.

Se obtendrá la ecuación de refracción-difracción siguiendo cuatro etapas que se consignan en los incisos siguientes.

4.2.1 Etapa 1. Sustitución del potencial en las ecuaciones 4.1 a 4.3

Al considerar la ecuación 4.4 en la 4.1 resulta

$$Z \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) + 2 \left( \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} \right) + f \left( \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right) + f \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial Z}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} + Z \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \quad (4.6)$$

que puede escribirse como

$$Z \nabla^2 f + 2 \nabla Z \cdot \nabla f + f \nabla^2 Z + f \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial Z}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} + Z \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \quad (4.6')$$

donde  $\nabla$  es el operador nabla que se entenderá en dos dimensiones horizontales como

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j}$$

Por otra parte, de la ecuación 4.4 se deduce que

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial z} f + Z \frac{\partial f}{\partial z}$$

al tomar en cuenta a la ecuación 4.2 se obtiene

$$\frac{\sigma^2}{g} \phi = \frac{\partial Z}{\partial z} f + Z \frac{\partial f}{\partial z}$$

por la ecuación 4.4

$$\frac{\sigma^2}{g} Z f = \frac{\partial Z}{\partial z} f + Z \frac{\partial f}{\partial z} \quad (4.7)$$

de la ecuación 4.5 se calcula

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{k \sinh [k (h + z)]}{\cosh (kh)} \quad (4.8)$$

para  $z = 0$

$$\left( \frac{\partial Z}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{k \sinh (kh)}{\cosh (kh)} = k \tanh (kh)$$



de la ecuación 3.42

$$\left( \frac{\partial Z}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{4\pi^2}{gT^2}$$

y dado que por la ecuación 4.5

$$(Z)_{z=0} = \frac{\cosh(kd)}{\cosh(kd)} = 1$$

De modo que la ecuación 4.7 para  $z = 0$  da lugar a

$$\frac{\sigma^2}{g} - 1 f = \frac{4\pi^2}{gT^2} f + 1 \frac{\partial f}{\partial z}$$

como  $\sigma = 2\pi/T$  se tiene que

$$\left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{z=0} = 0 \quad (4.9)$$

Por lo que se refiere a la ecuación 4.3 al considerar a la ecuación 4.4 resulta

$$Z \frac{\partial f}{\partial z} + f \frac{\partial Z}{\partial z} + Z \left( \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} \right) + f \left( \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial Z}{\partial y} \right) = 0 \quad (4.10)$$

de la ecuación 4.8 para  $z = -h$  se tiene que

$$\left( \frac{\partial Z}{\partial z} \right)_{z=-h} = \frac{k \sinh 0}{\cosh(kh)} = 0$$

por lo que la ecuación 4.10 para  $z = -h$  es igual a

$$Z \frac{\partial f}{\partial z} + Z \left( \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} \right) + f \left( \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial Z}{\partial y} \right) = 0 \quad (4.11)$$

o bien

$$\boxed{Z \frac{\partial f}{\partial z} + Z (\nabla h \cdot \nabla f) + f (\nabla h \cdot \nabla Z) = 0} \quad (4.11')$$

La ecuación anterior permite calcular la refracción y difracción simultáneas del oleaje. Para facilitar su empleo se harán a continuación varias modificaciones a su escritura.

#### 4.2.2 Etapa 2. Condición de frontera en el fondo en términos de la profundidad

Como conviene escribir la ecuación 4.11 en función de la variable  $Z$ , se comienza con las igualdades siguientes

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (4.12a)$$

y

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial y} \quad (4.12b)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial h} \left( \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \right)$$

o sea

$$\nabla Z = \frac{\partial Z}{\partial h} \nabla h \quad (4.12c)$$

También son útiles las expresiones

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial Z}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial Z}{\partial h} + \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial h} \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial h} = \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{\partial Z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{\partial Z}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 Z}{\partial h^2} \frac{\partial h}{\partial x}$$

así

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial Z}{\partial h} + \frac{\partial^2 Z}{\partial h^2} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x}$$

de manera similar

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \frac{\partial Z}{\partial h} + \frac{\partial^2 Z}{\partial h^2} \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y}$$

por lo cual

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \frac{\partial Z}{\partial h} \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 Z}{\partial h^2} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \quad (4.13)$$

que también es igual a

$$\nabla^2 Z = \frac{\partial Z}{\partial h} \nabla^2 h + \frac{\partial^2 Z}{\partial h^2} (\nabla h \cdot \nabla h) \quad (4.13')$$

Por la ecuación 4.5 se tiene que

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \frac{k^2 \cosh[k(h+z)]}{\cosh(kh)} = k^2 Z \quad (4.14)$$

Al sustituir las ecuaciones 4.12 a 4.14 en la 4.6'

$$\begin{aligned} Z \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial Z}{\partial h} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} \right) + f \left\{ \left( \frac{\partial Z}{\partial h} \right) \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) + \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial^2 Z}{\partial h^2} \right) \left( \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right\} + Z \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial Z}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} + k^2 Z f = 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

O bien

$$\begin{aligned} Z \nabla^2 f + 2 \frac{\partial Z}{\partial h} \nabla h \cdot \nabla f + f \left\{ \frac{\partial Z}{\partial h} \nabla^2 h + \frac{\partial^2 Z}{\partial h^2} (\nabla h \cdot \nabla h) \right\} + Z \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \\ + 2 \frac{\partial Z}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} + k^2 Z f = 0 \end{aligned} \quad (4.15')$$

Al considerar las ecuaciones 4.12a y 4.12b en la ecuación 4.11

$$Z \frac{\partial f}{\partial z} + Z \left( \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} \right) + f \left( \frac{\partial Z}{\partial h} \right) \left( \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0 \quad (4.16)$$

la cual también se puede escribir como

$$Z \frac{\partial f}{\partial z} + Z (\nabla h \cdot \nabla f) + f \frac{\partial Z}{\partial h} \nabla h \cdot \nabla h = 0 \quad (4.16')$$

en  $z = 0$ .

### 4.2.3 Etapa 3. Flujo de energía

Por otra parte al multiplicar la ecuación 4.15' por  $Z$  e integrar de  $-h$  a  $0$  se encuentra

$$\int_{-h}^0 Z^2 \nabla^2 f dz + \int_{-h}^0 2Z \frac{\partial Z}{\partial h} \nabla h \cdot \nabla f dz + \int_{-h}^0 Z \left\{ \frac{\partial Z}{\partial h} \nabla^2 h + \frac{\partial^2 Z}{\partial h^2} (\nabla h \cdot \nabla h) \right\} f dz + \int_{-h}^0 Z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dz + \int_{-h}^0 2Z \frac{\partial Z}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} dz + \int_{-h}^0 k^2 Z^2 f dz = 0$$

Si se asocian la última integral con la primera y se introduce  $Z$  en la derivada de la segunda integral se tiene que

$$\int_{-h}^0 Z^2 (\nabla^2 f + k^2 f) dz + \int_{-h}^0 \frac{\partial Z^2}{\partial h} \nabla h \cdot \nabla f dz + \int_{-h}^0 Z \left\{ \frac{\partial Z}{\partial h} \nabla^2 h + \frac{\partial^2 Z}{\partial h^2} (\nabla h \cdot \nabla h) \right\} f dz + \int_{-h}^0 Z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dz + \int_{-h}^0 2Z \frac{\partial Z}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0 \quad (4.17)$$

Si para el penúltimo término de la ecuación 4.17 se obtiene su integral por partes, se cumple que

$$\int_{-h}^0 Z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dz = Z^2 \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{-h}^0 - \int_{-h}^0 \frac{\partial Z^2}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (4.18)$$

Al tomar en consideración a la ecuación 4.9 se tiene que

$$\left[ Z^2 \frac{\partial f}{\partial z} \right]_{z=0} = 0$$

por lo cual, el primer sumando del segundo miembro de la ecuación 4.18 se considera solo en  $z = -h$  por lo cual

$$\int_{-h}^0 Z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dz = - \left[ Z^2 \frac{\partial f}{\partial z} \right]_{z=-h} - \int_{-h}^0 \frac{\partial Z^2}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (4.19)$$

De la ecuación 4.16 se tiene al multiplicar por  $Z$  que

$$\left[ -Z^2 \frac{\partial f}{\partial z} \right]_{z=-h} = \left[ Z^2 (\nabla h \cdot \nabla f) \right]_{z=-h} + \left[ fZ \frac{\partial Z}{\partial h} (\nabla h \cdot \nabla h) \right]_{z=-h}$$

por lo que la ecuación 4.19 queda

$$\int_{-h}^0 Z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dz = Z^2 (\nabla h \cdot \nabla f) + fZ \frac{\partial Z}{\partial h} (\nabla h \cdot \nabla h) - \int_{-h}^0 \frac{\partial Z^2}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (4.20)$$

Al considerar la ecuación 4.20 en la 4.17 se tiene

$$\begin{aligned} & \int_{-h}^0 Z^2 (\nabla f + k^2 f) dz + \int_{-h}^0 \frac{\partial Z^2}{\partial h} \nabla h \cdot \nabla f dz + \\ & + \int_{-h}^0 Z \left\{ \frac{\partial Z}{\partial h} \nabla^2 h + \frac{\partial^2 Z}{\partial h^2} (\nabla h \cdot \nabla h) \right\} f dz + \\ & + \left[ Z^2 (\nabla h \cdot \nabla f) \right]_{z=-h} + \left[ fZ \frac{\partial Z}{\partial h} (\nabla h \cdot \nabla h) \right]_{z=-h} = 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

#### 4.2.4 Etapa 4. Simplificaciones en la ecuación 4.21 por linealidad

Expresando la función  $f$  en serie de Taylor respecto a  $z$  como

$$f = f(x, y, z) = f_0(x, y) + \Delta z^2 f_1(x, y) + \Delta z^4 f_2(x, y) + \dots$$

La ecuación 4.21 queda al tomar en cuenta que  $h$  y  $f_0$  no dependen de  $z$  como

$$\begin{aligned} & \left[ \int_{-h}^0 Z^2 dz \right] (\nabla f_0 + k^2 f_0) + \left[ \int_{-h}^0 \frac{\partial Z^2}{\partial h} dz \right] (\nabla h \cdot \nabla f_0) + \\ & + \left[ \int_{-h}^0 Z \frac{\partial Z}{\partial h} \nabla^2 h dz \right] f_0 + \left[ \int_{-h}^0 Z \frac{\partial^2 Z}{\partial h^2} dz \right] \{ \nabla h \cdot \nabla h \} f_0 + \\ & + \left[ Z^2 \right]_{z=-h} (\nabla h \cdot \nabla f_0) + \left[ Z \frac{\partial Z}{\partial h} \right]_{z=-h} (\nabla h \cdot \nabla h) f_0 + \dots = 0 \end{aligned}$$

despreciando los términos que involucran a derivadas de orden dos y aquellos en que intervengan  $f_1, f_2, \dots$ , se obtiene

$$\left[ \int_{-h}^0 Z^2 dz \right] (\nabla f_0 + k^2 f_0) + \left[ \int_{-h}^0 \frac{\partial Z^2}{\partial h} dz \right] (\nabla h \cdot \nabla f_0) + \quad (4.22)$$

$$+ [Z^2]_{z=-h} (\nabla h \cdot \nabla f_0) = 0$$

por otra parte, del Teorema de Leibnitz para derivación bajo el signo integral se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial h} \int_{-h}^0 Z^2 dz = \int_{-h}^0 \frac{\partial Z^2}{\partial h} dz + [Z^2]_{z=-h}$$

en donde

$$[Z^2]_{z=-h} = - \int_{-h}^0 \frac{\partial Z^2}{\partial h} dz + \frac{\partial}{\partial h} \int_{-h}^0 Z^2 dz \quad (4.23)$$

Al sustituir la ecuación 4.23 en la 4.22

$$\left[ \int_{-h}^0 Z^2 dz \right] (\nabla f_0 + k^2 f_0) + \left[ \int_{-h}^0 \frac{\partial Z^2}{\partial h} dz \right] (\nabla h \cdot \nabla f_0) +$$

$$+ \left[ - \int_{-h}^0 \frac{\partial Z^2}{\partial h} dz + \frac{\partial}{\partial h} \int_{-h}^0 Z^2 dz \right] (\nabla h \cdot \nabla f_0) = 0$$

simplificando

$$\left[ \int_{-h}^0 Z^2 dz \right] (\nabla f_0 + k^2 f_0) + \left[ \frac{\partial}{\partial h} \int_{-h}^0 Z^2 dz \right] (\nabla h \cdot \nabla f_0) = 0 \quad (4.24)$$

ya que para un escalar  $\alpha$  y vectores  $\nabla b$  y  $\nabla c$  se cumple (Tabla 2.1, propiedad 3) que

$$\alpha (\nabla b \cdot \nabla c) = (\alpha \nabla b) \cdot \nabla c$$

para

$$\alpha = \frac{\partial}{\partial h} \int_{-h}^0 Z^2 dz$$

$$\nabla b = \nabla h$$

$$\nabla c = \nabla f_0$$

se tiene que

$$\left[ \frac{\partial}{\partial h} \int_{-h}^0 Z^2 dz \right] (\nabla h \cdot \nabla f_0) = \left( \left[ \frac{\partial}{\partial h} \int_{-h}^0 Z^2 dz \right] \nabla h \right) \cdot \nabla f_0 \quad (4.25)$$

por la ecuación 4.12c se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial h} \nabla h = \nabla u$$

por lo cual

$$\left( \frac{\partial}{\partial h} \int_{-h}^0 Z^2 dz \right) \nabla h = \nabla \left[ \int_{-h}^0 Z^2 dz \right]$$

así

$$\left[ \frac{\partial}{\partial h} \int_{-h}^0 Z^2 dz \right] (\nabla h \cdot \nabla f_0) = \nabla \left[ \int_{-h}^0 Z^2 dz \right] \cdot \nabla f_0 \quad (4.26)$$

Al sustituir la ecuación 4.26 en la 4.24

$$\int_{-h}^0 Z^2 dz (\nabla f_0 + k^2 f_0) + \nabla \left[ \int_{-h}^0 Z^2 dz \right] \cdot \nabla f_0 = 0$$

que también se puede escribir como

$$\left[ \int_{-h}^0 Z^2 dz \right] (\nabla \cdot \nabla f_0) + \nabla \left[ \int_{-h}^0 Z^2 dz \right] \cdot \nabla f_0 + \int_{-h}^0 Z^2 dz (k^2 f_0) = 0 \quad (4.27)$$

Ahora de acuerdo con la propiedad vectorial ( $\alpha$  escalar,  $\mathbf{a}$  vector, tabla 2.1)

$$\alpha (\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\nabla \alpha) \cdot \mathbf{a} = \nabla \cdot (\alpha \mathbf{a})$$

para

$$\alpha = \int_{-h}^0 Z^2 dz$$

y

$$\mathbf{a} = \nabla f_0$$

los dos primeros sumandos de la ecuación 4.27 quedan

$$\left[ \int_{-h}^0 Z^2 dz \right] (\nabla \cdot \nabla f_0) + \nabla \cdot \left[ \int_{-h}^0 Z^2 dz \right] \nabla f_0 = \nabla \cdot \left[ \int_{-h}^0 Z^2 dz \cdot \nabla f_0 \right] \quad (4.28)$$

Tomando en cuenta a la ecuación 4.28 en la 4.27 se tiene

$$\nabla \cdot \left[ \int_{-h}^0 Z^2 dz \nabla f_0 \right] + \int_{-h}^0 Z^2 k^2 f_0 = 0 \quad (4.29)$$

Por otra parte, a partir de la ecuación 4.5 se obtiene que

$$\int_{-h}^0 Z^2 dz = \frac{n}{k^2} \quad (4.30)$$

siendo  $n$  el factor de grupo definido como (ecuación 3.61)

$$n = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right] \quad (4.31)$$

Al sustituir la ecuación 4.30 en la 4.29

$$\nabla \cdot \left( \frac{n}{k^2} \nabla f_0 \right) + n f_0 = 0 \quad (4.32)$$

Como la celeridad de grupo  $c_g$  está relacionada con la celeridad de la ola (ecuación 3.60) como

$$c_g = n c \quad (4.33)$$

ya que el número de onda de acuerdo a la ecuación 3.37 es

$$k = \frac{\sigma}{c} \quad (4.34)$$

se tiene que

$$\frac{n}{k^2} = \frac{c_g c^2}{c \sigma^2} = \frac{c_g c}{\sigma^2}$$

así la ecuación 4.32 resulta ser

$$\nabla \cdot \left[ \frac{c_g c}{\sigma^2} \nabla f_0 \right] + \frac{c_g}{c} f_0 = 0$$

o bien

$$\frac{1}{\sigma^2} \nabla \cdot (c_g c \nabla f_0) + \frac{c_g}{c} f_0 = 0$$



$$\nabla \cdot (c_g c \nabla f_0) + \sigma^2 \frac{c_g}{c} f_0 = 0 \quad (4.35)$$

Esta es la ecuación pendiente suave o de Berkhoff para calcular la refracción y difracción combinadas. También puede escribirse como

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( c c_g \frac{\partial f_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( c c_g \frac{\partial f_0}{\partial y} \right) + \sigma^2 \frac{c_g}{c} f_0 = 0 \quad (4.35')$$

La ecuación 4.35 es de tipo elíptico y por tanto, para resolverla es necesario definir condiciones de frontera a lo largo de una curva cerrada que limita la región (dominio) donde se desea encontrar su solución.

### 4.3 Ecuación de pendiente suave con base en un potencial exponencial

Considere que la expresión fundamental para calcular la refracción y difracción (ecuación 4.35) se escribe en la forma

$$A_x + A_y + B = 0 \quad (4.36)$$

donde

$$A_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( c c_g \frac{\partial f_0}{\partial x} \right) = c c_g \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} + \frac{\partial f_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (c c_g) \quad (4.37)$$

$$A_y = \frac{\partial}{\partial y} \left( c c_g \frac{\partial f_0}{\partial y} \right) = c c_g \frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} + \frac{\partial f_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (c c_g) \quad (4.38)$$

$$B = \sigma^2 \frac{c_g}{c} f_0 \quad (4.39)$$

Se propone que el potencial  $f_0$  se exprese como

$$f_0 = a e^{iS} \quad (4.40)$$

en la cual  $a = a(x,y)$  es la amplitud de la ola,  $S = S(x,y)$  es la fase de la ola e  $i = \sqrt{-1}$ .

De acuerdo con la ecuación 4.40, al derivar respecto a  $x$  se encuentra

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} = e^{is} \frac{\partial a}{\partial x} + a i e^{is} \frac{\partial S}{\partial x} \quad (4.41)$$

Si se deriva nuevamente respecto a  $x$  se llega a

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} = e^{is} \left( \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - a \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} \right) + i e^{is} \left( a \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial a}{\partial x} \right) \quad (4.42)$$

Al considerar en el segundo sumando de la ecuación 4.37 a la ecuación 4.41 resulta

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} \frac{\partial (cc_g)}{\partial x} = e^{is} \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial (cc_g)}{\partial x} + i a e^{is} \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial (cc_g)}{\partial x} \quad (4.43)$$

Al tomar en cuenta las ecuaciones 4.42 y 4.43 en 4.37 se encuentra

$$A_x = (cc_g) e^{is} \left( \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - a \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{(cc_g)} \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial (cc_g)}{\partial x} \right) + \\ + i (cc_g) e^{is} \left( a \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{a}{(cc_g)} \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial (cc_g)}{\partial x} \right) \quad (4.44)$$

Partiendo de la ecuación 4.40, con un proceso similar para la dirección  $y$  se llega a

$$A_y = (cc_g) e^{is} \left( \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} - a \frac{\partial S}{\partial y} \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{1}{(cc_g)} \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial (cc_g)}{\partial y} \right) + \\ + i (cc_g) e^{is} \left( a \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial S}{\partial y} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{a}{(cc_g)} \frac{\partial S}{\partial y} \frac{\partial (cc_g)}{\partial y} \right) \quad (4.45)$$

Por otra parte, al sustituir 4.40 en 4.39 se tiene

$$B = \sigma^2 \frac{c_g}{c} a e^{is} \quad (4.46)$$

De acuerdo con la ecuación 4.36, la suma de las partes reales e imaginaria de las ecuaciones 4.44, 4.45 y 4.46 son nulas. A continuación se trata por separado cada una de estas partes.

- Parte real

$$(cc_g) e^{iS} \left\{ \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} - a \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{(cc_g)} \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial (cc_g)}{\partial x} + \frac{1}{(cc_g)} \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial (cc_g)}{\partial y} + \frac{\sigma^2}{c^2} a \right\} = 0 \quad (4.47)$$

Al dividir entre  $(cc_g)ae^{iS}$  y considerar que  $k^2 = \sigma^2/c^2$  (ecuación 3.37) se encuentra

$$\frac{1}{a} \left\{ \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{1}{(cc_g)} \left[ \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial (cc_g)}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial (cc_g)}{\partial y} \right] \right\} - \\ \left\{ \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 \right\} + k^2 = 0 \quad (4.48)$$

En forma vectorial la expresión anterior se puede escribir como

$$\boxed{\frac{1}{a} \left\{ \nabla^2 a + \frac{1}{cc_g} [ \nabla a \cdot \nabla (cc_g) ] \right\} - |\nabla S|^2 + k^2 = 0} \quad (4.49)$$

- Parte imaginaria

$$(cc_g) e^{iS} \left\{ a \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial a}{\partial x} + 2 \frac{\partial S}{\partial y} \frac{\partial a}{\partial y} + \right. \\ \left. + \frac{a}{(cc_g)} \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial (cc_g)}{\partial x} + \frac{a}{(cc_g)} \frac{\partial S}{\partial y} \frac{\partial (cc_g)}{\partial y} \right\} = 0 \quad (4.50)$$

al multiplicar por  $a/e^{iS}$  y ordenar términos

$$(cc_g) a^2 \left( \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial S}{\partial x} \cdot \left( 2 a(cc_g) \frac{\partial a}{\partial x} + a^2 \frac{\partial (cc_g)}{\partial x} \right) +$$

$$+ \frac{\partial S}{\partial y} \left( 2 a(cc_g) \frac{\partial a}{\partial y} + a^2 \frac{\partial(cc_g)}{\partial y} \right) = 0 \quad (4.51)$$

como

$$\frac{\partial}{\partial x} (cc_g) a^2 = 2 a(cc_g) \frac{\partial a}{\partial x} + a^2 \frac{\partial(cc_g)}{\partial x} \quad (4.52)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (cc_g) a^2 = 2 a(cc_g) \frac{\partial a}{\partial y} + a^2 \frac{\partial(cc_g)}{\partial y} \quad (4.53)$$

al sustituir las ecuaciones 4.52 y 4.53 en 4.51 se puede escribir

$$\begin{aligned} (cc_g) a^2 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (cc_g) a^2 + (cc_g) a^2 \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \\ + \frac{\partial S}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (cc_g) a^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.54)$$

o bien como

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( (cc_g) a^2 \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( (cc_g) a^2 \frac{\partial S}{\partial y} \right) = 0 \quad (4.55)$$

que en forma vectorial es

$$\boxed{\nabla \cdot \left\{ (cc_g) a^2 \nabla S \right\}} = 0 \quad (4.56)$$

Las ecuaciones 4.49 y 4.56 corresponden a la ecuación de Berkhoff (ecuación 4.35). Ellas serán empleadas para obtener simultáneamente la refracción y difracción del oleaje en una zona del mar donde la reflexión no sea importante.

#### 4.3.1 Empleo de las ecuaciones de refracción-difracción

Para utilizar las ecuaciones 4.49 y 4.56 se escriben en términos de una función  $F$  que representa al gradiente de la función de fase  $S$ , es decir

$$\nabla S = F = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} \quad (4.57)$$

o bien

$$\mathbf{F} = (|\mathbf{F}| \cos \alpha) \hat{i} + (|\mathbf{F}| \sin \alpha) \hat{j} \quad (4.57')$$

donde  $\alpha$  es el ángulo que forma  $\mathbf{F}$  respecto al eje  $x$

De acuerdo con la ecuación 4.57'

$$\frac{\partial S}{\partial x} = F_x = |\mathbf{F}| \cos \alpha \quad (4.58)$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = F_y = |\mathbf{F}| \sin \alpha \quad (4.59)$$

Por otra parte, se acepta que este gradiente es irrotacional de modo que

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0 \quad (4.60)$$

Cuando se desarrolla el producto cruzado anterior y se toma en cuenta a las igualdades 4.58 y 4.59, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x} (|\mathbf{F}| \cos \alpha) - \frac{\partial}{\partial y} (|\mathbf{F}| \sin \alpha) = 0 \quad (4.61)$$

Al sustituir a la ecuación 4.29 en la ecuación 4.55 resulta

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ (cc_g) a^2 |\mathbf{F}| \cos \alpha \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (cc_g) a^2 |\mathbf{F}| \sin \alpha \right\} = 0 \quad (4.62)$$

La ecuación 4.62 puede ser empleada para obtener la amplitud del oleaje una vez que se ha calculado la dirección del oleaje (mediante el ángulo  $\alpha$ ) y la magnitud  $|\mathbf{F}|$  del gradiente de la función de fase.

Por otra parte, la ecuación 4.49 se puede escribir como

$$|\mathbf{F}|^2 = k^2 + \frac{1}{a} \left\{ \nabla^2 a + \frac{1}{cc_g} [\nabla a \cdot \nabla (cc_g)] \right\} \quad (4.63)$$

Las ecuaciones 4.61, 4.62 y 4.63 forman un sistema de tres ecuaciones en función de tres parámetros del oleaje:  $a$ ,  $\alpha$  y  $|\mathbf{F}|$ . A partir de ellos se tiene la modificación que sufren las olas debido a la refracción y difracción simultáneas.

Es conveniente escribir las ecuaciones 4.61 a 4.63, en función de la altura ( $H = 2a$ ) de la ola y del gradiente de la función de fase en términos de  $F_x = |F| \cos \alpha$ ,  $F_y = |F| \sin \alpha$  y  $|F|^2 = F_x^2 + F_y^2$ , de modo que estas expresiones quedan así

$$|F|^2 = k^2 + \frac{1}{H} \left[ \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{1}{cc_g} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial (cc_g)}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial (cc_g)}{\partial y} \right) \right] \quad (4.64)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [H^2 (cc_g) F_x] + \frac{\partial}{\partial y} [H^2 (cc_g) F_y] = 0 \quad (4.65)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} F_y - \frac{\partial}{\partial y} F_x = 0 \quad (4.66)$$

Estas tres ecuaciones describen el fenómeno difracción-refracción bajo las hipótesis de pendiente de fondo pequeña, ondas lineales e irrotacionales y reflexión despreciable. La disminución de la energía debida a la rugosidad del fondo o a la rompiente no son tomadas en cuenta.

#### 4.4 Versión de la ecuación de pendiente suave que incluye a la variable tiempo

En el capítulo 3 se obtuvieron las expresiones fundamentales del oleaje de la teoría lineal, válidas para un fondo horizontal a una profundidad  $h$  respecto al nivel medio del mar.

De manera similar a la hipótesis  $d$  del capítulo 3, se propone que la superficie libre este dada como

$$\zeta = a(x, y) e^{i\sigma t} \quad (4.67)$$

donde la amplitud  $a$  es una función de las coordenadas  $x$  y  $y$ , en un plano horizontal. Por otra parte de la ecuación 3.14 se tiene que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -g\zeta \quad (4.68)$$

al sustituir la ecuación 4.67 se encuentra

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -ga(x, y) e^{i\sigma t}$$

Al integrar la ecuación anterior, resulta

$$\phi = -ga(x, y) \int e^{i\sigma t} dt \quad (4.69)$$

o sea

$$\phi = \frac{-ga(x, y)}{i\sigma} e^{i\sigma t} \quad (4.70)$$

Si se sustituye la ecuación 4.67 en 4.68 se obtiene

$$\phi = \frac{g}{i\sigma} \zeta \quad (4.71)$$

Si ahora se deriva la ecuación 4.67 parcialmente respecto a  $t$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = a(x, y) i\sigma e^{i\sigma t} \quad (4.72)$$

Al derivar nuevamente respecto a  $t$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -a(x, y) i\sigma e^{i\sigma t} \quad (4.73)$$

Cuando se toma en cuenta a la ecuación 4.67, se puede escribir

$$\zeta = -\frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \quad (4.74)$$

al sustituir esta expresión en la ecuación 4.71 se tiene

$$\phi = \frac{g}{i\sigma^3} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \quad (4.75)$$

Por otra parte, de acuerdo con la ecuación 4.4

$$\phi = Zf \quad (4.76)$$

y como en el inciso 4.2.4 se propuso que  $f \doteq f_0$  se tiene

$$\phi = Z f_0 \quad (4.77)$$

o bien

$$f_0 = \frac{\phi}{Z} \quad (4.78)$$

Si se sustituye la ecuación 4.75 y a la expresión matemática que resulta, se deriva parcialmente respecto a  $x$  y  $y$  se obtiene

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} = \frac{1}{Z} \frac{g}{i\sigma} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (4.79)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial y} = \frac{1}{Z} \frac{g}{i\sigma} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad (4.80)$$

Además, cuando en la ecuación 4.78 se toma en cuenta a la expresión 4.68 se encuentra

$$f_0 = \frac{1}{Z} \frac{g}{i\sigma^3} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \quad (4.81)$$

Si se sustituyen las ecuaciones 4.79 a 4.81 en la ecuación 4.35 se plantea que

$$-\frac{g}{i\sigma Z} \frac{\partial}{\partial x} \left( c c_g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) - \frac{g}{i\sigma Z} \frac{\partial}{\partial y} \left( c c_g \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) + \sigma^2 \left( \frac{g}{i\sigma^3 Z} \right) \frac{c_g}{c} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0$$

al multiplicar por  $-i\sigma Z/g$  y simplificar

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( c c_g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( c c_g \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) - \frac{c_g}{c} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0$$

como  $c_g = nc$ , se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( nc^2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( nc^2 \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) - n \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0$$

o bien

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial x} \left( nc^2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial y} \left( nc^2 \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \quad (4.82)$$



En otro orden de ideas, ya que las ecuaciones diferenciales parciales de orden dos en la variable independiente  $t$  pueden reducirse a un sistema simultáneo de las ecuaciones diferenciales parciales de primer orden en  $t$  mediante un adecuado cambio de variables (Smith, 1978). Se estima conveniente reemplazar las derivadas parciales de  $\zeta$  respecto a  $x$  y  $y$  en términos de las razones de flujo expresadas en las ecuaciones 3.69 y 3.70, con lo cual se obtendrá de un conjunto de ecuaciones de primer orden. Esto es, se proponen las relaciones

$$\boxed{c^2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} = - \frac{\partial Q_x}{\partial t}} \quad (4.83)$$

$$\boxed{c^2 \frac{\partial \zeta}{\partial y} = - \frac{\partial Q_y}{\partial t}} \quad (4.84)$$

al sustituir las ecuaciones 4.83 y 4.84 en 4.82 se encuentra

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) = - \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial x} \left( n \frac{\partial Q_x}{\partial t} \right) - \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial y} \left( n \frac{\partial Q_y}{\partial t} \right)$$

como el factor de grupo  $n$  es independiente del tiempo (ecuación 3.79) y dado que para derivadas continuas, se puede intercambiar el orden de derivación

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) = - \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial x} (nQ_x) + \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial y} (nQ_y) \right]$$

al integrar respecto a  $t$  se obtiene

$$\boxed{\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \frac{1}{n} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (nQ_x) + \frac{\partial}{\partial y} (nQ_y) \right]} \quad (4.85)$$

Las ecuaciones 4.83, 4.84 y 4.85 constituyen un sistema de ecuaciones simultáneas en derivadas parciales de primer orden. Estas expresiones equivalen a la ecuación 4.35. Corresponden a una forma de escribir la ecuación refracción-difracción que considera la intervención de la variable de tiempo  $t$ .

#### 4.5 Difracción pura

Cuando el fondo del mar es un plano horizontal a una profundidad  $h$ , se tiene que el producto de las celeridades  $c c_g$  es constante (no depende de  $x$  ni  $y$ ), por lo cual la ecuación 4.35 queda

$$c c_g \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_0 + c c_g \frac{\partial^2}{\partial y^2} f_0 + \sigma^2 \frac{c_g}{c} f_0 = 0 \quad (4.86)$$

Al dividir entre  $c c_g$  se encuentra

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} + \frac{\sigma^2}{c^2} f_0 = 0 \quad (4.87)$$

de acuerdo con la ecuación 4.34 se tiene que

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} + k^2 f_0 = 0 \quad (4.88)$$

La expresión anterior es conocida como la ecuación de Helmholtz, de la cual se obtiene la difracción del oleaje (el fondo del mar es horizontal). Como en un fondo marino con profundidad constante no se presenta la refracción del oleaje, la ecuación de Helmholtz permite calcular la llamada difracción pura.

#### 4.6 Refracción pura

Cuando los efectos de difracción son pequeños resulta que

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} = 0 \quad (4.89)$$

$$\nabla a \cdot \nabla (c c_g) = 0 \quad (4.90)$$

por lo que la ecuación 4.63 se reduce a la llamada ecuación eiconal, es decir

$$|\mathbf{F}|^2 = k^2 \quad (4.91)$$

así  $k = |\mathbf{F}| = |\nabla S|$ . En consecuencia, las ecuaciones 4.61 y 4.62 quedan como

$$\frac{\partial}{\partial x} k \operatorname{sen} \alpha - \frac{\partial}{\partial y} k \cos \alpha = 0 \quad (4.92)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \{(cc_g) a^2 k \cos \alpha\} + \frac{\partial}{\partial y} \{(cc_g) a^2 k \operatorname{sen} \alpha\} = 0 \quad (4.93)$$

Con las ecuaciones 3.34, 4.92 y 4.93 se puede calcular la dirección, amplitud y número de onda del oleaje ( $\alpha$ ,  $a$  y  $k$ ). Con ello se obtiene la transformación del oleaje debido a refracción pura.

La refracción pura corresponde a la modificación más conocida que sufre el oleaje por efecto de la profundidad del fondo marino. Para calcular  $\alpha$ ,  $a$  y  $k$ , se emplean los llamados métodos de refracción de rayos de ola de tipo gráfico (Wiegel, 1964) o numérico (Fuentes y Osnaya, 1990).

#### 4.6.1 Dibujo de los rayos de onda u ola

La solución de las ecuaciones 3.34 y 4.92 hacen posible el dibujo de los rayos de ola tomando en cuenta la refracción pura.

Se propone obtener esta solución de forma numérica a partir de su equivalencia con tres ecuaciones diferenciales ordinarias ya que son más sencillas de utilizar que las ecuaciones con diferenciales parciales.

Si se considera la ecuación 3.37 en la 4.92 y que el período (o frecuencia angular) no cambia con  $x$  ni  $y$ , se encuentra que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\operatorname{sen} \alpha}{c} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\cos \alpha}{c} \right) = 0$$

al derivar los cocientes que aparecen en la ecuación anterior resulta

$$-\frac{\operatorname{sen} \alpha}{c^2} \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\cos \alpha}{c} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\cos \alpha}{c^2} \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{\operatorname{sen} \alpha}{c} \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0$$

al multiplicar por  $c^2$  y ordenar se puede escribir

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right) C \cos \alpha + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right) C \sin \alpha = \sin \alpha \frac{\partial c}{\partial x} - \cos \alpha \frac{\partial c}{\partial y} \quad (4.94)$$

Por otra parte, de la definición de derivada total de  $\alpha$  respecto al tiempo se tiene que

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Al comparar entre sí la ecuación anterior con la 4.94 se deduce que

$$\frac{dx}{dt} = C \cos \alpha \quad (4.95)$$

$$\frac{dy}{dt} = C \sin \alpha \quad (4.96)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sin \alpha \frac{\partial C}{\partial x} - \cos \alpha \frac{\partial C}{\partial y} \quad (4.97)$$

Las tres ecuaciones anteriores permiten obtener la posición que alcanza el punto extremo del rayo después de transcurrir un tiempo, así como el ángulo que forma el tramo de avance del mismo.

En el apéndice A se propone un método numérico para obtener su solución.

#### 4.6.2 Refracción pura en un fondo donde las batimétricas son rectas y paralelas

Cuando el fondo puede ser representado por planos inclinados dispuestos de manera que las intersecciones de ellos son rectas paralelas que unen puntos de igual profundidad, se tiene el caso de "batimétricas rectas y paralelas" (figura 4.1).

Para esta condición de fondo marino es posible encontrar una solución analítica de las ecuaciones 4.35 y 4.36, con lo cual se determina el ángulo de los frentes de onda y la altura de la ola (refractada).

