

116

27



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE QUIMICA

GUIA PARA LA UTILIZACION DEL DISEÑO ESTADISTICO DE EXPERIMENTOS EN LOS MODULOS DE INTEGRACION TECNOLOGICA EN EL TESE.



COMITÉ FACULTAD DE QUIMICA

TRABAJO ESCRITO VIA CURSOS DE EDUCACION CONTINUA

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

QUIMICA FARMACEUTICA BIOLOGA

P R E S E N T A :

CATALINA VERONICA ZAPATA GARCIA



MEXICO, D. F.

1996

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

TESIS CON FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL



Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO

PRESIDENTE	PROF. JOSÉ LUIS GONZÁLEZ MACHADO
VOCAL	PROF. DOMINGO ALARCÓN RUIZ
SECRETARIO	PROF. GUILLERMO MOLINA GÓMEZ
1er. SUPLENTE	PROFA. ALMA ROSA GRISELDA ZETINA VELEZ
2o. SUPLENTE	PROF. GUILLERMO ANTONIO SEGURA ESPINOSA

**SITIO DONDE SE DESARROLLO EL TEMA
TECNOLÓGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE ECATEPEC.**

**ASESOR DEL TEMA:
I.Q. JOSÉ LUIS GONZÁLEZ MACHADO**

**SUSTENTANTE DEL TEMA:
CATALINA VERÓNICA ZAPATA GARCÍA**

*A mis padres: OFELIA GARCÍA VILLANUEVA
por la dedicación y entrega a tus hijos.
Y ROBERTO ZAPATA FLORES
por el apoyo brindado.*

*A las fuentes de mi inspiración: Mi hija VERITO
y el compañero de mi vida AARÓN CÉSAR GÓMEZ*

Comparto esta alegría con

*Mis abuelos: DOÑA EVITA' Y DON MEMO
DON GREGORIO'
DOÑA CATALINA'*

*Mis hermanos: JORGE Y JUANA, ISAAC Y FANY,
GUILLERMO Y MARGARITA,
SALVADOR Y CECILIA.*

*Mis sobrinos: JORGE, LUCÍA, NEFTALÍ,
AYÁX, JONATÁN, LESLIE,
MEMITO, ANA KAREN,
ESTEFANÍA Y CRISTOFER.*

Agradecimientos

*AL TECNOLÓGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE ECATEPEC.
por las facilidades prestadas para el desarrollo de este trabajo.*

*AL I.Q. JOSÉ LUIS GONZÁLEZ MACHADO
por la asesoría brindada*

*AL I.Q. GUILLERMO MOLINA GÓMEZ
por el entusiasmo e interés en la culminación del trabajo escrito.*

AL HONORABLE JURADO

A MIS MAESTROS DE LA FACULTAD DE QUÍMICA

A MIS COMPAÑEROS Y AMIGOS DE LA FACULTAD DE QUÍMICA

A LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	1
1a Parte	
1.1.- La investigación científica	2
1.1.1.- Métodos generales de la investigación científica	2
1.2.- Etapas en el proceso de investigación	4
1.2.1.- Elección del tema de la investigación	5
1.2.2.- El marco teórico	5
1.2.2.1.- La investigación documental	6
2a Parte	
2.1.- Planteamiento del problema	9
2.2.- La hipótesis	9
2.2.1.- Elementos de la hipótesis	10
2.2.2.- Características de la hipótesis	10
2.3.- Diseño del experimento	10
2.3.1.- Tres principios básicos en el diseño de experimentos	11
2.3.2.- Docimas de hipótesis	13
2.3.3.- Análisis de varianza	15
2.4.- Diseños experimentales	18
2.4.1.- Planes de experimentación	18
2.4.1.1.- Diseño completamente al azar (Diseño de un factor)	19
2.4.1.2.- Diseño de bloques completos al azar	28
2.4.1.3.- Diseño de cuadro latino	33
2.4.1.4.- Clasificación de los planes de investigación	42
2.5.- Conclusiones	44
Bibliografía	45
Glosario	46
Atexo	48

INTRODUCCIÓN.

El trabajo pretende introducir al estudiante al campo del diseño y análisis de experimentos. Como todos sabemos en la actualidad requerimos de la planeación de los proyectos que estamos por iniciar tanto en la investigación científica como en la producción de bienes. Por lo tanto, es preciso que los estudiantes de licenciatura y en especial los de ciencias químico-biológicas, aprendan a realizar proyectos previamente diseñados por ellos mismos ya que de ésta manera podrán adquirir la habilidad en dicha área para su vida profesional.

Los estudiantes de las asignaturas Módulos de integración tecnológica de 3er a 8o semestre de las carreras de Ingeniería Química e Ingeniería Bioquímica en el TECNOLÓGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE ECATEPEC, llevan a cabo un proyecto sobre líneas ya definidas. Sin embargo, hace falta un documento que los oriente tanto metodológicamente para que la investigación sea más eficiente, como en el diseño de experimentos para asegurar que los datos que se obtengan sean los apropiados de modo que permitan un análisis objetivo que conduzca a deducciones válidas con respecto a un problema establecido.

Con respecto a la metodología de la investigación podemos decir que, en el área de las ciencias químico-biológicas se cuenta en la actualidad con uno de los mayores y mejor organizado acervo documental. Hoy se considera que los químicos se encuentran entre los principales usuarios y productores de la literatura tecnocientífica y debido a ello, en éste campo se duplican los conocimientos a un ritmo muy acelerado. Es por esto que se requiere que se conozcan los antecedentes de los proyectos propuestos, y entonces se hace necesaria la metodología de la investigación, para que ésta sea más completa.

Por otro lado, en el desarrollo de las ciencias en general y en particular de las ciencias químicas y biológicas el conocimiento de la metodología estadística es un arma imprescindible para la obtención, análisis e interpretación de todos los datos que proceden de las observaciones sistemáticas o de experimentaciones proyectadas específicamente para conocer los efectos de uno o varios factores que intervienen en fenómenos bajo estudio.

Éste trabajo es solo una guía y por lo tanto se recomienda consultar el gran acervo que a éste respecto existe.

1a. PARTE

1.1.- LA INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA.

Si entendemos el acto de investigar como el de indagar algo, reunir datos en torno a un asunto, ampliar los conocimientos respecto a cualquier tema, entonces todos los seres humanos investigamos, sin embargo no todas las personas tenemos un método de investigación.

La investigación no es una ciencia. Es una técnica que logra con el manejo de métodos propios de las disciplinas que integran el conocimiento humano, la reunión o discernimiento de datos que pueden aprovecharse en un enfoque, enteramente personal y nuevo del asunto que hayamos elegido.

Los métodos y las técnicas se interrelacionan y complementan; sin embargo, cabe señalar que los métodos son los procedimientos que se siguen para llevar a cabo un estudio sistemático de los fenómenos y las técnicas son los recursos de los cuales se vale el investigador para recabar la información.

Para realizar una tarea cualquiera, necesitamos determinar primero lo que nos proponemos lograr. El conocimiento verdadero no puede ser la posesión de datos aislados y desordenados. al conocimiento llegamos por las etapas correlativas que requiere todo proceso dialéctico.

El Doctor Eli De Gortari señala en su obra *Introducción a la lógica dialéctica* tres fases al respecto:

- 1.- Fase indagadora.- Busca aspectos nuevos en un problema.
- 2.- Fase demostrativa .-Comprueba los hallazgos.
- 3.- Fase expositiva.- Comunica los resultados para que sirvan a su vez, como punto de partida en un nuevo proceso dialéctico.

Como comentario final podemos decir que, a este ordenamiento de los conocimientos los llamamos método.

1.1.1.- MÉTODOS GENERALES DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA.

- 1.- El que se basa en la evidencia lógica. Filosofía, Matemáticas.
- 2.- El que se basa en la experiencia y en la experimentación. Física, Química, Biología.

3.- El que se basa en la autoridad, que se apoya en documentos y testimonios. Ciencias Históricas, Teología.

De acuerdo a estas tres ramas metodológicas. Es posible referirnos a los métodos fundamentales siguientes:

Método Teórico Deductivo.- Este método consiste en obtener conclusiones particulares a partir de una ley universal es propio de la filosofía y de las matemáticas.

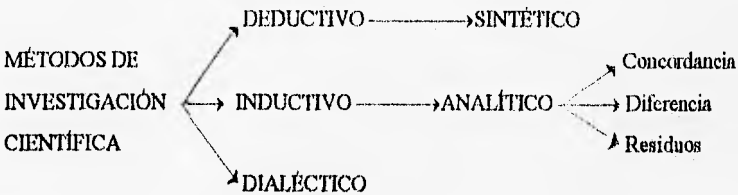
Método Inductivo.- Es el proceso en el que a partir del estudio de casos particulares se obtienen conclusiones o leyes universales que explican o relacionan los fenómenos estudiados, se basa en el muestreo, la observación y la experimentación.

Método Sintético.- Es un proceso por el cual se relacionan algunos hechos y se formula una teoría que unifica los diversos elementos.

Método Analítico.- En éste método se distinguen los elementos de un fenómeno y se procede a analizar ordenadamente cada uno de ellos por separado. La Química, la Física, y la Biología utilizan este método. El análisis de un gran número de casos experimentados nos lleva a formular las leyes universales.

Método Dialéctico.- Este método considera los fenómenos históricos y sociales en continuo movimiento. Dio origen al materialismo histórico de la humanidad.

Lo anterior se resume en el siguiente esquema:



Es imposible entonces hablar de investigación científica sin tener que hablar del método científico; podemos decir que entre la investigación científica y el conocimiento científico encontramos el método científico.

En este trabajo nos ocuparemos de la investigación experimental por medio del Método Analítico.

La investigación experimental se presenta mediante la manipulación de una variable no comprobada, en condiciones rigurosamente controladas, con el fin de describir de que modo o porque causa se produce una situación o acontecimiento particular.

En el experimento el investigador maneja de manera deliberada una o más variables experimentales y luego observa lo que ocurre en condiciones controladas

1.2.- ETAPAS EN EL PROCESO DE INVESTIGACIÓN.

1. - Elección del tema.
- 2.- Marco teórico. Con base en la investigación bibliográfica se fundamenta la teoría que sustentará la investigación.
- 3.- Planteamiento del problema. Es la definición del objeto de estudio, sus alcances y limitaciones.
- 4.- Formulación de la hipótesis y variables. Consiste en establecer la respuesta tentativa al problema y las relaciones causales entre el fenómeno y sus partes, con la consecuente operatividad de las variables.
- 5.- Diseño del plan experimental.
 - a).- Diseño de la investigación.
 - b).- Determinación de la población y muestra.
 - c).- Selección de los instrumentos de medición.
 - d).- Elaboración de los instrumentos de medición.
 - e).- Procedimiento para la obtención de datos.
- 6.- Realización del experimento. Se aplican las técnicas de la investigación bibliográfica y de laboratorio así como la recolección de información.
- 7.- Tratamiento de datos. Utilización de métodos estadísticos.
- 8.- Interpretación y evaluación de resultados.
- 9.- Discusión de los resultados de acuerdo a los conocimientos científicos.
- 10.- Análisis económico y de utilidad práctica con contribución a la comunidad.
- 11.- Conclusiones.

1.2.1.- ELECCIÓN DEL TEMA DE INVESTIGACIÓN.

La elección del tema consiste en determinar con claridad y precisión el contenido del trabajo, pero ésta elección no es tan fácil. Sin embargo, de la observación cotidiana pueden surgir muchos temas a investigar; de hecho, un problema no es más que un cuestionamiento a la existencia de un fenómeno determinado, en este ámbito debemos tomar en cuenta varios aspectos con respecto al investigador y al tema como son:

El interés por el tema, el conocimiento del tema, así como su relación con temas afines, también es fundamental considerar de qué tiempo se dispone para su realización por esto es conveniente elaborar una agenda de trabajo, al igual que es necesario reflexionar sobre las exigencias de tipo económico, es decir si son necesarios elementos costosos, que no estén al alcance, lo cual llevaría necesariamente a abandonar el tema, y de la misma forma debemos cerciorarnos si el material necesario para el trabajo está disponible, pues sin esta seguridad no se debe iniciar el desarrollo del tema. Por otro lado, debemos constatar si el tema llena los requisitos para el desarrollo adecuado de la investigación, se debe prever su utilidad con el fin de realizar un trabajo que se proyecte a los demás y por tanto se hace necesario que sea original y así evitar duplicidad de temas.

Con lo anterior el investigador debe llegar a un juicio claro sobre el porque de su investigación, sobre la intención que con ella persigue o la idea que habrá de orientarlo durante todo su trabajo.

1.2.2.- EL MARCO TEÓRICO.

El marco teórico, marco conceptual o marco de referencia es la exposición y análisis de la teoría o grupo de teorías que sirven como fundamento para explicar los antecedentes e interpretar los resultados de la investigación.

El marco teórico nos amplía la descripción del problema, integra la teoría con la investigación y sus relaciones mutuas, y siendo éste el respaldo que se pone al problema, puede cuestionarlo, o conducir a la reformación e incluso a un cambio.

La construcción del marco teórico no es una etapa que sólo se realiza al inicio de la investigación; de

hecho se desarrolla durante todo el proceso para ir perfeccionándolo y estar en posibilidades de diseñar la hipótesis y los instrumentos de recolección para su prueba, con la mayor consistencia posible.

Para elaborar el marco teórico el investigador puede acudir a fuentes de conocimiento popular, de divulgación y científico. La estructuración del marco teórico implica no sólo recopilar la información sino manejarla a nivel conceptual, es decir, establecer relaciones entre los fenómenos y los hechos.

1.2.2.1.- La investigación documental.

Las investigaciones requieren un respaldo teórico y por lo tanto, han de hacer uso de manera imprescindible, del recurso bibliográfico, dentro de una gran diversidad de aspectos. Las variantes en cuanto a temas, extensión y profundidad, abarcan desde la búsqueda de valores y constantes fisicoquímicas hasta la revisión de artículos, libros tesis, patentes etc.

Se recomienda emprender acciones preliminares de aproximación a las fuentes, con objeto de seleccionar las más adecuadas, establecer claramente los límites de la búsqueda, ahorrar tiempo y fijar los criterios que orienten y determinen la selección de la recopilación de los materiales.

La revisión de las fuentes bibliográficas consiste en leer y analizar las publicaciones referentes al problema por investigar, para lo que se puede acudir a las bibliotecas, hemerotecas y librerías donde existen ficheros, bibliografías, índices y catálogos generales, en los cuales se encuentran ordenados alfabéticamente los autores, títulos y materias.

Los trabajos de recopilación bibliográfica acerca de un tema específico, pueden organizarse como colecciones de fichas, de acuerdo con el esquema de sistematización que se adopte. Las fichas permiten conservar datos acerca de libros, artículos, conferencias, entrevistas, etc., también tienen la enorme ventaja de que facilitan el trabajo, pues se archivan en ficheros bibliográficos en los que se ordenan por temas, de tal manera que el investigador tiene acceso a la información cada vez que lo necesite, además de que este acervo incrementarse indefinidamente conforme se vayan recopilando más datos.

Una vez que se han elegido los textos y artículos de referencia se procede a analizarlos y a elaborar las fichas bibliográficas, y de trabajo correspondientes.

Fichas bibliográficas. Sirven para registrar las diversas fuentes que se han utilizado, los datos que deben aparecer son: nombre del autor empezando por el apellido, título del libro, subrayado, número de edición, país o ciudad donde se publicó el libro, casa editorial que hace la edición, fecha de publicación, número de páginas, nota bibliográfica. Puede ir al anverso o en el reverso de la tarjeta contenido se ilustra en las siguientes figuras.

Ficha bibliográfica de libro.

Cotton, F. Albert y Wilkinson, Geoffrey. Química inorgánica avanzada, 4a. edición, México, Limusa, 1976, 1173 pp.

Ficha bibliográfica de revista.

Vázquez-Yanes, Carlos. El almacenamiento prolongado de semillas. Revista, Ciencia y desarrollo, CONACYT, vol. XVIII, número 106, septiembre-octubre, México 1992.

