

00579

SEPTIEMBRE 1996

9  
2j

**CONTROL GEOMÉTRICO NOLINEAL, ROBUSTO  
Y ADAPTABLE:  
APLICACIÓN A UN REACTOR DE TANQUE  
AGITADO**

**TESIS QUE PRESENTA:**

**HUMBERTO RAMÍREZ CASTAÑEDA**

**PARA OBTENER EL GRADO DE**

**MAESTRO EN INGENIERÍA QUÍMICA**

**DE LA FACULTAD DE QUÍMICA**

**DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**ASESOR : DR. JESÚS ÁLVAREZ CALDERÓN**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

1996

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**A Livia**  
**A mis padres Herminia y Humberto**  
**A mis hermanos Silvia y Rafael**

## **AGRADECIMIENTOS:**

Al Jesús Álvarez Calderón, por su paciencia en la supervisión del desarrollo del presente trabajo.

A José de Jesús Álvarez Ramírez por haber llamado mi atención sobre los trabajos de Qu, Leitman, Hammouri, Teel *et al.* en las pláticas en el cubículo 301 de la UAM Iztapalapa. A Rodolfo Suárez por la claridad de sus explicaciones.

A Cristina Verde Rodarte y a Gerardo Espinosa Pérez.

A los sinodales del jurado.

A la Facultad de Química de la Universidad Nacional Autónoma de México, a Sergio Trejo y a la Unidad de Control Escolar por permitir el desarrollo de la presente tesis con un mínimo de sobresaltos administrativos.

A los alumnos y maestros del Departamento de Procesos e Hidráulica de la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa.

A Marco Uresti y a GIRSA por haber apoyado el desarrollo del presente trabajo.

A CONACYT por haber apoyado el desarrollo de la presente tesis.

Y a todos aquellos y aquellas que me apoyaron y que no menciono por ser tantas y tantos.

<b>CONTENIDO</b>	<b>PÁGINA</b>
<b>§1. INTRODUCCIÓN</b>	1
MOTIVACIÓN DEL CONTROL NOLINEAL	2
DESARROLLO DE LA PRESENTE TESIS	5
<b>§2. DINÁMICA Y CONTROL DE UN SISTEMA NOLINEAL</b>	8
§2.1. SISTEMA DINÁMICO	8
§2.2. LEY DE CONTROL APLICADA	10
§2.3. LINEALIZACIÓN POR TRANSFORMACIÓN Y RETROALIMENTACIÓN NOLINEALES	13
<b>§3. ESQUEMAS DE CONTROL</b>	17
<b>§3.1 CONTROL ROBUSTO ADAPTABLE</b>	17
§3.1.1. CONTROL ROBUSTO	17
§3.1.2. CONTROL ROBUSTO Y ADAPTABLE, SIN CONDICIONES DE PARIDAD	21
<b>§3.2. ADAPTACIÓN</b>	24
§3.2.1 ADAPTACIÓN CON PARÁMETROS CON SIGNIFICADO FÍSICO: AJUSTE EN LINEA	24
§3.2.2 CONTROL CON ESTABILIDAD DE SISTEMAS NOLINEALES MEDIANTE UN OBSERVADOR Y UN REGRESOR	29
<b>§3.3. RECAPITULACIÓN</b>	34

<b>§4. MODELADO Y CONTROL DE UN REACTOR BIOLÓGICO</b>	<b>36</b>
§4.1. MODELO DE REACTOR BIOLÓGICO DE TANQUE AGITADO	36
§4.1.1. PUNTOS DE EQUILIBRIO	41
§4.1.2. REGIÓN DE COEXISTENCIA EN EQUILIBRIO	44
§4.1.3. DESCRIPCIÓN DE LAS SIMULACIONES	46
§4.2. LINEALIZACIÓN MEDIANTE RETROALIMENTACIÓN	47
§4.3. DISEÑO LINEAL	49
§4.4 CONTROL ROBUSTO ADAPTABLE	51
§4.5. AJUSTE DE PARÁMETROS EN LINEA	53
§4.6. SIMULACIÓN DEL ESQUEMA DE CONTROL BASADO EN LA INTERCONEXIÓN SISTEMA/OBSERVADOR/CONTROL/REGRESOR	57
§4.7. GRÁFICAS DE SIMULACIONES	59 a 81
§4.8. RECAPITULACIÓN DE SIMULACIONES	82
<b>§5. CONCLUSIONES Y COMIENZOS</b>	<b>83</b>
§5.1 CONCLUSIONES	83
§5.2 COMIENZOS	85
<b>§ A. APÉNDICES .</b>	<b>88</b>
§A.1. CONTROL POR SEGUIMIENTO DE MODELOS	88
§A.2. INTEGRADORES SOBRE EL ERROR DE SALIDAS Y PRINCIPIO DEL MODELO INTERNO	91
§A.3. MÉTODOS UNIPASO PARA INTEGRAR SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS	96
<b>§ B. BIBLIOGRAFÍA.</b>	<b>100</b>
<b>§ C. LISTA DE SÍMBOLOS.</b>	<b>107</b>

*Gute Theorie ist gute Praxis.*

Ludwig Boltzman.

## §1. INTRODUCCIÓN.

Los distintos componentes de un proceso, e inclusive los de un mismo equipo, interaccionan entre sí de manera compleja. Esto es una de las razones principales del uso del control de procesos, pues estos deben cumplir un conjunto de requerimientos de diversos tipos:

- **Producción:** Se deben cumplir los requerimientos de calidad y cantidad de productos.
- **Economía:** La producción debe adaptarse al mercado con prontitud, al mismo tiempo debe hacerlo de la manera más eficiente en cuanto a uso de recursos energéticos, monetarios, materiales y humanos.
- **Operación:** Los distintos equipos y materias primas que conforman un proceso tienen que sujetarse a una serie de restricciones inherentes a su utilización y operación.
- **Medio Ambiente:** Las descargas y emisiones al ambiente provenientes de un proceso están sujetas a una serie de límites impuestos por leyes y normas federales y estatales, estas restricciones no solo afectan los sistemas de purificación de las descargas, sino que se retro-propagan al resto del proceso.
- **Seguridad:** La industria química de proceso es una de las más peligrosas y riesgosas para la población general, por ello debe cumplir requisitos de seguridad más estrictos que el promedio de las empresas.

En todos los casos anteriores el control de procesos juega una parte fundamental. Por ejemplo, la optimización de procesos con objetivos económicos lleva a operar los procesos en puntos difíciles de controlar, generalmente en puntos cercanos a los límites de operación y seguridad de la planta, como puede ser la operación en puntos inestables a lazo abierto.

## **MOTIVACIÓN DEL CONTROL NOLINEAL.**

En los años cincuentas y sesentas el desarrollo de la teoría del control de sistemas lineales, principalmente el enfoque de estado, permitió aplicaciones exitosas a sistemas de ingeniería eléctrica e industria aeronáutica. Este impulso teórico llegó posteriormente a la industria química provocando un aumento de la investigación en el tema, tratando principalmente de aplicaciones de la teoría del control óptimo lineal, pero con pocas implantaciones sobrevivientes en la industria.

A mediados de los 70 en Estados Unidos hubo una reacción crítica de la comunidad académica y de la industria para evaluar los motivos del fracaso de una teoría con aplicaciones tan exitosas en otros campos, cf. Foss(1973), Kestenbaum et al.(1976) y Lee-Weekman(1976) y más recientemente Álvarez(1996).

El consenso indicó que una de las causas principales fue la traducción demasiado literal de técnicas adecuadas a sistemas con características distintas a las que se presentan en ingeniería química. En muchos casos los sistemas en ingeniería eléctrica son rápidos, lineales en un amplio rango de operación y con estados internos generalmente observables o directamente medidos, los sistemas mecánicos tiene varias de las características anteriores como la velocidad, facilidad y economía en la medida de estados internos y el tener modelos cuya estructura matemática interna es bien conocida.

Los sistemas de ingeniería química por el contrario, cf. Bequette(1991), son:

- **generalmente lentos**
- **se carece de mediciones de un buen porcentaje de los estados totales**
- **tienen escalas de tiempo muy diversas**
- **la dimensión del vector de estados es grande**
- **hay una fuerte interacción entre variables**
- **se presentan continuamente perturbaciones medidas y no medidas**
- **hay restricciones en los estados y entradas**
- **retrasos en entradas y mediciones**



- parámetros inciertos y variantes en el tiempo
- y sobre todo son fuertemente no lineales.

Por ejemplo,

1. Las propiedades termodinámicas no dependen linealmente de la temperatura y solo en casos muy ideales y simples dependen linealmente de la composición.
2. Los coeficientes de transporte en su mayor parte dependen de diversas variables del sistema de manera muy compleja y no lineal.
3. Los sistemas reaccionantes son notablemente no lineales, todos aquellos que son no isotérmicos son no lineales y de los sistemas de reacción isotérmicos solo aquellos con cinética de primer orden son lineales.

Se espera que un control de procesos que presente :

- i. **Regulación:** mantener las salidas alrededor del punto de operación en presencia de perturbaciones.
- ii. **Seguimiento:** los cambios en el punto de operación deben ser efectuados de manera rápida y suave.
- iii. **Robustez:** estabilidad y desempeño aceptable deben mantenerse en presencia de errores paramétricos y estructurales del modelo del proceso.
- iv. **Manejo de restricciones:** la ley de control debe ser capaz de desempeñarse aceptablemente en presencia de restricciones en estados y entradas.

Las críticas presentadas a mediados de los setentas en general siguen en pie. Solo, en rigor, puede decirse que se cumplen y consideran todos los requisitos y características antes mencionados para el caso del control predictivo (*MPC Model Predictive Control*, cf. Richalet et al.(1979) y *DMC Dynamic Matrix Control*, cf. Cutler-Ramaker(1979)) que ha tenido un gran éxito en la práctica industrial, ver García et al.(1989) y Richalet(1993). Desarrollos en la dirección de extender el control predictivo a sistemas no lineales pueden verse en Abu-el-Ata-Fliess(1989) y Fliess et al.(1992).

Tanto el MPC como el DMC están basados en un modelo del sistema. Para una gran cantidad de casos la utilización de un modelo del proceso a controlar es indispensable para obtener el desempeño requerido en la regulación y seguimiento, esto ha motivado la difusión del llamado control basado en modelos en la industria química. Se puede mostrar que el control perfecto del proceso se puede lograr si el controlador tiene un modelo perfecto del proceso. El desarrollo de modelos es el primer paso en el desarrollo de una estrategia control avanzado. Modelos más exactos suelen ser más complejos y deben capturar la no linealidad esencial del proceso físico, esto hace necesaria una teoría de control que directamente tome en cuenta la no linealidad de los modelos y no opere sobre linealizaciones aproximadas de un modelo complejo.

En esa dirección se desarrollaron de finales de los setentas a finales de los ochentas herramientas muy prometedoras en la teoría del control no lineal basada principalmente en la traducción de la teoría geométrica lineal, cf. Wonham(1985) y Basile-Marro(1992) a un escenario no lineal. De espacios lineales se paso a variedades diferenciales lisas o suaves, cf. Brockett(1979), Isidori et al.(1981), Su(1982), Hunt et al.(1983), para una revisión completa: Isidori(1989), Nijmeijer-Van der Schaft(1990), versiones más accesibles de esta teoría se encuentran en Khalil(1992) y Vidyasagar(1993).

Esta teoría capaz de manejar varios de los requisitos antes mencionados que debe poseer un control de procesos, pues permite un manejo adecuado de las interacciones multivariantes entrada/salida. Derivaciones de esta teoría permiten la construcción de observadores y así poder satisfacer la necesidad de controlar un proceso disponiendo de escasa mediciones de variables. La necesidad de mantener la estabilidad ante perturbaciones medidas y no medidas no lleva considerar una ley de control con antecarga (*feedforward* en inglés) de las perturbaciones medidas y un control tolerante a las perturbaciones no medidas.

Para solucionar el problema de los parámetros variantes en el tiempo se pueden utilizar las técnicas de control adaptable, ver por ejemplo Sastry-Bodson(1989). En este caso se ajusta los parámetros del modelo en línea para que este se asemeje al proceso.

Intentar resolver el problema del control acotado y de las restricciones generales en estados y controles queda fuera del alcance del presente trabajo.

Según Morari(SIAM Conference, 1992) encontrar los fundamentos matemáticos de los controles robustos no lineales basados en modelos es uno de los problemas más relevantes del presente lustro.

### **DESARROLLO DE LA PRESENTE TESIS**

La presente tesis trata de la aplicación de técnicas de control no lineal desarrolladas en las últimas décadas a procesos como los reactores de tanque agitado.

Se consideró razonable tomar las características particulares de los procesos químicos como guías en el diseño de estrategias de control. Como caso de estudio se consideró un reactor biológico recombinante.

La propiedad de los procesos en que más énfasis se hace en este trabajo es la no linealidad, esto debido a que esta propiedad es la regla más que la excepción en los sistemas de proceso y determina fuertemente el comportamiento de ellos.

La teoría de control geométrico no lineal da un excelente marco teórico de análisis y síntesis de esquemas de control de sistemas de proceso y nos da la ley de control sobre la cual se construye el resto de las aportaciones del presente trabajo:

1. Una versión adaptable de un esquema de control robusto presentado por Qu(1992), i.e. un control tolerante a incertidumbre y errores de modelado en versión adaptable.
2. Un esquema simple y aproximado de estimación en línea de parámetros físicos para modelos no linealmente parametrizados, que es una extensión a parametrizaciones no lineales de resultados de Teel et al. (1991) a parametrizaciones lineales.

3. Se presenta una prueba de estabilidad de un esquema de control para una clase específica de sistemas no lineales consistente en: la interconexión del sistema no lineal paramétrico, un observador de alta ganancia, un control basado en estados del observador y un estimador o regresor de parámetros. Este esquema extiende el principio de separación de Hammouri-Busawon(1993) al incluir un regresor de parámetros.

En §2 se presentan resultados estándar de la teoría de control no lineal geométrica, para quien este familiarizado con este material puede muy bien pasar a los siguientes capítulos, mejores y mas amplias explicaciones de esta teoría se encuentran en los libros de Nijmeijer-Van der Schaft(1990), Isidori(1989), Khalil(1992) y Vidyasagar(1993), siendo los dos últimos los más cercanos a un punto de vista de ingeniería en contraposición al primero que es netamente matemático. Primeramente se define la ley de control a utilizar y luego se relaciona con transformaciones y retroalimentaciones que permiten obtener leyes de control no lineales dentro del marco de la teoría lineal clásica.

La principal contribución de la presente tesis se sitúa en el capítulo §3, ahí se plantea el problema de controlar un proceso cuando para ello solo se dispone de un modelo imperfecto. Se propone una ley de control que es la versión adaptable de un esquema de control robusto no lineal. Se presenta después un esquema de control adaptable general aunque aproximado aplicable a sistemas con parametrizaciones no lineales, situación común en la ingeniería de procesos. El esquema es estable para parametrizaciones afines en una función de los parámetros de manera exacta y para parametrizaciones no lineales en primera aproximación. Finalmente, ante la dificultad que se presenta para demostrar la estabilidad de la interconexión de los esquemas propuestos de control y adaptación tal como se presentaron, se prueba la estabilidad de un sistema de un sistema particular interconectado compuesto por un sistema a controlar, un observador, un controlador y un regresor.

En §4 se aplican los conceptos desarrollados a la simulación de un reactor biológico recombinante.

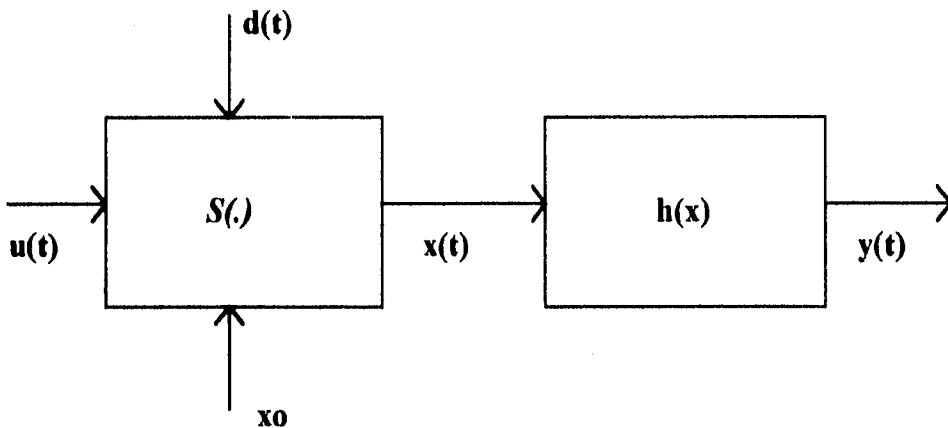
Las conclusiones se incluyen en §5. En §A se detallan desarrollos que justifican la hipótesis de igualdad de grados relativos conjeturada en §3, se muestra un esquema fallido pero no por ello, creemos, sin interés, el método numérico utilizado para el cálculo de las sensibilidades a los parámetros y finalmente ciertos conceptos útiles. La bibliografía utilizada y referida se encuentra en §B. Se da una lista de símbolos en §C.

## §2. DINÁMICA Y CONTROL DE UN SISTEMA NOLINEAL.

En este capítulo se introduce la clase de sistemas dinámicos considerados en la presente tesis, posteriormente se presenta la ley de control general aplicada de donde los esquemas de control luego presentados parten. El principio subyacente es derivar las salidas hasta poder obtener el control a partir de los estados y las salidas. La ley de control propuesta tiene la particularidad de que linealiza el comportamiento entrada/salida, esto permite utilizar técnicas de control lineal para diseñar el control de un sistema no lineal. Finalmente se hacen algunas acotaciones respecto a la estabilidad del sistema dinámico bajo esta ley de control.

### §2.1. SISTEMA DINÁMICO.

Primero se define el sistema dinámico a tomar en cuenta. En un diagrama conceptual, el sistema considerado se representa como:



y se denota mediante el símbolo  $S(\bullet)$ .

Aquí  $\mathbf{x}(t)$  son los estados del sistema como podrían ser la temperatura y composición en un reactor;  $\mathbf{x}_0$  son las condiciones iniciales de las que se parte, en un sistema lineal son fácilmente eliminables de todo desarrollo posterior, en el caso de

sistemas no lineales generales son muy importantes y siempre deben tomarse en cuenta.

El vector  $u(t)$  corresponde a las entradas manipulables o controles como podrían ser la fracción de apertura de una válvula, el flujo de entrada y la temperatura del agua de enfriamiento.

El vector  $d(t)$  corresponde a las entradas **no** manipulables o perturbaciones. Las perturbaciones pueden ser medidas y son la principal justificación del uso del control anteaalimentado. En el caso de no ser medidas o conocidas pueden ser la justificación del uso del control robusto y/o adaptable, estas perturbaciones desconocidas pueden provenir de diversas fuentes: errores de modelado, errores paramétricos, entradas externas desconocidas, etc. por ejemplo una alimentación variable a una reacción de un reactivo que no se determina analíticamente o un virus en el cultivo indetectable con los instrumentos disponibles. En adelante el vector  $d(t)$  indicará solo las perturbaciones **medidas**, indicando con esto que no solo se conoce el valor de la perturbación en todo momento sino también todas sus derivadas con respecto al tiempo, cf. Álvarez-Suárez-Martínez(1991).

El signo  $S(.)$  indica la relación (ecuación diferencial) entre entradas , estados y condiciones iniciales.

El vector  $h(x,d)$  es una función o mapa que va de los estados a las salidas  $y(t)$ , puede ser la función identidad aplicada a un estado o una función más complicada de varios estados y perturbaciones medidas.

La clase de sistemas dinámicos de interés a la presente tesis son aquellos representados mediante ecuaciones diferenciales ordinarias con la siguiente estructura:

$S(.)$ :

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= f(x,d,p) + G(x,d,p) \mu(x,d,u,p) = f(x,d,p) + \sum_{i=1,m} g_i(x,d,p) \mu_i(x,d,u,p) \\ y &= h(x,d) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde  $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{X} \subset \mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{d}(t) \in \mathbf{D} \subset \mathbf{R}^d$ ,  $\mathbf{p}(t) \in \mathbf{P} \subset \mathbf{R}^p$ ,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{U} \subset \mathbf{R}^m$ ,  $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{Y} \subset \mathbf{R}^m$ ,  $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{d}) \in \mathbf{R}^{n \times m}$ ,  $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) \in \mathbf{R}^m$ .

El vector  $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \mathbf{u}, \mathbf{p})$  corresponde a una generalización del control  $\mathbf{u}(t)$  presente en varias situaciones comunes, el desarrollo posterior es válido pues para sistemas afines no solamente en el control sino también para sistemas afines en funciones del control. Es importante notar que se supone perfectamente conocida y globalmente invertible para  $\mathbf{u}$ , es decir que dados  $\mu$ ,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{d}$  se puede obtener siempre un solo  $\mathbf{u}(t)$ , este requerimiento es estricto y se hace con el fin de evitar el tener que preocuparse por la región en que es invertible  $\mu$  en todo el tratamiento (local) posterior.

## §2.2. LEY DE CONTROL APLICADA

La ley de control sobre la que se construyen los esquemas de control presentados en §3 tiene una larga historia con raíces en la búsqueda de maneras sencillas de diseñar leyes de control para sistemas no lineales.

Una de las primeras contribuciones establece bajo que condiciones es posible convertir un sistema no lineal en uno lineal mediante transformación de coordenadas no lineal, cf. Krenner (1973), estas condiciones son muy restrictivas.

Buscando ampliar la clase de sistemas no lineales "linealizables" en Hunt et al.(1983) se incluye además de la transformación de coordenadas una retroalimentación también no lineal, esto lleva a condiciones menos estrictas. En las nuevas coordenadas de control y de estado el sistema era lineal y es posible aprovechar los métodos de diseño aplicados a sistemas lineales.

Muy relacionado con los desarrollos anteriores es el trabajo mostrado en Isidori(1989) donde se linealiza la respuesta entrada/salida del sistema, llevando a la llamada forma normal, que se muestra más adelante en §2.3.



Al sistema  $S(\cdot)$  representado por la (2.1) se le aplica la siguiente ley de control:

$$\mu(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \mathbf{p})^{-1} \{ \mathbf{v} - \mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \mathbf{p}) \}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_i &= \mathcal{L}_f^{r_i} \mathbf{h}_i, \quad 1 \leq i \leq m \\ \mathbf{A}_{ij} &= \mathcal{L}_{\mathbf{g}_j} \mathcal{L}_f^{r_i-1} \mathbf{h}_i, \quad 1 \leq i, j \leq m \\ \mathbf{v}_i &= d^{r_i} y_i / dt^{r_i}, \quad 1 \leq i \leq m, \text{ se especifica} \end{aligned} \quad (2.2)$$

los símbolos  $\mathcal{L}_f$  y  $\mathcal{L}_g$  son derivadas direccionales (derivadas de Lie en la literatura del control geométrico no lineal) y se definen así:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f^1 \mathbf{h} &\equiv (\partial \mathbf{h} / \partial \mathbf{x})^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \mathbf{p}) \\ \mathcal{L}_f^{i+1} \mathbf{h} &\equiv \mathcal{L}_f(\mathcal{L}_f^i \mathbf{h}) \\ \mathcal{L}_f^1 \mathbf{h} &\equiv \mathcal{L}_f \mathbf{h} + (\partial \mathbf{h} / \partial \mathbf{d}^{(0)})^T (d^{(0)} \mathbf{d}(t) / dt^{(0)}) \\ \mathcal{L}_f^{i+1} \mathbf{h} &\equiv \mathcal{L}_f(\mathcal{L}_f^i \mathbf{h}) + \sum_{j=1, i} (\partial \mathcal{L}_f^i \mathbf{h} / \partial \mathbf{d}^{(j)})^T (d^{(j+1)} \mathbf{d}_j / dt^{(j+1)}) \end{aligned}$$

El número  $r_i$  es llamado el grado relativo de  $y_i$ ,  $\mathbf{r}$  es el vector de grados relativos. Una descripción detallada y completa de los que son y significan los grados relativos se encuentra en las siguientes referencias: Isidori(1989), Nijmeijer-Van der Schaft(1990), Khalil(1992) y Vidyasagar(1993), sobre todo es importante el trabajo de Alberto Isidori que fue quién difundió la aplicación del término a sistemas no lineales.

Los grados relativos indican cual de las derivadas sucesivas de alguna salida con respecto al tiempo depende directamente de alguna entrada, de forma más clara:

$$(\partial / \partial \mathbf{u})(y_i) = 0, (\partial / \partial \mathbf{u})(d^1 y_i / dt^1) = 0$$

...

$$(\partial / \partial \mathbf{u})(d^{r_i-1} y_i / dt^{r_i-1}) = 0, (\partial / \partial \mathbf{u})(d^{r_i} y_i / dt^{r_i}) \neq 0$$

es decir la  $r_i$ -ésima derivada de la  $i$ -ésima salida con respecto al tiempo es la primera que es una función explícita de los controles. Los grados relativos tienen una gran importancia en la definición del diseño lineal posterior.

El vector  $\mathbf{v}$  es un nuevo control que se diseña para cumplir especificaciones de desempeño. Este diseño es posible hacerlo mediante técnicas lineales. Nótese que en

realidad al especificar  $v_i$  se especifica  $d^{r_i} y_i/dt^{r_i}$ . Por ello, aunque es posible hacerlo de otra manera, lo natural es especificar  $d^{r_i} y_i/dt^{r_i}$  ( $= v_i$ ) con base en un sistema lineal para hacer cumplir las especificaciones de desempeño requeridas, que son más fáciles de establecer para un sistema lineal.

Debe hacerse notar que es posible que la matriz  $A(x,d,p)$  sea singular y por lo tanto imposible obtener  $\mu$  en función de las salidas y demás datos. Este problema en el caso general se considera abierto y ha sido un campo de investigación que ha despertado interés durante la década pasada y parte de esta. En términos generales pueden mencionarse tres técnicas para subsanar este problema, cf. transformación de salidas en Slotine-Li(1991), reformulación lineal de salidas en Hirschorn(1979) y el llamado algoritmo de la extensión dinámica en Isidori(1989,secc.7.5). Los procedimientos antes mencionados carecen de una manera formal de elegir las salidas o entradas a transformar basándose esta elección principalmente en heurísticas, para la mayoría de los casos basta con algo de intuición y conocimiento del modelo o proceso físico modelado para hacer una elección adecuada de salidas, entradas y transformaciones.

### §2.3. LINEALIZACIÓN POR TRANSFORMACIÓN Y RETROALIMENTACIÓN NO LINEALES.

Una propiedad muy importante de la ley de control (2.2) es que esta linealiza el comportamiento entrada/salida del sistema, i.e. en el sistema (2.1) post-retroalimentación (2.2) la respuesta de  $y(t)$  a  $v(t)$  es lineal.

Cuando la matriz  $A(x,d,p)$  no es singular gran parte de los resultados obtenidos para una entrada/una salida se extrapolan para multientrada/multisalida. El obtener derivadas con respecto al tiempo de las salidas hasta encontrar algún control sugiere un cambio natural de coordenadas que hará más visibles las características importantes del sistema y facilita las manipulaciones algebraicas y el diseño de la ley de control, esta transformación puede enunciarse simplemente así: *utilizar como nuevos estados las derivadas sucesivas de las salidas con respecto al tiempo.*

Este cambio de coordenadas con anteaalimentación de entradas no manipulables junto con una retroalimentación adecuada ayuda a comprender como la retroalimentación (2.2) lleva el sistema no lineal original a un sistema lineal en forma normal con una parte lineal y otra no lineal, pero con un comportamiento entrada/salida lineal, esto se explica a continuación.

Se supone que el sistema tiene un vector de grados relativos  $r$ , sea  $\sigma = \sum_{i=1,m} r_i \leq n$ , donde  $n$  es la dimensión del vector de estados.

En el caso de que  $\sigma = n$ , se define la transformación  $T(x,d,p)$  con elementos:

$$T_{li+j}(x,d,p) = \mu_j^l h_i(x,d,p) \quad 0 \leq j \leq r_j - 1, 1 \leq i \leq m, \quad (2.3)$$

donde el subíndice  $I_i = \sum_{j=1,i-1} r_j$ , entonces se tiene un nuevo sistema de coordenadas  $z=T(x,d,p)$  con

$$\text{Det}(\partial T(x,d,p)/\partial x) \neq 0$$

es decir que califica como un cambio local de coordenadas. En caso de que  $\sigma < n$  es posible generar un conjunto de  $n-\sigma$  coordenadas  $\eta$  que hagan la siguiente transformación

$$z = (z_1, \dots, z_{li+j}, \dots, z_\sigma, \eta_1, \dots, \eta_i, \dots, \eta_{n-\sigma}) = T(x,d,p)$$

$$T(x,d,p) = (T_1(x,d,p), \dots, T_{li+j}(x,d,p), \dots, T_\sigma(x,d,p), T_{\sigma+1}(x,d,p), \dots, T_n(x,d,p))$$

no singular, i.e.  $\text{Det}(\partial T(x,d,p)/\partial x) \neq 0$ , esta condición garantiza que la función sea al menos localmente invertible, i.e. si  $z = T(x,d,p)$  entonces  $x = T^{-1}(z,d,p)$ . Se puede ver que en el nuevo sistema de coordenadas  $z = T(x,d,p)$  el sistema dinámico original tiene la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} dz_{li+j}/dt &= z_{li+j+1} \quad 0 \leq j \leq r_j - 1, 1 \leq i \leq m, I_i = \sum_{j=1,i-1} r_j \\ dz_{ri+I_i}/dt &= \alpha_i(z) + \sum_{j=1,m} \beta_{ij}(z) \cdot \mu_j(T^{-1}(z,d,p),d,u), \quad 1 \leq i \leq m \\ d\eta_i/dt &= \psi_i(z) + \sum_{j=1,m} \varphi_{ij}(z) \cdot \mu_j(T^{-1}(z,d,p),d,u,p), \quad 1 \leq i \leq n-\sigma \\ \alpha_i(z) &= L^i f h_i(T^{-1}(z,d,p),d,p) \quad , 1 \leq i \leq m \\ \beta_{ij}(z) &= L_{g_j} L^{r_i-1} f h_i(T^{-1}(z,d,p),d,p) \quad , 1 \leq i,j \leq m \\ \psi_i &= L_f \eta_i(T^{-1}(z,d,p),d,p) \quad , 1 \leq i \leq n-\sigma \\ \varphi_{ij} &= L_{g_j} \eta_i(T^{-1}(z,d,p),d,p) \quad , 1 \leq i \leq n-\sigma, 1 \leq j \leq m \end{aligned} \quad (2.4)$$

Se definen:

$$\begin{aligned}\alpha &= \mathbf{b}(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{d}, \mathbf{p}), \mathbf{d}, \mathbf{p}) \\ \beta &= \mathbf{A}(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{d}, \mathbf{p}), \mathbf{d}, \mathbf{p})\end{aligned}\quad (2.5)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  pertenecen a subconjuntos de  $\mathbf{R}^m$  y  $\mathbf{R}^{m \times m}$  respectivamente. Debido a esta transformación el sistema dinámico inicial  $\mathbf{S}(\cdot)$  se ha convertido en sistema dinámico equivalente  $\mathbf{S}_\beta(\cdot)$ :

$$\begin{aligned}dz/dt &= \Gamma z + \Pi \beta \mu + \Pi \alpha \\ d\eta/dt &= \psi(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{d}, \mathbf{p}), \mathbf{d}, \mathbf{p}) + \varphi(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{d}, \mathbf{p}), \mathbf{d}, \mathbf{p}) \mu \\ \mathbf{y} &= \Delta z\end{aligned}\quad (2.6)$$

donde  $\eta$ ,  $\psi$  y  $\varphi$  son vectores con elementos  $\eta_i$ ,  $\psi_i$  y  $\varphi_{ij}$  respectivamente, definidos arriba. Se definen las matrices diagonales en bloques:

$$\Gamma = \text{Diag}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_m), (\Gamma_k)_{ij} = \delta_{i,j-1}, \Gamma_k \in \mathbf{R}^{r_k \times r_k}, 1 \leq k \leq m, 1 \leq i, j \leq r_k$$

$$\Pi = \text{Diag}(\Pi_1, \dots, \Pi_m), (\Pi_k)_i = \delta_{r_k, i}, \Pi_k \in \mathbf{R}^{r_k \times 1}, 1 \leq k \leq m, 1 \leq i \leq r_k$$

$$\Delta = \text{Diag}(\Delta_1, \dots, \Delta_m), (\Delta_k)_i = \delta_{1,i}, \Delta_k \in \mathbf{R}^{1 \times r_k}, 1 \leq k \leq m, 1 \leq i \leq r_k$$

donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Dirac  $\delta_{ij} = 1 \Leftrightarrow i=j$ ,  $\delta_{ij} = 0$  de otra manera.

Las matrices  $\Gamma$  y  $\Pi$  tienen la estructura de la forma canónica de Brunovsky. Las matrices  $\Gamma$ ,  $\Pi$  y  $\Delta$  tienen la estructura de la llamada forma normal. Las triadas  $(\Gamma_i, \Pi_i, \Delta_i)$  son observables y controlables, consecuentemente también la triada  $(\Gamma, \Pi, \Delta)$ .

Aplicando la retroalimentación (2.2) en el nuevo sistema de coordenadas, i.e.:

$$\mu = \beta^{-1}(\mathbf{v} - \alpha)$$

el sistema  $\mathbf{S}_\beta(\cdot)$  se convierte en el sistema equivalente  $\mathbf{S}_2(\cdot)$ :

$$\begin{aligned}dz/dt &= \Gamma z + \Pi \mathbf{v} \\ d\eta/dt &= \psi'(z, \eta, \mathbf{d}) + \varphi'(z, \eta, \mathbf{d}) \mathbf{v} \\ \mathbf{y} &= \Delta z\end{aligned}\quad (2.7)$$

donde  $\psi'(z, \mathbf{d}) = \psi - \varphi \beta^{-1} \alpha$  y  $\varphi' = \varphi \beta^{-1}$ . Es evidente que este sistema dinámico presenta una respuesta lineal de  $\mathbf{y}(t)$  ante el nuevo control  $\mathbf{v}(t)$ . Las ecuaciones (2.7) son la llamada forma normal (no lineal), cf. Isidori(1989).

Se trata entonces de un sistema dinámico con varias características importantes:

- I. La parte no lineal  $d\eta/dt$  no es observable ni controlable, la retroalimentación elegida se encarga de ello. Cuando se llevan las salidas al estado estacionario (siempre se supone que el punto de equilibrio es  $0$  módulo una traslación de estados) se tiene

$$d\eta/dt = \psi'(0, \eta, d) + \varphi'(0, \eta, d) v \quad (2.8)$$

A este sistema se le llama **dinámica cero** y muchas de las características de la estabilidad del sistema en su conjunto pueden deducirse de la estabilidad de la **dinámica cero**.

En todo el desarrollo posterior se supone que la **dinámica cero** del sistema es estable en algún sentido apropiado, i.e. asintóticamente estable, exponencialmente estable y a partir de ahí no se toma en cuenta más, dado que no es controlable ni observable usando únicamente las salidas, esa hermeticidad es la que la hace determinante de las propiedades del sistema a controlar. Sólo entonces se dice que el sistema es de **fase mínima no lineal**. En términos generales esta es una suposición restrictiva, sin embargo la mayor parte de los sistemas considerados en ingeniería de procesos presentan puntos de operación exponencialmente estables, de ahí que la suposición no sea limitante.

Otra característica interesante es que el número de raíces de

$$d\eta/dt|_{dz/dt=0} = 0$$

indica el número de atractores a que los estados tienden para un par entrada-salida dado, es decir la multiplicidad de estados dado un par entrada/salida para la retroalimentación elegida (2.2).

