003651

2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

SOBRE LA ESTRUCTURA DE RETÍCULA DE R-tors.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS
(MATEMÁTICAS)

P R E S E N T A

ALEJANDRO ALVARADO GARCÍA.

DIRECTOR DE TESIS: **Dr. HUGO ALBERTO RINCÓN MEJÍA.**

1996

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

A MI ESPOSA
LULÚ.

Quiero expresar mi más sincero y profundo agradecimiento a mi asesor, el Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía. Gracias por todo el apoyo, la confianza y la paciencia que siempre me has tenido. Sin tu ayuda no hubiera sido realidad este trabajo.
Eres un verdadero amigo.

También quisiera dar las gracias a mi familia, a mis amigos y a mis compañeros que siempre me han animado a seguir adelante en mi carrera y en mi vida personal. En especial a mi esposa.

Gracias a mis sinodales, los Doctores: Emilio Lluis Riera, Francisco Raggi, José Ríos, Humberto Cárdenas, María José Arroyo y Alejandro Díaz Barriga, por su ayuda y sus sugerencias para este trabajo.

ÍNDICE.

INTRODUCCIÓN.

En todo este trabajo, supondremos siempre que R es un anillo asociativo con uno y R-Mod es la categoría de los R-módulos izquierdos unitarios.

Recientemente, se han estudiado diversas relaciones de equivalencia en R-tors, el marco de las teorías de torsión hereditarias en R-Mod. Aquellas con la propiedad de que cada clase de equivalencia es una subretícula ó una subretícula completa de R-tors.
El estudio de estas clases de equivalencia ha producido información muy interesante acerca del anillo R y de la categoría R-Mod.
Principalmente, aquí estudiaremos cuatro de estas relaciones, con base a los trabajos de varios investigadores mexicanos durante los últimos años.

Este trabajo se divide en cuatro partes:

• La primera parte es introductoria, definimos el concepto de una teoría de torsión desde tres puntos de vista diferentes, los cuales resultan ser equivalentes.

También observamos las propiedades básicas de las clases de torsión y libre de torsión de una teoría de torsión.

• En la segunda, vemos que R-tors es una retícula completa al exhibir los supremos y los ínfimos, mas aún, probamos que es un marco.

Describimos el seudocomplemento de una teoría de torsión, con base en la clase de torsión de la misma. Damos propiedades de las teorías de torsión que son "generadas" y "cogeneradas" por alguna clase específica de R-módulos izquierdos.

En la última parte del capítulo, describimos el "esqueleto" de R-tors que será útil posteriormente al considerar una relación de equivalencia importante de R-tors. Finalizamos esta parte, dando una demostración del teorema de Glivenco, dentro de nuestro contexto.

• En la tercera parte y la más extensa, introducimos cuatro relaciones de equivalencia importantes que inducen subretículas completas de R-tors. Demostramos que cada clase de equivalencia es un intervalo para cada una de ellas.
Definimos una relación de equivalencia más general que, cuando tomamos una subclase particular de R-Mod, algunas de las relaciones anteriores resultan ser instancias de ella.
Además damos diversas proposiciones, algunas inéditas, acerca de como son tales intervalos cuando el anillo tiene ciertas características. Tales proposiciones nos dan caracterizaciones de ciertos tipos de anillos.
También tratamos los casos de cuando dos o más de estas relaciones de equivalencia coinciden, de cuando algunas clases de equivalencia particulares tienen los mismos elementos, mostrando propiedades que debe de tener el anillo.

• Por último, en el cuarto capítulo, analizamos el caso de cuando todos los prerradicales de R-Mod son radicales exactos izquierdos, es decir, damos condiciones necesarias y suficientes para que un prerradical induzca una teoría de torsión hereditaria.

1. TEORÍAS DE TORSIÓN.

• Decimos que dos módulos izquierdos inyectivos son equivalentes si y sólo si cada uno de ellos puede ser sumergido en un producto directo de copias del otro. Es fácil verificar que esta relación es de equivalencia.

Proposición 1.1 : Dos módulos izquierdos inyectivos E y E', sobre el anillo R, son equivalentes si y sólo si la clase de todos los R-módulos M que satisfacen, $\mathrm{Hom}_R(M, E) = 0$, coincide con la clase de los que satisfacen, $\mathrm{Hom}_R(M, E') = 0$.

Demostración:
($\Rightarrow$) es clara.
($\Leftarrow$) Supongamos que las dos clases coinciden.

Hagamos $\Omega = \mathrm{Hom}_R(E, E')$. Entonces existe un R-homomorfismo canónico $\Phi : E \to (E')^{\Omega}$ definido por:

$$x \mapsto \langle \alpha(x) \rangle$$

donde α corre sobre Ω.

Si [illegible] Ker (Φ) entonces se tiene que $\mathrm{Hom}_R(K, E') = 0$ debido a que, por ser inye[illegible] cualquier R-homomorfismo de K a E' puede ser extendido a uno de E [illegible] E'. Por lo tanto $\mathrm{Hom}_R(K, E) = 0$. Pero $K \leq E$ y esto implica que [illegible] por lo tanto Φ sumerge a E en un producto directo de copias de

E'. De la misma manera se muestra que E' puede ser sumergido en un producto directo de copias de E.

■

Definición 1.2 : Una clase de equivalencia de R-módulos inyectivos es llamada una *Teoría de Torsión* en R-Mod (Teoría de Torsión Hereditaria según Dickson). A la familia de todas las Teorías de Torsión definidas en R-Mod la denotaremos por *R-tors*.

Definición 1.3 : Si $\tau \in$ R-tors entonces M $\in$ R-Mod se dice que es de τ-torsión si y sólo si Hom (M , E) = 0 para algún miembro E de τ (y por lo tanto para todo elemento de τ). La clase de los módulos de τ-torsión la denotamos por $\mathbf{T}_\tau$.

• Los siguientes resultados son bien conocidos y nos dan las propiedades básicas de las teorías de torsión. En este trabajo las enunciaremos sin demostración. Para una demostración ver [4].

Observación 1.4 : Dos teorías de torsión τ y σ son distintas si y solamente si $\mathbf{T}_\tau \neq \mathbf{T}_\sigma$.

■

Proposición 1.5 : Si τ es una teoría de torsión entonces $\mathbf{T}_\tau$ es cerrada bajo tomar submódulos, cocientes, sumas directas y extensiones. Recíprocamente si $\mathcal{A}$ es una clase no vacía de R-módulos que es cerrada bajo tomar submódulos, cocientes, sumas directas y extensiones entonces existe una única teoría de torsión τ que satisface $\mathbf{T}_\tau = \mathcal{A}$.

■

Definición 1.6 : Si $\tau \in$ R-tors decimos que un R-módulo M es libre de τ-torsión si y sólo si existe un R-monomorfismo de M a algún miembro de τ. La clase de todos los R-módulos libres de τ-torsión la denotamos por $\mathbf{F}_\tau$.

Observación 1.7: Dos teorías de torsión τ y σ son distintas si y sólo si $\mathfrak{F}_\tau \neq \mathfrak{F}_\sigma$.

■

Proposición 1.8: Si τ es una teoría de torsión entonces $\mathfrak{F}_\tau$ es cerrada bajo tomar submódulos, cápsulas inyectivas, productos directos y copias isomorfas. Recíprocamente si $\mathcal{A}$ es una clase no vacía de R-módulos que es cerrada bajo tomar submódulos, cápsulas inyectivas, productos directos y copias isomorfas entonces hay una única teoría de torsión τ que satisface $\mathfrak{F}_\tau = \mathcal{A}$.

■

Proposición 1.9: Si τ es una teoría de torsión en R-Mod entonces:

$$(1)\ M \in \mathfrak{T}_\tau \Leftrightarrow \mathrm{Hom}(M, E(N)) = 0 \quad \forall N \in \mathfrak{F}_\tau .$$
$$(2)\ N \in \mathfrak{F}_\tau \Leftrightarrow \mathrm{Hom}(M, E(N)) = 0 \quad \forall M \in \mathfrak{T}_\tau .$$

■

Observación 1.10: Ningún R-módulo distinto de cero puede ser a la vez de τ-torsión y libre de τ-torsión.

■

Proposición 1.11: Si $\tau \in$ R-tors entonces $\mathfrak{F}_\tau$ es cerrada bajo extensiones.

■

Definición 1.12: Un *prerradical* r de R-Mod es un subfuntor del funtor identidad; el cual asigna a cada R-módulo M el submódulo r (M) de tal manera que para todo R-morfismo $f: M \to N$ se induce el R-morfismo $r(M) \to r(N)$ por medio de la restricción de f.

• Si r y s son prerradicales definimos los prerradicales r s y r : s mediante:

$$r s(M) =: r(s(M))$$

$$\frac{(r:s)(M)}{r(M)} =: s\left(\frac{M}{r(M)}\right)$$

Se dice que un prerradical r es idempotente si r r = r, y se llama radical cuando r : r = r es decir si r (M / r (M)) = 0.

A un prerradical r le podemos asociar dos clases de R-módulos llamados:

$$\mathbf{T}_r = \{ M \in R\text{-Mod} \mid r(M) = M \}.$$

$$\mathbf{F}_r = \{ M \in R\text{-Mod} \mid r(M) = 0 \}.$$

Entonces se demuestra, [7], que si r es un radical exacto izquierdo entonces $\mathbf{T}_r$ y $\mathbf{F}_r$ corresponden a las clases de torsión y libre de torsión, respectivamente, de alguna teoría de torsión τ. Recíprocamente, si tenemos una teoría de torsión σ entonces existe un radical exacto izquierdo s para el cual las clases de torsión y libre de torsión $\mathbf{T}_\sigma$ y $\mathbf{F}_\sigma$ corresponden a las clases $\mathbf{T}_s$ y $\mathbf{F}_s$ respectivamente. En otras palabras, tenemos la siguiente: [7, cap. VI prop. 3.1]

Proposición 1.13 : Existe una correspondencia biyectiva entre R-tors y el conjunto de los radicales exactos izquierdos.

∎

• También es posible identificar a R-tors con el conjunto de las topologías de Gabriel (o filtros de Gabriel) de un anillo R.

Siguiendo las definiciones de [7, cap. VI, secc. 4] para un anillo topológico (trabajando únicamente con topologías definidas por ideales ó submódulos), decimos que tal anillo topológico es *linealmente topológico izquierdo* si existe un sistema fundamental de vecindades del 0 que consiste de ideales izquierdos. El conjunto $\mathscr{F}$ de todos los ideales izquierdos abiertos satisfacen:

T1) Si $I \in \mathscr{F}$ y $I \subseteq J$, entonces $J \in \mathscr{F}$.
T2) Si I y $J \in \mathscr{F}$, entonces $I \cap J \in \mathscr{F}$.
T3) Si $I \in \mathscr{F}$ y $x \in I$, entonces $(I : x) \in \mathscr{F}$.

Los dos primeros axiomas establecen que $\mathscr{F}$ es un filtro.
Recíprocamente, si $\mathscr{F}$ es un conjunto de ideales izquierdos de R que satisfacen T1 - T3, entonces existe una única topología lineal en R, con $\mathscr{F}$ como un sistema fundamental de vecindades del 0.

Supongamos que R es un anillo linealmente topológico izquierdo con $\mathscr{F}$ como un sistema fundamental de vecindades del 0. Un R-módulo topológico M se llama *módulo linealmente topológico* si tiene un sistema fundamental de vecindades del 0 que consiste de submódulos. Los submódulos abiertos de M satisfacen:

TM1) Si $L \subseteq L'$ y L es abierto, entonces L' lo es.
TM2) Si L y L' son abiertos, entonces $L \cap L'$ lo es.
TM3) Si L es abierto y $x \in M$, entonces $(L : x) \in \mathscr{F}$.

Recíprocamente, los axiomas definen una única topología lineal en M, en analogía con el caso para anillos.

• En particular, para cualquier R-módulo M existe una *topología lineal fuerte* en M, que es aquella para la cual el conjunto de submódulos abiertos es:

$$\mathscr{F}(M) = \{ L \subseteq M \mid (L : x) \in \mathscr{F}, \forall x \in M \}.$$

De hecho, $\mathscr{F}(M)$ satisface TM1 - TM3. Esta topología es llamada la $\mathscr{F}$-topología en M.
El R-módulo M es un módulo linealmente topológico bajo su topología discreta (es decir que la $\mathscr{F}$-topología de M es discreta) si y sólo si el

conjunto de los anuladores izquierdos de x está incluido en $\mathcal{F}$ para toda x en M. Llamamos a un R-módulo M, $\mathcal{F}$-discreto si la $\mathcal{F}$-topología de M es discreta.

- Ahora, introduciendo un cuarto axioma:

T4) Si I es un ideal izquierdo y existe $J \in \mathcal{F}$ tal que $(I : x) \in \mathcal{F}$ $\forall x \in J$, entonces $I \in \mathcal{F}$

Una familia $\mathcal{F}$ de ideales izquierdos de R que satisfacen los axiomas T1 - T4 es una *topología de Gabriel* (izquierda) en R.

La proposición que relaciona los tres conceptos que se han mencionado es la siguiente: [7, cap. VI. Teo. 5.1]

Proposición 1.14 : Existe una correspondencia biyectiva entre:

(1) Topologías de Gabriel (izq.) en R.
(2) R-tors.
(3) Radicales exactos izquierdos de R-Mod.

En la demostración se ve que la clase de los R-módulos $\mathcal{F}$-discretos (ó equivalentemente, aquellos módulos para los cuales todos sus elementos son anulados por ideales izquierdos en $\mathcal{F}$), es una clase de torsión para alguna teoría de torsión. Tales módulos se llaman los *módulos de $\mathcal{F}$-torsión.*

Por otro lado, si $\tau \in$ R-tors, entonces el conjunto:

$$\mathcal{F} = \{ {}_R I \leq R \mid R / I \in \mathbf{T}_\tau \}$$

es una topología de Gabriel en R.

■

2. LA RETÍCULA R-tors.

Proposición 2.1 : Sean τ y $\sigma \in$ R-tors. Son equivalentes:

(1) Si $M \in \mathbf{T}_\tau$ entonces $M \in \mathbf{T}_\sigma$

(2) Si $M \in \mathbf{F}_\sigma$ entonces $M \in \mathbf{F}_\tau$

Demostración:
(1 $\Rightarrow$ 2) Si $N \in \mathbf{F}_\sigma$ entonces $\mathrm{Hom}(M, E(N)) = 0 \quad \forall\, M \in \mathbf{T}_\sigma$. Por (1), esto es cierto en particular para todo R-módulo de τ-torsión, y por lo tanto N es libre de τ-torsión.

(2 $\Rightarrow$ 1) Si $M \in \mathbf{T}_\tau$ y sea $N \in \mathbf{F}_\sigma$. Por (2), $N \in \mathbf{F}_\tau$ y entonces:

$$\mathrm{Hom}(M, E(N)) = 0$$

$$\therefore\ M \in \mathbf{T}_\sigma$$

■

Definición 2.2 : Si τ y σ $\in$ R-tors cumplen las condiciones de la proposición anterior decimos que τ es una *especialización* de σ y que σ es una *generalización* de τ y lo denotamos $\tau \leq \sigma$. Esta relación define un orden parcial en R-tors.

Ejemplos 2.3 : 1) Para cualquier teoría de torsión $\tau \in$ R-tors tenemos $\xi \leq \tau \leq \chi$. Donde ξ es la clase de todos los cogeneradores inyectivos y χ es la clase del cero.

2) Para cualquier R-módulo M, denotemos la clase de equivalencia de E (M) por χ (M) entonces $\tau \leq \chi$ (M) para cualquier teoría de torsión τ para la cual M es libre de torsión . Llamada *la teoría de torsión cogenerada* por M.

Demostración: Sea $N \in \mathbf{F}_{\chi(M)}$ entonces E (N) también lo es. $\therefore$ existe $E(N) \xrightarrow{mono} \prod_X E(M)$. Sea $E \in \tau$. Como $M \in \mathbf{F}_\tau$, entonces E(M) también y tenemos que $E \xrightarrow{\subseteq} E(M) \xrightarrow{mono} \prod_Y E$. Además E(M) está incluido en $\prod_X E(M)$ que es inyectivo. Por lo tanto existe $\prod_x E(M) \xrightarrow{mono} \prod_Y E$ y así, tenemos un monomorfismo de N a $\prod_Y E$, es decir $N \in \mathbf{F}_\tau$.

■

• Sea $\varnothing \neq U \subseteq$ R-tors, y para cada elemento $\tau \in U$ sea $E_{(\tau)}$ un miembro de τ. Entonces $E = \prod_{\tau \in U} E_{(\tau)}$ es inyectivo. Denotemos a la teoría de torsión que es la clase de equivalencia de E mediante $\wedge U$. Si $\tau \in U$ entonces todo R-módulo libre de τ-torsión puede ser sumergido en un producto directo de copias de $E_{(\tau)}$ y por lo tanto en un producto directo de copias de E y así tales módulos son también libres de $\wedge U$-torsión. Esto muestra que $\wedge U \leq \tau \quad \forall \tau \in U$.

Proposición 2.4 : Sea $\varnothing \neq U \subseteq$ R-tors, entonces:

(1) M es de $\wedge U$-torsión si y sólo si es de τ-torsión $\forall \tau \in U$.

(2) Si σ es una teoría de torsión que satisface la condición de que todo módulo de σ-torsión es de τ-torsión $\forall \tau \in U$ entonces $\sigma \leq \wedge U$.

Demostración:

(1) $M \in \mathbf{T}_{\wedge U} \Leftrightarrow \text{Hom}(M, E) = 0$

$\Leftrightarrow \text{Hom}(M, E_{(\tau)}) = 0 \ \forall \tau \in U$.

Debido a que $\text{Hom}(M, \prod_{\tau \in U} E_{(\tau)}) \cong \prod_{\tau \in U} Hom(M, E_{(\tau)})$.

(2) Si σ satisface la condición dada entonces todo R-módulo de σ-torsión es de $\wedge U$-torsión por (1) y por lo tanto $\sigma \leq \wedge U$.

$\blacksquare$

• Esta última proposición muestra que $\wedge U$ *es el único ínfimo de* U para cualquier subconjunto no vacío $U \subseteq$ R-tors, y así R-tors es una retícula completa.

De manera semejante definimos el *supremo* $\vee U$ como $\wedge U'$ donde U' es el conjunto de aquellas teorías de torsión σ que satisfacen $\tau \leq \sigma \;\; \forall \, \tau \in U$. Así tenemos en particular que $\vee \varnothing = \xi$ y que $\wedge \varnothing = \chi$.

Proposición 2.5: Sea $\varnothing \neq U \subseteq$ R-tors entonces:
(1) N es libre de $\vee U$-torsión si y sólo si N es libre de τ-torsión $\forall \, \tau \in U$.
(2) Si $\sigma \in$ R-tors satisface la condición de que cualquier R-módulo libre de σ-torsión es libre de τ-torsión $\forall \, \tau \in U$ entonces $\vee U \leq \sigma$.

Demostración:
(1) Sea $N \in \mathfrak{F}_{\vee U}$ entonces por el ejemplo 2.3 (2), $\vee U \leq \chi(N)$ y así, en particular, $\tau \leq \chi(N) \;\; \forall \, \tau \in U$ entonces $N \in \mathfrak{F}_\tau \;\; \forall \, \tau \in U$.

(2) Si σ satisface la condición entonces $\tau \leq \sigma \;\; \forall \, \tau \in U$ por lo tanto $\sigma \in U'$ es decir $\vee U \leq \sigma$.

$\blacksquare$

Observación 2.6: Si $M \in$ R-Mod entonces la teoría de torsión $\chi(M)$ es precisamente $\vee U$ donde $U = \{ \tau \in \text{R-tors} \mid M \in \mathfrak{F}_\tau \}$.

$\blacksquare$

Similarmente podemos considerar la teoría de torsión $\xi(M)$ definida como:

$$\wedge \{ \tau \in \text{R-tors} \mid M \in \mathfrak{T}_\tau \}$$

Entonces $\xi(M)$ es justamente la clase de equivalencia de $E = \prod_{i\in\Omega} E_i$ donde $\{E_i, i \in \Omega\}$ es un conjunto completo de representantes de las clases de isomorfismos de aquellos módulos inyectivos E' que satisfacen:

$$\mathrm{Hom}(M, E') = 0.$$

A $\xi(M)$ se le llama *la teoría de torsión generada* por M.

Si $\varnothing \neq \mathcal{A} \subseteq$ R-Mod escribiremos $\xi(\mathcal{A})$ en vez de $\vee\{\xi(M) \mid M \in \mathcal{A}\}$ y $\chi(\mathcal{A})$ en vez de $\wedge\{\chi(M) \mid M \in \mathcal{A}\}$.

***Ejemplo** 2.7* : Usando la proposición 1.8 vemos que existe una teoría de torsión τ_G en R-Mod definida por la condición de que un R-módulo M es libre de τ_G-torsión si y sólo si es no singular (Un R-módulo se llama no singular si ningún elemento x de M es anulado por un ideal esencial de R). Esta teoría de torsión es llamada la *teoría de torsión de Goldie*.
De la proposición 2.5 vemos que $\tau_G = \vee\{\xi(R/I) \mid I$ es un ideal esencial de $R\}$.

■

Proposición 2.8 : Para $M \in$ R-Mod se tienen las siguientes condiciones:

(1) $N \leq M$ entonces $\xi(M) = \xi(N) \vee \xi(M/N)$.
(2) $\{M_i\}_{i\in X}$ con $M_i \leq M$ $\forall i \in X$ tal que $M = \bigcup_{i\in X} M_i$ ó $M = \sum_{i\in X} M_i$ entonces $\xi(M) = \vee\xi(M_i)$.
(3) Si N y $N' \leq M$ entonces $\xi(M/N) \vee \xi(M/N') = \xi(M/[N \cap N'])$

Demostración:

(1) Como N y M / N son de $\xi(M)$-torsión tenemos que:

$$\xi(N) \vee \xi(M/N) \leq \xi(M).$$

Por otro lado N y M / N son de $\xi(N) \vee \xi(M/N)$-torsión y como una clase de torsión es cerrada bajo extensiones tenemos que M también es de $\xi(N) \vee \xi(M/N)$-torsión.

(2) Como cada M_i es de $\xi(M)$-torsión tenemos que:

$$\vee \xi(M_i) \leq \xi(M).$$

a) Si $M = \sum_{i \in X} M_i$ entonces M es un cociente de $\oplus M_i$ y $\oplus M_i$ es de $\vee \xi(M_i)$-torsión, por lo tanto M lo es.

b) Si $M = \bigcup_{i \in X} M_i$ y $m \in M$ entonces $Rm \subseteq M_i$ para alguna $i \in X$ y por lo tanto Rm es de $\vee \xi(M_i)$-torsión entonces $M' = \oplus\{Rm \mid m \in M\}$ también lo es. Como M es un cociente de M' se obtiene que M es de $\vee \xi(M_i)$-torsión.

(3) Como M / N y M / N' son cocientes de $M/[N \cap N']$ tenemos una desigualdad. Por otro lado existe un monomorfismo canónico de $M/[N \cap N']$ a $M/N \oplus M/N'$ entonces:

$$\xi(M/[N \cap N']) \leq \xi(M/N \oplus M/N') \leq \xi(M/N) \vee \xi(M/N').$$

■

• Una teoría de torsión se llama *simple* si es de la forma $\xi(M)$ con M un R-módulo simple.

Proposición 2.9 : Cualquier teoría de torsión no trivial en R-Mod tiene una especialización simple.

Demostración:

Sea τ una teoría de torsión no trivial entonces $\exists\, 0 \neq L \in \mathbf{T}_\tau$ el cual contiene algún submódulo cíclico $N \leq L$. Por lo tanto $N \in \mathbf{T}_\tau$. Como sabemos que todo módulo finitamente generado tiene un submódulo propio máximo entonces $\exists\, N' \leq N$ tal que N' es máximo en N.

Por lo tanto $N / N' \in \mathbf{T}_{\tau}$ y es simple, así que $\xi (N / N') \leq \tau$.

∎

Observación 2.10 : En particular vemos que los átomos de la retícula R-tors (una teoría de torsión τ es un átomo si ($\sigma < \tau \Rightarrow \sigma = \xi$)), son precisamente las teorías de torsión simples. Además, si M y N son simples no isomorfos entonces $\xi (M) \neq \xi (N)$ ya que si $f: M \rightarrow N$ es un homomorfismo entonces f es un isomorfismo ó $f = 0$, por lo tanto $M \notin \mathbf{T}_{\xi(N)}$ y $N \notin \mathbf{T}_{\xi(M)}$.
Por lo que $M \in \mathbf{F}_{\xi(N)}$, así que $\mathbf{T}_{\xi(M)} \subseteq \mathbf{F}_{\xi(N)}$.
Por lo tanto $\mathbf{T}_{\xi(M)} \cap \mathbf{T}_{\xi(N)} = 0$, Y así $\xi (M) \wedge \xi (N) = \xi$.

