



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

CAMPUS ARAGON

ANALISIS DEL RENDIMIENTO DE TRANSFERENCIA  
DE CALOR EN DISPOSITIVOS CILINDRICOS CON  
SUPERFICIE PARCIALMENTE ISOTERMICA

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
**INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA**  
P R E S E N T A :

**ALEJANDRO TERAN RAMOS**

DIRECTOR DE TESIS: DR. LUIS FELIPE DEL CASTILLO DAVILA



MEXICO, D. F.

1996

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**TESIS**

**COMPLETA**



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES  
ARAGÓN  
DIRECCION

ALEJANDRO TERÁN RAMOS  
P R E S E N T E

En contestación a su solicitud de fecha 30 de mayo del año en curso, relativa a la autorización que se le debe conceder para que el señor profesor, Dr. LUIS FELIPE DEL CASTILLO DÁVILA pueda dirigirle el trabajo de Tesis denominado "ANÁLISIS DEL RENDIMIENTO DE TRANSFERENCIA DE CALOR EN DISPOSITIVOS CILÍNDRICOS CON SUPERFICIE PARCIALMENTE ISOTÉRMICA", con fundamento en el punto 6 y siguientes, del Reglamento para Exámenes Profesionales en esta Escuela, y toda vez que la documentación presentada por usted reúne los requisitos que establece el precitado Reglamento; me permito comunicarle que ha sido aprobada su solicitud.

Aprovecho la ocasión para reiterarle mi distinguida consideración.

ATENTAMENTE

"POR MI RAZA HABLARA EL ESPÍRITU"

San Juan de Aragón, México, 3 de Junio de 1996.

EL DIRECTOR

M. en I. CLAUDIO C. MERRIFIELD CASTRO



c c p Jefe de la Unidad Académica  
c c p Jefatura de Carrera de Ingeniería Mecánica Eléctrica.  
c c p Asesor de Tesis.

CCMC/AIR/11a

**AGRADECIMIENTOS**

**A MIS PADRES**

**ANDRES Y GUADALUPE**

**Por haber contribuido en el logro de esta gran carrera que me heredaron.**

**GRACIAS.**

A MIS ABUELITOS

DELFINO Y M<sup>a</sup> LUISA

Por su gran apoyo, sacrificio y confianza que me brindaron.

GRACIAS.

A MIS HERMANOS

MARCO ANTONIO  
ANDRES  
ELODIA  
GABRIEL  
MARTIN

Por su sacrificio en algún tiempo incomprometido.

Y A MI FAMILIA (TIOS Y PRIMOS)

Quienes contribuyeron de alguna forma en la realización de esta gran meta obtenida.

GRACIAS.

A MIS SINODALES

Dr. LUIS FELIPE DEL CASTILLO DAVILA  
Ing. TERESA C. MORENO BAÑUELOS.  
Ing. JORGE A. RODRIGUEZ LUNA.  
Ing. ALFREDO MONTAÑO SERRANO  
Ing. ALEJANDRO RODRIGUEZ LORENZANA.

Por las observaciones y comentarios en la realización de este trabajo y por ofrecerme en forma desinteresada sus conocimientos.

ASI MISMO DE UNA MANERA MUY ESPECIAL QUIERO AGRADECER AL

Dr. LUIS FELIPE DEL CASTILLO DAVILA

Por la dirección, apoyo y paciencia en la realización de esta tesis.

A UN GRAN AMIGO

ALEJANDRO ESTRADA FLORES

Por su amistad, colaboración y gran apoyo que me brindó en la realización de este trabajo.

A TODOS LOS COMPAÑEROS Y AMIGOS

Por su ayuda y motivación que me brindaron.

AL INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES

Por la beca otorgada para la realización de este proyecto.

GRACIAS.



ANALISIS DEL RENDIMIENTO DE TRANSFERENCIA DE  
CALOR EN DISPOSITIVOS CILINDRICOS CON SUPERFICIE  
PARCIALMENTE ISOTERMICA.

## INDICE

### CAPITULO I

INTRODUCCION	1
OBJETIVO	5

### CAPITULO II

#### ANALISIS DE LA DISTRIBUCION DE TEMPERATURA Y OBTENCION DE LA LEY GENERALIZADA DE FOURIER PARA EL FLUJO DE CALOR EN DISPOSITIVOS CON SIMETRIA CILINDRICA.

2.1.- ECUACION DE DIFUSION:	
LA DEPENDENCIA ESPACIAL Y TEMPORAL.	6
2.2.- ECUACION DE DIFUSION INDEPENDIENTE DEL TIEMPO.	8
2.3.- LA EVALUACION DE LAS CONSTANTES.	15
2.4.- LAS CONDICIONES A LA FRONTERA DE UN PROBLEMA ALTERNATIVO.	26
2.5.- LEY GENERALIZADA DE FOURIER:	
EL FLUJO DE CALOR TOTAL.	31
2.6.- FLUJO DE CALOR EN VARIABLES RELATIVAS:	
VARIACION GEOMETRICA.	37
2.7.- LEY DE FOURIER CANONICA.	50

### CAPITULO III

#### FLUJO DE CALOR EN SISTEMAS CON SUPERFICIE PARCIALMENTE ISOTERMA

3.1.- UN CILINDRO CON TAPA PARCIALMENTE ISOTERMICA	56
3.2.- LEY DE FOURIER EN SISTEMAS CON SUPERFICIE ISOTERMA: LA APROXIMACION CUASI-CONSTANTE PARA EL FLUJO CALOR LAMINAR.	71
3.3.- ANALISIS GRAFICO APROXIMADO PARA UN FLUJO DE CALOR LAMINAR.	78
3.4.- EL EFECTO DE LA DIFERENCIA DE TEMPERATURAS.	81

### CAPITULO IV

#### ALGUNAS APLICACIONES DEL FLUJO DE CALOR.

4.1.- EL MOTOR ENDOTERMICO.	85
4.1.1.- RENDIMIENTO DEL FLUJO DE CALOR DE UN PISTON CON SUPERFICIE PARCIALMENTE ISOTERMA.	88
4.2.- UN PIRANOMETRO DE CAVIDAD VARIABLE.	96
RESUMEN.	108
CONCLUSIONES.	113
BIBLIOGRAFIA.	115

## INTRODUCCION

Este trabajo esta enfocado hacia el análisis de la transferencia de calor dentro de un sistema con propiedades de simetría cilíndrica, a lo largo del cual existe transporte de energía calorífica.

Un análisis metódico para el mejor diseño de los sistemas de transferencia de calor, dará como resultado un mínimo de pérdidas de energía y proporcionará la garantía para el ahorro energético.

La importancia de un análisis de este tipo radica en que hay muchos dispositivos industriales en los que puede ser de utilidad un mejor entendimiento de la dinámica del flujo de calor.

El conocimiento de la transferencia de calor en dispositivos de uso industrial y la necesidad para analizar cuantitativamente problemas que involucren este proceso, se ha incrementado en nuestros días, tanto como la tecnología moderna se ha vuelto cada vez más compleja. Esto es debido a que en gran mayoría, los procesos de ciencia e ingeniería involucran intercambio de energía a través del flujo de calor. Por ejemplo, el diseño de las máquinas de combustión interna requiere de un completo entendimiento de la transferencia de calor y por lo tanto de un detallado análisis de los procesos de combustión, transferencia y enfriamiento.

Desde el punto de vista de ingeniería, la determinación de la cantidad y la rapidez de transferencia de calor sujeta a una diferencia de temperatura dada, constituye el problema

principal. Con el objeto de estimar el costo, la factibilidad y el tamaño de equipo necesario para transferir una cantidad de calor en un tiempo dado, se debe primero realizar un análisis detallado de la transferencia de calor dentro del sistema. Las dimensiones de calderas, calentadores, refrigeradores y cambiadores de calor, dependen no solamente de la cantidad de calor que deba ser transmitida, sino también, de la rapidez con que deba transferirse el calor bajo las condiciones de frontera sobre el diseño del sistema en particular.

Para este propósito, el trabajo se divide fundamentalmente en tres capítulos.

El tratamiento del análisis inicia en el capítulo II. En donde se considera un sistema caracterizado por su simetría cilíndrica.

La función de distribución de temperatura  $T(r,z,t)$  en las coordenadas  $(r,z,t)$  dentro del sistema, se obtiene a partir de la ecuación de difusión, una vez que las condiciones a la frontera han sido establecidas. La distribución de temperatura es una función de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , los cuales contienen la información sobre las dimensiones geométricas y de los valores iniciales de la temperatura del sistema.

Es importante señalar que las condiciones a la frontera de las secciones 2.3 y 2.4, se han escogido con toda intención debido a que corresponden a casos reales, los cuales con mayor frecuencia se encuentran en la práctica.

En la sección 2.5 se utiliza la función de distribución de temperatura en la Ley de Fourier para obtener el flujo de calor total dentro del sistema.

El flujo de calor total es una función de la distribución de temperatura  $T$  y de las coordenadas  $r$  y  $z$  del sistema. En este caso hemos considerado que las cantidades  $\alpha$  y  $\beta$  representan parámetros fijos. Bajo estas condiciones se obtiene la ecuación generalizada de

Fourier que muestra las modificaciones a la conocida ley de Fourier debido a la presencia de las fronteras

A partir de la ley generalizada de Fourier se analizan diversos casos que muestran el comportamiento del flujo de calor en las vecindades de las fronteras

Por otra parte, la variante en la sección 2.6 y 2.7 consiste en que el flujo de calor con fronteras variables es equivalente a considerar  $\alpha$  y  $\beta$  como variables de estado.

En estas secciones se analizan el comportamiento del flujo de calor tanto radial como relativo; así como el análisis cuando se considera alguna de las variables constante.

Ahora bien, el capítulo III consiste en determinar el flujo de calor en un cilindro con tapa parcialmente isotérmica, en donde para resolver este problema se introduce la suposición en la cual se considera un cambio de escala en donde el radio de un cilindro supuesto tiende a infinito. De esta forma se describe analíticamente una región con una variación de temperatura despreciable.

En este mismo capítulo se analizan las dependencias relativas entre el flujo radial y longitudinal, y de esta manera es posible dar una presentación adecuada al flujo de calor laminar, que por lo visto, poco énfasis se ha hecho en la literatura sobre la manera de asegurar un flujo de este tipo.

En la sección 3.3 y 3.4 se hace un análisis gráfico para determinar un flujo de calor laminar que dependa de una longitud crítica, así como el efecto que causan las temperaturas para determinar dicha longitud.

Finalmente, en el capítulo IV se muestra un par de aplicaciones de los conceptos elaborados en los dos capítulos anteriores. El primero de ellos es sobre el comportamiento y

el rendimiento del flujo de calor en un pistón con superficie parcialmente isotérmica. el cual se analiza la cantidad de calor que recibe, así como su intensidad de temperatura que se genera en dicho pistón para encontrar una región isotérmica

La segunda aplicación es sobre el comportamiento del pistón en un Piranómetro especial, en el que se manifiesta que la intensidad de temperatura no es un parámetro constante, sino que representa una cantidad que depende de la longitud de la cavidad cuyo comportamiento gráfico se muestra en las figuras (4.6), (4.7), (4.8) y (4.9).

Estas aplicaciones muestran que en ingeniería se encuentran problemas de transferencia de calor que no pueden resolverse por un simple análisis lineal de Fourier, sino que requieren un completo estudio basado en la ciencia de la transferencia de calor.

En la actualidad, es muy común encontrar mecanismos basados en las propiedades geométricas de las componentes de un sistema en general. Y son las simetrías geométricas quienes han facilitado en gran parte las innovaciones de nuevas técnicas, y es gracias a la complejidad que las necesidades exigen, por lo que no se ha tenido oportunidad de analizar con la severidad que la termodinámica y la ciencia de la estabilidad requieren.

De aquí la importancia en analizar detalladamente el mecanismo de transferencia de calor tomando en consideración las propiedades geométricas del sistema por el cual se efectúa este proceso.

## OBJETIVO

Los objetivos del presente trabajo consisten en

a) Describir la transferencia de calor en dispositivos cilindricos con fronteras variables

b) Obtener una ecuación de transferencia de calor para el flujo de calor transmitido, en donde se analicen y se tomen en cuenta el efecto de fronteras y las variaciones de los parámetros que definan la geometría del cilindro, como el radio y la longitud.

c) Describir el suministro del flujo de calor total por la superficie superior del cilindro con una tapa parcialmente isotérmica, así como obtener una relación que nos defina un flujo de calor laminar que dependa de una longitud crítica. y

d) En particular, describir el rendimiento de transferencia de calor en término de las siguientes definiciones:

$J_i$  el flujo incidente de la tapa superior del cilindro y  $J_o$  el flujo transmitido a la tapa inferior del cilindro. En donde el flujo de calor incidente se considera constante y es suministrado por medio de una fuente de energía externa, y el flujo de calor transmitido a la tapa inferior es una cantidad que depende de las condiciones a la frontera.



H - ANALISIS DE LA DISTRIBUCION DE TEMPERATURA Y OBTENCION DE LA  
LEY GENERALIZADA DE FOURIER PARA EL FLUJO DE CALOR EN  
DISPOSITIVOS CON SIMETRIA CHILINDRICA

2.1.- ECUACION DE DIFUSION: LA DEPENDENCIA ESPACIAL Y TEMPORAL

2.2.- ECUACION DE DIFUSION INDEPENDIENTE DEL TIEMPO

2.3.- LA EVALUACION DE LAS CONSTANTES.

2.4.- LAS CONDICIONES A LA FRONTERA DE UN PROBLEMA ALTERNATIVO.

2.5.- LEY GENERALIZADA DE FOURIER: EL FLUJO DE CALOR TOTAL.

2.6.- FLUJO DE CALOR EN VARIABLES RELATIVAS: VARIACION GEOMETRICA.

2.7.- LEY DE FOURIER CANONICA.

## 2.1 - ECUACION DE DIFUSION LA DEPENDENCIA ESPACIAL Y TEMPORAL

Para el análisis del flujo de calor de un sistema fuera de equilibrio termodinámico partimos de la ecuación de difusión dependiente del tiempo

$$\nabla^2 U(x, y, z, t) = \frac{1}{k} \frac{\partial^2 U(x, y, z, t)}{\partial t} \quad (2.1)$$

en donde  $U(x, y, z, t)$  es la función de distribución de temperatura y  $k$  es la conductividad térmica (Maxwell)<sup>1</sup>.

La ecuación (2.1) se identifica como una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden. Para resolver este tipo de ecuaciones se utilizará el método de separación de variables.

Una característica de este método es el reemplazo de la ecuación diferencial parcial por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias<sup>2</sup>, correspondientes a las variables espaciales y otra a la variable temporal.

Para lograr este objetivo, vamos a suponer que en el sistema se ha establecido un estado estacionario cuya distribución de temperatura es definido por la función  $T(x, y, z)$ . Por el método de separación de variables, proponemos como una solución de (2.1) a la siguiente igualdad

$$U(x,y,z,t) = \mathcal{U}(x,y,z)\theta(t) \quad (2.2)$$

en donde  $\theta$  es una función que solo depende de la variable temporal  $t$ .

La separación de las variables espaciales de la temporal se logra cuando sustituimos (2.2) en (2.1) y obtenemos

$$\frac{\nabla^2 \mathcal{U}(x,y,z)}{\mathcal{U}(x,y,z)} = \frac{1}{k\theta(t)} \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (2.3)$$

El conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias se obtiene cuando ambos miembros de (2.3) se hacen igual a una constante ( $-\gamma^2$ ), llamada constante de separación.

Este conjunto consta de dos ecuaciones diferenciales: una para las variables espaciales

$$\nabla^2 \mathcal{U}(x,y,z) + \gamma^2 \mathcal{U}(x,y,z) = 0 \quad (2.4)$$

y otra para la variable temporal

$$\frac{d\theta(t)}{dt} + \gamma^2 k \theta(t) = 0 \quad (2.5)$$

La ecuación (2.5) solo depende del tiempo y tiene por solución

$$\theta(t) = e^{-\lambda^2 k t} \quad (2.6)$$

La ecuación (2.4) solo depende de las variables espaciales y se le conoce como la ecuación de difusión independiente del tiempo o de Poisson para sistemas estacionarios.

La solución de (2.4) para  $\theta(x,y,z)$  es un problema que depende de la geometría del sistema y de las condiciones a la frontera que especifique a un problema en particular<sup>1</sup>, lo cual será tema de la siguiente sección.

## 2.2.- ECUACION DE DIFUSION INDEPENDIENTE DEL TIEMPO.

Primero analizaremos la ecuación (2.4) para el caso geométrico y se dejará el tratamiento de las condiciones a la frontera para la próxima sección.

Vamos a suponer que nuestro sistema termodinámico es un cilindro circular recto, cuyo eje de simetría coincide con el eje  $z$  de un sistema coordenado.

Se considera, también, que el radio del cilindro es  $r_0$  y los extremos van desde  $z = 0$  hasta  $z = L$ , como se ve en la Figura (2.1).

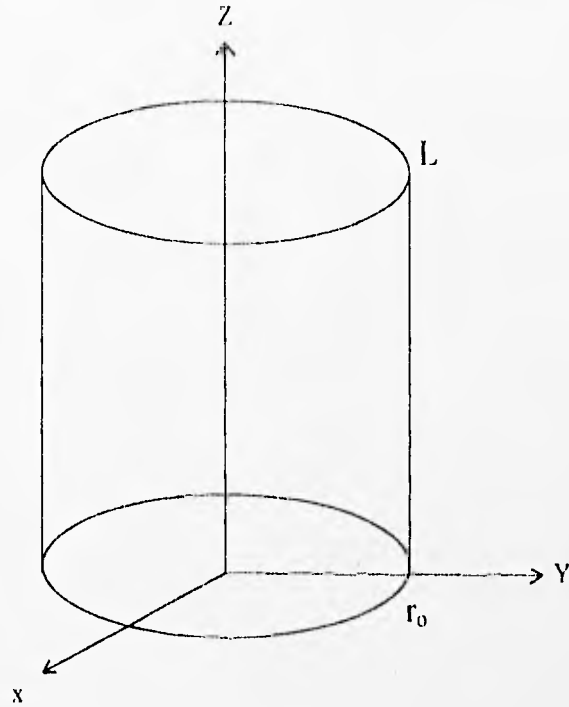


Figura (2.1) : El eje del cilindro coincide con el eje Z de un sistema coordenado. El radio es  $r_0$  y su altura es  $L$ .

Debido a la simetría geométrica del problema, es conveniente tratarlo en un sistema de coordenadas cilíndricas. Por lo que la distribución de temperatura  $\mathcal{T}$  será función de  $r$ ,  $\theta$  y  $z$ .

Sin embargo, si consideramos al sistema con simetría axial, la temperatura solo depende de  $r$  y  $z$ , es decir  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(r, z)$ .

Por lo tanto, una vez establecidas las condiciones de simetría, la ecuación (2.4), se escribe de la forma

$$\frac{\partial^2 \mathcal{T}(r, z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{T}(r, z)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \mathcal{T}(r, z)}{\partial z^2} + \gamma^2 \mathcal{T}(r, z) = 0 \quad (2.7)$$

Se hace notar que el Laplaciano ( $\nabla^2$ ) se ha escrito en coordenadas cilíndricas para aprovechar las condiciones geométricas del sistema termodinámico.

La ecuación (2.7) es, al igual que (2.1), una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden, la cual se resuelve por el mismo método de separación de variables.

Debido a que la ecuación (2.7) solo depende de  $r$  y  $z$ , se propone para ésta la siguiente solución:

$$\mathcal{T}(r, z) = R(r) Z(z) \quad (2.8)$$

en donde  $R$  es una función que depende únicamente de la variable  $r$  y  $Z$  de la variable  $z$ .

Para simplificar la notación en algunas ocasiones escribiremos  $Z$  y  $R$  en lugar de  $Z(z)$  y  $R(r)$ , respectivamente.

Con el objeto de obtener el conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias, vamos a sustituir la ecuación (2.8) en (2.7) y escribimos

$$Z \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} Z \frac{dR}{dr} + R \frac{d^2 Z}{dz^2} + \gamma^2 RZ = 0 \quad (2.9)$$

dividiendo la ecuación (2.9) por  $RZ$  obtenemos lo siguiente

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r R} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + \gamma^2 = 0 \quad (2.10)$$

A partir de la última igualdad, se obtienen las ecuaciones para cada una de las funciones. Es decir, una para  $R(r)$

$$\frac{1}{R} \left[ \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right] = -\alpha^2 \quad (2.11)$$

y otra para  $Z(z)$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \beta^2 \quad (2.12)$$

donde, al igual que  $\gamma^2$ , las cantidades  $\alpha^2$  y  $\beta^2$  son las constantes de separación para las variables  $r$  y  $z$ , respectivamente, las cuales deben cumplir que  $\alpha^2 - \beta^2 = \gamma^2$ . Estas constantes serán evaluadas de acuerdo a las condiciones a la frontera del problema<sup>5</sup>.

