



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

2
2y

PROPAGACION DE ONDAS SISMICAS
EN MEDIOS ESTRATIFICADOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

INGENIERO GEOFISICO

P R E S E N T A :

JOSE MANUEL CASTILLO COVARRUBIAS

MEXICO, D. F.

1996.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERIA
DIRECCION
60-I-049

SR. JOSE MANUEL CASTILLO COVARRUBIAS
Presente.

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor Dr. Francisco José Sánchez Sesma, y que aprobó esta Dirección, para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de ingeniero geofísico:

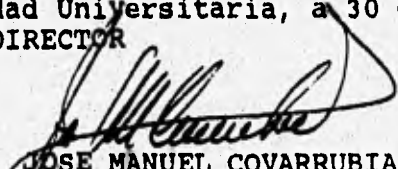
PROPAGACION DE ONDAS SISMICAS EN MEDIOS ESTRATIFICADOS

- I INTRODUCCION**
- II ONDAS SISMICAS EN MEDIOS ESTRATIFICADOS**
- III RESPUESTA ANTE ONDAS INCIDENTES**
- IV RESPUESTA ANTE FUENTE CONCENTRADA**
- V RESULTADOS NUMERICOS Y APLICACIONES**
- VI CONCLUSIONES
RECONOCIMIENTOS
REFERENCIAS**

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el título de ésta.

Asimismo le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que se deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar examen profesional.

A t e n t a m e n t e
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Ciudad Universitaria, a 30 de junio de 1993.
EL DIRECTOR


ING. JOSE MANUEL COVARRUBIAS SOLIS

JMCS*EGLM*ggt*

A mi Gente.

La Naturaleza sabe quien la ama.

PROPAGACIÓN DE ONDAS SÍSMICAS EN MEDIOS ESTRATIFICADOS

Contenido.

Resumen.		2
Abstract.		2
Capítulo I.	INTRODUCCIÓN.	3
Capítulo II.	ONDAS SÍSMICAS EN MEDIOS ESTRATIFICADOS.	
II.1.-	Ondas Elásticas.	7
II.2.-	Propagación en un semiespacio (superficie libre).	12
II.2.1.-	Ondas SH.	12
II.2.2.-	Ondas P y SV.	13
II.2.3.-	Ondas de Rayleigh.	17
II.3.-	Propagación en dos semiespacios adyacentes.	21
II.4.-	Propagación en un estrato plano sobre un semiespacio.	23
II.4.1.-	Ondas de Love.	23
II.5.-	Propagación en un estrato sobre una base rígida.	26
II.6.-	Propagación en dos estratos sobre una base rígida.	27
Capítulo III.	RESPUESTA ANTE ONDAS INCIDENTES.	
III.1.-	El Método de Thomson-Haskell.	30
III.1.1.-	Caso SH.	31
III.1.2.-	Caso P y SV.	36
III.1.3.-	Ejemplo de aplicación del Caso SH.	39
III.2.-	El Método de Kennett.	41
Capítulo IV.	RESPUESTA ANTE FUENTE PUNTUAL.	
IV.1.-	Fuente Cilíndrica en un Semiespacio.	43
IV.2.-	Respuesta de un Estrato Plano sobre una Base Rígida.	51
Capítulo V.	RESULTADOS NUMÉRICOS Y APLICACIONES.	
V.1.-	Respuesta del Semiespacio.	56
V.2.-	Respuesta de un Modelo Estratificado.	59
V.2.1.-	Método de Thomson-Haskell.	59
V.2.2.-	Método de Kennett.	61
V.3.-	Respuesta de un Semiespacio con Fuente Puntual.	64

V.4.-	Respuesta de un Estrato con Fuente Puntual sobre una Base Rígida.	66
V.5.-	Respuesta de un Estrato Irregular y Aplicación al Estudio de la Respuesta Sísmica de la Cuenca de México.	68
	V.5.1.- Validación del Método.	69
	V.5.1.1.- Ondas SH.	69
	V.5.2.- Ondas P y SV.	77
	V.5.3.- Aplicación a la Cuenca de México.	81
Capítulo VI.	CONCLUSIONES.	94
	Agradecimientos.	95
	Referencias.	96
	Apéndices.	104

Resumen.

En el presente trabajo se hace una breve descripción de la teoría básica de la propagación de ondas en medios elásticos, para luego abordar dos técnicas enfocadas al modelado de la propagación de ondas en medios estratificados, los métodos de *Thomson-Haskell* y *Kennett*. Se describen brevemente sus fundamentos teóricos y se aplican con el fin de compararlos. Finalmente, el método de Haskell se aplica como solución de referencia al modelado de la respuesta sísmica de la Cuenca de México, con el fin de probar la posible contribución de estructuras profundas pertenecientes a la formación Cuautla en la amplificación y duración de los eventos registrados.

Abstract.

A brief description of the basic theory of wave propagation in simple elastic media is made in order to focus on the numerical modeling of wave propagation in strata. *Thomson-Haskell* and *Kennett* methods are then reviewed and applied to simple propagative media for comparison purposes. Finally, the Thomson-Haskell method is applied to obtain a reference solution in the process of modeling the seismic response of México City's basin. It is attempted to establish the possible influence of the deep structure of the Cuautla formation in the behaviour of the surface seismic response.

I.- INTRODUCCIÓN.

La sismología, de las voces griegas *seiein*, mover y *logos*, tratado, como ciencia que estudia los sismos (su origen, localización, orientación, mecanismos y magnitudes), las ondas que generan y su propagación y el medio físico por el que estas atraviesan (interior del planeta, litósfera y corteza terrestre) se apoya para su estudio tanto en el análisis de registros de campo de desplazamiento, velocidad y aceleración del terreno como en el desarrollo de modelos teóricos de fuente, trayectoria y sitio. Estas disciplinas (sismología de campo y teórica) complementándose entre sí y retroalimentándose han ayudado no sólo a mejorar la comprensión de la dinámica terrestre, sino a desarrollar otras de importancia relevante para la infraestructura de un país, como lo son la Ingeniería Sísmica, aplicación del conocimiento de la mecánica ondulatoria y de las vibraciones en la construcción de obras civiles, y la Sismología de Exploración, aplicación del estudio de la propagación de ondas sísmicas en el subsuelo con fines prospectivos.

Dentro de la sismología teórica, y en particular en el estudio de los efectos de sitio, uno de los campos de mayor interés en la actualidad es el de la respuesta de medios heterogéneos ante la incidencia de ondas elásticas, incluyéndose entre los más importantes a los llamados transversalmente heterogéneos o estratificados, tanto por guardar una estrecha correspondencia con los depósitos sedimentarios de interés económico del subsuelo, como por ser representativos del tipo de terreno de mayor riesgo en el asentamiento de obras civiles. De hecho, la ciudad de México, que ha mostrado ser muy sensible a eventos sísmicos en el pasado (e.g. terremotos de 1957 y 1985) está asentada en una proporción importante sobre una estratigrafía somera de depósitos lacustres blandos acumulados sobre una topografía baja correspondiente a una cuenca hidrológica endorreica, cerrada en el Cuaternario. Estos depósitos someros de edad pliocénica (fig. 1.1) que ya han sido estudiados por autores como Rosenblueth (1952), Marsal y Mazari (1959), Bustamante (1964), Zeevaret (1964) y Faccioli (1976) entre otros, presentan una correlación directa entre sus espesores y las áreas de mayor daño para el terremoto de 1985 (Sánchez-Sesma *et al.*, 1988a) y descansan sobre una capa de depósitos vulcanosedimentarios de edad miocénica que a su vez yacen sobre estratos oligocénicos de vulcanitas de gran espesor que están asentadas sobre capas terciarias de calizas correspondientes a la formación Cuautla (Mooser, comunicación personal, fig. 1.2). Se desprende de aquí la necesidad de conocer la respuesta de estas configuraciones geológicas ante la presencia de ondas sísmicas mediante modelos numéricos, con el fin de prevenir futuros desastres naturales, contar con una base teórica para la revisión y adecuación de los reglamentos de construcción y motivar el desarrollo de estudios más detallados en el futuro.

Uno de los primeros estudiosos de la sismología teórica y a quien se deben los primeros fundamentos sobre el problema del modelado y generación de ondas superficiales es Horace Lamb (1904) quien desarrolla los primeros sismogramas sintéticos para una fuente impulsiva en un semiespacio elástico (capítulo IV, fig 1.3). A partir de entoces, los avances han sido notables gracias al desarrollo de la tecnología computacional y a la contribución de muchos otros autores.

A finales de los años 60 y principios de los 70, el desarrollo de los sismogramas sintéticos se consolida y variadas técnicas con resultados equivalentes son implementadas, todas ellas basadas esencialmente en la solución de ecuaciones diferenciales mediante técnicas analíticas, numéricas, asintóticas e iterativas. Desde los años 70 otros desarrollos han surgido y trabajos más o menos recientes como el de Kennett (1981, 1983) han motivado el desarrollo de técnicas más baratas y generales.

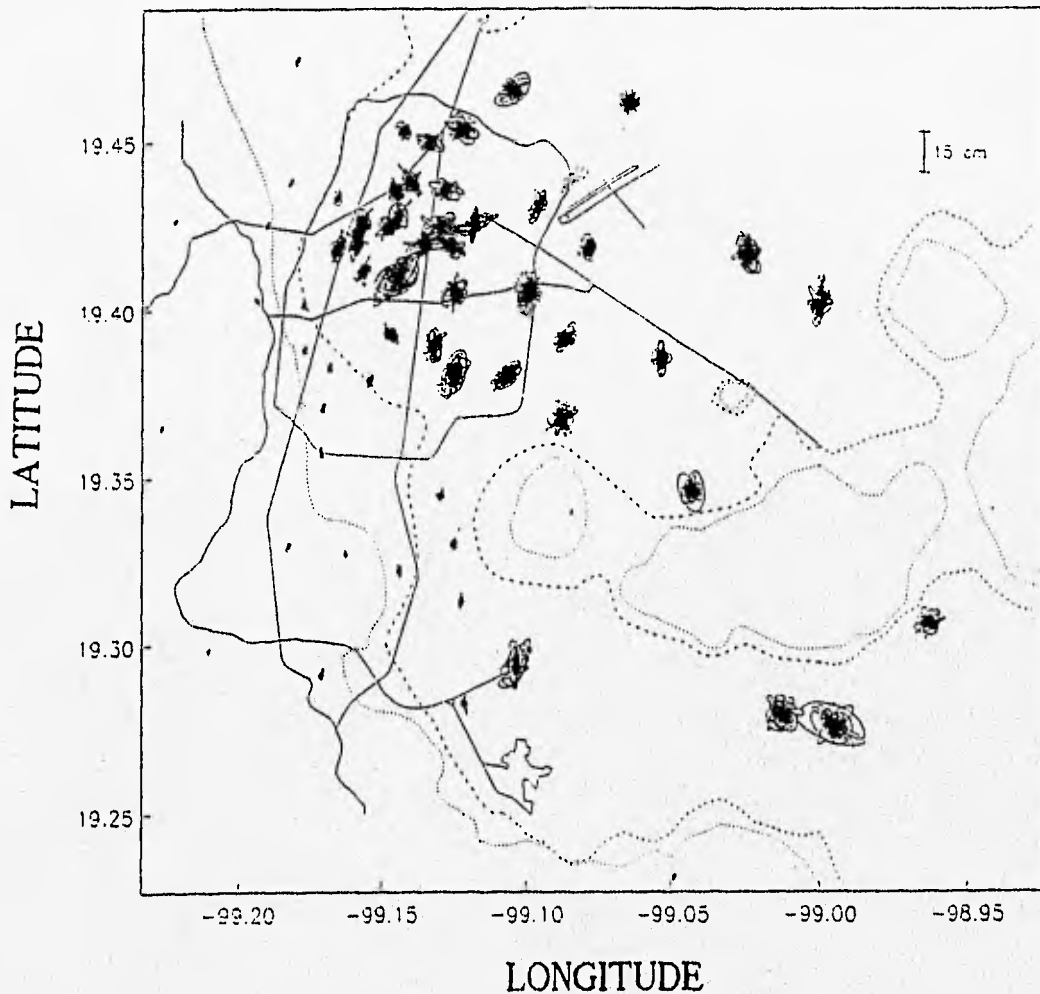


fig. 1.1.- Movimiento horizontal de partícula durante el terremoto del 25 de Abril de 1989. La línea discontinua corta marca el límite entre la zona de lomas y la zona de transición y la línea discontinua larga el límite entre la zona de transición y la zona de lago. Nótese la diferencia en amplitudes de desplazamiento entre estas tres zonas, como evidencia de la contribución de los sedimentos blandos superficiales al movimiento en el Valle de México. Sánchez-Sesma *et al.*, 1989.

En el presente trabajo se hace una revisión de algunas de estas técnicas con base en la teoría básica de la propagación de ondas elásticas. Esta teoría se aplica luego al estudio de la respuesta de configuraciones geométricas sencillas y se abordan también los campos referentes a la respuesta sísmica de los medios estratificados para una incidencia de ondas planas y con una fuente puntual. Finalmente se estudia la respuesta de un estrato irregular usando la

solución para un medio estratificado plano como referencia en un método indirecto de elementos de frontera. Se trata de una aproximación de la estructura profunda de la formación Cuautla. Se busca establecer su contribución a la respuesta sísmica de la Cuenca de México.

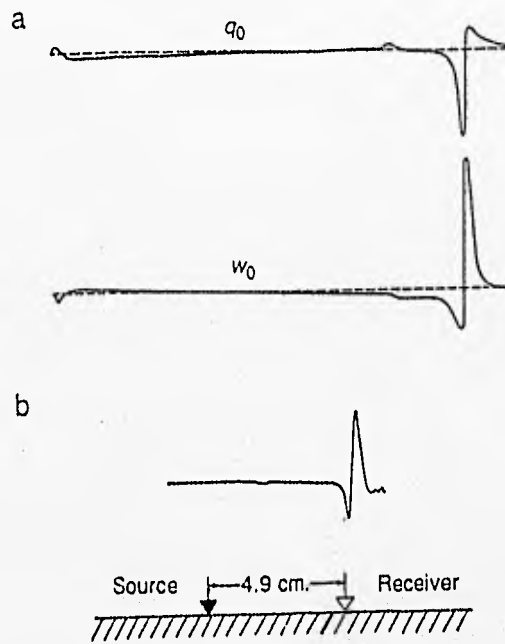


fig. 1.3.- Componentes radial y vertical de movimientos calculados por H. Lamb en 1904 y considerados como los primeros sismogramas sintéticos. La tercera señal muestra el registro vertical para una fuente puntual. La mayor amplitud corresponde al pulso no dispersivo de Rayleigh. Lay y Wallace, 1995.

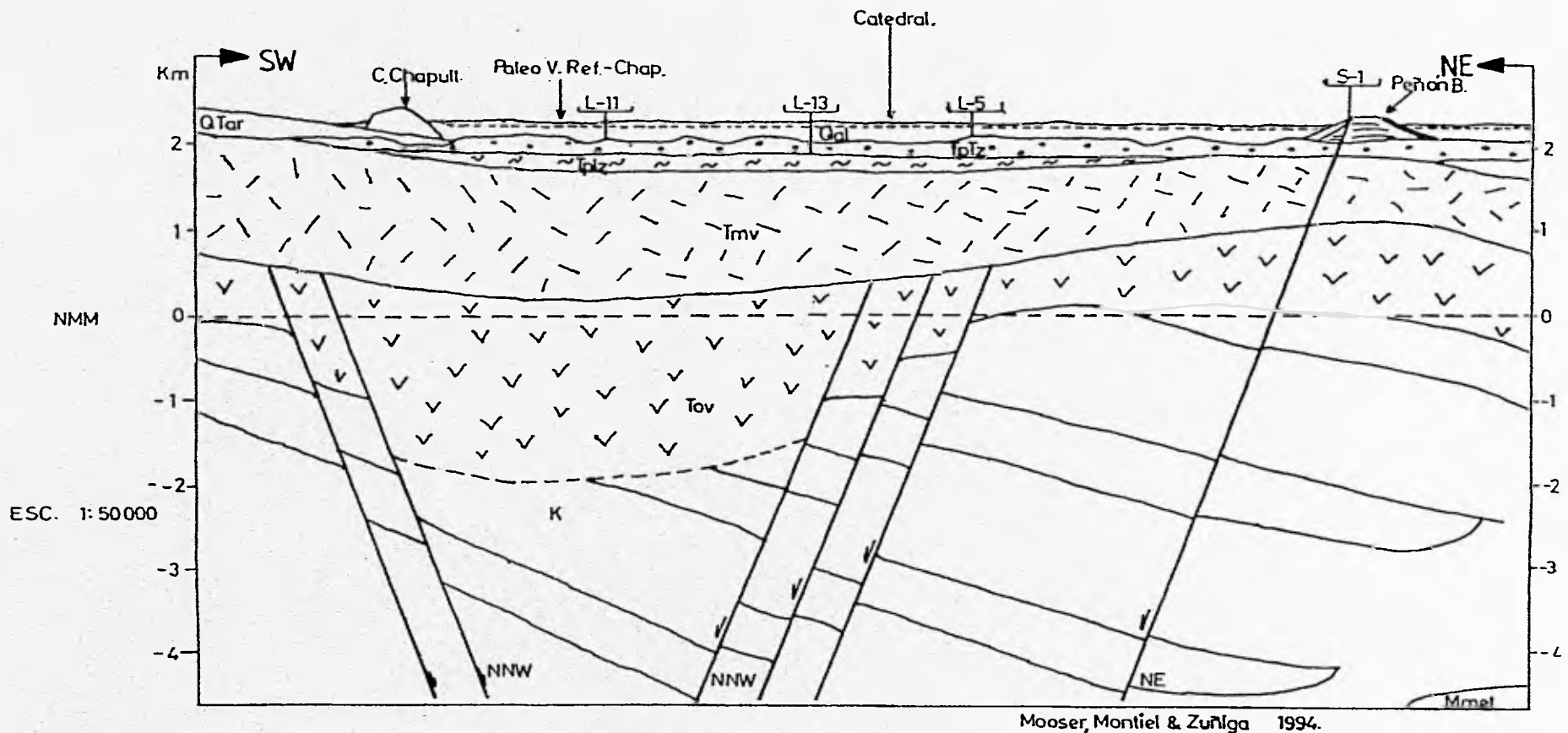


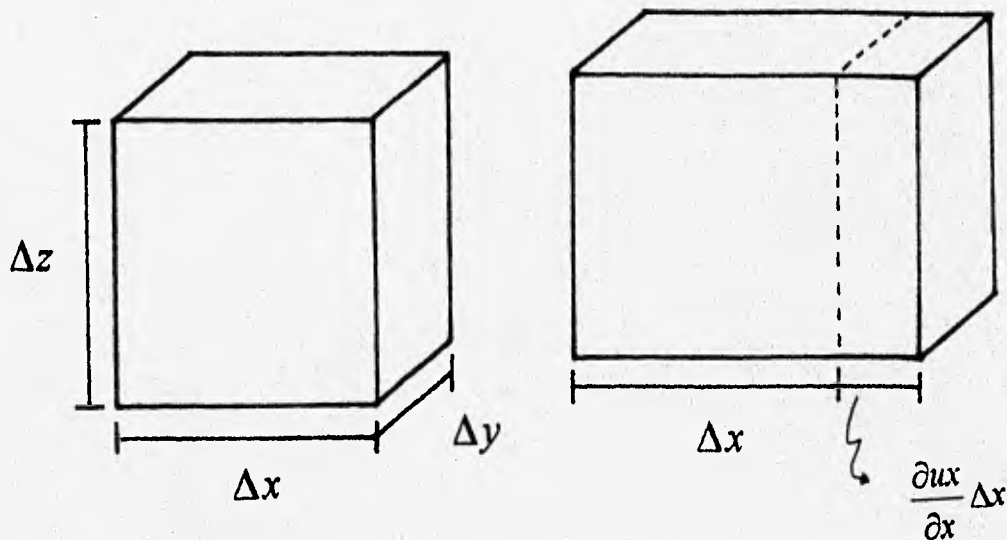
fig. 1.2.- Croquis del perfil Chapultepec-Peñón, donde se muestra la estructura profunda de la Fm. Cuautla inferida a partir de datos de PEMEX, así como la litología conocida hasta los 1000 m. de profundidad bajo el Valle de México. La línea discontinua superficial marca con un espesor exagerado la posición de los estratos blandos superficiales. Nótese el espesor de los sedimentos volcánicos del Oligoceno por efecto de la falla-Mixihuca, y en cuyo modelado se centra la aplicación final de este trabajo.
 Tmv.- Vulcanitas del Mioceno; K.- Calizas del Cretácico; Qal.- Aluvión; TpTz.- Fm Tepozteco; TpLz.- Lacustres del Plioceno; Tov.- Vulcanitas del Oligoceno; Qtar.- Fm. Tarango. Mooser *et al.*, comunicación personal.

II.- ONDAS SÍSMICAS EN MEDIOS ESTRATIFICADOS

II.1.- Ondas Elásticas.

El estudio de la propagación de las ondas elásticas tiene su origen en la época de la búsqueda de una explicación de la naturaleza de la luz. En la primera mitad del siglo XIX, la luz era considerada como la propagación de una perturbación en un éter elástico y como apunta la introducción histórica de A.E.H. Love en su *Teoría de la Elasticidad*, las investigaciones de Fresnel en 1816 y Thomas Young en 1818 mostraron que dos haces de luz polarizada en planos perpendiculares uno de otro no interfieren entre sí. Fresnel concluyó que esto podía explicarse sólo por la existencia de ondas transversales, es decir, de desplazamiento normal a la dirección de propagación. Esta observación dió al estudio de la elasticidad un empuje poderoso que acabó atrayendo al campo de las ondas a los matemáticos L. Cauchy y Simeon-Denis Poisson, entre otros. El propósito de esta sección es presentar las ecuaciones fundamentales que gobiernan la propagación de ondas elásticas y mostrar las características de las ondas planas, que son las que presentan soluciones más simples.

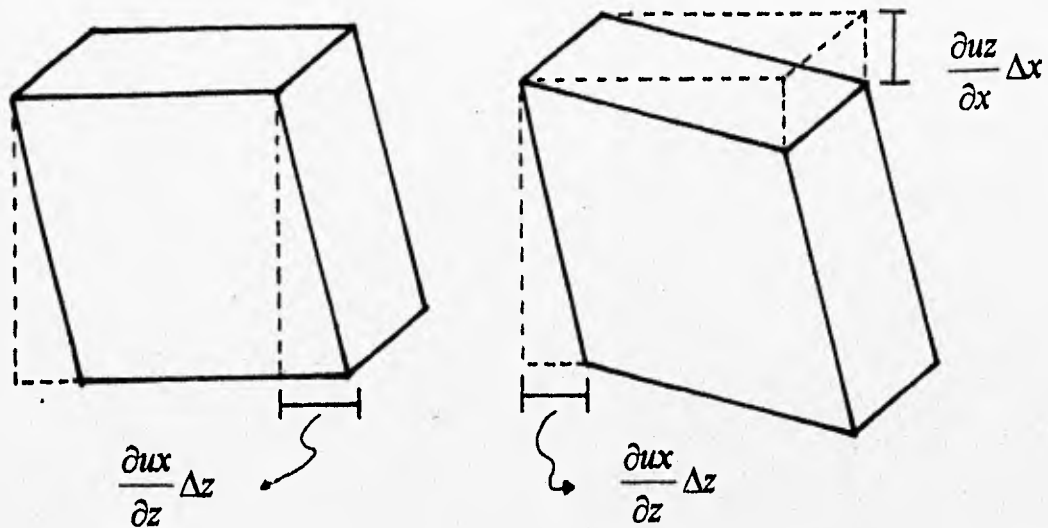
Considérese un paralelepípedo rectangular situado en el interior de un medio continuo uniforme de material homogéneo e isótropo en el sistema cartesiano mostrado (fig. 2.1).



figs. 2.1 y 2.2.- Paralelepípedo en estado de equilibrio indeformado y con una deformación de extensión simple en su cara derecha.

Si tal paralelepípedo sufre un pequeño desplazamiento en su cara derecha (fig 2.2), dado que este desplazamiento se da en la dirección del eje de referencia, se define como extensión simple. Si ahora el mismo dominio experimenta una deformación oblicua, es decir, en una di-

rección con respecto a un eje (fig. 2.3), se dice que ha sufrido un desplazamiento cortante simple. La deformación en dos direcciones se denominará cortante pura (fig. 2.4).



figs. 2.3 y 2.4.- Paralelepípedo con deformación oblicua (cortante simple) y deformación bidireccional (cortante pura).

La expresión general de estas deformaciones escrita mediante un tensor cartesiano está dada por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.1)$$

que se conoce como el tensor de deformaciones de Cauchy. Puede demostrarse que ε_{ij} permite describir la cinemática del movimiento y está relacionado con cambios de longitud de las partículas a lo largo de tres direcciones en la vecindad del punto en el que se valúa este tensor (Fung, 1965). u es el desplazamiento, definido como el cambio de posición de una partícula del medio con respecto a un eje de referencia. Los subíndices i y j indican la orientación del propio desplazamiento o eje de referencia, según se aplique.

Las fuerzas internas por unidad de área se denominan esfuerzos y están asociados a direcciones perpendiculares a las áreas de referencia. Si estas direcciones coinciden con las coordenadas es posible definir σ_{ij} como el esfuerzo que actúa en una cara i en la dirección j . (fig. 2.5). Los esfuerzos y deformaciones se relacionan a través de una ecuación empírica desarrollada en el siglo XVII y conocida como Ley de Hooke, que en notación indicial se expresa como:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.2)$$

donde c_{ijkl} es un conjunto de constantes de proporcionalidad de los módulos elásticos. Recuerdese que los índices repetidos en la notación indicial representan una suma en el rango de validez. La ecuación (2.2) puede expresarse, para medios homogéneos, lineales e isótropos como:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.3)$$

donde ε_{kk} es la deformación volumétrica y λ y μ las constantes elásticas de G. Lamé. El lector debe recordar que en notación indicial se cumple que $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$.

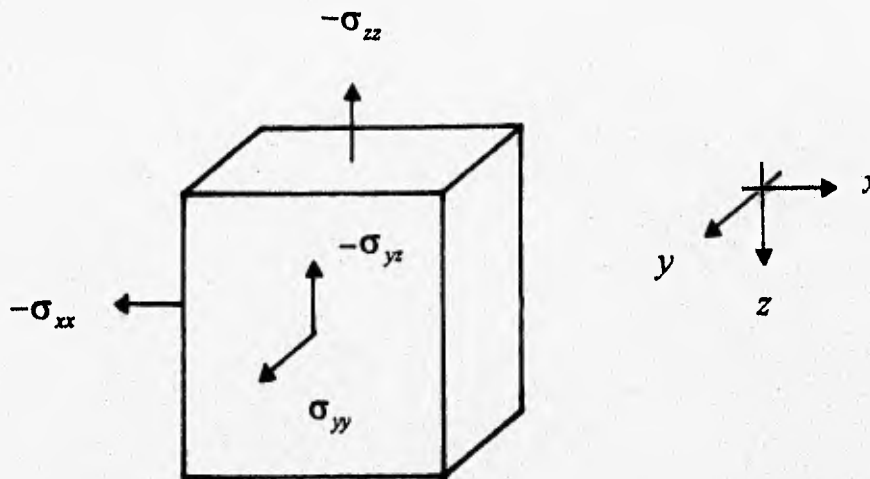


fig. 2.5.- Convención de notación para un esfuerzo σ_{ij} aplicado sobre la cara de un cubo material.

Considerando ahora el equilibrio dinámico en función de los esfuerzos, fuerzas externas y de inercia se tiene:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.4)$$

donde f_i representa a las fuerzas externas y t es el tiempo. Sustituyendo las ecuaciones (2.1) y (2.3) en la (2.4), se obtiene un juego de ecuaciones en derivadas parciales que en notación vectorial pueden resumirse en la llamada ecuación de Navier, desarrollada en 1821 y que puede escribirse como:

$$\mu \nabla^2 \bar{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \bar{u}) + \bar{f} = \rho \ddot{\bar{u}} \quad (2.5)$$

El Teorema de Helmholtz y el cambio de variables de Jean le Rond (mejor conocido como D'Alembert) ofrecen la posibilidad de explorar algunas posibles soluciones y sus implicacio-

nes. Si se acepta que no hay cambio de volumen ($\varepsilon_{kk}=0$ o $\nabla \cdot \bar{u}=0$) y se considera a la identidad:

$$\nabla^2 \bar{u} = \nabla(\nabla \cdot \bar{u}) - \nabla \times (\nabla \times \bar{u}) \quad (2.6)$$

se obtiene, en ausencia de fuerzas de cuerpo:

$$\nabla^2 \bar{u} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \quad (2.7)$$

que es la ecuación para la propagación de ondas S , donde $\beta = (\mu/\rho)^{1/2}$ es su velocidad de propagación. Supóngase ahora que no hay cambio en las relaciones angulares ($\nabla \times \bar{u}=0$). De las ecuaciones (2.5) y (2.6) se obtiene en ausencia de fuerzas de cuerpo:

$$\nabla^2 \bar{u} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \quad (2.8)$$

que es la ecuación para la propagación de ondas P , donde $\alpha = ((\lambda+2\mu)/\rho)^{1/2}$ es la velocidad.

Para ilustrar algunas características importantes de las soluciones de estas ecuaciones se consideran los casos más simples. Supóngase que \bar{u} en la ecuación (2.7) es función sólo de x y de t y que sólo el componente y es no nulo. De esta manera, esta ecuación puede escribirse:

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \quad (2.9)$$

y puede demostrarse que

$$u_y = f(t - x/\beta) + g(t + x/\beta) \quad (2.10)$$

es una solución donde f y g son funciones arbitrarias que aquí representan ondas que viajan en las direcciones positiva y negativa de x respectivamente, con un movimiento de partícula en dirección y , es decir, (2.10) representa la propagación de ondas S que no imprimen un cambio de volumen en el medio.

Si ahora, de la ecuación (2.8) se acepta que sólo se tiene movimiento en la dirección x , esta puede escribirse como:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \quad (2.11)$$

Así, el desplazamiento en la dirección x debido a ondas P propagándose a lo largo del eje x está dado por:

$$u_x = f(t - x/\alpha) + g(t + x/\alpha) \quad (2.12)$$

Es claro que es posible establecer que:

$$u_x = Ae^{i\omega(t-x/\alpha)} + Be^{i\omega(t+x/\alpha)} \quad (2.13)$$

es también solución.

Se ha considerado en las líneas precedentes la ecuación unidimensional de onda. Esta puede escribirse como:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (2.14)$$

y se ha demostrado que funciones arbitrarias de los argumentos $t \pm x/c$ son posibles soluciones; es decir:

$$\phi = f(t \pm x/c) \quad (2.15)$$

representa esas posibles soluciones, donde c es la velocidad de propagación de la onda.

Supóngase ahora una onda que se propaga a lo largo de la coordenada s ($x_i = x_i^{(0)} + n_i s$, donde $x_i^{(0)}$ es la posición para la que $s=0$ y n_i es el vector unitario que define la dirección y sentido para $s>0$), entonces, de acuerdo con la ecuación anterior, una solución puede ser:

$$\phi = g(t - s/c) \quad (2.16)$$

Si todas las direcciones posibles son admisibles, es claro que la ecuación de onda escalar en tres dimensiones queda:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (2.17)$$

A las soluciones a las que da lugar expresiones como la ecuación (2.17) se les llama *ondas planas homogéneas* y en general son de la forma:

$$\phi = g(t - (\bar{n} \cdot \bar{x})/c) = g(t - (x_i n_i)/c) \quad (2.18)$$

II.2.- Propagación en un Semiespacio (superficie libre).

El interés de revisar el modelado de la propagación de ondas planas en un semiespacio es contar con un medio de calibración y comparación para los diferentes métodos a partir del modelado de la propagación de ondas elásticas a través de un medio homogéneo, elástico e isótropo. Este modelo, aunque en sí es una idealización, puede aplicarse por ejemplo para modelar el comportamiento elástico de la Astenósfera terrestre.

Sea entonces un semiespacio elástico, si se supone como plano de incidencia al XZ de acuerdo con el sistema de referencia mostrado, entonces las ondas P , SV y SH seguirán las trayectorias mostradas en la fig. 2.6.

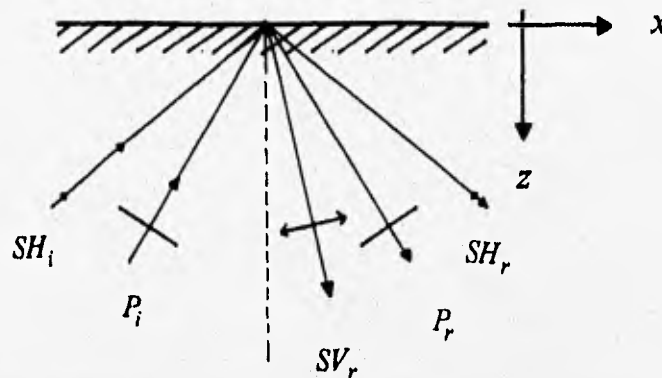


fig. 2.6.- Representación simplificada de un semiespacio elástico y trayectorias de las ondas SH , P y SV al incidir sobre la superficie libre de esfuerzos que lo delimita.

II.2.1.- Ondas SH .

Ante la incidencia de una onda plana, la reflexión debe ser tal que se cumpla la condición de superficie libre. En nuestro caso basta que:

$$\left. \frac{\partial u_y}{\partial z} \right|_{z=H} = 0 \quad (2.19)$$

Por ello es fácil demostrar que:

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \quad (2.20)$$

Al tratarse de una onda SH , esta se reflejará con el mismo ángulo con el que incide (fig. 2.7), entonces, las ecuaciones para la onda incidente y reflejada serán, respectivamente:

$$u_{yi} = f(t + (z \cos \gamma - x \sin \gamma) / \beta) \quad (2.21)$$

$$u_{yr} = f(t - (z \cos \gamma + x \sin \gamma) / \beta) \quad (2.22)$$

donde los subíndices i y r corresponden a las ondas incidente y reflejada respectivamente, y donde u es el desplazamiento expresado en términos de soluciones de la ecuación de onda de la forma (2.18) en función del ángulo de incidencia, la velocidad de propagación de las ondas S, la posición del observador y el tiempo. Como es claro, la amplitud de la onda incidente se duplica al incidir en la superficie libre.

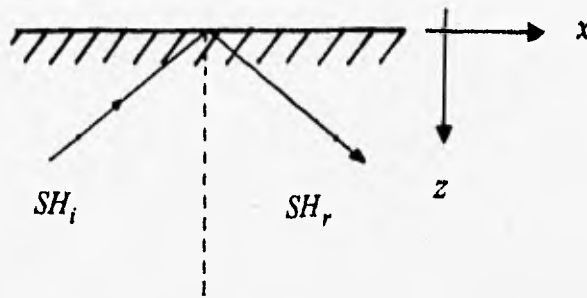


fig. 2.8.- Incidencia de ondas SH sobre una superficie libre al propagarse a través de un semiespacio elástico.

II.2.2.- Ondas P y SV.

En la propagación de las ondas P y SV en el plano XZ , el desplazamiento de partícula para ambas se da en un mismo plano. El análisis correspondiente se simplifica mediante el uso de potenciales de desplazamiento.

Sea \bar{u} el vector desplazamiento, este puede expresarse como:

$$\bar{u} = \nabla\phi + \nabla \times \bar{\psi}; \quad \nabla \cdot \bar{\psi} = 0 \quad (2.23)$$

donde ϕ y $\bar{\psi}$ son los potenciales de desplazamiento escalar y vectorial, respectivamente. Puede demostrarse que, bajo condiciones muy generales (Aki y Richards, 1980), la ecuación (2.23) es solución de la ecuación de Navier, si ϕ y ψ son soluciones de:

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \quad (2.24)$$

$$\nabla^2\bar{\psi} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial t^2} \quad (2.25)$$

Es claro, a partir de (2.23), que los desplazamientos son de la forma:

$$u_x = u = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z} \quad (2.26)$$

$$u_y = v = 0 \quad (2.27)$$

$$u_z = w = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \quad (2.28)$$

donde $u=u(x,z)$; $v=0$; $w=w(x,z)$. Los esfuerzos en $z=0$ quedan:

$$\sigma_{zz} = \lambda \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial z} \right) \quad (2.29)$$

$$\sigma_{xz} = \mu \left(2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial z^2} \right) \quad (2.30)$$

Las trayectorias de incidencia y reflexión de las ondas P y SV se muestran en las figuras 2.8 y 2.9, respectivamente.

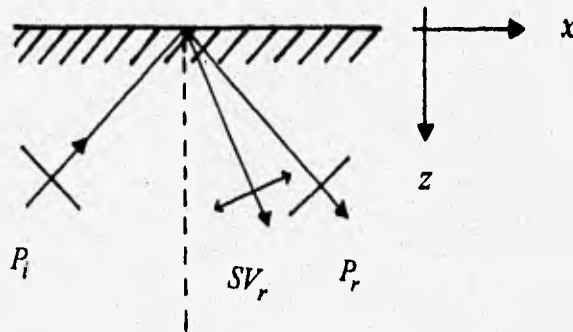


fig. 2.8.- Trayectorias de propagación para ondas P al incidir sobre la superficie libre de un semiespacio elástico.