Después de registradas las fuentes de información se procede a la consulta, a fin de obtener una información que sea consistente con la hipótesis de trabajo y con el esquema de investigación.

El registro de la información se hace en fichas de trabajo, mismas que contendrán ideas, opiniones o sucesos obtenidos de las fuentes consultadas o bien, los juicios del investigador que derivan de esa consulta. Esta información puede ser textual y se escribe entre comillas; o puede ser síntesis o análisis.

Ejemplo.

Vitamina k.

Puede ocurrir una deficiencia de vitamina k en el recién nacido debido a la baja concentración de protrombina. La enfermedad hemorrágica hipoprotrombinemia del recién nacido puede ser corregida con la administración de fitilmenaquinona

Beal. Virginia A.
Nutrición en el ciclo de vida.
pag. 264.

El texto en las fichas de trabajo corresponde a un solo concepto. Es conveniente organizar las fichas de trabajo de acuerdo a los títulos de los conceptos registrados y luego leerlas para confirmar si la información es completa, sobra o falta algo. Hecha esta separación se procede a redactar el marco teórico el cual debe contener los datos registrados en las fichas pero bien ordenados y coherentes.

2a. PARTE

2.1.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

Cualquier indagación científica nace de una situación problemática que impulsa al investigador a emprender la búsqueda de una solución. Al iniciar el proceso el investigador no tiene una noción clara del problema, pero generalmente intenta aislar uno a uno los elementos fundamentales de su incertidumbre y llega a formular un enunciado claro y completo.

Entonces para plantear un problema debemos tomar en cuenta lo siguiente:

- 1.- Plantear el tema que se quiere estudiar. Presentar una idea clara y precisa del problema.
- 2.- Describir en no más de tres cuartillas ni menos de dos, el motivo por el cual se escogió el tema, de que hipótesis probable se va a partir, que se quiere demostrar y que procedimientos se emplearan para demostrarlo.
- 3.- Cuando el investigador describe su problema, presenta los antecedentes del estudio en el marco teórico.

Una vez hecho esto se formula el problema el cual se fundamenta en toda la información, para esto se tiene que hacer una reestructuración de ésta. Lo anterior nos lleva a la definición del problema, después de formulado el problema se procede a plantear la hipótesis, también mencionaremos que la investigación experimental se presenta mediante la manipulación de variables experimentales que son sometidas a condiciones controladas.

2.2.- LA HIPÓTESIS

La hipótesis es la respuesta tentativa a un problema; es una proposición que se pone a prueba para determinar su validez, "La hipótesis es un eslabón necesario entre teoría y la investigación que lleva al descubrimiento de nuevas aportaciones al saber."

La hipótesis es, por tanto una respuesta sujeta a comprobación, su función primordial es probar empíricamente una relación entre fenómenos. La Formulación de la hipótesis es una etapa fundamental en el proceso de la investigación, y el llegar a establecerla es un trabajo arduo que parte

desde las afirmaciones más genéricas de la experiencia personal hasta el conocimiento del fenómeno que se va a explicar.

2.2.1.- ELEMENTOS DE LA HIPÓTESIS.

Estos elementos son las variables que son objetos de estudio, medición y control de la investigación, hay variables dependientes e independientes, las dependientes son las mediciones del fenómeno que se intenta explicar y será sujeto de estudio a lo largo de la investigación, y las variables independientes son todos aquellos factores elementos que explican un fenómeno o la conducta del fenómeno, estos son manipulados por el investigador para ver el efecto de la variable dependiente.

2.2.2.- CARACTERÍSTICAS DE LA HIPÓTESIS.

La hipótesis debe plantearse conceptual y operativamente de manera clara y precisa de tal modo que si otro investigador quisiera probarla esté en posibilidad de hacerlo, debe ser específica y debe referirse a variables objetivas, debe fundamentarse en el marco teórico para que sea científica, debe estar de acuerdo con las técnicas y recursos disponibles.

2.3.- DISEÑO DEL EXPERIMENTO.

Un experimento diseñado es una prueba o serie de pruebas en las cuales se inducen cambios deliberados en las variables de entrada de un proceso o sistema, de modo que sea posible observar e identificar las causas de los cambios en la respuesta de salida. Para que un experimento se realice en la forma más eficiente es necesario emplear métodos científicos en su planificación, el diseño estadístico de experimentos es el proceso de planear un experimento para obtener datos apropiados, que pueden ser analizados mediante métodos estadísticos con objeto de producir conclusiones válidas y objetivas.

2.3.1.- TRES PRINCIPIOS BÁSICOS EN EL DISEÑO DE EXPERIMENTOS.

Los resultados de los experimentos están afectados no solamente por la acción de los tratamientos, sino también por las variaciones extrañas que tienden a encubrir sus efectos. En muchos campos de la investigación, y a pesar del tiempo y del trabajo que puedan dedicarse a un experimento, los resultados son tan grandemente influidos por los errores experimentales, que solamente las diferencias notables entre tratamientos pueden detectarse y aún éstas, pueden estar sujetas a una duda considerable. En consecuencia, la investigación estadística de los métodos para incrementar la exactitud de los experimentos ha desempeñado un papel importante en la investigación experimental estos se resumen en los tres principios básicos que a continuación se enumeran y que nos sirven para: aumentar la magnitud del experimento por medio de repeticiones, manejar el experimento de tal manera que los efectos de la variabilidad se reduzcan y por último el agrupamiento hábil de las unidades experimentales (UE) para que sea comparables los tratamientos.

1.- Obtención de réplicas. Esta se refiere a la repetición de experimento básico. Ya que:

a.- Proporciona una estimación del error experimental que actúa como una *unidad básica de medida* para indicar el significado de las diferencias observadas o para determinar la amplitud del intervalo de confianza.

b.- La reproducción proporciona algunas veces una estimación más apropiada del error experimental.

c.- Nos capacita para obtener una estimación más precisa del efecto medio de cualquier factor porque la variabilidad muestral es de la siguiente forma:

$$\sigma_{\bar{y}}^2 = \sigma^2/n \quad \text{donde}$$

σ^2 = varianza del error experimental medio verdadero y.

n = número de reproducciones.

El término errores experimentales mencionados antes se aplican a variaciones extrañas que tienden a encubrir los efectos de los resultados experimentales en este caso error no es sinónimo de equivocación, podemos distinguir dos fuentes de error: La variabilidad inherente al material experimental al cual se aplican los tratamientos, la fuente de dicha variabilidad que es la falta de uniformidad en la conducción física de la técnica experimental, en las cuales incluyen errores de experimentación, de observación y de medición. Por otro lado el término error experimental describe el fracaso de llegar a resultados idénticos con dos unidades experimentales tratadas idénticamente.

2.- Aleatorización. Se entiende por aleatorización el hecho de que tanto la asignación del material experimental como el orden en que se realicen las pruebas individuales o ensayos se determinan al azar. Los métodos estadísticos requieren que las observaciones sean variables aleatorias. Una variable aleatoria es una función con valores numéricos, definida sobre un espacio muestral y el muestreo aleatorio consiste en darle a todas las muestras posibles de una población la misma posibilidad de ser seleccionadas.

Los errores asociados a las unidades experimentales tenderán a correlacionarse. La aleatorización asegura que el efecto de la correlación en la comparación de tratamientos será tan pequeña como sea posible en ocasiones la aleatorización nos sirve para eliminar esas tendencias.

3.- Control local. Se refiere a la cantidad de balanceo, bloqueo y agrupamiento de las unidades experimentales que se emplean en el diseño estadístico adoptado.

El propósito del control local es hacer el diseño experimental más eficiente. Este hace más sensitiva cualquier prueba de significancia. Este aumento de eficiencia es porque en este control local se reduce la magnitud de la estimación del error experimental y esto se lleva a cabo de la siguiente forma:

- a).- Usando material experimental más homogéneo
- b).- Usando información proporcionada por variables aleatorias relacionadas.
- c).- Cuidando la dirección del experimento.
- d).- Usando un diseño experimental más eficiente.

Antes de pasar a otra cosa debemos definir los términos *agrupamiento, bloqueo y balanceo*.

Agrupamiento. Es la colocación de un conjunto de unidades experimentales (UE) homogéneas en grupos de modo que los diferentes grupos puedan sujetarse a distintos tratamientos.

Bloqueo. Es la creación de grupos con características más homogéneas. El análisis por bloques es una técnica que se emplea para incrementar la precisión de un experimento. Al realizarse un análisis por bloques se hacen las comparaciones entre condiciones de interés del experimento dentro de cada bloque

Balanceo. Por balanceo damos a entender la obtención de las unidades experimentales, el agrupamiento, el bloqueo y la asignación de los tratamientos a las UE de tal modo que resulte una configuración balanceada.

2.3.2.- Docimas de hipótesis.

Una hipótesis es un enunciado respecto a la población estadística y usualmente es un enunciado con respecto a uno o más parámetros de la población. Por ejemplo, los siguientes enunciados podrían tomarse como hipótesis: 1) El jugo de toronja contiene en promedio 0.45 mg/ml de ácido ascórbico, 2) El contenido promedio de nicotina en cierta marca de cigarrillos es menor de 0.7 mg/cigarrillo, etc. Frecuente es deseable probar la validez de tales hipótesis. A fin de hacer esto, se lleva a cabo un experimento, y la hipótesis es desechada si los resultados obtenidos del experimento son improbables bajo dicha hipótesis. Si los resultados no son improbables, la hipótesis no se rechaza, por ejemplo, de las hipótesis anteriores 1) En la determinación de ácido ascórbico en 100 muestras de jugo de toronja. Si se obtienen en promedio 0.43 mg/ml la hipótesis se rechaza y si obtenemos 0.45 mg/ml la hipótesis se acepta. Para asegurar esta conclusión se requiere del ensayo estadístico de hipótesis (docimas de hipótesis o pruebas de hipótesis).

Resumiendo, Una hipótesis estadística es una aseveración sobre un modelo probabilístico y una dócima de hipótesis o prueba de hipótesis es un método para dictaminar sobre la aceptabilidad de esa aseveración, usando la muestra como guía.

La teoría estadística ha desarrollado técnicas para probar dichas hipótesis relativas a parámetros poblacionales: tales métodos se conocen como pruebas de significancia estadística. Las pruebas de hipótesis están basadas en la nulidad de las diferencias; es decir, la diferencia de promedios de muestras es cero o estima a cero (o la diferencia entre lo experimental observado y lo teórico esperado es cero, o situaciones similares). Dicha diferencia de promedios se simboliza por H_0 y se conoce como hipótesis nula. La hipótesis contraria se conoce como alternativa se expresa como H_A y esta basada en la no nulidad de las diferencias.

El juego de hipótesis entonces puede ser el siguiente:

$H_0: \mu_1 = \mu_2$	o	$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$
en oposición con		en oposición con
$H_A: \mu_1 \neq \mu_2$	o	$H_A: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Donde μ es el valor medio de los valores de la población en estudio.

H_A excluye a H_0 , o viceversa. También se dice que no se rechaza a H_A y se rechaza H_0 o viceversa.

En general, para cualquier juego de hipótesis se tienen las posibilidades que se presentan en la tabla siguiente:

Decisión	Situación verdadera	
	La hipótesis es cierta	La hipótesis es falsa
Rechazo de la hipótesis	Error tipo I	No hay error
No rechazo de la hipótesis	No hay error	Error tipo II

Como acabamos de ver, al efectuar la prueba de hipótesis pueden cometerse dos tipos de error. Ocurre un error de tipo I cuando la hipótesis nula es rechazada siendo verdadera. Si la hipótesis nula no es rechazada cuando es falsa se comete un error de tipo II. Las probabilidades de cometer estos errores reciben un símbolo especial.

$$\alpha = P(\text{error de tipo I}) = P(\text{rechazar } H_0 \text{ cuando es cierta})$$

$$\beta = P(\text{error de tipo II}) = P(\text{no rechazar } H_0 \text{ cuando es falsa})$$

Por otra parte es conveniente señalar que de acuerdo al parámetro que se propone en la hipótesis, se emplean la distribución t, el análisis de varianza con la prueba F, las pruebas de Duncan, de Tukey, de ji cuadrada (χ^2), etc.

Supongamos que deseamos conocer si una muestra al azar podría provenir de una población normal con media μ_0 . Más específicamente, suponiendo normalidad, la hipótesis:

$$H_0: \mu = \mu_0 \text{ será probada con respecto a}$$

$$H_A: \mu \neq \mu_0$$

Para una α elegida el procedimiento consiste en calcular:

$$t = (\bar{X} - \mu_0) / S_x = \sqrt{n} (\bar{X} - \mu_0) / S$$

y rechazar H_0 si $t \leq -t_{(1-\alpha/2)(n-1)}$ o si $t \geq t_{(1-\alpha/2)(n-1)}$; de otra manera acepte H_0 .

Ejemplo:

Un metalurgista hizo cuatro determinaciones del punto de fusión del manganeso: 1269°, 1271°, 1263° y 1265°C. ¿Esos valores están de acuerdo con el valor supuesto de 1260°C? Aquí la hipótesis es:

$$H_0: \mu = 1260^\circ\text{C} \quad \text{y} \quad H_A: \mu \neq 1260^\circ\text{C}$$

Por medio de la prueba t.

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S_x} = \frac{1267 - 1260}{1862} = 3.83$$

$$t_{\text{calculada}} = 3.83$$

$t_{\alpha, (n-1)} = t_{0.975, (3)} = 3.182$ (se supuso un nivel de 5% de significancia), H_0 es rechazada ya que $t_{calculada} \geq t_{tablas}$ y se concluye que el valor supuesto en la hipótesis nula es incorrecto. (ver tabla t en anexo)

Usando un nivel de 5% de significancia, como es sabido, la probabilidad de rechazar la hipótesis cuando esta es verdadera no será mayor de 0.05.

2.3.3.- Análisis de varianza.(ANDEVA)

La información obtenida a partir de un experimento diseñado estadísticamente puede ser analizada por el método conocido como análisis de varianza. Se trata de una técnica consistente en aislar y estimar las varianzas separadas que contribuyen a la total varianza de un experimento. El análisis de varianza es quizá la técnica estadística usada con más frecuencia, esta técnica permite probar ciertas hipótesis mediante procedimientos relativamente fáciles.

Es útil describir las observaciones mediante el modelo estadístico lineal:

$$Y_i = \mu + \epsilon_i ; i = 1, 2, \dots, n$$

El concepto importante en este modelo reside en la representación de la variable observable Y_i como la suma de un parámetro (μ) y una variable aleatoria no observable (ϵ_i) dando origen a una ecuación que pretende explicar el comportamiento de la variable aleatoria Y_i .

El análisis de varianza se basa en el estudio de la variabilidad de las observaciones, esto se logra mediante la secuencia siguiente:

- a).- Clasificar o separar las causas parciales de variación.
- b).- Calcular los grados de libertad (GL) para cada factor o causa parcial de variación.
- c).- Calcular la suma de cuadrados de las desviaciones de las observaciones (SC) con respecto a la media, para cada una de las causas de variación.
- d).- Calcular la varianza o cuadrado medio (CM) para cada factor de variación.
- e).- Probar la hipótesis por medio de la prueba de Fisher, conocida como la prueba F o relación de varianzas. (ver tabla F en anexo)
- f).- Estimar la variabilidad por varios métodos.

Todo el procedimiento para probar $H_0: \mu = 0$ en oposición a $H_A: \mu \neq 0$ mediante la distribución F se resume usualmente en una tabla conocida como tabla de análisis de varianza, esto es con el objeto de tener a mano la información necesaria.

FUENTE DE VARIACIÓN	GRADOS DE LIBERTAD	SUMA DE CUADRADOS	CUADRADOS MEDIOS	F ₀
Media	1	$n\bar{Y}^2$	$n\bar{Y}^2$	$\frac{n\bar{Y}^2}{S^2}$
Error	n-1	$\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$	$\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}{n-1} = S^2$	
Total	n	$\sum_{i=1}^n Y_i^2$		

La estadística F_0 , bajo la hipótesis nula, tiene una distribución $F_{1, n-1}$, y por tanto la regla de decisión que nos garantiza una prueba con nivel de significancia α es: "Rechazar H_0 si $F_0 \geq F_{1, n-1, \alpha}$ ".