Por otra parte, si multiplicamos la ecuación (2.11) por  $r^2$ , obtenemos lo siguiente

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + \alpha^2 r^2 R = 0 \quad (2.13)$$

y haciendo un cambio de variable  $u = \alpha r$ , la ecuación (2.13) se puede escribir como

$$u^2 \frac{d^2 R}{du^2} + u \frac{dR}{du} + u^2 R = 0 \quad (2.14)$$

la cual presenta la forma de la ecuación de Bessel de orden cero.

La solución general para (2.14) es una función bien conocida dentro de los textos de funciones especiales, y es de la forma

$$R(u) = \Lambda_1 J_0(u) + \Lambda_2 Y_0(u) \quad (2.15)$$

de donde  $J_0(u)$  y  $Y_0(u)$  son las funciones de Bessel de primera y segunda clase, respectivamente, ambas de orden cero<sup>6</sup>.



Por otro lado, reescribiendo (2.12) tenemos

$$\frac{dZ}{dz} - \beta^2 Z = 0$$

cuya solución general es la suma de dos funciones exponenciales<sup>5</sup>.

$$Z(z) = B_1 e^{+\beta z} + B_2 e^{-\beta z} \quad (2.16)$$

La mayoría de las constantes que aparecen en las soluciones (2.15) y (2.16) serán evaluadas en la siguiente sección cuando hablemos de las condiciones a la frontera. Sin embargo, podemos hacer algunas observaciones de carácter matemático que simplificarán este par de soluciones.

En primer lugar consideramos la ecuación (2.15). Esta ecuación presenta un punto singular regular en  $u = 0$ , es decir en  $r = 0$ , debido a la forma que presenta  $Y_0(u)$

$$Y_0(u) \approx \frac{2}{\pi} \ln u$$

Si se toman valores de  $u$  próximos a cero, entonces  $Y_0$  tenderá a menos infinito. Es decir, si  $u \rightarrow 0$  entonces  $Y(u) \rightarrow -\infty$ , y la solución presentará una singularidad logarítmica en dicho punto<sup>5</sup>.

Con el objeto de evitar que esta singularidad aparezca en nuestra solución, es conveniente elegir  $A_2 = 0$  y se asegura que la solución sea finita en el intervalo de 0 a  $x$ . Por lo tanto la ecuación (2.15) se reduce a la siguiente forma

$$R(u) = A_1 J_0(u) \quad (2.17)$$

Vamos a considerar ahora la ecuación (2.16). La elección de  $B_1 = 0$  o bien  $B_2 = 0$  estará determinada por las condiciones a la frontera. Por ejemplo en el caso en que  $z$  varíe de 0 a  $\infty$ , entonces  $e^{\beta z} \rightarrow \infty$ . Por lo tanto debemos elegir a  $B_2 = 0$  y así podemos asegurar una solución finita. Por lo cual la ecuación (2.16) se reduce a la siguiente expresión

$$Z(z) = B_1 e^{\beta z} \quad (2.18)$$

Sin embargo, nuestro caso es de frontera finita y el argumento anterior no es válido. Por lo que la elección de la forma (2.18) es materia de conveniencia que adoptaremos con la finalidad de tener una solución bien comportada en los casos extremos que más adelante podrán discutirse.

Por lo tanto, la ecuación (2.8) nos queda de la siguiente forma

$$\mathcal{H}(r, z) = A_1 B_1 J_0(\alpha r) e^{\beta z} \quad (2.19)$$

en donde  $A_1$ ,  $B_1$  y  $\beta$  son constantes que serán evaluadas a partir de las condiciones a la frontera, lo cual es tema de la siguiente sección.

### 2.3 - LA EVALUACION DE LAS CONSTANTES

En la seccion (2.2) se consideró que el sistema termodinámico se caracteriza por las condiciones de simetría axial. Esto significa que la temperatura es una función que depende solo de  $r$  y  $z$ .

Vamos a suponer que la pared lateral del cilindro se mantiene a temperatura constante  $T_2$ , y también se considera que la temperatura en el centro de la tapa superior como inferior es  $T_1$  y  $T_0$ , respectivamente, como se muestra en la Figura (2.2).

Con el objeto de simplificar la solución matemática, supondremos que la temperatura de la superficie lateral es igual a cero<sup>7</sup>, lo cual se obtiene haciendo un corrimiento del origen de las temperaturas restando  $T_2$ . Esto quedará hecho en los siguientes párrafos, en el entendido de que una vez obtenido el resultado, el origen de las temperaturas volverá a corregirse sumando el factor  $T_2$  nuevamente.

También se supone como hipótesis que:

$$T_1 > T_0 > T_2 = 0$$

esto indica que  $T_1$  y  $T_0$  son siempre positivas.

Entonces nuestro sistema nos queda de la siguiente manera, como se muestra en la Figura (2.3).

Vamos a evaluar las constantes  $B_1$  y  $\beta$  que aparecen en (2.18)

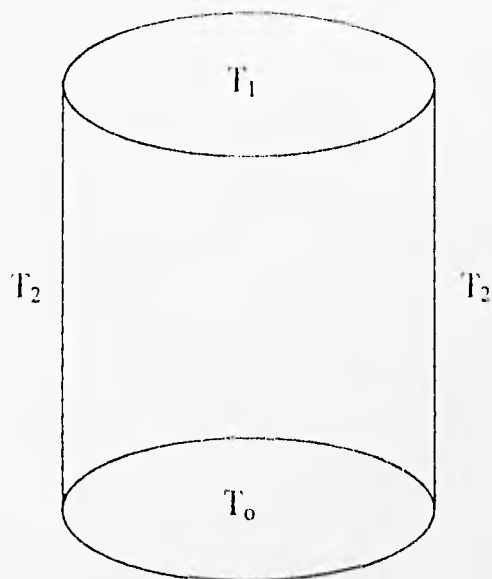


Figura (2.2) : Se supone una temperatura  $T_2$  constante en la pared lateral del cilindro y una temperatura  $T_1$  y  $T_0$  en el centro de las tapas superior e inferior.

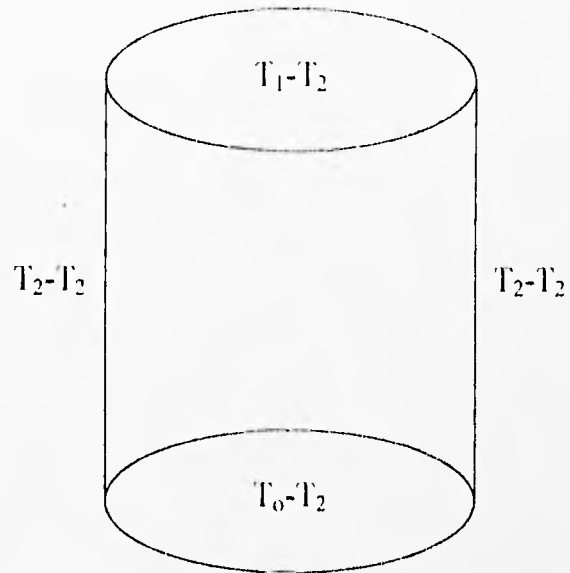


Figura (2.3) : Se supone una resta de  $T_2$  a todo el cilindro para evaluar las condiciones a la frontera.

Para  $z = 0$ , de (2.18) se tiene que

$$Z(0) = B_1 e^{-\beta \cdot 0} = T_1 - T_2$$

de donde  $B_1$  es dado por

$$B_1 = T_1 - T_2 \quad (2.20)$$

Para el caso en que  $z = L$ , la ecuación (2.18) toma la forma

$$Z(L) = (T_1 - T_2) e^{-\beta L} = T_1 - T_2$$

de donde se obtiene

$$\beta = -\frac{1}{L} \ln \left( \frac{T_1 - T_2}{T_1 - T_2} \right) \quad (2.21)$$

Por lo tanto la ecuación (2.18) toma la forma siguiente

$$Z(z) = (T_1 - T_2) e^{-\beta z} \quad (2.22)$$

en donde  $\beta$  se calcula a partir de (2.21).

Por otro lado, las constantes  $A_1$  y  $\alpha$  que aparecen en la ecuación (2.17), se evalúan a partir de la solución  $R(u)$ . Primero consideramos la condición a la frontera para  $r = 0$ . En estas circunstancias, la variación de la temperatura ocurrirá a lo largo del eje del cilindro, o sea en  $Z(z)$ , exclusivamente.

Entonces para la condición  $r = 0$  se requiere que  $A_1 = 1$ , además, para esta misma condición la función de Bessel  $J_0(\alpha 0) = 1$ .

Por lo tanto

$$R(\alpha 0) = A_1 J_0(\alpha 0) = 1$$

donde

$$A_1 = 1 \tag{2.23}$$

Ahora bien, como la temperatura en la pared del cilindro es cero, entonces en la frontera  $r = r_0$ , la función  $R(\alpha r)$  se debe anular. Es decir, como consecuencia del valor en la frontera en  $r = r_0$  y por la forma en que se ha considerado la distribución de temperatura dentro del cilindro, ecuación (2.8), es preciso que se cumpla la siguiente igualdad

$$R(\alpha r_0) = J_0(\alpha r_0) = 0$$

Con esta relación donde se muestra que fue sustituida la ecuación (2.23), se satisface la condición a la frontera en  $r = r_0$  para cualquier valor  $z$  en el intervalo de 0 a  $L$ .

En otras palabras, el requerimiento para que la temperatura se anule en la pared lateral del cilindro, significa que  $\alpha$  puede tomar sólo los siguientes valores especiales<sup>8</sup>

$$\alpha_m = \frac{\lambda_m}{r_0} \quad \text{con } m=1, 2, 3, \dots$$

en donde  $\lambda_m$  son las raíces de  $J_n(\lambda_m) = 0$ .

De acuerdo a la teoría y a las características sobre las funciones de Bessel, no se tienen raíces complejas ni repetidas, el número de raíces reales es infinito y para cada raíz  $\lambda_m$ , le corresponde una negativa  $-\lambda_m$ .

En términos generales, la función  $J_n(u)$  con  $n = 0, 1, 2, \dots$ , no tiene raíces complejas y tiene un número infinito de raíces reales simétricamente colocadas con respecto al punto  $u=0$ , el cual es por sí mismo un cero si  $n > 0$ . Todos los ceros de  $J_n(u)$  son simples, excepto en  $u = 0$ , el cual es un cero de orden  $n$  si  $n > 0$ , como se muestra en la Figura (2.4)<sup>9</sup>.

Las funciones de Bessel  $J_n(u)$  oscilan pero no son periódicas, excepto en el límite a medida que  $u \rightarrow \infty$ , pues su amplitud no es constante sino que disminuye asintóticamente como  $u^{-1/2}$ .

En la solución de problemas de aplicación, se necesita información acerca de la localización de los ceros de las funciones de Bessel, y en particular se debe ser capaz para hacer cálculos aproximados de los valores de estos ceros.

La información que esto nos aporta, es que tenemos un número infinito de valores  $\lambda_m$  para los cuales  $J_n(\lambda_m) = 0$ . Esto trae como consecuencia que la distribución de temperatura,



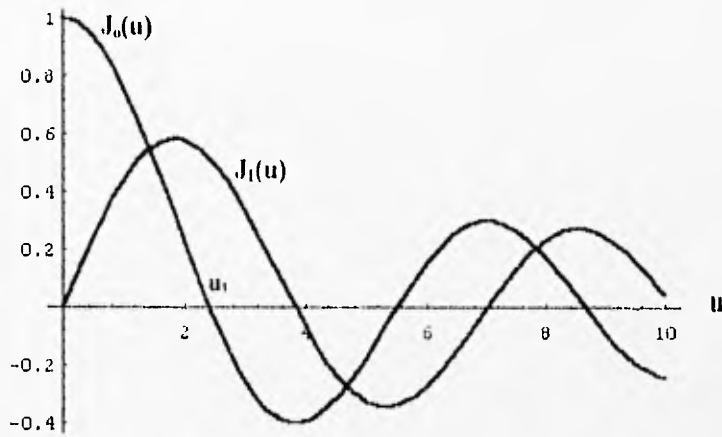


Figura (2.4) : Funciones de Bessel de primera clase de orden cero y uno.

ecuación (2.19), se debe escribir como una suma infinita de terminos sobre estas raíces es decir

$$\mathcal{T}(r, z) = (T_0 - T_1) e^{-\mu' z} \sum_{m=1}^{\infty} J_0(\alpha_m r) \quad (2.24)$$

aquí se nota que (2.22) fue sustituida en la ecuación (2.19).

De acuerdo a la gráfica de la figura (2.4), donde se muestra  $J_0(u)$ , notamos que esta función toma valores positivos y negativos a lo largo de todo su dominio. Ahora bien, cabe hacer mención a la siguiente pregunta: ¿Qué significado físico podría aportar el cambio de signo de  $J_0(u)$  en la distribución de temperatura?

Para responder, debemos analizar cuidadosamente el comportamiento de la temperatura representada por la ecuación (2.24), ya que  $J_0(u)$  corresponde a los valores de  $\mathcal{T}$  a lo largo del radio.

Si se considera todo el dominio de  $J_0(u)$  donde esta función toma tanto valores positivos como negativos, entonces por la relación (2.24), la temperatura también tomará valores positivos y negativos.

Por esta razón y con el objeto de evitar que la distribución de temperatura tome valores negativos, se debe acotar el dominio de  $J_0(u)$  de tal modo que  $J_0$  sea siempre positiva para toda  $u$  dentro del nuevo intervalo.

Para satisfacer las condiciones anteriores, se tomara en cuenta solo el intervalo de  $u=0$  a la primera raíz  $u_1=\lambda_1$ , en donde  $J_0$  es siempre positiva, como se muestra en la Figura (2.4).

Este intervalo corresponde a las mismas condiciones impuestas por el problema, porque de acuerdo a la definición  $u = \alpha r$ , se tiene que para  $r = 0$  entonces  $u = 0$ , y por otro lado, para  $r = r_0$  corresponde  $u_1 = \alpha_1 r_0 = \lambda_1$  en donde  $\lambda_1$  es la primera raíz de  $J_0(u)$ , y tiene un valor<sup>10 y 11</sup> de  $\lambda_1=2.405$ , del cual tenemos

$$\alpha_1 = \frac{2.405}{r_0} \quad (2.25)$$

Por lo que la ecuación (2.24) se reduce al caso particular impuesto por las condiciones anteriores, de este modo, se va a considerar sólo la primera raíz de  $J_0(u)$ , la cual corresponde a  $m = 1$ , y así la ecuación (2.24) toma la forma particular

$$\mathcal{J}(r, z) = (T_0 - T_1) J_0(\alpha_1 r) e^{-\beta z} \quad (2.26)$$

A partir de esta consideración sobre el dominio de  $J_0(u)$ , se garantiza que esta función es siempre positiva y, por lo tanto, es inmediato que de acuerdo a la ecuación (2.26), la distribución de temperatura también será positiva.

Sin embargo, existen otras raíces de  $J_0(u)$  entre las cuales esta función también es positiva. Por ejemplo, si se tomara como dominio el intervalo  $\lambda_n \leq u \leq \lambda_{n+1}$  de

tal manera que  $J_0(u)$  fuera no negativa entonces, a  $\lambda_n$  le corresponde un radio  $r_n = \frac{\lambda_n}{\alpha}$  y a  $\lambda_{n+1}$  el radio  $r_{n+1} = \frac{\lambda_{n+1}}{\alpha}$  ambos distintos de cero. Pero en este caso no se está considerando todo el cilindro, sino únicamente la región de éste que se encuentra entre el radio interior  $r_n$  y el exterior  $r_{n+1}$ .

Es posible representar esquemáticamente y a grandes rasgos el comportamiento de la distribución de temperatura dentro del cilindro.

En la figura (2.5) se muestra la superposición de la función  $J_0(u)$  con nuestro sistema. Es importante observar que, de acuerdo a la forma en cómo decrece  $J_0(\alpha r)$ , la temperatura también será una función decreciente a medida que  $r$  tienda a  $r_0$  para anularse finalmente en  $r = r_n$ , Figura (2.5a).

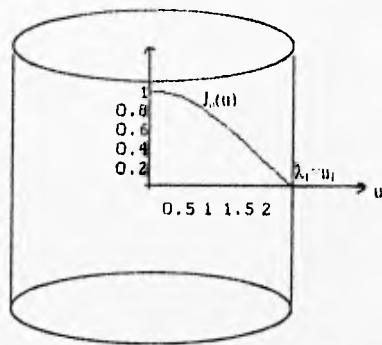
Por otra parte, en la Figura (2.5b), se observa que no es posible tomar en cuenta otra raíz además de  $\lambda_1$  debido a que introduce un valor negativo a la distribución de temperatura.

Una vez que han sido evaluadas las constantes que aparecen en las ecuaciones (2.17) y (2.18), se suma la temperatura  $T_2$  y se puede escribir la distribución de temperatura de acuerdo a la ecuación (2.26) como

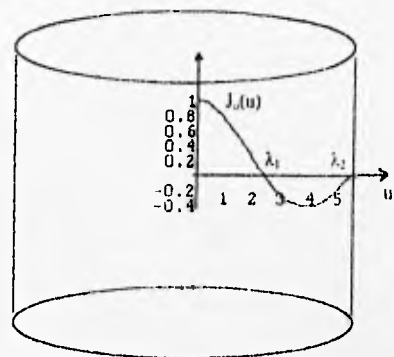
$$\mathcal{T}(r, z) = (T_0 - T_2) J_0(\alpha r) e^{-\beta z} + T_2 \quad (2.27)$$

en donde por comodidad se reemplazó  $\alpha_1$  por  $\alpha$ .

Las constantes  $\alpha$  y  $\beta$  se calculan a partir de (2.25) y (2.21), así como de (2.20) a  $B_1$ .



(a)



(b)

Figura (2.5) : a)  $J_0(u)$  es una función decreciente: es máxima en  $r = 0$  y se anula en  $r = r_0$ .

b) Si se toma en cuenta dos raíces de  $J_0(u)$ , se introduce un signo negativo a la temperatura, debido a que entre  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , por ejemplo,  $J_0(u)$  es menor que cero.

La ecuación (2.27) es la función de temperatura dentro del sistema. El resultado dado por esta ecuación es la única solución que se puede establecer en condiciones de simetría axial y en las condiciones a la frontera determinadas anteriormente.

Esta relación determina la temperatura en cualquier punto dentro del cilindro, y a partir de ella y con la ley de Fourier, se obtiene el comportamiento del flujo de calor dentro de éste, que no será sino más adelante en que se determine su forma analítica.

#### 2.4.- LAS CONDICIONES A LA FRONTERA DE UN PROBLEMA ALTERNATIVO.

A continuación se determinará la solución de la distribución de temperatura para la misma cavidad cilíndrica en la que alternativamente cambiamos las condiciones a la frontera del problema, como a continuación se describen.

Consideremos ahora el problema en el que las condiciones a la frontera son que tanto la pared lateral como la base del cilindro se encuentran a temperatura constante  $T_2$ , mientras que en la tapa superior varía como función de  $r$ , Figura (2.6). El propósito es encontrar la función de distribución de temperatura en cualquier punto dentro del sistema.

Con el objeto de que la distribución de temperatura  $T(r,z)$  sea univaluada y se anule en  $z = 0$ , las funciones  $R(r)$  y  $Z(z)$  se deben escribir como

$$R(r) = A_1 J_0(\alpha r) \quad \text{y} \quad Z(z) = B_1 \operatorname{senh}(\beta_1 z) \quad (2.28)$$

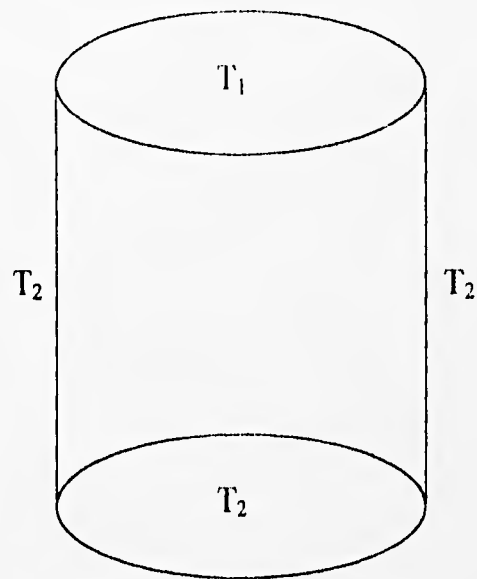


Figura (2.6) : La temperatura de la tapa superior del cilindro varia como función del radio, mientras que en la pared lateral y la tapa inferior permanecen a temperatura constante.