∎

Proposición 2.11 : Si M y N son simples no isomorfos entonces:

$$\xi (M) \leq \chi (N).$$

Demostración.

Por la observación anterior $N \notin \mathbf{T}_{\xi(M)}$ lo que implica que $N \in \mathbf{F}_{\xi(M)}$ por lo tanto $E (N) \in \mathbf{F}_{\xi(M)}$. Esto basta para que $\xi (M) \leq \chi (N)$ ya que $\chi (N)$ es la mayor teoría de torsión que tiene a N como libre de torsión.

∎

Proposición 2.12 : Si $\mathcal{A}$ es un conjunto no vacío de R-módulos simples entonces $\chi (\mathcal{A}) = \xi$ si y sólo si todo R-módulo simple es isomorfo a un miembro de $\mathcal{A}$.

Demostración:

($\Leftarrow$) Si $\chi(\mathcal{A})$ es no trivial entonces tiene una especialización simple $\xi(N)$ con N simple tal que N no es isomorfo a ningún elemento de $\mathcal{A}$ ya que todos los elementos de $\mathcal{A}$ son libres de $\chi(\mathcal{A})$-torsión. ($\xi(N) \leq \chi(\mathcal{A})$ implica $N \in \mathbb{T}_{\chi(A)}$).

($\Rightarrow$) Si existe N simple no isomorfo a ningún miembro de $\mathcal{A}$ entonces $N \in \mathbb{T}_{\chi(A)}$ ya que $\xi(N) \leq \chi(\mathcal{A})$. Por lo tanto $\chi(\mathcal{A}) \neq \xi$.

∎

Proposición 2.13 : Sea $M \in$ R-Mod entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

(1) $N \leq M \Rightarrow (\chi(N) \wedge \chi(M/N) \leq \chi(M) \leq \chi(N))$.

(2) Sea $\{M_i\}_{i \in X}$ tal que $M_i \leq M$ $\forall i \in X$ y ($M = \bigcup_{i \in X} M_i$ ó $M = \sum_{i \in X} M_i$ ó $M = \prod_{i \in X} M_i$), entonces $\chi(M) = \wedge \chi(M_i)$.

(3) Si $N \leq_{e} M$ entonces $\chi(N) = \chi(M)$.

(4) Si $N \leq M$ y N' es extensión esencial máxima de N en M entonces $\chi(M) \wedge \chi(N'/N) = \chi(M/N) \wedge \chi(N)$.

Demostración:

(1) Supongamos $N \leq M$. $M \in \mathbb{F}_{\chi(M)}$, como $N \in \mathbb{F}_{\chi(N)}$ y $M/N \in \mathbb{F}_{\chi(M/N)}$ tenemos que N y $M/N \in \mathbb{F}_{\chi(M/N) \wedge \chi(N)}$. Como $\mathbb{F}_{\chi(M/N) \wedge \chi(N)}$ es cerrada bajo extensiones, concluimos que $M \in \mathbb{F}_{\chi(M/N) \wedge \chi(N)}$.
Por lo tanto $\chi(M/N) \wedge \chi(N) \leq \chi(M)$.

Ahora, si $N \leq M$ tenemos que $N \in \mathbb{F}_{\chi(M)} \Rightarrow \chi(M) \leq \chi(N)$.

(2) Por demostrar que $\chi(M) = \wedge\chi(M_i)$

($\leq$) Como $M_i \leq M$ entonces $M_i \in \mathfrak{F}_{\chi(M)}$, en esta situación tenemos que $\chi(M) \leq \wedge\chi(M_i)$.

($\geq$) Tenemos que $M_i \in \mathfrak{F}_{\wedge\chi(M_i)}$ $\forall$ i. Si $M = \prod_{i\in X} M_i$ entonces $M \in \mathfrak{F}_{\wedge\chi(M_i)}$. Además como $\sum_{i\in X} M_i \leq \prod_{i\in X} M_i$ y $\bigcup_{i\in X} M_i$ es isomorfo a $\sum_{i\in X} M_i$, si $M = \bigcup_{i\in X} M_i$, se tiene que en cualquier caso $M \in \mathfrak{F}_{\wedge\chi(M_i)}$ dándose la otra desigualdad.

(3) Se sigue del hecho de que $N \underset{es}{\leq} M$ implica $E(N) = E(M)$.

(4) Sea $\mathscr{C} = \{ L \leq M \mid L \cap N = 0 \}$ entonces $\mathscr{C} \neq \varnothing$ ya que $0 \in \mathscr{C}$.

Tomemos $\{L_i\}_{i\in X}$, cadena en $\mathscr{C}$, entonces $\sum_{i\in X} L_i \in \mathscr{C}$ ya que $0 \neq \sum_{i\in F} x_i \in \sum_{i\in F} L_i$ con F un subconjunto finito de X implica que $\exists$ j tal que $i \leq j$ $\forall$ $i \in X$, por lo tanto $x_i \in L_j$ $\forall$ i. Como $L_j \cap N = 0$ tenemos que $\sum_{i\in F} x_i \notin N$.

$$\therefore \sum_{i\in X} L_i \cap N = 0.$$

Por el lema de Zorn $\mathscr{C}$ tiene un elemento máximo. Sea N'' máximo en $\mathscr{C}$, es decir es un seudocomplemento de N en M, entonces $N'' \cap N' = 0$ ya que $(N \underset{es}{\leq} N'$ y $N'' \cap N' \neq 0) \Rightarrow N \cap (N'' \cap N') \neq 0$. Por otro lado, se tiene que $N \cap (N'' \cap N') \leq N \cap N''$ que es cero.

Además $N \oplus N'' \underset{es}{\leq} M$ ya que si existe $0 \neq L \leq M$ tal que:

$$(N \oplus N'') \cap L = 0 \quad \text{entonces} \quad N \cap (N'' \oplus L) = 0$$

contradiciendo la elección de N''. Así $L = 0$.

Ahora, por (2) y (3) tenemos las siguientes igualdades:

$$\chi(M) \underset{Por\ (3)}{=} \chi(N \oplus N'') \underset{Por\ (2)}{=} \chi(N) \wedge \chi(N'').$$

Además mostraremos que $\left(\dfrac{N \oplus N''}{N} \oplus \dfrac{N'}{N}\right) \underset{es}{\leq} \dfrac{M}{N}$.

En efecto, sea $M'/N \neq 0$ con $M' \leq M$.

Si $(M'/N) \cap (N'/N) \neq 0$ ya terminamos.

Entonces supongamos que $(M'/N) \cap (N'/N) = 0$, por lo tanto $M' \cap N' = N$ y se tiene que $M' \not\subset N''$ y entonces $N'' \underset{\neq}{<} M' + N''$. Por lo tanto se tiene que:

$$(N'' + M') \cap N \neq 0$$

y podemos escoger $0 \neq x + m' \in (N'' + M') \cap N$, con $x \in N''$ y $0 \neq m' \notin N$. Entonces $0 \neq m' + N \in M'/N$. $\therefore$ $m' \in N'' + N$.

$$\therefore\ 0 \neq m' + N \in \frac{M'}{N} \cap \left(\frac{N + N''}{N} \oplus \frac{N'}{N}\right).$$

Aplicando (2) y (3) vemos que $\chi(M/N) = \chi([N + N'']/N) \wedge \chi(N'/N)$
$= \chi(N'') \wedge \chi(N'/N) = \chi(N'') \wedge \chi(N'/N)$

y así, aplicando (1) tenemos:

$$\chi(M) \wedge \chi(N'/N) = \chi(N) \wedge \chi(N'') \wedge \chi(N'/N) = \chi(N) \wedge \chi(M/N)$$

■

• En particular observamos que si $N \leq M$ tal que N no tiene extensiones esenciales propias en M (es decir N es un complemento) entonces:

$$\chi(M) = \chi(M/N) \wedge \chi(N).$$

Definición 2.14 : Una retícula completa $(L, \wedge, \vee)$ es un *Marco* si y sólo si intersecciones se distribuyen sobre uniones arbitrarias. Es decir si y sólo si:

$$a \wedge (\vee U) = \vee \{ a \wedge b \mid b \in U \} \ \ \forall a \in L \ \text{ y } \forall \ \varnothing \neq U \subseteq L.$$

Proposición 2.15 : La Retícula R-tors es un Marco.

Demostración: Sea $\tau \in$ R-tors y sea $\varnothing \neq U \subseteq$ R-tors.

Sea $\tau'' = \vee \{ \tau \wedge \sigma \mid \sigma \in U \}$ (1). Si $\sigma \in U$ entonces $\tau \wedge \sigma \leq \tau \wedge (\vee U)$ y por lo tanto $\tau'' \leq \tau \wedge (\vee U)$.

Veamos la otra desigualdad: Si no es cierta, entonces existe $M \in$ R-Mod de $\tau \wedge (\vee U)$-torsión pero no de τ''-torsión.
Tomemos $N = t_{\tau''}(M)$ entonces M/N es un R-módulo izquierdo distinto de cero de $\tau \wedge (\vee U)$-torsión y libre de τ''-torsión.
En particular $M/N \in \mathbb{T}_{\tau}$ y $M/N \in \mathbb{T}_{\vee U}$. Por lo tanto existe un elemento $\sigma \in U$ tal que $M/N \notin \mathbb{F}_{\sigma}$.
Sea $0 \neq N''/N = t_{\sigma}(M/N)$, entonces $N''/N \in \mathbb{T}_{\tau \wedge \sigma}$ y $\therefore$ $N''/N \in \mathbb{T}_{\tau''}$.
Por otro lado $N''/N \leq M/N \in \mathbb{F}_{\tau''}$ lo que implica que $N''/N \in \mathbb{F}_{\tau''}$ que es una contradicción.

■

Es claro que cualquier Marco es una retícula distributiva por lo tanto podemos concluir el siguiente:

Corolario 2.16 : La Retícula R-tors es distributiva.

■

• Si τ y τ' son elementos de R-tors entonces el conjunto:

$$U = \{ \sigma \in \text{R-tors} \mid \tau \wedge \sigma \leq \tau' \}$$

es no vacío puesto que contiene a ξ . Además, como R-tors es un Marco, vemos que $\tau \wedge (\vee U) = \vee \{ \tau \wedge \sigma \mid \sigma \in U \} \leq \tau'$ y por lo tanto U tiene un único elemento máximo. Llamémosle $\vee U$.
Este elemento es llamado el *seudocomplemento de* τ *relativo a* τ' y se denota por:

$$(\tau' : \tau).$$

Dado un elemento τ en R-tors, el conjunto de todas las teorías de torsión ajenas a τ tiene un único elemento máximo $(\xi : \tau)$ llamado el *seudocomplemento de* τ y se denota por $\tau^{\perp}$.

Observación 2.17: $M \in \mathbf{T}_{\tau^{\perp}} \Leftrightarrow \forall N \leq M,\ M/N \in \mathbf{F}_{\tau}$.

■

Definición 2.18 : $M \in$ R-Mod es *libre de τ-cotorsión* si M no tiene submódulos propios τ-densos ($\forall\, 0 \neq N \leq M,\ M/N \notin \mathbf{T}_{\tau}$).

En particular $M \in \mathbf{T}_{\tau^{\perp}} \Rightarrow$ M es libre de τ-cotorsión.

Proposición 2.19 : Sea $\tau \in$ R-tors tal que la clase de todos los módulos libres de τ-cotorsión es cerrada bajo submódulos, entonces M es libre de τ-cotorsión si y sólo si M es de $\tau^{\perp}$-torsión.

Demostración:
Ya hemos observado que todo $M \in \mathbf{T}_{\tau^{\perp}}$ es libre de τ-cotorsión.

Recíprocamente: Sea M un módulo libre de τ-cotorsión y supongamos que existe $0 \neq N \in \mathbf{T}_{\xi(M) \wedge \tau}$, entonces existe un morfismo distinto de cero $\alpha : M \to E(N)$.

Si $M' = \alpha^{-1}(N)$ entonces M' es libre de τ-cotorsión y tiene un cociente no cero de τ-torsión, esto es imposible y por lo tanto $\xi(M)$ y τ son ajenas.

$\therefore\ \xi(M) \leq \tau^{\perp}$, demostrando que M es de $\tau^{\perp}$-torsión.

■

• Decimos que una teoría de torsión τ es *jansiana* si su clase de torsión $\mathbb{T}_\tau$ es cerrada bajo productos. Y decimos que τ es *estable* si $\mathbb{T}_\tau$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas.

• En particular obtenemos que si τ es estable entonces el submódulo de $\tau^{\perp}$-torsión de M es precisamente $L_\tau(M)$, la intersección de todos los submódulos τ-densos de M.

Proposición 2.20 : Para toda teoría de torsión τ se cumple:

a) $\tau^{\perp} = \chi(\{\text{R-Simp} \cap \mathbb{T}_\tau\})$

b) $\tau^{\perp\perp} = \chi(\{\text{R-Simp} \cap \mathbb{F}_\tau\})$.

Demostración:

a) Sea M un R-módulo simple de τ-torsión, entonces $\xi(M)$ es menor o igual que τ, de donde $\xi \leq \xi(M) \wedge \tau^{\perp} \leq \tau \wedge \tau^{\perp} = \xi$.
Por lo tanto $\xi(M) \wedge \tau^{\perp} = \xi$ y $\xi(M)$ no es menor o igual que $\tau^{\perp}$, entonces M no es de $\tau^{\perp}$-torsión y por lo tanto es libre de $\tau^{\perp}$-torsión, de donde $\tau^{\perp}$ es menor o igual que $\chi(M)$ y

$$\tau^{\perp} \leq \wedge\{\chi(M) \mid M \in \text{R-simp} \cap \mathbb{T}_\tau\}.$$

Sea $\tau' = \wedge\{\chi(M) \mid M \in \text{R-simp} \cap \mathbb{F}_\tau\}$, entonces $\tau \leq \tau'$.
Además:
$\tau \wedge (\wedge\{\chi(M) \mid M \in \text{R-simp} \cap \mathbb{T}_\tau\}) \leq \tau' \wedge (\wedge\{\chi(M) \mid M \in \text{R-simp} \cap \mathbb{T}_\tau\})$
$= \wedge\{\chi(M) \mid M \in \text{R-simp} \cap \mathbb{T}_\tau\} = \xi$.
Por lo tanto $\wedge\{\chi(M) \mid M \in \text{R-simp} \cap \mathbb{T}_\tau\} \leq \tau^{\perp}$ y la igualdad se ha demostrado.

b) Por (a) $\tau^{\perp\perp} = \chi(\{\text{R-simp} \cap \mathbb{T}_{\tau^{\perp}}\})$ Pero $M \in \text{R-simp} \cap \mathbb{T}_{\tau^{\perp}}$ si y sólo si M es simple y $M \notin \mathbb{T}_{\tau}$ si y sólo si $M \in \text{R-simp} \cap \mathbb{F}_{\tau}$. Por lo tanto se tiene lo deseado; $\tau^{\perp\perp} = \chi(\{\text{R-simp} \cap \mathbb{F}_{\tau}\})$.

■

Observación 2.21 : No es cierto en general que $\tau = \tau^{\perp\perp}$ para toda τ en R-tors. Por ejemplo, si $R = \mathbb{Z}$, $\tau_0 \underset{\neq}{<} \overline{\tau_0} = \tau_0^{\perp\perp}$ donde la última igualdad se da por la proposición anterior. ($\overline{\tau_0}$ denota la cápsula jansiana de τ_0).

- Sin embargo, el mapeo $\phi :$ R-tors $\rightarrow$ R-tors , es un operador de cerradura en R-tors que preserva intersecciones finitas.
$$\tau \mapsto \tau^{\perp\perp}$$

Demostración:

1) Aplicar el operador $(\_)^{\perp}$ a una desigualdad la invierte, ya que, si $\tau \leq \sigma$ entonces $\{S \in \mathbb{T}_{\tau} \mid S \text{ es simple}\} \subseteq \mathbb{F}_{\chi(\{S \in \mathbb{T}_{\sigma}, S \text{ simple}\})}$, y por lo tanto:

$\sigma^{\perp} = \chi(\{\text{R-Simp} \cap \mathbb{T}_{\sigma}\}) \leq \chi(\{\text{R-Simp} \cap \mathbb{T}_{\tau}\}) = \tau^{\perp}$.

Por lo tanto si $\tau \leq \sigma$ entonces $\tau^{\perp\perp} \leq \sigma^{\perp\perp}$.

2) En general se tiene que $\tau \leq \tau^{\perp\perp}$ por la proposición 2.20 (b).

3) Aplicamos (2) a $\tau^{\perp}$ y obtenemos lo siguiente:

$$\tau^{\perp} \leq (\tau^{\perp})^{\perp\perp} = \tau^{\perp\perp\perp} \quad \Rightarrow \tau^{\perp\perp} \geq \tau^{\perp\perp\perp\perp}$$

por otro lado aplicamos (1) a τ y $\tau^{\perp\perp}$: $\tau \leq \tau^{\perp\perp} \Rightarrow \tau^{\perp\perp} \leq \tau^{\perp\perp\perp\perp}$

$$\therefore \ \tau^{\perp\perp} = \tau^{\perp\perp\perp\perp}$$

Las tres observaciones anteriores muestran que el operador $(\_)^{\perp}$ es de cerradura.

4) Ahora veamos que preserva intersecciones finitas:

Sabemos que $(\tau\wedge\sigma)^{\perp\perp} = \chi(\{\text{R-simp} \cap \mathbf{F}_{\tau\wedge\sigma}\})$ pero tenemos que $(\mathbf{F}_\tau \cup \mathbf{F}_\sigma)\cap \text{R-simp} = \mathbf{F}_{\tau\wedge\sigma}\cap \text{R-simp}$.

En efecto, si tomamos $S \in \mathbf{F}_{\tau\wedge\sigma}$, S simple entonces aplicando los funtores de torsión asociados a τ y σ se tiene que $t_\tau(t_\sigma(S)) = 0$, como S es simple se tiene que:

$$t_\sigma(S) = S \text{ ó } t_\sigma(S) = 0$$

y lo mismo pasa para t_τ.

De donde $t_\sigma(S) = 0$ ó $t_\tau(S) = 0$ por lo tanto $S \in \mathbf{F}_\tau \vee \mathbf{F}_\sigma$ dándose una desigualdad.
La otra desigualdad es claramente válida.

Por otra parte tenemos, en general, que si X y Y $\subseteq$ R-Mod entonces:

$$\chi(X \cup Y) = \chi(X) \wedge \chi(Y)$$

De estas dos observaciones tenemos que:

$$(\tau\wedge\sigma)^{\perp\perp} = \chi(\{\text{R-simp} \cap \mathbf{F}_{\tau\wedge\sigma}\}) = \chi(\{\text{R-simp} \cap (\mathbf{F}_\tau \vee \mathbf{F}_\sigma)\})$$
$$= \chi(\{\text{R-simp} \cap \mathbf{F}_\tau\}) \wedge \chi(\{\text{R-simp} \cap \mathbf{F}_\sigma\}) = \tau^{\perp\perp} \wedge \sigma^{\perp\perp}.$$

■

• A la imagen de este mapeo se le llama el " *Esqueleto* " de R-tors y se denotará por R-Skel. Los elementos de R-Skel se llaman teorías de torsión *esqueléticas*.

Observación 2.22:
$$\begin{aligned} \text{R-Skel} &= \{\sigma \in \text{R-tors} \mid \exists\, \tau \in \text{R-tors con } \Phi(\tau) = \sigma\} \\ &= \{\sigma \in \text{R-tors} \mid \exists\, \tau \in \text{R-tors con } \tau^{\perp\perp} = \sigma\} \\ &= \{\sigma \in \text{R-tors} \mid \sigma = \sigma^{\perp\perp}\} \end{aligned}$$

Demostración:

La última igualdad se tiene del hecho de que:

$$\tau^{\perp\perp} = \sigma \text{ implica que } \tau^{\perp\perp\perp\perp} = \sigma^{\perp\perp} \text{ por lo tanto } \tau^{\perp\perp} = \sigma^{\perp\perp}.$$

■

Ejemplo 2.23 : Las teorías de torsión jansianas y estables en R-Mod pertenecen a R-Skel.

Demostración:

Sea $\tau \in$ R-tors Jansiana y Estable. Claramente $\tau \leq \tau^{\perp\perp}$. Supongamos que la desigualdad es estricta.
Entonces existe un R-módulo M tal que $M \in \mathbf{F}_\tau$ y $M \in \mathbf{T}_{\tau^{\perp\perp}}$, $M \neq 0$.
Como $\tau^{\perp\perp} = \chi$ (R-Simp $\cap\ \mathbf{F}_\tau$), $M \in \mathbf{T}_{\tau^{\perp\perp}}$ implica que Hom (M , E (S)) = 0 para todo simple libre de τ-torsión.
Tenemos, además, que existe un monomorfismo de M a $\prod_{\alpha \in X} E(S_\alpha)$ con S_α simple. Por lo anterior, podemos suponer que S_α es de τ-torsión para toda α.
Por lo tanto, como τ es jansiana y estable, E (S_α) es de τ-torsión y por lo tanto $\prod_{\alpha \in X} E(S_\alpha)$ lo es.

$\therefore$ $M \in \mathbf{T}_\tau$ que es una contradicción.

$\therefore$ $\tau = \tau^{\perp\perp}$.

■

Proposición 2.24 : Todo elemento $\tau \in$ R-tors puede ser escrito en la forma $\tau_1 \wedge \tau_2$ con $\tau_1 \in$ R-Skel y τ_2 tal que $\tau_2^{\perp} = \xi$. Además τ_1 es única (aunque τ_2 no).

Demostración: Si $\tau_1 \wedge \tau_2 = \tau$ con $\tau_1 \in$ R-Skel y τ_2 tal que $\tau_2^{\perp} = \xi$ entonces aplicando la cerradura de intersecciones finitas obtenemos que:

$$\tau^{\perp\perp} = (\tau_1 \wedge \tau_2)^{\perp\perp} = \tau_1^{\perp\perp} \wedge \tau_2^{\perp\perp}$$

pero $\tau_2^{\perp} = \xi$ lo que implica que $\tau_2^{\perp\perp} = \chi$ y $\tau_1 \in$ R-Skel implica que $\tau_1 = \tau_1^{\perp\perp}$. Por lo tanto tenemos que $\tau^{\perp\perp} = \tau_1 \wedge \chi = \tau_1$

$$\therefore\ \tau_1 = \tau^{\perp\perp}$$

Ahora bien, bajo esta situación $(\tau \vee \tau^{\perp})$ cumple para ser τ_2 ya que: $(\tau \vee \tau^{\perp}) \wedge \sigma = \xi$. Como $(\tau \vee \tau^{\perp}) \wedge \sigma = (\tau \wedge \sigma) \vee (\tau^{\perp} \wedge \sigma) = \xi$ implica que $\tau \wedge \sigma = \tau^{\perp} \wedge \sigma = \xi$ lo cual a su vez implica que $\sigma = \xi$.

$$\therefore\ (\tau \vee \tau^{\perp})^{\perp} = \xi$$

Y $\tau^{\perp\perp} \wedge (\tau \vee \tau^{\perp}) = (\tau^{\perp\perp} \wedge \tau) \vee (\tau^{\perp\perp} \wedge \tau^{\perp}) = \tau \vee \xi = \tau$.

Como $\tau \vee \tau^{\perp} \leq (\tau : \tau^{\perp\perp})$ implica que $(\tau : \tau^{\perp\perp})$ también es esencial y $(\tau : \tau^{\perp\perp}) \wedge \tau^{\perp\perp} = \tau \wedge \tau^{\perp\perp} = \tau$.

$\therefore$ $(\tau : \tau^{\perp\perp})$ también puede ser τ_2.

$\therefore$ τ_1 es única aunque τ_2 no lo es.

■

3. SUBRETÍCULAS DE R-tors.

• Sea $\mathcal{A} \subseteq$ R-Mod. Definimos la relación $_{\mathcal{A}}\approx$ en R-tors como sigue:

Sean σ y τ dos teorías de torsión, entonces:

$$\sigma \ {}_{\mathcal{A}}\approx \ \tau \Leftrightarrow t_\sigma(M) = t_\tau(M) \ \forall M \in \mathcal{A}.$$

Es claro que $_{\mathcal{A}}\approx$ define una relación de equivalencia en R-tors.

Proposición 3.1 : Toda clase de equivalencia $[\tau]_{_{\mathcal{A}}\approx}$ es una subretícula completa de R-tors, y se tiene que:

$$[\tau]_{_{\mathcal{A}}\approx} = [\, \xi(\{ t_\tau(M) \mid M \in \mathcal{A}\}), \ \ \chi(\{ M/t_\tau(M) \mid M \in \mathcal{A}\})\,].$$

Demostración. Denotemos $\tau_* = \xi(\{ t_\tau(M) \mid M \in \mathcal{A}\})$

y $\tau^* = \chi(\{ M/t_\tau(M) \mid M \in \mathcal{A}\})$

Sea $\sigma \in [\tau]_{_{\mathcal{A}}\approx}$ y $M \in \mathcal{A}$ entonces $t_\tau(M) = t_\sigma(M) \in \mathbb{T}_\sigma$

$\therefore \{ t_\tau(M) \mid M \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathbb{T}_\sigma$ y por lo tanto $\tau_* \leq \sigma$.