Donde $F_0 = n\bar{Y}^2 / S^2$

Ejemplo:

Se tiene una muestra aleatoria de tamaño 15, que se supone es de una población $N(\mu, \sigma)$. Las observaciones en la muestra son:

X_i : 68, 69, 78, 86, 73, 69, 80, 67, 59, 68, 70, 66, 69, 72, 77.

Se desea probar la hipótesis $H_0: \mu = 68$ en oposición a $H_A: \mu \neq 68$ mediante una tabla de ANDEVA.

Por comodidad en el manejo de los números es conveniente transformar los datos, por lo cual es necesario restar 68 a cada observación, resultando la muestra.

Y_i : 0, 1, 10, 18, 5, 1, 12, -1, -9, 0, 2, -2, 1, 4, 9.

La hipótesis equivalente a estos datos es $H_0: \mu = 0$ en oposición de $H_A: \mu \neq 0$. Es fácil verificar que con los datos transformados:

$$\bar{Y} = 3.4, \quad \sum_{i=1}^n Y_i^2 = 783, \quad n\bar{Y}^2 = (15)(3.4)^2 = 173.4$$

$$\begin{aligned} \text{Por los tanto, la S.C. Error} &= \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^n Y_i^2 - n\bar{Y}^2 \\ &= 783 - 173.4 = 609.6 \end{aligned}$$

Con estos datos llenamos la tabla de ANDEVA.

FUENTE DE VARIACIÓN	GRADOS DE LIBERTAD	SUMA DE CUADRADOS	CUADRADOS MEDIOS	F ₀
Media (μ)	1	173.4	173.4	3.98
Error	14	609.6	43.54	
Total	15	783.0		

Para probar la hipótesis de que la media de la población muestreada es 68, con $\alpha=0.05$, obtenemos de la tabla correspondiente $F_{1,14,0.05} = 4.6$ y puesto que $F_0 < 4.60$, la conclusión es que no se rechaza H_0 en el juego de hipótesis $H_0: \mu = 68$ en oposición de $H_A: \mu \neq 68$.

Se debe notar que si se trabaja con las observaciones originales se obtiene el mismo valor de F_0 , ya que entonces la media aritmética es $\bar{Y} = 71.4$ y

$$S.C. (\mu) = n(\bar{Y} - \mu_0)^2 = 15(71.4 - 68)^2 = 173.4$$

$$S.C. \text{ Error} = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = (68-71.4)^2 + (69-71.4)^2 + \dots + (77-71.4)^2 = 609.6$$

De igual manera si se desea verificar la hipótesis por medio de la prueba t.

$$\bar{Y} = 71.4, \quad S = 6.5987$$

por lo que t_0 toma el valor:

$$t_0 = \frac{\sqrt{15}(\bar{Y} - 68.0)}{6.5987} = 1.996$$

De la tabla t obtenemos los valores críticos

$$- t_{0.025(14)} = -2.145 \quad \text{y} \quad t_{0.025(14)} = 2.145$$

Puesto que t no está en la región de rechazo, la conclusión es la misma que con la prueba F.

Además, la distribución F está ligada con la distribución t de Student de la siguiente forma:

Sea t una variable aleatoria distribuida como t de Student con ν grados de libertad; entonces el cuadrado de t se distribuye como F con 1 y ν grados de libertad.

$$(t_{(\nu)})^2 = F_{1, \nu}$$

entonces podemos considerar $t_0^2 = F_0$

$$t_{0.025(14)}^2 = F_{1,14, 0.025}$$

Sin embargo por su forma explícita el análisis de varianza será aplicado en varios diseños experimentales que se exponen más adelante.

2.4.- DISEÑOS EXPERIMENTALES.

El propósito de cualquier diseño experimental es proporcionar una cantidad máxima de información pertinente al problema bajo investigación. Sin embargo, también es importante que el diseño o plan, o programa de prueba sea tan simple como sea posible. El uso de los diseños estadísticos ofrece los más eficientes planes para el desarrollo de experimentos, los cuales están diseñados para minimizar el costo de recopilación de la información y reducir la probabilidad del error experimental sesgue los datos, para su análisis estadístico el cual desaparecerá el grado de subjetividad ya que los métodos estadísticos han sido diseñados para ser objetivos, al mismo tiempo, representan una de las formas más eficientes de eliminar errores en las conclusiones especialmente las asignables al error experimental.

2.4.1. - PLANES DE EXPERIMENTACIÓN

Los resultados de un experimento están influenciados por diversos factores; el efecto que cada factor tiene, varía en función de los valores de los otros. Este tipo de situaciones da lugar a resultados confusos en el experimento. Debido a esta situación es necesario disponer de planes de estudio que permitan controlar este tipo de situaciones, asegurándose que los datos se pueden analizar estadísticamente.

Hay varias maneras de clasificar los planes de experimentación. Según el número de factores experimentales a investigar: planes de factor uno o multifactoriales. Según la estructura del plan de experimentación: en bloques, factorial, anidado, o por el método de superficie de respuesta. Según la clase de información que se pretende que el experimento proporcione: estimación de efectos, estimación de varianzas, planificación empírica.

A continuación plantearemos algunos diseños sencillos.

2.4.1.1. - Diseño completamente al azar (Experimento de un solo factor).

Un diseño completamente al azar es un diseño en el cual los tratamientos son asignados completamente al azar a las UE o viceversa. Esto es, es un diseño que no impone restricciones tales como agrupamiento en la distribución de tratamientos a las UE.

Debido a su simplicidad es usado ampliamente. Sin embargo, deben utilizarse solo cuando las UE son homogéneas y cuando se dispone para el experimento de un total de N unidades y se han de investigar t tratamientos (o niveles de los factores).

Si en un diseño completamente al azar, n_i unidades experimentales (UE) se sujetan al i -ésimo tratamiento ($i = 1, 2, 3, \dots, t$).

El modelo estadístico lineal para este diseño es:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}$$

Donde

$$i = 1, 2, \dots, t \quad \text{y} \quad j = 1, 2, \dots, n_i$$

Y_{ij} : respuesta de la j -ésima UE con el tratamiento i -ésimo.

μ : media general, común a todas las unidades antes de aplicar los tratamientos.

τ_i : efecto del i -ésimo tratamiento

ϵ_{ij} : error experimental en la j -ésima repetición del i -ésimo tratamiento.

Suponiendo independencia entre y dentro de las muestras y adoptando un modelo lineal se tiene que ϵ_{ij} son independientes todas con distribución normal con media cero y varianza σ^2 . $\epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$;

Estructura de los datos para un diseño completamente aleatorizado

	TRATAMIENTO			TOTAL
	1	2	t	
OBSERVACIONES	Y_{11}	Y_{21}	Y_{t1}	
	Y_{12}	Y_{22}	Y_{t2}	
	.	.	.	
	Y_{1n1}	Y_{2n2}	Y_{tn1}	
TOTALES	$Y_{1.}$	$Y_{2.}$	$Y_{t.}$	$Y_{..} = \sum \sum Y_{ij}$
# DE OBSERVACIONES	n_1	n_2	n_t	$\sum_{i=1}^t n_i$
MEDIAS	$\bar{Y}_{1.}$	$\bar{Y}_{2.}$	$\bar{Y}_{t.}$	

El modelo estadístico describe dos situaciones con respecto al efecto de los tratamientos. Primero, los t tratamientos podrían haber sido seleccionados específicamente por el experimentador. En esta situación se desea probar la hipótesis sobre las medias de los tratamientos y las conclusiones se aplican sólo a los niveles del factor considerados en el análisis. También sería deseable estimar los parámetros del modelo (μ, τ_i, σ^2) . Este modelo se denomina modelo de efectos fijos.

Alternativamente los t tratamientos pueden ser una muestra aleatoria de una población mayor de tratamientos. En esta situación sería deseable generalizar las conclusiones (basada en la muestra de tratamientos), a todos los tratamientos de la población, ya sea que hayan sido explícitamente considerados en el análisis o no. En este caso τ son variables aleatorias y resulta relativamente inútil conocer sus valores particulares para los tratamientos investigados. En su lugar se prueban hipótesis con referencia a la variabilidad de las τ_i y se estima dicha variabilidad. Esto se conoce como modelo de efectos aleatorios.

Análisis del modelo de efectos fijos.

En este modelo los efectos de lo tratamiento τ_i se definen usualmente como las desviaciones respecto a una media general, por esta razón se espera que:

$$\sum_{i=0}^t \tau_i = 0$$

Sea Y_{ij} el total de las observaciones bajo el i -ésimo tratamiento, y \bar{Y}_i el promedio de las observaciones bajo el i -ésimo tratamiento. Similarmente sea $Y_{..}$ la suma de todas las observaciones y $\bar{Y}_{..}$ la media general de las observaciones. Expresado matemáticamente:

$$Y_{i.} = \sum_{j=1}^n Y_{ij} \quad \bar{Y}_i = Y_{i.} / n_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, t.$$

$$Y_{..} = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^n Y_{ij} \quad \bar{Y}_{..} = Y_{..} / N$$

Donde $N = \sum n_i$

Para probar la igualdad de las medias de los tratamientos se proponen:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_t$ Todas las medias son iguales

en oposición con

$H_A : \text{Al menos una media } \mu \text{ es diferente.}$

Hay que observar que si H_0 es verdadera todos los tratamientos tienen una media común μ .

Una forma equivalente de expresar las hipótesis anteriores en términos de tratamientos τ , es:

$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_t$ No hay diferencia entre tratamiento

en oposición con $H_A : \text{Al menos un tratamiento } \tau \text{ es diferente.}$

El procedimiento apropiado para probar la igualdad en el nivel medio de t tratamientos es el análisis de varianza.

Tabla de análisis de varianza para el modelo de efectos fijos unifactorial.

FUENTE DE VARIACIÓN	GRADOS DE LIBERTAD	SUMA DE CUADRADOS	CUADRADOS MEDIOS	F_0
Entre tratamientos	$t-1$	$SC_{\text{tratamientos}}$	$CM_{\text{tratamientos}}$	$F_0 = CM_{\text{trat}}/CM_{\text{err}}$
Error	$N-t$	SC_{error}	CM_{error}	
Total	$N-1$	SC_{total}		

Donde:

La suma de cuadrados total es:

$$SC_{\text{total}} = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^n Y_{ij}^2 - (Y_{..}^2/N)$$

La suma de los cuadrados de tratamientos es:

$$SC_{\text{trat.}} = \sum_{i=1}^t (Y_{i.}^2/n_i) - (Y_{..}^2/N)$$

La suma de cuadrados del error

$$SC_{\text{error}} = SC_{\text{Total}} - SC_{\text{trat.}}$$

Los cuadrados medios son:

$$CM_{\text{trat.}} = SC_{\text{trat.}}/GL_{\text{trat}}$$

$$CM_{\text{error}} = SC_{\text{error}}/GL_{\text{error}}$$

$$F_0 = CM_{\text{trat.}}/CM_{\text{error}}$$

Mediante la distribución $F_{\alpha, t-1, N-t}$ el criterio que se toma es "Se rechaza H_0 si $F_0 \geq F_{\alpha, t-1, N-t}$ "

Ejemplo:

Supongamos que el experimento se ha diseñado para determinar la eficiencia de cuatro métodos distintos de secado de una sustancia. Cada método se repite 5 veces. Los datos se encuentran en la tabla siguiente:

Método	Tratamientos				
	1	2	3	4	
a	1.9	1.7	1.6	1.1	
b	1.7	1.6	1.7	1.3	
c	2.0	1.5	1.9	1.6	
d	1.6	2.0	1.6	1.1	
e	1.9	1.6	1.4	1.2	
Totales	9.1	8.4	8.2	6.3	Y.. = 32.0
Medias	1.82	1.68	1.64	1.26	Y.. = 1.6
n	5	5	5	5	n = 20

Plantearemos las docimas de hipótesis.

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4$$

en oposición con

$$H_A : \text{Al menos un tratamiento es diferente}$$

La hipótesis nula del experimento es suponer que no hay diferencias entre los cuatro métodos de análisis.

La hipótesis alternativa es suponer que al menos uno de los métodos de análisis es diferente.

El modelo para este diseño.

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}$$

Donde: Y_{ij} = % de humedad después del secado

μ = media general

τ_i = los cuatro métodos de secado

ϵ_{ij} = error experimental

El análisis de varianza es siguiente:

$$SC_{\text{total}} = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^n Y_{ij}^2 - (Y_{..}^2 / N)$$

$Y..^2/N =$ factor de correlación (FC)

$$FC = 32^2/20 = 51.2 \quad SC_{total} = [(1.9)^2 + (1.7)^2 + (1.6)^2 + \dots + (1.2)^2] \cdot FC = 52.62 - 51.2$$

$$SC_{total} = 1.42$$

$$SC_{trat.} = \sum_{i=1}^t (Y_i.^2/n) - (Y..^2/N) = [(9.1)^2 + (8.4)^2 + (8.2)^2 + (6.3)^2] - 51.2 = 52.06 - 51.2$$

$$SC_{trat.} = 0.86$$

$$SC_{error} = SC_{totales} - SC_{trat.} = 1.42 - 0.86$$

$$SC_{error} = 0.56$$

$$CM_{trat.} = SC_{trat.}/GL_{trat.} = 0.86/3$$

$$CM_{trat.} = 0.2866$$

$$CM_{error} = SC_{error}/GL_{error} = 0.56/16$$

$$CM_{error} = 0.035$$

$$F_0 = CM_{trat.}/CM_{error} = 0.2866/0.035$$

$$F_0 = 8.1$$

Con lo anterior formamos la tabla de análisis de varianza.

FUENTE DE VARIACIÓN	GRADOS DE LIBERTAD	SUMA DE CUADRADOS	CUADRADOS MEDIOS	F ₀
Entre tratamientos	t-1= 3	SC _{trat} =0.86	CM _{trat} =0.2866	F ₀ =8.1
Error	N-t=16	SC _{error} =0.56	CM _{error} =0.035	
Total	N-1= 19	SC _{total} =1.42		

Comparar $F_0 = 8.1$ con $F_{0.01, 3, 16} = 5.29$

Como el dictamen es "Se rechaza H_0 si $F_0 \geq F$ "

De aquí que la hipótesis nula sea desechada y que podamos decir que hay alta probabilidad de que la diferencia entre los métodos de análisis sea significativa.

Análisis del modelo de efectos aleatorios.

Frecuentemente interesa a un experimentador un factor que tiene un gran número de posibles niveles (tratamientos). Se dice que un factor es aleatorio si el experimentador selecciona aleatoriamente t de estos tratamientos de la población. Se obtienen conclusiones de toda la población porque los niveles usados en el experimento fueron seleccionados al azar. Se supone que la población es infinita o suficientemente grande para considerarse infinita.

Como se planteo anteriormente en el diseño completamente al azar el modelo lineal supuesto es:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}; j = 1, \dots, n_i; i = 1, \dots, t$$

Donde los términos de la ecuación representan:

Y_{ij} : respuesta de la j -ésima UE con el tratamiento i -ésimo.

μ : media general, común a todas las unidades antes de aplicar los tratamientos.

τ_i : efecto del i -ésimo tratamiento

ϵ_{ij} : error experimental en la j -ésima repetición del i -ésimo tratamiento.

Como en este caso τ_i y ϵ_{ij} son variables aleatorias.

Y si τ_i tiene una varianza σ^2_{τ} y es independiente de ϵ_{ij} , la varianza de cualquier observación es

$$V(y_{ij}) = \sigma^2_{\tau} + \sigma^2$$

Las varianzas σ^2_{τ} y σ^2 se conocen como componentes de varianza y el modelo se denomina modelo de componentes de varianza o de efectos aleatorios. Para probar la hipótesis del modelo, se requiere que las ϵ_{ij} y τ_i sean independientes todas con distribución normal con media cero y varianza σ^2 , y que ϵ_{ij} y τ_i sean independientes.