El requerimiento para que la temperatura se anule en  $r = r_0$ , significa que  $\alpha$  puede tomar sólo el valor especial dado por la ecuación (2.25). Para el caso en el que  $r = 0$ , se trata de la distribución de temperatura en el eje del cilindro, la cual está dada por la función  $Z(z)$  únicamente, por lo que elegimos  $A_1 = 1$ .

Al igual que en la sección anterior, se restará a todo el sistema de la Figura (2.6) la temperatura  $T_2$ , esto se hace con el objeto de obtener tanto en la pared lateral como en la base del cilindro una temperatura constante cero si, encontramos una solución matemática que nos especifique la distribución de temperatura en dicha figura.

Combinando estos resultados del corrimiento de las temperaturas en la ecuación (2.8), encontramos que la distribución de temperatura dentro del cilindro viene dada por

$$\mathcal{T}(r, z) = B_1 J_0(\alpha r) \sinh(\beta_1 z) \quad (2.29)$$

Para evaluar las constantes, consideremos la condición a la frontera en la que  $r = 0$ . En este caso la ecuación (2.29) toma la forma

$$\mathcal{T}(0, z) = B_1 \sinh(\beta_1 z)$$

la cual, si  $z = L$  se transforma en

$$\mathcal{T}(0, L) = B_1 \sinh(\beta_1 L) = T_1 - T_2$$



en el que se ha tomado en cuenta que la temperatura en el centro de la tapa superior es  $T_1 - T_2$ . De esta última igualdad se tiene que

$$B_1 = \frac{T_1 - T_2}{\sinh(\beta_1 L)} \quad (2.30)$$

Es importante observar que  $\beta_1$  queda evaluada por la condición que relaciona a las constantes de separación  $\alpha^2 - \beta_1^2 = \gamma^2$ , ya que por un lado  $\alpha$  queda determinada por (2.25), mientras que  $\gamma$  se evalúa a partir de la solución (2.6) cuando definimos a

$$\tau = \frac{l}{\gamma^2 k} \quad (2.31)$$

como la constante de tiempo, la cual indica el intervalo de tiempo en el que el sistema termodinámico reacciona ante una diferencia de temperatura. Dicha cantidad se evalúa experimentalmente. Al igual que  $\tau$ , la conductividad térmica  $k$  también se puede determinar experimentalmente y depende del medio a través del cual tenga lugar el flujo de calor.

Resumiendo, si las condiciones a la frontera se modifican de tal modo que en la pared lateral del cilindro y en la tapa inferior la temperatura sea cero, mientras que en la tapa superior varíe como función de  $r$ , entonces la distribución de temperatura en cualquier punto dentro de la cavidad cilíndrica, estará determinada por la relación

$$S_1(r, z) = \frac{T_1 - T_2}{\sinh(\beta_1 L)} J_0(\alpha r) \sinh(\beta_1 z) + T_2 \quad (2.32)$$

en donde debe observarse que se ha agregado el término  $T_2$  que anteriormente se había restado y  $\alpha$  está determinada por (2.25) así como  $\beta_1$  se calcula a partir de la relación  $\alpha^2 - \beta_1^2 = \gamma^2$ .

Por otra parte, la forma particular de la solución (2.29) queda determinada por el requerimiento de que la temperatura se anule en  $z = 0$  para cualquier  $r$  arbitraria y en  $r = r_0$  para toda  $z$ . Entonces, para diferentes condiciones a la frontera, la función de distribución de temperatura tomará una forma distinta.

Sin embargo la ecuación (2.29) representa una serie de Bessel-Fourier que es apropiada para un intervalo finito en  $r$ . Si  $r_0 \rightarrow \infty$ , la serie se transforma en una integral en una forma completamente análoga a la transformación de una serie de Fourier trigonométrica a una integral de Fourier<sup>8</sup>. Así, por ejemplo, si la temperatura es finita para  $z \geq 0$  y se anula para cuando  $z \rightarrow \infty$ , entonces la forma general de la solución para  $z \geq 0$  debe ser

$$\mathcal{T}(r, z) = B_1 J_0(\alpha r) e^{-\beta_1 z} + T_2$$

que es la función de distribución de temperatura determinada en la sección anterior. Por lo que se observa una equivalencia entre las funciones de distribución (2.27) y (2.32).

Una vez que se ha determinado la distribución de temperatura dentro del cilindro, en la siguiente sección se procederá a determinar la forma y el comportamiento de las líneas de flujo de calor en este sistema.

Se pretende encontrar la forma general de la Ley de Fourier para el flujo de calor total en un cilindro de longitud variable, a partir de la cual se analiza el flujo en las fronteras geométricas del sistema termodinámico

## 2.5 - LEY GENERALIZADA DE FOURIER: EL FLUJO DE CALOR TOTAL.

El objetivo principal de esta sección consiste en determinar la forma analítica para el flujo de calor dentro de la cavidad cilíndrica, a partir de las funciones de distribución de temperatura obtenidas en las dos secciones anteriores y que están dadas por las ecuaciones (2.27) y (2.32).

Primero se determinará la ley generalizada de Fourier a partir de la función de distribución (2.27) y se procederá en forma análoga con la función (2.32).

Considerar la ecuación (2.27), podemos representar matemáticamente la variación de temperatura  $\mathcal{T}(r,z)$  con respecto a la temperatura de la tapa inferior en cualquier punto dentro del cilindro. La variación de temperatura la determina la relación

$$\mathcal{T}(r,z) - (T_0 - T_2) = (T_0 - T_2) \left[ J_0(\alpha r) e^{\beta z} - 1 \right] + T_2 \quad (2.33)$$

El flujo de calor total  $\mathcal{J}_T(r,z)$  dentro de la cavidad cilíndrica está determinado por la ley de Fourier

$$\mathbf{J}_1(r,z) = -k \nabla [\mathcal{T}(r,z) - (T_1 - T_2)] \quad (2.34)$$

en donde  $k$  es la conductividad térmica del medio.

De acuerdo a la simetría geométrica del sistema, el operador gradiente se escribe en coordenadas cilíndricas y de la ecuación (2.34) se tiene

$$\bar{\mathbf{J}}_1(r,z) = -k \left[ \frac{\partial [\mathcal{T}(r,z) - (T_1 - T_2)]}{\partial r} \bar{\mathbf{r}} + \frac{\partial [\mathcal{T}(r,z) - (T_1 - T_2)]}{\partial z} \bar{\mathbf{z}} \right] \quad (2.35)$$

en donde el término correspondiente al ángulo  $\theta$  se anula de acuerdo a la suposición de simetría axial establecida en la primera sección.

Es posible expresar el flujo de calor total en términos de sus magnitudes correspondientes en la dirección  $\bar{\mathbf{r}}$ , dada por  $\mathbf{J}_r(r,z)$  y en la dirección  $\bar{\mathbf{z}}$  por  $\mathbf{J}_z(r,z)$ .

De esta manera la ecuación (2.35) se modifica en

$$\bar{\mathbf{J}}_1(r,z) = \mathbf{J}_r(r,z) \bar{\mathbf{r}} + \mathbf{J}_z(r,z) \bar{\mathbf{z}} \quad (2.36)$$

en donde la magnitud del flujo de calor en la dirección  $\bar{\mathbf{r}}$  es

$$\mathbf{J}_r(r,z) = -k \frac{\partial}{\partial r} [\mathcal{T}(r,z) - (T_1 - T_2)] \quad (2.37)$$

mientras que para  $\bar{z}$  viene dada por

$$\mathbf{J}_z(r, z) = -k \frac{\partial}{\partial z} [\mathcal{J}(r, z) - (T_0 - T_2)] \quad (2.38)$$

Con el objeto de calcular la forma analítica de las componentes del flujo de calor total, partimos de la ecuación (2.36) en la que sustituimos las componentes del flujo (2.37) y (2.38)

$$\bar{\mathbf{J}}_r = -k \frac{\partial}{\partial r} [\mathcal{J}(r, z) - (T_0 - T_2)] \bar{r} - k \frac{\partial}{\partial z} [\mathcal{J}(r, z) - (T_0 - T_2)] \bar{z} \quad (2.39)$$

De la relación (2.33) y haciendo uso de la relación de recurrencia para la derivada de la función de Bessel de primera clase, dada por

$$J_0^m = -J_1^{m-1}$$

donde m es el número de derivadas, la ecuación (2.39) se transforma en

$$\bar{\mathbf{J}}_r = k\alpha (T_0 - T_2) e^{-\beta z} J_1(\alpha r) \bar{r} + k\beta (T_0 - T_2) e^{-\beta z} J_0(\alpha r) \bar{z} \quad (2.40)$$

en donde  $J_1(\alpha r)$  es la función de Bessel de primera clase de orden uno. Es importante señalar que la ecuación (2.40) presenta la forma de la ley de Fourier debido al operador diferencia de temperatura. Con el objeto de llevar esta última ecuación a una forma de ley generalizada, utilizamos la ecuación (2.33) de la que se tiene lo siguiente

$$T_o - T_z = \frac{\mathcal{J}(r, z) - T_o}{J_o(\alpha r) e^{-\beta z} - 1} \quad (2.41)$$

Finalmente, sustituyendo (2.41) en (2.40) obtenemos el flujo de calor total en cualquier punto dentro de la cavidad cilíndrica, esto es

$$\bar{J}_r = k \left[ \frac{\mathcal{J}(r, z) - T_o}{J_o(\alpha r) - e^{\beta z}} \right] [\alpha J_1(\alpha r) \bar{r} + \beta J_o(\alpha r) \bar{z}] \quad (2.42)$$

La ecuación (2.42) es la Ley Generalizada de Fourier<sup>12</sup> para el flujo de calor en cavidades con simetría cilíndrica. Además, expresa las modificaciones a la ley de Fourier canónica debido a la presencia de las fronteras teniendo la facultad de analizar los casos límites más sencillos cuando varían los parámetros de tal manera que se obtiene la ley de Fourier para el flujo de calor.

De esta ecuación se observa que el flujo de calor dentro de la cavidad tiene componentes a lo largo de las dos direcciones. Esta consecuencia radica en que la

distribución de temperatura dentro del cilindro depende de las variables  $r$  y  $z$ , por lo tanto habrá un gradiente de temperatura quien dará origen al flujo de calor en estas direcciones

Tal y como se mencionó al principio de esta sección, se procederá a determinar la ley generalizada de Fourier para el caso en el que las condiciones a la frontera se modifican de acuerdo a la sección (2.4). De esta sección se tiene que la función de distribución de temperatura viene dada por la ecuación (1.32)

$$\mathcal{T}(r, z) - T_2 = B_1 J_0(\alpha r) \sinh(\beta_1 z) \quad (2.43)$$

en donde definimos a  $B_1$ , como

$$B_1 = \frac{T_1 - T_2}{\sinh(\beta_1 L)}$$

y  $\beta_1$  se calcula por  $\alpha^2 - \beta_1^2 = \gamma^2$ , mientras que  $\alpha$  esta determinada por (2.25) y  $\gamma$  por (2.31).

El flujo de calor total  $\mathbf{J}_{1r}(r, z)$  dentro de la cavidad cilíndrica, queda determinada por la ley de Fourier

$$\mathbf{J}_{1r}(r, z) = -k \nabla [\mathcal{T}(r, z) - T_2] \quad (2.44)$$

en la que de acuerdo a la simetría del sistema, el operador gradiente se escribe en coordenadas cilíndricas para que la ecuación (2.44) se transforme en

$$\bar{J}_{1r}(r, z) = -k \left[ \frac{\partial [\mathcal{J}_1(r, z) - T_2]}{\partial r} \bar{r} + \frac{\partial [\mathcal{J}_1(r, z) - T_2]}{\partial z} \bar{z} \right] \quad (2.45)$$

Si sustituimos la función de distribución (2.43) en la ecuación (2.45), y con un sencillo desarrollo matemático de derivada la expresión anterior toma la forma

$$\bar{J}_{1r}(r, z) = k \alpha B_1 \sinh(\beta_1 z) J_1(\alpha r) \bar{r} - k \beta_1 B_1 \cosh(\beta_1 z) J_0(\alpha r) \bar{z} \quad (2.46)$$

De la ecuación (2.43) despejamos a  $B_1$  para sustituirla en la última expresión, la que nos queda de la siguiente manera

$$\bar{J}_{1r}(r, z) = k [\mathcal{J}_1(r, z) - T_2] \left[ \alpha \frac{J_1(\alpha r)}{J_0(\alpha r)} \bar{r} - \beta_1 \frac{\cosh(\beta_1 z)}{\sinh(\beta_1 z)} \bar{z} \right] \quad (2.47)$$

Esta ecuación representa la ley generalizada de Fourier correspondiente a la función de distribución de temperatura ecuación (2.43). De la relación (2.47) se observa también que las componentes del flujo de calor son a lo largo de las dos direcciones, debido a la forma que presenta la función de distribución de temperatura en términos de  $r$  y  $z$ .

En la sección (2.6) se verá la relación que existe entre el flujo de calor total y la componente del flujo de calor que corresponde a una de las direcciones del sistema termodinámico, de la que se analizarán sus consecuencias para los casos de fronteras variables.



## 2.6 - FLUJO DE CALOR EN VARIABLES RELATIVAS VARIACION GEOMETRICA.

En esta sección se analizará la ley generalizada de Fourier para el flujo de calor dentro de la cavidad cilíndrica para los casos en que las fronteras geométricas tiendan a valores extremos con respecto a cada una de las dimensiones correspondientes a las variables del sistema termodinámico.

El objetivo de la presente sección es determinar la relación que existe entre el flujo de calor total y la componente del flujo de calor que corresponde a una de las direcciones del sistema termodinámico cuando uno de los límites de la cavidad se extiende a valores mucho mayores con respecto al otro.

Para llevar a cabo nuestro propósito, se va a considerar la ecuación (2.40) que nos determina el flujo de calor total dentro de la cavidad cilíndrica dada por la ecuación

$$\vec{J}_1 = k\alpha (T_0 - T_2) e^{-\beta z} J_1(\alpha r) \vec{r} + k\beta (T_0 - T_2) e^{-\beta z} J_0(\alpha r) \vec{z} \quad (2.40)$$

Como ya se comentó, la ecuación (2.40) expresa las componentes del flujo de calor en cada una de las direcciones del sistema.

Para proceder al flujo de calor en variables relativas se retomará la ecuación (2.21)

$$\beta = -\frac{1}{L} \ln \left( \frac{T_1 - T_2}{T_0 - T_2} \right) \quad (2.21)$$

de la cual despejaremos a  $L$ , y nos queda de la siguiente manera

$$\beta = \frac{C}{L} \quad (2.48)$$

en donde "C", se denota como el factor de intensidad y esta descrito por la siguiente igualdad

$$C = \ln \left( \frac{T_0 - T_2}{T_1 - T_2} \right) \quad (2.49)$$

Para proceder al flujo de calor de una de las variables, se escribirá por separado cada componente de la ecuación (2.40), como a continuación se muestran

$$\bar{J}_r = k\alpha (T_0 - T_2) e^{-\beta z} J_1(\alpha r) \bar{r} \quad (2.50)$$

y en donde

$$\bar{J}_z = k\beta (T_0 - T_2) e^{-\beta z} J_0(\alpha r) \bar{z} \quad (2.51)$$

A) Primero se analizará la ecuación (2.50), y se dejará por analizar mas adelante la ecuación (2.51).

Si despejamos y sustituimos en la ecuación (2.50) la ecuación (2.48), y con un sencillo desarrollo algebraico queda de la siguiente manera

$$\frac{J_1}{k\alpha (T_0 - T_2)} = J_1(\alpha r) e^{-\alpha x} \quad (2.52)$$

en donde

$$x = \frac{z}{L} \quad (2.53)$$

Por lo anterior cabe destacar que de la ecuación (2.49), tenemos lo siguiente

$$(T_0 - T_2) = (T_1 - T_2) e^{\alpha z} \quad (2.54)$$

esta igualdad implica que

$$\frac{T_0 - T_2}{T_1 - T_2} < 1 \quad (2.55)$$

dados que  $T_1 > T_m$ , entonces nuestra constante "C" de la ecuación (2.50), deberá tomar valores negativos, o sea que el valor "C" se encuentra entre

$$-n < C < 0$$

en donde n, no puede ser un número muy grande.

La gráfica de la ecuación (2.52) se muestra en la Figura (2.7). En la cual se observa como el flujo parte de cero y a medida que va incrementándose el radio pero dependiendo de una longitud constante, va aumentando el flujo radial; y esto hace que la curva tome un cierto valor máximo y disminuya por la función de Bessel.

B) Ahora se va a describir el análisis de la ecuación (2.51), en la cual se va a proceder de la misma manera que se hizo con la ecuación (2.50).

Si despejamos y sustituimos en la ecuación (2.51) la ecuación (2.48), y con un sencillo desarrollo algebraico se transforma en

$$\frac{J}{k\beta(T_o - T_i)} = J_o(\alpha r) e^{-\alpha z} \quad (2.56)$$

En donde al igual que la ecuación (2.52) donde se muestra el comportamiento del flujo radial, obtenemos la gráfica de la ecuación (2.56) en la Figura (2.8); en la cual se muestra como el flujo relativo máximo parte de la máxima altura del cilindro y a medida que

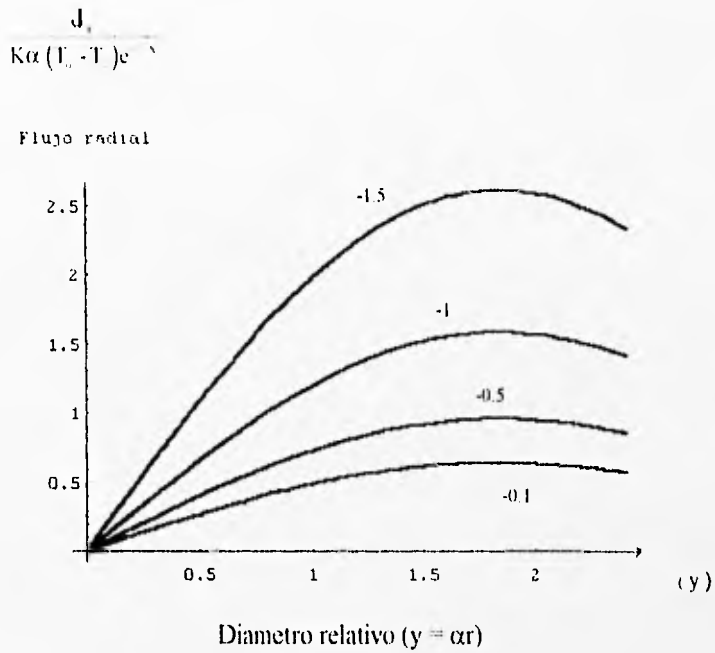


Figura (2.7): Si el diámetro relativo es muy pequeño, entonces el flujo radial es casi nulo, y a medida que va incrementándose el diámetro, el flujo de calor va aumentando hasta obtener un valor máximo; esto es debido a la función de Bessel de orden uno. La familia de curvas son descritas por la ecuación:

$$\frac{J_1}{K\alpha(T_o - T_i)e^{-Cx}} = J_1(\alpha r)$$

en donde  $x = 1$  y "C" es el parámetro que define cada curva que toma los siguientes valores de (-0.1, -0.5, -1 y -1.5).

se descende va decreciendo el flujo, hasta obtener un valor constante de uno, esto es debido a la presencia de la función de Bessel de orden cero

Por lo anterior cabe mencionar que el análisis que se hizo respecto a las ecuaciones (2.50) y (2.51), en el cual se vio el comportamiento del flujo de calor tanto radial como relativo, se mostró como se comporta el flujo de calor dentro de un cilindro no importando el tamaño de éste, ya que este análisis es válido para cualquier tamaño de cilindro.

Por otra parte, si deseamos calcular el flujo de calor manteniendo alguna variable constante ya sea tanto la longitud como el radio, cabe hacer mención al siguiente análisis en el cual como se mencionó al principio de esta sección, se verá la relación que existe entre el flujo de calor total y la componente del flujo de calor que corresponde a alguna de las direcciones.