De (2.24) y (2.25), mediante el método de separación de variables, pueden encontrarse las soluciones en términos de potenciales (White, 1965):

$$\phi = A_0 e^{Mz} e^{Lx} e^{\Omega t} \quad (2.31)$$

$$\psi = B_0 e^{Kz} e^{Lx} e^{\Omega t} \quad (2.32)$$

donde:

$$M^2 + L^2 = \Omega^2/\alpha^2; K^2 + L^2 = \Omega^2/\beta^2$$

$$\Omega = i\omega; L = -il; l = \omega/c;$$

$$c = \alpha/\text{sen } \gamma_p = \beta/\text{sen } \gamma_s$$

$$\therefore M = \pm \sqrt{\omega^2(1/c^2 - 1/\alpha^2)} \quad (2.33)$$

$$\text{y: } K = \pm \sqrt{\omega^2(1/c^2 - 1/\beta^2)} \quad (2.34)$$

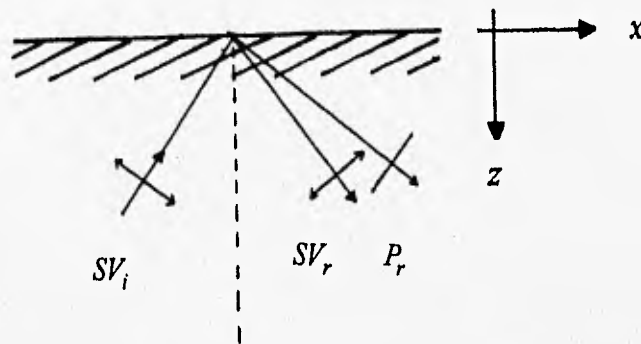


fig. 2.9.- Trayectoria de propagación para ondas SV al incidir sobre la superficie libre de un semiespacio elástico.

De (2.30) y (2.31) se ve que M y K pueden ser reales o imaginarios. De aquí se desprenden tres casos a considerar en el análisis de estas ondas y que son:

a).- $\beta < \alpha < |c|$

En este caso, los potenciales para P y SV son, de acuerdo con (2.31) y (2.32):

$$\phi = (A_1 e^{imz} + A_2 e^{-imz}) e^{-ilx} e^{i\omega t} \quad (2.35)$$

$$\psi = (B_1 e^{ikz} + B_2 e^{-ikz}) e^{-ilx} e^{i\omega t} \quad (2.36)$$

donde A_1 y B_1 son los coeficientes de los potenciales de las ondas P y SV incidentes en la superficie libre y A_2 y B_2 de las reflejadas. Si incide una onda P ($B_1=0$), de (2.35) y (2.36) en (2.29) y (2.30) se llega a las siguientes expresiones:

$$(\lambda l^2 + \lambda m^2 + 2\mu m^2)(A_1 + A_2) + 2\mu kl B_2 = 0 \quad (2.37)$$

$$2\mu ml(A_1 - A_2) + \mu(k^2 - l^2)B_2 = 0 \quad (2.38)$$

A partir de las ecuaciones anteriores, al dividir entre A_1 y resolviendo el sistema resultante se obtiene el coeficiente de reflexión para la onda P incidente que se refleja como una onda SV cuando $\beta < \alpha < |c|$, i.e.

$$\frac{B_2}{A_1} = -\frac{4(c^2/\alpha^2 - 1)^{1/2}(c^2/\beta^2 - 2)}{4(c^2/\alpha^2 - 1)^{1/2}(c^2/\beta^2 - 1)^{1/2} + (c^2/\beta^2 - 2)^2} \quad (2.39)$$

De manera similar, el coeficiente de reflexión para una onda P que se refleja como otra onda P cuando $\beta < \alpha < |c|$ es:

$$\frac{A_2}{A_1} = -\frac{4(c^2/\alpha^2 - 1)^{1/2}(c^2/\beta^2 - 1)^{1/2} + (c^2/\beta^2 - 2)^2}{4(c^2/\alpha^2 - 1)^{1/2}(c^2/\beta^2 - 1)^{1/2} + (c^2/\beta^2 - 2)^2} \quad (2.40)$$

Si ahora la onda que incide es SV ($A_1=0$), sustituyendo las ecuaciones (2.35) y (2.36) en (2.29) y (2.30) se obtienen las siguientes expresiones:

$$-(\lambda l^2 + \lambda m^2 + 2\mu m^2)A_2 + 2\mu k l(B_1 - B_2) = 0 \quad (2.41)$$

$$-2\mu m l A_2 + \mu(k^2 - l^2)(B_1 + B_2) = 0 \quad (2.42)$$

De las expresiones precedentes y dividiendo entre B_1 , se tiene que para una onda incidente SV cuando $\beta < \alpha < |c|$ y que se refleja como otra onda SV , el coeficiente de reflexión es:

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{4(c^2/\alpha^2 - 1)^{1/2}(c^2/\beta^2 - 1)^{1/2} - (c^2/\beta^2 - 2)^2}{4(c^2/\alpha^2 - 1)^{1/2}(c^2/\beta^2 - 1)^{1/2} + (c^2/\beta^2 - 2)^2} \quad (2.43)$$

y para una onda SV incidente que se refleja como onda P :

$$\frac{A_2}{B_1} = \frac{4(c^2/\beta^2 - 1)^{1/2}(c^2/\beta^2 - 2)}{4(c^2/\alpha^2 - 1)^{1/2}(c^2/\beta^2 - 1)^{1/2} + (c^2/\beta^2 - 2)^2} \quad (2.44)$$

II.2.3.- Ondas de Rayleigh.

b).- $\beta < |c| < \alpha$

Como en este caso m sería un valor creciente para valores crecientes de α , el término e^{imz} crecería infinitamente, lo que es irreal. Por ello, la suposición que se plantea es que el coeficiente para la onda P incidente sea nulo, es decir, $A_1=0$ en la ecuación (2.35), de modo que al sustituir en (2.29) y (2.30) y reduciendo, se llega a las siguientes expresiones:

$$\frac{A_2}{B_1} = -\frac{4(c^2/\beta^2 - 1)^{1/2}(c^2/\beta^2 - 2)}{(c^2/\beta^2 - 2)^2 + 4i(1 - c^2/\alpha^2)^{1/2}(c^2/\beta^2 - 1)^{1/2}} \quad (2.45)$$

$$\frac{B_2}{B_1} = -\frac{(c^2/\beta^2 - 2)^2 - 4i(1 - c^2/\alpha^2)^{1/2}(c^2/\beta^2 - 1)^{1/2}}{(c^2/\beta^2 - 2)^2 + 4i(1 - c^2/\alpha^2)^{1/2}(c^2/\beta^2 - 1)^{1/2}} \quad (2.46)$$

c).- $|c| < \beta < \alpha$

En este caso, los coeficientes A_1 y B_1 son nulos en las expresiones (2.35) y (2.36), el primero de ellos supuesto así para evitar el ya mencionado efecto irreal del crecimiento indefinido del término exponencial e^{imz} al crecer progresivamente el ángulo de incidencia, y el segundo, debido a que en la expresión (2.36) se considera sólo la incidencia de una onda P y su correspondiente reflexión como una onda SV . De esta forma, a partir de las expresiones (2.29) y (2.30) puede llegarse a:

$$-A_2(m\lambda l^2 + \lambda m^2 + 2\mu m^2) - B_2(2\mu lk) = 0 \quad (2.47)$$

$$A_2(-2\mu ml) + B_2\mu(-l^2 + k^2) = 0 \quad (2.48)$$

Partiendo de (2.47) y (2.48), al dividir entre B_2 y luego de reducir e igualar las dos expresiones anteriores, se obtiene:

$$\frac{2i(1 - c^2/\beta^2)^{1/2}}{2 - c^2/\beta^2} = \frac{2 - c^2/\beta^2}{2i(1 - c^2/\alpha^2)^{1/2}} \quad (2.49)$$

que puede expresarse en forma reducida como:

$$(2 - c^2/\beta^2)^2 - 4(1 - c^2/\beta^2)^{1/2}(1 - c^2/\alpha^2)^{1/2} = 0 \quad (2.50)$$

La expresión (2.50) es conocida como la ecuación de Lord Rayleigh, desarrollada en 1886. De ella, la raíz real $c=c_R$; $c_R < \beta$ es la velocidad de propagación de las ondas de *Rayleigh*, que son ondas superficiales que se atenúan con la profundidad, compuestas de ondas *P* y *SV* y que viajan acopladas en la superficie describiendo un movimiento de partícula en trayectorias elípticas retrógradas (fig. 2.10a,b). A una profundidad de $1/5$ de la longitud de onda el movimiento se vuelve progradado (Stein, Seth. 1987). La figura 2.11 muestra la variación de la excentricidad de las elipses en función de la relación de Poisson para un semiespacio general.

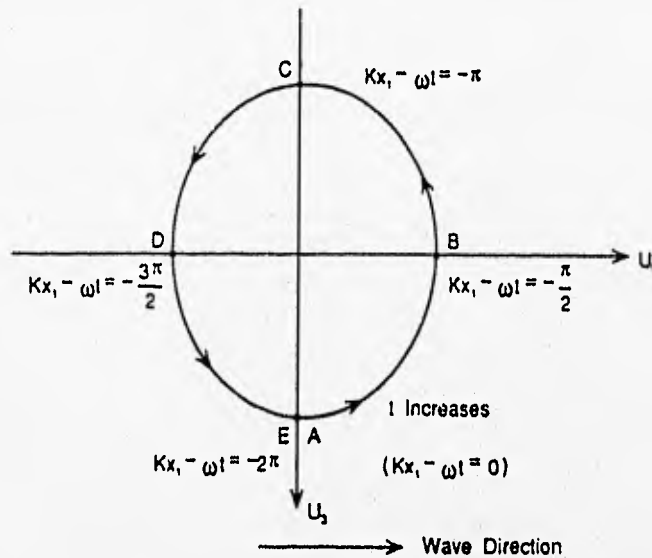


fig. 2.10a.- Comportamiento de una partícula individual como una función del tiempo. El movimiento superficial es retrógrado y elíptico. Lay y Wallace, 1995.

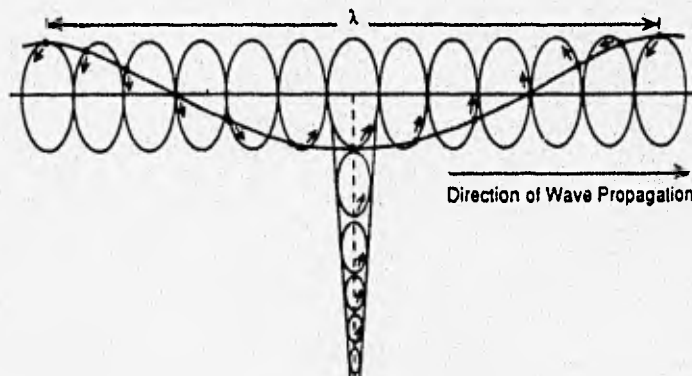


fig. 10b.- movimientos sobre una longitud de onda para una onda de Rayleigh a lo largo de la superficie y como función de la profundidad. Lay y Wallace, 1995.

Las figuras 2.12 a 2.15 son esquemas tridimensionales que muestran los diferentes tipos de onda que se generan en un semiespacio en relación a su dirección de propagación y el tipo de movimiento que imprimen a las partículas del terreno.

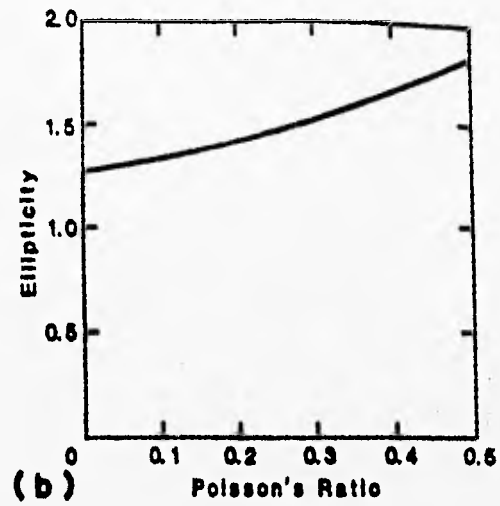


fig. 2.11.- Gráfica de variación de la excentricidad de las elipses de las ondas de Rayleigh en función de la relación de Poisson. Stein, S., 1987.

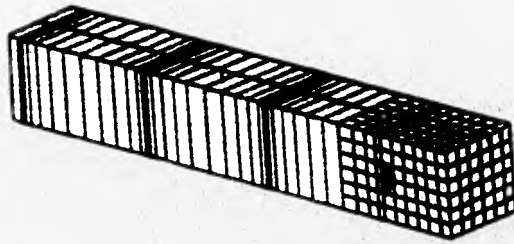


fig. 2.12.- Diagrama tridimensional del comportamiento de un medio elástico al paso de las ondas P. Padilla y Sánchez, 1987.

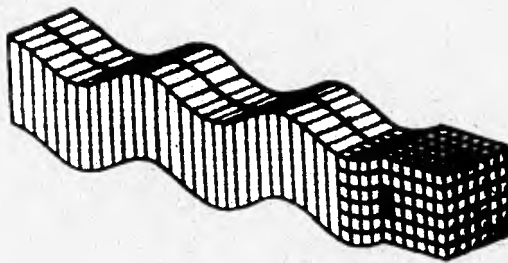


fig. 2.13.- Diagrama tridimensional del comportamiento de un medio elástico al paso de las ondas S. Padilla y Sánchez, 1987.

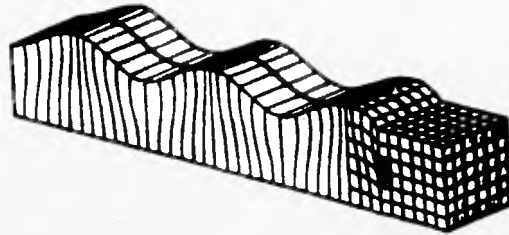


fig. 2.14.- Diagrama tridimensional del comportamiento de un medio elástico al paso de las ondas de Rayleigh. Padilla y Sánchez, 1987.

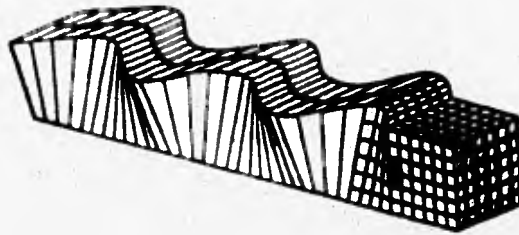


fig. 2.15.- Diagrama tridimensional del comportamiento de un medio elástico al paso de las ondas de Love. Padilla y Sánchez, 1987.

La figura 2.16 muestra esquemáticamente a los diferentes tipos de onda generados durante un evento sísmico.

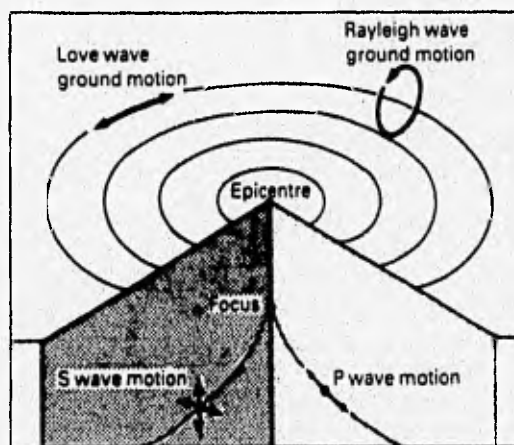


fig. 2.16.- Foco y epicentro de un terremoto mostrando las principales ondas sísmicas que se originan. Keary y Vine, 1990.

II.3.- Propagación en dos Semiespacios Adyacentes.

A partir del análisis para la propagación de ondas P , SV y SH en un semiespacio con superficie libre pueden encontrarse los coeficientes de reflexión-transmisión para el caso de dos medios elásticos adyacentes con propiedades mecánicas diferentes. Su planteamiento es similar al de la óptica geométrica.

Así, sean dos semiespacios adyacentes (fig. 2.17).

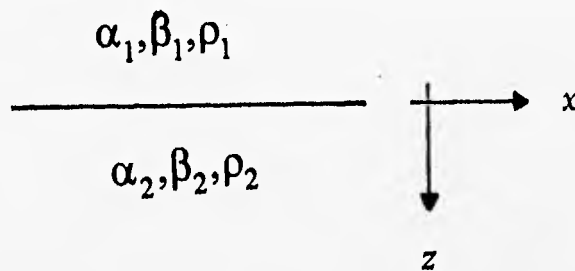


fig. 2.17.- Representación simplificada de un medio de propagación constituido por dos semiespacios adyacentes con propiedades elásticas diferentes.

Si se definen como coeficientes de onda incidente, reflejada y transmitida a:

$$v_i = v_0 e^{+ikx \operatorname{sen} \gamma_1} e^{-ikz \operatorname{cos} \gamma_1} e^{-i\omega t}, \quad v_0 = 1 \quad (2.51)$$

$$v_r = R e^{+ikx \operatorname{sen} \gamma_1} e^{+ikz \operatorname{cos} \gamma_1} e^{-i\omega t} \quad (2.52)$$

$$v_t = T e^{+ikx \operatorname{sen} \gamma_2} e^{-ikz \operatorname{cos} \gamma_2} e^{-i\omega t} \quad (2.53)$$

Las expresiones (2.51), (2.52) y (2.53) cumplen con la ley de Sahl-Snell-Descartes, que dice que "las ondas reflejadas y transmitidas en una interfaz plana conservan el número de onda de la onda incidente en su componente paralelo a la interfaz", *i.e.*

$$\frac{\omega}{\beta_1} \operatorname{sen} \gamma_1 = \frac{\omega}{\beta_2} \operatorname{sen} \gamma_2$$

que implica que

$$\frac{\operatorname{sen} \gamma_1}{\beta_1} = \frac{\operatorname{sen} \gamma_2}{\beta_2} \quad (2.54)$$

Si $\beta_1 < \beta_2$, esto implica que $\gamma_2 < \gamma_1$ y si $\beta_2 > \beta_1$ y $\gamma_1 = \operatorname{ang} \operatorname{sen}(\beta_1/\beta_2)$ entonces, esto implica que $\gamma_2 = 90^\circ$ (reflexión total de ángulo crítico γ_1).

Si los desplazamientos en la interfaz se anulan, de (2.51) y (2.52) se tiene que el coeficiente de reflexión R estará dado por:

$$v_i + v_r = 0, \text{ es decir: } R = -1 \quad (2.55)$$

Para nuestro caso, donde existe la refracción, la condición de continuidad de desplazamientos en la interfaz permite que se cumpla la siguiente expresión:

$$v_i + v_r = v_t \text{ o de otra manera: } 1 + R = T \quad (2.56)$$

En términos de exponenciales puesto que la interfaz se sitúa en $z=0$:

$$2(e^{ikx \operatorname{sen} \gamma_1} e^{-i\omega t}) = e^{ikx \operatorname{sen} \gamma_2} \quad (2.57)$$

la transmisión de las ondas del semiespacio inferior al superior implica una continuidad de esfuerzos y tracciones en la interfaz, esto es:

$$\mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = \mu_2 \frac{\partial v_2}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (2.58)$$

Sustituyendo (2.57) en (2.58) y reduciendo, se tiene para la interfaz:

$$1 - R = \frac{\rho_2 \beta_2 \cos \gamma_2}{\rho_1 \beta_1 \cos \gamma_1} T \quad (2.59)$$

Y de acuerdo con (2.56) y (2.59):

$$T = \frac{2\rho_1 \beta_1 \cos \gamma_1}{\rho_1 \beta_1 \cos \gamma_1 + \rho_2 \beta_2 \cos \gamma_2} \quad (2.60)$$

$$R = \frac{\rho_1 \beta_1 \cos \gamma_1 - \rho_2 \beta_2 \cos \gamma_2}{\rho_1 \beta_1 \cos \gamma_1 + \rho_2 \beta_2 \cos \gamma_2} \quad (2.61)$$

Las expresiones (2.60) y (2.61) son los coeficientes de transmisión-reflexión para dos semiespacios adyacentes.

II.4.- Propagación en un Estrato Plano sobre un Semiespacio.

II.4.1.- Ondas de Love.

En 1911, A. E. H. Love sugirió que una onda superficial con movimiento de partícula transversal a la dirección de propagación podría ser producida por interacciones de ondas SH . Como estas son reflejadas totalmente en la superficie libre (Sección II.2.1), si una capa sobreyace a un semiespacio de velocidad mayor, las ondas incidentes a ángulos mayores al crítico no pueden escapar de la capa superficial e interfieren constructivamente, propagándose a lo largo de este y dando origen a las llamadas *ondas de Love*.

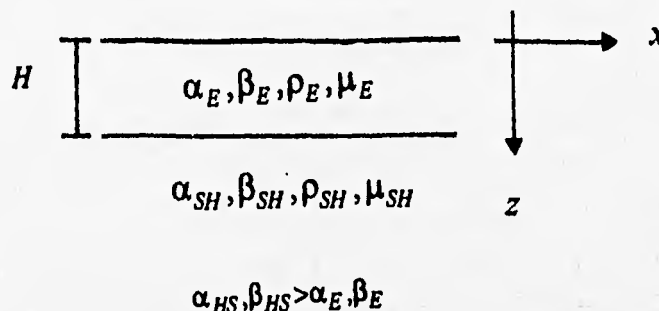


fig. 2.18.- Representación simplificada de un medio de propagación constituido por un estrato posado sobre un semiespacio elástico de mayor velocidad.

Sea entonces la configuración mostrada en la figura 2.18, si los potenciales para las ondas SH incidentes son los de las ecuaciones (2.62) y (2.63) para el estrato (E) y el semiespacio (HS) respectivamente:

$$u_{yE} = (B_1 e^{ikz} + B_2 e^{-ikz}) e^{-ilx} e^{i\omega t} \quad (2.62)$$

$$u_{yHS} = (B_3 e^{ikz} + B_4 e^{-ikz}) e^{-ilx} e^{i\omega t} \quad (2.63)$$

Como no se considera a la onda incidente en el semiespacio sino a la que regresa, entonces el coeficiente B_3 es nulo, de donde:

$$u_{yHS} = B_4 e^{-ikz} e^{-ilx} e^{i\omega t} \quad (2.64)$$

Las condiciones que deben cumplirse en el análisis son respectivamente, un esfuerzo nulo en la superficie libre (reflexión total), continuidad de este esfuerzo así como del desplazamiento u_y en la interfaz estrato-semiespacio, es decir:

$$\sigma_{yz} \Big|_{z=0} = 0 \quad (2.65)$$

$$\sigma_{yz_E} = \sigma_{yz_{HS}} \text{ en } z = h \quad (2.66)$$

$$u_{y_E} = u_{y_{HS}} \text{ en } z = h \quad (2.67)$$

El esfuerzo σ_{yz} está dado por:

$$\sigma_{yz} = \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \quad (2.68)$$

A partir de (2.62) en (2.68) y desarrollando:

$$\sigma_{yz_E} = \mu_2 \left[ik \left(B_1 e^{ikz} - B_2 e^{-ikz} \right) e^{-ilx} e^{i\omega t} \right] \quad (2.69)$$

De manera similar, de (2.64) en (2.68) y desarrollando:

$$\sigma_{yz_{HS}} = \mu_1 \left(-ik B_4 e^{-ikz} e^{-ilx} e^{i\omega t} \right) \quad (2.70)$$

De (2.69) y desarrollando según las condiciones (2.65) y (2.67), se llega a:

$$B_1 = B_2 \quad (2.71)$$

y:

$$2B_1 \cos(kh) = B_4 e^{-ikh} \quad (2.72)$$

Y, a partir de (2.71) y (2.72), según la condición (2.66) en la interfaz se tiene:

$$2\mu_2 k B_1 \sin(kh) = i\mu_1 k B_4 e^{-ikh} \quad (2.73)$$

Simplificando las últimas dos ecuaciones para $k = (\omega/c) \left(1 - c^2/\beta_2^2 \right)^{1/2}$ se llega a:

$$\tan \left[\frac{\omega h}{c} \left(\frac{c^2}{\beta_2^2} - 1 \right)^{1/2} \right] = \frac{\mu_1 \left(1 - c^2/\beta_1^2 \right)^{1/2}}{\mu_2 \left(c^2/\beta_2^2 - 1 \right)^{1/2}} \quad (2.74)$$

Puesto que las raíces deben ser reales pues representan a las velocidades aparentes para cada frecuencia angular involucrada, debe cumplirse que $\beta_2 < c < \beta_1$.

La expresión (2.74) no tiene solución analítica, pero sí gráfica. Si x es: $x = h/c \left(c/\beta_2^2 - 1 \right)$, entonces $x=0$ en $c=\beta_2$ y $x=h \left[\left(1/\beta_2^2 \right) - \left(1/\beta_1^2 \right) \right]^{1/2}$ (valor máximo) en $c=\beta_1$. Según este cambio de variable, el miembro de la izquierda de la ecuación (2.71) es justamente la función trigo-

nométrica $\tan(\omega x)$, que es fácilmente graficable y que presenta ceros en valores $x=n\pi/\omega$, siendo infinito para argumentos múltiplos impares de $\pi/2$, i.e. $\omega x=(2n-1)\pi/2$. El miembro derecho de (2.70) se indetermina para $c=\beta_2$ y decae monótonicamente en $c=\beta_1$. Graficando entonces a la tangente y la curva de decaimiento monótonico se encuentran en sus intersecciones a las soluciones de la ecuación (2.70) que representan los valores cx para los que se tiene una *onda de Love* para una frecuencia ω dada, siendo estas más numerosas a frecuencias mayores. A cada solución se le denomina *modo* y el modo fundamental es la solución correspondiente al menor valor de c y el resto, los modos superiores o sobretonos, donde al sobretono más alto le corresponde precisamente el valor $c=\beta_1$. La fig. 2.19 muestra dicha solución gráfica.

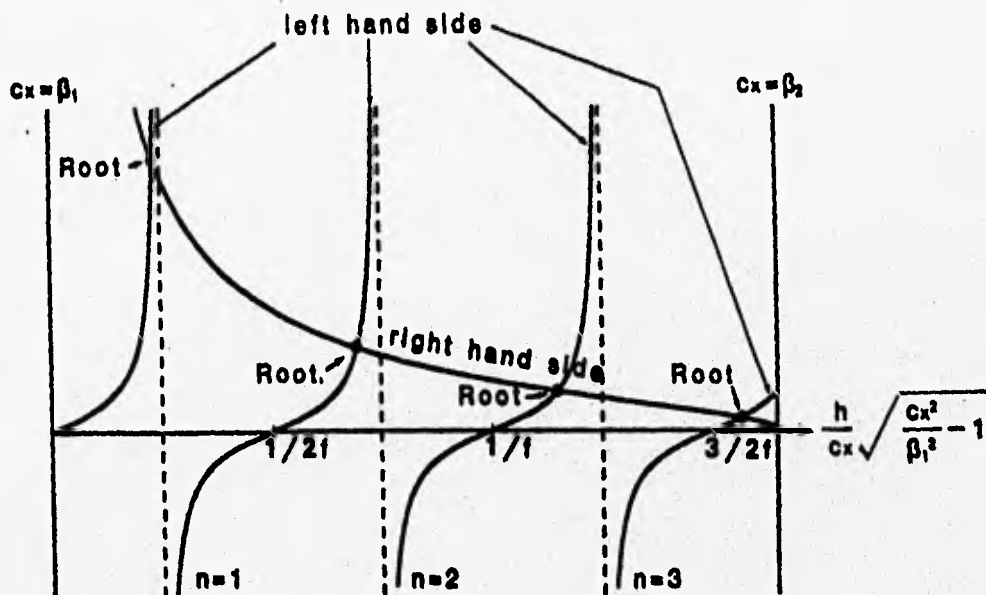


fig. 2.19.- Solución gráfica de la ecuación para la onda de Love. Las intersecciones de la curva de la función tangente con la de decaimiento monótonico representan sus modos discretos. Nótese que las velocidades aparentes de estas ondas están restringidos a un intervalo cuyos límites superior e inferior son las velocidades de propagación del semiespacio y el estrato respectivamente. Stein, S., 1987.

Las ondas de alta frecuencia se concentran en el estrato superficial y "no reconocen" al semiespacio, mientras que para ondas de baja frecuencia (periodo largo) sucede lo contrario. Esto es similar a lo que sucede con las ondas de Rayleigh, en cuanto a la amplitud que decae con la profundidad. Estas ondas son estrictamente dispersivas, es decir, presentan diferentes velocidades aparentes para diferentes frecuencias, como las de Love y surgen de la interferencia de otras ondas.

II.5.-Propagación en un Estrato sobre una Base Rígida.

Sea un estrato posado sobre una base rígida, con espesor h y velocidad de propagación de ondas S y densidad β y ρ respectivamente (fig. 2.20).

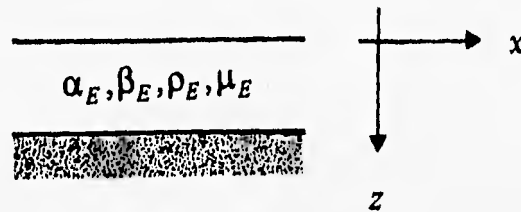


fig. 2.20.- Representación simplificada de un medio de propagación constituido por un estrato posado sobre una base rígida (que no propaga esfuerzos).

Si se tiene un movimiento en la dirección y y prescrito en la base, u_{y_0} , la expresión general para las ondas que ascienden y descienden en el estrato, en términos de potenciales y considerando el espesor h es:

$$u_y = (B_1 e^{ik(z-h)} + B_2 e^{-ik(z-h)}) e^{-ilx} e^{i\omega t} \quad (2.75)$$

Las condiciones que deben cumplirse, son un esfuerzo σ_{yz} nulo en la superficie libre y un desplazamiento inicial prescrito y unitario en la misma base, pero nulo en las subsiguientes incidencias al no existir perturbación alguna en el medio inferior, es decir:

$$\sigma_{yz} \Big|_{z=0} = 0 \quad (2.76)$$

$$u_y \Big|_{z=h} = e^{i\omega t} \quad (2.77)$$

$$u_y \Big|_{z=h} = 0 \quad (2.78)$$

de la ecuación (2.75), para $z=h$ y de acuerdo con la condición expresada en (2.77), se tiene:

$$B_1 + B_2 = 1 \quad (2.79)$$

Al aplicar la condición expresada en (2.78) a (2.75) se obtiene, para $z=0$:

$$B_1 e^{-ikh} - B_2 e^{ikh} = 0 \quad (2.80)$$

Despejando B_1 de la ecuación (2.79) y sustituyendo en (2.80) puede llegarse a la expresión:

$$B_2 = \frac{\cos(kh) - i \operatorname{sen}(kh)}{2 \cos(kh)} \quad (2.81)$$

Al sustituir la expresión anterior en la ecuación (2.79), puede obtenerse para B_1 :

$$B_1 = \frac{\cos(kh) + i \operatorname{sen}(kh)}{2 \cos(kh)} \quad (2.82)$$

Sustituyendo las expresiones (2.81) y (2.82) en (2.75) y reduciendo según la identidad trigonométrica del coseno de la suma de dos ángulos, para $u_y = v e^{i\omega t}$, $v_0 e^{i\omega t} = e^{i\omega t}$ y $k = \omega/\beta$ se obtiene finalmente:

$$v = \frac{\cos(\omega z/\beta)}{\cos(\omega h/\beta)} v_0 \quad (2.83)$$

que representa a las amplitudes en la superficie del estrato en función del movimiento prescrito en la base.

II.6.- Propagación en dos Estratos Planos sobre una Base Rígida.

Sean dos estratos con espesores h_1 y h_2 respectivamente y propiedades elásticas β_1, ρ_1 y β_2, ρ_2 , asentados sobre una base rígida con movimiento prescrito en la dirección del eje y $u_y = v_0 e^{i\omega t}$, donde v_0 es un desplazamiento inicial (fig. 2.21):

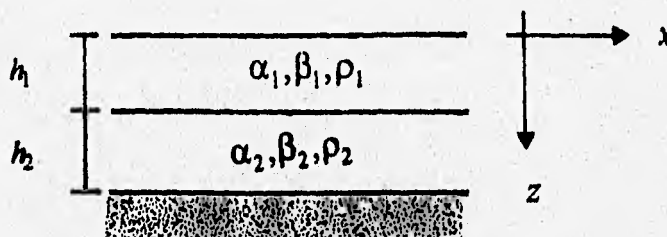


fig. 2.21.- Representación simplificada de un medio de propagación constituido por dos estratos de propiedades elásticas diferentes posados sobre una base rígida.

Las expresiones generales para las ondas ascendentes y descendentes en términos de potenciales son:

$$u_{y_1} = (B_1 e^{ikz} + B_2 e^{-ikz}) e^{-ilx} e^{i\omega t} \quad (2.84)$$

$$u_{y_2} = (B_3 e^{ikz} + B_4 e^{-ikz}) e^{-ilx} e^{i\omega t} \quad (2.85)$$

Las condiciones que se deben cumplir son, un esfuerzo nulo σ_{yz} en la superficie libre y continuo en la interfaz de los estratos y un desplazamiento inicial u_y prescrito en la base y nulo para las incidencias subsiguientes y continuo en la interfaz de los estratos, esto es:

$$\sigma_{yz} \Big|_{z=0} = 0 \quad (2.86)$$

$$u_y \Big|_{z=H} = v_0 e^{i\omega t} \quad (2.87)$$

$$\sigma_{yz_1} = \sigma_{yz_2} \text{ en } z = h_1 \quad (2.88)$$

$$u_{y_1} = u_{y_2} \text{ en } z = h_1 \quad (2.89)$$

Sustituyendo (2.84) en (2.86) y reduciendo, se llega a la igualdad:

$$B_1 = B_2 \quad (2.90)$$

De la sustitución de (2.84) en (2.90) se tiene:

$$u_{y_1} = 2B_1 \cos(kz) e^{-ilx} e^{i\omega t} \quad (2.91)$$

A partir de la sustitución de (2.85) en (2.87):

$$B_3 = v_0 - B_4 \quad (2.92)$$

Sustituyendo (2.92) en (2.85):

$$u_{y_2} = v_0 e^{ikz} e^{-ilx} e^{i\omega t} - 2iB_4 \operatorname{sen}(kz) e^{-ilx} e^{i\omega t} \quad (2.93)$$

De (2.91) y (2.93) en (2.89) y reduciendo para las profundidades h_1 y h_2 :

$$2B_1 \cos(k_1 h_1) = 2B_4 \operatorname{sen}(k_2 h_2) + v_0 e^{-ik_2 h_2} \quad (2.94)$$

De manera similar, de (2.94) en (2.88), para $\eta = \mu_1 k_1 / \mu_2 k_2$, B_4 puede escribirse:

$$B_4 = \frac{2\eta B_1 \operatorname{sen}(k_1 h_1) + i v_0 e^{-ik_2 h_2}}{2 \cos(k_2 h_2)} \quad (2.95)$$

De (2.95) en (2.94) B_1 puede expresarse como:

$$B_1 = \frac{v_0}{2[\cos(k_1 h_1) \cos(k_2 h_2) - \eta \operatorname{sen}(k_1 h_1) \operatorname{sen}(k_2 h_2)]} \quad (2.96)$$

Finalmente, de (2.96) en (2.84), para $z=0$:

$$\left| \frac{v}{v_0} \right| \dots \left| \frac{1}{\cos(k_1 h_1) \cos(k_2 h_2) - \eta \operatorname{sen}(k_1 h_1) \operatorname{sen}(k_2 h_2)} \right| \quad (2.97)$$

Esta última expresión representa la amplitud del movimiento en la superficie de los dos estratos en relación con la amplitud del desplazamiento inicial v_0 .

III.- RESPUESTA ANTE ONDAS INCIDENTES

Como se concluye del capítulo anterior, el cálculo de la respuesta sísmica de medios estratificados se complica conforme estos aumentan en número y el cálculo por formulación directa resulta incosteable. Por esta razón, autores como Thomson (1950), Haskell (1953), Kennett (1979), Kausel (1981), Rosenblueth, entre otros, se han dedicado a la tarea de desarrollar técnicas numéricas optimas que no sólo resuelven el problema del cálculo de la propagación de ondas planas en medios estratificados, sino que son a su vez rápidos y pueden considerarse como el paso inicial al tratamiento de medios heterogeneos más complejos. En este capítulo se describen brevemente los métodos de Thomson-Haskell y Kennett, de los que se presentan algunos resultados con fines de comparación en el capítulo V. El método de Thomson-Haskell se aplica luego al cálculo de la respuesta sísmica de un estrato irregular acoplándolo al método indirecto de elementos de frontera (IBEM, por sus siglas en inglés).

III.1.- El Método de Thomson-Haskell.

En 1953, aparece publicado en el Boletín de la Sociedad Sismológica Americana el artículo: "Dispersión de Ondas Superficiales en Medios Multiestratificados", donde Norman Abraham Haskell (ver apéndice C) extiende la formulación de William T. Thomson para el cálculo de los coeficientes de reflexión y transmisión en estratos, aplicándolo al caso de la dispersión de ondas superficiales. Dicha formalización, conocida hoy como el Método de Thomson-Haskell ha tenido gran impacto en el desarrollo de la sismología teórica, viendo su mayor aportación con el desarrollo computacional de los años 60, así como en los estudios corticales y en el campo de las explosiones en la atmósfera. Algunos años después de su formalización, seguidores y alumnos de Haskell, como David G. Harkrider (1964), se convertirían en sus principales divulgadores y apuntarían las limitaciones del mismo en sus etapas iniciales. Por ejemplo, Thomson había planteado la continuidad de las deformaciones constantes, en lugar de la de esfuerzos cortantes, para posteriormente intentar modelar un estrato fluido intermedio reduciendo a cero el módulo de cortante de un estrato sólido. Así, aunque Haskell mismo no resolvió este problema en su totalidad, para el caso de arreglos de estratos planos y sólidos, su método ha sido una importante aportación teórica, que junto con sus contribuciones hechas en el campo de la exploración y detección con aplicaciones militares y en estudios corticales y de mecanismos focales, constituyen su principal herencia a las ciencias de la Tierra.

Keiiti Aki y Paul G. Richards en su texto "Quantitative Seismology" (1980) dedican el capítulo 7 al estudio de la propagación de ondas en medios verticalmente heterogeneos y abordan conceptos como el de vector desplazamiento-esfuerzo y el de matriz propagadora, bases del

método de Haskell. El análisis lo presentan para la incidencia de ondas P , SV y SH y el lector interesado podrá remitirse al propio texto para ampliar su conocimiento en este tópic. Sin pretender hacer una revisión exhaustiva, en esta sección se presentan brevemente los fundamentos del método, así como un ejemplo de aplicación, que puede ser considerado como un ejercicio sencillo de validación.

III.1.1.- Caso SH.