- II. La parte lineal  $dz/dt$  es observable y controlable y las matrices  $(\Gamma, \Pi, \Delta)$  forman una triada observable y controlable o de realización mínima. En el caso en que  $\sigma = n$  se tiene un sistema lineal sin parte no lineal  $d\eta/dt$  i.e. con una **dinámica cero** de dimensión cero, en esa situación se habla de **linealización completa** de un sistema no lineal mediante transformación y retroalimentación no lineales, en el caso en que  $\sigma < n$  se

habla de **linealización parcial**. El esquema desarrollado en esta tesis difiere ligeramente del presentado en Isidori(1989), pues aquí se considera una linealización (parcial o total) con **antealimentación** de entradas no manipulables o perturbaciones medidas  $d(t)$  donde la transformación con retroalimentación es dependiente del tiempo, cf. Alvarez et al.(1991).

*La incertidumbre es todo lo que tengo*  
 José Emilio Pacheco, "The dream is over", IV.

### **§3. ESQUEMAS DE CONTROL.**

En este capítulo se presentan los esquemas de control cuyas simulaciones aparecen en el capítulo 4. La pregunta general que se trata de responder aquí para casos específicos es: como controlar un proceso dado mediante un modelo imperfecto de éste.

En este capítulo se desarrolla lo que es la contribución de esta tesis. Esta consiste en tres distintos esquemas de control:

1. Para el esquema de control robusto para incertidumbres no "pareadas" descrito en Qu(1992) se propone una manera de estimar en línea las "ganancias" que definen la parte robusta del control, esto en el espíritu de Corless y Chen.
2. Se aplica en §3.2.1. el esquema de control adaptable indirecto para sistemas no lineales con parametrizaciones lineales descrito en Teel et al.(1991) a sistemas con parametrizaciones no lineales. Se propone una prueba de estabilidad del esquema basada en el desarrollo en serie de Taylor sobre los parámetros, similar a la propuesta en Teel et al.(1991) pero con datos esenciales obtenidos de la ecuación de sensibilidad a los parámetros.
3. Se propone en §3.2.2 un esquema de control adaptable basado en observador para una clase particular de sistemas no lineales. Este al incluir un regresor de parámetros es una extensión de un esquema de control basado en observador descrito en Hammouri-Busawon(1993) a una clase de sistemas no lineales con parametrizaciones lineales. Lo relevante es que es posible presentar una prueba de la estabilidad en conjunto, para esta clase de sistemas, de la interconexión sistema/control/observador/regresor.

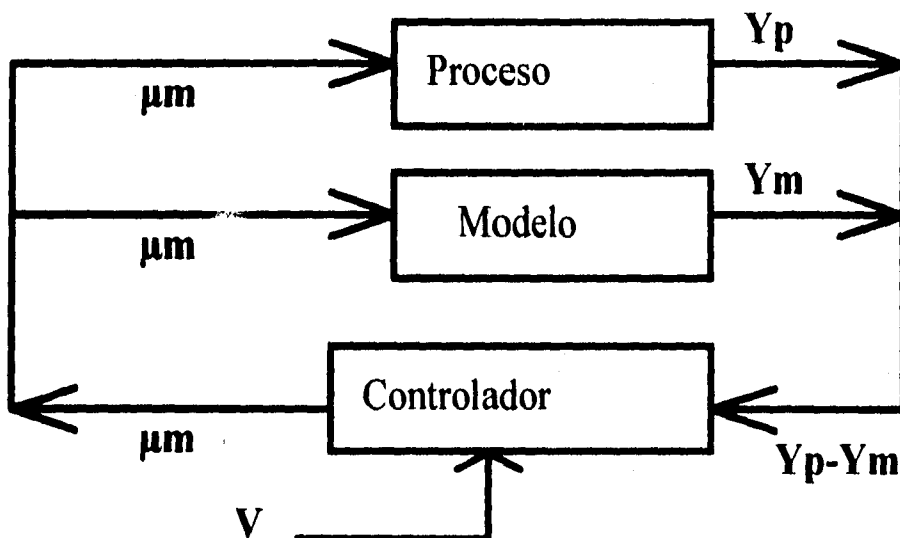
#### **§3.1. CONTROL ROBUSTO ADAPTABLE.**

##### **§3.1.1. CONTROL ROBUSTO.**

En términos generales un control robusto es aquel que no ve afectado en gran medida su desempeño en presencia de incertidumbres, es decir, es tolerante a estas. En el capítulo anterior siempre estaba implícita la hipótesis de que se conocían perfectamente tanto los estados como las ecuaciones del modelo al momento de calcular el control a aplicar al proceso. Sin embargo una situación inevitable es que el modelo matemático y el

proceso a controlar difieran, i.e. el modelo no es perfecto y por lo tanto la ley de control propuesta en (2.1) no linealiza perfectamente el comportamiento entrada/salida. Esta situación se dificulta dado que los esquemas de control geométrico no suelen ser tolerantes a los errores en el cálculo de la transformación y retroalimentación no lineales aplicadas para linealizar, como puede verse en la fig. 4.4. Una posible razón para esta peculiaridad se deduce del título del artículo "Input/Output Linearization: A Nonlinear Analog of Placing Poles at Process Zeros", Kravaris(1988). Se sabe que para el caso lineal este procedimiento no es robusto y es de esperarse que la situación sea similar para el caso no lineal.

Se presentan en realidad dos sistemas dinámicos: uno que corresponde al proceso que se quiere controlar y otro al modelo del que se dispone para lograr controlar el proceso. En el siguiente diagrama de bloques se muestra el esquema general aquí utilizado, como se ve la ley de control aplicada al proceso es idéntica a la aplicada al modelo, se retroalimenta al controlador el error de salidas entre proceso y modelo además del comportamiento requerido de las salidas, representado por  $v$ .





Los dos sistemas dinámicos, correspondientes al proceso y al modelo matemático del proceso  $S_P(\cdot)$  y  $S_M(\cdot)$ , son :

$S_P(\cdot)$ :

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= f(x,d) + G(x,d) \mu(x,d,u) = f(x,d) + \sum g_i(x,d) \mu_i(x,d,u) \\ y &= h(x,d) \end{aligned} \quad (3.1a)$$

$S_m(\cdot)$ :

$$\begin{aligned} dx_m(t)/dt &= f_m(x_m,d) + G_m(x_m,d) \mu_m(x_m,d,u) = f_m(x_m,d) + \sum g_{im}(x_m,d) \mu_{im}(x_m,d,u_m) \\ y_m &= h(x_m,d) \end{aligned} \quad (3.1b)$$

Se supone que ambos sistemas tienen las mismas dimensiones de las variedades de estados, de salidas, entradas y comparten las mismas entradas no manipuladas. Se debe notar que se supone que no hay error de modelado alguno en las salidas, aunque estas puedan diferir entre proceso y modelo debido a la diferencia de los estados del proceso y del modelo.

El problema a considerar en este capítulo se plantea así:

**Como controlar el proceso (3.1a) si solo se dispone de un modelo imperfecto (3.1b).**

Este problema es muy difícil de abordar sin hacer más hipótesis acerca del sistema "desconocido"  $S_P(\cdot)$ . Esto lleva a considerar el proceso del modelado matemático de sistemas físicos. Tal vez la mejor manera de representar el conocimiento que por varios medios se tenga de un proceso es mediante un modelo matemático. El desarrollo de un modelo que capture todas las características del fenómeno real que sean relevantes al uso que se da al proceso es requisito de toda estrategia de control basada en modelos.

Una hipótesis razonable es suponer que ambos sistemas tienen el mismo vector de grados relativos  $r=(r_1, \dots, r_m)$ , i.e. se sabe lo suficiente para conocer los grados relativos del proceso y este conocimiento ha sido incluido en el modelo matemático de este. En términos generales puede considerarse esta suposición como restrictiva, pues proponer un vector de grados relativos sin ningún conocimiento previo es arbitrario; pero la situación no es estrictamente *a priori*, algo se sabe del proceso, puesto que es utilizado. En el caso

en que los errores de modelado son puramente paramétricos esta condición se cumple genéricamente, i.e. todos los puntos en el espacio de parámetros donde  $\text{Det}(A(x,d)) \neq 0$ . Este es un caso particular de importancia, se representaría en la notación anterior como:

$$\begin{aligned} f(x,d) &= f(x,d,p), \quad G(x,d) = G(x,d,p), \quad \mu(x,d,u) = \mu(x,d,u,p), \\ f_m(x,d) &= f(x,d,p_m), \quad G_m(x,d) = G(x,d,p_m), \quad \mu_m(x,d,u) = \mu(x,d,u,p_m), \end{aligned}$$

En esta tesis todas las incertidumbres se suponen paramétricas, así que la hipótesis de igualdad de grados relativos entre modelo y proceso es enteramente válida.

Al cumplirse la igualdad de grados relativos las matrices  $\Gamma$ ,  $\Pi$  y  $\Delta$  de los sistemas equivalentes del proceso y del modelo son idénticas (al depender estas solo del vector de grados relativos), estas matrices definen los diseños para observación y control, simplifican el tratamiento y dan pie a utilizar los resultados obtenidos durante la última década para observación y control de sistemas lineales perturbados no linealmente desarrollados durante la década pasada, cf. Walcott et al.(1987), Walcott-Zak(1987) y Corless-Leitmann(1981).

Cuando las incertidumbres aparecen (en términos generales) en el mismo *canal* donde el control aparece se dice que cumplen las condiciones de paridad (*matching conditions*). En este caso las incertidumbres están apareadas con las entradas y es posible cancelar el efecto desestabilizador de las incertidumbres mediante una modificación adecuada de la ley de control. Esta es una característica importante de los errores de modelado y las incertidumbres de un sistema dinámico. En términos más precisos, para los esquemas aquí considerados, se dice que los errores y las incertidumbres cumplen las condiciones de paridad cuando estas se encuentran siempre en el espacio generado por  $A(x,d)$  en coordenadas originales, o en el rango de  $\Pi$  para los sistemas transformados ( $S_\beta(\cdot)$  y  $S_2(\cdot)$ ). Esto ocurre para sistemas que cumplen la hipótesis de igualdad entre grados relativos de modelo y proceso y presentan una transformación no lineal completamente conocida (2.4) cumplen las condiciones de paridad cf. Spooing(1985), Corless-Leitmann(1981).

Sin embargo no siempre ocurre que la transformación sea completamente conocida, por ejemplo es común que la transformación dependa de los parámetros físicos del sistema, no necesariamente conocidos. En tal caso, a pesar de que se tengan vectores de grados relativos iguales entre modelo y proceso, no aparecerán las incertidumbres donde puedan ser canceladas directamente por el control, i.e. no cumplirían las condiciones de paridad antes mencionadas, como es el caso del reactor biológico simulado en el siguiente capítulo. De ahí que haya que utilizar resultados para sistemas lineales perturbados no linealmente que no cumplen condiciones de paridad, cf. Zak(1990), Chen-Leitman(1987) y Qu(1992), este último base para lo desarrollado a continuación.

**§3.1.2. CONTROL ROBUSTO Y ADAPTABLE, SIN CONDICIONES DE PARIDAD.**

Una versión adaptable del esquema propuesto en Qu(1992) es la base de lo desarrollado posteriormente en esta sección. En esta sección se propone una forma de utilizar resultados del control robusto "adaptable" para obtener una ley de control adicional a la linealizante que haga tolerante a incertidumbres a la ley de control en su conjunto linealizante + robusto. Esta clase de controles robustos típicamente se basa en cotas de cierto error que se suponen conocidas al hacer el diseño robusto, en sus versiones adaptables estas cotas no se suponen conocidas sino determinadas en línea, de ahí el término de "adaptable".

Partiendo de (3.1a) y sumando y restando  $(G(x,d,p) \mu_m)$ :

$$dx(t)/dt = f(x,d,p) + G(x,d,p) \mu_m + G(x,d,p)(\mu - \mu_m)$$

$$y = h(x,d)$$

de donde resulta un sistema de la siguiente estructura

$$dx(t)/dt = [f(x,d,p) + G(x,d,p) \mu_m] + G(x,d,p) (\mu - \mu_m)$$

$$F_f(x, x_m, d, p, p_m) = [f(x,d,p) + G(x,d,p) \mu_m(x_m, d, p_m)]$$

$$F_f(x, x_m, d, p, p_m) = F_f(x, x_m, d, p, p_m) + G(x,d,p) v(t) \quad (3.2)$$

Siguiendo a Qu(1992) se restringe  $G(x,d,p)$  a no depender de  $p_m$  (como es el caso del reactor biológico mostrado más adelante), esto por simplicidad pues esta restricción

puede ser eliminada, como se muestra en Qu(1992). Si se considera al **proceso = modelo + incertidumbres** se tiene la siguiente estructura:

$$dx(t)/dt = F_f(x, x_m, d, p, p) + \Delta F_f(x, x_m, d, p, p_m) + G(x, p, p_m)v(t) \quad (3.3)$$

donde la incertidumbre corresponde a:

$$\Delta F_f(x, x_m, d, p, p_m) = F_f(x, x_m, d, p, p_m) - F_f(x, x_m, d, p_m, p_m) \quad (3.4)$$

el sistema nominal (i.e. para el que se dispone de una función de Lyapunov) sería el modelo perfecto:

$$dx(t)/dt = F_f(x, x_m, d, p_m, p_m) = dx_m(t)/dt = f(x_m, d, p_m) + G(x_m, d) \mu_m \quad (3.5)$$

este sistema es el modelo del proceso y por lo tanto se dispone de una función de Lyapunov en el sistema linealizado (dado que siempre se supone que la dinámica cero sea estable) y fácilmente expresable en el sistema original. Para el caso de linealización completa se tiene:  $V(z, t) = z^T P z$ , dado que  $z = T(x, t)$ ,  $V(x, t) = T(x, t)^T P T(x, t)$  donde  $P$  es la solución de la ecuación de Lyapunov para el sistema lineal  $A_c^T P + P A_c = -Q$ , donde  $P, Q > 0$ ,  $A_c = \Gamma + \Pi K_c$  y  $\sigma(A_c) \in C^-$ , i.e. es una matriz estable.

Esta  $V(z, t)$  cumple:

$$\begin{aligned} 0 \leq \gamma_1 (\|x\|) \leq V(x, t) \leq \gamma_2 (\|x\|) \\ \partial V / \partial t + (\partial V / \partial x) F_f(x, x_m, d, p_m, p_m) \leq -\gamma_3 (\|x\|) \leq 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Queda claro que  $\Delta F_f$  es una incertidumbre no pareada, ante estas se pueden considerar dos enfoques: uno de ellos contempla el cálculo del tamaño máximo de la incertidumbre no apareada que aún permite a un control robusto pareado estabilizar el sistema como en Chen-Leitman(1987), el otro consiste en exigir alguna propiedad particular a estas incertidumbres y diseñar el control de acuerdo a ello, en este caso, siguiendo a Qu(1992), se pedirá que estas sean *equivalentemente pareadas*, es decir que:

$$\|(\partial V / \partial x) \Delta F_f\| \leq \phi_H \varepsilon$$

$$\forall (x, t) \in \{(x, t) \in H \text{ tal que } \|(\partial V / \partial x)^T G\| = \varepsilon\} \quad (3.7)$$

donde  $0 \leq \phi_H < \infty$ ,  $0 \leq \varepsilon$ , y  $H \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^l$  es un conjunto cerrado y acotado. Esta condición implica una cierta "proporcionalidad" entre la magnitud y dirección del control

y la incertidumbre. Suponer esto para casos en que tanto el sistema como el modelo con incertidumbres tengan estados acotados y todas sus derivadas.

La ley de control  $v(t)$ , adicional a la linealizante, propuesta en Qu(1992) es:

$$v(t) = -\rho(x,t) / \|(\partial V / \partial x)^T G\| \{ \rho(x,t) \kappa(x,t) \} / \{ \| \rho(x,t) \kappa(x,t) \| + \varepsilon \} \quad (3.8)$$

donde  $\forall \varepsilon, \forall \kappa \geq 0$

$$\begin{aligned} \kappa(x,t) &= ((\partial V / \partial x)^T G) / \|(\partial V / \partial x)^T G\| \\ \|(\partial V / \partial x)^T G\| &\leq \rho(x,t) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Hasta aquí no se hecho nada nuevo, la contribución se describe a continuación. Se dice que todo control robusto tiene su versión adaptable, cf. Chen(1989,1992). Siempre es atractivo disponer de esta versión adaptable, pues desgraciadamente en general no se conoce la función  $\rho(x,t)$ .

Se elige parametrizar linealmente a  $\rho(x,t) = \rho^*(x)^T \vartheta(t)$ ,  $\rho^*(x)$ ,  $\vartheta(t) \in \mathbb{R}^r$ , donde las funciones  $\rho^*(x)$  son conocidas (por ejemplo un polinomio en  $\|x\|$ ) y  $\vartheta(t)$  son los parámetros a determinar. Para demostrar la estabilidad de esta "adaptación" se debe incluir una manera de actualizar estos parámetros y demostrar que  $x=0$  es un punto estable cuando se cumple la condición de *equivalencia de la paridad* y se usan los parámetros estimados  $\vartheta^*(t)$  en vez de los reales  $\vartheta(t)$ .

Para ello se usa una nueva función de Lyapunov:

$$V_T(x,t) = V(x,t) + (\vartheta^*(t) - \vartheta(t))^T N^{-1} (\vartheta^*(t) - \vartheta(t)), \quad N > 0$$

$$v(t) = \{ \rho^*(x)^T \vartheta^*(t) \} / \|(\partial V / \partial x)^T G\| \{ \rho^*(x)^T \vartheta^*(t) \} \kappa(x,t) / \{ \| \rho^*(x)^T \vartheta^*(t) \} \kappa(x,t) \| + \varepsilon \}$$

con la siguiente actualización de parámetros:

$$d\vartheta^* / dt = N \rho^*(x) \quad (3.10)$$

entonces

$$dV_T(x,t) / dt = dV(x,t) / dt + (\partial V / \partial x) \Delta F_f - (\partial V / \partial x)^T G v(t) + (\vartheta^* - \vartheta)^T \rho^*(x)$$

$$dV_T(x,t) / dt \leq -\gamma_3 (\|x\|) + \rho^*(x) \vartheta + (\partial V / \partial x)^T G v(t) + (\vartheta^* - \vartheta) \rho^*(x)$$

se anula el término  $\rho^*(\mathbf{x}) \mathcal{G}$ , obsérvese que:

$$\begin{aligned} \rho^*(\mathbf{x}) \mathcal{G}^*(t) &= \|\{\rho^*(\mathbf{x})^T \mathcal{G}^*(t)\} \kappa(\mathbf{x}, t)\| \\ (\partial V / \partial \mathbf{x})^T \mathbf{G} \mathbf{v}(t) &= -\|\{\rho^*(\mathbf{x})^T \mathcal{G}^*(t)\} \kappa(\mathbf{x}, t)\|^2 / \{\|\{\rho^*(\mathbf{x})^T \mathcal{G}^*(t)\} \kappa(\mathbf{x}, t)\| + \varepsilon\} \\ \|\{\rho^*(\mathbf{x})^T \mathcal{G}^*(t)\} \kappa(\mathbf{x}, t)\| - \|\{\rho^*(\mathbf{x})^T \mathcal{G}^*(t)\} \kappa(\mathbf{x}, t)\|^2 / \{\|\{\rho^*(\mathbf{x})^T \mathcal{G}^*(t)\} \kappa(\mathbf{x}, t)\| + \varepsilon\} \\ &= \|\{\rho^*(\mathbf{x})^T \mathcal{G}^*(t)\} \kappa(\mathbf{x}, t)\| \varepsilon / \{\|\{\rho^*(\mathbf{x})^T \mathcal{G}^*(t)\} \kappa(\mathbf{x}, t)\| + \varepsilon\} \leq \varepsilon, \forall \varepsilon \geq 0 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$dV_T(\mathbf{x}, t) / dt \leq -\gamma_3 (\|\mathbf{x}\|) + \varepsilon \quad (3.11)$$

En general los reactores tiene estados acotados si hay controles acotados, cf. Álvarez-Ramírez et al.(1991) y Álvarez-Ramírez(1994). Este es el caso del reactor biológico simulado en §4. Así es posible probar, vía el teorema de invariancia de LaSalle, que el sistema tenderá al mayor conjunto invariante contenido en  $dV_T(\mathbf{x}, t) / dt = 0$ , cf. Khalil(1992).

### §3.2. ADAPTACIÓN

#### §3.2.1. ADAPTACIÓN CON PARÁMETROS CON SIGNIFICADO FÍSICO: AJUSTE EN LÍNEA.

En esta sección se propone un esquema de adaptación que amplía propuestas de Teel et al.(1991) para el caso de parametrizaciones no lineales.

Se ha dicho que dentro de la práctica industrial pocas técnicas han salvado del fracaso a tantos esquemas de control avanzado de procesos como la adaptación, cf. Lee-Weekmann(1976).

Se toma como ejemplo un reactor por lotes: en él las propiedades termodinámicas de su contenido al inicio y al final difieren, los intercambiadores de calor pueden sufrir incrustaciones a lo largo del tiempo y ver modificadas sus propiedades de transporte, las válvulas pueden también sufrir incrustación y corrosión y eso se hace notorio a la larga en el desempeño del control, pues las válvulas son el actuador básico en el control de procesos, inclusive la degradación de los sensores puede interpretarse como parámetros del proceso que varían lentamente. Esto motiva el uso del control adaptable para mejorar el desempeño de un esquema de control.

Un caso particular de control adaptable indirecto, cf. Sastry-Bodson(1989) es cuando se realiza una estimación de parámetros físicos en línea, en este caso es posible *a priori* determinar condiciones iniciales de los parámetros y rango de validez con base en el conocimiento que se tenga del proceso, por ejemplo: a restricciones físicas como flujos de masa y concentración positivos.

No fue posible probar la estabilidad del sistema dinámico completo, en primera instancia solamente se probó la estabilidad del esquema de estimación de parámetros, suponiendo el conocimiento completo de los estados a través de las ecuaciones de sensibilidad.

El conocimiento perfecto de los parámetros del proceso permite lograr un control que linealice el comportamiento entrada-salida de el sistema dinámico dependiente de parámetros  $S_m(\mathbf{p})$ , por ello es natural pensar que si se logra que los parámetros del modelo converjan a los del proceso se controlará el proceso de manera completa, de ahí que se pueda clasificar este esquema como uno adaptable indirecto.

En este tenor pueden verse esquemas de adaptación en Slotine-Li(1991, secc 8.7), Pomet-Praly(1988) y Teel et al.(1991), donde se consideran solo modelos que son funciones lineales de los parámetros, i.e.  $\partial\{f(\mathbf{x}_m, \mathbf{p}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}_m, \mathbf{p}) \mathbf{u}\}/\partial\mathbf{p}$  no es función de  $\mathbf{p}$ . En Teel et al.(1991) después de un filtrado se obtiene una relación lineal entre los estados y los parámetros para un sistema en que la derivada con respecto al tiempo es una función lineal de los parámetros. Este concepto de filtrar las señales con el fin de obtener las características deseadas se ha usado en trabajos sobre control adaptivo basado en salidas cf. Marino-Tomei(1993b).

Otros trabajos de interés cercanos o sobre el mismo tema son Marino-Tomei(1991), Kanellakopoulos et al.(1991,1992), Marino-Tomei(1993a,b), ambos grupos de autores tratan con sistemas una entrada/una salida con parametrizaciones lineales o no lineales siempre y cuando exista una transformación no lineal a una forma particular en que las no linealidades aparezcan en las salidas solamente, las condiciones geométricas para

la existencia de esa transformación son similares en los dos casos, sin embargo son estrictas y muy difíciles de probar en la práctica.

La abundancia de parametrizaciones no lineales en los procesos químicos lleva a buscar una manera más simple de adaptar estos parámetros aún a costa de abandonar el rigor, para ello se aproxima la dependencia paramétrica del modelo mediante serie de Taylor, por lo tanto, lleva a realizar pruebas de estabilidad aproximadas.

Una hipótesis importante que se hace es de suponer que es posible obtener los parámetros a partir de las salidas y sus derivadas, para más detalles cf. Tunali-Tarn(1987). Lo que se busca con ello es que ningún parámetro en ningún punto del espacio de estado sea combinación lineal de otros y que varias matrices posteriormente utilizadas tengan rango completo.

También se supone que hay un vector de parámetros  $p_0$  único tal que el modelo coincide con el proceso en todas sus características dados esos valores paramétricos. Otra forma de decirlo es que el único error de modelado es el desconocimiento de los valores exactos de los parámetros y que las salidas en el tiempo solo puedan ser producidas por un conjunto único de parámetros.

Bajo estas condiciones es posible hacer que bajo retroalimentación:

$$y_m = y$$

$$\lim_{p \rightarrow p_0} S_m(p) = S_p(\cdot)$$

esto es que a medida que converjan los parámetros el modelo tenderá al proceso o de manera equivalente que a medida que  $p$  tienda a  $p_0$ , teniendo como información solo las salidas del proceso, el modelo tenderá al proceso. Esto si se presentan varias condiciones típicas de la teoría del control adaptable mencionadas posteriormente en este capítulo.

La base de esto es el efecto observado en las salidas al variar los parámetros, la llamada sensibilidad del error de salida a los parámetros:

$$\partial y_{em} / \partial \phi = \partial (y - y_m) / \partial (p - p_0) = (\partial h / \partial x)(\partial x / \partial p) - (\partial h / \partial x_m)(\partial x_m / \partial p) \quad (3.2.1)$$

para sistemas no lineales generales  $\partial x / \partial p$  suele depender de los parámetros  $p_0$



(desconocidos) lo que hace difícil en la práctica determinar el valor exacto de la sensibilidad de los estados a los parámetros, por ello en el desarrollo posterior se supone disponible, como es el caso en Teel et al.(1991).

El término  $(\partial \mathbf{x}_m / \partial \mathbf{p})$  en (3.2.1) se obtiene de la sensibilidad del modelo a los parámetros:

$$\begin{aligned} d/dt(\partial \mathbf{x}_m / \partial \mathbf{p}) &= \partial \{ \mathbf{f}(\mathbf{x}_m, \mathbf{p}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}_m, \mathbf{p}) \mathbf{u} \} / \partial \mathbf{x}_m (\partial \mathbf{x}_m / \partial \mathbf{p}) \\ &+ \partial \{ \mathbf{f}(\mathbf{x}_m, \mathbf{p}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}_m, \mathbf{p}) \mathbf{u} \} / \partial \mathbf{p} \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

cuyo jacobiano coincide con el del modelo del proceso  $\mathbf{S}_m(\mathbf{p})$  esto facilita la evaluación en línea de la sensibilidad paramétrica, como se explica con detalle en el apéndice §A. Un punto importante a anotar es que un método unipaso es indispensable para calcular  $(\partial \mathbf{x}_m / \partial \mathbf{p})$  si al mismo tiempo se modifican los valores de los parámetros, lo cual sucederá al menos cada paso de integración.

Es posible proponer varias maneras de actualizar los parámetros en función del tiempo y en respuesta a los errores de modelado, estos pueden ir desde el más simple esquema de gradiente hasta versiones elaboradas de un regresor de mínimos cuadrados.

Se definen las siguientes variables:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{em} &= \mathbf{y} - \mathbf{y}_m = \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}(\mathbf{x}_m) \\ \boldsymbol{\phi} &= \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 \end{aligned}$$

nótese que la función  $\mathbf{h}(\cdot)$  se supone independiente de los parámetros. El regresor sería:

$$d\boldsymbol{\phi}/dt = -\gamma \boldsymbol{\Omega}(t) (\partial \mathbf{y}_{em} / \partial \boldsymbol{\phi})^T \mathbf{y}_{em} \quad (3.2.3)$$

a) Gradiente:

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \mathbf{I} \quad (3.2.3a)$$

b) Mínimos cuadrados:

$$d\boldsymbol{\Omega}(t)/dt = -\gamma \boldsymbol{\Omega}(t) (\partial \mathbf{y}_{em} / \partial \boldsymbol{\phi})^T (\partial \mathbf{y}_{em} / \partial \boldsymbol{\phi}) \boldsymbol{\Omega}(t), \gamma > 0, \Gamma(0) > 0 \quad (3.2.3b)$$

c) Mínimos cuadrados con factor exponencial de olvido  $\lambda(t)$ :

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\Omega}(t)/dt &= \lambda(t) \boldsymbol{\Omega}(t) - \gamma \boldsymbol{\Omega}(t) (\partial \mathbf{y}_{em} / \partial \boldsymbol{\phi})^T (\partial \mathbf{y}_{em} / \partial \boldsymbol{\phi}) \boldsymbol{\Omega}(t), \Gamma(0) > 0 \\ \lambda(t) &= \lambda_0 (1 - \|\boldsymbol{\Omega}(t)\| / k_0) \end{aligned} \quad (3.2.3c)$$

donde  $\Omega(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$  es una matriz simétrica positiva definida que puede ser interpretada localmente como una matriz de covarianza,  $\gamma$  es la ganancia del estimador, el incremento de su valor acelera la convergencia hasta cierto punto en que se presentan oscilaciones y se afecta el seguimiento. El argumento para demostrar la estabilidad del punto  $\phi = 0$  (i.e. sin errores en los parámetros) se basa en la siguiente función de Lyapunov:

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \phi^T \Omega^{-1} \phi \\ dV(\phi)/dt &= -\gamma (\phi^T \Omega^{-1} (d\phi/dt) + (d\phi/dt)^T \Omega^{-1} \phi) + \phi^T (d\Omega^{-1}/dt) \phi \\ &= -\gamma (\phi^T \Omega^{-1} (d\phi/dt) + (d\phi/dt)^T \Omega^{-1} \phi) - \phi^T \Omega^{-1} (d\Omega/dt) \Omega^{-1} \phi \end{aligned}$$

substituyendo la expresión para  $d\phi/dt$  y  $d\Omega/dt$  de (3.2.3b y c) y agrupando términos se tiene:

$$dV(\phi)/dt = -2\gamma \phi^T (\partial y_{em}/\partial \phi)^T y_{em} + \tau(\phi) \quad (3.2.4)$$

donde el término  $\tau(\phi)$  depende del regresor utilizado:

a) Gradiente  $\tau_g(\phi) = 0$

b) Mínimos cuadrados:  $\tau_{mc}(\phi) = +\gamma \phi^T (\partial y_{em}/\partial \phi)^T (\partial y_{em}/\partial \phi) \phi$

c) Mínimos cuadrados con factor exponencial de olvido  $\lambda(t)$ :

$$\tau_{mc\lambda}(\phi) = +\gamma \phi^T (\partial y_{em}/\partial \phi)^T (\partial y_{em}/\partial \phi) \phi - \lambda(t) \phi^T \Omega^{-1} \phi = \tau_{mc}(\phi, \Omega) - \lambda(t) V(\phi)$$

Aún cuando la dependencia del modelo de los parámetros sea no lineal es posible aproximar  $y_{em}$  mediante series de Taylor alrededor del punto  $\phi = 0$ :

$$y_{em}(x_m, \phi) = y_{em}(x_m, 0) + (\partial y_{em}/\partial \phi) \phi + o(\|\phi\|^2) \quad (3.2.5)$$

el término  $y_{em}(x_m, 0)$  es el error de modelado que provendría de los errores en las condiciones iniciales, dado que se supone el sistema estable a lazo abierto y con dinámica cero (exponencialmente) estable. A medida que los parámetros converjan tenderá asintóticamente a cero por lo que puede esperarse que no cause problemas. Después de esta aclaración (3.2.5) se escribiría:

$$y_{em}(x_m, \phi) \cong 0 + (\partial y_{em}/\partial \phi) \phi + o(\|\phi\|^2)$$

La anterior aproximación de Taylor permite escribir (3.2.4) de la siguiente manera, dependiendo del tipo de regresor :

a) Gradiente:

$$dV(\phi)/dt = -2\gamma \phi^T (\partial y_{em}/\partial \phi)^T (\partial y_{em}/\partial \phi) \phi + o(\|\phi\|^2) \quad (3.2.6a)$$

b) Mínimos cuadrados:

$$dV(\phi)/dt = -\gamma \phi^T (\partial y_{em}/\partial \phi)^T (\partial y_{em}/\partial \phi) \phi + o(\|\phi\|^2) \quad (3.2.6b)$$

c) Mínimos cuadrados con factor exponencial de olvido  $\lambda(t)$ :

$$dV(\phi)/dt = -\gamma \phi^T (\partial y_{em}/\partial \phi)^T (\partial y_{em}/\partial \phi) \phi - \lambda(t)V(\phi) + o(\|\phi\|^2) \quad (3.2.6c)$$

entonces  $\dot{\phi} = 0$  es estable para un término  $o(\|\phi\|^2)$  lo suficientemente pequeño y una ganancia  $\gamma$  lo suficientemente grande.

Si suponemos que

$$o(\|\phi\|^2) \leq k_o \|\phi\|^2$$

y que se cumple una versión estricta de la condición de excitación persistente típica del control adaptable:

$$\alpha_1 \mathbf{I} \leq (\partial y_{em}/\partial \phi)^T (\partial y_{em}/\partial \phi) \leq \alpha_2 \mathbf{I}, \forall t \geq 0, \alpha_1, \alpha_2 \geq 0 \quad (3.2.7)$$

i.e. que la matriz  $(\partial y_{em}/\partial \phi)^T (\partial y_{em}/\partial \phi)$  presente en la expresión de la derivada de la función de Lyapunov sea positiva definida.

Entonces para que haya estabilidad y convergencia de parámetros la ganancia del regresor debe cumplir la siguiente condición:

a) Gradiente:  $k_o / (2 \alpha_1) \leq \gamma$

b) Mínimos cuadrados simple:  $k_o / \alpha_1 \leq \gamma$

c) Mínimos cuadrados con factor exponencial de olvido  $\lambda(t)$ :  $(k_o - \lambda_o/k_o) / \alpha_1 \leq \gamma$

### §3.2.2. CONTROL CON ESTABILIDAD DE SISTEMAS NOLINEALES MEDIANTE UN OBSERVADOR Y UN REGRESOR.

En la sección anterior se probó la estabilidad de la adaptación cuando el sistema es aproximado mediante serie de Taylor. Sería a continuación natural conectar el adaptador con un control robusto. Hipotéticamente el control robusto permitiría atenuar

el efecto de errores paramétricos en tanto estos fueran eliminados por la adaptación. Al agregar la adaptación a los esquemas planteados en capítulos anteriores se tienen tres sistemas dinámicos interconectados: el proceso, un modelo del proceso parametrizado y un observador de los estados del procesos. Se tiene el siguiente conjunto de sistemas dinámicos:

$$S_p(.) : dx/dt = f(x, p_0) + G(x, p_m) u$$

$$y = h(x)$$

$$S_m(p) : dx_m/dt = f(x_m, p) + G(x_m, p) u$$

$$y_m = h(x_m)$$

$$u = A(x_{em}, p)^{-1} \{ v(z_0, x_m) - b(x_m, p) \}$$

Observador

$$dz_0/dt = \Gamma z_0 + \Pi \beta(z_0) u + \Pi \alpha(z_0) - S_0^{-1} \Delta^T (\Delta z_0 - y)$$

donde  $S_0$  cumple

$$\theta S_0 + \Gamma^T S_0 + S_0 \Gamma = \Delta^T \Delta$$

Regresor

$$d\phi/dt = -\gamma \Gamma (\partial y_{em} / \partial \phi)^T y_{em} \quad (3.2.8)$$

donde  $x, x_m \in \mathbf{R}^n$ ,  $y, y_m, u \in \mathbf{R}^m$ ,  $p \in \mathbf{R}^p$  son los parámetros del modelo,  $p_0$  es el valor correcto de ellos e  $y_{em} = y - y_m$  el error de salida de los parámetros. Los sistemas anteriores corresponden al proceso; al modelo del proceso; al observador del sistema equivalente, por ejemplo el propuesto por Hammouri-Busawon(1993), y al adaptador descrito en la sección anterior. El problema de probar la estabilidad de este conjunto de interconexiones presenta una elevada complejidad y se considera abierto en el caso general, que es prácticamente tal como se plantea en (3.2.8).