Además $t_\tau(M) = t_\sigma(M) \Rightarrow M/t_\tau(M) = M/t_\sigma(M) \in \mathbb{F}_\sigma$

$\therefore \ \{ M / t_{\tau}(M) \mid M \in \mathcal{A} \} \subseteq \mathbb{F}_{\sigma}$ y entonces $\sigma \leq \tau^{*}$

$$\therefore \ [\tau]_{t\approx} \subseteq [\, \tau_{*} , \tau^{*} \,]$$

Ahora sea $\sigma \in$ R-tors tal que $\tau_{*} \leq \sigma \leq \tau^{*}$.

Si $M \in \mathcal{A}$ entonces $t_{\tau}(M) \in \mathbb{T}_{\tau_{*}}$.

$$\therefore \ t_{\tau}(M) \subseteq t_{\tau_{*}}(M) \subseteq t_{\sigma}(M).$$

Como $M / t_{\tau}(M) \in \mathbb{F}_{\tau^{*}} \subseteq \mathbb{F}_{\sigma}$ tenemos que $t_{\sigma}(M) \subseteq t_{\tau}(M)$

$$\therefore \ t_{\tau}(M) = t_{\sigma}(M) \quad \forall M \in \mathcal{A}.$$

$$\therefore \ \sigma \ {}_{t}\!\approx \tau.$$

■

Lema 3.2: $\tau^{\perp\perp} = \sigma^{\perp\perp} \Leftrightarrow$ R-Simp $\cap \mathbb{T}_{\tau} =$ R-Simp $\cap \mathbb{T}_{\sigma}$

Demostración: Sabemos que $\tau \leq \tau^{\perp\perp}$ por lo tanto tenemos que:

$$\text{R-Simp} \cap \mathbb{T}_{\tau} \subseteq \text{R-Simp} \cap \mathbb{T}_{\tau^{\perp\perp}}$$

Ahora, sea $S \in$ R-Simp $\cap \mathbb{T}_{\tau^{\perp\perp}}$.

Si $S \notin \mathbb{T}_{\tau}$ entonces $S \in \mathbb{F}_{\tau}$ y como $\tau^{\perp} = \chi(\{$ R-Simp $\cap \mathbb{T}_{\tau} \})$, por la proposición 2.20, se sigue que $S \in \mathbb{T}_{\tau^{\perp}}$.
Así que $S \in \mathbb{T}_{\tau^{\perp}} \cap \mathbb{T}_{\tau^{\perp\perp}}$ lo que es una contradicción y por lo tanto tenemos que:

$$\text{R-Simp} \cap \mathbb{T}_\tau = \text{R-Simp} \cap \mathbb{T}_{\tau^{\perp\perp}}.$$

Con esto se desprende la conclusión deseada .

■

Proposición 3.3 **: Si $\mathcal{A}$ = R- Simp , entonces $\tau \ {}_{,}\!\approx \sigma \Leftrightarrow \tau^{\perp\perp} = \sigma^{\perp\perp}$.**

Demostración:

$\Rightarrow$) Supongamos $\tau \ {}_{,}\!\approx \sigma$ y sea $S \in \mathcal{A} \cap \mathbb{T}_\tau$.

$t_\tau(S) = S \Rightarrow t_\sigma(S) = S$. Por lo tanto $S \in \mathcal{A} \cap \mathbb{T}_\sigma$.

Así que $\mathcal{A} \cap \mathbb{T}_\tau \subseteq \mathcal{A} \cap \mathbb{T}_\sigma$.

La otra inclusión es simétrica y así tenemos que $\tau^{\perp\perp} = \sigma^{\perp\perp}$.

$\Leftarrow$) Supongamos $\tau^{\perp\perp} = \sigma^{\perp\perp}$ y sea $S \in \mathcal{A}$. Como $\mathcal{A} \cap \mathbb{T}_\tau = \mathcal{A} \cap \mathbb{T}_\sigma$ se tiene que $t_\tau(S) = t_\sigma(S)$. Por lo tanto $\tau \ {}_{,}\!\approx \sigma$.

■

Lema 3.4 **: Para toda $\tau \in$ R-tors se tiene que:**

$$\tau^{\perp} = \tau^{\perp\perp\perp}.$$

Demostración: **Sabemos que $\tau \leq \tau^{\perp\perp}$ por lo tanto, si aplicamos $(\ )^{\perp}$ tenemos la desigualdad $\tau^{\perp} \geq \tau^{\perp\perp\perp}$. Por otro lado, $(\tau^{\perp})^{\perp\perp} \geq \tau^{\perp}$.**

■

Corolario 3.5 **: Si $\mathcal{A}$ = R- Simp entonces $\tau \ {}_{,}\!\approx \sigma \Leftrightarrow \tau^{\perp} = \sigma^{\perp}$.**

Demostración:

Por una parte, si $\tau^{\perp} = \sigma^{\perp}$ se tiene que $(\tau^{\perp\perp} = \sigma^{\perp\perp}) \Leftrightarrow (\tau \ {}_{,}\!\approx \sigma)$. Por otra parte, si $\tau \ {}_{,}\!\approx \sigma$ tenemos que $\tau^{\perp\perp} = \sigma^{\perp\perp}$, así que $\tau^{\perp\perp\perp} = \sigma^{\perp\perp\perp}$, por lo tanto $\tau^{\perp} = \sigma^{\perp}$.

■

Proposición 3.6 : Si $\mathcal{A}$ = R- Simp. y $\sigma \in$ R- tors entonces:

$$[\sigma]_{\mathcal{A}} = [\,\sigma_{\perp}\,,\,\sigma^{\perp\perp}\,]$$

Donde $\sigma_{\perp}$ es la teoría de torsión generada por la clase de los módulos simples de σ-torsión, es decir $\sigma_{\perp} = \sigma \wedge \tau_{\mathcal{S}}$ ($\tau_{\mathcal{S}}$ denota la teoría de torsión generada por los simples).

1ª Demostración:

$\subseteq$) Sea $\tau \in [\sigma]_{\mathcal{A}}$ entonces $\tau^{\perp\perp} = \sigma^{\perp\perp}$ y por lo tanto $\mathcal{A} \cap \mathbb{T}_{\tau} = \mathcal{A} \cap \mathbb{T}_{\sigma}$ como todo módulo simple es ora de τ-torsión ora libre de τ-torsión para toda τ que está en R-tors , tenemos que $\mathcal{A} \cap \mathbb{F}_{\tau} = \mathcal{A} \cap \mathbb{F}_{\sigma}$.
Por lo tanto tenemos que:

$$\tau = \xi(\mathbb{T}_{\tau}) \geq \xi(\mathcal{A} \cap \mathbb{T}_{\tau}) = \xi(\mathcal{A} \cap \mathbb{T}_{\sigma}) = \sigma_{\perp} \quad \text{y}$$
$$\tau = \chi(\mathbb{F}_{\tau}) \leq \chi(\mathcal{A} \cap \mathbb{F}_{\tau}) = \chi(\mathcal{A} \cap \mathbb{F}_{\sigma}) \leq \chi(\mathcal{A} \cap \mathbb{T}_{\sigma^{\perp}}) = \sigma^{\perp\perp}.$$

$$\therefore \quad \tau \in [\,\sigma_{\perp}\,,\,\sigma^{\perp\perp}\,].$$

$\supseteq$) Supongamos que $\sigma_{\perp} \leq \tau \leq \sigma^{\perp\perp}$, entonces $\sigma_{\perp}^{\perp\perp} \leq \tau^{\perp\perp} \leq \sigma^{\perp\perp}$ ya que $\sigma^{\perp\perp} = \sigma^{\perp\perp\perp\perp}$. Entonces basta demostrar que $\sigma_{\perp}^{\perp\perp} = \sigma^{\perp\perp}$ pero σ y $\sigma_{\perp}$ tienen los mismos simples libres de torsión y por lo tanto $\mathcal{A} \cap \mathbb{T}_{\sigma_{\perp}} = \mathbb{T}_{\sigma} \cap \mathcal{A}$.

2ª Demostración: Ya sabemos que:

$$[\sigma]_{\mathcal{A}} = [\,\xi(\{\, t_{\sigma}(M) \mid M \in \mathcal{A}\,\}),\ \ \chi(\{\, M / t_{\sigma}(M) \mid M \in \mathcal{A}\,\})\,]$$

entonces si $\mathcal{A}$ = R-Simp se tiene claramente que:

$$\xi(\{\, t_{\sigma}(M) \mid M \in \mathcal{A}\}) = \sigma_{\perp}$$

Y como se vió que $\sigma^{\perp\perp} = \chi(\{\text{R-Simp} \cap \mathbf{F}_\sigma\})$ se llega a que:

$$\chi(\{M / t_\sigma(M) \mid M \in \mathcal{A}\}) = \sigma^{\perp\perp}$$

∎

Corolario 3.7: $[\chi]_{s\approx} = [\tau_\iota, \chi]$, $[\xi]_{s\approx} = \{\xi\}$.
y si $\sigma \leq \tau_{sp}$ entonces $[\sigma]_{s\approx} = \{\sigma\}$.

∎

• De aquí en adelante denotaremos a R-Simp por $\mathcal{S}$, y a la relación de equivalencia descrita por $\mathcal{S}$ la denotaremos por $_s\approx$.

Lema 3.8: Sean σ y τ dos teorías de torsión; si $\sigma \leq \tau$, entonces $\sigma_\perp = \tau_\perp \wedge \sigma^{\perp\perp}$.

Demostración: Como $\sigma \leq \tau$ entonces $\sigma_\perp \leq \tau_\perp$, y como $\sigma_\perp \leq \sigma^{\perp\perp}$, tenemos que $\sigma_\perp \leq \tau_\perp \wedge \sigma^{\perp\perp}$. Basta demostrar que $\mathbf{T}_{\tau_\perp \wedge \sigma^{\perp\perp}} \subseteq \mathbf{T}_{\sigma_\perp}$.

Sea $M \in \mathbf{T}_{\tau_\perp \wedge \sigma^{\perp\perp}}$, entonces $M \in \mathbf{T}_{\tau_\perp}$ y $M \in \mathbf{T}_{\sigma^{\perp\perp}}$.
$M \in \mathbf{T}_{\tau_\perp}$ implica que todo cociente $0 \neq M / N$ de M incluye un módulo simple de τ-torsión S_N. Ahora esperamos que $S_N \in \mathbf{T}_\sigma$ para toda $N \leq M$.

Supongamos que no es cierto, entonces $S_N \in \mathbf{F}_\sigma$ para alguna N, pero esto es imposible ya que, $\sigma^{\perp\perp} = \chi(\mathcal{S} \cap \mathbf{F}_\sigma)$, entonces S_N es libre de $\sigma^{\perp\perp}$-torsión. Pero S_N es de $\sigma^{\perp\perp}$-torsión y es distinto de cero.

$\therefore\ \tau_\perp \wedge \sigma^{\perp\perp} \leq \sigma_\perp$.

∎

Corolario 3.9: Para cada $\sigma \in$ R-tors, $\sigma_\perp = \tau_\iota \wedge \sigma^{\perp\perp}$.

Demostración:

Por el lema anterior, basta demostrarlo para $\sigma > \tau_\iota$.

Si esto pasa, entonces $\tau_{\perp} < \sigma \leq \sigma^{\perp\perp}$ y $\sigma_{\perp} = \tau_{\perp}$.
Por lo tanto $\tau_{\perp} = \sigma_{\perp} = \tau_{\perp} \wedge \sigma^{\perp\perp} = \tau_{\perp}$, cumpliéndose la igualdad.

$\blacksquare$

• Si $\sigma, \tau \in$ R-tors y $\sigma \leq \tau$, definimos las siguientes funciones en las clases de equivalencia de σ y τ según la relación $_{\perp}\approx$, como sigue :

$$f_{\sigma,\tau} : [\sigma_{\perp}, \sigma^{\perp\perp}] \longrightarrow [\tau_{\perp}, \tau^{\perp\perp}] \qquad \text{y} \qquad g_{\tau,\sigma} : [\tau_{\perp}, \tau^{\perp\perp}] \longrightarrow [\sigma_{\perp}, \sigma^{\perp\perp}]$$
$$\alpha \mapsto \alpha \vee \tau_{\perp} \qquad\qquad\qquad \beta \mapsto \beta \wedge \sigma^{\perp\perp}$$

Entonces $f_{\sigma,\tau}$ y $g_{\tau,\sigma}$ están bien definidas. En efecto:

(1) $f_{\sigma,\tau}$: $\alpha \leq \sigma^{\perp\perp} \leq \tau^{\perp\perp}$ y $\tau_{\perp} \leq \tau^{\perp\perp}$, lo que implica que $\alpha \vee \tau_{\perp} \leq \tau^{\perp\perp}$ y $\tau_{\perp} \leq \alpha \vee \tau_{\perp}$. Por lo tanto $\tau_{\perp} \leq \alpha \vee \tau_{\perp} \leq \tau^{\perp\perp}$.

(2) $g_{\tau,\sigma}$: Si $\tau_{\perp} \leq \beta \leq \tau^{\perp\perp}$ entonces, aplicando $g_{\tau,\sigma}$, es claro que $\beta \wedge \sigma^{\perp\perp} \leq \sigma^{\perp\perp}$.
Ahora, por el lema 3.8, $\sigma_{\perp} = \tau_{\perp} \wedge \sigma^{\perp\perp} \leq \beta \wedge \sigma^{\perp\perp}$.

$\therefore\ \sigma_{\perp} \leq \beta \wedge \sigma^{\perp\perp}$.

Además, notamos que $f_{\sigma,\tau}$ y $g_{\tau,\sigma}$ son morfismos entre retículas ya que preservan uniones e intersecciones finitas y $g_{\tau,\sigma}$ aún infinitas.

Observación 3.10 :

(1) Si $\sigma, \tau, \gamma \in$ R-tors y $\sigma \leq \tau \leq \gamma$, entonces:

a) $f_{\tau,\gamma} \circ f_{\sigma,\tau} = f_{\sigma,\gamma}$.
b) $g_{\tau,\sigma} \circ g_{\gamma,\tau} = g_{\gamma,\sigma}$.

(2) $g_{\tau,\sigma} \circ f_{\sigma,\tau} = 1_{[\sigma]}$.

Demostración:

1(a) : $f_{\tau,\gamma} \circ f_{\sigma,\tau}(\alpha) = f_{\tau,\gamma}(\alpha \vee \tau_{\perp}) = (\alpha \vee \tau_{\perp}) \vee \gamma_{\perp}$. Pero $\tau_{\perp} \leq \gamma_{\perp}$ (de la hipótesis), por lo tanto $\alpha \vee \tau_{\perp} \vee \gamma_{\perp} = \alpha \vee \gamma_{\perp} = f_{\sigma,\gamma}(\alpha)$, esto para toda α.

1(b) : $g_{\tau,\sigma} \circ g_{\gamma,\tau}(\beta) = g_{\tau,\sigma}(\beta \wedge \tau^{\perp\perp}) = (\beta \wedge \tau^{\perp\perp}) \wedge \sigma^{\perp\perp} = \beta \wedge (\tau^{\perp\perp} \wedge \sigma^{\perp\perp})$. Pero $\sigma^{\perp\perp} \leq \tau^{\perp\perp}$, por lo tanto $\beta \wedge (\tau^{\perp\perp} \wedge \sigma^{\perp\perp}) = \beta \wedge \sigma^{\perp\perp} = g_{\gamma,\sigma}(\beta)$, esto para toda β.

2 : Sea $\alpha \in [\sigma]_{\perp R}$.

$$
\begin{aligned}
g_{\tau,\sigma} \circ f_{\sigma,\tau}(\alpha) &= g_{\tau,\sigma}(\alpha \vee \tau_{\perp}) = (\alpha \vee \tau_{\perp}) \wedge \sigma^{\perp\perp} \\
&= (\alpha \wedge \sigma^{\perp\perp}) \vee (\tau_{\perp} \wedge \sigma^{\perp\perp}) \\
(\mathrm{i}) \quad &= \alpha \vee \sigma_{\perp} \\
(\mathrm{ii}) \quad &= \alpha
\end{aligned}
$$

(i) Debido a que $\alpha \leq \sigma^{\perp\perp}$ y a que $\tau_{\perp} \wedge \sigma^{\perp\perp} = \sigma_{\perp}$ por el lema 3.8.
(ii) Ya que $\sigma_{\perp} \leq \alpha$.

$$\therefore \quad g_{\tau,\sigma} \circ f_{\sigma,\tau} = 1_{[\sigma]} .$$

■

• Como consecuencia de lo anterior $f_{\sigma,\tau}$ es inyectiva y $g_{\tau,\sigma}$ es suprayectiva.

Por lo tanto, dadas σ y τ en R-tors con $\sigma \leq \tau$, tenemos que:

$f_{\sigma,\tau}$ es un monomorfismo de retículas y
$g_{\tau,\sigma}$ es un epimorfismo de retículas.

Utilizaremos el hecho de que, R es semiartiniano si y sólo si para toda $\tau \in$ R-tors , $\tau \neq \xi$, τ está generada por una familia de R-módulos simples, para demostrar la siguiente:

Proposición 3.11 : Para un anillo R , son equivalentes:

(1) $[\chi]_{s^{\approx}} = \{ \chi \}$.
(2) $[\sigma]_{s^{\approx}} = \{ \sigma \}$, para toda $\sigma \in$ R-tors.
(3) R es semiartiniano.

Demostración:

($1 \Rightarrow 2$) Se tiene del hecho de que $g_{\sigma,\chi}$ es sobre para toda σ.

($2 \Rightarrow 3$) $[\sigma]_{s^{\approx}} = \{ \sigma \} \Rightarrow \sigma = \sigma_{\perp} \Rightarrow$ toda teoría de torsión está generada por simples.

($3 \Rightarrow 1$) R semiartiniano implica que $\chi = \tau_s$. Por lo tanto $[\chi]_{s^{\approx}} = \{ \chi \}$.

■

Ahora veamos para cuales clases de equivalencia de σ y τ, el epimorfismo $g_{\tau,\sigma}$ es un isomorfismo.

Utilizaremos el hecho conocido de que $\overline{\tau_G} = \tau_{sp}{}^{\perp} = \overline{\tau_G}^{\perp\perp} = \tau_{ss}{}^{\perp\perp}$ para las siguientes afirmaciones. (Algunas de ellas las demostraremos más adelante)

Proposición 3.12 : Sean $\sigma, \tau \in$ R-tors. Si $\tau_{ss} \leq \sigma \leq \tau \leq \chi$, entonces $g_{\tau,\sigma}$ es isomorfismo de retículas.

Demostración: Basta demostrar que $g_{\chi,\tau_{ss}}$ es isomorfismo.

Tenemos que $[\tau_{ss}]_{s^{\approx}} = [\tau_{ss}, \overline{\tau}_G]$, $[\chi]_{s^{\approx}} = [\tau_s, \chi]$ y que $\tau_s \vee \overline{\tau}_G = \chi$.
Por lo tanto, si $\beta \in [\tau_s, \chi]$, entonces:

$$(f_{\tau_{ss},\chi} \circ g_{\chi,\tau_{ss}})(\beta) = (\beta \wedge \overline{\tau}_G) \vee \tau_s = (\beta \vee \tau_s) \wedge (\overline{\tau}_G \vee \tau_s) = \beta \wedge \chi = \beta.$$

Por lo tanto $g_{\chi,\tau_{ss}}$ es inyectiva y en consecuencia isomorfismo.

■

Corolario 3.13 : Para un anillo R son equivalentes:

(1) R es semiartiniano.
(2) σ es aislada para toda $\sigma \in$ R-tors.
(3) χ es aislada.
(4) τ_s es aislada.
(5) τ_{ss} es aislada.
(6) $\overline{\tau_G}$ es aislada.
(7) τ_G es aislada.

■

• Ahora veamos como podemos expresar a la clase de equivalencia de τ, si la clase $\mathcal{A}$ cumple algunas otras propiedades:

Proposición 3.14 : Supongamos que $\sigma \leq \tau$ y que $\mathcal{A} \subseteq$ R-Mod es cerrada bajo cocientes y submódulos, entonces para la clase de equivalencia de τ

$$[\tau]_{_{\mathcal{A}}\approx} = [\, \xi(\{\, t_\tau(M) \mid M \in \mathcal{A}\}),\ \chi(\{\, M/t_\tau(M) \mid M \in \mathcal{A}\})\,]$$

se tienen las siguientes afirmaciones:

$$\text{a) } \xi(\{t_\tau(M) \mid M \in \mathcal{A}\}) = \xi(\mathcal{A} \cap \mathbf{T}_\tau) = \xi(\mathcal{A}) \wedge \tau \quad \text{y}$$
$$\text{b) } \chi(\{\, M/t_\tau(M) \mid M \in \mathcal{A}\} = \chi(\mathcal{A} \cap \mathbf{F}_\tau)$$

Además se tiene que:

c) $\tau \;{}_{\mathcal{A}}\!\approx \sigma \Leftrightarrow \mathcal{A} \cap \mathbf{T}_\tau = \mathcal{A} \cap \mathbf{T}_\sigma$ y $\tau \;{}_{\mathcal{A}}\!\approx \sigma \Leftrightarrow \mathcal{A} \cap \mathbf{F}_\tau = \mathcal{A} \cap \mathbf{F}_\sigma$.

Demostración :

a) ($\subseteq$) $t_\tau(M) \leq M$ por lo tanto $t_\tau(M) \in \mathcal{A} \cap \mathbf{T}_\tau$ si tomamos $M \in \mathcal{A}$.

($\supseteq$) Si $M \in \mathcal{A} \cap \mathbb{T}_\tau$ entonces $t_\tau(M) = M$ por lo tanto M está en los generadores de $\xi(\{t_\tau(M) \mid M \in \mathcal{A}\})$.

b) Es análogo a (a).

c) Primero veamos que $(\tau \;{}_{\mathcal{A}}\!\approx \sigma) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \cap \mathbb{T}_\tau = \mathcal{A} \cap \mathbb{T}_\sigma)$.

$\Rightarrow$) Si $M \in \mathcal{A} \cap \mathbb{T}_\tau$ entonces $M = t_\tau(M) = t_\sigma(M) \in \mathbb{T}_\sigma$. La otra inclusión es análoga.

$\Leftarrow$) Sea $M \in \mathcal{A}$ entonces $t_\tau(M) \in \mathcal{A} \cap \mathbb{T}_\tau = \mathcal{A} \cap \mathbb{T}_\sigma$.
$\therefore t_\tau(M) \leq t_\sigma(M)$. La otra inclusión es análoga.

Ahora veamos que $\tau \;{}_{\mathcal{A}}\!\approx \sigma \Leftrightarrow \mathcal{A} \cap \mathbb{F}_\tau = \mathcal{A} \cap \mathbb{F}_\sigma$.
$\Rightarrow$) Si $M \in \mathcal{A} \cap \mathbb{F}_\tau$ con $0 = t_\tau(M) = t_\sigma(M)$, se tiene por lo tanto que $M \in \mathcal{A} \cap \mathbb{F}_\sigma$.
$\Leftarrow$) Sea $M \in \mathcal{A}$, entonces $M/t_\tau(M) \in \mathcal{A} \cap \mathbb{F}_\tau = \mathcal{A} \cap \mathbb{F}_\sigma$, por lo tanto $t_\sigma(M) \leq t_\tau(M)$. La otra desigualdad es análoga.

■

- En general, no es cierto que $\chi(\mathcal{A} \cap \mathbb{F}_\tau) = \chi(\mathcal{A}) \vee \tau$, como se podría suponer.

Para ver esto, tomemos $\mathcal{A} = R\text{-Simp} \cup \{0\}$, entonces $\chi(\mathcal{A} \cap \mathbb{F}_\tau) = \tau^{\perp\perp}$.
Por otro lado, $\chi(\mathcal{A}) = \xi$, de donde $\chi(\mathcal{A}) \vee \tau = \tau$.
Y en general $\tau \neq \tau^{\perp\perp}$. Por ejemplo, Si $R = \mathbb{Z}$ entonces $\tau_\sigma^{\perp\perp} = \overline{\tau_\sigma} = \chi \neq \tau_\sigma$.

Sin embargo, si la teoría de torsión es cohereditaria, podemos demostrar el siguiente:

Lema 3.15 : Si $\mathcal{A}$ es una clase de R-módulos que es cerrada bajo submódulos y cocientes y τ una teoría de torsión cohereditaria, entonces:

$$\chi(\mathcal{A} \cap \mathbb{F}_\tau) = \chi(\mathcal{A}) \vee \tau .$$

Demostración:

$(\geq)$ Es claro pues $\mathcal{A} \cap \mathbb{F}_\tau \subseteq \mathbb{F}_{\chi(\mathcal{A})} \cap \mathbb{F}_\tau = \mathbb{F}_{\chi(\mathcal{A})} \vee \tau$.