Sea el sistema de referencia mostrado en la figura 3.1. Si sobre un elemento diferencial de volumen de un medio continuo se aplica un esfuerzo en la dirección y (onda SH) y si la ecuación de equilibrio dinámico que rige a dicho medio es la *Ecuación de Navier*, entonces, en términos del planteamiento inicial, puede escribirse:

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + f_y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

donde f_y son las fuerzas de cuerpo y ρ la densidad.

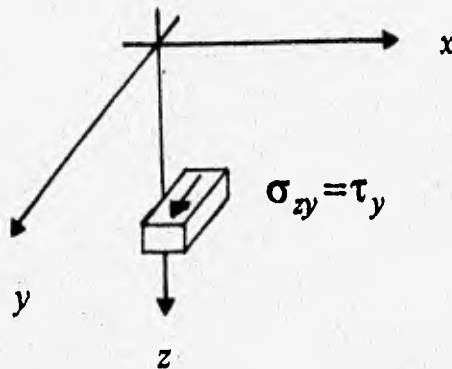


fig. 3.1.- Sistema de referencia empleado en la formulación del método matricial de Thomson-Haskell que muestra a un elemento diferencial de volumen con un esfuerzo orientado en dirección paralela al eje y .

Suponiendo una solución de la forma:

$$v = l_1(z, k, \omega) e^{-ikx} e^{i\omega t} \quad (3.2)$$

$$\sigma_{zy} = l_2(z, k, \omega) e^{-ikx} e^{i\omega t} \quad (3.3)$$

donde v es el desplazamiento de partícula en dirección y , k es el número de onda vertical, definido como $k = \omega/\beta$ y ω la frecuencia angular $\omega = 2\pi f$; $i = \sqrt{-1}$. l_1 representa al desplazamiento como función de la profundidad, el número de onda vertical y la frecuencia angular, mientras que l_2 representa al esfuerzo σ_{zy} en los mismos términos.

Puesto que $\sigma_{zy} = \mu \partial v / \partial z$ y $\sigma_{xy} = \mu \partial v / \partial x$, donde μ es el módulo de cortante o rigidez, en términos de desplazamientos y frecuencias, la ecuación (3.1) puede expresarse como:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + f_y + \rho \omega^2 v = 0 \quad (3.4)$$

Sustituyendo (3.2) y (3.3) en (3.4) y despreciando a las fuerzas de cuerpo se obtiene:

$$-\mu k^2 l_1 + \frac{dl_2}{dz} + \rho \omega^2 l_1 = 0 \quad (3.5)$$

Por otro lado, se tiene que:

$$l_2 = \mu \frac{dl_1}{dz} \quad (3.6)$$

De (3.5) y (3.6) y expresando en forma matricial se tiene:

$$\frac{d}{dz} \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/\mu \\ \mu k^2 - \rho \omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

donde $\{l_1, l_2\}^T$ es el vector *desplazamiento-esfuerzo*. La ecuación anterior también puede ser expresada como:

$$\frac{d\bar{\mathbf{F}}}{dz} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{F}} \quad (3.8)$$

Cuya solución es:

$$\bar{\mathbf{F}} = e^{\mathbf{A}z} \quad (3.9)$$

Por otro lado, existe una matriz $\mathbf{P}(z, z_0)$ que es solución de la ecuación diferencial:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dz} = \mathbf{A}\mathbf{P} \quad (3.10)$$

$\mathbf{A}\mathbf{P}$ se le conoce como *Matriz Propagadora* y se define formalmente como:

$$\mathbf{P}(z, z_0) = \mathbf{I} + \int_{z_0}^z \mathbf{A}(\xi_1) d\xi_1 + \int_{z_0}^z \mathbf{A}(\xi_1) \int_{z_0}^{\xi_1} \mathbf{A}(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1 + \dots \quad (3.11)$$

Sus propiedades son:

$$\text{a).- } \mathbf{P}(z_0, z_0) = \mathbf{I} \quad (3.12)$$

$$\text{b).- } \bar{\mathbf{F}}(z) = \mathbf{P}(z, z_0) \bar{\mathbf{F}}(z_0) \quad (3.13)$$

\mathbf{P} puede escribirse también como:

$$\mathbf{P}(z, z_0) = \mathbf{I} + (z - z_0)\mathbf{A} + 1/2(z - z_0)^2 \mathbf{A}\mathbf{A} + \dots = e^{(z-z_0)\mathbf{A}} \quad (3.14)$$

La solución a la ecuación (3.10) puede escribirse entonces, de acuerdo con (3.14) como:

$$\mathbf{P}(z, z_0) = e^{(z-z_0)\mathbf{A}} \quad (3.15)$$

Sustituyendo (3.12) en (3.7), se tiene que:

$$\begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{Bmatrix}_z = \mathbf{P}(z, z_0) \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{Bmatrix}_{z_0} \quad (3.16)$$

Por otra parte, de (3.7) se tiene que para el caso que nos ocupa, la matriz \mathbf{A} es:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1/\mu \\ \mu k^2 - \rho\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Cuya ecuación característica es:

$$\lambda^2 - k^2 + \frac{\rho\omega^2}{\mu} = 0 \quad (3.18)$$

de soluciones:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\eta \quad (3.19)$$

donde $\eta^2 = (-k^2 + \rho\omega^2/\mu)$

A partir de lo anteriormente visto, la solución a la ecuación (3.8) puede escribirse también:

$$\mathbf{f}_j = \mathbf{v}_j e^{\lambda_j(z-z_0)} \quad (3.20)$$

donde λ_j es el j -ésimo valor característico de \mathbf{A} y \mathbf{v}_j su correspondiente vector característico. Para la matriz (3.17), los vectores característicos serán de esta manera:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i\mu\eta \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\mu\eta \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

y de acuerdo con (3.20), puede escribirse:

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i\mu\eta \end{pmatrix} e^{i\eta(z-z_0)} \quad (3.23)$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\mu\eta \end{pmatrix} e^{-i\eta(z-z_0)} \quad (3.24)$$

donde f_1 y f_2 son vectorés desplazamiento-esfuerzo para ondas *SH* ascendentes y descendentes respectivamente, que pueden expresarse también como:

$$\bar{f} = \mathbf{F}\bar{w} \quad (3.25)$$

donde $\mathbf{F}=\mathbf{E}\mathbf{\Lambda}$; \mathbf{E} es la matriz de vectores característicos de \mathbf{A} , $\mathbf{\Lambda}$ la matriz de factores verticales de propagación y \bar{w} el vector de pesos para las amplitudes *SH*. La ecuación (3.25) puede escribirse como:

$$\bar{f} = \mathbf{E}\mathbf{\Lambda}\bar{w} \quad (3.26)$$

o también:

$$\bar{f} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\mu\eta & -i\mu\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\eta(z-z_0)} & 0 \\ 0 & e^{-i\eta(z-z_0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Calculando la inversa \mathbf{F}^{-1} se obtienen las amplitudes de los campos incidente y reflejado, es decir:

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{2\mu\eta} \begin{bmatrix} \mu\eta e^{-i\eta(z-z_0)} & -ie^{+i\eta(z-z_0)} \\ \mu\eta e^{-i\eta(z-z_0)} & ie^{+i\eta(z-z_0)} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

de donde:

$$\begin{Bmatrix} s_i \\ s_r \end{Bmatrix} = \mathbf{F}^{-1} \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

Donde s_i es la amplitud de la onda *SH* incidente y s_r la de la reflejada.

Por otro lado, para una matriz cuadrada \mathbf{A} con diferentes valores característicos λ_k , donde $k = 1, 2, 3, \dots, n$, una función de dicha matriz puede ser expresada, según la fórmula de Sylvester (Aki y Richards, 1980) como:

$$F(A) = \sum_{k=1}^n F(\lambda_k) \frac{\prod_{r \neq k} (A - \lambda_r I)}{\prod_{r \neq k} (\lambda_k - \lambda_r)} \quad (3.30)$$

De (3.15) en (3.30), para $\lambda_{1,2} = \pm i\eta$, $\mathbf{P}(z, z_0)$ queda:

$$\mathbf{P}(z, z_0) = \begin{bmatrix} \cos \eta_n (z - z_0) & \frac{1}{\mu_n \eta_n} \sin \eta_n (z - z_0) \\ -\mu_n \eta_n \sin \eta_n (z - z_0) & \cos \eta_n (z - z_0) \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

donde $\eta_n = (-k^2 + \omega^2 / \beta_n^2)^{1/2}$; $k = \omega / \beta_{HS} \sin \theta$, siendo β_{HS} la velocidad de ondas S en el espacio; β_n la velocidad de ondas S en el n -ésimo estrato y η_n el número de onda vertical en el n -ésimo estrato.

De (3.16) en (3.29) y de acuerdo con (3.31), se tiene, para la base de la estratigrafía:

$$\begin{Bmatrix} s_i \\ s_r \end{Bmatrix} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P}(z_n, z_{n-1}) \mathbf{P}(z_{n-1}, z_{n-2}) \dots \mathbf{P}(z_1, z_0) \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{Bmatrix}_{z=0} \quad (3.32)$$

$$\begin{Bmatrix} s_i \\ s_r \end{Bmatrix} = \mathbf{R} \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{Bmatrix}_{z=0} \quad (3.33)$$

donde $\mathbf{R} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P}(z_n, z_{n-1}) \mathbf{P}(z_{n-1}, z_{n-2}) \dots \mathbf{P}(z_1, z_0)$

Así por ejemplo, en $z=0$, como $l_2=0$:

$$l_1|_{z=0} = s_i / R_{11} \quad (3.34)$$

La ecuación (3.34) permite finalmente evaluar el desplazamiento en la superficie libre del medio estratificado si se conocen el campo incidente, las propiedades mecánicas del semiespacio y las matrices propagadoras de cada estrato.

III.1.2.- Caso P-SV.

Para el mismo sistema de referencia de la figura 3.1 y tomando en cuenta que los desplazamientos a considerar ahora se situarán en las direcciones x y z , las ecuaciones de equilibrio (Ecs. de Navier) para estos desplazamientos serán:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.36)$$

Si sus soluciones son las siguientes:

$$u = r_1(z, k, \omega) e^{-ikx} e^{i\omega t} \quad (3.37)$$

$$w = ir_2(z, k, \omega) e^{-ikx} e^{i\omega t} \quad (3.38)$$

$$\sigma_{xz} = r_3(z, k, \omega) e^{-ikx} e^{i\omega t} \quad (3.39)$$

$$\sigma_{zz} = ir_4(z, k, \omega) e^{-ikx} e^{i\omega t} \quad (3.40)$$

donde r_i representa a los desplazamientos y esfuerzos. De las ecuaciones básicas de la elastodinámica estudiadas en el capítulo II, se tiene de las expresiones (3.37) y (3.38) que:

$$\sigma_{xx} = i \left[\lambda \frac{dr_2}{dz} - k(\lambda + 2\mu)r_1 \right] e^{-ikx} e^{i\omega t} \quad (3.41)$$

$$\sigma_{xz} = \mu \left(\frac{dr_1}{dz} + kr_2 \right) e^{-ikx} e^{i\omega t} \quad (3.42)$$

$$\sigma_{zz} = i \left[(\lambda + 2\mu) \frac{dr_2}{dz} - k\lambda r_1 \right] e^{-ikx} e^{i\omega t} \quad (3.43)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.41), (3.42) y (3.43) en (3.35) y (3.36) en términos de ω y completando el sistema puede llegarse a las siguientes expresiones:

$$k\lambda \frac{dr_2}{dz} + \frac{dr_3}{dz} = -r_1 [\rho\omega^2 - k^2(\lambda + 2\mu)] \quad (3.44)$$

$$-i\mu k \frac{dr_1}{dz} + i \frac{dr_4}{dz} = -ir_2[\rho\omega^2 - \mu k^2] \quad (3.45)$$

$$\mu \frac{dr_1}{dz} = -\mu k r_2 + r_3 \quad (3.46)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{dr_2}{dz} = k\lambda r_1 + r_4 \quad (3.47)$$

De la ecuación (3.46) se ve que:

$$\frac{dr_1}{dz} = -k r_2 + \frac{1}{\mu} r_3 \quad (3.48)$$

Y de igual forma, a partir de la ecuación (3.47):

$$\frac{dr_2}{dz} = \frac{k\lambda r_1 + r_4}{\lambda + 2\mu} \quad (3.35'')$$

Sustituyendo la ecuación (3.47) en (3.44) y despejando dr_3/dz :

$$\frac{dr_3}{dz} = r_1 \left\{ \frac{k^2[4\mu(\lambda + \mu)]}{\lambda + 2\mu} - \rho\omega^2 \right\} - r_4 \left[\frac{k\lambda}{\lambda + 2\mu} \right] \quad (3.50)$$

Y de manera similar, sustituyendo (3.44) en (3.45) y despejando dr_4/dz :

$$\frac{dr_4}{dz} = -r_2\rho\omega^2 + k r_3 \quad (3.51)$$

A partir de las expresiones (3.50) y (3.49), el sistema queda en forma matricial:

$$\frac{d}{dz} \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 1/\mu & 0 \\ -k\lambda/(\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 1/(\lambda + 2\mu) \\ \frac{k^2[4\mu(\lambda + \mu)]}{\lambda + 2\mu} - \rho\omega^2 & 0 & 0 & k\lambda/(\lambda + 2\mu) \\ 0 & -\rho\omega^2 & -k & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{Bmatrix} \quad (3.52)$$

donde $\{r_1 \ r_2 \ r_3 \ r_4\}^T$ es el vector desplazamiento-esfuerzo.

De acuerdo con lo visto para el caso *SH*, Aki y Richards (1980) apuntan que el vector de valores característicos \mathbf{E} para el caso *P-SV* es:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} \alpha k & \beta v & \alpha k & \beta v \\ \alpha \gamma & \beta \gamma & -\alpha \gamma & -\beta k \\ -2\alpha\mu k\gamma & -\beta\mu(k^2 + v^2) & 2\alpha\mu k\gamma & \beta\mu(k^2 + v^2) \\ -\alpha\mu(k^2 + v^2) & -2\beta\mu k v & -\alpha\mu(k^2 + v^2) & -2\beta\mu k v \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Así mismo, la matriz de factores verticales de propagación Λ es:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} e^{-\gamma(z-z_0)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-v(z-z_0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\gamma(z-z_0)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{v(z-z_0)} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Y el vector de pesos para las amplitudes *P* y *SV*:

$$\bar{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} p_r \\ s_r \\ p_i \\ s_i \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

Donde los subíndices *r* e *i* significan *reflejada* e *incidente*, respectivamente. El vector desplazamiento-esfuerzo $\bar{\mathbf{f}}$ es:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{f}} &= \mathbf{F}\bar{\mathbf{w}}; \quad \mathbf{F} = \mathbf{E}\Lambda \\ \bar{\mathbf{f}} &= \mathbf{E}\Lambda\bar{\mathbf{w}} \end{aligned} \quad (3.56)$$

de donde, las amplitudes de los campos de desplazamiento incidente y reflejado estarán dadas por:

$$\mathbf{U} = \bar{\mathbf{f}}^{-1} = \mathbf{E}^{-1}\Lambda^{-1} \quad (3.57)$$

esto es, según Aki y Richards (1980):

$$\mathbf{U} = \frac{\beta}{2\alpha\mu\gamma\nu\omega} \cdot \begin{bmatrix} 2\beta\mu\kappa\gamma\nu & -\beta\mu\nu(k^2 + \nu^2) & -\beta\kappa\nu & \beta\gamma\nu \\ -\alpha\mu\gamma(k^2 + \nu^2) & 2\alpha\mu\kappa\gamma\nu & \alpha\gamma\nu & -\alpha\kappa\gamma \\ 2\beta\mu\kappa\gamma\nu & \beta\mu\nu(k^2 + \nu^2) & \beta\kappa\nu & \beta\gamma\nu \\ -\alpha\mu\gamma(k^2 + \nu^2) & -2\alpha\mu\kappa\gamma\nu & -\alpha\gamma\nu & -\alpha\kappa\gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{\gamma(z-z_0)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\nu(z-z_0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\gamma(z-z_0)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\nu(z-z_0)} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

donde $\gamma = (k^2 - \omega^2/\alpha^2)^{1/2}$ y $\nu = (k^2 - \omega^2/\beta^2)^{1/2}$

III.1.3.- Ejemplo de aplicación del caso SH.

A continuación se presenta brevemente como ejemplo del método, el desarrollo analítico del Método de *Thomson-Haskell* para el cálculo de la respuesta de dos estratos sobre una base rígida ante incidencia de ondas SH.

Sean dos estratos de espesores $h_1 = h_2 = h$ que descansan sobre una base rígida, tal y como se mostró en la figura 2.21.

De (3.29) de la sección anterior se tiene que:

$$\begin{Bmatrix} s_i \\ s_r \end{Bmatrix} = \mathbf{F}^{-1} \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{Bmatrix}_{z=z_n} \quad (3.59)$$

pero:

$$\begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{Bmatrix}_{z=z_2} = \mathbf{P}(z_2, z_1) \mathbf{P}(z_1, z_0) \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{Bmatrix}_{z=0} \quad (3.60)$$

De las condiciones del problema, se sabe que en la superficie libre, el desplazamiento no se conoce y el esfuerzo es nulo, esto es:

$$l_{1z=z_0} = v_s \quad (3.61)$$

$$l_{2z=z_0} = 0 \quad (3.62)$$

Para la base, los desplazamientos y esfuerzos serán prescritos y desconocidos respectivamente, esto es:

$$l_{1z=z_n} = v_0 \quad (3.63)$$

$$l_{2z=z_n} = \tau \quad (3.64)$$

Las condiciones anteriores definen según (3.60):

$$\begin{Bmatrix} v_0 \\ \tau \end{Bmatrix} = \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \begin{Bmatrix} v_s \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.65)$$

y las matrices son del tipo:

$$\mathbf{P}_{z_j} = \begin{bmatrix} \cos \eta_j (z - z_0) & \frac{1}{\mu_j \eta_j} \sin \eta_j (z - z_0) \\ -\mu_j \eta_j \sin \eta_j (z - z_0) & \cos \eta_j (z - z_0) \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

donde $\eta_j = (-k^2 + \omega^2 / \beta_j)^{1/2}$.

De la expresión (3.66), para incidencia vertical ($k=0$), las matrices \mathbf{P}_1 y \mathbf{P}_2 quedan, respectivamente:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} \cos \omega h_1 / \beta_1 & 1 / (\mu_1 \eta_1) \sin \omega h_1 / \beta_1 \\ -\mu_1 \eta_1 \sin \omega h_1 / \beta_1 & \cos \omega h_1 / \beta_1 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} \cos \omega h_2 / \beta_2 & 1 / (\mu_2 \eta_2) \sin \omega h_2 / \beta_2 \\ -\mu_2 \eta_2 \sin \omega h_2 / \beta_2 & \cos \omega h_2 / \beta_2 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Finalmente, según la ecuación (3.65) el cálculo de la función de transferencia da:

$$\left| \frac{v_s}{v_0} \right| = \left| \frac{1}{\cos(\eta_1 h_1) \cos(\eta_2 h_2) - \mu_2 \eta_2 / (\mu_1 \eta_1) \sin(\eta_1 h_1) \sin(\eta_2 h_2)} \right| \quad (3.69)$$

Como el lector podrá apreciar, la expresión (3.69) es equivalente a la ecuación (2.97) del capítulo II.

III.2.- El Método de Kennett.

En general, en el problema de la excitación y propagación de ondas sísmicas en un medio estratificado para una distribución de parámetros elásticos en función sólo de una coordenada (profundidad), las relaciones esfuerzo-deformación y las ecuaciones de movimiento pueden ser reducidas por técnicas de transformación a grupos de ecuaciones diferenciales de primer orden, cuya solución dependerá de las condiciones de superficie libre y la excitación de la fuente. Para estratos uniformes, los métodos de matriz de transformación pueden ser desarrollados relacionando esfuerzos y deformaciones en la cima y en la base de estos, tal y como lo hace el método de Thompson-Haskell. Sin embargo, una dificultad computacional surge en estos métodos simples, relacionada con la pérdida de precisión cuando esta es finita y donde la cancelación dada en las funciones seculares para la función de dispersión de ondas superficiales ya no se da o completa, pues los exponenciales crecientes sobrepasan parte de esta función. Esta dificultad puede ser evitada reformulando el método de la matriz propagadora (Knopoff, 1964) o considerando menores de orden superior al de las matrices originales.

Gilbert y Backus (1966) dieron un desarrollo sistemático de estos métodos para una estratificación general en parámetros elásticos e introdujeron el término *matriz propagadora* para el operador de esfuerzo y desplazamiento entre dos niveles, en el medio estratificado. Para modelos suavemente variantes de la distribución de parámetros elásticos, la mayoría del trabajo se ha concentrado en la solución numérica del conjunto de ecuaciones diferenciales y los problemas que pudieran surgir relacionados con las soluciones crecientes al ir propagando la solución de un estrato a otro como hace el método de Thomson-Haskell han sido evitados integrando en dirección de la superficie.

El método de Kennett propone el cálculo de la respuesta del semiespacio en términos de las propiedades de reflexión-transmisión del medio estratificado a partir de fuentes y receptores enterrados que lleven a representaciones convenientes del frente de onda sin soluciones crecientes y por lo tanto, sin los problemas antes mencionados. Para estratos uniformes, la representación en términos de propiedades de transmisión y reflexión llevan a un procedimiento eficiente en el que el cálculo se lleva de la base de la estratificación a la superficie, conservando estas ventajas aún para modelos continuos a trozos.

Numerosos artículos hacen referencia por estas razones al método de Kennett y desde hace algunos años se cuentan ya con algoritmos programados en lenguaje Fortran para el cálculo de la respuesta de medios estratificados para incidencia de ondas elásticas y para una fuente puntual. Jean Cristoff Gariel ha programado el algoritmo de Kennett a partir de formulaciones analíticas desarrolladas por Michael Dietrich. Este método también ha sido aplicado a medios estratificados bidimensionales por Koketsu (en prensa) mostrando ventajas sobre otros métodos siendo por ejemplo más económico en tiempo hasta en un 45% y en memoria hasta en un 29% que el propio método propagador de Koketsu.

En los últimos 20 años, el cálculo de la respuesta de medios estratificados irregulares se ha llevado a cabo empatando las condiciones de frontera para interfaces irregulares y superpo-

niendo las soluciones para medios homogéneos. Así mismo, el cálculo con el método de elementos de frontera (IBEM) ha sido muy empleado. En este campo, Takenaka (1990) ha mostrado cómo el método de la matriz de reflexión/transmisión de Kennett puede ser adaptado para medios irregulares, aunque con la desventaja de requerir de la inversión de matrices a gran escala.

El lector interesado puede revisar el apéndice A donde se presenta un resumen de las expresiones analíticas que fundamentan a este método y así mismo puede remitirse al propio texto de Kennett (1983), donde se presenta también la formulación para una fuente situada en el interior del medio estratificado.

IV.- RESPUESTA ANTE FUENTE PUNTUAL

Se han revisado hasta ahora algunos métodos y formulaciones analíticas para el cálculo de la respuesta sísmica de arreglos estratificados ante la incidencia de ondas planas. Estos métodos, como se verá en el siguiente capítulo, son aplicables a diversos problemas de interés para la ingeniería sísmica y la sismología teórica. En el presente capítulo se aborda brevemente la teoría y formulación para el modelado de la respuesta de un semiespacio a partir del método del número de onda discreto y de un estrato posado sobre una base rígida ante la incidencia de ondas generadas en una fuente puntual en una solución exacta formulada a partir del método de las imágenes.

IV.1.- Fuente Cilíndrica en un Semiespacio.

El método del número de onda discreto, presentado por Aki y Larner (1970) permite representar a un campo de desplazamientos mediante una superposición de ondas planas de amplitudes complejas desconocidas (incluyendo ondas inhomogéneas) que se propagan en diversas direcciones. Dicho campo de desplazamientos, que incluye a los campos difractado y reflejado, se obtiene discretizando en una serie infinita la integración sobre el número de onda horizontal bajo la suposición de una periodicidad también horizontal. La truncación de esta suma y la transformación espacial de Fourier de las condiciones de frontera dan lugar a un sistema de ecuaciones lineales para los coeficientes complejos de la expansión del número de onda horizontal, siendo su mayor desventaja la dificultad que presenta para modelar campos de ondas en interfaces con cambios de propiedades muy abruptas. Esta limitación, impuesta por la llamada *hipótesis de Rayleigh* está relacionada con la representación de los campos difractados mediante la integral del número de onda horizontal que no considera ondas ascendentes implícitas (Sánchez-Sesma et. al., 1989). Esta dificultad, sin embargo, ya ha sido corregida por autores como Sánchez-Sesma y Esquivel (1979), Bouchon (1985), Campillo (1985), y Kawase (1988). La aplicabilidad del método del número de onda discreto, también conocido como método de Aki-Larner es ampliamente conocida en el área de los medios estratificados con irregularidad lateral (Bouchon, 1973; Bouchon y Aki, 1977a,b; Bouchon, 1979; Bard y Bouchon, 1980a,b; Bard, 1982; Bard y Gariel, 1986). En las líneas siguientes se presenta brevemente una formulación para un semiespacio en el que se encuentra una fuente puntual y se aplica este método con una corrección por frecuencia imaginaria que permite eliminar el efecto no deseado de las fuentes periódicas involucradas.

Sea la configuración mostrada en la fig. 4.1, si la fuente puntual se representa por una fuerza f_y de valor constante por unidad de longitud y dirigida en dirección del eje y , las ondas generadas, cuyos frentes son cilíndricos (figura 4.2) son solución de la ecuación de movimiento:

$$\nabla^2 v + \frac{1}{\mu} f_y = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (4.1)$$

donde $\beta = (\mu/\rho)^{1/2}$. Si se escribe f_y en función de la frecuencia y se considera al factor $e^{i\omega t}$ implícito en las expresiones que siguen, la ecuación (4.1) puede expresarse también:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{F(\omega)}{\mu} \delta(x) \delta(z) \quad (4.2)$$

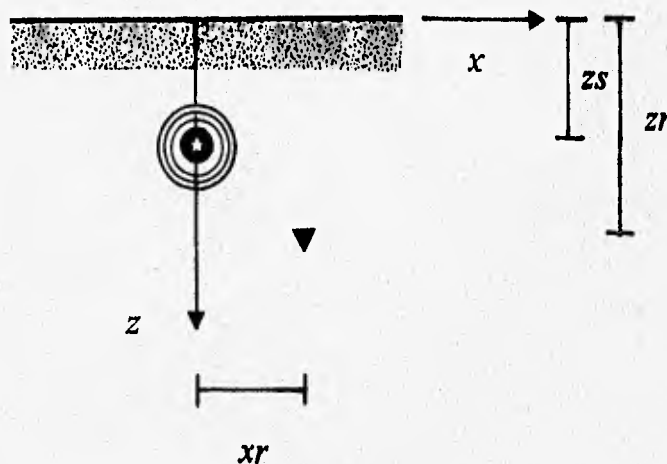


fig. 4.1.- Representación simplificada de una fuente puntual (explosión) dentro de un semiespacio. Se muestran las ondas que genera, así como la posición de un receptor (triángulo sólido invertido) y el sistema de referencia empleado.

Al derivar la ecuación (4.2) dos veces con respecto al tiempo, si se expresa al número de onda q como $q = \omega/\beta$ se tiene para esta ecuación, por separación de variables y en coordenadas cilíndricas, una solución en términos de la *Ecuación de Bessel*, donde el desplazamiento v ,

expresado en términos de la *función de Hankel* de segunda especie y orden cero $H_0^{(2)}$ queda:

$$v = \frac{F(\omega)}{4i\mu} H_0^{(2)}(qr) e^{i\omega t} \quad (4.3)$$

donde: $r = [x^2 + (z - z_s)^2]^{1/2}$ y $H_0^{(1,2)}(\bullet) = J_0(\bullet) \pm iY_0(\bullet)$ representa a las funciones de Hankel de argumento \bullet de primera y segunda especies y de orden cero. $J_0(\bullet)$ y $Y_0(\bullet)$ son las funciones de Bessel de primera y segunda especies, respectivamente.

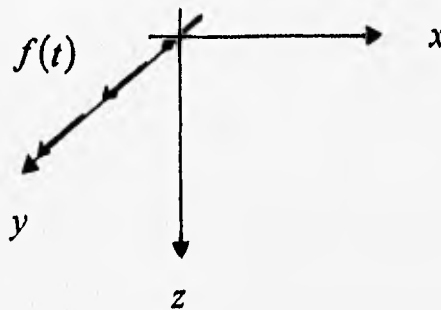


fig. 4.2.- Sistema de referencia mostrando una fuerza puntual paralela al eje y que genera ondas cilíndricas (fuente SH).

La ecuación (4.3) admite también una solución en términos de ondas planas del tipo:

$$e^{-i(kx + \gamma|z|)} \quad (4.4)$$

donde: $\gamma = \sqrt{q^2 - k^2}$; $\text{Im}(\gamma) \leq 0$.

Las soluciones para diferentes valores de k representan ondas S planas y armónicas que surgen de la propia ecuación de onda unidimensional y cuya dirección de propagación estará definida por la contribución de cada número de onda (horizontal y vertical), de manera que a partir de la ecuación (4.4) pueden considerarse como ejemplo los siguientes casos particulares:

a).- $k = 0$:

$$e^{-i(kx + \gamma|z|)} = e^{-i\gamma|z|} \quad (4.5)$$

La expresión (4.5) representa ondas planas con frentes de onda paralelos al eje x , ascendentes y descendentes (fig. 4.3).

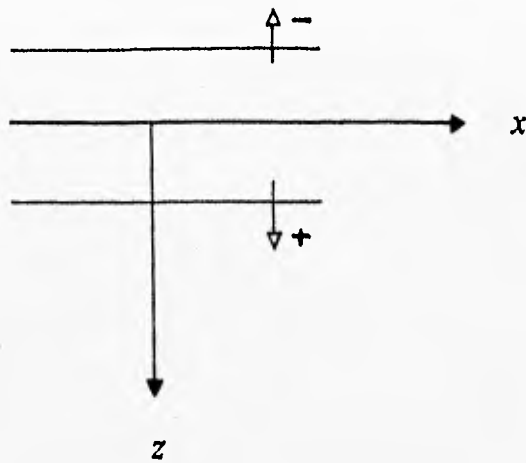


fig. 4.3.- Esquema simplificado mostrando al sistema de referencia y la familia de ondas ascendentes y descendentes de frente paralelo al eje x .

b).- $k = \left(\frac{1}{2}\right)q$:

$$e^{-i(kx + \gamma|z|)} = e^{-iq(x/2 + \sqrt{3}|z|/2)} \quad (4.6)$$

En la expresión anterior, $\gamma = \sqrt{3}q/2$ y representa ondas cuyos rayos ascendentes y descendentes guardan una relación de 60° con respecto al eje x (fig. 4.4).

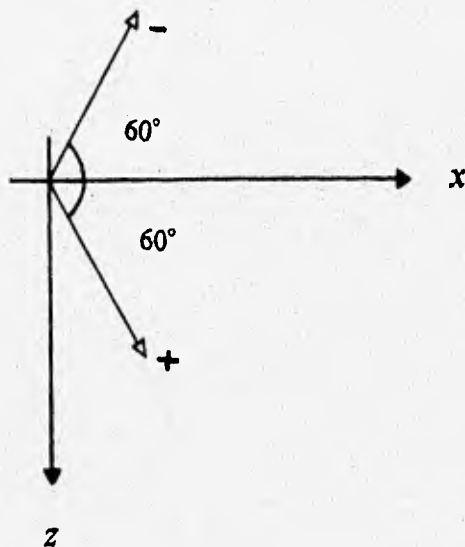


fig. 4.4.- Esquema mostrando ondas planas ascendentes y descendentes oblicuas 60° respecto del eje x .

c).- $k = q$:

$$e^{-i(kx+\gamma|z|)} = e^{-iqx} \quad (4.7)$$

En la ecuación (4.7) $\gamma = 0$ y representa ondas cuyos frentes de onda son paralelos al eje z , viajando en dirección del eje x (fig. 4.5).

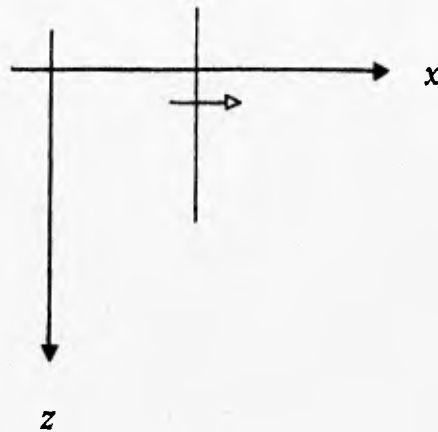


fig. 4.5.- Frente de onda paralelo al eje z desplazándose sobre el eje x .

d).- $k = 2q$:

$$e^{-i(kx+\gamma|z|)} = e^{i\omega(-t+2x/\beta)} e^{\sqrt{3}\omega|z|/\beta} \quad (4.8)$$

donde $\gamma = \pm\sqrt{3}qi$. (4.8) representa la propagación de ondas inhomogéneas en dirección del eje x (fig. 4.6).

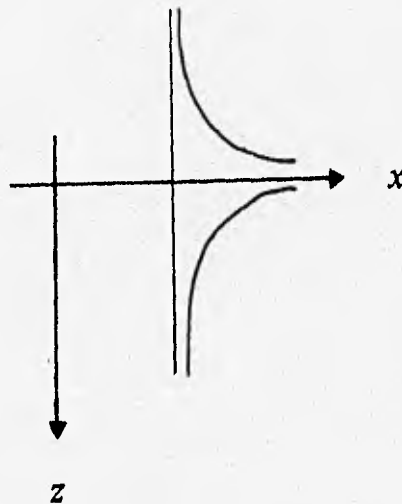


fig. 4.6.- Croquis mostrando frentes de ondas inhomogéneas propagándose paralelas al eje x .

A partir de las expresiones (4.5) a (4.8) es claro establecer que para una infinidad de ondas se tendrán soluciones del tipo:

$$v = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{-ikx - i\gamma|z|} dk \quad (4.9)$$

donde $\gamma = \sqrt{q^2 - k^2}$ e $\text{Im}(\gamma) \leq 0$.

Puesto que se trata de una representación con ondas planas, un elemento de esfuerzo en el medio de propagación será el mostrado en la fig. 4.7.

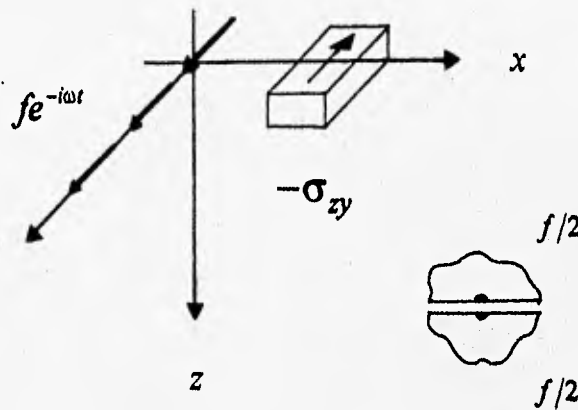


fig. 4.7.- Elemento de fuerza paralelo al eje y. Se muestra también un elemento diferencial de volumen con su correspondiente esfuerzo. En el volumen irregular se muestra como la fuerza lineal es separada en dos componentes con la misma orientación, pero de magnitud igual a la mitad de la de la fuerza original.

El esfuerzo σ_{zy} estará dado por las siguientes expresiones:

$$\sigma_{zy}|_{z=0} = -\frac{F}{2} \delta(x); \quad \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dk \quad (4.10)$$

$$\sigma_{zy} = \mu \frac{\partial v}{\partial z} \quad (4.11)$$

Sustituyendo la ecuación (4.9) en (4.11) e igualando a (4.10) para $z=z_0$:

$$v(t) = \frac{F}{\mu} \frac{1}{4i} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx - i\gamma|z-z_0|} e^{i\omega t} \frac{dk}{\gamma}; \quad (4.12)$$

$$\gamma = \sqrt{q^2 - k^2}; \quad \text{Im}(\gamma) \leq 0$$

donde $e^{-ikx - i\gamma|z-z_s|}$ es el término de fuente.

A partir de la sustitución de la ecuación (4.12) en (4.3) y considerando implícito al término $e^{i\omega t}$, se tiene:

$$\frac{F(\omega)}{4i\mu} H_0^{(2)}(qr) = \frac{F(\omega)}{\mu 4i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} e^{-i\gamma|z-z_s|} \frac{dk}{\gamma}; \quad (4.13)$$

donde $\gamma = \sqrt{q^2 - k^2}$; $\text{Im}(\gamma) \leq 0$; $q = \omega/\beta$.

Puede demostrarse que una discretización simple de la integral (4.13), tal y como se haría con integración trapecial con $k_m = \Delta km$ y $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, conduce en realidad a una serie de

fuentes con periodicidad espacial $L = 2\pi/\Delta k$ (fig 4.8), de donde $r_m = \sqrt{(z-z_s)^2 + (x-x_{L,m})^2}$

De esta manera es posible escribir que:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} H_0^{(2)}(qr_m) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-ik(x-mL) - i\gamma|z-z_s|} \frac{dk}{\gamma} \quad (4.14)$$

donde $r_m = \sqrt{(z-z_s)^2 + (x-mL)^2}$. L es la distancia de separación entre las fuentes periódicas, según la fig 4.8.

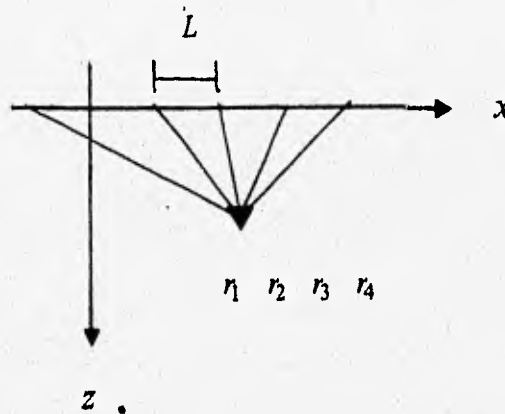


fig. 4.8.- Esquema mostrando una fuerza puntual situada en el centro del sistema de referencia. Se muestra la posición para sus correspondientes fuentes periódicas y los vectores radiales con referencia al detector (triángulo sólido invertido).