En esta sección se prueba la estabilidad de un sistema más simple para mostrar las dificultades y limitaciones involucradas.

En la literatura hay varios ejemplos en que se controla un sistema no lineal solo mediante salidas, uno de los más diáfanos es el de Hammouri-Busawon(1993). Ahí se

utiliza un observador de alta ganancia para construir un control que establezca el sistema usando solo estados del observador, este control es del tipo linealizante, basado solamente en las variables del observador, y es aplicable a la clase de sistemas no lineales observables desde cualquier entrada. La contribución descrita en la presente sección consiste en agregar un componente extra: un regresor. Se establece la estabilidad del sistema interconectado proceso/control/observador/regresor para una clase de sistemas una entrada/una salida observables desde cualquier entrada pero parametrizados linealmente.

Se tiene el siguiente sistema dinámico una entrada/una salida

$$dz/dt = \Gamma z + \Pi \beta(z) u + \Pi \alpha(z) + \Pi \beta_{\zeta}(z) \cdot \zeta u + \Pi \alpha_{\zeta}(z) \cdot \zeta \quad (3.2.9)$$

con salida

$$y = \Delta \cdot z$$

donde  $y, u, \beta(z), \alpha(z) \in \mathbf{R}; z \in \mathbf{Z} \subset \mathbf{R}^n; \zeta \in \mathbf{P}_{\zeta} \subset \mathbf{R}^{p \times 1}; \beta_{\zeta}(z), \alpha_{\zeta}(z) \in \mathbf{R}^{1 \times p}$ , y  $(\Gamma, \Pi, \Delta)$  son matrices de dimensiones apropiadas. Se plantea un control linealizante basado en un observador

$$u = \{k \cdot z_0 - \alpha(z_0)\} / \beta(z_0)$$

con observador

$$dz_0/dt = \Gamma z_0 + \Pi \beta(z_0) u + \Pi \alpha(z_0) - S_0^{-1} \Delta^T (\Delta \cdot z_0 - y)$$

donde  $S_0$  cumple

$$\theta S_0 + \Gamma^T S_0 + S_0 \Gamma = \Delta^T \Delta$$

después de aplicar el control  $u = k^T z_0$

$$dz_0/dt = A_c z_0 - S_0^{-1} \Delta^T (\Delta \cdot z_0 - y)$$

$$A_c = \Gamma + \Pi k^T$$

donde  $k \in \mathbf{R}^n$  y  $\sigma(A_c) \in \mathbf{C}^-$ . Se tiene el regresor

$$d\zeta/dt = \{\Pi \beta_{\zeta}(z_0) u + \Pi \alpha_{\zeta}(z_0)\}^T S_0 \Delta^T \Delta \varepsilon$$

donde  $\varepsilon = z_0 - z$  es el error de observación, la ecuación diferencial correspondiente es:

$$d\varepsilon/dt = (\Gamma - S_0^{-1} \Delta^T \Delta) \varepsilon + \Pi \{\alpha(z_0) - \alpha(z)\} + \Pi \{\beta(z_0) - \beta(z)\} u - \{\Pi \beta_{\zeta}(z) u + \Pi \alpha_{\zeta}(z)\}^T \zeta$$

se supone que  $(\varepsilon, z_0, \zeta) = (0, 0, 0)$  es un punto de equilibrio del sistema. Para probar

estabilidad se usan las siguientes funciones de Lyapunov:

$$V_T(\epsilon, z_0, \zeta) = V_\epsilon + V_{z_0} + V_\zeta = \epsilon^T S_0 \epsilon + z_0^T P z_0 + \zeta^T \zeta$$

donde  $P$  cumple:

$$A_c^T P + P A_c = -I$$

inicialmente

$$\begin{aligned} dV_\epsilon/dt &= \epsilon^T S_0 d\epsilon/dt + d\epsilon/dt^T S_0 \epsilon \\ &= -\theta \epsilon^T S_0 \epsilon - (\Delta\epsilon)^2 + 2\epsilon^T S_0 \Pi \{(\alpha(z_0) - \alpha(z)) + (\beta(z_0) - \beta(z))u\} \\ &\quad - 2\epsilon^T S_0 \Pi \{\beta_\zeta(z) u + \alpha_\zeta(z)\}^T \zeta \end{aligned}$$

para  $V_\zeta$

$$dV_\zeta/dt = 2\epsilon^T \Delta^T \Delta S_0 \Pi \{\beta_\zeta(z_0) u + \alpha_\zeta(z_0)\}^T \zeta$$

sumando

$$\begin{aligned} dV_\epsilon/dt + dV_\zeta/dt &= -\theta \epsilon^T S_0 \epsilon - (\Delta\epsilon)^2 + 2\epsilon^T S_0 \Pi \{(\alpha(z_0) - \alpha(z)) + (\beta(z_0) - \beta(z))u\} \\ &\quad + 2\epsilon^T \Delta^T \Delta S_0 \Pi \{(\beta_\zeta(z_0) - \beta_\zeta(z)) u + (\alpha_\zeta(z_0) - \alpha_\zeta(z))\}^T \zeta \\ &\quad + 2\epsilon^T (I - \Delta^T \Delta) S_0 \Pi \{\beta_\zeta(z) u + \alpha_\zeta(z)\}^T \zeta \end{aligned}$$

si se suponen las siguientes propiedades de tipo Lipschitz:

$$\|\Pi\{\alpha(z_0) - \alpha(z_0 - \epsilon)\}\| \leq \lambda_1 \|\epsilon\|$$

$$\|\Pi\{\beta(z_0) - \beta(z_0 - \epsilon)\}\| \leq \lambda_2 \|\epsilon\|$$

$$\|\Pi\{\alpha_\zeta(z_0) - \alpha_\zeta(z_0 - \epsilon)\}\| \leq \lambda_3 \|\epsilon\|$$

$$\|\Pi\{\beta_\zeta(z_0) - \beta_\zeta(z_0 - \epsilon)\}\| \leq \lambda_4 \|\epsilon\|$$

$$\|\Pi\alpha_\zeta\| \leq \lambda_5, \quad \|\Pi\beta_\zeta\| \leq \lambda_6$$

y además se define que  $\|\epsilon\|_{S_0} = \epsilon^T S_0 \epsilon$  se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} dV_\epsilon/dt + dV_\zeta/dt &\leq \{-\theta + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 r_0 + 2\lambda_3 p_\zeta + 2\lambda_4 r_0 p_\zeta\} \|\epsilon\|_{S_0}^2 \\ &\quad + 2\{\lambda_5 + \lambda_6 r_0\} p_\zeta \|\epsilon\|_{S_0} \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

donde  $r_0 = \sup \|u\|$ ,  $z \in Z$ ;  $p_\zeta = \sup \|\zeta\|$ ,  $\zeta \in P_\zeta$ . Puede verse que si  $\theta$  es lo suficientemente grande puede hacerse que

$$dV_\epsilon/dt + dV_\zeta/dt \leq 0$$

esto fuera de una vecindad del punto  $(\epsilon, z_0, \zeta) = (0, 0, 0)$ . Para  $V_{z_0}$

$$\begin{aligned} dV_{z_0}/dt &= (dz_0/dt)^T P z_0 + z_0^T P (dz_0/dt) = 2 z_0^T P (dz_0/dt) \\ &= z_0^T (A_c^T P + P A_c) z_0 - 2 z_0^T P S_0^{-1} \Delta^T \Delta \cdot \epsilon = -z_0^T z_0 - 2 z_0^T P S_0^{-1} \Delta^T \Delta \cdot \epsilon \\ dV_{z_0}/dt &\leq -\alpha V_{z_0} - 2 \rho_\theta (V_{z_0})^{1/2} |\epsilon|_{S_0} \\ 2 d/dt (V_{z_0})^{1/2} &= -\alpha (V_{z_0})^{1/2} + 2 \rho_\theta |\epsilon|_{S_0} \end{aligned}$$

si hace que  $|\epsilon|_{S_0}$  decaiga más rápido que  $(V_{z_0})^{1/2}$  entonces se garantiza la estabilidad de  $(V_{z_0})^{1/2}$ . Suponiendo que los estados se encuentran acotados, dado que  $V_T$  es creciente y  $d/dt V_T \leq 0$ , por el teorema de LaSalle (cf. Khalil(1992) o Vidyasagar(1993)) el sistema dinámico tenderá al mayor subconjunto invariante de  $(d/dt V_T) = 0$ . En (3.2.10) puede verse que el tamaño de este subconjunto invariante es inversamente proporcional a la ganancia del observador  $\theta$ , como es típico en esquemas de alta ganancia.

El modelo (3.2.9) es un caso especial de los modelos considerados en la presente tesis, i.e. ec.(2.1), en que se cumplen las condiciones de paridad, o de otra forma las incertidumbre únicamente aparecen donde aparece el control.

La conexión proviene del hecho de que es aproximadamente el mismo caso que para la regulación de sistemas no lineales totalmente linealizables mediante una transformación de coordenadas carente de incertidumbres (o no dependiente de los parámetros) y una retroalimentación dependiente de manera no lineal en parámetros inciertos.

A continuación se expresa en términos matemáticos el párrafo anterior. Se parte de sistemas transformables sin incertidumbre y errores a sistemas del tipo:

$$dz/dt = \Gamma z + \Pi \beta(z,p) u + \Pi \alpha(z,p)$$

con salidas

$$y = \Delta z$$

entonces aproximando mediante el primer término de una serie de Taylor en los parámetros se obtiene

$$dz/dt = \Gamma z + \Pi \beta(z,p_0) u + \Pi \alpha(z,p_0) + \Pi \partial\beta(z,p_0)/\partial\zeta \cdot \zeta u + \Pi \partial\alpha(z,p_0)/\partial\zeta \cdot \zeta + O(|\zeta|^2)$$

donde  $\zeta = p - p_0$ ,  $p$  son los valores reales de los parámetros y  $p_0$  son los estimados que se

adaptan.

Se plantea un control linealizante basado en observaciones

$$u = \{k \cdot z_0 - \alpha(z_0, p_0)\} / \beta(z_0, p_0)$$

y se propone el observador

$$dz_0/dt = \Gamma z_0 + \Pi \beta(z_0, p_0) u + \Pi \alpha(z_0, p_0) - S_0^{-1} \Delta^T (\Delta \cdot z_0 - y)$$

donde  $S_0$  cumple

$$\theta S_0 + \Gamma^T S_0 + S_0 \Gamma = \Delta^T \Delta$$

después del control

$$dz_0/dt = A_c z_0 - S_0^{-1} \Delta^T (\Delta \cdot z_0 - y)$$

donde  $\sigma(A_c) \in C^-$ .

y se tiene el regresor

$$d\zeta/dt = \{\Pi \partial\beta(z_0, p_0)/\partial\zeta u + \Pi \partial\alpha(z_0, p_0)/\partial\zeta\}^T S_0 \Delta^T \Delta \epsilon$$

La relevancia del esquema propuesto en esta sección deriva de dos situaciones:

1. La escasez en la literatura especializada de pruebas de estabilidad para esquemas de control adaptable basados en salidas, por lo menos al momento de redactar la presente tesis.
2. La cercana relación con sistemas no lineales linealizables bajo retroalimentación. Dado que, como se muestra líneas arriba, es aplicable, vía una aproximación de serie de Taylor, cuando la transformación no lineal requerida en la linealización no presenta incertidumbres.

### §3.3. RECAPITULACIÓN.

En esta capítulo se presentaron los esquemas de control a mostrar en las simulaciones del siguiente capítulo:

1. Se mostró un esquema de control robusto propuesto por Qu(1992), la aportación en este caso fue desarrollar una versión adaptable de este esquema.
2. Se mostraron distintos esquemas de adaptación, presentados para sistemas lineales en los parámetros en Teel et al.(1991), aquí para sistemas con parametrizaciones



nolineales de los parámetros. Con base en los argumentos usuales de la teoría de Lyapunov se ha probado en primera aproximación la estabilidad del punto  $\phi = 0$  para cada uno de los esquemas, en todos ellos el tamaño de la región de atracción es inversamente proporcional al tamaño del término  $\mathcal{O}(\|\phi\|^2)$  y proporcional al valor de la ganancia del regresor  $\gamma$ .

3. Ante la dificultad de establecer la estabilidad de la interconexión sistema/control/observador/regresor se probó para un sistema simplificado. En este no sólo se pide que tenga el mismo grado relativo que el modelo con el que se controla sino que también debe cumplir las condiciones de paridad estricta mencionadas en §3.1.1, i.e. que los parámetros desconocidos o inciertos solo aparezcan en el rango de  $\Pi$ . A estos requisitos se le sumó el exigir no linealidades que cumplan condiciones tipo Lipschitz. Con ello fue posible aplicar el teorema de LaSalle y obtener estabilidad de una región de tamaño arbitrario e inversamente proporcional a la ganancia del observador.

#### **§4. MODELADO Y CONTROL DE UN REACTOR BIOLÓGICO.**

**En este capítulo se muestran simulaciones del reactor biológico recombinante usado como caso de estudio en esta tesis.**

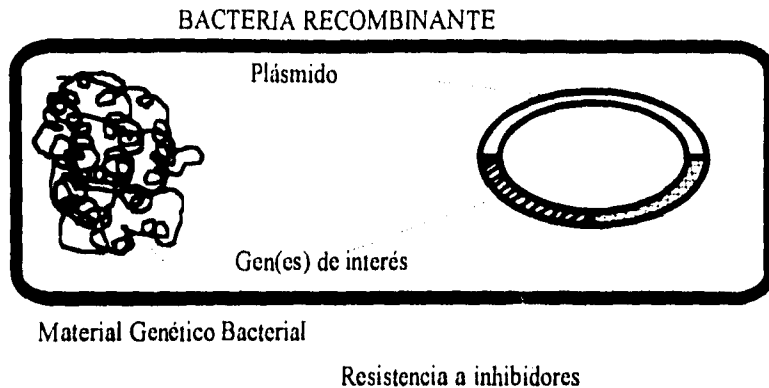
**Inicialmente se muestra el modelo y varias propiedades relevantes a los esquemas de control presentados.**

**En todas las simulaciones se parte de un punto de operación hacia otro y regresando al inicial. Se presentaban dos tipos de errores de modelado: de condiciones iniciales y paramétricos, esto últimos se circunscribieron al parámetro  $K$ , que afecta no linealmente al modelo.**

**A medida que se van desarrollando los esquemas se discuten los resultados de las simulaciones, después de las gráficas estos resultados se resumen sucintamente.**

##### **§4.1. MODELO DE REACTOR BIOLÓGICO DE TANQUE AGITADO.**

**Se considera un reactor biológico recombinante. En este reactor de tanque agitado coexisten dos cepas de bacterias una de las cuales (cepa 1,  $x_1$ ) por medio de alguna técnica genética es parcial o totalmente insensible a un inhibidor ( típicamente un antibiótico,  $I$ ) al mismo tiempo es capaz de producir algún producto de interés a partir del substrato (una mezcla compleja de nutrientes y fuentes de carbono y oxígeno,  $S$ ) , por otro lado la cepa sensible (o cepa 2,  $x_2$ ) suele producir biomasa más rápidamente debido a no tener una carga metabólica extra como la cepa 1, por lo tanto compite ventajosamente con ella por el substrato. El control de este proceso debe aumentar la productividad de biomasa y al mismo tiempo evitar que la cepa sensible  $x_2$  desplace a la de interés.**

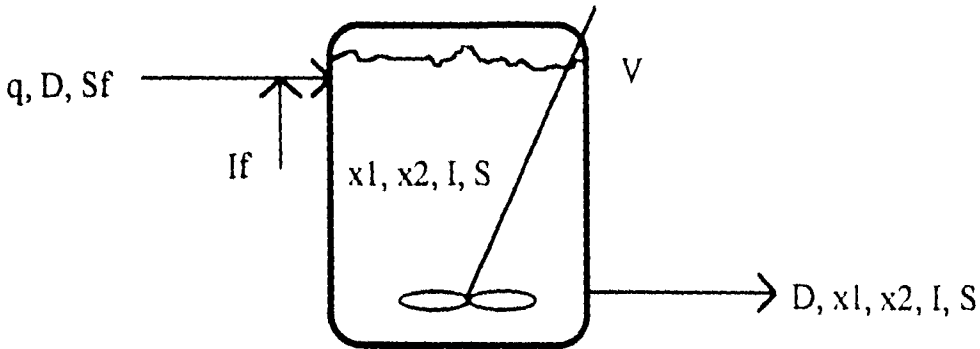


La anterior ilustración muestra como el plásmido es independiente del material genético bacterial. El plásmido puede perderse durante la mitosis y consecuentemente la célula pierde con el plásmido la resistencia al inhibidor y la capacidad de generar el producto de interés. El dominar la proliferación de cepas que han perdido el plásmido es uno de los motivos más importantes para aplicar técnicas de control avanzadas a este proceso.

Las salidas o variables a controlar más interesantes son la concentración de la biomasa de interés ( $x_1$ ) que está relacionada con la producción del producto de interés y  $\ln(x_1/x_2)$ , que está relacionada con la calidad del producto pues mientras mayor sea la razón ( $x_1/x_2$ ) mayor será la concentración de la sustancia de interés por unidad de biomasa. Al mismo tiempo debe haber un compromiso pues una razón ( $x_1/x_2$ ) elevada obliga a agregar altas concentraciones del inhibidor lo que degrada la calidad del producto y dificulta su proceso posterior.

Los controles disponibles son el flujo volumétrico de alimentación al reactor,  $q$ , que a volumen constante  $V$  es proporcional a la dilución  $D = q/V$  (i.e. el inverso del tiempo de residencia), el otro control disponible es el flujo de inhibidor al reactor por unidad de volumen  $DI_f$ ,  $I_f$  es la concentración de inhibidor en el flujo de alimentación. Estos controles tienen limitaciones derivadas de la necesidad de agregar inhibidor en cantidades pequeñas y de no diluir toda la biomasa del reactor.

El siguiente diagrama representa al sistema físico estudiado:



Imanaka y Aiba han propuesto un modelo para este tipo de sistema, cf. Stephanopoulos-Lapidus(1988):

$$\begin{aligned}
 dx_1/dt &= (\mu_1(S)(1-b_p) - D) x_1 \\
 dx_2/dt &= (\mu_2(S,I) - D) x_2 + b_p \mu_1(S) x_1 \\
 dI/dt &= -p x_1 I + D (I_f - I) \\
 dS/dt &= -\mu_1(S) x_1 / Y_1 - \mu_2(S,I) x_2 / Y_2 + D (S_f - S) \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

Se supone aquí que la cepa 1 resistente al inhibidor I, lo metaboliza proporcionalmente a  $x_1 I$ , con parámetro "p". Las funciones  $\mu_1(S)$  y  $\mu_2(S,I)$  son las tasas de crecimiento por unidad de biomasa de las cepas 1 y 2. El parámetro  $b_p$  representa la probabilidad de la cepa recombinante de perder el plásmido y volver a cepa silvestre.  $Y_1$  e  $Y_2$  son los rendimientos de crecimiento celular de las cepas por unidad de sustrato. S es la concentración de sustrato en el reactor. El sufijo f se refiere a la alimentación, así  $S_f$  es la concentración de sustrato de alimentación e  $I_f$  la concentración de inhibidor alimentado al reactor. Para  $\mu_1$  y  $\mu_2$  se usan las funcionalidades usuales tipo Monod:

$$\begin{aligned}
 \mu_1 &= \mu_{1,M} S / (K + S) \\
 \mu_2 &= \mu_{2,M} S / (K + S) K_I / (K_I + I)
 \end{aligned}$$

el factor  $K_I / (K_I + I)$  nos indica la sensibilidad de la cepa 2 al inhibidor. Las expresiones tipo Monod poseen diversas propiedades importantes desde el punto de vista del control.

Se tiene :

$$\|\mu_1(S_a) - \mu_1(S_b)\| \leq \mu_{1,M} \|S_a - S_b\|$$

i.e. Lipschitz en S.

También para el caso de

$$\mu_2 = \mu_{2,M} S / (K + S) K_I / (K_I + I),$$

se tiene

$$\|\mu_2(S_a, I_a) - \mu_2(S_b, I_b)\|_1 \leq \mu_{2,M} * \max(1, 1/K_I^2) \|(S_a, I_a) - (S_b, I_b)\|_1$$

esto expresado en 1-norma (valor absoluto), la p-norma particular no tiene relevancia pues todas las p-normas son equivalentes.

Experimentalmente para estos sistemas se ha encontrado siempre que

$$\mu_{1,M} \leq \mu_{2,M}$$

esto suele deberse al los esfuerzos del plásmido para replicarse y la carga metabólica que esto conlleva. La velocidad de crecimiento de la cepa recombinante se verá entonces disminuida por la competencia entre el RNA mensajero del plásmido y el RNA mensajero cromosómico por los inventarios celulares limitados de enzimas, ribosomas, fuentes de energía, etc.

Los valores del parámetro  $\beta_p$  varían típicamente de  $10^{-2}$  a  $10^{-5}$ . Dado su reducido valor, este parámetro es poco relevante para la dinámica en términos cuantitativos, sin embargo garantiza siempre la presencia de la cepa revertante ( $x_2$ ). Si para simplificar el manejo posterior se supone que  $\beta_p = 0$  el modelo matemático de un reactor de tanque agitado con estas dos cepas y alimentación estéril sería:

$$dx_1 / dt = (\mu_1(S) - D) x_1$$

$$dx_2 / dt = (\mu_2(S, I) - D) x_2$$

$$dI / dt = -p x_1 I + D (I_f - I)$$

$$dS / dt = -\mu_1(S) x_1 / Y_1 - \mu_2(S, I) x_2 / Y_2 + D (S_f - S) \quad (4.2)$$

Si se consideran como controles a  $D$  y  $D I_f$  se puede escribir el modelo en forma afin en el control:

$$\begin{aligned}
 dx_1 / dt &= \mu_1(S) x_1 - u_1 x_1 \\
 dx_2 / dt &= \mu_2(S,I) x_2 - u_1 x_2 \\
 dI / dt &= - p x_1 I + u_2 - u_1 I \\
 dS / dt &= -\mu_1(S) x_1 / Y_1 - \mu_2(S,I) x_2 / Y_2 + u_1 (S_f - S)
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Para los modelos (4.1) y (4.2) puede mostrarse que, dados los vectores de salidas  $y = [x_1, \ln(x_1/x_2)]$  y de controles  $u = [D, D I_f]$ , tienen el mismo vector de grados relativos  $r = [1,2]$ . Por lo tanto los esquemas de control serían esencialmente los mismos, con diferencias de detalle. Conservar el parámetro  $p \neq 0$  solo incrementaría el nivel de complejidad del modelo sin agregar claridad o profundidad a la utilización de los esquemas de control propuestos en esta tesis, por ello se decidió utilizar el modelo (4.2) más sencillo que ya ha sido empleado con anterioridad, cf. Hoo-Kantor(1986), como ejemplo en la aplicación de técnicas de control no lineal a reactores biológicos.

Los valores nominales de los parámetros han sido tomados de Hoo-Kantor(1986) y son:

Tabla 4.1

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
$\mu_{1,M}$	0.4 hr <sup>-1</sup>	$\mu_{2,M}$	0.5 hr <sup>-1</sup>
K	0.05 g/dm <sup>3</sup>	$K_I$	0.02 g/dm <sup>3</sup>
$Y_1$	0.2	$Y_2$	0.15
$S_f$	2.0 g/dm <sup>3</sup>	p	0.5 hr <sup>-1</sup> /g

Durante las simulaciones "el proceso" consistió en las ecuaciones (4.2) con parámetros en los valores nominales presentados en la anterior tabla y condiciones iniciales diversas. El "modelo" correspondía a las mismas ecuaciones (4.2) con errores en el intervalo de -30 a +30% en el parámetro K y en las condiciones iniciales con respecto al "proceso".

El parámetro elegido para generar las incertidumbre fue la  $K$  (de Monod), este parámetro indica la afinidad de la bacteria por el substrato, una característica que no es modificada por la manipulación genética y por lo tanto es igual para las dos cepas consideradas, es importante notar que este parámetro afecta no linealmente al modelo.

#### §4.1.1. PUNTOS DE EQUILIBRIO.

En el modelo (4.2) se tienen 6 variables:  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $I$ ,  $S$ ,  $D$  y  $DI_f$ , dado que solo se tienen cuatro ecuaciones para determinar los estados se deben especificar dos de ellas, aquí se eligieron los controles  $D$  y  $DI_f$  no obstante casi cualquier otra combinación sería equivalente.

Este modelo presenta múltiples puntos de equilibrio dependiendo de las condiciones de operación:

1. El tiempo de residencia en el reactor es menor que el requerido para reproducción y las células son "lavadas" o diluidas hasta su extinción del reactor por el exceso de flujo, esto implica

$$\begin{aligned} \mu_{1,M} \leq \mu_{2,M} \leq D \\ x_{1e} = x_{2e} = 0, I_e = I_f, S_e = S_f \end{aligned}$$

2. No hay flujo al reactor, i.e.  $D=0$ , en este punto de equilibrio la biomasa alcanza su máximo nivel y se estanca, de acuerdo al modelo.

$$\begin{aligned} I_e = 0, S_e = 0 \\ \mu_{1,M} \leq \mu_{2,M} \Rightarrow x_{1e} = 0, x_{2e} = Y_2 S_f \end{aligned}$$

3. Dado que aquí hay dos especies compitiendo por el mismo substrato otra situación típica es que la cepa con crecimiento más rápido (en este caso la cepa 2) domine y lleve a la otra a ser "lavada" o diluida fuera del reactor, esto implica:

$$\begin{aligned} \mu_{1,M} \leq D \leq \mu_{2,M} \\ x_{1e} = 0, x_{2e} \geq 0, I_e \geq 0, S_e \geq 0 \end{aligned}$$

4. El último punto de equilibrio es el más interesante, por ello se analizará con más detalle. Es el único deseable pues considera la coexistencia de ambas especies, ello obliga a que se cumpla que

$$D \leq \mu_{1,M} \leq \mu_{2,M}$$

$$x_{1e} \geq 0, x_{2e} \geq 0, I_e \geq 0, S_e \geq 0$$

del análisis anterior se observa que el tiempo característico del sistema en equilibrio está estrechamente relacionado con  $\mu_{1,M}$  y  $\mu_{2,M}$  pues siempre se cumple que:

$$dx_1/dt \leq \mu_{1,M}$$

$$dx_2/dt \leq \mu_{2,M}$$

De las condiciones de estabilidad se relacionan con  $1/D$  (el tiempo de residencia promedio en el reactor), resultado clásico de la teoría de reactores.

La relación entre dilución y velocidad de crecimiento en estado estacionario es un resultado clásico de operación de reactores bioquímicos:

$$dx_{1e}/dt = 0 = (\mu_1(S_e) - D_e) x_{1e} \Rightarrow \mu_1(S_e) = D_e$$

$$dx_{2e}/dt = 0 = (\mu_2(S_e, I_e) - D_e) x_{2e} \Rightarrow \mu_2(S_e, I_e) = D_e$$

$$\Rightarrow \mu_2(S_e, I_e) = \mu_1(S_e)$$

$$\mu_{1,M} = \mu_{2,M} K_I / (K_I + I_e)$$

$$\Rightarrow I_e = K_I (\mu_{2,M} / \mu_{1,M} - 1)$$

es notorio que la concentración en equilibrio del inhibidor ( $I_e$ ) solo depende de los parámetros del modelo y no del punto de operación en particular, (i.e.  $D_e$  y  $I_{fe}$ ). Como ambas cepas presentan la misma afinidad por el sustrato (indicada por el parámetro  $K$ ), en el plano  $I = I_e \Rightarrow \mu_2(S, I_e) = \mu_1(S)$ , por lo tanto sus dinámicas son idénticas ante  $D$  y evolucionarían de manera paralela manteniéndose constante en ese plano la razón ( $x_1/x_2$ ). Para este tipo de sistemas las técnicas más comunes consisten en reducir a 2 la dimensión del espacio de variables de estado a estudiar al substituir los valores en equilibrio del resto de las variables, esto con el fin de utilizar las poderosas herramientas disponibles para sistemas dinámicos de dos dimensiones, cf. Stephanopoulos(1980).



Para el sistema estudiado esta metodología es inútil, pues al sustituir  $I_e$  y  $S_e$  en las ecuaciones correspondientes la dinámica colapsaría a la de dos ecuaciones diferenciales idénticas salvo las condiciones iniciales. Si solo se sustituyera  $S_e$  se tendría un vector de estados de dimensión 3, dado que fuera de  $I = I_e$ ,  $\mu_2(S, I) \neq \mu_1(S)$ . Si se sustituyera  $I_e$ , se tendrían de nuevo 3 ecuaciones, dos de ellas idénticas salvo las condiciones iniciales. En todo caso habría que garantizar la convergencia al menos asintótica al plano  $I = I_e$ .

De la ecuación  $\mu_1(S_e) = D_e$  puede obtenerse  $S_e$  en función de  $D_e$ :

$$S_e = K D_e / (\mu_{1,M} - D_e)$$

de la ecuación diferencial para  $I$  puede obtenerse  $x_{1e}$ :

$$\begin{aligned} dI_e/dt = 0 &= -p x_{1e} I_e + D_e (I_{fe} - I_e) \\ \Rightarrow x_{1e} &= D_e (I_{fe} - I_e) / (p I_e) \end{aligned}$$

de la ecuación diferencial para  $S$  puede obtenerse  $x_{2e}$ :

$$\begin{aligned} dS_e/dt = 0 &= -\mu_1(S_e) x_{1e} / Y_1 - \mu_2(S_e, I_e) x_{2e} / Y_2 + D_e (S_f - S_e) \\ \Rightarrow x_{2e} &= \{D_e (S_{fe} - S_e) - \mu_1(S_e) x_{1e} / Y_1\} / (\mu_2(S_e, I_e) / Y_2) \end{aligned}$$

donde se han de sustituir los valores apropiados de  $S_e$  y  $x_{1e}$ .

Es importante recalcar que para este sistema no se presentan multiplicidad de puntos de equilibrio para una pareja de controles, esto debido a que las no linealidades involucradas son monótonas crecientes en todo el intervalo de interés.

Las características del sistema físico restringen los valores de los estados y controles y con ello de las salidas. Por ejemplo, los estados siempre deben ser positivos,  $S$  debe ser menor que  $S_f$  pues este es consumido por las cepas, la concentración de  $I$  debe ser baja y mucho menor que  $S_f$ , en el reactor no puede haber más biomasa de la que habría si todo el substrato se convirtiera en material celular (lo que implicaría  $S = 0$ ), etc.

Estas restricciones son naturalmente cumplidas por el sistema real, no obstante durante el diseño de la ley de control se supone y actúa como si estas no existieran. Esto es debido a que los diseños geométricos requieren que no haya restricciones en los

valores de los estados y controles, cuando menos localmente, de otra manera no es posible linealizar bajo retroalimentación.

Sin embargo para que los resultados de las simulaciones tengan algún sentido físico deben hacerse válidas las restricciones en los controles, los estados están restringidos por la propia dinámica a una región de coexistencia en equilibrio, como se detalla líneas abajo. Estas restricciones son, cf. Hoo-Kantor(1986):

1. Los controles deben ser siempre positivos, pues un flujo de sustrato negativo es un absurdo tal como está planteado modelo.
2. El flujo del sustrato al reactor no debe diluir a la cepa de interés (la cepa 1):

$$D \leq \mu_{1,M} S_f / (K + S_f)$$

3. El flujo de inhibidor debe ser mayor que la que abandona el reactor en equilibrio

$$0 \leq u_2 - u_1 K_I \{ (\mu_{2,M} / \mu_{1,M}) - 1 \} \text{ equivalentemente } I_e \leq I_f$$

4. El flujo de inhibidor no debe superar la máxima capacidad del sistema para eliminar inhibidor mediante lavado y desactivación:

$$D I_f \leq p x_{1e,max} I_e + D I_e$$

en equilibrio, con un máximo de inhibidor se tiene:

$$S_f - S_e = x_2 / Y_2 + x_1 / Y_1 \approx x_{1e,max} / Y_1,$$

por lo tanto :

$$x_{1e,max} = Y_1 (S_f - S_e),$$

donde  $I_e = K_I \{ (\mu_{2,M} / \mu_{1,M}) - 1 \}$  y  $S_e = K D_e / (\mu_{1,M} - D_e)$ .

#### §4.1.2. REGIÓN DE COEXISTENCIA EN EQUILIBRIO.

De las ecuaciones diferenciales correspondientes se puede observar que si los controles están acotados por arriba y abajo se cumple que

$$0 \leq I_e \leq I_f$$

$$0 \leq S_e \leq S_f$$

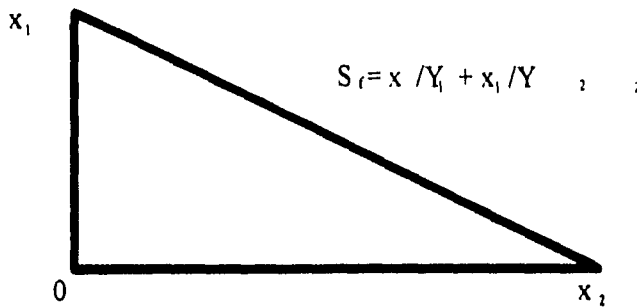
solo falta presentar el acotamiento de las variables  $x_1$  y  $x_2$ . Es claro que ambas variables están acotadas por abajo.

En el otro extremo todo el sustrato es consumido en la producción de biomasa  $x_1/Y_1 + x_2/Y_2 = S_f$ , por lo tanto

$$0 \leq x_{1e}, 0 \leq x_{2e}$$

$$x_{1e}/Y_1 + x_{2e}/Y_2 \leq S_f$$

entonces dadas  $I_e$  y  $S_e$ , la región de coexistencia en equilibrio de  $x_1$  y  $x_2$  será el interior del triángulo en la siguiente figura, cf. Aris-Humphrey(1977):



A lo largo de los límites de esta región los campos vectoriales tienden hacia adentro de la región o se mueven a lo largo de los límites de ella, por lo tanto esta región no solo es cerrada y acotada sino que también es invariante, cf. Aris-Humphrey(1977).

A lo largo de la recta  $x_1/Y_1 + x_2/Y_2 = S_f$  la dirección de los campos vectoriales para  $x_1$  y  $x_2$  tiende hacia adentro de la región, pues corresponden a una situación en que  $\mu_1(S) = \mu_2(S,I) = 0$ , pues a lo largo de esa recta todo el sustrato se convierte en biomasa lo que implica  $S = 0$ , esto lleva a que

$$dx_{1e}/dt = -D_e x_{1e}$$

$$dx_{2e}/dt = -D_e x_{2e}$$

que apunta hacia el interior de la región de coexistencia en equilibrio. A lo largo de los límites inferiores (lados del triángulo) se presenta:

$$x_{1e} = 0, x_{2e} \geq 0 \Rightarrow dx_{1e}/dt = 0$$

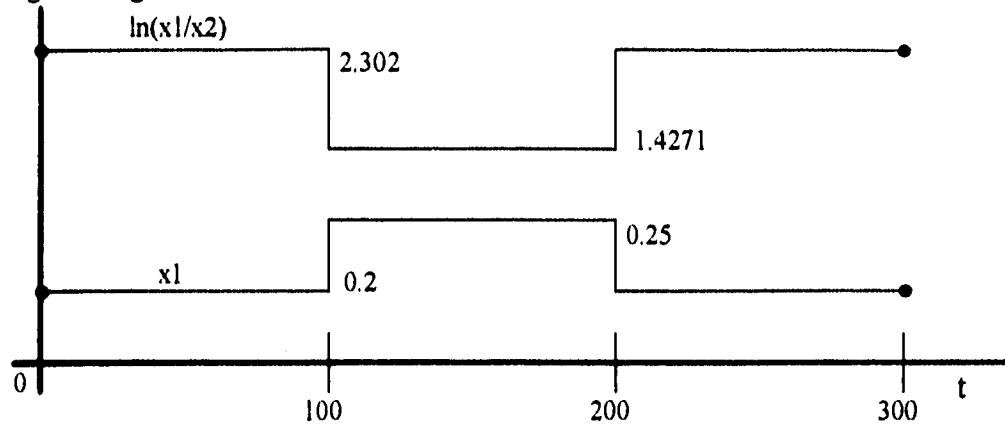
$$x_{2e} = 0, x_{1e} \geq 0 \Rightarrow dx_{2e}/dt = 0$$

Lo anterior es muy relevante dado que para ser válido el teorema de LaSalle, utilizado en la presente tesis en pruebas de estabilidad, requiere que los estados estén acotados.