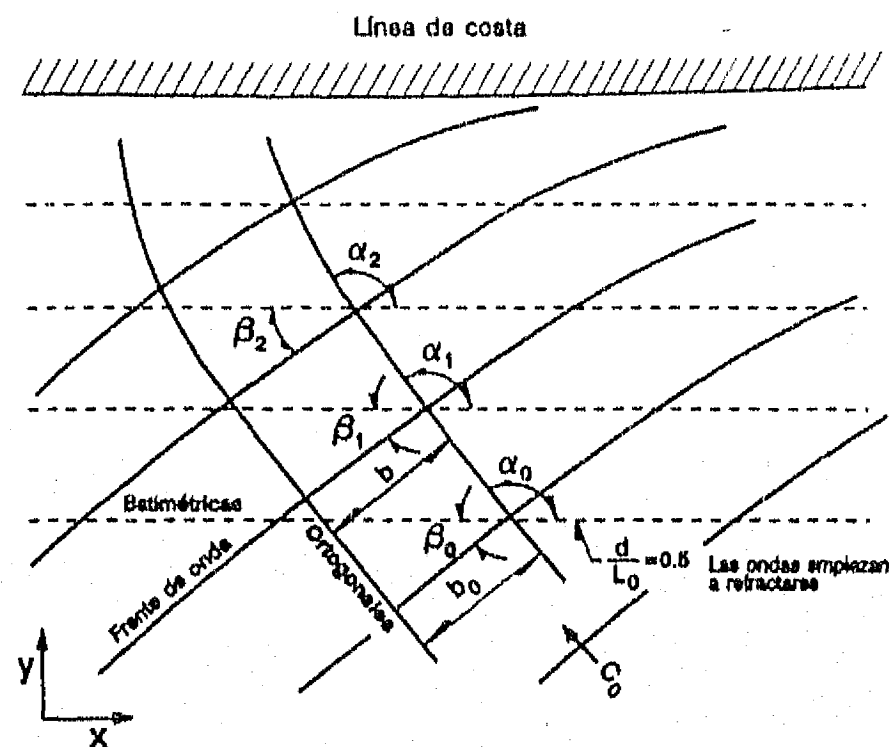


Figura 4.1 Refracción del oleaje sobre un fondo con batimétricas rectas y paralelas.

A partir 4.35 y 4.36 se pueden deducir los conceptos fundamentales de la refracción del oleaje. Son de interés para este trabajo porque algunas condiciones de frontera se basan en estas ideas.

Considérese que se tiene un sistema de ejes cartesianos  $x - y$  en la figura 4.1 de modo que las líneas batimétricas son paralelas al eje  $x$  y que, al aumentar  $y$  la profundidad disminuye hasta llegar a la línea de costa.

Así las cosas, el número de onda ( $k$ ), el ángulo ( $\alpha$ ) que forman los frentes de onda y la amplitud de ola ( $a$ ) sólo dependen de la profundidad del fondo por lo que son funciones de  $y$  (ya que para cualquier  $x$  sobre una batimétrica la profundidad es la misma).

Además como la longitud de ola cambia con la profundidad aunque el período no se modifique, se tiene que las celeridades individual y de grupo también son funciones de  $y$ , así se tiene que las derivadas respecto a  $x$  que aparecen en las ecuaciones 4.91 y 4.92 son nulas, por lo que esta ecuaciones se reducen a

$$c_g = c_g(y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} k \cos \alpha = 0 \quad (4.98)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \{ (c c_g) a^2 k \cos \alpha \} = 0 \quad (4.99)$$

La solución de las ecuaciones 4.98 y 4.99 implican que  $\{k \cos \alpha\}$  y  $\{(c c_g) a^2 k \sin \alpha\}$  sean constantes, es decir que para los puntos  $(x, y_1)$  y  $(x, y_2)$  se tiene

$$k_1 \cos \alpha_1 = k_2 \cos \alpha_2 \quad (4.100)$$

$$c_1 c_{g_1} a_1^2 k_1 \sin \alpha_1 = c_2 c_{g_2} a_2^2 k_2 \sin \alpha_2 \quad (4.101)$$

cuando en la ecuación 4.81 se considera la definición del número de onda ( $k = 2\pi/L$ ) se tiene

$$\frac{\cos \alpha_1}{L_1} = \frac{\cos \alpha_2}{L_2} \quad (4.102)$$

al tomar en cuenta al ángulo  $\beta$  que forma la línea de cresta o frente de onda con las batimétricas en lugar del ángulo  $\alpha$ , la expresión anterior se reduce a

$$\boxed{\frac{\sin \beta_1}{L_1} = \frac{\sin \beta_2}{L_2}} \quad (4.103)$$

La ecuación 4.102 o la 4.103 se conocen como Ley de Snell.

Por otra parte, de la ecuación 4.101 se puede escribir

$$a_2 = a_1 \sqrt{\frac{c_1 c_{g_1} k_1}{c_2 c_{g_2} k_2}} \sqrt{\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}}$$

al considerar las definiciones de número de onda y celeridad  $c_1 k_1 = \sigma_1$  y  $c_2 k_2 = \sigma_2$ .

Como el período es el mismo en las condiciones 1 y 2, resulta  $\sigma_1 = \sigma_2$ , por lo que  $c_1 k_1 = c_2 k_2$  y tomando en cuenta a la ecuación 3.60,  $C_{g_1} = n_1 c_1$  y  $C_{g_2} = n_2 c_2$  por lo que

$$a_2 = a_1 \sqrt{\frac{n_1 c_1}{n_2 c_2}} \sqrt{\frac{\text{sen } \alpha_1}{\text{sen } \alpha_2}}$$

si se desea manejar la altura de ola en lugar de la amplitud

$$H_2 = H_1 \sqrt{\frac{n_1 c_1}{n_2 c_2}} \sqrt{\frac{\text{sen } \alpha_1}{\text{sen } \alpha_2}}$$

En términos del ángulo  $\beta$  (complementario a  $\alpha$ ) se tiene

$$H_2 = H_1 \sqrt{\frac{n_1 c_1}{n_2 c_2}} \sqrt{\frac{\cos \beta_1}{\cos \beta_2}} \quad (4.104)$$

La ecuación 4.104 permite obtener la altura de ola refractada ( $H_2$ ). En ellas se acostumbra considerar que

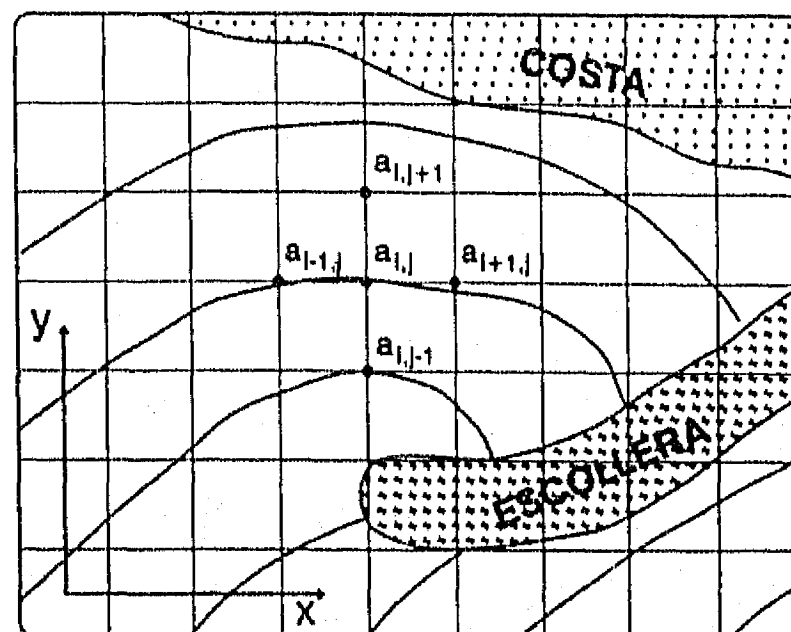
$$\sqrt{\frac{n_1 c_1}{n_2 c_2}} = K_S \quad (4.105)$$

$$\sqrt{\frac{\cos \beta_1}{\cos \beta_2}} = K_R \quad (4.106)$$

por lo que

$$\boxed{H_2 = H_1 K_S K_R} \quad (4.107)$$

A las literales  $K_S$  y  $K_R$  que aparecen en la ecuación 4.107 se les llama coeficiente de aguas someras y coeficiente de refracción respectivamente.



## 5. MODELO NUMÉRICO DE REFRACCIÓN - DIFRACCIÓN

En este capítulo se presenta un procedimiento numérico para propagar el oleaje desde aguas profundas a una zona cercana a la costa tomando en cuenta la refracción y la difracción simultáneamente, así como la rompiente de la ola. No se consideran obstáculos al avance de la ola por lo que no está presente la reflexión de las olas.

Este modelo es adecuado para obtener los patrones de oleaje en lugares donde la irregularidad de las batimétricas provocaría, cuando sólo se estudia a la refracción, zonas cáusticas; es decir, áreas donde las líneas imaginarias (rayos de onda) que representan a la dirección de avance de las olas se cruzarían y habría una gran concentración de energía del oleaje. El procedimiento es útil para obtener el oleaje cerca de la costa o de cuerpos que impiden el desplazamiento de las olas.

En la propagación del oleaje desde agua profundas hasta una zona cerca a las obras marítimas o a la línea de playa intervienen en forma combinada la refracción y difracción de las olas. Cuando se limita a obtener el oleaje hasta esta zona, no resulta ser importante el efecto de reflexión; por lo que al no tomarla en cuenta, el cálculo de propagación de esta se hace más sencillo.

Para establecer el patrón del oleaje desde aguas profundas hasta una región próxima a las zonas mencionadas conviene emplear las ecuaciones 4.64 y 4.66 deducidas en el capítulo 4, que se escriben a continuación:



$$F_x^2 + F_y^2 = k^2 + \frac{1}{H} \left[ \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{1}{cc_g} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial(cc_g)}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial(cc_g)}{\partial y} \right) \right] \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [H^2(cc_g)F_x] + \frac{\partial}{\partial y} [H^2(cc_g)F_y] = 0 \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} F_y - \frac{\partial}{\partial y} F_x = 0 \quad (5.3)$$

donde las incógnitas son los componentes de la función de fase ( $F_x$  y  $F_y$ ) y la altura de la ola ( $H$ ).

### 5.1 Ecuaciones en diferencias finitas de refracción-difracción

Para resolver las ecuaciones 5.1, 5.2 y 5.3 se propone un método de diferencias finitas.

Se considera en la zona donde se propaga el oleaje una malla de rectángulos de lados  $\Delta x$  y  $\Delta y$  como se muestra en la figura 5.1. En los puntos de la malla (vértices de los rectángulos) se define la profundidad del fondo respecto al nivel medio del mar. Para ellos se obtiene el número de onda  $k$  a partir de la ecuación de dispersión (ecuación 3.34) y el período del oleaje.

Con base en las ecuaciones diferenciales 5.1 a 5.3 se proponen las expresiones de diferencias finitas siguientes:

$$\frac{F_{x_{i,j+1}} - F_{x_{i,j}}}{\Delta y} - \frac{F_{y_{i+1,j}} - F_{y_{i-1,j}}}{2\Delta x} = 0 \quad (5.4)$$



$$\begin{aligned}
& \frac{0.5 H_{i,j+1}^2 (cc_g)_{i,j+1} (F_{y_{i+1,j+1}} + F_{y_{i-1,j+1}}) - H_{i,j}^2 (cc_g)_{i,j} F_{y_{i,j}}}{\Delta y} + \\
& + \left\{ \theta \frac{H_{i+1,j}^2 (cc_g)_{i+1,j+1} F_{x_{i+1,j+1}} - H_{i-1,j+1}^2 (cc_g)_{i-1,j+1} F_{x_{i-1,j+1}}}{2 \Delta x} \right. \\
& \left. + (1 - \theta) \frac{H_{i+1,j}^2 (cc_g)_{i+1,j} F_{x_{i+1,j}} - H_{i-1,j}^2 (cc_g)_{i-1,j} F_{x_{i-1,j}}}{2 \Delta x} \right\} = 0
\end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}
F_{x_{i,j+1}}^2 + F_{y_{i,j+1}}^2 = k_{i,j+1}^2 + \frac{1}{H_{i,j+1}} \left[ \frac{H_{i+1,j+1} - 2H_{i,j+1} + H_{i-1,j+1}}{\Delta x^2} + \right. \\
+ \frac{H_{i,j+1} - 2H_{i,j} + H_{i,j-1}}{\Delta y^2} + \left. \left( \frac{1}{cc_g} \frac{\partial(cc_g)}{\partial x} \right)_{i,j+1} \frac{H_{i+1,j+1} - H_{i-1,j+1}}{2 \Delta x} + \right. \\
\left. + \left( \frac{1}{cc_g} \frac{\partial(cc_g)}{\partial y} \right)_{i,j+1} \frac{H_{i,j+1} - H_{i,j}}{\Delta y} \right]
\end{aligned} \tag{5.6}$$

En estas expresiones  $\theta$  es un factor de ponderación (constante) comprendido entre cero y uno. Sirve para darle importancia en el cálculo a las aproximaciones de ciertas derivadas.

Estas últimas tres ecuaciones tienen como incógnitas a  $F_{x_{i,j+1}}$ ,  $F_{y_{i,j+1}}$  y  $H_{i,j+1}$ . Dado que estas aparecen en cada ecuación con un exponente distinto de uno ó algunas se multiplican entre sí, estas ecuaciones son no lineales.

## 5.2 Método para calcular la refracción y difracción

Para obtener la solución de las ecuaciones 5.4 a 5.6 se desarrolló el método que se describe a continuación.

### 5.2.1 Obtención de los componentes del gradiente de la función de fase

De acuerdo con la ecuación 4.57 se tiene

$$F_{x_{i,j+1}}^2 + F_{y_{i,j+1}}^2 = |F_{i,j+1}|^2 \quad (5.7)$$

de donde

$$F_{y_{i,j+1}} = \sqrt{|F_{i,j+1}|^2 - F_{x_{i,j+1}}^2} \quad (5.8)$$

Para disponer de un procedimiento simple de cálculo que permita valuar  $F_{x_{i,j+1}}$  y  $F_{y_{i,j+1}}$  se propone una aproximación lineal de la ecuación anterior con base en la función

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} = f(x) \quad (5.9)$$

Según el desarrollo en serie de Taylor de  $f(x)$ , hasta la primera derivada.

$$f(x + \Delta x) \doteq f(x) + f'(x) \Delta x$$

si se acepta que  $n$  representa al número de iteración y se le anota como un superíndice en las variables, y que

$$\Delta x = x^{(n+1)} - x^{(n)} \quad ; \quad x = x^{(n)}$$

$$f(x + \Delta x) = f(x^{(n+1)}) = y^{(n+1)} \quad ; \quad f(x) = f(x^{(n)}) = y^{(n)} = \sqrt{r^2 - (x^{(n)})^2}$$

el desarrollo anterior puede escribirse así

$$f(x^{(n+1)}) = f(x^{(n)}) + f'(x^{(n)}) (x^{(n+1)} - x^{(n)})$$

para el caso particular de la función  $f(x)$  de la ecuación 5.9 se tiene que

$$f'(x) = - \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

o sea

$$f'(x^{(n)}) = - \frac{x^{(n)}}{\sqrt{r^2 - (x^{(n)})^2}} = - \frac{x^{(n)}}{y^{(n)}}$$

por lo que se puede escribir que

$$y^{(n+1)} = \gamma^{(n)} + \delta^{(n)} x^{(n+1)}$$

siendo

$$\gamma^{(n)} = y^{(n)} + \frac{(x^{(n)})^2}{y^{(n)}}$$

$$\delta^{(n)} = \frac{x^{(n)}}{y^{(n)}}$$

Por otra parte, en términos del gradiente de la función de fase, las últimas tres ecuaciones dan lugar a

$$F_{y_{i,j+1}}^{(n+1)} = \gamma_i^{(n)} + \delta_i^{(n)} F_{x_{i,j+1}}^{(n+1)} \quad (5.10)$$

$$\gamma_i^{(n)} = F_{y_{i,j+1}}^{(n)} + \frac{(F_{x_{i,j+1}}^{(n)})^2}{F_{y_{i,j+1}}^{(n)}} \quad (5.11)$$

$$\delta_i^{(n)} = \frac{F_{x_{i,j+1}}^{(n)}}{F_{y_{i,j+1}}^{(n)}} \quad (5.12)$$

$$F_{y_{i,j+1}}^{(n)} = \sqrt{|F_{i,j+1}^{(n+1)}|^2 - (F_{x_{i,j+1}}^{(n)})^2} \quad (5.13)$$

Cuando el radical anterior es negativo, conviene asignarle un valor pequeño a  $\gamma^{(n)}$  y a  $\delta^{(n)}$ . Al sustituir la ecuación 5.10 en la ecuación 5.4 y después de ordenar términos se llega a

$$F_{x_{i,j+1}}^{(n+1)} = \beta_i + \alpha (\gamma_{i+1}^{(n)} - \gamma_{i-1}^{(n)}) \quad (5.14)$$

donde

$$\alpha = \frac{\theta \Delta y}{2 \Delta x} \quad (5.15)$$

$$\beta_i = F_{x_{i,j}} + \frac{1}{2 \Delta y} (F_{y_{i+1,j}} - F_{y_{i-1,j}}) \quad (5.16)$$

En resumen, el procedimiento de cálculo para obtener  $F_{x_{(i,j-1)}}$  y  $F_{y_{(i,j-1)}}$  consiste en los pasos siguientes

1. Obtener  $F_{x_{i,j+1}}$  para  $i = 1, 2, \dots, M - 2$  a partir de la expresión 5.14
2. Calcular los valores  $F_{y_{i,j+1}}^{(n+1)}$  con la ecuación 5.10.
3. Se comparan los valores de  $F_{x_{i,j+1}}^{(n+1)}$  con los de  $F_{x_{i,j+1}}^{(n)}$ .

Cuando son muy parecidos se continua con el paso 4. De otro modo, se asigna a  $n$  el valor  $n + 1$  y se va al paso 1.

4. Los valores de  $F_{x_{i,j+1}}^{(n+1)}$  y  $F_{y_{i,j+1}}^{(n+1)}$  corresponden a los de  $F_{x_{i,j+1}}$  y  $F_{y_{i,j+1}}$  de interés.

### 5.2.2 Cálculo de la altura de la ola

Una vez conocidas  $F_{x_{i,j+1}}$  y  $F_{y_{i,j+1}}$  se obtiene  $H_{i,j+1}$  a partir de la expresión 5.5, es decir

$$H_{i,j+1}^{(n+1)} = \left[ \left( \alpha \left\{ \left( H_{i-1,j+1}^{(n+1)} \right)^2 (cc_g)_{i-1,j+1} F_{x_{i-1,j+1}} - \left( H_{i+1,j+1}^{(n)} \right)^2 (cc_g)_{i+1,j+1} F_{x_{i+1,j+1}} \right\} + \epsilon_i \right) / \left( (cc_g)_{i,j+1} F_{y_{i,j+1}} \right) \right]^{1/2} \quad (5.17)$$

donde

$$\epsilon_i = H_{i+1,j}^2 (cc_g)_{i+1,j} F_{y_{i,j}} + \frac{(1-\theta) \Delta y}{2 \Delta x} \left( H_{i-1,j}^2 (cc_g)_{i-1,j} F_{x_{i-1,j}} - \left( H_{i+1,j}^2 (cc_g)_{i+1,j} F_{x_{i+1,j}} \right) \right) \quad (5.18)$$

### 5.2.3 Revisión del valor del gradiente de la función de fase

Los valores calculados de  $H_{i,j+1}^{(n+1)}$  son sustituidos en la ecuación 5.6 de donde

En resumen, el procedimiento de cálculo para obtener  $F_{x_{(i,j+1)}}$  y  $F_{y_{(i,j+1)}}$  consiste en los pasos siguientes

1. Obtener  $F_{x_{i,j+1}}$  para  $i = 1, 2, \dots, M - 2$  a partir de la expresión 5.14
2. Calcular los valores  $F_{y_{i,j+1}}^{(n+1)}$  con la ecuación 5.10.
3. Se comparan los valores de  $F_{x_{i,j+1}}^{(n+1)}$  con los de  $F_{x_{i,j+1}}^{(n)}$ .

Cuando son muy parecidos se continua con el paso 4. De otro modo, se asigna a  $n$  el valor  $n + 1$  y se va al paso 1.

4. Los valores de  $F_{x_{i,j+1}}^{(n+1)}$  y  $F_{y_{i,j+1}}^{(n+1)}$  corresponden a los de  $F_{x_{i,j+1}}$  y  $F_{y_{i,j+1}}$  de interés.

### 5.2.2 Cálculo de la altura de la ola

Una vez conocidas  $F_{x_{i,j+1}}$  y  $F_{y_{i,j+1}}$  se obtiene  $H_{i,j+1}$  a partir de la expresión 5.5, es decir

$$H_{i,j+1}^{(n+1)} = \left[ \left( \alpha \left\{ \left( H_{i-1,j+1}^{(n+1)} \right)^2 (cc_g)_{i-1,j+1} F_{x_{i-1,j+1}} - \left( H_{i+1,j+1}^{(n)} \right)^2 (cc_g)_{i+1,j+1} F_{x_{i+1,j+1}} \right\} + \epsilon_i \right) / \left( (cc_g)_{i,j+1} F_{y_{i,j+1}} \right) \right]^{1/2} \quad (5.17)$$

donde

$$\epsilon_i = H_{i+1,j}^2 (cc_g)_{i+1,j} F_{y_{i,j}} + \frac{(1-\theta) \Delta y}{2 \Delta x} \left( H_{i-1,j}^2 (cc_g)_{i-1,j} F_{x_{i-1,j}} - \left( H_{i+1,j}^2 (cc_g)_{i+1,j} F_{x_{i+1,j}} \right) \right) \quad (5.18)$$

### 5.2.3 Revisión del valor del gradiente de la función de fase

Los valores calculados de  $H_{i,j+1}^{(n+1)}$  son sustituidos en la ecuación 5.6 de donde

$$|F_{i,j+1}^{(n+1)}|^2 = \frac{1}{H_{i,j+1}^{(n+1)}} \left( \frac{H_{i+1,j+1}^{(n)} - 2H_{i,j+1}^{(n+1)} + H_{i-1,j+1}^{(n+1)}}{\Delta x^2} + \frac{H_{i,j+1}^{(n+1)}}{\Delta y^2} \rho_i + \right. \quad (5.19)$$

$$\left. + \tau_i \left( H_{i+1,j+1}^{(n)} - H_{i-1,j+1}^{(n+1)} \right) + \Omega_i H_{i,j+1}^{(n+1)} \right) + k_{i,j+1}^2$$

siendo

$$\tau_i = \left( (cc_g)_{i+1,j+1} - (cc_g)_{i-1,j+1} \right) / \left( 4 \Delta x^2 (cc_g)_{i,j+1} \right) \quad (5.20)$$

$$\Omega_i = \left( (cc_g)_{i,j+1} - (cc_g)_{i,j} \right) / \left( \Delta x^2 (cc_g)_{i,j+1} \right) \quad (5.21)$$

$$\rho_i = \frac{H_{i,j-2} - 2H_{i,j}}{\Delta y^2} - \Omega_i H_{i,j} \quad (5.22)$$

#### 5.2.4 Secuencia de cálculo

El modelo matemático de oleaje de refracción-difracción se basa en lo descrito en el inciso anterior. Se presenta una recopilación de los pasos necesarios para calcular la propagación del oleaje. Se considera que  $t_0$  es un número positivo pequeño cercano a cero, que  $M - 1$  es el número de celdas en la dirección  $x$ ,  $N - 1$  el número de celdas en la dirección  $y$ , y también que los valores de  $i$  comienzan en 2 y terminan en  $M - 1$  y los de  $j$  se inician con 3 y concluyen con  $M$ . Los pasos a seguir son:

- Con los datos del oleaje por propagar y de la batimetría se obtiene los números de onda (ecuación 3.38) en los puntos de la malla para  $j = 1$  y  $j = 2$ .
- Se emplea la Ley de Snell (ecuación 4.83) para calcular los componentes del gradiente de la función de fase y la altura de ola tanto en las orillas de la zona en estudio (con esto quedan definidas las condiciones de oleaje en las fronteras) como en el interior de la zona (corresponden a los valores iniciales del proceso de relajación).
- Se asigna a  $j$  el valor 2.
- Para cada punto de la malla (con  $i = 2, 3, \dots, M - 1$  sobre la línea  $y = (j + 1)\Delta y$



se calculan los valores de  $F_{x_{i,j}}^{(n+1)}$  y  $F_{y_{i,j+1}}^{(n+1)}$  como se indicó en el inciso 5.2.1.

- e) Cuando para cada punto de la malla sobre la línea  $y = (j + 1)\Delta y$ , se tiene  $|F_{x_{i,j+1}}^{(n+1)} - F_{x_{i,j+1}}^{(n)}| < t_0$ , se continúa con el paso g. De otro modo, se toma a  $n$  como  $n + 1$  y se va al paso d.
- f) Para cada punto de la malla sobre la línea  $y = (j + 1)\Delta y$ , se obtiene  $H_{i,j+1}^{(n+1)}$  y  $|F_{i,j+1}^{(n+1)}|^2$ . Cuando para cada uno de estos puntos  $|H_{i,j+1}^{(n+1)} - H_{i,j+1}^{(n)}| < t_0$  y  $|F_{i,j+1}^{(n+1)}|^2 - |F_{i,j+1}^{(n)}|^2 < t_0$  se va al paso g. De otra manera, se regresa al paso d.
- g) Se asigna a  $j$  el valor de  $j + 1$ . Si el nuevo valor de  $j$  es menor o igual al de  $j$ , se va al paso d. De otro modo, se termina el procedimiento.

Cabe mencionar la dirección del oleaje  $\alpha_{i,j+1}$  se determina a partir de la ecuación 4.57 como

$$\alpha_{i,j+1} = \text{angtan} \frac{F_{y_{i,j+1}}}{F_{x_{i,j+1}}}$$

### 5.3 Ejemplos.

Se incluyen 3 ejemplos sobre la aplicación de los métodos de cálculo de refracción pura y de refracción-difracción. En el primero se observa que al obtener los rayos de ola se cruzan. El segundo trata sobre la determinación de las características de las olas dentro de una zona cóustica y, en el último se presenta el cálculo de la refracción-difracción de una región real donde las curvas batimétricas son muy irregulares.

#### Ejemplo 5.1 Refracción pura.

En la figura 5.2 se muestran las líneas batimétricas del fondo marino de un área donde se propaga un oleaje. Las olas en aguas profundas avanzan con un ángulo  $\alpha = 85^\circ$ , período de 8s y altura de 1.0m. Determinar la altura y dirección de las olas en los puntos A y B marcados en la figura mencionada.

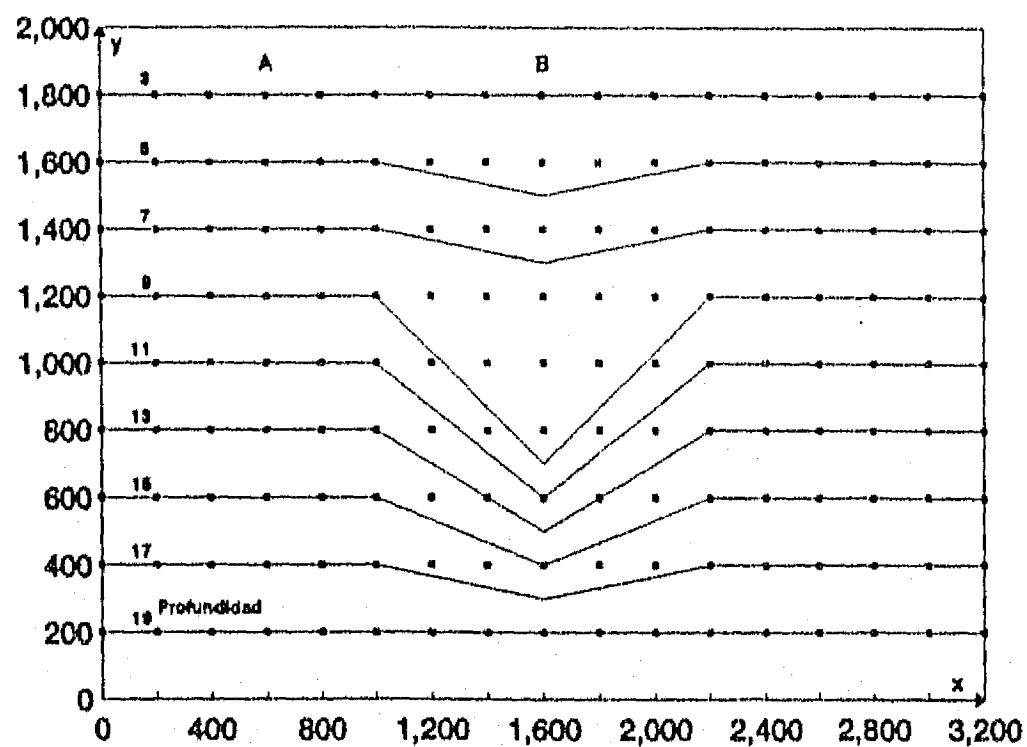


Figura 5.2 Batimetría del área donde se presentan las olas.

*Solución:*

Se propone un sistema de ejes cartesiano cuyo origen se encuentra en aguas profundas en el extremo inferior izquierdo de la figura 5.2. Sobre éste se considera una malla formada por líneas verticales paralelas a una distancia  $\Delta x = 200\text{m}$  y líneas horizontales paralelas con un espaciamiento igual a  $\Delta y = 200\text{m}$ .

Con el procedimiento numérico descrito en el Apéndice A para resolver las ecuaciones de refracción pura se obtuvieron los resultados mostrados en las figuras 5.3 a 5.6.

a) *Punto A*

En la figura 5.3 se muestra el trazo de dos rayos de onda que pasan a la izquierda y derecha del punto A y una tabla donde se consignan los valores que alcanzó el extremo del rayo de la derecha. Se incluyen los ángulos que forma una tangente del mismo respecto al eje x en los tiempos 174 a 190s. También se anotan la profundidad del fondo para el extremo del rayo, así como la longitud, celeridad y coeficiente de aguas someras correspondientes a esa profundidad.

Del dibujo de los rayos se estima que las distancias mínimas entre los rayos son de 25m y 26m en aguas profundas y cerca del punto A respectivamente, por lo que el coeficiente de refracción es igual a  $K_R = (26/29)^{1/2} = 1.04$ . Como el coeficiente de aguas bajas es igual a 1.12, la altura de la ola resulta ser igual a  $H = 1(1.04)(1.12) = 1.14\text{m}$  y la dirección es  $87.6^\circ$ .

t (s)	x (m)	y (m)	alfa (rad)	alfa (grados)	h (m)	L (m)	C (m/s)	Ks
174	409.27	1719.96	1.52	87.4	3.72	46.5	5.81	1.079
176	409.89	1731.49	1.53	87.4	3.61	45.8	5.73	1.085
178	410.32	1742.85	1.53	87.4	3.51	45.2	5.65	1.091
180	410.82	1754.06	1.53	87.5	3.40	44.6	5.57	1.097
182	411.30	1765.11	1.53	87.5	3.30	44.0	5.49	1.104
184	411.78	1776.02	1.53	87.5	3.21	43.4	5.42	1.110
186	412.24	1786.77	1.53	87.6	3.11	42.8	5.35	1.117
188	412.69	1797.30	1.53	87.6	3.02	42.2	5.27	1.124
190	413.12	1807.82	1.53	87.6	2.90	41.4	5.17	1.133

Punto Inicial ( 390.00, 200.00)  
Punto final ( 413.12, 1807.82)

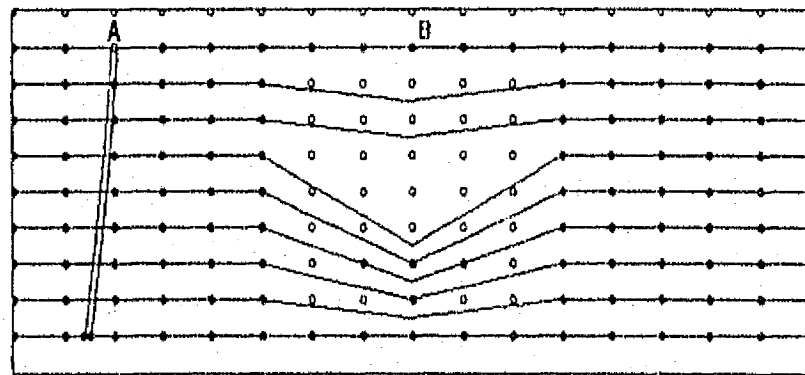


Figura 5.3 Rayos de ola cercanos al punto A.

b) Punto B

Para el punto B se siguió un procedimiento similar. En la figura 5.4 se muestran dos rayos, uno a la izquierda y otro a la derecha del punto B. De ellos se encuentra que la altura de ola es 1.35m y la dirección resulta igual a  $80.8^\circ$ .

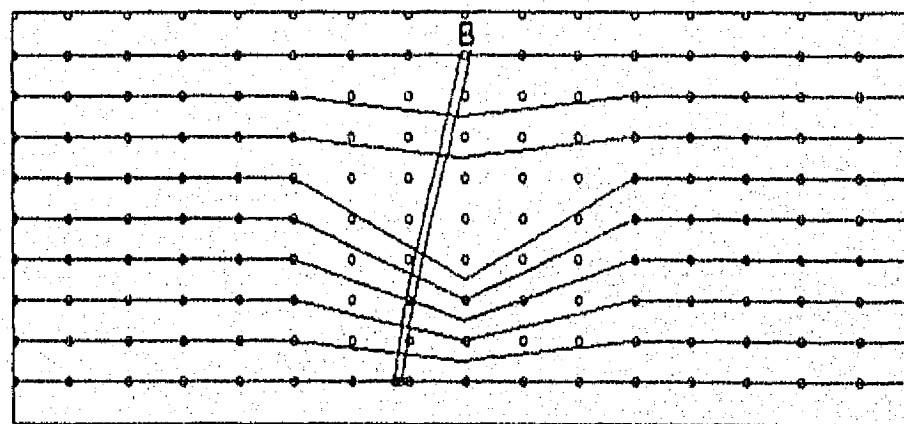


Figura 5.4 Rayos de ola considerados para el punto B.

Sin embargo, si por alguna circunstancia se dibujaran más rayos, se obtendría que otros dos rayos (alejados de los anteriores) que pasan cerca del punto B como se ve en la figura 5.5.

Debido a estos resultados, se consideró conveniente trazar mas rayos (espaciados a cada 25m en aguas profundas), los cuales se muestran en la figura 5.6. En esta figura se aprecia que el punto B se localiza dentro de un área donde se cruzan los rayos (zona cáustica); por lo tanto, para el punto B no puede ser estimada la altura ni la dirección del oleaje con refracción pura ya que dentro de las zonas cáusticas importan tanto la refracción como la difracción simultáneas:

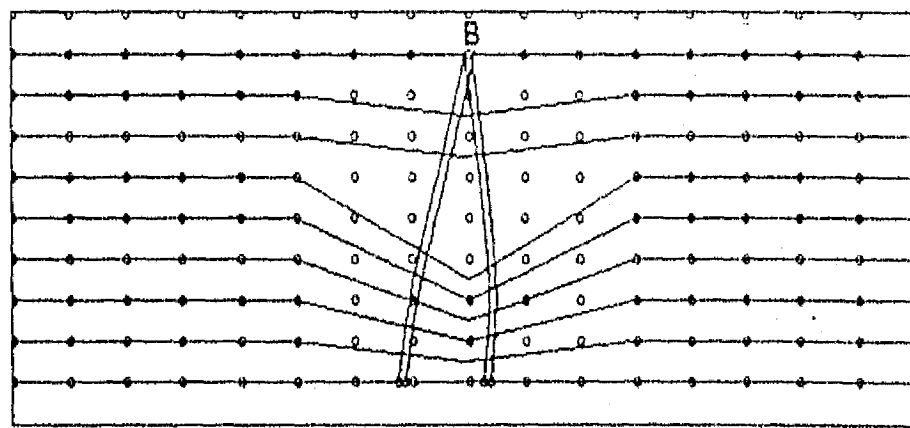


Figura 5.5 Cruce de rayos de la ola próximos al punto B.

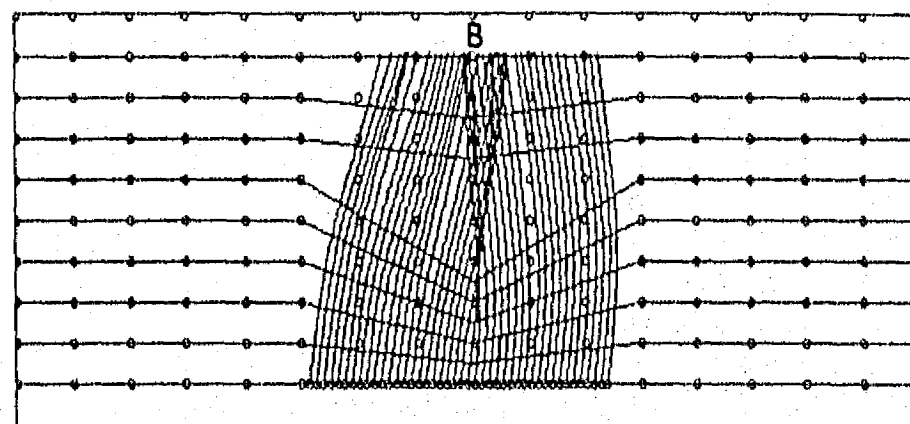


Figura 5.6 Zona cáustica.