Esto es:

$$\epsilon_{ij} \sim \text{NID}(0, \sigma^2);$$

$$\tau_i \sim \text{NID}(0, \sigma^2_{\tau})$$

Para este fin se propone:

$$H_0: \sigma^2_{\tau} = 0 \quad \text{Todos los tratamientos son idénticos}$$

en oposición con

$$H_A: \sigma^2_{\tau} > 0 \quad \text{Existe variabilidad entre tratamientos}$$

Tabla de análisis de varianza para este modelo

FUENTE DE VARIACIÓN	GRADOS DE LIBERTAD	SUMA DE CUADRADOS	CUADRADOS MEDIOS	PRUEBA F0
ENTRE TRATAMIENTOS	t-1	SCTrat.	SCTrat/t-1	CMTrat/CME
ERROR EXPERIMENTAL SIN TRATAMIENTOS	$\sum_{i=1}^t n_i - 1$	SCError	SCE/GLE	
TOTAL	$\sum_{i=1}^t n_i - 1$	SCTotal		

Donde:

La suma de cuadrados total es:

$$SCTotal = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^2 - \frac{Y_{..}^2}{\sum n_i}$$

La suma de los cuadrados de tratamientos es:

$$SCTrat. = \sum_{i=1}^t \frac{Y_{i.}^2}{n_i} - \frac{Y_{..}^2}{\sum n_i}$$

La suma de cuadrados del error

$$SCError = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^t \frac{Y_{i.}^2}{n_i}$$

En ocasiones se le llama factor de correlación a:

$$\frac{Y_{..}^2}{\sum n_i}$$

Los cuadrados medios son:

$$CM_{Tratamientos} = SCTrat./GLtrat$$

$$CM_{Error} = SCError/GLerror$$

La estadística para la prueba es F_0 que, de acuerdo a los resultados anteriores se tiene una distribución $F_{\alpha, t-1, N-t}$ cuando la hipótesis nula es cierta, por lo que la regla de decisión es: "No se acepta H_0 si $F_0 \geq F_{\alpha, t-1, N-t}$ "

Ejemplo 1.

Se desean comparar los porcentajes de carbohidratos de 4 marcas de pan por lo cual se van a hacer 18 determinaciones: 5 en la primera marca, 3 en la segunda 4 en la tercera y 6 en la cuarta. En este caso cada marca es un tratamiento ($t=4$), y se tienen $n_1=5$, $n_2=3$, $n_3=4$ y $n_4=6$. Para obtener las respuestas se tomaron muestras aleatorias de tamaños especificados de cada marca. Se tomaron muestras aleatorias pero como son cuatro marcas las unidades existen independientemente y se puede trabajar aun cuando no encaje perfectamente en este diseño.

Plantearemos las docinas de hipótesis

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4$$

en oposición con

$$H_A : \text{al menos un tratamiento es distinto de los demás.}$$

La hipótesis nula es suponer que no hay diferencia en el porcentaje de carbohidratos entre las 4 marcas.

La hipótesis alternativa es que al menos una marca tenga diferente porcentaje de carbohidratos.

El modelo para este diseño. $Y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}$

Donde:

Y_{ij} = Porcentaje de carbohidratos (resultado de las 18 determinaciones)

μ = Media general

τ_i = Cuatro marcas de pan

ϵ_{ij} = error experimental

Los resultados de las 18 determinaciones de carbohidratos están contenidos en la siguiente tabla:

TRATAMIENTOS (marca)

	1	2	3	4	
	63	60	59	70	
	68	65	66	69	
	71	61	58	62	
	70		59	71	
	69			70	
				66	
n_i	5	3	4	6	$\sum n_i = 18$
Y_i	341	186	242	408	$Y_{..} = 1177$
\bar{Y}_i	68.2	62.0	60.5	68.0	$Y_{..} = 65.39$
Y_i^2/n_i	23256.2	11532.0	14641.0	27744.0	$\sum_{i=1}^t Y_i^2 = 77173$
$\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^2$	23295	11546	14682	27802	$\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^2 = 77325$
$\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^2 - \frac{Y_i^2}{n_i}$	38.8	14.0	41.0	58.0	$\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^t \frac{Y_i^2}{n_i} = 151$
S_i^2	9.7	7.0	13.67	11.6	

El análisis de varianza es el siguiente:

$$1^\circ \text{ calculamos } FC = Y_{..}^2 / \sum_{j=1}^{n_i} n_i = (1177)^2 / 18 = 76962.72$$

$$SCTratamientos = \sum_{i=1}^t \frac{Y_i^2}{n_i} - FC = 77173.2 - 76962.72 = 210.48$$

$$SCTotal = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^2 - FC = 77325 - 76962.72 = 362.28$$

$$SCErroR = SCTotal - SCTratamientos$$

$$SCErroR = 362.28 - 210.48 = 151.80$$

Tabla de análisis de varianza.

FACTORES DE VARIACIÓN	G.L.	S.C.	C.M.	Fp
Tratamientos	3	210.48	70.16	CMtra/CMerr=6.69
Error	14	151.3	10.48	
Total	17	362.28		

Para probar $H_0: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_k$ en oposición con

HA: Al menos un tratamiento es diferente de los demás.

con $\alpha = 0.05$ obtenemos $F_{3,14, 0.05} = 3.344$ (anexo) si $F_p = 6.69$ entonces

$F_p > F_{teórica}$,

por lo tanto, se rechaza H_0 con $\alpha = 0.05$ y se concluye que al menos una marca de pan tiene diferente porcentaje de carbohidratos que las demás.

con $\alpha = 0.01$ obtenemos $F_{3, 4, 0.01} = 2.522$ también

$F_p > F_{teórica}$,

por lo tanto, se rechaza también H_0 con $\alpha = 0.01$

2.4.4.- DISEÑO DE BLOQUES COMPLETOS AL AZAR (DBCA).

En muchos problemas de investigación es necesario diseñar experimentos en los que pueda controlarse sistemáticamente la variabilidad producida por diversas fuentes. En el diseño de bloques completos al azar las unidades experimentales (UE) se distribuyen en grupos o bloques, de manera tal que el número de UE dentro de un bloque sea igual al número de tratamientos por investigar. Además, los tratamientos se asignan al azar a las UE dentro de cada bloque, en lo anterior la formación de los bloques refleja el criterio del investigador respecto a las respuestas diferenciales de las diversas UE. Este diseño es quizás el más ampliamente utilizado, las situaciones en las que se aplica son muy numerosas y pueden detectarse fácilmente. A menudo, las unidades de equipo de prueba o maquinaria son diferentes en sus características de operación y constituye un factor típico que es necesario controlar, lotes de materia prima, personas o tiempo, también constituyen fuentes de variabilidad en un experimento las cuales pueden ser controladas sistemáticamente mediante el análisis por bloques.

Analisis estadístico.

Supongamos que en general se tienen t tratamientos (que deben ser comparados) y b bloques. Se realiza una observación por tratamiento en cada bloque y el orden en que los tratamientos son medidos en cada bloque se determina aleatoriamente. A menudo se dice que los bloques representan restricción en la aleatorización porque la única aleatorización de los tratamientos ocurre dentro de bloques.

Estructura de los datos en un diseño en bloques completos al azar

BLOQUES	TRATAMIENTOS			TOTALES DE BLOQUE	MEDIAS DE BLOQUE
	1	2 ...	t		
1	Y_{11}	$Y_{21} \dots$	Y_{t1}	$Y_{.1}$	$Y_{.1}$
2	Y_{12}	$Y_{22} \dots$	Y_{t2}	$Y_{.2}$	$Y_{.2}$
.
.
b	Y_{1b}	$Y_{2b} \dots$	Y_{tb}	$Y_{.b}$	$Y_{.b}$
Totales de tratamientos	$Y_{1.}$	$Y_{2.}$	$Y_{t.}$	$Y_{..}$	
Medias de tratamientos	$Y_{1.}$	$Y_{2.}$	$Y_{t.}$		

En el diseño experimental en bloques completos al azar el modelo lineal propuesto es:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \epsilon_{ij} ; j = 1, \dots, b; i = 1, \dots, t$$

Donde:

Y_{ij} : respuesta en la j -ésima UE con el tratamiento i -ésimo.

μ : media general, común a todas las unidades antes de aplicar los tratamientos.

τ_i : efecto del i -ésimo tratamiento.

β_j : efecto del j -ésimo bloque.

ϵ_{ij} : error en la j -ésima repetición del i -ésimo tratamiento.

Suponiendo independencia entre y dentro de las muestras y adoptando un modelo lineal se tiene que ϵ_{ij} son independientes todas con distribución normal con media cero y varianza σ^2 .

Inicialmente se considera que tanto los tratamientos como los bloques son factores fijos. Más aún, los efectos de tratamiento y de bloque se consideran como desviaciones de la media general, por tanto

$$\sum_{i=0}^t \tau_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{j=0}^b \beta_j = 0$$

Se desea probar la igualdad de las medias de tratamientos. Así, la hipótesis nula de interés es

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_t$$

en oposición con

H_A : al menos una media es distinta de las demás

Como la media del i -ésimo tratamiento es $\mu_i = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b (\mu + \tau_i + \beta_j) = \mu + \tau_i$

Una forma de expresar las hipótesis equivalentes es en términos de los efectos de tratamiento

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_t \text{ no habrá diferencia entre los tratamientos}$$

en oposición con

H_A : al menos un tratamiento es distinto de los demás

El análisis de varianza para el diseño en bloques completos al azar es:

Fuentes de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	F ₀	ECM
Tratamientos	t-1	S.C.tratam.	$\frac{\text{S.C.tratam.}}{t-1}$	$\frac{\text{C.M.tratam.}}{\text{C.M.error.}}$	$\sigma^2 + b \frac{\sum (\tau_i - \bar{\tau})^2}{t-1}$
Bloques	b-1	S.C.bloques	$\frac{\text{S.C.bloque}}{b-1}$		
Error	(t-1)(b-1)	S.C. error	$\frac{\text{S.C. error}}{(t-1)(b-1)}$		σ^2
Total	bt-1	S.C.total			

Suma de cuadrados total

$$SC_{\text{total}} = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^b Y_{ij}^2 - \frac{Y_{..}^2}{bt}$$

Suma de cuadrados de tratamientos

$$SC_{\text{trat}} = \sum_{i=1}^t \frac{Y_{i.}^2}{b} - \frac{Y_{..}^2}{bt}$$

Suma de cuadrados de bloques

$$SC_{\text{bloques}} = \sum_{j=1}^b \frac{Y_{.j}^2}{t} - \frac{Y_{..}^2}{bt}$$

Suma de cuadrados de error

$$SC_{\text{Error}} = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^b Y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^t \frac{Y_i^2}{b} - \sum_{j=1}^b \frac{Y_j^2}{t} + \frac{Y_{..}^2}{bt}$$

Los cuadrados medios son:

$$CM_{\text{trat.}} = \frac{S.C. \text{tratam.}}{t-1}$$

$$CM_{\text{bloques.}} = \frac{S.C. \text{bloque}}{b-1}$$

$$CM_{\text{error}} = \frac{S.C. \text{ error}}{(t-1)(b-1)}$$

$$F_0 = \frac{C.M. \text{tratam.}}{C.M. \text{error}}$$

La estadística para la prueba es F_0 que, de acuerdo a los resultados anteriores se tiene una distribución de $F_{(t-1), (t-1)(b-1)}$ cuando la hipótesis nula es cierta, por lo que la regla de decisión es:

“No se acepta H_0 si $F_0 \geq F_{\alpha, (t-1), (t-1)(b-1)}$ ”

Ejemplo:

En un campo agrícola experimental se van a comparar 3 variedades de maíz, con 6 repeticiones para cada variedad, o sea que se tienen 18 UE (parcelas de igual tamaño y forma en este caso). El investigador conoce el terreno lo cual le permite formar bloques de 3 UE adyacentes dentro de los cuales la fertilidad del suelo es más homogéneo y, por lo tanto, decide realizar un experimento en bloques aleatorizados completos.

En este caso $t=3$ y $b=6$.

Tratamiento variedad	Bloque (grupo de tres unidades con fertilidad similar)						Y_i	Y_j	Y_i
	1	2	3	4	5	6			
1	2.3	2.9	3.1	3.4	3.0	2.0	16.7	2.78	278.89
2	2.1	2.7	3.5	3.6	2.9	2.5	17.3	2.88	299.29
3	1.9	3.1	3.6	3.5	3.1	2.4	17.6	2.93	309.76
$Y_{.i}$	6.3	8.7	10.2	10.5	9.0	6.9	51.6		887.94
$Y_{.j}$	2.1	2.9	3.4	3.5	3.0	2.3			
$Y_{.j}^2$	39.6	75.69	104.0	110.2	81.0	47.61			
$\sum Y_{ij}^2$	13.31	25.31	34.82	36.77	27.02	16.01			

Plantearemos las docimas de hipótesis

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4$$

H_A : al menos un tratamiento es distinto de los demás.

La hipótesis nula es suponer que no hay diferencia en el rendimiento de las tres variedades de maíz

La hipótesis alternativa es que al menos una variedad

El modelo para este diseño. $Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \epsilon_{ij}$

Donde: Y_{ij} = Rendimiento de maíz en Kg/Ha

μ = Media general

τ_i = Variedades de maíz

β_j = Grupos de 3 parcelas con fertilidad similar

ϵ_{ij} = Error experimental

Con estos datos calculamos:

$$F.C. = \frac{Y_{..}^2}{bt} = \frac{(15.6)^2}{18} = 147.92$$

Donde F.C. es el factor de corrección.

$$S.C. total. = (2.3)^2 + (2.1)^2 + \dots + (2.4)^2 - F.C$$

$$S.C. total. = 153.24 - 147.92 = 5.32$$

$$S.C. tratamientos = \frac{(16.7)^2 + (17.3)^2 + (17.6)^2}{6} - F.C.$$

$$= 0.07$$

$$S.C. Bloques = \frac{(6.3)^2 + (8.7)^2 + \dots + (6.9)^2}{3} - F.C.$$

$$= 4.84$$

De donde

$$S.C. error = S.C. total - S.C. tratamientos - S.C. bloques = 5.32 - 0.07 - 4.84 = 0.41$$

El análisis de varianza es:

Fuentes de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	Fo
Tratamiento	2	0.07	0.035	0.8537
Bloques	5	4.84		
Error	10	0.41	0.041	
Total	17	5.32		

Para Probar $H_0: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3$ No hay diferencia en el rendimiento de las tres variedades, en oposición de H_A : Al menos el rendimiento de una de las variedades es diferente, con $\alpha = 0.10$; comparamos F_0 con $F_{2, 10, 0.10} = 2.9245$. Puesto que $F_0 < 2.9245$, la conclusión es que con un nivel de significancia de 0.10 las tres variedades de maíz tienen el mismo rendimiento.

También puede ser de interés la comparación entre las medias de los bloques, porque si no hay gran diferencia entre ellas, el análisis por bloques quizá no sea necesario en experimentos futuros. Al analizar los valores esperados de las medias de cuadrados, puede ser que la hipótesis $H_0: \beta_j = 0$ puede probarse comparando la estadística $F_0 = \text{C.M.bloques} / \text{C.M.error}$ con $F_{\alpha, (t-1), (t-1)(b-1)}$. Sin embargo, debe recordarse que la aleatorización fue aplicada sólo a tratamientos dentro de los bloques; en otras palabras, estos últimos representan una restricción en la aleatorización. La prueba F se justifica solo con base a la aleatorización sin necesidad de usar la suposición de normalidad, entonces, la prueba para comparar los bloques no puede ser incluida bajo este argumento. Por esto esta prueba se excluye de la tabla de análisis de varianza.

2.4.5.- DISEÑO DE CUADRO LATINO.

El diseño de cuadro latino (CL).- Éste diseño especial, en general permite al investigador delimitar, con toda seguridad, los efectos relativos de varios tratamientos, cuando se impone a las UE una restricción del tipo de bloque.

Se llama cuadro latino porque es un arreglo cuadrado y los tratamientos se representan mediante letras latinas A, B, C, D, etc.