**§4.1.3. DESCRIPCIÓN DE LAS SIMULACIONES**

Las simulaciones consistieron en mostrar la transición entre dos puntos de equilibrio para los distintos errores de modelado en el parámetro K.

Las salidas deseadas en función del tiempo tienen la forma mostrada en la siguiente figura:



Los valores de las variables de estado y control en los puntos de equilibrio elegidos se muestran en la tabla 4.2:

**Tabla 4.2**

Variable	Primer punto	Segundo punto
$x_1$	0.2	0.25
$x_2$	0.02	0.06
I	0.005	0.005
S	0.86667	0.35
$u_1$	0.3782	0.35
$u_2$	0.002391	0.002375

En sistemas que son estables a lazo abierto, como el que estudiamos, es posible obtener un cambio en el punto de operación simplemente variando los valores de los controles a los correspondientes al punto de operación deseado.

Esta operación a lazo abierto es lenta pues depende completamente de la dinámica natural del sistema, como puede verse en la figura 4.1, donde el sistema no alcanza a llegar en el intervalo de tiempo fijado a los puntos de operación para la variable  $x_2$ . En la figura 4.2 puede verse como los errores de modelado provenientes de condiciones iniciales del modelo distintas de las del proceso desaparecen a medida que pasa el tiempo de manera exponencial. En la figura 4.3 puede verse como el control es a lazo abierto, pues simplemente cambian entre los valores indicados en la tabla 4.2.

Al aplicar un control linealizante tipo ec. (2.1) se tiene una respuesta puramente lineal, pero si se incluye un error paramétrico en el modelo de +10% en la K de Monod se tiene una situación distinta, como puede verse en la figura 4.4. Los errores de modelado aumentan de manera aproximadamente lineal con el tiempo, esto indica claramente que los controles linealizantes no son robustos. La información pierde calidad, transcurrido el primer tercio de la simulación los errores de modelado son del orden de los valores reales de los estados. Por ello es necesaria la utilización de controles robustos si se quieren utilizar controles linealizantes.

**§4.2 LINEALIZACIÓN MEDIANTE RETROALIMENTACIÓN.**

Por simplicidad para este modelo no se consideran perturbaciones inmedidas, es decir el vector  $(d \mathbf{d}/dt)=\mathbf{0}$ .

Para presentar el modelo (4.3) en un formato típico dentro de la literatura del control geométrico se establecen los siguientes vectores variantes en el tiempo:

**Tabla 4.3**

Estados	$\mathbf{x} = [x_1, x_2, I, S]$
Salidas	$\mathbf{y} = [y_1, y_2] = \mathbf{h}(\mathbf{x}) = [x_1, \ln(x_1/x_2)]$
Controles	$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{u} = [u_1, u_2] = [D, D \cdot I_f]$
Dinámica no forzada	$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1, f_2, f_3, f_4]$ $= [\mu_1(S) x_1, \mu_2(S, I) x_2, -p x_1 I, -\mu_1(S) x_1 / Y_1 - \mu_2(S, I) x_2 / Y_2]$
Dinámica controlada	$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2] = [(-x_1, 0), (-x_2, 0), (-I, 1), (S_f - S, 0)]$

las derivadas de Lie o derivadas direccionales involucradas son:

$$\mathbf{L}_f h_1 = \langle \partial h_{1,x}, \mathbf{f} \rangle = \mu_1(S) x_1,$$

$$\mathbf{L}_g h_1 = (-x_1, 0) \neq 0,$$

$$\mathbf{L}_f h_2 = \langle (1/x_1, -1/x_2, 0, 0), (\mu_1(S) x_1, \mu_2(S,I) x_2, \cdot, \cdot) \rangle = \mu_1(S) - \mu_2(S,I)$$

$$\mathbf{L}_g h_2 = \langle (1/x_1, -1/x_2, 0, 0), (-x_1, -x_2, \cdot, \cdot) \rangle = (0,0)$$

$$\mathbf{L}_f^2 h_2 = \langle (1/x_1, -1/x_2, -\partial\mu_2/\partial I, \partial\mu_1/\partial S - \partial\mu_2/\partial S), (f_1, f_2, f_3, f_4) \rangle$$

$$\mathbf{L}_G \mathbf{L}_f h_2 = \langle (1/x_1, -1/x_2, -\partial\mu_2/\partial I, \partial\mu_1/\partial S - \partial\mu_2/\partial S), (-x_1, -x_2, -I, -S) \rangle,$$

$$\langle (1/x_1, -1/x_2, -\partial\mu_2/\partial I, \partial\mu_1/\partial S - \partial\mu_2/\partial S), (0, 0, 1, 0) \rangle$$

$$\mathbf{L}_G \mathbf{L}_f h_2 = (\cdot, -\partial\mu_2/\partial I) \neq (0,0)$$

También  $\det[\mathbf{L}_G h_1, \mathbf{L}_G \mathbf{L}_f h_2] \neq 0$  por lo tanto el sistema es invertible y linealizable. El vector de control sería:

$$\mathbf{u} = ((v_1 - \mathbf{L}_f h_1) / \mathbf{L}_g h_1, (v_2 - \mathbf{L}_f^2 h_2 - D \mathbf{L}_g \mathbf{L}_f h_2) / 1)$$

donde  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  es la señal de referencia a calcular durante el diseño lineal.

La transformación de coordenadas sería:

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}(\mathbf{x}) = (x_1, \ln(x_1/x_2), \mu_1(S) - \mu_2(S,I), S)$$

se encuentra que el sistema tiene el siguiente vector de grados relativos  $\mathbf{r} = (1,2)$  y es parcialmente linealizable, la dinámica cero (exponencialmente estable) es la ecuación para  $S$  en las nuevas coordenadas.

Mediante transformación de coordenadas y retroalimentación no lineal se puede linealizar las ecuaciones del modelo a un sistema de la siguiente estructura:

$$d\mathbf{z}/dt = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}$$

$$\mathbf{y} = \Delta \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}$$

$$dS/dt = \phi(\mathbf{z}, S) + \psi(\mathbf{z}, S) \mathbf{v}$$

las matrices  $\Gamma$ ,  $\Pi$  y  $\Delta$  están determinadas solamente por  $\mathbf{r}$ , el vector de grados relativos, la hipótesis de igualdad de grados relativos entre modelo y proceso (y por lo tanto de

modelo de referencia) indica que todos los sistemas dinámicos involucrados son transformables a sistemas lineales con la misma estructura caracterizada por el grado relativo, es decir las mismas  $\Gamma$ ,  $\Pi$  y  $\Delta$ . Para obtener  $\phi(z,S)$  y  $\psi(z,S)$  se tiene que aplicar la retroalimentación y la transformación no lineales a  $f_4$  y  $g_4$ .

El diseño de las señales  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  se simplifica pues se basa en técnicas lineales. Para el caso de control proporcional y dado que el sistema está desacoplado:

$$\mathbf{v} = \mathbf{K}_c \mathbf{z} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \mathbf{z}$$

$$d\mathbf{z} / dt = (\Gamma + \Pi \mathbf{K}_c) \mathbf{z}$$

donde  $\sigma(\Gamma + \Pi \mathbf{K}_c) \in \mathbb{C}^-$ , es decir los valores propios tienen parte real menor que cero, lo que hace estable al sistema lineal transformado. Cuando se usa un control integral con un integrador sobre el error de salida se define una nueva variable por salida, la derivada con respecto al tiempo de esta nueva variable es la diferencia entre la salida original y la referencia, considerada constante por intervalos:

$$\mathbf{w} = \int (\mathbf{z} - \mathbf{z}_{ref}) dt \Rightarrow d\mathbf{w} / dt = \mathbf{z} - \mathbf{z}_{ref}$$

### §4.3 DISEÑO LINEAL.

Aquí se presenta el problema de elegir las raíces de los valores propios del sistema de tal manera que se obtenga una respuesta dinámica adecuada, la ventaja es que la retroalimentación aplicada no solo linealiza sino también desacopla los distintos lazos, y el diseño del sistema completo se reduce al de diseñar linealmente para cada bloque. El parámetro más importante proviene del tiempo de respuesta asignado por el control, en segundo lugar viene el factor de amortiguación. También es de notarse que en las simulaciones se hace un cambio en el punto de operación, que equivale a una perturbación en escalón del sistema de error de seguimiento.

Para el caso de sistemas de primer orden se tiene un sistema del siguiente tipo:

$$de_s / dt = a e_s, e_s(0) = -y_{sp}, e_s(t) = y(t) - y_{sp}$$

Para el caso de sistemas de primer orden se tiene un sistema del siguiente tipo:

$$de_s/dt = a e_s, e_s(0) = -y_{sp}, e_s(t) = y(t) - y_{sp}$$

en este caso con que  $a < 0$  se garantiza la estabilidad del error de seguimiento y que este tenderá a cero exponencialmente, el tiempo de respuesta del sistema controlado sería  $1/a$ .

Para el caso de sistemas de segundo orden se tiene un sistema del siguiente tipo:

$$d^2e_s/dt^2 + a_1 de_s/dt + a_2 e_s = 0; de_s(0)/dt = 0, e_s(0) = -y_{sp}, e_s(t) = y(t) - y_{sp}$$

una manera de diseñar es fijar los polos. Se tienen las raíces complejas conjugadas o polos  $p_1 = a + bi; p_2 = a - bi$ , puede verse que el tiempo de respuesta para estos sistemas es  $\tau = 1/\sqrt{a^2 + b^2}$  y el coeficiente de amortiguación es  $\zeta = -a/\sqrt{a^2 + b^2}$ . Diversas propiedades de la respuesta dinámica pueden expresarse en términos de estos parámetros. En general se considera apropiado un coeficiente de amortiguación entre 0.7 y 0.5, en las simulaciones se tomaron valores de acuerdo a la siguiente tabla y con ciertas características asociadas cf. Stephanopoulos(1985):

Tabla 4.4a

Polos	$\zeta$	$\tau$	Sobretiro	Decaimiento	$\omega$ , frecuencia	$\omega_n$ , fr. natural
$a = b$	$1/\sqrt{2}$	$1/(a\sqrt{2})$	$\exp(-\pi)$	$\exp(-2\pi)$	$a$	$\sqrt{2}a$

Los polos se colocaron en  $p_{1,2} = -0.12 \pm 12i$  y  $p_3 = -0.24$  con  $\zeta = 1/\sqrt{2}$ . Esto lleva a las siguientes ganancias, dependiendo del grado relativo de la salida y si se incluye acción integral o no:

Tabla 4.4b

Derivativa	Proporcional	Integral
-	0.12	-
- 0.24	- 0.0288	-
-	- 0.24	- 0.0288
- 0.48	- 0.0864	- 0.006912

En la figuras 4.5, 4.6 y 4.7 se muestra el comportamiento del esquema de control linealizante basado en conocimiento de los estados del sistema y modelo perfecto con error en las condiciones iniciales del modelo y control integral sobre los errores de



seguimiento. El error en las condiciones iniciales del modelo con respecto al proceso es del +10% en  $x_1$  y +5% en  $x_2$ .

Se observa como se cumplen los valores de los puntos de operación de manera rápida y aceptable sin llegar a requerir un gran esfuerzo de control. Puede verse que el efecto de las condiciones iniciales en los errores de modelado de las variables de interés se estabiliza poco a poco y depende principalmente del tiempo de respuesta del sistema que es inversamente proporcional al flujo de salida ( $u_1$ ). Nótese que la acción del control es similar al control a lazo abierto excepto en ciertos momentos claves poco después del cambio de punto de operación.

#### §4.4 CONTROL ROBUSTO ADAPTABLE

Recordando las ecuaciones pertinentes del §3.1 se tiene las siguientes variables:

$$\alpha(\mathbf{x}_t, t) = ((\partial V / \partial \mathbf{x}_t)^T \mathbf{G}) / \|(\partial V / \partial \mathbf{x}_t)^T \mathbf{G}\|$$

$$\rho(\mathbf{x}_t, t) = \rho^*(\mathbf{x}_t)^T \mathcal{Q}(t)$$

$$\rho^*(\mathbf{x}_t) = [1, \|\mathbf{x}_t\|]^T$$

$$\alpha \rho(\mathbf{x}_t, t) = \alpha(\mathbf{x}_t, t) \rho(\mathbf{x}_t, t)$$

$$v(t) = \{\rho^*(\mathbf{x}_t)^T \mathcal{Q}^*(t)\} / \|(\partial V / \partial \mathbf{x}_t)^T \mathbf{G}\| \{ \alpha \rho(\mathbf{x}_t, t) / \{ \|\alpha \rho(\mathbf{x}_t, t)\| + \epsilon_v \} \}$$

$$d\mathcal{Q}^* / dt = \|\mathbf{x}_t\| \rho^*(\mathbf{x}) - f(\mathcal{Q}^*) [\mathcal{Q}_1^*(t), \mathcal{Q}_2^*(t)]^T$$

$$f(\mathcal{Q}^*; \nu, 1) = 1 / (1 + e^{-(2\|\mathcal{Q}^*\|/\nu - 3)})$$

aquí  $\mathbf{x}_t = \mathbf{0}$  es un punto de equilibrio del sistema, por lo tanto el sistema original debe trasladarse a tener el origen como punto de equilibrio  $\mathbf{x}_t = \mathbf{x} - \mathbf{x}_e$ , esta traslación depende del punto de operación y por lo tanto cambia con éste.

La base de este esquema de control (y de muchos otros en este espíritu) es una función de Lyapunov  $V(\mathbf{x}_t)$  para el sistema nominal, dado que en el caso nominal se dispone de la correspondiente a la parte linealizable y mínima:

$$\mathbf{A}_c \mathbf{P}_c^T + \mathbf{P}_c \mathbf{A}_c = -\mathbf{I},$$

$\mathbf{A}_c = (\Gamma + \Pi \mathbf{K}_c)$  consecuentemente es estable,

$$V_{cz}(z) = z^T P_c z - T(x_e)^T P_c T(x_e), \quad z = T(x_e + x_t),$$

$$V_{cx}(x_t) = T(x_e + x_t)^T P_c T(x_e + x_t) - T(x_e)^T P_c T(x_e)$$

Falta establecer la componente de la función de Lyapunov correspondiente a la parte no linealizable, la variable "S" que puede ser simplemente  $(S - S_e)^2$ :

$$V_{cs}(S) = (S - S_e)^2, \quad dV_{cs}(S)/dt = 2(S - S_e) * dS/dt$$

$$dV_{cs}(S)/dt = (S - S_e) (-\mu_1(S) x_1 / Y_1 - \mu_2(S, I) x_2 / Y_2 + D(S_f - S))$$

$$dV_{cs}(S)/dt \leq -(S - S_e)(\mu_{1,M} x_{1,max} / Y_1 + \mu_{2,M} x_{2,max} / Y_2 - D(S_f - S))$$

nótese que cuando  $D \rightarrow \infty$ ,  $S \rightarrow S_f$  y la función  $(S - S_e) * dS/dt$  es negativa, asimismo cuando  $D \rightarrow 0$ ,  $DS_f \rightarrow 0$ , y la función  $(S - S_e) * dS/dt$  también es negativa, por lo tanto califica como función de Lyapunov del sistema completo:

$$V_c(x_t) = T(x_e + x_t)^T P_c T(x_e + x_t) + (S - S_e)^2 - T(x_e)^T P_c T(x_e)$$

$$V_{ca}(x) = T(x)^T P_c T(x) + S^2$$

la cantidad utilizada en el control que involucra a la función de Lyapunov del sistema nominal es:

$$(\partial V / \partial x_t)^T G(x_e + x_t) = (\partial V / \partial x)|_{x=x_t}^T (\partial x_t / \partial x)^T G(x_e + x_t) = (\partial V / \partial x)|_{x=x_t}^T G(x_e + x_t) = \{(\partial V / \partial x)^T G(x + x_e)\}|_{x=x_t} =$$

$$\begin{aligned} & [(k_1 (S + S_e - S_f) (2k_2^2 + 1) (\mu_1 - \mu_2) d\mu_1/ds - (i + i_e) k_1 (2k_2^2 + 1) (\mu_1 - \mu_2) d\mu_2/di \\ & - k_1 (S + S_e - S_f) (2k_2^2 + 1) (\mu_1 - \mu_2) d\mu_2/ds - 8 k_1 k_2^3 S (S + S_e - S_f) + 4 k_2^3 (x_1 + x_{1e}) x_1 \\ & + 2 k_1 k_2 (x_1 x_{2e} - x_{1e} x_2) (\mu_1 - \mu_2) / (x_1 x_2)] / (4 k_1 r_1^3) \\ & - ((S + S_e - S_f) * d\mu_1/ds - (i + i_e) d\mu_2/di - (S + S_e - S_f) d\mu_2/ds \\ & + 2 k_2 (2k_2^2 + 3) (x_1 x_{2e} - x_{1e} x_2) / (x_1 x_2) ) \ln(x_1 / x_2) / (2k_2^2) \\ & , ((2k_2^2 + 1) (\mu_1 - \mu_2) d\mu_2/di) / (4 k_2^3) - d\mu_2/di \ln(x_1 / x_2) / (2k_2^2) \} |_{x=x_t}^T \end{aligned}$$

En la figuras 4.8, 4.9 y 4.10 se puede ver el desempeño del control para el caso de tener un error del 10% en el valor de la K de Monod del modelo.

Es interesante observar que la trayectoria de seguimiento en la figura 4.8 está determinada en algunos momentos alrededor de los cambios de punto de operación por la saturación de los controles, estos mostrados en la figura 4.10. En la figura 4.9 se muestra

el error de modelado para las distintas variables, obsérvese como depende el error del punto de operación a alcanzar, siendo más notorio para el caso de la S, que no es controlada. El error se mantiene dentro de un intervalo razonable del  $\pm 5\%$  del valor de la variable excepto para el caso de  $S_p - S_m$  que es un promedio de los errores de modelado de  $x_1$  y  $x_2$  pero magnificado por un número entre 5 y 6.7 a causa de los parámetros  $Y_1$  e  $Y_2$ .

Esto es un ejemplo de algo que se menciona en Liu-Yuan(1991): solo es posible desacoplar de manera robusta las salidas de un sistema no lineal mediante linealización entrada-salida si las perturbaciones solo aparecen en la dinámica cero, que en este caso corresponde al balance para S, el control robusto adicional "empuja" el efecto del error de la K de Monod de las salidas hacia la dinámica cero. El desempeño es muy similar al que hay cuando se usan integradores en el error de salida, ver por ejemplo la figura 4.6, pero los errores de modelado son menores y los controles menos abruptos. Esto era de esperarse ya que este esquema "adaptable" es en cierta forma un integrador sofisticado.

#### §4.5 AJUSTE DE PARÁMETROS FÍSICOS EN LINEA (§3.2.1)

Para la simulación de la adaptación se considerará solo el esquema de gradiente por su simplicidad y facilidad de aplicación, asimismo se usó el esquema de control proporcional solamente, con el fin de poder comparar con la simulación mostrada en la figura 4.4. donde se veía un pobre desempeño del control linealizante proporcional ante errores de modelado de un 10% en K.

La ecuación principal será entonces:

$$d\phi/dt = -\gamma(\partial y_{em}/\partial \phi)^T y_{em}$$

donde

$$\partial y_{em}/\partial \phi = \partial(y - y_m)/\partial \phi = (\partial h/\partial x)(\partial x/\partial p) - (\partial h/\partial x_m)(\partial x_m/\partial p)$$

Para probar el esquema de gradiente se suponen disponibles los estados y sensibilidades paramétricas ( $\partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{p}$ ) del proceso, por lo tanto el único error de modelado proviene del error paramétrico (módulo las condiciones iniciales).

Como ya se mencionó el parámetro que se adaptó fue el parámetro K por afectar no linealmente en el modelo y por lo tanto no ser aplicables directamente los esquemas propuestos en Teel et al. (1991).

$$\partial \mathbf{y}_{em} / \partial K =$$

$$[(\partial x_1 / \partial K - \partial x_{1m} / \partial K), (1/x_1 \partial x_1 / \partial K - 1/x_2 \partial x_2 / \partial K) - (1/x_{1m} \partial x_{1m} / \partial K - 1/x_{2m} \partial x_{2m} / \partial K)]$$

$$d\phi/dt = dK/dt = -\gamma \{ (\partial x_1 / \partial K - \partial x_{1m} / \partial K)(x_1 - x_{1m})$$

$$+ ((1/x_1 \partial x_1 / \partial K - 1/x_2 \partial x_2 / \partial K) - (1/x_{1m} \partial x_{1m} / \partial K - 1/x_{2m} \partial x_{2m} / \partial K)) (\ln(x_1/x_2) - \ln(x_{1m}/x_{2m})) \}$$

Al desconocerse el valor adecuado de  $\gamma$  se decidió ajustarlo en línea con base en el error de modelado:

$$d\gamma/dt = 100 * \| \mathbf{x} - \mathbf{x}_m \| - \gamma$$

La condición (3.2.7) se cumple pues la matriz  $(\partial \mathbf{y}_{em} / \partial K)^T (\partial \mathbf{y}_{em} / \partial K)$  tiene rango completo.

Al variar los parámetros de una ecuación diferencial para que ajusten un conjunto de datos el procedimiento es generalmente así: dados unos parámetros iniciales se integran las ecuaciones y se obtienen las sensibilidades correspondientes, con las condiciones iniciales nulas (i.e.  $\partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{p}(t_0) = 0$ ) normales; con base en estas se calcula el gradiente del error a minimizar, la faceta a notar aquí es que durante la integración los parámetros no cambian. Cuando se hace el ajuste en línea de un intervalo a otro se está cambiando de parámetros de la ecuación diferencial, por ello las condiciones iniciales de las sensibilidades en cada instante en rigor deberían ser cero, i.e. (3.2.2) tendería a:

$$d/dt(\partial \mathbf{x}_m / \partial \mathbf{p}) \cong \partial \{ \mathbf{f}(\mathbf{x}_m, \mathbf{p}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}_m, \mathbf{p}) \mathbf{u} \} / \partial \mathbf{p} \quad (4.3)$$

las sensibilidades de pasos anteriores contienen información pasada de valores paramétricos que se piensan peores que los actuales aunque cercanos, la ecuación (4.3)

sería un extremo en que la información anterior no tuviera valor alguno, el otro extremo sería considerarla igualmente importante y tomar las sensibilidades de pasos anteriores intactas como condiciones iniciales de la ecuación (3.2.2). Entre estos dos estaría considerar con un "factor de memoria" que multiplica a las sensibilidades anteriores antes de ser usadas como condiciones iniciales de las sensibilidades con el nuevo parámetro.

Las sensibilidades paramétricas describen las propiedades de curvatura de una variedad diferencial en torno a los valores dados de los parámetros, dado que estos se están adaptando esta variedad cambia de un instante a otro y hay que establecer un compromiso entre la información pasada probablemente peor pero útil y la actual.

Para determinar el factor de memoria de las sensibilidades que fuera más adecuado se simuló una situación de regulación (i.e no se iteró entre los dos puntos de operación utilizados en todas las simulaciones anteriores sino que se probó convergencia alrededor del primero) con distintos valores de este factor y errores paramétricos iniciales de  $\pm 30\%$ , los resultados se muestran en las figuras 4.11 y 4.12. La convergencia no se ve afectada mayormente por el factor de memoria, sin embargo con  $l = 0$  es más lenta y por lo tanto es errónea por más tiempo que con  $l=0.5$ , de otra forma la integral:  $\int (K - 0.05)^2 dt$  es menor con  $l=0.5$  que con  $l=0.0$ . como se ve en la figura 4.13

Para determinar el valor óptimo de "l" requiere conocer para varios factores de memoria (de preferencia para todos) el valor de la siguiente integral en todo el intervalo de integración (300 hr):

$$\int |(K_{\text{estimada}} - K_{\text{real}})| dt$$

el resultado de esta integración obligadamente numérica se muestra en la figura 4.14 y corresponde a los datos de las figuras 4.11 y 4.12. Como puede observarse el mínimo se presenta para factores de memoria entre 0.5 y 0.7, tendiendo al último. Un motivo más para elegir factores de 0.5 es que las oscilaciones son mucho menores que en el caso de valores de 0.7, como puede observarse en las figuras 4.11 y 4.12. Las oscilaciones de alta frecuencia pueden excitar dinámicas no modeladas y causar deterioro en el

desempeño del control, cf. Khalil(1992). En regulación la señal de salida suele considerarse poco rica en información y por lo tanto no puede asegurar la convergencia de los parámetros mas que cuando se adapta un solo parámetro, como ese es el caso y dada la condición (3.2.7) no tiene por que esperarse falta de riqueza en la señal, pues como se observa los parámetros convergen.

La siguiente situación de interés es observar el desempeño de la adaptación ante transición de puntos de operación, como en todas las simulaciones anteriores. En la figura 4.15 se pueden ver la trayectoria de la  $K$  de Monod a lo largo del tiempo de integración para varios errores iniciales de -15%, -5%, 5%, 15% y sin error inicial. Se puede observar que a partir de la segunda mitad de la simulación el error es mínimo. Las trayectorias son aproximadamente simétricas para errores iniciales de magnitud iguales y signos distintos.

Para observar los errores de modelado basta con ver el correspondiente a  $S$ , la variable más sensible y a la vez un promedio ponderado de los estados, ver figura 4.16. En el primer tercio de la simulación primero crece el error de modelado debido a la condición inicial sin error utilizada en la simulación (que no corresponde al parámetro supuesto por el modelo), para luego desaparecer. El crecimiento se debe al error paramétrico al inicio de la simulación, como en el caso anterior la gráfica es simétrica.

El efecto de las condiciones iniciales de los estados además del error paramétrico en este esquema (i.e. error de modelado inicial) puede observarse en el par de figuras 4.17 y 4.18 correspondientes a las anteriores 4.15 y 4.16 en que la variable  $x_{1m}$  es 10% mayor que  $x_{1p}$ . La simetría desaparece y la convergencia de los parámetros es más lenta, esto debido a las interacciones no lineales entre el error de modelado, el cálculo del control y el ajuste de parámetros.

**§4.6 SIMULACIÓN DEL ESQUEMA DE CONTROL BASADO EN LA INTERCONEXIÓN SISTEMA/OBSERVADOR/CONTROL/REGRESOR.**

El modelo de reactor biológico es multientradas/multisalidas, por ello el esquema (3.2.2) no es directamente aplicable. Las diversas funcionalidades presentes en el modelo del reactor recombinante cumplen los requisitos de tipo Lipschitz y acotamiento, por ello se ilustra su uso con un modelo de una entrada/una salida (SISO) simplificado que tiene reminiscencias de funcionalidades tipo Monod. Sea pues la interconexión completa lo siguiente:

Sistema a controlar

$$\begin{aligned} dz_1/dt &= z_2 \\ dz_2/dt &= z_2/(1+z_2) + p_0 z_1 + z_1/(1+z_1) u \\ y &= z_1, z_e = 0 \end{aligned}$$

Observador (tipo Hammouri-Busawon)

$$\begin{aligned} dz_1/dt &= z_{o2} + 2 \theta (z_{o1} - z_1) \\ dz_2/dt &= z_{o2}/(1+z_{o2}) + p_0 z_{o1} + z_{o1}/(1+z_{o1}) u + \theta^2 (z_{o1} - z_1) \end{aligned}$$

Regresor

$$d\zeta/dt = -z_{o1}(z_{o1} - z_1)/\theta^2$$

Control

$$\begin{aligned} u &= \{v - z_{o2}/(1+z_{o2}) - (p_0 + \zeta)z_{o1}\} / \{(z_{o1} + \epsilon)/(1+z_{o1})\} \\ v &= -(a+b)z_{o1} + 2 a z_{o2}, \theta = 1, \lambda_{1,2} = a \pm bi, \epsilon = 10^{-10} \end{aligned}$$

Los resultados de las simulaciones correspondientes a este esquema se muestran en las figuras 4.19, 4.20 y 4.21, con polos en  $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-1}$ . La constante  $\epsilon$  se agregó para evitar problemas computacionales por dividir entre cero durante el cálculo del control. El sistema a controlar tiene varias características dignas de ser mencionadas:

1. Tiene grado relativo = 2 = n, dimensión del espacio de estados.
2. Las funcionalidades involucradas son Lipschitz:  $\|x/(1+x) - y/(1+y)\| \leq \|x - y\|, \forall x, y$
3. Las funcionalidades involucradas están acotadas:  $\|x/(1+x)\| \leq 1, \forall x$

4. No es estable a lazo abierto, es decir con  $u = 0$  el sistema diverge.

De la simulación del sistema a controlar en la fig. 4.19 se notan oscilaciones producto de la colocación de los polos, pero la convergencia es uniforme. Las oscilaciones son menores en la figura 4.21 que corresponde al observador aunque las divergencias de las trayectorias de los estados del observador son más pronunciadas. En la figura 4.20 se muestra el error de observación, aquí se observa que las condiciones iniciales del observador y del proceso son distintas, aún así se logra convergencia considerablemente rápido al origen, más lenta a medida que se acerca al origen, como se ve en la figura 4.22. Es interesante observar en la figura 4.23 que tanto el parámetro  $p$  como el control no llegan a su valor final de cero, pues el término  $-z_{01}(z_{01}-z_1)/\theta^2$  se empequeñece muy rápidamente, por ello no alcanza a ajustar el valor de  $p$  antes de que los estados converjan al origen, el control se encuentra fuera de su valor en equilibrio 0 para compensar el efecto del error en el parámetro.



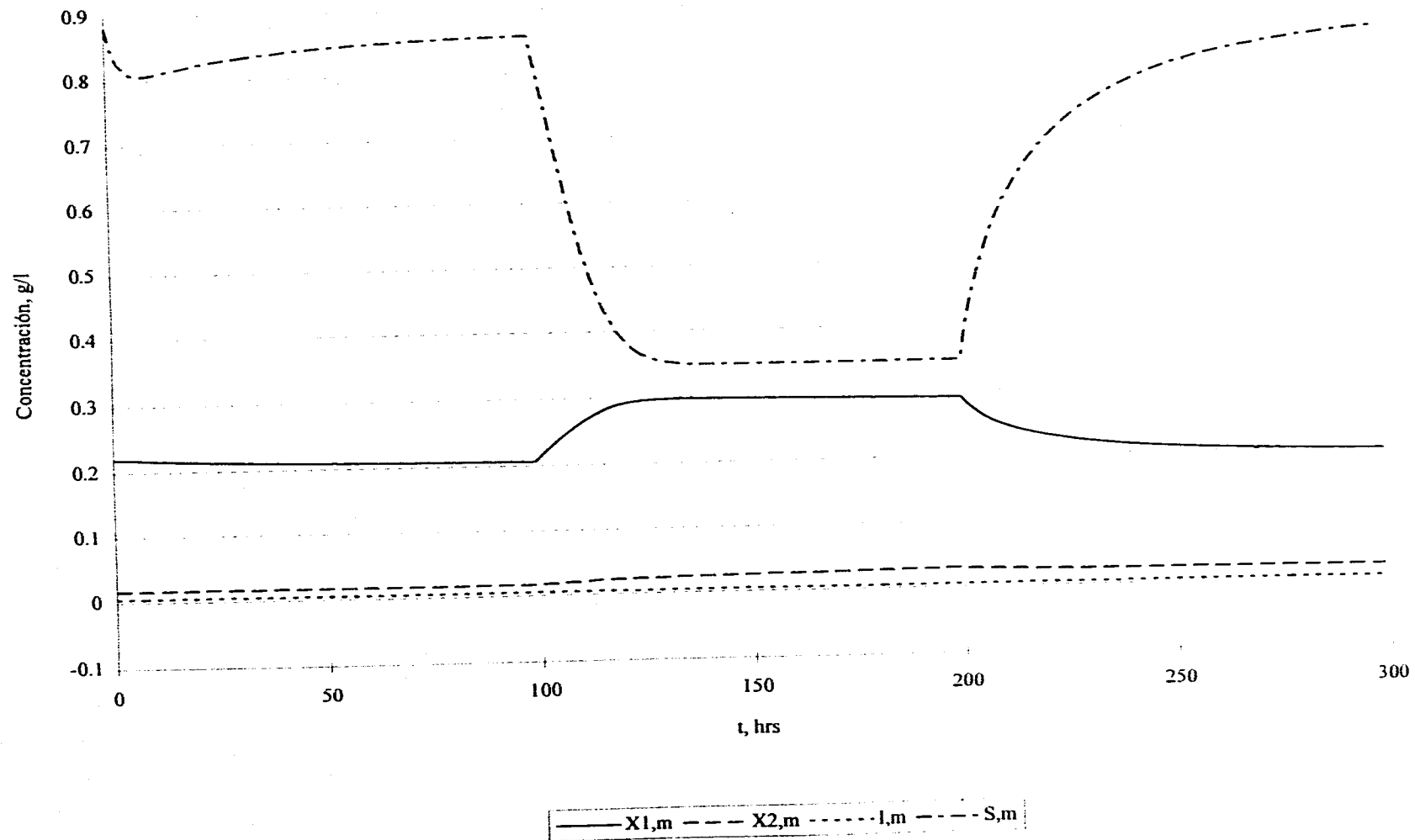


Fig. 4.1. Lazo abierto. Evolución de las variables de estado a lazo abierto. Se tienen errores en las condiciones iniciales, por lo demás el modelo es perfecto.

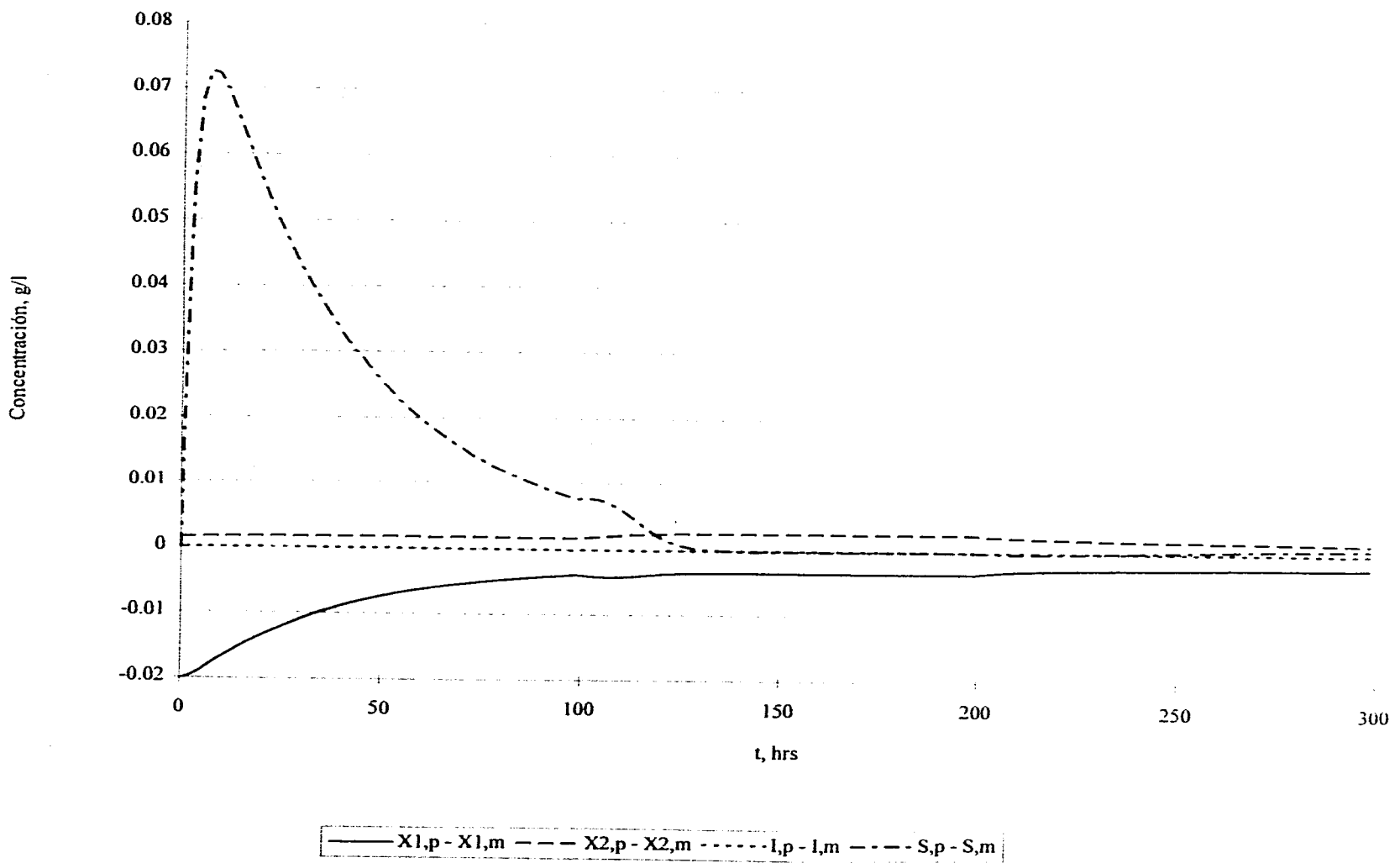


Fig. 4.2. Lazo abierto. Evolución de los errores de modelado, estos convergen exponencialmente a 0. Nótese el efecto del error de modelado inicial ( $x_{1p}-x_{1m}$ ).