Para llevar a cabo este análisis, se considerará la ecuación (2.40), ya que nos determina el flujo de calor total, así como las ecuaciones (2.50) y (2.51) que corresponden a cada dirección del sistema termodinámico.

Este análisis se hará por separado para ver el comportamiento del flujo en una dirección con respecto al flujo de calor total, esto es cuando se mantiene la longitud o el radio constante.

Primero se verá el flujo en la dirección  $\vec{r}$  y posteriormente se analizará el flujo en la dirección  $\vec{z}$ .

$$\frac{J}{K \beta (T_1 - T_2) J_0(\alpha r)}$$

Flujo relativo

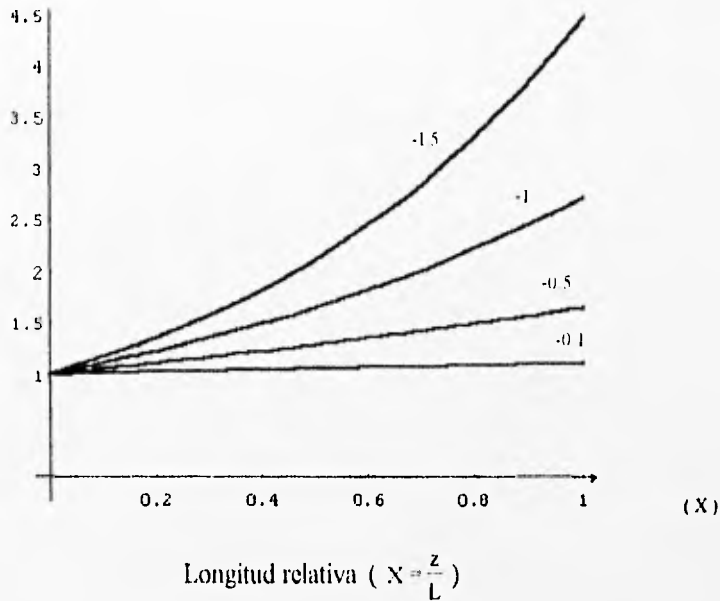


Figura (2.8): En esta gráfica se muestra como el flujo relativo parte de un valor máximo, o sea de la parte de arriba del cilindro y a medida que se desciende, el flujo relativo de calor en la dirección z va decreciendo hasta obtener un valor constante, para cualquier valor de r. Las curvas son descritas por la ecuación:

$$\frac{J_z}{K \beta (T_1 - T_2) J_0(\alpha r)} = e^{Cx}$$

en donde "x" es la variación de la longitud relativa acotada de  $0 \leq x \leq 1$  y "C" es el parámetro de cada curva que toma los siguientes valores de (-0.1, -0.5, -1 y -1.5).

C) Procediendo al análisis en la dirección  $r$ , se tomara en cuenta la ecuación (2.50) y se dividirá entre el flujo de calor total ecuación (2.40), entonces la magnitud del flujo de calor total se escribe como

$$\frac{|J_r|^2}{|J_r|^2 + |J_z|^2} = \frac{|J_1(\alpha r)\alpha|^2}{|J_1(\alpha r)\alpha|^2 + |J_0(\alpha r)\beta|^2} \quad (2.57)$$

Por otra parte si los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  dados por las ecuaciones (2.25) y (2.48) que a continuación se muestran

$$\alpha = \frac{\lambda}{r_0} = \frac{2.405}{r_0} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{C}{L} \quad (2.58)$$

los sustituimos en la ecuación (2.57), y con un sencillo desarrollo algebraico se transforma en

$$\frac{|J_r|^2}{|J_r|^2 + |J_z|^2} = \frac{1}{1 + \frac{|J_0(\alpha r_0)|^2 \left(\frac{C r_0}{L \lambda}\right)^2}{|J_1(\alpha r_0)|^2}} \quad (2.59)$$

en donde se ha supuesto un valor del radio constante digamos  $r_0$ , entonces al simplificar la notación definiremos a las funciones de Bessel de la siguiente manera



$$a = |J_1(\alpha r_1)|^2 \quad (2.60)$$

y en donde

$$b = |J_1(\alpha r_1)|^2 \quad (2.61)$$

Finalmente, escribimos la ecuación (2.59) de la forma

$$\frac{|J_1|^2}{|J_1|^2 + |J_2|^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{A} (\zeta)^2} \quad (2.62)$$

en donde A es una constante definida por

$$A = \frac{b \lambda_1^2}{a C^2} \quad (2.63)$$

mientras que

$$\zeta^2 = \frac{r_0^2}{L^2} \quad (2.64)$$

representa el cambio de variable.

De este modo, la ecuación (2.62) advierte que si la longitud de la cavidad aumenta mucho más rápido que el radio, entonces  $\zeta_1^2$  tiende a cero y, por lo tanto la relación entre el flujo de calor en la dirección del radio y el flujo de calor total tiende a uno

Esto significa que cuando la longitud del cilindro sea mucho mayor que el radio, el flujo de calor total tiene como única componente el flujo de calor radial, debido a que la componente del flujo de calor correspondiente al eje del sistema termodinámico tiende a cero

La gráfica de la ecuación (2.62) se muestra en la Figura (2.9) En la figura se observa que si  $L > r_0$ , el flujo de calor en la dirección del radio corresponde al flujo de calor total dentro del sistema termodinámico

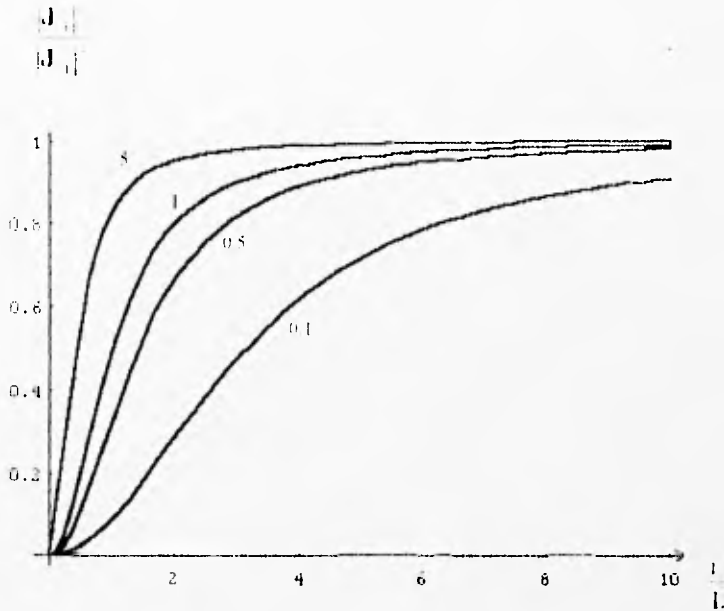
D) Ahora procediendo al análisis en la dirección  $\bar{z}$  y tomando en cuenta la ecuación (2.51), se desarrollará el mismo procedimiento que se hizo con (2.50).

De acuerdo a la ecuación (2.51) y dividiéndola entre el flujo de calor total ecuación (2.40), la magnitud del flujo de calor se escribe como

$$\frac{|J_z|^2}{|J_z|^2 + |J_r|^2} = \frac{|J_0(\alpha r)\beta|^2}{|J_0(\alpha r)\beta|^2 + |J_1(\alpha r)\alpha|^2} \quad (2.65)$$

y con un sencillo desarrollo algebraico la ecuación (2.65) se transforma en

Flujo radial



Longitud relativa:  $\zeta^2 = \frac{1}{L^2}$

Figura (2.9): Relación entre el flujo de calor radial y el flujo total. Cuando  $L > r_0$ , el flujo de calor total tiende a un valor correspondiente a la magnitud del flujo de calor en la dirección del eje z. Para este caso la componente del flujo de calor en la dirección del radio a lo largo del eje del cilindro tiende a cero. En el otro extremo, cuando  $L < r_0$ , el flujo de calor en la dirección del eje se hace cero y en dirección del radio se hace igual a la componente radial. La familia de curvas son descritas por la ecuación:

$$\frac{|J_r|^2}{|J_r|^2 + |J_z|^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{A}(\zeta)^2}$$

en donde "A" es el parámetro que define cada curva y que toma los siguientes valores constantes de (0.1, 0.5, 1 y 5).

$$\frac{|J_2|^2}{|J_2|^2 + |J_1|^2} = \frac{1}{1 + \frac{|J_1(\alpha r_0)|^2 (L \lambda_0)^2}{|J_0(\alpha r_0)|^2 (C r_0)^2}} \quad (2.66)$$

en donde se ha utilizado la relación para  $\alpha$  y  $\beta$  dada por la ecuación (2.25) y (2.48)

La ecuación (2.66) toma la forma

$$\frac{|J_2|^2}{|J_2|^2 + |J_1|^2} = \frac{1}{1 + A(\xi)^2} \quad (2.67)$$

en donde la cantidad A se define como una constante, la cual se determina por la ecuación (2.63), mientras que

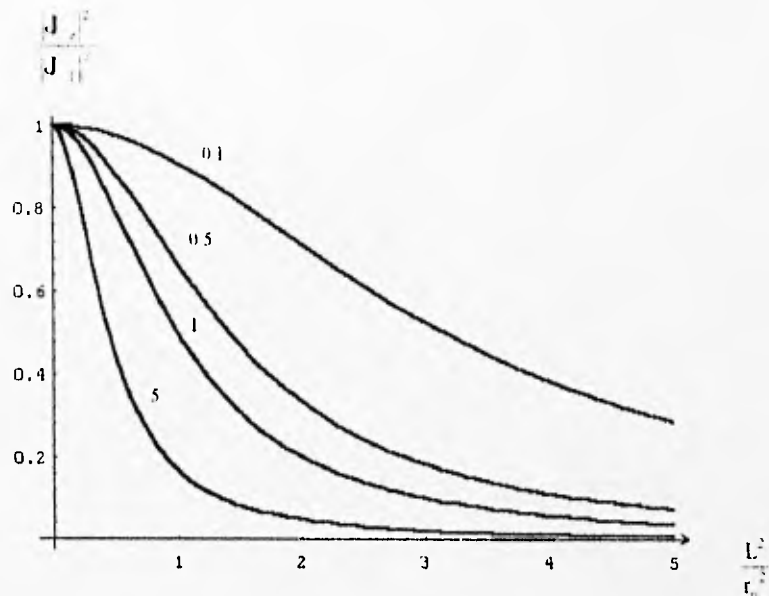
$$\xi^2 = \frac{L^2}{r_0^2} \quad (2.68)$$

representa el cambio de variable.

De una manera similar a la ecuación (2.62) se va a describir la ecuación (2.67), tomando en cuenta su dirección de cada componente.

Si el radio aumenta en la cercanía del eje del cilindro, la función de Bessel de orden cero disminuye y la de orden uno aumenta, esto implica que la constante "A" de la ecuación (2.63) aumenta.

Flujo relativo



Longitud relativa:  $\xi^2 = \frac{L^2}{r_0^2}$

Figura (2.10): Relación entre el flujo de calor azinutal y el flujo de calor total. Cuando  $r_0 > L$ , el flujo de calor total es paralelo al eje de la cavidad cilíndrica. Este análisis del flujo de calor en la dirección del sistema vale para cualquier  $z$ .

La familia de curvas son descritas por la ecuación:

$$\frac{|J_z|^2}{|J_z|^2 + |J_r|^2} = \frac{1}{1 + A(\xi)^2}$$

en donde "A" es el parámetro que define cada curva que toma los siguientes valores de ( 5, 1, 0.5 y 0.1 ).

Por lo tanto este análisis de la ecuación (2.67) vale para cualquier longitud, pero va a depender de un radio, o sea un radio constante

La gráfica de la ecuación (2.67) se muestra en la Figura (2.10). En la figura se observa como el flujo de calor parte de un máximo en la dirección del eje del sistema y, a medida que va aumentando la longitud va disminuyendo el flujo de calor dentro de un sistema termodinámico

En la siguiente sección se analizará el comportamiento del flujo de calor total correspondiente a las ecuaciones (2.40) y (2.46) para los casos especiales descritos a continuación.

## 2.7.- LEY DE FOURIER CANONICA.

En esta sección se analizará el comportamiento del flujo de calor para las ecuaciones (2.40) y (2.46), para los casos especiales, cuando se llega a obtener la ley de Fourier en su forma canónica<sup>1</sup>, en las regiones límites de la geometría del sistema.

Para llevar a cabo nuestros propósitos, partiremos de las ecuaciones de flujo de calor total en las que por separado, se reducen a los casos especiales de acuerdo a las condiciones establecidas en cada uno.

A) Como un primer caso se analizará el comportamiento del flujo de calor total ecuación (2.40), cuando tenemos las condiciones de  $r \rightarrow 0$  y  $z \rightarrow 0$ . Estas condiciones

corresponde a una región cilíndrica en la vecindad del eje del sistema. Así, la ecuación (2.40) se escribe como

$$J_1(0,0) = K/\beta (T_1 - T_2) \quad (2.69)$$

Pero si tomamos en cuenta la ecuación (2.56) en donde tenemos

$$\frac{T_0 - T_2}{T_1 - T_2} < 1 \quad (2.56)$$

entonces de la ecuación (2.21), el argumento de  $\left(\frac{T_1 - T_2}{T_0 - T_2}\right)$  debe estar restringido por la siguiente igualdad

$$1 < \left(\frac{T_1 - T_2}{T_0 - T_2}\right) < 2 \quad (2.70)$$

Por lo anterior cabe destacar que de esta última igualdad tenemos lo siguiente

$$T_1 - T_2 < 2T_0 - 2T_2$$

en donde al desarrollar, nos queda

$$T_2 < 2T_0 - T_1$$

entonces para que  $T_2 > 0$ , necesitamos que  $2T_0 - T_1 > 0$ , por lo tanto  $2T_0 > T_1$

Si utilizamos la siguiente regla aproximada de

$$\ln x \approx (x-1) \quad \text{para toda } 0 \leq x \leq 1 \quad (2.71)$$

lo cual es válido nada más para esta regla, y si la aplicamos a la ecuación (2.21) y con un sencillo desarrollo algebraico se transforma en

$$\beta = -\frac{1}{L} \left( \frac{T_1 - T_0}{T_0 - T_2} \right) \quad (2.72)$$

y así la relación (2.72) se sustituye en la ecuación (2.69), en donde ésta toma la forma siguiente

$$\bar{J}_{T_r} = -K \frac{(T_1 - T_0)}{L} \bar{z} \quad (1.73)$$

la cual coincide con la ley de Fourier canónica.

El signo negativo nos indica que el flujo de calor va hacia abajo y en el caso contrario si éste fuera positivo nos indicaría que el flujo de calor es hacia arriba, esta última ecuación es aplicada para la primera solución encontrada de la figura (2.3).



B) Por otra parte analizando ahora el comportamiento del flujo de calor total de la ecuación (2.46) al igual que en el caso anterior cuando tenemos las mismas condiciones de  $r \rightarrow 0$  y  $z \rightarrow 0$ , la ecuación (2.46) se escribe como

$$J_{11}(0,0) = -k \beta_1 \frac{(T_1 - T_2)}{(\text{Senh } \beta_1 L)} \quad (2.74)$$

en donde se utilizó la ecuación (2.30)

Aquí cabe destacar que se requiere desarrollar a  $\beta_1$ , para lo cual cuando  $L \rightarrow 0$  es posible hacer aproximaciones sobre las funciones hiperbólicas<sup>10</sup> de tal manera que  $\text{Cosh}(\beta_1 L) \approx 1$ , mientras que  $\text{Senh}(\beta_1 L) \approx \beta_1 L$  y, por lo tanto, el flujo de calor de la ecuación (2.75), es reemplazado por la ley de Fourier canónica.

$$\bar{J}_{11z} = -K \frac{(T_1 - T_2)}{L} \bar{z} \quad (2.75)$$

la cual coincide con la ley de Fourier canónica, aplicada a la segunda solución encontrada de la Figura (2.6).

Por lo anterior, cabe decir que estos dos análisis proceden al hecho de que si el radio tiende a infinito, el flujo en la dirección radial tiende a cero.

Estas ecuaciones (2.73) y (2.75), muestran que no existe flujo de calor en la dirección radial, sino que la única componente es a lo largo del eje  $z$ . En otras palabras, en la vecindad del eje de la cavidad cilíndrica el flujo de calor es laminar. No obstante que en la

superficie superior la temperatura sea función de la variable radial, en la vecindad del eje del sistema el flujo de calor tiene una sola componente

En las últimas dos gráficas se demuestra que si  $L \gg r_0$  implica que solo hay flujo de calor en la dirección del eje del sistema. Por lo tanto los efectos de frontera se anulan si hay una condición sobre  $T_0$ .

Por lo tanto la condición que se debe tener para obtener ley de Fourier canónica es la de que  $\frac{L}{r_0} \gg 1$

C) Si se considera ahora el comportamiento del flujo de calor de la ecuación (2.40) cuando tenemos las condiciones de  $r \rightarrow r_0$  y  $z \rightarrow L$ . Estas condiciones al igual que en el inciso (A) de esta sección, corresponden a una región cilíndrica en la vecindad del sistema termodinámico.

Así, la ecuación (2.40) se escribe como

$$\bar{J}_r(r_0, L) = K\alpha(T_1 - T_2) \bar{r} \quad (2.76)$$

en donde se observa que se utilizó la ecuación (2.21), y en donde el flujo de calor en la superficie superior tiene un valor constante.

Por lo anterior cabe destacar que el flujo de calor sólo tiene componente en la dirección del radio, lo cual significa que el flujo de calor es ortogonal a la pared del cilindro.

Resultado que era de esperarse debido a que la pared lateral constituye una superficie isoterma

D) De un modo similar, si consideramos la ecuación (2.46) con las condiciones de  $r \rightarrow r_0$  y  $z \rightarrow L$ , se obtiene

$$\ddot{J}_{11}(r, L) = K\alpha B_1 \text{Senh}(\beta \cdot L) \bar{r} \quad (2.77)$$

en donde al sustituir (2.30), la ecuación (2.77) se transforma en

$$\ddot{J}_{11}(r_0, L) = K\alpha (T_1 - T_2) \bar{r} \quad (2.78)$$

la cual coincide con la solución de la ecuación (2.76). Los dos últimos incisos son casos especiales cuando se han considerado los valores extremos para la variable  $r$  y  $L$ .

En el siguiente capítulo replantearémos el problema original y se considerará una superficie isoterma, cuya distribución de temperatura será una aproximación de la ecuación (2.27), a partir de la cual y en forma análoga a la sección (2.6), se obtiene la expresión analítica para el flujo de calor total dentro del cilindro de la que se analizarán sus consecuencias; además de considerar la asimetría que introduce la combinación de condiciones a la frontera.

**III - FLUJO DE CALOR EN SISTEMAS CON SUPERFICIE PARCIALMENTE  
ISOTERMA**

**3.1 - UN CILINDRO CON TAPA PARCIALMENTE ISOTERMICA.**

**3.2 - LEY DE FOURIER EN SISTEMAS CON SUPERFICIE ISOTERMA**

**LA APROXIMACION CUASI-CONSTANTE PARA EL FLUJO DE CALOR  
LAMINAR.**

**3.3 - ANALISIS GRAFICO APROXIMADO PARA UN FLUJO DE CALOR LAMINAR**

**3.4 - EL EFECTO DE LA DIFERENCIA DE TEMPERATURAS.**

### 3.1 - UN CILINDRO CON TAPA PARCIALMENTE ISOTERMICA

El objetivo principal de este capítulo consiste en determinar la forma analítica y gráfica para el flujo de calor total, en la que se debe considerar una asimetría que introduce la combinación de condiciones a la frontera, en donde se considera un cilindro con una tapa parcialmente isotérmica

Para proceder al estudio de este problema, en el cual se tiene una tapa parcialmente isotérmica, se retomará la ecuación bidimensional (2.40) que gobierna el flujo de calor en donde se requiere modificar las condiciones a la frontera, y en el caso de una región isotérmica la solución no es única, pues el problema resulta inconsistente y sobredeterminado<sup>19</sup>.

Ahora bien, cuando se tiene una tapa parcialmente isotérmica, se supone en forma ideal que todo el flujo de calor es unidimensional y por lo tanto no existen efectos de frontera, pero en la realidad esto es contradictorio debido a que los efectos de borde ó de frontera siempre deberán de existir, ya que hasta el momento no hay ningún dispositivo, equipo ó máquina en el cual el flujo de calor sea transmitido en una sola dirección con una región isotérmica sin tomar en cuenta los efectos de borde; por lo tanto, para poder desarrollar el análisis del flujo de calor en una tapa parcialmente isotérmica se deben de considerar y modificar las componentes del flujo de calor en las direcciones de  $\bar{r}$  y  $\bar{z}$ .