Reescribiendo (4.14):

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} H_0^{(2)}(qr_m) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (e^{ikmL}) e^{-ikx - i\gamma|z-z_s|} \frac{dk}{\gamma} \quad (4.15)$$

pero:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{ikmL} = \frac{2\pi}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(k - k_n); \quad k_n = 2\pi/L; \quad (4.16)$$

A (4.16) se le conoce como el *Teorema de Schwarz* y representa una respuesta resultante de la suma de contribuciones de un número infinito de fuentes a intervalos de distancia L .

A partir de la ecuación (4.16), la ecuación (4.15) queda:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} H_0^{(2)}(qr_m) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-ik_m x - i\gamma_m |z-z_s|} \frac{\Delta km}{\gamma_m}; \quad (4.17)$$

$$\gamma_m = \sqrt{q^2 - k_m^2}; \quad \text{Im}(\gamma_m) \leq 0; \quad \Delta km = 2\pi m/L; \quad k_m = m\Delta k$$

que muestra claramente la consecuencia de discretizar la ecuación (4.13). A esta aplicación se le conoce como el *método del número de onda discreto*.

Para minimizar los efectos de la periodicidad, en esta representación de la fuente se introdujo una frecuencia compleja $\bar{\omega} = \omega_R - i\omega_I$, donde $\omega_R = 2\pi f$, $\omega_I = \pi/T$; T es la ventana de interés. Este proceder, introducido por Aki y Larner en su artículo pionero (1970) al parecer se debe a Phinney (1965) quien lo implementó en la síntesis de sismogramas. La frecuencia ω_I está presente en la señal de entrada y en la función de transferencia, de modo que la primera queda:

$$\tilde{f}(t) = f(t)e^{-\omega_I t} \quad (4.18)$$

donde $\tilde{f}(t)$ es la función modificada $f(t)$. Su espectro de Fourier es:

$$F(\bar{\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\bar{\omega}t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)e^{-\omega_I t}] e^{-i\omega_R t} dt \quad (4.19)$$

donde $\bar{\omega} = \omega_R - i\omega_I$

La convolución de (4.19) con una función de transferencia calculada mediante el método del número de onda discreto es:

$$g(\bar{\omega}) = H(\bar{\omega}) * F(\bar{\omega}) \quad (4.20)$$

Finalmente, el sismograma sintético estará dado por la Transformada de Fourier de $g(\bar{\omega})$:

$$\tilde{g}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\bar{\omega}) e^{-i\bar{\omega}t} d\bar{\omega} \quad (4.21)$$

$\tilde{g}(t)$ es la señal en tiempo con frecuencia $\bar{\omega}$ implícita, donde $d\omega = d\omega_R$.
A partir de lo anterior, puede escribirse finalmente:

$$g(t) = \tilde{g}(t) \cdot e^{i\omega t} \quad (4.22)$$

Como el lector puede apreciar de las expresiones anteriores, la corrección del efecto que surge de la periodicidad de las fuentes en la discretización es consistente con la propia formulación y permite intensificar la señal de respuesta en una ventana temporal de interés. En la siguiente sección se revisa una solución exacta formulada a partir del método de las imágenes, para la respuesta de un estrato posado sobre una base rígida.

IV.2.- Respuesta de un Estrato Plano sobre una Base Rígida.

A continuación se presenta la formulación analítica de la respuesta sísmica de un estrato plano posado sobre una base rígida, ante la incidencia de ondas elásticas generadas en una fuente puntual situada en el interior del propio estrato. Se hace una discretización con base en el teorema de Schwarz, abordado en la sección anterior. La expresión final corresponde a la solución exacta del problema y ha sido presentada por Sánchez Sesma (comunicación personal) en diversos cursos y seminarios en la Facultad e Instituto de Ingeniería. En el capítulo V se presentan varias gráficas correspondientes a esta solución.

Sea un estrato plano con una fuente puntual en su interior, tal como lo muestra la fig. 4.9. Si la fuente S está en $(0, z_s)$ y el receptor R en (x_R, z_R) , la distancia r de S a R puede ser representada por:

$$r = \sqrt{x_R^2 + (z_R - z_s)^2} \quad (4.23)$$

de donde el desplazamiento en superficie, expresado como una *función de Green* en términos de la función de Hankel de segunda especie y orden cero $H_0^{(2)}$ es:

$$G = \frac{F}{\mu 4i} \left\{ H_0^{(2)} \left[q \sqrt{x_R^2 + (z_R - z_s)^2} \right] \right\} \quad (4.24)$$

Las funciones de Green constituyen un conjunto de soluciones a las ecuaciones diferenciales que rigen al movimiento y representan en general desplazamientos. Su notación $G_{ij}(x, \xi)$ indica el desplazamiento que se obtendría en el punto x en la dirección i al aplicar una fuerza en el punto ξ en la dirección j , de manera que, conocida la función de Green de un fenómeno, su convolución con la amplitud de la fuerza involucrada dará como resultado los desplazamientos de interés. Aki y Richards (1980) en su capítulo 4 presentan la formulación para estas funciones en términos de potenciales y el lector interesado podrá profundizar en el tema remitiéndose a dicho texto.

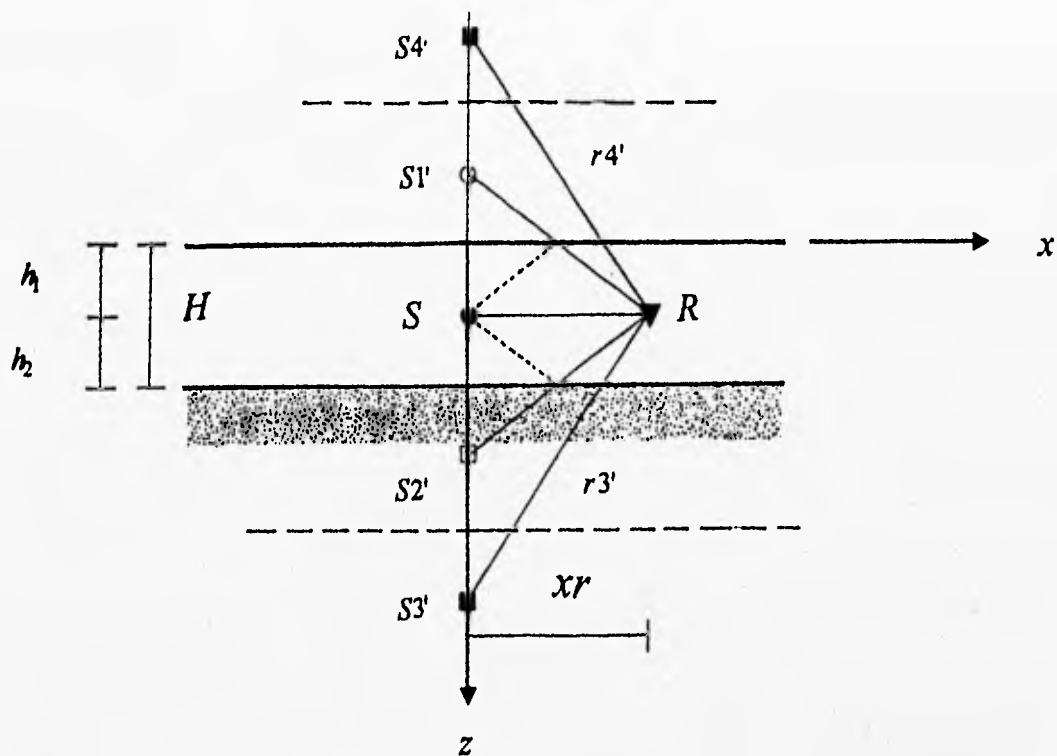


fig. 4.9.- Representación simplificada de un estrato posado sobre una base rígida en cuyo interior se sitúa una fuente explosiva. Se muestra también la posición de un receptor en relación al sistema de referencia así como la de las fuentes como imágenes especulares de la fuente original y que permiten simular las trayectorias correspondientes a las múltiples reflexiones que se originan en el estrato. El estrato ha sido dividido para simplificar la formulación del problema.

Volviendo a la expresión (4.24) y dado que esta no cumple con la condición de frontera libre, se requiere "simular" una reflexión en la misma mediante la inserción de una fuente imaginaria, representada por s_1' en la fig 4.9.

$$G = \frac{F}{\mu 4i} \left\{ H_0^{(2)} \left[q \sqrt{x_R^2 + (z_R - z_s)^2} \right] + H_0^{(2)} \left[q \sqrt{x_R^2 + (z_R - (-z_s))^2} \right] \right\} \quad (4.25)$$

donde $r_1' = \sqrt{x_R^2 + (z_R - z_{s_1'})^2}$ y $z_{s_1'} = -z_s$.

La Ec. (4.25) cumple con la condición de frontera libre, pero no así con la de frontera rígida, de donde se hace necesario considerar una imagen especular inferior de la fuente que aporta dicha contribución, representada en la fig 4.9 por s_2' y que representa reflexiones provenientes de la base rígida. El vector r'_2 puede escribirse tomando en cuenta a la segunda fuente imaginaria como:

$$r'_2 = \sqrt{x_R^2 + [z_R - (2H - z_S)]^2} \quad (4.26)$$

de modo que la función de Green queda:

$$G = \frac{1}{\mu 4i} \left\{ H_0^{(2)} \left[q \sqrt{x_R^2 + (z_R - z_S)^2} \right] + H_0^{(2)} \left[q \sqrt{x_R^2 + (z_R - (-z_S))^2} \right] - \right. \\ \left. - H_0^{(2)} \left[q \sqrt{x_R^2 + (z_R - (2H - z_S))^2} \right] \right\} \quad (4.27)$$

A partir de la contribución de esta fuente puede considerarse una fuente especular que anule el efecto de S'_1 en la cima del estrato (desplazamiento nulo), de donde surge S'_3 (fig. 4.9).

Considerando a la fuente S'_3 , el vector r'_3 se escribe:

$$r'_3 = \sqrt{x_R^2 + [z_R - (2H + z_S)]^2} \quad (4.28)$$

y respectivamente, la función de Green:

$$G = \frac{1}{\mu 4i} \left\{ H_0^{(2)} \left[q \sqrt{x_R^2 + (z_R - z_S)^2} \right] + H_0^{(2)} \left[q \sqrt{x_R^2 + (z_R - (-z_S))^2} \right] - \right. \\ \left. - H_0^{(2)} \left[q \sqrt{x_R^2 + (z_R - (2H - z_S))^2} \right] - H_0^{(2)} \left[q \sqrt{x_R^2 + (z_R - (2H + z_S))^2} \right] \right\} \quad (4.29)$$

De los desarrollos anteriores, puede inferirse una estructura periódica representada por el conjunto de fuentes imaginarias mostradas en la misma fig. 4.9. La periodicidad encontrada es, como ya ha sido mostrado por Sánchez'-Sesma (comunicación personal) de $4H$. La expresión analítica para un número infinito de fuentes por el método de las imágenes puede escribirse entonces como:

$$\begin{aligned}
G = & \frac{F}{\mu 4i} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_0^{(2)} \left[q \sqrt{x_R^2 + (z_R - (z_S + 4mH))^2} \right] + \right. \\
& + \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_0^{(2)} \left[q \sqrt{x_R^2 + (z_R - (-z_S + 4mH))^2} \right] - \\
& - \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_0^{(2)} \left[q \sqrt{x_R^2 + (z_R - (2H - z_S + 4mH))^2} \right] - \\
& \left. - \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_0^{(2)} \left[q \sqrt{x_R^2 + (z_R - (2H + z_S + 4mH))^2} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{m=-\infty}^{\infty} H_0^{(2)}(qrm) = & \frac{2}{L} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{-ik_n x_R - i\gamma_n |z_R - z_S|} \frac{1}{\gamma_n} + \frac{1}{\gamma_n} + \right. \\
& \left. + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-ik_n x_R - i\gamma_n |z_R - z_S|} \frac{1}{\gamma_n} \right\}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

La expresión (4.31) puede escribirse también, en términos de cosenos como:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} H_0^{(2)}(qrm) = \frac{2}{L} \left\{ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(k_n z_R) \frac{1}{\gamma_n} e^{-i\gamma_n |x_R - x_S|} + \frac{1}{\gamma_n} \right\}_{(n=0)} \tag{4.32}$$

donde $\gamma_n = \sqrt{q^2 - k_n^2}$.

A su vez, (4.32) puede escribirse como:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} H_0^{(2)}(qrm) = \frac{2}{L} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \cos(k_n z_R) \frac{1}{\gamma_n} e^{-i\gamma_n |x_R - x_S|} \right\} \tag{4.33}$$

donde ϵ_n es el factor de Neumann; $\epsilon_n = \{1, n=0; 2, n>0\}$.

A partir de la ecuación (4.33) y dado que la periodicidad de las fuentes es $4mH$ y que $k_n = n\pi/2H$, la función de Green de la ecuación (4.30) puede escribirse:

$$\begin{aligned}
 G = & \frac{F}{\mu} \frac{1}{4i} \left\{ \frac{1}{2H} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos \frac{n\pi}{2H} (z_R - z_S) e^{-i\gamma_n |x_R - x_S|} \frac{1}{\gamma_n} + \right. \\
 & + \frac{1}{2H} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos \frac{n\pi}{2H} (z_R + z_S) e^{-i\gamma_n |x_R - x_S|} \frac{1}{\gamma_n} - \\
 & - \frac{1}{2H} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos \frac{n\pi}{2H} (z_R - z_S - 2H) e^{-i\gamma_n |x_R - x_S|} \frac{1}{\gamma_n} - \\
 & \left. - \frac{1}{2H} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos \frac{n\pi}{2H} (z_R + z_S - 2H) e^{-i\gamma_n |x_R - x_S|} \frac{1}{\gamma_n} \right\};
 \end{aligned}
 \tag{4.34}$$

donde $\gamma_n = \sqrt{q^2 - k_n^2} = \sqrt{(\omega/\beta)^2 - (n\pi/2H)^2}$; $\varepsilon_n = \{1, n=0; 2, n>0\}$

Aplicando identidades trigonométricas, reagrupando y reduciendo, la ecuación (4.34) puede escribirse finalmente como:

$$G = -\frac{iF}{\mu} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{2H} (z_R) \cos \frac{n\pi}{2H} (z_S) e^{-i\gamma_n |x_R - x_S|} \frac{1}{\gamma_n H}
 \tag{4.35}$$

donde $\gamma_n = \sqrt{(\omega/\beta)^2 - (n\pi H/2)^2}$; $\varepsilon_n = \{1, n=0; 2, n > 0 \text{ e } \text{Im}(\gamma_n) \leq 0\}$

Esta última expresión puede ser corregida por la técnica de multiplicación por el exponencial de la frecuencia compleja, tal y como se planteó para el caso de la respuesta del semiespacio con una fuente puntual.

V.- RESULTADOS NUMÉRICOS Y APLICACIONES.

Se ha hecho una revisión de diferentes principios y métodos de modelado de la respuesta de medios estratificados ante la incidencia de ondas a partir de sus expresiones analíticas básicas. En este capítulo, se retomarán aquellas de mayor interés para su aplicación inmediata a los estudios de la respuesta sísmica de la Cuenca de México, a través de los resultados que arroja su implementación como algoritmos numéricos en lenguaje Fortran. Así pues, se corrobora la validación del método de Thompson-Haskell al comparar algunos resultados con los de una solución exacta para el semiespacio y posteriormente, se compara su desempeño con el del método de Kennett. Se presentan también sismogramas sintéticos de la respuesta de un semiespacio con una fuente puntual modelado por una solución exacta y por el método del número de onda discreto, abordado brevemente en el capítulo IV, así como para un estrato con fuente puntual posado sobre una base rígida. Finalmente se aborda la aplicación del Método de Thompson-Haskell al modelado de la respuesta de un estrato irregular, como primera aproximación al estudio de la contribución de la estructura profunda de la formación Cuautla en la respuesta sísmica de la Cuenca de México.

V.1.- Respuesta del Semiespacio.

Con el objeto de contar con un medio de comparación y calibración para los diferentes métodos de modelado de propagación en estratos, se calcularon los sismogramas sintéticos correspondientes a la respuesta de un semiespacio elástico ante la incidencia de ondas P , SV , SH y de Rayleigh. La solución empleada es exacta (sección II.2) y la excitación fue dada por un pulso de Ricker. El modelo de semiespacio empleado presenta como propiedades elásticas una velocidad de propagación para ondas P y S $\alpha=1.73205$ m/s y $\beta=1.0$ m/s, densidad $\rho = 2.0$ g/cm³ y factores de calidad $Q_p=10000$ y $Q_s=15000$. Para un $\eta=0.25$ y un muestreo de 128 frecuencias a 0.025 Hz, se calcularon funciones de transferencia. Luego, para 256 puntos en tiempo para un pulso de Ricker muestreado a 0.1s y periodos $t_p=2.5$ s. y $t_s=6.0$ s, se generó un catálogo de gráficas de respuesta para incidencia de ondas P , SV y SH a 0, 15, 30, 45, 60, 75, 85, 87 y 90 grados en 5 estaciones distribuidas a profundidad, así como una gráfica de la respuesta para ondas de Rayleigh, de las que se presentan a continuación una selección donde pueden observarse algunos rasgos característicos.

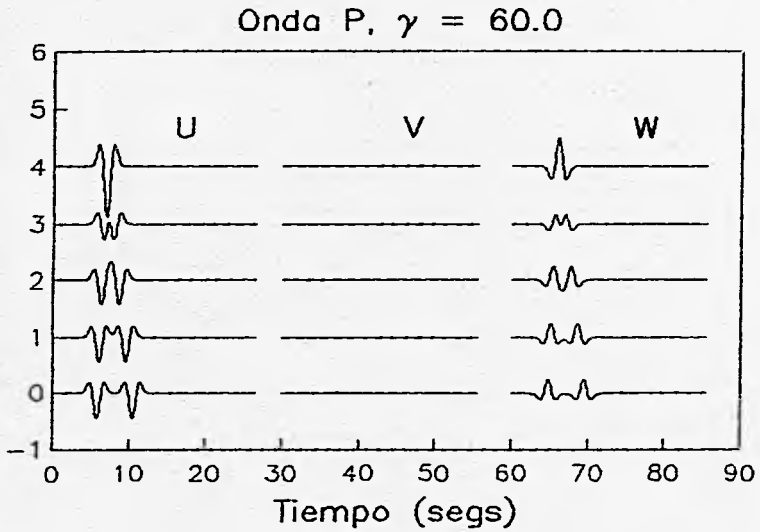
La fig. 5.1 muestra los sismogramas sintéticos para las cinco estaciones dispuestas a profundidad para una incidencia de ondas P a 60°, SV a 45°, SH a 75° y ondas de Rayleigh. Se observa la respuesta para la excitación del pulso de Ricker en las componentes u , v y w .

La primera gráfica, correspondiente a la incidencia de ondas P a 60° muestra el reflejo en ondas P , así como la duplicidad de la amplitud de la señal de entrada en la superficie libre, tal como se esperaría. La segunda gráfica, correspondiente a la incidencia de ondas SV a 45°

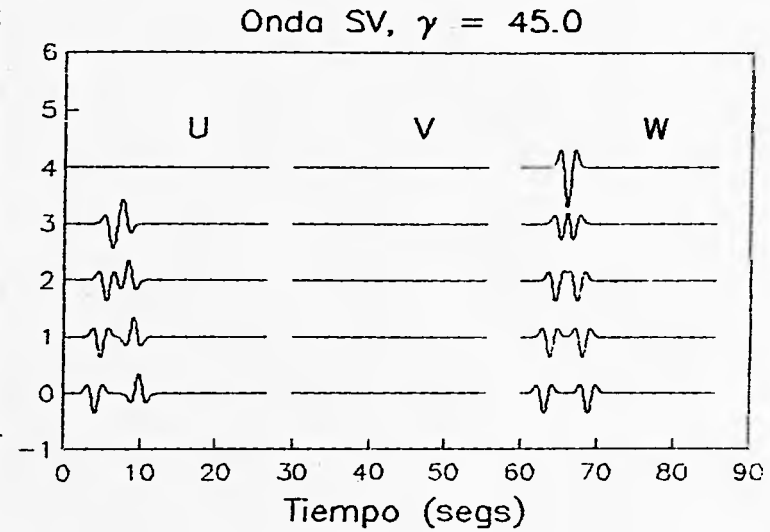
muestra para la componente u la anulación de la señal en la superficie libre dado el cambio de polaridad en la reflexión, mientras en la componente w la duplicidad esperada se manifiesta. La tercera gráfica muestra la incidencia de ondas SH a 75° y en ella se aprecia como, por efecto del alto ángulo de incidencia, el pulso de Ricker llega casi con la misma forma a los receptores dispuestos a profundidad, esto porque el frente de onda tiende a ser paralelo al arreglo de detectores conforme el ángulo de incidencia crece. Finalmente, la última gráfica muestra la respuesta manifestada en los detectores para una onda de Rayleigh, cuya propagación superficial se da en un plano vertical, manifestándose entonces sólo en dos componentes (radial y vertical). Su amplitud se atenúa con la profundidad y como ya se apuntaba en el capítulo II, el movimiento de partícula se da en trayectorias elípticas cuya polaridad se invierte tras llegar a un punto de equilibrio, a una profundidad donde, si se tuviesen detectores, sólo se manifestaría la componente vertical. En la gráfica pues puede apreciarse la ausencia de una componente transversal, mientras el pulso sufre una clara atenuación a profundidad.

Fig. 5.1.- Sísmogramas sintéticos de la respuesta de un semiespacio elástico ante la incidencia de ondas P a 60°, ondas SV a 45°, ondas SH a 75° y ondas de Rayleigh. Se muestran las componentes U, V y W para los tres primeros casos mientras que para las ondas de Rayleigh se muestran el radial y el vertical. La componente transversal como se esperaba, está ausente.

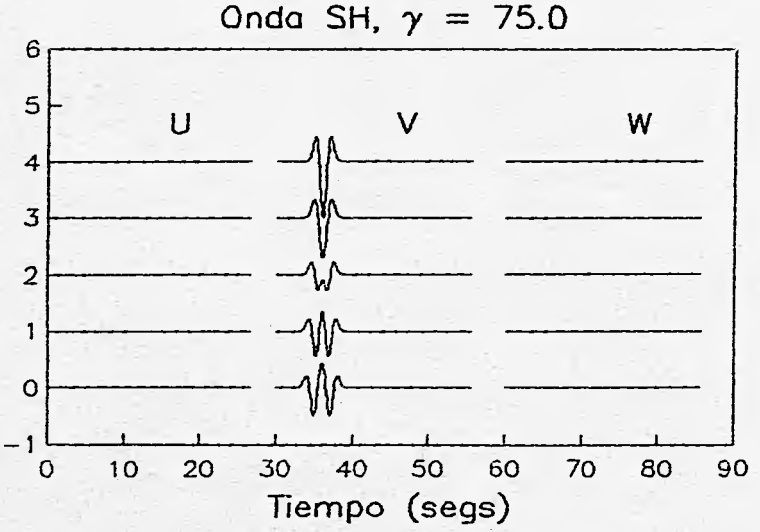
Desplazamiento en estaciones.



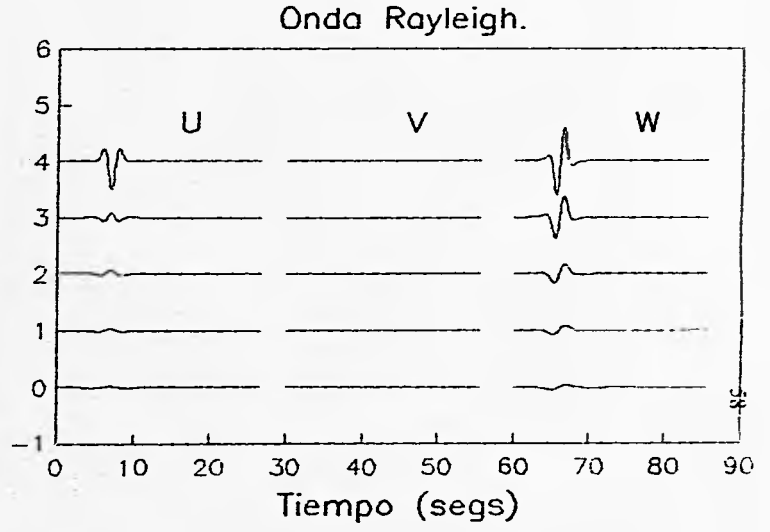
Desplazamiento en estaciones.



Desplazamiento en estaciones.



Desplazamiento en estaciones.



V.2.- Respuesta de un Modelo Estratificado.

A continuación se describen gráficas de la respuesta de un arreglo de estratos planos con las mismas propiedades elásticas, como aproximación a un semiespacio y con el fin de comparar los métodos de modelado de Thomson-Haskell y Kennett entre sí, a partir de su comparación con la respuesta del propio semiespacio, ya abordado en la sección anterior.

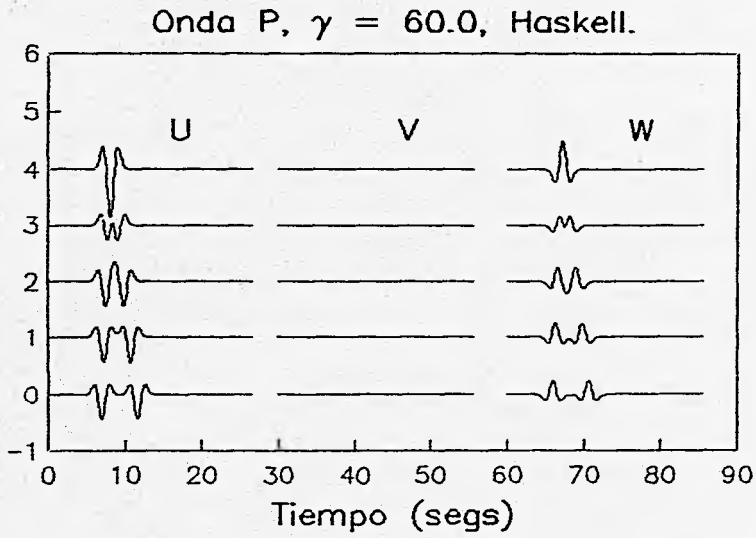
V.2.1.- Método de Thomson-Haskell.

Se calculó la respuesta de un arreglo de cuatro estratos planos de 1 m de espesor cada uno, velocidades de propagación $\alpha=1.73205 \text{ m/s}$ y $\beta=1.0 \text{ m/s}$, densidad $\rho = 2.0 \text{ g/cm}^3$ y factores de calidad $Q_p=10000$ y $Q_s=15000$ respectivamente, con el objeto de simular un semiespacio. Se empleó un pulso de Ricker con $t_p=2.5\text{s}$ y $t_s=6.0\text{s}$ muestreado para la mayoría de los casos a un intervalo de 0.1s para 256 puntos y se generó un catálogo de sismogramas calculados en las interfaces de los estratos así como en la superficie libre, para la incidencia de ondas P , SV y SH a intervalos de 15° . De ellos, se seleccionaron los sismogramas correspondientes a las mismas incidencias que para el cálculo de la respuesta del semiespacio, con fines de comparación. Las gráficas se presentan en la figura 5.2 y se describen a continuación.

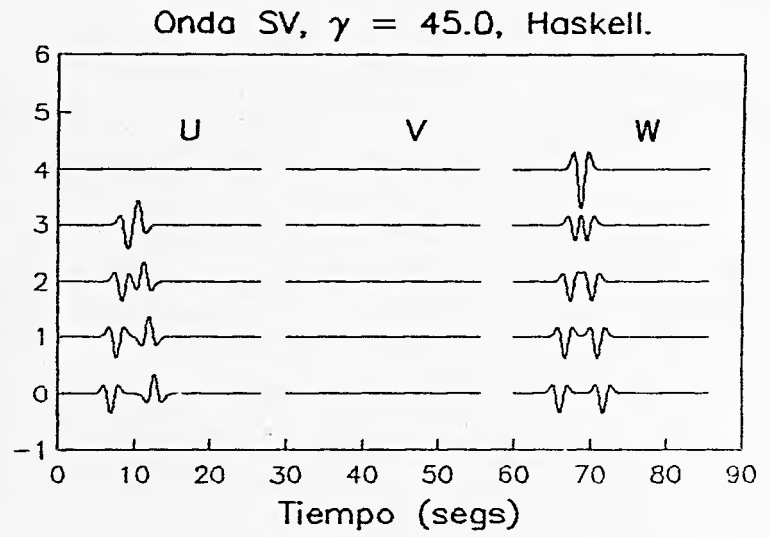
La figura 5.2 muestra la respuesta del modelo de semiespacio estratificado calculado por el método de Thomson-Haskell para una incidencia de ondas P a 60° , SV a 45 y 75 grados y SH a 75° y en ella se pueden apreciar las diferentes reflexiones generadas, así como la duplicación en la amplitud de los pulsos, manifestada en la superficie libre. La primera gráfica, correspondiente a la incidencia de ondas P a 60° muestra la reflexión en ondas P y como puede comprobarse al comparar con la primera gráfica de la figura 5.1, la forma de los pulsos incidente y reflejado son idénticos. La segunda figura, donde se presenta la incidencia de ondas SV a 45° muestra la anulación de la amplitud del pulso en la superficie libre en su componente u ; mientras que en su componente w la duplicación se mantiene. De nueva cuenta, al comparar con la fig. 5.1 se encuentra que las formas de los pulsos son idénticas a todas las profundidades consideradas. La tercera gráfica muestra la respuesta en cada interfaz para la incidencia de ondas SH a 75° y como puede comprobarse por comparación con la figura 5.1, nuevamente el acuerdo es muy bueno. Finalmente, la cuarta gráfica muestra los sismogramas sintéticos para cada interfaz para una incidencia de ondas SV a 75° . En ella, puede observarse ruido resultante de la imprecisión numérica originada por el alto ángulo de incidencia. Este ruido es introducido en el cálculo debido a que el algoritmo de Thomson-Haskell ha sido formulado con base en la propagación de la solución de estrato a estrato de manera perpendicular. Se encontró que en algunos casos, la imprecisión numérica es tan alta que el programa era abortado por la computadora, pero esta limitación se superaba al cambiar el muestreo, manifestándose dicha imprecisión como el ruido mostrado. Para la misma figura, por ejemplo, se empleó un muestreo de 0.2 segundos para 128 puntos, mismo que se aplicó para incidencias mayores.

fig. 5.2.- Sísmogramas sintéticos en la superficie del semiespacio modelado mediante una estratificación. Método de Thomson-Haskell. Detectores dispuestos a profundidad. Nótese el acuerdo con la solución exacta de las figuras precedentes.

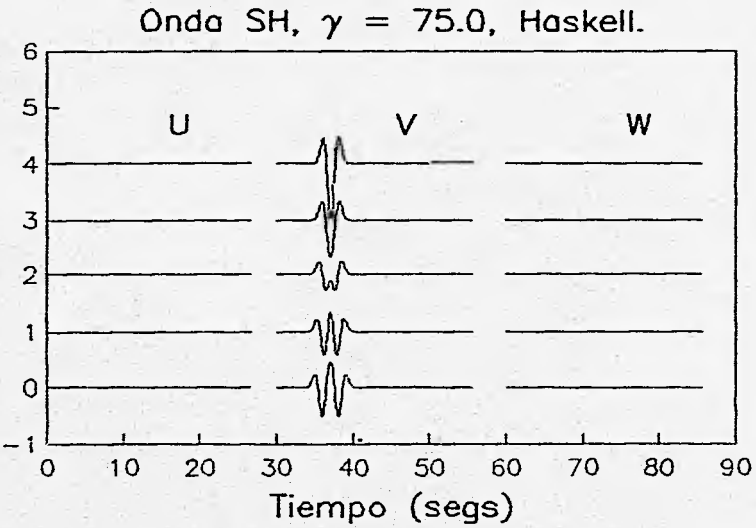
Desplazamiento en estaciones.



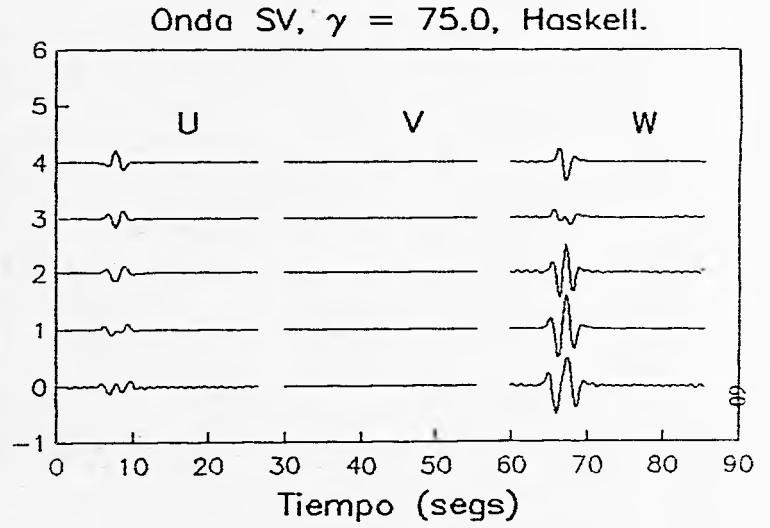
Desplazamiento en estaciones.



Desplazamiento en estaciones.



Desplazamiento en estaciones.



La figura 5.3 muestra la respuesta del mismo semiespacio estratificado en la superficie libre para la incidencia de ondas P , SV y SH a ángulos variables para fines de comparación con el método de Kennett. La primera gráfica, correspondiente a una incidencia de ondas P muestra la respuesta en la superficie libre de un pulso de Ricker con las mismas características empleadas en las gráficas precedentes para una incidencia de 0, 15, 30 y 45 grados y en ella se aprecia cómo la amplitud del pulso varía para cada incidencia. La segunda gráfica, muestra la respuesta para la incidencia de ondas SV a 60, 75, 85, 87 y 90 grados y en ella puede apreciarse nuevamente la introducción del ruido por imprecisión numérica a partir de la segunda incidencia. La última gráfica, correspondiente a la incidencia de ondas SH muestra la esperada duplicación del pulso en la superficie libre a 60, 75, 85, 87 y 90 grados de incidencia. El retraso observado en las gráficas al compararlas con las obtenidas a partir de la solución exacta del semiespacio es el resultado de la posición de los sistemas de referencia para ambos algoritmos, de modo que aunque en ambos casos este se sitúa en la superficie libre, para el método de Haskell, esta corresponde a la cima del modelo estratificado. Así por ejemplo el pulso en superficie para una onda P en su componente w tendrá un retraso t_r con respecto a la respuesta del semiespacio, donde $t_r = \cos(\gamma)(H/v)$, y γ es el ángulo de incidencia, H el espesor total del arreglo y v la velocidad de propagación, en este caso α para la onda P .

V.2.2.- Método de Kennett.

Al igual que en el caso del método de Thomson-Haskell y con el objeto de compararlos, se calculó la respuesta del mismo modelo de semiespacio con cuatro estratos planos de 1 m de espesor cada uno y velocidades de propagación $\alpha=1.73205\text{ m/s}$ y $\beta=1.0\text{ m/s}$, densidad $\rho = 2.0\text{ g/cm}^3$ y factores de calidad $Q_p=10000$ y $Q_s=15000$ respectivamente, con el método de Kennett. Se empleó un pulso de Ricker con parámetros $t_p= 2.5\text{ s}$ y $t_s= 6.0\text{ s}$ muestreado en 256 puntos a 0.1s y en 128 puntos a 0.2s. Se generó un catálogo de sismogramas sintéticos, de los que se presentan una selección con fines comparativos con el método de Thomson-Haskell y que se describen a continuación.

La figura 5.4 muestra los sismogramas sintéticos calculados por el método de Kennett para la incidencia de ondas P , SV y SH a diferentes ángulos. La primera gráfica, correspondiente a la incidencia de ondas P muestra la respuesta en la cima del modelo de semiespacio estratificado para una incidencia de 0, 15, 30 y 45 grados y en ella se aprecia claramente la variación de la amplitud del pulso con respecto a los diferentes ángulos. Se comprueba por comparación con la gráfica equivalente de la figura 5.3 que la forma de los pulsos son idénticos a los calculados por el método de Thomson-Haskell, siendo la única diferencia el retraso en tiempo del que ya se habló en el párrafo anterior. La segunda figura, correspondiente a la incidencia de ondas SV a 60, 75, 85, 87 y 89 grados muestra la ausencia del ruido característico de los resultados generados por el método de Thomson-Haskell, pero sin contemplar la respuesta a 90°, dada la imprecisión numérica generada y que provoca que la computadora aborte el cálculo. Finalmente, la cuarta gráfica muestra los sismogramas sintéticos en la superficie del modelo estratificado para la incidencia de ondas SH a 60, 75, 85, 87 y 89 grados y nuevamente el acuerdo con sus equivalentes generados con el método de Thomson-Haskell.

kell es muy bueno en forma, siendo el retraso en tiempo en estos últimos debido a la diferente posición que guardan los sistemas de referencia. Para el cálculo de la respuesta del semiespacio en las incidencias de ondas *SV* y *SH* a ángulos mayores o iguales a 75° se requirió de un muestreo de 128 puntos a 0.2s y se observó que para los casos equivalentes, el algoritmo programado del método de Kennett superó en tiempo de cálculo al de Thompson-Hasckell hasta en un 50%, mostrando además sus ventajas en precisión al no aportar el ruido característico para incidencias mayores o iguales a la crítica.