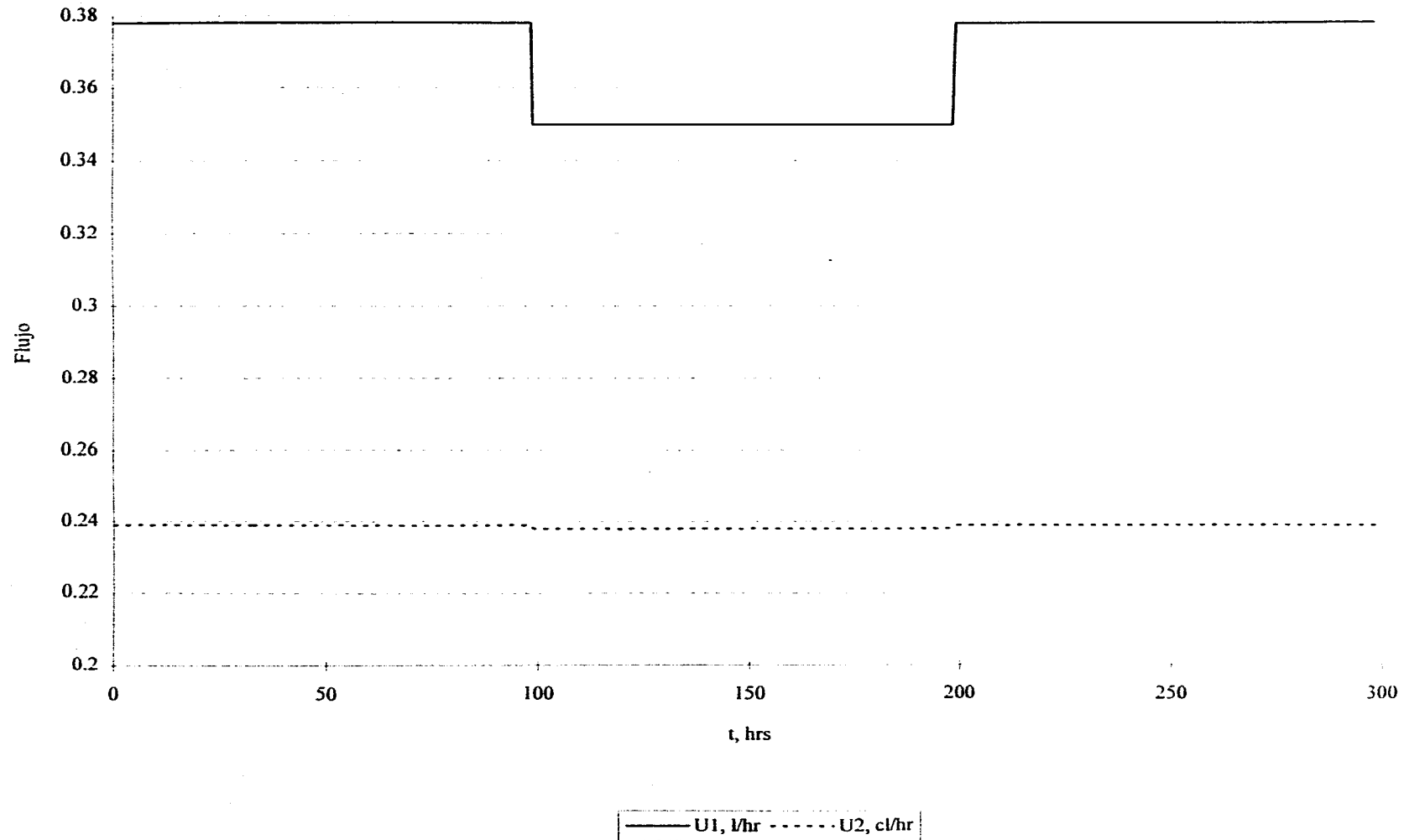


Fig. 4.3. Lazo Abierto. Variables de control para simulación a lazo abierto. La variable u2 casi no altera su valor entre los puntos de equilibrio

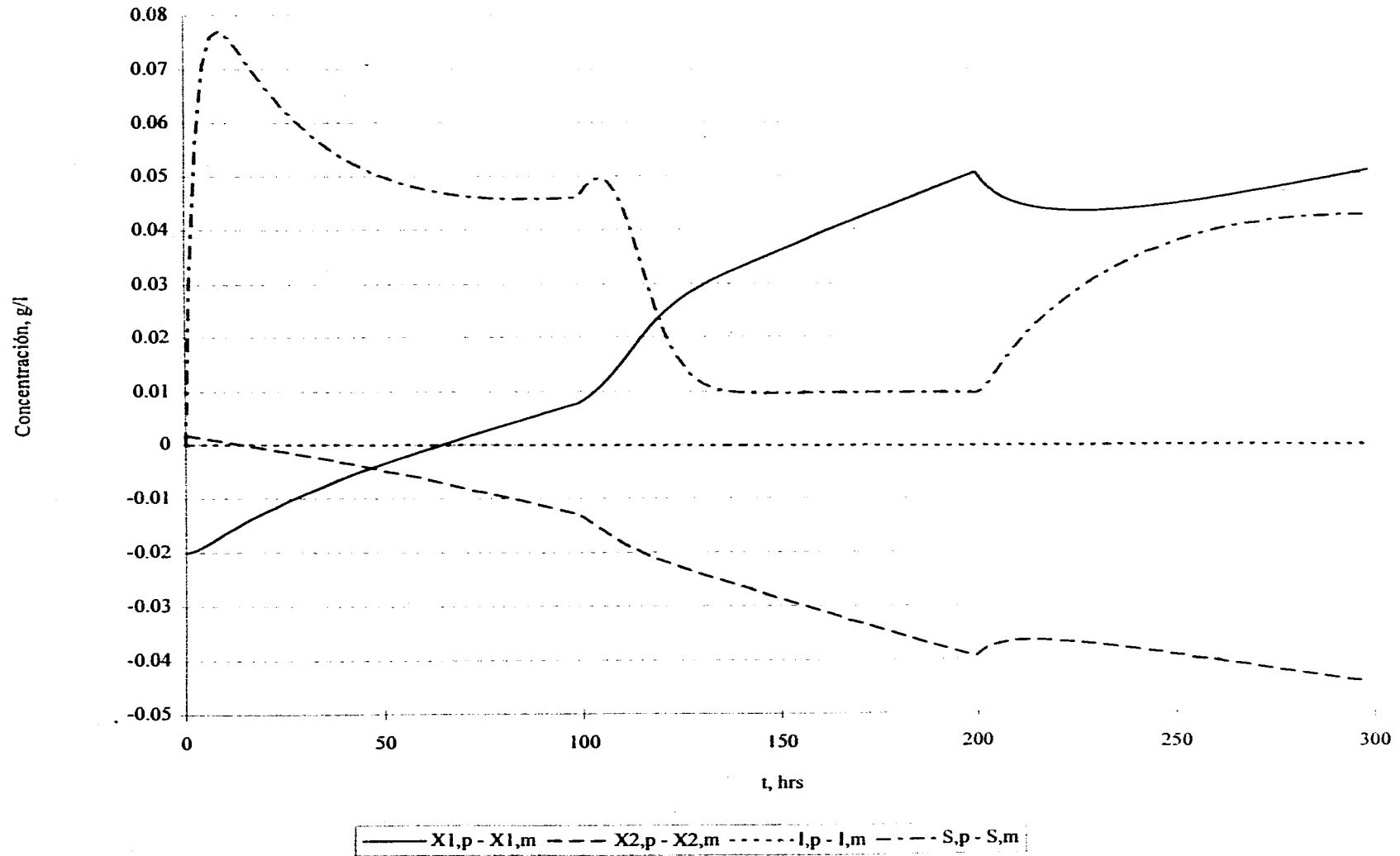
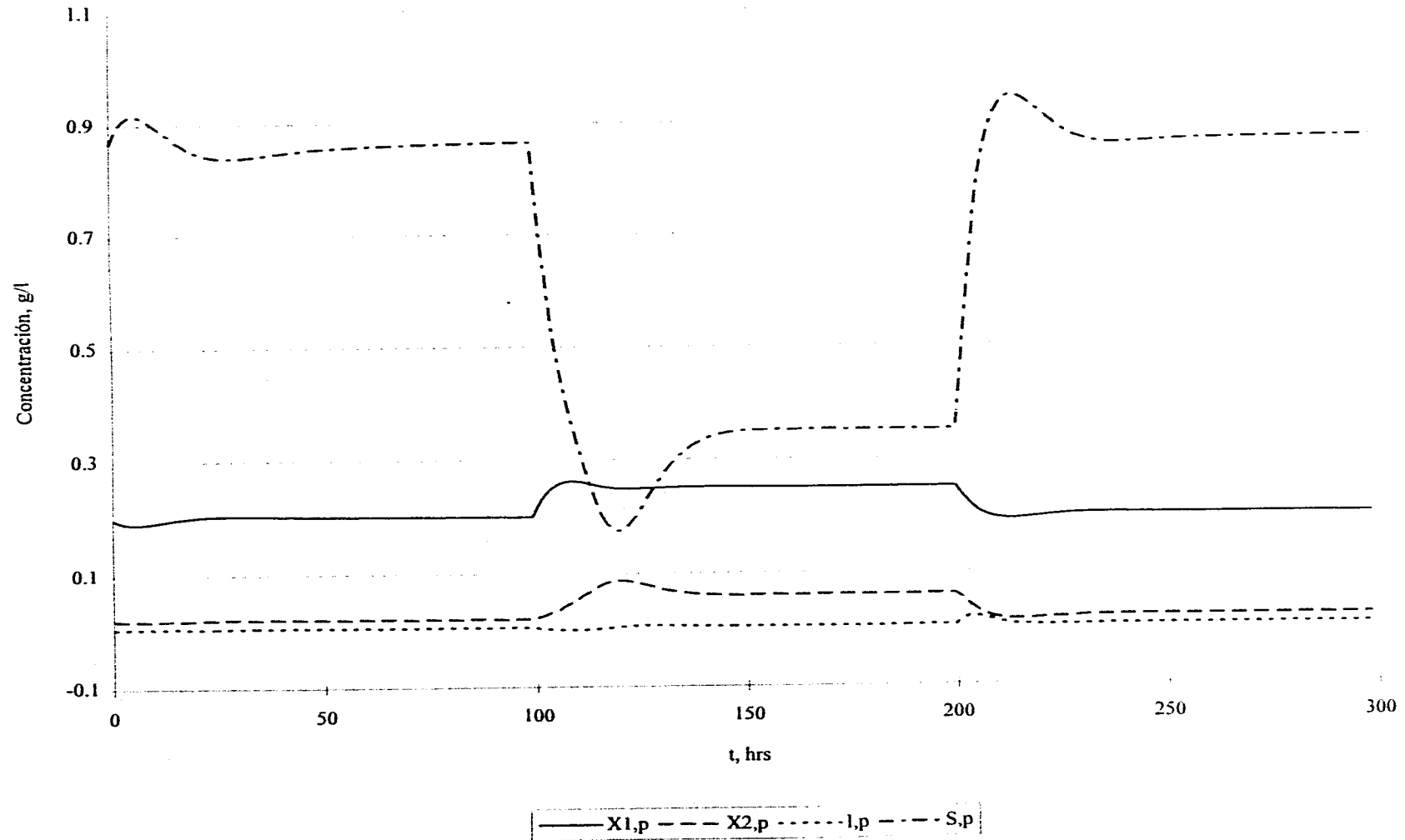
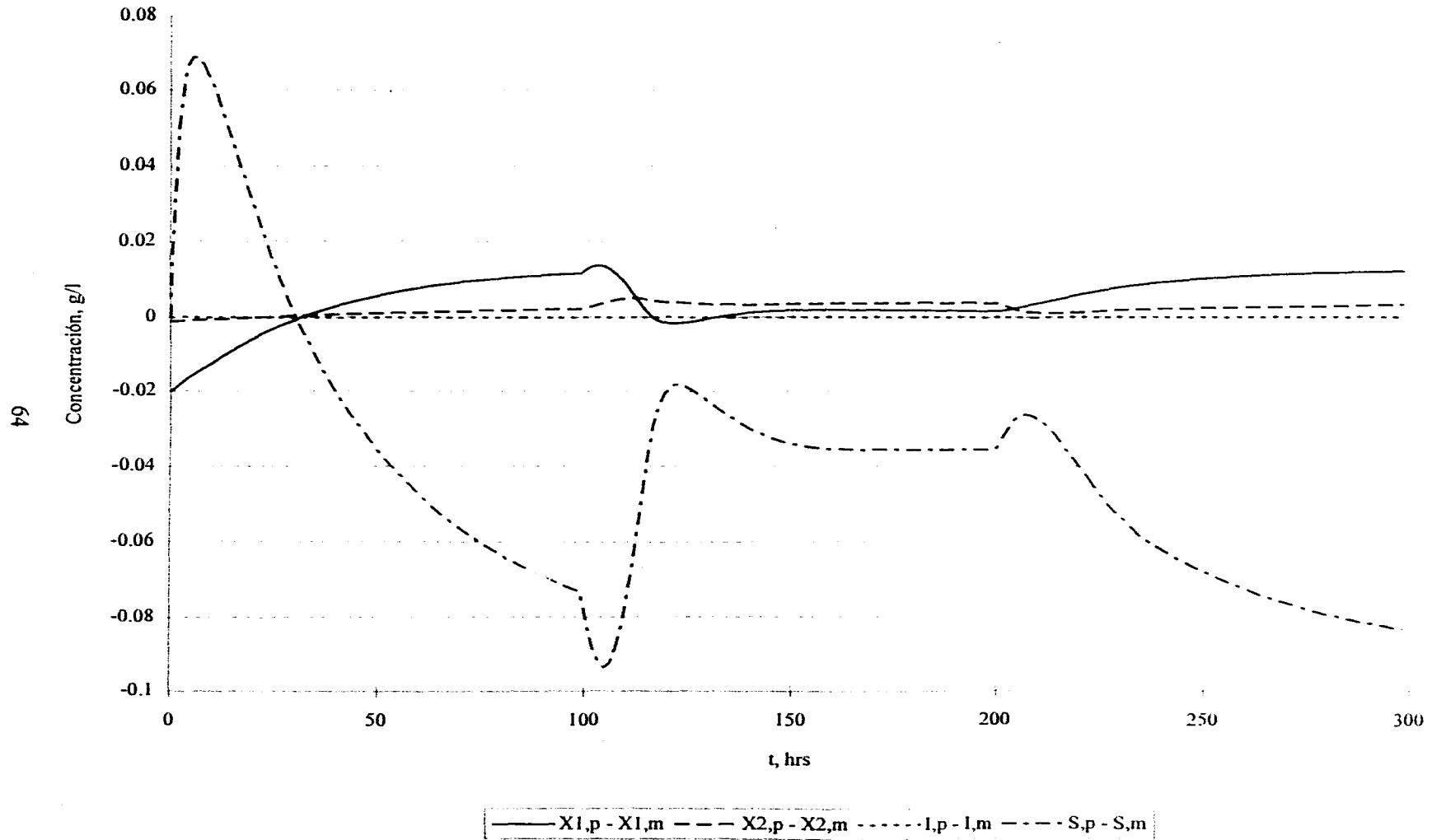


Fig. 4.4. Control con error de modelado. Control no lineal linealizante proporcional en presencia de error de modelado en K de 10% y error en condición inicial de X1.



**Fig. 4.5. Control Integral con Error de Modelado.** Evolución de las variables de proceso con retroalimentación linealizante integral en presencia de error de 10% en K y error en condición inicial de X1.



**Fig. 4.6. Control Integral con Error de Modelado.** Evolución del error de modelado. Retroalimentación no lineal linealizante integral en presencia de error de 10% en K y error en condición inicial de X1.

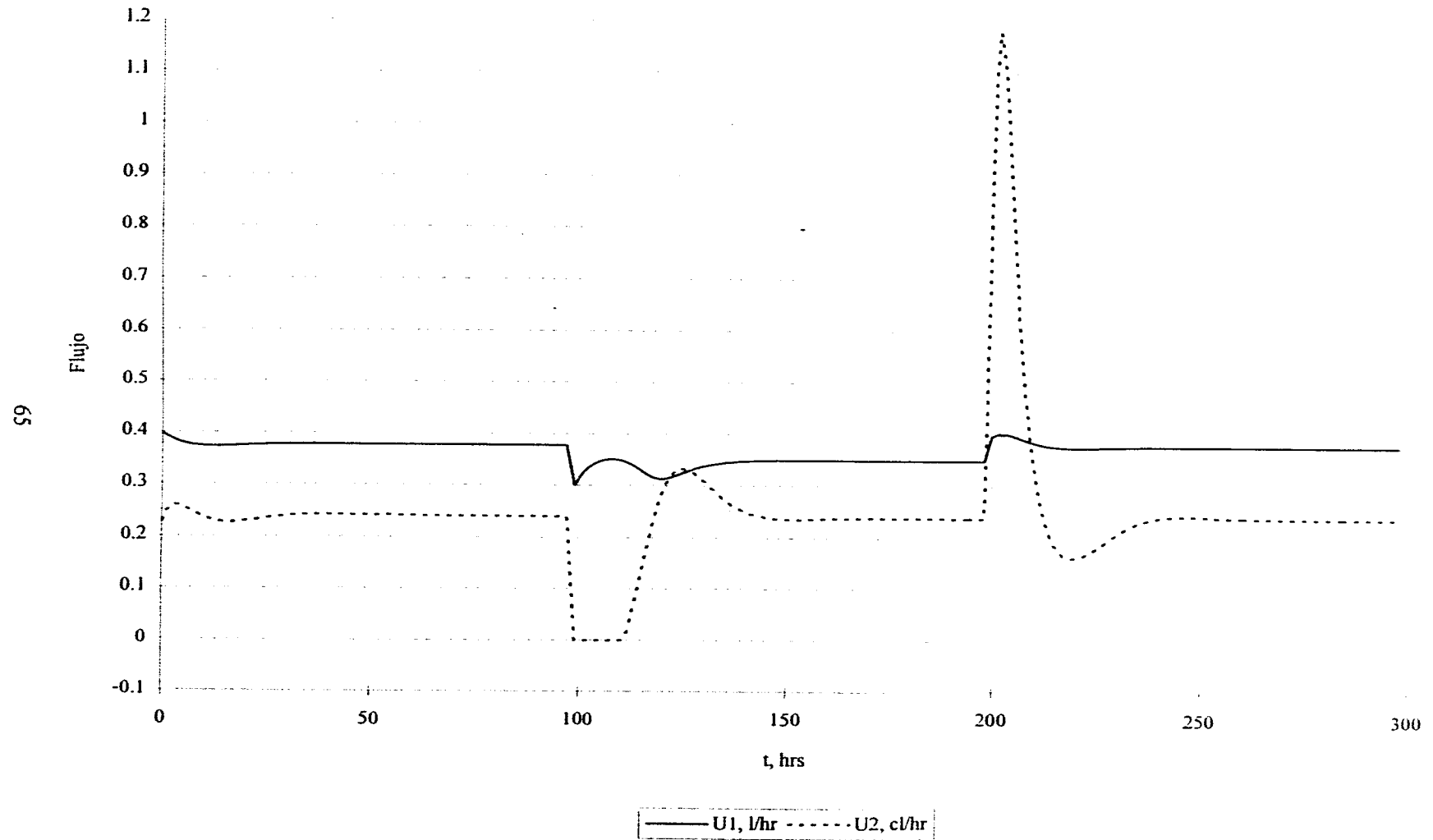
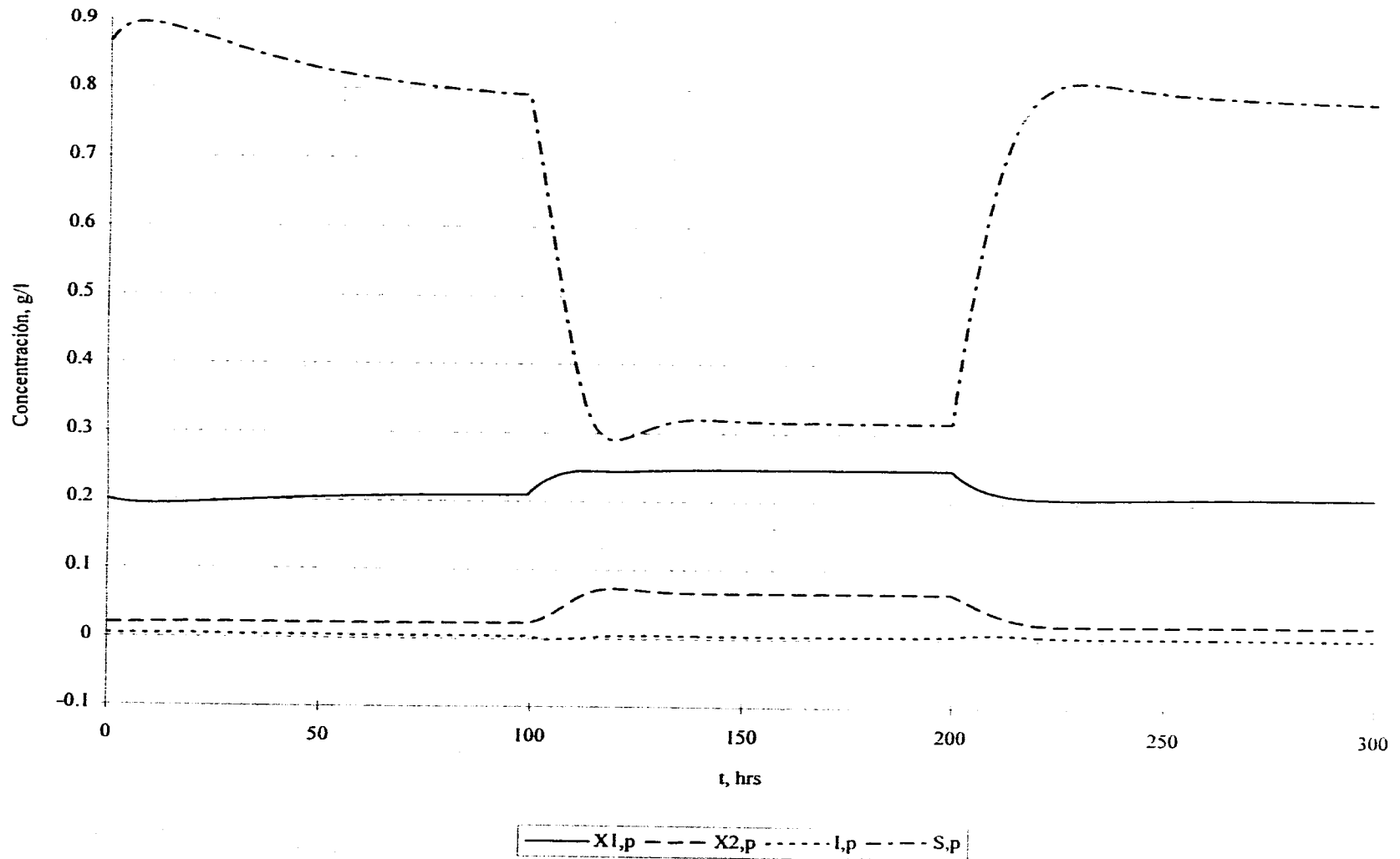
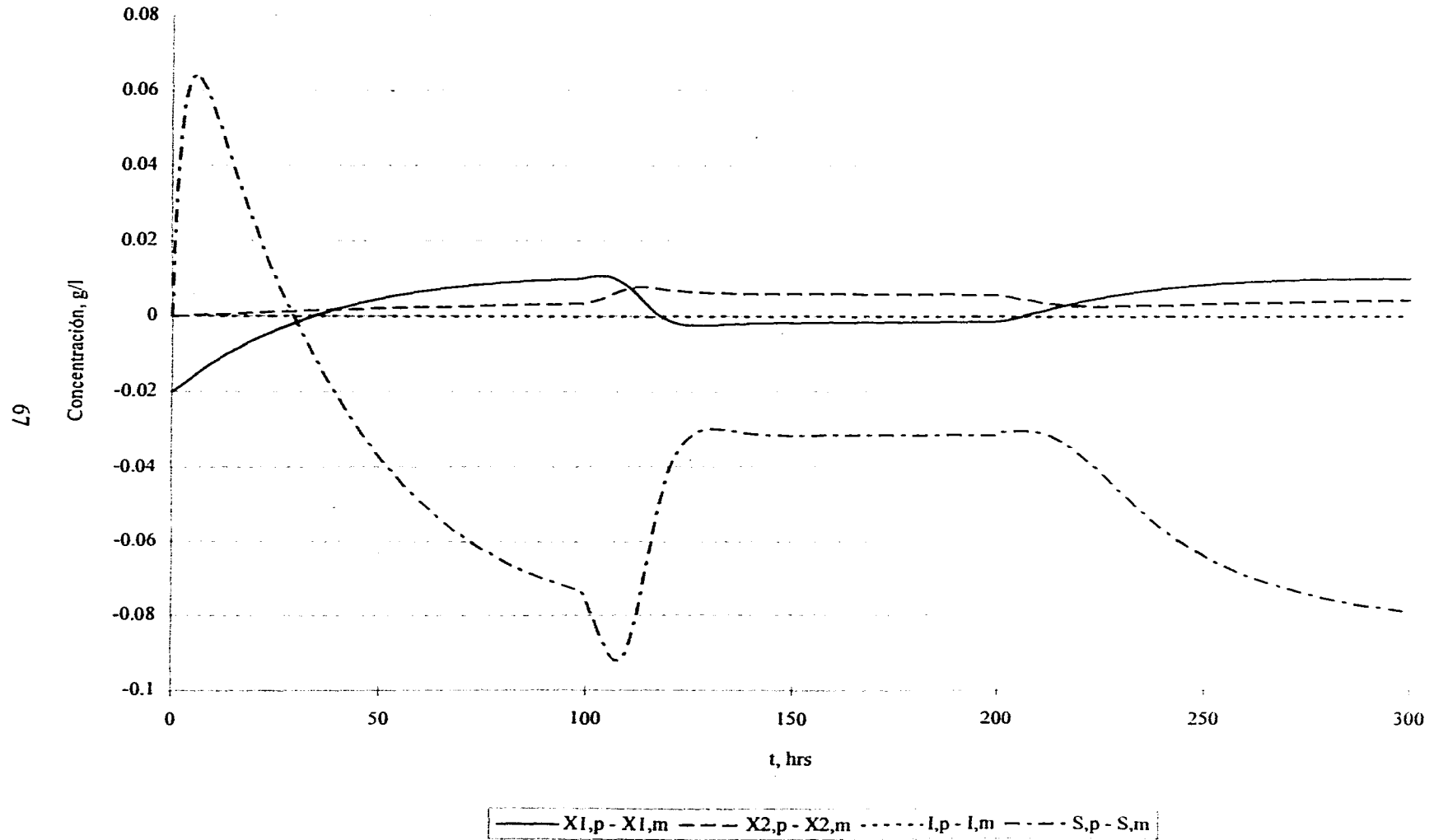


Fig. 4.7. Control Integral con Error de Modelado. Trayectorias de los controles, Saturación de U2 presente tras el primer cambio de punto de operación.

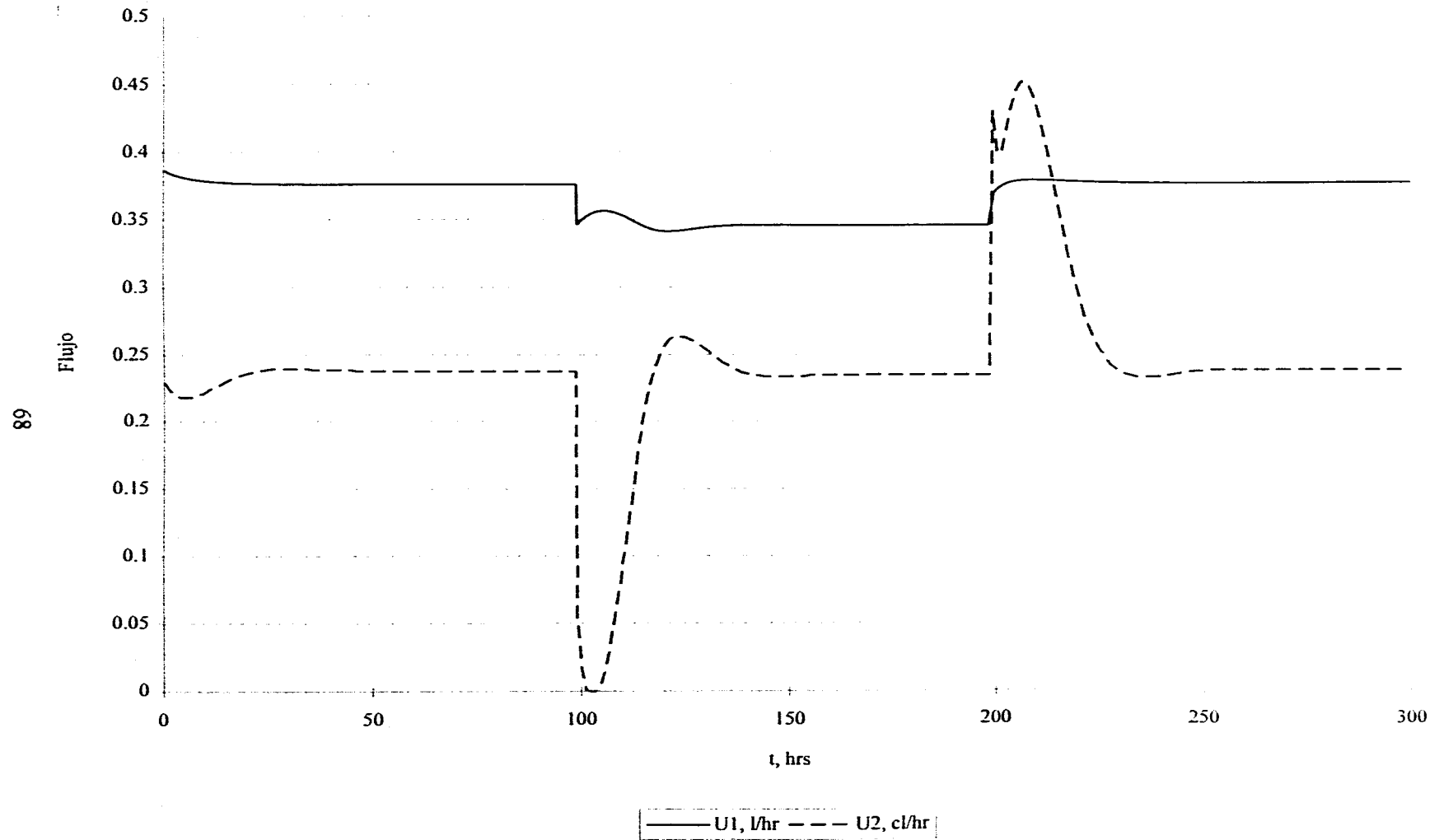


**Fig. 4.8. Control Robusto Adaptable.** Evolución de las variables del proceso bajo el esquema de control robusto adaptable ante un error de +10% en K y error en condición inicial de X1.

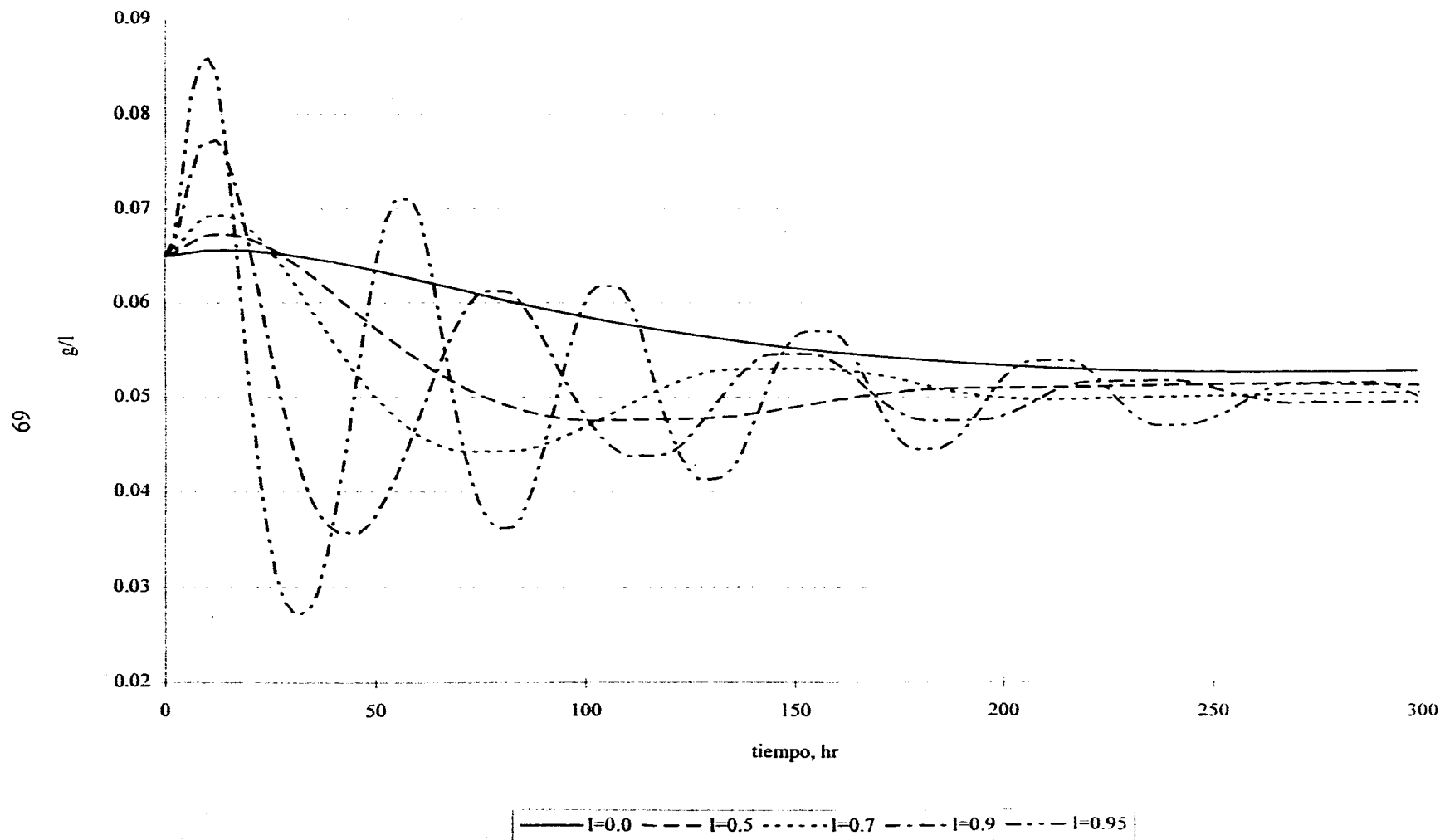




**Fig. 4.9. Control Robusto Adaptable.** Evolución de los errores de modelado bajo el esquema de control robusto adaptable ante un error de +10% en K y error en la condición inicial de X1.