El procedimiento numérico para refracción pura se empleó por medio de un programa de cómputo escrito en el lenguaje Quick-Basic que se encuentra disponible por parte del autor de este trabajo.

*Ejemplo 5.2 Cálculo de la altura de la ola en un punto dentro de una zona cáustica.*

Para los datos del ejemplo 5.1, determinar la altura y dirección de las olas en los puntos A y B marcados en la figura 5.2. En dicho ejemplo, se mostró que el punto B está dentro de una zona cáustica.

*Solución:*

Por medio del método numérico de refracción-difracción basado en la secuela de cálculo del inciso 5.2.4 para la línea de la malla que es paralela al eje x y se encuentra a una distancia de 1800m de tal eje, se obtuvieron los valores incluidos en la tabla 5.1 tomada de la pantalla del monitor de la computadora personal con la cual se aplicó dicho método.

En esta tabla,  $S_x$  y  $S_y$  representan los componentes en dirección x y y de la función de fase,  $D_s$  al módulo de la función de fase,  $k^2$  al número de onda al cuadrado,  $E(S_x)$ ,  $E(S_y)$  y  $E(H)$  las diferencias (multiplicadas por mil) de los valores de  $S_x$ ,  $S_y$  y  $H$  entre las

dos últimas iteraciones,  $D(DS)$  la cantidad que se suma a  $k^2$  para obtener el cuadrado del módulo de la función de fase y  $H$  la altura de ola.

LINEA J= 8 Se efectuaron 30 iteraciones # SECC 17

I	ANGULO	Sx	Sy	DS	k <sup>2</sup>	E(Sx)	E(Sy)	E(H)	E(DS)	E.dif.	H
1	87.5	0.0066	0.1494	0.0224	0.0224	0.0224	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0001	1.1230
2	87.5	0.0066	0.1494	0.0224	0.0224	0.0224	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0001	1.1230
3	87.5	0.0066	0.1494	0.0224	0.0224	0.0224	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0001	1.1230
4	87.5	0.0066	0.1494	0.0224	0.0224	0.0224	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.1229
5	87.5	0.0066	0.1494	0.0224	0.0224	0.0224	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0010	1.1276
6	87.8	0.0057	0.1494	0.0224	0.0224	0.0224	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0022	1.0901
7	85.1	0.0128	0.1490	0.0224	0.0224	0.0224	0.0000	0.0000	0.0000	0.0044	0.9523
8	80.9	0.0236	0.1477	0.0224	0.0224	0.0224	0.0000	0.0000	0.0000	0.0049	0.9681
9	78.5	0.0298	0.1466	0.0224	0.0224	0.0224	0.0000	0.0000	0.0000	0.0037	1.1685
10	85.9	0.0108	0.1491	0.0224	0.0224	0.0224	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0108	1.5574
11	95.2	-0.0137	0.1489	0.0224	0.0224	0.0224	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0017	1.3117
12	95.1	-0.0133	0.1490	0.0224	0.0224	0.0224	0.0000	0.0000	0.0000	0.0061	0.9972
13	91.0	-0.0027	0.1495	0.0224	0.0224	0.0224	0.0000	0.0000	0.0000	0.0058	0.9233
14	87.7	0.0061	0.1494	0.0224	0.0224	0.0224	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0011	1.0462
15	87.5	0.0066	0.1494	0.0224	0.0224	0.0224	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0015	1.1170
16	87.5	0.0066	0.1494	0.0224	0.0224	0.0224	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0002	1.1228
17	87.5	0.0066	0.1494	0.0224	0.0224	0.0224	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0001	1.1230

Tabla 5.1 Resultados del método de refracción-difracción sobre una línea paralela a la línea de costa.

Se nota que en el punto A (para  $l=4$ ) la altura y dirección son 1.12m y  $87.5^\circ$ , que son casi idénticos a los obtenidos con refracción pura. En el punto B (para  $l=10$ ) la altura de la ola es mayor; resultó ser igual a 1.56m y la dirección es  $85.9^\circ$ , lo cual corresponde con la idea de que el punto B está dentro de una zona de concentración de energía. Con este método si se obtienen alturas de ola dentro de la zona cáustica, y pone de manifiesto que la difracción influye en la zona que rodea a la zona cáustica.

### Ejemplo 5.3 Batimetría real.

En la figura 5.7 se muestran las líneas batimétricas de una zona que no tiene obstáculos que impidan el avance de las olas. Propagar el oleaje que en aguas profundas tiene un período de 10s y altura de 1m, con dirección de  $45^\circ$ .

#### Solución:

En la figura 5.8 se muestran los rayos de onda obtenidos con el método de refracción pura (Apéndice A). La irregularidad de las líneas batimétricas implica la existencia de una zona cáustica, por lo cual este método no es aplicable.

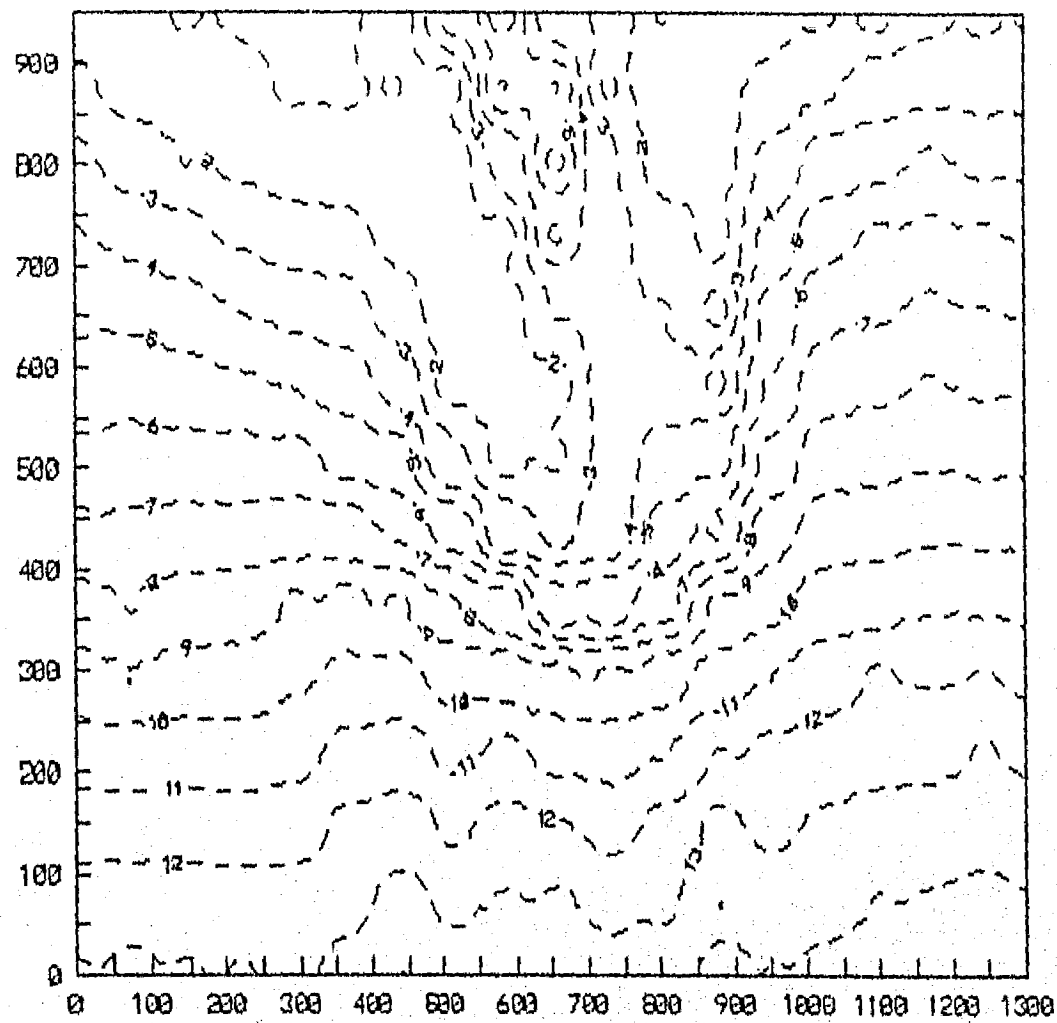


Figura 5.7 Batimetría de la zona en estudio.

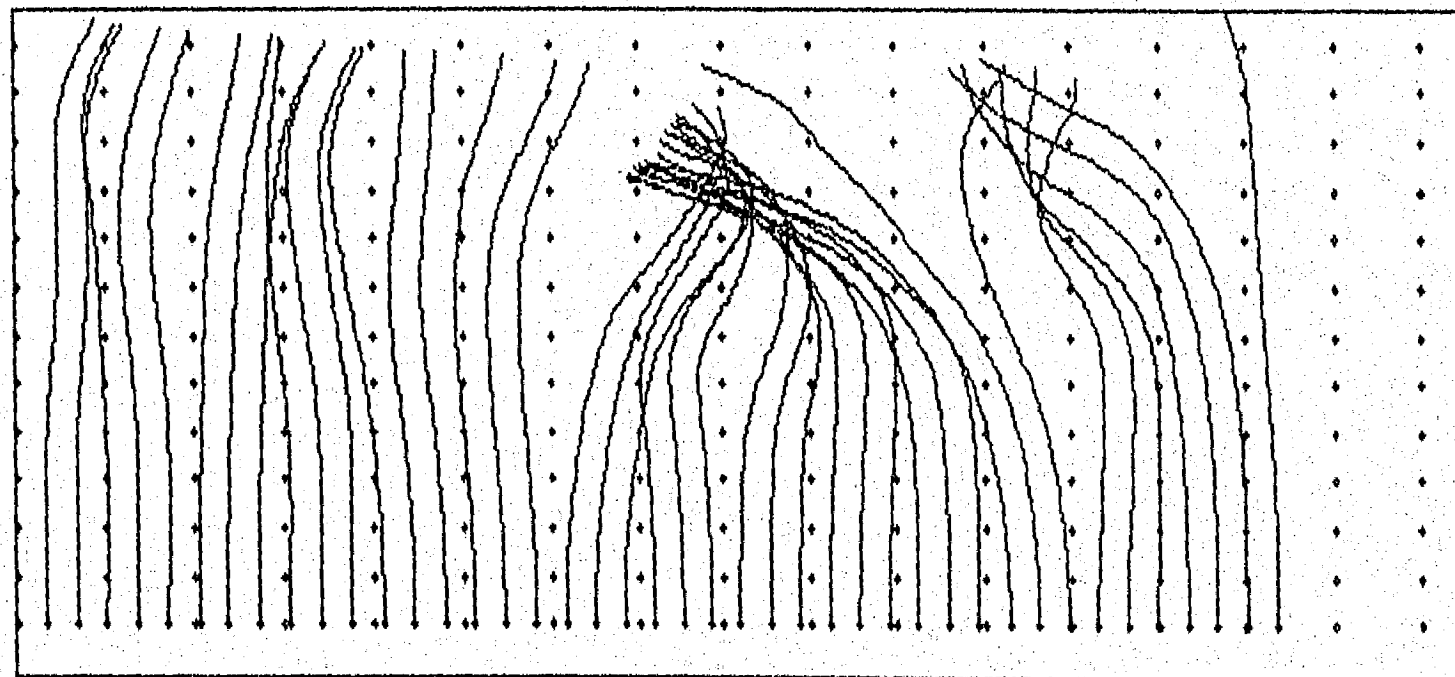


Figura 5.8 Rayos de ola en la zona de interés (la parte inferior corresponde a aguas profundas).

Se obtuvo la propagación del oleaje tomando en cuenta en forma simultánea a la refracción y difracción. Se usó una longitud de celda de 76.156m. Cuando la altura de la ola fue igual al valor  $0.78h$ , siendo  $h$  la profundidad, se consideró que la ola rompía y que su altura correspondía a dicho valor. Los resultados obtenidos se consignan en la tabla 5.2.

LINEA J= 12 Se efectuaron 30 iteraciones # SECC 17

I	ANGULO	Sx	Sy	DS	k <sup>2</sup>	E(Sx)	E(Sy)	E(H)	D(DS)	H
1	72.4	0.0506	0.1597	0.0201	0.0281	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0538	1.1388
2	73.5	0.0517	0.1741	0.0330	0.0330	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.9516
3	69.8	0.0625	0.1703	0.0329	0.0330	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0815	0.9516
4	74.2	0.0573	0.2025	0.0443	0.0442	0.0000	0.0000	0.0000	0.0440	0.7098
5	81.9	0.0296	0.2082	0.0442	0.0442	0.0000	0.0000	0.0000	0.0023	0.7098
6	76.8	0.0482	0.2045	0.0441	0.0442	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0742	0.7098
7	50.9	0.1090	0.1341	0.0299	0.0294	0.0000	0.0000	0.0000	0.4855	0.6755
8	64.1	0.0366	0.0753	0.0070	0.0072	0.0000	0.0000	0.0000	-0.1728	1.0207
9	118.9	-0.0410	0.0742	0.0072	0.0072	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0030	0.8484
10	79.9	0.0265	0.1487	0.0228	0.0225	0.0000	0.0000	0.0000	0.2728	0.6504
11	62.0	0.0852	0.1600	0.0329	0.0330	0.0000	0.0000	0.0000	-0.1208	0.9516
12	135.5	-0.1069	0.1052	0.0225	0.0225	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0374	0.9375
13	78.3	0.0285	0.1373	0.0197	0.0194	0.0000	0.0000	0.0000	0.2041	0.5652
14	79.0	0.0230	0.1181	0.0145	0.0144	0.0000	0.0000	0.0000	0.0339	0.5308
15	83.1	0.0131	0.1085	0.0120	0.0119	0.0000	0.0000	0.0000	0.0169	0.6034
16	78.8	0.0202	0.1023	0.0109	0.0109	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0167	0.6920
17	73.7	0.0302	0.1035	0.0116	0.0116	0.0000	0.0000	0.0000	0.0552	0.7098

Tabla 5.2 Resultados del método de refracción-difracción para la línea  $y = 585.25m$ .

En esta tabla,  $S_x$  y  $S_y$  representan los componentes en dirección x y y de la función de fase,  $D_s$  al módulo de la función de fase,  $k^2$  al número de onda al cuadrado,  $E(S_x)$ ,  $E(S_y)$  y  $E(H)$  las diferencias (multiplicadas por mil) de los valores de  $S_x$ ,  $S_y$  y  $H$  entre las dos últimas iteraciones,  $D(DS)$  la cantidad que se suma a  $k^2$  para obtener el cuadrado del módulo de la función de fase y  $H$  la altura de ola.

En la figura 5.9 se muestra la dirección del oleaje en los puntos de celda y en la figura 5.10 se han dibujado las líneas de igual valor de altura de ola.

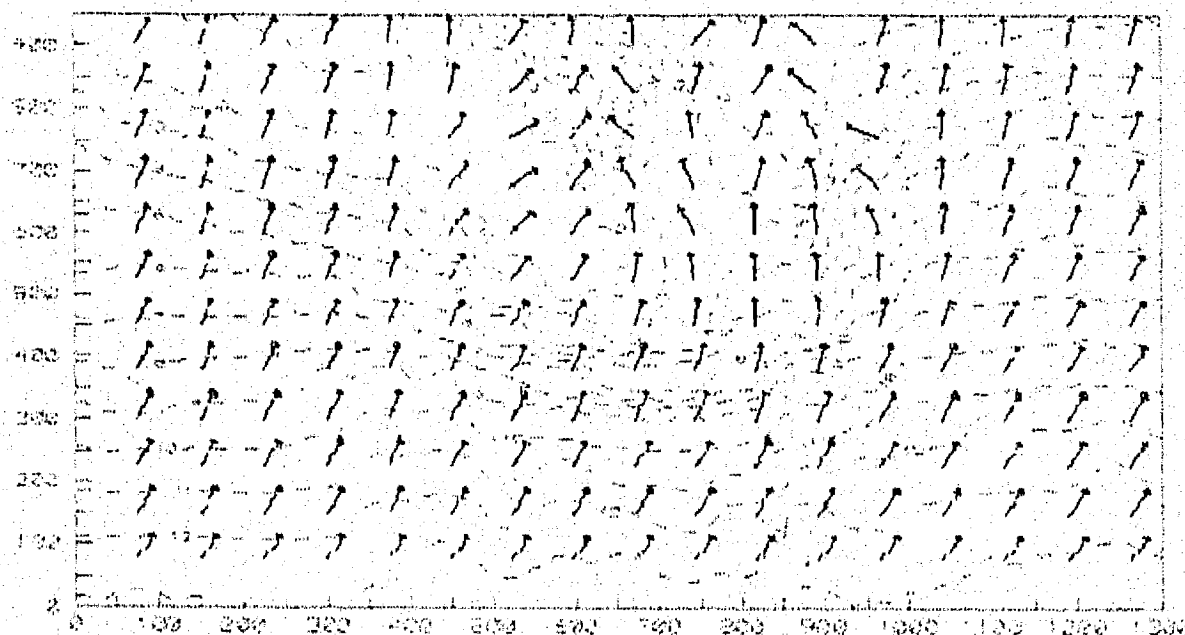


Figura 5.9 Dirección del oleaje.

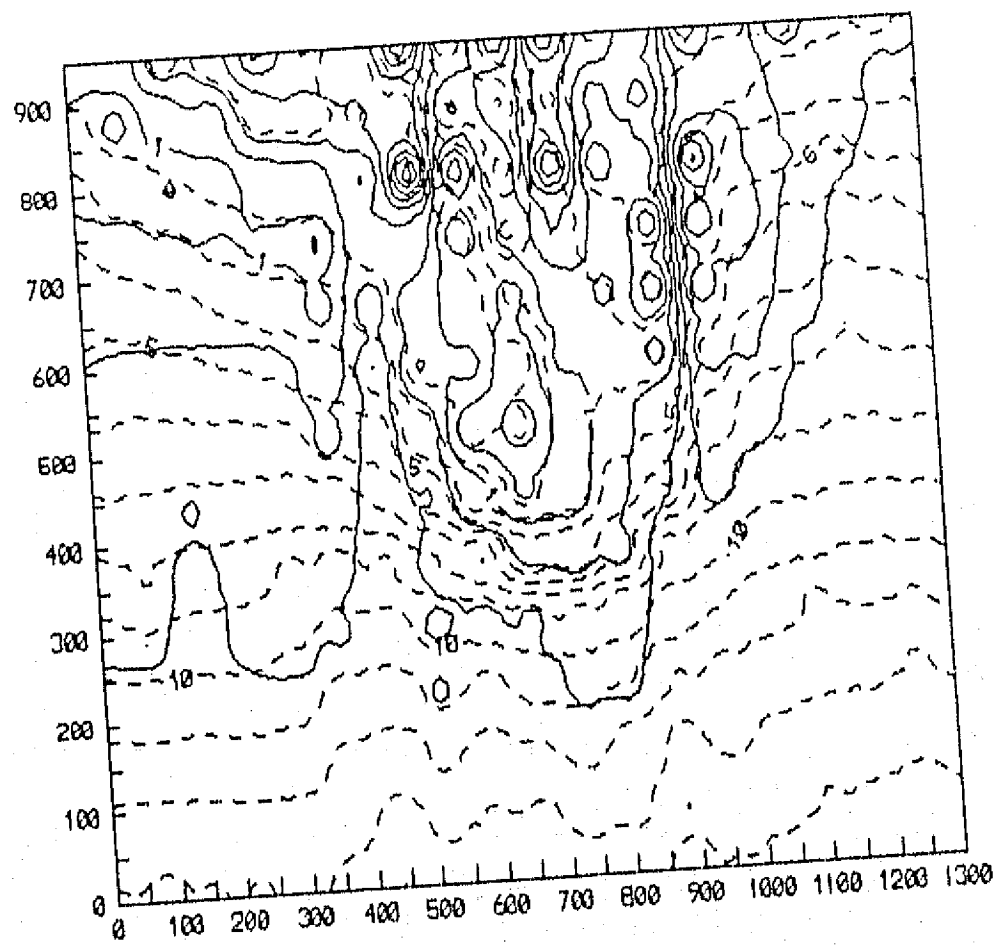
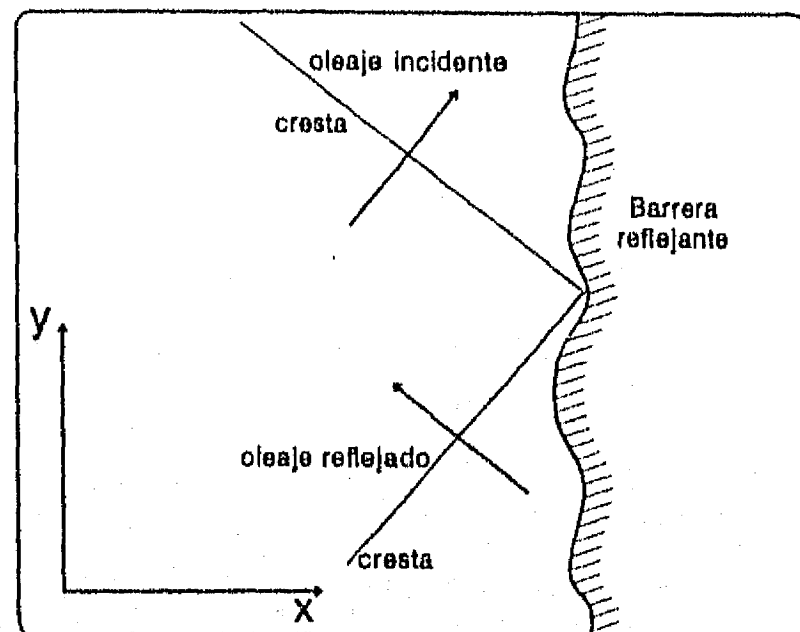


Figura 5.10 Líneas de igual valor de altura de ola.





## 6. MODELO NUMÉRICO DE REFRACCIÓN-DIFRACCIÓN-REFLEXIÓN

En este capítulo se describe un modelo numérico para resolver la ecuación de Berkhoff (deducida en el capítulo 4) para calcular simultáneamente la refracción, difracción y la reflexión del oleaje.

El procedimiento de cálculo es distinto al del capítulo 5 ya que para incorporar la reflexión del oleaje se incluye a una variable que representa al tiempo.

El modelo matemático de refracción-difracción-reflexión que se presenta en este capítulo se basa en las ecuaciones deducidas en el subcapítulo 4.4 que se escriben a continuación.

$$c^2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} = - \frac{\partial Q_x}{\partial t} \quad (6.1)$$

$$c^2 \frac{\partial \zeta}{\partial y} = - \frac{\partial Q_y}{\partial t} \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \frac{1}{n} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (nQ_x) + \frac{\partial}{\partial y} (nQ_y) \right] \quad (6.3)$$

Se ha preferido esta forma de la ecuación pendiente suave a la ecuación 4.35 por la ventaja de disponer de los valores de las razones de flujo  $Q_x$  y  $Q_y$  que permiten encontrar la dirección del oleaje y plantear la presencia de obstáculos de una forma sencilla.

### 6.1 Ecuaciones de diferencias finitas del modelo refracción-difracción-reflexión

Para conocer el oleaje en una región del plano horizontal  $x$  y  $y$  se divide esta en celdas cuadradas de lado  $\Delta s$ , siendo  $\Delta x = \Delta y = \Delta s$ .

Para tener resultados con una buena precisión se propone escribir las ecuaciones diferenciales 6.1 a 6.3 en diferencias finitas de manera que para la derivada temporal se use una diferencia de primer orden y para las derivadas espaciales diferencias de cuarto orden.

La solución de estas ecuaciones diferenciales se obtendrá por medio de un esquema numérico donde el denominado error de discretización (diferencia entre la solución exacta de la ecuación diferencial y la solución exacta de la ecuación de diferencias utilizada para aproximar la ecuación diferencial) sea pequeño.

La magnitud del error de discretización en cualquier punto de la malla de cálculo depende del tamaño de los intervalos de cambio en las variables de la ecuación diferencial ( $\Delta s$ ,  $\Delta t$ ) y el número de términos de las series de Taylor incluidos en la ecuación de diferencias finitas que aproxima a cada derivada de la ecuación diferencial.

Se probaron diferentes ecuaciones de aproximación y se estimó conveniente deducir ecuaciones de diferencias finitas que tuviesen un error de discretización bajo.

#### 6.1.1 Ecuaciones para las razones de flujo

Se propone aproximar las derivadas parciales de la ecuación 6.1 de la manera siguiente:

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial Q_x}{\partial t} \right)_{i,j+1/2}^p = b_1 \left( \frac{1}{c_{i-1,j}^2} \frac{Q_{x_{i-1,j+1/2}}^{p+1} - Q_{x_{i-1,j+1/2}}^p}{\Delta t} \right) + b_2 \left( \frac{1}{c_{i,j}^2} \frac{Q_{x_{i,j+1/2}}^{p+1} - Q_{x_{i,j+1/2}}^p}{\Delta t} \right) + b_3 \left( \frac{1}{c_{i+1,j}^2} \frac{Q_{x_{i+1,j+1/2}}^{p+1} - Q_{x_{i+1,j+1/2}}^p}{\Delta t} \right) \quad (6.4)$$

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)_{i,j+\frac{1}{2}}^p = \frac{a_1 \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p + a_2 \zeta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p}{\Delta s} \quad (6.5)$$

Los parámetros  $b_1, b_2, b_3, a_1$  y  $a_2$  se determinaron en el apéndice B para que las aproximaciones anteriores consideren términos en la serie de Taylor que involucren hasta derivadas de primer orden respecto a la variable  $t$  y hasta derivadas de orden cuarto respecto a la variable  $x$  para disponer de un error de truncado pequeño. Los valores obtenidos fueron  $b_1 = 1/24, b_2 = 11/12, b_3 = 1/24, a_1 = 1$  y  $a_2 = -1$ .

De este modo, el esquema de diferencias finitas utilizado quedo planteado así,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c_{i-1,j+\frac{1}{2}}^2} Q_{x_{i-1,j+\frac{1}{2}}}^{p+1} + \frac{22}{c_{i,j+\frac{1}{2}}^2} Q_{x_{i,j+\frac{1}{2}}}^{p+1} + \frac{1}{c_{i+1,j+\frac{1}{2}}^2} Q_{x_{i+1,j+\frac{1}{2}}}^{p+1} = \\ & = \frac{1}{c_{i-1,j+\frac{1}{2}}^2} Q_{x_{i-1,j+\frac{1}{2}}}^p + \frac{22}{c_{i,j}^2} Q_{x_{i,j+\frac{1}{2}}}^p + \frac{1}{c_{i+1,j}^2} Q_{x_{i+1,j+\frac{1}{2}}}^p - \frac{24 \Delta t}{\Delta s} \left( \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p - \zeta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p \right) \end{aligned} \quad (6.6)$$

El primero ( $i = 2$ ) y último ( $i = M$ ) valor de  $Q_x$  en la línea  $y = (j + \frac{1}{2}) \Delta s$  son obtenidos con una ecuación distinta a la 6.6 porque antes y después de estos valores no está definido  $Q_{x_{1,j+\frac{1}{2}}}$  ni  $Q_{x_{M+1,j+\frac{1}{2}}}$ . Para ellos se propone utilizar las ecuaciones de diferencias finitas siguientes (el error de truncado es mayor al de la ecuación 6.6):

$$\text{Para } i = 2: \quad Q_{x_{2,j+\frac{1}{2}}}^{p+1} = Q_{x_{2,j+\frac{1}{2}}}^p - \frac{c_{2,j+\frac{1}{2}}^2 \Delta t}{\Delta s} \left( \zeta_{\frac{5}{2},j+\frac{1}{2}}^p - \zeta_{\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}^p \right) \quad (6.6')$$

$$\text{para } i = M: \quad Q_{x_{M,j+\frac{1}{2}}}^{p+1} = Q_{x_{M,j+\frac{1}{2}}}^p - \frac{c_{M,j+\frac{1}{2}}^2 \Delta t}{\Delta s} \left( \zeta_{M+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p - \zeta_{M-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p \right) \quad (6.6'')$$

La aplicación de la expresión 6.6 para cada línea de la malla  $y = (j + 1/2) \Delta s$  para  $i = 2$  a  $M$  da lugar a un sistema de ecuaciones lineales tridiagonal con incógnitas  $Q_{x_{i-1,j+\frac{1}{2}}}^{p+1}, Q_{x_{i,j+\frac{1}{2}}}^{p+1}$  y  $Q_{x_{i+1,j+\frac{1}{2}}}^{p+1}$  cuya solución es rápida de obtener con procedimientos como el de Thomas.

Los valores de  $\zeta_{\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}^p$  y  $\zeta_{M+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p$  son determinados por medio de las condiciones de frontera como se verá adelante. En la figura 6.1 se muestra la ubicación de las variables de la ecuación 6.16.

Procediendo de manera similar para la ecuación 6.2 se encuentra la ecuación de diferencias siguiente:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c^2_{i+\frac{1}{2},j-1}} Q_{y_{i+\frac{1}{2},j-1}}^{p+1} + \frac{22}{c^2_{i+\frac{1}{2},j}} Q_{y_{i+\frac{1}{2},j}}^{p+1} + \frac{1}{c^2_{i+\frac{1}{2},j+1}} Q_{y_{i+\frac{1}{2},j+1}}^{p+1} = \\ & = \frac{1}{c^2_{i+\frac{1}{2},j-1}} Q_{y_{i+\frac{1}{2},j-1}}^p + \frac{22}{c^2_{i+\frac{1}{2},j}} Q_{y_{i+\frac{1}{2},j}}^p + \frac{1}{c^2_{i+\frac{1}{2},j+1}} Q_{y_{i+\frac{1}{2},j+1}}^p - \frac{24 \Delta t}{\Delta s} \left( \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p - \zeta_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^p \right) \end{aligned} \quad (6.7)$$

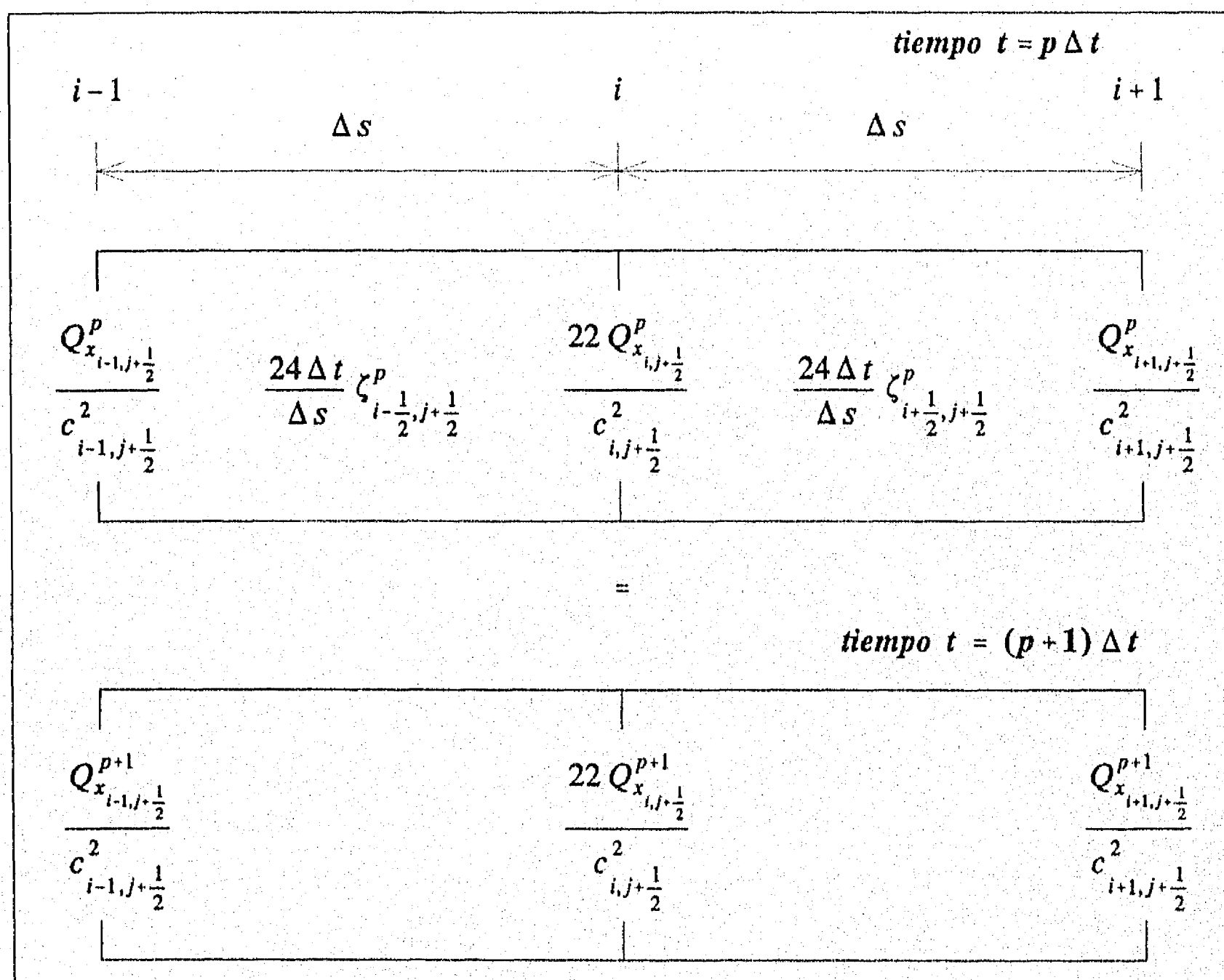


Figura 6.1 Diagrama del esquema de diferencias finitas de la razón de flujo en la dirección  $x$ .

El primero ( $j = 2$ ) y último ( $j = N$ ) valor de  $Q_y$  en la línea  $x = (i + \frac{1}{2})\Delta s$  son obtenidos con estas ecuaciones:

$$\text{Para } j = 2: \quad Q_{y_{i+\frac{1}{2},2}}^{p+1} = Q_{y_{i+\frac{1}{2},2}}^p - \frac{c_{i+\frac{1}{2},2}^2 \Delta t}{\Delta s} \left( \zeta_{i+\frac{1}{2},\frac{5}{2}}^p - \zeta_{i+\frac{1}{2},\frac{3}{2}}^p \right) \quad (6.7')$$

$$\text{para } j = N: \quad Q_{y_{i+\frac{1}{2},N}}^{p+1} = Q_{y_{i+\frac{1}{2},N}}^p - \frac{c_{i+\frac{1}{2},N}^2 \Delta t}{\Delta s} \left( \zeta_{i+\frac{1}{2},N+\frac{1}{2}}^p - \zeta_{i+\frac{1}{2},N-\frac{1}{2}}^p \right) \quad (6.7'')$$

lo anterior se debe a que no están definidas  $Q_{y_{i+\frac{1}{2},1}}$  ni  $Q_{y_{i+\frac{1}{2},N+1}}$ .

La ecuación 6.7 se establece para cada sección  $y = j\Delta s$  para  $j = 2$  a  $N$  sobre la línea  $x = (i + 1/2)\Delta s$  con lo que se establece un sistema de ecuaciones tridiagonal con incógnitas  $Q_{y_{i+\frac{1}{2},j-1}}^{p+1}$ ,  $Q_{y_{i+\frac{1}{2},j}}^{p+1}$  y  $Q_{y_{i+\frac{1}{2},j+1}}^{p+1}$ . También en este caso  $\zeta_{i+\frac{1}{2},\frac{3}{2}}^p$  y  $\zeta_{i+\frac{1}{2},N+\frac{1}{2}}^p$  se calculan a partir de las condiciones de frontera. En la figura 6.2 se presenta la localización de las variables incluidas en la ecuación de diferencias 6.7.