Para llevar a cabo nuestro propósito retomaremos la ecuación (2.40), como a continuación se muestra

$$\bar{\mathbf{J}}_1 = k\alpha (T_0 - T_2) e^{-\beta z} J_1(\alpha r) \bar{r} + k\beta (T_0 - T_2) e^{-\beta z} J_0(\alpha r) \bar{z} \quad (3.1)$$

en la cual se analizará por separado cada componente, como se describió en la sección (2.6)

Por lo tanto las ecuaciones en la dirección de  $\bar{r}$  y  $\bar{z}$  se escriben como

$$\bar{\mathbf{J}}_r = k\alpha (T_0 - T_2) e^{-\beta z} J_1(\alpha r) \bar{r} \quad (3.2)$$

y en donde

$$\bar{\mathbf{J}}_z = k\beta (T_0 - T_2) e^{-\beta z} J_0(\alpha r) \bar{z} \quad (3.3)$$

Para lograr obtener una tapa parcialmente isotérmica en la cual nos determine el flujo de calor en forma unidimensional sin tomar en cuenta los efectos de frontera, se necesitará modificar las ecuaciones (3.2) y (3.3), introduciendo una condición a la frontera la cual nos anule el flujo de calor en la dirección radial. Para llevar a cabo este propósito necesitamos que de las funciones de Bessel  $J_1(\alpha r)$  tienda a cero y que  $J_0(\alpha r)$  tienda a uno, por lo que esto se logra tomando en cuenta la siguiente condición a la frontera en la que si  $r_0$  tiende a  $\infty$  y, al sustituir en la ecuación (2.25) deducimos que  $\alpha$  tiende a cero por lo tanto las funciones de Bessel de  $J_1$  y  $J_0$  tienden a cero y uno respectivamente, esto es debido a la gráfica de la figura (2.4) explicada en la sección (2.3), entonces las ecuaciones (3.2) y (3.3) se escriben de la siguiente manera.

$$\bar{J}_z = 0 \quad (3.4)$$

y como  $\alpha \neq 0$ , la ecuación (3.3) produce

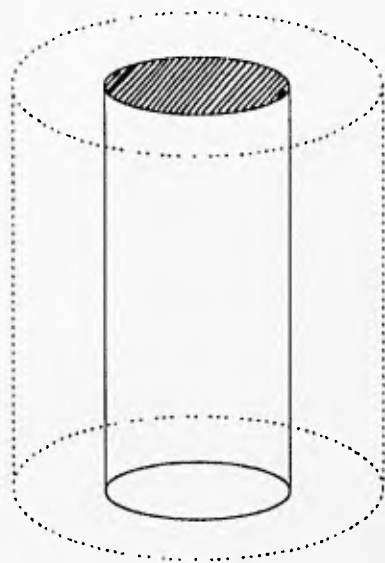
$$\bar{J}_r = k \beta (T_1 - T_2) e^{-\beta z} \bar{z} \quad (3.5)$$

En donde se ve claramente que el flujo de calor en la dirección  $\bar{r}$  no existe y todo el flujo de calor es en la dirección  $\bar{z}$ , este análisis predice un flujo unidireccional y no toma en cuenta la presencia de efectos de frontera

Para resolver el problema en el cual se tendrán efectos de frontera, se introduce la suposición de escalamiento en donde se considera un cambio de escala en que el radio de un cilindro supuesto tiende a infinito, como se muestra en la Figura (3.1). De esta forma se describe analíticamente una región central con una variación de temperatura despreciable en la tapa.

Ahora bien, de la figura (3.1) observamos un cilindro con tapa isotérmica, la que definiremos como el radio  $r'$  y la denotamos como la región I, entonces el cilindro que tiende a infinito esta definido como el radio  $r_0$  y se denota como la región II, como se muestra en la Figura (3.2).

Suponiendo una solución gráfica de las temperaturas con respecto a los radios de la Figura (3.2), obtenemos una gráfica supuesta como se muestra en la Figura (3.3)



**Figura (3.1) :** En esta figura se muestra un cilindro supuesto para poder encontrar una región parcial o totalmente isotérmica.



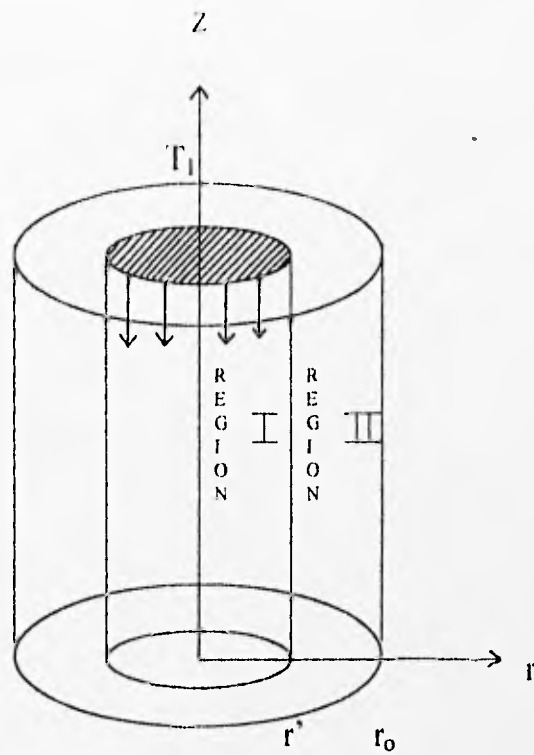


Figura (3.2) : En esta figura se muestra un cilindro supuesto en donde  $r_0 \rightarrow \infty$ , y un cilindro interior con una tapa parcialmente isotérmica.

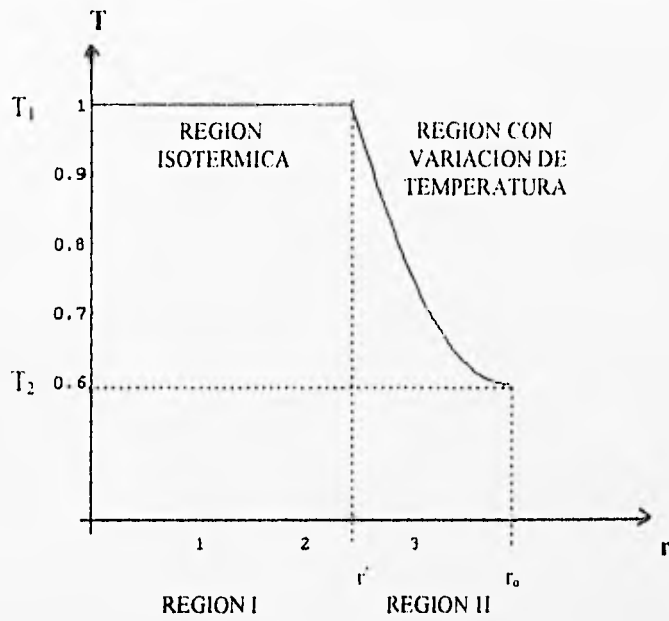


Figura (3.3): Gráfica supuesta en donde se muestra el comportamiento de la temperatura con respecto a la variable  $r$  cuando se tienen dos regiones, como se muestra en la figura (3.2).

En esta figura se ve que la solución dada en la ecuación (3.1), solo tiene validez en la región con variación de temperatura, o sea para toda  $r' < r < r_m$ , considerando un corrimiento del origen a  $r'$ , por lo que se define a

$$\bar{r} = r - r' \quad (3.6)$$

y

$$\bar{r} = r_m - r' \quad (3.7)$$

La ecuación (3.7) garantiza el ajuste de la solución en la frontera  $r = r_m$ , la cual lleva a la solución en la región II, de la figura (3.2).

La solución de las ecuaciones (3.4) y (3.5), solo valen en la región de  $0 < r < r'$ . De aquí deducimos que en la región I tenemos un flujo laminar y, en la región II tenemos la solución de la ecuación (3.7).

Habiendo modificado los radios barra de (3.6) y (3.7), la ecuación (3.1) se escribe como

$$\bar{J}_r = k\bar{\alpha} (T_0 - T_2) e^{-\beta \bar{r}} J_1(\bar{\alpha} \bar{r}) \bar{r} + k\beta (T_0 - T_2) e^{-\beta \bar{r}} J_0(\bar{\alpha} \bar{r}) \bar{z} \quad \text{para toda } r > r' \quad (3.8)$$

en donde denotamos esta última como la ecuación barra y, el parámetro  $\bar{\alpha}$  de (2.25) como

$$\bar{\alpha} = \frac{\lambda_1}{r - r'} \quad (3.9)$$

en donde se ve claramente que fue sustituida la ecuación (3.7).

De una manera similar a la sección (2.6), se hará un análisis analítico para obtener las gráficas del flujo de calor cuando se mantiene alguna de las variables constante, ya sea tanto la longitud como el radio.

Para llevar a cabo nuestro propósito, se va a considerar la ecuación barra (3.8), así como las ecuaciones (3.2) y (3.3) que corresponden a cada dirección del sistema termodinámico.

Primero se verá el flujo de calor en la región II, o sea en la dirección  $\bar{r}$  y posteriormente se analizará el flujo en la dirección  $\bar{z}$ . Viendo el análisis en la dirección  $\bar{r}$ , se tomará en cuenta la ecuación (3.2), pero ahora como ecuación barra y se divide entre el flujo de calor de la ecuación barra (3.8), entonces la magnitud del flujo de calor se escribe como

$$\frac{|J_r|^2}{|J_r|^2 + |J_z|^2} = \frac{|J_1(\bar{\alpha} \bar{r}) \bar{\alpha}|^2}{|J_1(\bar{\alpha} \bar{r}) \bar{\alpha}|^2 + |J_2(\bar{\alpha} \bar{r}) \beta|^2} \quad \text{para toda } r > r' \quad (3.10)$$

Por otra parte si los parámetros  $\bar{\alpha}$  y  $\beta$  dados por las ecuaciones (3.9) y (2.48) que a continuación se muestran

$$\bar{\alpha} = \frac{\lambda_1}{r_0 - r'} = \frac{2.405}{r_0 - r'} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{C}{L} \quad (3.11)$$

se sustituye en (3.10) y con un sencillo desarrollo algebraico se transforma en

$$\frac{|J_0|^2}{|J_0|^2 + |J_1|^2} = \frac{1}{1 + \frac{|J_0(\bar{\alpha} \bar{r}_1)|^2}{|J_1(\bar{\alpha} \bar{r}_1)|^2} \left( \frac{C(r_0 - r')}{L \lambda_1} \right)} \quad (3.12)$$

en donde se ha supuesto un valor del radio constante, digamos  $r_1$ , entonces al simplificar la notación definiremos a las funciones de Bessel, de la siguiente manera

$$\bar{a} = |J_0(\bar{\alpha} \bar{r}_1)|^2 \quad (3.13)$$

y en donde

$$\bar{b} = |J_1(\bar{\alpha} \bar{r}_1)|^2 \quad (3.14)$$

Finalmente, escribimos la ecuación (3.12) de la forma

$$\frac{|J_0|^2}{|J_0|^2 + |J_1|^2} = \frac{1}{1 + \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \left( \frac{r_0 - r'}{L} \right)^2} \quad (3.15)$$

en donde  $\bar{A}$  es una constante definida por

$$\bar{A} = \frac{\bar{b} \lambda^2}{\bar{a} C^2} \quad (3.16)$$

Mientras que para poder interpretar y representar de una forma gráfica la ecuación (3.15), procedemos en tomar en cuenta la siguiente relación del segundo miembro de dicha ecuación y la dejaremos en función de  $r_0$ , la cual se escribe como

$$r_0 - r' = \frac{1}{n} r_0 \quad \text{para toda } n \geq 1 \quad (3.17)$$

donde  $n$  deberá tomar valores mayores que 1; como condición de esta igualdad dado que de la figura (3.2), se supone que  $r'$  es una fracción de  $r_0$ ; entonces se requiere hacer  $r' = r_0$  para obtener una superficie totalmente isotérmica. Cuando " $n$ " toma el valor 1, tenemos que  $r' = 0$  y, significa que el flujo es bidimensional y, si  $n$  tiende a infinito entonces  $r' = r_0$ . De aquí deducimos que cuando " $n$ " tome valores mayores que 1 hasta  $\infty$ ,  $r'$  se aproximará a  $r_0$ . Ahora bien, cabe hacer mención a la siguiente pregunta: ¿Para que valor de " $n$ " se puede considerar una tapa totalmente isotérmica?

Para responder, debemos analizar cuidadosamente la ecuación (3.17), ya que cuando  $n = 1$  se tiene  $r' = 0$  y no es totalmente isotérmica, pero cuando  $n = \infty$  entonces  $r' = r_0$  y así consideramos una tapa totalmente isotérmica.

Finalmente, sustituyendo (3.17) en la ecuación (3.15), se escribirá de la siguiente manera

$$\frac{|\mathbf{J}_r|^2}{|\mathbf{J}_r|^2 + |\mathbf{J}_z|^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n^2 A} (\zeta)^2} \quad (3.18)$$

en donde

$$\zeta^2 = \frac{r_0^2}{L^2} \quad (3.19)$$

representa el cambio de variable, el cual disminuye a medida que  $L$  se incrementa con respecto a  $r_0$  y hemos descrito el flujo en la región II.

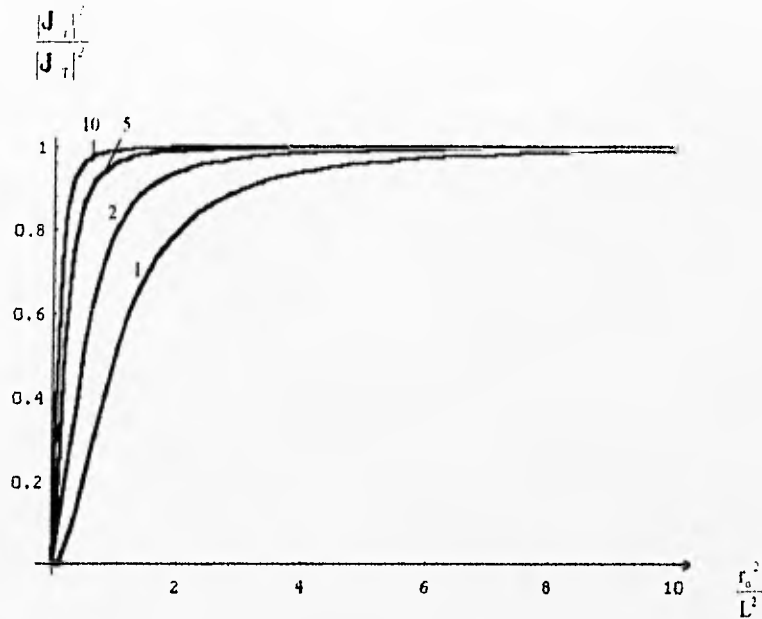
De este modo, la ecuación (3.18), advierte que si la longitud aumenta mucho más rápido que el radio, entonces  $\zeta^2$  tiende a cero y, por lo tanto, la relación entre el flujo de calor en la dirección del radio y el flujo de calor total tiende a uno.

La gráfica de la ecuación (3.18), se muestra en la Figura (3.4). En la figura se observa que cuando  $n \rightarrow \infty$ , tenemos que  $r' = r_0$  y se demuestra de la figura (3.2), que se tendrá una tapa totalmente isotérmica.

Ahora bien procediendo de la misma manera en la dirección  $\bar{z}$ , como se hizo anteriormente con la componente en  $\bar{r}$ , se desarrollará un análisis similar.

De acuerdo a (3.3), pero ahora como ecuación barra y dividiéndola entre el flujo de calor total de la ecuación barra (3.8), la magnitud del flujo de calor se escribe como

### Flujo radial



Longitud relativa:  $\zeta^2 = \frac{r_o^2}{L^2}$

Figura (3.4): Relación entre el flujo de calor radial barra y el flujo total barra.

En la figura se observa que cuando  $n \rightarrow \infty$ , tenemos que  $r' = r_o$  y, significa que el flujo de calor es constante y se tendrá una tapa totalmente isotérmica.

La familia de curvas son descritas por la ecuación:

$$\frac{|J_r|^2}{|J_r|^2 + |J_s|^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n^2 A} (\zeta)^2}$$

en donde "n" es el parámetro de cada curva que toma los siguientes valores de ( 1, 2, 5, y 10 ), y tomando como constante al parámetro "A".



$$\frac{|\mathbf{J}_z|^2}{|\mathbf{J}_z|^2 + |\mathbf{J}_\perp|^2} = \frac{J_1(\bar{\alpha} r)\beta}{J_1(\bar{\alpha} r)\beta^2 + |J_1(\bar{\alpha} r)\bar{\alpha}|^2} \quad (3.20)$$

y con un sencillo desarrollo algebraico la ecuación (3.20) se transforma en

$$\frac{|\mathbf{J}_z|^2}{|\mathbf{J}_z|^2 + |\mathbf{J}_\perp|^2} = \frac{1}{1 + \frac{|J_1(\bar{\alpha} r)|^2}{|J_0(\bar{\alpha} r)|^2} \left( \frac{nL\lambda_0}{C r_0} \right)^2} \quad (3.21)$$

en donde se ha utilizado la relación para  $(\bar{\alpha})$ ,  $(\beta)$  y  $(r_0, r')$  dada por la ecuaciones (3.11) y

(3.17)

Finalmente la ecuación (3.21) toma la forma

$$\frac{|\mathbf{J}_z|^2}{|\mathbf{J}_z|^2 + |\mathbf{J}_\perp|^2} = \frac{1}{1 + n^2 \bar{A} (\bar{\xi})^2} \quad (3.22)$$

en donde la cantidad  $\bar{A}$  se define como una constante, la cual se determina por la ecuación

(3.16), mientras que

$$\bar{\xi}^2 = \frac{L^2}{r_0^2} \quad (3.23)$$

representa el cambio de variable, el cual aumenta a medida que  $l$  se incrementa con respecto a  $r_0$ , y hemos descrito el flujo en la región I.

De este modo la ecuación (3.23), advierte que si el radio aumenta mucho más rápido que la longitud, entonces  $\bar{\xi}^{-1}$  tiende a cero, de aquí decimos que tendremos flujo laminar con una tapa isotérmica debido a que  $r' \approx r_0$ .

La gráfica de la ecuación (3.22), se muestra en la Figura (3.5). En la figura se observa que cuando  $n \rightarrow \infty$ , se obtiene  $r' \approx r_0$ , y, cuando  $n=1$  tendremos a  $r'=0$ , de estas anteriores suposiciones obtenemos el análisis para poder encontrar una tapa total ó parcialmente isotérmica que nos define el flujo laminar.

Con el análisis de (3.17) y considerando que el radio de la región isotérmica puede variar dentro del valor del radio de la tapa del cilindro supuesto, se reporta la solución analítica de obtener un cilindro con tapa total ó parcialmente isotérmica.

La importancia de este tipo de solución radica en su potencial de aplicaciones industriales y en procesos de aprovechamiento de energía.

En la siguiente sección se analizará el problema original y se considera una superficie isoterma cuya distribución de temperatura será una aproximación de la ecuación (2.27), a partir de la cual, se obtiene la expresión analítica para el flujo de calor total dentro del cilindro en función del radio.

Flujo laminar

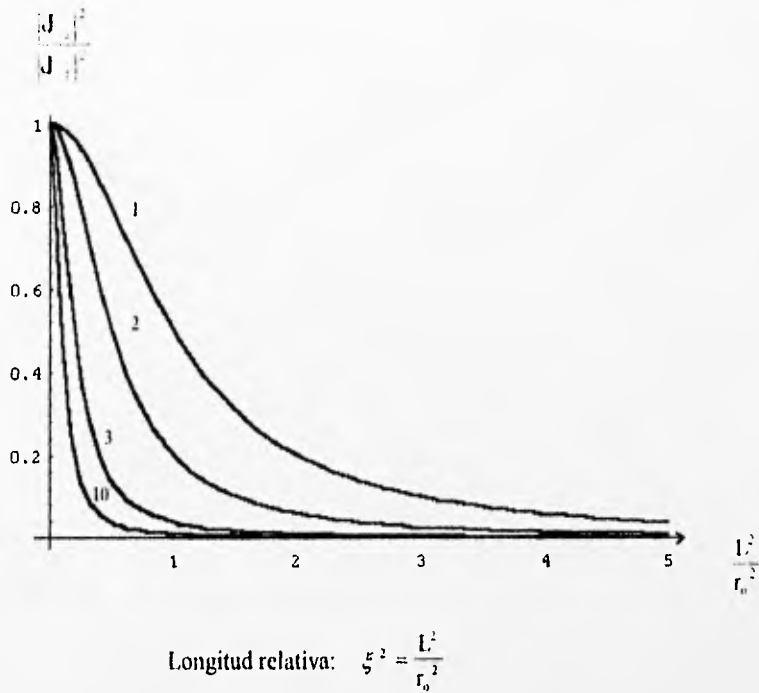


Figura (3.5): Relación entre el flujo de calor azimutal barra y el flujo de calor total barra. En la figura se observa que cuando “n” toma valores mayores que 1, va decreciendo la curva, esto indica que el flujo de calor sería en la dirección del eje del cilindro y se tendría que el  $r' = r_0$  de la figura (3.2).