**Fig. 4.10. Control Robusto Adaptable.** Evolución de las variables de control bajo el esquema de control robusto adaptable con un error de +10% en K y error en condición inicial de X1.



**Fig. 4.11. Adaptación.** Convergencia de  $K$  bajo regulación para distintos factores de memoria  $l$  con error inicial de +30% en  $K$ .

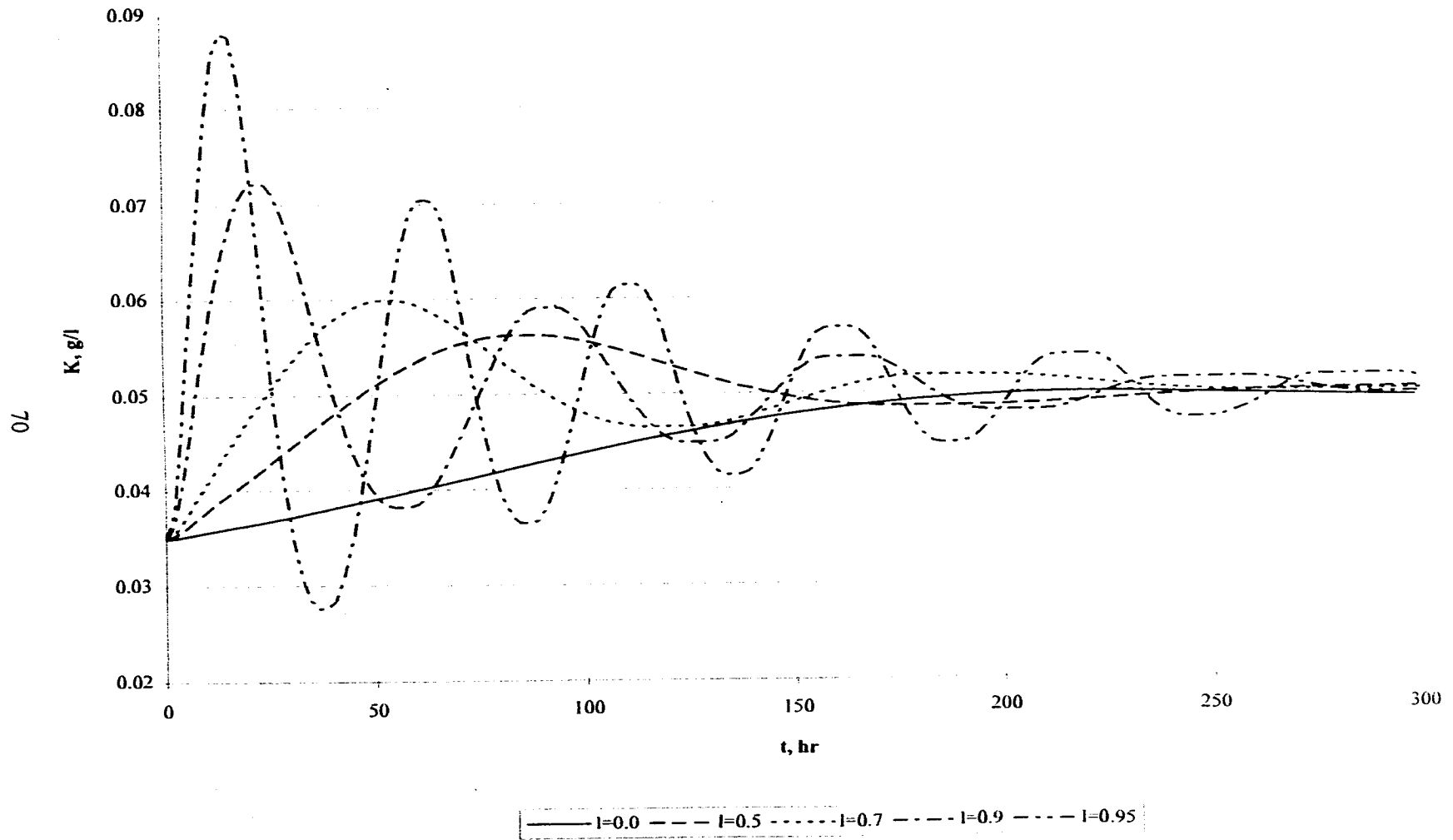
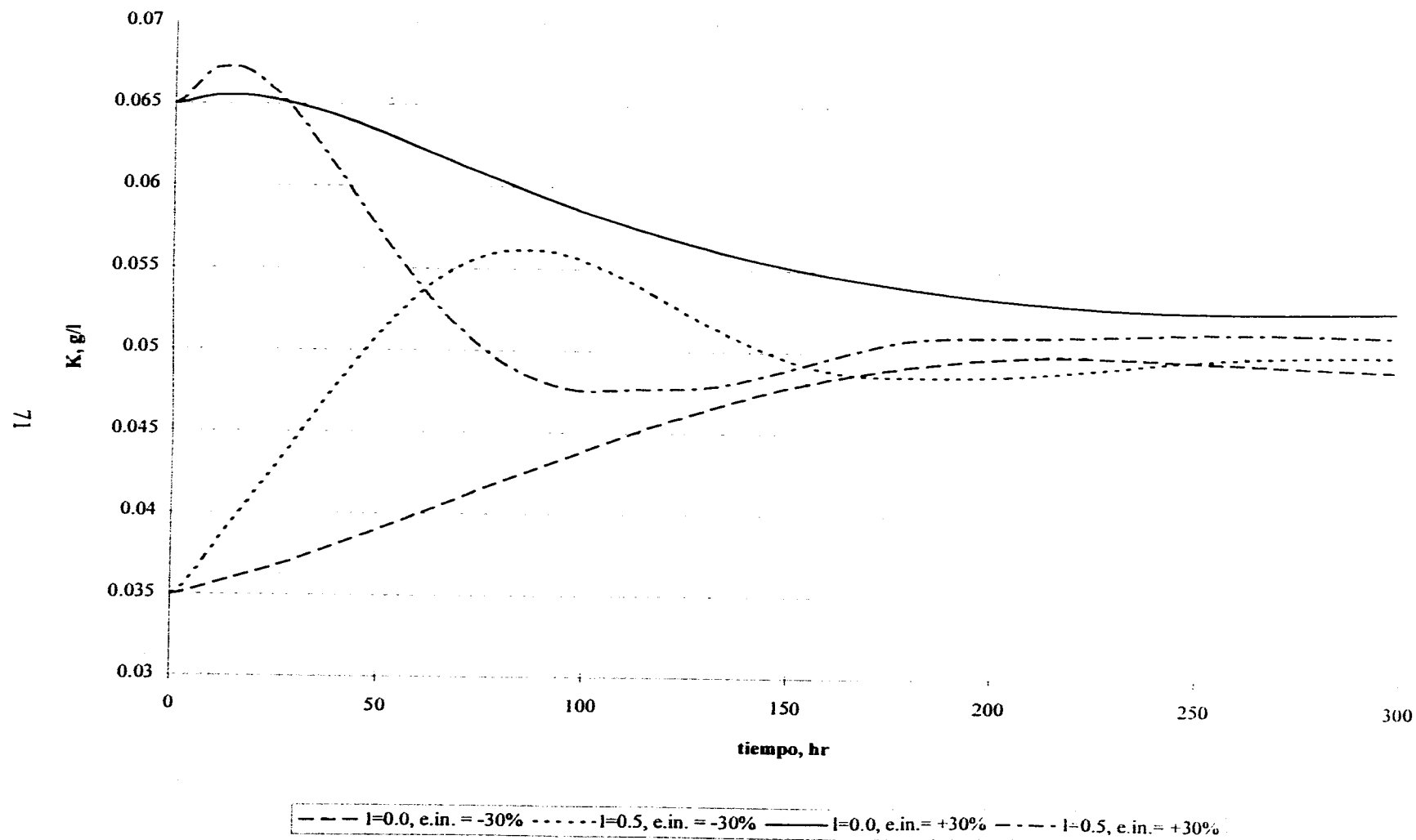


Fig. 4.12. Adaptación. Convergencia de K Monod en regulación para distintos factores de memoria l con error inicial de K de -30%



**Fig. 4.13. Adaptación.** Convergencia de  $K$  Monod en regulación para 2 distintos factores de memoria y errores iniciales de +30% y -30% en  $K$ .

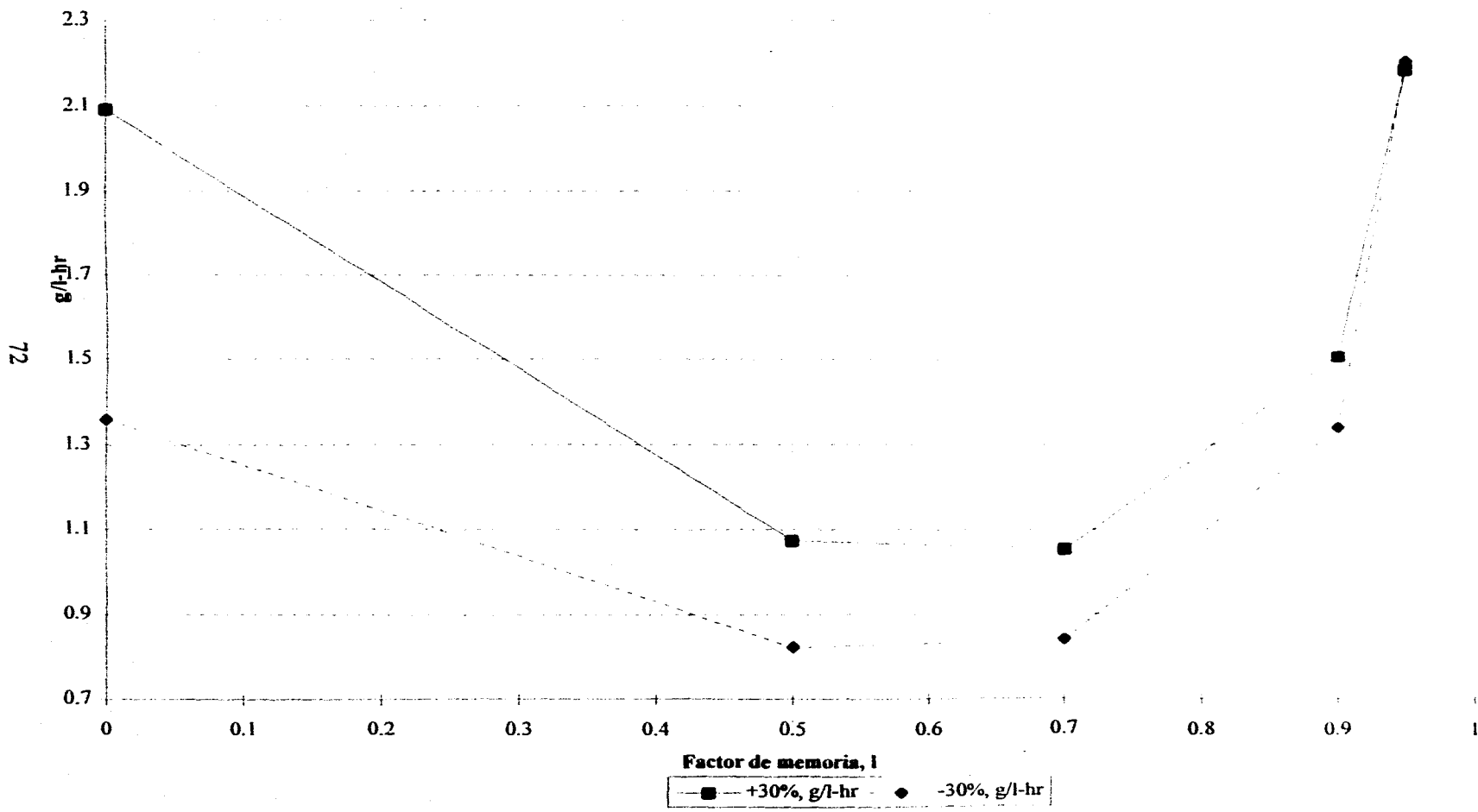


Fig. 4.14. Adaptación. Integral del error paramétrico en el tiempo en función del factor de memoria l con error inicial +/- 30% en K.

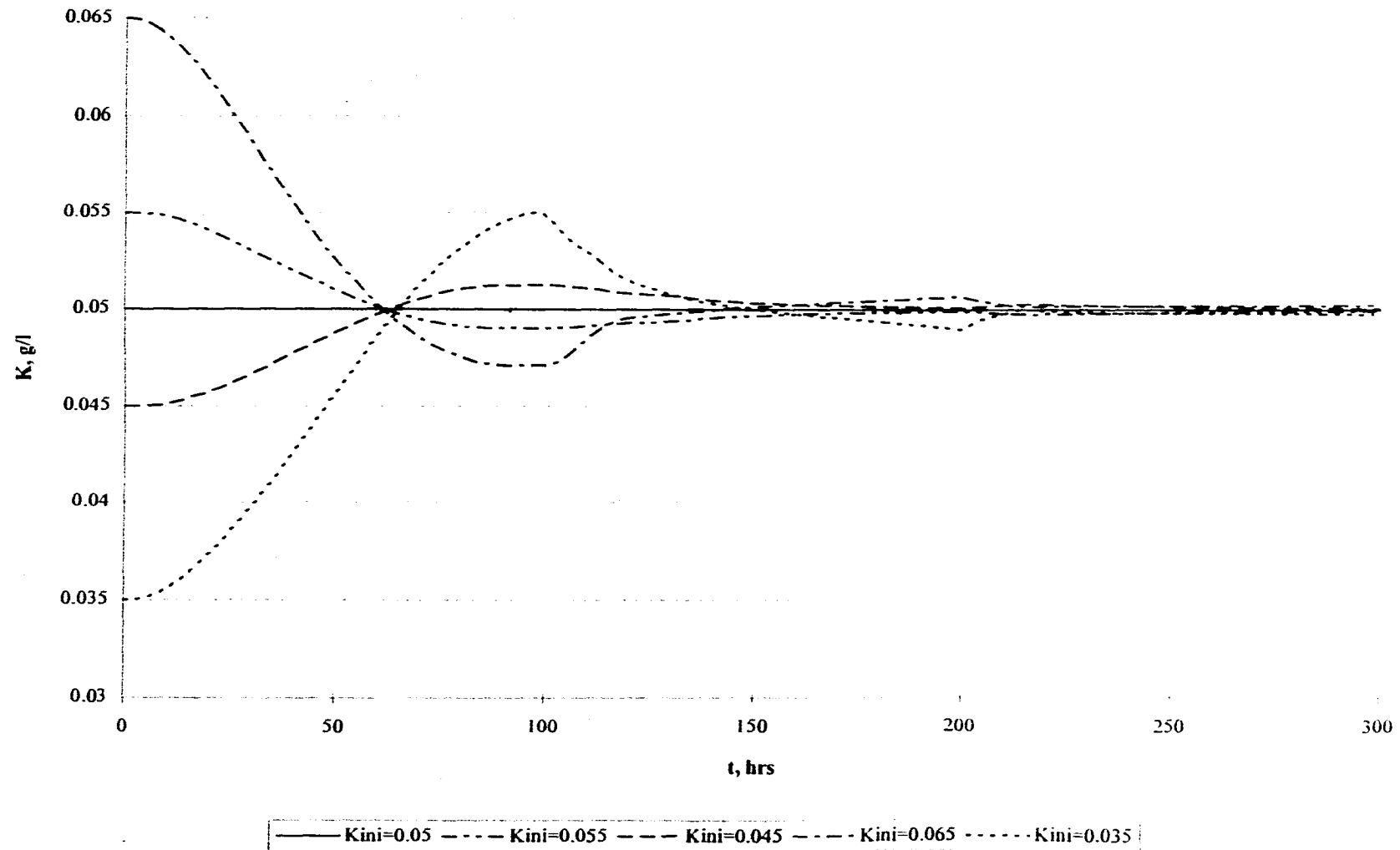


Fig. 4.15. Adaptación. Convergencia de  $K$  de Monod en seguimiento,  $K_{real}=0.05$ ,  $folv=0.5$ , sin error en las condiciones iniciales de los estados.

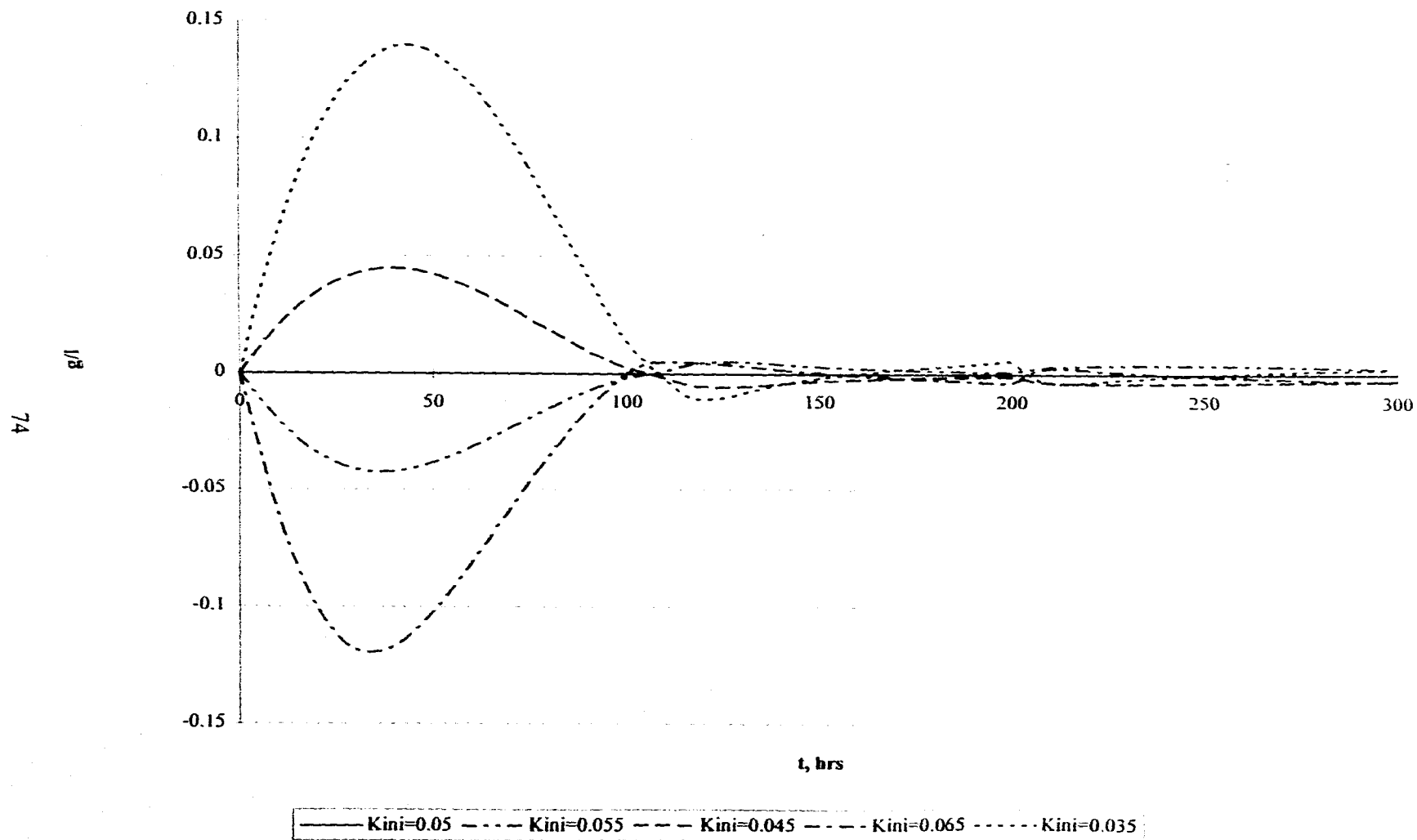


Fig. 4.16. Adaptación. Diferencia S-Sm en seguimiento para varios errores iniciales de K,  $K_{real}=0.05$ ,  $folv=0.5$ , sin error en las condiciones iniciales de los estados.



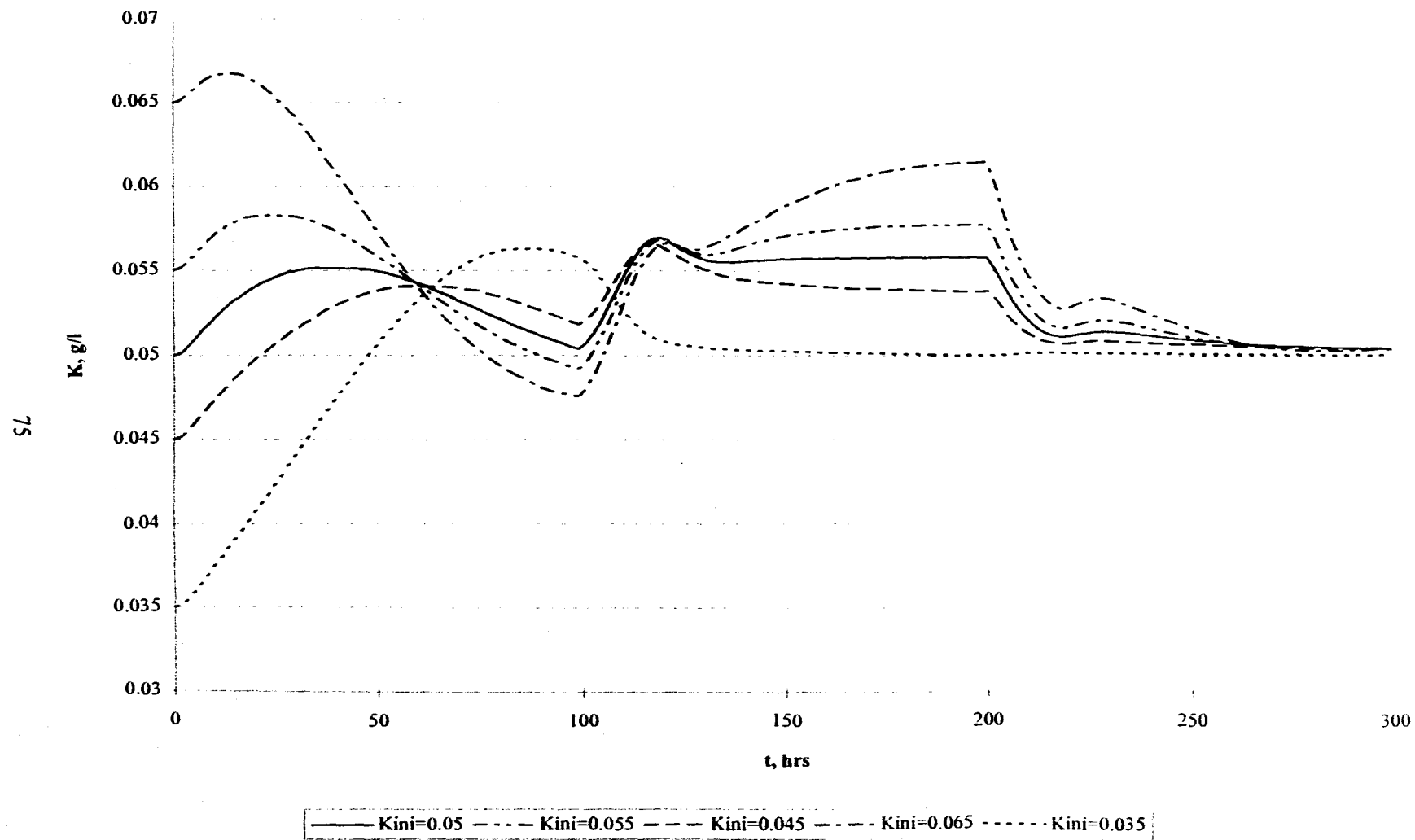
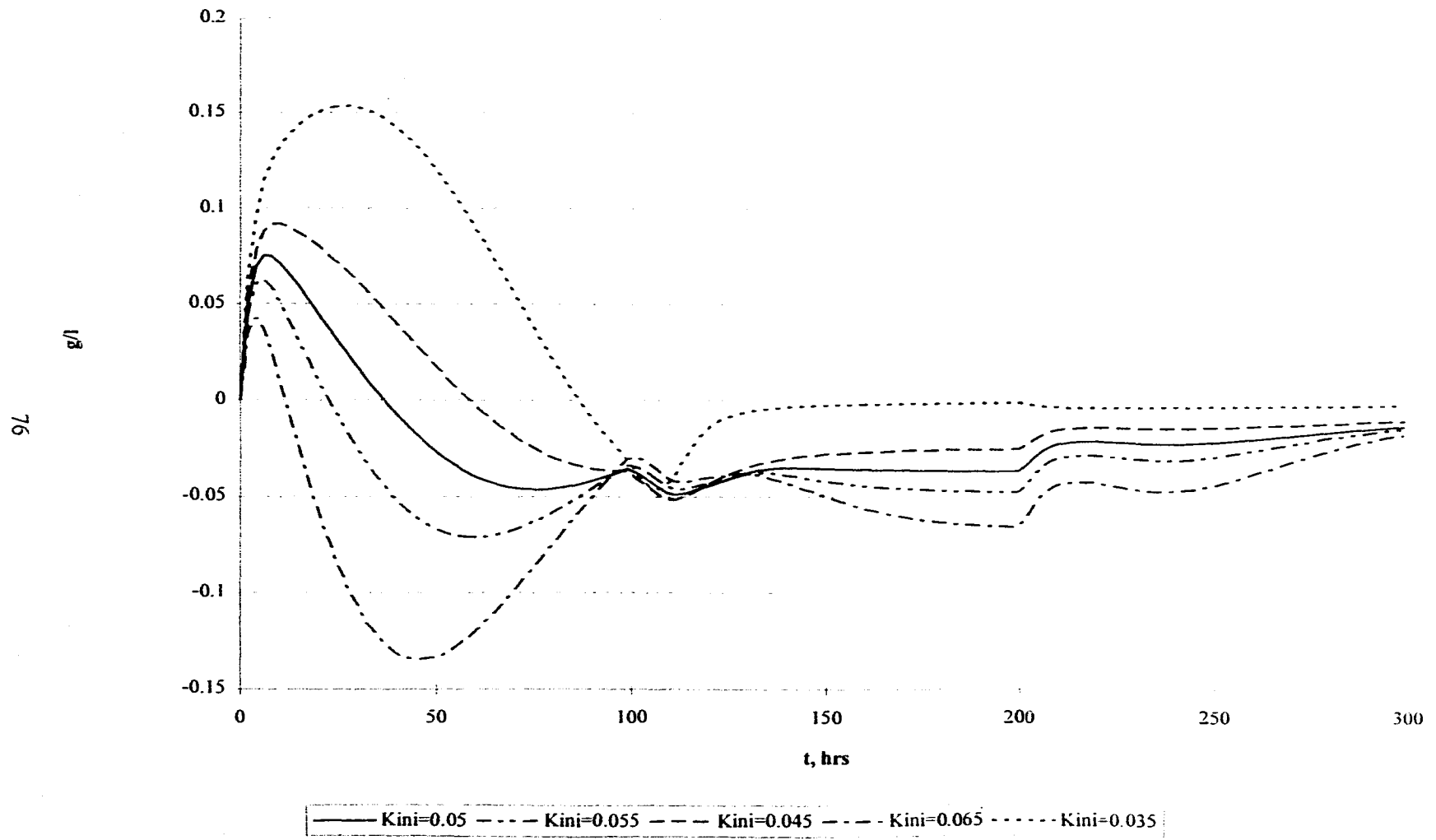
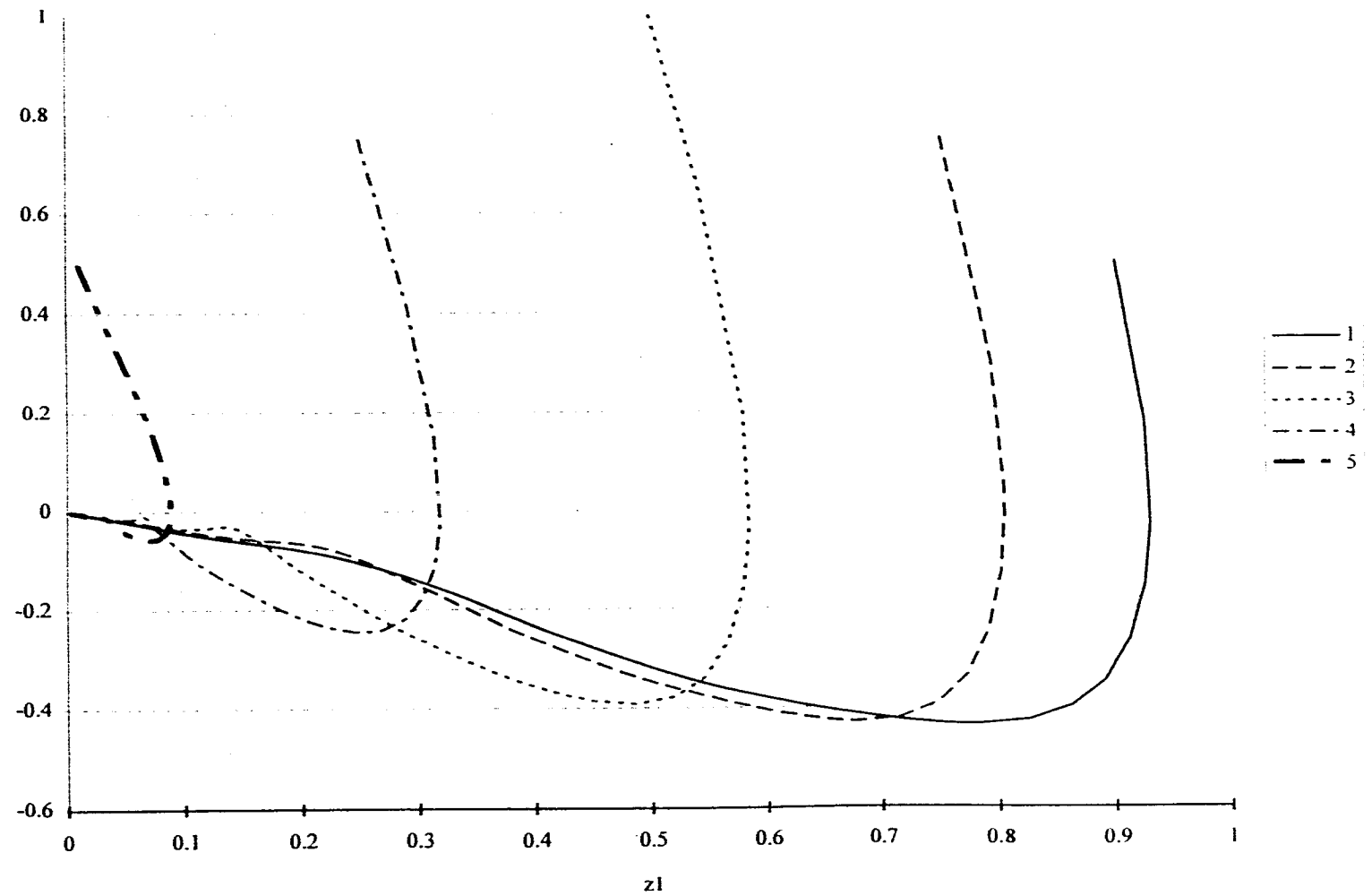


Fig. 4.17. Adaptación. Convergencia de K en seguimiento. Nótese el efecto del error en las condiciones iniciales de los estados.

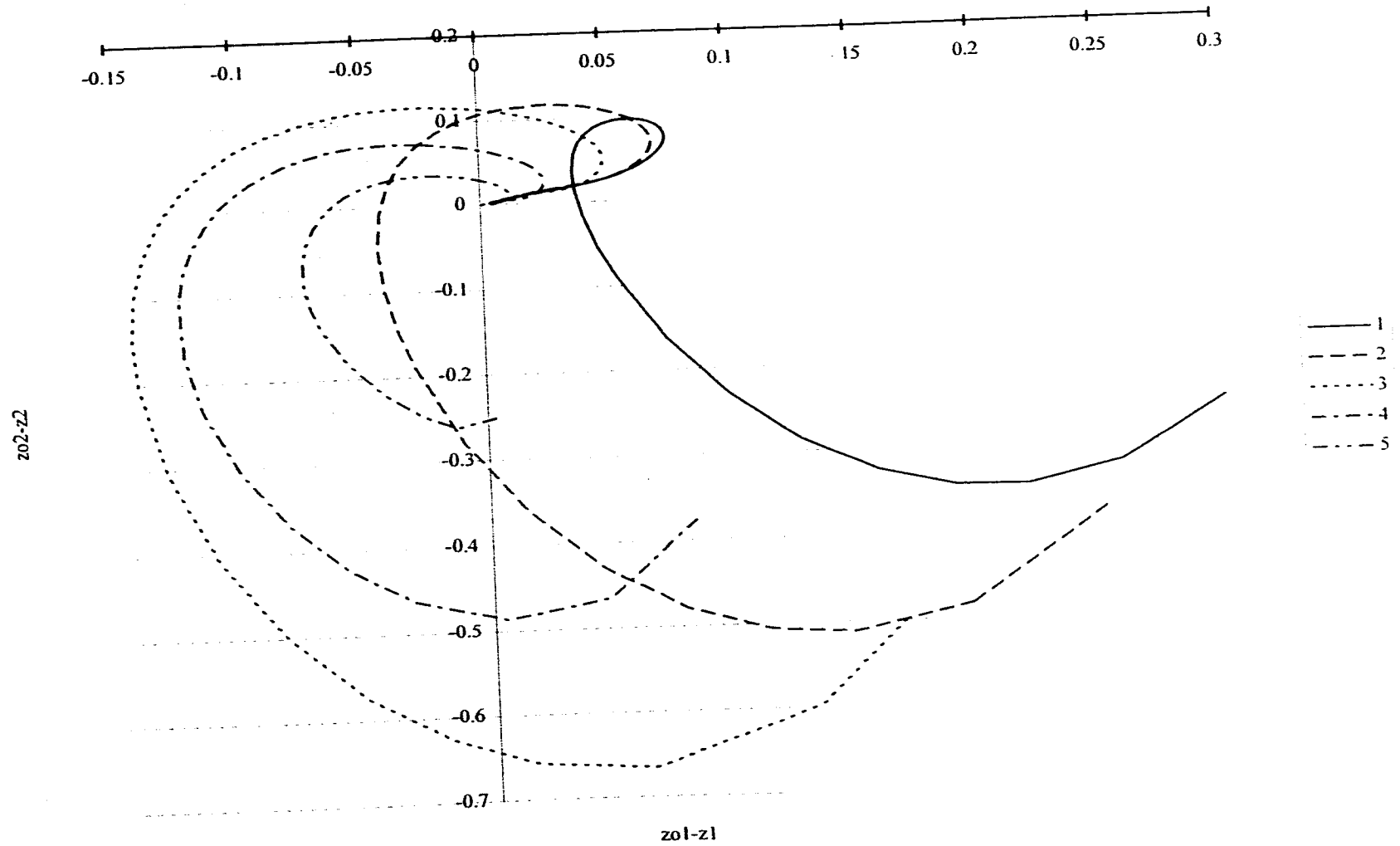


**Fig. 4.18. Adaptación.** Diferencia S-Sm en seguimiento a varios errores iniciales de K ,  $K_{real}=0.05$ ,  $folv=0.5$ . Nótese el efecto de los errores iniciales de de los estados.