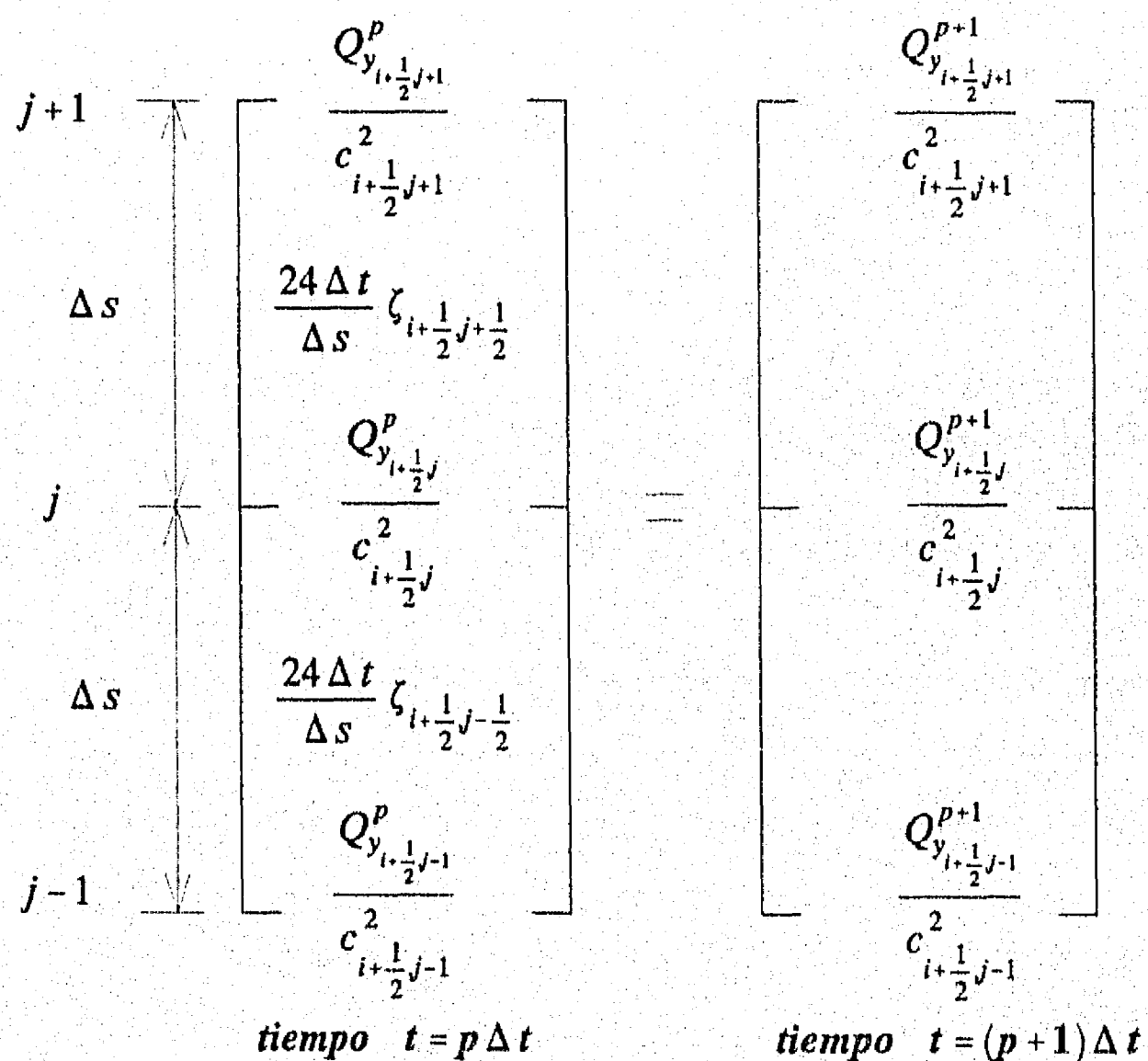


Figura 6.2 Diagrama del esquema de diferencias finitas de la razón de flujo en la dirección  $y$ .

### 6.1.2 Ecuación de continuidad

Para la ecuación diferencial parcial 6.3 también se desarrolló una ecuación de diferencias donde el error de truncado es pequeño. Las aproximaciones a las derivadas parciales fueron de este tipo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial(n\zeta)}{\partial t}\right)_{i,j}^p &\doteq b_1 n_{i-\frac{1}{2},j} \frac{\zeta_{i-\frac{1}{2},j}^{p+1} - \zeta_{i-\frac{1}{2},j}^p}{\Delta t} + b_2 n_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\zeta_{i+\frac{1}{2},j}^{p+1} - \zeta_{i+\frac{1}{2},j}^p}{\Delta t} + \\ &+ b_3 n_{i+\frac{3}{2},j} \frac{\zeta_{i+\frac{3}{2},j}^{p+1} - \zeta_{i+\frac{3}{2},j}^p}{\Delta t} + b_4 n_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{\zeta_{i,j-\frac{1}{2}}^{p+1} - \zeta_{i,j-\frac{1}{2}}^p}{\Delta t} + b_5 n_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{\zeta_{i,j+\frac{1}{2}}^{p+1} - \zeta_{i,j+\frac{1}{2}}^p}{\Delta t} \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial(nQ_x)}{\partial x}\right)_{i,j}^p &\doteq \frac{1}{\Delta s} \left( a_1 (nQ_x)_{i+1,j-\frac{1}{2}} + a_2 (nQ_x)_{i,j-\frac{1}{2}} + a_3 (nQ_x)_{i+1,j} + \right. \\ &\left. + a_4 (nQ_x)_{i,j} + a_5 (nQ_x)_{i+1,j+\frac{3}{2}} + a_6 (nQ_x)_{i,j+\frac{3}{2}} \right) \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial(nQ_y)}{\partial x}\right)_{i,j}^p &\doteq \frac{1}{\Delta s} \left( d_1 (nQ_y)_{i-1,j+1} + d_2 (nQ_y)_{i-\frac{1}{2},j} + d_3 (nQ_y)_{i,j+1} + \right. \\ &\left. + d_4 (nQ_y)_{i,j} + d_5 (nQ_y)_{i+\frac{3}{2},j+1} + d_6 (nQ_y)_{i+\frac{3}{2},j} \right) \end{aligned} \quad (6.10)$$

Los parámetros  $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$  y  $d_6$  se obtuvieron en el apéndice B para que el error de truncado fuese de primer orden en la variable  $t$  y de cuarto orden en las variables  $x$  y  $y$  siendo  $\Delta x = \Delta y = \Delta s$ , encontrándose los valores de ellos que aparecen en la tabla escrita a continuación:

	$k$					
	1	2	3	4	5	6
$b_k$	$\frac{1}{24}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	—
$a_k$	$\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{24}$	$\frac{11}{12}$	$-\frac{11}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$
$d_k$	$\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{24}$	$\frac{11}{12}$	$-\frac{11}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$

Tomando en cuenta los valores de los parámetros la ecuación de diferencias correspondiente a la expresión 6.3 queda, después de multiplicar por 24 como

$$\begin{aligned}
& n_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \zeta_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{p+1} + n_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2}} \zeta_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2}}^{p+1} + \\
& + n_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} \zeta_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^{p+1} + n_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{3}{2}} \zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{3}{2}}^{p+1} + \\
& + 20 n_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{p+1} = n_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \zeta_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p + \\
& n_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2}} \zeta_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2}}^p + n_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} \zeta_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^p + \\
& + n_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{3}{2}} \zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{3}{2}}^p + 20 n_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p - \\
& - \frac{\Delta t}{\Delta s} \left[ n_{i+1, j-\frac{1}{2}} Q_{x_{i+1, j-\frac{1}{2}}}^{p+1} - n_{i, j-\frac{1}{2}} Q_{x_{i, j-\frac{1}{2}}}^{p+1} + \right. \\
& + n_{i+1, j+\frac{3}{2}} Q_{x_{i+1, j+\frac{3}{2}}}^{p+1} - n_{i, j+\frac{3}{2}} Q_{x_{i, j+\frac{3}{2}}}^{p+1} + \\
& + n_{i-\frac{1}{2}, j+1} Q_{y_{i-\frac{1}{2}, j+1}}^{p+1} - n_{i-\frac{1}{2}, j} Q_{y_{i-\frac{1}{2}, j}}^{p+1} + \\
& + n_{i+\frac{3}{2}, j+1} Q_{y_{i+\frac{3}{2}, j+1}}^{p+1} - n_{i+\frac{3}{2}, j} Q_{y_{i+\frac{3}{2}, j}}^{p+1} + \\
& + 22 \left( n_{i+1, j+\frac{1}{2}} Q_{x_{i+1, j+\frac{1}{2}}}^{p+1} - n_{i, j+\frac{1}{2}} Q_{x_{i, j+\frac{1}{2}}}^{p+1} + \right. \\
& \left. + n_{i+\frac{1}{2}, j+1} Q_{y_{i+\frac{1}{2}, j+1}}^{p+1} - n_{i+\frac{1}{2}, j} Q_{y_{i+\frac{1}{2}, j}}^{p+1} \right) \left. \right] \quad (6.11)
\end{aligned}$$

En este caso la aplicación de la ecuación 6.11 en los puntos interiores de la malla en el dominio de interés da lugar a un sistema con cinco coeficientes distintos de cero en cada una de las ecuaciones lineales que lo forman, que tiene como incógnitas a las elevaciones  $\zeta_{i-\frac{1}{2}, j}^{p+1}$ ,  $\zeta_{i+\frac{3}{2}, j}^{p+1}$ ,  $\zeta_{i, j-\frac{1}{2}}^{p+1}$ ,  $\zeta_{i, j+\frac{3}{2}}^{p+1}$  y  $\zeta_{i+\frac{1}{2}, j}^{p+1}$ .

Dado que el sistema de ecuaciones lineales tiene coeficientes en la diagonal principal que son mucho mayores a los que aparecen en cada renglón de su matriz de coeficientes, el empleo de un método iterativo para resolver sistemas de ecuaciones lineales es adecuado, porque en pocas iteraciones dará la solución del sistema y únicamente utiliza los coeficientes distintos de cero de cada ecuación.

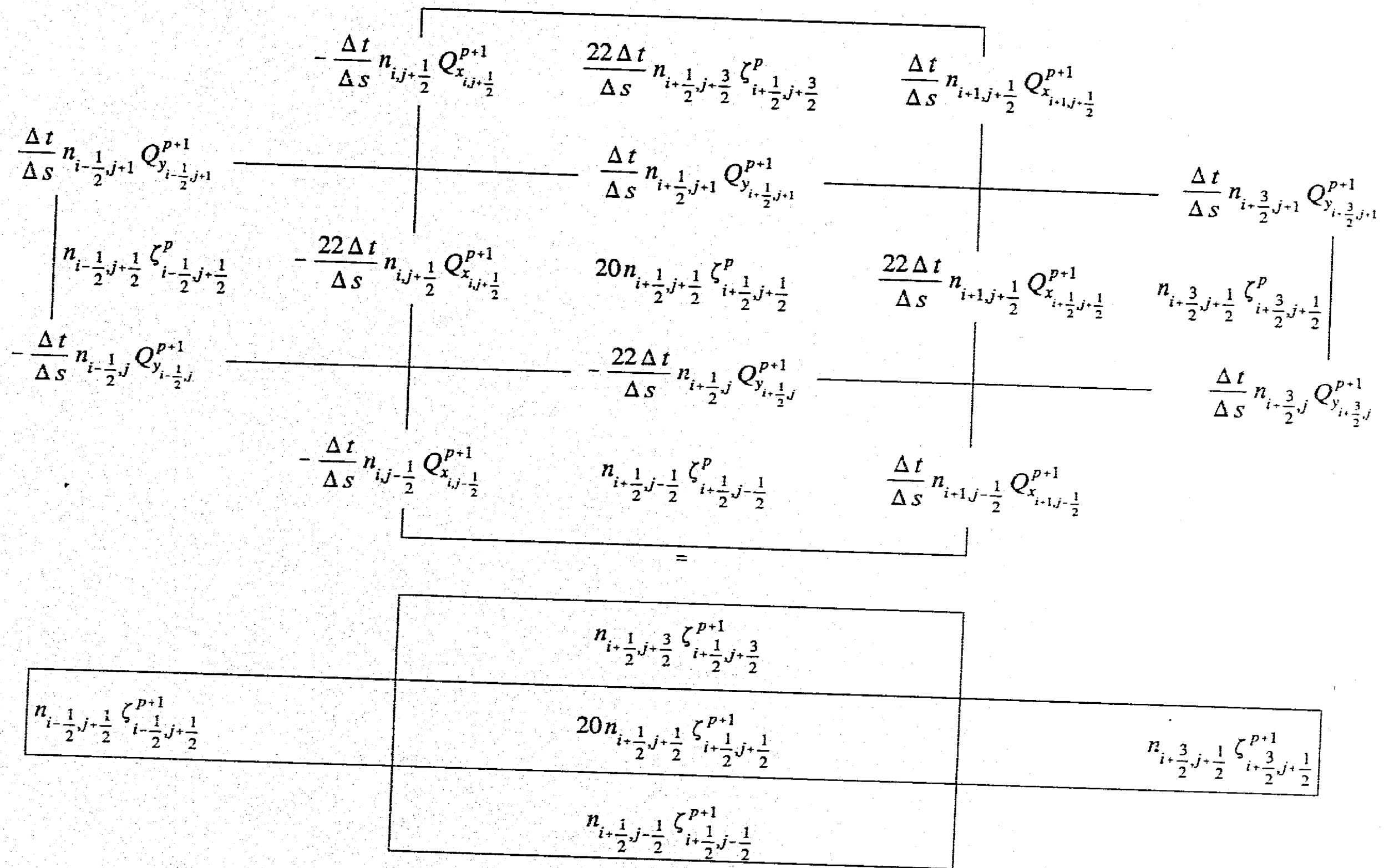


Figura 6.3 Diagrama de cálculo de la ecuación de continuidad.



Las expresiones 6.6, 6.7, y 6.11 muestran que, si se conocen los valores de  $\zeta$ ,  $Q_x$ , y  $Q_y$ , del instante  $t$  (etapa  $p$ ), pueden calcularse sus valores correspondientes en el instante  $t + \Delta t$  (etapa  $p + 1$ ). De esta manera, se dispone de un método que permite la determinación sucesiva de las elevaciones de la superficie libre  $\zeta$  y las razones de flujo  $Q_x$  y  $Q_y$  en cada punto de la malla que se extiende dentro de una zona de interés. Esto podrá hacerse a partir de una condición inicial (tiempo  $t_0$ ) en donde  $\zeta^p$ ,  $Q_x^p$ , y  $Q_y^p$  sean iguales a cero, salvo en la frontera donde incide el oleaje a la zona, ya que en ella los valores de las olas son conocidos.

Como el fenómeno es cíclico, al calcular cierto número de etapas se consigue establecer un patrón de oleaje que es repetitivo en el tiempo y permite obtener las características de las olas.

Para la utilización de las expresiones de diferencias finitas por medio de un programa de cómputo no se utilizaron los subíndices a los que se les sumaba o restaba  $1/2$ ; sin embargo, conservando la ubicación de las variables es sencillo colocarles subíndices enteros a las variables.

En la figura 6.4 se presenta una malla de un ejemplo donde interesa obtener el patrón de oleaje. Con trazo discontinuo se muestran los límites de la zona en estudio. Como puede verse, se consideran 66 puntos incógnitas. También se han marcado algunos puntos en las orillas, los cuales son necesarios para el cálculo del oleaje. Estos no son obtenidos con las ecuaciones 6.6, 6.7 y 6.11, sino a partir de ecuaciones correspondientes a las condiciones de frontera.

Para proceder al cálculo se requiere establecer en cada punto del interior de la región de interés las ecuaciones de diferencias finitas. A continuación se muestra un ejemplo ilustrativo para los puntos interiores:

De acuerdo con las ecuaciones 6.6, 6.7 y 6.11 se tiene

a) Razones de flujo en la dirección  $x$

Para el punto 40 de  $Q_x$  se tiene

$$\frac{1}{c_{x_{39}}^2} Q_{x_{39}}^{p+1} + \frac{22}{c_{x_{40}}^2} Q_{x_{40}}^{p+1} + \frac{1}{c_{x_{41}}^2} Q_{x_{41}}^{p+1} = \frac{1}{c_{x_{39}}^2} Q_{x_{39}}^p + \frac{22}{c_{x_{40}}^2} Q_{x_{40}}^p + \frac{1}{c_{x_{41}}^2} Q_{x_{41}}^p - \frac{24 \Delta t}{\Delta s} (\zeta_{40}^p - \zeta_{39}^p) \quad (6.12)$$

De modo semejante para otros puntos interiores al formular una ecuación como la anterior se plantea un sistema de ecuaciones lineal tridiagonal, cuya solución dará los valores  $Q_x^{p+1}$ .  $C_x^2$  corresponde a los valores de la celeridad al cuadrado en las posiciones donde se localizan los  $Q_x$ .

b) Razones de flujo en la dirección y

Para el punto 39 de  $Q_y$  se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_{y28}^2} Q_{y28}^{p+1} + \frac{22}{c_{y39}^2} Q_{y39}^{p+1} + \frac{1}{c_{y50}^2} Q_{y50}^{p+1} = \frac{1}{c_{y28}^2} Q_{y28}^p + \frac{22}{c_{y39}^2} Q_{y39}^p + \\ + \frac{1}{c_{y50}^2} Q_{y50}^p - \frac{24 \Delta t}{\Delta S} (\zeta_{39}^p - \zeta_{28}^p) \end{aligned} \quad (6.13)$$

De una forma similar para otros puntos interiores se establecen ecuaciones como la anterior que dan lugar a un sistema de lineal tridiagonal que al ser resuelto proporciona los valores  $Q_y^{p+1}$ .  $C_y^2$  es igual al cuadrado de la celeridad que existe en los puntos donde se ubican los  $Q_y$ .

c) Elevaciones de la superficie libre del mar

Para el punto 39 de  $\zeta$  se tiene

$$\begin{aligned} n_{z38} \zeta_{38}^{p+1} + n_{z40} \zeta_{40}^{p+1} + n_{z28} \zeta_{28}^{p+1} + n_{z50} \zeta_{50}^{p+1} + 20n_{z39} \zeta_{39}^{p+1} = \\ n_{z38} \zeta_{38}^p + n_{z40} \zeta_{40}^p + n_{z28} \zeta_{28}^p + n_{z50} \zeta_{50}^p + 20n_{z39} \zeta_{39}^p - \\ - \frac{\Delta t}{\Delta S} [n_{x29} Q_{x29}^{p+1} - n_{x28} Q_{x28}^{p+1} + n_{x51} Q_{x51}^{p+1} - n_{x50} Q_{x50}^{p+1} + 22(n_{x40} Q_{x40}^{p+1} - n_{x39} Q_{x39}^{p+1}) + \\ + n_{y49} Q_{y49}^{p+1} - n_{y38} Q_{y38}^{p+1} + n_{y51} Q_{y51}^{p+1} - n_{y40} Q_{y40}^{p+1} + 22(n_{y50} Q_{y50}^{p+1} - n_{y39} Q_{y39}^{p+1})] \end{aligned} \quad (6.14)$$

Así al escribir las ecuaciones de  $\zeta$  para los demás puntos interiores se llega a un sistema de ecuaciones pentadiagonal. La solución de este sistema corresponde a  $\zeta^{p+1}$ . Los valores  $n_x$ ,  $n_y$  y  $n_z$  son iguales a los coeficientes de factor de grupo (relación entre la celeridad de un tren de ondas y la de una onda individual) en las posiciones en donde se localizan  $\zeta$ ,  $Q_x$  y  $Q_y$  respectivamente.

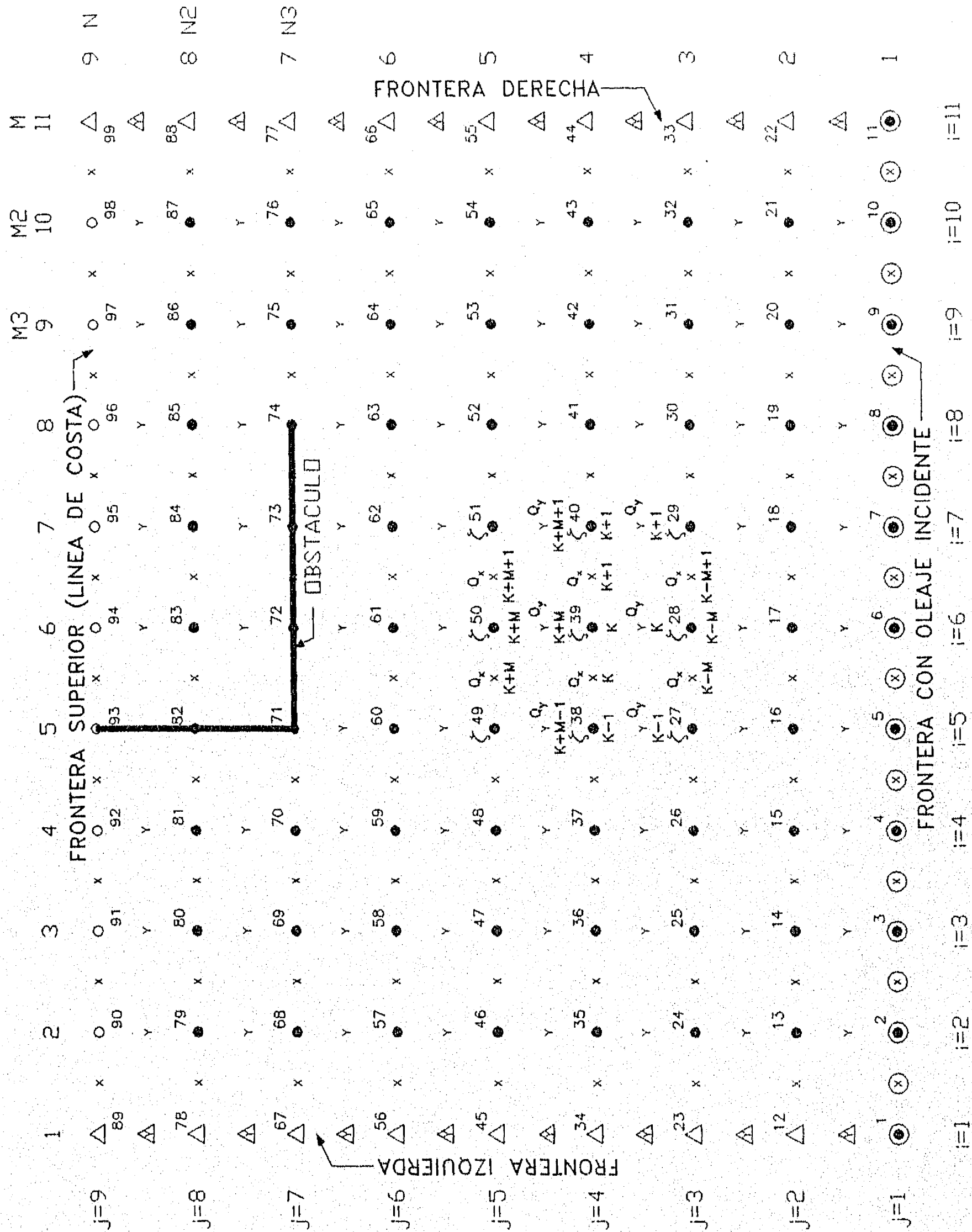


Figura 6.4 Malla de una zona donde interesa propagar el oleaje.

## 6.2 Condiciones de frontera

Para obtener el oleaje en las orillas de la región en estudio o en los obstáculos que existan en esta región, es necesario tomar en cuenta las condiciones de frontera. Para ello, se considera que en el perímetro existe "una pared" con un coeficiente de reflexión  $K_L$ , cuyo valor está entre 0 y 1. Lo anterior, se aplica en todo el perímetro y obstáculos, excepto en la parte de este perímetro por donde incide el oleaje que se desea propagar en la zona. Para esta parte se usan también algunas ecuaciones especiales.

Para plantear las condiciones de frontera se emplean expresiones de la teoría de oleaje lineal en las que se acepta que el fondo del mar es horizontal.

Para el oleaje propagándose en la dirección del eje  $x$  sobre un fondo horizontal, se tiene de la ecuación 6.1 que

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \quad (6.15)$$

la cual corresponde a la ecuación de onda.

La solución de D'Alembert (Wylie, 1979) de la ecuación de la onda se plantea en términos de dos funciones  $G$  y  $F$  con segunda derivada de la manera siguiente

$$\zeta(x,t) = G(x-ct) + F(x+ct) \quad (6.16)$$

Lo que se puede verificar al calcular las derivadas parciales de segundo orden escritas a continuación

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} F(x+ct) = c^2 F''(x+ct)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x+ct) = F''(x+ct)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} G(x-ct) = c^2 G''(x-ct)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x-ct) = G''(x-ct)$$

La función  $F(x+ct)$  corresponde a un cambio de la superficie libre propagándose a la izquierda y  $G(x-ct)$  a uno desplazándose a la derecha.

En las ecuaciones de diferencias finitas se establece el valor de  $\zeta$  a distancias  $\Delta x$  en los tiempos separados en un intervalo  $\Delta t$ . Es conveniente relacionar entre sí ambos intervalos para lo cual se establece que  $c\Delta t$  es proporcional a  $\Delta x$ , es decir

$$c\Delta t = \lambda \Delta x \quad (6.17)$$

o bien

$$\lambda = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \quad (6.18)$$

donde  $\lambda$  es una constante de proporcionalidad.

### 6.2.1 Oleaje sobre una frontera con coeficiente de reflexión $K_L$

Para un obstáculo que impide el avance de las olas que se desplazan hacia la izquierda, el cual tiene un coeficiente de reflexión  $K_L$  ubicado a la distancia  $x = L$  se tiene que la función reflejada (que avanza a la derecha) cumplirá con

$$F(L+ct) = K_L G(L-ct) \quad (6.19)$$

de acuerdo con la ecuación 6.16 para  $x = L$

$$\zeta(L,t) = G(L-ct) + F(L+ct) \quad (6.20)$$

al sustituir la ecuación 6.17,

$$\zeta(L,t) = (1+K_L)G(L-ct) \quad (6.21)$$

De esta expresión se aprecia que sobre el obstáculo se tiene una elevación de superficie libre que es igual al doble de la incidente cuando  $K_L = 1$  como se ha observado en laboratorio y en el campo.

Para los tiempos  $t+\Delta t$  y  $t-\Delta t$  se tiene

$$\zeta(L,t+\Delta t) = (1+K_L)G(L-ct-c\Delta t)$$

$$\zeta(L,t-\Delta t) = (1+K_L)G(L-ct+c\Delta t)$$

Al tomar en cuenta a la ecuación 6.17 en las dos expresiones anteriores

$$\zeta(L, t + \Delta t) = (1 + K_L)G(L - ct - \lambda \Delta x) \quad (6.22)$$

$$\zeta(L, t - \Delta t) = (1 + K_L)G(L - ct + \lambda \Delta x) \quad (6.23)$$

por otra parte, de la ecuación 6.16 para  $x = L - \lambda \Delta x$  se tiene

$$\zeta(L - \lambda \Delta x, t) = G(L - \lambda \Delta x - ct) + F(L - \lambda \Delta x + ct) \quad (6.24)$$

y de la ecuación 6.19 para el tiempo  $t - \Delta t$

$$F(L + ct - c \Delta t) = K_L G(L - ct + c \Delta t)$$

al considerar la ecuación 6.17

$$F(L + ct - \lambda \Delta x) = K_L G(L - ct + \lambda \Delta x) \quad (6.25)$$

Con base en las ecuaciones 6.22 a 6.25 se obtiene la elevación del agua en la frontera de este modo:

De la ecuación 6.23,

$$G(L - ct + \lambda \Delta x) = \frac{1}{1 + K_L} \zeta(L, t - \Delta t)$$

al sustituir la igualdad anterior en la ecuación 6.25

$$F(L + ct - \lambda \Delta x) = \frac{K_L}{1 + K_L} \zeta(L, t - \Delta t)$$

al tomar en cuenta la expresión anterior en la 6.24 y despejar

$$G(L - ct - \lambda \Delta x) = \zeta(L - \lambda \Delta x, t) - \frac{K_L}{1 + K_L} \zeta(L, t - \Delta t)$$

finalmente, al considerar esta ecuación en la 6.22 se obtiene

$$\zeta(L, t + \Delta t) = (1 + K_L)\zeta(L - \lambda \Delta x, t) - K_L \zeta(L, t - \Delta t) \quad (6.26)$$

Con esta ecuación se obtiene la elevación de la superficie libre del agua cuando el obstáculo esta en  $x = L$  y el oleaje incide en él viajando de izquierda a derecha.

Para un obstáculo ubicado en  $x = 0$  se sigue un proceso similar, en este caso la onda incidente esta dada por la función  $F$  y la reflejada corresponde a la función  $G$  por lo que en el obstáculo se tiene

$$G(0-ct) = K_L F(0+ct) \quad (6.27)$$

para el tiempo  $t - \Delta t$

$$G(0-ct+c\Delta t) = K_L F(0+ct-c\Delta t)$$

al utilizar la ecuación 6.17

$$G(0-ct+\lambda \Delta x) = K_L F(0+ct-\lambda \Delta x) \quad (6.28)$$

si se sustituye la ecuación 6.27 en la 6.16 para  $x = 0$  resulta

$$\zeta(0,t) = (1+K_L) F(0+ct) \quad (6.29)$$

la ecuación 6.29 para los tiempos  $t+\Delta t$  y  $t-\Delta t$  queda así,

$$\zeta(0,t+\Delta t) = (1+K_L) F(0+ct+c\Delta t)$$

y

$$\zeta(0,t-\Delta t) = (1+K_L) F(0+ct-c\Delta t)$$

Si se considera la ecuación 6.17 en las dos últimas igualdades se obtiene

$$\zeta(0,t+\Delta t) = (1+K_L) F(ct+\lambda \Delta x) \quad (6.30)$$

y

$$\zeta(0,t-\Delta t) = (1+K_L) F(ct-\lambda \Delta x) \quad (6.31)$$

De acuerdo con la ecuación 6.16 para  $x = \lambda \Delta x$  se tiene que

$$\zeta(\lambda \Delta x, t) = G(\lambda \Delta x - ct) + F(\lambda \Delta x + ct) \quad (6.32)$$

de donde

$$F(\lambda \Delta x + ct) = \zeta(\lambda \Delta x, t) - G(\lambda \Delta x - ct) \quad (6.33)$$

al sustituir la ecuación 6.28,

$$F(\lambda \Delta x + ct) = \zeta(\lambda \Delta x, t) + K_L F(ct - \lambda \Delta x)$$

al considerar la ecuación 6.31

$$F(\lambda \Delta x + ct) = \zeta(\lambda \Delta x, t) - \frac{K_L}{1 + K_L} \zeta(0, t - \Delta t)$$

si se sustituye esta última expresión en la ecuación 6.30 se obtiene

$$\zeta(0, t + \Delta t) = (1 + K_L) \zeta(\lambda \Delta x, t) - K_L \zeta(0, t - \Delta t) \quad (6.34)$$

esta expresión permite valuar la elevación de la superficie libre del agua cuando el obstáculo esta en  $x = 0$  y el oleaje incidente se acerca a él viajando de derecha a izquierda.

### 6.2.2 Oleaje incidente a la zona de estudio

En la orilla inferior de la región donde interesa propagar el oleaje es necesario especificar la elevación de la superficie libre para cualquier tiempo.

Se supone en una franja que contiene a la orilla donde incide el oleaje, la profundidad es constante, por lo que es válida la ecuación de la superficie libre propuesta en la teoría lineal del oleaje (capítulo 3) definida por las expresiones 3.3 a 3.5, es decir

$$\zeta = a \cos(k_x x + k_y y - \sigma t) \quad (6.35)$$

donde

$$k_x = k \cos \alpha \quad (6.36)$$

$$k_y = k \sin \alpha \quad (6.37)$$

$\alpha$  es el ángulo formado entre la dirección de avance del oleaje y el eje  $x$  (figura 3.1),  $k$  es el número de onda,  $\sigma$  la frecuencia angular y  $a$  la amplitud del oleaje.

Como la línea recta correspondiente a la frontera donde incide el oleaje, coincide con el eje  $x$  resulta que  $y = 0$  por lo que la elevación del agua estará dada como

$$\zeta = a \cos(k_x x - \sigma t) \quad (6.38)$$



Por otro lado, la ecuación 6.16 para un oleaje avanzando en la dirección  $y$  será

$$\zeta(y,t) = G(y-ct) + F(y+ct) \quad (6.39)$$

para  $y = 0$  queda

$$\zeta(0,t) = G(0-ct) + F(0+ct) \quad (6.40)$$

Para este caso particular, la onda incidente  $G$  corresponde a la expresión 6.47, es decir

$$G(0-ct) = a \cos(k_x x - \sigma t) \quad (6.41)$$

De acuerdo con la ecuación 6.39 para  $y = \lambda \Delta y$  se tiene

$$\zeta(\lambda \Delta y, t) = G(\lambda \Delta y - ct) + F(\lambda \Delta y + ct)$$

por la ecuación 6.17 (para  $\Delta y = \Delta x$ ),

$$\zeta(\lambda \Delta y, t) = G(c\Delta t - ct) + F(\lambda \Delta y + ct)$$

por lo que

$$F(\lambda \Delta y + ct) = -G(0 - ct + c\Delta t) + \zeta(\lambda \Delta y, t) \quad (6.42)$$

Según la ecuación 6.40 para el tiempo  $t + \Delta t$ , la elevación del agua es

$$\zeta(0, t + \Delta t) = G(0 - ct - c\Delta t) + F(0 + ct + c\Delta t)$$

por la ecuación 6.17 (siendo  $\Delta y = \Delta x$ ),

$$\zeta(0, t + \Delta t) = G(0 - ct - c\Delta t) + F(0 + ct + \lambda \Delta y)$$

al sustituir la ecuación 6.42 se obtiene

$$\zeta(0, t + \Delta t) = G(0 - ct - c\Delta t) - G(0 - ct + c\Delta t) + \zeta(\lambda \Delta y, t)$$

Sí se toma en cuenta a la ecuación 6.41 se obtiene

$$\zeta(0, t + \Delta t) = a \cos[k_x x - \sigma(t + \Delta t)] - a \cos[k_x x - \sigma(t - \Delta t)] + \zeta(\lambda \Delta y, t) \quad (6.43)$$

En la expresión anterior queda considerado que el oleaje reflejado saldrá de la región en estudio. Esto es de importancia porque se evita que en esta frontera se refleje y con esto altere al oleaje incidente. La ecuación se emplea dando a  $x$  los valores de las abscisas de los puntos de cruce de la malla sobre el eje  $x$ .

### 6.2.3 Interpolaciones

En las expresiones obtenidas a partir de las condiciones de frontera (ecuaciones 6.26, 6.34 y 6.43) aparece el término  $\zeta(L - \lambda \Delta x, t)$  o  $\zeta(\lambda \Delta x, t)$ . Para valores no enteros de  $\lambda$  es necesario estimar término por término.

#### a) Término $\zeta(L - \lambda \Delta x, t)$

En la figura 6.5 se muestra la variación de la superficie libre del mar sobre un fondo de profundidad constante.

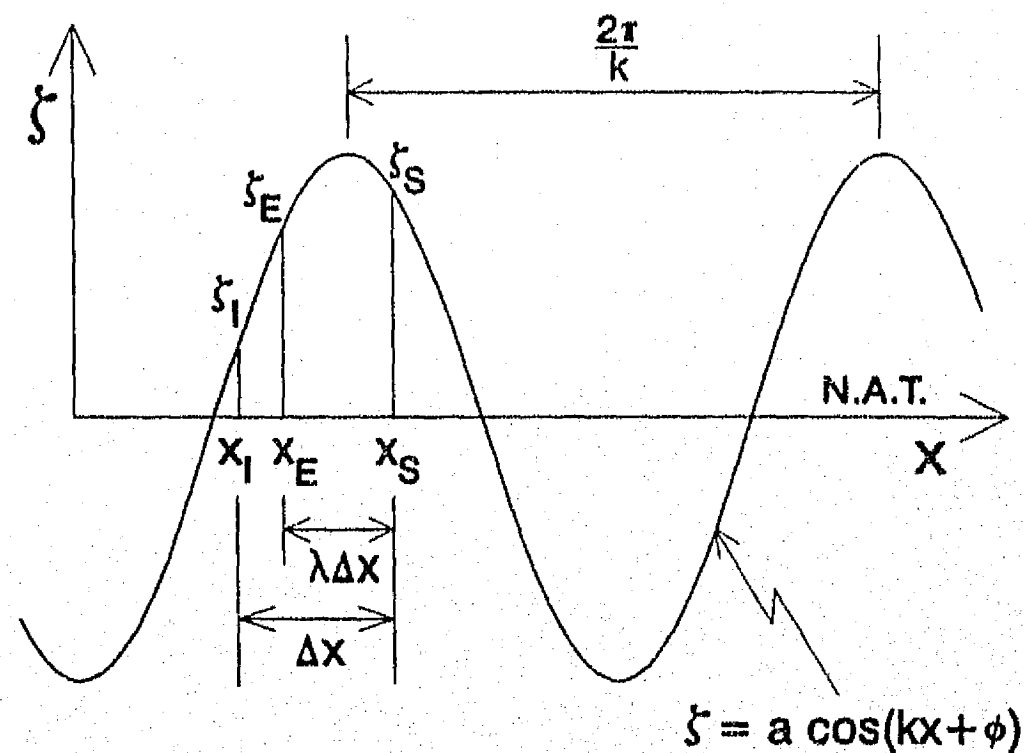


Figura 6.5 Elevación de la superficie libre del mar.