La familia de curvas son descritas por la ecuación:

$$\frac{|\mathbf{J}_z|^2}{|\mathbf{J}_z|^2 + |\mathbf{J}_r|^2} = \frac{1}{1 + n^2 A (\xi)^2}$$

en donde “n” es el parámetro de cada curva que toma los siguientes valores de ( 1, 2, 3 y 10 ), y A toma un valor constante diferente de cero.

### 3.2 - LEY DE FOURIER EN SISTEMAS CON SUPERFICIE ISOTERMA LA APROXIMACION CUASI-CONSTANTE PARA EL FLUJO DE CALOR LAMINAR<sup>12</sup>.

El resultado central del tercer capítulo radica en considerar que, si en la superficie superior del cilindro la temperatura es función de la variable radial, entonces dentro de la cavidad cilíndrica el flujo de calor total está determinado por la ley generalizada de Fourier ecuación (2.42), la que contempla claramente las componentes del flujo en las direcciones de  $r$  y  $z$ .

Se va a modificar por un instante el planteamiento del problema inicial descrito en la sección (2.3) con el propósito de demostrar que existe una región cilíndrica dentro de la cavidad en la cual el flujo de calor es laminar.

Para determinar el cálculo de una nueva condición, se considera una cavidad cilíndrica de radio  $R_0$ . Se supone también, que dentro de la cavidad cilíndrica, la distribución de temperatura está dada, de acuerdo a los resultados obtenidos en el primer capítulo, por

$$\mathcal{T}(r,z) = (T_0 - T_1) J_0(\alpha r) e^{-\beta z} + T_2 \quad (3.24)$$

en donde claramente se observa la dependencia radial.

Además, el flujo de calor total dentro de este sistema, se determina por la ley generalizada de Fourier, en la que se observa que las líneas de flujo constituyen un problema bidimensional, la cual está representada por la ecuación (2.42)

Por el momento el objetivo es determinar la condición bajo la cual la componente radial de la ley generalizada de Fourier sea próximo a cero.

Esta condición se obtiene a partir del comportamiento gráfico de la función  $J_1(\alpha r)$ , en la que se observa para valores del argumento tales que  $\alpha r \ll 1$ , se tiene que  $J_1(\alpha r) \rightarrow 0$ . Por lo tanto, para el caso en el que  $\alpha r \ll 1$ , la contribución radial al flujo de calor total se anula, y de esta manera, la ley generalizada de Fourier representa el flujo de calor en la dirección a lo largo del eje del sistema, es decir

$$\vec{J}_r(z) = k \beta \frac{\mathcal{T}(z) \cdot T_0}{1 - e^{-\beta z}} \hat{z}$$

Nótese que en la última expresión se ha escrito  $\mathcal{T}(z)$  en lugar de  $\mathcal{T}(r, z)$ , la razón estriba del mismo hecho en que para  $\alpha r \ll 1$ , la función de Bessel  $J_0$  tiende a uno y, por lo tanto, como resultado de la ecuación (3.24) se tiene

$$\mathcal{T}(r, z) = (T_0 - T_2) J_0(\alpha r) e^{-\beta z} + T_2 \approx \mathcal{T}(z) = (T_0 - T_2) e^{-\beta z} + T_2 \quad (3.25)$$

Se debe hacer hincapié en que la condición sobre el argumento  $\alpha r$  de la función de Bessel  $J_1$  nos determina la región dentro del cilindro en la cual el flujo de calor es laminar. La

base de este argumento radica en las mismas características de la condición, debido a que si  $\alpha r < 1$ , entonces

$$r \ll \frac{R_0}{2.405} \approx \frac{2}{5} R_0 \quad (3.26)$$

Por lo tanto, en la región cilíndrica de radio  $r_0$  menor que  $2/5 R_0$ , el flujo de calor es laminar, mientras que para radios mayores, el flujo tiene componentes radiales. Figura (3.6).

La aproximación dada por (3.25), muestra además, que en la tapa superior del cilindro de radio  $r_0$ , la temperatura puede ser considerada como una constante. De esta manera, se considera necesario que para obtener el flujo de calor total en una sola dirección, la temperatura de la tapa superior de la cavidad cilíndrica debe permanecer constante a lo largo de toda la superficie, y de este modo, el problema de conducción de calor en dos dimensiones se transforma en un problema unidimensional.

Finalmente, la aproximación, que determina la región del flujo laminar dentro del sistema, la llamaremos aproximación cuasi-constante.

Ahora se determinarán cuáles serían las condiciones operacionales para un sistema termodinámico con simetría cilíndrica y con tapa superior a temperatura constante.

Con este propósito, resulta evidente que la pared lateral y la tapa superior del cilindro no deben estar en contacto térmico uno con otro (condición de aislamiento). De lo contrario, existirá un gradiente de temperatura entre ellos y por lo tanto un flujo de calor en la dirección del gradiente, que en este caso corresponde a la dirección del radio. De esta manera, habrá una transmisión de energía en forma de calor que evitará que en la tapa superior la temperatura permanezca constante.

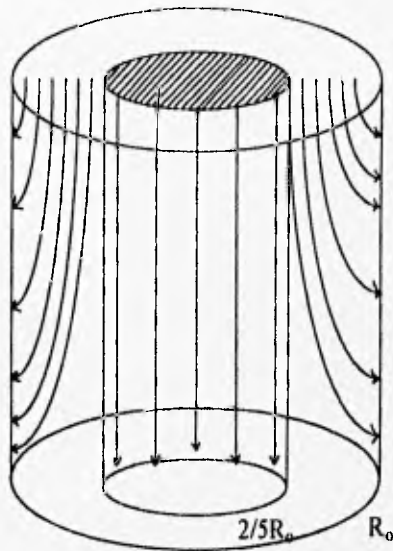


Figura (3.6): En la región de radio menor que  $2/5R_0$  el flujo de calor es laminar. Para regiones de radio mayor existen componentes en las dos direcciones.

Sin embargo, es posible impedir el contacto térmico a través de una pared adiabática, de tal manera que la tapa superior y la pared lateral del cilindro se encuentren aislados y, por lo tanto, evitar el flujo de calor y garantizar que la superficie superior sea una isoterma

Es posible que en la práctica deba considerarse una pérdida de la energía transmitida en el punto de contacto tapa-superficie lateral del cilindro, debido a que el aislamiento perfecto no existe

El gradiente generado por dichas pérdidas, puede ser muy grande debido a la presencia de una diferencia de temperatura en un pequeño anillo muy próximo a la frontera de la superficie lateral. En tal caso, para compensar las pérdidas, el suministro del correspondiente flujo de energía será la condición necesaria para mantener la superficie superior a temperatura constante.

Además de la condición de aislamiento mencionada antes, se requiere de un suministro uniforme de calor a lo largo de toda la tapa superior del cilindro. De esta forma se evita la dependencia de la temperatura en la dirección del radio.

Bajo estas condiciones, la función de distribución dada por la ecuación (3.25) se reduce al caso

$$T(z) = (T_0 - T_1) e^{-\mu z} + T_1 \quad (3.27)$$

en donde claramente se observa la independencia radial.



La ecuación (3.27) no debe interpretarse como una aproximación matemática sobre la solución, sino como una condición física consecuencia de la constancia de la temperatura en la superficie

A partir de la solución (3.27), podemos representar matemáticamente la variación de la temperatura  $T(z)$  con respecto a la de la superficie inferior, tomando en cuenta que para esta superficie en  $z = 0$ , de la ecuación (3.27) se obtiene que la temperatura es  $T_0 - T_2$ . La variación de la temperatura la damos por

$$T(z) - (T_0 - T_2) = (T_0 - T_2) [e^{-\beta z} - 1] + T_2 \quad (3.28)$$

Por otra parte, el flujo de calor total dentro de la cavidad estará determinado por la ley de Fourier, en donde el operador gradiente actúa sobre (3.28), esto es

$$\mathbf{J}_1(z) = -k \nabla [T(z) - (T_0 - T_2)] \quad (3.29)$$

Pese a la simetría del sistema termodinámico, el operador gradiente de la ecuación (3.29) se escribe en su forma más sencilla respecto a la variable  $z$

$$\bar{\mathbf{J}}_1(z) = -k \frac{d}{dz} [T(z) - (T_0 - T_2)] \bar{z} \quad (3.30)$$

Con el apoyo de (3.28), la relación (3.30) se transforma en

$$\bar{J}_r(z) = k \beta (T_1 - T_2) e^{-\beta r} \bar{z} \quad (3.31)$$

Utilizando el resultado de la relación (3.28) se tiene

$$T_1 - T_2 = \frac{\mathcal{J}(z) - T_0}{e^{-\beta r} - 1} \quad (3.32)$$

Finalmente, si se introduce el valor de (3.32) en la ecuación (3.31), obtenemos el flujo de calor total en cualquier punto dentro de la cavidad cilíndrica

$$\bar{J}_r(z) = k \beta \frac{\mathcal{J}(z) - T_0}{1 - e^{-\beta r}} \bar{z} \quad (3.33)$$

Este resultado indica que las líneas de flujo calorífico tienen una sola dirección y es a lo largo del eje del cilindro. En contra punto al considerar que, si la temperatura de la superficie superior depende del radio, entonces el flujo de calor total es a lo largo de las dos direcciones.

Como en esta superficie la temperatura permanece constante, las líneas de flujo son paralelos al eje del sistema y entonces dentro de la cavidad cilíndrica el flujo de calor es laminar.

En la siguiente sección se analizará de una manera gráfica, la longitud crítica que se debe obtener para un cilindro con una superficie parcialmente isotérmica

### 3.3 - ANALISIS GRAFICO APROXIMADO PARA UN FLUJO DE CALOR LAMINAR

En esta sección se analizará de una manera gráfica la longitud crítica que se debe tener para un cilindro con flujo de calor laminar, o sea con una superficie parcialmente isotérmica.

Al igual que en la sección (3.2), en la cual se obtuvo un radio crítico para determinar un flujo de calor laminar, se procederá a determinar una longitud crítica aproximada por medio de un análisis gráfico.

Para llevar a cabo dicho objetivo de interés, se reconsidera la ecuación (3.22) como a continuación se muestra

$$\frac{|J_z|^2}{|J_z|^2 + |J_r|^2} = \frac{1}{1 + n^2 \Lambda(\bar{\xi})^2} \quad (3.22)$$

en donde la variable  $\bar{\xi}^2$  está representada por la ecuación (3.23), como se muestra

$$\bar{\xi}^2 = \frac{L^2}{r_0^2}$$

Sin embargo, para poder mantener el radio constante y variar la longitud se procede ahora a denotar la ecuación (3.23) como

$$\sin^2 \phi = \frac{l}{L^2} \quad (3.34)$$

en donde

$$\phi^2 = \frac{l_0^2}{L^2} \quad (3.35)$$

la cual, al sustituirla en la ecuación (3.22), se obtiene que

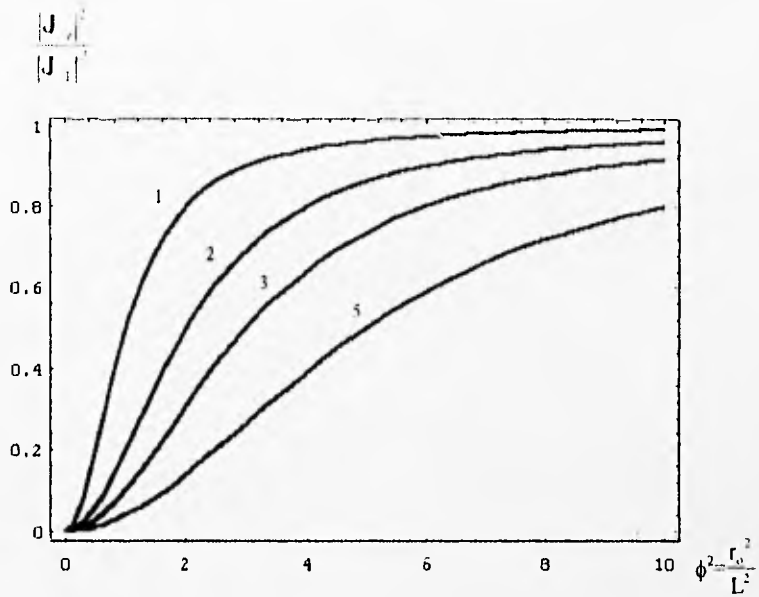
$$\frac{|J_z|^2}{|J_z|^2 + |J_r|^2} = \frac{l}{1 + n^2 \lambda \frac{l}{\phi^2}} \quad (3.36)$$

De este modo, la gráfica de la ecuación (3.36), se muestra en la figura (3.6). En la figura se observa de la primera curva, que cuando  $n = 1$  se tiene que esta curva tiende a un valor asintótico aproximadamente cuando  $\phi^2$  toma el valor de 9, ya que al sustituir este valor en la ecuación (3.35) se tiene la expresión

$$l_0 = 3L \quad (3.37)$$

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

Flujo laminar



Longitud relativa:  $\xi^2 = \frac{L^2}{r_0^2} = \frac{1}{\phi^2}$

Figura (3.7): Relación entre el flujo de calor azimutal barra y el flujo de calor total barra. En la figura se observa que cuando la curva tiende a un valor asintótico, se obtiene una relación de la longitud crítica que debemos tener para obtener un flujo laminar.

La familia de curvas son descritas por la ecuación:

$$\frac{|J_z|^2}{|J_z|^2 + |J_r|^2} = \frac{1}{1 + n^2 A \left( \frac{1}{\phi^2} \right)}$$

en donde "n" es el parámetro de cada curva que toma los siguientes valores de ( 1, 2, 3 y 5), y A toma un valor constante diferente de cero.

por lo cual, de esta relación se concluye que para tener un flujo laminar que dependa de una longitud crítica, se deberá tener un radio mucho más grande que la longitud

De igual manera, este análisis se puede hacer para cada curva, ya que cuando cada curva tienda a un valor asintótico, se encontrará una  $\phi'$  aproximada y al sustituir este valor en la ecuación (3.35), se encontrará la longitud crítica aproximada que se necesita, para un flujo de calor laminar cuando se tenga un valor de radio constante, el cual será  $n$  veces mayor que dicha longitud.

En la siguiente sección se hará el análisis analítico para encontrar una longitud crítica que determine el flujo laminar.

### 3.4 - EL EFECTO DE LA DIFERENCIA DE TEMPERATURAS.

El objetivo principal de esta sección consiste en obtener una expresión que determine la longitud crítica, la cual se desea considerar para un flujo laminar.

Al igual que en la sección (3.2), en la cual se obtuvo un radio crítico para determinar un flujo de calor laminar, se procederá a determinar una longitud crítica de una forma analítica para dicho flujo. Para poder llevar a cabo el objetivo de interés, se considera y analiza el efecto de la constante "A" de la ecuación (2.63), como a continuación se muestra

$$A = \frac{b \lambda_1^2}{a C^2} \quad (3.38)$$

en donde "a", "b" y " $\lambda_1$ " están denotadas por las ecuaciones (2.60), (2.61) y (2.25) respectivamente y, "C" es el factor de intensidad denotado por la ecuación (2.49). Como "C" toma valores negativos podemos decir como hipótesis que esto es contradictorio, entonces por la fórmula de

$$(\ln a)^2 = \left( \ln \frac{1}{a} \right)^2 \quad (3.39)$$

podemos representar a la ecuación (3.38) de la siguiente manera

$$\Lambda = \frac{|J_1(\alpha r)|^2 (\lambda_1)^2}{|J_0(\alpha r)|^2 \left| \ln \left( \frac{T_1 - T_2}{T_0 - T_2} \right) \right|^2} \quad (3.40)$$

en donde tenemos que  $0 < \Lambda < 1$ , lo cual implica que la diferencia de temperaturas del argumento del logaritmo debe ser de la siguiente manera

$$T_1 - T_2 > T_0 - T_2 \quad (3.41)$$

en donde,  $T_1 > T_0$ ; entonces tomando en consideración esta dependencia de temperaturas podemos hacer mención a lo siguiente. Si tomamos en consideración la ecuación (2.67), la cual es la que nos determina el flujo en la dirección laminar definida por

$$\frac{J_z}{J_r} = \frac{1}{1 + A(\xi^2)} \quad (3.42)$$

en donde al darle valores muy pequeños a la ecuación (3.40), podemos deducir que el flujo en la dirección al eje del cilindro no va a depender de una longitud dada, sino más bien, para valores muy pequeños de "A", siempre se tendrá flujo laminar en el más mínimo incremento de la superficie superior.

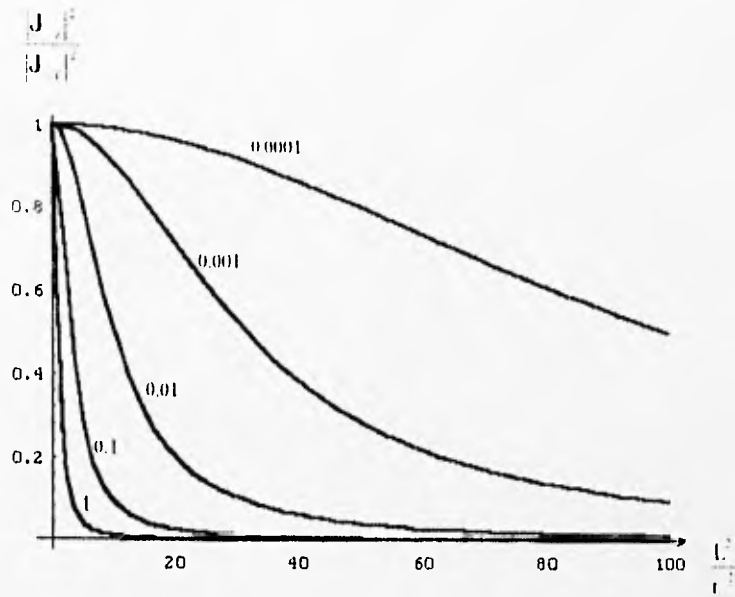
La gráfica de la ecuación (3.42), se muestra en la Figura (3.8) En la figura se observa como para valores muy pequeños de "A" el flujo de calor siempre permanecerá y será laminar en la más mínima porción de la tapa superior, tomando en consideración que el flujo se transmite por la parte superior.

En resumen, para poder encontrar un flujo laminar que dependa de una longitud dada, es necesario tener un sistema completamente adiabático entre la tapa de la superficie superior y las paredes del cilindro, ya que aquí es donde existe un gradiente de temperatura y es en donde se pierde una cantidad de calor. Es decir, la presencia de un gradiente de temperatura aísla la tapa isoterma de las condiciones a la frontera.

Existen otros factores por los cuales no se puede encontrar un flujo de calor laminar que dependa de una longitud dada, como por ejemplo, los efectos de frontera o de borde, ya que estos son un factor importante, por el cual no se de una longitud específica que nos determine dicho flujo, sino más bien el flujo laminar va a depender de la diferencia de temperaturas como se describió en esta sección.



Flujo relativo



Longitud relativa:  $\xi^2 = \frac{L^2}{r_0^2}$

Figura (3.8) : Para valores muy pequeños de "A", el flujo de calor laminar permanecerá en la más mínima porción de la tapa superior y, no dependerá de una longitud dada.

La familia de curvas son descritas por la ecuación:

$$\frac{|J_z|^2}{|J_z|^2 + |J_z|^2} = \frac{1}{1 + A(\xi)^2}$$

en donde "A" es el parámetro que define cada curva que toma los siguiente valores de ( 1, 0.1, 0.01, 0.001, y 0.0001, ).

#### IV.- ALGUNAS APLICACIONES DEL FLUJO DE CALOR

4.1 - EL MOTOR ENDOTERMICO.

4.1.1 - RENDIMIENTO DEL FLUJO DE CALOR DE UN PISTON CON SUPERFICIE  
PARCIALMENTE ISOTERMA

4.2 - UN PIRANOMETRO DE CAVIDAD VARIABLE.