$(\leq)$ Supongamos que no vale, entonces existe un R-módulo distinto de cero que es de $\chi(\mathcal{A} \cap \mathbb{F}_\tau)$-torsión, es libre de $\chi(\mathcal{A})$-torsión y libre de τ-torsión, entonces existe $f \neq 0$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{0 \neq f} & E(A) \qquad A \in \mathcal{A} \\ \subseteq\uparrow & & \subseteq\uparrow \\ 0 \neq M' & \xrightarrow{0 \neq f|_{M'}} & A \end{array}$$

$\therefore\ 0 \neq f(M') \in \mathcal{A} \cap \mathbb{F}_\tau$ y $M' \in \mathbb{T}_{\chi(\mathcal{A} \cap \mathbb{F}_\tau)}$ que es una contradicción.

■

• Supongamos ahora que $\mathcal{A} = \{ N \mid N << M \text{ para alguna } M \}$, que denotaremos por *R-Suf*, entonces tenemos la relación de equivalencia en R-tors:

$$_{\mathcal{A}}\approx \ \ddot{=} \ _{<<}\approx .$$

Es decir $\tau \ _{<<}\approx \ \sigma \Leftrightarrow t_\tau(N) = t_\sigma(N)$ para cada R-módulo N que es un submódulo superfluo de algún otro R-módulo M $(N << M)$.

Observación 3.16: R-Suf es cerrado bajo submódulos y cocientes.

Demostración:

Supongamos que $N \in$ R-Suf, es decir $\exists\, M \in$ R-Mod tal que $N << M$, y sea $L \leq N$ entonces claramente $L << M$, por lo que R-Suf es cerrada bajo submódulos.

Ahora, si tomamos N / L se tiene que $N / L \ll M / L$ por lo que también es cerrada bajo cocientes.

■

Proposición 3.17 :

(i) $[\chi]_{\ll\approx} = [\, \xi\, \{\text{R-Suf}\}\, , \chi\,]$
(ii) $[\xi]_{\ll\approx} = [\, \xi\, , \chi\, \{\text{R-Suf}\}\,]$
(iii) $[\tau]_{\ll\approx} = [\, \xi\, (\, \{\text{R-Suf}\}\,) \wedge \tau\, , \chi\, (\, \{\text{R-Suf} \cap \mathbf{F}_\tau\}\,)\,]$

Demostración: Se tiene usando la proposición 3.14 y la observación anterior.

■

Proposición 3.18 : Las siguientes proposiciones son equivalentes:
(i) $\tau_{\ll} \approx \chi$
(ii) $N \ll M \Rightarrow N \in \mathbf{T}_\tau$

Demostración:

(i $\Rightarrow$ ii) Si $N \ll M$ entonces, por la hipótesis, N es uno de los generadores de $\wedge[\chi]_{\ll\approx} \leq \tau$ por lo tanto $N \in \mathbf{T}_{\wedge[\chi]_{\ll\approx}} \subseteq \mathbf{T}_\tau$.

(ii $\Rightarrow$ i) Por (ii) tenemos que $\xi\, (\, \{\, N \mid N \ll M \text{ p.a. } M\, \})\, \leq \tau$. Por lo tanto se tiene que $\tau \in [\, \xi\, (\, \{\, N \mid N \ll M \text{ p.a. } M\, \})\, , \chi\,] = [\chi]_{\ll\approx}$.

■

Lema 3.19 : $N \in$ R-Suf si y sólo si $N \ll E\, (\, N\,)$.

Demostración:

$\Leftarrow$) Es obvio.

$\Rightarrow$) Supongamos que $N \in$ R-Suf , entonces existe φ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "<<"] \arrow[d, "i"] & M \arrow[dl, "\varphi"] \\
& E(N) &
\end{tikzcd}$$

donde $\varphi(N) \cong N$. Entonces basta demostrar que $\varphi(N) << E(N)$.

Supongamos que $\varphi(N) + K = E(N)$ con $K \leq E(N)$, entonces para toda $m \in M$ se tiene que $\varphi(m) = \varphi(n) + k$ con $n \in N$ y $k \in K$, por lo tanto $\varphi(m - n) = \varphi(n) + k - \varphi(n) = k$. Es decir $m - n \in \varphi^{-1}(K)$ y entonces $m \in N + \varphi^{-1}(K)$. Como esto es para toda m, concluimos que:

$$M = N + \varphi^{-1}(K).$$

Como $N << M$, tenemos que $M = \varphi^{-1}(K)$.

En esta situación se tiene que $\varphi(M) = \varphi\,\varphi^{-1}(K) = K \cap \mathrm{Im}(\varphi)$.

$$\therefore\ \varphi(N) \subseteq \varphi(M) \subseteq K,$$

Así que $E(N) = \varphi(N) + K = K$, por lo tanto $\varphi(N) << E(N)$.

■

Proposición 3.20 : Son equivalentes:

(i) $_{<<}\approx\ = {}_{\delta}\approx$
(ii) ξ (R-Suf) = τ_{δ}
(iii) a) Todo R-módulo superfluo es semiartiniano y
b) No hay R-módulos simples inyectivos.

Demostración:

($i \Rightarrow ii$) Como $_{<<}\approx\ = {}_{\delta}\approx$, en particular tenemos que:

$$[\chi]_{\ll\approx} = [\ \xi\ \{\ N \mid N \in \text{R-Suf}\}\ ,\ \chi\ ] = [\ \tau_s\ ,\ \chi\ ] = [\chi]_{s\approx}\ ,$$

de donde $\xi\,(\text{R-Suf}) = \tau_s$.

(ii $\Rightarrow$ iii)

(a) es claro pues $\xi\,(\text{R-Suf}) = \tau_s$.
(b) Si ${}_RS$ es un R-módulo simple y ${}_RS$ no es inyectivo, entonces ${}_RS$ no es superfluo (por el lema anterior). Por hipótesis existe un morfismo distinto de cero $f : M \rightarrow E\,({}_RS)$, con M simple superfluo. Ahora ${}_RS \cap f(M) \neq 0$ implica que ${}_RS \subseteq f(M)$, por lo tanto ${}_RS = f(M)$. ($f(M) \cong M$, M simple). Por lo tanto ${}_RS \cong M$ superfluo, que es una contradicción.

(iii $\Rightarrow$ ii) (a) implica que $\wedge[\chi]_{\ll\approx} \leq \tau_s$.
(b) implica que $\tau_s \leq \wedge[\chi]_{\ll\approx}$.

$\therefore\ \tau_s = \xi\,(\text{R-Suf})$.

(iii $\Rightarrow$ i) La hipótesis implica que $\wedge[\tau]_{\ll\approx}$ = La clase generada por los superfluos de τ-torsión, es igual a $\wedge[\tau]_{s\approx}$ = La clase de los semiartinianos de τ-torsión. Por lo tanto $\tau\ {}_{\ll}\!\approx \sigma \Leftrightarrow [\tau]_{\ll\approx} = [\sigma]_{\ll\approx} \Rightarrow \wedge[\tau]_{s\approx} = \wedge[\tau]_{\ll\approx} = \wedge[\sigma]_{\ll\approx} = \wedge[\sigma]_{s\approx} \Rightarrow \tau\ {}_s\!\approx\ \wedge[\tau]_{s\approx} = \wedge[\sigma]_{s\approx}\ {}_s\!\approx\ \sigma$

$\therefore\ \tau\ {}_s\!\approx \sigma$.

El mismo argumento funciona para demostrar que $\tau\ {}_s\!\approx \sigma \Rightarrow \tau\ {}_{\ll}\!\approx \sigma$.

$\therefore\ \tau\ {}_s\!\approx \sigma \Leftrightarrow \tau\ {}_{\ll}\!\approx \sigma$.

■

• Recordemos que un R-módulo es τ - *codivisible* si y sólo si es proyectivo con respecto a cada R-epimorfismo que tiene núcleo libre de τ-torsión.

Un R-epimorfismo β: M $\to$ M', es una *cubierta τ-codivisible* de M' si M es τ-codivisible y Ker (β) es un submódulo superfluo, libre de τ-torsión de M.

Se define la relación de equivalencia $\approx_f$ en R-tors de la siguiente manera: $\tau \approx_f \sigma \overset{..}{\Leftrightarrow}$ la clase de los R-módulos τ-codivisibles es la misma que la de los R-módulos σ-codivisibles.

Observación 3.21 : Supongamos que $0 \to K(M) \to P(M) \to M \to 0$ es una cubierta proyectiva, entonces:

$$0 \to K(M)/t_\tau(K(M)) \to P(M)/t_\tau(K(M)) \to M \to 0$$

es una cubierta τ-codivisible $\forall\, \tau \in [\tau]_{\approx_f}$.

■

Lema 3.22 : Sea M un R-módulo tal que cada uno de sus submódulos propios está incluido en un submódulo propio máximo, entonces Rad (M)<< M.

Demostración:

Sea L un submódulo propio de M y sea K el submódulo propio máximo que lo incluye, entonces como Rad (M) $\subseteq$ K se tiene que:
$L + \mathrm{Rad}(M) \leq K \neq M$, es decir que ($L + \mathrm{Rad}(M) = M \Rightarrow L = M$), por lo tanto Rad (M) es superfluo en M.

■

Como se sabe que todo ideal propio de R está incluido en un ideal máximo entonces del lema anterior podemos concluir el siguiente:

Corolario 3.23 : Rad (R) << R .

■

Proposición 3.24 : Si R es semiperfecto entonces toda clase de $\approx_t$-equivalencia es una subretícula completa de R-tors.

Además se tiene que:

$$[\tau]_{\approx_t} = [\, \xi (t_\tau (\operatorname{Rad} R)) , \chi (\operatorname{Rad} (R) / t_\tau (\operatorname{Rad} (R))) \,].$$

Demostración:

Denotaremos por $\mathbb{P}_\tau$ a la clase de los R-módulos τ-codivisibles.
Primero observemos que si $\tau \leq \sigma$ entonces $\mathbb{P}_\tau \subseteq \mathbb{P}_\sigma$. Pues si $M \in \mathbb{P}_\tau$, y si $K \in \mathbb{F}_\sigma$ en el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & M & & & & \\ & & & & \downarrow \varphi & & & & \\ 0 & \to & K & \to & N & \to & L & \to & 0 \end{array}$$

como $\mathbb{F}_\sigma \subseteq \mathbb{F}_\tau$, entonces existe $\overline{\varphi}$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & & & M \arrow[dl, "\overline{\varphi}"'] \arrow[d, "\varphi"] & & \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r] & N \arrow[r] & L \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$\therefore\ M \in \mathbb{P}_\sigma$.

Ahora veamos que $\xi (t_\tau (\operatorname{Rad} R))$ es el menor elemento de $[\tau]_{\approx_t}$.

Por la observación anterior tenemos que $\mathbb{P}_{\xi(t_\tau(Rad R))} \subseteq \mathbb{P}_\tau$.
Demostremos la otra inclusión. Recordemos que ([4] prop. 13.4) $M \in \mathbb{P}_\tau$ si y sólo si M es un sumando directo de un R-módulo de la forma P / T donde P es proyectivo y $T \leq P$ es tal que $T \in \mathbb{T}_\tau$. Tomemos un tal R-módulo P / T.

Como R es un anillo semiperfecto entonces $P \cong \bigoplus_{\alpha \in Y} Re_{\alpha}$ donde e_{α} es un idempotente primitivo de R y Y es algún conjunto.

Sea $X = \{ \beta \in Y \mid Re_{\beta} \subseteq T \}$.
Entonces tenemos que:

$$M \text{ es un sumando directo de } \Big(\bigoplus_{\alpha \in X} Re_{\alpha} \oplus \bigoplus_{\alpha \in Y-X} Re_{\alpha} \Big) / T$$

Tenemos que $T \xrightarrow{\subseteq} \Big(\bigoplus_{\alpha \in X} Re_{\alpha} \oplus \bigoplus_{\alpha \in Y-X} Re_{\alpha} \Big) \xrightarrow{p_X} \bigoplus_{\alpha \in X} Re_{\alpha}$ y la composición es un epimorfismo ya que $\bigoplus_{\alpha \in X} Re_{\alpha} \subseteq T$.

Entonces tenemos lo siguiente:

$$T \cong \bigoplus_{\alpha \in X} Re_{\alpha} \oplus T' \text{ con } T' \subseteq \bigoplus_{\alpha \in Y-X} Re_{\alpha}$$

así que:

$$P / T \cong \Big(\bigoplus_{\alpha \in X} Re_{\alpha} \oplus \bigoplus_{\alpha \in Y-X} Re_{\alpha} \Big) \Big/ \bigoplus_{\alpha \in X} Re_{\alpha} \oplus T' \cong \bigoplus_{\alpha \in Y-X} Re_{\alpha} / T'.$$

Ahora, por definición de X, $Re_{\alpha} \cap T' \subsetneq Re_{\alpha} \quad \forall \alpha \in Y \setminus X$.

Por lo tanto tenemos que $T' \xrightarrow{\subseteq} \bigoplus_{\alpha \in Y-X} Re_{\alpha} \xrightarrow{p_{\alpha}} Re_{\alpha}$ no es epimorfismo $\forall \alpha \in Y \setminus X$.

Entonces tenemos que:

$$Im\Big(T' \xrightarrow{\subseteq} \bigoplus_{\alpha \in Y-X} Re_{\alpha} \xrightarrow{p_X} Re_{\alpha} \Big) \subseteq Rad(Re_{\alpha})$$

$$\therefore \quad T' \xrightarrow{\subseteq} \bigoplus_{\alpha \in Y-X} Rad(Re_{\alpha}).$$

Pero entonces:

$$T' \subseteq \bigoplus_{\alpha\in Y-X} Rad(\mathrm{Re}_\alpha) \cap t_\tau\Big(\bigoplus_{\alpha\in Y-X} \mathrm{Re}_\alpha\Big) = t_\tau\Big(\bigoplus_{\alpha\in Y-X} Rad(\mathrm{Re}_\alpha)\Big) \in \mathbf{T}_{\xi(t_\tau(Rad(R)))}.$$

De esto se sigue que $P / T \in \mathbf{P}_{\xi(t_\tau(Rad R))}$ y entonces $\mathbf{P}_\tau \subseteq \mathbf{P}_{\xi(t_\tau(Rad R))}$.

$$\therefore\ \mathbf{P}_\tau = \mathbf{P}_{\xi(t_\tau(Rad R))} \text{ y así } \xi(t_\tau(\mathrm{Rad}\, R)) \in [\tau]_{\approx_f}.$$

Ahora, si $\sigma \in [\tau]_{\approx_f}$, entonces las sucesiones exactas:

$$0 \to \mathrm{Rad}(R)/t_\sigma(\mathrm{Rad}(R)) \to R/t_\sigma(\mathrm{Rad}(R)) \to R/\mathrm{Rad}(R) \to 0$$

y

$$0 \to \mathrm{Rad}(R)/t_\tau(\mathrm{Rad}(R)) \to R/t_\tau(\mathrm{Rad}(R)) \to R/\mathrm{Rad}(R) \to 0$$

son ambas cubiertas τ-codivisibles y σ-codivisibles ya que $\sigma \in [\tau]_{\approx_f}$ y por el lema anterior. Recordando que $0 \to \mathrm{Rad}(R) \to R \to R/\mathrm{Rad}(R) \to 0$ es una cubierta proyectiva de $R/\mathrm{Rad}(R)$ debido a que $\mathrm{Rad}(R) \ll R$, entonces $t_\tau(\mathrm{Rad}(R)) = t_\sigma(\mathrm{Rad}(R))$ y así

$$\xi(t_\tau(\mathrm{Rad}(R))) = \xi(t_\sigma(\mathrm{Rad}(R))) \leq \sigma.$$

Es decir que $\xi(t_\tau(\mathrm{Rad}(R)))$ es el menor elemento de $[\tau]_{\approx_f}$.

Ahora demostraremos que $\chi(\mathrm{Rad}(R)/t_\tau(\mathrm{Rad}(R)))$ es el mayor elemento de $[\tau]_{\approx_f}$.

Notemos que $\tau \leq \chi(\mathrm{Rad}(R)/t_\tau(\mathrm{Rad}(R)))$ y en consecuencia $\mathbf{P}_\tau \subseteq \mathbf{P}_{\chi(Rad(R)/t_\tau(Rad(R)))}$.

Veamos la otra inclusión.

Sea $M \in \mathbb{P}_{\chi(Rad(R)/t_\tau(Rad(R)))}$, entonces M es un sumando directo de P / T con P proyectivo y $P \geq T \in \mathbb{T}_{\chi(Rad(R)/t_\tau(Rad(R)))}$.

Por lo tanto P es de la forma $\bigoplus_{\alpha \in Y} \mathrm{Re}_\alpha$, con e_α idempotente primitivo de R $\forall\, \alpha \in Y$, Y un conjunto.

Sea $X = \{\, \beta \in Y \mid \mathrm{Re}_\beta \subseteq T \,\}$, procediendo como antes, tenemos que $P/T \cong \bigoplus_{\alpha \in Y-X} \mathrm{Re}_\alpha / T'$ para algún $T' \subseteq \bigoplus_{\alpha \in Y-X} \mathrm{Re}_\alpha$.

Y como $T' \xrightarrow{\subseteq} \bigoplus_{\alpha \in Y-X} \mathrm{Re}_\alpha \xrightarrow{P_\alpha} \mathrm{Re}_\alpha$ no es epimorfismo $\forall\, \alpha \in Y \setminus X$, tenemos que $T' \subseteq \bigoplus_{\alpha \in Y-X} Rad(\mathrm{Re}_\alpha)$.

Definamos $N_\alpha = P_\alpha(T')$, entonces $N_\alpha \in \mathbb{T}_{\chi(Rad(R)/t_\tau(Rad(R)))}$ y tenemos que

$$N_\alpha \xrightarrow{\subseteq} \mathrm{Rad}(\mathrm{Re}_\alpha) \xrightarrow{\subseteq} \mathrm{Rad}(R).$$

Si $N_\alpha \notin \mathbb{T}_\tau$ entonces existe un mapeo inyectivo distinto de cero:

$$N_\alpha / t_\tau(N_\alpha) \to \mathrm{Rad}(R)/t_\tau(\mathrm{Rad}(R))$$

pero $\mathrm{Hom}(N_\alpha, \mathrm{Rad}(R)/t_\tau(\mathrm{Rad}(R))) = 0$.

Por lo tanto $N_\alpha / t_\tau(N_\alpha) = 0$, que es una contradicción, por lo tanto $N_\alpha \in \mathbb{T}_\tau$ y entonces $T' \in \mathbb{T}_\tau$ y consecuentemente tenemos que:

$$\bigoplus_{\alpha \in Y-X} \mathrm{Re}_\alpha / T' \in \mathbb{P}_\tau$$

$$\therefore\ \chi(\mathrm{Rad}(R)/t_\tau(\mathrm{Rad}(R))) \in [\tau]_{\approx_P}$$

Ahora, si $\sigma \in [\tau]_{\approx_f}$, tenemos que $t_\tau(\mathrm{Rad}(R)) = t_\sigma(\mathrm{Rad}(R))$, por lo tanto:

$$\chi(\mathrm{Rad}(R)/t_\tau(\mathrm{Rad}(R))) = \chi(\mathrm{Rad}(R)/t_\sigma(\mathrm{Rad}(R))) \geq \sigma .$$

De aqui que $\chi(\mathrm{Rad}(R)/t_\tau(\mathrm{Rad}(R)))$ es el mayor elemento de $[\tau]_{\approx_f}$.

$\therefore$ $[\tau]_{\approx_f}$ es una subretícula completa de R-tors.

■

Observación 3.25: Bland en [9] demostró que si $\tau \in$ R-tors entonces son equivalentes:

(a) Todo R-módulo es codivisible.

(b) Todo R-módulo libre de τ-torsión es semisimple e inyectivo.

(c) $R/t_\tau(R)$ es semisimple.

Y que si, además, R es semiperfecto entonces son equivalentes:

(a) Todo R-módulo es codivisible.

(b) $\mathrm{Rad}(R) \subseteq t_\tau(R)$.

Ahora bien, $\tau \in [\chi]_{\approx_f}$ si y sólo si $\xi(\mathrm{Rad}(R)) \leq \tau$. Esto último es equivalente a que $\mathrm{Rad}(R) \subseteq t_\tau(R)$, y por lo anterior, es equivalente a que, todo R-módulo libre de τ-torsión sea semisimple e inyectivo.

■

Corolario 3.26: R es un anillo semisimple si y sólo si $\xi \approx_f \chi$ (es decir que R-tors / $\approx_f = \{ [\xi] \}$).

Demostración:

($\Rightarrow$) Si R es semisimple entonces para toda $\tau \in$ R-tors, R / t_τ (R) es semisimple, entonces $\tau \in [\chi]_{\approx_f}$, por lo tanto $[\xi] = [\chi] =$ R-tors.

($\Leftarrow$) Si $\xi \approx_f \chi$, en particular $\xi \in [\chi] = [\xi]$, por lo que tenemos que N es semisimple en el caso de que N sea libre de ξ-torsión. Como $\mathbf{F}_\xi$ = R-mod , se sigue que todo R-módulo es semisimple.

■

Proposición 3.27 : Las siguientes afirmaciones son equivalentes para ${}_RR$ semiartiniano:

(i) $\tau_G \in [\chi]_{\approx_f}$.

(ii) Todo R-módulo M semisimple y proyectivo es inyectivo.

Demostración:

(i $\Rightarrow$ ii) Si M es semisimple y proyectivo entonces $M \in \mathbf{F}_{\tau_G}$. Por (i) y la observación 3.25 tenemos que M es semisimple e inyectivo.

(ii $\Rightarrow$ i) ${}_RR$ semiartiniano $\Rightarrow$ Soc (M) $\leq_{e}$ M $\forall$ M. Si $M \in \mathbf{F}_{\tau_G}$ entonces Soc (M) = Soc_p (M) por (ii) Soc_p (M) es inyectivo por lo tanto Soc_p (M) $\leq_{e}$ M y Soc_p (M) es un sumando directo de M, pero esto es posible sólo si M = Soc_p (M) que es un módulo semisimple e inyectivo.

$\therefore \tau_G \in [\chi]_{\approx_f}$.

■

Observación 3.28: Si R es semiperfecto, entonces $\tau \;{}_{cc}\!\approx \sigma \Rightarrow \tau \approx_f \sigma$.

Demostración:

Sabemos que $\mathrm{Rad}(R) << R$, entonces tenemos que:

$$t_\tau(\mathrm{Rad}\ (R)) = t_\sigma(\mathrm{Rad}\ (R))$$

esto implica que :

$$[\tau]_{\approx_t} = [\,\xi(t_\tau(\mathrm{Rad}\ (R))), \chi(\mathrm{Rad}(R)/t_\tau(\mathrm{Rad}\ (R))) = [\sigma]_{\approx_t}$$

∎

Proposición 3.29 : Si σ es una teoría de torsión cohereditaria entonces σ tiene complemento en R-tors; $\sigma^\perp = \xi(\mathbb{F}_\sigma)$. Además, $\mathbb{T}_{\sigma^\perp} = \mathbb{F}_\sigma$.

Demostración:

Si σ es una teoría de torsión cohereditaria entonces $\mathbb{F}_\sigma$ es una clase de torsión y por lo tanto, existe σ' teoría de torsión hereditaria tal que $\mathbb{F}_\sigma = \mathbb{T}_{\sigma'}$ entonces $\mathbb{T}_\sigma \cap \mathbb{T}_{\sigma'} = \mathbb{T}_\sigma \cap \mathbb{F}_\sigma = \{0\}$. Por lo tanto $\sigma \wedge \sigma' = \xi$.
Ahora bien $\mathbb{F}_{\sigma\vee\sigma'} = \mathbb{F}_\sigma \cap \mathbb{F}_{\sigma'} = \mathbb{T}_{\sigma'} \cap \mathbb{F}_{\sigma'} = \{0\}$ Por lo tanto $\sigma \vee \sigma' = \chi$.
Es decir que σ' es el complemento de σ en R-tors.

∎

Proposición 3.30 : Si σ es cohereditaria y $\mathcal{A} = \mathbb{F}_\sigma$ entonces:

$$[\tau]_{t^{\approx}} = [\,\tau \wedge \sigma^\perp, \tau \vee \sigma\,].$$

Demostración:

$$[\tau]_{t_\sigma^{\approx}} = [\,\xi\{t_\tau(M) \mid M \in \mathbb{F}_\sigma\}, \chi\{M/t_\tau(M) \mid M \in \mathbb{F}_\sigma\}].$$

Es claro que $\tau \vee \sigma = \chi\{M/t_\tau(M) \mid M \in \mathbb{F}_\sigma\}$.
Por otra parte, $\xi(\{t_\tau(M) \mid M \in \mathbb{F}_\sigma\}) \leq \tau \wedge \sigma^\perp$, debido a que $\mathbb{F}_\sigma = \mathbb{T}_{\sigma^\perp}$.