De acuerdo con la figura 6.5,

$$x_E = x_S - \lambda \Delta x$$

$$x_I = x_S - \Delta x$$

$$\zeta_S = a \cos(kx_S + \phi) \quad (6.44)$$

$$\zeta_I = a \cos[k(x_S - \Delta x) + \phi] = a \cos[kx_S + \phi - k\Delta x]$$

$$\zeta_E = a \cos[k(x_S - \lambda \Delta x) + \phi] = a \cos[kx_S + \phi - k\lambda \Delta x]$$

Empleando la identidad  $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \text{sen } A \text{ sen } B$ , las dos últimas expresiones se pueden escribir de la manera siguiente:

$$\zeta_I = a \cos(kx_S + \phi) \cos(k\Delta x) + a \operatorname{sen}(kx_S + \phi) \operatorname{sen}(k\Delta x) \quad (6.45)$$

$$\zeta_E = a \cos(kx_S + \phi) \cos(k\lambda \Delta x) + a \operatorname{sen}(kx_S + \phi) \operatorname{sen}(k\lambda \Delta x) \quad (6.46)$$

tomando en cuenta a la ecuación 6.44 en las igualdades anteriores,

$$\zeta_I = \zeta_S \cos(k\Delta x) + a \operatorname{sen}(kx_S + \phi) \operatorname{sen}(k\Delta x) \quad (6.47)$$

$$\zeta_E = \zeta_S \cos(k\lambda \Delta x) + a \operatorname{sen}(kx_S + \phi) \operatorname{sen}(k\lambda \Delta x) \quad (6.48)$$

de la ecuación 6.47 se tiene que

$$a \operatorname{sen}(kx_S + \phi) = \frac{\zeta_I - \zeta_S \cos(k\Delta x)}{\operatorname{sen}(k\Delta x)} \quad (6.49)$$

al sustituir la ecuación 6.47 en la 6.48 se obtiene

$$\zeta_E = \zeta_S \cos(k\lambda \Delta x) + [\zeta_I - \zeta_S \cos(k\Delta x)] \left[ \frac{\operatorname{sen}(k\lambda \Delta x)}{\operatorname{sen}(k\Delta x)} \right] \quad (6.50)$$

de donde

$$\zeta_E = \zeta_S \left[ \frac{\cos(k\lambda \Delta x) \operatorname{sen}(k\Delta x) - \cos(k\Delta x) \operatorname{sen}(k\lambda \Delta x)}{\operatorname{sen}(k\Delta x)} \right] \left[ \frac{\operatorname{sen}(k\lambda \Delta x)}{\operatorname{sen}(k\Delta x)} \right]$$

Si se considera la identidad  $\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen} A \cos B + \operatorname{sen} B \cos A$  se llega a

$$\zeta_E = \zeta_S \left\{ \frac{\operatorname{sen}[k\Delta x(1-\lambda)]}{\operatorname{sen}(k\Delta x)} \right\} + \zeta_I \left\{ \frac{\operatorname{sen}(k\lambda \Delta x)}{\operatorname{sen}(k\Delta x)} \right\} \quad (6.51)$$

b) Término  $\zeta(\lambda \Delta x, t)$

Procediendo de forma similar, para  $x_I = 0$ ,

$$x_E = x_I + \lambda \Delta x = \lambda \Delta x$$

$$x_S = x_I + \Delta x = \Delta x$$

$$\zeta_I = a \cos(kx_I + \phi) = a \cos(\phi)$$

$$\zeta_E = a \cos(kx_E + \phi) = a \cos(k\lambda \Delta x + \phi)$$

$$\zeta_S = a \cos(kx_S + \phi) = a \cos(k\Delta x + \phi)$$

se obtiene

$$\zeta_E = \zeta_I \left\{ \frac{\text{sen}[k\Delta x(1-\lambda)]}{\text{sen}(k\Delta x)} \right\} + \zeta_S \left\{ \frac{\text{sen}(k\lambda \Delta x)}{\text{sen}(k\Delta x)} \right\} \quad (6.52)$$

de esta ecuación se verifica fácilmente que para  $\lambda = 0$ ,  $\zeta_E = \zeta_I$  y que para  $\lambda = 1$ ,  $\zeta_E = \zeta_S$ .

### 6.3 Método propuesto para calcular la refracción-difracción-reflexión

De acuerdo con lo anterior y con base en el caso mostrado en la figura 6.4, para obtener las elevaciones de la superficie libre del mar ( $\zeta$ ), las razones de flujo en las direcciones  $x$ ,  $y$  y ( $Q_x$  y  $Q_y$ ) se procede de la manera siguiente:

- 1) Se hace  $p = 0$ .
- 2) Se considera  $j = 2$ .
- 3) Para  $i = 1$  e  $i = M$  se obtiene  $\zeta^{p+1}$  a partir de las condiciones de frontera.
- 4) Se forma el sistema tridiagonal de ecuaciones de  $Q_x$  a partir de las ecuaciones 6.6.
- 5) Al resolver el sistema de ecuaciones se encuentran los valores  $Q_x^{p+1}$ .
- 6) Si  $j$  es igual a  $N - 1$  se continúa con el paso 7; de otro modo, se incrementa en uno a  $j$  y se va al paso 3.
- 7) Se considera  $i = 2$ .
- 8) Para  $j = 1$  y  $j = N$  se obtiene  $\zeta^{p+1}$  a partir de las condiciones de frontera.

- 9) Por medio de las ecuaciones 6.7 se forma el sistema tridiagonal de ecuaciones de  $Q_y$ .
- 10) Al resolver el sistema de ecuaciones se obtienen los valores  $Q_y^{p+1}$ .
- 11) Si  $i$  es igual a  $M-1$  se continúa con el paso 11, de otro modo, se incrementa en uno a  $i$  y se va al paso 8.
- 12) Para  $i=2$  a  $M-1$  y  $j=2$  a  $N-1$  se plantea la ecuación 6.11 con lo cual se forma un sistema de cinco diagonales en términos de  $\zeta^{p+1}$ .
- 13) Al resolver el sistema de ecuaciones se obtienen los valores de  $\zeta^{p+1}$ .
- 14) Si  $p$  es igual a  $P$  (número de etapas que se desea calcular), termina el proceso; de otro modo, se incrementa en 1 el valor de  $p$  y se va al paso 2.

La dirección del oleaje se estima en función de  $Q_x^{p+1}$  y  $Q_y^{p+1}$ .

#### 6.4 Ejemplos de aplicación

##### Ejemplo 6.1 Fondo horizontal.

Un oleaje de altura 1m y período 10s se propaga en una zona con fondo horizontal a una profundidad de 6.52m. En la dirección de avance, a 160m de la sección donde inciden, se encuentra un muro vertical que refleja el oleaje. Para valores del coeficiente de reflexión de 1, 0.5 y 0, dibujar el perfil de la superficie libre del mar.

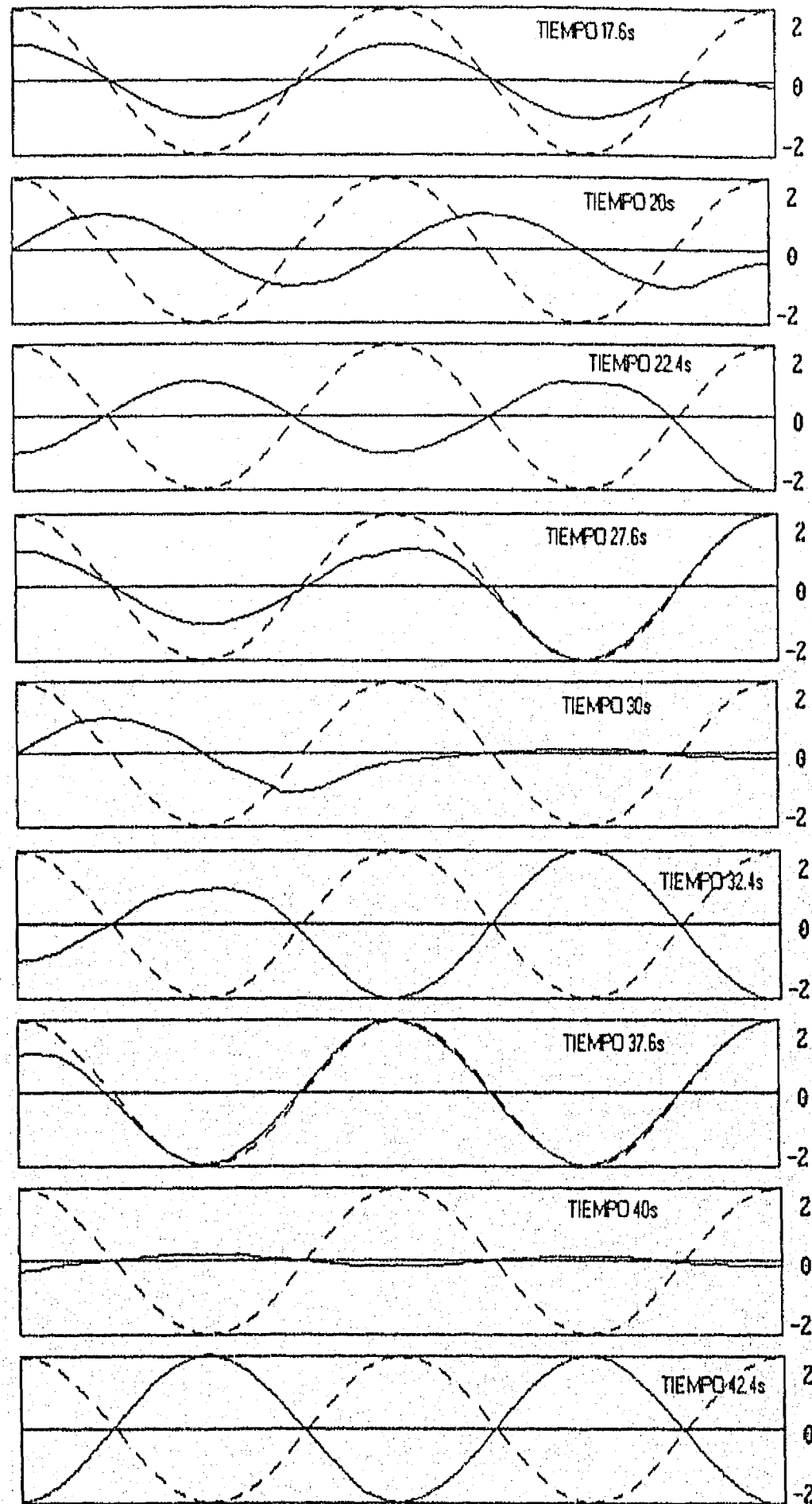
*Solución:*

Se escoge el valor del intervalo de longitud ( $\Delta x$ ) igual a 4m y el de tiempo ( $\Delta t$ ) igual a 0.4s, por lo que se tienen 41 secciones transversales.

El método numérico propuesto se aplicó por medio de un programa de cómputo. De las gráficas que muestra la pantalla del monitor de la computadora donde se corre el programa se obtuvieron las figuras presentadas a continuación. El muro vertical se encuentra en la parte derecha de estas figuras.

a) Coeficiente de reflexión  $K_r = 1.0$

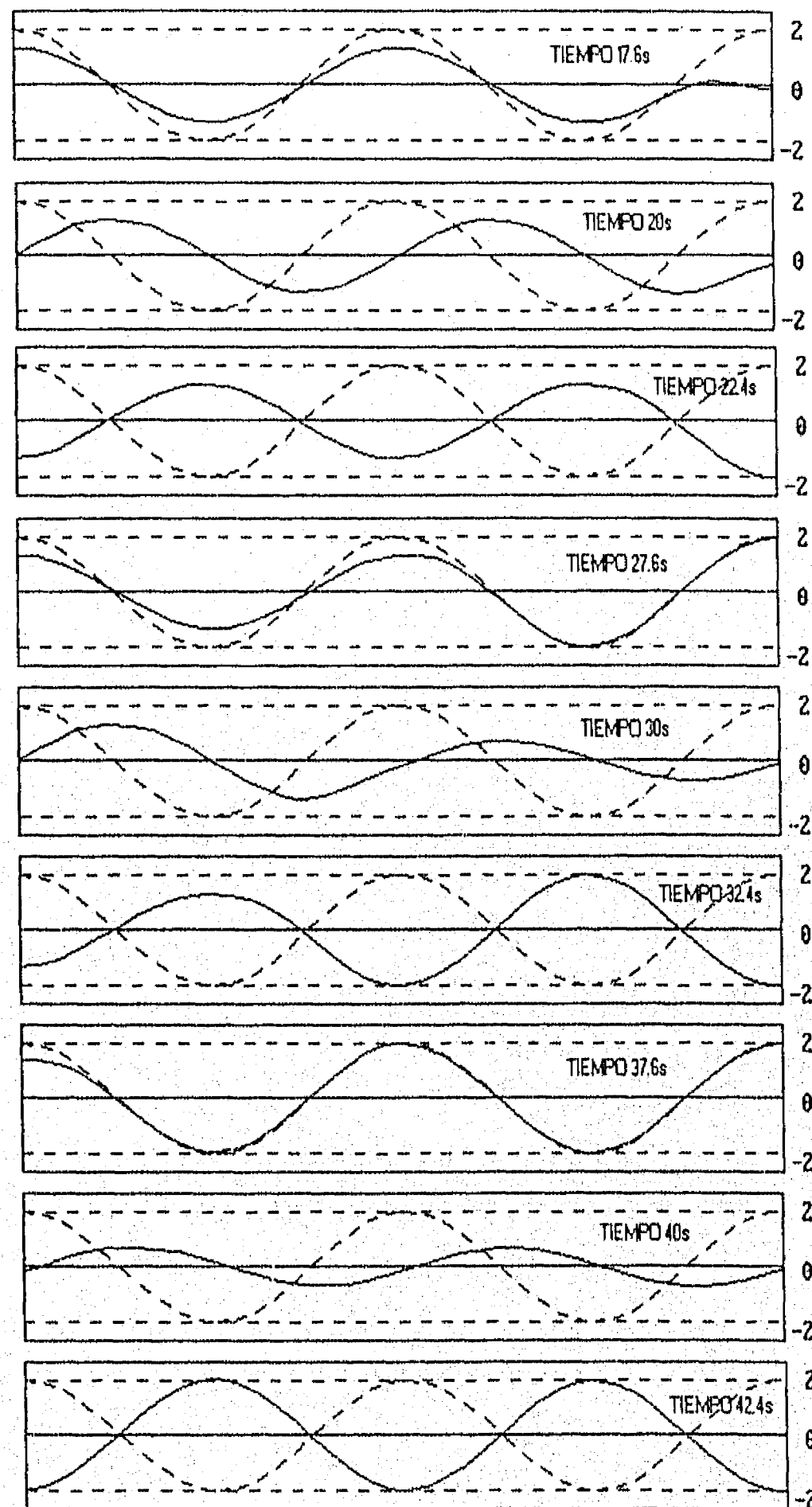
Corresponde a las figuras 6.6. Se nota que para el tiempo  $t = 42.4\text{s}$  se alcanza una onda estacionaria pura a partir de la onda progresiva incidente; que sobre el muro la altura de la ola es del doble de la incidente.



Figuras 6.6 Elevaciones de la superficie libre del agua para un coeficiente de reflexión igual a 1 (la línea punteada corresponde a la solución teórica).

b) Coeficiente de reflexión  $K_L = 0.5$

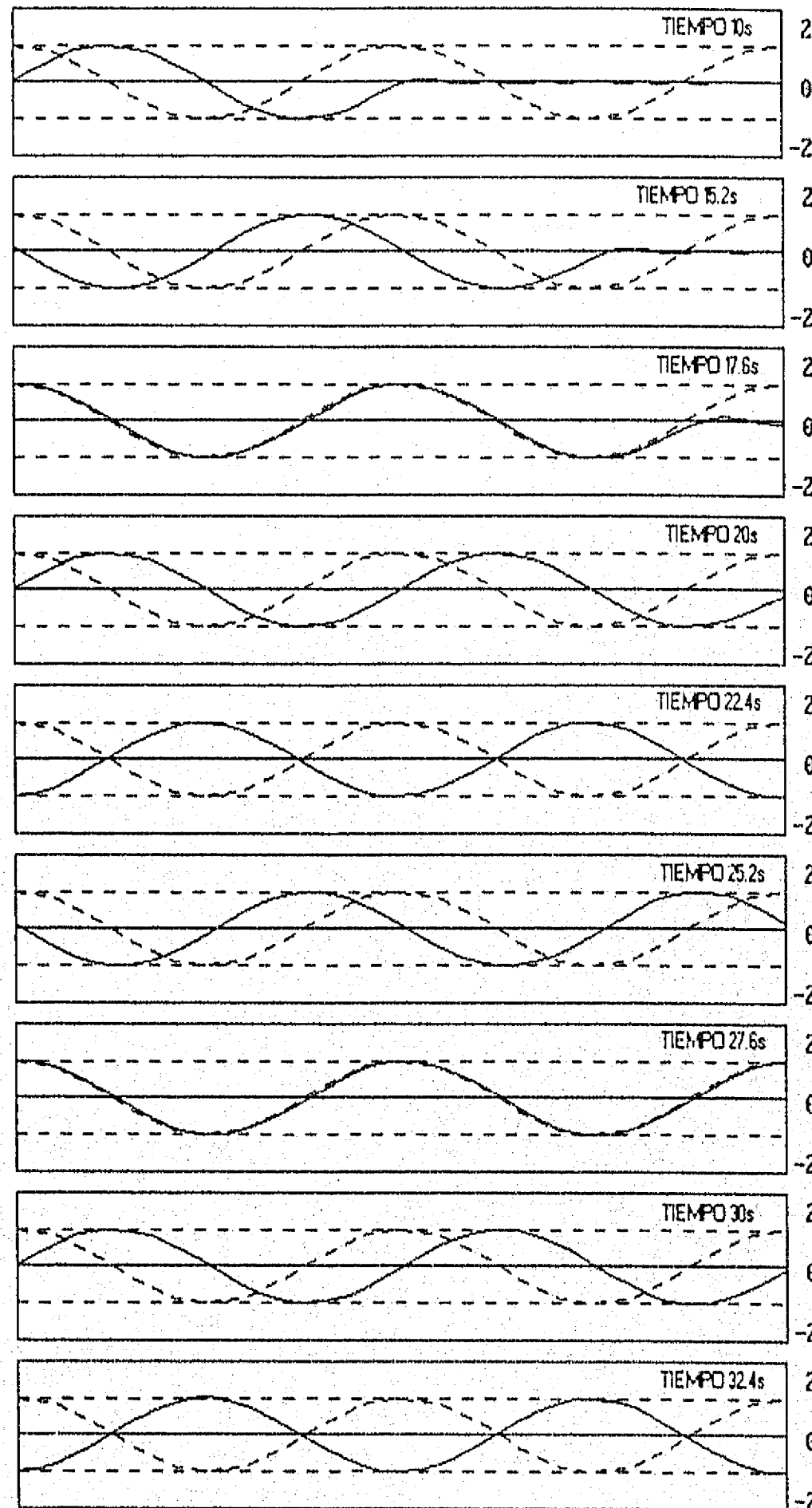
Para este caso se dibujaron las figuras 6.7. Se aprecia una onda estacionaria desde el tiempo  $t=42.4s$  con altura de 1.5m (es igual a 1.5 veces la altura de la incidente).



Figuras 6.7 Elevaciones de la superficie libre del agua para un coeficiente de reflexión igual a 0.5.

c) Coeficiente de reflexión  $K_L = 0.0$

Se obtuvieron las figuras 6.8. Se aprecia que el oleaje que se propaga es igual al incidente ya que no existe reflexión.



Figuras 6.8 Elevaciones de la superficie libre del agua para un coeficiente de reflexión igual a 0.



### Ejemplo 6.2 Fondo inclinado.

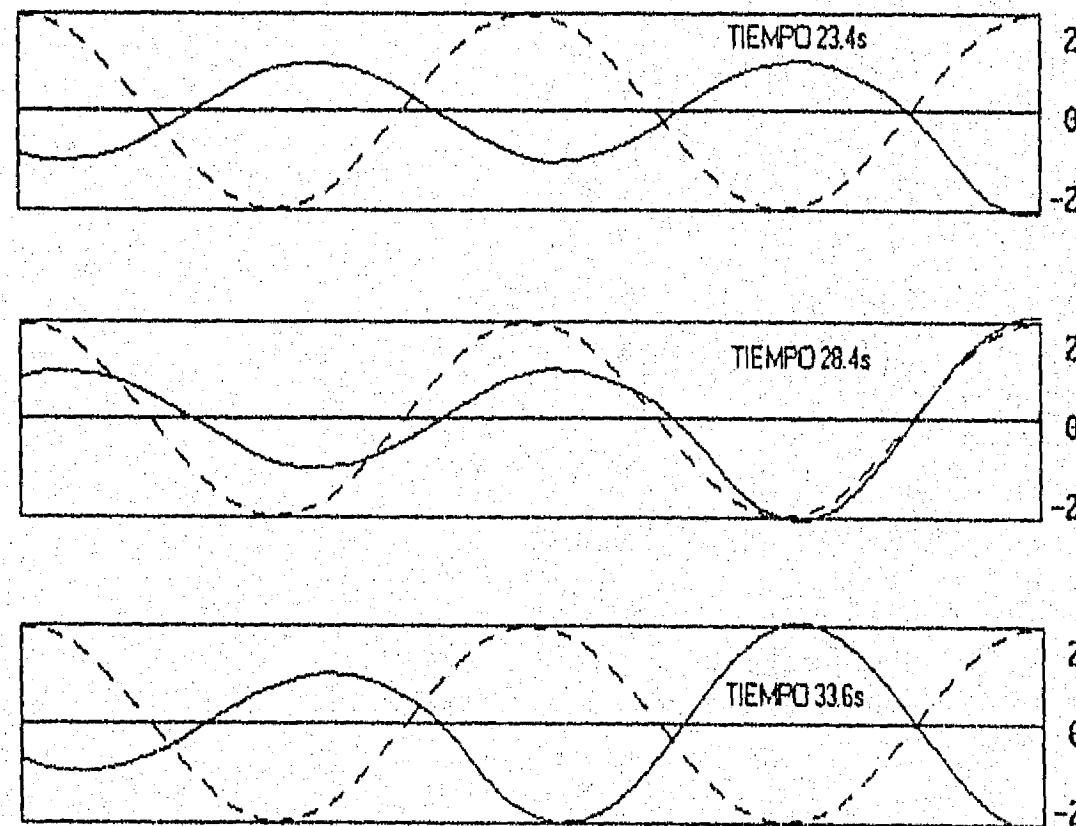
En una región donde el fondo marino tiene una pendiente de 0.01 en la dirección norte se propaga un oleaje de 1m de amplitud y período 10s. Las olas inciden en dirección norte en una sección donde la profundidad es 7.2m. A una distancia de 160m de la sección descrita existe un muro vertical con un coeficiente de reflexión igual a 1m. Obtener el patrón del oleaje en varios tiempos.

*Solución:*

Se asignaron los valores de 4m y 2s a los intervalos de longitud ( $\Delta x$ ) y de tiempo ( $\Delta t$ ) respectivamente. Se tienen 41 secciones transversales. Con el método numérico se encontraron las elevaciones de la superficie libre del mar que permitieron dibujar el oleaje mostrado en las figuras. En ellas aparece con línea punteada la superficie libre del mar en un cierto tiempo para contar con una referencia de comparación.

a) *Coeficiente de refracción  $K_t = 1.0$*

De la comparación con la onda para fondo horizontal (línea punteada) se aprecia que debido a la pendiente de fondo no se alcanza la onda estacionaria.

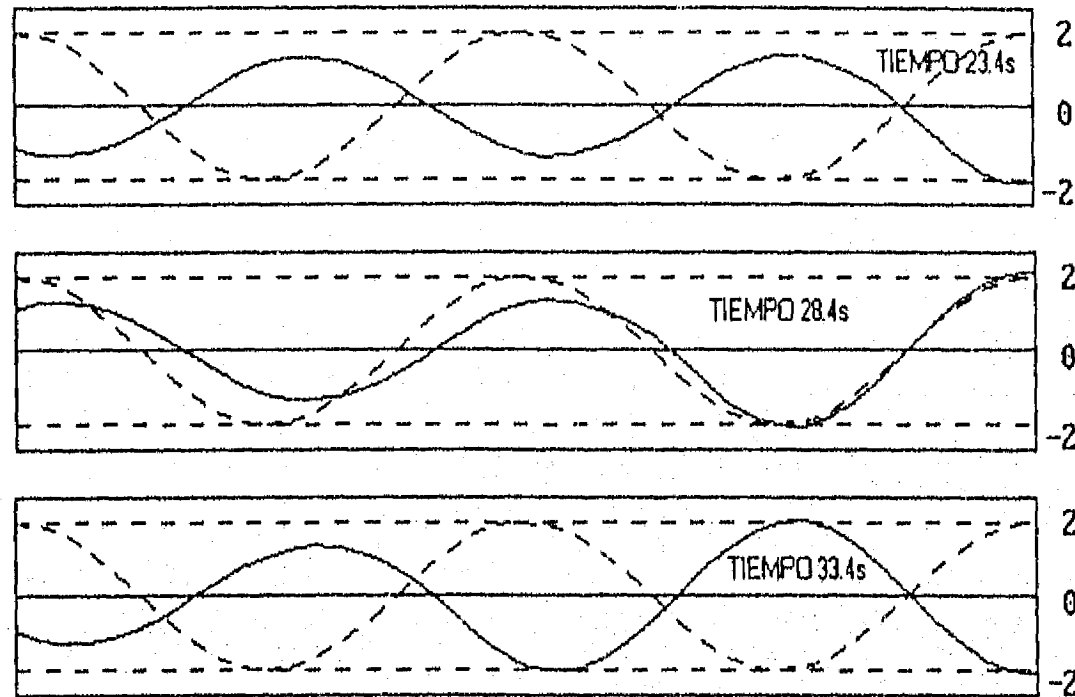


*Figuras 6.9 Elevaciones de la superficie libre del agua para un coeficiente de reflexión igual a 1.*

La longitud de la onda es menor cerca del muro porque la profundidad es más baja.

b) Coeficiente de refracción  $K_t = 0.5$

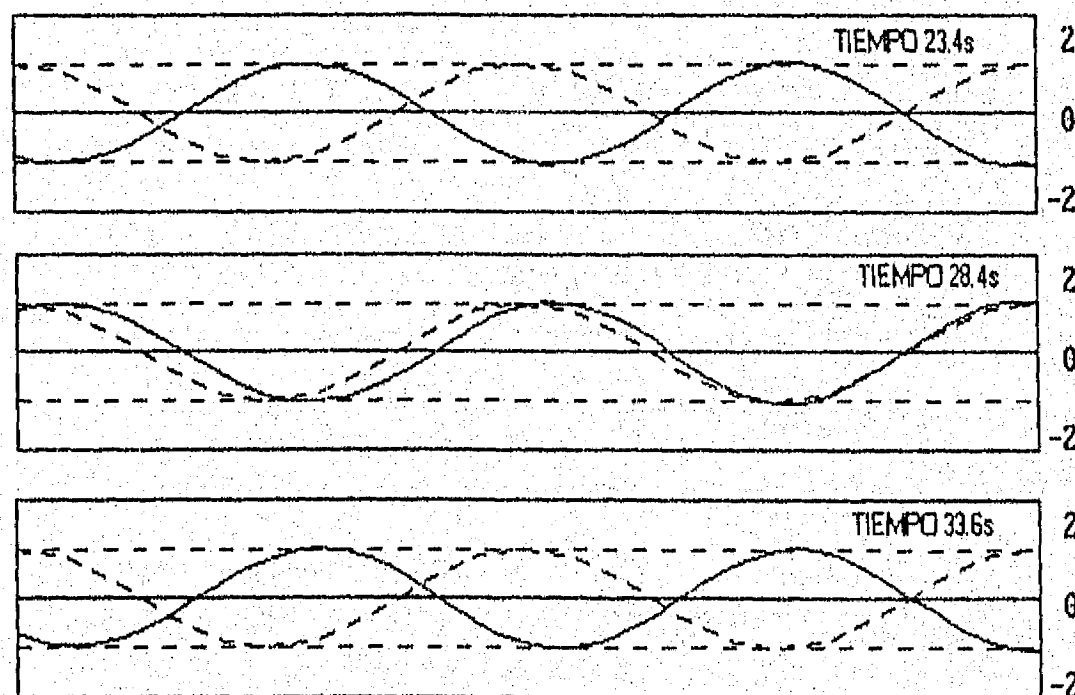
Se aprecia que la magnitud tampoco es constante y sobre el muro alcanza el valor más grande. La longitud de la ola disminuye cerca de la pared.



Figuras 6.10 Elevaciones de la superficie libre del agua para un coeficiente de reflexión igual a 0.5.

c) Coeficiente de refracción  $K_t = 0$

Se observa que la onda presenta la misma amplitud pero con longitud de la ola distinta.



Figuras 6.11 Elevaciones de la superficie libre del agua para un coeficiente de reflexión igual a 0.

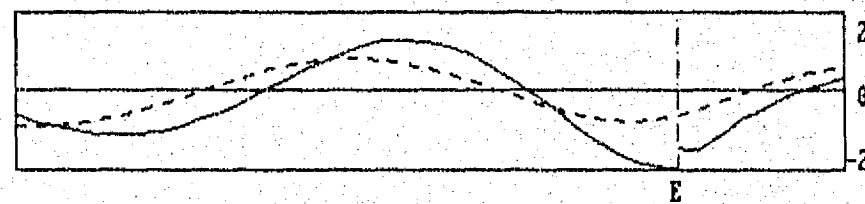
### Ejemplo 6.3 Propagación de las olas en dos dimensiones horizontales.

Calcular la propagación del oleaje sobre una zona donde existe una escollera que tiene un coeficiente de reflexión 1. El oleaje a una profundidad de 20m tiene una dirección de 90°, altura de la ola 1m y período 8s. Dibujar los perfiles de las elevaciones de agua en las líneas  $l=5$  e  $l=8$ .

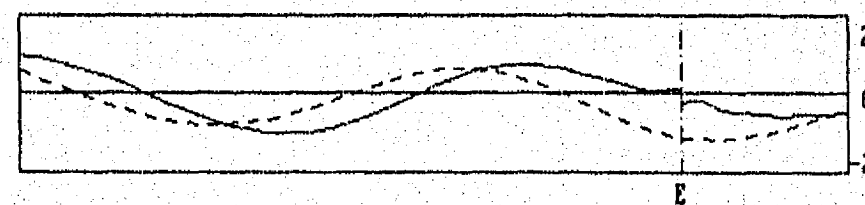
La zona tiene una pendiente de 0.1, una longitud de 160m y un ancho de 80m. La escollera se ubica paralela a la línea de costa a la profundidad de 6.8m.

En las figuras 6.12 se muestran los perfiles de las ondas en tres tiempos distintos en dos líneas perpendiculares a la escollera. Con línea llena ( $l=5$ ) aparece el oleaje que incide sobre la escollera (marcada con línea de ejes en la posición E). También se muestra la envolvente de las elevaciones máximas para determinar el producto de los coeficientes de refracción, difracción y reflexión y los ángulos de la dirección del oleaje. Con esta información se valúan los esfuerzos de radiación que se usan en el modelo de corrientes.

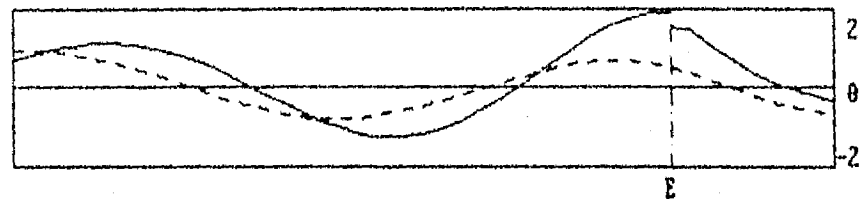
Se notan elevaciones menores en la zona protegida por la escollera (marcadas con la letra E) y que los niveles de agua sobre la escollera son distintos en la zona de mar abierto con respecto al lado cercano a la costa.



TIEMPO 43.9 s  
 ENVOLVENTE DE ELEVACIONES DEL AGUA (m)  
 0.49 0.66 0.84 0.90 1.00 1.14 1.17 1.10 1.10 1.10 1.15 1.11 1.07  
 1.05 1.02 1.04 1.10 1.20 1.26 1.28 1.25 1.13 0.91 0.64 0.29 0.00 0.  
 39 0.83 1.23 1.60 1.80 2.07 2.15 1.77 1.30 1.11 0.90 0.73 0.60 0.51  
 0.50  
 ANGULOS  
 53.08 54.81 56.56 58.22 60.56 50.97 52.12 52.99 54.45 56.89 59.13 61.60 63.74 6  
 6.27 68.27 70.60 73.27 74.00 55.11 54.09 55.66 58.77 62.97 66.58 70.61 74.20 70.  
 28 82.05-89.95-79.85-10.46 46.67 82.26-85.14-75.50-75.05-72.35-74.92-82.94



TIEMPO 46.3 s  
 ENVOLVENTE DE ELEVACIONES DEL AGUA (m)  
 0.97 0.91 0.84 0.90 1.00 1.14 1.17 1.10 1.10 1.10 1.15 1.11 1.07  
 1.05 1.02 1.04 1.10 1.20 1.26 1.34 1.37 1.36 1.25 1.11 0.94 0.74 0.  
 67 0.83 1.23 1.60 1.80 2.07 2.15 1.77 1.30 1.11 0.90 0.73 0.60 0.51  
 0.50  
 ANGULOS  
 53.08 54.81 56.56 58.22 60.08 50.97 52.12 52.99 54.45 56.89 59.13 61.60 63.74 6  
 6.27 68.27 70.60 73.27 74.00 55.11 54.09 55.66 58.77 62.97 66.58 70.61 74.20 70.  
 28 82.05-89.95-79.85-10.46 46.67 82.26-85.14-75.50-75.05-72.35-74.92 69.33



TIEMPO 47.8 s

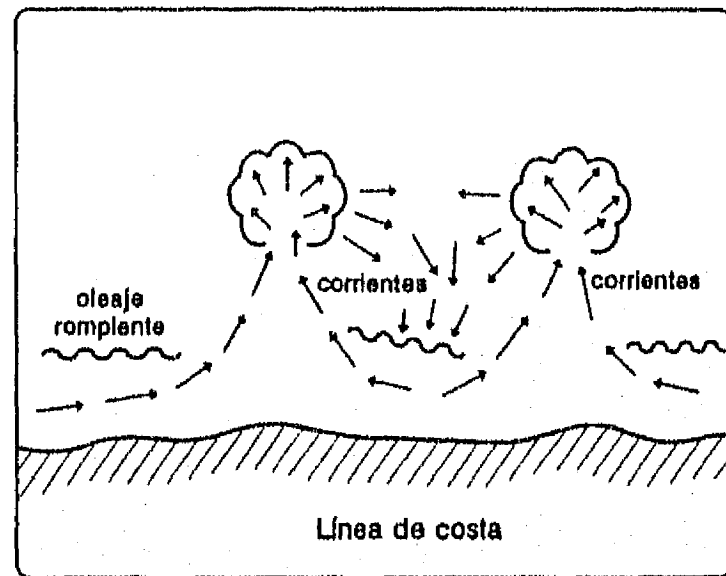
ENVELOPTE DE ELEVACIONES DEL AGUA (m)

1.03	1.05	1.07	1.10	1.13	1.14	1.17	1.18	1.18	1.10	1.15	1.11	1.07
1.05	1.02	1.04	1.10	1.20	1.26	1.34	1.37	1.36	1.25	1.11	0.94	0.74
0.72	0.92	1.25	1.68	1.88	2.07	2.15	1.77	1.30	1.11	0.90	0.73	0.60
0.51												

ANGULOS

53.00	54.81	56.56	58.22	60.00	50.97	52.12	52.99	54.45	56.89	59.13	61.68	63.74
66.27	68.27	70.60	73.27	74.88	55.11	54.89	55.66	58.77	62.97	66.58	70.61	74.28
78.20	82.05	89.95	79.85	10.46	46.67	82.26	85.14	75.50	75.05	72.35	74.92	69.33

Figuras 6.12 Elevaciones de la superficie libre del agua y valores de las elevaciones máximas y ángulos que forman las crestas de las olas con respecto a la horizontal.



## 7. CORRIENTES INDUCIDAS POR EL OLAJE

En este capítulo se deducen las ecuaciones fundamentales de las corrientes inducidas por el oleaje. La velocidad del flujo incluye tanto a las velocidades orbitales de las partículas de agua (debidas al oleaje) como a la velocidad media resultado del cambio del nivel del mar.

En las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento están presentes los esfuerzos de radiación, los cuales son obtenidos a partir del patrón del oleaje calculado previamente tomando en cuenta a la refracción, difracción, reflexión y rompiente de la ola.

En los desarrollos siguientes se integran las ecuaciones principales respecto a la profundidad y se toman valores promedio en el tiempo en un período de ola.

Aunque el oleaje de la teoría lineal no origina transporte de masa. Sin embargo, desarrolla una variación espacial de la cantidad de movimiento que da lugar a corrientes y cambios en la elevación media del mar.