#### 4.1.- EL MOTOR ENDOTERMICO

Como se sabe, la necesidad e inquietud del hombre por transformar y aprovechar el calor u otras formas de energía en trabajo, lo ha llevado a la concepción y creación de diferentes máquinas térmicas que operan bajo ciertos ciclos termodinámicos, así también el deseo de obtener bajas temperaturas en otros sistemas, lo ha llevado a la creación de diferentes ciclos de refrigeración

Dentro del motor endotérmico el cual para el objeto de estudio, se analizará el pistón cuyo encendido es por chispa, y son los motores de gasolina de 2 ó 4 tiempos que operan bajo el ciclo Otto

De los procesos que se requieren para el movimiento del pistón, de los cuales se denominan carreras se analizarán el proceso de ignición y el de la carrera de expansión, que son los dos en los cuales se provoca la combustión y se genera una presión y temperatura muy elevadas.

En la ignición mediante una chispa eléctrica se provoca la combustión rápida de la mezcla caliente, o sea vapor de gasolina y aire. El pistón no se mueve durante este proceso

En la carrera de expansión, los productos calientes de la combustión se expanden y empujan el pistón hacia abajo, experimentando así una caída de presión y temperatura. Durante esta carrera el pistón realiza trabajo y en ella también se producen rozamiento, aceleración y conducción de calor.

Las temperaturas del gas durante la combustión de la mezcla pueden alcanzar los 2000°C y permanecer tan altas como 800°C durante la carrera de escape, como se ve en la Figura (4.1)<sup>15</sup>

La temperatura inicial de combustión, que llega a 2000°C, es bastante superior al punto de fusión de los materiales usados en la construcción del motor, por ejemplo, el aluminio se derrite a 700°C aproximadamente y el acero a unos 1400°C. Incluso si las temperaturas se mantuvieran abajo de estos puntos de fusión, la expansión o distorsión causaría costosos daños. Además una parte del calor producido es transmitido a la pared del cilindro, al pistón, a la cabeza y a las válvulas.

A título orientativo se indican los límites dentro de los cuales han de mantenerse sus temperaturas.

**Pared del cilindro** - La temperatura máxima aconsejable para el interior de la pared es del orden de entre 150 y 200°C.

**Pistón** - La temperatura en el punto más caliente, es decir, en el centro de la superficie ó cabeza del pistón, puede alcanzar los 300°C. La refrigeración en la mayor parte de los casos se produce por conducción de calor a la pared del cilindro y de esta al fluido refrigerante.

**Pared de la cámara de combustión** - La temperatura sobre la superficie interior en las zonas más calientes es del orden de los 250°C. Dentro de este límite se consigue asegurar una eficaz extracción de calor de los asientos de las válvulas y de la bujía, y un correcto desarrollo del ciclo térmico del motor. Es importante obtener una cierta uniformidad de temperatura para evitar la formación de puntos calientes que pueden dar lugar a anomalías de funcionamiento (pre-encendido y detonación).

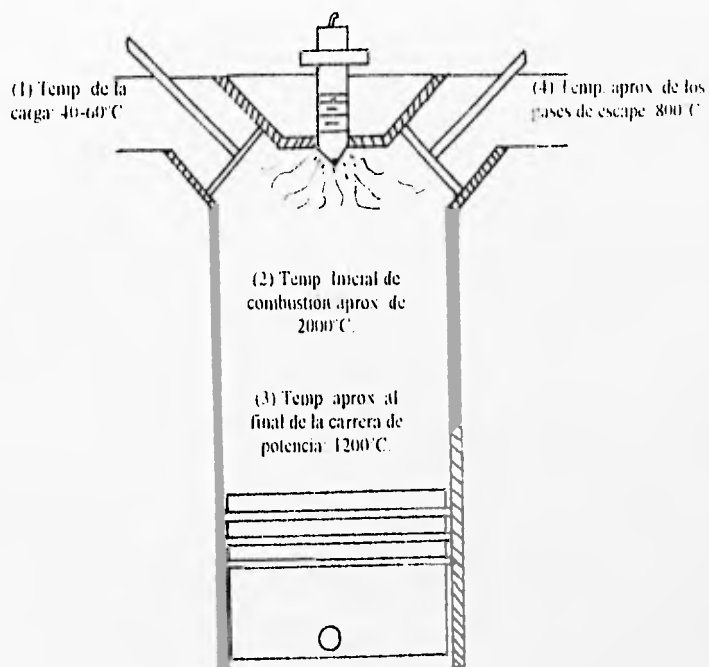


Figura (4.1) : Temperaturas del gas durante (1) la carrera de admisión, (2) el inicio de la carrera de potencia, (3) el final de la carrera de potencia, (4) la carrera de escape.

Válvula de escape - Con los materiales empleados normalmente la temperatura máxima admisible es de entre 700 y 750°C, a temperaturas superiores la resistencia mecánica y a la corrosión se reducen de manera imponente. La refrigeración se produce únicamente por conducción desde la válvula al asiento y a la guía y de estas al refrigerante.

Del balance térmico resulta que el calor extraído en conjunto por el sistema de refrigeración varía del 20 al 30% de calor total desarrollado por la combustión, según el diseño, las dimensiones y las condiciones de uso del motor<sup>14</sup>.

En la siguiente sección veremos más detalladamente para qué nos sirve el análisis que se está haciendo sobre el pistón y se verá una aplicación supuesta para encontrar un radio con una superficie parcialmente isotérmica.

#### 4.1.1.- RENDIMIENTO DEL FLUJO DE CALOR DE UN PISTÓN CON SUPERFICIE PARCIALMENTE ISOTÉRMICA.

Para poder tratar las secciones de los capítulos anteriores y al aplicarlos en esta sección, se procede a analizar el pistón el cual realiza varias funciones importantes. Una de ellas y la que más nos importa en la aplicación debido a su forma cilíndrica es la de conducir eficientemente el calor y el flujo que se dispersa durante dicha cabeza del pistón, como se ve en la Figura (4.2).

Los motores de encendido por chispa están casi generalmente hechos de una sola pieza y la cabeza del pistón, puede ser de superficie plana, convexa o cóncava.

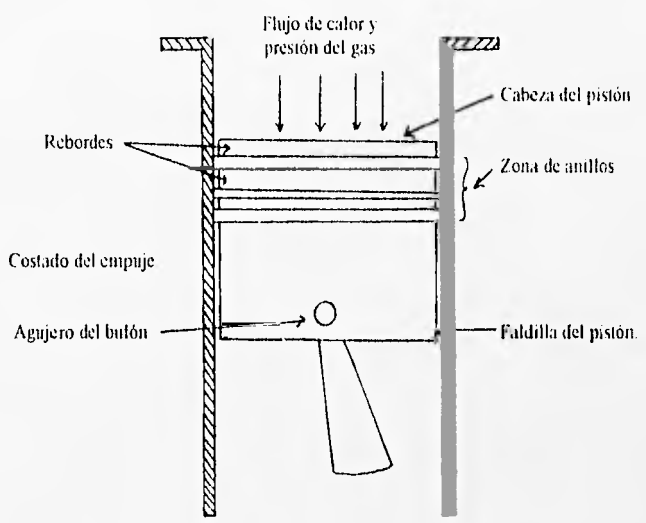


Figura (4.2) : Ensamble de pistón en el interior del cilindro.

Para proceder a dicho análisis y obtener una superficie parcialmente isotérmica, así como una muy buena eficiencia de la distribución del flujo de calor en el pistón se procederá a calcular la  $r'$ , como se muestra en la Figura (4.3), con lo cual se formula la siguiente pregunta „Cuál es la  $r'$  que debe tener un cilindro para tener un porcentaje (%) de flujo de calor en la dirección azimutal?.

Para responder a esta pregunta se proponen las siguientes fórmulas, las cuales se utilizarán para definir a un cilindro. Como se sabe el área total del cilindro es definida por

$$A_T = \pi r_o^2 \tag{4.1}$$

y el área con respecto a la superficie parcialmente isotérmica es

$$A' = \pi r'^2 \tag{4.2}$$

entonces definiremos el factor del flujo de calor (F) como

$$F = \frac{A' J_T^i}{A_T J_T^i} \tag{4.3}$$

en donde  $J_T^i$  es el flujo de calor incidente total mediante el cual la superficie superior del pistón es calentada uniformemente y sus unidades corresponden en el sistema internacional a



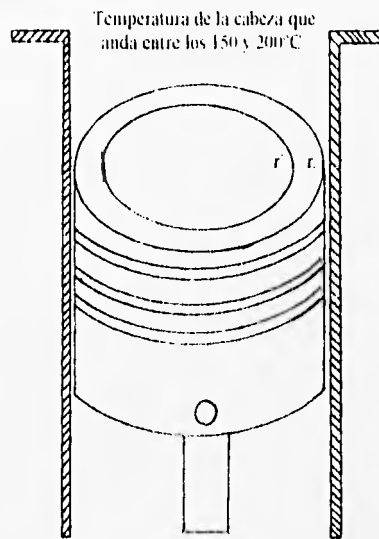


Figura (4.3) : Pistón con temperatura y dimensiones para el cálculo de la  $r'$ , con una superficie parcialmente isotérmica

(Kcal.m<sup>2</sup>hr) y, F está definido como se mencionó al final de la sección anterior entre 0.2 y 0.3 de flujo de calor debido al balance térmico de calor extraído por el refrigerante

Por otra parte el porcentaje de calor extraído queda definido por

$$\%_0 = F \times 100 \quad (4.4)$$

Para poder simplificar la notación, se sustituye (4.1) y (4.2) en la ecuación (4.3), en donde con un sencillo desarrollo algebraico el factor del flujo de calor se escribe como

$$F = \frac{r'^2}{r_o^2} \quad (4.5)$$

de esta última ecuación se ve que el flujo de calor es visto y analizado por la parte de afuera del pistón. Ahora bien despejaremos de la ecuación (4.5) la  $r'$  que se necesitará para encontrar una superficie parcialmente isotérmica, y se escribe como

$$r' = r_o \sqrt{F} \quad (4.6)$$

Por lo tanto con esta última relación hemos podido responder a la pregunta formulada al principio. Ahora pasaremos a calcular la  $r'$  que se necesita para obtener el % de flujo de calor en la dirección  $\vec{z}$ .

Suponiendo que el radio  $(r_0)^{1/2}$  del pistón es de 4.15cm y  $F$  es de 0.3, al sustituir estos valores en la ecuación (4.6), tenemos que  $r' = 2.27$ cm, y es el radio necesario para el flujo de calor en la dirección azimutal, como se muestra en la Figura (4.3)

Es importante observar que con este cálculo se puede deducir que cuando  $r' = r_0$ , se tiene que todo el flujo de calor será dirigido en la dirección  $z$ , o sea  $J_z' = J_z$

Ahora bien para continuar analizando el pistón y encontrar un flujo que dependa de una longitud dada, es necesario suponer y formular la siguiente pregunta ¿Cuál es la dependencia del % de transmisión con respecto a la longitud  $L$ ?

Para contestar esta pregunta es necesario suponer y restringir las siguientes fórmulas, como se sabe de la sección (3.1), el flujo de calor laminar es denotado por la ecuación (3.5) como se muestra

$$\vec{J}_z = k\beta (T_1 - T_2) e^{-\beta z} \hat{z} \quad \text{para toda } r \leq r' \quad (4.7)$$

y el flujo de calor incidente total es denotado por

$$\vec{J}_1 = k\bar{\alpha} (T_1 - T_2) e^{-\beta z} J_1(\bar{\alpha} r) \hat{r} + k\beta (T_1 - T_2) e^{-\beta z} J_0(\bar{\alpha} r) \hat{z} \quad \text{para toda } r \geq r' \quad (4.8)$$

entonces de la ecuación (2.48), denotamos a la longitud en función de las temperaturas como se muestra en la ecuación siguiente

$$\beta = \frac{C}{L} \quad (4.9)$$

en donde "C" es el factor de intensidad y esta descrito por la ecuación (2.49) y deberá tomar valores negativos.

Por otra parte el factor del flujo de calor ahora esta denotado por la siguiente ecuación.

$$F = \frac{|J_z|}{|J_r| + |J_z|} \quad (4.10)$$

y al sustituir las ecuaciones (4.7) y (4.8) en la ecuación (4.10), y con una simplificación obtendremos lo siguiente

$$F = \frac{\beta}{\sqrt{\bar{\alpha}^2 J_1^2(\bar{\alpha} \bar{r}) + \beta^2 J_0^2(\bar{\alpha} \bar{r})} + \beta} \quad (4.11)$$

al dividir esta última ecuación por  $\beta$  y, sustituyendo los valores de  $\bar{\alpha}$  y  $\beta$  de las ecuaciones (2.9) y (4.9) respectivamente se obtiene lo siguiente

$$F = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{L}{r_o - r_i}\right) \left(\frac{\lambda}{C}\right) J_1^2(\bar{\alpha} \bar{r}) + J_0^2(\bar{\alpha} \bar{r})} + 1} \quad (4.12)$$

esta última relación indica que el flujo de calor ha sido analizado y visto por la parte de adentro del cilindro o pistón, ya que el porcentaje de transmisión sólo puede analizarse de esta forma y además dicho porcentaje depende en cierto modo de las temperaturas que están involucradas en el factor de intensidad ( $C$ ) como se vio en la sección (3.4), es por eso que la ecuación (4.12) queda descrita de esta forma y responde a la segunda pregunta formulada.

## 4.2 - UN PIRANOMETRO DE CAVIDAD VARIABLE

Desde la aparición del primer transductor termoelectrico en la medicion de la radiación solar, se ha considerado que tanto la intensidad de temperatura y la constante de tiempo representan parámetros constantes en una termopila, sin que existiera una relación matemática entre ellos.

Este hecho no es de extrañarse si se toma en cuenta que los transductores termoelectricos antes empleados, consistian de elementos extremadamente masivos, haciéndolos totalmente insensibles a pequeñas variaciones. Sin embargo, la experiencia con este nuevo tipo de termopares muestran que ambos parámetros dependen del tamaño de la cavidad sobre la cual esta montado el transductor termoelectrico ó termopila.

El arreglo experimental empleado en la Figura (4.4). El cual consiste de un transductor termoelectrico de simetría radial formado por 25 pares termoelectricos hechos a base de semiconductores, los cuales están montados sobre un substrato de mica. El transductor se coloca dentro de un hemisferio de vidrio, con las uniones frías en contacto termico con la masa del aparato, y las uniones calientes sobre una cavidad de longitud variable que se encuentra llena de aire.

La cavidad se encuentra delimitada en el fondo por medio de un pistón plano con cuerda que tiene un eje el cual esta sujeto al aparato por la parte inferior, permitiendo de esta forma que al ser rotada la parte externa del instrumento, el pistón suba o baje dependiendo del sentido que se le gire. Por otra parte, el pistón no esta dispuesto a rotar por

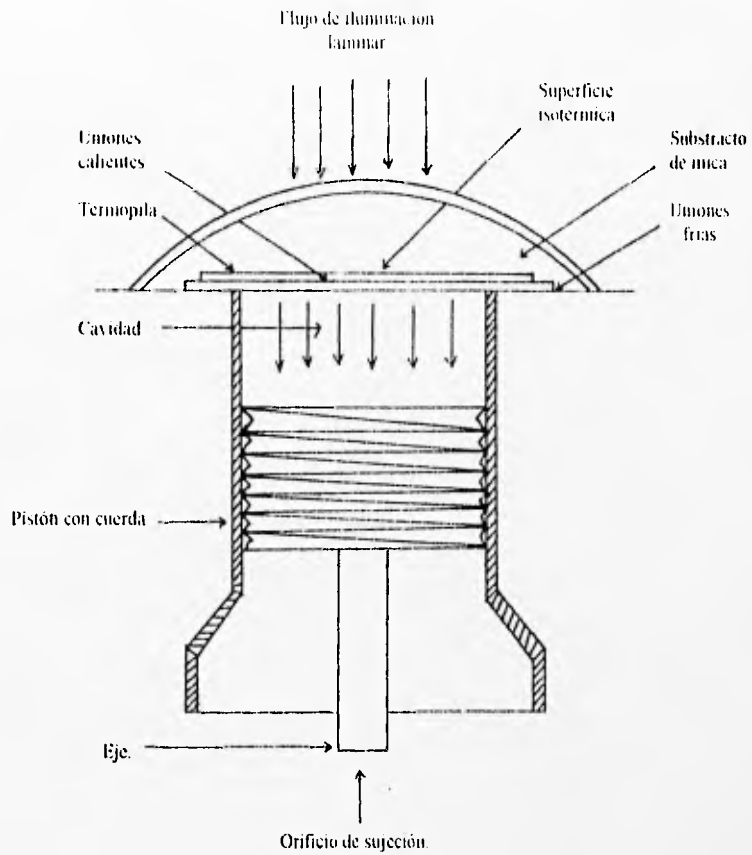


Figura (4.4) : Pistón de un Piranómetro de longitud variable, el cual sirve para encontrar la relación entre la temperatura y dicha longitud.

si mismo, debido al ajuste entallado de la cuerda y al hueco de sección recta de la parte media del dispositivo, que permite el movimiento de rotación y desplazamiento axial

Ahora bien para poder encontrar una relación entre la temperatura y la cavidad del pistón, se toma en cuenta las condiciones a la frontera que se tienen en la sección (2.4) aplicando estas condiciones al pistón de la figura (4.4), muestra figura nos queda de la siguiente manera, como se muestra en la Figura (4.5)

Procediendo al análisis de este problema se retoma (2.47), como se muestra

$$\ddot{J}_{11}(r, z) = k \gamma_1(r, z) - T_2 \left[ \alpha \frac{J_1(\alpha r)}{J_0(\alpha r)} \bar{r} - \beta_1 \frac{\cosh(\beta_1 z)}{\sinh(\beta_1 z)} \bar{z} \right] \quad (4.13)$$

que es la solución cuando se tienen estas condiciones a la frontera de la figura (2.4). En esta ecuación se verá el comportamiento del flujo de calor total cuando el  $r \rightarrow 0$  y  $z \rightarrow L$ , y estas condiciones corresponden a una región cilíndrica en la vecindad del eje del pistón. Así, la ecuación (4.13), se transforma en

$$\ddot{J}_{11}(L) = -k \beta_1 \Delta T_1(0, L) \left[ \frac{\cosh(\beta_1 L)}{\sinh(\beta_1 L)} \right] \bar{z} \quad (4.14)$$

en donde  $\Delta T_1(0, L) = T_1 - T_2$ , es la diferencia de temperatura por lo cual al despejarla y con un sencillo desarrollo algebraico la magnitud del flujo de calor, ecuación (4.14) se transforma en



$$G \tanh(HL) = A \beta_1(L) \quad (4.15)$$

en donde G es una constante definida por

$$G = \frac{J_{0,1}(L)}{k \beta_1} \quad (4.16)$$

mientras que

$$H = \beta_1 \quad (4.17)$$

y representa el parámetro de cada curva del experimento.

Los valores de G y H se muestran en la Tabla 1. De esta manera la ecuación (4.15), es la que nos especifica la relación entre la temperatura y la cavidad del pistón.

La gráfica de la ecuación (4.15) con los datos experimentales ajustados se muestran en las Figuras (4.6) y (4.7), en donde tenemos los valores de la longitud en metros y en milímetros.

En estas gráficas se ve que mientras mayor sea la constante G definida por la ecuación (4.16) como se muestra en la Tabla 1, menor será su conductividad k, entonces de dicha tabla se observa que la curva H<sub>3</sub> de la figura (4.6), tiene mucho mayor conductividad.

Ahora bien otra forma de ver esta relación de la temperatura con la longitud de la cavidad del pistón, es normalizando y ajustando los datos experimentales

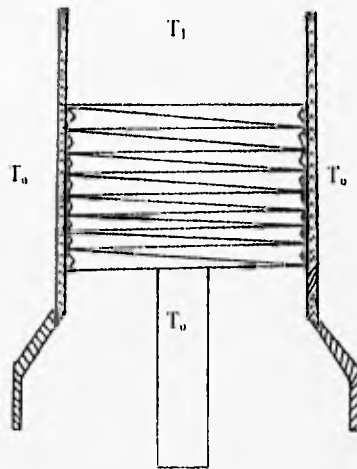


Figura (4.5) : La temperatura de la superficie superior del pistón varía como función del radio, mientras que en la pared lateral y la parte inferior permanecen a temperaturas constantes.