Recíprocamente, si $M \in \mathbf{T}_{\tau\wedge\sigma^{\perp}}$ entonces $M \in \mathbf{T}_{\tau} \cap \mathbf{T}_{\sigma^{\perp}} = \mathbf{F}_{\sigma} \cap \mathbf{T}_{\sigma^{\perp}}$.

$$\therefore\ \xi(\{ t_{\tau}(M) \mid M \in \mathbf{F}_{\sigma} \}) = \tau \wedge \sigma^{\perp}$$

■

Observación 3.31 : $\overline{\tau_G} = \tau_G^{\perp\perp} = \tau_{sp}^{\perp}$.

Demostración:
Por la proposición 2.20 tenemos que :

$$\tau_{sp}^{\perp} = \chi(\{ \text{Simples proyectivos} \}) = \tau_G^{\perp\perp} \geq \tau_G .$$

Como τ_{sp} es cohereditaria, de la proposición 3.29 tenemos que $\mathbf{F}_{\tau_{sp}} = \mathbf{T}_{\tau_{sp}^{\perp}}$. $\tau_{sp}^{\perp}$ es Jansiana y estable ya que $\mathbf{F}_{\tau_{sp}}$ es cerrada bajo productos y cápsulas inyectivas respectivamente.

$$\therefore\ \overline{\tau_G} \leq \tau_{sp}^{\perp}.$$

Supongamos ahora que $M \in \mathbf{T}_{\tau_{sp}^{\perp}}$. Entonces Hom (M , E (S)) = 0 para cada R-módulo simple proyectivo. Como los módulos simples cogeneran R-Mod, se tiene que existe un monomorfismo $M \xrightarrow{0 \neq f} \prod E(S_{\alpha})$ con S_{α} simple para cada α. Por lo que acabamos de ver, podemos suponer que S_{α} es singular. Por lo tanto existe un monomorfismo $M \to \prod_{\alpha\in X} E(S_{\alpha}) \in \mathbf{T}_{\overline{\tau_G}}$. Pues $E(S_{\alpha}) \in \mathbf{T}_{\tau_G}$.

$$\therefore\ \tau_{sp}^{\perp} \leq \overline{\tau_G} .$$

■

Corolario 3.32 : $[\tau]_{\tau_{sp}^{\perp}} = [\tau \wedge \tau_{sp}^{\perp} , \tau \vee \tau_{sp}] = [\tau \wedge \overline{\tau_G} , \tau \vee \tau_{sp}]$.

Demostración: La segunda igualdad se tiene de la observación anterior.

■

Proposición 3.33: Si $soc(R) \leq_{es} R$, entonces τ_G es jansiana.

Demostración: Consideramos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow soc(R) \longrightarrow R \longrightarrow R/soc(R) \longrightarrow 0$$

donde $soc(R) \in \mathbb{T}_{\tau_\lambda}$ y $R/soc(R) \in \mathbb{T}_{\tau_G}$.
Por lo tanto $\tau_\lambda \vee \tau_G = \chi$. Como $\tau_\lambda = \tau_{ss} \vee \tau_{sp}$ y $\tau_{ss} \leq \tau_G$, entonces tenemos que $\tau_{sp} \vee \tau_G = \chi$.

$$\therefore \ \tau_G = \tau_{sp}^{\perp} = \bar{\tau}_0 .$$

■

• Decimos que un R-módulo es σ-inyectivo si y sólo si es inyectivo con respecto a cada R-monomorfismo que tiene conúcleo de τ-torsión. Definimos una relación de equivalencia en R-tors mediante $\tau \approx_\gamma \sigma$ si y sólo si la clase de los σ-inyectivos es la misma que la clase de los τ-inyectivos.

• Si $\tau \in$ R-tors, un submódulo N de M se dice que es τ-puro en M si $M/N \in \mathbb{F}_\tau$.

Observación 3.34: La intersección de una familia arbitraria de submódulos τ-puros de M es otra vez τ-puro.

Demostración: Si $\mathscr{C}$ es tal familia, entonces existe un monomorfismo canónico $M/\bigcap\mathscr{C} \xrightarrow{\varphi} \prod\{M/N \mid N \in \mathscr{C}\}$. Por lo tanto $\operatorname{Im}\varphi \in \mathbb{F}_\tau$.

$\therefore \bigcap\mathscr{C}$ es τ-puro en M.

■

• Cualquier submódulo N de M está incluido en al menos un submódulo τ-puro (a saber M mismo), y por lo tanto existe un elemento menor en la familia de los τ-puros de M que incluyen a N.
Tal submódulo se llama *la τ-purificación de N en M.*

Además, Si N' es la τ-purificación de N en M entonces:

$$N'/N = t_\tau(M/N).$$

En particular $t_\tau(M)$ es la τ-purificación de 0 en M.

• Sea $\tau \in$ R-tors, por [4, Prop. 8.2] vemos que, para cualquier R-módulo M, la τ-purificación de M en E(M) es un submódulo τ-inyectivo de E (M) que contiene a M como submódulo esencial. De hecho es el menor submódulo de E (M) que lo cumple. La τ-purificación de M en E (M) se llama *la cápsula τ-inyectiva de M* y la denotamos por $E_\tau(M)$.

Observación 3.35 : Si $M \in$ R-Mod es de τ-torsión entonces $E_\tau(M)$ también lo es.

Demostración: Tenemos que la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \to M \to E_\tau(M) \to E_\tau(M)/M \to 0$$

en donde M es de τ-torsión por hipótesis, además $E_\tau(M)$ satisface la condición $E_\tau(M)/M = t_\tau(E(M)/M)$, por lo tanto $E_\tau(M)/M$ es de τ-torsión y como la clase de torsión es cerrada bajo extensiones se sigue que $E_\tau(M)$ también lo es.

■

Definición 3.36 :

Una clase propia en R-Mod es una familia $\mathscr{E}$ de sucesiones exactas cortas tales que, si denotamos por $M(\mathscr{E})$ los monomorfismos de las sucesiones de E y por $P(\mathscr{E})$ los epimorfismos de las sucesiones de $\mathscr{E}$, entonces las siguientes condiciones se tienen:

1) Si una sucesión exacta está en $\mathscr{E}$ entonces cualquier sucesión exacta corta isomorfa a ella también está en $\mathscr{E}$.

2) Todas las sucesiones exactas cortas que se escinden pertenecen a $\mathscr{E}$.

3) $\forall$ f_1, $f_2 \in M(\mathscr{E})$, tales que $f_1 \circ f_2$ está definida, tenemos que:

$$f_1 \circ f_2 \in M(\mathscr{E}).$$

4) Para todo par de monomorfismos f_1, f_2 tales que $f_1 \circ f_2$ está definida, tenemos que $(f_1 \circ f_2 \in M(\mathscr{E}) \Rightarrow f_2 \in M(\mathscr{E}))$.

5) $\forall$ $g_1, g_2 \in P(\mathscr{E})$, tales que $g_2 \circ g_1$ está definida, tenemos que:

$$g_2 \circ g_1 \in P(\mathscr{E}).$$

6) Para todo par de epimorfismos g_1, g_2 tales que $g_2 \circ g_1$ tiene sentido, si tenemos que $g_2 \circ g_1 \in P(\mathscr{E})$, entonces se debe tener que $g_2 \in P(\mathscr{E})$.

• Si $\tau \in$ R-tors, consideramos la menor clase propia $\mathscr{E}_\tau$ tal que toda sucesión exacta $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ con $M'' \in \mathbb{T}_\tau$ pertenece a $\mathscr{E}_\tau$. Denotaremos por I_τ a la familia de todos los R-módulos τ-inyectivos. Entonces I_τ es la familia de los R-módulos inyectivos relativos relacionados con $\mathscr{E}_\tau$.

• Definimos $[\tau]_{\approx I} = \{ \sigma \in \text{R-tors} \mid \mathscr{E}_\tau = \mathscr{E}_\sigma \}$ para cada $\tau \in$ R-tors.

Lema 3.37: Si $\sigma \in [\tau]_{\approx I}$, entonces $E_\sigma(M) = E_\tau(M)$ $\forall M \in$ R-Mód.

∎

Observación 3.38: Como cualquier ideal izquierdo esencial de R es τ_G-denso en R, tenemos que un R-módulo izquierdo es τ_G-inyectivo si y sólo si es inyectivo.

∎

Lema 3.39 : $E_\tau(\mathrm{M}) = \mathrm{E}(\mathrm{M})$ $\forall\, \mathrm{M} \in$ R-Mod si y sólo si $\tau_G \leq \tau$.

■

Proposición 3.40 : a) $[\chi]_{\approx_1} = \{\, \tau \in \text{R-tors} \mid \tau_G \leq \tau \,\}$

b) $[\xi]_{\approx_1} = \{\, \tau \in \text{R-tors} \mid \tau \leq \tau_{sp} \,\}$

Demostración: a) Se sigue del lema anterior.

b) $\tau \in [\xi]_{\approx_1} \Leftrightarrow I_\tau =$ R-Mod $\Leftrightarrow \mathscr{E}_\tau$ es la familia de las sucesiones exactas cortas que se escinden $\Leftrightarrow \mathbb{T}_\tau$ está incluida en la clase de los R-módulos semisimples proyectivos.

■

Observación 3.41 : $\tau \leq \sigma \Rightarrow \mathscr{E}_\tau \subseteq \mathscr{E}_\sigma \Leftrightarrow I_\tau \supseteq I_\sigma$.

■

Proposición 3.42 : Sea $\tau \in$ R-tors y $\mathrm{U} \subseteq [\tau]_{\approx_1}$, entonces:

a) $\wedge\{\, \sigma \mid \sigma \in \mathrm{U} \,\} \in [\tau]_{\approx_1}$

b) $\vee\{\, \sigma \mid \sigma \in \mathrm{U} \,\} \in [\tau]_{\approx_1}$

Y por lo tanto $[\tau]_{\approx_1}$ es una subretícula completa de R-tors.

Demostración:

a) Tomemos $\sigma_0 = \wedge\{\, \sigma \mid \sigma \in \mathrm{U} \,\}$ entonces $\sigma_0 \leq \sigma$ $\forall\, \sigma \in \mathrm{U}$ entonces $I_\sigma \subseteq I_{\sigma_0}$ $\forall\, \sigma \in \mathrm{U}$. Por lo tanto $I_\tau \subseteq I_{\sigma_0}$.

Supongamos que $\mathrm{M} \in I_{\sigma_0}$. Si $\mathrm{M} \notin I_\tau$ entonces $0 \neq E_\tau(\mathrm{M})/\mathrm{M} \in \mathbb{T}_\tau$.
Pero $E_\tau(\mathrm{M}) = E_\sigma(\mathrm{M})$ $\forall\, \sigma \in \mathrm{U}$. Por lo tanto $E_\sigma(\mathrm{M})/\mathrm{M} \in \mathbb{T}_\sigma$.
Entonces $E_\tau(\mathrm{M})/\mathrm{M} \in \bigcap_{\sigma \in U} \mathbb{T}_\sigma = \mathbb{T}_{\sigma_0}$, lo cual nos dice que:

$$E_\tau(\mathrm{M}) \subseteq E_{\sigma_0}(\mathrm{M})$$

y por lo tanto $E_{\sigma_0}(\mathrm{M})/\mathrm{M} = 0$ lo cual es una contradicción.

b) Se demuestra de manera similar.

■

• Denotamos $\tau_o = \wedge \{ \sigma \mid \sigma \in [\tau]_{\approx_I} \}$ y $\tau^0 = \vee \{ \sigma \mid \sigma \in [\tau]_{\approx_I} \}$ y los llamamos ínfimo y supremo respectivamente. Además usamos la siguiente notación:

$$\text{R-inf} = \{ \tau_o \mid \tau \in \text{R-tors} \}$$
$$\text{R-sup} = \{ \tau^0 \mid \tau \in \text{R-tors} \}$$

Proposición 3.43 : Sea $\tau \in$ R-tors, entonces:

a) $\tau \in \text{R-sup} \Leftrightarrow \tau = \chi \{ E(M) / E_\tau(M) \mid M \in \text{R-Mod} \}$
b) $\tau \in \text{R-inf} \Leftrightarrow \tau = \xi \{ E_\tau(M)/M \mid M \in \text{R-Mod} \}$

Demostración:
a) ($\Rightarrow$) Sea $\sigma = \chi \{ E(M) / E_\tau(M) \mid M \in \text{R-Mod} \}$, entonces los cogeneradores de σ estan en $\mathbf{F}_\tau$ así que $\sigma \geq \tau$ y por lo tanto $I_\sigma \subseteq I_\tau$. Ahora supongamos que $M \in I_\tau$ entonces tenemos que:

$$E(M)/M = E(M)/E_\tau(M) \in \mathbf{F}_\sigma;$$

por lo tanto $M \in I_\sigma$ y se tiene $I_\sigma = I_\tau$ es decir $\sigma \in [\tau]_{\approx_I}$ y $\sigma \geq \tau$ lo que implica $\sigma = \tau^0 = \tau$.

($\Leftarrow$) Sea $\tau = \chi \{ E(M)/E_\tau(M) \mid M \in \text{R-Mod} \}$ como $\vee \{ \sigma \mid \sigma \in U \} \in [\tau]_{\approx_I}$ con $U \subseteq [\tau]_{\approx_I}$ tenemos que $I_{\tau^0} = I_\tau$ y para toda $M \in$ R-Mod se tiene:

$$E(M)/E_\tau(M) = E(M)/E_{\tau^0}(M) \in \mathbf{F}_{\tau^0}.$$

Por lo tanto $\tau \geq \tau^0$ y se tiene la igualdad.

b) ($\Rightarrow$) Sea $\sigma = \xi \{ E_\tau(M)/M \mid M \in \text{R-Mod} \}$. Los generadores de σ pertenecen a $\mathbf{T}_\tau$ por lo tanto $\sigma \leq \tau$ lo que implica $I_\tau \subseteq I_\sigma$.
Ahora, si $M \in I_\sigma$ entonces:
$E_\tau(M)/M \subseteq E(M)/M = E(M)/E_\sigma(M) \in \mathbf{F}_\sigma$.
Pero $E_\tau(M)/M \in \mathbf{T}_\sigma$, por lo tanto $E_\tau(M)/M = 0$ es decir:

$$E_\tau(\mathrm{M}) = \mathrm{M} \text{ y } \mathrm{M} \in I_\tau. \quad \therefore I_\tau = I_\sigma.$$

Entonces $\sigma \in [\tau]_{\approx_1}$ y $\sigma \leq \tau$ lo cual muestra que $\sigma = \tau_o = \tau$.

($\Leftarrow$) Sea $\tau = \xi\,\{\, E_\tau(\mathrm{M})/\mathrm{M} \mid \mathrm{M} \in \text{R-Mod} \,\}$.
Como $\wedge\{\, \sigma \mid \sigma \in \mathrm{U} \,\} \in [\tau]_{\approx_1}$ se tiene que $I_{\tau^o} = I_\tau$, y $\forall\, \mathrm{M} \in$ R-Mod se tiene:

$$E_\tau(\mathrm{M})/\mathrm{M} = E_{\tau_0}(\mathrm{M}) \in \mathbf{T}_{\tau_o}.$$

Por lo tanto $\mathbf{T}_\tau \subseteq \mathbf{T}_{\tau_o}$ es decir $\tau \leq \tau_o$ entonces $\tau = \tau_o$.

■

Corolario 3.44: a) $\tau \in$ R-inf $\Leftrightarrow \tau \leq \tau_G$
b) $\tau \in$ R-sup $\Leftrightarrow \tau \geq \tau_{sp}$
c) R es semisimple artiniano $\Leftrightarrow$ R-tors $= [\chi]_{\approx_1}$

Demostración:
a) Observemos que $\tau \in$ R-inf $\Leftrightarrow$ τ está generado por R-módulos singulares $\Leftrightarrow \tau \leq \tau_G$.

b) Sea $\tau \in$ R-sup. Si S es un R-módulo semisimple proyectivo, entonces es no singular; por lo tanto Hom (S, E (M) / E_τ (M)) = 0 por lo tanto $\tau_{sp} \leq \tau$.

c) Es inmediato.

■

Corolario 3.45:
1) Si $\tau \in$ R-sup y $\sigma \in$ R-tors entonces $E_\sigma \subseteq E_\tau \Rightarrow \sigma \leq \tau$
2) Si $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in X} \subseteq$ R-sup entonces $\bigwedge_{\alpha \in X} \tau_\alpha \in$ R-sup
3) $\wedge\{\, \tau \mid \tau \in \text{R-sup} \,\} = \tau_{sp}$

Demostración:

1) $E_\sigma \subseteq E_\tau \Rightarrow I_\tau \subseteq I_\sigma$ y por lo tanto $E_\tau(\mathrm{M})$ es σ-inyectivo.

Entonces $E(M)/E_\tau(M) \in \mathbb{F}_\sigma \quad \forall M$

$$\therefore \quad \tau = \chi\{E(M)/\ E_\tau(M) \mid M \in R\text{-Mod}\} \geq \sigma\ .$$

2) $E_{(\wedge\tau_\alpha)^0} = E_{\wedge\tau_\alpha} \subseteq E_{\tau_\alpha} \quad \forall\ \alpha$ por el inciso (1) y $(\wedge\tau_\alpha)^0 \leq \tau_\alpha \ \forall\ \alpha$.
Por lo tanto $(\wedge\tau_\alpha)^0 \leq \wedge\ \tau_\alpha$.

$$\therefore\ (\wedge\tau_\alpha)^0 = \wedge\ \tau_\alpha\ .$$

Observación 3.45.1 : Un R-módulo N es semisimple y proyectivo si y sólo si $\mathrm{Hom}(N, E(M)/M) = 0 \quad \forall\ M \in R\text{-Mod}$, así que:

$$\tau_{sp} = \chi\{E(M)/\ M \mid M \in R\text{-Mod}\} = \xi^0 \in R\text{-sup}.$$

3) Ahora es inmediato.

■

• En general R-sup no es cerrado bajo tomar uniones arbitrarias. De hecho, en $\mathbb{Z}$-mod tenemos que $\vee\{\chi(\mathbb{Z}_p) \mid p \text{ es primo}\} = \tau_G$ que no está en $\mathbb{Z}$-sup.

Proposición 3.46 : $\forall\ \tau \in R\text{-tors}$ se tiene que $\tau_0 = \tau \wedge \tau_G$.

Demostración: Ya sabemos que $\tau_0 \leq \tau_G$ lo que implica que $\tau_0 \leq \tau_G \wedge \tau$. Ahora, supongamos que $\tau_0 < \tau_G \wedge \tau$. Entonces existe $R^M \neq 0$ tal que $M \in \mathbb{T}_\tau \cap \mathbb{T}_{\tau_G}$ y $M \in \mathbb{F}_{\tau_0}$. Como $M \in \mathbb{T}_{\tau_G}$ entonces $Z(M) \neq 0$ donde $Z(M)$ es el submódulo singular de M. Sea $0 \neq x \in Z(M)$ entonces $0 \neq Rx \in \mathbb{T}_\tau \cap \mathbb{T}_{\tau_G} \cap \mathbb{F}_{\tau_0}$ y $Rx \cong R/I$ con I un ideal esencial de R. Por lo tanto tenemos que $R/I \subseteq E_\tau(I)/I = E_{\tau_0}(I)/I \in \mathbb{T}_{\tau_0}$, que es una contradicción.

$$\therefore\ \tau_0 = \tau \wedge \tau_G$$

■

Proposición 3.47 : La relación $\approx_\tau$ es la misma que la relación ${}_{\tau_{\tau_G}}\!\approx$.

Demostración:

Tomando $\mathcal{A} = \mathbf{T}_{\tau_G}$ tenemos que:

$$
\begin{aligned}
[\tau]_{\mathbf{T}_{\tau_G}\approx} &= [\, \xi(\{ t_\tau(M) \mid M \in \mathbf{T}_{\tau_G} \}), \chi(\{ M / t_\tau(M) \mid M \in \mathbf{T}_{\tau_G} \}) \,] \\
&= [\, \tau \wedge \tau_G ,\ \chi(\{ M / t_\tau(M) \mid M \in \mathbf{T}_{\tau_G} \}) \,]
\end{aligned}
$$

Pero sabemos que:

$$[\tau]_{\approx_{\mathrm{I}}} = [\, \tau \wedge \tau_G ,\ \chi(\{ E(M) / E_\tau(M) \mid M \in R\text{-Mod} \}) \,]$$

$$\therefore\ \tau \ {}_{\mathbf{T}_{\tau_G}}\!\approx \sigma \Leftrightarrow \tau \wedge \tau_G = \sigma \wedge \tau_G \Leftrightarrow \tau \approx_{\mathrm{I}} \sigma .$$

■

Proposición 3.48: ${}_{\iota}\!\approx\, = \,\approx_{\mathrm{I}}$ si y sólo si τ_G es de tipo simple (de hecho pasa que $\tau_G = \tau_\iota$ y $\tau_{sp} = \xi$).

Demostración: Tenemos que $[\tau]_{\iota\approx} = [\, \tau \wedge \tau_\iota ,\ \tau^{\perp\perp} \,]$ y que:

$$[\tau]_{\approx_{\mathrm{I}}} = [\, \tau \wedge \tau_G ,\ \chi(\{ E(M) / E_\tau(M) \mid M \in R\text{-Mod} \}) \,]$$

entonces tenemos que $\tau \wedge \tau_\iota = \tau \wedge \tau_G$, por lo tanto si tomamos la clase:

$$
\begin{aligned}
[\tau_G] &= [\, \tau_G \wedge \tau_\iota ,\ \tau_G^{\perp\perp} \,] \\
&= [\, \tau_G ,\ \chi(\{ E(M) / E_\tau(M) \mid M \in R\text{-Mod} \}) \,]
\end{aligned}
$$

tenemos que $\tau_G = \tau_G \wedge \tau_\iota \leq \tau_\iota$

$\therefore$ τ_G es de tipo simple.

De hecho, si tomamos ahora la clase de τ_ι se observa que $\tau_\iota \leq \tau_G$ dándose así la igualdad.

Ahora tomamos la relación ${}_{\mathbf{F}_{\tau_{sp}}}\!\approx$ donde se ha escogido $\mathcal{A} = \mathbf{F}_{\tau_{sp}}$ donde τ_{sp}, como sabemos, es cohereditaria. Entonces $\mathbf{F}_{\tau_{sp}}$ es cerrada bajo submódulos y cocientes. Por lo tanto $[\tau]_{{}_{\mathbf{F}_{\tau_{sp}}}\approx} = [\, \xi(\mathbf{T}_{\tau} \cap \mathbf{F}_{\tau_{sp}}),\ \tau \vee \tau_{sp}\,]$.

Tomamos la clase de $\tau_{\flat}$ que es $[\ \xi(\flat_s),\ \tau_{\flat} \vee \tau_{sp}\ ] = [\ \tau_{ss}, \tau_{\flat}\ ]$ y es la misma que la de τ_G. Además $[\tau_{sp}]_{{}_{\mathbf{F}_{\tau_{sp}}}\approx} = [\,\xi,\ \tau_{sp}\,]$ y $[\overline{\tau_G}]_{{}_{\mathbf{F}_{\tau_{sp}}}\approx} = [\ \overline{\tau_G}, \chi\,]$.

Como $[\tau_{\flat}]_{{}_{\flat}\approx} = [\ \tau_{\flat}, \chi\ ]$, $[\tau_{ss}]_{{}_{\flat}\approx} = [\ \tau_{ss},\ \tau_{ss}^{\perp\perp}] = [\ \tau_{ss},\ \overline{\tau_G}\ ]$ y $\tau_{ss} \leq \tau_G \leq \overline{\tau_G}$ concluímos que $\tau_{ss} = \tau_{\flat}$ es decir todos los módulos simples son singulares, y por lo tanto $\chi = \overline{\tau_G}$ y $\xi = \tau_{sp}$.

Ahora, si suponemos que $\tau_G = \tau_{\flat}$ entonces como:

$$[\tau]_{{}_{\flat}\approx} = [\,\tau \wedge \tau_{\flat},\ \tau^{\perp\perp}\,] \quad \text{y}$$

$$[\tau]_{\approx_{\mathbf{T}}} = [\,\tau \wedge \tau_G,\ \chi(\{E(M)/E_{\tau}(M) \mid M \in R\text{-Mod}\})\,]$$

se tiene que $\tau \wedge \tau_{\flat} = \tau \wedge \tau_G$.

$$\therefore\ \tau\ {}_{\flat}\!\approx \sigma \Leftrightarrow \tau \wedge \tau_{\flat} = \sigma \wedge \tau_{\flat} \Leftrightarrow \tau \wedge \tau_G = \sigma \wedge \tau_G \Leftrightarrow \tau \approx_{\mathbf{T}} \sigma.$$

■

Proposición 3.49 : Las siguientes afirmaciones son equivalentes para τ_G :

(i) τ_G es Jansiana.
(ii) $[\tau]_{\approx_{\mathbf{T}}} = [\ \tau \wedge \tau_G,\ \tau \vee \tau_{sp}\ ]$ $\quad \forall\, \tau \in R\text{-tors}$.