### 7.1 Ecuaciones de corrientes

Para encontrar las ecuaciones fundamentales de las corrientes se considera la integración respecto a la profundidad de las ecuaciones de conservación de masa (ecuación 2.15) y de cantidad de movimiento (ecuación 2.26). Estas ecuaciones son

$$(\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) q + (\rho \mathbf{v} \cdot \nabla) q - D(\rho q) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho q) = 0 \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \Omega = 0 \quad (7.2)$$

Para llevar a cabo la integración respecto a la vertical se considera la regla de Leibnitz (Protter y Morrey, 1964) para la derivación bajo el signo de la integral, la cual establece que para una función  $f(z, \alpha)$  y  $-h \leq \alpha \leq \zeta$  se cumple

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{-h}^{\zeta} f dz = \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial f}{\partial \alpha} dz + f(\zeta, \alpha) \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} - f(-h, \alpha) \frac{\partial h}{\partial \alpha} \quad (7.3)$$

### 7.1.1 Ecuación de conservación de masa

La integración con respecto a la profundidad de la ecuación de continuidad (ecuación 7.1) queda

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial \rho}{\partial t} dz + \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial x} \rho u dz + \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial y} \rho v dz + \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial z} \rho w dz = 0$$

al considerar la integral del cuarto sumando, se tiene que

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial \rho}{\partial t} dz + \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial x} \rho u dz + \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial y} \rho v dz + \rho w_{z=\zeta} - \rho w_{z=-h} = 0 \quad (7.4)$$

cuando se emplea la regla de Leibnitz (ecuación 7.3) para cada integral de la expresión anterior se encuentra

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial \rho}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\zeta} \rho dz - \rho \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \rho(\zeta+h) - \rho \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (7.5)$$

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial x} \rho u dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} \rho u dz - \rho u_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \rho u_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (7.6)$$

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial y} \rho v dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\zeta} \rho v dz - \rho v_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \rho v_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial y} \quad (7.7)$$

Por otra parte, tomando en cuenta a las condiciones cinemáticas para el fondo y la superficie libre descritas en el capítulo 3 (ecuaciones 3.10' y 3.12') se obtiene que

$$w_{z=-h} = -u_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial x} - v_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial y} \quad (7.8)$$

$$w_{z=-\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u_{z=-\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v_{z=-\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad (7.9)$$

Después de sustituir las ecuaciones 7.5 a 7.9 en la 7.4 se llega a

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\zeta+h) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} \rho u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\zeta} \rho v dz = 0$$

Como es de interés el valor promedio en el tiempo, se considera dicho promedio para cada término de la expresión anterior, por lo que

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t} \rho(\zeta+h)} + \overline{\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} \rho u dz} + \overline{\frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\zeta} \rho v dz} = 0 \quad (7.10)$$

Ahora, si se propone que las velocidades  $u$  y  $v$  representen a una velocidad media de flujo ( $U$  ó  $V$ ) más una debida al oleaje ( $u'$  ó  $v'$ ), se tiene que

$$u = U + u' \quad (7.11)$$

$$v = V + v' \quad (7.12)$$

al tomar en cuenta las ecuaciones 7.11 y 7.12 en la 7.10 se puede escribir

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t} \rho(\zeta+h)} + \overline{\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} \rho (U+u') dz} + \overline{\frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\zeta} \rho (V+v') dz} = 0 \quad (7.13)$$

Para obtener los valores promedio también se emplea la regla de Leibnitz, salvo que ahora las derivadas de los límites de integración son nulas (ya que la del período  $T$  respecto a  $t$  es cero), y por tanto, en este caso equivale a intercambiar los operadores derivada e integral.

Para el primer sumando se tiene

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial}{\partial t} \rho(\zeta+h)} &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} \rho(\zeta+h) dt = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{T} \int_0^T \rho(\zeta+h) dt = \frac{\partial}{\partial t} \rho(\bar{\zeta}+h) \end{aligned} \quad (7.14)$$

Obsérvese que, debido a la corriente y al oleaje (ecuación 7.13), el promedio temporal de  $\bar{\zeta}$  no es nulo.

Por otra parte, se tiene que

$$\begin{aligned} \overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho (U+u') dz} &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-h}^{\zeta} \rho (U+u') dz dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \rho U(\zeta+h) dt + \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-h}^{\zeta} \rho u' dz dt \end{aligned}$$

de modo que

$$\overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho (U+u') dz} = \rho U(\bar{\zeta} + h) + \overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho u' dz} \quad (7.15)$$

de igual forma en la dirección del eje y se encuentra

$$\overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho (V+v') dz} = \rho V(\bar{\zeta} + h) + \overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho v' dz} \quad (7.16)$$

Las ecuaciones 7.15 y 7.16 permiten calcular el flujo de masa por unidad de ancho tanto en la dirección  $x$  como en la  $y$ . Con base en la expresión 7.15 se establece que

$$\tilde{M}_x = \hat{M}_x + M_x \quad (7.17)$$

siendo

$$\tilde{M}_x = \overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho (U+u') dz} \quad (7.18)$$

$$\hat{M}_x = \overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho U dz} = \rho U(\bar{\zeta} + h) \quad (7.19)$$

$$M_x = \overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho u' dz} \quad (7.20)$$

de manera similar, a partir de 7.16 se tiene

$$\tilde{M}_y = \hat{M}_y + M_y \quad (7.21)$$

siendo

$$\tilde{M}_y = \overline{\int_{-h}^{\zeta} (\rho V + v') dz} \quad (7.22)$$

$$\hat{M}_y = \overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho V dz} = \rho V(\bar{\zeta} + h) \quad (7.23)$$



$$M_y = \int_{-h}^{\zeta} \rho v' dz \quad (7.24)$$

al sustituir las ecuaciones 7.14, 7.15 y 7.16 en la 7.13 se muestra que

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho (\bar{\zeta} + h) + \frac{\partial}{\partial x} (\hat{M}_x + M_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\hat{M}_y + M_y) = 0 \quad (7.25)$$

la cual corresponde a la ecuación de conservación de la masa integrada en la vertical.

Cuando se expresa al valor medio con la profundidad de  $(U + u')$  y  $(V + v')$  como  $\tilde{U}$  y  $\tilde{V}$  respectivamente, de las ecuaciones 7.18 y 7.21 se tiene

$$\tilde{M}_x = \rho \tilde{U} (\bar{\zeta} + h) \quad (7.26)$$

$$\tilde{M}_y = \rho \tilde{V} (\bar{\zeta} + h) \quad (7.27)$$

Al sustituir las ecuaciones 7.19 y 7.23 en las expresiones 7.17 y 7.18 y después de ordenar términos se encuentra que

$$\tilde{U} = U + M_x / [\rho (\bar{\zeta} + h)] \quad (7.28)$$

$$\tilde{V} = V + M_y / [\rho (\bar{\zeta} + h)] \quad (7.29)$$

Las literales  $M$  representan la masa que atraviesa una sección transversal de ancho unitario en la unidad de tiempo ó bien, corresponden a un flujo de masa por unidad de ancho.

### 7.1.2 Ecuación de conservación de cantidad de movimiento

Las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento (ecuación 7.2) en las direcciones  $x$  y  $y$  para una función potencial  $\Omega = -gz$  son

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (7.30)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (7.31)$$

a) Cambio en la forma de escribir las ecuaciones 7.30 y 7.31

La ecuación 7.30 puede ser escrita de otra forma cuando se toma en cuenta la igualdad siguiente

$$\frac{\partial}{\partial x} u^2 + \frac{\partial}{\partial y} (uv) + \frac{\partial}{\partial z} (uw) = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + u \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

De acuerdo con la ecuación de continuidad (ecuación 7.1) el último término es nulo por lo que

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} u^2 + \frac{\partial}{\partial y} (uv) + \frac{\partial}{\partial z} (uw) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Al multiplicar por  $\rho$  y sustituir esta última expresión en la ecuación 7.30 resulta

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho uv) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho uw) = 0 \quad (7.32)$$

procediendo de manera similar, para la ecuación 7.29 se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v + \frac{\partial}{\partial y} (\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^2) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho vw) = 0 \quad (7.33)$$

El primer sumando de las ecuaciones 7.32 y 7.33 representa al cambio en el tiempo de la cantidad de movimiento en las direcciones  $x$  y  $y$  en un volumen unitario.

b) Integración en la vertical de la ecuación 7.32

Si se integra la ecuación 7.32 con respecto a  $z$  se obtiene

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial t} \rho u dz = \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2) dz +$$

$$+ \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial y} (\rho u v) - \rho u_{z=\zeta} w_{z=\zeta} - \rho u_{z=-h} w_{z=-h} = 0 \quad (7.34)$$

Aplicando la regla de Leibnitz (ecuación 7.3) a las tres integrales resulta

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\zeta} \rho u dz - \rho u_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \rho u_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} (p + \rho u^2) dz - p_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial x} - \\ & - \rho u_{z=\zeta}^2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \rho u_{z=-h}^2 \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\zeta} \rho u v dz - \rho (uv)_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \\ & - \rho (uv)_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial y} + \rho u_{z=\zeta} w_{z=\zeta} - \rho u_{z=-h} w_{z=-h} = 0 \end{aligned} \quad (7.35)$$

la expresión anterior se puede escribir como

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\zeta} \rho u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} (p + \rho u^2) dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\zeta} (\rho u v) dz - p_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial x} + \left( -\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \right. \\ & \left. - u_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - v_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} w_{z=\zeta} \right) \rho u_{z=\zeta} + \left( -u_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial x} - v_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \rho u_{z=-h} = 0 \end{aligned}$$

Debido a las condiciones cinemáticas para el fondo y la superficie libre (ecuaciones 3.10' y 3.12') los dos últimos términos son nulos, por lo que

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\zeta} \rho u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} (p + \rho u^2) dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\zeta} (\rho u v) dz - p_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial x} = 0} \quad (7.36)$$

El primer sumando de esta expresión corresponde al cambio en el tiempo de la cantidad de movimiento unitario en la dirección  $x$  entregada en la vertical.

c) Valor promedio en el tiempo de la ecuación 7.36

El valor promedio en el tiempo de la presión en el fondo se obtiene mediante de la expresión siguiente

$$\bar{p}_{z=-h} = \rho g(\bar{\zeta} + h) \quad (7.37)$$

como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \rho g \bar{\zeta} + h^2 \right) &= \rho g (\bar{\zeta} + h) \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\zeta} + h) \\ &= \rho g (\bar{\zeta} + h) \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} + \rho g (\bar{\zeta} + h) \frac{\partial h}{\partial x} \end{aligned}$$

se tiene al despejar el último sumando

$$\rho g (\bar{\zeta} + h) \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \rho g (\bar{\zeta} + h)^2 \right) - \rho g (\bar{\zeta} + h) \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x}$$

de modo que

$$\bar{p}_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \rho g (\bar{\zeta} + h)^2 \right) - \rho g (\bar{\zeta} + h) \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} \quad (7.38)$$

Si se toma el valor promedio en el tiempo de los primeros sumandos de 7.36 la ecuación y se considera a la ecuación 7.38 se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho u dz} + \frac{\partial}{\partial x} \overline{\int_{-h}^{\zeta} p dz} + \frac{\partial}{\partial x} \overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho u^2 dz} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\int_{-h}^{\zeta} (\rho uv) dz} - \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \rho g (\bar{\zeta} + h)^2 \right) + \rho g (\bar{\zeta} + h) \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (7.39)$$

El primer sumando representa al cambio en el tiempo de la cantidad de movimiento unitaria promedio integrada en la vertical.

d) *Sustitución de las velocidades de la corriente y orbitales*

Cuando se considera que las velocidades  $u$  y  $v$  corresponden a la velocidad de la corriente más la formada por el oleaje (ecuaciones 7.11 y 7.12), en las integrales de la ecuación 7.39, resulta que

$$\overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho u dz} = \overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho (U + u') dz} = \rho U (\bar{\zeta} + h) + \overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho u' dz}$$

$$\overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho u^2 dz} = \overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho (u' + U)^2 dz} = \overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho u'^2 dz} + 2U \overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho u' dz} + \rho U^2 (\bar{\zeta} + h)$$

$$\overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho uv dz} = \overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho (u'+U) (v'+V) dz}$$

$$\overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho uv dz} = \overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho u'v' dz} + V \overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho u' dz} + U \overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho v' dz} + UV\rho(\bar{\zeta} + h)$$

tomando en cuenta a las ecuaciones 7.15, 7.20 y 7.24

$$\overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho u dz} = \bar{M}_x \quad (7.40)$$

$$\overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho u^2 dz} = \overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho u'^2 dz} + 2UM_x + \rho U^2(\bar{\zeta} + h) \quad (7.41)$$

$$\overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho uv dz} = \overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho u'v' dz} + VM_x + UM_y + UV\rho(\bar{\zeta} + h) \quad (7.42)$$

Ya que

$$\rho U^2(\bar{\zeta} + h) + 2UM_x = UU\rho(\bar{\zeta} + h) + 2UM_x \quad (7.43)$$

por la ecuación 7.28 se puede escribir que

$$\rho U^2(\bar{\zeta} + h) + 2UM_x = (\bar{U} - M_x / [\rho(\bar{\zeta} + h)]) U\rho(\bar{\zeta} + h) + 2UM_x \quad (7.44)$$

de las expresiones 7.17 y 7.19 se tiene

$$\rho U^2(\bar{\zeta} + h) + 2UM_x = (\bar{U} - M_x / [\rho(\bar{\zeta} + h)]) (\bar{M}_x - M_x) + 2UM_x$$

desarrollando

$$\rho U^2(\bar{\zeta} + h) + 2UM_x = \bar{U} \bar{M}_x - M_x \bar{M}_x / [\rho(\bar{\zeta} + h)] -$$

$$\bar{U} M_x - M_x^2 / [\rho(\bar{\zeta} + h)] + 2UM_x$$

sustituyendo  $\bar{U}$  dada por 7.28 y  $U$  mediante las ecuaciones 7.17 y 7.19

$$\rho U^2(\bar{\zeta} + h) + 2UM_x = \bar{U} \bar{M}_x - M_x \bar{M}_x / [\rho(\bar{\zeta} + h)] - \frac{\bar{M}_x}{\rho(\bar{\zeta} + h)} M_x +$$

$$+ M_x^2 / [\rho(\bar{\zeta} + h)] + 2 \left( \frac{\bar{M}_x}{\rho(\bar{\zeta} + h)} - \frac{M_x}{\rho(\bar{\zeta} + h)} \right) M_x$$

simplificando

$$\rho U^2(\bar{\zeta} + h) + 2UM_x = \rho \bar{U}\bar{M}_x - M_x^2 / [\rho(\bar{\zeta} + h)] \quad (7.45)$$

Por otra parte, como

$$VM_x + UM_y + UV\rho(\bar{\zeta} + h) = U[\rho V(\bar{\zeta} + h) + M_y] + VM_x$$

sustituyendo la ecuación 7.27 y luego  $V$  mediante las ecuaciones 7.21 y 7.23

$$VM_x + UM_y + UV\rho(\bar{\zeta} + h) = U\bar{M}_y + \left( \frac{\bar{M}_y}{\rho(\bar{\zeta} + h)} - \frac{M_y}{\rho(\bar{\zeta} + h)} \right) M_x$$

tomando en cuenta a la ecuación 7.28

$$VM_x + UM_y + UV\rho(\bar{\zeta} + h) = \left( \bar{U} - \frac{M_x}{\rho(\bar{\zeta} + h)} \right) \bar{M}_y + \frac{\bar{M}_y}{\rho(\bar{\zeta} + h)} M_x - \frac{M_y}{\rho(\bar{\zeta} + h)} M_x$$

reduciendo y ordenando términos

$$VM_x + UM_y + UV\rho(\bar{\zeta} + h) = \bar{U}\bar{M}_y - M_x M_y / [\rho(\bar{\zeta} + h)] \quad (7.46)$$

Al incluir en la ecuación 7.41 a la 7.45 y en la 7.42 a la 7.46 se obtiene

$$\overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho u^2 dz} = \overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho u'^2 dz} + \bar{U}\bar{M}_x - M_x^2 / [\rho(\bar{\zeta} + h)] \quad (7.47)$$

$$\overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho uv dz} = \overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho u'v' dz} + \bar{U}\bar{M}_y - M_x M_y / [\rho(\bar{\zeta} + h)] \quad (7.48)$$

al incluir las expresiones 7.40, 7.47 y 7.48 en la ecuación 7.39 se escribe

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{M}_x + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \bar{U}\bar{M}_x + \overline{\int_{-h}^{\zeta} (\rho u'^2 + p) dz} - \frac{1}{2} \rho g(\bar{\zeta} + h)^2 - \frac{M_x^2}{[\rho(\bar{\zeta} + h)]} \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \bar{U}\bar{M}_y + \overline{\int_{-h}^{\zeta} (\rho u'v') dz} - \frac{M_x M_y}{[\rho(\bar{\zeta} + h)]} \right] = - \rho g(\bar{\zeta} + h) \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} \end{aligned}$$

esta ecuación se puede escribir en forma abreviada de este modo

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{M}_x + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{U}\bar{M}_x + S_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{U}\bar{M}_y + S_{xy}) = T_x \quad (7.49)$$

siendo

$$S_{xx} = \int_{-h}^{\zeta} (\rho u'^2 + p) dz - \frac{1}{2} \rho g (\bar{\zeta} + h)^2 - \frac{M_x^2}{[\rho(\bar{\zeta} + h)]} \quad (7.50)$$

$$S_{xy} = \left[ \int_{-h}^{\zeta} (\rho u'v') dz - \frac{M_x M_y}{[\rho(\bar{\zeta} + h)]} \right] \quad (7.51)$$

$$T_x = - \rho g (\bar{\zeta} + h) \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} \quad (7.52)$$

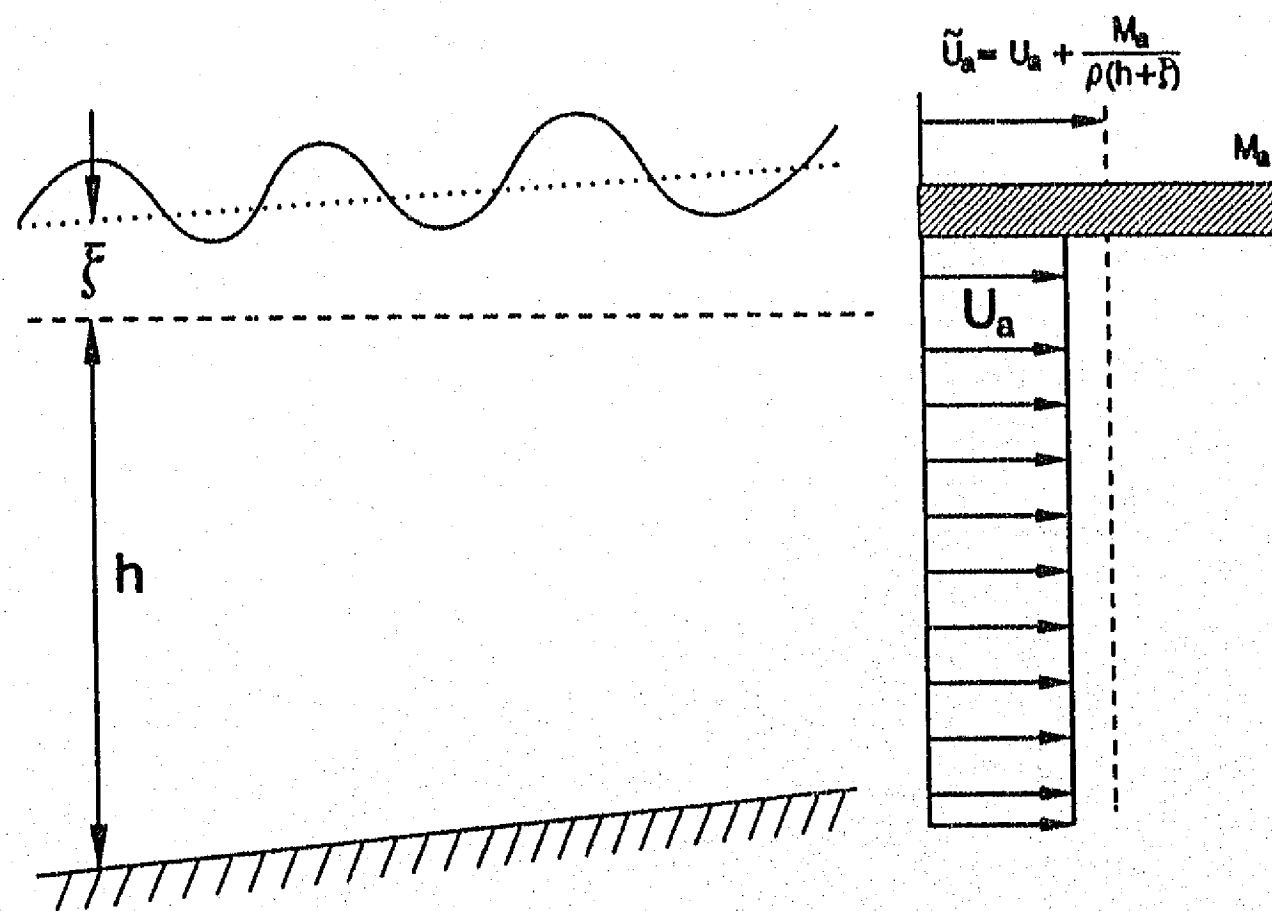


Figura 7.1 Velocidad media del flujo  $\tilde{U}_a$ .

El producto  $\tilde{U} \tilde{M}_x$  corresponde a una velocidad multiplicada por un flujo de masa por unidad de ancho.

El análisis dimensional de  $\tilde{U} \tilde{M}_x$  demuestra que corresponde a un esfuerzo por unidad de ancho, razón por la cual a  $S_{xx}$  y  $S_{xy}$  se les conoce como esfuerzos, a los que adicionalmente se les llama radiación. Estos esfuerzos están relacionados con el flujo de cantidad de movimiento.

Con base en la idea de que cada uno de los sumandos de la ecuación 7.49 corresponde a un esfuerzo, se considera que la acción del viento sobre la superficie libre del agua

agrega el esfuerzo tangencial  $\tau_{vx}$  y que el rozamiento con el fondo del mar implica un esfuerzo  $\tau_{fx}$  que se opone al movimiento por lo que es antecedido de un signo negativo. Así las cosas la ecuación 7.49 queda

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{M}_x + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{U} \bar{M}_x + S_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{U} \bar{M}_y + S_{xy}) - \rho g (\bar{\zeta} + h) \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} = \tau_{vx} - \tau_{fx} \quad (7.53)$$

Procediendo de manera similar para la ecuación 7.40 para la dirección del eje y se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{M}_y + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{V} \bar{M}_x + S_{yx}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{V} \bar{M}_y + S_{yy}) = T_y \quad (7.54)$$

donde

$$S_{xy} = \left[ \int_{-h}^{\zeta} (\rho u'v') dz - \frac{M_x M_y}{[\rho(\bar{\zeta} + h)]} \right] \quad (7.55)$$

$$S_{yy} = \int_{-h}^{\zeta} (\rho v'^2 + p) dz - \frac{1}{2} \rho g (\bar{\zeta} + h)^2 - \frac{M_y^2}{[\rho(\bar{\zeta} + h)]} \quad (7.56)$$

$$T_y = -\rho g (\bar{\zeta} + h) \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} \quad (7.57)$$

Los términos  $T_x$  y  $T_y$  representan a la fuerza horizontal por unidad de área que levanta la superficie libre del agua  $\bar{\zeta}$ . Además se aprecia que de acuerdo con las ecuaciones 7.51 y 7.55,  $S_{xy} = S_{yx}$ .

Tomando en cuenta las acciones del fondo ( $\tau_{fy}$ ) y viento ( $\tau_{vy}$ ) en la dirección del eje y, la ecuación 7.57 queda

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{M}_y + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{U} \bar{M}_x + S_{yx}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{V} \bar{M}_y + S_{yy}) = T_y + \tau_{vy} - \tau_{fy} \quad (7.58)$$

Las ecuaciones 7.53 y 7.58 expresan el balance total de cantidad de movimiento por unidad de área.

Sustituyendo las ecuaciones de la presión (ecuación 3.45) y de la velocidad orbital de



las partículas (ecuaciones 3.49 y 3.47) de la teoría lineal se obtiene

$$S_{xx} = \bar{E} \left( n \cos^2 \theta + \frac{1}{2} (2n - 1) \right) \quad (7.59)$$

$$S_{xy} = \bar{E} \left( \frac{1}{2} n \sin 2\theta \right) \quad (7.60)$$

$$S_{yy} = \bar{E} \left( n \sin^2 \theta + \frac{1}{2} (2n - 1) \right) \quad (7.61)$$

donde  $\theta$  representa la dirección del oleaje (ángulo de avance de las olas respecto al eje  $x$ ),  $\bar{E}$  es la energía del oleaje; de acuerdo con la ecuación 3.61 esta dada como

$$\bar{E} = \rho g H^2 / 8$$

$n$  es el factor de grupo expresado por la ecuación 3.79 como

$$n = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right)$$

Por otra parte, el viento que actúa alrededor de 10 m sobre la superficie libre con componentes  $W_x$  y  $W_y$  ejercen una fuerza de fricción (Safaie, 1984) que pueden ser estimados como

$$\tau_{vx} = \rho k W_x \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \quad (7.62)$$

$$\tau_{vy} = \rho k W_y \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \quad (7.63)$$

donde  $k$  es un coeficiente de fricción del orden de 0.01.

Además el esfuerzo cortante debido a la fricción con el fondo puede ser aproximado en términos del coeficiente  $C$  de la fórmula de Chezy de la siguiente forma

$$\tau_{fx} = \rho \frac{g}{C^2} U \sqrt{U^2 + V^2} \quad (7.64)$$

$$\tau_{fy} = \rho \frac{g}{C^2} V \sqrt{U^2 + V^2} \quad (7.65)$$

## 7.2 Ecuaciones de movimiento basadas en la teoría lineal

Cuando se emplean las expresiones de la teoría lineal se hacen nulos algunos términos de las ecuaciones de movimiento que se presentan a continuación. En efecto, de la ecuación 7.20 se tiene que

$$M_x = \overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho u' dz}$$

donde  $u'$  es el componente vertical de velocidad orbital de las partículas de agua. De acuerdo con la definición de promedio temporal y tomando en cuenta que  $u'$  está dado por la ecuación 3.46 se obtiene

$$M_x = \frac{1}{T} \frac{\rho g k_x a}{\sigma \cosh(kh)} \int_{-h}^{\zeta} \cosh[k(z+h)] dz \int_0^T \cos(k_x x + k_y y - \sigma t) dt$$

como

$$\begin{aligned} \int_0^T \cos(k_x x + k_y y - \sigma t) dt &= \left[ -\frac{1}{\sigma} \text{sen}(k_x x + k_y y - \sigma t) \right]_0^T = \\ &= -\frac{1}{\sigma} \text{sen}(k_x x + k_y y - 2\pi) + \frac{1}{\sigma} \text{sen}(k_x x + k_y y) = 0 \end{aligned}$$

resulta que

$$M_x = 0 \quad (7.66)$$

De manera similar se obtiene

$$M_y = 0 \quad (7.67)$$

Por lo que las ecuaciones 7.28 y 7.29 permiten escribir

$$\tilde{u} = u \quad (7.68)$$

$$\tilde{v} = v \quad (7.69)$$

con lo cual las ecuaciones 7.26 y 7.27 quedan así,

$$\tilde{M}_x = \rho U(\bar{\zeta} + h) \quad (7.70)$$

$$\tilde{M}_y = \rho V(\bar{\zeta} + h) \quad (7.71)$$

Si se sustituyen las ecuaciones 7.66, 7.67, 7.70 y 7.71 en la 7.25 se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\bar{\zeta} + h) + \frac{\partial}{\partial x} \rho U(\bar{\zeta} + h) + \frac{\partial}{\partial y} \rho V(\bar{\zeta} + h) = 0 \quad (7.72)$$

para flujo incompresible y teniendo en cuenta que la profundidad  $h$  no cambia con el tiempo, se llega a

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \bar{\zeta} + \frac{\partial}{\partial x} U(\bar{\zeta} + h) + \frac{\partial}{\partial y} V(\bar{\zeta} + h) = 0} \quad (7.73)$$

Esta es la ecuación de continuidad que se aplica en el modelo matemático de corrientes.

Por otra parte, al considerar las ecuaciones 7.66 a 7.71 en la ecuación 7.53 se encuentra

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho U(\bar{\zeta} + h) + \frac{\partial}{\partial x} [\rho U U(\bar{\zeta} + h) + S_{xx}] + \frac{\partial}{\partial y} [\rho U V(\bar{\zeta} + h) + S_{xy}] + \\ + \rho g(\bar{\zeta} + h) \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} = \tau_{vx} - \tau_{fx} \end{aligned} \quad (7.74)$$

como

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho U(\bar{\zeta} + h) = U \frac{\partial}{\partial t} \rho(\bar{\zeta} + h) + \rho(\bar{\zeta} + h) \frac{\partial U}{\partial t}$$

al sustituir la expresión anterior y desarrollar las dos primeras derivadas parciales de la ecuación 7.73,

$$\begin{aligned} U \frac{\partial}{\partial t} \rho(\bar{\zeta} + h) + U \frac{\partial}{\partial x} \rho U(\bar{\zeta} + h) + U \frac{\partial}{\partial y} \rho V(\bar{\zeta} + h) + \rho(\bar{\zeta} + h) \frac{\partial U}{\partial t} + \rho(\bar{\zeta} + h) U \frac{\partial U}{\partial x} + \\ + \frac{\partial}{\partial x} S_{xx} + \rho(\bar{\zeta} + h) U \frac{\partial}{\partial y} V + \frac{\partial}{\partial y} S_{xy} + \rho g(\bar{\zeta} + h) \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} = \tau_{vx} - \tau_{fx} \end{aligned}$$

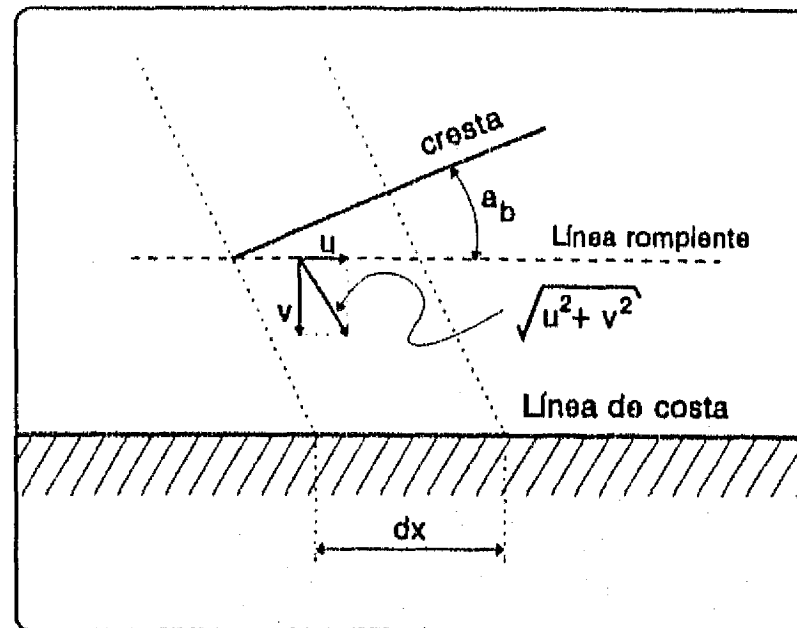
Los primeros tres sumandos corresponden a la ecuación 7.72 por lo que al dividir entre  $\rho(\bar{\zeta} + h)$  se obtiene

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} + \frac{1}{\rho(\bar{\zeta} + h)} \left[ \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} \right] = \frac{1}{\rho(\bar{\zeta} + h)} (\tau_{vx} - \tau_{fx})} \quad (7.75)$$

Procediendo de manera similar, a partir de la ecuación 7.54 se llega a

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} + \frac{1}{\rho(\bar{\zeta} + h)} \left[ \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} \right] = \frac{1}{\rho(\bar{\zeta} + h)} (\tau_{vy} - \tau_{fy}) \quad (7.76)$$

Las expresiones 7.75 y 7.76 corresponden a las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento que se emplean para obtener las corrientes inducidas por el oleaje junto con la ecuación de continuidad (ecuación 7.73).



## 8. MODELO NUMÉRICO DE CORRIENTES INDUCIDAS POR EL OLAJE

En esta parte se obtuvieron las ecuaciones del modelo matemático para calcular las corrientes inducidas por el oleaje. Se emplearon celdas de la malla de distinto tamaño ubicando en el centro de ella a la elevación de la superficie libre y en sus extremos a la velocidad del agua. Mediante la solución de un sistema lineal de cinco incógnitas en cada una de ellas se obtienen las elevaciones y después a partir de esta se calculan las velocidades. Se consideran los esfuerzos de radiación de las olas, el flujo por viento y la fricción del fondo.

### 8.1 Ecuación de conservación de cantidad de movimiento en la dirección $x$

La aproximación de diferencias finitas correspondiente a la ecuación de conservación de cantidad de movimiento en la dirección  $x$  se basa en la expresión 7.76, la cual se escribe a continuación sin marcar con testa a la elevación de la superficie libre.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{\rho(\zeta+h)} \left[ \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} \right] = \frac{1}{\rho(\zeta+h)} (\tau_{vx} - \tau_{fx}) \quad (8.1)$$

Las diferencias finitas se proponen para intervalos de longitudes variables, las velocidades se especifican en los extremos de los intervalos, y en el centro de ellos a la elevación de la superficie libre del agua como se muestra en la figura 8.1.

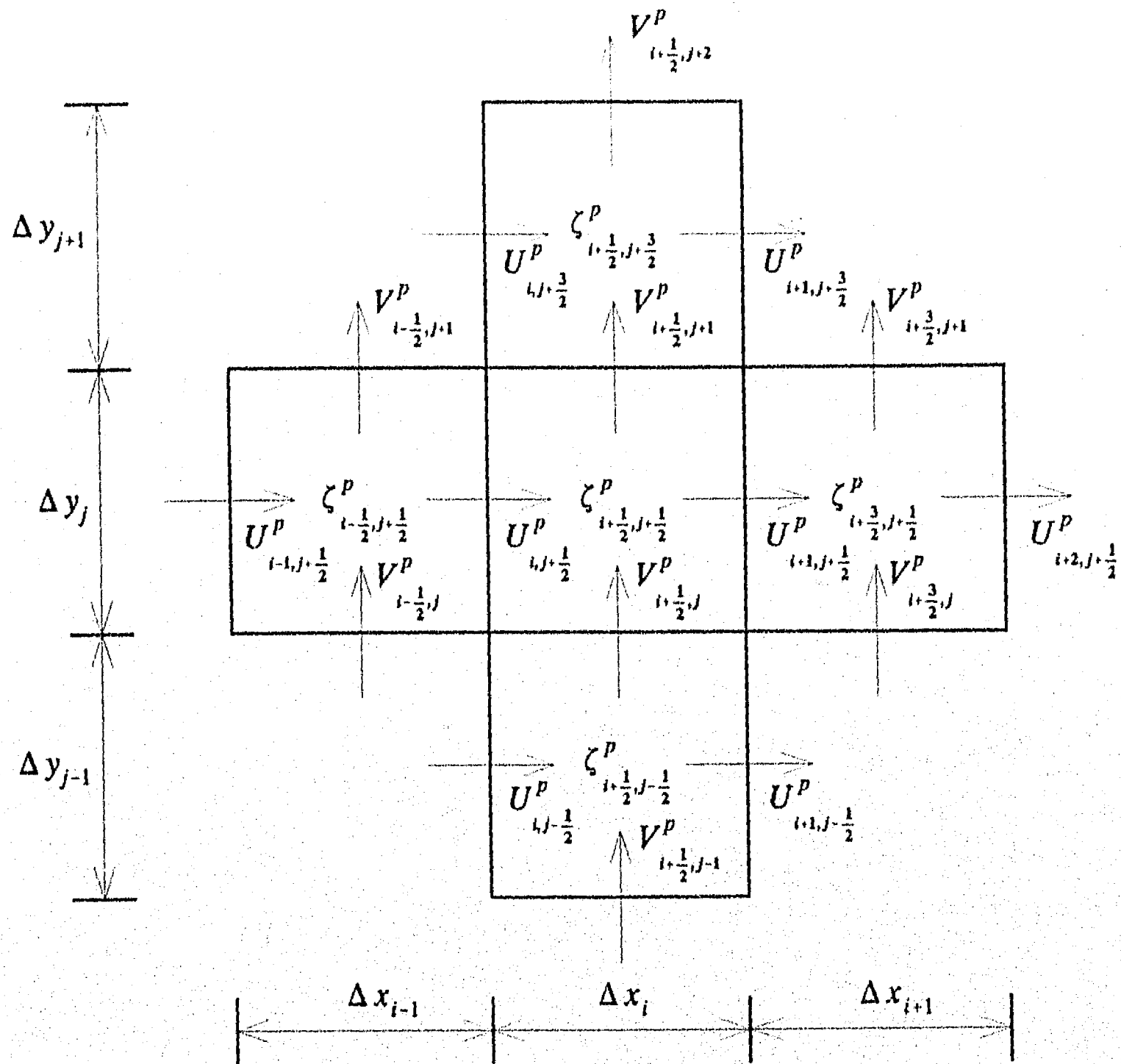


Figura 8.1 Ubicación de las variables independientes.