El diseño de cuadro latino se usa para eliminar dos fuentes de variabilidad problemáticas en otras palabras, permite analizar sistemáticamente por bloques en dos direcciones, en este diseño, los renglones y las columnas representan, en realidad, dos tipos de bloques o dos restricciones a la aleatorización. En general, el cuadro latino para p factores, o un cuadro latino para $p \times p$, es un cuadrado que contiene p renglones y p columnas, cada una de las p^2 celdas contiene una de las p letras que corresponde a un tratamiento y cada letra aparece una sola vez en cada renglón y columna.

4 x 4

A	B	D	C
B	C	A	D
C	D	B	A
D	A	C	B

5 X 5

A	D	B	E	C
D	A	C	B	E
C	B	E	D	A
B	E	A	C	D
E	C	D	A	B

6 X 6

A	D	C	E	B	F
B	A	E	C	F	D
C	E	D	F	A	B
D	C	F	B	E	A
F	B	A	D	C	E
E	F	B	A	D	C

Este diseño es muy eficaz cuando el número de tratamientos está entre 4 y 10 y se conoce la variabilidad en dos sentidos perpendiculares, por lo cual es muy deseable reducir o controlar el efecto de dicha variabilidad para disminuir el valor del error experimental. Por otra parte, éste método tiene la desventaja de que es rígido en el número de repeticiones y en el agrupamiento de los tratamientos en hileras y columnas, en tal forma que no se repita ningún tratamiento en fila ni en columna; además se reducen los grados de libertad para el error experimental.

Para aprovechar las ventajas de este diseño es indispensable lo siguiente:

- Dividir el lote en un número de unidades experimentales que sea igual al cuadrado del número de tratamientos.
- El número de repeticiones debe ser al número de tratamientos.
- Formar hileras y columnas de unidades experimentales iguales en número a las repeticiones y los tratamientos.
- Distribuir los tratamientos de tal forma que ninguno se repita en fila ni en columna.

Para lograr lo anterior, se arreglan los tratamientos haciendo permutaciones de horizontales a verticales. Supongamos que hay 5 tratamientos A, B, C, D, y E.

i).- Permutaciones horizontales.

A	B	C	D	E
E	A	B	C	D
D	E	A	B	C
C	D	E	A	B
B	C	D	E	A

ii).- Permutaciones verticales.

A	E	D	C	B
B	A	E	D	C
C	B	A	E	D
D	C	B	A	E
E	D	C	B	A

e).- Las hileras se asignan al azar, y en el cuadro así obtenido las columnas también se asignan al azar. Esto tiene como finalidad hacer una distribución de los tratamientos más dispersa en el campo y evitar AB, CD, DE, etc. estén juntos sistemáticamente.

Ejemplo:

Usando el cuadro base de las permutaciones horizontales., numerada del 1 al 5. Quedará de la siguiente manera.

	1	2	3	4	5
1	A	B	C	D	E
2	E	A	B	C	D
3	D	E	A	B	C
4	C	D	E	A	B
5	B	C	D	E	A

Habiendo numerado las columnas del 1 al 5 en el cuadro, se asignan aleatoriamente, pudiendo quedar como el siguiente cuadro.

D 21	A 22	C 23	B 24	E 25
B 20	D 19	A 18	E 17	C 16
F 11	B 12	D 13	C 14	A 14
C 10	E 9	B 8	A 7	D 6
A 1	C 2	E 3	D 4	B 5

El modelo estadístico del cuadrado latino es:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \tau_j + \beta_k + \epsilon_{ijk}$$

$$i = 1, 2, \dots, p$$

$$j = 1, 2, \dots, p$$

$$k = 1, 2, \dots, p$$

Donde

Y_{ijk} = Es la observación correspondiente al i -ésimo renglón, el j -ésimo tratamiento y la k -ésima columna.

μ = Media general

α_i = es el i -ésimo efecto de renglón

τ_j = es el j -ésimo efecto de tratamiento

β_k = es el k -ésimo efecto de la columna

ϵ_{ijk} = error experimental

Una forma de expresar las hipótesis equivalentes es en términos de los efectos de tratamiento

$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_t$, no habrá diferencia entre los tratamientos

en oposición con

H_A : al menos un tratamiento es distinto de los demás

El análisis de varianza para el diseño de cuadro latino

Fuentes de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	F ₀	ECM
Tratamientos	t-1	S.C.tratam.	$\frac{\text{S.C.tratam.}}{t-1}$	$\frac{\text{C.M.tratam.}}{\text{C.M.error.}}$	$\sigma^2 + b \frac{\sum(\tau_i - \bar{\tau})^2}{t-1}$
Renglones	n-1	S.C.renglones	$\frac{\text{S.C.renglones}}{n-1}$		
Columnas	n-1	S.C.columnas	$\frac{\text{S.C.columnas}}{n-1}$		
Error	(t-1)(n-2)	S.C. error	$\frac{\text{S.C. error}}{(t-1)(n-1)}$		σ^2
Total	nt-1	S.C.total			

Suma de cuadrados total

$$SC_{\text{total}} = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n Y_{ijk}^2 - \frac{Y_{...}^2}{nt}$$

Suma de cuadrados de tratamientos

$$SC_{\text{trat}} = \sum_{j=1}^n \frac{Y_{.j.}^2}{n} - \frac{Y_{...}^2}{n^2}$$

Suma de cuadrados de renglones

$$SC_{\text{renglones}} = \sum_{i=1}^t \frac{Y_{i..}^2}{n} - \frac{Y_{...}^2}{n^2}$$

Suma de cuadrados de columnas

$$SC_{\text{columnas}} = \sum_{k=1}^n \frac{Y_{.k.}^2}{n} - \frac{Y_{...}^2}{n^2}$$

Suma de cuadrados de error

$$SC_{\text{error}} = SC_{\text{total}} - (SC_{\text{renglones}} + SC_{\text{columnas}} + SC_{\text{tratamientos}})$$

Los cuadrados medios son:

$$CM_{trat.} = \frac{S.C. \text{tratam.}}{t-1}$$

$$CM_{renglones} = \frac{S.C. \text{renglones}}{n-1}$$

$$CM_{columnas} = \frac{S.C. \text{columnas}}{n-1}$$

$$CM_{error} = \frac{S.C. \text{error}}{(t-1)(n-2)}$$

$$F_0 = \frac{C.M. \text{tratam.}}{C.M. \text{error}}$$

La estadística para la prueba es F_0 que, de acuerdo a los resultados anteriores se tiene una distribución de $F_{(t-1), (t-1)(b-1)}$ cuando la hipótesis nula es cierta, por lo que la regla de decisión es:

“No se acepta H_0 si $F_0 \geq F_{\alpha, (t-1), (t-1)(b-1)}$ ”

Para lo cual se propone el siguiente juego de hipótesis:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 \text{ no hay diferencia entre las medias}$$

en oposición con

$$H_A: \text{al menos una media es diferente.}$$

Ejemplo:

En un experimento para investigar el efecto de un insecticida clorado sobre un cultivo de algodón, se estudiaron, en cuadro latino 5×5 , los siguientes tratamientos.

5 X 5

						renglones
V	A ₃	E ₅	B ₄	D ₅	C ₄	21
IV	D ₅	C ₆	E ₅	B ₅	A ₄	25
III	B ₅	A ₄	C ₅	E ₅	D ₆	25
II	E ₄	D ₅	A ₃	C ₄	B ₄	20
I	C ₃	B ₃	D ₄	A ₂	E ₄	16
columnas	20	23	21	21	22	107

A = Testigo (sin insecticida)

B = 5%

C = 10%

D = 15%

E = Insecticida fosforado.

El modelo estadístico del cuadrado latino es:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \tau_j + \beta_k + \varepsilon_{ijk}$$

Donde

Y_{ijk} = Producción de algodón por tratamiento y por repetición, en parcelas de 20 m² dada en Kg. por parcela

μ = Media general

α_i = es el i-ésimo efecto de renglón

τ_j = tratamientos A=testigo, B=5%, C=10%, D=15%, E=insecticida

β_k = es el k-ésimo efecto de la columna

ε_{ijk} = error experimental

y la distribución en el campo fueron las siguientes:

		Tratamientos.					
		0	5	10	15	fosforado	
Repetición	A	B	C	D	E		
V	3	4	4	5	5		
IV	4	5	6	5	5		
III	4	5	5	6	5		
II	3	4	4	5	4		
I	2	3	3	4	4		
Suma de tratamientos $Y_{i..}$	16	21	22	25	23	$Y_{...}$ 107	
Promedio de los tratamientos $Y_{i..}$	3.2	4.2	4.4	5.0	4.6	$Y_{...}$ 4.28	

Suma de cuadrados total

$$SC_{total} = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^5 Y_{ijk}^2 - \frac{Y_{...}^2}{nt} = 23.04$$

$$FC = \frac{Y_{...}^2}{nt} = \frac{107^2}{25} = 457.96.$$

Suma de cuadrados de tratamientos

$$SC_{\text{trat}} = \sum_{j=1}^t \frac{Y_{.j}^2}{n} - FC = \frac{16^2 + \dots + 23^2}{5} - FC = 9.04$$

Suma de cuadrados de renglones

$$SC_{\text{renglones}} = \sum_{i=1}^r \frac{Y_{i.}^2}{n} - FC = \frac{21^2 + \dots + 16^2}{5} - FC = 11.44$$

Suma de cuadrados de columnas

$$SC_{\text{columnas}} = \sum_{k=1}^c \frac{Y_{.k}^2}{n} - FC = \frac{20^2 + \dots + 22^2}{5} - FC = 1.04$$

Suma de cuadrados de error

$$SC_{\text{error}} = SC_{\text{total}} - (SC_{\text{renglones}} + SC_{\text{columnas}} + SC_{\text{tratamientos}}) \\ = 23.4 - (11.44 + 1.04 + 9.04) = 1.52$$

Los cuadrados medios son:

$$CM_{\text{trat.}} = \frac{S.C. \text{tratam.}}{t-1} = 2.26$$

$$CM_{\text{renglones}} = \frac{S.C. \text{renglones}}{n-1} = 2.86$$

$$CM_{\text{columnas}} = \frac{S.C. \text{columnas}}{n-1} = 0.26$$

$$CM_{\text{error}} = \frac{S.C. \text{error}}{(t-1)(n-2)} = 0.127$$

$$F_0 = \frac{C.M. \text{tratam.}}{C.M. \text{error}} = 17.8$$

El análisis de varianza es:

	GL	GL	SC	CM	F	$F_{0.05}$	$F_{0.01}$
	Fórmula general	Caso particular					
Hileras	(n-1)	4	11.44	2.86	22.5**	3.26	5.41
Columnas	(n-1)	4	1.04	0.26	2.1 ^{NS}	3.26	5.41
Trata- mientos	(t-1)	4	9.04	2.26	17.8**	3.26	5.41
Error	(t-1)(n-2)	12	1.52	0.127			
Total	(tn-1)	24	23.04				

Como:

$F = 17.83 > F_{0.01(4, 12)}$
de valores experimentales Valor teórico de tablas con $p < 1\%$

Interpretación

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$; No hay diferencia en la producción de algodón entre los tratamientos, entonces se rechaza.

H_A : Al menos en un tratamiento producción de algodón es diferente, entonces se acepta.

Al rechazar H_0 se concluye que los valores promedio son diferentes; las medias estiman a μ de poblaciones distintas.

En este caso se deben utilizar métodos para saber las diferencias entre tratamientos y dentro de tratamientos

Todo lo anterior nos da la información para decidir que tipo de diseño se debe utilizar en el área o proceso que se desea estudiar. Sin embargo, para obtener mayor información con respecto al proceso, al tratamiento, etc. se deben llevar a cabo otras pruebas como son: Prueba de Diferencia mínima significativa (DMS), prueba de Tukey, prueba de Duncan, comparaciones ortogonales (cálculo de F) e independientes (cálculo de t), estas pruebas se encuentran en algunas de las referencias bibliográficas citadas aquí.

Clasificación de los planes de investigación.

	TIPO DE APLICACIÓN	ESTRUCTURA	INFORMACIÓN BUSCADA
Completamente aleatorizado	Apropiado cuando se está investigando un solo factor experimental	Básica: se investiga un factor asignada aleatoriamente (UE) a los tratamientos Agrupamiento en bloques: ninguno	1.- Estimar y comparar los efectos de los tratamientos 2.- Estimar la varianza
Factorial	Apropiado cuando han de ser investigados varios factores	Básica: se investigan varios factores, ensayando todas las combinaciones de factores y niveles. Agrupamiento en bloques: ninguno	1.- Estimar y comparar los efectos de varios factores 2.- Estimar los posibles efectos de interacción 3.- Estimar la varianza
Factorial de bloques	Apropiado cuando el número de pruebas requerido para cada factorial es demasiado grande para ser realizado en condiciones uniformes	Básica: el conjunto de combinaciones de factores y niveles se distribuye en bloques. Los tratamientos se asignan al azar dentro de cada bloque. Agrupamiento en bloques	1.- Igual que en el plan factorial, con la diferencia de que ciertas interacciones de orden elevado no pueden ser estimadas.
Factorial fraccional	Apropiado cuando hay muchos factores y niveles y no es posible ensayar todas las combinaciones	Básica: se investigan varios factores y a distintos niveles, pero sólo se ensaya un subconjunto del factorial completo. Agrupamiento en bloques: a veces es posible	1.- Estimar y comparar los efectos de varios factores 2.- Estimar algunos efectos de interacción 3.- Ciertos planes factoriales fraccionales pequeños no pueden proporcionar suficiente información para estimar la varianza
Bloque aleatorizado	Apropiado cuando se está investigando un sólo factor y el material o el entorno experimental puede ser dividido en bloques o grupos homogéneos	Básica: cada tratamiento o nivel de un factor es ensayado en cada bloque. Agrupamiento en bloques: habitualmente, con respecto a una sola variable	1.- Estimar y comparar los efectos de los tratamientos, sin los efectos de los bloques. 2.- Estimar los efectos de los bloques. 3.- Estimar la varianza.

Bloque incompleto equilibrado	Apropiado cuando no es posible acomodar todos los tratamientos en un bloque.	Básica: se efectúan las asignaciones prescritas de los tratamientos a los bloques. Cada par de tratamientos deberá aparecer al menos una vez en el plan experimental, pero cada bloque sólo contendrá un subconjunto de pares	1.- Igual que en el plan de bloques aleatorizados. Todos los efectos de los tratamientos son estimados con la misma precisión. Las medias de los tratamientos deben ser ajustadas por bloques.
Cuadrado latino	Apropiado cuando se está investigando un factor primario y los resultados pueden quedar afectados por otras variables experimentales o por dos fuentes de no homogeneidad. Se supone que no existe ninguna interacción.	Básica: se efectúan dos agrupamientos cruzados de la UE correspondiendo a la filas y columnas de un cuadrado. Cada tratamiento aparece una vez en cada fila y en cada columna. Agrupamiento en bloques: con respecto a otras variables en una disposición bidireccional.	Estimar y comparar los efectos de los tratamientos, sin los efectos de las dos variables agrupadas. Estimar y comparar los efectos de las variables agrupadas. Estimar la varianza.
Cuadrado de Youden	Lo mismo que el caso de cuadrado latino, pero en número de filas, columnas y tratamientos no necesita ser igual.	Básica: cada tratamiento aparece una vez en cada fila. El número de tratamientos debe ser igual al número de columnas. Agrupamiento en bloques: con respecto a otras variables en una disposición bidireccional.	Igual que en el cuadrado latino.
Anidado	Útil cuando el objetivo es estudiar la variabilidad relativa en lugar del efecto medio de las fuentes de variación (p.e. la varianza de los ensayos sobre una misma muestra y la varianza de las diferentes)	Básica: los factores están dispuestos en niveles según una cierta estructura jerárquica; se ensayan unidades de cada nivel.	Variación relativa de los distintos niveles, componentes de la varianza.
Superficie de respuesta	Su objetivo es obtener trazados empíricos (diagramas de contorno) ilustrativos de qué factores bajo control del investigador influyen en los resultados	La situación de los factores es vista como puntos definidos en el factor espacio (puede ser multidimensional) en el que restringirá la respuesta.	Gráficos ilustrando la naturaleza de la superficie de respuesta.