77  
z2



**Fig. 4.19. Adaptación mediante Observación.** Este gráfica tipo "espacio de fase" muestra como las trayectorias del sistema tienden hacia el punto de equilibrio (0,0) desde varias condiciones iniciales.



**Fig. 4.20. Adaptación mediante Observación.** Trayectorias del error de observación para las mismas condiciones iniciales que en la fig. 19. Varias trayectorias se cortan entre si dado que no se muestra el espacio de fase completo.

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

z02

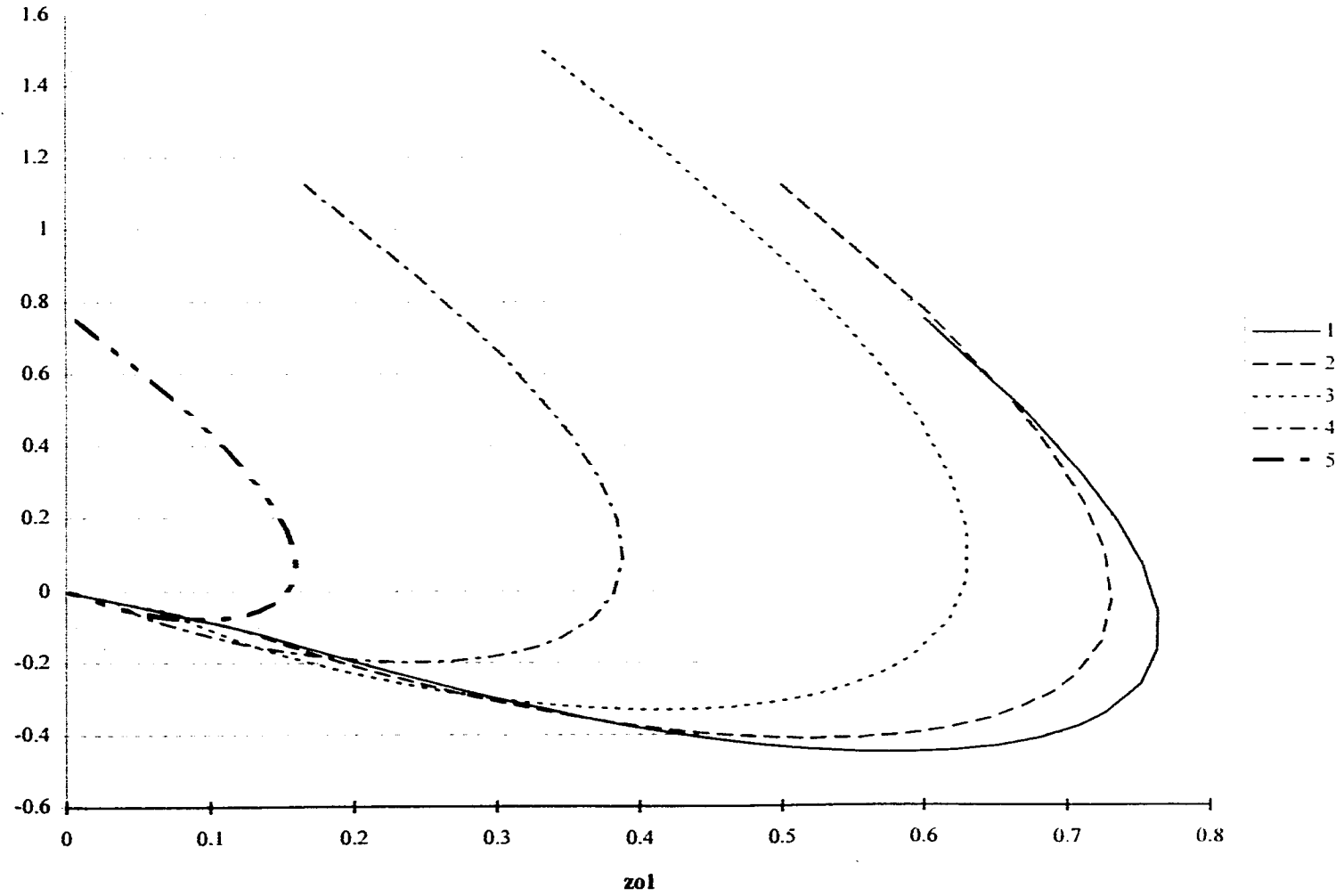
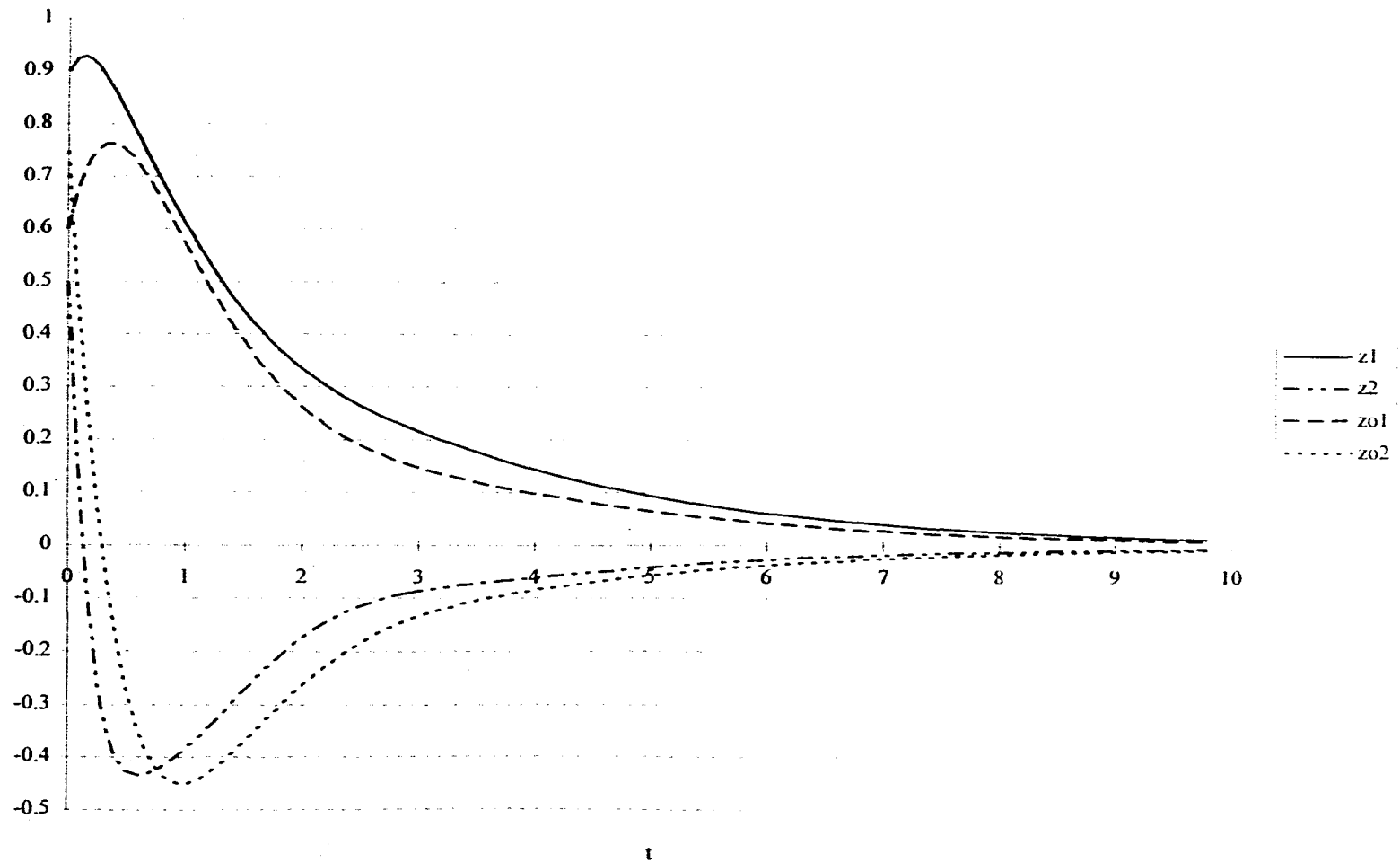


Fig. 4.21. Adaptación mediante Observación. Las trayectorias de los estados del observador tienden hacia el punto de equilibrio (0,0) así como a los estados.



**Fig. 4.22. Adaptación mediante Observación.** Trayectorias de los estados del sistema y del observador para el vector de condiciones iniciales  $(z_1, z_2, z_{o1}, z_{o2}) = (0.9, 0.5, 0.6, 0.75)$ .

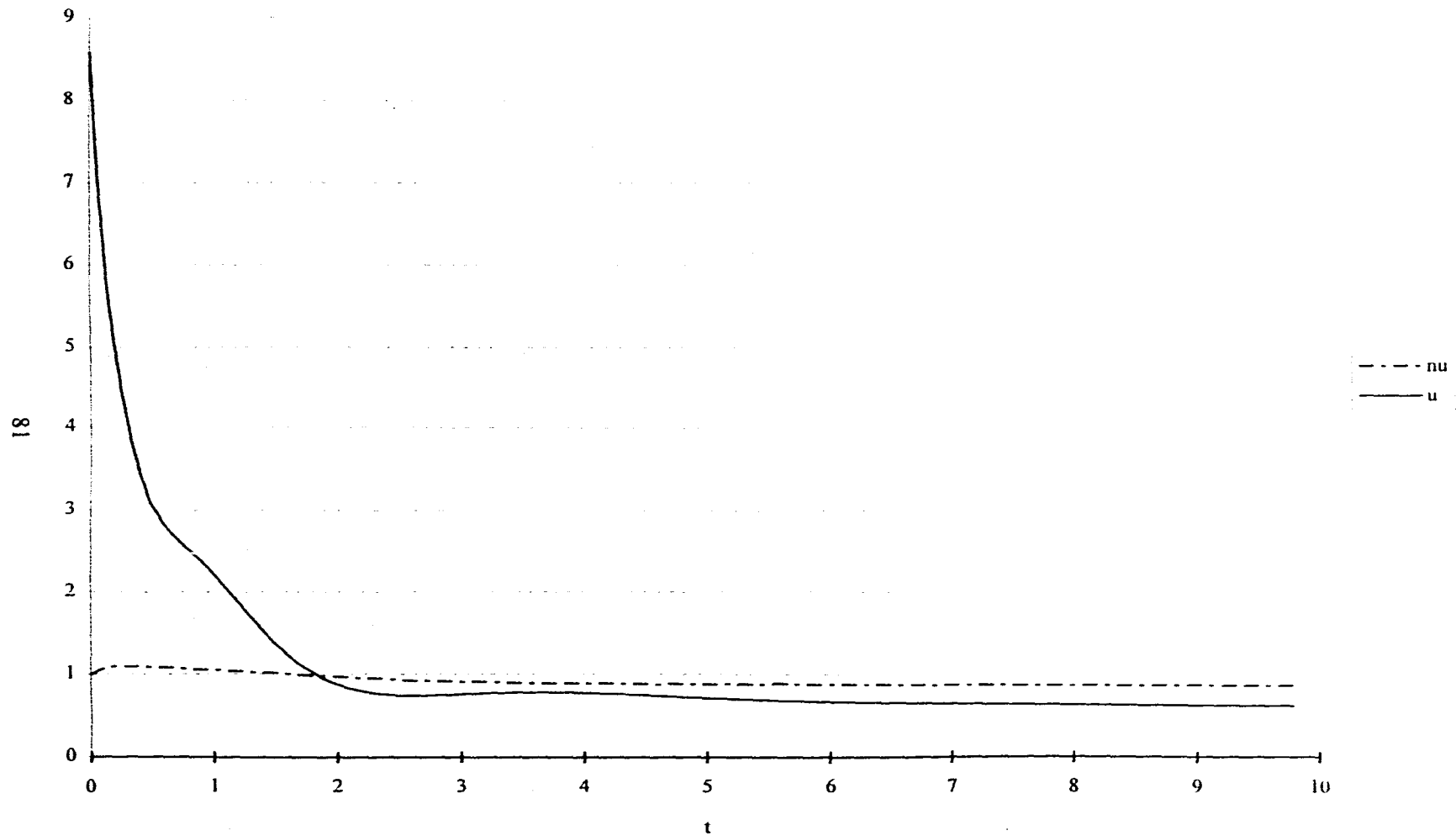


Fig. 4.23. Adaptación mediante Observación. Evolución en el tiempo del control y el parámetro  $\nu$ . Tanto el parámetro  $\nu$  como el control no convergen a su valor en equilibrio de 0.

#### §4.8. RECAPITULACIÓN DE LAS SIMULACIONES

Las simulaciones fueron mostrando paso a paso las motivaciones que llevaron a buscar un control no lineal, robusto y adaptable. Los hallazgos de las simulaciones podrían resumirse así:

1. Lentitud de convergencia al punto de operación del control a lazo abierto.
2. Poca tolerancia a errores paramétricos del control linealizante.
3. Estabilidad y desempeño aceptable del esquema de control robusto adaptable. Se presenta semejanza entre los esquemas de integrador y control robusto no apareado, para este último es posible presentar pruebas de estabilidad que fundamentan el funcionamiento del esquema, situación que no se da en el caso del esquema con integrador. La regulación es adecuada, es la dinámica interna la que recibe todos los efectos del error paramétrico.
4. Estabilidad y convergencia del esquema de adaptación en regulación con diseño lineal proporcional y conocimiento perfecto de estados y parametrización no lineal. Este esquema en seguimiento presenta estabilidad y convergencia paramétrica, los errores en las condiciones iniciales tienen un efecto importante.
5. Estabilidad y convergencia satisfactorios en el último esquema para los estados del sistema y observador para diversas condiciones iniciales, esto aún a pesar de que no hubo convergencia paramétrica.



*Soy el que soy.*  
Éxodo, 20, 1

*El hombre es lo que no es y no es lo que es.*  
G.W.F. Hegel

*El Ser es y el No-Ser no es.*  
Parménides, Poema del Ser, I.2

## §5. CONCLUSIONES Y COMIENZOS.

Las contribuciones del presente trabajo son la aplicación a un reactor biológico de:

1. Una versión adaptable de una ley de control robusta.
2. Un esquema sencillo de adaptación aplicable a sistemas con parametrizaciones no lineales.

Para una clase de sistemas no lineales mostrar una prueba de estabilidad de interconexión de: un sistema parametrizado linealmente, observador, control basado en observador y regresor de parámetros basado en salidas.

Los posibles desarrollos a futuro podrían ser:

1. Aproximar sistemas no lineales generales mediante otros sistemas no lineales más fáciles de analizar.
2. Aplicar la teoría  $H_{\infty}$  no lineal a sistemas de ingeniería de procesos.
3. Aplicar la teoría no lineal a procesos modelados por ecuaciones diferenciales parciales.

### §5.1 CONCLUSIONES.

La presente tesis puede verse como un proceso de adaptación (o digestión) a la ingeniería de procesos de una parte de la inmensa y variada teoría del control, tomando

en lo posible las características típicas de los sistemas de ingeniería química y bioquímica como punto de partida.

Es difícil que algo que no funciona en teoría funcione en la práctica, por ello siguiendo el *motto* de que la buena teoría es buena práctica se trató siempre de fundamentar primero y probar mediante simulación después, teniendo la teoría capacidad de veto y las simulaciones de veto. No todo lo probado funcionó, pero exponer los errores e intentar explicarlos puede ser más útil para alguien en el futuro que simplemente desecharlos.

De todas las pruebas de esquemas desarrolladas las siguientes resultaron en esquemas satisfactorios, por ello son la contribución principal de la presente tesis:

- I. La primera contribución consiste en demostrar la estabilidad de un esquema de control robusto adicionado de un "adaptador" de las ganancias. En varios sitios se han presentado este tipo de esquemas adaptables, cf. Chen(1992) y Corless-Leitman(1983) para controles robustos, pero no para este esquema (i.e. Qu(1992)) en particular. El *motto* de que todo control robusto tiene su versión adaptable parece ser cierto y habla de su posible exportación a observadores robustos y controles basados en salidas, sin embargo términos del tipo  $\partial V/\partial x$  típicos en este clase de controles pueden causar problemas al intentar basar el control en un vector de salidas de dimensión estrictamente menor que el vector de estados. Mediante simulación fue posible mostrar su conveniencia para controlar a un reactor biológico.
- II. La segunda contribución sería el mostrar la utilidad de un sistema sencillo de control adaptable desarrollado en Teel et al.(1991) extendiendo su aplicación a sistemas no lineales con parametrizaciones no lineales. Una de sus particularidades consistió en probar la estabilidad de manera aproximada, la certeza de la prueba se vio confirmada por las simulaciones; otra de sus particularidades fue la obtención de las sensibilidades a los parámetros mediante ecuaciones diferenciales auxiliares,

procedimiento superfluo para parametrizaciones lineales. Este esquema fue el que mejor soportó los errores de modelado, es probable que este esquema sea susceptible de afinarse, por ejemplo, relajando la condición de "excitación persistente" (3.2.7) o estableciendo las condiciones necesarias para que sea posible utilizar solo salidas y sensibilidades del modelo.

III. Por último, a la fecha y hasta donde es del conocimiento del que esto escribe, no son muy abundantes los pruebas de estabilidad de interconexiones sistema/control/observador/regresor en que tanto el control como el regresor requieran solo los estados (siempre disponibles) de un observador que a su vez solo dispone de un vector de salidas del sistema a controlar de dimensión estrictamente menor al de estados, i.e. un control adaptable basado en salidas. En el presente esquema la relación con los sistemas linealizables bajo retroalimentación es clara sin requerir complicadas transformaciones a clases de sistemas no lineales difíciles de relacionar con los modelos físicos de procesos, cf. Marino-Tomei(1993a) y Kanellakopoulos et al.(1992).

## §5.2 COMIENZOS.

El control no lineal en sus diversas vertientes tiene un futuro promisorio dentro del control de procesos, y merece mayor atención de la que actualmente se le dedica. La proliferación de todo tipo de soporte físico digital como las computadoras favorece el uso de esquemas de control basado en modelos y facilita, por su generalidad, la exportación de esquemas de control entre aplicaciones. Desde el punto de vista de la teoría una característica importante en futuros desarrollos tal vez sea que si bien los sistemas son casi invariablemente no lineales las partes no controlables de un proceso sean exponencialmente estables en muchas ocasiones. Desde nuestro particular punto de vista algunos de problemas de interés a futuro podrían ser:

- I. Aproximación: Si para sistemas no lineales generales no se dispone de herramientas teóricas de análisis y diseño sólidamente fundamentados, es natural pensar en aproximar el sistema original mediante otro para el si se dispongan de pruebas de estabilidad o herramientas más satisfactorias. Un ejemplo puede ser el tercer esquema propuesto, que puede ser un punto de partida para desarrollos a futuro en que sistemas generales se aproximen por sistemas como el presentado aquí basados, con la ventaja de que el sistema aproximado es más fácil de analizar y se dispone de una prueba de estabilidad. En esta línea el análisis de sistemas en que la transformación no lineal correspondiente no presenta incertidumbres es mucho más sencillo que en el caso contrario, aproximar la transformación en línea o desde el desarrollo del modelo es por ello atractivo. Otra posible línea de desarrollo futuro sería como aproximar un modelo matemático de un proceso mediante sistemas fácil o ventajosamente implantables como las redes neuronales o las onduletas (*wavelets*).
- II. Teoría  $H_\infty - L_2$  no lineal. Cuando se publicaron los libros de Isidori(1989) y Nijmeijer-van der Schaft(1990) podría considerarse concluida la traducción de la teoría del control geométrico lineal a un entorno no lineal, abriendo el paso para las aplicaciones a sistemas reales, en lo que aún hay un largo camino que recorrer. Una dirección interesante ha sido aprovechar el extenso desarrollo de la teoría  $H_\infty$  para sistemas no lineales, no es exagerado decir que esto solo fue posible a partir de la publicación de Doyle et al.(1989) sobre soluciones en  $H_\infty$  espacio de estado, la representación más viable para sistemas no lineales. A estas alturas ya hay una gran cantidad de publicaciones e investigación teórica sobre este tema, la adaptación a las características de los sistemas de ingeniería de procesos puede tener un gran potencial para futuras aplicaciones en control de procesos.

III. Sistemas provenientes de discretizar ecuaciones diferenciales parciales: muchos modelos de ingeniería química y bioquímica se expresan en términos de ecuaciones diferenciales parciales ( por ejemplo, los reactores de lecho empacado, los cristalizadores, torres de destilación empacadas, reactores con enzimas soportadas, etc.), para hacerlos más manejables se suelen discretizar con técnicas como colocación ortogonal, cuadratura diferencial, diferencias finitas, etc. El sistema dinámico de dimensión finita resultante puede ser controlado con técnicas de control no lineal como las aquí mostradas, sin embargo el efecto que la discretización ejerce en el control debe ser estudiado de manera cuidadosa, un ejemplo de ello es el trabajo de Tarn et al. (1994). La aplicación de la teoría no lineal a estos sistemas distribuidos puede ser una avenida fructífera de investigación en el futuro.

§ APÉNDICE A.1. CONTROL POR SEGUIMIENTO DE MODELOS

Una pregunta válida es si el problema de control robusto planteado es soluble dadas las condiciones impuestas en el grado relativo del modelo. Este es el motivo de la siguiente sección.

Si se dispusiera de las descripciones completas del proceso y el modelo ( $S_p(\cdot)$  y  $S_M(\cdot)$ ), uno esperaría ser capaz de poder diseñar un control distinto para cada uno de ellos (ya que son diferentes sistemas dinámicos) tal que el comportamiento dinámico de las salidas de ambos sean iguales. Para que esto sea posible se requiere cumplir una condición relativa a los grados relativos del proceso y modelo.

Este problema podría relacionarse con el problema de seguimiento de modelos (*model matching problem*) clásico en la teoría de sistemas. El interés aquí es que provee de una condición necesaria y suficiente en base a los grados relativos del modelo y proceso para la existencia de un control dinámico que logra el seguimiento de modelos, este problema ha sido planteado en forma general para el caso en que el modelo y el proceso son no lineales, cf. Huijberts-Nijmeijer(1990) y Di Benedetto-Isidori(1986):

Dado un proceso  $S_p(\cdot)$ , en modelo  $S_M(\cdot)$  y un punto inicial  $(x_0, x_{m0})$ , encontrar un compensador  $Q(a,b,c,d)$  con  $x_Q \in X_Q \subseteq R^q$  para el proceso  $S_p(\cdot)$  tal que el comportamiento entrada/salida de ambos sea el mismo.

El compensador tendría la siguiente estructura:

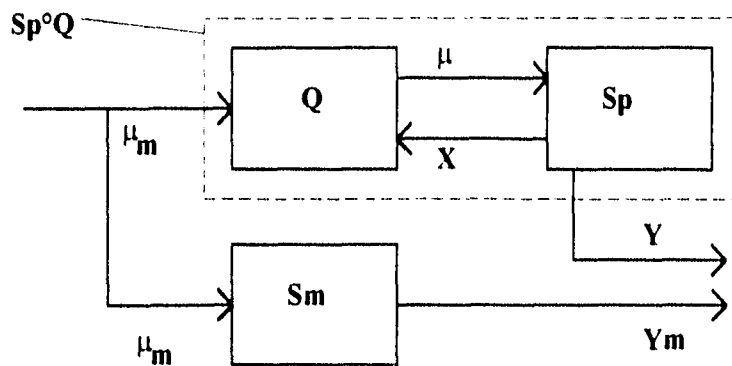
$Q(a,b,c,d)$ :

$$\begin{aligned} dx_Q/dt &= a(x_Q, x) + b(x_Q, x) \mu_m \\ \mu &= c(x_Q, x) + d(x_Q, x) \mu_m \end{aligned}$$

la composición del compensador con el proceso resultar en un sistema dinámico que tiene las mismas entradas y las mismas salidas que el modelo:

$$y^{Sp^oQ} = y_m, \quad \mu^{Sp^oQ} = \mu_m$$

en diagrama de bloques:



donde  $y \equiv y_m$  así como todas sus derivadas con respecto al tiempo. Si la matriz de invertibilidad del proceso  $A(x,d)$  tiene rango completo una condición necesaria y suficiente para que el compensador  $Q$  exista es (Huijberts-Nijmeijer(1990)):

$$r_i \leq r_{mi} \quad , 1 \leq i \leq m \tag{A1.1}$$

es decir que para cada par de salidas proceso/modelo las salidas del modelo tengan un grado relativo cuando menos igual, este resultado es importante pues nos permite decir que dada de la hipótesis de igualdad de grados relativos proceso/modelo hay condiciones suficientes para la existencia de  $Q$ , y este compensador es la solución del problema planteado con conocimiento perfecto del proceso y del modelo, para este caso la solución se visualiza directamente como un problema de rechazo de perturbaciones (*disturbance decoupling*) para un sistema aumentado y con una salida modificada.

Se trata de anular el efecto de la perturbación  $\mu_m$  en la salida  $h(x,d)-h(x_m,d)$  mediante el control  $\mu$ .

$S_E(\cdot)$ :

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}^E(t)/dt &= \mathbf{f}^E(\mathbf{x}^E, \mathbf{d}) + \mathbf{G}^E(\mathbf{x}^E, \mathbf{d}) \mu^E(\mathbf{x}^E, \mathbf{d}, \mathbf{u}) + \mathbf{P}^E(\mathbf{x}^E, \mathbf{d}) \mathbf{w}(\mathbf{x}^E, \mathbf{d}, \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{f}^E(\mathbf{x}^E, \mathbf{d}) + \sum_{i=1,m} \mathbf{g}_{i,i}^E(\mathbf{x}^E, \mathbf{d}) \mu_i(\mathbf{x}^E, \mathbf{d}, \mathbf{u}) + \sum_{i=1,m} \mathbf{p}_{i,i}^E(\mathbf{x}^E, \mathbf{d}) \mu_{im}(\mathbf{x}^E, \mathbf{d}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y}^E &= \mathbf{h}(\mathbf{x}^E, \mathbf{d}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{d}) - \mathbf{h}(\mathbf{x}_m, \mathbf{d}) \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}_m(t))^T/dt &= (\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{d}), \mathbf{f}_m(\mathbf{x}_m, \mathbf{d}))^T + (\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{d}), 0)^T (\mu(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \mathbf{u}), 0)^T \\ &\quad + (0, \mathbf{G}_m(\mathbf{x}_m, \mathbf{d}))^T (0, \mu_m(\mathbf{x}_m, \mathbf{d}, \mathbf{u}))^T \\ \mathbf{y}^E &= \mathbf{h}(\mathbf{x}^E, \mathbf{d}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{d}) - \mathbf{h}(\mathbf{x}_m, \mathbf{d}) \end{aligned} \quad (A1.1)$$

donde  $\mathbf{x}^E(t) = (\mathbf{x}(t), \mathbf{x}_m(t))^T$ ,  $\mathbf{f}^E(\mathbf{x}^E, \mathbf{d}) = (\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{d}), \mathbf{f}_m(\mathbf{x}_m, \mathbf{d}))^T$ ,  $\mathbf{G}^E(\mathbf{x}^E, \mathbf{d}) = (\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{d}), 0)^T$ ,  $\mathbf{P}^E(\mathbf{x}^E, \mathbf{d}) = (0, \mathbf{G}_m(\mathbf{x}_m, \mathbf{d}))^T$ ,  $\mu^E(\mathbf{x}^E, \mathbf{d}, \mathbf{u}) = (\mu(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \mathbf{u}), 0)^T$ ,  $\mathbf{w}(\mathbf{x}^E, \mathbf{d}, \mathbf{u}) = (0, \mu_m(\mathbf{x}_m, \mathbf{d}, \mathbf{u}))^T$  es la perturbación medida a rechazar. Aplicando a la salida la transformación de coordenadas correspondiente (3.1) resulta la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \gamma^E &= \gamma^P - \gamma^M = \mathbf{b}^E(\mathbf{x}^E, \mathbf{d}) + \mathbf{A}^E(\mathbf{x}^E, \mathbf{d}) \mu^E(\mathbf{x}^E, \mathbf{d}, \mathbf{u}) - \mathbf{A}_P^E(\mathbf{x}^E, \mathbf{d}) \mathbf{w}^E(\mathbf{x}^E, \mathbf{d}, \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{d}) - \mathbf{b}_m(\mathbf{x}_m, \mathbf{d}) + \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{d}) \mu(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \mathbf{u}) - \mathbf{A}_m(\mathbf{x}_m, \mathbf{d}) \mu_m(\mathbf{x}_m, \mathbf{d}, \mathbf{u}) \end{aligned}$$

de aquí se ve fácilmente que la manera de desacoplar  $\mathbf{w}(\mathbf{x}^E, \mathbf{d}, \mathbf{u}) = (0, \mu_m(\mathbf{x}_m, \mathbf{d}, \mathbf{u}))^T$  de la salida  $\mathbf{y}^E$  es usando la siguiente retroalimentación con antealimentación de la perturbación medida  $\mu_m$ :

$$\mu(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \mathbf{u}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{d}) \{ \mathbf{v} - \mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{d}) + \mathbf{b}_m(\mathbf{x}_m, \mathbf{d}) + \mathbf{A}_m(\mathbf{x}_m, \mathbf{d}) \mu_m(\mathbf{x}_m, \mathbf{d}, \mathbf{u}) \}$$

donde  $\mathbf{v}$  es la nueva referencia, para este caso particular sería 0 dado que lo que se quiere es que todas las derivadas de  $\gamma^E$  sean 0. En todos los sistemas no lineales las condiciones iniciales deben ser consideradas, para que puedan ser distintas debe pedirse que la dinámica cero del problema de seguimiento de modelos sea estable, esto corresponde a que el problema de rechazo de perturbaciones sobre  $S_E(\cdot)$  sea estable cf. van der Wegen(1991).

Sin embargo, de inicio suponemos que carecemos de  $S_P(\cdot)$  exactamente disponiendo solo de  $\mathbf{y}$ . La opción más rigurosa sería desarrollar toda una teoría del



seguimiento robusto de modelos basado en salidas de tal manera que para construir el compensador  $Q$  solo se usaran salidas de  $S_p(\cdot)$ , dada su complejidad esto queda fuera del alcance del presente trabajo, pero al menos se califica de posible el resolver el problema si se supone igualdad de grados relativos entre el modelo y el proceso.

**§ APÉNDICE A.2. INTEGRADORES SOBRE EL ERROR DE SALIDAS Y PRINCIPIO DEL MODELO INTERNO.**

El *principio*<sup>1</sup> del modelo interno para sistemas lineales dice, ver Wonham(1985): *Un regulador es estructuralmente estable solo si utiliza retroalimentación de la variable controlada e incorpora en la retroalimentación un duplicado de la estructura dinámica del exosistema cuyas señales el regulador debe manejar*, en otras palabras. todo buen regulador debe poseer un modelo del mundo externo. Por ejemplo, ver Basile-Marro(1992), un regulador capaz de manejar una perturbación en escalón debe poseer un polo al origen como el sistema que genera el escalón, para una perturbación en rampa dos polos al origen, etc., como se verá más adelante. una versión no lineal se encuentra en Isidori-Byrnes(1990).

Se parte de una versión simplificada de (2.1) donde  $\mu = \mu_m$ , se aplica el mismo control al proceso y al modelo:

$S_p(\cdot)$ :

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}(t)/dt &= \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{d}) + \mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{d}) \mu(\mathbf{x}_m,\mathbf{d},\mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{d}) + \sum \mathbf{g}_i(\mathbf{x},\mathbf{d}) \mu_i(\mathbf{x}_m,\mathbf{d},\mathbf{u}_m) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{d}) \end{aligned} \tag{A2.1a}$$

$S_m(\cdot)$ :

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}_m(t)/dt &= \mathbf{f}_m(\mathbf{x}_m,\mathbf{d}) + \mathbf{G}_m(\mathbf{x}_m,\mathbf{d}) \mu(\mathbf{x}_m,\mathbf{d},\mathbf{u}) = \mathbf{f}_m(\mathbf{x}_m,\mathbf{d}) + \sum \mathbf{g}_{im}(\mathbf{x}_m,\mathbf{d}) \mu_i(\mathbf{x}_m,\mathbf{d},\mathbf{u}_m) \\ \mathbf{y}_m &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_m,\mathbf{d}) \end{aligned} \tag{A2.1b}$$

---

<sup>1</sup> No confundir con el control por modelo interno.

ahora se define

$$\begin{aligned}\Delta f(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}, \mathbf{d}) &= f(\mathbf{x}, \mathbf{d}) - f_m(\mathbf{x}_m, \mathbf{d}) \\ \Delta G(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}, \mathbf{d}) &= G(\mathbf{x}, \mathbf{d}) - G_m(\mathbf{x}_m, \mathbf{d})\end{aligned}\quad (\text{A2.2})$$

entonces el proceso sería definido como proceso = modelo + incertidumbres:

$$\begin{aligned}S_p(\cdot): \\ d\mathbf{x}(t)/dt &= \mathbf{f}_m(\mathbf{x}_m, \mathbf{d}) + \mathbf{G}_m(\mathbf{x}_m, \mathbf{d}) \mu(\mathbf{x}_m, \mathbf{d}, \mathbf{u}) + \Delta f(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}, \mathbf{d}) + \Delta G(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}, \mathbf{d}) \mu(\mathbf{x}_m, \mathbf{d}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{d})\end{aligned}\quad (\text{A2.3})$$

Mediante la ley de control (2.1) puede calcularse una retroalimentación que haga que el sistema no perturbado (i.e.  $\Delta f(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}, \mathbf{d}) = \Delta G(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}, \mathbf{d}) = 0$ ) siga la referencia  $\mathbf{v}$ , ec. (2.3), esta sería así:

$$\begin{aligned}\mu(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \mathbf{u}) &= \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{d})^{-1} \{ \mathbf{v} - \mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{d}) \} \\ \mathbf{u} &= \mu^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{d})\end{aligned}$$

En presencia de perturbaciones esta retroalimentación no seguiría perfectamente a  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ . Repitamos ahora para el proceso las condiciones que definieron el grado relativo del modelo:

- i)  $\mathbf{L}_{\mathbf{G} + \Delta \mathbf{G}} (\mathcal{L}^i_{\mathbf{f} + \Delta \mathbf{f}} h_j(\mathbf{x})) = 0, \quad i = 0, \dots, r_j - 2, j = 1, \dots, m$
- ii)  $\mathbf{L}_{\mathbf{G} + \Delta \mathbf{G}} (\mathcal{L}^{r_j - 1}_{\mathbf{f} + \Delta \mathbf{f}} h_j(\mathbf{x})) \neq 0, \quad i = 1, \dots, m$
- iii)  $\text{Det}(\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{d})) \neq 0$

Debe hacerse explícita una condición importante: que la ganancia salida-referencia tenga el mismo signo para el modelo y para el proceso, i.e.:

$$(\partial y_i / \partial v_j) (\partial y_{mi} / \partial v_j) > 0, i, j = 1, \dots, m$$

esta condición es muy difícil de probar a priori, simplemente debe pedirse, pero implicaría una percepción del proceso particularmente errónea.

Con el fin de mostrar claramente el papel de los integradores primero trataremos con una clase de sistemas que cumplen las condiciones de paridad y luego extenderemos

para el caso general, siempre manteniendo igualdad de grados relativos entre modelo y proceso.