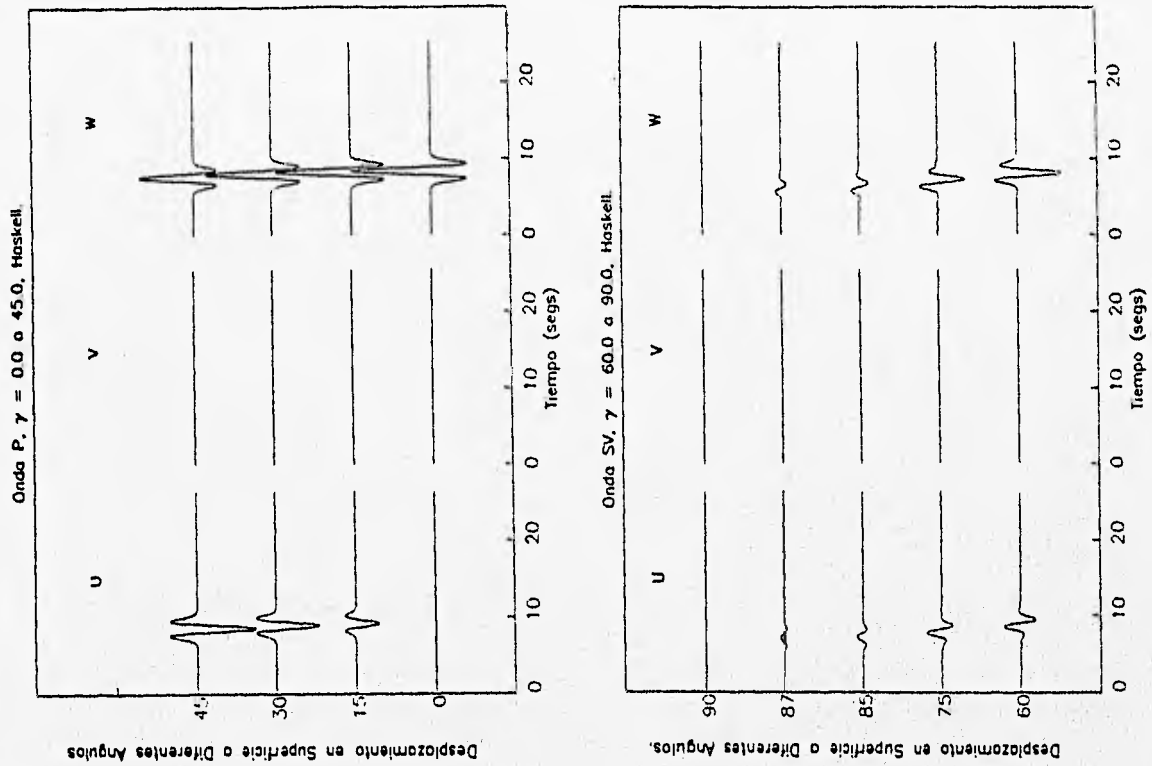


fig. 5.3.- Sismogramas sintéticos en la cima del modelo de semiespacio estratificado de la figura 5.2. Se muestra la incidencia de ondas *P* y *SV* a diferentes ángulos.

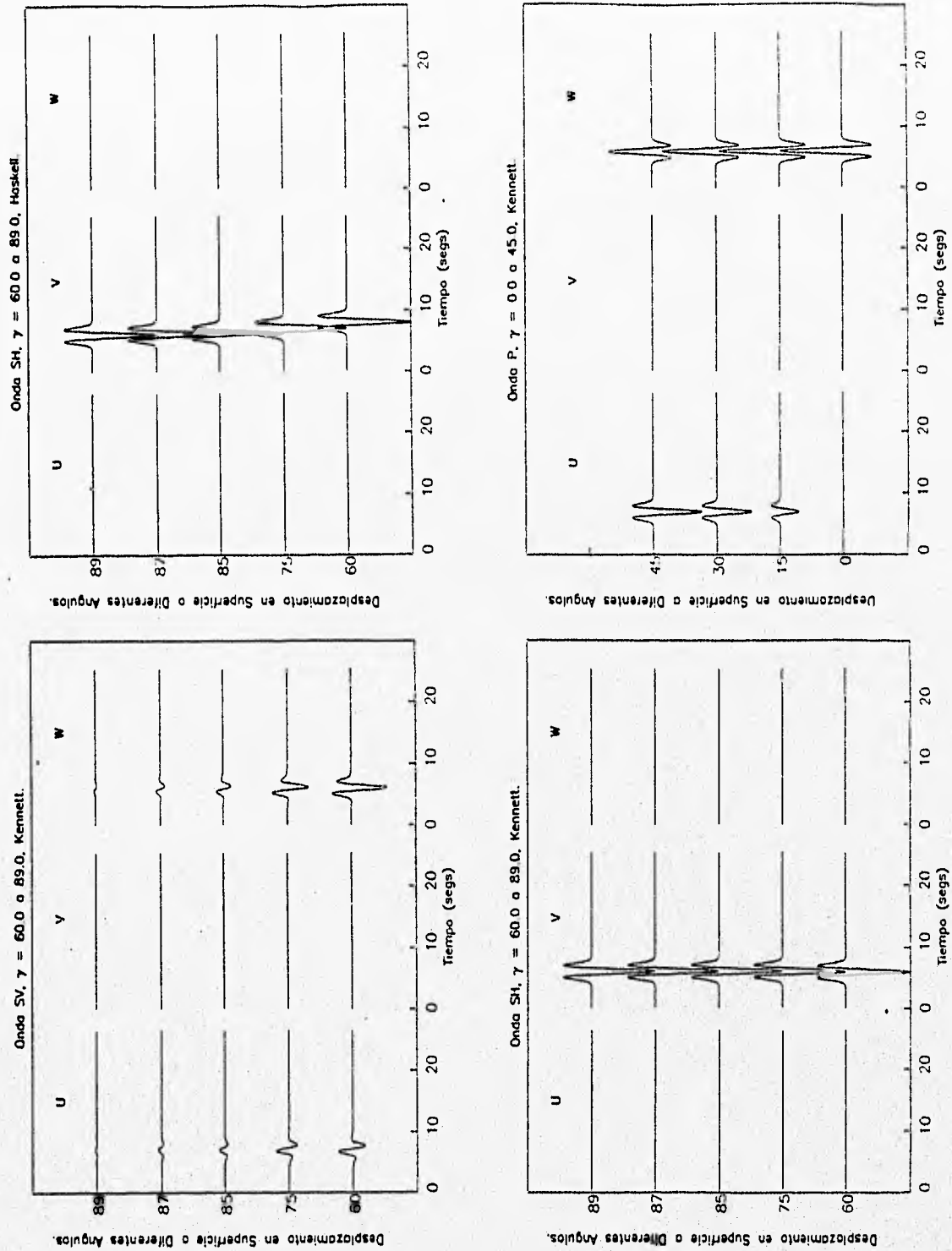


fig. 5.3 (cont.) y fig 5.4.- Sismogramas sintéticos calculados en la cima del arreglo estratificado uniforme por el Haskell. Se muestra la incidencia de ondas SH a diferentes ángulos. Se muestra también la respuesta para el mismo modelo estratificado calculada por el método de Kennett para incidencias de ondas P, SV y SH. Nótese el acuerdo con los resultados obtenidos por el método de Thomson-Haskell, excepto en el retraso en tiempo debido a los diferentes sistemas de referencia.

V.3.- Respuesta de un Semiespacio con Fuente Puntual.

Con el fin de complementar el presente estudio, donde se han revisado algunos métodos conocidos de la literatura para el cálculo de la respuesta de arreglos estratificados, se calculó la respuesta de un semiespacio ante la incidencia de ondas cilíndricas generadas en una fuente puntual (explosión). La figura 5.5 muestra los resultados generados por un algoritmo de solución exacta y por la aplicación del *método del número de onda discreto* y se describe a continuación.

La figura 5.5 muestra en su primera gráfica la respuesta de nueve estaciones alineadas dispuestas a intervalos de 1m en la superficie de un semiespacio con densidad y velocidad de propagación de ondas S unitarias. La fuente de ondas SH cilíndricas se supuso inmersa en el semiespacio a una profundidad de 1m y situada en el centro del sistema de referencia. Se empleó un pulso de Ricker muestreado en 128 puntos a una razón de una muestra cada 0.2 s y cuyos parámetros son una amplitud de diez unidades, un t_p de 2.5s y un t_s de 6.0s. La línea continua muestra la respuesta calculada por una solución exacta en términos de funciones de Hankel de segunda especie y orden cero y la línea discontinua, el cálculo según la discretización de una representación por ondas planas según el método del número de onda discreto, tratado brevemente en el capítulo IV y donde no se empleó ningún artificio o técnica para atenuar el efecto de las fuentes periódicas. En dicha gráfica puede apreciarse cómo el efecto de las fuentes periódicas resultantes de la discretización alejan sensiblemente la respuesta del semiespacio de la calculada por la solución exacta y donde el pulso, con algunas oscilaciones se mantiene presente en tiempos donde esta solución no presenta contribución alguna. La segunda gráfica (derecha superior) presenta los mismos cálculos con una atenuación aplicada a la solución discretizada por medio del factor de calidad $Q=100$. Como puede apreciarse, aunque las oscilaciones correspondientes a la contribución de las fuentes periódicas generada por la discretización empleada disminuyen sensiblemente su amplitud, la forma y amplitud del pulso principal no se modifica, por lo que no se considera un método de corrección apropiado. La tercera gráfica muestra la respuesta calculada por la solución exacta y la discretización de la representación por ondas planas donde a esta última se le ha corregido por una técnica que considera la multiplicación de la señal por una función exponencial de la parte imaginaria de la frecuencia compleja $\omega = \omega_R - i\omega_I$ (ver capítulo IV). La señal en tiempo resultante, como se aprecia, se ajusta de manera aceptable a la señal calculada por la solución exacta, sobre todo en las estaciones centrales. Finalmente, la cuarta gráfica muestra el mismo cálculo de la gráfica 3, pero extendido a 45 estaciones distribuidas en la superficie del semiespacio a una distancia de 0.2m. El resultado es un perfil sísmico que guarda la forma que se esperaría con los retrasos correspondientes al tiempo de viaje de la onda incidente en la superficie libre, según la posición de los detectores. Se aprecia en esta gráfica como la solución aproximada es idéntica a la exacta para las estaciones centrales, mientras que para las externas esta se aleja un poco, debido a la convergencia de las sumatorias, cuyos términos presentan una mayor oscilación a mayores distancias de la fuente.

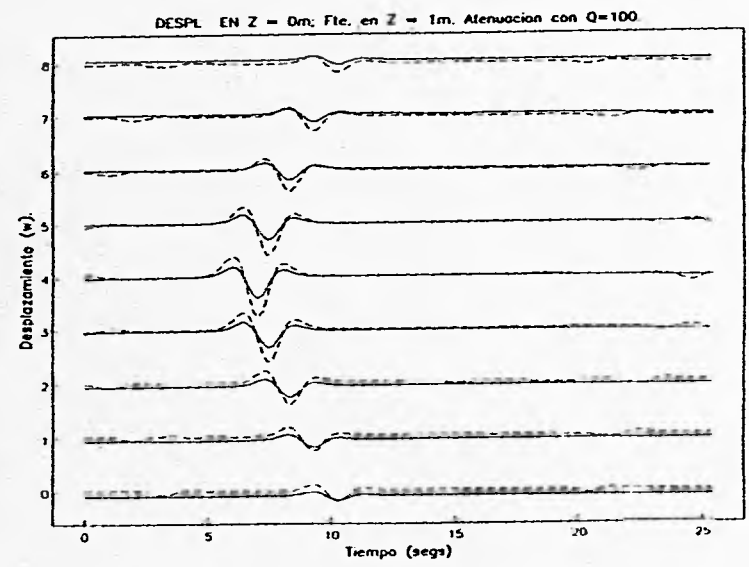
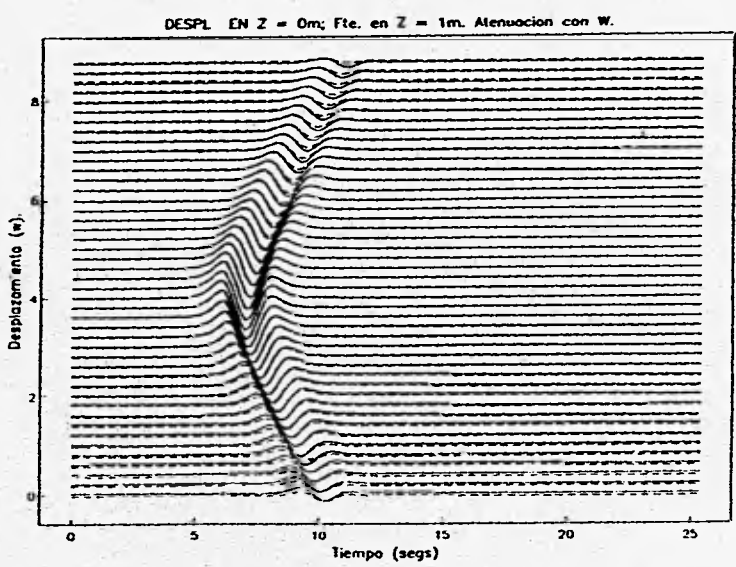
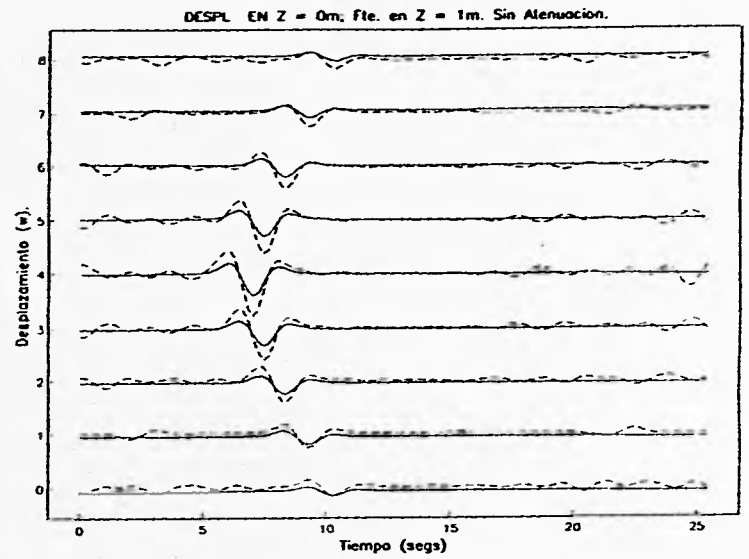
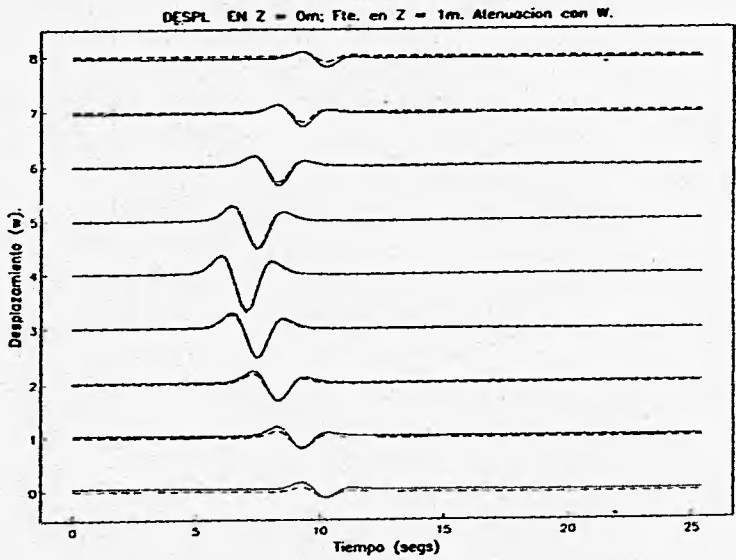


fig. 5.5.- Sismogramas sintéticos en nueve estaciones situadas en la superficie de un semiespacio. Respuesta para una fuente situada a 1 m. de profundidad. Para la primera gráfica no se consideró atenuación, para la segunda, atenuación por $Q \approx 100$, la tercera por frecuencia angular completa y la cuarta es una composición de 45 trazas para este último método. La línea continua representa la solución exacta y la discontinua el cálculo por el método del número de onda discreto. La acasualidad es debida a la duración de la señal.

V.4.- Respuesta de un Estrato con Fuente Puntual sobre una Base Rígida.

Como parte final del estudio de la respuesta sísmica de medios elásticos ante la incidencia de ondas generadas en una fuente puntual, se calculó la respuesta correspondiente a una fuente situada en el interior de un estrato posado sobre una base rígida. Para este último caso, sólo se consideró la solución exacta, cuyos resultados se muestran en la figura 5.6 y que se describe a continuación.

La figura 5.6 muestra la respuesta en 30 estaciones situadas en la superficie de un estrato de 5 m. de espesor para diferentes velocidades de propagación y diferentes profundidades de la fuente. La primera gráfica corresponde a una velocidad de propagación de ondas S de 5.0 m/s y se consideró una fuente situada en (0.0, 2.5) [m], así como un factor de calidad $Q=500$ y un pulso de Ricker de 10 unidades de amplitud; $t_s= 2.0s$ y $t_p= 0.7s$, muestreado en 512 puntos a un intervalo de 0.1s. La velocidad se eligió arbitrariamente pues se consideró sólo de interés el presentar los rasgos característicos para una onda directa y sus múltiples reflexiones. En esta gráfica puede apreciarse cómo el pulso cambia de polaridad de manera intermitente al reflejarse en la base rígida y cómo aunque se atenúa en amplitud conforme se aleja de la fuente, esta atenuación no es suficientemente importante como para anular su efecto completamente y aparece nuevamente al inicio de cada traza como un efecto de acausalidad. La segunda gráfica muestra la respuesta del mismo medio, para las mismas características en el pulso, atenuación y fuente, pero para un estrato con una velocidad de propagación de ondas S de 2.5 m/s. En las trazas puede apreciarse como el espaciamiento entre los pulsos reflejados se ha incrementado al doble con respecto a los presentados en la primera gráfica, lo que permite apreciar de manera más clara el cambio de polaridad de los mismos, debido a las sucesivas reflexiones. En esta gráfica puede apreciarse también un incremento en el retraso en la recepción del primer arribo para las estaciones más alejadas, así como la presencia nuevamente de la acausalidad provocada por la duración de la señal. La tercera gráfica muestra la respuesta del mismo estrato y pulso, pero para una fuente situada a 4.9 m. de profundidad. Con ello se ha buscado situar a la fuente próxima a la base rígida encontrándose una respuesta con un mayor retraso entre reflejos y un pulso notablemente más atenuado. Aún así; la acausalidad debida a la duración de la señal se conserva pero el ejemplo permite apreciar el efecto de la distancia de la fuente y la polarización de los reflejos. Finalmente, la cuarta gráfica muestra la respuesta del mismo estrato para una velocidad de propagación de ondas S de 5.0 m/s. La fuente en este caso está situada a 0.1m de profundidad, lo que genera un pulso inicial de gran amplitud y una geometría de primeros arribos prácticamente triangular. El cambio de polaridad en las reflexiones es claro, así como la distancia entre estas.

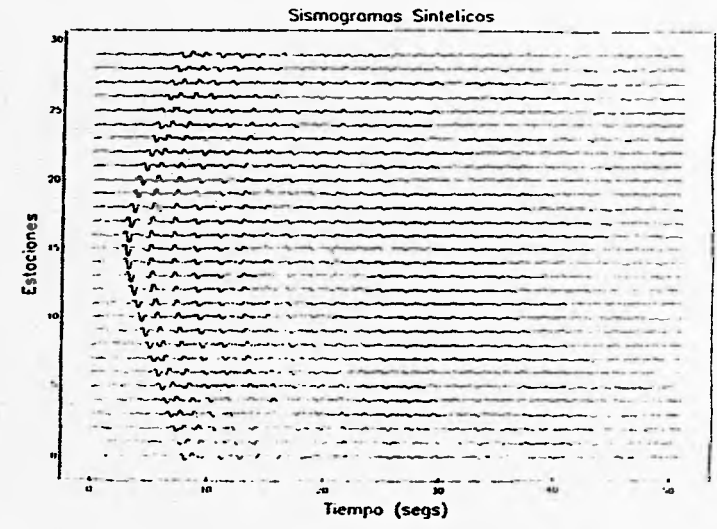
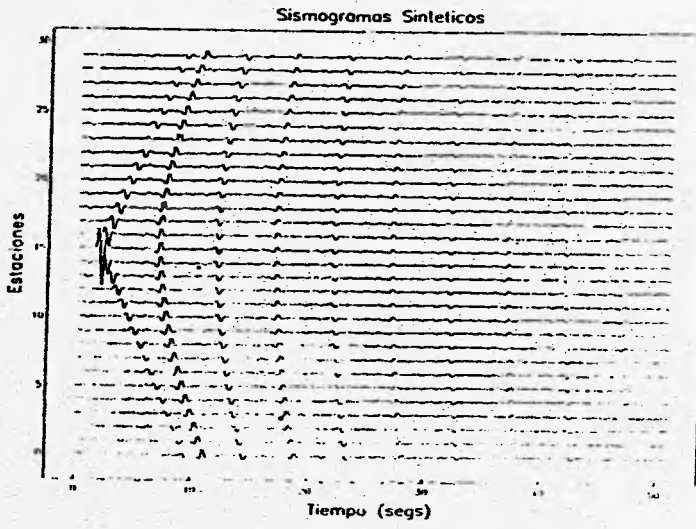
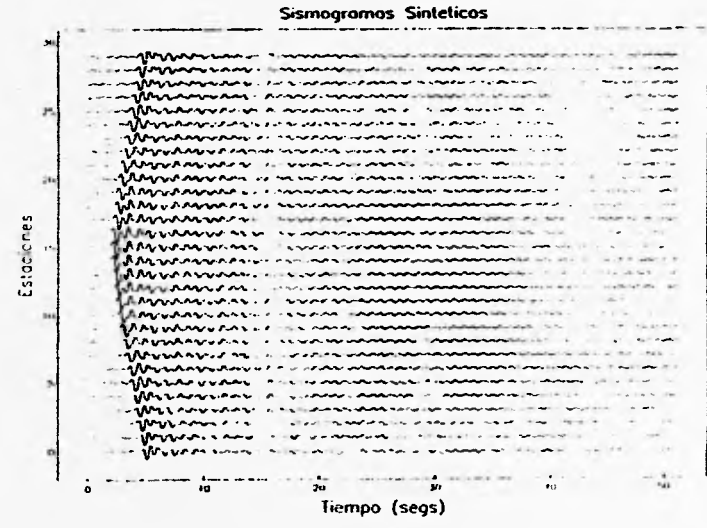
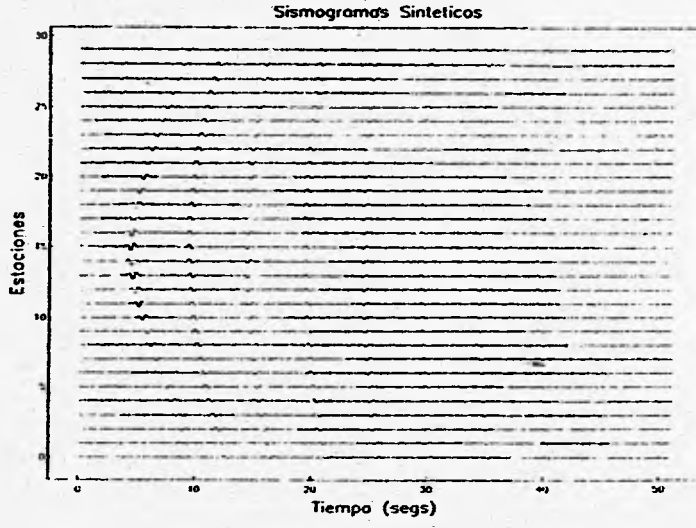


fig. 5.6.- Sismogramas sintéticos en la superficie del estrato de 5m de espesor posado sobre una base rígida con una fuente puntual situada a 2.5m, 2.5m, 4.9m y 0.1m de profundidad (gráficas 1 a 4 de izquierda a derecha y de arriba a abajo). las velocidades consideradas fueron de 5.0m/s, 2.5m/s, 2.5m/s y 5.0m/s, respectivamente. Se consideró en todos los casos un factor de calidad $Q = 500$. En las trazas pueden apreciarse las reflexiones múltiples con sus cambios de polaridad para el pulso de Ricker. La acausalidad es debida a la larga duración de las señales.

V.5.- Respuesta de un Estrato Irregular y Aplicación al Estudio de la Respuesta Sísmica de la Cuenca de México.

En esta aplicación, que ha sido publicada en su totalidad en la Segunda Monografía de la Unión Geofísica Mexicana (Sánchez Sesma *et al.*, 1995), se presenta la adaptación del método matricial de Thompson-Haskell para simular la respuesta sísmica de medios con estratificación irregular mediante un método de frontera y puede considerarse una aportación más al cálculo de los efectos de sitio de los que Aki (1988) ha señalado numerosos ejemplos de predicciones exitosas y sobre los que el lector interesado podrá encontrar suficientes referencias en la literatura, tanto para soluciones analíticas de casos escalares bidimensionales (*e.g.* Trifunac, 1971, 1973; Sánchez-Sesma y Velázquez, 1987), como sobre métodos numéricos para configuraciones complejas (Sánchez-Sesma, 1987; Luco y De Barros, 1990 y Sánchez-Sesma y Luzón, 1994) y sobre los propios métodos de frontera (Aki y Larner, 1970; Sánchez-Sesma y Esquivel, 1979; Bouchon, 1985; Kawase, 1988 y Kawase y Aki, 1989 y el texto de Manolis y Beskos, 1988).

En años recientes, los métodos de frontera han ganado una popularidad creciente, debido principalmente a la actual disponibilidad de computadoras rápidas. Estos métodos son aptos para la solución de problemas de propagación de ondas porque evitan la introducción de fronteras ficticias y reducen en un grado la dimensionalidad del problema, con las consiguientes ventajas numéricas que esto implica. Autores como Zienkiewicz (1977) los han empleado en combinación con el *método de elementos finitos*, obteniendo regiones modeladas más reducidas (Bravo *et al.*, 1988). Existen dos aproximaciones principales para la formulación de los métodos de frontera, la primera basada en el uso de ecuaciones integrales (Cruse y Rizzo, 1968a,b; Brebbia, 1978; Cole *et al.*, 1978; Alarcón *et al.*, 1979) y la segunda, a partir del uso de sistemas completos de solución (Herrera y Sabina, 1978; Herrera, 1980). Algunos autores han aplicado un método de frontera basado en esta segunda aproximación a diversos problemas de difracción (Sánchez-Sesma, 1978; Sabina *et al.*, 1978; Sánchez-Sesma y Rosenblueth, 1979; Sánchez-Sesma y Esquivel, *op. cit.*, England *et al.*, 1980; Wong, 1982; Dravinsky, 1982a,b; Sánchez-Sesma *et al.*, 1982; Dravinsky, 1983; Sánchez-Sesma, 1983; Sánchez-Sesma *et al.*, 1984, 1985). y un marco general formal del mismo puede ser revisado en dos trabajos de Herrera (1979, 1984). En su tratamiento numérico, los métodos de frontera tratan de satisfacer de manera aproximada las condiciones de frontera del problema (modelos homogéneos y elástico-lineales), y dentro de estos puede incluirse al propio método del número de onda discreto, tratado ya de manera breve en el capítulo IV.

El método aquí presentado es el método de ecuaciones integrales, más comunmente llamado de elementos de frontera (BEM, por sus siglas en inglés) y cuya adaptación requiere del conocimiento de la solución fundamental o función de Green de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el fenómeno en estudio. Esta solución se utiliza luego para formular el problema de valores en la frontera como una ecuación integral (o un sistema de ecuaciones integrales) sobre la frontera (o fronteras) del dominio del problema (ver Sánchez-Sesma y Campillo, 1991; Sánchez-Sesma *et al.*, 1993; Sánchez-Sesma y Luzón, 1994; Pedersen *et al.*, 1994).

La estrategia de solución empleada en el método consiste en obtener el campo de ondas difractadas que complementa a la solución de campo libre, calculado para un modelo de referencia mediante el método de Thompson-Haskell (ver capítulo III). Las condiciones de frontera de la configuración irregular se obtienen entonces a partir de una extensión analítica de los campos de desplazamientos en cada estrato y el semiespacio basal y las ondas difractadas que se presentarían se construyen usando una representación integral en términos de distribuciones de fuentes de capa simple. Estas densidades de fuerza se obtienen a partir de un sistema lineal de ecuaciones que resulta de imponer las necesarias condiciones de continuidad de esfuerzos y desplazamientos en las interfaces de los estratos así como la condición de frontera libre. Para nuestro ejemplo, la excitación considerada fué la incidencia de ondas P y S , de manera que la solución de campo libre fué generada por el propio método matricial para medios estratificados. Las expresiones analíticas y discretizadas del método aparecen en el apéndice B.

V.5.1.- Validación del Método.

El método aplicado en el presente trabajo ha sido validado ya por Sánchez-Sesma y Campillo (1991) en su aplicación a topografías irregulares. Al comparar sus resultados con los de Kawase (1988) para la difracción de ondas P , SV , y de Rayleigh en un cañón semicircular obtuvieron un muy buen acuerdo, al igual que en su aplicación al cálculo de la respuesta de depósitos aluviales cuando ellos compararon sus resultados con varias soluciones analíticas (Sánchez-Sesma *et al.*, 1993). En la aplicación presentada en este trabajo se estudió el modelo propuesto por Aki y Larner (1970) cuando es sometido a la incidencia de ondas elásticas SH , P y SV . Se compararon así resultados para el caso SH con los obtenidos previamente con otras técnicas, encontrándose un muy buen acuerdo. Los resultados de esta validación se presentan en figuras subsiguientes y fueron analizados mediante representaciones frecuencia-espacio que permiten identificar patrones de resonancia locales. Los cálculos se realizaron en el dominio de la frecuencia y mediante la transformada rápida de Fourier (FFT) se calcularon sismogramas sintéticos. Se presentan aquí los resultados en el dominio de la frecuencia mediante funciones de transferencia en función de x (diagramas $f-x$), así como contornos en el dominio $f-k$ (frecuencia-número de onda) calculados con transformadas espaciales.

V.5.1.1- Ondas SH

El modelo estudiado fué tomado del artículo de Aki y Larner (1970). Ellos calcularon la respuesta de un estrato de espesor variable apoyado sobre un semiespacio basal ante la incidencia de ondas SH planas. Es un estrato que en los extremos tiene 1 km de espesor y a lo largo de 50 km tiene una variación cosenoidal suave, de manera que en su parte más profunda (centro) el espesor es de 6 km. Las velocidades consideradas para las ondas de cortante en el estrato y en el semiespacio fueron $\beta_R=0.7 \text{ Km/s}$ y $\beta_E=3.5 \text{ km/s}$, respectivamente, mientras que los valores para las densidades de masa fueron $\rho_R=2.2 \text{ g/cm}^3$ y $\rho_E=2.9 \text{ g/cm}^3$ (como se ilustra en la fig. 5.7). No se consideró atenuación.

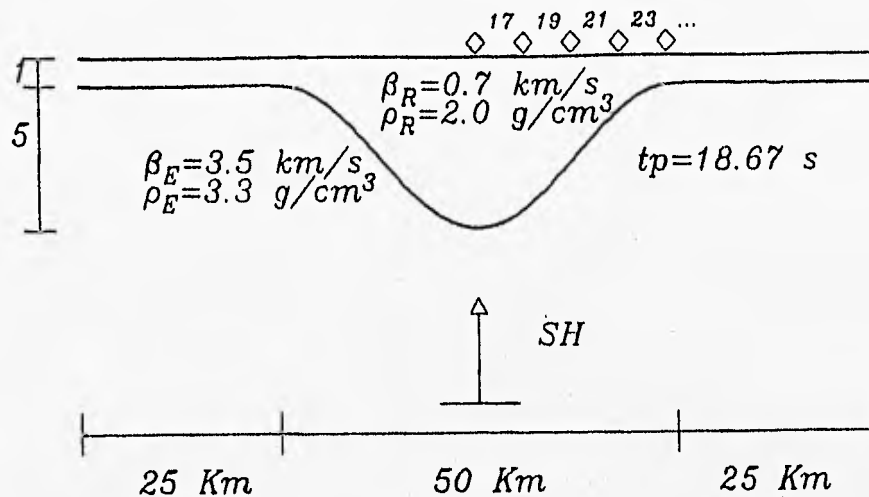


fig. 5.7. Modelo de Aki y Larner (1970). Estrato con variación coseno en un rango de 50 km, con profundidad máxima de 6 y mínima de 1. Se muestra la posición de algunos receptores (17, 19, 21 que corresponden a $x = 0, 4, 8$ km, respectivamente). Incidencia vertical de ondas SH . t_p es el período del pulso de Ricker.

La fig. 5.8 presenta sismogramas sintéticos para el caso de incidencia vertical de ondas SH . Se empleó un pulso de Ricker de 18.67s de período característico para la forma temporal de la onda incidente. Nuestros resultados se compararon con los obtenidos por otros autores, encontrándose un acuerdo excelente, sobre todo con el método del número de onda discreto (DW).

La respuesta en frecuencia del modelo (funciones de transferencia en puntos de la superficie) para incidencia vertical ($\gamma = 0^\circ$) y oblicua ($\gamma = 30$ y 60 grados) se presenta mediante contornos que muestran en el espacio x - f las amplitudes del movimiento superficial relativo a la amplitud del campo de ondas incidente. En la forma de contornos se reconocen aprecia los patrones espaciales de resonancia. En el primer caso ($\gamma = 0^\circ$), las máximas amplitudes se dan en torno a las frecuencias 0.03, 0.05 y 0.065 Hz., respectivamente (fig. 5.10), siendo notable en las figs. 5.11 y 5.12 la distribución de la energía hacia la parte derecha del modelo (lado contrario de la incidencia) así como la disminución progresiva de las amplitudes en las frecuencias de resonancia (0.05 y 0.065 Hz) debido al ángulo de incidencia creciente.

Las figs. 5.9 y 5.10 muestran la excitación de frecuencias adicionales que se deben al surgimiento de patrones antisimétricos de amplificación. La fig. 5.12 presenta los resultados de la fig. 5.9 en el dominio f - k . Se ha obtenido mediante la transformada espacial de Fourier de las funciones de transferencia complejas. El "abanico" de la figura, muestra claramente los rangos de excitación de los números de onda en función de la frecuencia y las amplitudes máximas denotan resonancias espaciales.

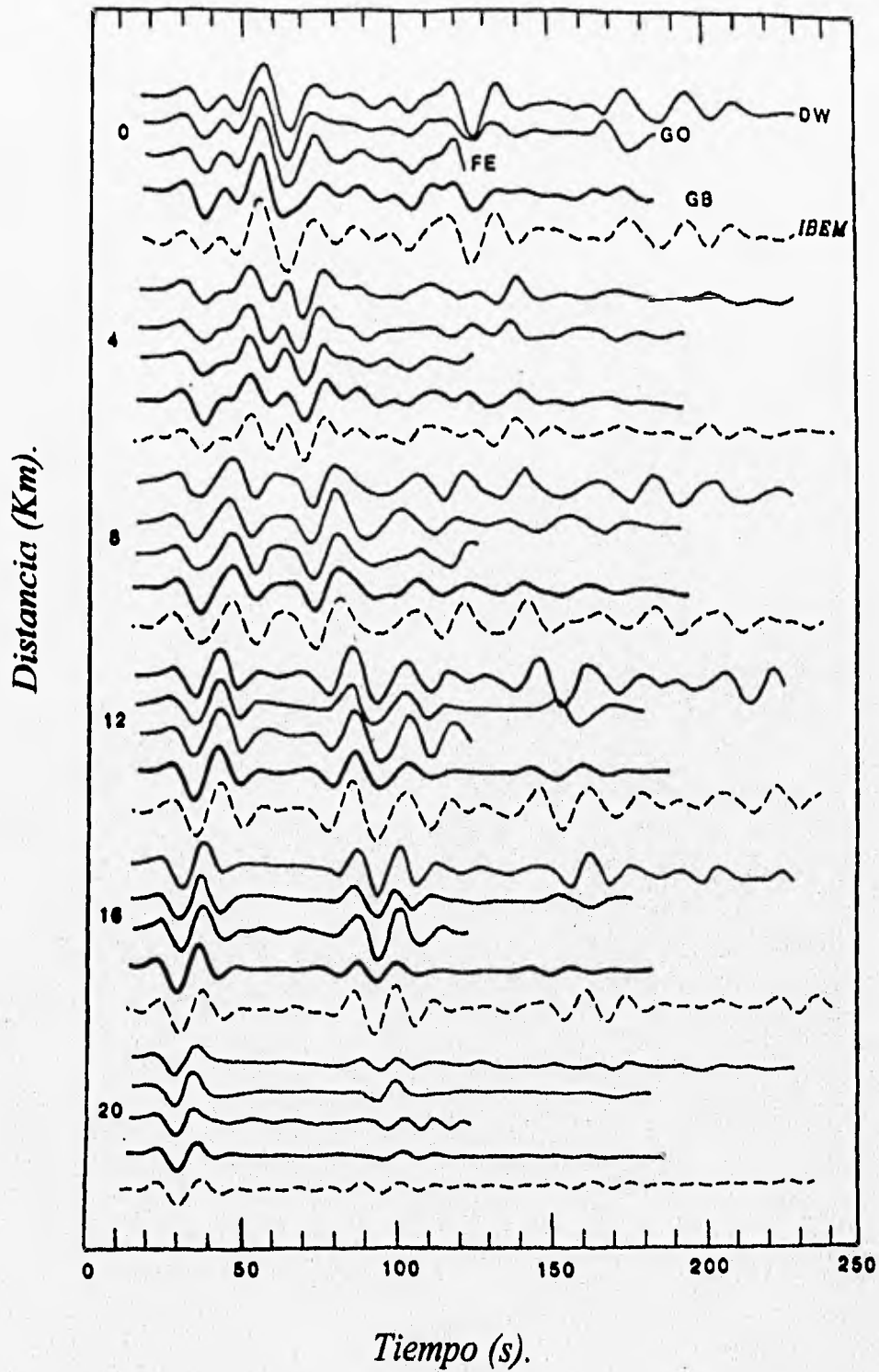


fig. 5.8. Comparación de sismogramas calculados con varios métodos para el modelo de la figura 5.7: (DW) número de onda discreto, (GO) óptica glorificada, (FE) elementos finitos, (GB) haces gaussianos y método indirecto de elementos de frontera (IBEM). Figura adaptada de Nowack y Aki (1984).