Demostración:
(i $\Rightarrow$ ii) Si τ_G es Jansiana entonces $\tau_G = \overline{\tau_G} = \tau_{sp}^{\perp}$. Como $\tau_{sp}^{\perp}$ es cohereditaria sabemos que $\mathbf{T}_{\tau_{sp}^{\perp}} = \mathbf{F}_{\tau_{sp}}$ Así tenemos que $\mathbf{T}_{\tau_G} = \mathbf{F}_{\tau_{sp}}$.

Por los resultados anteriores tenemos que :

$$[\tau]_{\approx_1} = [\tau]_{1_{\tau_G}^{\approx}} = [\tau]_{t_{\tau_{sp}}^{\approx}} = [\tau \wedge \tau_{sp}^{\perp}, \tau \vee \tau_{sp}] = [\tau \wedge \tau_G, \tau \vee \tau_{sp}].$$

(ii $\Rightarrow$ i) Por hipótesis sabemos que:

$$\begin{aligned} [\chi]_{\approx_1} &= [\chi \wedge \tau_G, \chi \vee \tau_{sp}] = [\tau_G, \chi] \\ &= [\tau_G]_{\approx_1} = [\tau_G \wedge \tau_G, \tau_G \vee \tau_{sp}] \end{aligned}$$

$$\therefore \ \tau_G \vee \tau_{sp} = \chi$$

Y como $\tau_G \wedge \tau_{sp} = \xi$ ya que $\tau_G^{\perp} = \tau_{sp}$, tenemos que $\tau_G = \tau_{sp}^{\perp} = \overline{\tau_G}$.

$\therefore$ τ_G es Jansiana.

■

• Un anillo se llama PF-izquierdo si satisface alguna de las siguientes condiciones equivalentes: (ver [3] y [6]).

i) ${}_RR$ es un cogenerador y sólo hay un número finito de clases de isomorfismo de R-módulos simples.

ii) ${}_RR$ es inyectivo y finitamente cogenerado.

iii) ${}_RR$ es inyectivo, semiperfecto y tiene zoclo izquierdo esencial.

iv) ${}_RR$ es un cogenerador inyectivo.

v) ${}_RR$ es inyectivo y tiene zoclo izquierdo esencial finitamente generado.

■

Proposición 3.50 : Si R es un anillo PF-izquierdo entonces:

$$\chi(\mathrm{Rad}(R))_{\ll} \approx \xi \quad \text{y} \quad [\xi]_{\ll\approx} = [\xi, \chi(\mathrm{Rad}(R))].$$

Demostración:

Si ${}_RR$ es un cogenerador inyectivo y $N \ll M$ entonces existe $f : M \longrightarrow R^X$ mono, para algún conjunto X, por lo tanto tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\ll} & M \\ & & {}^{mono}\downarrow f/_N & & f\downarrow^{mono} \\ 0 & \longrightarrow & f(N) & \xrightarrow{\ll} & R^X \end{array}$$

Como $f(N) \ll R^X$, se tiene que $f(N) \subseteq \mathrm{Rad}(R^X) \subseteq ((\mathrm{Rad}(R))^X$.

De aquí, se tiene que $N \in \mathbf{F}_{\chi(Rad(R))}$. Por lo tanto $\chi\,(\,\mathrm{Rad}\,(\,R\,)) \leq \chi\,(\,\text{R-Suf}\,)$.

Por otra parte, $\mathrm{Rad}\,(\,R\,) \in$ R-Suf, así que $\chi\,(\,\mathrm{Rad}\,(\,R\,)) = \chi\,(\,\text{R-Suf}\,)$ que es igual a $\vee\,[\xi]_{\ll\approx}$. La conclusión se sigue de la proposición 3.10 (ii).

■

Proposición 3.51 : Sea R un anillo PF-izquierdo, y τ una teoría de torsión Jansiana, entonces:

$$[\tau]_{\ll\approx} = [\ \overline{\xi(t_\tau(Rad(R)))}\ ,\ \chi\,(\,\mathrm{Rad}\,(\,R\,)\,/\,t_\tau\,(\,\mathrm{Rad}\,(\,R\,)))\ ]$$

Demostración:

Primero demostramos que:

$$\xi\,(\,t_\tau\,(\,\mathrm{Rad}\,(\,R\,)))\ {}_{\ll}\!\approx\ \tau\ {}_{\ll}\!\approx\ \chi\,(\,\mathrm{Rad}\,(\,R\,)\,/\,t_\tau\,(\,\mathrm{Rad}\,(\,R\,)))\qquad (\,1\,).$$

Supongamos que $N \ll M$, queremos demostrar que:

$$t_{\overline{\xi(t_\tau(Rad(R)))}}\,(\,N\,) = t_\tau\,(\,N\,).$$

Como R es un cogenerador inyectivo, existe un monomorfismo de M en R^X para algún conjunto X. Como $N \ll M$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\ll"] \arrow[d, "f|_N"', "mono"] & M \arrow[d, "f", "mono"'] \\ Rad(R^X) \arrow[r, "\subseteq"] & R^X \end{tikzcd}\ .$$

Y como τ es Jansiana entonces t_τ conmuta con productos directos. Entonces tenemos el siguiente diagrama:

$$t_\tau(N) \xrightarrow{mono} t_\tau(Rad(R^X)) \xrightarrow{\subseteq} t_\tau(R^X)$$

$$\downarrow\subseteq$$

$$(t_\tau(Rad(R)))^X \in \mathbf{T}_{\overline{\xi(t_\tau(Rad(R)))}}.$$

Debido a que, como $N \in$ R-Suf de τ-torsión, existe $N \xrightarrow{\subseteq} R^X$, por lo tanto $N \xrightarrow{\subseteq} \text{Rad}(R^X) = \text{Rad}(R) \bullet R^X \xrightarrow{\subseteq} (Rad(R))^X \in \mathbf{T}_{\overline{\xi(Rad(R))}}$.

$$\therefore\ N \xrightarrow{\subseteq} (t_\tau(Rad(R)))^X.$$

Entonces $t_\tau(N) \subseteq t_{\overline{\xi(t_\tau(Rad(R)))}}(N) \subseteq t_\tau(N)$.

Por lo tanto $\overline{\xi(t_\tau(Rad(R)))}\ _{\ll}\approx \tau$.

Ahora demostraremos que $N \ll M \Rightarrow (t_\tau(N) = t_{\chi(Rad(R)/t_\tau(Rad(R)))}(N))$.

Como antes, tenemos el monomorfismo $t_\tau(N) \xrightarrow{f/_{t_\tau(N)}} (t_\tau(Rad(R)))^X$, el cual induce el monomorfismo $N/t_\tau(N) \longrightarrow (Rad(R)/t_\tau(Rad(R)))^X$. Por lo tanto $N/t_\tau(N) \in \mathbf{F}_{\chi(Rad(R)/t_\tau(Rad(R)))}$, entonces:

$$t_{\chi(Rad(R)/t_\tau(Rad(R)))}(N) \subseteq t_\tau(N).$$

Por otra parte, tenemos que $\tau \leq \chi(\text{Rad}(R)/t_\tau(\text{Rad}(R)))$. Por lo tanto se ha probado (**1**).

Ahora bién, sabemos que:

$[\tau]_{\ll\approx} = [\ \xi\{t_\tau(N) \mid N \ll M \text{ p.a } M\},\ \chi\{N/t_\tau(N) \mid N \ll M \text{ p.a } M\}]$

Por (**1**) tenemos que $\xi\{t_\tau(N) \mid N \ll M \text{ p.a } M\} \leq \xi(t_\tau(\text{Rad}(R)))$. Pero como $\text{Rad}(R) \ll R$ entonces $t_\tau(\text{Rad}(R))$ es un generador de $\xi\{t_\tau(N) \mid N \ll M \text{ p.a } M\}$.

Por lo tanto $\xi\{ t_\tau(N) \mid N << M \text{ p.a } M \} = \xi(t_\tau(\text{Rad}(R)))$.

De la misma manera, de (1), y como $\text{Rad}(R)/t_\tau(\text{Rad}(R))$ es uno de los cogeneradores de $\chi\{ N/t_\tau(N) \mid N << M \text{ p.a } M \}$.

Obtenemos que:

$$\chi\{ N/t_\tau(N) \mid N << M \text{ p.a } M \} = \chi(\text{Rad}(R)/t_\tau(\text{Rad}(R))).$$

■

Corolario 3.52 : Sea R un anillo perfecto derecho y cogenerador inyectivo, y sea τ una teoría de torsión, entonces:

$$[\tau]_{_{<<}\approx} = [\,\xi(t_\tau(\text{Rad}(R))), \chi(\text{Rad}(R)/t_\tau(\text{Rad}(R)))\,].$$

Y por lo tanto ${}_{<<}\approx \, = \, \approx_{\mathfrak{f}}$.

Demostración:

Se tiene del hecho de que si R es perfecto derecho entonces toda teoría de torsión es Jansiana (y semisimple) [8], y de la proposición anterior, ya que, en este caso, $\xi(t_\tau(\text{Rad}(R))) = \overline{\xi(t_\tau(Rad(R)))}$.

■

Las siguientes dos proposiciones se encuentran en [12] y omitiremos la demostración en este trabajo.

Proposición 3.53 : Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un anillo perfecto derecho R:

i) $Soc_p(\text{Rad}(R)) = 0$.

ii) Todo R-módulo simple proyectivo es inyectivo.

iii) $\tau_G \in [\chi]_{\approx_f}$.

■

Proposición 3.54 : Para R, anillo perfecto derecho, son equivalentes:

i) τ_G es el menor elemento de $[\chi]_{\approx_f}$.

ii) La clase de los R-módulos simples inyectivos es la misma que la clase de los R-módulos simples proyectivos.

■

- Decimos que un anillo artiniano derecho e izquierdo R es un anillo QF en el caso de que sea auto-inyectivo derecho e izquierdo.

De la proposición anterior se desprende el siguiente:

Corolario 3.55 : Si R es un anillo QF, entonces τ_G es el menor elemento de $[\chi]_{\approx_f}$, es decir $\tau_G = \xi(\text{Rad}(R))$.

Demostración:

Se tiene que R es perfecto derecho y la clase de los R-módulos inyectivos es la misma que la clase de los R-módulos proyectivos. Además $Soc_p(\text{Rad}(R)) = 0$. Si $S \leq \text{Rad}(R)$ fuera un R-módulo simple proyectivo, entonces S tendría que ser inyectivo y en consecuencia S sería un sumando directo de R. Por lo tanto $S = Re \leq \text{Rad}(R)$ con e un elemento idempotente, lo cual es imposible. Concluimos usando la proposición anterior.

■

Proposición 3.56 : Si R es un anillo QF, entonces $[\xi]_{\approx_f} = [\xi]_{\approx_\tau}$.

Demostración: Basta demostrar que $\tau_{sp} = \chi(\text{Rad}(R))$.

($\leq$) Supongamos que S es un R-módulo simple proyectivo y que $S \notin \mathbb{T}_{\chi(Rad(R))}$, entonces existe un monomorfismo $S \longrightarrow E(\text{Rad}(R))$ y por lo tanto un monomorfismo $S \longrightarrow \text{Rad}(R)$ con S un módulo inyectivo. Por lo tanto S es un sumando directo de Rad (R), que es imposible. Por lo tanto $\tau_{sp} \leq \chi(\text{Rad}(R))$.

($\geq$) Como R es artiniano izquierdo y por lo tanto semiartiniano se tiene que $\chi(\text{Rad}(R)) = \xi(\text{R-simp})$. Supongamos que $S \in$ R-simp es singular, entonces para toda $x \in S$ se tiene que $(0 : x) \leq_{e} R$. En particular se tiene que, $S \subseteq (0 : x)$ $\forall x \in S$. Por lo tanto tenemos que $S^2 = 0$. De lo cual se sigue que $S \subseteq \text{Rad}(R)$, lo que implica que $S \in \mathbb{T}_{\chi(Rad(R))}$ que es una contradicción. Por lo tanto S es proyectivo para todo $S \in$ R-simp.

■

Proposición 3.57: Si R es un anillo QF, entonces $\approx_f = \approx_t$.

Demostración: Sea $\tau \in$ R-tors. Demostraremos que:

$$\tau \wedge \tau_G = \xi(t_\tau(\text{Rad}(R)))$$

Como $t_\tau(\text{Rad}(R)) \in \mathbb{T}_\tau$ y $\tau_G = \xi(\text{Rad}(R))$ tenemos que el ínfimo de $[\tau]_{\approx_f}$ (que denotamos por τ_*) que es $\xi(t_\tau(\text{Rad}(R)))$, es menor o igual que $\tau \wedge \tau_G$.

Supongamos que la inclusión es propia. Entonces existe $M \in \mathbb{T}_{\tau \wedge \tau_G}$ tal que $M \notin \mathbb{T}_{\tau_*}$.

Podemos suponer además que $M \in \mathbb{T}_{\tau \wedge \tau_G} \cap \mathbb{F}_{\tau_*} = \mathbb{T}_\tau \cap \mathbb{T}_{\tau_G} \cap \mathbb{F}_{\tau_*}$. Como R es semiartiniano tenemos que $\tau \wedge \tau_G = \xi\{ {}_RS \mid {}_RS$ es un módulo simple singular y de τ-torsión $\}$.

Entonces $\exists\ S \xrightarrow{\subseteq} M$ tal que $M \in \mathbf{T}_\tau \cap \mathbf{T}_{\tau_G} \cap \mathbf{F}_{\tau_\bullet}$ con S un R-módulo simple no proyectivo. Como R es un cogenerador de R-Mod, obtenemos que $S \cong T \xrightarrow{\subseteq} R$.

Ahora bien, ${}_R T$ singular implica que $T = 0$ y por lo tanto $T \subseteq \mathrm{Rad}(R)$. Debido a que $T \in \mathbf{T}_\tau$, tenemos que $T \subseteq t_\tau(\mathrm{Rad}(R))$. En consecuencia $T \in \mathbf{T}_{\xi(t_\tau(Rad(R)))} = \mathbf{T}_{\tau_\bullet}$, lo que contradice que $0 \neq T \in \mathbf{F}_{\tau_\bullet}$.

Por lo tanto $\xi(t_\tau(\mathrm{Rad}(R))) = \mathbf{T}_{\tau_\bullet}$.

Así, tenemos las siguientes equivalencias: $\sigma \approx_1 \tau \Leftrightarrow \sigma \wedge \tau_G = \tau \wedge \tau_G \Leftrightarrow \xi(t_\sigma(\mathrm{Rad}(R))) = \xi(t_\tau(\mathrm{Rad}(R))) \Leftrightarrow \sigma_\bullet = \tau_\bullet \Leftrightarrow \sigma \approx_f \tau$

$\therefore \approx_f = \approx_1$.

∎

Como consecuencia de las proposiciones anteriores tenemos el siguiente:

Corolario 3.58: Si R es un anillo QF, entonces $\approx_f = \approx_1 = {}_{<\cdot}\approx$.

∎

• ***Ejemplo 3.59***: En este ejemplo, [8], veremos que el recíproco del corolario anterior no es cierto en general.

Tomamos el conjunto de los números racionales no negativos $\mathbb{Q}^+$ con el orden usual $\leq$. Sea F un campo, denotemos por R_2 al conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{Q}^+ \to F$ tal que el soporte, $\mathrm{Sop}\, f = \{ r \in \mathbb{Q}^+ \mid f(r) \neq 0 \}$, está incluido en un subconjunto bien ordenado de $\mathbb{Q}^+$ que no tiene puntos límite finitos, con la adición y multiplicación definidas como sigue:

$$(f_1 + f_2)(r) = f_1(r) + f_2(r) \qquad \text{y}$$

$$(f_1 * f_2)(r) = \sum_{s+t=r} f_1(s) f_2(t) \qquad \text{respectivamente.}$$

Entonces $\mathbf{R}_2$ con estas operaciones es un anillo conmutativo. Ahora, para toda $f \in \mathbf{R}_2$, denotamos por r_f al menor racional no negativo tal que $f(r_f) \neq 0$. Además, para cada $t \in \mathbb{Q}^+$, denotamos por δ_t a la función en $\mathbf{R}_2$ definida por: $\delta_t (r) = \begin{cases} 1 & r = t \\ 0 & r \neq t \end{cases}$.

En seguida daremos una lista de algunas propiedades de este anillo:

1) δ_0 es el elemento unitario de $\mathbf{R}_2$.

2) Para toda $f \in \mathbf{R}_2$ se tiene que $f = \delta_{r_f} * \bar{f}$, donde $\bar{f} (r) = f(r + r_f)$.

3) Si $\bar{f} \in \mathbf{R}_2$ es tal que $r_{\bar{f}} = 0$, entonces existe $\bar{g} \in \mathbf{R}_2$ que satisface:

$$\bar{f} * \bar{g} = \delta_0.$$

Y en consecuencia se tiene que:

$$f \in \mathbf{R}_2 \text{ es una unidad en } \mathbf{R}_2 \text{ si y sólo si } r_f = 0 .$$

4) De lo anterior se desprende que: $f = \delta_{r_f} * \bar{f}$, donde $\bar{f}$ es una unidad en $\mathbf{R}_2$.

5) Para cada $r \in \mathbb{Q}^+$, existen dos ideales:

$$\bar{I}_r = \{ f \in \mathbf{R}_2 \mid r_f \geq r \}$$

$$I_r = \{ f \in \mathbf{R}_2 \mid r_f > r \}$$

Y todos los ideales de $\mathbf{R}_2$ son de esta forma.

6) Notemos además que $I_r \subseteq \bar{I}_r$ y que si $r_1 < r_2$ entonces $\bar{I}_{r_2} \subseteq I_{r_1}$ por lo que los ideales de R_2 forman una cadena. En particular $\bar{I}_0 = R_2$ e $I_0 = \mathrm{Rad}(R_2)$.

7) No hay divisores de cero en R_2, por lo que R_2 es un dominio entero.

8) Si $f \in \mathrm{Rad}(R_2)$, entonces $r_f > 0$ y obviamente,

$$f = \delta_{\frac{1}{2}r_f} * g \quad \text{donde } g(r) = f(r + 1/2\, r_f) \text{ para } r \in \mathbb{Q}^+;$$

y evidentemente $\delta_{\frac{1}{2}r_f}$ y g pertenecen a $\mathrm{Rad}(R_2)$.

Por lo tanto $\mathrm{Rad}(R_2)$ es idempotente.

Finalmente, dado un número racional positivo q, definimos $R_{2q} = R_2/I_q$, entonces $\mathrm{Rad}(R_{2q}) \cong I_0/I_q$ y satisface otra vez que:

$$(\mathrm{Rad}(R_{2q}))^2 = \mathrm{Rad}(R_{2q}).$$

Pero cualquier otro ideal propio (que es isomorfo a I_r/I_q ó $\bar{I}_r/I_q$ para $r \leq q$) es nilpotente. (Pues, el producto de ideales, se calcula simplemente sumando los racionales que los generan; $I_r \cdot I_s = I_{r+s}$).

Por lo tanto, si un ideal propio I de R_{2q}, que no sea $\mathrm{Rad}(R_{2q})$, pertenece a un filtro de Gabriel $\mathscr{F}$ de R_{2q}, entonces I^n pertenece a tal filtro para toda n natural. Por lo tanto (0) estaría también en $\mathscr{F}$ y $\mathscr{F}$ sería el mayor filtro de Gabriel.

En consecuencia sólo hay tres teorías de torsión en R_{2q}-tors. Son las correspondientes a los filtros de Gabriel mas grande, $\mathscr{F}_\chi$, al mas pequeño, $\mathscr{F}_\xi$, y a $\mathscr{F} = \{R_{2q}, \mathrm{Rad}(R_{2q})\}$ que corresponde a τ_S. Además, todas ellas son cerradas bajo productos directos por lo que son Jansianas.

• Ahora veamos las particiones de R_{2q}-tors que se obtienen:

1) R_{2q}-tors $/\approx_\tau$:

En este caso la clase de equivalencia de τ está dada por:

$[\,\tau\,] = [\,\tau \wedge \tau_G\,,\ \tau \vee \tau_{sp}\,]$, pero como el único simple que hay es singular, tenemos que $\tau_{sp} = \xi$, por lo tanto $[\,\tau\,] = [\,\tau \wedge \tau_G\,,\ \tau\,]$. Además tenemos que $\tau_G = \overline{\tau_G} = \tau_{sp}{}^{\perp} = \chi$. Por lo tanto $[\,\chi\,] = \{\,\chi\,\}$, $[\,\tau_\delta\,] = \{\,\tau_\delta\,\}$ y $[\,\xi\,] = \{\,\xi\,\}$.

2) $R_{2q} - tors\ /\approx_F$:

Aquí $[\,\tau\,] = [\,\xi\,\{\,t_\tau(\,\mathrm{Rad}\,(\,R_{2q})\,)\,\}\,,\ \chi\,(\,\mathrm{Rad}\,(\,R_{2q})\,/\,t_\tau(\,\mathrm{Rad}\,(\,R_{2q})\,)\,\}\,]$ entonces como $\chi\,(\,\mathrm{Rad}\,(\,R_{2q})\,) = \xi$ tenemos que $[\,\xi\,] = \{\,\xi\,\}$.

Por otro lado se tiene que $\xi\,(\,\mathrm{Rad}\,(\,R_{2q})\,) = \chi$, de modo que $[\,\chi\,] = \{\,\chi\,\}$ y $[\,\tau_\delta\,] = \{\,\tau_\delta\,\}$.

3) $R_{2q} - tors\ /\ {}_{\ll}\!\approx$:

Por la observación 3.28 se tiene que aquí también las clases de equivalencia son puntos aislados.

Por lo tanto se tiene que las tres relaciones de equivalencia coinciden pero R_{2q} no es un anillo QF ya que R_{2q} no es semiartiniano; $\tau_\delta \neq \chi$.

4) $R_{2q} - tors\ /\ {}_{\delta}\!\approx$: Como $\tau_\delta \neq \chi$, sabemos que las clases de equivalencia quedan del siguiente modo: $[\,\xi\,] = \{\,\xi\,\}$, $[\,\tau_\delta\,] = [\,\chi\,] = [\,\tau_\delta\,,\ \chi\,]$.

Así R_{2q} no es perfecto derecho.

■

- Decimos que un anillo ${}_{R}R$ es un anillo *bueno* si:

$$\operatorname{Rad}(M) = \operatorname{Rad}(R) \cdot M \quad \forall\, {}_{R}M.$$

Por [6, Cor. 9.7.3, Teo. 11.1.7] tenemos, por ejemplo, que un anillo semilocal es bueno y en consecuencia un anillo semiperfecto también lo es.

Lema 3.60 : Si R es un anillo bueno entonces $[\chi]_{\ll\approx} = [\,\xi(\operatorname{Rad}(R)), \chi\,]$.

Demostración: Tenemos que son equivalentes las siguientes proposiciones:

$$\tau \in [\chi]_{\ll\approx} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} (N \ll M \Rightarrow N \in \mathbb{T}_\tau) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \operatorname{Rad}(M) \in \mathbb{T}_\tau \ \forall_R M$$

$$\overset{(3)}{\Leftrightarrow} \operatorname{Rad}(R) \in \mathbb{T}_\tau \overset{(4)}{\Leftrightarrow} \xi(\operatorname{Rad}(R)) \leq \tau \overset{(5)}{\Leftrightarrow} \tau \in [\,\xi(\operatorname{Rad}(R)), \chi\,].$$

Donde (1) se tiene por la proposición 3.11, (2), (4), y (5) son claras, al igual que la ida de (3). El regreso de (3) se tiene de que $\operatorname{Rad}(M) = \operatorname{Rad}(R) \cdot M$.

■

Proposición 3.61 : Para un anillo semiperfecto R son equivalentes:

(i) Todo R-módulo es τ-codivisible.

(ii) Todo R-módulo libre de τ-torsión es semisimple e inyectivo.

(iii) $\operatorname{Rad}(M) \in \mathbb{T}_\tau \quad \forall\, {}_{R}M$.

(iv) $\operatorname{Rad}(R) \in \mathbb{T}_\tau$.

(v) $\tau \in [\chi]_{\approx_f}$.

(vi) $\tau \in [\chi]_{\ll\approx}$.

Demostración:

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iv) $\Leftrightarrow$ (v) por la observación 3.25, (v) $\Leftrightarrow$ (vi) por el lema anterior, (iii) $\Rightarrow$ (iv) es claro, y (iv) $\Rightarrow$ (iii) se debe a que, como R es semiperfecto, entonces $\mathrm{Rad}(M) = \mathrm{Rad}(R) \cdot M$ y como $\mathrm{Rad}(R) \in \mathbf{T}_r$, entonces $\mathrm{Rad}(M) \in \mathbf{T}_r$.

■

Observación 3.62 : Si R es un anillo PF-izquierdo entonces $soc_p(\mathrm{Rad}(R)) = 0$ (soc_p denota el preradical que asocia a cada R-módulo izquierdo su zoclo proyectivo).