Se plantearon las expresiones de aproximación tomando como apoyo al componente horizontal de velocidad en  $i$  y  $j+1/2$  en los tiempos  $t = p\Delta t$  y  $t + \Delta t = (p+1)\Delta t$ . Se usó  $p$  como superíndice

$$\frac{\partial U}{\partial t} \doteq \frac{U^{p+1}_{i+1, j+\frac{1}{2}} - U^p_{i+1, j+\frac{1}{2}}}{\Delta t} \quad (8.2)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} \doteq U^{p+1}_{i, j+\frac{1}{2}} \frac{U^p_{i+1, j+\frac{1}{2}} - U^p_{i-1, j+\frac{1}{2}}}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \quad (8.3)$$

$$V \frac{\partial U}{\partial y} \doteq \bar{V} \frac{U_{i,j+\frac{3}{2}}^p - U_{i,j-\frac{3}{2}}^p}{\Delta y_j + 0.5(\Delta y_{j-1} + \Delta y_j)} \quad (8.4)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} \doteq \theta \frac{\zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{p+1} - \zeta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{p+1}}{0.5(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} + (1-\theta) \frac{\zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p - \zeta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p}{0.5(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} \quad (8.5)$$

$$\frac{1}{\rho(h+\zeta)} \left[ \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} \right] \doteq \frac{1}{\Delta t} E_{x,i,j+\frac{1}{2}} \quad (8.6)$$

$$\frac{1}{\rho(h+\zeta)} \tau_{vx} = \frac{1}{\Delta t} A_x \quad (8.7)$$

$$\frac{1}{\rho(h+\zeta)} \tau_{fx} = \frac{1}{\Delta t} F_{x,i,j+\frac{1}{2}} \quad (8.8)$$

siendo

$$\bar{V} = 0.5 \left[ V_{i-\frac{1}{2},j+1}^p + V_{i-\frac{1}{2},j}^p + \left( V_{i+\frac{1}{2},j+1}^p + V_{i+\frac{1}{2},j}^p - V_{i-\frac{1}{2},j+1}^p - V_{i-\frac{1}{2},j}^p \right) \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \right] \quad (8.9)$$

$$\rho \bar{h} = \frac{\rho}{2} \left( h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + h_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p + \zeta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p \right) \quad (8.10)$$

$$E_{x,i,j+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta t}{\rho \bar{h}} \left[ \frac{S_{xx_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} - S_{xx_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}}{0.5(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} + \frac{S_{xy_D} - S_{xy_I}}{\Delta x_i + 0.5(\Delta x_{i-1} + \Delta x_{i+1})} \right] \quad (8.11)$$

$$S_{xy_D} = S_{xy_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}} + \frac{\Delta y_j}{\Delta y_{j-1} + \Delta y_j} \left( S_{xy_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}} - S_{xy_{i+\frac{3}{2},j-\frac{1}{2}}} \right) \quad (8.12)$$

$$S_{xy_I} = S_{xy_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}} + \frac{\Delta y_j}{\Delta y_{j-1} + \Delta y_j} \left( S_{xy_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} - S_{xy_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}} \right) \quad (8.13)$$

$$A_x = \frac{\Delta t}{\rho \bar{h}} W_x \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \quad (8.14)$$

$$F_{x_{i,j+\frac{1}{2}}} = \frac{\Delta t}{\rho \bar{h}} C_F \left( U_{i,j+\frac{1}{2}}^{p+1} + u_{i,j+\frac{1}{2}}^{p+1} \right) \sqrt{\left( U_{i,j+\frac{1}{2}}^p + u_{i,j+\frac{1}{2}}^p \right)^2 + \left( \bar{V} + v_{i,j+\frac{1}{2}}^p \right)^2} \quad (8.15)$$

$u_{i,j+\frac{1}{2}}$  y  $v_{i,j+\frac{1}{2}}$  son las velocidades orbitales de las partículas de agua (ecuaciones 3.46 y 3.47), y son conocidas. En las ecuaciones 8.9, 8.11, 8.12 y 8.13 están implícitas interpolaciones lineales para ubicar la posición de las variables, dado que los intervalos de longitud son distintos y que los esfuerzos de radiación están definidos en el centro de las celdas de la malla (en la misma posición que  $\zeta$ ).

Sustituyendo las ecuaciones 8.2 a 8.8 en la ecuación 8.1 y ordenando, se encuentra

$$U_{i,j+\frac{1}{2}}^{p+1} = R_{x_{i,j+\frac{1}{2}}} - P_{x_{i,j+\frac{1}{2}}} \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{p+1} + P_{x_{i,j+\frac{1}{2}}} \zeta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{p+1} \quad (8.16)$$

donde

$$R_{x_{i,j+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \left( U_{i+1,j+\frac{1}{2}}^p - U_{i-1,j+\frac{1}{2}}^p \right) + F_{x_{i,j+\frac{1}{2}}} \left[ U_{i,j+\frac{1}{2}}^p - \frac{\Delta t \bar{V}}{\Delta y_j + 0.5(\Delta y_{j-1} + \Delta y_{j+1})} \left( U_{i,j+\frac{3}{2}}^p - U_{i,j-\frac{3}{2}}^p \right) - \frac{2 \Delta t g (1-\theta)}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \left( \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p - \zeta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p \right) - u_{i,j+\frac{1}{2}}^{p+1} F_{x_{i,j+\frac{1}{2}}} + A_x - E_{x_{i,j+\frac{1}{2}}} \right]} \quad (8.17)$$

$$P_{x_{i,j+\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{2 \Delta t g \theta}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i}}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \left( U_{i+1,j+\frac{1}{2}}^p - U_{i-1,j+\frac{1}{2}}^p \right) + F_{x_{i,j+\frac{1}{2}}}} \quad (8.18)$$

## 8.2 Ecuación de conservación de cantidad de movimiento en la dirección y

Procediendo con desarrollo similar al presentado en el subcapítulo 8.1, tomando como apoyo a la ecuación 7.77, se obtiene



$$V_{i+\frac{1}{2},j}^{p+1} = R_{y_{i+\frac{1}{2},j}} - P_{y_{i+\frac{1}{2},j}} \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{p+1} + P_{y_{i+\frac{1}{2},j}} \zeta_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{p+1} \quad (8.19)$$

donde

$$R_{y_{i+\frac{1}{2},j}} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta y_{j-1} + \Delta y_j} \left( V_{i+\frac{1}{2},j+1}^p - V_{i+\frac{1}{2},j-1}^p \right) + F_{y_{i+\frac{1}{2},j}}} \left[ V_{i+\frac{1}{2},j}^p - \frac{\Delta t \bar{U}}{\Delta x_i + 0.5(\Delta x_{i-1} + \Delta x_{i+1})} \left( U_{i+\frac{3}{2},j}^p - U_{i-\frac{1}{2},j}^p \right) - \frac{2\Delta t g(1-\theta)}{\Delta y_{j-1} + \Delta y_j} \left( \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p - \zeta_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^p \right) - v_{i+\frac{1}{2},j}^{p+1} F_{y_{i+\frac{1}{2},j}} + A_y - E_{y_{i+\frac{1}{2},j}} \right] \quad (8.20)$$

$$P_{y_{i+\frac{1}{2},j}} = \frac{\frac{2\Delta t g \theta}{\Delta y_{j-1} + \Delta y_j}}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta y_{j-1} + \Delta y_j} \left( V_{i+\frac{1}{2},j+1}^p - V_{i+\frac{1}{2},j-1}^p \right) + F_{y_{i+\frac{1}{2},j}}} \quad (8.21)$$

siendo

$$\frac{1}{\rho(h+\zeta)} \left[ \frac{\partial S_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} \right] = \frac{1}{\Delta t} E_{y_{i+\frac{1}{2},j}} \quad (8.22)$$

$$\frac{1}{\rho(h+\zeta)} \tau_{vy} = \frac{1}{\Delta t} A_y \quad (8.23)$$

$$\frac{1}{\rho(h+\zeta)} \tau_{fy} = \frac{1}{\Delta t} F_{y_{i+\frac{1}{2},j}} \quad (8.24)$$

$$\bar{U} = 0.5 \left[ U_{i+1,j-\frac{1}{2}}^p + U_{i,j-\frac{1}{2}}^p + \left( U_{i+1,j+\frac{1}{2}}^p + U_{i,j+\frac{1}{2}}^p - U_{i+1,j-\frac{1}{2}}^p + U_{i,j-\frac{1}{2}}^p \right) \frac{\Delta y_j}{\Delta y_{j-1} + \Delta y_j} \right] \quad (8.25)$$

$$\rho \bar{h} = \frac{\rho}{2} \left( h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p + \zeta_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^p \right) \quad (8.26)$$

$$E_{y_{i+\frac{1}{2},j}} = \frac{\Delta t}{\rho \bar{h}} \left[ \frac{S_{yy_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} - S_{yy_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}}{0.5(\Delta y_{j-1} + \Delta y_j)} + \frac{S_{yx_T} - S_{yx_P}}{\Delta y_j + 0.5(\Delta y_{j-1} + \Delta y_{j+1})} \right] \quad (8.27)$$

$$S_{yx_T} = S_{yx_{i-\frac{1}{2},j-\frac{3}{2}}} + \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \left( S_{yx_{i+\frac{1}{2},j-\frac{3}{2}}} - S_{yx_{i-\frac{1}{2},j-\frac{3}{2}}} \right) \quad (8.28)$$

$$S_{yx_P} = S_{yx_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}} + \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \left( S_{yx_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}} - S_{yx_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}} \right) \quad (8.29)$$

$$A_y = \frac{\Delta t}{\rho h} W_y \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \quad (8.30)$$

$$F_{y_{i+\frac{1}{2},j}} = \frac{\Delta t}{\rho h} C_F \left( V_{i+\frac{1}{2},j}^{P+1} + v_{i+\frac{1}{2},j}^{P+1} \right) \sqrt{\left( V_{i+\frac{1}{2},j}^P + v_{i+\frac{1}{2},j}^P \right)^2 + \left( \bar{U} + u_{i+\frac{1}{2},j}^P \right)^2} \quad (8.31)$$

### 8.3 Ecuación de continuidad

En la ecuación de continuidad existen términos no lineales que son tratados en forma aproximada. Para ello se considera que interesa encontrar el incremento de la función  $z = f(x,y) = xy$  cuando aumentan tanto  $x$  como  $y$ . Se propone una aproximación basada en el desarrollo de la serie de Taylor que involucra hasta derivadas de primer orden. Esto es,

$$z(x + \Delta x, y + \Delta y) = z(x, y) + \Delta x \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} \quad (8.32)$$

para

$$z(x, y) = xy$$

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = y$$

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = x$$

así, al sustituir en la ecuación 8.32 se obtiene

$$z(x + \Delta x, y + \Delta y) = z(x, y) + y \Delta x + x \Delta y \quad (8.33)$$

Si ahora, se hace el siguiente cambio de variables:

$$x = x_n \quad ; \quad \Delta x = x_{n+1} - x_n$$

$$y = y_n \quad ; \quad \Delta y = y_{n+1} - y_n$$

entonces la ecuación 8.32 queda

$$\begin{aligned} x_{n+1} z_{n+1} &= x_n y_n + y_n (x_{n+1} - x_n) + x_n (y_{n+1} - y_n) \\ x_{n+1} z_{n+1} &= -x_n y_n + y_n x_{n+1} + x_n y_{n+1} \end{aligned} \quad (8.34)$$

La expresión anterior sirve para aproximar una función no lineal igual al producto de dos variables independientes.

En el capítulo 7 se estableció que la ecuación de continuidad que se escribe a continuación (no se marca con testa la elevación de la superficie libre):

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} U(h + \zeta) - \frac{\partial}{\partial y} V(h + \zeta) \quad (8.35)$$

Para contar con una adecuada aproximación a la derivada temporal entre el tiempo  $t = p\Delta t$  y el tiempo  $t + \Delta t = (p+1)\Delta t$  se propone el promedio ponderado siguiente

$$\frac{\zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{p+1} - \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p}{\Delta t} = \theta \left( \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{p+1} + (1-\theta) \left( \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p \quad (8.36)$$

donde  $\theta$  es una constante conocida tal que  $0 \leq \theta \leq 1$  y  $p$  es un superíndice relacionado con el tiempo. De acuerdo con la ecuación 8.35,

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{p+1} &= - \left( \frac{\partial}{\partial x} U(h + \zeta) + \frac{\partial}{\partial y} V(h + \zeta) \right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{p+1} = \\ &= - \left( \frac{\partial}{\partial x} U^{p+1}(h + \zeta^{p+1}) + \frac{\partial}{\partial y} V^{p+1}(h + \zeta^{p+1}) \right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (8.37)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p &= - \left( \frac{\partial}{\partial x} U(h + \zeta) + \frac{\partial}{\partial y} V(h + \zeta) \right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p = \\ &= - \left( \frac{\partial}{\partial x} U^p(h + \zeta^p) + \frac{\partial}{\partial y} V^p(h + \zeta^p) \right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (8.38)$$

Ahora, si en la aproximación definida por la ecuación 8.34 el índice  $n$  se cambia por el superíndice  $p$ , la ecuación 8.37 se puede que dar de este modo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{p+1} = & - \left( \frac{\partial}{\partial x} U^p(h + \zeta^{p+1}) + \frac{\partial}{\partial x} U^{p+1}(h + \zeta^p) - \frac{\partial}{\partial x} U^p(h + \zeta^p) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial y} V^p(h + \zeta^{p+1}) + \frac{\partial}{\partial y} V^{p+1}(h + \zeta^p) - \frac{\partial}{\partial y} V^p(h + \zeta^p) \right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (8.39)$$

al sustituir las ecuaciones 8.38 y 8.39 en 8.36 y después de ordenar y reducir términos se obtiene

$$\begin{aligned} \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{p+1} = & \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p - \Delta t \theta \left( \frac{\partial}{\partial x} U^p(h + \zeta^{p+1}) + \frac{\partial}{\partial x} U^{p+1}(h + \zeta^p) + \frac{\partial}{\partial y} V^p(h + \zeta^{p+1}) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial y} V^{p+1}(h + \zeta^p) \right) - \Delta t(1-2\theta) \left( \frac{\partial}{\partial x} U^p(h + \zeta^p) + \frac{\partial}{\partial y} V^p(h + \zeta^p) \right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (8.40)$$

aproximando por diferencias finitas las derivadas parciales respecto a  $x$  y  $y$  se tiene

$$\begin{aligned} \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{p+1} = & \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p - \frac{\Delta t \theta}{2\Delta x_i} \left[ U_{i+1,j+\frac{1}{2}}^p \left( h_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \zeta_{i+\frac{3}{2},j+\frac{3}{2}}^{p+1} + \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{p+1} \right) - \right. \\ & - U_{i,j+\frac{1}{2}}^p \left( h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + h_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{p+1} + \zeta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{p+1} \right) + U_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{p+1} \left( h_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \right. \\ & \left. + \zeta_{i+\frac{3}{2},j+\frac{3}{2}}^p + \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p \right) - U_{i,j+\frac{1}{2}}^p \left( h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + h_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p + \zeta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p \right) \left. \right] - \\ & - \frac{\Delta t \theta}{\Delta y_i} \left[ V_{i+\frac{1}{2},j+1}^p \left( h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}} + h_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}^{p+1} + \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{p+1} \right) - V_{i+\frac{1}{2},j}^p \left( h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \right. \\ & \left. + h_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{p+1} + \zeta_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{p+1} \right) + V_{i+\frac{1}{2},j+1}^{p+1} \left( h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}} + h_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}^p + \right. \\ & \left. + \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p \right) - V_{i+\frac{1}{2},j}^{p+1} \left( h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p + \zeta_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^p \right) \end{aligned} \quad (8.41)$$

Sustituyendo  $U_{i,j+\frac{1}{2}}^{p+1}$  y  $V_{i+1,j}^{p+1}$  dadas por las ecuaciones 8.16 y 8.19, así como las que corresponderían a  $U_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{p+1}$  y  $V_{i+\frac{1}{2},j+1}^{p+1}$  (según estas ecuaciones) y después de ordenar queda la ecuación lineal con cinco incógnitas siguientes:

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta t \theta}{2 \Delta x_i} \left[ -U_{i,j+\frac{1}{2}}^p - \left( h_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \zeta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p + \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p \right) P_{x_{i,j+\frac{1}{2}}} \right] \zeta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{p+1} + \\
& + \frac{\Delta t \theta}{2 \Delta x_i} \left[ U_{i+1,j+\frac{1}{2}}^p - \left( h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}} + \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p + \zeta_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}^p \right) P_{x_{i+1,j+\frac{1}{2}}} \right] \zeta_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}^{p+1} + \\
& + \frac{\Delta t \theta}{2 \Delta y_j} \left[ -V_{i+\frac{1}{2},j}^p - \left( h_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \zeta_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^p + \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p \right) P_{y_{i+\frac{1}{2},j}} \right] \zeta_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{p+1} + \\
& + \frac{\Delta t \theta}{2 \Delta y_j} \left[ V_{i+\frac{1}{2},j+1}^p - \left( h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}} + \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p + \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}^p \right) P_{y_{i+\frac{1}{2},j+1}} \right] \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}^{p+1} + \\
& + \left[ 1 + \frac{\Delta t \theta}{\Delta x_i} \left( U_{i+1,j+\frac{1}{2}}^p - U_{i,j+\frac{1}{2}}^p + \left( h_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \zeta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p + \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p \right) P_{x_{i,j+\frac{1}{2}}} + \left( h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}} + \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p + \zeta_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}^p \right) P_{x_{i+1,j+\frac{1}{2}}} \right) + \right. \\
& + \frac{\Delta t \theta}{2 \Delta y_j} \left( V_{i+\frac{1}{2},j+1}^p - V_{i+\frac{1}{2},j}^p + \left( h_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \zeta_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^p + \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p \right) P_{y_{i+\frac{1}{2},j}} + \left. \left( h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}} + \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p + \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}^p \right) P_{y_{i+\frac{1}{2},j+1}} \right) \right] \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{p+1} = \\
& = \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p - \frac{\Delta t \theta}{2 \Delta x_i} \left[ U_{i+1,j+\frac{1}{2}}^p \left( h_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right) + \left( h_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \zeta_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}^p + \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p \right) R_{x_{i+1,j+\frac{1}{2}}} - U_{i,j+\frac{1}{2}}^p \left( h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + h_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right) + \left( h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + h_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p + \zeta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p \right) R_{x_{i,j+\frac{1}{2}}} \right] - \frac{\Delta t \theta}{2 \Delta y_j} \left[ V_{i+\frac{1}{2},j+1}^p \left( h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}} + h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right) + \left( h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}} + h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}^p + \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p \right) R_{y_{i+\frac{1}{2},j+1}} - V_{i+\frac{1}{2},j}^p \left( h_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right) + \left( h_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \zeta_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^p + \zeta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^p \right) R_{y_{i+\frac{1}{2},j}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{3}{2}}^p + \zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p \Big) R_{y_{i+\frac{1}{2}, j+1}} - V_{i+\frac{1}{2}, j}^p \left( h_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} \right) + \left( h_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} + \right. \\
& + \zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p + \zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p \Big) R_{y_{i+\frac{1}{2}, j}} \Big] - \frac{\Delta t(1-2\theta)}{2\Delta x_i} \left[ U_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p \left( h_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + \zeta_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2}}^p + \right. \right. \\
& \left. \left. + \zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p \right) - U_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p \left( h_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + h_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + \zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p + \zeta_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p \right) \right] - \\
& - \frac{\Delta t(1-2\theta)}{2\Delta y_j} \left[ V_{i+\frac{1}{2}, j+1}^p \left( h_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{3}{2}} + h_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + \zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{3}{2}}^p + \zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p \right) + \right. \\
& \left. + V_{i+\frac{1}{2}, j}^p \left( h_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} + \zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^p + \zeta_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^p \right) \right]
\end{aligned} \tag{8.42}$$

La aplicación de la ecuación 8.42 para cada celda de la región donde interesa obtener las corrientes inducidas por el oleaje y la elevación promedio del agua da lugar a un sistema de ecuaciones lineales con cinco incógnitas (en la mayoría de las ecuaciones) que al ser resuelto permite disponer para la etapa  $p + 1$  de las elevaciones promedio del agua. Una vez que se cuenta con estas elevaciones por medio de las ecuaciones 8.16 y 8.19 se obtienen para dicha etapa los valores de los componentes de velocidad de las corrientes tanto en la dirección  $x$  como en la  $y$ .

#### 8.4 Condiciones de frontera

En el perímetro de la región en estudio se imponen varias ecuaciones que junto con las ecuaciones de diferencias finitas hacen posible encontrar una solución aproximada de las ecuaciones diferenciales de movimiento (capítulo 7). Esta solución corresponde a la elevación promedio del agua y la velocidad del flujo producido por el oleaje. Como referencia para establecer las condiciones de frontera se muestra la figura 8.2.

##### 8.4.1 Obstáculo al paso del agua

Los cuerpos inmersos en el mar que impiden el flujo del agua a través de ellos se localizan en los extremos de las celdas (donde se valúan las velocidades, figura 8.1). Corresponden a rompeolas u obstáculos naturales como arrecifes o islas. En los sitios

donde están estos cuerpos se establece que la velocidad perpendicular a ellos es nula, es decir

$$U_{i,j+\frac{1}{2}} = 0 \quad (8.43)$$

para un obstáculo de largo  $\Delta y_j$  ubicado en la cara de la celda donde se localiza  $U_{i,j+\frac{1}{2}}$ , o bien

$$V_{i+\frac{1}{2},j} = 0 \quad (8.44)$$

para un cuerpo impermeable de largo  $\Delta x_i$  ubicado en la cara de la celda donde aparece  $V_{i+\frac{1}{2},j}$ .

Para la línea de costa, orientada en la dirección del eje de las abcisas, también se plantea una condición de frontera de este tipo.

En la figura 8.2 se han marcado los puntos donde se considera esta clase de condición de frontera.

#### 8.4.2 Orillas perpendiculares a la línea de costa que delimitan la región en estudio

La región en donde interesa calcular las corrientes inducidas por el oleaje se limita lateralmente por líneas rectas que son paralelas al eje de las ordenadas. Conviene localizar estas líneas a una distancia de los obstáculos donde el efecto de estos ya no sea apreciable. Se encontró que ubicándolas a una distancia mayor o igual a dos veces la longitud del obstáculo se obtenían resultados adecuados. También se debe ubicar a estas líneas en una zona donde no existan cambios fuertes de profundidad y que el flujo sea paralelo a la línea de costa.

Los dos requisitos anteriores son necesarios para que el flujo se establezca y por lo tanto sea aceptable imponer que sobre estas líneas se cumpla que la velocidad no cambie con el tiempo; y con ello sea igual a la de la sección adyacente. Así para  $i = 1$  se tiene

$$U_{1,j+\frac{1}{2}}^{P+1} = U_{2,j+\frac{1}{2}}^{P+1} \quad (8.45)$$

y para la frontera derecha  $i = M + 1$  (figura 8.2), se establece que

$$U_{M+1,j+\frac{1}{2}}^{P+1} = U_{M,j+\frac{1}{2}}^{P+1} \quad (8.46)$$

Como ejemplo se han señalado en la figura 8.2 los sitios donde se consideran las dos últimas igualdades.

#### 8.4.3 Línea de mar abierto por donde incide el oleaje

Como en el caso del inciso anterior, la línea por donde incide el oleaje (paralela al eje de las abscisas) delimitan la región en estudio en la parte inferior; no tiene un carácter estricto de frontera, se trata de una línea que separa el dominio donde se obtienen las corrientes inducidas por el oleaje del resto del mar.

Para esta línea se impone una radiación libre de una perturbación que alcanza a esta línea desde el interior. Se propone para ello una ecuación deducida del principio de conservación de cantidad de movimiento de una onda de choque de tal suerte que la razón de flujo es igual a la velocidad con que se propaga la onda (celeridad); por la amplitud de la onda, es decir

$$v h = \sqrt{g h} \zeta$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad. La expresión anterior también se puede escribir

$$v = \sqrt{\frac{g}{h}} \zeta \quad (8.47)$$

en este método se consideró

$$v_{i,1}^{P+1} = \sqrt{\frac{g}{h_{i,1+0.5}}} \zeta_{i,1+1/2} \quad (8.48)$$

### 8.5 Ejemplos de aplicación

#### Ejemplo 8.1

Calcular las corrientes inducidas por las olas y las elevaciones del nivel medio del mar cerca de la masa continental formadas por un oleaje que se propaga en dirección tal que forma un ángulo de  $45^\circ$  con respecto a la línea de costa. Las olas tienen una altura de 1 m y período de 10s. En la figura 8.2 se muestra la zona donde avanza el oleaje y la ubicación de la escollera.



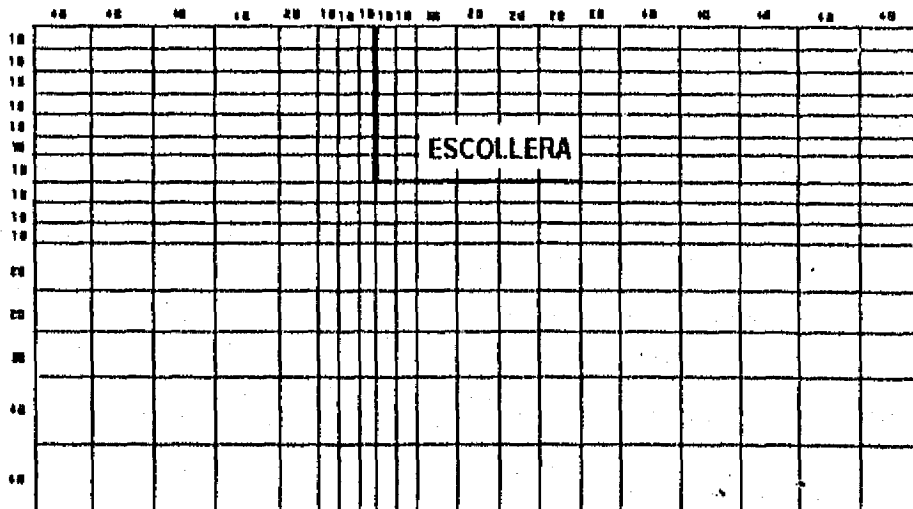


Figura 8.2 Malla de una zona donde interesa obtener las corrientes inducidas por el oleaje (distancias en m).

*Solución:*

Para aplicar el modelo numérico de corrientes es necesario proporcionar los valores de los esfuerzos de radiación. Para calcularlos se emplean las ecuaciones 7.59 a 7.61 a partir de la altura de la ola, dirección, período y profundidad. En este caso se necesitan determinar en el centro de cada celda en que se ha dividido la zona en estudio.

Para conocer los dos primeros conceptos se requiere de la aplicación del modelo de refracción-difracción-reflexión.

Los resultados obtenidos con el modelo de corrientes propuestos consisten en las elevaciones del nivel medio del mar y los componentes, en un plano horizontal, de la velocidad promedio en la vertical ( $u$  y  $v$ ).

Se escribió un programa de cómputo para llevar a cabo el cálculo de las corrientes. En la figura 8.3 se muestran las velocidades inducidas por el oleaje, la cual fue tomada de la pantalla de la computadora. Se observa que en la zona de abrigo las corrientes entran cerca de la escollera y salen en un área próxima a la costa.

Al tomar en cuenta la interacción con las partículas sólidas del fondo marino y de la playa podrían encontrarse las zonas de erosión y depósito de material en ella.

Por otra parte, en la figura 8.4 se presentan las líneas de igual elevación del nivel medio del mar. Las regiones con aumento en el nivel se ubican cerca de la línea de costa (corresponde al ascenso del nivel del mar denominado en la lengua inglesa como "wave set-up").

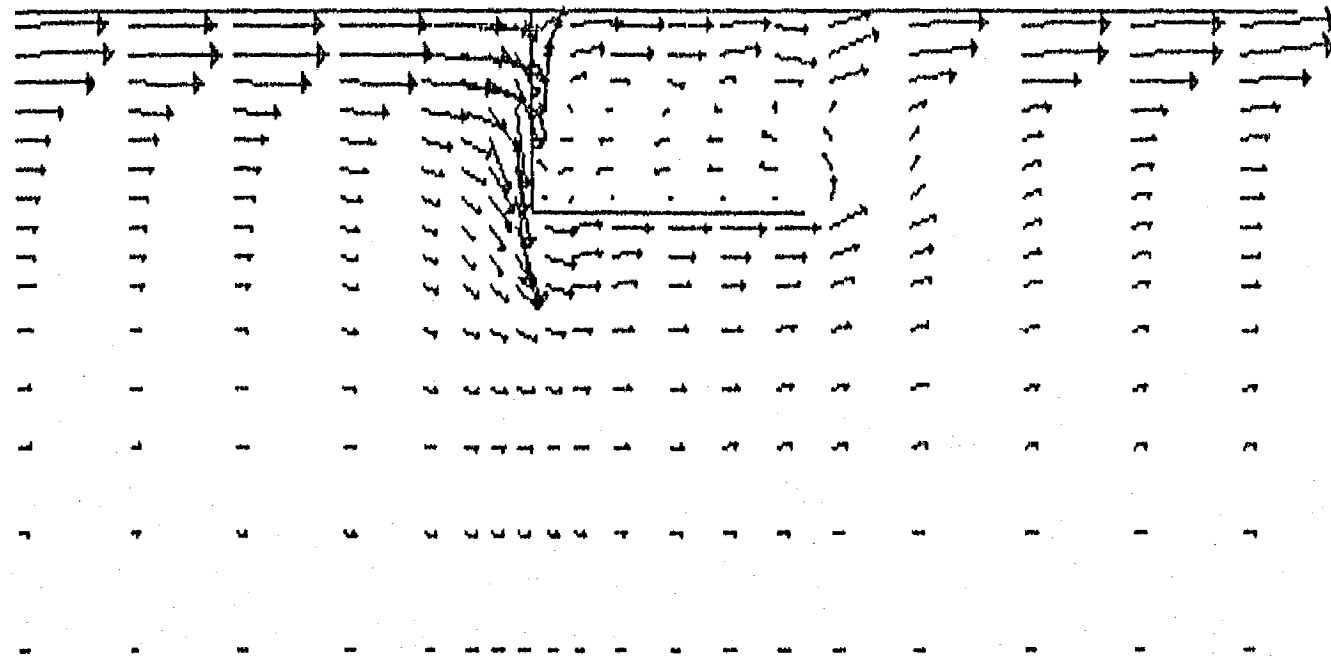


Figura 8.3 Velocidades de las corrientes inducidas por las olas.

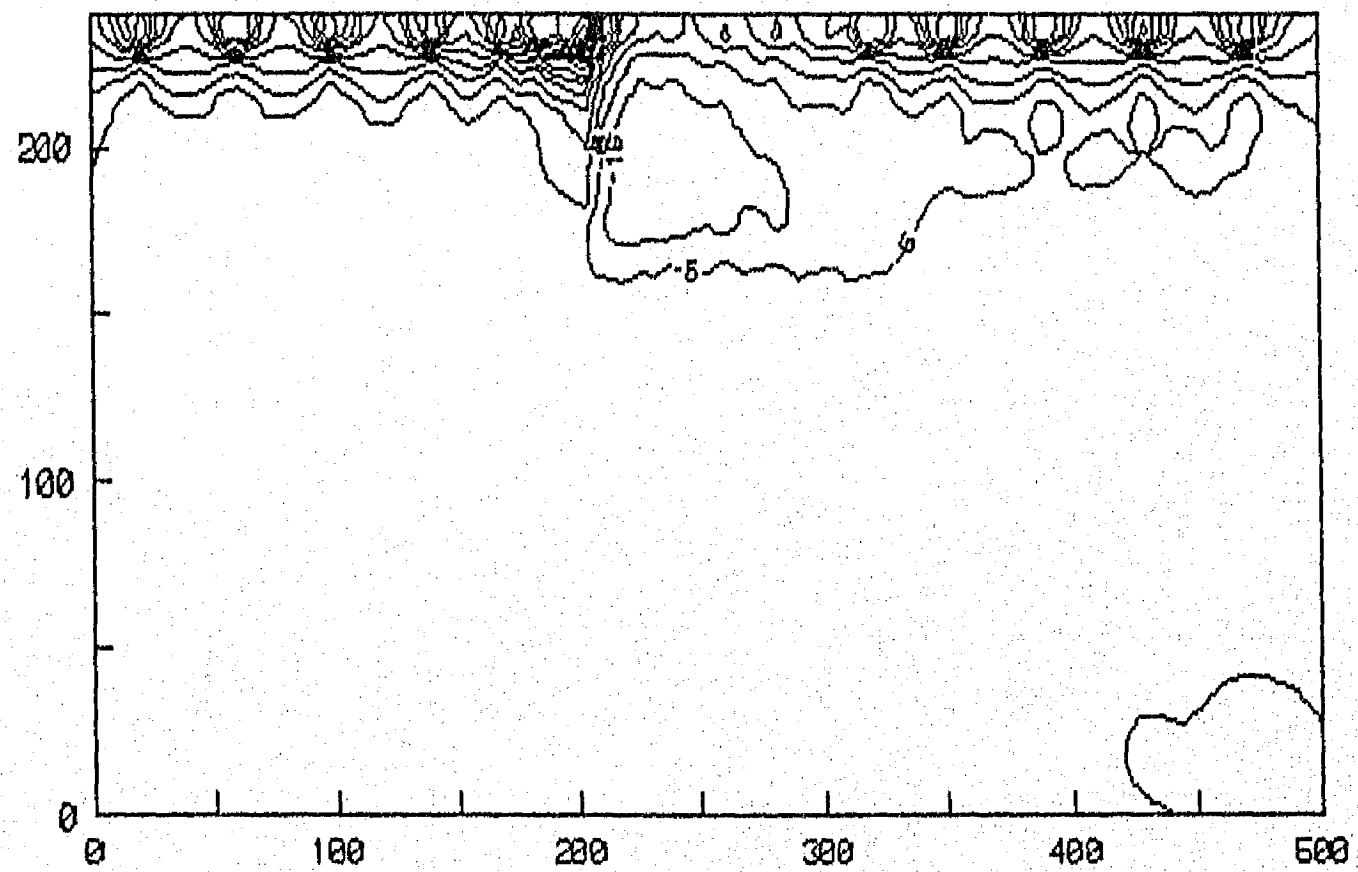


Figura 8.4 Isolnea de cambios en la elevación del nivel medio del mar.

## 9. CONCLUSIONES

La determinación del oleaje que enfrenta a las estructuras marítimas y las corrientes que induce tiene una gran variedad de aplicaciones de ingeniería. En la práctica profesional se hacen estimaciones del oleaje bajo una serie de hipótesis difíciles de cumplir en zonas del fondo marino, por lo que no es posible confiar en sus valores y puede dar lugar a errores de importancia en los diseños y la operación.

Por otro lado, el contar con las características del flujo del agua cerca de la costa permite estudiar, entre otros, la influencia de la geometría en planta de escolleras para proteger zonas de enfriamiento o de abrigo de embarcaciones, desde luego su estrecha relación con los sedimentos sueltos del fondo marino y de las playa. Ello hace posible calcular la erosión y depósitos antes y después de escolleras, la forma conveniente de construir espigones (al definir su longitud y la separación entre ellos) para proteger una playa o propiciar su crecimiento.

Los resultados de los cálculos de la propagación de las olas tomando en cuenta al mismo tiempo a la refracción, difracción y la reflexión, y luego a la rompiente de las olas permiten obtener el movimiento del agua que induce mediante el flujo de cantidad de masa (esfuerzos radiales originados por las olas) y el ascenso (wave set-up) o disminución del nivel medio (wave set-down) del mar.

La Ingeniería Hidráulica tiene ramas, como la Hidrología de Superficie, la Hidráulica Fluvial y la Marítima donde existen tópicos poco desarrollados teóricamente, por lo que

se recurre a ecuaciones empíricas y métodos, a veces poco precisos, para cubrir aspectos necesarios para el diseño y operación de las estructuras. El avance de los métodos de solución de ecuaciones ha cubierto algunos temas que no podrían ser atendidos teóricamente. Sin embargo, las matemáticas y los métodos de solución han implicado procedimientos poco conocidos, no suficientemente descritos y, el uso de programas de cómputo con instructivos que no suelen explicar sus bases; todo lo anterior ha hecho creer que son complicados.

Las matemáticas empleadas en los métodos presentados en esta tesis no son avanzadas, quizá poco empleadas por los ingenieros que trabajan en gabinete.

Se presentó la deducción ecuación fundamental de refracción y difracción simultáneas para mostrar las bases y la profundidad de los conceptos de la física incluidos en ella.

Se describieron las ecuaciones principales de la teoría lineal en tres dimensiones espaciales ya que, no se presentan en las publicaciones sobre este tema y, permiten tomar en cuenta el avance de las ola en determinada dirección.