CONCLUSIONES

Las conclusiones representan la síntesis de los resultados obtenidos a lo largo del proceso de investigación. Esta sección es una de las más importantes; es imprescindible que exista coherencia entre el cuerpo del trabajo y las conclusiones. Cualquier conclusión deberá fundamentarse en el cuerpo teórico y los resultados de la investigación, además de resumir los principales hallazgos y recomendaciones. Deben ser enunciadas con claridad y precisión ya que en ellas se presenta la comprobación o rechazo de la hipótesis, sus limitaciones, la relación con otras hipótesis y las sugerencias y/o aportaciones teóricas del investigador.

En el diseño estadístico de experimentos los objetivos son: Determinar cuáles variables tienen mayor influencia en la respuesta de Y , determinar el mejor valor de las X que influyen en Y , de modo que Y tenga casi siempre un valor cercano al valor nominal deseado, determinar el mejor valor de las X que influyen en Y , de modo que la variabilidad de Y sea pequeña, determinar el mejor valor de las X que influyen en Y , de modo que se minimicen los efectos de las variables incontrolables Z_1, Z_2, \dots, Z_q .

Por lo anterior, los resultados obtenidos en el experimento nos deben llevar a conclusiones que sean útiles en el desarrollo de procesos y en la depuración de procesos para mejorar el rendimiento.

Como hemos observado a través del trabajo, existen muchos planes de diseño y análisis de experimentos. Sin embargo, la habilidad del estudiante para plantear un experimento es mucho mayor, este trabajo pretende ser como su nombre lo indica, una guía para que el estudiante de las carreras de química y bioquímica en el TESE investigue y planee sus proyectos con todos los beneficios que el diseño de experimentos ofrece.

El diseño experimental nos proporciona una cantidad máxima de información pertinente al problema bajo investigación, por otro lado con el diseño experimental el experimento deberá conducirse lo más eficientemente posible de tal forma que simplifica el trabajo y por lo tanto el costo de cada investigación.

BIBLIOGRAFÍA.

- 1.- Baena, Guillermina. Instrumentos de investigación, Editores Mexicanos unidos, S.A. I la reimpresión, México, 1991.
- 2.- Bauer, E.L. Manual de estadística para químicos, Ed. Alambra, España, 1974.
- 3.- Cochran, William G. ; Cox, Gertrude M.. Diseños experimentales . Ed. Trillas, 6a. reimp. México, 1980.
- 4.- Dominguez, Ana Elizabeth, Velez, Guadalupe, Introducción a la investigación documental en ciencia químico-biológicas, Facultad de química (UNAM), México, 1993.
- 5.- Eli de Gortari. Introducción a la lógica dialéctica, Ed. FCE, México 1964.
- 6.- Gómez Romero, José. El método experimental. Ed. Harla, México, 1983.
- 7.- González González, Carlos. Control de calidad. Ed. Mc Graw-Hill Interamericana de México, S.A. de C.V., México, 1993.
- 8.- González Reyna, Susana. Manual de redacción e investigación documental. Ed. Trillas, México, 1979.
- 9.- Infante Gil, Said; Zárate de Lara, Guillermo P. Métodos estadísticos. Ed. Trillas, 2a reimp., México, 1986.
- 10.- Juran, J. M.; Gryna, Frank M. Manual de control de calidad. Ed. Mc Graw-Hill, 4a de., España, 1993.
- 11.- Lowson, John; Erjavec, John; Madrigal, José L. Estrategias experimentales para el mejoramiento de la calidad en la industria. Grupo editorial Iberoamérica S.A. de C.V. , México, 1992.
- 12.- Montgomery, Douglas C. Diseño y análisis de experimentos. Grupo editorial Iberoamérica, S.A. de C.V., México, 1992.
- 13.- Munch, Lourdes; Angeles, Ernesto. Métodos y técnicas de investigación para administración en ingeniería. Ed. Trillas, México, 1988.
- 14.- Ostle, Bernard. Estadística aplicada. Ed. Limusa, México, 1a edición. 1965,
- 15.- Owen, L. Dvies. Métodos estadísticos aplicados a la investigación y la producción. Ed. Aguilar, España, 1960.
- 16.- Reyes Castañeda, Pedro. Bioestadística aplicada. Ed. Trillas, México, 1980.
- 17.- Tamayo y Tamayo, Mario, El proceso de la investigación científica. 2a edición, Noriega editores, Ed. Limusa, México, 1988.

GLOSARIO.

Agrupamiento.- Es la colocación de un conjunto de UE homogéneas en grupos, de modo que los diferentes grupos puedan sujetarse a distintos tratamientos.

ANDEVA.- Análisis de varianza.

Bibliografía.- Conjuntos de títulos de obras referentes al tema de investigación

Balaceo.- Por balanceo damos a entender la obtención de las UE, el agrupamiento, el bloqueo y la asignación de los tratamientos a las UE en tal modo que resulte una configuración balanceada

Bloqueo.- Es la distribución de las UE en bloques de tal manera que las unidades dentro de un bloque sean relativamente homogénea, de esta manera, la mayor parte de la variación predecible entre las unidades queda confundida con el efecto de los bloques.

Ciencia.- Conjunto sistemático de conocimientos, con los cuales, mediante el establecimiento de principios y leyes universales, el hombre explica, describe y transforma el mundo que lo rodea.

Confiabilidad.- Indica la estabilidad, consistencia y exactitud de los resultados.

Distribución de probabilidad.- Es una fórmula, tabla o gráfica que proporciona la probabilidad asociada con cada valor de una variable aleatoria si ésta es discreta, o que indica la proporción de mediciones en la población que caen en intervalos específicos si es continua.

Error experimental.- Describe el fracaso de llegar a resultados idénticos con dos unidades tratadas idénticamente

Factor.- Es diseño experimental un factor es una variable independiente y se representa por letras minúsculas latinas.

Grados de libertad (GL).- Es la expresión que se usa cuando el número de observaciones de una población o de una muestra se le resta la unidad. Es un parámetro de una distribución que se define como el número de observaciones que se tienen para un carácter cuantitativo, menos el número de constantes que se calculan con los valores de dichas observaciones.

Hipótesis.- Es una explicación tentativa que se da a un fenómeno, y se genera a través de un proceso deductivo. Según Webster: Una hipótesis es la teoría tentativa o suposición adoptada provisionalmente para explicar ciertos hechos y guiar la investigación de otros.

Hipótesis alternativa.- Es la hipótesis que se plantea con variables independientes, distintas a la hipótesis de trabajo.

Hipótesis de trabajo.- Es la que se utiliza para realizar la investigación, es decir, la respuesta tentativa al problema.

Hipótesis nula.- Es aquella que se formula para ser rechazada al realizar una prueba de hipótesis para inferir las características de una población. La hipótesis nula sirve para demostrar que no existen diferencias en la población investigada, sirve para probar la hipótesis de trabajo.

Método.- Es el procedimiento que se sigue para llevar a cabo un estudio sistemático de los fenómenos.

Modelo.-Representación o abstracción de la realidad.

Muestreo.- Se le llama así al proceso de tomar una o varias muestras. Existen diversas modalidades para practicar el muestreo, según sea la naturaleza de la población. Muestreo al azar mediante función continua de densidad de probabilidad. Muestreo al azar mediante una función discreta de densidad de probabilidad y cualquiera de las anteriores con reemplazamiento o sin reemplazamiento.

Nivel.- A los diversos valores, o clasificaciones de factores se conoce como nivel.

Doctmas de hipótesis.- Es un método para dictaminar sobre el rechazo de una aseveración, están basadas en la nulidad de las diferencias; es decir, la diferencia de promedios de muestras es cero o estima a cero. Dicha diferencia se simboliza por H_0 y se conoce como hipótesis de nulidad. La hipótesis contraria se conoce como alternativa, se expresa como H_A y está basada en la no nulidad de las diferencias.

Suma de cuadrados.- $SC = \sum x^2 = \sum (x - \mu)^2$ Significa la suma de cuadrados de las desviaciones con respecto a la media.

Técnica.- Son los recursos de los cuales se vale el investigador para recabar la información.

Tratamiento.- Elemento o sujeto sometido a estudio o ensayo de comparación. Por ejemplo, al estudiar cinco variedades, cinco dosis de fertilizantes, etc.

Unidad experimental(UE).- Es la unidad a la cual se le aplica un solo tratamiento (que puede ser una combinación de muchos factores) en una reproducción del experimento básico.

Varianza.- Varianza o cuadrado medio (CM) es igual al cuadrado de la desviación estándar; las unidades son por lo tanto cuadráticas con símbolos, se tiene: $\sigma^2 = \sum x^2 / N - 1$.

ANEXO

Tabla de números aleatorios

Fuente: Ostle, Bernard. Estadística aplicada. Ed. Limusa, México, 1a edición. 1965, pp. 588-591.

Tabla t de student

Fuente: Infante Gil, Said; Zárate de Lara, Guillermo P. Métodos estadísticos. Ed. Trillas, 2a reimp., México, 1986, pp. 619.

Tabla F

Fuente: Infante Gil, Said; Zárate de Lara, Guillermo P. Métodos estadísticos. Ed. Trillas, 2a reimp., México, 1986, pp. 620-627.

Tabla I Valores seleccionados de $t_{\alpha}(\nu)$

En la distribución t de Student con ν grados de libertad la tabla proporciona el valor $t_{\alpha}(\nu)$ tal que $P(t_{\nu} \geq t_{\alpha}(\nu)) = \alpha$.

$\nu \backslash \alpha$	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005	0.00025
1	1.0000	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567	127.3213	318.3088	636.6192	1273.2393
2	0.8165	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248	14.0890	22.3271	31.5991	44.7046
3	0.7649	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409	7.4533	10.2145	12.9240	16.3263
4	0.7407	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041	5.5976	7.1732	8.6103	10.3063
5	0.7267	1.4759	2.0160	2.5706	3.3649	4.0321	4.7733	5.8934	6.8688	7.9757
6	0.7176	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074	4.3168	5.2076	5.9588	6.7883
7	0.7111	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995	4.0293	4.7853	5.4079	6.0818
8	0.7064	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554	3.8325	4.5008	5.0413	5.6174
9	0.7027	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498	3.6897	4.2968	4.7809	5.2907
10	0.6998	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693	3.5814	4.1437	4.5869	5.0490
11	0.6974	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058	3.4966	4.0247	4.4370	4.8633
12	0.6955	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545	3.4285	3.9296	4.3178	4.7165
13	0.6938	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123	3.3725	3.8520	4.2208	4.5975
14	0.6924	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768	3.3257	3.7874	4.1405	4.4992
15	0.6912	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467	3.2860	3.7329	4.0728	4.4166
16	0.6901	1.3366	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208	3.2520	3.6862	4.0150	4.3463
17	0.6892	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982	3.2225	3.6458	3.9652	4.2858
18	0.6884	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784	3.1966	3.6105	3.9217	4.2337
19	0.6876	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609	3.1737	3.5794	3.8834	4.1870
20	0.6870	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453	3.1534	3.5518	3.8495	4.1461
21	0.6864	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314	3.1352	3.5272	3.8193	4.1096
22	0.6858	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188	3.1188	3.5050	3.7922	4.0770
23	0.6853	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073	3.1040	3.4850	3.7677	4.0475
24	0.6848	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969	3.0905	3.4658	3.7454	4.0208
25	0.6844	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874	3.0782	3.4452	3.7252	3.9965
26	0.6840	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787	3.0669	3.4350	3.7066	3.9743
27	0.6837	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707	3.0565	3.4210	3.6896	3.9539
28	0.6834	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633	3.0469	3.4082	3.6739	3.9351
29	0.6830	1.3114	1.6991	2.0462	2.4620	2.7564	3.0380	3.3963	3.6594	3.9178
30	0.6828	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500	3.0298	3.3852	3.6460	3.9017
31	0.6825	1.3095	1.6955	2.0395	2.4528	2.7440	3.0221	3.3749	3.6336	3.8868
32	0.6822	1.3086	1.6939	2.0369	2.4487	2.7385	3.0150	3.3653	3.6218	3.8728
33	0.6820	1.3077	1.6924	2.0345	2.4448	2.7333	3.0082	3.3563	3.6109	3.8598
34	0.6818	1.3070	1.6909	2.0322	2.4411	2.7284	3.0020	3.3479	3.6007	3.8477
35	0.6816	1.3062	1.6896	2.0301	2.4377	2.7238	2.9960	3.3401	3.5912	3.8363
36	0.6814	1.3055	1.6883	2.0281	2.4345	2.7195	2.9905	3.3326	3.5822	3.8256
37	0.6812	1.3049	1.6871	2.0262	2.4314	2.7154	2.9852	3.3256	3.5737	3.8165
38	0.6810	1.3042	1.6860	2.0244	2.4286	2.7116	2.9803	3.3190	3.5657	3.8069
39	0.6808	1.3036	1.6849	2.0227	2.4258	2.7079	2.9756	3.3128	3.5581	3.7969
40	0.6807	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045	2.9712	3.3069	3.5510	3.7884
41	0.6805	1.3025	1.6829	2.0195	2.4208	2.7012	2.9678	3.3013	3.5442	3.7804
42	0.6804	1.3020	1.6820	2.0181	2.4185	2.6981	2.9630	3.2960	3.5378	3.7727
43	0.6802	1.3016	1.6811	2.0167	2.4163	2.6951	2.9592	3.2909	3.5316	3.7654
44	0.6801	1.3011	1.6802	2.0154	2.4141	2.6923	2.9555	3.2861	3.5258	3.7585
45	0.6800	1.3006	1.6794	2.0141	2.4121	2.6896	2.9521	3.2815	3.5203	3.7519
46	0.6799	1.3002	1.6787	2.0129	2.4102	2.6870	2.9488	3.2771	3.5150	3.7456
47	0.6797	1.2998	1.6779	2.0117	2.4083	2.6846	2.9456	3.2729	3.5099	3.7397
48	0.6796	1.2994	1.6772	2.0106	2.4066	2.6822	2.9426	3.2689	3.5051	3.7339
49	0.6795	1.2991	1.6766	2.0096	2.4049	2.6800	2.9397	3.2651	3.5005	3.7284
50	0.6794	1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778	2.9370	3.2614	3.4960	3.7232
60	0.6786	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603	2.9146	3.2317	3.4602	3.6807
70	0.6780	1.2938	1.6669	1.9944	2.3808	2.6479	2.8987	3.2108	3.4350	3.6509
80	0.6776	1.2922	1.6641	1.9901	2.3739	2.6387	2.8870	3.1953	3.4163	3.6289
90	0.6772	1.2910	1.6620	1.9867	2.3685	2.6316	2.8779	3.1833	3.4019	3.6119
100	0.6770	1.2901	1.6602	1.9840	2.3642	2.6259	2.8707	3.1737	3.3905	3.5984