Demostración: Supongamos que $soc_p(\mathrm{Rad}(R)) \neq 0$, entonces habría un submódulo simple proyectivo S de Rad (R). Como S es isomorfo a un sumando directo de ${}_RR$, porque R es PF, entonces S es inyectivo. Por lo tanto S es un sumando directo de ${}_RR$. El complemento de S es un ideal izquierdo máximo de R y por lo tanto S no puede estar incluido en el radical de R, lo que es una contradicción.

■

Lema 3.63 : Sea ${}_RS$ simple proyectivo, entonces existe un monomorfismo no cero de ${}_RS$ a Rad (R) ó ${}_RS \in \mathbf{F}_{\xi(Rad(R))}$.

Demostración: Sea ${}_RS$ simple proyectivo y supongamos que ${}_RS \notin \mathbf{F}_{\xi(Rad(R))}$ entonces ${}_RS \in \mathbf{T}_{\xi(Rad(R))}$. Por lo tanto existe $\mathrm{Rad}(R) \xrightarrow{f \neq 0} E(S)$. Entonces tenemos que $Rx \xrightarrow{\neq 0} S$ para alguna $x \in \mathrm{Rad}(R)$. Como S es simple proyectivo, entonces $Rx \xrightarrow{\neq 0} S$ se escinde, y por lo tanto existe un monomorfismo $g : S \xrightarrow{\neq 0} soc_p(Rx)$, por lo tanto:

$$S \xrightarrow{g} soc_p(Rx) \xrightarrow{\subseteq} soc_p(\mathrm{Rad}(R)).$$

■

Proposición 3.64 : Las siguientes proposiciones son equivalentes para ${}_R R$:

(i) $soc_p(\text{Rad}(R)) = 0$.

(ii) $\xi(\text{Rad}(R)) \leq \chi(soc_p(R)) = \tau_{sp}^{\perp} = \bar{\tau}_G$.

Demostración:

(i $\Rightarrow$ ii) Si ${}_R S$ es proyectivo, entonces tenemos que ${}_R S \in \mathbf{F}_{\xi(Rad(R))}$ por el lema anterior y porque estamos suponiendo que $soc_p(\text{Rad}(R)) = 0$. Por lo tanto $\xi(\text{Rad}(R)) \leq \chi(soc_p(R))$. Además $\chi(soc_p(R)) = \tau_{sp}^{\perp} = \bar{\tau}_G$.

(ii $\Rightarrow$ i) Si ${}_R S$ es simple proyectivo, entonces ${}_R S \in \mathbf{F}_{\bar{\tau}_G} \subseteq \mathbf{F}_{\xi(Rad(R))}$. Por lo tanto $\text{Hom}(\text{Rad}(R)), E(S)) = 0$, por lo tanto ${}_R S$ no puede ser isomorfo a un submódulo del radical de R. Así $soc_p(\text{Rad}(R)) = 0$.

■

Corolario 3.65 : Las siguientes proposiciones son equivalentes para un anillo R con zoclo izquierdo esencial: (Por ejemplo si R es semiartiniano izquierdo, si R es PF-izquierdo ó si R es perfecto derecho).

(i) $soc_p(\text{Rad}(R)) = 0$.

(ii) $\xi(\text{Rad}(R)) \leq \tau_G$.

Demostración:

Se sigue de la proposición anterior, simplemente observando que, debido a que el zoclo es esencial, entonces τ_G es jansiana, proposición 3.33, y por lo tanto $\tau_G = \bar{\tau}_G$.

■

• Decimos que una teoría de torsión τ se *escinde* si $t_\tau(M)$ es un sumando directo de M, para cada R-módulo M. Si e es un elemento idempotente central de R, y hacemos $t(M) = Me$ para todo R-módulo M, entonces obtenemos una teoría de torsión σ de R-Mod que se escinde con:

$$\mathbb{T}_{\sigma} = \{ M \mid Me = M \} \quad \text{y} \quad \mathbb{F}_{\sigma} = \{ M \mid Me = 0 \}.$$

Una teoría de torsión que se obtiene de esta manera con un elemento idempotente central e de R, se dice que se *escinde centralmente*.

Proposición 3.66 : Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un anillo semiperfecto con zoclo izquierdo esencial: (Por ejemplo si R es perfecto derecho ó PF-izquierdo)

(i) $soc_p(\text{Rad}(R)) = 0$.

(ii) $\tau_G \in [\, \xi(\text{Rad}(R)), \chi \,] = [\chi]_{\ll\approx} = [\chi]_{\approx_F}$.

(iii) $\text{Rad}(M) \in \mathbb{T}_{\tau_0}$ para cada $_RM$.

(iv) $\text{Rad}(R) \in \mathbb{T}_{\tau_0}$.

(v) $[\tau]_{\approx_T} \subseteq [\tau]_{\approx_F}$ Para cada $\tau \in$ R-tors.

(vi) τ_{sp} se escinde centralmente.

(vii) τ_{σ} se escinde centralmente.

(viii) Todo R-módulo semisimple proyectivo M, es inyectivo.

(ix) Todo R-módulo simple proyectivo S, es decir que esté en $\mathbb{F}_{\tau_0}$, es inyectivo.

Demostración:

(i $\Leftrightarrow$ ii) Por el corolario anterior, (i) es equivalente con:

$$\tau_G \in [\, \xi(\text{Rad}(R)), \chi \,].$$

Además, $[\chi]_{\approx_f} = [\chi]_{\ll\approx}$ por la proposición 3.61, y

$$[\,\xi(\mathrm{Rad}(R)), \chi\,] = [\chi]_{\approx_f} \text{ por } [9, \text{Teo. } 2.8].$$

(ii $\Leftrightarrow$ iv) Es claro.

(iii $\Rightarrow$ iv) Es obvio.

(iv $\Rightarrow$ iii) Se tiene porque $\mathrm{Rad}(M) = \mathrm{Rad}(R) \cdot M$, para cada ${}_R M$.

(iv $\Rightarrow$ v) Como el zoclo de R es esencial, entonces τ_G es jansiana. Entonces por la proposición 3.49 tenemos que $[\tau]_{\approx_T} = [\,\tau \wedge \tau_G, \tau \vee \tau_{sp}\,]$ $\forall\, \tau \in$ R-tors.

Por otro lado, tenemos de la proposición 3.24 que:

$$[\tau]_{\approx_f} = [\,\xi(t_\tau(\mathrm{Rad}\,R)), \chi(\mathrm{Rad}(R)/t_\tau(\mathrm{Rad}(R)))\,].$$

Ahora, como estamos suponiendo que $\mathrm{Rad}(R) \in \mathbf{T}_{\tau_G}$, entonces:

$$\xi(t_\tau(\mathrm{Rad}\,R)) \leq \tau \wedge \tau_G .$$

También es claro que $\tau \leq \chi(\mathrm{Rad}(R)/t_\tau(\mathrm{Rad}(R)))$. Demostraremos pues que, $\tau_{sp} \leq \chi(\mathrm{Rad}(R)/t_\tau(\mathrm{Rad}(R)))$.

Queremos demostrar que, $\mathrm{Hom}(S, E(\mathrm{Rad}(R)/t_\tau(\mathrm{Rad}(R)))) = 0$, para un R-módulo simple proyectivo S.

Si $S \xrightarrow{0 \neq f} E(\mathrm{Rad}(R)/t_\tau(\mathrm{Rad}(R)))$, entonces podemos tomar un monomorfismo $0 \neq f$ de S a $\mathrm{Rad}(R)/t_\tau(\mathrm{Rad}(R))$, y entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & S \arrow[dl, "\overline{f}"'] \arrow[d, "f"] & \\
\mathrm{Rad}(R) \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{Rad}(R)/t_\tau(\mathrm{Rad}(R)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

que contradice el hecho de que $soc_p(\text{Rad}(R)) = 0$.

Por lo tanto, tenemos que $\tau \vee \tau_{sp} \leq \chi(\text{Rad}(R) / t_\tau(\text{Rad}(R)))$,

$$\therefore\ [\tau]_{\approx_I} \subseteq [\tau]_{\approx_F} \quad \text{para cada } \tau \in R\text{-tors.}$$

(v $\Rightarrow$ ii) Supongamos que $[\tau]_{\approx_I} \subseteq [\tau]_{\approx_F}$ para cada $\tau \in$ R-tors. En particular, $[\tau_0, \chi] = [\chi]_{\approx_I} \subseteq [\chi]_{\approx_F} = [\xi(\text{Rad}(R)), \chi]$.

(i $\Leftrightarrow$ vi) Por [12, Teo. 16].

(vi $\Leftrightarrow$ viii) Por [10, Cor. 2.15].

(vi $\Leftrightarrow$ vii) (vi) es equivalente a que $\overline{\tau_0}$ se escinda centralmente [10, Cor. 2.15]. Pero, en esta situación, $\overline{\tau_0} = \tau_0$ ya que $\text{soc}(R) \underset{es}{\leq} R$.

(viii $\Rightarrow$ ix) Es obvia.

(ix $\Rightarrow$ i) Si ${}_RS$ es un R-módulo simple proyectivo y ${}_RS \leq \text{Rad}(R)$, entonces ${}_RS$ es un sumando directo de R, ya que, por (ix), ${}_RS$ es inyectivo. Por lo tanto ${}_RS = Re$, con e un idempotente distinto de cero. Pero Rad (R) no incluye idempotentes distintos de cero.

$$\therefore\ soc_p(\text{Rad}(R)) = 0.$$

■

Proposición 3.67: Si R es un anillo PF-izquierdo (Por ejemplo si R es QF) entonces:

(i) Si $\tau \in$ R-tors es jansiana, entonces $[\tau]_{\approx_I} \subseteq [\tau]_{\approx_F} \subseteq [\tau]_{<<\approx}$. Además, $\tau \vee \tau_{sp} = \chi(t_{\tau_0}(R) / t_\tau(t_{\tau_0}(R)))$ y $\vee[\tau]_{\approx_F} = \vee[\tau]_{<<\approx}$.

(ii) Si $\tau \in$ R-tors es jansiana y estable, entonces:

$$\tau \vee \tau_{sp} = \chi(\operatorname{Rad}(R) / t_{\tau}(\operatorname{Rad}(R))$$

(iii) Si $\tau \in$ R-tors es cohereditaria, entonces $\tau \wedge \tau_G = \xi(t_{\tau}(\operatorname{Rad}(R)))$.

(iv) Si $\tau \in$ R-tors es semisimple, entonces $\tau \wedge \tau_G = \xi(t_{\tau}(\operatorname{Rad}(R)))$.

(v) Si $\tau \in$ R-tors es estable y cohereditaria (que, por [4, Prop. 39.3], es equivalente a que τ sea jansiana y se escinda centralmente), entonces:

$$[\tau]_{\approx_{\mathbf{T}}} = [\tau]_{\approx_{\mathbf{F}}} = [\tau]_{<<\approx} .$$

(vi) Si $\tau \in$ R-tors es estable, jansiana y semisimple, entonces:

$$[\tau]_{\approx_{\mathbf{T}}} = [\tau]_{\approx_{\mathbf{F}}} = [\tau]_{<<\approx} .$$

Demostración:

(i) De la proposición anterior y de la observación 3.62 se sigue que $[\tau]_{\approx_{\mathbf{T}}} \subseteq [\tau]_{\approx_{\mathbf{F}}}$ y de la proposición 3.51 se tiene que $[\tau]_{\approx_{\mathbf{F}}} \subseteq [\tau]_{<<\approx}$.

Ahora, $t_{\tau_G}(R) / t_{\tau}(t_{\tau_G}(R)) \in \mathbf{F}_{\tau} \cap \mathbf{F}_{\tau_{sp}} = \mathbf{F}_{\tau \vee \tau_{sp}}$, ya que $\mathbf{T}_{\tau_G} = \mathbf{F}_{\tau_{sp}}$.

$$\therefore \; \tau \vee \tau_{sp} \leq \chi(t_{\tau_G}(R) / t_{\tau}(t_{\tau_G}(R))) .$$

Recíprocamente, si $M \in \mathbf{F}_{\tau} \cap \mathbf{F}_{\tau_{sp}}$, como

$$\tau_{sp} = \chi(\operatorname{Rad}(R)) = \chi(t_{\tau_G}(R)) ,$$

entonces existe un monomorfismo $f : M \rightarrow (t_{\tau_G}(R))^X$, para algún conjunto X .

Este monomorfismo induce otro monomorfismo:

$$f' : M \rightarrow (t_{\tau_G}(R))^X / t_{\tau}((t_{\tau_G}(R))^X) .$$

Pero, como τ es jansiana, $t_\tau((t_{\tau_0}(R))^X) = (t_\tau(t_{\tau_0}(R)))^X$.

Por lo tanto, tenemos un monomorfismo:

$$M \longrightarrow (t_{\tau_0}(R)/t_\tau(t_{\tau_0}(R)))^X.$$

Es decir que M es libre de $\chi(t_{\tau_0}(R)/t_\tau(t_{\tau_0}(R)))$-torsión. De esto, obtenemos que:

$$\tau \vee \tau_{sp} \geq \chi(t_{\tau_0}(R)/t_\tau(t_{\tau_0}(R))).$$

(ii) Supongamos que τ es estable además de ser jansiana.

Como $\mathrm{Rad}(R) \leq t_{\tau_0}(R)$, tenemos un monomorfismo:

$$f: \mathrm{Rad}(R)/t_\tau(\mathrm{Rad}(R) \longrightarrow t_{\tau_0}(R)/t_\tau(t_{\tau_0}(R))$$

por lo tanto:

$$\tau \vee \tau_{sp} = \chi(t_{\tau_0}(R)/t_\tau(t_{\tau_0}(R))) \leq \chi(\mathrm{Rad}(R)/t_\tau(\mathrm{Rad}(R).$$

Por otro lado, como $t_{\tau_0}(R) = E(\mathrm{Rad}(R)) = E(\mathrm{soc}(R))$, entonces se tiene que

$$t_{\tau_0}(R)/t_\tau(t_{\tau_0}(R)) = E(\mathrm{Rad}(R))/t_\tau(E(\mathrm{Rad}(R)))$$

$$= E(\mathrm{Rad}(R)/E(t_\tau(\mathrm{Rad}(R))) \cong E(\Sigma\{S \leq Rad(R) \mid S \in \mathbf{F}_\tau\}).$$

Ahora, si $S \leq \mathrm{Rad}(R)$ y $S \in \mathbf{F}_\tau$ entonces S es isomorfo a un submódulo de $\mathrm{Rad}(R)/t_\tau(\mathrm{Rad}(R))$.

$\therefore$ S es libre de $\chi(\mathrm{Rad}(R)/t_\tau(\mathrm{Rad}(R)$-torsión.

En consecuencia $E(\sum\{S \leq Rad(R) \mid S \in \mathbf{F}_\tau\}) = t_{\tau_0}(R)/t_\tau(t_{\tau_0}(R))$ también es libre de χ (Rad (R) / t_τ (Rad (R)-torsión.

$$\therefore\ \chi(\mathrm{Rad}(R)/t_\tau(\mathrm{Rad}(R)) \leq \chi(t_{\tau_0}(R)/t_\tau(t_{\tau_0}(R))).$$

Entonces tenemos que $[\tau]_{\approx_T} \subseteq [\tau]_{\approx_F}$ y $\tau \vee \tau_{sp} = \chi(\mathrm{Rad}(R)/t_\tau(\mathrm{Rad}(R)))$.

(iii) Supongamos que τ es cohereditaria. Como Rad (R) $\in \mathbf{T}_{\tau_0}$ entonces t_τ (Rad (R)) $\in \mathbf{T}_{\tau\wedge\tau_0}$, entonces $\xi(t_\tau(\mathrm{Rad}(R))) \leq \tau \wedge \tau_G$.

Si la inclusión fuera propia, entonces existiría $0 \neq M \in \mathbf{T}_{\tau\wedge\tau_0} \cap \mathbf{T}_{\xi(t_\tau(Rad(R)))}$.

Como $\tau_G \in \xi$ (Rad (R)), entonces existe Rad (R) $\xrightarrow{0\neq f}$ E(M), pero E(M) $\in \mathbf{F}_{\xi(t_\tau(Rad(R)))}$, este morfismo induce:

$$\mathrm{Rad}(R)/t_\tau(\mathrm{Rad}(R)) \xrightarrow{0\neq \bar{f}} E(M).$$

Debido a que M es esencial en E(M) entonces $0 \neq M \cap \mathrm{Im}(\bar{f}) \in \mathbf{T}_\tau \cap \mathbf{F}_\tau$ lo cual es imposible, por lo tanto $\xi(t_\tau(\mathrm{Rad}(R))) = \tau \wedge \tau_G$.

(iv) Supongamos que τ es semisimple, entonces $\xi(t_\tau(\mathrm{Rad}(R))) \leq \tau \wedge \tau_G$.

Si $\mathcal{F}$ denota a la familia de todos los R-módulos simples que generan a τ, entonces es inmediato que $\tau \wedge \tau_G = \xi(\{S \mid S \in \mathcal{F} \cap \mathbf{T}_{\tau_0}\})$. Si $S \in \mathcal{F} \cap \mathbf{T}_{\tau_0}$ entonces S es, debido a que R es un cogenerador inyectivo, isomorfo a un ideal izquierdo mínimo A de R. Como A es un ideal simple singular, entonces $A^2 = 0$, por lo tanto $A \leq$ Rad (R).

Como $A \in \mathbf{T}_\tau$, entonces $S \cong A \leq t_\tau$ (Rad (R)).

$$\therefore\ \xi(t_\tau(\mathrm{Rad}(R))) \geq \tau \wedge \tau_G.$$

(v) $\tau \in$ R-tors es estable y cohereditaria $\Leftrightarrow$ τ es jansiana y se escinde centralmente [17, Teo. 3]. Entonces (v) se sigue de (ii) y (iii), porque τ es estable, jansiana y cohereditaria.

(vi) Se sigue de (ii) y (iv).

■

Proposición 3.68 : Si R es un anillo perfecto derecho y cogenerador inyectivo izquierdo, entonces $\approx_f \; = \approx_T = {}_{\ll}\approx$.

Demostración: $[\tau]_{\approx_f} = [\tau]_{{}_{\ll}\approx}$ por el corolario 3.52.

Por (i) de la proposición anterior, tenemos que $[\tau]_{\approx_T} \subseteq [\tau]_{\approx_f}$ $\forall\, \tau \in$ R-tors. Pero por (iv) de la proposición anterior, se tiene $\tau \wedge \tau_G = \xi(\, t_\tau(\mathrm{Rad}(R)))$ $\forall\, \tau \in$ R-tors.

$$\therefore\; \sigma \in [\tau]_{\approx_f} \Rightarrow [\tau]_{\approx_f} = [\sigma]_{\approx_f} \Rightarrow \xi(\, t_\tau(\mathrm{Rad}(R))) = \wedge\, [\tau]_{\approx_f}$$

$$= \xi(\, t_\sigma(\mathrm{Rad}(R))) \Rightarrow \tau \wedge \tau_G = \sigma \wedge \tau_G \;\Rightarrow\; \sigma \approx_T \tau \;\Rightarrow\; \sigma \in [\tau]_{\approx_T} .$$

Por lo tanto $[\tau]_{\approx_T} = [\tau]_{\approx_f}$ $\forall\, \tau \in$ R-tors. Así $\approx_f \; = \approx_T = {}_{\ll}\approx$.

■

Lema 3.69 : Si $\approx_T = {}_{\ll}\approx$ entonces la clase de los R-módulos simples inyectivos es la misma que la clase de los R-módulos simples proyectivos .

Demostración: Si S es un R-módulo simple inyectivo, entonces no es superfluo. Como $[\chi]_{{}_{\ll}\approx} = [\chi]_{\approx_T}$ entonces ξ (R-Suf) $= \tau_G$. Por lo tanto S singular implica S superfluo. De aquí que S no es singular y, por lo tanto S es proyectivo.

Ahora bien, si S es proyectivo y S no es inyectivo, entonces S es superfluo. Por lo tanto S es de τ_G-torsión. Por lo tanto es singular proyectivo, que es una contradicción.

■

Proposición 3.70 : Son equivalentes para R, un anillo perfecto derecho:

(i) $\approx_I = {}_{\ll}\approx$.

(ii) la clase de los R-módulos simples inyectivos es la misma que la clase de los R-módulos simples proyectivos .

Demostración: (i $\Rightarrow$ ii) Por el lema anterior, vale para cualquier anillo.

(ii $\Leftarrow$ i) Por la proposición 3.54, tenemos que:

$$\bar{\tau}_G = \tau_G = \xi(\text{Rad}(R)) \leq \xi(\text{R-Suf}).$$

Ahora, si N es superfluo y es libre de ξ (Rad (R))-torsión. Como $soc_p(\text{Rad(R)}) = 0$, entonces τ_φ se escinde centralmente y, por lo tanto se tiene que $\mathbf{F}_{\xi(Rad(R))} = \mathbf{F}_{\bar{\tau}_G} = \mathbf{T}_{\tau_\varphi}$. Entonces N sería semisimple proyectivo. Por lo tanto habría un simple proyectivo (inyectivo) superfluo, que es una contradicción.

$\therefore\ \xi(\text{Rad}(R)) = \xi(\text{R-Suf}) = \bar{\tau}_G = \tau_G$.

$$\therefore\ [\chi]_{\approx_I} = [\chi]_{\ll\approx} = [\chi]_{\approx_I}.$$

Ahora, $\wedge[\tau]_{\ll\approx} = \tau \wedge \xi(\text{R-Suf}) = \tau \wedge \tau_G = [\tau]_{\approx_I}$.

■

Proposición 3.71 : Sea R un anillo para el que cada simple inyectivo es proyectivo. (Por ejemplo: R PF-izquierdo, un anillo de valuación local). Son equivalentes:

(i) $[\chi]_{\kappa_F} = [\chi]_{\kappa_T}$.

(ii) τ_G se escinde centralmente.

Demostración:

(ii $\Rightarrow$ i) τ_G es jansiana y $\mathbf{F}_{\bar{\tau}_G} = \mathbf{T}_{\tau_\varphi}$. Como τ_φ se escinde centralmente, entonces cada módulo semisimple proyectivo es inyectivo. [10, Cor. 2.15]

$$\therefore \quad \tau_G = \bar{\tau}_G \in [\chi]_{\kappa_F}.$$

Si $\sigma \in [\chi]_{\kappa_F}$, entonces $\mathbf{F}_\sigma$ consta de semisimples inyectivos (por la observación 3.25). Por hipótesis, $\mathbf{F}_\sigma \subseteq \mathbf{T}_{\tau_\varphi} = \mathbf{F}_{\bar{\tau}_G}$. Por lo tanto $\bar{\tau}_G \leq \sigma$.

$$\therefore \quad \tau_G = \bar{\tau}_G \leq \sigma.$$

Por último, $\sigma \geq \tau_G \Rightarrow \mathbf{F}_\sigma \subseteq \mathbf{F}_{\tau_G} = \mathbf{T}_{\tau_\varphi}$ y cada simple proyectivo es inyectivo. Así que $\sigma \in [\chi]_{\kappa_T}$.

$$\therefore \quad [\chi]_{\kappa_F} = [\ \tau_G , \chi\ ] = [\chi]_{\kappa_T} .$$

(i $\Rightarrow$ ii) $\tau_G \in [\chi]_{\kappa_T} = [\chi]_{\kappa_F} \Rightarrow \mathbf{F}_{\tau_G}$ consta de semisimples inyectivos no singulares y, por lo tanto, proyectivos. En consecuencia $\mathbf{F}_{\tau_G} \subseteq \mathbf{T}_{\tau_\varphi}$.

Por lo tanto $\tau_G \vee \tau_\varphi = \chi$, y entonces $\tau_G = \bar{\tau}_G$. $\quad \therefore\ \mathbf{T}_{\tau_\varphi} = \mathbf{F}_{\tau_G}$.

$\tau_G \in [\chi]_{\kappa_F}$ implica que todo semisimple proyectivo, es inyectivo.

$\therefore\ \tau_G$ se escinde centralmente. [10]

■

Lema 3.72: Si R es un anillo PF-izquierdo, entonces $\tau_{\eta} = \chi$ (R-Suf).

Demostración:

($\leq$) Si ${}_R S$ es un R-módulo simple proyectivo y libre de χ (R-Suf)-torsión, entonces existe un morfismo $0 \neq f$ de ${}_R S$ a E (M), con $M \in$ R-Suf. Entonces $0 \neq f({}_R S) \leq M$ ($M \underset{es}{\leq} E(M)$). $\therefore$ ${}_R S \cong f({}_R S)$, con $f({}_R S)$ superfluo. Por lo tanto, por el lema 3.19, ${}_R S$ no es inyectivo. Por lo tanto ${}_R S$ no es proyectivo, que es una contradicción.