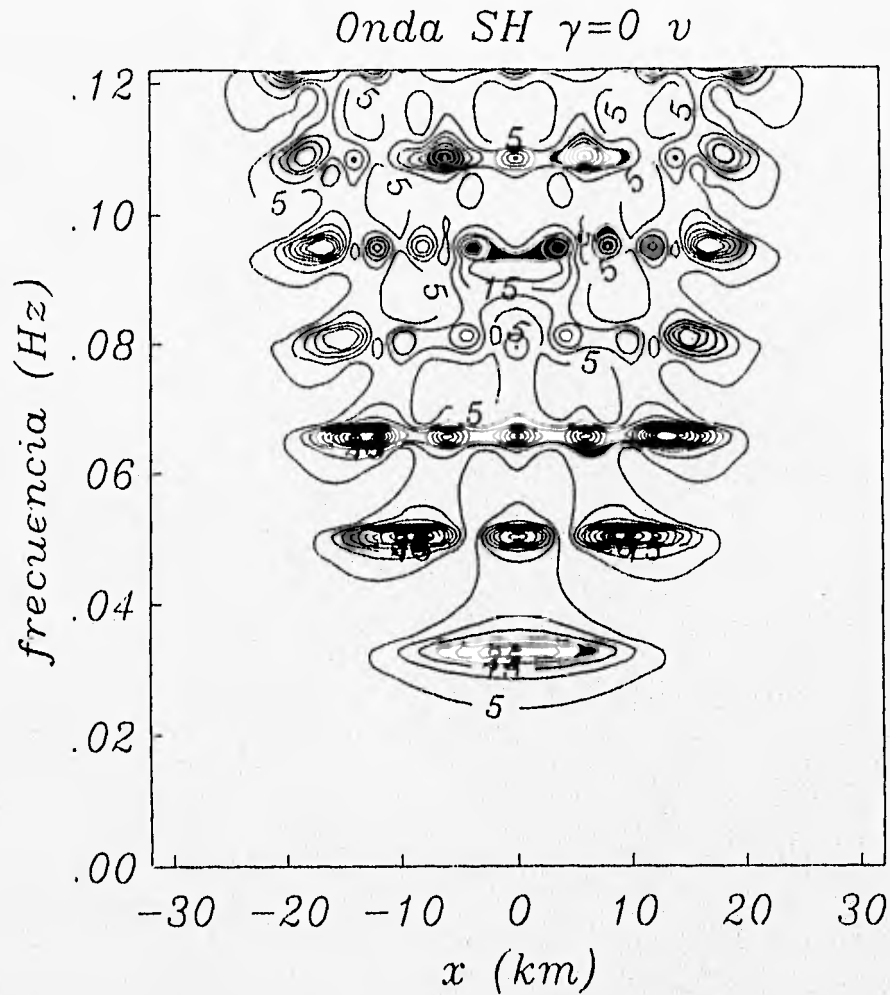


fig. 5.9. Amplitudes de la función de transferencia. Incidencia de ondas SH con $\gamma = 0^\circ$ en el modelo de la fig. 5.7. Los contornos denotan líneas de igual amplitud en el dominio frecuencia-espacio o $f-x$.

Los sismogramas sintéticos correspondientes a estas incidencias para 33 estaciones se muestran en las figs. 5.13 a 5.15. El periodo característico del pulso de Ricker es el mismo que el empleado en la fig. 5.8. Para incidencias oblicuas (figs. 5.14 y 5.15) puede apreciarse que la respuesta es mayor en el lado opuesto a la incidencia. Claramente, los sismogramas están dominados por la irregularidad lateral. La propagación y reflexiones sucesivas revelan la interacción de las ondas con la frontera, así como dispersión. La acausalidad observada en los sismogramas sintéticos se debió a la gran duración obtenidas en estas señales.

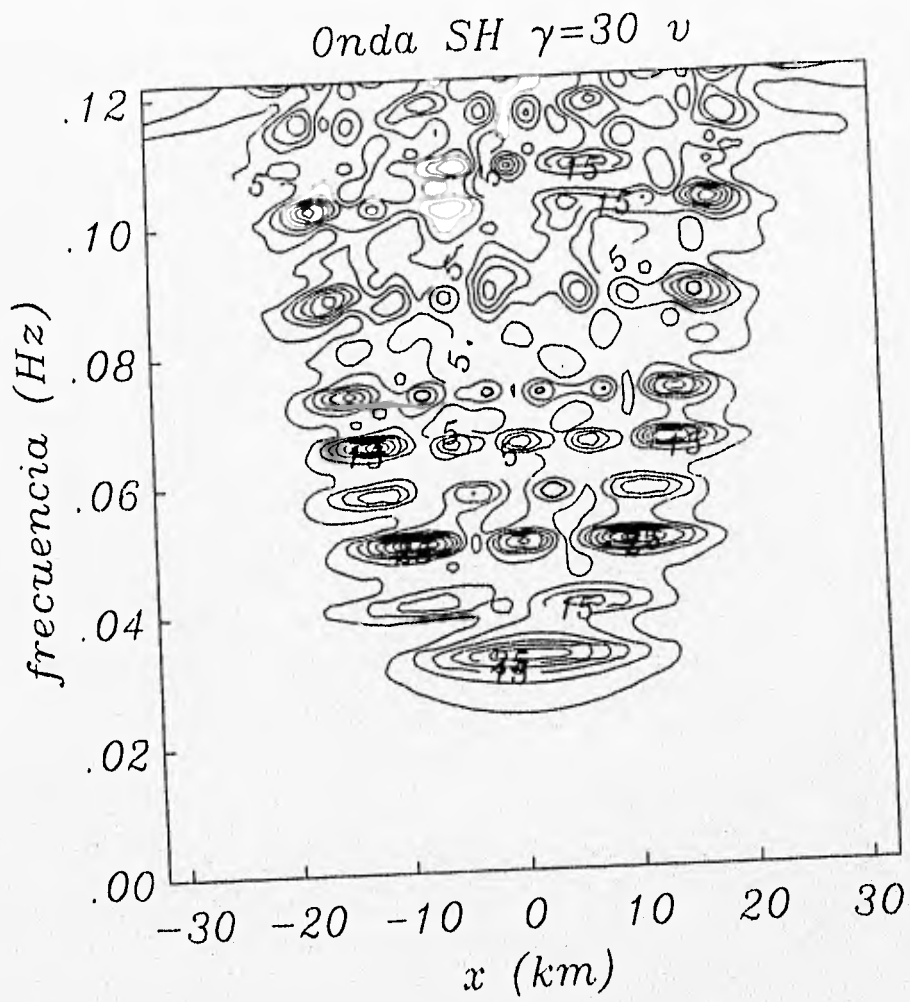


fig. 5.10. Amplitudes de la función de transferencia. Incidencia de ondas SH con $\gamma = 30^\circ$ en el modelo de la fig. 5.7. Los contornos denotan líneas de igual amplitud en el dominio frecuencia-espacio o f - x .

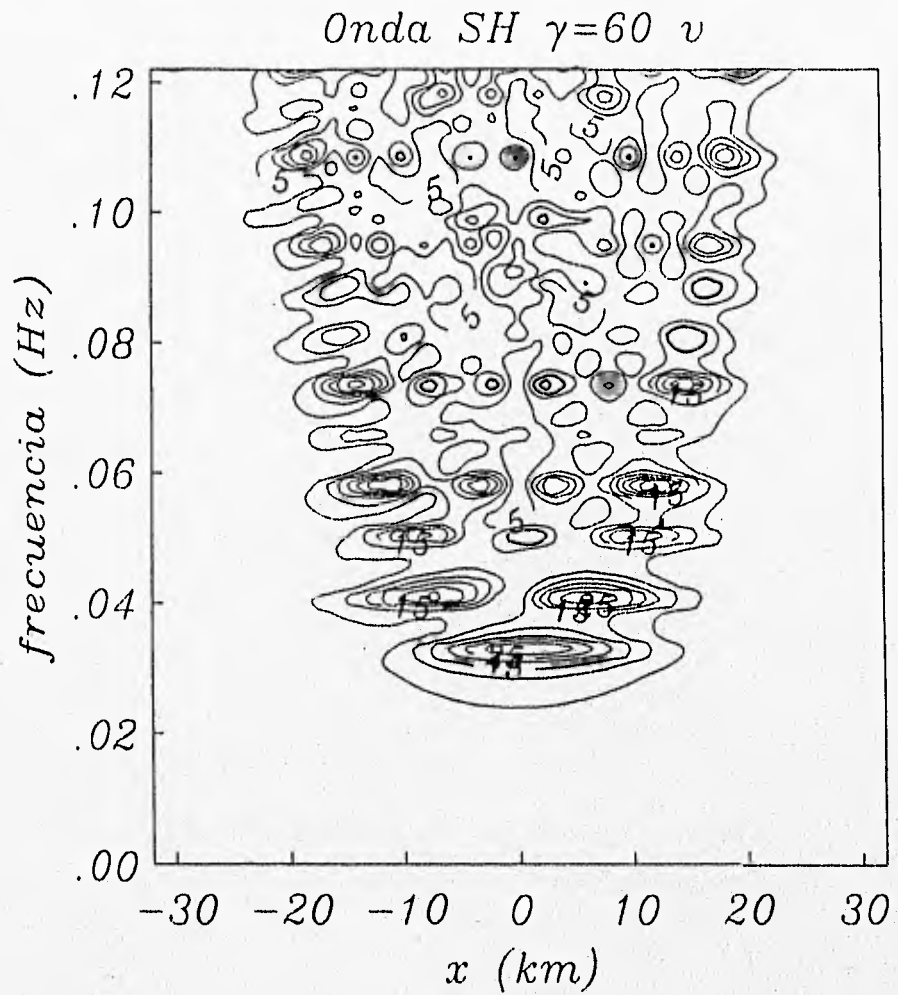


fig. 5.11. Amplitudes de la función de transferencia. Incidencia de ondas *SH* con $\gamma = 60^\circ$ en el modelo de la fig. 5.7. Los contornos denotan líneas de igual amplitud en el dominio frecuencia-espacio o *f-x*.

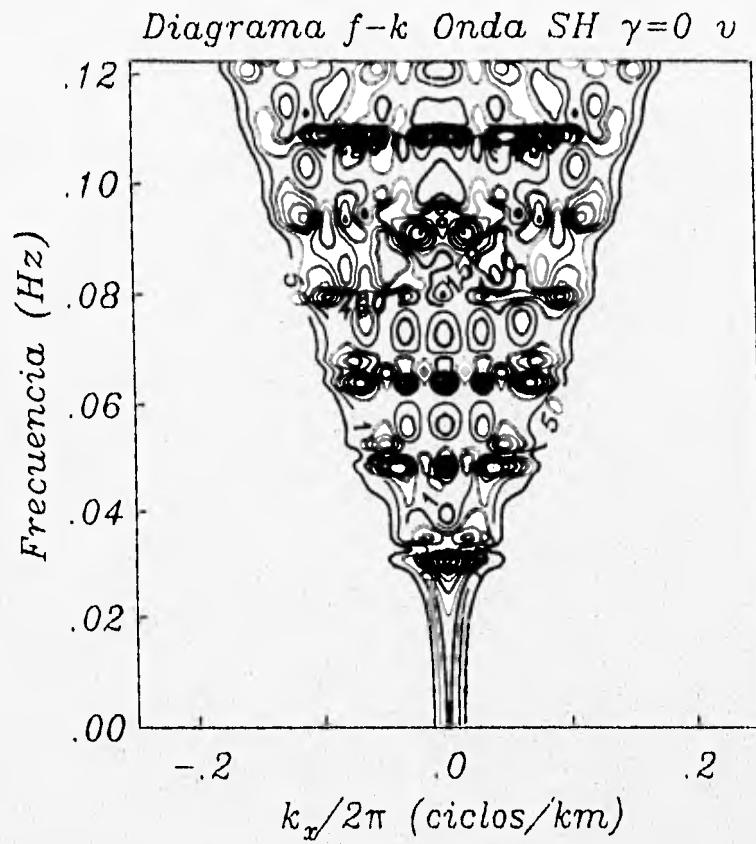
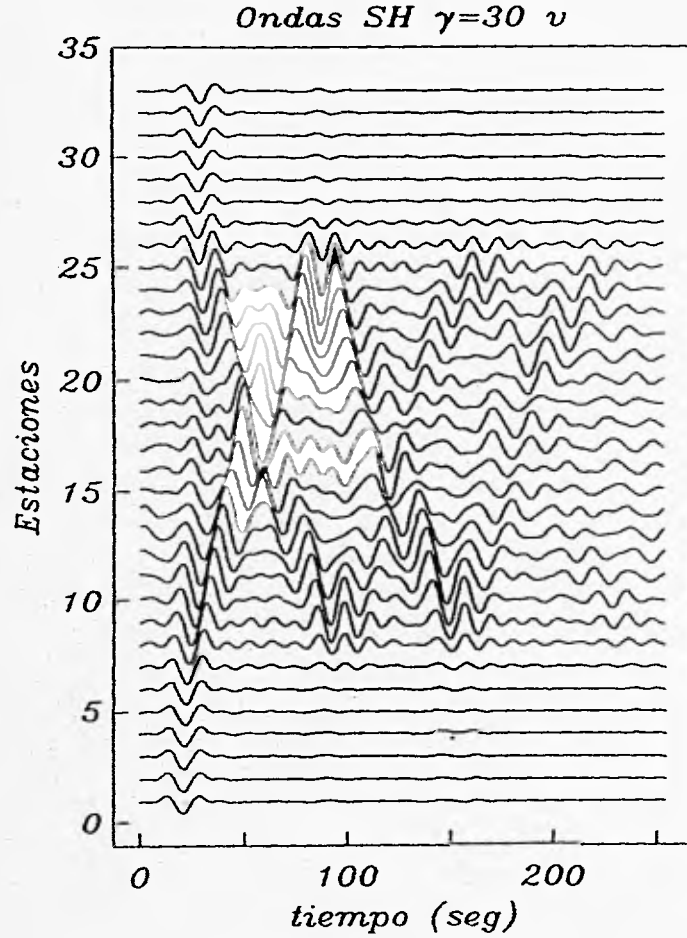
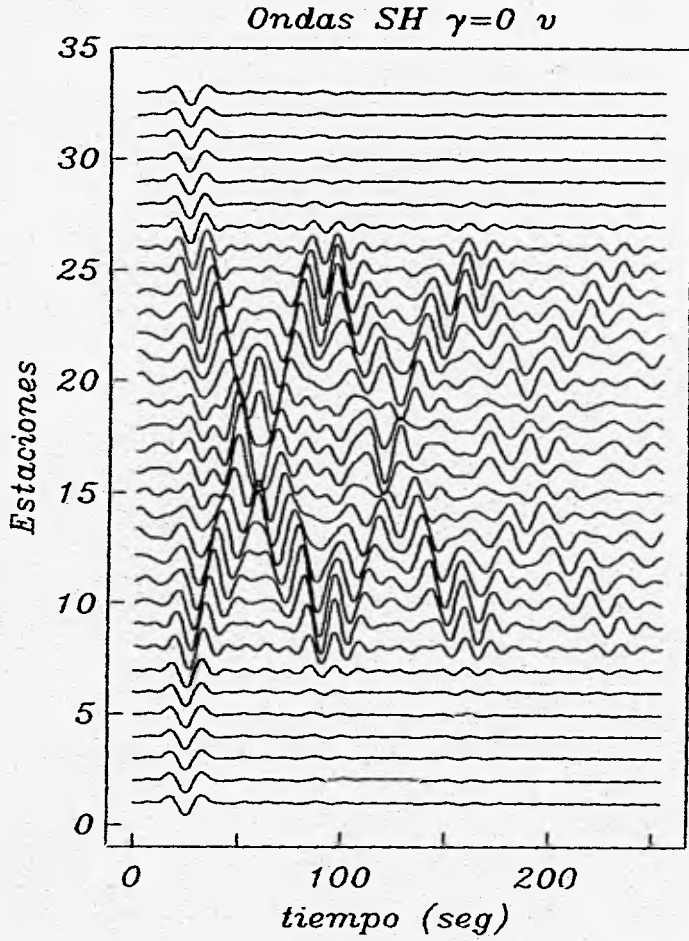


fig. 5.12. Amplitudes de la transformada de Fourier espacial de la función de transferencia compleja. Incidencia de ondas SH con $\gamma=0^\circ$ en el modelo de la fig. 5.7. Los contornos denotan líneas de igual amplitud en el dominio frecuencia-número de onda o $f-k$.

figs. 5.13 y 5.14. Sismogramas sintéticos en estaciones en la superficie del modelo de la fig. 5.7. Incidencia de ondas SH con $\gamma = 0^\circ$ y $\gamma = 30^\circ$, respectivamente. Pulso de Ricker con $t_p = 18.67$ seg. Las estaciones están equiespaciadas a 2 km y cubren 64 km (de $x = -32$ a $x = 32$ km).



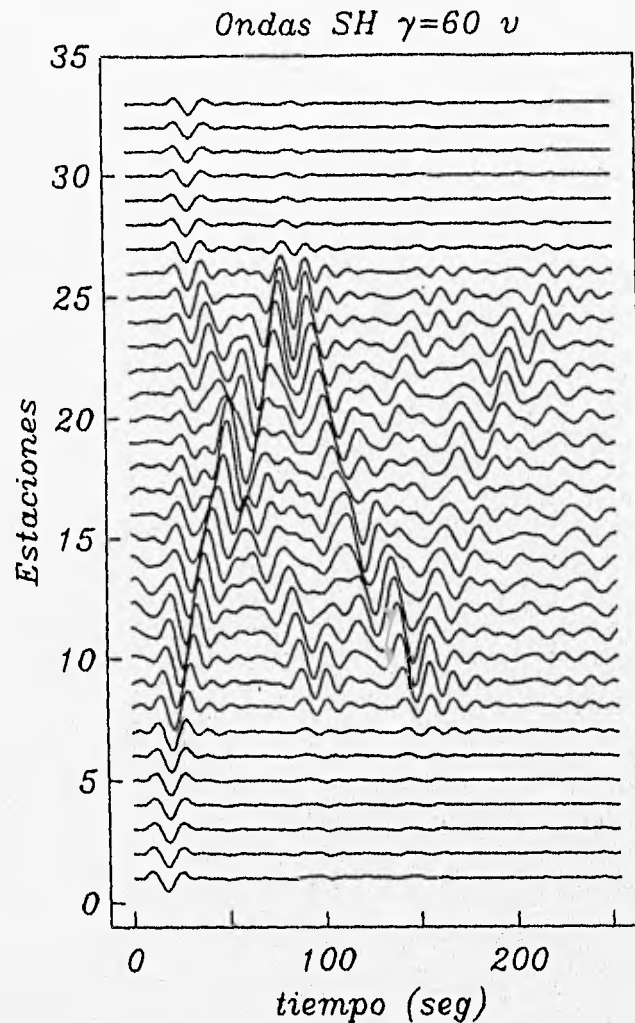


fig. 5.15. Sismogramas sintéticos en estaciones en la superficie del modelo de la fig. 5.7. Incidencia de ondas *SH* con $\gamma = 60^\circ$. Pulso de Ricker con $t_p = 18.67$ seg. Las estaciones están equiespaciadas a 2 km y cubren 64 km (de $x = -32$ a $x = 32$ km).

V.5.2.- Ondas *P* y *SV*

El mismo modelo fue sometido a la incidencia de ondas *P* y *SV* con diversos ángulos de incidencia. Se supuso que el coeficiente de Poisson en el estrato y el semiespacio fuese de $\nu = 0.333$. Las figs. 5.16 a 5.18 muestran sismogramas sintéticos para los mismos ángulos de incidencia que en el caso *SH*. Las figs. 5.16 y 5.17 corresponden a incidencias de ondas *P* a 0 y 60 grados y muestran, como se esperaba, una importante excitación de movimiento vertical. Puede observarse que las amplitudes en general son menores a las obtenidas para la inci-

dencia de ondas SH , aunque se conserva la misma tendencia a crecer hacia el lado opuesto de la incidencia. La fig. 5.18 ilustra la respuesta para una incidencia de ondas SV a 30° , que es una incidencia crítica para el semiespacio (generándose en este ondas P difractadas). Se observa que el movimiento horizontal se amplifica de manera importante.

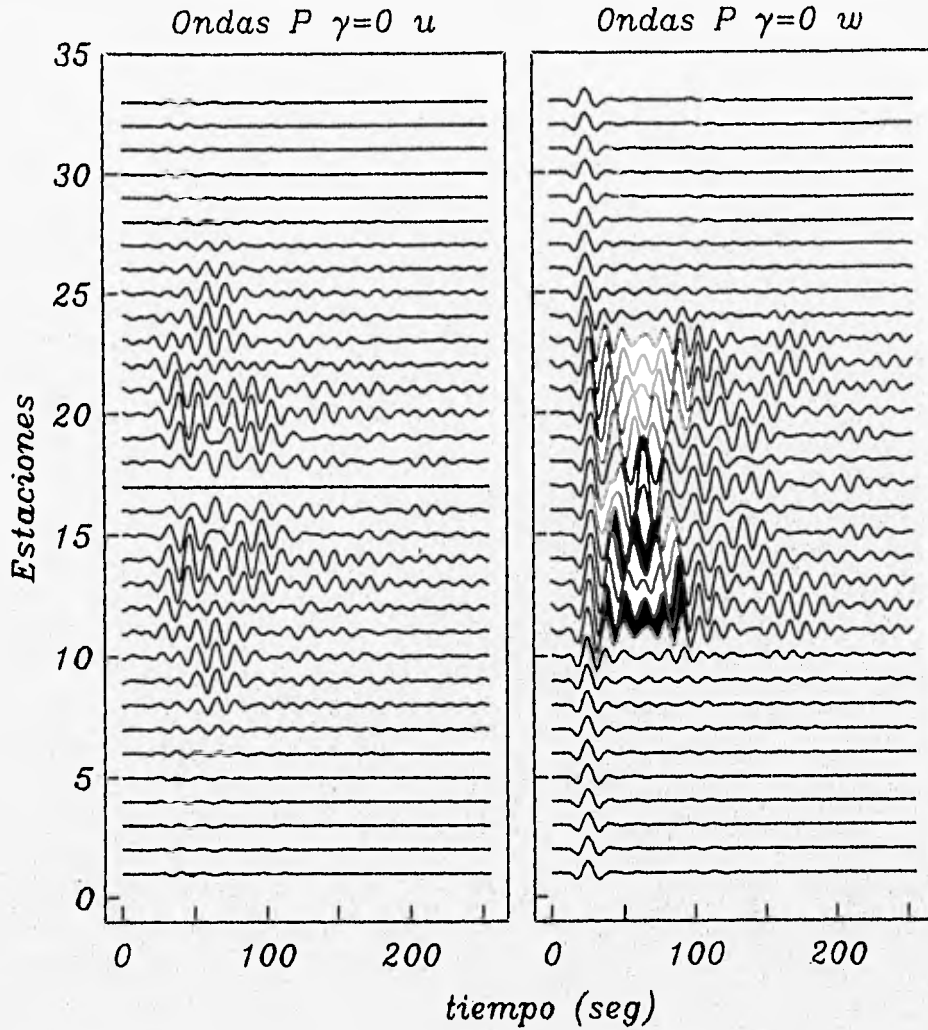


fig. 5.16. Sismogramas sintéticos en estaciones en la superficie del modelo de la fig. 5.7. Componentes horizontal, u , y vertical, w . Incidencia de ondas P con $\gamma = 0^\circ$. Pulso de Ricker con $t_p = 18.67$ seg. Las estaciones están equiespaciadas a 2 km y cubren 64 km.

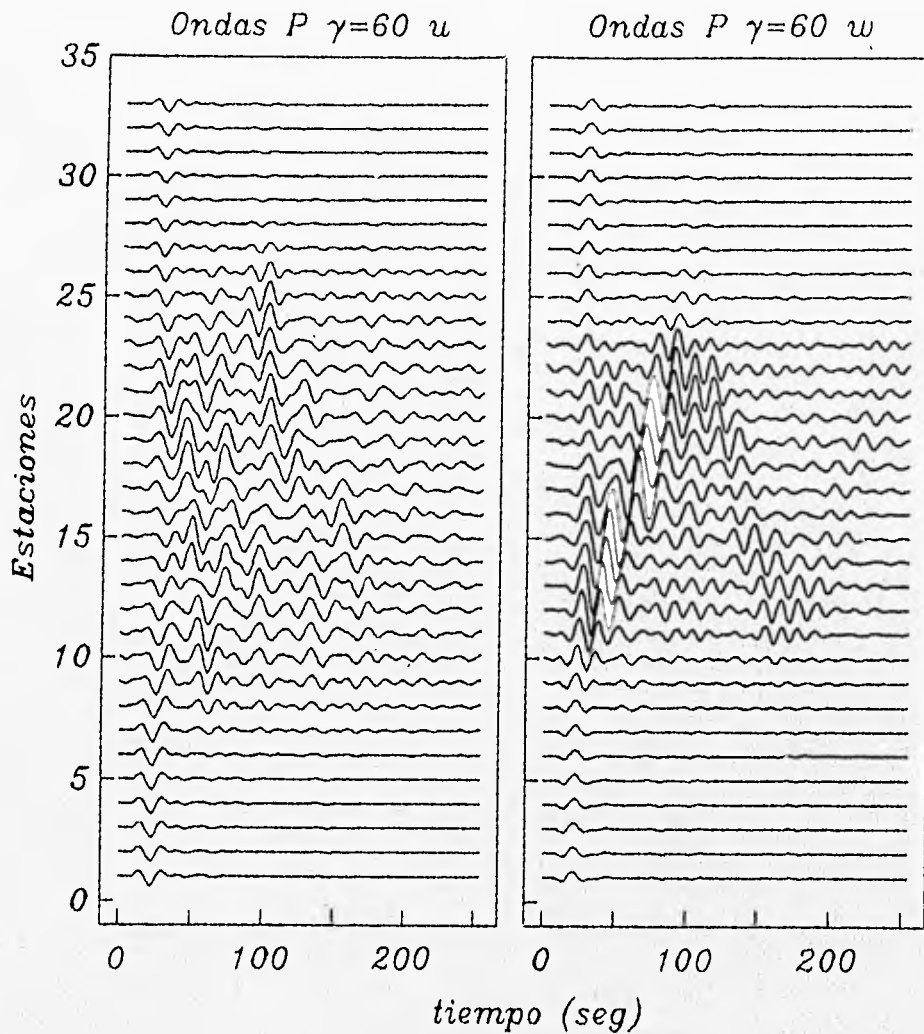


fig. 5.17. Sismogramas sintéticos en estaciones en la superficie del modelo de la fig. 5.7. Componentes horizontal, u , y vertical, w . Incidencia de ondas P con $\gamma=60^\circ$. Pulso de Ricker con $t_p=18.67$ seg. Las estaciones están igualmente equiespaçadas a 2 km.

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

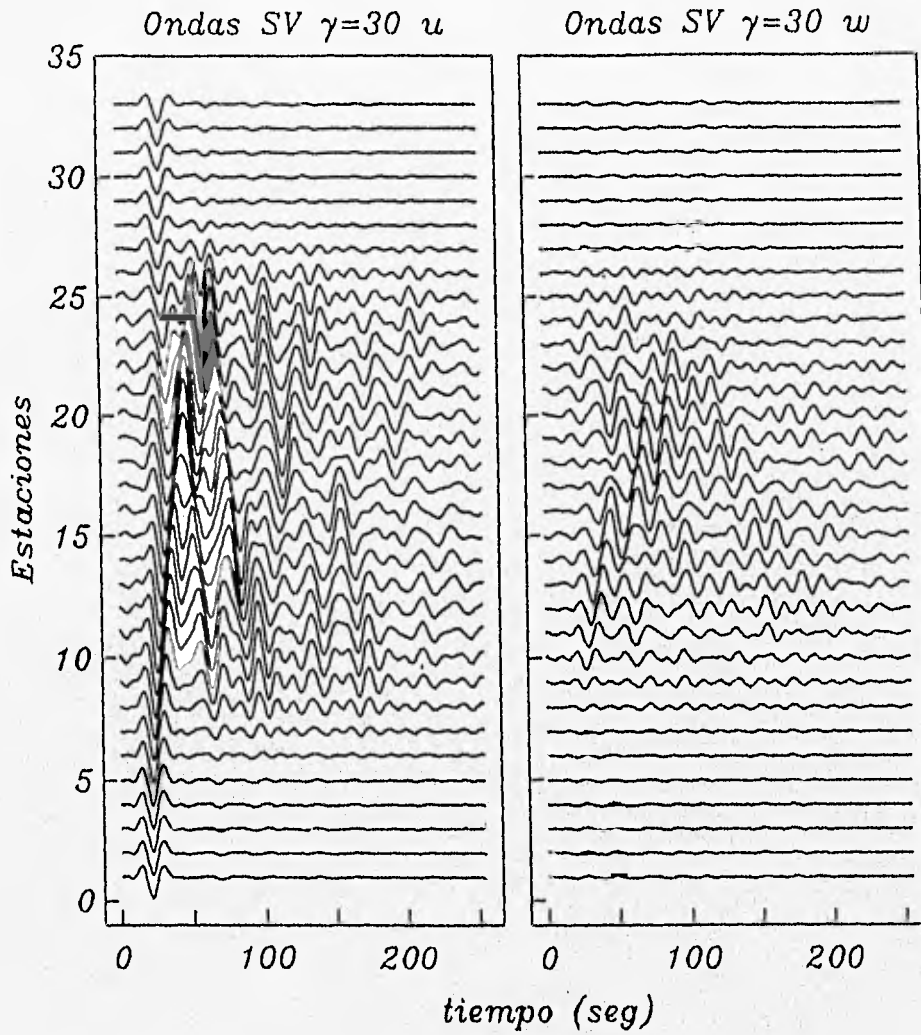


fig. 5.18. Sismogramas sintéticos en estaciones en la superficie del modelo de la fig. 5.7. Componentes horizontal, u , y vertical, w . Incidencia de ondas SV con $\gamma = 30^\circ$. Pulso de Ricker con $t_p = 18.67$ seg. Las estaciones están equiespaçadas a 2 km.

V.5.3.- Aplicación a la Cuenca de México.

La amplificación del movimiento en valles sedimentarios durante temblores puede causar daños considerables, tal y como ha quedado de manifiesto en los efectos producidos en la Ciudad de México por el temblor de Michoacán de 1985. El estudio de los datos de temblores posteriores a 1985 ha permitido descubrir una amplificación regional (Ordaz y Singh, 1992) para la que aún no se tiene explicación. La ampliación de la red de registro de aceleraciones a partir de 1985 ha producido resultados interesantes y ha permitido cálculos útiles en la zonificación sísmica del área metropolitana. Sin embargo, los mecanismos que producen la respuesta del valle no han sido completamente esclarecidos. Se ha propuesto que las enormes amplificaciones espectrales en sitios de la zona de lago con respecto a lo registrado en terreno firme podría deberse a la generación local de ondas superficiales con los depósitos profundos (Kawase y Aki, 1989). Estas amplificaciones estarían también relacionadas con la duración de los registros de la zona de lago. También se ha propuesto que esta duración provendría de irregularidades en la estratificación y también que podría deberse a ciertos efectos de naturaleza tridimensional y aunque estudios y modelos se han desarrollado en este sentido, y permiten explicar algunos fenómenos como la variabilidad espacial y las amplitudes del movimiento, no han permitido explicar esta duración. Singh y Ordaz (1992) han propuesto una explicación plausible donde sugieren que la larga coda de los registros han estado siempre presentes, pero las aceleraciones en sitios de terreno firme no mantuvieron el umbral necesario para mantener en funcionamiento los acelerómetros digitales convencionales. La duración también podría deberse a trayectos múltiples de las ondas sísmicas entre la costa y el valle.

El método presentado en este trabajo ha sido aplicado a un modelo que considera una posible irregularidad cortical en la Cuenca de México con el objeto de tratar de explicar estas duraciones. El modelo estudiado fué proporcionado por F. Mosser, A. Montiely A. Zúñiga (comunicación personal) y corresponde a una sección aproximada SSW-NNE en la dirección Chapultepec-Peñón. El modelo tiene una extensión lateral de 28 km y agrupa un horizonte vulcano-sedimentario con un espesor que varía de 2 a 4 km que yace sobre rocas sedimentarias. Las formaciones geológicas involucradas en el modelo han sido identificadas al sur y norte de la cuenca y deberán considerarse en estudios futuros.

La fig. 1.2 muestra la sección aproximada SSW-NNE en la dirección Chapultepec-Peñón aportada por Mooser *et al.*, y cuyos valores de velocidad mostrados para las ondas *P* fueron determinados con base en las secciones sísmicas y los pozos de control de PEMEX. La estructura en el subsuelo se simplificó drásticamente para formar un modelo geométrico regular aproximado de la misma. La extensión lateral de la discretización cubre 28 km.

La fig. 5.19 muestra el modelo empleado que agrupa un horizonte volcánico superficial con un espesor que varía de 2 a 4 km, en su parte más profunda y que yace sobre formaciones sedimentarias (calizas cretácicas) identificadas como ya se mencionó, al norte y sur de la cuenca. Considerando los depósitos vulcano-sedimentarios representados por el estrato *R* y a las calizas cretácicas por el semiespacio *E*, se han asignado al modelo los siguientes valores de densidad, velocidades de propagación y factores de calidad (que controlan la atenuación): $\rho_R=2.2 \text{ g/cm}^3$, $\alpha_R=3.5 \text{ km/s}$, $\beta_R=2.0 \text{ km/s}$, $Q_R=250$; $\rho_E=2.8 \text{ g/cm}^3$, $\alpha_E=5.0 \text{ km/s}$, $\beta_E=2.9 \text{ km/s}$, $Q_E=500$.

Las velocidades de ondas P se asignaron a partir de valores promedio a partir de datos de PEMEX, mientras que las velocidades de ondas S y las densidades se eligieron arbitrariamente. Se eliminaron los depósitos sedimentarios, así como las arcillas lacustres más superficiales pues se quiso explorar con este modelo la influencia de la estructura profunda.

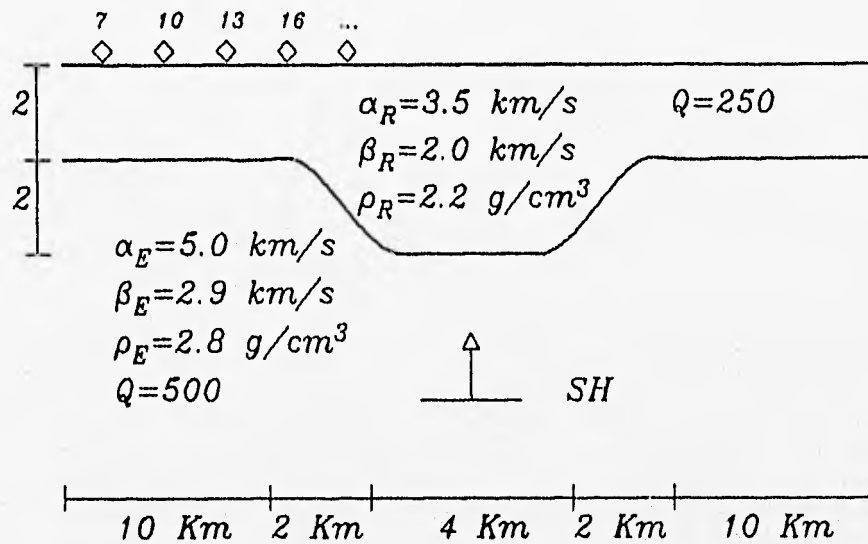
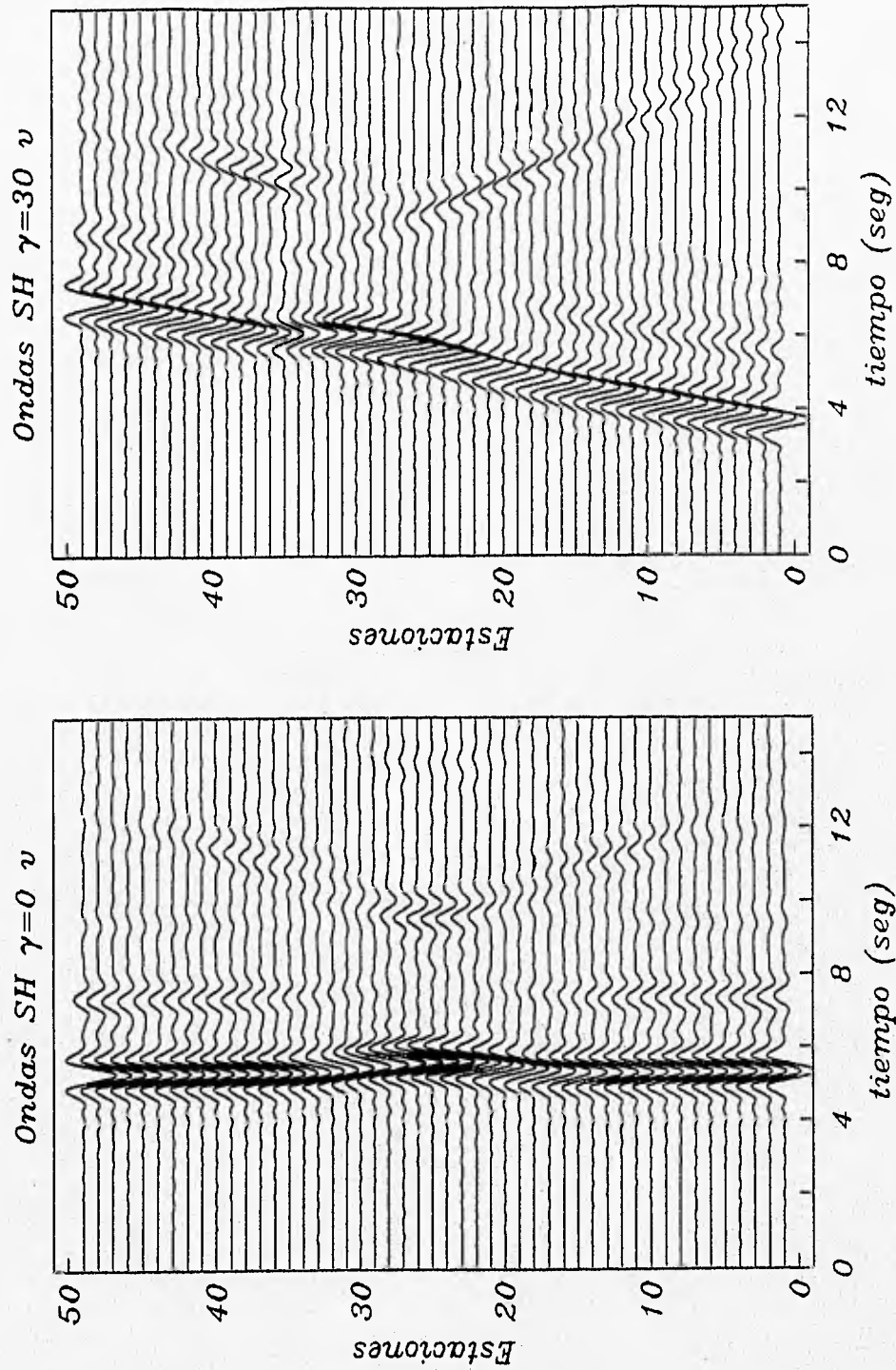


fig. 5.19. Modelo simplificado de la sección de la fig. 1.2. Estrato con variación lateral en un rango de 7 km. Profundidad máxima de 4 km y mínima de 2 km. Se muestra la posición de algunos receptores (7, 10, 13..., que corresponden a $x = -7.2, -6.0, -4.8 \dots$ km, respectivamente). Las propiedades se anotan en la figura. Incidencia vertical de ondas SH.