Las ecuaciones de apoyo para la deducciones y el manejo de la propagación de las olas fueron obtenidas a partir de las ecuaciones fundamentales de la Mecánica de Fluidos. Ellas a su vez, se establecieron desde una sola ecuación, el principio de balance de una propiedad determinada. Cuando ésta es una cantidad vectorial, se deducen ecuaciones como la de conservación de cantidad de movimiento.

Se plantearon las ecuaciones más importantes para propagar el oleaje tomando en cuenta los efectos, al mismo tiempo de la refracción, difracción y reflexión. También se presentaron las de las corrientes marinas originadas por las olas. Esto no se encuentra en los libros de texto de la Hidráulica Marítima.

Se pretendió disponer de procedimientos de cálculo que permitan su aplicación en problemas prácticos de la Hidráulica Marítima, tratando de mostrar que no forman parte de una teoría difícil, sino de un área relativamente nueva, que a lo mejor si requiere de un poco más de la herramienta matemática básica de vectores.

Se incluyeron dos apéndices que intentan complementar algunos de los temas desarrollados. En uno de ellos se describe una manera que se ocurrió para mejorar la precisión de los métodos que toman en cuenta a la reflexión de las olas, al proponer ecuaciones de diferencias finitas con menor error de discretización.

Se presentan varios ejemplos de aplicación cuyos resultados fueron obtenidos con programas de cómputo escritos de acuerdo con los métodos propuestos y se encuentran disponibles en el Instituto de Ingeniería.

## **BIBLIOGRAFÍA**

- 1) Abramowitz and Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, Inc., New York, 1972.
- 2) Berkhoff, J. C. W., *Computation of Combined Refraction-Diffraction*, Proc. 13th Int. Conf. on Coastal Engineering, Vancouver, 1972.
- 3) Camargo, H. J. E., Camaño, R. V., Peña P. T. C., *Protección y Preservación de las Playas de Cancún, Quintana Roo*, Informe interno del Instituto de Ingeniería, México, D.F., 1990.
- 4) Camargo, H. J., Jiménez, E. M., Sánchez, E. L., *Evolución de las Playas de Cancún, Q. Roo*, Informe interno del Instituto de Ingeniería, México, D.F., 1990.
- 5) Ebersole, B. A., *Refraction-Diffraction Model for Linear Water Waves*, Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, Vol. 111, No. 6, Nov. 1985, Paper 20197.
- 6) Fuentes, M. O. A. y Osnaya, R. J., *Cálculo numérico de refracción del oleaje*, Informe interno del Instituto de Ingeniería, México, D.F., 1990.
- 7) Gaythwaite, J, P.E., *The Marine Environment and Structural Design*, Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1981.
- 8) Gracia, J., Jiménez M., Sánchez, L., *La restitución artificial de playas en Cancún, Q.Roo*, Informe interno del Instituto de Ingeniería, México, D, F., 1990.
- 9) Horikawa, K., *Coastal Engineering. An Introduction to Ocean Engineering*, Haisten Press, Japan, 1978.
- 10) Horikawa, K., *Nearshore Dynamics and Coastal Processes*, University of Tokyo Press, Japan, 1988.
- 11) Lozano, C. and Liu, P., *Refraction-Diffraction Model for Linear Surface Water Waves*, J. Fluid Mech., Vol. 101, part 4, 1980, pp. 705-720.
- 12) Protter, M. and Morrey C., *Modern Mathematical Analysis*, Addison-Wesley, U.S.A., 1964.
- 13) Safaie, B., *Wind stress at air-water-interface*, ASCE Journal of waterway, port,

coastal & ocean Engineering, Vol. 110 (2), 1984, pp. 287-293.

- 14) Sánchez, B. J. L., *Manual de Hidráulica Marítima Elemental*, Comisión Federal de Electricidad, México, D.F., 1987.
- 15) Skovgaard, O., Jonsson, I. g. and Bertelsen, J. A., *Computation of Wave Heights due to Refraction and Friction*, Journal of the Waterways Harbors and Coastal Engineering Division, ASCE, No. WW1, Proc. Paper 11100, pp. 15-32, February, 1975.
- 16) Smith, G. D., *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series, Second Edition, Great Britain, 1978.
- 17) U.S. Army Corps of Engineers, *Shore Protection Manual*, Coastal Engineering Research Center, Vicksburg, Mississippi, 1984.
- 18) Wiegel, R. L., *Oceanographical Engineering*, Prentice - Hall, USA, 1964.
- 19) William, F. A., *Numerical Methods for Partial Diferential Equations*, second edition, New York, San Francisco, 1977.
- 20) Wylie, C. R., *Matemáticas superiores para ingeniería*, Mc Graw Hill, cuarta edición, México, 1979.



# **APÉNDICE A**

## MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN PARA TRES ECUACIONES DIFERENCIALES SIMULTÁNEAS

El método de Runge-Kutta que tiene una precisión hasta el término de cuarto orden del desarrollo de Taylor (con un error local de truncado proporcional a  $\Delta t^5$ ) queda planteado para tres ecuaciones diferenciales ordinarias de la manera siguiente:

Las ecuaciones diferenciales para resolver numéricamente son:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, z, t)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y, z, t)$$

$$\frac{dz}{dt} = h(x, y, z, t)$$

Las ecuaciones del método de Runge-Kutta son

$$x_{i+1} = x_i + \frac{\Delta t}{6} (l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta t}{6} (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{\Delta t}{6} (n_1 + 2n_2 + 2n_3 + n_4)$$

donde

$$l_1 = f(x_i, y_i, z_i, t_i)$$

$$m_1 = g(x_i, y_i, z_i, t_i)$$

$$n_1 = h(x_i, y_i, z_i, t_i)$$

$$l_2 = f\left(x_i + \frac{\Delta t}{2} l_1, y_i + \frac{\Delta t}{2} m_1, z_i + \frac{\Delta t}{2} n_1, t + \frac{\Delta t}{2}\right)$$

$$m_2 = g\left(x_i + \frac{\Delta t}{2} l_1, y_i + \frac{\Delta t}{2} m_1, z_i + \frac{\Delta t}{2} n_1, t + \frac{\Delta t}{2}\right)$$

$$n_2 = h \left( x_i + \frac{\Delta t}{2} l_1, y_i + \frac{\Delta t}{2} m_1, z_i + \frac{\Delta t}{2} n_1, t + \frac{\Delta t}{2} \right)$$

$$l_3 = f \left( x_i + \frac{\Delta t}{2} l_2, y_i + \frac{\Delta t}{2} m_2, z_i + \frac{\Delta t}{2} n_2, t + \frac{\Delta t}{2} \right)$$

$$m_3 = g \left( x_i + \frac{\Delta t}{2} l_2, y_i + \frac{\Delta t}{2} m_2, z_i + \frac{\Delta t}{2} n_2, t + \frac{\Delta t}{2} \right)$$

$$n_3 = h \left( x_i + \frac{\Delta t}{2} l_2, y_i + \frac{\Delta t}{2} m_2, z_i + \frac{\Delta t}{2} n_2, t + \frac{\Delta t}{2} \right)$$

$$l_4 = f(x_i + \Delta t l_3, y_i + \Delta t m_3, z_i + \Delta t n_3, t + \Delta t)$$

$$m_4 = g(x_i + \Delta t l_3, y_i + \Delta t m_3, z_i + \Delta t n_3, t + \Delta t)$$

$$n_4 = h(x_i + \Delta t l_3, y_i + \Delta t m_3, z_i + \Delta t n_3, t + \Delta t)$$

- *Refracción pura*

Para el caso particular de estas ecuaciones diferenciales correspondientes a las de refracción pura (ecuaciones 4.95 a 4.97) se tiene que:

$$\frac{dx}{dt} = C \operatorname{sen} \alpha$$

$$\frac{dy}{dt} = C \operatorname{cos} \alpha$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \operatorname{sen} \alpha \frac{\partial C}{\partial x} - \operatorname{cos} \alpha \frac{\partial C}{\partial y}$$

Las ecuaciones del método de Runge-Kutta quedan así

$$x_{i+1} = x_i + \frac{\Delta t}{6} = (l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta t}{6} = (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i + \frac{\Delta t}{6} = (n_1 + 2n_2 + 2n_3 + n_4)$$

donde

$$l_1 = C(x_i, y_i) \cos \alpha_i$$

$$m_1 = C(x_i, y_i) \text{ sen } \alpha_i$$

$$n_1 = A(x_i, y_i) \text{ sen } \alpha_i - B(x_i, y_i) \cos \alpha_i$$

$$l_2 = C\left(x_i + \frac{\Delta t}{2} l_1, y_i + \frac{\Delta t}{2} m_1\right) \cos\left(\alpha_i + \frac{\Delta t}{2} n_1\right)$$

$$m_2 = C\left(x_i + \frac{\Delta t}{2} l_1, y_i + \frac{\Delta t}{2} m_1\right) \text{ sen}\left(\alpha_i + \frac{\Delta t}{2} n_1\right)$$

$$n_2 = A\left(x_i + \frac{\Delta t}{2} l_1, y_i + \frac{\Delta t}{2} m_1\right) \text{ sen}\left(\alpha_i + \frac{\Delta t}{2} n_1\right) +$$

$$+ B\left(x_i + \frac{\Delta t}{2} l_1, y_i + \frac{\Delta t}{2} m_1\right) \cos\left(\alpha_i + \frac{\Delta t}{2} n_1\right)$$

$$l_3 = C\left(x_i + \frac{\Delta t}{2} l_2, y_i + \frac{\Delta t}{2} m_2\right) \cos\left(\alpha_i + \frac{\Delta t}{2} n_2\right)$$

$$m_3 = C\left(x_i + \frac{\Delta t}{2} l_2, y_i + \frac{\Delta t}{2} m_2\right) \text{ sen}\left(\alpha_i + \frac{\Delta t}{2} n_2\right)$$

$$n_3 = A\left(x_i + \frac{\Delta t}{2} l_2, y_i + \frac{\Delta t}{2} m_2\right) \text{ sen}\left(\alpha_i + \frac{\Delta t}{2} n_2\right) +$$

$$+ B\left(x_i + \frac{\Delta t}{2} l_2, y_i + \frac{\Delta t}{2} m_2\right) \cos\left(\alpha_i + \frac{\Delta t}{2} n_2\right) +$$

$$l_4 = C(x_i + \Delta t l_3, y_i + \Delta t m_3) \cos(\alpha_i + \Delta t n_3)$$

$$m_4 = C(x_i + \Delta t l_3, y_i + \Delta t m_3) \text{ sen}(\alpha_i + \Delta t n_3)$$

$$n_4 = A(x_i + \Delta t l_3, y_i + \Delta t m_3) \cos(\alpha_i + \Delta t n_3) +$$

$$+ B(x_i + \Delta t l_3, y_i + \Delta t m_3) \text{ sen}(\alpha_i + \Delta t n_3)$$

donde

$C(x,y)$  corresponde a la celeridad del oleaje en el punto  $(x,y)$ ,  $A(x,y) = \frac{\partial C(x,y)}{\partial x}$  y

$$B(x,y) = \frac{\partial C(x,y)}{\partial y}.$$

Antes de aplicar estas ecuaciones se calcula la celeridad para los puntos  $(x,y)$  dentro de una malla a partir de la profundidad que le corresponda a cada punto ( $h = h(x,y)$ ) por medio de la ecuación de dispersión (ecuación 3.34). Con la celeridad  $C(x,y)$  en los puntos de la malla se obtienen numéricamente las derivadas parciales  $A(x,y)$  y  $B(x,y)$ .

## **APÉNDICE B**

## APROXIMACIONES DE ORDEN SUPERIOR EMPLEADAS EN EL MODELO DE REFRACCIÓN-DIFRACCIÓN-REFLEXIÓN

Debido a que las aproximaciones de diferencias finitas convencionales tienen errores de truncado grandes, para los modelos de olas se desarrollaron dos ecuaciones de diferencias finitas con un error de truncado pequeño.

### B.1 Ecuaciones de razón de flujo.

Para obtener una aproximación de diferencias finitas en la ecuación diferencial

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0} \quad (B.1)$$

con un error de truncado de orden uno en la variable  $t$  (tiempo) y orden cuatro en la variable  $x$  (distancia) se propone la ecuación siguiente

$$\begin{aligned} a \left( \frac{w_{i-1}^{p+1} - w_{i-1}^p}{\Delta t} \right) + b \left( \frac{w_i^{p+1} - w_i^p}{\Delta t} \right) + c \left( \frac{w_{i+1}^{p+1} - w_{i+1}^p}{\Delta t} \right) + \\ + d \left( \frac{U_{i+1/2}^p - U_i^p}{\Delta x} \right) + e \left( \frac{U_i^p - U_{i-1/2}^p}{\Delta x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (B.2)$$

donde los parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , y  $e$  son escogidos de modo tal que los términos que involucran derivadas respecto a  $t$  de orden mayor o igual a dos y derivadas respecto a  $x$  de orden mayor o igual a cinco sean despreciados.

Como la ecuación de los parámetros anteriores se basa en la expansión en serie de Taylor de una función de dos variables independientes, a continuación se escribe tal expansión

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, t + \Delta t) = f(x, t) + \Delta x \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) + \frac{1}{2} \left[ \Delta x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t) + \right. \\ \left. + \Delta x \Delta t \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} f(x, t) + \Delta t^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x, t) \right] + \frac{1}{6} \left[ \Delta x^3 \frac{\partial^3}{\partial x^3} f(x, t) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 3 \Delta x^2 \Delta t \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} f(x,t) + 3 \Delta x \Delta t^2 \frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2} f(x,t) + \Delta t^3 \frac{\partial^3}{\partial t^3} f(x,t) \Big] + \\
& + \frac{1}{24} \left[ \Delta x^4 \frac{\partial^4}{\partial x^4} f(x,t) + 4 \Delta x^3 \Delta t \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial t} f(x,t) + 6 \Delta x^2 \Delta t^2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} f(x,t) + \right. \\
& \quad \left. + 4 \Delta x \Delta t^3 \frac{\partial^4}{\partial x \partial t^3} f(x,t) + \Delta t^4 \frac{\partial^4}{\partial t^4} f(x,t) \right] \tag{B.3}
\end{aligned}$$

En este desarrollo se han eliminado los términos que involucran a derivadas mayores o iguales a 5 en  $x$  y a 2 en  $t$ .

La ecuación B.3 también se puede escribir así

$$\begin{aligned}
f(x + \Delta x, t + \Delta t) &= f(x, t) + \Delta x \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t) + \\
& + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3}{\partial x^3} f(x, t) + \frac{\Delta x^4}{24} \frac{\partial^4}{\partial x^4} f(x, t) + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \left[ f(x, t) + \Delta x \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) + \right. \\
& + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t) + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3}{\partial x^3} f(x, t) \Big] + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ f(x, t) + \Delta x \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) + \right. \\
& + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t) \Big] + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \left[ f(x, t) + \Delta x \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right] + \frac{\Delta t^4}{24} \frac{\partial^4}{\partial t^4} [f(x, t)] \tag{B.4}
\end{aligned}$$

Con base en la expresión anterior se plantean los términos que se incluyen en las ecuaciones de diferencias. Cuando la función cambia solamente en  $t$

$$w_{i+1}^{p+1} = w_{i+1}^p + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \left[ w + \Delta x \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right] \tag{B.5}$$

donde  $w$  sin índices representa a  $w = w(x_i, t_p) = w_i^p$  (no se anotaron por sencillez en su escritura).

De la ecuación B.1 se obtiene al derivar parcialmente respecto a  $x$  que

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial x} w = - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{B.6}$$



$$\frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} w = - \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\partial^4}{\partial t \partial x^3} w = - \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \quad (\text{B.8})$$

de modo que

$$\frac{w_{i+1}^{p+1} - w_{i+1}^{p+1}}{\Delta t} = \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta x \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} - \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \quad (\text{B.9})$$

de manera similar (se considera  $-\Delta x$  en lugar de  $\Delta x$ )

$$\frac{w_{i-1}^{p+1} - w_{i-1}^{p+1}}{\Delta t} = \frac{\partial w}{\partial t} + \Delta x \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \quad (\text{B.10})$$

el término con subíndice  $i$  queda definido con un solo sumando

$$\frac{w_i^{p+1} - w_i^{p+1}}{\Delta t} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (\text{B.11})$$

Por otra parte, cuando la variable  $U$  únicamente cambia con  $x$  y tomando en cuenta que  $U(x_i + \Delta x/2) = U_{i+1/2}^p$  implica que en lugar de  $\Delta x$  de la ecuación B.3 se considere que  $\Delta x/2$ , por lo cual se tiene:

$$U_{i+1/2}^p = U_i^p + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{8} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{48} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^4}{384} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4}$$

por lo que

$$\frac{U_{i+1/2}^p - U_i^p}{\Delta x} = \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\Delta x}{8} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^2}{48} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^3}{384} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \quad (\text{B.12})$$

de modo semejante se encuentra

$$\frac{U_i^p - U_{i-1/2}^p}{\Delta x} = \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\Delta x}{8} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^2}{48} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} - \frac{\Delta x^3}{384} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \quad (\text{B.13})$$

Al sustituir las ecuaciones B.9 a B.13 en la B.2 resulta

$$\begin{aligned}
& a \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \Delta x \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right) + b \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) + \\
& + c \left( \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta x \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right) + d \left( \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\Delta x}{8} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^2}{48} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right) + \\
& + e \left( \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\Delta x}{8} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^2}{48} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} - \frac{\Delta x^3}{384} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right) = 0
\end{aligned}$$

que también puede escribirse como

$$\begin{aligned}
& (a + b + c) \frac{\partial w}{\partial t} + \left( \frac{d + e}{2} \right) \frac{\partial U}{\partial x} + \left( a - c + \frac{d}{8} - \frac{e}{8} \right) \Delta x \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \\
& + \left( -\frac{a}{2} - \frac{c}{2} + \frac{d}{48} + \frac{e}{48} \right) \Delta x^2 \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \left( \frac{a}{6} - \frac{c}{6} + \frac{d}{348} - \frac{e}{348} \right) \Delta x^3 \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} = 0
\end{aligned} \tag{B.14}$$

Si en los primeros sumandos se establece que

$$a + b + c = 1 \tag{B.15}$$

$$d + e = 2 \tag{B.16}$$

Y además el tercero, cuarto y quinto término son iguales a cero para que la parte principal del error local de truncado contenga derivadas de orden mayor a cuatro y quede en la ecuación B.14 solamente la ecuación diferencial de interés (ecuación B.1) se plantea que

$$a - c + \frac{d}{8} - \frac{e}{8} = 0 \tag{B.17}$$

$$-\frac{a}{2} - \frac{c}{2} + \frac{d}{48} - \frac{e}{48} = 0 \tag{B.18}$$

$$\frac{a}{6} - \frac{c}{6} + \frac{d}{348} - \frac{e}{348} = 0 \tag{B.19}$$

La solución del sistema lineal formado por las ecuaciones B.15 a B.19 es la siguiente:

$$a = \frac{1}{24}, \quad b = \frac{22}{24}, \quad c = \frac{1}{24}, \quad d = 1 \quad \text{y} \quad e = 1$$

De esta manera, la aproximación en diferencias finitas a la ecuación diferencial B.1 que tiene un error de truncado de orden cuatro en  $x$  y orden uno en  $t$  queda así

$$\boxed{\frac{1}{24} \left( \frac{w_{i-1}^{p+1} - w_{i-1}^p}{\Delta t} \right) + \frac{22}{24} \left( \frac{w_i^{p+1} - w_i^p}{\Delta t} \right) + \frac{1}{24} \left( \frac{w_{i+1}^{p+1} - w_{i+1}^p}{\Delta t} \right) + \frac{U_{i+1/2}^p - U_i^p}{\Delta x} - \frac{U_i^p - U_{i-1/2}^p}{\Delta x} = 0} \quad (\text{B.20})$$

## B.2 Ecuación de continuidad.

Para obtener una aproximación de diferencias finitas a la ecuación diferencial

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0} \quad (\text{B.21})$$

con un error de truncado de orden uno en la variable  $t$  y orden cuatro en las variables  $x$  y  $y$  se propone la ecuación siguiente:

$$\begin{aligned} & a \left( \frac{w_{i-1j}^{p+1} - w_{i-1j}^p}{\Delta t} \right) + b \left( \frac{w_{i+1j}^{p+1} - w_{i+1j}^p}{\Delta t} \right) + c \left( \frac{w_{ij+1}^{p+1} - w_{ij+1}^p}{\Delta t} \right) + \\ & + d \left( \frac{w_{ij+1}^{p+1} - w_{ij+1}^p}{\Delta t} \right) + e \left( \frac{w_{ij}^{p+1} - w_{ij}^p}{\Delta t} \right) + f \left( \frac{U_{i+1/2j+1}^p - U_{i-1/2j+1}^p}{\Delta x} \right) + \\ & + g \left( \frac{U_{i+1/2j}^p - U_{i-1/2j}^p}{\Delta x} \right) + h \left( \frac{U_{i+1/2j-1}^p - U_{i-1/2j-1}^p}{\Delta x} \right) + k \left( \frac{V_{i+1j+1/2}^p - V_{i+1j-1/2}^p}{\Delta t} \right) + \\ & + l \left( \frac{V_{ij+1/2}^p - V_{ij-1/2}^p}{\Delta t} \right) + m \left( \frac{V_{i-1j+1/2}^p - V_{i-1j-1/2}^p}{\Delta t} \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

donde los parámetros que anteceden a cada diferencia son escogidos de tal modo que

los términos que involucran derivadas respecto a  $t$  de orden mayor o igual a dos, derivadas respecto a  $x$  de orden cinco o más y derivadas respecto a  $y$  de orden mayor o igual a cinco son despreciados.

Con base en la ecuación B.4 se escriben las ecuaciones que corresponden a cada diferencia. Así, para  $w_{i+1,j}^{p+1}$  se tiene

$$w_{i+1,j}^{p+1} = w_{i+1,j}^p + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \left( w + \Delta x \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \quad (\text{B.23})$$

donde  $w$  sin índices corresponde a  $w = w(x_i, y_j, t_p) = w_{i+1,j}^p$

De la ecuación B.21 se tiene que

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial x} w = - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \quad (\text{B.24})$$

$$\frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} w = - \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 V}{\partial^2 x \partial y} \quad (\text{B.25})$$

$$\frac{\partial^4}{\partial t \partial x^3} w = - \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 V}{\partial^3 x \partial y} \quad (\text{B.26})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial y} w = - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \quad (\text{B.27})$$

$$\frac{\partial^3}{\partial t \partial y^2} w = - \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 V}{\partial y^3} \quad (\text{B.28})$$

$$\frac{\partial^4}{\partial t \partial y^3} w = - \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} - \frac{\partial^4 V}{\partial y^4} \quad (\text{B.29})$$

al tomar en cuenta las expresiones anteriores en la ecuación B.23

$$\begin{aligned} \frac{w_{i+1,j}^{p+1} - w_{i+1,j}^p}{\Delta t} &= \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta x \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right) - \\ &- \frac{\Delta x^2}{2} \left( \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial y} \right) - \frac{\Delta x^3}{6} \left( \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 V}{\partial x^3 \partial y} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

de modo similar se obtendrán

$$\begin{aligned} \frac{w_{i-1,j}^{p+1} - w_{i-1,j}^p}{\Delta t} &= \frac{\partial w}{\partial t} + \Delta x \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right) - \\ &- \frac{\Delta x^2}{2} \left( \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial y} \right) + \frac{\Delta x^3}{6} \left( \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 V}{\partial x^3 \partial y} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

$$\begin{aligned} \frac{w_{i,j+1}^{p+1} - w_{i,j+1}^p}{\Delta t} &= \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta y \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right) - \\ &- \frac{\Delta y^2}{2} \left( \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial y} \right) - \frac{\Delta y^3}{6} \left( \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 V}{\partial x^3 \partial y} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

$$\begin{aligned} \frac{w_{i,j-1}^{p+1} - w_{i,j-1}^p}{\Delta t} &= \frac{\partial w}{\partial t} + \Delta y \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right) - \\ &- \frac{\Delta y^2}{2} \left( \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial y} \right) + \frac{\Delta y^3}{6} \left( \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 V}{\partial x^3 \partial y} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

$$\frac{w_{i,j}^{p+1} - w_{i,j}^p}{\Delta t} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (\text{B.34})$$

Por otra parte, cuando la función  $U$  cambia respecto a  $x$  y  $y$  de la Serie de Taylor que incluye hasta derivadas de cuarto orden (ecuación B.4) se puede escribir

$$\begin{aligned} U_{i+1/2,j+1}^p &= U_{i,j}^p + \frac{1}{2} \Delta x \frac{\partial U}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta x^2}{4} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \right. \\ &+ \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \Delta y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \left. \right) + \frac{1}{6} \left( \frac{\Delta x^3}{8} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{3}{4} \Delta x^2 \Delta y \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial y} + \right. \\ &+ \frac{3}{2} \Delta x \Delta y^2 \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y^2} + \Delta y^3 \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} \left. \right) + \frac{1}{24} \left( \frac{\Delta x^4}{16} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \frac{4}{8} \Delta x^3 \Delta y \frac{\partial^4 U}{\partial^3 \partial y} + \right. \\ &+ \frac{6}{4} \Delta x^2 \Delta y^2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{4}{2} \Delta x \Delta y^3 \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} + \Delta y^4 \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} \left. \right) \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

De modo similar para la función  $V$  que varía con  $x$  y  $y$ , de la Serie de Taylor se plantea

$$\begin{aligned}
 V_{i+1,j+1/2}^p &= V_{i,j}^p + \Delta x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \Delta x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \right. \\
 &+ \left. \frac{\Delta y^2}{4} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{6} \left( \Delta x^3 \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} + \frac{3}{2} \Delta x^2 \Delta y \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial y} + \frac{3}{4} \Delta x \Delta y^2 \frac{\partial^3 V}{\partial x \partial y^2} + \right. \\
 &+ \left. \frac{\Delta y^3}{8} \frac{\partial^3 V}{\partial y^3} \right) + \frac{1}{24} \left( \Delta x^4 \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} + \frac{4}{2} \Delta x^3 \Delta y \frac{\partial^4 V}{\partial^3 x \partial y} + \right. \\
 &+ \left. \frac{6}{4} \Delta x^2 \Delta y^2 \frac{\partial^4 V}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{4}{8} \Delta x \Delta y^3 \frac{\partial^4 V}{\partial x \partial y^3} + \frac{\Delta y^4}{16} \frac{\partial^4 V}{\partial y^4} \right)
 \end{aligned} \tag{B.36}$$

Con base en la ecuación B.35 se obtienen los desarrollos para  $U_{i+1,j}^p$ ,  $U_{i+1/2,j-1}^p$ ,  $U_{i-1/2,j+1}^p$ ,  $U_{i-1/2,j}^p$  y  $U_{i+1/2,j-1}^p$ .

Además, apoyándose en la ecuación B.36 se encuentran las expresiones correspondientes a  $V_{i,j+1/2}^p$ ,  $V_{i-1,j+1/2}^p$ ,  $V_{i+1,j-1/2}^p$ ,  $V_{i-1,j-1/2}^p$  y  $V_{i-1,1/2}^p$ .

Al sustituir las ecuaciones B.30 a B.34, las expresiones B.35, B.36 y las descritas en el párrafo anterior en la ecuación B.22 y después de considerar que  $\Delta x = \Delta y = \Delta s$  se obtiene

$$\begin{aligned}
 &(a+b+c+d+e) \frac{\partial w}{\partial t} + \left( \frac{f}{2} + \frac{f}{2} + \frac{g}{2} + \frac{g}{2} + \frac{h}{2} + \frac{h}{2} \right) \frac{\partial U}{\partial x} + \left( \frac{k}{2} + \frac{k}{2} + \frac{l}{2} + \frac{l}{2} + \frac{m}{2} + \right. \\
 &+ \left. \frac{m}{2} \right) \frac{\partial V}{\partial y} + (f-f+h-h) \frac{\partial U}{\partial y} + (k-k+m-m) \frac{\partial V}{\partial x} + \left( a-b + \frac{f}{8} - \frac{f}{8} + \frac{h}{8} - \frac{h}{8} + \right. \\
 &+ \left. \frac{g}{8} - \frac{g}{8} \right) \Delta s \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \left( c-d + \frac{f}{2} + \frac{f}{2} - \frac{h}{2} - \frac{h}{2} \right) \Delta s \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \left( \frac{f}{2} - \frac{f}{2} + \frac{h}{2} - \right. \\
 &- \left. \frac{h}{2} \right) \Delta s \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \left( -\frac{a}{2} - \frac{b}{2} + \frac{f}{48} + \frac{f}{48} + \frac{h}{48} + \frac{h}{48} + \frac{g}{48} + \frac{g}{48} \right) \Delta s^2 \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \\
 &+ \left( \frac{f}{8} - \frac{f}{8} - \frac{h}{8} + \frac{h}{8} \right) \Delta s^2 \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial y} + \left( -\frac{c}{2} - \frac{d}{2} + \frac{f}{4} + \frac{f}{4} + \frac{h}{4} + \frac{h}{4} \right) \Delta s^2 \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y^2} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{f}{6} - \frac{f}{6} + \frac{h}{6} - \frac{h}{6} \right) \Delta s^2 \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} + \left( \frac{a}{6} - \frac{b}{6} + \frac{f}{384} - \frac{f}{384} + \frac{h}{384} - \frac{h}{384} + \frac{g}{384} - \right. \\
& \left. - \frac{g}{384} \right) \Delta s^2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \left( \frac{f}{48} + \frac{f}{48} - \frac{h}{48} - \frac{h}{48} \right) \Delta s^3 \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} + \left( \frac{f}{16} - \frac{f}{16} + \frac{h}{16} - \right. \\
& \left. - \frac{h}{16} \right) \Delta s^3 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \left( \frac{c}{6} - \frac{d}{6} + \frac{f}{12} + \frac{f}{12} - \frac{h}{12} \right) \Delta s^3 \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} + \left( \frac{f}{24} - \frac{f}{24} + \right. \\
& \left. + \frac{h}{24} - \frac{h}{24} \right) \Delta s^3 \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} + \left( \frac{k}{2} - \frac{k}{2} - \frac{m}{2} + \frac{m}{2} \right) \Delta s \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \left( a - b + \frac{k}{2} + \frac{k}{2} - \frac{m}{2} - \right. \\
& \left. - \frac{m}{2} \right) \Delta s \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \left( c - d + \frac{k}{8} - \frac{k}{8} + \frac{m}{8} - \frac{m}{8} + \frac{l}{8} - \frac{l}{8} \right) \Delta s \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \left( \frac{k}{6} - \frac{k}{6} - \frac{m}{6} + \right. \\
& \left. + \frac{m}{6} \right) \Delta s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^3} + \left( -\frac{a}{2} - \frac{b}{2} + \frac{k}{4} + \frac{k}{4} + \frac{m}{4} + \frac{m}{4} \right) \Delta s^2 \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial y} + \left( -\frac{k}{8} - \frac{k}{8} - \frac{m}{8} - \right. \\
& \left. - \frac{m}{8} \right) \Delta s^2 \frac{\partial^3 V}{\partial x \partial y^2} + \left( -\frac{c}{2} - \frac{d}{2} + \frac{k}{48} + \frac{k}{48} + \frac{m}{48} + \frac{m}{48} + \frac{l}{48} + \frac{l}{48} \right) \Delta s^2 \frac{\partial^3 V}{\partial y^3} + \\
& + \left( \frac{k}{24} - \frac{k}{24} + \frac{m}{24} - \frac{m}{24} \right) \Delta s^3 \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} + \left( \frac{a}{6} - \frac{b}{6} + \frac{k}{12} - \frac{k}{12} + \frac{m}{12} - \frac{m}{12} \right) \Delta s^3 \frac{\partial^4 V}{\partial x^3 \partial y} + \\
& + \left( \frac{k}{16} - \frac{k}{16} + \frac{m}{16} - \frac{m}{16} \right) \Delta s^2 \frac{\partial^4 V}{\partial x^2 \partial y^2} + \left( \frac{k}{48} + \frac{k}{48} - \frac{m}{48} - \frac{m}{48} \right) \Delta s^3 \frac{\partial^4 V}{\partial x^2 \partial y^3} + \\
& + \left( \frac{c}{6} - \frac{d}{6} + \frac{k}{348} - \frac{k}{348} + \frac{m}{348} - \frac{m}{348} + \frac{l}{348} - \frac{l}{348} \right) \Delta s^3 \frac{\partial^4 V}{\partial y^4} = 0 \quad (\text{B.37})
\end{aligned}$$

Para que solamente existan los primeros tres sumandos y tener sólo la ecuación B.20, los coeficientes de cada término deben cumplir con las ecuaciones siguientes:

$$a + b + c + d + e = 1 \quad (\text{B.38})$$

$$f + g + h = 1 \quad (\text{B.39})$$

$$k + l + m = 1 \quad (\text{B.40})$$

$$a - b = 0 \quad (\text{B.41})$$

$$c - d + f - h = 0 \quad (\text{B.42})$$

$$-\frac{a}{2} - \frac{b}{2} + \frac{f}{24} + \frac{h}{24} + \frac{g}{24} = 0 \quad (\text{B.43})$$

$$-\frac{c}{2} - \frac{d}{2} + \frac{f}{2} + \frac{h}{2} = 0 \quad (\text{B.44})$$

$$+\frac{a}{6} - \frac{b}{6} = 0 \quad (\text{B.45})$$

$$+\frac{f}{24} - \frac{h}{24} = 0 \quad (\text{B.46})$$

$$-\frac{c}{6} - \frac{d}{6} + \frac{f}{6} - \frac{h}{6} = 0 \quad (\text{B.47})$$

$$a - b + k - m = 0 \quad (\text{B.48})$$

$$c - d = 0 \quad (\text{B.49})$$

$$-\frac{a}{2} - \frac{b}{2} + \frac{k}{2} + \frac{m}{2} = 0 \quad (\text{B.50})$$

$$-\frac{c}{2} - \frac{d}{2} + \frac{k}{24} + \frac{m}{24} + \frac{l}{24} = 0 \quad (\text{B.51})$$

$$\frac{a}{6} - \frac{b}{6} + \frac{k}{6} - \frac{m}{6} = 0 \quad (\text{B.52})$$

$$\frac{k}{24} - \frac{m}{24} = 0 \quad (\text{B.53})$$

$$\frac{c}{6} - \frac{d}{6} = 0 \quad (\text{B.54})$$

i) De las ecuaciones B.41, B.46, B.49 y B.53 se deduce que:  $a = b$ ;  $f = h$ ;  $c = d$  y  $k = m$ .

ii) De la ecuación B.44 se obtiene  $c = f$  y de la B.48 se encuentra  $a = k$ .



- iii) Al considerar la ecuación B.50 en la B.43 se encuentra que  $a = 1/24$ .
- iv) Al sustituir la ecuación B.40 en la B.53 se obtiene  $c = 1/24$ .
- v) Con base en lo anterior, se encuentra que  $b = 1/24$ ;  $k = 1/24$ ;  $m = 1/24$ ;  $d = 1/24$ ;  $f = 1/24$  y  $h = 1/24$ .
- vi) Con los valores anteriores, de la ecuación B.39 se obtiene que  $g = 22/24$ , de la B.40 que  $l = 22/24$  y de la B.38 que  $e = 20/24$ .

Al tomar en cuenta los valores obtenidos, la aproximación en diferencias finitas a la ecuación diferencial B.20 que tiene un error de truncado de orden cuatro en  $x$  y  $y$ , además de orden uno en  $t$  queda

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{24} \left( \frac{w_{i-1,j}^{p+1} - w_{i-1,j}^p}{\Delta t} \right) + \frac{1}{24} \left( \frac{w_{i+1,j}^{p+1} - w_{i+1,j}^p}{\Delta t} \right) + \frac{1}{24} \left( \frac{w_{i,j+1}^{p+1} - w_{i,j+1}^p}{\Delta t} \right) + \\
 & + \frac{1}{24} \left( \frac{w_{i,j-1}^{p+1} - w_{i,j-1}^p}{\Delta t} \right) + \frac{20}{24} \left( \frac{w_{i,j}^{p+1} - w_{i,j}^p}{\Delta t} \right) + \frac{1}{24} \left( \frac{U_{i+1/2,j+1}^p - U_{i-1/2,j+1}^p}{\Delta s} \right) + \\
 & + \frac{22}{24} \left( \frac{U_{i+1/2,j}^p - U_{i-1/2,j}^p}{\Delta s} \right) + \frac{1}{24} \left( \frac{U_{i+1/2,j-1}^p - U_{i-1/2,j-1}^p}{\Delta s} \right) + \frac{1}{24} \left( \frac{V_{i+1,j+1/2}^p - V_{i+1,j-1/2}^p}{\Delta s} \right) + \\
 & + \frac{22}{24} \left( \frac{V_{i,j+1/2}^p - V_{i,j-1/2}^p}{\Delta s} \right) + \frac{1}{24} \left( \frac{V_{i-1,j+1/2}^p - V_{i-1,j-1/2}^p}{\Delta s} \right) = 0
 \end{aligned}$$

(B.54)