($\geq$) Si M es libre de τ_{η}-torsión y $M \xrightarrow{mono} \prod_{\alpha \in X} E(S_\alpha)$ con S_α, como Hom (M , E (S_α)) = 0 para toda S_α simple proyectivo, podemos suponer que S_α es singular para toda α en X. Por lo tanto $S_\alpha \in$ R-Suf. $\forall \alpha \in X$.

$$\therefore \ M \in \mathbf{F}_{\chi(R\text{-}Suf)}.$$

■

Lema 3.73: Si R es un anillo PF-izquierdo, entonces:

$$\tau_o = \xi \,(\text{R-Suf}) = \wedge \, [\chi]_{cc*} \,.$$

Demostración: Sabemos que $[\tau_o]_{cc*} = [\, \xi\,(\text{R-Suf}) \wedge \tau_o \,, \chi\,(\text{R-Suf} \cap \mathbf{F}_{\tau_o})]$.

De [4, Prop. 39.3] se tiene que τ_o es cohereditaria debido a que $\tau_o = \overline{\tau_o}$, que se escinde centralmente, pues R es PF.

Entonces, por el lema 3.15, $\chi\,(\text{R-Suf} \cap \mathbf{F}_{\tau_o}) = \chi\,(\text{R-Suf}) \vee \tau_o = \tau_{\eta} \vee \tau_o = \chi$.

$$\therefore \ \chi \in [\tau_o]_{cc*} \cap [\chi]_{cc*} \,. \quad \text{Así es que } \tau_o \in [\chi]_{cc*} \,.$$

Como τ_o es jansiana, entonces $\wedge\,[\tau_o]_{cc*} = \wedge\,[\chi]_{cc*} = \xi$ (R-Suf), y como, además, ξ (R-Suf) $\leq \tau_o$ (Si $N \in$ R-Suf entonces existe un monomorfismo de

N hacia $(Rad(R))^X$ p.a. conjunto X, y Rad (R) $\leq t_{\tau_\sigma}$ (R), y así N $\in \mathbb{T}_{\tau_\sigma}$), se tiene que ξ (R-Suf) es jansiana.

Ahora si M $\in \xi$ (R-Suf) , entonces existe un monomorfismo:

$M \xrightarrow{mono} \prod_{\alpha \in Y} E(S_\alpha) \in \mathbb{T}_{\xi(R\text{-}Suf)}$ (pues ξ (R-Suf) es jansiana) , con S_α simple singular. Por lo tanto $\tau_\sigma \leq \xi$ (R-Suf).

■

Proposición 3.74 : Si R es un anillo PF-izquierdo, entonces $\approx_1 = {}_{cc}\approx$.

Demostración: Del lema anterior, tenemos que $\wedge [\tau]_{cc\approx} = \tau \wedge \tau_\sigma$. Por otra parte sabemos que $\wedge [\tau]_{\approx_1} = \tau \wedge \tau_\sigma$.

$$\therefore\ \tau\ {}_{cc}\!\approx \sigma \Leftrightarrow \tau \wedge \tau_\sigma = \sigma \wedge \tau_\sigma \Leftrightarrow \tau \approx_1 \sigma .$$

■

4. CARACTERIZACIÓN DE LOS ANILLOS PARA LOS QUE R-tors ES ISOMORFO A R-pr.

ALGUNAS CUESTIONES RELACIONADAS.(¿Cuando _:_ es una operación en R-tors?).

• En la clase de los prerradicales en R-Mod, hay definidas cuatro operaciones: $\wedge$, $\vee$, $\circ$, y $\_ : \_$. Como vimos en el capítulo 1, a cada elemento $\tau \in$ R-tors, le corresponde un radical exacto izquierdo t_τ .

Observación 4.1 : Si t y s son prerradicales de R-Mod tenemos que:

$$M \in \mathbb{T}_{t:s} \text{ si y sólo si } M/t(M) \in \mathbb{T}_s.$$

Demostración:

$(\Rightarrow)$ $M \in \mathbb{T}_{t:s} \Rightarrow (t:s)(M) = M \Rightarrow M/t(M) = s(M/t(M))$

$\therefore$ $M/t(M) \in \mathbb{T}_s$.

$(\Leftarrow)$ $M/t(M) \in \mathbb{T}_s \Rightarrow s(M/t(M)) = M/t(M) = (t:s)(M)/t(M)$

$\therefore$ $(t:s)(M) = M$ y $M \in \mathbb{T}_{t:s}$.

■

Podríamos intentar definir $\_ : \_$ en R-tors por:

$$\mathbb{T}_{\tau:\sigma} = \{ M \mid M / t_\tau(M) \in \mathbb{T}_\sigma \}$$

$$= \{ M \mid \exists\, 0 \to K \to M \to N \to 0 \text{ exacta, con } K \in \mathbb{T}_\tau,\ N \in \mathbb{T}_\sigma \}.$$

Y así tendríamos que $t_{\tau:\sigma} = t_\tau : t_\sigma$. Sin embargo esto, en general, no funciona pues implicaría que $\_ : \_$ es una operación para el conjunto de los radicales exactos izquierdos en R-Mod.

Proposición 4.2 : Si $\_:\_$ es una operación para el conjunto de los radicales exactos izquierdos, entonces todo R-módulo semisimple proyectivo es inyectivo. (En otras palabras: τ_{sp} se escinde centralmente por [10, cor. 2.15]).

Demostración: Sea M un R-módulo semisimple proyectivo y sea E (M) su cápsula inyectiva. Entonces M y $E(M)/M \in \mathbb{T}_{t\xi(E(M)/M):t\xi(M)}$ por la observación anterior. Como la clase de torsión asociada a un radical exacto izquierdo es cerrada bajo extensiones, de la sucesión exacta:

$$0 \to M \to E(M) \to E(M)/M \to 0$$

obtenemos que $E(M) \in \mathbb{T}_{t\xi(E(M)/M):t\xi(M)}$. Entonces, de la observación anterior se infiere que $\dfrac{E(M)}{t_{\xi(E(M)/M)}(E(M))} \in \mathbb{T}_{t\xi(M)}$.

Por otro lado, $M \in \mathbb{T}_{t_{\tau_{sp}}} \subseteq \mathbb{F}_{t_{\tau_0}}$, por lo tanto $E(M) \in \mathbb{F}_{t_{\tau_0}}$, pero $E(M)/M \in \mathbb{T}_{t_{\tau_0}}$ ya que M es esencial en E (M). Entonces tenemos que:

$$\mathrm{Hom}(E(M)/M, E(M)) = 0$$

y entonces $E(M) \in \mathbb{F}_{t\xi(E(M)/M)}$. Por lo tanto, $E(M) \in \mathbb{T}_{t\xi(M)}$.

Como consecuencia, E (M) es un R-módulo semisimple proyectivo y por lo tanto M es un sumando directo esencial de E (M), lo cual sucede sólo cuando M = E (M). Por lo tanto M es inyectivo.

■

Observación 4.3 : Sea $\mathbf{Z}$ el prerradical que asocia a cada R-módulo M su submódulo singular, entonces como caso particular de [2, prop. 1.10.2] vemos que:

Si $\mathbf{Z}$ es un radical, entonces R es un anillo no singular.

Suponiendo que $\mathbf{Z}$ es un radical exacto izquierdo, entonces $\mathbb{T}_{\mathbf{Z}}$ es cerrada bajo extensiones. Si tomamos ${}_R K \leq \mathrm{R}$ máximo con la propiedad de que $\mathrm{K} \cap \mathbf{Z}(\mathrm{R}) = 0$, entonces, de la sucesión exacta:

$$0 \to \mathbf{Z}(\mathrm{R}) \to \mathrm{R}/\mathrm{K} \to \mathrm{R}/(\mathbf{Z}(\mathrm{R}) \oplus \mathrm{K}) \to 0$$

vemos que R / K es singular, es decir que K es esencial en R.

Como $\mathrm{K} \cap \mathbf{Z}(\mathrm{R}) = 0$, entonces $\mathbf{Z}(\mathrm{R}) = 0$.

■

Ejemplo 4.4 : Del teorema 4.2 se ve claro que, para un anillo R con un R-módulo semisimple proyectivo que no sea inyectivo, el conjunto de los radicales exactos izquierdos no es cerrado bajo la operación $\_:\_$.

Por ejemplo; Sea F un campo cualquiera y tomamos:

$$\mathrm{R} = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$$

Entonces $\begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ = soc (R), y es el único ideal izquierdo esencial de R, y por lo tanto $\mathbf{Z}(\mathrm{R}) = ann_d(\mathrm{soc}(\mathrm{R})) = 0$.

Ahora, tenemos que soc (R), y R / soc (R) $\in \mathbb{T}_{t_{\xi(R/soc(R))} : t_{\xi(soc(R))}}$. Sin embargo, demostraremos que R $\notin \mathbb{T}_{t_{\xi(R/soc(R))} : t_{\xi(soc(R))}}$. Como R $\in \mathbb{F}_{t_{t_0}}$ (por la observación anterior), y R / soc (R) $\in \mathbb{T}_{t_{t_0}}$ (debido a que soc (R) es esencial en R), entonces R $\in \mathbb{F}_{t_{\xi(R/soc(R))}}$. Ahora, si R $\in \mathbb{T}_{t_{\xi(R/soc(R))} : t_{\xi(soc(R))}}$, entonces R $\in \mathbb{T}_{t_{\xi(R/soc(R))}}$.

Esto implica que R es semisimple proyectivo, ya que soc (R) lo es. Pero R no es semisimple.

■

Observación 4.5 : Sean t y s prerradicales de R-Mod, y t idempotente. Entonces $t \leq s$ es equivalente con $\mathbb{T}_t \subseteq \mathbb{T}_s$.

■

Esta última observación muestra que el orden de los prerradicales idempotentes está dada por $\subseteq$ respecto de sus clases de torsión.

- En lo que sigue, veremos cuando todo prerradical se corresponde con una teoría de torsión (hereditaria).

En este caso _ : _ es una operación en R-tors, así que se aplica la proposición 4.2.

Como en realidad el problema que nos interesa es el de cuando todo prerradical es un radical exacto izquierdo, podemos empezar notando lo siguiente: [7, VI. Prop. 1.7].

Observación 4.6 : Sea r un prerradical en R-Mod. Son equivalentes:

(i) r es exacto izquierdo.

(ii) r es idempotente y $\mathbb{T}_r$ es hereditaria. (cerrada bajo submódulos).

■

Proposición 4.7 : Si todo prerradical de R-Mod es un radical idempotente, entonces $t : s = t \vee s$.

Demostración: De la observación 4.6 se sigue que $t \leq t : s$ y que $s \leq t : s$, por lo tanto $t \vee s \leq t : s$.

Ahora, mostraremos que $t \leq s$ implica que $t : s = s$. Sea $M \in \mathbb{T}_{t:s}$, entonces $M / t(M) \in \mathbb{T}_s$. Como $t(M) \subseteq s(M)$ y como s es un radical, tenemos que $M / t(M) = s(M / t(M)) = s(M) / t(M)$, y entonces $M \in \mathbb{T}_s$ (La segunda igualdad se tiene del lema anterior).

Por lo tanto $t : s \leq s = t \vee s \leq t : s$, así que $t : s = s$.

Si t y s son prerradicales, como $t \leq t \vee s$, de lo anterior obtenemos que:

$$t : s \leq t : (t \vee s) = t \vee s \leq t : s.$$

■

Proposición 4.8 : Son equivalentes:

(i) Todo prerradical es un radical exacto izquierdo.

(ii) a) $\wedge = \_ \circ \_$.

b) $\vee = \_ : \_$.

c) $\mathbb{T}_{\pi_M}$ es hereditaria para todo R-módulo M.

Demostración: (i $\Rightarrow$ ii) Por la observación anterior, r exacto izquierdo implica r idempotente. Por lo tanto todo prerradical es idempotente. Así que podemos aplicar la observación 4.5.

a) $r \circ s \leq r$ pues $(s(M) \subseteq M \Rightarrow r(s(M)) \subseteq r(M))$. También :

$r(s(M)) \leq s(M)$. $\therefore (r \circ s)(M) \subseteq r(M) \cap s(M) \in \mathbb{T}_r \cap \mathbb{T}_s = \mathbb{T}_{r \wedge s}$.

$$\therefore\ (r \circ s)(M) \leq r \wedge s.$$

Por otra parte, si m $\in \mathbb{T}_{r\wedge s} = \mathbb{T}_r \cap \mathbb{T}_s$, entonces $s(M) = M$ y $t(M) = M$.

$$\therefore\ (r \circ s) = r \wedge s.$$

b) Se sigue de la proposición anterior.

c) $tr_M(N) = \Sigma\{f(M) | f \in Hom(M,N)\}$.

tr_M es un prerradical.

Ahora bien, $g(tr_M(N)) = \Sigma\{g\, f(M) | f \in Hom(M,N)\}$

$$\leq \Sigma\{h(M) | h \in Hom(M,L)\} = tr_M(N).$$

Por hipótesis tr_M es exacto izquierdo, así que $\mathbb{T}_{tr_M}$ es hereditaria.

$\Leftarrow$) $(\wedge = \_ \circ \_) \Rightarrow$ todo prerradical es idempotente.

$(\vee = \_ : \_) \Rightarrow$ todo prerradical es radical.

Sea r un prerradical, entonces r es un radical idempotente. Para demostrar que es exacto izquierdo, basta ver que $\mathbb{T}_r$ es hereditaria (por la observación 4.6).

Supongamos que $M \in \mathbb{T}_r$, entonces $tr_M \leq r$.

$$\therefore\ N \in \mathbb{T}_{tr_M} \Rightarrow N \in \mathbb{T}_r.$$

■

Finalmente, en algunos pasos, damos la caracterización de los anillos para los que todo prerradical es radical exacto izquierdo.

Observación 4.9 : Si todo prerradical de R-Mod es exacto izquierdo, entonces todo ideal izquierdo de R es idempotente.

Demostración: Sea $_RI$ un ideal izquierdo de R, entonces:

$$_RI\_ : \text{R-Mod} \to \text{R-Mod}$$

$$M \mapsto I\,M$$

induce un prerradical de R-Mod. Como estamos suponiendo que todo prerradical es exacto izquierdo entonces por [7, VI prop. 1.7] tenemos que, como $I \subseteq R$:

$$I\,I = {}_RI\_(\,I\,) = I \cap {}_RI\_(\,R\,) = I \cap I\,R = I\,.$$

■

Lema 4.10 : Sea R un anillo tal que todo prerradical de R-Mod es exacto izquierdo. Entonces para todo $_RI \leq_{es} R$ se tiene que $\xi\,(_RI) = \chi$.

Demostración: Sea $_RI \leq_{es} R$, y consideremos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \to I \to R \to R\,/\,I \to 0\,.$$

Tenemos que $R\,/\,I \in \mathbb{T}_{t_{\tau_0}}$. Por la observación 4.3, $R \in \mathbb{F}_{t_{\tau_0}}$. Entonces, de la sucesión exacta anterior y de la proposición 4.7, obtenemos que:

$$R \in \mathbb{T}_{t_{\xi(I)}:t_{\tau_0}} = \mathbb{T}_{t_{\xi(I)} \vee t_{\tau_0}} = \mathbb{T}_{t_{\tau_0}:t_{\xi(I)}}\,.$$

Como $R \in \mathbb{T}_{t_{\tau_0}:t_{\xi(I)}}$, y $R \in \mathbb{F}_{t_{\tau_0}}$ concluimos que $R \in \mathbb{T}_{\xi(I)}$; es decir que R es de $\xi\,(\,I\,)$-torsión, por lo tanto $\xi\,(\,I\,) = \chi$.

■

Proposición 4.11 : Sea R un anillo tal que todo prerradical de R-Mod es un radical exacto izquierdo. Entonces R no tiene ideales bilaterales propios que sean esenciales como ideales izquierdos.

Demostración: Supongamos que si hay un ideal bilateral ${}_R I_R$ con esa propiedad. Entonces por el lema anterior se tiene que $\xi\,(\,I\,) = \chi$. Entonces tenemos que $\mathrm{Hom}\,(\,I\,, E\,(\,R\,/\,I\,)\,) \neq 0$. Por lo tanto, existe un morfismo:

$$0 \neq f : J \to R\,/\,I\,,\quad \text{con } J \leq I\,.$$

Entonces obtenemos, utilizando la observación 4.9, que :

$$0 \neq f(\,J\,) = f(\,J\,J\,) = J\,f(\,J\,) \leq I\;\;R\,/\,I\;=0,$$ que es una contradicción.

■

De la anterior proposición podemos demostrar la siguiente:

Proposición 4.12 : Sea R un anillo tal que todo prerradical de R-Mod es un radical exacto izquierdo. Entonces todo ideal bilateral de R está generado por un idempotente central de R.

Demostración: Sea ${}_R I_R \leq R$, entonces ${}_R I$ no es esencial en R. Sea ${}_R K$ ideal izquierdo máximo con la propiedad de que $I \cap K = 0$, entonces ${}_R I_R \oplus {}_R K$ es esencial en ${}_R R$ ([1, prop.5.21]).

Como $I\,K \leq I \cap K = 0$, tenemos que $K \leq ann_d(\,I\,)$, el cual es un ideal bilateral de R. En particular $ann_d(\,I\,) \cap I$ es un ideal izquierdo de R. Por la observación 4.9, sabemos que todo ideal izquierdo de R es idempotente.

Por lo tanto $ann_d(\,I\,) \cap I = (\,ann_d(\,I\,) \cap I\,)^2$ que está incluido en $I\,ann_d(\,I\,) = 0$. Por la elección de K, se tiene que:

$$K = ann_d(\,I\,).$$

En particular, K es un ideal bilateral de R. Por lo tanto ${}_R I_R \oplus {}_R K \leq_{es} R$ e ${}_R I_R \oplus {}_R K$ es bilateral. Por la proposición 4.11 tenemos que $R = I \times K$ (Producto de anillos).

■

Lema 4.13 : Si R es un anillo que no es semisimple y tal que todo prerradical de R-Mod es un radical exacto izquierdo, entonces todo prerradical que extienda propiamente a $\mathbf{Z}$, se escinde centralmente.

Demostración: Por la hipótesis y la observación 4.3, se sigue que R es no singular. Por lo tanto, la teoría de torsión de Goldie y la teoría de torsión de Lambek , $\chi(R)$, coinciden. Como consecuencia de esto, $\mathbf{Z}$ es el mayor prerradical que hace a R libre de torsión. Sea t una extensión propia de $\mathbf{Z}$, por la proposición 4.12, tenemos que $R = t(R) \times K$, con $K \cong R / t(R)$.

■

Observación 4.14 : Notamos que en el lema anterior, la clase de torsión asociada a t es cerrada bajo productos.

Demostración: Esto se debe a que, por las hipótesis, todo prerradical corresponde a una teoría de torsión hereditaria. Ahora, si t es un prerradical que extiende propiamente a $\mathbf{Z}$, entonces la teoría de torsión correspondiente se escinde centralmente, como se vio en el lema anterior. Es bien sabido que una teoría de torsión que se escinde centralmente, es jansiana (ver [7, VI. example 2.2 y p.154]) que es lo mismo que decir que $\mathbf{T}_t$ es cerrada bajo productos.

■

Lema 4.15 : Si R es un anillo que no es semisimple y tal que todo prerradical de R-Mod es un radical exacto izquierdo, entonces:

$$\text{R-tors} = [\,\xi,\ \tau_G\,] \cup \{\,\chi\,\}.$$

Demostración: Por la observación anterior, sabemos que toda extensión propia de τ_G es jansiana.

Si hubiera un R-módulo S simple proyectivo, entonces $\tau_G \vee \tau_{sp}$ sería jansiana y por lo tanto:

$$\bar{\tau}_G \leq \tau_G \vee \tau_{sp} \Rightarrow \bar{\tau}_G = \tau_G \vee (\bar{\tau}_G \wedge \tau_{sp}) = \tau_G$$

La última igualdad se tiene debido a que, $\bar{\tau}_G$ es el seudocomplemento de τ_{sp}.

Esto implica, por la proposición 4.2 y de [10, cor. 2.15 y Teo. 2.16] tenemos que $R = soc_p(R) \times t_{\bar{\tau}_G}(R)$, pero $t_{\bar{\tau}_G}(R) = t_{\tau_G}(R) = \mathbf{Z}(R) = 0$. Por lo tanto R debería ser semisimple contradiciendo la hipótesis. Entonces concluimos que R no tiene R-módulos simples proyectivos y $R = t_{\bar{\tau}_G}(R)$. En consecuencia $\bar{\tau}_G = \chi$. Como toda extensión propia de τ_G es jansiana y como $\bar{\tau}_G = \chi$, concluimos que τ_G no tiene extensiones propias.

Por otro lado, Si $\sigma \in$ R-tors, y σ no es una especialización de τ_G, entonces $\sigma \vee \tau_G = \chi$. De la proposición 4.7, obtenemos que $R = R / \mathbf{Z}(R) \in \mathbb{T}_\sigma$.

Por lo tanto $\sigma = \chi$. Concluimos que R-tors $= [\xi, \tau_G] \cup \{\chi\}$.

■

• Podemos observar también que, si R es un anillo no semisimple tal que todo prerradical de R-Mod es un radical exacto izquierdo con un ideal bilateral $0 \neq {}_R I_R$ propio, entonces el prerradical $I\_$ definiría una teoría de torsión que no está en $[\xi, \tau_G] \cup \{\chi\}$ $(0 \neq I R = I < R)$, de lo que podemos concluir el siguiente:

Lema 4.16 : Si R es un anillo que no es semisimple y tal que todo prerradical de R-Mod es un radical exacto izquierdo, entonces R es un anillo simple.

■

Proposición 4.17 : Las siguientes proposiciones son equivalentes para un anillo R :

(i) Todo prerradical de R-Mod es un radical exacto izquierdo.

(ii) R es un anillo semisimple artiniano.

Demostración:

(i $\Rightarrow$ ii) Sean R_1 y R_2 anillos tales que cada uno de sus prerradicales es un radical exacto izquierdo, entonces, se sigue de [2, prop. I.9.1] que el producto de anillos $R_1 \times R_2$ también tiene la propiedad.

Ahora bien, si hubiera un anillo que no fuera semisimple R, tal que todos sus prerradicales fueran radicales exactos izquierdos, podríamos tomar el producto $R \times R$, que también tendría tal propiedad, pero $R \times R$ no sería semisimple artiniano ni un anillo simple, contradiciendo así el lema anterior.

(ii $\Rightarrow$ i) Si R es semisimple artiniano, entonces para cualquier prerradical t de R-Mod, se tiene que t es un funtor exacto izquierdo (todo se escinde). En particular, t es exacto izquierdo y en consecuencia t es un prerradical idempotente. Para $M \in$ R-Mod tenemos que, $M = t(M) \oplus N$, para algún R-módulo N. Por lo tanto $t(M) = t(t(M)) \oplus t(N)$. En consecuencia se tiene que $0 = t(N) \cong t(M/t(M))$, es decir t es un radical.

■

REFERENCIAS.

BIBLIOGRAFÍA:

[1] Anderson, F. and Fuller, K. **Rings and Categories of Modules**. Springer-Verlag. 1974.

[2] Bican, Kepka, Němec. **Rings, Modules and Preradicals**. Marcel Dekker. 1982.

[3] Faith, Carl. **Algebra II. Ring Theory**. Springer-Verlag. 1976.

[4] Golan, Jonathan. **Torsion Theories**. Longman Scientific & Technical. 1986.

[5] Golan, Jonathan. **Linear Topologies on a ring: an overview**. Longman Scientific & Technical. 1987.

[6] Kasch, F. **Modules and Rings**. Academic Press Inc. (London) LTD. 1982.

[7] Stenström, Bo. **Rings of Quotients**. Springer-Verlag. 1975.

ARTÍCULOS:

[8] **A characterization of perfect rings.**
Dlab, Vlastimil.
Pacific Journal of Mathematics, Vol 33, No. 1, 1970, 79-88.
[9] **Divisible and codivisible modules.**
Paul E., Bland.
Math. Scand. 34 (1974), 153-161.
[10] **Algunas relaciones entre anillos semiartinianos y la teoría de torsión de Goldie.**
Raggi, F. & Ríos, J.
Anales del Instututo de Matemáticas, U.N.A.M. 23 (1983), 41-54.
[11] **Sublattices of R-tors associated to proper classes.**
Raggi, F. & Ríos, J.
Communications in Algebra 15, (1987), 555-573.
[12] **The lattice R-tors for perfect rings.**
Rincón-Mejía, H.A.
Publicacions Matematiques, Vol 33 (1989), 17-35.
[13] **On the lattice R-tors for semiperfect rings and QF-Rings.**
Rincón-Mejía, H.A.
Communications in Algebra, 19 (10) (1991). 2833-2839.
[14] **Sublattices of R-tors induced by the skeleton.**
Aguilar, G. and Raggi, F.
Communications in Algebra, 21 (4), (1993), 1347-1358.
[15] **On some relations which induce complete sublattices of R-tors.**
Rincón-Mejía, H.A.
Publicaciones preliminares, Instituto de Matemáticas U.N.A.M. (395) 1995.
[16] **When is every preradical of R-Mod a left exact radical ?**
Rincón-Mejía, H.A.
Publicaciones preliminares, Instituto de Matemáticas U.N.A.M. (476) 1996.
[17] **On centrally splitting.**
Bernhardt, R.
Duke Mathematical Journal 40 (1973), 903-905.