Los sismogramas sintéticos obtenidos en el presente estudio mostraron efectos moderados tanto en amplificación como en el aumento de la duración. Por ello estas estructuras, con las propiedades consideradas, no parecen ser la causa de las enormes duraciones del movimiento sísmico observadas en la ciudad de México. De acuerdo con diversas observaciones recientes (Chávez-García *et al.*, 1994) y cálculos con modelos matemáticos (Chávez Pérez, 1993), las arcillas de la zona lacustre no permiten explicar la duración observada. La atenuación es relativamente alta y las ondas superficiales no parecen llegar muy lejos (Chávez-García *et al.*, 1994). La propuesta de Singh y Ordaz (1993) de que la gran duración estaría presente en las ondas incidentes es plausible. En esta hipótesis proponen que si esta no ha sido observada en terreno firme, ello se debería a que los acelerómetros convencionales no registrarían muy bajas amplitudes. Este movimiento continuaría excitando a las arcillas. Por ello, la gran duración en los registros podría deberse a irregularidades corticales más profundas.

Los sismogramas sintéticos presentados en las figs. 5.20 a 5.22 corresponden a incidencia de ondas SH para 0, 30 y 60 grados, respectivamente. El periodo de la ondícula de Ricker es de 1s. En todos los casos, las señales mostraron efectos moderados tanto en amplificación como en el aumento de la duración.



figs. 5.20 y 5.21. Sismogramas sintéticos en estaciones en la superficie del modelo de la fig. 5.19. Incidencia de ondas SH con $\gamma=0^\circ$ y $\gamma=30^\circ$. Pulso de Ricker con $t_p=1.0$ seg. Las 49 estaciones están equiespaciadas a 0.4 km y cubren 19.2 km (de $x=-9.6$ a $x=9.6$ km).

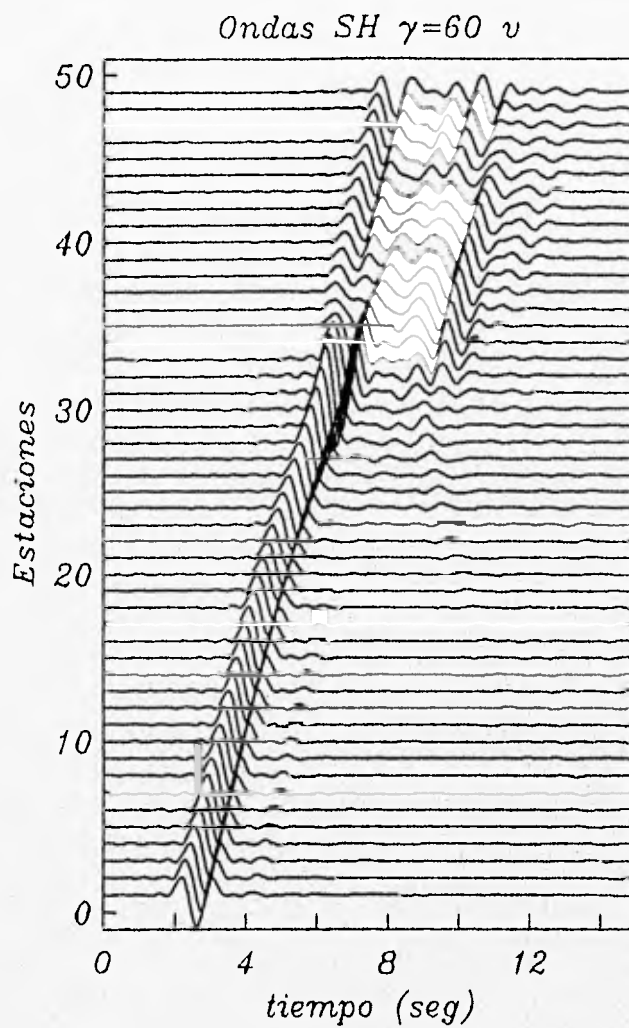


fig. 5.22. Sismogramas sintéticos en estaciones en la superficie del modelo de la fig. 5.19. Incidencia de ondas *SH* con $\gamma = 60^\circ$. Las figuras inferiores muestra el trazado de rayos para una incidencia de 0 y 15 grados en la superficie irregular.

Las figs. 5.23 a 5.26 despliegan los sismogramas para incidencia de ondas SV con 0, 30, 45 y 60 grados respectivamente. El componente vertical se excita de manera significativa en las dos últimas incidencias. Estas son supercríticas pues para 45 y 60 grados las velocidades de fase horizontales no superan la velocidad de ondas P en el semiespacio. Los efectos de la irregularidad lateral son moderados en todos los casos.

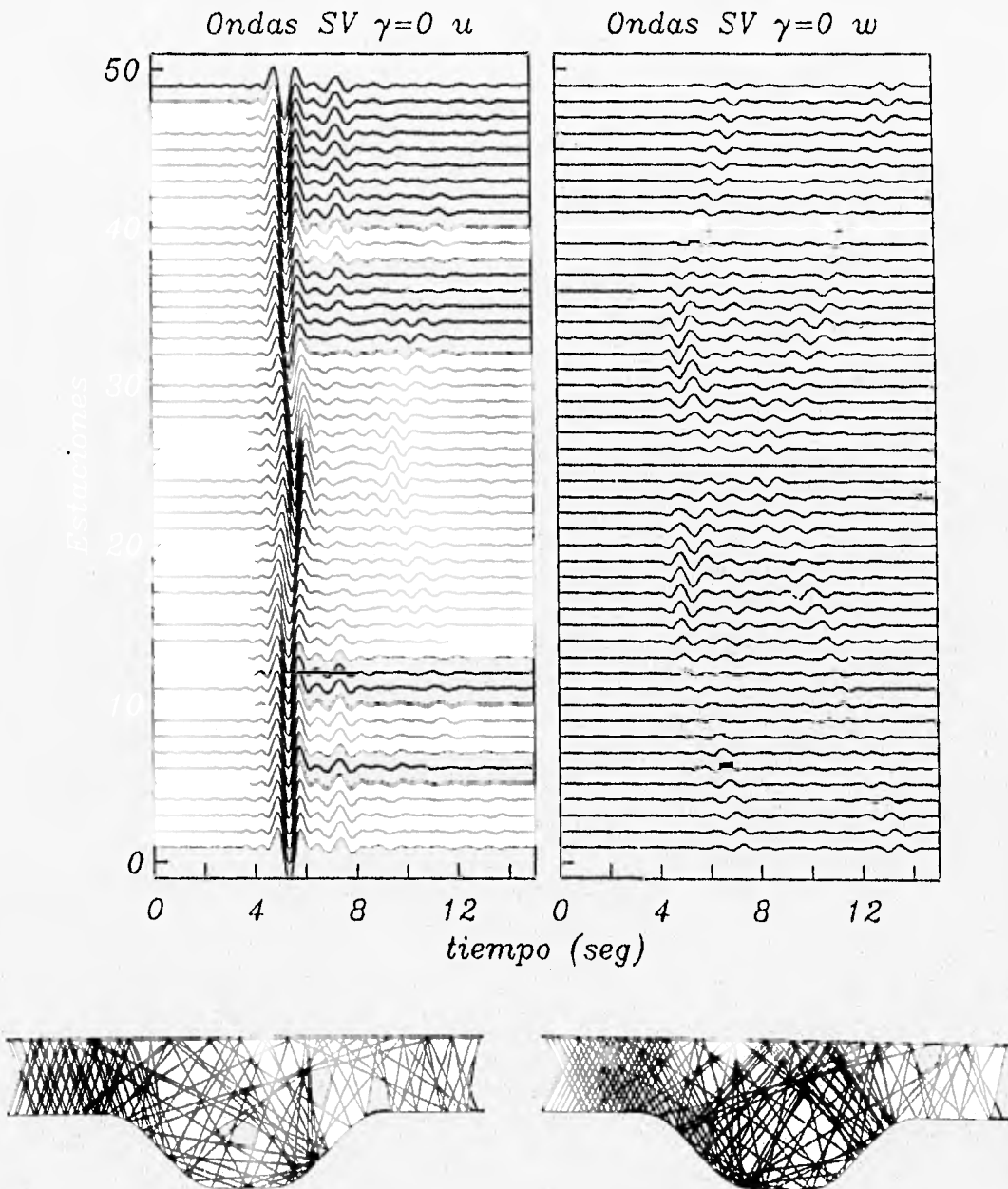


fig. 5.23. Sismogramas sintéticos en estaciones en la superficie del modelo de la fig. 5.19. Componentes horizontal, u , y vertical, w . Incidencia de ondas SV con $\gamma=0^\circ$. Las figuras inferiores muestran el trazado de rayos para incidencias de 30 y 45 grados sobre la superficie irregular.

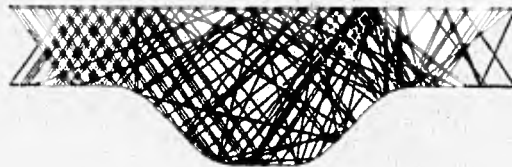
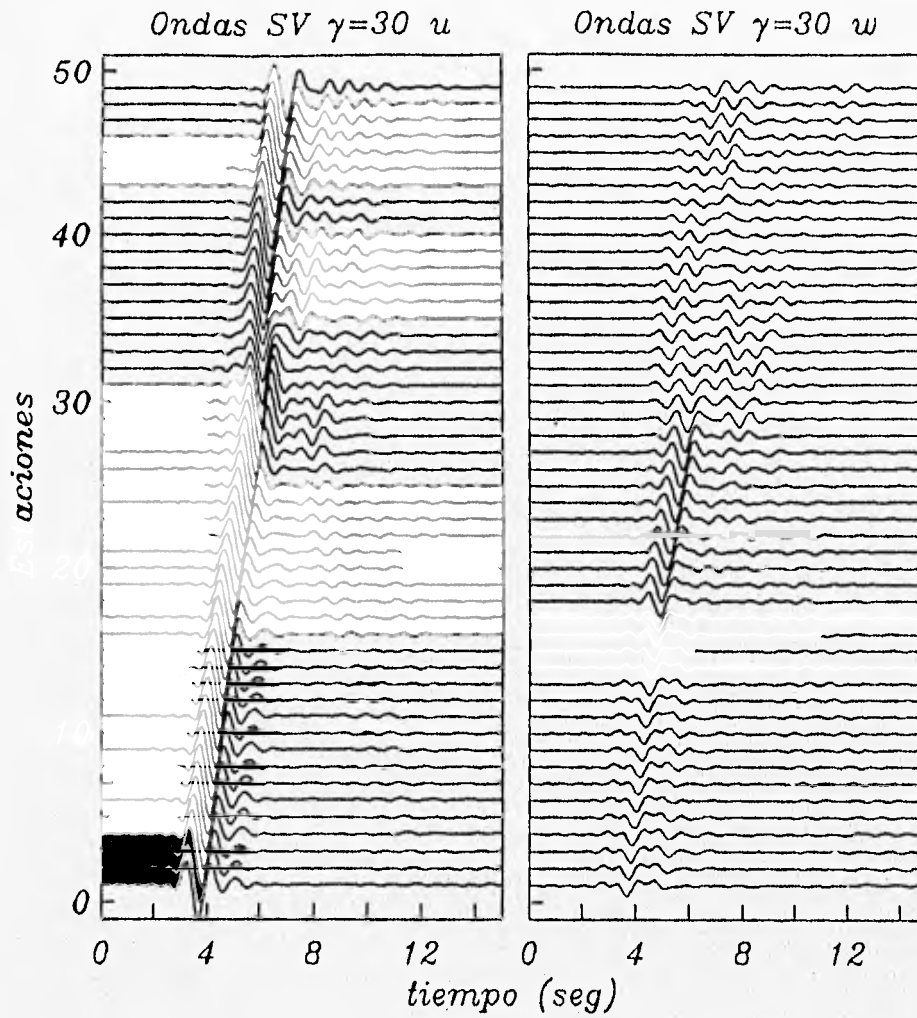


fig. 5.24. Sismogramas sintéticos en estaciones en la superficie del modelo de la fig. 5.19. Componentes horizontal, u , y vertical, w . Incidencia de ondas SV con $\gamma = 30^\circ$. La figura inferior muestra el trazado de rayos para una incidencia de 60° sobre la superficie irregular. La figura inferior muestra el trazado de rayos para la incidencia de ondas a 60° , en la superficie irregular del modelo.

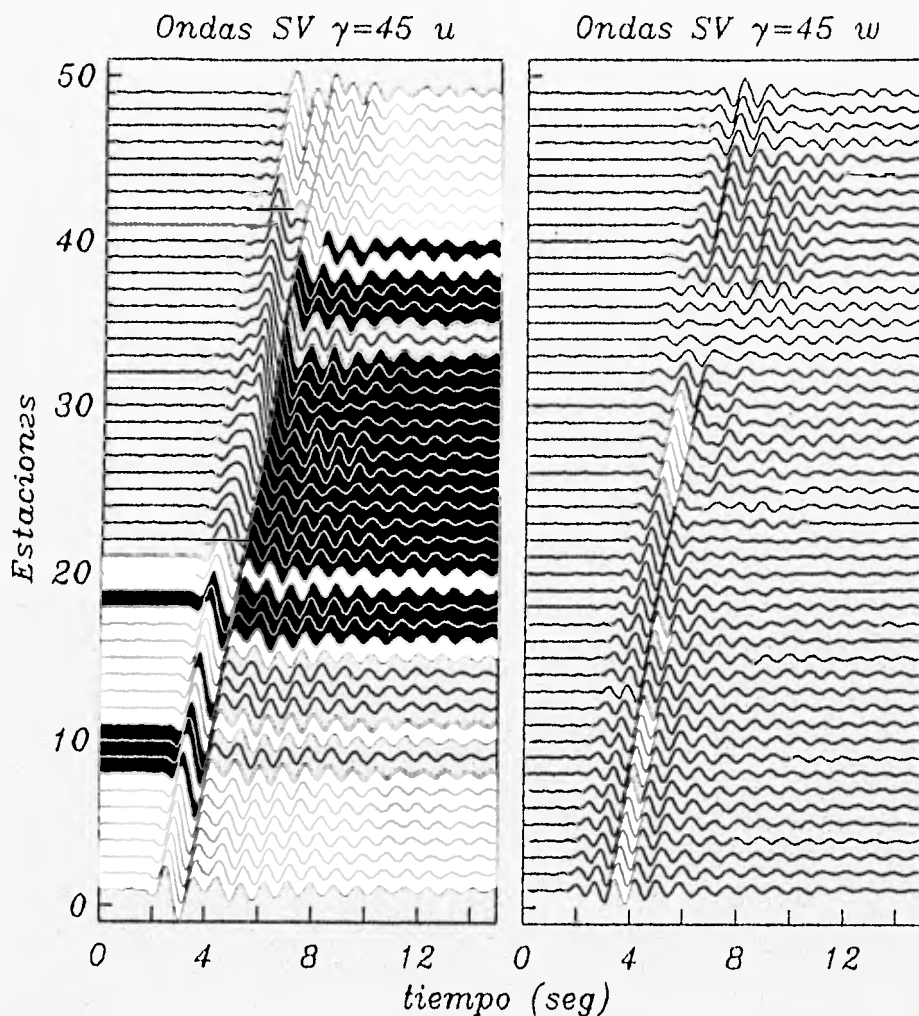


fig. 5.25. Sismogramas sintéticos en estaciones en la superficie del modelo de la fig. 5.19. Componentes horizontal, u , y vertical, w . Incidencia de ondas SV con $\gamma=45^\circ$.

En general, el modelo se comportó de manera similar ante la incidencia de ondas SH y SV. En el caso de 45 grados la respuesta unidimensional presentó una coda de unos 15 seg. al parecer poco afectada por la variación lateral del modelo. Para incidencia de ondas P a 0 y 30 grados, las figs. 5.27 y 5.28 presentan los sintéticos correspondientes. Predomina como puede apreciarse, el movimiento vertical.

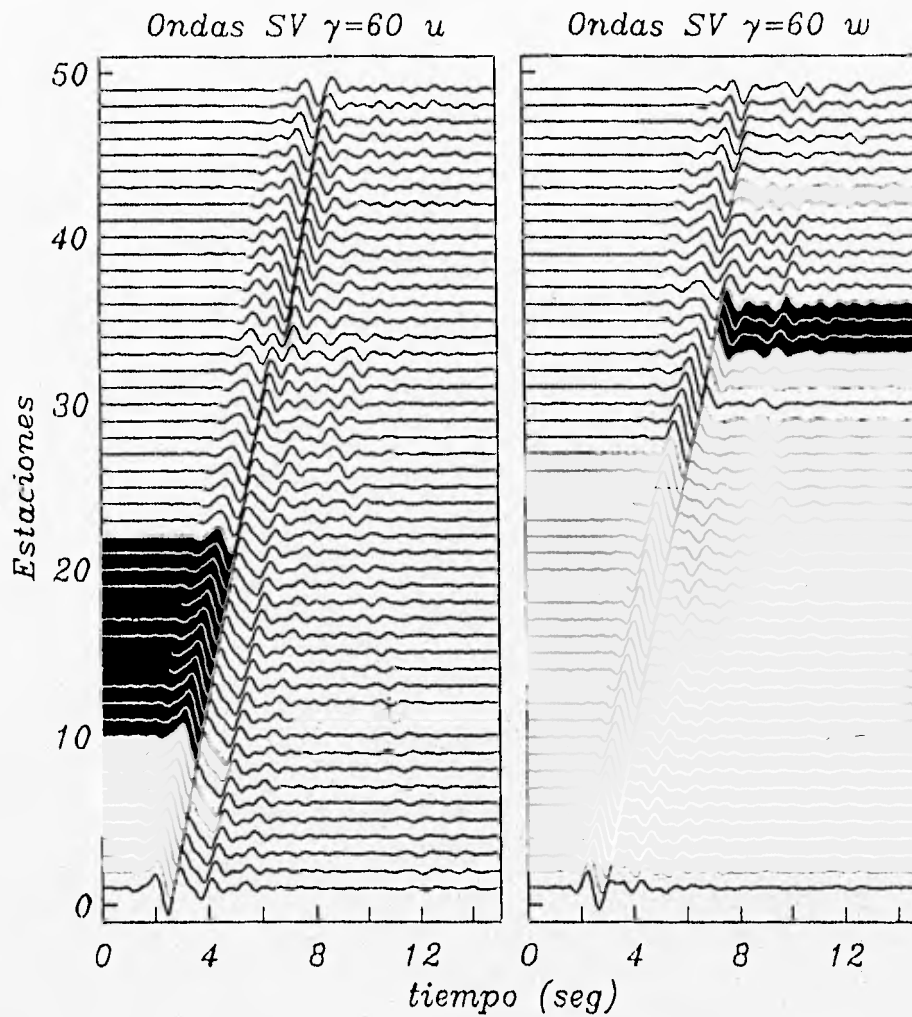


fig. 5.26. Sismogramas sintéticos en estaciones en la superficie del modelo de la fig. 5.19. Componentes horizontal, u , y vertical, w . Incidencia de ondas SV con $\gamma = 60^\circ$.

Los prolongados movimientos observados en la ciudad de México durante temblores intensos han durado más de tres minutos en sitios de la zona lacustre. Sin embargo, se sabe que los efectos de los estratos de arcilla más superficiales podrían producir duraciones en vibración libre de sólo unos segundos. Por otra parte, la duración en los ejemplos presentados muestra ligeros aumentos. Los resultados son consistentes con los obtenidos con diferencias finitas para modelos similares de la cuenca, por Chávez Pérez (1993). Estos hechos sugieren que el efecto observado en la realidad no es debido a irregularidades del tipo aquí descrito.

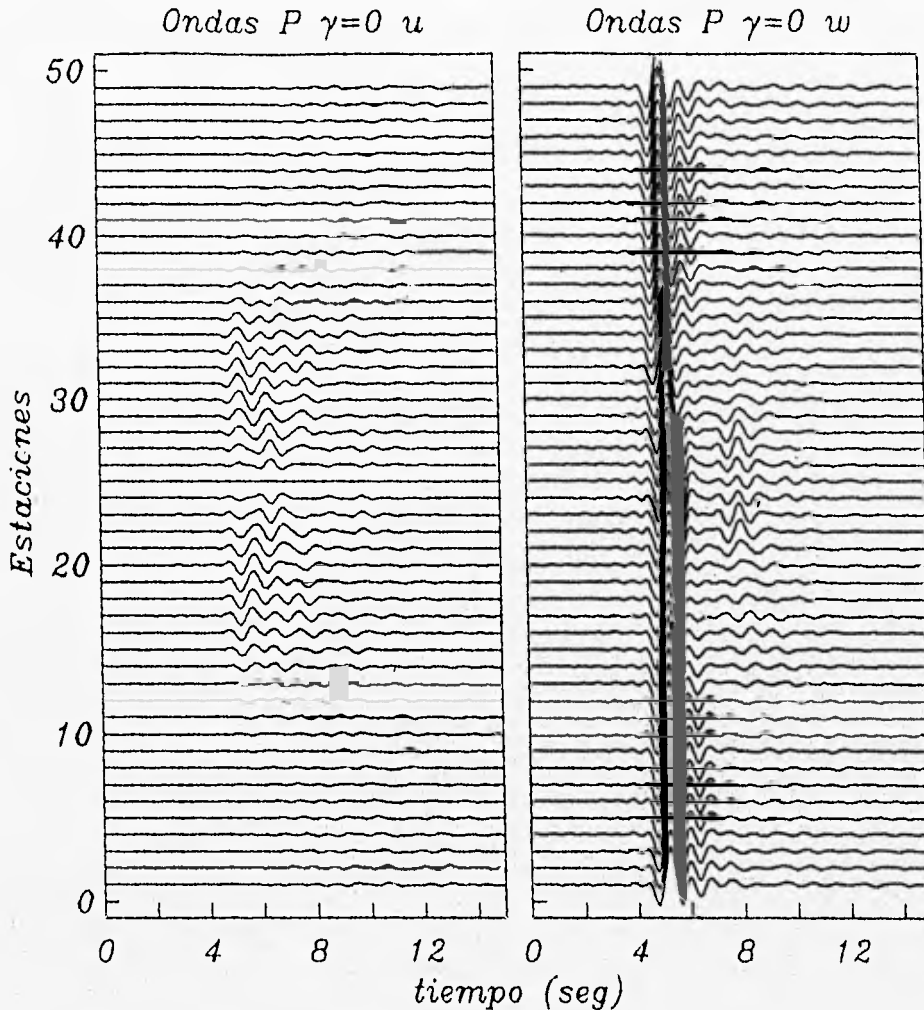


fig. 5.27. Sismogramas sintéticos en estaciones en la superficie del modelo de la fig. 5.19. Componentes horizontal, u , y vertical, w . Incidencia de ondas P con $\gamma=0^\circ$.

Tal vez con una mejor estimación de las propiedades y la geometría se pueda cambiar este resultado, aunque ello es poco probable. La causa estaría relacionada con efectos corticales más profundos y/o de tipo regional.

Recientemente, se calculó la respuesta de este modelo para una incidencia de ondas SH y un periodo t_p del pulso de Ricker de 4s, ello con el objeto de obtener la respuesta del modelo para frecuencias más bajas (0.25 Hz) y ampliar el rango observación.

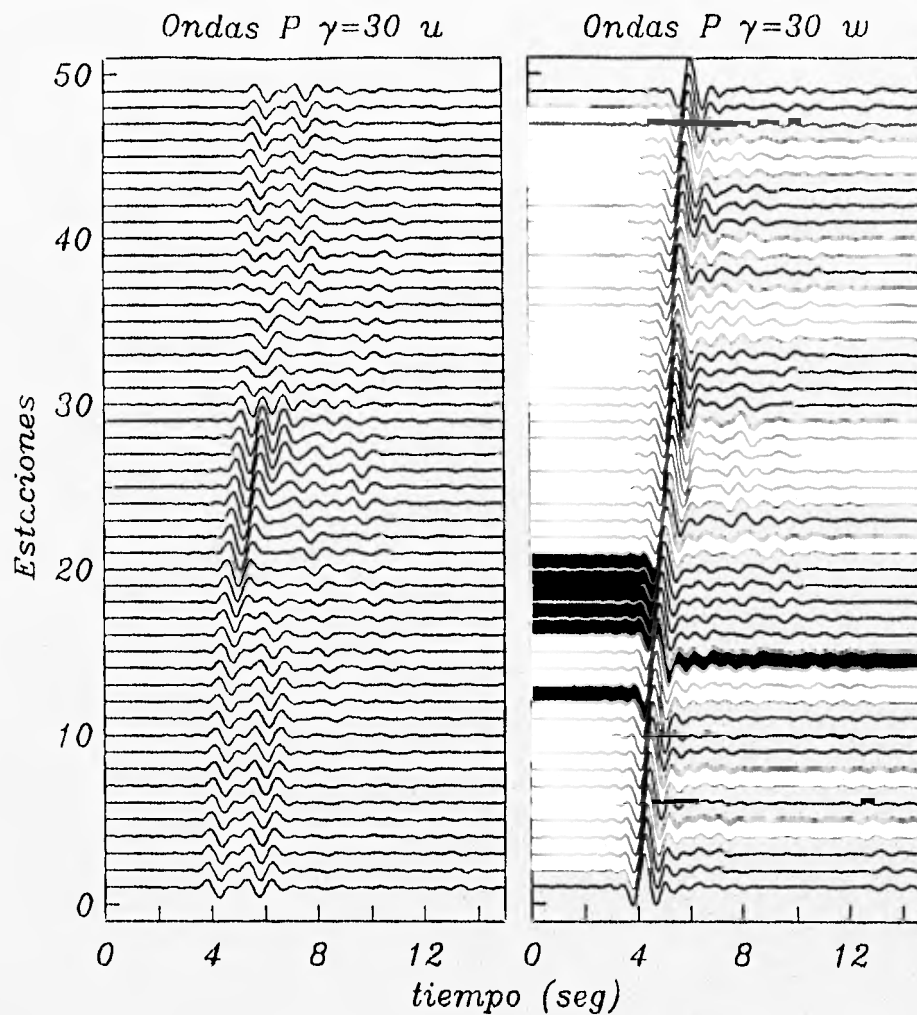


fig. 5.28. Sismogramas sintéticos en estaciones en la superficie del modelo de la fig. 5.19. Componentes horizontal, u , y vertical, w . Incidencia de ondas P con $\gamma = 30^\circ$.

En estos resultados, sin embargo, no se aprecian rasgos que pudieran identificarse como causantes de las duraciones y amplitudes observadas en la cuenca de México, de donde se concluye que tanto para 1s de periodo (cuyos resultados son los mostrados en las figuras precedentes), como para 4s, esta contribución no es importante, al menos para el modelo y características considerados en este estudio.

Las figuras 5.29 a 5.31 muestran los sismogramas sintéticos de estos últimos cálculos para la incidencia de ondas SH a 0, 30 y 60 grados respectivamente. Las amplificaciones y duraciones obtenidas no modifican las conclusiones que se tenían para un periodo de 1s (Sánchez-Sesma et. al., 1995), por lo que quizás la explicación a este fenómeno deba buscarse con base en la hipótesis de efectos regionales o en la de la contribución de cuerpos irregulares más profundos.

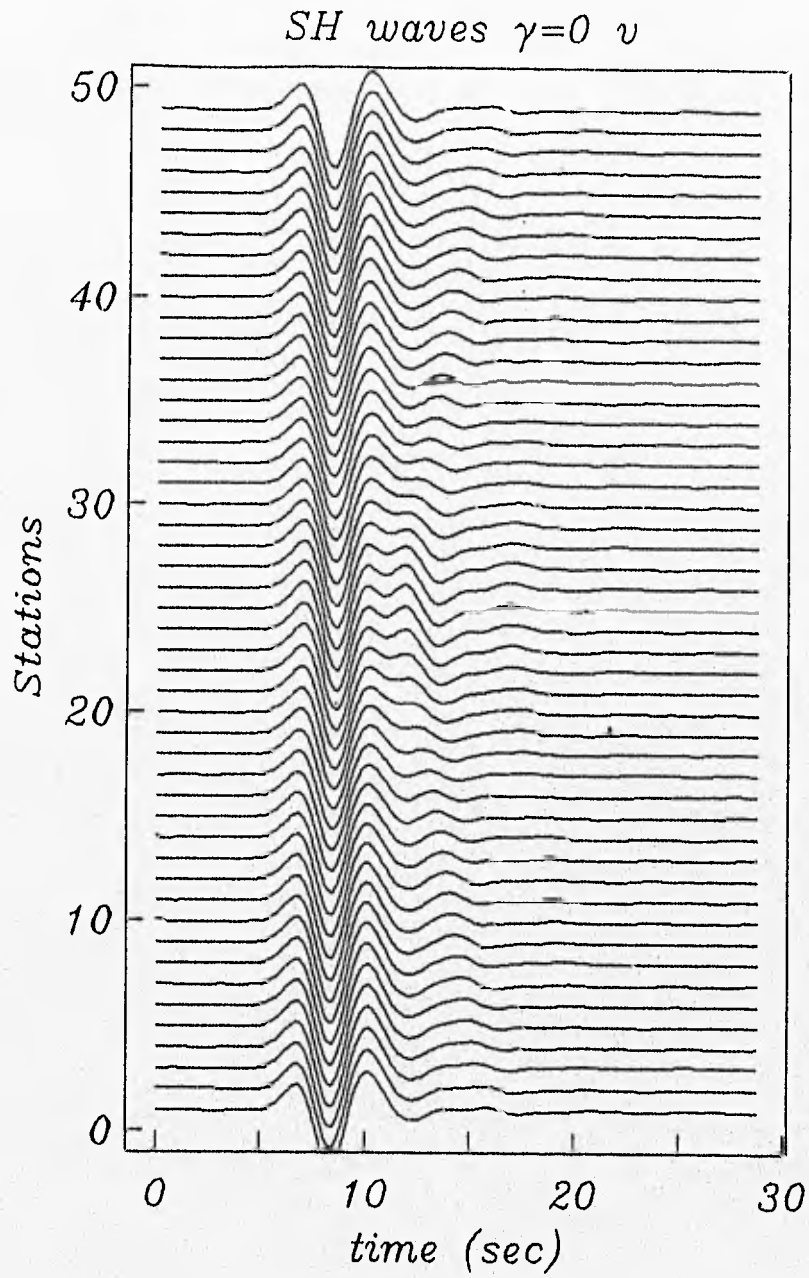


fig. 5.29. Sismogramas sintéticos en estaciones en la superficie del modelo de la fig. 5.19. y un pulso con un periodo de 4s. Incidencia de ondas *SH* con $\gamma=0^\circ$.

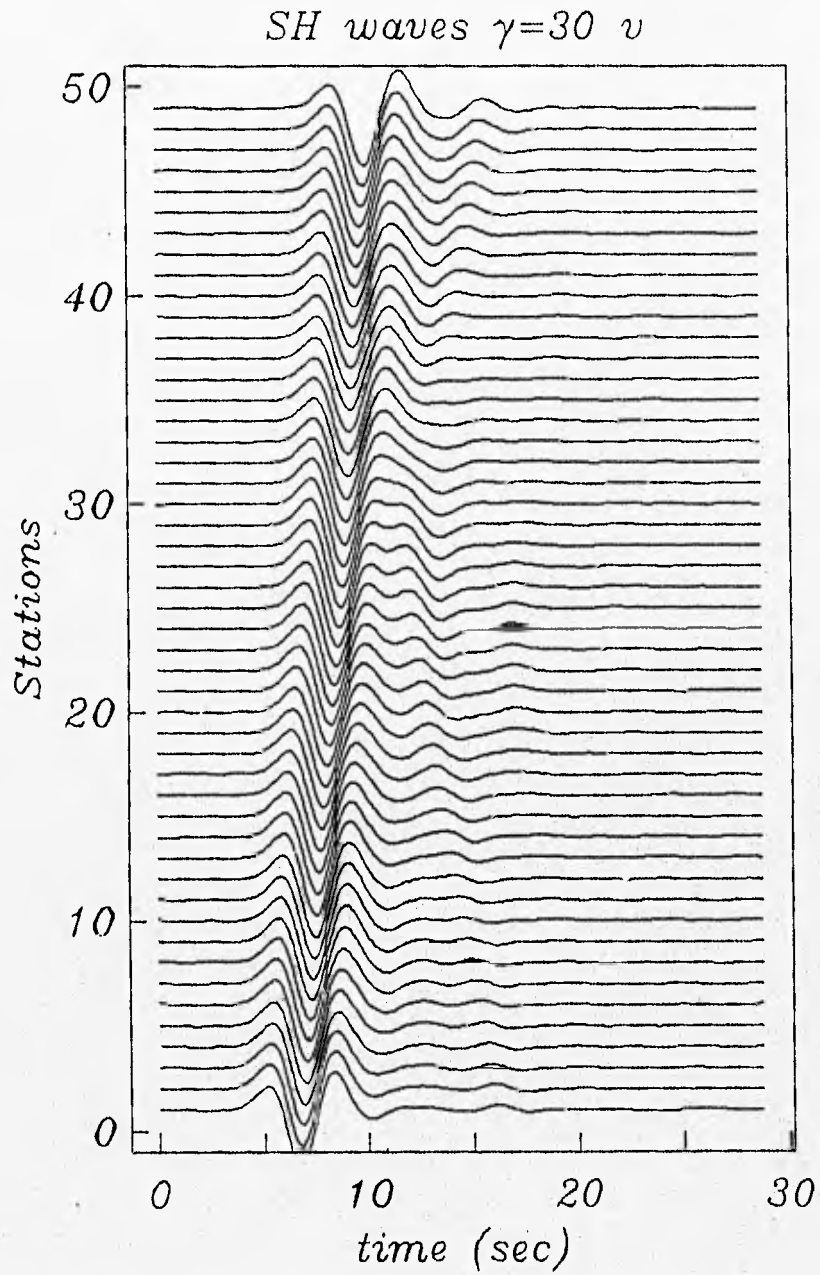


fig. 5.30. Sismogramas sintéticos en estaciones en la superficie del modelo de la fig. 5.19. y un pulso con un periodo de 4s. Incidencia de ondas *SH* con $\gamma = 30^\circ$.

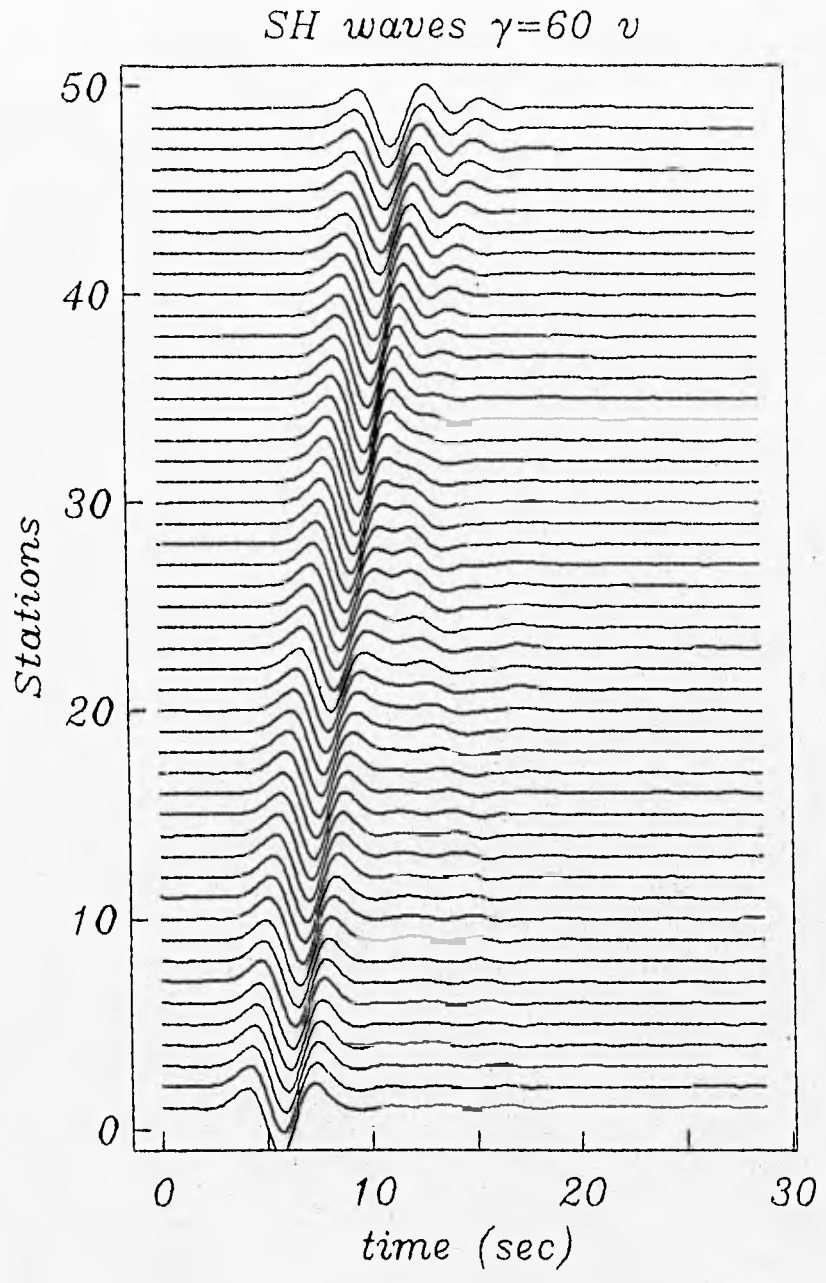


fig. 5.31. Sismogramas sintéticos en estaciones en la superficie del modelo de la fig. 5.19. y un pulso con un periodo de 4s. Incidencia de ondas *SH* con $\gamma = 60^\circ$.