Si se pide que las perturbaciones  $\Delta G$  y  $\Delta f$  no afecten a  $T(x,d)$  ( i.e. cumplen las condiciones de paridad) y es posible entonces transformar  $S_p(\cdot)$  mediante  $z = T(x,d)$  al siguiente sistema equivalente, cf. Emali-Olgac(1992a y b):

$$\begin{aligned} dz_{i+j}/dt &= z_{i+j+1} , \quad 0 \leq j \leq r_i - 1 , \quad 1 \leq i \leq m, \quad I_i = \sum_{j=1, i-1} r_j \\ dz_{r_i+i}/dt &= \alpha_i(z) + \Delta\alpha_i(z) + \sum_{j=1, m} \{ \beta_{ij}(z) + \Delta\beta_{ij}(z) \} \cdot \mu_j(T^{-1}(z,d),d,u) , \quad 1 \leq i \leq m \\ d\eta_i/dt &= \psi_i(z) + \sum_{j=1, m} \varphi_{ij}(z) \cdot \mu_j(T^{-1}(z,d),d,u) , \quad 1 \leq i \leq n-\sigma \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_i(z) &= L_f^{r_i} h_i(T^{-1}(z,d),d) , \quad 1 \leq i \leq m \\ \Delta\alpha_i(z) &= L_{\Delta f}^{r_i} h_i(T^{-1}(z,d),d) , \quad 1 \leq i \leq m \\ \beta_{ij}(z) &= L_{g_j}^{r_i-1} h_i(T^{-1}(z,d),d) , \quad 1 \leq i, j \leq m \\ \Delta\beta_{ij}(z) &= L_{\Delta g_j}^{r_i-1} h_i(T^{-1}(z,d),d) , \quad 1 \leq i, j \leq m \\ \psi_i &= L_f \eta_i(T^{-1}(z,d),d) , \quad 1 \leq i \leq n-\sigma \\ \varphi_{ij} &= L_{g_j} \eta_i(T^{-1}(z,d),d) , \quad 1 \leq i \leq n-\sigma , \quad 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

se define

$$\begin{aligned} \alpha &= b(T^{-1}(z,d),d), & \Delta\alpha &= \Delta b(T^{-1}(z,d),d) \\ \beta &= A(T^{-1}(z,d),d), & \Delta\beta &= \Delta A(T^{-1}(z,d),d) \end{aligned} \tag{A2.4}$$

donde  $\alpha, \Delta\alpha \in \mathbb{R}^n$  ;  $\beta, \Delta\beta \in \mathbb{R}^{m \times m}$

Esta transformación nos indica donde aparece la perturbación después de la retroalimentación (2.1):

$$\mu = \beta^{-1}(v - \alpha)$$

resulta un sistema que cumple las condiciones de paridad más estrictas de Corless-Leitmann(1981), pues la incertidumbre aparece donde aparece el control en (rango de  $\Pi$ ):

$$\begin{aligned} dz/dt &= \Gamma z + \Pi v + \Pi (\Delta\alpha + \Delta\beta\beta^{-1}(v-\alpha)) \\ d\eta/dt &= \psi'(z,\eta,d) + \varphi'(z,\eta,d) v, \quad y = \Delta z \end{aligned}$$

se pide además que:

$$\begin{aligned} \|\Delta f_i(t)\| &\leq \zeta_i(t), & i=1,\dots,n \\ \|\Delta g_{ij}(t)\| &\leq \xi_{ij}(t), & i=1,\dots,n; j=1,\dots,m \end{aligned}$$

Este sistema nos indica de que manera esta "perturbación" de modelado afecta a la salida  $y$ , dado que las perturbaciones  $\Delta\alpha$  y  $\Delta\beta$  están acotadas puede decirse que la salida  $y$  se encontrará dentro del "cono":

$$(y_i - y_{mi}) \in \pm \int_{r_i} \dots \int (\zeta_i + \xi_i \beta^{-1}(v-\alpha)) dt \dots dt \quad (A2.5)$$

donde  $\int_{r_i} \dots \int (\bullet) dt$  significa integrales iteradas  $r_i$  veces, donde  $r_i$  es el grado relativo de  $y_i$ , la  $i$ -ésima salida,  $\xi_i$  es el  $i$ -ésimo renglón de la matriz  $\xi$ . Por ejemplo:

- $r_i = 0$ , el control afecta directamente la salida, la perturbación en ella está acotada por un escalón.
- $r_i = 1$ , la perturbación en la salida está acotada por una rampa.
- $r_i = 2$ , la perturbación en la salida está acotada por una parábola, etc.

La experiencia lineal indica que para rechazar una perturbación desconocida (no medida) que tiene forma de escalón en el tiempo (offset constante) se necesita un integrador, para uno con forma de rampa dos integradores en sucesión, etcétera. Esto ha sido formalizado para el caso lineal en el principio del modelo interno, cf. Wonham(1985), Basile-Marro(1992) que para sistemas lineales dice que una perturbación en escalón requiere un polo al origen para ser rechazada, una perturbación en rampa dos polos al origen, etc.

Para el caso general en que ocurre que tanto  $\Delta f$  como  $\Delta G$  afectan no solo a la retroalimentación sino también a la transformación no lineal  $T(\mathbf{x}, \mathbf{d})$  utilizada para linealizar el sistema. No puede obtenerse una fórmula tan pulcra como (A2.5), pero paso a paso puede obtenerse la idea general por inducción partiendo de grados relativos pequeños:

$$r_i = 1:$$

$$dy_i/dt = L_f h_i + L_{\Delta f} h_i + (L_G h_i + L_{\Delta G} h_i) u$$

$$\|\Delta f_i(t)\| \leq \zeta_i(t), \quad i=1,\dots,n; \quad \|\Delta g_{ij}(t)\| \leq \xi_{ij}(t), \quad i=1,\dots,n; j=1,\dots,m$$

se cumplen las condiciones de paridad siempre y la perturbación tendrá a lo más la forma de una rampa de pendiente  $\xi_i u$  y ordenada al origen  $\zeta_i$ .

$$r_i = 2:$$

$$dy_i/dt = L_f h_i + L_{\Delta f} h_i$$

$$dy_i^{(2)}/dt = L_f^2 h_i + L_f L_{\Delta f} h_i + L_{\Delta f} L_f h_i + L_{\Delta f}^2 h_i + L_{G+\Delta G} L_{f+\Delta f} h_i u$$

de inicio se supone a  $f$  y  $G$  suaves (i.e.  $C^\infty$ ), las incertidumbres deben tener por lo menos dos derivadas continuas y para que los integradores sean de utilidad deben estar acotadas en cuyo caso las perturbaciones afectan la salida cuando más como una parábola.

En el caso general debe pedirse que las derivadas de  $\Delta f$  y  $\Delta G$ .

estén acotadas desde la derivada cero hasta la  $r_{\max} = \max(r_i)$ ,  $i=1, \dots, m$ , esto es:

$$\|\Delta f^{(k)}_i(t)\| \leq \zeta^{(k)}_i(t), \quad i=1, \dots, n; \quad k=1, \dots, r_{\max}$$

$$\|\Delta g^{(k)}_{ij}(t)\| \leq \xi^{(k)}_{ij}(t), \quad i=1, \dots, n; \quad j=1, \dots, m; \quad k=1, \dots, r_{\max}$$

donde  $(.)^{(k)}$  indica la derivada  $k$ -ésima del argumento

Esto nos lleva a decir, dentro del planteamiento de esta sección, que para rechazar el efecto de una perturbación en la salida  $y_i(t)$  son necesarios  $r_i$  integradores en sucesión sobre este error de salida.

La adición de integradores se ve más claramente en el sistema equivalente nominal (con modelo perfecto), para el caso una entrada/una salida:

$$dz/dt = \Gamma z + \Pi v$$

$$y = \Delta z$$

la referencia  $v = K_c(z - z_{ref})$ , donde  $K_c = (k_{c1}, \dots, k_{cn})$ ,  $\Gamma + \Pi K_c$  esta en forma compañera y es estable alrededor de  $z_{ref}$ . Si se agregan integradores  $w$ ,  $v = K_c(z - z_{ref}) + K_c w$ . Dado que en este caso particular  $n$  es el grado relativo y la dimensión del sistema, se necesitan  $n$  integradores en sucesión sobre el error de salida  $\Delta(z - z_{ref})$

$$dw/dt = \Gamma w + \Pi \Delta(z - z_{ref})$$

el sistema lineal equivalente completo tendría la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} dw/dt &= \Gamma w + \Pi \Delta (z - z_{ref}) \\ dz/dt &= \Pi K_c w + \Gamma z + \Pi K_c (z - z_{ref}) \end{aligned} \quad (A2.6)$$

o definiendo  $z^* = [w, z]$

$$\begin{aligned} \frac{dz^*}{dt} &= \begin{bmatrix} \Gamma & \Pi \Delta \\ \Pi K_c & \Gamma + \Pi K_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Pi \Delta \\ \Pi K_c \end{bmatrix} z_{ref} \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (A2.7)$$

la nueva matriz del sistema también está en forma compañera y debe ser estable para que el sistema sea estable. Para el caso multivariable se repite el mismo procedimiento para cada bloque desacoplado cuya dimensión es  $r_i$ , el grado relativo de la salida  $y_i$ , diseñándose los integradores y controles para cada bloque de manera independiente. Esta propuesta de referencia lineal  $v$  tiene una cierta elegancia por la simetría integradores-grado relativo.

Sin embargo simulaciones de este esquema indicaron que este falla a causa de la operación en las restricciones de control, esto causa un error de salida sostenido, que debido al control integral se acumula (*wind-up*, en inglés), resultando su desempeño peor que el de un simple integrador sobre el error de salidas. La manera general de tratar este problema suele consistir en reducir el efecto de los integradores ante operación en restricciones, hasta quedar fuera de las restricciones.

### § APÉNDICE A.3. MÉTODOS UNIPASO PARA INTEGRAR SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.

Dentro de los métodos unipaso destacan los Runge-Kutta implícitos, tienen varias ventajas sobre los métodos multipaso más comunes (GEAR y derivados); por ejemplo pueden arrancar sin perder exactitud, pueden ser A-estables y L-estables para

órdenes altos, pero tienen la desventaja de tener que resolver sistemas de ecuaciones no lineales de dimensión  $n \cdot s$  donde  $n$  es el número de ecuaciones y  $s$  el número de etapas.

Los métodos de Runge-Kutta-Rosenbrock conservan muchas de las propiedades de convergencia de los métodos Runge-Kutta implícitos y evitan el resolver sistemas no lineales de ecuaciones, reduciéndose a resolver  $s$  sistemas lineales de dimensión  $n$ . Una característica importante dado el uso particular dado a este método en la presente tesis es que al ser unipaso los cambios en las condiciones iniciales necesarios en la implantación del esquema de control presentado en 3.2.1 no afectan la eficiencia y precisión del método, en contraposición con lo que sucedería de usarse un método multipaso.

Para un sistema de ecuaciones ordinarias dependiente del vector de parámetros  $p$  se tiene

$$\begin{aligned} dy(t)/dt &= f(y;p) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \tag{A.3.1}$$

donde  $y \in \mathbf{R}^n$ ,  $t \in \mathbf{R}^+$  y  $p \in \mathbf{R}^p$ .

El método consiste en que dado un tamaño de paso  $h$  se obtiene una aproximación  $y_1$  a  $y(t_0+h)$  mediante un método Runge-Kutta-Rosenbrock con coeficientes  $a_{ij}$ ,  $c_{ij}$ ,  $m_i$  y  $g_i$ ,  $1 \leq i \leq s$ ,  $1 \leq j \leq i-1$ , donde  $s$  es el número de etapas del método, definido de la siguiente manera

$$\mathbf{E} = \mathbf{I} - \gamma h \partial f(y_0;p)/\partial y \tag{A.3.2a}$$

$$\mathbf{E} \mathbf{k}_i = f(y_0 + h \sum_{j=1,i-1} a_{ij} \mathbf{k}_j + \sum_{j=1,i-1} c_{ij} \mathbf{k}_j ; p) \tag{A.3.2b}$$

$$y_1 = y_0 + h \sum_{i=1,s} m_i \mathbf{k}_i \tag{A.3.2c}$$

para  $\mathbf{E}$  puede utilizarse la factorización LU una vez por paso y se requerirán  $s$  sustituciones hacia atrás y hacia adelante.

La ecuación de sensibilidad de los parámetros para (A.3.1) se obtiene derivando con respecto a los parámetros ambos lados de la igualdad e intercambiando el orden de derivación, para simplificar se elimina t como argumento:

$$d/dt (\partial y/\partial p) = (\partial f(y;p)/\partial y)(\partial y/\partial p) + \partial f(y;p)/\partial p \quad (A.3.3a)$$

$$\partial y_i(t_0)/\partial p_j = \delta_{ij} \quad (A.3.3b)$$

estas ecuaciones pueden ser resueltas simultáneamente con (A.3.1). La demostración de existencia de (A.3.3) dada la de (A.3.1), como ya se dijo, se remonta a Gronwall en 1919 cf. Hairer et al.(1987, secc.I.14), una revisión sobre este problema llamado de sensibilidad a parámetros de ecuaciones diferenciales se puede encontrar en Rabitz et al.(1983), más detalles sobre el método de solución de (A.3.3) junto con (A.3.1) cf. Leis-Kramer(1985), Caracotsios-Stewart(1985) y sobre todo Leis-Kramer(1988a,b).

El principio clave es que (A.3.1) y (A.3.3) tienen el mismo jacobiano  $(\partial f(y;p)/\partial y)$ , además (A.3.3) son ecuaciones diferenciales lineales en la incógnita  $(\partial y/\partial p)$ . Basándose en eso el método numérico para (A.3.3) sería

$$E = I - \gamma h \partial f(y_0;p)/\partial y$$

$$\begin{aligned} E K_i &= (\partial f(y_0;p)/\partial y) [(\partial y/\partial p_0) + h \sum_{j;1,i-1} a_{ij} K_j] \\ &+ (\partial f(y_0;p)/\partial y) + \sum_{j;1,i-1} c_{ij} K_j \\ (\partial y/\partial p_1) &= (\partial y/\partial p_0) + h \sum_{i;1,s} m_i K_i \end{aligned} \quad (A.3.4)$$

donde  $(\partial y/\partial p)$ ,  $K_i \in \mathbb{R}^{n \times p}$ . Como se ve E en (A.3.2) y (A.3.4) son iguales y por lo tanto solo necesita ser factorizado una vez.

El método utilizado es L-estable de tercer orden con dos evaluaciones funcionales por paso y tres etapas, cf. Michelsen(1976) con los siguientes coeficientes:

$$\gamma^3 - 3\gamma^2 + (3/2)\gamma - 1/6 = 0, \gamma \approx 0.4358..., a = 3/4$$

$$c_{31} = -(8\gamma^2 - 2\gamma + 1)/(6\gamma)$$

$$c_{32} = 2(6\gamma^2 - 6\gamma + 1)/(9\gamma)$$

$$m_1 = 11/27 - c_{31}, m_2 = 16/27 - c_{32}, m_3 = 1.0$$

todos los demás coeficientes son cero.



Más métodos particulares y detalles matemáticos de su desarrollo pueden verse en Kaps-Rentrop(1979), Kaps-Wanner(1980), Chan et al.(1978) y sobre todo en Hairer-Wanner(1991,secc.IV.7), en Chan et al (1978) hay ejemplos numéricos de simulaciones de reacciones y reactores químicos de diversos tipos.

## § B. BIBLIOGRAFÍA.

Abu el Ata S., Fliess M.

(1989) Nonlinear predictive control by inversion. Proc. IFAC symposium on nonlinear control systems design, A. Isidori ed., Capri, Italia.

Álvarez J.

(1996) Output-Based control of nonlinear plants. Aceptado para publicación en AIChE J, agosto de 1996.

Álvarez J., Suárez R., Martínez R.

(1991) Feedforward-feedback nonlinear control for linearizable systems. American Control Conference 1991.

Álvarez-Ramírez J., Álvarez J., Suárez R.

(1991) Nonlinear bounded control for a class of continuous agitated tank reactors. Chem. Eng. Sci., 46, 3235-3249.

Álvarez-Ramírez J.,

(1994) Stability of a class of uncertain continuous stirred chemical reactors with a nonlinear feedback. Chem. Eng. Sci., 49, No.11, 1743-1748.

Aris R., Humphrey A.E.

(1977) Dynamics of a Chemostat in which Two Organisms Compete for a Common Substrate. Biotech. & Bioeng., 19, 1375-1386.

Basile G., Marro G.

(1992) Controlled and conditioned invariants in linear system theory, Prentice-Hall, Inc.

Bequette, B.W.

(1991) Nonlinear control of chemical processes: a review. Ind. Eng. Chem. Res., 30, 1391-1413.

Brockett, R.W.

(1978) Feedback invariants for nonlinear systems. Proc. IFAC world Congress, Helsinki, 1115-1120.

Caracotsios M., Stewart W. E.

(1985) Sensitivity analysis of initial value problems with mixed ODEs and algebraic equations. Comput. Chem. Eng., 9, 359-365.

Chan, Y. N. I., Birnbaum, I., Lapidus, L.

(1978) Solution of Differential equations and the use of imbedding techniques. Ind. Eng. Chem. Fundam., Vol. 17, No. 3, 1978.

Chen Y.H.

(1989) Modified adaptive robust control system design. *Int. J. Contr.*, 49, 1869-1882.

(1992) Adaptive robust control of uncertain systems with measurement noise. *Automatica*, 28, 715-728.

Chen, Y. H. , Leitman, G.

(1987) Robustness of uncertain systems in the absence of matching assumptions. *Int. J. Control*, vol. 45, No. 5, 1527-1542.

Corless, M. J., Leitmann, G.

(1981) Continuous state feedback Guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.* AC-26, 5, 1139-1144.

(1983) Adaptive control of systems containing uncertain functions and unknown functions with uncertain bounds. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 41, 155-168.

Cutler C.R., Ramaker B.L.

(1979) Dynamic Matrix Control-a computer control algorithm. *AIChE National Meeting*, Houston Texas.

Di Benedetto, M. D., Isidori, A.

(1986) The matching of nonlinear models via dynamic state feedback. *SIAM J. Control*, Vol. 24, No. 5, 1986.

Doyle J., Glover K., Khargonekar P., Francis B.

(1989) State-space solutions to standard  $H_\infty$  and  $H_2$  control problems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-34, 831-847, 1989.

Emali H., Olgac N.

(1992a) Robust output tracking control of nonlinear MIMO systems via sliding mode technique, 28, 145-151.

(1992b) Sliding mode control with perturbation estimation (SMCPE): a new approach. *Int. J. Contr.*, 56, 923-941.

Fliess M., Abu el Ata S., Coïc A., Chantre P.

(1992) Discontinuous predictive control, inversion and singularities. Application to a heat exchanger.

Foss A.S.

(1973) Critique of chemical process control theory. *AIChE J.*, 19, 209-214.

- Garcia C. E., Prett D. M., Morari M.  
(1989) Model predictive control: theory and practice-a survey. *Automatica*, 25, 335-348.
- Hammouri H., Busawon K.  
(1993) A global stabilization of a class of nonlinear systems by means of an observer. *Applied Mathematical Letters*. 6, 1, 31-34.
- Hairer E., Nørsett S. P., Wanner G.  
(1987) Solving ordinary differential equations I: Nonstiff problems. Springer Series in Computational Mathematics 8. Springer-Verlag, Berlin.
- Hairer E., Wanner G.  
(1991) Solving ordinary differential equations II: Stiff problems. Springer Series in Computational Mathematics 19. Springer-Verlag, Berlin.
- Hirschorn R. M.  
(1979) Invertibility of multivariable nonlinear control systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-24, 855-865.
- Hoo K.A., Kantor J.C.  
(1986) Global linearization and control of a mixed-culture bioreactor with competition and external inhibition. *Math. Biosci.*, 82, 43-62.
- Huiberts, H. J. C., Nijmeijer, H.  
(1990) Local nonlinear model matching: from linearity to nonlinearity. *Automatica*, Vol. 26, No. 6, 973-983.
- Hunt L. R., Su R., Meyer G.  
(1983) Design for multi-input nonlinear systems, en *Differential geometric control theory*, 268-298, Birkhäuser, Boston.
- Isidori, A., Krener, A. J., Gori-Georgi, C., Monaco, C.  
(1981) Nonlinear decoupling via feedback: A differential approach. *IEEE. Trans. Automat. Contr.*, AC-26,331-345..
- Isidori A.  
(1989) *Nonlinear control systems: an introduction*, 2nd. ed. Communications and control engineering series, Springer Verlag.
- Isidori A., Byrnes C. I.  
(1990) Output regulation of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-35, 131-140.

- Kanellakopoulos I., Kokotovic P. V., Morse A. S.,  
 (1991) Adaptive output-feedback control of systems with output nonlinearities.  
 en P.V. Kokotovic ed., Foundations of adaptive control, Lect. Not. Contr.  
 Info. Sci., No. 160. Springer Verlag.  
 (1992) Adaptive output-feedback control of systems with output nonlinearities.  
 IEEE Trans. Automat. Contr. AC-37, No. 11, 1666-1682.
- Kaps, P., Rentrop, P.  
 (1979) Generalized Runge-Kutta methods of order four with stepsize control for  
 stiff ordinary differential equations. Numerische Mathematik, 33, 55-68.
- Kaps, P., Wanner, G.  
 (1981) A study of Rosenbrck-type methods of high order. Numerische  
 Mathematik, 38, 279-298.
- Kersterbaum A., Shinnar R., Thau F.E.  
 (1976) Design concepts for process control, Ind. Eng. Chem. Process Des.Dev,  
 15.
- Khalil H. K.  
 (1992) Nonlinear Systems. Macmillan Publishing Company.
- Kravaris C.  
 (1988) Input/Output Linearization: A Nonlinear Analog of Placing Poles at  
 Process Zeros, AIChE J., 34, 1803-1812.
- Krener, A.J.  
 (1973) On the equivalence of control systems and linearization of nonlinear  
 systems. SIAM J. Control and Optimization, 11, 670-676.
- Lee W., Weekman V.W. Jr.  
 (1976) Advanced control practice in the chemical process industry: a view from  
 industry. AIChE J., 22, 27-38.
- Leis J.R., Kramer M. A.  
 (1985) Sensitivity analysis of systems of differential and algebraic equations.  
 Comput. Chem. Eng., 9, 93-96.  
 (1988a) The simultaneous solution and sensitivity analysis of systems described by  
 ordinary differential equations. ACM Trans. on Math. Soft., 14, 45-60  
 (1988b) Algorithm 658: ODESSA-An ordinary differential equation solver with  
 explicit simultaneous sensitivity analysis. ACM Trans. on Math. Soft., 14, 61-67.
- Liu J.-S., Yuan K.  
 (1991) Characterization of allowable perturbations for robust decoupling of  
 affine non-linear systems. Int. J. Contr., 54, 729-735.

Marino R., Tomei P.

(1991) Dynamic output feedback linearization and global stabilization, *Syst & Contr. Lett.*, 17, 115-121.

(1993a) Global adaptative output-feedback control of nonlinear systems, part I: linear parametrization. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 38, 1-32.

(1993b) Global adaptative output-feedback control of nonlinear systems, part II: nonlinear parametrization. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 38, 33-48.

Michelsen, M. L.

(1976) An efficient general purpose method for the integration of stiff ordinary equations, *AIChE J.* Vol. 22, No. 3.

Nijmeijer H., van der Schaft A.,

(1990) *Nonlinear dynamical control systems*, Springer Verlag.

Pomet J.-B., Praly L.

(1988) *Adaptative nonlinear control: an estimation based algorithm*. En Decusse et al: *New trends in nonlinear control theory*. Springer Verlag.

Qu Zhihua

(1992) Global stabilization of nonlinear systems with a class of unmatched uncertainties. *Syst. Contr. Lett.*, 18, 301-307.

Rabitz H., Kramer M., Dacol D.

(1983) Sensitivity analysis in chemival kinetics. *Ann. Rev. Phys. Chem.*, 34,419-461.

Richalet J.A.

(1993) *Industrial Applications of Model Based Predictive Control*. *Automatica*, 29,1251-1274.

Richalet J.A., Rault A., Testud J.L., Papon J.

(1979) *Model Predictive Heuristic Control: applications to an industrial process*. *Automatica*, 14,413-428.

Sastry S. S., Bodson M.

(1989) *Adaptative Control: Satbility, Convergence and Robustness*. Prentice Hall Advanced Reference Series, Englewood Cliffs, New Jersey.

Slotine J.-J. E., Li W.

(1991) *Applied nonlinear control*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

- Spong M.W.  
 (1985) Robust stabilization for a class of nonlinear systems en Byrnes C.I., Lundquist A. eds.: Theory and applications of nonlinear control systems, Elsevier-North-Holland, 155-166.
- Stephanopoulos, George.  
 (1985) Chemical Process Control, An introduction o theory and practice. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Stephanopoulos, Gregory.  
 (1980) Dynamics of mixed cultures of microorganisms: some topological considerations. A.I.Ch.J., Vol. 26, No. 5, 802-815.
- Stephanopoulos, Gregory., Lapidus, G. R..  
 (1988) Chemostat dynamics of plasmid-bearing, plasmid-free mixed recombinant cultures. Chem. Eng. Sci., vol. 43, No. 1, 49-57.
- Su R.  
 (1982) On the linear equivalents of nonlinear systems. Syst. Contr. Lett., 2, 48-52.
- Tarn, T.-J., Bejczy A.K., Guo C.  
 (1994) Stable and unstable zero dynamics of infinite dimensional systems, SIAM, Philadelphia.
- Teel A., Kadiyala R., Kokotovic P., Sastry S.  
 (1991) Indirect techniques for adaptative input-output linearization of non-linear systems. Int. J. Control, 53, 193-222.
- Tunali E. T., Tarn T.-J.  
 (1987) New results for identifiability of nonlinear systems. IEEE trans. Automat. Contr., AC-32, 146-154.
- Vidyasagar, Y.  
 (1993) Nonlinear Systems Analysis, 2nd. ed. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Walcott B.L., Zak S.H.  
 (1987) Sate observation of nonlinear uncertain dynamical systems. I.E.E.E. Trans. Automat. Contr., 32, 166-170.
- Walcott B.L., Corless M. J., Zak S. H.  
 (1987) Comparative study of non-linear satate-observation techniques. Int. J. Contr., 45, 2109-2132.

van der Wegen, L. L. M.

(1991) Local Disturbance decoupling with stability for nonlinear systems. Lecture notes in control and information sciences No. 166. Springer- Verlag, Berlin.

Wonham M.W.

(1985) Linear multivariable control: a geometric approach, 3rd. ed. Applications of mathematics 10. Springer Verlag.

Zak S. H.

(1990) On the stabilization and observation of nonlinear uncertain dynamics systems . I.E.E.E. Trans. Automat. Contr., 35, 604-607.



§ C. LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbf{d}(t)$	Vector de entradas medidas no manipulables o perturbaciones medidas, de dimensión $d$
$d$ , superscrito	Dimensión del vector de entradas no manipulables
$\mathbf{x}(t)$	Vector de variables de estado, de dimensión $n$
$\mathbf{x}_0$	Vector de condiciones iniciales de $\mathbf{x}(t)$
$n$ , superscrito	Dimensión del vector de variables de estado
$\mathbf{p}(t)$	Vector de parámetros del modelo, de dimensión $p$
$p$ , superscrito	Dimensión del vector de parámetros del modelo
$\mathbf{u}(t)$	Vector de entradas manipulables o controles
$m$ , superscrito	Dimensión del vector de control o entradas manipulables y también del vector de salidas
$\mu(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \mathbf{u})$	Función vectorial del control, estados y perturbaciones medidas
$\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{d})$	Función vectorial que va de los estados y perturbaciones medidas a las salidas
$\mathbf{y}(t)$	Vector de salidas del sistema
$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \mathbf{p})$	Vector de dinámica incontrolada, dimensión $n$
$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \mathbf{p})$	Matriz de dinámica controlada, dimensión $n \times m$
$\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \mathbf{p})$	Matriz de invertibilidad o desacoplamiento, dimensión $m \times m$ , ec. (2.2)
$\mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \mathbf{p})$	Vector de dimensión $m$ , ec. (2.2)
$\Sigma_{j:1,i}$	Derivada $i$ -ésima
$r_i$	Suma sobre los índices $j$ , desde 1 hasta $i$ .
$\mathbf{v}(t)$	Grado relativo de la salida $i$ -ésima
$\mathbf{L}_f \mathbf{h}$	Vector de referencia en las salidas, dimensión $m$
$\mathcal{L}_f \mathbf{h}$	Derivada dirección de $\mathbf{h}$ a lo largo de $\mathbf{f}$
$\sigma$	Derivada direccional de $\mathbf{h}$ a lo largo de $\mathbf{f}$ y $\mathbf{d}$
$\sigma(\mathbf{A})$	Suma de grados relativos de las salidas
$\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \mathbf{p})$	Valores propios de la matriz $\mathbf{A}$
$\eta$	Transformación no lineal de los estados, ec. (2.3)
$\mathbf{z}$	$n - \sigma$ coordenadas "extras" de $\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \mathbf{p})$
$\alpha$	Coordenadas tales que $\mathbf{z} = \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \mathbf{p})$
$\beta$	Vector $\mathbf{b}$ en coordenadas $\mathbf{z}$ , ec.(2.5)
$\psi$	Matriz $\mathbf{A}$ en coordenadas $\mathbf{z}$ , ec. (2.5)
$\varphi$	Vector de dimensión $n - \sigma$
$\Gamma$	Matriz de dimensión $(n - \sigma) \times (n - \sigma)$
$\Pi$	Matriz constante en bloques de dimensión $\sigma \times \sigma$
$\Delta$	Matriz constante en bloques de dimensión $\sigma \times m$
$\mathbf{S}(\cdot)$	Matriz constante en bloques de dimensión $m \times \sigma$
$\mathbf{S}_\beta(\cdot)$	Sistema dinámico, ec. (2.1)
	$\mathbf{S}(\cdot)$ bajo la transformación de coordenadas $\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{d}, \mathbf{p})$

$S_z(.)$	Sistema parcial o totalmente lineal resultante de aplicar a $S_\beta(.)$ la retroalimentación no lineal $\mu = \beta^{-1}(v - \alpha)$ , es equivalente bajo retroalimentación y transformación al sistema $S(.)$ , ec (2.6)
$S_p(.)$	Sistema dinámico correspondiente al proceso
$S_M(.)$	Sistema dinámico correspondiente al modelo del proceso
m, subscripto	Subscripto referente al modelo del proceso
$\Delta F_f(.)$	Incertidumbres supuestas equivalentemente pareadas, ec.(3.4)
$F_f(.)$	Modelo nominal estable, ec.(3.5)
$A_c$	Matriz estable, con polos colocados mediante retroalimentación, de dimensión $n \times n$
$Q$	Matriz positiva definida arbitraria
$P$	Matriz positiva definida, solución a la ec. de Lyapunov para $A_c$ y $Q$
$\ x\ $	Norma del vector $x$
$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$	Funciones positivas definidas, ec.(3.6)
$V(x,t)$	Función de Lyapunov
$v(t)$	Ley de control adicional a la linealizante, dimensión m, ec.(3.8)
$\kappa(x,t)$	Vector definido en ec. (3.9)
$\rho(x,t)$	Cota superior de $\ (\partial V/\partial x)^T G\ $ , ec. (3.9)
$\rho^*(x)$	Vector de funciones de la parametrización lineal de $\rho(x,t)$
$\vartheta(t)$	Parámetros de la parametrización lineal de $\rho(x,t)$
$\vartheta^*(t)$	Parámetros estimado de la parametrización lineal de $\rho(x,t)$
$N$	Matriz positiva definida
$\varepsilon$	Parámetro del control robusto, número pequeño
$p_0$	Parámetros reales del proceso
$y_{em}$	Error de modelado de salidas, $y - y_m$
$\phi$	Diferencia entre parámetros del modelo y proceso, $p - p_0$
$\Omega(t)$	Matriz de covarianza, positiva definida, dimensión $p \times p$
$\gamma$	Ganancia del regresor de parámetros
$\lambda(t)$	Factor exponencial de olvido en el regresor de mínimos cuadrados
$\tau(.)$	Término de la derivada de la función de Lyapunov $V(\phi)$ , ec. (3.2.4), tiempo de respuesta en sistemas lineales
$O(\ x\ ^2)$	Término de 2o. orden en $\ x\ $
$k_\theta$	Término proporcional de 2o. orden,
$\alpha_1, \alpha_2$	Constantes de la ec. (3.2.7)
$z_o$	Estados del observador
$\theta$	Ganancia del observador
$S_\theta$	Matriz que cumple $\theta S_\theta + \Gamma^T S_\theta + S_\theta \Gamma = \Delta^T \Delta$ , dimensión $n \times n$
$\beta(z), \alpha(z)$	Funciones escalares, ec. (3.2.9)
$\beta_\zeta(z), \alpha_\zeta(z)$	Funciones vectoriales, ec. (3.2.9), dimensión $n \times n$
$\zeta$	Parámetros lineales de ec. (3.2.9), dimensión p
$k$	Matriz de ganancias del control, dimensión n, ec.(3.2.9)
$I$	Matriz identidad
$\varepsilon$	Vector de errores de observación, $\varepsilon = z_o - z$ , dimensión n

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$	Constantes de Lipschitz
$\lambda_5, \lambda_6$	Cotas de funciones
$\ \varepsilon\ _{S_0}$	Norma vectorial, $\ \varepsilon\ _{S_0} = \varepsilon^T S_0 \varepsilon$
$V_T$	Función de Lyapunov, $V_T(\varepsilon, z_0, \zeta) = \varepsilon^T S_0 \varepsilon + z_0^T P z_0 + \zeta^T \zeta$
$r_0$	Máximo valor de $\ u\ $ en el intervalo de interés
$p_\zeta$	Máximo valor de $\ \zeta\ $ en el intervalo de interés $P_\zeta$
$C^-$	El semiplano complejo formado por los números complejos con parte real negativa
$x_1$	Concentración de biomasa recombinante, $g/dm^3$
$x_2$	Concentración de biomasa sensible al inhibidor, $g/dm^3$
$I$	Concentración de inhibidor en el reactor, $g/dm^3$
$S$	Concentración de sustrato en el reactor, $g/dm^3$
$S_f$	Concentración de sustrato en la alimentación al reactor, $g/dm^3$
$I_f$	Concentración de inhibidor en la alimentación al reactor, $g/dm^3$
$D$	Tasa de dilución, $hr^{-1}$
$\mu_1(S)$	Velocidad de crecimiento específica de la cepa recombinante, $hr^{-1}$
$\mu_2(S, I)$	Velocidad de crecimiento específica de la cepa sensible, $hr^{-1}$
$\mu_{1,M}$	Velocidad de crecimiento máxima de la cepa recombinante, $hr^{-1}$
$\mu_{2,M}$	Velocidad de crecimiento máxima de la cepa sensible, $hr^{-1}$
$K$	Constante de Monod, $g/l$
$K_I$	Constante de inhibición, $g/l$
$p$	Parámetro de desactivación del inhibidor
$Y_1$	Rendimiento celular de la cepa recombinante, $g$ biomasa/ $g$ sustrato
$Y_2$	Rendimiento celular de la cepa sensible, $g$ biomasa/ $g$ sustrato
$u_1$	$D$ , tasa de dilución
$u_2$	Segundo control, $D I_f$
$w$	Vector de integradores sobre el error de salida
$i$	$\sqrt{-1}$
$\zeta$	Coficiente de amortiguación en sistemas lineales
$\omega$	Frecuencia de oscilación en sistemas lineales
$\omega_n$	Frecuencia de oscilación natural en sistemas lineales
$p_1, p_2, p_3$	Polos a colocar para diseño lineal del control
$p_{01,2,3}$	Polos a colocar para diseño lineal del observador
$x_e$	Vector de estados en el punto de equilibrio
$x_1$	Vector de estados trasladado al punto de equilibrio, en estas coordenadas $x_e = 0$
$T$	Transpuesta de un vector o una matriz
$S_{aux}$	Variable auxiliar
$x_{1e}, x_{2e}, S_e, I_e$	Variables en el punto de equilibrio