Tabla F. Valores seleccionados de F'_{α, n_1, n_2}

de la distribución de F' con n_1 grados de libertad en el numerador y n_2 grados de libertad en el denominador. La tabla proporciona valores F'_{α, n_1, n_2} tales que $P(F'_{\alpha, n_1, n_2} \leq F) = P(F_{\alpha, n_1, n_2} \leq F) = 1 - \alpha$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	20	24	30	40	60	120	500
1	39.001	49.590	53.693	56.833	57.340	58.704	58.906	59.439	59.858	60.195	60.473	60.705	60.903	61.073	61.223	61.740	62.007	62.265	62.529	62.754	63.061	63.264
2	9.476	9.690	9.860	9.993	10.03	9.926	9.967	9.981	9.987	9.992	9.996	9.998	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999
3	5.808	5.467	5.291	5.143	5.309	5.285	5.266	5.257	5.240	5.230	5.222	5.216	5.210	5.205	5.200	5.184	5.176	5.168	5.160	5.152	5.143	5.136
4	4.545	4.325	4.191	4.107	4.051	4.010	3.979	3.955	3.936	3.920	3.907	3.896	3.886	3.878	3.870	3.854	3.831	3.817	3.804	3.790	3.775	3.764
5	4.040	3.782	3.619	3.570	3.453	3.405	3.369	3.339	3.316	3.297	3.282	3.268	3.257	3.247	3.238	3.221	3.191	3.174	3.157	3.140	3.123	3.109
6	3.715	3.463	3.289	3.230	3.138	3.055	3.014	2.983	2.958	2.937	2.920	2.906	2.895	2.885	2.875	2.858	2.821	2.803	2.786	2.767	2.750	2.737
7	3.589	3.287	3.104	3.045	2.932	2.877	2.795	2.752	2.725	2.703	2.686	2.668	2.654	2.643	2.632	2.615	2.578	2.560	2.543	2.524	2.507	2.494
8	3.459	3.113	2.924	2.865	2.742	2.687	2.605	2.562	2.535	2.512	2.494	2.476	2.462	2.451	2.440	2.423	2.386	2.368	2.351	2.332	2.315	2.302
9	3.361	2.976	2.781	2.722	2.600	2.545	2.463	2.420	2.393	2.370	2.351	2.332	2.318	2.307	2.296	2.279	2.242	2.224	2.207	2.188	2.171	2.158
10	3.288	2.864	2.670	2.611	2.490	2.435	2.353	2.310	2.283	2.260	2.241	2.222	2.208	2.197	2.186	2.169	2.132	2.114	2.097	2.078	2.061	2.048
11	3.228	2.768	2.574	2.515	2.394	2.339	2.257	2.214	2.187	2.164	2.145	2.126	2.112	2.101	2.090	2.073	2.036	2.018	2.001	1.982	1.965	1.952
12	3.178	2.683	2.489	2.430	2.309	2.254	2.172	2.129	2.102	2.079	2.060	2.041	2.027	2.016	2.005	1.988	1.951	1.933	1.916	1.897	1.880	1.867
13	3.136	2.613	2.420	2.361	2.240	2.185	2.103	2.060	2.033	2.010	1.991	1.972	1.958	1.947	1.936	1.919	1.882	1.864	1.847	1.828	1.811	1.798
14	3.099	2.556	2.363	2.304	2.183	2.128	2.046	2.003	1.976	1.953	1.934	1.915	1.901	1.890	1.879	1.862	1.825	1.807	1.790	1.771	1.754	1.741
15	3.064	2.505	2.312	2.253	2.132	2.077	1.995	1.952	1.925	1.902	1.883	1.864	1.850	1.839	1.828	1.811	1.774	1.756	1.739	1.720	1.703	1.690
16	3.028	2.458	2.265	2.206	2.085	2.030	1.948	1.905	1.878	1.855	1.836	1.817	1.803	1.792	1.781	1.764	1.727	1.709	1.692	1.673	1.656	1.643
17	3.000	2.409	2.216	2.157	1.996	1.941	1.859	1.816	1.789	1.766	1.747	1.728	1.714	1.703	1.692	1.675	1.638	1.620	1.603	1.584	1.567	1.554
18	2.978	2.364	2.171	2.112	1.951	1.896	1.814	1.771	1.744	1.721	1.702	1.683	1.669	1.658	1.647	1.630	1.593	1.575	1.558	1.539	1.522	1.509
19	2.960	2.328	2.135	2.076	1.915	1.860	1.778	1.735	1.708	1.685	1.666	1.647	1.633	1.622	1.611	1.594	1.557	1.539	1.522	1.503	1.486	1.473
20	2.945	2.299	2.106	2.047	1.886	1.831	1.749	1.706	1.679	1.656	1.637	1.618	1.604	1.593	1.582	1.565	1.528	1.510	1.493	1.474	1.457	1.444
21	2.931	2.275	2.082	2.023	1.862	1.807	1.725	1.682	1.655	1.632	1.613	1.594	1.580	1.569	1.558	1.541	1.504	1.486	1.469	1.450	1.433	1.420
22	2.918	2.259	2.066	2.007	1.846	1.791	1.709	1.666	1.639	1.616	1.597	1.578	1.564	1.553	1.542	1.525	1.488	1.470	1.453	1.434	1.417	1.404
23	2.906	2.245	2.052	1.993	1.832	1.777	1.695	1.652	1.625	1.602	1.583	1.564	1.550	1.539	1.528	1.511	1.474	1.456	1.439	1.420	1.403	1.390
24	2.894	2.232	2.039	1.980	1.819	1.764	1.682	1.639	1.612	1.589	1.570	1.551	1.537	1.526	1.515	1.498	1.461	1.443	1.426	1.407	1.390	1.377
25	2.882	2.220	2.027	1.968	1.807	1.752	1.670	1.627	1.600	1.577	1.558	1.539	1.525	1.514	1.503	1.486	1.449	1.431	1.414	1.395	1.378	1.365
26	2.871	2.208	2.015	1.956	1.795	1.740	1.658	1.615	1.588	1.565	1.546	1.527	1.513	1.502	1.491	1.474	1.437	1.419	1.402	1.383	1.366	1.353
27	2.860	2.196	2.003	1.944	1.783	1.728	1.646	1.603	1.576	1.553	1.534	1.515	1.501	1.490	1.479	1.462	1.425	1.407	1.390	1.371	1.354	1.341
28	2.849	2.184	1.991	1.932	1.771	1.716	1.634	1.591	1.564	1.541	1.522	1.503	1.489	1.478	1.467	1.450	1.413	1.395	1.378	1.359	1.342	1.329
29	2.838	2.172	1.979	1.920	1.759	1.704	1.622	1.579	1.552	1.529	1.510	1.491	1.477	1.466	1.455	1.438	1.401	1.383	1.366	1.347	1.330	1.317
30	2.827	2.160	1.967	1.908	1.747	1.692	1.610	1.567	1.540	1.517	1.498	1.479	1.465	1.454	1.443	1.426	1.389	1.371	1.354	1.335	1.318	1.305
31	2.816	2.148	1.955	1.896	1.735	1.680	1.598	1.555	1.528	1.505	1.486	1.467	1.453	1.442	1.431	1.414	1.377	1.359	1.342	1.323	1.306	1.293
32	2.805	2.136	1.943	1.884	1.723	1.668	1.586	1.543	1.516	1.493	1.474	1.455	1.441	1.430	1.419	1.402	1.365	1.347	1.330	1.311	1.294	1.281
33	2.794	2.124	1.931	1.872	1.711	1.656	1.574	1.531	1.504	1.481	1.462	1.443	1.429	1.418	1.407	1.390	1.353	1.335	1.318	1.299	1.282	1.269
34	2.783	2.112	1.919	1.860	1.699	1.644	1.562	1.519	1.492	1.469	1.450	1.431	1.417	1.406	1.395	1.378	1.341	1.323	1.306	1.287	1.270	1.257
35	2.772	2.100	1.907	1.848	1.687	1.632	1.550	1.507	1.480	1.457	1.438	1.419	1.405	1.394	1.383	1.366	1.329	1.311	1.294	1.275	1.258	1.245
36	2.761	2.088	1.895	1.836	1.675	1.620	1.538	1.495	1.468	1.445	1.426	1.407	1.393	1.382	1.371	1.354	1.317	1.299	1.282	1.263	1.246	1.233
37	2.750	2.076	1.883	1.824	1.663	1.608	1.526	1.483	1.456	1.433	1.414	1.395	1.381	1.370	1.359	1.342	1.305	1.287	1.270	1.251	1.234	1.221
38	2.739	2.064	1.871	1.812	1.651	1.596	1.514	1.471	1.444	1.421	1.402	1.383	1.369	1.358	1.347	1.330	1.293	1.275	1.258	1.239	1.222	1.209
39	2.728	2.052	1.859	1.800	1.639	1.584	1.502	1.459	1.432	1.409	1.390	1.371	1.357	1.346	1.335	1.318	1.281	1.263	1.246	1.227	1.210	1.197
40	2.717	2.040	1.847	1.788	1.627	1.572	1.490	1.447	1.420	1.397	1.378	1.359	1.345	1.334	1.323	1.306	1.269	1.251	1.234	1.215	1.198	1.185
41	2.706	2.028	1.835	1.776	1.615	1.560	1.478	1.435	1.408	1.385	1.366	1.347	1.333	1.322	1.311	1.294	1.257	1.239	1.222	1.203	1.186	1.173
42	2.695	2.016	1.823	1.764	1.603	1.548	1.466	1.423	1.396	1.373	1.354	1.335	1.321	1.310	1.299	1.282	1.245	1.227	1.210	1.191	1.174	1.161
43	2.684	2.004	1.811	1.752	1.591	1.536	1.454	1.411	1.384	1.361	1.342	1.323	1.309	1.298	1.287	1.270	1.233	1.215	1.198	1.179	1.162	1.149
44	2.673	1.992	1.799	1.740	1.579	1.524	1.442	1.399	1.372	1.349	1.330	1.311	1.297	1.286	1.275	1.258	1.221	1.203	1.186	1.167	1.150	1.137
45	2.662	1.980	1.787	1.728	1.567	1.512	1.430	1.387	1.360	1.337	1.318	1.299	1.285	1.274	1.263	1.246	1.209	1.191	1.174	1.155	1.138	1.125
46	2.651	1.968	1.775	1.716	1.555	1.500	1.418	1.375	1.348	1.325	1.306	1.287	1.273	1.262	1.251	1.234	1.197	1.179	1.162	1.143	1.126	1.113
47	2.640	1.956	1.763	1.704	1.543	1.488	1.406	1.363	1.336													

Tabla F Valores seleccionados de $F_{n,0.95}^m$
 Para la distribución de F con m grados de libertad en el numerador y n grados de libertad en el denominador.
 la tabla de el valor $F_{n,0.95}^m$ tal que $P(F_{n,0.95}^m \geq F_{n,0.95}^m) = 0.05$.

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	20	24	30	40	60	120	500
1	161.448	199.500	215.707	224.583	230.182	233.986	236.768	238.883	240.543	241.882	242.983	243.906	244.680	245.364	245.950	248.013	249.052	250.095	251.143	252.196	253.252	254.095
2	18.512	19.000	19.164	19.247	19.296	19.330	19.353	19.371	19.385	19.396	19.405	19.413	19.419	19.424	19.425	19.446	19.454	19.462	19.471	19.479	19.487	19.494
3	10.128	9.552	9.277	9.117	9.013	8.941	8.887	8.845	8.812	8.786	8.763	8.745	8.729	8.715	8.703	8.660	8.639	8.617	8.594	8.572	8.549	8.537
4	7.709	6.988	6.588	6.266	6.050	5.885	5.766	5.681	5.622	5.581	5.546	5.516	5.491	5.470	5.453	5.403	5.374	5.347	5.321	5.295	5.269	5.257
5	6.608	5.786	5.207	4.757	4.450	4.250	4.101	4.000	3.937	3.893	3.857	3.827	3.802	3.781	3.764	3.706	3.676	3.649	3.623	3.597	3.571	3.559
6	5.987	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.207	4.147	4.099	4.060	4.027	4.000	3.976	3.956	3.938	3.874	3.841	3.808	3.774	3.740	3.714	3.702
7	5.591	4.737	4.347	4.120	3.972	3.866	3.787	3.726	3.677	3.637	3.603	3.575	3.550	3.529	3.511	3.445	3.410	3.376	3.340	3.304	3.278	3.266
8	5.318	4.459	4.063	3.838	3.687	3.581	3.500	3.438	3.388	3.347	3.313	3.284	3.259	3.237	3.218	3.150	3.115	3.079	3.043	3.007	2.981	2.969
9	5.117	4.256	3.853	3.633	3.482	3.374	3.293	3.230	3.179	3.137	3.102	3.073	3.048	3.025	3.006	2.936	2.900	2.864	2.828	2.792	2.767	2.755
10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.135	3.072	3.020	2.978	2.943	2.913	2.887	2.865	2.845	2.774	2.737	2.700	2.664	2.628	2.603	2.591
11	4.844	3.982	3.587	3.357	3.204	3.095	3.012	2.948	2.896	2.854	2.818	2.788	2.761	2.739	2.719	2.648	2.610	2.573	2.537	2.501	2.476	2.464
12	4.747	3.885	3.490	3.259	3.105	2.996	2.913	2.849	2.796	2.754	2.717	2.687	2.660	2.637	2.617	2.546	2.508	2.471	2.435	2.399	2.374	2.362
13	4.667	3.806	3.411	3.179	3.025	2.915	2.832	2.767	2.714	2.671	2.633	2.604	2.577	2.554	2.533	2.462	2.424	2.387	2.351	2.315	2.290	2.278
14	4.600	3.739	3.344	3.112	2.958	2.848	2.764	2.699	2.646	2.602	2.565	2.534	2.507	2.484	2.463	2.392	2.354	2.317	2.281	2.245	2.220	2.208
15	4.540	3.682	3.287	3.056	2.901	2.790	2.707	2.641	2.588	2.544	2.507	2.475	2.448	2.424	2.403	2.332	2.294	2.257	2.221	2.185	2.160	2.148
16	4.494	3.634	3.239	3.007	2.852	2.741	2.657	2.591	2.538	2.494	2.456	2.425	2.397	2.373	2.352	2.281	2.243	2.206	2.170	2.134	2.109	2.097
17	4.451	3.592	3.197	2.965	2.810	2.699	2.614	2.548	2.494	2.450	2.413	2.381	2.353	2.329	2.308	2.237	2.199	2.162	2.126	2.090	2.065	2.053
18	4.414	3.555	3.160	2.928	2.773	2.661	2.575	2.510	2.456	2.412	2.374	2.342	2.314	2.290	2.269	2.198	2.160	2.123	2.087	2.051	2.026	2.014
19	4.381	3.522	3.127	2.895	2.740	2.628	2.542	2.477	2.423	2.379	2.340	2.308	2.280	2.256	2.234	2.163	2.125	2.088	2.052	2.016	1.991	1.979
20	4.351	3.492	3.097	2.865	2.710	2.598	2.512	2.447	2.393	2.348	2.309	2.277	2.250	2.225	2.203	2.132	2.094	2.057	2.021	1.985	1.960	1.948
21	4.325	3.467	3.072	2.840	2.685	2.573	2.487	2.422	2.368	2.323	2.283	2.251	2.224	2.199	2.177	2.106	2.068	2.031	1.995	1.959	1.934	1.922
22	4.301	3.443	3.048	2.817	2.661	2.549	2.463	2.397	2.343	2.297	2.257	2.225	2.198	2.173	2.151	2.079	2.041	2.004	1.968	1.932	1.907	1.895
23	4.279	3.422	3.027	2.796	2.640	2.528	2.442	2.376	2.322	2.276	2.236	2.204	2.178	2.152	2.130	2.058	2.020	1.983	1.947	1.911	1.886	1.874
24	4.260	3.403	3.008	2.777	2.621	2.509	2.423	2.357	2.303	2.257	2.216	2.184	2.158	2.132	2.110	2.038	2.000	1.963	1.927	1.891	1.866	1.854
25	4.242	3.385	2.990	2.759	2.603	2.491	2.405	2.339	2.285	2.239	2.198	2.166	2.140	2.114	2.092	2.020	1.982	1.945	1.909	1.873	1.848	1.836
26	4.225	3.369	2.974	2.743	2.587	2.475	2.389	2.323	2.269	2.223	2.182	2.150	2.124	2.098	2.076	2.004	1.966	1.929	1.893	1.857	1.832	1.820
27	4.210	3.354	2.959	2.728	2.572	2.460	2.374	2.308	2.254	2.208	2.167	2.135	2.109	2.083	2.061	1.989	1.951	1.914	1.878	1.842	1.817	1.805
28	4.196	3.340	2.945	2.714	2.558	2.445	2.359	2.293	2.239	2.193	2.152	2.120	2.094	2.068	2.046	1.974	1.936	1.899	1.863	1.827	1.802	1.790
29	4.183	3.328	2.933	2.702	2.545	2.432	2.346	2.280	2.226	2.179	2.138	2.106	2.080	2.054	2.032	1.960	1.922	1.885	1.849	1.813	1.788	1.776
30	4.171	3.316	2.922	2.691	2.534	2.421	2.334	2.268	2.214	2.167	2.126	2.094	2.068	2.042	2.020	1.948	1.910	1.873	1.837	1.801	1.776	1.764
31	4.160	3.305	2.911	2.679	2.522	2.409	2.322	2.256	2.199	2.152	2.111	2.079	2.053	2.027	2.005	1.933	1.895	1.858	1.822	1.786	1.761	1.749
32	4.149	3.294	2.900	2.668	2.511	2.398	2.311	2.244	2.187	2.140	2.100	2.068	2.042	2.016	1.994	1.922	1.884	1.847	1.811	1.775	1.750	1.738
33	4.139	3.285	2.891	2.659	2.502	2.389	2.302	2.235	2.178	2.131	2.090	2.058	2.032	2.006	1.984	1.912	1.874	1.837	1.801	1.765	1.740	1.728
34	4.130	3.276	2.883	2.650	2.493	2.380	2.293	2.226	2.169	2.122	2.081	2.049	2.023	1.997	1.975	1.903	1.865	1.828	1.792	1.756	1.731	1.719
35	4.121	3.267	2.874	2.641	2.484	2.371	2.284	2.217	2.160	2.113	2.072	2.040	2.014	1.988	1.966	1.894	1.856	1.819	1.783	1.747	1.722	1.710
36	4.113	3.259	2.866	2.634	2.477	2.364	2.277	2.210	2.153	2.106	2.065	2.033	2.007	1.981	1.959	1.887	1.849	1.812	1.776	1.740	1.715	1.703
37	4.105	3.252	2.859	2.626	2.469	2.356	2.269	2.202	2.145	2.098	2.057	2.025	1.999	1.973	1.951	1.879	1.841	1.804	1.768	1.732	1.707	1.695
38	4.098	3.245	2.852	2.619	2.462	2.349	2.262	2.195	2.138	2.091	2.050	2.018	1.992	1.966	1.944	1.872	1.834	1.797	1.761	1.725	1.700	1.688
39	4.091	3.238	2.845	2.612	2.455	2.342	2.255	2.188	2.131	2.084	2.043	2.011	1.985	1.959	1.937	1.865	1.827	1.790	1.754	1.718	1.693	1.681
40	4.085	3.232	2.839	2.606	2.449	2.336	2.249	2.182	2.125	2.078	2.037	2.005	1.979	1.953	1.931	1.859	1.821	1.784	1.748	1.712	1.687	1.675
50	4.034	3.183	2.790	2.557	2.400	2.287	2.199	2.132	2.075	2.028	1.987	1.955	1.929	1.903	1.881	1.809	1.771	1.734	1.698	1.662	1.637	1.625
60	4.001	3.150	2.758	2.525	2.368	2.254	2.167	2.099	2.042	1.995	1.954	1.922	1.896	1.870	1.848	1.776	1.738	1.701	1.665	1.629	1.604	1.592
70	3.978	3.128	2.736	2.503	2.346	2.231	2.143	2.075	2.017	1.970	1.929	1.897	1.871	1.845	1.823	1.751	1.713	1.676	1.640	1.604	1.579	1.567
80	3.960	3.111	2.719	2.486	2.329	2.214	2.126	2.058	1.999	1.951	1.910	1.878	1.852	1.826	1.804	1.732	1.694	1.657	1.621	1.585	1.560	1.548
90	3.947	3.096	2.706	2.473	2.316	2.201	2.113	2.045	1.986	1.938	1.897	1.865	1.839	1.813	1.791	1.719	1.681	1.644	1.608	1.572	1.547	1.535
100	3.936	3.087	2.696	2.463	2.306	2.191	2.103	2.035	1.976	1.928	1.887	1.855	1.829	1.803	1.781	1.709	1.671	1.634	1.598	1.562	1.537	1.525
110	3.927	3.079	2.687	2.454	2.297	2.182	2.094	2.026	1.967	1.919	1.878	1.846	1.820	1.794	1.772	1.700	1.662	1.625	1.589	1.553	1.528	1.516
120	3.920	3.072	2.680	2.447	2.290	2.175	2.087	2.019	1.960	1.912	1.871	1.839	1.813	1.787	1.765	1.693	1.655	1.618	1.582	1.546	1.521	1.509
200	3.888	3.041	2.650	2.417	2.259	2.144	2.056	1.988	1.929	1.881	1.840	1.808	1.782	1.756	1.734	1.662	1.624	1.587	1.551	1.515	1.490	1.478
500	3.860	3.014	2.623	2.390	2.232	2.117	2.028	1.960	1.901	1.853	1.812	1.780	1.754	1.728	1.706	1.634	1.596	1.559	1.523	1.487	1.462	1.450