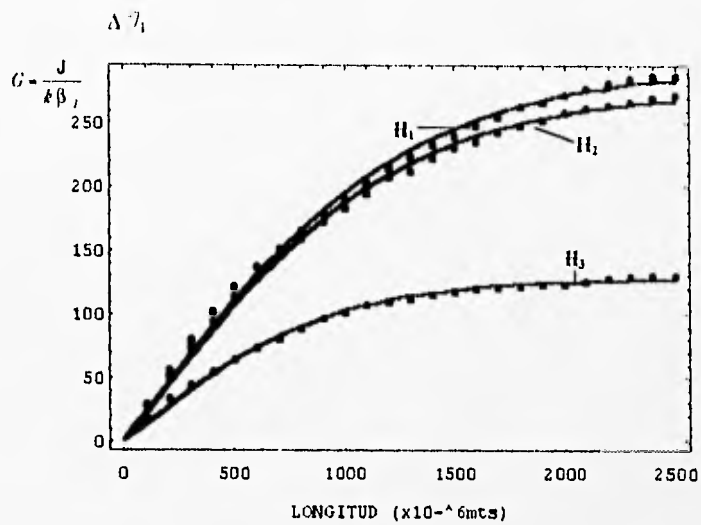


Figura (4.6) : En esta figura se muestra el comportamiento experimental de la intensidad de temperatura  $\Delta T_1 (L)$  en función de la longitud de la cavidad del pistón en metros. La curva se obtiene con la siguiente ecuación

$$\Delta T_1 = G \operatorname{Tanh}(HL)$$

en donde H es igual a  $\beta_1$  y toma un valor diferente para cada curva, y G es un valor constante asintótico para cada valor de H.

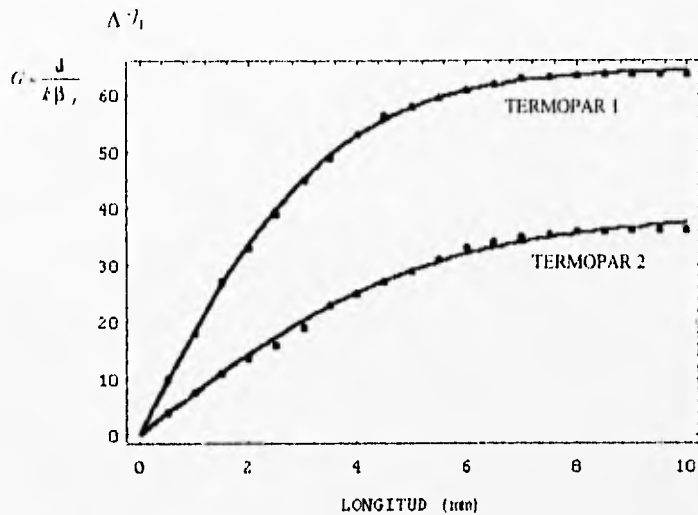


Figura (4.7) : En esta figura se muestra el comportamiento experimental de la intensidad de temperatura  $\Delta \mathcal{T}_1 (L)$  en función de la longitud de la cavidad del pistón en milímetros. La curva se obtiene ajustando los valores experimentales con la siguiente ecuación

$$\Delta \mathcal{T}_1 = G \operatorname{Tanh}(HL)$$

en donde H es igual a  $\beta_1$  y toma un valor diferente para cada curva, y G es un valor constante asintótico para cada valor de H.

CURVAS	G	H	GxH
1	295.591	0.000792	0.233
2	277.038	0.000819	0.226
3	128.439	0.001092	0.14
TERMOPAR1	64.772	0.28688	18.58
TERMOPAR2	39.176	0.18958	7.43

TABLA 1: En donde se ven los valores de G y H que muestran el valor del flujo de calor.

De las gráficas que aparecen en las Figuras (4.8) y (4.9), se puede ver que existe un valor máximo asintótico para la temperatura, ya que ambas son expresadas en función de la longitud de la cavidad del pistón. Se puede comprobar que ambas gráficas son de la forma

$$\Delta T_1(L) = 1 - e^{-HL} \quad (4.18)$$

donde  $H$  es una constante para cada una de las curvas definida por la ecuación (4.17), de este modo, para cada valor de la longitud de la cavidad empleado existe un valor para la diferencia de temperaturas  $\Delta T_1(L)$ <sup>16</sup>.

Dado que la solución de la ecuación (4.18) es una aproximación de la ecuación (4.15), se puede decir que para longitudes muy pequeñas de este experimento, ambas ecuaciones son una solución aproximada. Y para las condiciones a la frontera que se tienen en el pistón, estas ecuaciones (4.15) y (4.18) son las soluciones ajustadas para las pequeñas variaciones de longitud de la cavidad del pistón.

Ahora bien, para poder justificar lo mencionado anteriormente se hace la siguiente relación de la Tanh con la Exponencial, en la cual se muestra la aproximación que existe entre ambas como a continuación se muestra.

$$\text{Tanh } \beta L = \frac{e^{\beta L} - e^{-\beta L}}{e^{\beta L} + e^{-\beta L}} = \frac{e^{\beta L} (1 - e^{-2\beta L})}{e^{\beta L} (1 + e^{-2\beta L})} \quad (4.19)$$

en donde al desarrollar tenemos que

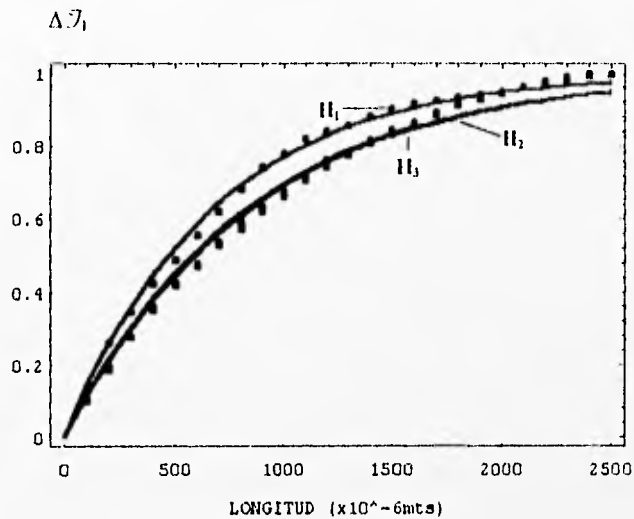


Figura (4.8) : En esta gráfica se muestra la relación entre la temperatura y la longitud de la cavidad. La curva se obtiene ajustando y normalizando los valores experimentales con la ecuación

$$\Delta T_1(L) = 1 - \exp^{-HL}$$

en donde H es una constante para cada curva y la longitud se encuentra en metros

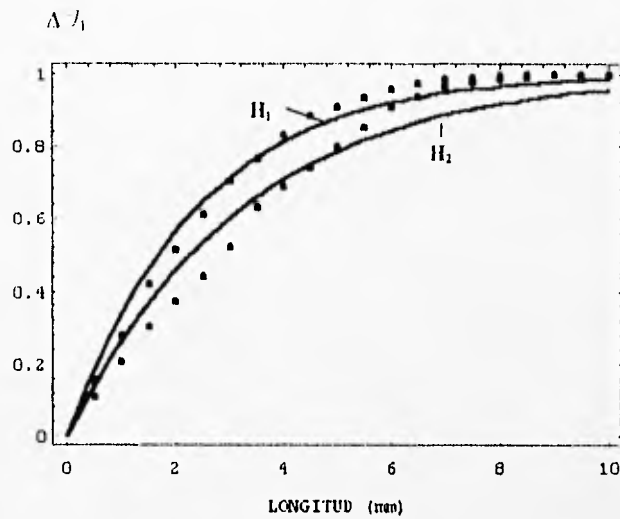


Figura (4.9) : En esta gráfica se muestra la relación entre la temperatura y la longitud de la cavidad. La curva se obtiene ajustando y normalizando los valores experimentales con la ecuación

$$\Delta T_1 (L) = 1 - \exp^{-HL}$$

en donde H es una constante definida para cada curva y la longitud se encuentra en milímetros.



$$\text{Tanh } \beta L = \frac{1}{2} (1 - e^{-2\beta L}) \quad (4.20)$$

esta última relación es la aproximación del ajuste que se hizo con las figuras (4.8) y (4.9) y es la justificación de dichas gráficas.

Finalmente, se observa en esta aplicación que no es fácil tratar de obtener y calcular un flujo de calor laminar, ya que se requiere de un equipo sofisticado y muy especial que nos permita calcular y ver dicho flujo de calor. Los datos experimentales fueron obtenidos a base de un Piránómetro especial con superficie totalmente isotérmica y de aquí se vio que no es sencillo obtener este flujo en dirección azimutal sin que afecten los bordes del sistema. Sin embargo se logró mostrar como se comporta este flujo dentro de un cilindro con cavidad variable

## RESUMEN

Resumiendo, se puede considerar de este trabajo los siguientes puntos importantes que a continuación se denotan.

1 - Bajo ciertas condiciones a la frontera de un estado estacionario como se tiene en la sección 2.3, se encontró la función de distribución de temperatura en cualquier punto dentro del cilindro, la cual se expresa en términos de las dimensiones geométricas del sistema. Esta función de distribución de temperatura está descrita por la ecuación (2.27)

$$\mathcal{T}(r, z) = (T_0 - T_2) J_0(\alpha r) e^{-\beta z} + T_2 \quad (2.27)$$

en donde, con las mismas condiciones a la frontera del sistema se describió el flujo de calor transmitido en forma explícita a través del cilindro; la ecuación que nos describe el flujo de calor es denotado por

$$\bar{J}_r = k\alpha (T_0 - T_2) e^{-\beta z} J_1(\alpha r) \bar{r} + k\beta (T_0 - T_2) e^{-\beta z} J_0(\alpha r) \bar{z} \quad (2.40)$$

Al mismo tiempo si las condiciones a la frontera se modifican como en la sección 2.4, la distribución de temperatura es

$$\bar{T}_1(r, z) = \frac{T_1 - T_2}{\sinh(\beta_1 L)} J_1(\alpha r) \sinh(\beta_1 z) + T_2 \quad (2.32)$$

y el flujo de calor total con dichas condiciones a la frontera se denotó como

$$\bar{J}_{11}(r, z) = k\alpha B_1 \sinh(\beta_1 z) J_1(\alpha r) \bar{r} - k\beta B_1 \cosh(\beta_1 z) J_0(\alpha r) \bar{z} \quad (2.47)$$

en donde tanto la ecuación (2.40), como esta última tienen como límite a la ley de Fourier canónica si  $r$  y  $z$  tienden a cero respectivamente, como se analizó en la sección 2.7.

2.- Para el caso de una región parcialmente isotérmica se encontró 2 regiones que se comportan de manera diferente, para la parte isotérmica el flujo de calor ocurre solo en la dirección azimutal, descrito por la ecuación (3.5)

$$\bar{J}_r = k\beta (T_1 - T_2) e^{-\beta z} \bar{z} \quad \text{para toda } r < r' \quad (3.5)$$

para la región que no es isotérmica el flujo de calor está descrito por la ecuación (3.8)

$$\bar{J}_r = k\bar{\alpha} (T_1 - T_2) e^{-\beta z} J_1(\bar{\alpha} \bar{r}) \bar{r} + k\beta (T_1 - T_2) e^{-\beta z} J_0(\bar{\alpha} \bar{r}) \bar{z} \quad \text{para toda } r > r' \quad (3.8)$$

donde  $r'$  separa las dos regiones isotérmicas y no isotérmicas. La última relación es denotada por la ecuación barra debido a las modificaciones de las condiciones a la frontera en  $r=r'$ .

Los flujos de calor tanto radial como laminar en las regiones descritas antes tienen un comportamiento, como se observa en las Figuras (3.3) y (3.4)

3 - Otra manera que se hizo para analizar y obtener un flujo calorífico en una sola dirección con una tapa isotérmica, fue la de hacer un análisis gráfico y encontrar una relación matemática que involucrará una longitud crítica aproximada en función de un radio dado, como se muestra en la Figura (3.6)

4 - Si los parámetros  $r_0$  y  $L$ , se consideran como variables de estado, entonces las ecuaciones (2.40) y (2.47), nos determinan analíticamente el comportamiento del flujo de calor para los casos de las fronteras variables. Además, se determinan las condiciones bajo las cuales el flujo de calor en dos direcciones se reduce a un flujo laminar, como un caso límite en el que no hay componente radial.

5 - Como aplicaciones del presente trabajo para observar su potencial en el análisis de sistemas y dispositivos, se consideran dos casos particulares:

Primero, se analizó y encontró el rendimiento del flujo de calor en una superficie parcialmente isotérmica, la cual se denota por la siguiente ecuación

$$\% = F \times 100 \quad (4.4)$$

en donde F es el factor del flujo de calor, y es denotado en relación de los radios  $r$  y  $r_0$  de un cilindro maestro supuesto. Esta F es descrita por 2 ecuaciones como a continuación se muestran

$$F = \frac{r'^2}{r_0^2} \quad (4.5)$$

o bien por la siguiente relación

$$F = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{L}{r_0 - r'}\right) \left(\frac{\lambda}{C}\right) J_1^2(\bar{\alpha} \bar{r}) + J_0^2(\bar{\alpha} \bar{r}) + 1}} \quad (4.12)$$

en donde la ecuación (4.5) describe un flujo calorífico visto a partir de como se distribuye el flujo incidente y la ecuación (4.12) nos describió la relación de los flujos en las dos regiones, isotérmica y no isotérmica.

Estas ecuaciones muestran el porcentaje de transmisión de calor, dependiendo como se analice el sistema.

Finalmente, en la segunda aplicación se vio el comportamiento de las curvas experimentales de la intensidad de temperatura de un Piranómetro con cavidad de longitud variable, estas curvas están descritas por las siguientes ecuaciones

$$G \tanh(HL) = \Delta T_1(L) \quad (4.15)$$

y

$$\Delta T_1(L) = 1 - e^{-HL} \quad (4.18)$$

Estas ecuaciones muestran que la dependencia es lineal respecto a  $L$ , cuando  $L$  tiende a cero, y explica la curvatura asintótica por medio del efecto de frontera cuando  $L$  tiende a infinito.

Cabe mencionar que como la distribución de temperatura es constante a lo largo de toda la superficie de la termopila, entonces el flujo de calor es laminar dentro de la cavidad cilíndrica. Por lo tanto,  $\Delta T_1$  se describe sólo por la dependencia de la longitud, como se muestra en las ecuaciones anteriores. Es preciso señalar que de acuerdo a las características de las condiciones a la frontera que presenta el Piranómetro, éste se compara con el sistema que se describe y analiza en la sección 2.4.

## CONCLUSIONES

Como un hecho de este trabajo fue la de encontrar una ecuación de transferencia de calor que describiera tanto la distribución de temperatura  $T(r,z)$  como el flujo de calor  $J_1$ , en un sistema cilíndrico cuando se tienen diferentes condiciones a la frontera. Además estas ecuaciones de transferencia de calor involucraron los parámetros geométricos del sistema como son el radio y la longitud, los cuales nos definieron las variaciones de distribución de temperatura y del flujo calorífico.

De este trabajo se logró ver la importancia de las fronteras variables que modificaron la distribución de temperatura y el flujo calorífico cuando se tienen diferentes casos extremos.

Otro aspecto interesante logrado en este trabajo fue al analizar un cilindro con una tapa parcialmente isotérmica, y se logró obtener un flujo de calor en la dirección azimutal en base a un supuesto cilindro cuando su radio de éste tendía a infinito. De esta forma se describió analíticamente una región con una variación de temperatura despreciable. Con esta hipótesis y habiendo considerado que el radio de la región isotérmica puede variar dentro del valor del radio de la tapa del cilindro, se encontró la solución del problema planteado, al flujo de calor de una tapa parcialmente isotérmica. Análisis al parecer nuevo, pues no se encontró ningún comentario a este respecto en la literatura analizada.

Otro punto importante, fue la de haber descrito el flujo de calor total por la superficie superior del cilindro con una tapa parcialmente isotérmica, en la cual se encontró

una relación analítica que nos determine hasta que punto de la longitud se puede considerar flujo laminar, y esto se hizo en base a un método gráfico.

La importancia de este tipo de soluciones radica en su potencial de aplicaciones y en procesos de aprovechamiento de energía, como altos hornos, calderas, calentadores, refrigeradores y cambiadores de calor. Es un hecho que para lograr un máximo de energía que se trasmite en cualquier sistema va a depender principalmente de un buen diseño, como es el material, dimensiones, pruebas mecánicas y construcción de las propiedades geométricas del sistema, que posteriormente se desarrollará en otro proyecto de investigación para obtener un prototipo para la aplicación real considerando la teoría pura de este trabajo.

Por último se puede mencionar de la primera aplicación, que se obtuvo una superficie parcialmente isotérmica en base a un radio crítico para obtener un flujo laminar, pero se describió que dicha superficie iba a depender específicamente de las dimensiones, temperaturas y una muy buena relación de combustión.

Finalmente, se encontró que para el caso de un Piranómetro de longitud variable, la intensidad de temperatura depende de la longitud del sistema, de acuerdo a resultados obtenidos teóricamente en este trabajo.



## BIBLIOGRAFIA

- 1 - Widder, D V.; The Heat Equation. Academic Press, Inc ; 1975.
- 2 - Zill, D G.; Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones, Grupo Editorial Iberoamérica, 2ª Edición, 1988
- 3 - Holman, J P.; Heat Transfer, International Student Edition, 1976
- 4 - Gould, S. H., Variational Methods for Eigenvalue Problems; University of Toronto Press; 1971.
- 5 - Boyce, W. E. y DiPrima, R. C., Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores a la Frontera; Tercera Edición, Editorial Limusa.; 1980.
- 6 - Magnus, W. y Oberhettinger, F.; Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics; Chelsea Publishing Company; 1949.
- 7.- Carslaw, H. S. y Jaeger, J. C.; Conduction of Heat in Solids; Oxford University Press; 1959
- 8.- Jackson, J. D.; Classical Electrodynamics; Wiley and Sons, Inc, 1975.
- 9.- Lebedev, N. N ; Special Functions and Their Applications; Dover Publication, Inc., 1972
- 10.- Mathews, J. y Walker, R. L. Mathematical Methods of Physics; W.A. Benjamin, Inc ; 1970
- 11.- Kreyszig, E.; Advanced Engineering Mathematics, Seventy Edition 1993.
- 12.- Estrada Flores A.; Ley de Fourier Generalizada para Flujo de Calor no-estacionario y Fronteras Variables; Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, U.N.A.M.; 1993.

- 13 - Leeming, D J y Howarth M. El Motor del Automóvil, Conocimientos Básicos ,  
Publicaciones Marcombo. S.A., Mexico-Barcelona 1988
  
- 14 - Giacosa D , Motores Endotermicos , Ediciones Omega, S.A., Barcelona 1988
  
- 15 - Martinez-Guerrero, J y Del Castillo, L.F. , Fast Response Thermopiles;  
Geof Inter . Vol 28-1, 1989
  
- 16 - Dominguez Espinos, O ; La Relación de la Constante de Tiempo con la Sensibilidad en  
Termopilas y su Empleo para la Localización de la Posición del Sol con un Arreglo  
Ortogonal Piranometrico ; Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, U.N.A.M. , 1987
  
- 17 - Fox, L.; Numerical Solution of Ordinary and Partial Differential Equations.;  
Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1962.
  
- 18 - Davis Harry F.; Fourier Series and Orthogonal Functions.;  
Dover Publications, Inc. 1989.
  
- 19 - Alan J Chapman.; Heat Transfer; Cuarta Edición; Macmillan Publishing Company 1984.
  
- 20 - Kreith, F.; Principios de Transferencia de Calor; Herrero Hermanos, Sucesores, S.A.;  
México 1978.
  
- 21 - Edward. F. Obert.; Motores de Combustión Interna Análisis y Aplicaciones.;  
Editorial C.E.C.S.A.; México 1979.
  
- 22 - Yao, L. S. y Chen, F. F.; A horizontal flow past a partially heated, infinite vertical  
cylinder; Journal of Heat Transfer, Vol. 103, pp. 546-551, August 1981.
  
- 23 - Kuyper. R. A.; The heat flow rate in symmetrical two-dimensional conduction  
problems.; Int Journal of Heat Mass Transfer, Vol 38, N° 6, pp. 1089-1095.; 1995.

- 24.- Goldman, A. y Kao, Y. C.; Numerical solution to a two-dimensional conduction problem using rectangular and cylinder body-fitted coordinate systems, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 103, pp. 753-758, November 1981
- 25.- Abramowitz, M. y Stegun, A. Y.; *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, Inc.; 1965.