Tabla F. Valores seleccionados de $F_{\alpha, m, n}$ (2)

Para la distribución de F con m grados de libertad en el numerador y n grados de libertad en el denominador, la tabla da el valor $F_{\alpha, m, n}$ tal que $P(F_{m, n} \geq F_{\alpha, m, n}) = \alpha$.

α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	20	24	30	40	60	120	500	
1	4052.181	4999.500	5403.352	5624.583	5763.650	5858.986	5928.356	5981.070	6023.473	6058.847	6083.317	6106.321	6125.865	6142.674	6157.285	6206.730	6234.631	6260.649	6286.782	6313.030	6339.351	6359.561	
2	98.533	99.000	99.166	99.249	99.299	99.333	99.356	99.374	99.388	99.398	99.408	99.416	99.422	99.428	99.433	99.449	99.456	99.466	99.474	99.482	99.491	99.497	
3	34.116	30.817	29.457	28.710	28.237	27.911	27.672	27.498	27.345	27.229	27.133	27.052	26.983	26.924	26.872	26.820	26.768	26.716	26.664	26.612	26.561	26.510	26.459
4	21.198	18.000	16.694	15.977	15.522	15.207	14.975	14.799	14.659	14.546	14.452	14.374	14.307	14.249	14.198	14.146	14.094	14.042	13.990	13.938	13.886	13.834	13.782
5	16.258	13.274	12.080	11.392	10.967	10.672	10.466	10.289	10.158	10.051	9.953	9.874	9.796	9.718	9.657	9.605	9.553	9.501	9.449	9.397	9.345	9.293	9.241
6	13.745	10.525	9.780	9.148	8.746	8.466	8.266	8.103	7.986	7.891	7.807	7.734	7.661	7.598	7.545	7.492	7.439	7.386	7.333	7.280	7.227	7.174	7.121
7	12.246	9.547	8.851	8.247	7.866	7.601	7.411	7.263	7.146	7.051	6.967	6.894	6.821	6.758	6.705	6.652	6.599	6.546	6.493	6.440	6.387	6.334	6.281
8	11.259	8.549	7.917	7.346	6.983	6.732	6.556	6.418	6.301	6.206	6.122	6.049	5.976	5.913	5.860	5.807	5.754	5.701	5.648	5.595	5.542	5.489	5.436
9	10.561	8.022	7.502	6.952	6.612	6.375	6.211	6.084	5.989	5.905	5.832	5.759	5.686	5.623	5.570	5.517	5.464	5.411	5.358	5.305	5.252	5.199	5.146
10	10.044	7.559	7.062	6.532	6.205	5.975	5.806	5.678	5.583	5.500	5.427	5.354	5.281	5.218	5.165	5.112	5.059	5.006	4.953	4.900	4.847	4.794	4.741
11	9.646	7.206	6.717	6.198	5.875	5.642	5.469	5.331	5.236	5.153	5.080	4.997	4.924	4.861	4.808	4.755	4.702	4.649	4.596	4.543	4.490	4.437	4.384
12	9.320	6.927	6.438	5.920	5.602	5.365	5.188	5.040	4.945	4.862	4.789	4.716	4.643	4.580	4.527	4.474	4.421	4.368	4.315	4.262	4.209	4.156	4.103
13	9.074	6.701	6.212	5.704	5.390	5.149	4.970	4.822	4.727	4.644	4.571	4.498	4.425	4.362	4.309	4.256	4.203	4.150	4.097	4.044	3.991	3.938	3.885
14	8.862	6.515	6.026	5.528	5.218	4.974	4.793	4.645	4.550	4.467	4.394	4.321	4.248	4.185	4.132	4.079	4.026	3.973	3.920	3.867	3.814	3.761	3.708
15	8.683	6.359	5.870	5.372	5.065	4.818	4.637	4.489	4.394	4.311	4.238	4.165	4.092	4.029	3.976	3.923	3.870	3.817	3.764	3.711	3.658	3.605	3.552
16	8.533	6.226	5.737	5.239	4.934	4.685	4.504	4.356	4.261	4.178	4.105	4.032	3.959	3.896	3.843	3.790	3.737	3.684	3.631	3.578	3.525	3.472	3.419
17	8.403	6.112	5.623	5.125	4.820	4.570	4.389	4.241	4.146	4.063	3.990	3.917	3.844	3.781	3.728	3.675	3.622	3.569	3.516	3.463	3.410	3.357	3.304
18	8.285	6.013	5.524	5.026	4.721	4.471	4.290	4.142	4.047	3.964	3.891	3.818	3.745	3.682	3.629	3.576	3.523	3.470	3.417	3.364	3.311	3.258	3.205
19	8.185	5.926	5.437	4.939	4.634	4.384	4.203	4.055	3.960	3.877	3.804	3.731	3.658	3.595	3.542	3.489	3.436	3.383	3.330	3.277	3.224	3.171	3.118
20	8.096	5.849	5.360	4.862	4.557	4.307	4.126	3.978	3.883	3.800	3.727	3.654	3.581	3.518	3.465	3.412	3.359	3.306	3.253	3.200	3.147	3.094	3.041
21	8.017	5.780	5.291	4.793	4.488	4.238	4.057	3.909	3.814	3.731	3.658	3.585	3.512	3.449	3.396	3.343	3.290	3.237	3.184	3.131	3.078	3.025	2.972
22	7.945	5.719	5.230	4.732	4.427	4.177	3.996	3.848	3.753	3.670	3.597	3.524	3.451	3.388	3.335	3.282	3.229	3.176	3.123	3.070	3.017	2.964	2.911
23	7.881	5.664	5.175	4.677	4.372	4.122	3.941	3.793	3.698	3.615	3.542	3.469	3.396	3.333	3.280	3.227	3.174	3.121	3.068	3.015	2.962	2.909	2.856
24	7.823	5.614	5.125	4.627	4.322	4.072	3.891	3.743	3.648	3.565	3.492	3.419	3.346	3.283	3.230	3.177	3.124	3.071	3.018	2.965	2.912	2.859	2.806
25	7.770	5.568	5.079	4.581	4.276	4.026	3.845	3.697	3.602	3.519	3.446	3.373	3.300	3.237	3.184	3.131	3.078	3.025	2.972	2.919	2.866	2.813	2.760
26	7.721	5.526	5.037	4.539	4.234	3.984	3.803	3.655	3.560	3.477	3.404	3.331	3.258	3.195	3.142	3.089	3.036	2.983	2.930	2.877	2.824	2.771	2.718
27	7.677	5.488	4.999	4.501	4.196	3.946	3.765	3.617	3.522	3.439	3.366	3.293	3.220	3.157	3.104	3.051	2.998	2.945	2.892	2.839	2.786	2.733	2.680
28	7.636	5.453	4.964	4.466	4.161	3.911	3.730	3.582	3.487	3.404	3.331	3.258	3.185	3.122	3.069	3.016	2.963	2.910	2.857	2.804	2.751	2.698	2.645
29	7.598	5.420	4.931	4.433	4.128	3.878	3.697	3.549	3.454	3.371	3.298	3.225	3.152	3.089	3.036	2.983	2.930	2.877	2.824	2.771	2.718	2.665	2.612
30	7.562	5.390	4.901	4.403	4.098	3.848	3.667	3.519	3.424	3.341	3.268	3.195	3.122	3.059	3.006	2.953	2.900	2.847	2.794	2.741	2.688	2.635	2.582
31	7.530	5.362	4.873	4.375	4.070	3.820	3.639	3.491	3.396	3.313	3.240	3.167	3.094	3.031	2.978	2.925	2.872	2.819	2.766	2.713	2.660	2.607	2.554
32	7.499	5.336	4.847	4.349	4.044	3.794	3.613	3.465	3.370	3.287	3.214	3.141	3.068	3.005	2.952	2.899	2.846	2.793	2.740	2.687	2.634	2.581	2.528
33	7.471	5.312	4.823	4.325	4.020	3.770	3.589	3.441	3.346	3.263	3.190	3.117	3.044	2.981	2.928	2.875	2.822	2.769	2.716	2.663	2.610	2.557	2.504
34	7.444	5.289	4.800	4.302	3.997	3.747	3.566	3.418	3.323	3.240	3.167	3.094	3.021	2.958	2.905	2.852	2.799	2.746	2.693	2.640	2.587	2.534	2.481
35	7.419	5.266	4.777	4.279	3.974	3.724	3.543	3.395	3.300	3.217	3.144	3.071	2.998	2.935	2.882	2.829	2.776	2.723	2.670	2.617	2.564	2.511	2.458
36	7.396	5.242	4.753	4.255	3.950	3.700	3.519	3.371	3.276	3.193	3.120	3.047	2.974	2.911	2.858	2.805	2.752	2.699	2.646	2.593	2.540	2.487	2.434
37	7.373	5.220	4.731	4.233	3.928	3.678	3.497	3.349	3.254	3.171	3.098	3.025	2.952	2.889	2.836	2.783	2.730	2.677	2.624	2.571	2.518	2.465	2.412
38	7.350	5.200	4.711	4.213	3.908	3.658	3.477	3.329	3.234	3.151	3.078	3.005	2.932	2.869	2.816	2.763	2.710	2.657	2.604	2.551	2.498	2.445	2.392
39	7.333	5.194	4.705	4.207	3.902	3.652	3.471	3.323	3.228	3.145	3.072	2.999	2.926	2.863	2.810	2.757	2.704	2.651	2.598	2.545	2.492	2.439	2.386
40	7.314	5.179	4.690	4.192	3.887	3.637	3.456	3.308	3.213	3.130	3.057	2.984	2.911	2.848	2.795	2.742	2.689	2.636	2.583	2.530	2.477	2.424	2.371
50	7.171	5.057	4.199	3.700	3.400	3.186	3.020	2.894	2.799	2.726	2.663	2.600	2.547	2.494	2.441	2.388	2.335	2.282	2.229	2.176	2.123	2.070	2.017
60	7.077	4.977	4.126	3.627	3.327	3.113	2.947	2.821	2.726	2.653	2.590	2.527	2.474	2.421	2.368	2.315	2.262	2.209	2.156	2.103	2.050	1.997	1.944
70	7.011	4.922	4.074	3.575	3.275	3.061	2.895	2.769	2.674	2.601	2.538	2.475	2.422	2.369	2.316	2.263	2.210	2.157	2.104	2.051	1.998	1.945	1.892
80	6.963	4.881	4.036	3.537	3.237	3.023	2.857	2.731	2.636	2.563	2.500	2.437	2.384	2.331	2.278	2.225	2.172	2.119	2.066	2.013	1.960	1.907	1.854
90	6.925	4.849	4.004	3.505	3.205	2.991	2.825	2.700	2.605	2.532	2.469	2.406	2.353	2.300	2.247	2.194	2.141	2.088	2.035	1.982	1.929	1.876	1.823
100	6.895	4.824	3.980	3.481	3.181	2.967	2.801	2.676	2.581	2.508	2.445	2.382	2.329	2.276	2.223	2.170	2.117	2.064	2.011	1.958	1.905	1.852	1.799
110	6.871	4.803	3.960	3.461	3.161	2.947	2.781	2.656	2.561	2.488	2.425	2.362	2.309	2.256	2.203	2.150	2.097	2.044	1.991	1.938	1.885	1.832	1.779
120	6.851	4.787	3.944	3.445	3.145	2.931	2.765	2.640	2.545	2.472	2.409	2.346	2.293	2.240	2.187	2.134	2.081	2.028	1.975	1.922	1.869	1.816	1.763
130	6.833	4.771	3.928	3.429	3.129	2.915	2.749	2.624	2.529	2.456	2.393	2.330	2.277	2.224	2.171	2.118	2.065	2.012	1.959	1.906	1.853	1.800	