VI.- CONCLUSIONES.

Se han revisado en este trabajo diferentes formulaciones para el cálculo de la respuesta sísmica de medios de propagación sencillos. A partir de ellos se ha planteado el cálculo de la respuesta de medios estratificados por medio de algoritmos implantados en programas en lenguaje Fortran, tanto para la incidencia de ondas elásticas provenientes de una fuente lejana, como para ondas cilíndricas generadas en una fuente puntual cercana.

A partir del cálculo del semiespacio por una solución exacta se han abordado posteriormente los métodos de Thomson-Haskell y el de Kennett, mismos que fueron comparados en su desempeño al aplicarlos al cálculo de un modelo de semiespacio estratificado. El método de Haskell, por su parte, ampliamente conocido y de una efectividad y precisión aceptables ha mostrado ser una útil herramienta de cálculo. En nuestro estudio, este método se ha aplicado para generar una solución de referencia extensible por medio del método indirecto de elementos de frontera (IBEM) al cálculo de la respuesta de un estrato irregular, por lo que puede concluirse que su aplicabilidad continuará siendo valiosa en estudios futuros, no obstante haber surgido en los años 50. El método de Kennett, por otra parte, presenta ciertas ventajas frente al de Thomson-Haskell, no sólo en cuanto a su rapidez de cálculo en relación con la precisión para el cálculo ante la incidencia de ondas en ángulos iguales o superiores al crítico, por lo que puede considerarse como una valiosa herramienta alternativa de cálculo.

El cálculo de la respuesta de un semiespacio elástico y de un estrato sobre una base rígida para la incidencia de ondas generadas en una fuente puntual local se efectuó como primer paso para el cálculo de la respuesta de un estrato irregular con una fuente puntual inmersa. Esta formulación y su algoritmo numérico se encuentran actualmente en desarrollo y en el corto plazo permitirá ampliar el rango de posibilidades en el modelado de medios de geometría irregular, de posible aplicación no sólo en la sismología teórica, sino posiblemente en los estudios enfocados a la exploración del subsuelo.

En cuanto al método indirecto de elementos de frontera, este ha sido aplicado para simular la propagación de ondas elásticas en medios estratificados con irregularidad lateral en la geometría. La novedad ha consistido en usar el método de Thomson-Haskell para calcular la solución de campo libre a partir de un medio estratificado uniforme mediante la extensión analítica de la solución a puntos fuera del estrato en donde ha sido definida la solución. La irregularidad de la estratificación puede verse como una perturbación no necesariamente pequeña de la geometría y para satisfacer completamente las condiciones de frontera se emplearon fuentes que generaron los campos difractados adicionales. Una característica interesante del método es entonces que no se requieren fronteras laterales y los efectos de borde producidos por la finitud lateral de la discretización son despreciables, al menos para el rango de frecuencias y modelos estudiados.

Los sismogramas simulados para el modelo a gran escala de la cuenca de México, en el que se ignoraron las formaciones sedimentarias y lacustres más superficiales, no mostraron aumentos significativos en amplitud y duración. Los resultados obtenidos concuerdan con los obtenidos a partir de modelos propuestos para estudiar la posible influencia de la estructura profunda de la Cuenca de México y es factible que las grandes duraciones observadas en los registros de la zona lacustre tengan su origen fuera de la cuenca o bien se deban a accidentes corticales más profundos.

Estudios más detallados sobre la respuesta de diferentes modelos de la cuenca de México u otros requieren una mayor especialización de los cuadros de investigación en el área de las matemáticas y física aplicada, métodos numéricos y geofísica.

Finalmente, los algoritmos probados y empleados en el presente trabajo para el modelado unidimensional de la propagación de ondas elásticas se encuentran disponibles para el lector interesado.

Agradecimientos.

Agradezco al Dr. Francisco José Sánchez Sesma, verdadero mentor y amigo por todo el apoyo y la paciencia brindados para el desarrollo de esta tesis. Al Dr. Francisco José Chávez García, a José Luis Rodríguez Zúñiga y a Francisco Luzón Martínez por sus valiosos comentarios y críticas, así como a David Arturo Álvarez Cuevas el haber aportado algunas de las figuras presentadas en el capítulo V; a la coordinación de Ingeniería Sismológica del Instituto de Ingeniería, al propio Instituto en general, a la Facultad de Ingeniería, a la UNAM toda y por supuesto a mis familiares, amigos y compañeros, los que siempre han estado conmigo y me han apoyado y al pueblo de México, por cuyos esfuerzos vive nuestra querida universidad. Una especial mención a María de los Angeles Castillo Covarrubias, por esos años de apoyo que me permitieron en gran medida llegar hasta aquí.

Este trabajo se desarrolló como parte de los proyectos de investigación 4517 del Instituto de Ingeniería e IN-108295 de DGAPA.

Referencias.

- Abramowitz, M. e I.A. Stegun (1972). *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications, Nueva York.
- Aki, K. y K. Larner (1970). Surface motion of a layered medium having an irregular interface due to incident plane SH waves. *Journal of Geophysical Research*, **75**, 933- 954.
- Aki, K. (1988). Local site effects on strong ground motion. *Proc. of the Special Conference on Earthquake Engineering and Soil Dynamics*, **2**, American Society of Civil Engineering., Utah, 1- 53.
- Aki, K. y P.G. Richards (1980). *Quantitative Seismology, theory and methods*. Vol. I. San Francisco Cal., USA: W.H. Freeman & Co. 574 p.
- Alarcón, E., A. Martín y F. Paris (1979). Boundary elements in potential and elasticity theory. *Journal of Computers and Structures* **10**, 351-362.
- Álvarez, R. (1990). Structure of the basin of Mexico City and its relation to the destruction in the earthquake of 1985, en *Geotechnical and Enviromental Geophysics*, S.H. Ward (Ed.), Society of Exploration Geophysicists, Vol. **III**, 263-280, Tulsa.
- Bard, P. Y. y M. Bouchon (1980a). The seismic response of sediment-filled valleys. Part 1. The case of incident SH waves. *Bulletin of the Seismological Society of America* **70**, 1263-1286.
- Bard, P. Y. y M. Bouchon (1980b). The seismic response of sediment-filled valleys. Part2. The case of incident SH waves. *Bulletin of the Seismological Society of America* **70**, 1921-1941.
- Bard, P. Y. (1982). Diffracted waves and displacement field over two-dimensional elevated topographies, *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* **71**, 731-760.
- Bard, P. Y. y J. C. Gariel (1986). The seismic response of two-dimensional sedimentary deposits with large vertical velocity gradients. *Bulletin of the Seismological Society of America* **76**, 343-366.
- Ben-Menahem, Ari; Singh, Sarvajit (1981). *Seismic Waves and Sources*. New York, USA: Springer-Verlag New York, Inc. 1108 p.
- Ben-Menahem, Ari (ed.). (1990). *Vincit Veritas, a portrait of the life and work of Norman Abraham Haskell, 1905-1970*. USA: American Geophysical Union, 210 p.

- Bouchon, M. (1973). Effect of topography on surface motion. *Bulletin of the Seismological Society of America* **63**, 615-632.
- Bouchon, M. y K. Aki (1977a). Discrete wave number representation of seismic source wave fields, *Bulletin of the Seismological Society of America* **67**, 259-277).
- Bouchon, M. y K. Aki (1977b). Near-field of seismic source in a layered medium with irregular interfaces. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* **50**, 669-684.
- Bouchon, M. (1979). Discrete wave number representation of elastic wave fields in three-space dimensions. *Journal of Geophysical Research*, **84**, No. B7, 3609-3614.
- Bouchon, M. (1985). A simple, complete numerical solution to the problem of diffraction of *SH* waves by an irregular surface. *Journal of the Acoustic Society of America*, **77**, 1-5.
- Bravo, M. A., F. J. Sánchez-Sesma y F. J. Chávez-García. (1988). Ground motion on stratified deposits for incident *SH* waves. *Bulletin of the Seismological Society of America* **78**, 436-450.
- Brebbia, C.A. (1978). *The Boundary Element Method for Engineers*, Pentech Press, London, England.
- Bullen, K.E. (1980). *An Introduction to the Theory of Seismology*, third edition. Cambridge, Great Britain: Cambridge University Press. 381 p.
- Bustamante, J. (1964). Response spectra of earthquakes on very soft clay, *Bulletin of the Seismological Society of America*. **54**, 855-866.
- Campillo, M. y M. Bouchon (1985). Synthetic *SH*-seismograms in a laterally varying medium by the discrete wave number method. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* **83**, 307-317.
- Chapman, C.H. y J.A. Orcutt (1985). The Computation of Body Wave Synthetic Seismograms in Laterally Homogeneous Media. *Reviews of Geophysics*, **23**, No. 2, 105-163. USA: American Geophysical Union.
- Chávez-García, F.J., F.J. Sánchez-Sesma, M. Campillo y P.-Y. Bard (1994). El terremoto de Michoacán de septiembre de 1985: Efectos de fuente, trayecto y sitio. *Física de la Tierra*, A. Udias, E. Bufforn and R.Madariaga (Eds.), en prensa.
- Chávez Pérez, S. (1993). Modelado sísmico de la cuenca de México, *Geofísica Internacional* **32**, 111-130.

- Cole, D. M., D. D. Kosloff y J. B. Minster (1978). A numerical boundary integral equation method for elastodynamics. I. *Bulletin of the Seismological Society of America* **68**, 1331-1357.
- Cruse, T. A. y F. J. Rizzo (1968a). A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem. I. *Journal of Mathematical Analysis Appl.* **22**, 244-259.
- Cruse, T. A. y F. J. Rizzo (1968b). A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem. II. *Journal of Mathematical Analysis Appl.* **22**, 341-355.
- Dravinsky, M. (1982a). Scattering of *SH* waves by subsurface topography. *Journal of Eng. Mech. Div., Proceedings ASCE* **108**, 1-7.
- Dravinsky, M. (1982b). Influence of interface depth upon strong motion. *Bulletin of the Seismological Society of America* **72**, 597-614.
- Dravinsky, M. (1983). Scattering of plane harmonic *SH* wave by dipping layers of arbitrary shape. *Bulletin of the Seismological Society of America* **73**, 1303-1319.
- England, R., F. J. Sabina e I. Herrera (1980). Scattering of *SH* waves by surface cavities of arbitrary shape using boundary methods. *Physics of the Earth Planetary Interiors* **21**, 148-157.
- Faccioli, E. (1976). A stochastic approach to soil amplification, *Bulletin of the Seismological Society of America*. **66**, 1277-1291.
- Fung, Y. C. (1965). *Foundations of Solid Mechanics*, New Jersey, Prentice-Hall. 340 p.
- Gilbert, F. y G. E. Backus (1966). Propagator matrices in elastic wave and vibration problems, *Geophysics* **31**, 326-332.
- Haskell, N.A. (1953). The dispersion of surface waves on multilayered media, *Bulletin of the Seismological Society of America* **43**, No. 1. 17-34.
- Herrera, I. (1979). Theory of connectivity: a systematic formulation of boundary element methods. *Applied Mathematics Model* **3**, 151-156.
- Herrera, I. (1980). Boundary methods. A criterion for completeness. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **77**, 4395-4398.
- Herrera, I. (1984). *Boundary Methods: An Algebraic Theory*, Pitman Adv. Publishing Program, Boston, Massachusetts.

Herrera, I. y F. J. Sabina. (1978). Connectivity as an alternative to boundary integral equations. Construction of bases. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **75**, 2059-2063.

Kausel, E. y J.M. Roesset (1981). Stiffness matrices for layered solids, *Bulletin of the Seismological Society of America* **71**, No. 6, Dic. 1981.

Kawase, H. (1988). Time-domain response of a semicircular canyon for incident *SV*, *P*, and Rayleigh waves calculated by the discrete wavenumber boundary element method. *Bulletin of the Seismological Society of America* **78**, 1415-1437.

Kawase, H. y K. Aki (1989). A study on the response of a soft basin for incident *S*, *P* and Rayleigh waves with special reference to the long duration observed in Mexico City, *Bulletin of the Seismological Society of America* **79**, 1361-1382.

Keary, P. y F.J. Vine (1990). *Global Tectonics*. Great Britain: Blackwell Scientific Publications, 302 p.

Kennett, B.L.N. y N.J. Kerry (1979). Seismic waves in a stratified half space. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* **57**, 557-583.

Kennett, B.L.N. y M.R. Illingworth (1981). Seismic waves in a stratified half-space III-Piecewise smooth models. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* **66**, 633-675.

Kennett, B. L. N. (1983). *Seismic Wave Propagation in Stratified Media*. Cambridge, Great Britain: Cambridge University Press. 342 p.

Knopoff (1964). A matrix method for elastic wave problems, *Bulletin of the Seismological Society of America* **54**, 431-483.

Koketsu, K., B.L.N. Kennett y H. Takenaka (en prensa) 2-D reflectivity method and synthetic seismograms for irregularly layered structures-II. Invariant embedding approach. *Geophysical Journal International*.

Kupradze, V.D. (1963). *Dynamical problems in elasticity*, en *Progress in solid mechanics*, Vol. **III**, I.N. Sneddon y R. Hill (Eds.), North-Holland Publishing Co., Amsterdam.

Lamb, H. (1904). On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid, *Philosophy Transactions of the Royal Society of London.*, serie A, **203**, 1-42.

Lay, T. y T. C. Wallace (1995). *Modern Global Seismology*. USA: Academic Press Ltd., 521 p.

- Luco, J.E, H.L. Wong y F.C.P. De Barros (1990). Three-dimensional response of a cylindrical canyon in a layered half-space. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **19**, 799-817.
- Manolis, G.D, y D.E. Beskos (1988). *Boundary Element Methods in Elastodynamics*, Unwin Hyman Ltd, Londres.
- Marsal, R.J. y M.Mazari (1959). *El subsuelo de la ciudad de México/The subsoil of Mexico City*, Facultad de Ingeniería, UNAM, México, D.F., México.
- Miklowitz, Julius (1984). *The Theory of Elastic Waves and Waveguides*. Amsterdam, Holland: North-Holland. 618 p.
- Nava, Alejandro (1987). *Terremotos*. México, D.F.: SEP-CONACyT-F.C.E., Col. La Ciencia Desde México, No. 34. 157 p.
- Nowack, R. y K. Aki (1984). The Two-Dimensional Gaussian Beam Synthetic Method: Testing and Application, *Journal of Geophysical Research* **89**, 7797- 7819.
- Ordaz, M. y S. K. Singh (1992). Source spectra and spectral attenuation of seismic waves from Mexican earthquakes, and evidence of amplification in the hill zone of Mexico City. *Bulletin of the Seismological Society of America* **82**, 24-43.
- Padilla y Sánchez, Ricardo José (1987). *Apuntes de Geotectónica*. México, D.F.: DEPMI, UNAM. 148 p.
- Pedersen, H.A., F.J. Sánchez-Sesma y M. Campillo (1994). Three-dimensional scattering by two-dimensional topographies. *Bulletin of the Seismological Society of America* **84**, 1169-1183.
- Pérez-Rocha, L. E., F. J. Sánchez-Sesma y E. Reynoso (1991). Three dimensional site effects in Mexico City: evidences from accelerometric network observations and theoretical results. *Proc. 4th Intl. Conf. Seismic Zonation, Stanford, California*, **2**, 327-334.
- Phinney, R. A. (1965). Theoretical calculation of the spectrum of first arrivals in layered elastic mediums, *Journal of Geophysical Research* **70**, 5107.
- Rosenblueth, E. (1952). *Teoría del diseño sísmico sobre mantos blandos*, Ediciones ICA, Serie B, México, D.F., México, Vol. 14, 3-12.
- Sabina, F. J., R. England e I. Herrera (1978). Theory of connectivity: applications to scattering of seismic waves. I. SH wave motion, *Proc. 2nd Intl. Conf. on Microzonation, San Francisco, California*, **2**, 813-824.

- Sánchez-Sesma, F. J. (1978). Ground motion amplification due to canyons of arbitrary shape. *Proc. 2nd. Intl. Conf. on Microzonation, San Francisco, California*, **2**, 729-738.
- Sánchez-Sesma, F.J. y J. Esquivel (1979). Ground motion on alluvial valleys under incident plane *SH* waves, *Bulletin of the Seismological Society of America* **69**, 1107-1120.
- Sánchez-Sesma, F. J. y E. Rosenblueth (1979). Ground motion at canyons of arbitrary shape under incident *SH* waves, *International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **7**, 441-450.
- Sánchez-Sesma, F. J., I. Herrera y J. Avilés (1982). A boundary method for elastic wave diffraction. Application to scattering of *SH* waves by surface irregularities. *Bulletin of the Seismological Society of America* **72**, 473-490.
- Sánchez-Sesma, F. J. (1983). Diffraction of elastic waves by three-dimensional surface irregularities. *Bulletin of the Seismological Society of America* **73**, 1621-1636.
- Sánchez-Sesma, F. J. , S. Chávez-Pérez y J. Avilés (1984). Scattering of elastic waves by three-dimensional topographies. *Proc. 2nd World Conf. Earthquake Eng. 8th., San Francisco, California*, **2**, 633-646.
- Sánchez-Sesma, F. J., M. A. Bravo e I. Herrera (1985). Surface motion of topographical irregularities for incident *P*, *SV*, and Rayleigh waves. *Bulletin of the Seismological Society of America* **75**, 263-269.
- Sánchez-Sesma, F.J. y S.A. Velázquez (1987). On the seismic response of a dipping layer, *Wave Motion* **9**, 387-391.
- Sánchez-Sesma, F.J. (1987). Site effects on strong ground motion, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* **6**, 124-132.
- Sánchez-Sesma, F.J.; S. Chávez Pérez ; M. Suárez ; M. A. Bravo y L.E. Pérez Rocha (1988a). On the Seismic Response of the Valley of Mexico. *Earthquake Spectra* **4**, No. 3. 569-589.
- Sánchez-Sesma, F.J., M. Campillo y K. Irikura (1989). A note on the Rayleigh hypothesis and the Aki-Larner method. *Bulletin of the Seismological Society of America* **79**, No. 6, 1995-1999.
- Sánchez-Sesma, F.J.; L.E. Pérez Rocha y E. Reinoso (1989). Ground Motion in Mexico City during the April 25, 1989, Guerrero Earthquake. *Tectonophysics*, **218**. 127-140.
- Sánchez-Sesma F.J. y M. Campillo (1991). Diffraction of *P*, *SV* and Rayleigh waves by topographic features: a boundary integral formulation, *Bulletin of the Seismological Society of America* **81**, 2234-2253.

Sánchez-Sesma, F.J., J. Ramos-Martínez y M. Campillo (1993). An indirect boundary element method applied to simulate the seismic response of alluvial valleys for incident P , S and Rayleigh Waves, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **22**, 279-295.

Sánchez-Sesma, F.J. y F. Luzón (1994). Seismic response of three-dimensional alluvial valleys for incident P , S and Rayleigh waves, *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1995, **85**, 269-284.

Sánchez-Sesma, F.J., R. Vai; J.M. Castillo y F. Luzón (1995). Respuesta sísmica de medios estratificados irregulares usando el método indirecto de elementos de frontera: aplicación al estudio de la influencia de la estructura profunda en la respuesta sísmica de la cuenca de México en *La Sismología en México: 10 años después del temblor de Michoacán del 19 de Septiembre de 1985 (M=8.1)*. Monografía No. 2, Unión Geofísica Mexicana. 85-99 p.

Santoyo García Galiano, Miguel A. (1989). *Análisis e Interpretación de los Registros de Aceleraciones obtenidos en el Valle de México durante el sismo del 8 de Febrero de 1988*. Tesis de Licenciatura en Ingeniería Geofísica. México, D.F.: Facultad de Ingeniería, UNAM. 53 p.

Singh, S.K., and M. Ordaz (1993) On the origin of long coda observed in the lake-bed strong-motion records of Mexico City, *Bulletin of the Seismological Society of America* **83**, 1298-1306.

Stein, Seth (1987). *Seismological Thoughts*. Illinois, USA: Northwestern University, College of Arts and Sciences. 569 p.

Stein, Seth (1991). *Introduction to Seismology, Earthquakes and Earth Structure*. Illinois, USA: Northwestern University, Department of Geological Sciences. 554.

Takenaka, H. (1990). *Theoretical studies on seismic wave fields in irregularly layered media*, Tesis Doctoral por la Universidad de Hokkaido. Sapporo, Japón.

Thomson, W.T. (1950). Transmission of elastic waves through a stratified solid medium, *Journal of Applied Physics* **21**, 89-93.

Trifunac, M.D. (1971). Surface motion of a semi-cylindrical alluvial valley for incident plane SH waves, *Bulletin of the Seismological Society of America* **61**, 1755-1770.

Trifunac, M.D. (1973). Scattering of plane SH waves by a semicylindrical canyon, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **1**, 267-281.

White, J.E. (1965). *Seismic Waves, radiation, transmission and attenuation*. New York, USA: McGraw-Hill Inc. 301 p.

Wong, H. L. (1982). Effect of surface topography on the diffraction of *P*, *SV*, and Rayleigh waves. *Bulletin of the Seismological Society of America* **72**, 1167-1183.

Zeevaert, L. (1964). *Strong ground motions recorded during earthquakes of May the 11th and 19th, 1962 in Mexico City*, Bulletin of the Seismological Society of America. **54**, 209-231.

Zienkiewicz, O. C., D. W. Kelly y P. Bettess (1977). The coupling of the finite element method and boundary procedures. *Intl. J. Num. Meth. Eng.* **11**, 355-377.

Apéndices.

Apéndice A.- Fundamentos del Método de Kennett.

Los párrafos siguientes no pretenden ser una revisión exhaustiva de la formulación del método de Kennett, sino sólo un resumen de las principales expresiones analíticas que lo fundamentan, por lo que se recomienda al lector interesado en profundizar en el tema se remita al propio texto de Kennett (1983).

Las ondas P y S tienen como expresiones de sus velocidades a:

$$\alpha = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2} \quad (\text{A.1})$$

$$\beta = (\mu/\rho)^{1/2} \quad (\text{A.2})$$

y pueden existir separadas en un medio uniforme. Si se introduce un gradiente espacial de los parámetros $\lambda(x)$, $\mu(x)$ y $\rho(x)$, aún y cuando sea muy suave, las ondas aparecerán acopladas.

El problema de propagación se reduce si las propiedades elásticas dependen sólo de la profundidad. La tracción τ y el desplazamiento u son continuos a través de cualquier plano $z=\text{const.}$ dentro de una estratificación, bajo la suposición de un contacto muy estrecho entre materiales disímiles.

Si las ecuaciones acopladas para el desplazamiento son:

$$\partial_z u_v = -\nabla_1^2 u_z + \mu^{-1} \tau_{vz} \quad (\text{A.3})$$

$$\partial_z u_H = \mu^{-1} \tau_{Hz} \quad (\text{A.4})$$

donde τ es el tensor de esfuerzos, y donde:

$$\nabla_1^2 \varphi = r^{-1} \partial_r (r \partial_r \varphi) + r^{-2} \partial_{\phi\phi} \varphi$$

está en coordenadas cilíndricas con eje normal a la estratificación, entonces puede aplicarse una transformada de Fourier con respecto al tiempo, y para las coordenadas horizontales, una transformada de Hankel de orden m sobre la distancia radial desde el origen y una transformada de Fourier sobre la variable angular.

Para cada orden azimutal m se introduce un juego de variables relacionadas con las transformadas de las variables de desplazamiento y esfuerzo de (A.3) y (A.4) dado por:

$$\begin{aligned}
 U &= \hat{u}_z & P &= \omega^{-1} \hat{\tau}_{zz} \\
 V &= -k^{-1} \hat{u}_v & S &= -(\omega k)^{-1} \hat{\tau}_{vz} \\
 W &= -k^{-1} \hat{u}_H & T &= -(\omega k)^{-1} \hat{\tau}_{Hz}
 \end{aligned}
 \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}
 \partial_z u_z &= -\lambda(\lambda + 2\mu)^{-1} u_v + (\lambda + 2\mu)^{-1} \tau_{zz} \\
 \partial_z u_v &= -\nabla_1^2 u_z + \mu^{-1} \tau_{vz} \\
 \partial_z \tau_{zz} &= \rho \partial_{tt} u_z - \tau_{vz} - \rho f_z \\
 \partial_z \tau_{vz} &= (\rho \partial_{tt} - \rho v \nabla_1^2) u_v - \lambda(\lambda + 2\mu)^{-1} \nabla_1^2 \tau_{zz} - \rho f_v
 \end{aligned}
 \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}
 \partial_z u_H &= \mu^{-1} \tau_{Hz} \\
 \partial_z \tau_{Hz} &= (\rho \partial_{tt} - \mu \nabla_1^2) u_H - \rho f_H
 \end{aligned}
 \tag{A.7}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 uv &= r^{-1} [\partial_r (r u_r) + \partial_\phi u_\phi] \\
 \tau_{vz} &= r^{-1} [\partial_r (r \tau_{rz}) + \partial_\phi \tau_{\phi z}]
 \end{aligned}
 \tag{A.8}$$

$$\begin{aligned}
 u_H &= r^{-1} [\partial_r (r u_\phi) - \partial_\phi u_r] \\
 \tau_{Hz} &= r^{-1} [\partial_r (r \tau_{\phi z}) - \partial_\phi \tau_{rz}]
 \end{aligned}
 \tag{A.9}$$

Los factores de escala en (A.5) son diseñados para un juego de variables en cada grupo con igual dimensionalidad; el escalamiento por el número de onda horizontal k , viene de la diferenciación horizontal en (A.8) y (A.9) y el escalamiento de frecuencias por esfuerzo simplifica la forma de ecuaciones subsecuentes. Estas nuevas cantidades de desplazamiento-esfuerzo están relacionadas por:

$$\begin{aligned}\omega P &= \rho\alpha^2\partial_z U - k\rho(\alpha^2 - \beta^2)V \\ \omega S &= \rho\beta^2(\partial_z V + kU) \\ \omega T &= \rho\beta^2\partial_z W\end{aligned}\tag{A.10}$$

en términos de las velocidades de onda P y S , α y β respectivamente.

Transformando también los términos de fuerza de cuerpo, se aplica un escalamiento similar al anterior, de modo que:

$$\begin{aligned}F_z &= \rho\omega^{-1}\hat{f}_z \\ F_v &= -\rho(\omega k)^{-1}\hat{f}_v \\ F_H &= -\rho(\omega k)^{-1}\hat{f}_H\end{aligned}$$

Si se aplica la transformada de Fourier-Hankel:

$$fh[\varphi] = \hat{\varphi}(k, m, \omega) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \int_0^{\infty} dr r J_m(kr) \int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{-im\phi} \varphi(r, \phi, t)\tag{A.11}$$

donde $fh[\bar{U}^2, \varphi] = -k^2 fh_m[\varphi]$ aplicado a (A.3) y (A.4) origina juegos acoplados de ecuaciones diferenciales ordinarias para las nuevas cantidades de desplazamiento-esfuerzo $U(k, m, z, \omega)$ y $P(k, m, z, \omega)$, etc., que en función de la lentitud horizontal $p=k/\omega$ en lugar del número de onda k , para ondas P - SV dan lugar a:

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} U \\ V \\ P \\ S \end{bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} 0 & p(1-2\beta^2/\alpha^2) & (\rho\alpha^2)^{-1} & 0 \\ -p & 0 & 0 & (\rho\beta^2)^{-1} \\ -\rho & \rho[\nu p^2 - 1] & 0 & p \\ 0 & 0 & -p(1-2\beta^2/\alpha^2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ P \\ S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_z \\ F_v \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

donde: $\nu = 4\beta^2(1-\beta^2/\alpha^2)$

y para ondas *SH*:

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} W \\ T \end{bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} 0 & (\rho\beta^2)^{-1} \\ \rho[\beta^2 p^2 - 1] & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ F_H \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

Donde los coeficientes de (A.12) y (A.13) son independientes del orden azimutal m y de la dependencia azimutal de $U(k, m, z)$ para un medio isotrópico.

Los elementos de las matrices acopladas involucran sólo los parámetros elásticos a la profundidad z , y no sus derivadas verticales.

Cada juego de ecuaciones acopladas (A.12) y (A.13) puede ser escrito como:

$$\partial_z b(k, m, z, \omega) = \omega \mathbf{A}(p, z) b(k, m, z, \omega) + F(k, m, z, \omega) \quad (\text{A.14})$$

En términos del vector columna b , cuyos elementos son el desplazamiento y el esfuerzo.

Para ondas *P-SV*:

$$b_p(k, m, z, \omega) = [U, V, P, S]^T \quad (\text{A.15})$$

y para ondas *SH*:

$$b_H(k, m, z, \omega) = [W, T]^T \quad (\text{A.16})$$

Los desplazamientos y tracciones u y τ son continuos a través de un plano horizontal y sus derivadas u_v , u_H , τ_{vz} , τ_{Hz} lo serán también. La transformación preserva esta continuidad

por lo que el vector desplazamiento-esfuerzo b lo será a través de cualquier plano de discontinuidad.

Aunque los más recientes estudios en medios estratificados han hecho uso de los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden, existe una formulación alternativa en términos de ecuaciones acopladas de segundo orden que permite tener una visión más profunda del carácter del desplazamiento, útil en el tratamiento de fuentes.

Así, para ondas SH , las dos ecuaciones de primer orden (A.13) son equivalentes a la ecuación:

$$\partial_z(\rho\beta^2\partial_z\omega) - \rho\omega^2(\beta^2 p - 1)W = -\omega F_H \quad (\text{A.17})$$

En el caso $P-SV$, tenemos dos ecuaciones acopladas de segundo orden que son convenientemente expresadas en términos del vector de desplazamiento $w=[u,v]^T$:

$$\partial_z[\mathbf{A}\partial_z w + \omega p \mathbf{B}w] - \omega p \mathbf{B}^T \partial_z w - \rho\omega^2(p^2 \mathbf{C} - \mathbf{I})w = -\omega F \quad (\text{A.18})$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad y:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \rho \begin{bmatrix} 0 & (2\beta^2 - \alpha^2) \\ \beta^2 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \beta^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

De (A.10) puede reconocerse la contribución de tracción en (A.19), como:

$$\omega t = \mathbf{A}\partial_z w + \omega p \mathbf{B}w \quad (\text{A.20})$$

Las expresiones (A.17) y (A.18) tienen la forma:

$$\partial_z(\omega t) = k w = -\omega F \quad (\text{A.21})$$

en términos de un operador k , y son auto-adjuntas. Puede hacerse uso de esta propiedad para establecer invariantes de propagación para las ondas SH y $P-SV$. Así, para la lentitud p y la frecuencia ω , considérense dos campos de desplazamiento diferentes w_1, w_2 , que satisfacen diferentes condiciones de frontera, de modo que la estructura de k es tal que:

$$\partial_z[w_1^T t^2 - t_1^T w_2] = w_2^T F_1 - w_1^T F_2 \quad (\text{A.22})$$

En la ausencia de fuentes, la cantidad $\langle w_1, w_2 \rangle = w_1^T t_2 - t_1^T w_2$ es independiente de la profundidad, y un invariante de propagación $\langle w_1, w_2 \rangle$ es un wronskiano pesado para las ecuaciones acopladas. Para ondas *P-SV*:

$$\langle w_1, w_2 \rangle = U_1 P_2 + V_1 S_2 - P_1 U_2 - S_1 V_2 \quad (\text{A.23})$$

Y para ondas *SH*:

$$\langle w_1, w_2 \rangle = W_1 T_2 - T_1 W_2 \quad (\text{A.24})$$

Para las ondas *P-SV*, los coeficientes de la matriz **A** en (A.14) cumple las siguientes propiedades de simetría:

a).- Para un medio disipativo, cuando α, β son complejas:

$$\mathbf{N}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{N} = 0 \quad (\text{A.25a})$$

b).- Para un medio perfectamente elástico:

$$\mathbf{N}\mathbf{A} + \mathbf{A}^{T*} \mathbf{N} = 0 \quad (\text{A.25b})$$

donde * indica que se trata de un número complejo conjugado, y **N** es una matriz diagonal:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$$

Si se construye la cantidad $b_1^T \mathbf{N} b_2$, entonces en ausencia de fuentes, de (A.14) se tiene:

$$\partial_z (b_1^T \mathbf{N} b_2) = \omega b_1^T [\mathbf{A}^T \mathbf{N} + \mathbf{N} \mathbf{A}] b_2 = 0 \quad (\text{A.26})$$

Y de (A.25a), efectuando la multiplicación:

$$b_1^T \mathbf{N} b_2 = \langle w_1, w_2 \rangle = U_1 P_2 + V_1 S_2 - P_1 U_2 - S_1 V_2 \quad (\text{A.27})$$

Para ondas *SH*, se tiene un comportamiento similar:

a).- En presencia de disipación:

$$n\mathbf{A} + \mathbf{A}^T n = 0 \quad (\text{A.28a})$$

b).- Y para un medio perfectamente elástico:

$$n\mathbf{A} + \mathbf{A}^{T*}n = 0 \quad (\text{A.28b})$$

donde:

$$n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Y una vez más: $b_1^T n b_2 = \langle w_1, w_2 \rangle$.

Considerando la circunstancia en la que ambos vectores desplazamiento-esfuerzo tienen la misma frecuencia y lentitud, se tiene de (A.21):

$$\left[w_1^T(w_1, p_1) w_2 t_2(w_2, p_2) - w_1 t_1^T(w_1, p_1) w_1(w_2, p_2) \right] \quad (\text{A.29})$$

Para ondas *P-SV*:

$$\begin{aligned} & \partial_z [U_1 \omega_2 P_2 + V_1 \omega_2 S_2 - \omega_1 P_1 U_2 - \omega_1 S_1 V_2] = \\ & \rho(\omega_1^2 - \omega_2^2) [U_1 V_2 + V_1 V_2] + 4\rho(1 - \beta^2/\alpha^2) \beta^2 [\omega_2^2 p_2^2 - \omega_1^2 p_1^2] V_1 V_2 + \\ & (\omega_2 p_2 - \omega_1 p_1) \left\{ [U_1 \omega_2 S_2 + U_2 \omega_1 S_1] - (1 - 2\beta^2/\alpha^2) [V_1 \omega_2 P_2 + V_2 \omega_1 P_1] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Y para ondas *SH*:

$$\partial_z [W_1 \omega_2 T_2 - \omega_1 T_1 W_2] = \rho(\omega_1^2 - \omega_2^2) W_1 W_2 + \rho \beta^2 (\omega_2^2 p_2^2 - \omega_1^2 p_1^2) W_1 W_2 \quad (\text{A.31})$$

Los invariantes de propagación juegan un papel importante en la descripción del campo de ondas, aún en la presencia de fuentes, siendo muy usados los tipos $\langle w_1, w_2 \rangle$.

Como ya se ha mencionado arriba, a partir del vector desplazamiento-esfuerzo b , pueden ser "recuperados" los desplazamientos u dentro de una estratificación, mediante la transformada de Fourier-Hankel inversa. Así, para u_z , en términos de $U(k, m, z, \omega)$, se tiene:

$$u_z(r, \phi, z, t) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} dk \sum_m U(m, z) J_m(kr) e^{i\omega \phi} \quad (\text{A.32})$$

que representa la superposición de ondas cilíndricas de cuyo orden depende la naturaleza de su modulación horizontal. El lector puede revisar las expresiones para las componentes u_r y u_ϕ en el texto de Kennett (1983).

Por otro lado, considerando una situación bidimensional donde todos los esfuerzos y desplazamientos son independientes de la coordenada y , si se toma una transformada de Fourier en el tiempo y la posición horizontal x :

$$\varphi(k, \omega) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \varphi(x, t) \quad (\text{A.33})$$

pueden recuperarse los juegos de ecuaciones (A.12) y (A.13) si se trabaja en coordenadas cartesianas y establecer:

$$\begin{aligned} U &= i\hat{u}_z & P &= i\bar{\tau}_{zz} \\ V &= \hat{u}_x & S &= \bar{\tau}_{xz} \\ W &= \hat{u}_y & T &= \bar{\tau}_{yz} \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

donde este tratamiento da una descomposición de ondas planas, en lugar de las cilíndricas, implicadas en (A.32).

En cuanto a las matrices fundamentales y propagadoras, cuando se va a considerar la excitación del campo de ondas será necesario resolver las ecuaciones diferenciales acopladas para el vector desplazamiento-esfuerzo b . Para ello, deben relacionarse los vectores b en diferentes niveles en la estratificación, introduciendo para ello matrices cuyas columnas consisten de vectores desplazamiento-esfuerzo satisfaciendo condiciones de frontera particulares.

Así, para revisar la evolución del campo de desplazamiento-esfuerzo, se fijan el orden angular m , el número de onda horizontal k y la frecuencia ω y se usa la forma abreviada de $b(z)$, es decir, $b(k, m, z, \omega)$, y en la ausencia de términos de fuerza, el vector $b(z)$ cumplirá con la ecuación:

$$\partial_z b(z) = \omega \mathbf{A}(p, z) b(z) \quad (\text{A.35})$$

Si luego se construye una matriz cuadrada $\mathbf{B}(z)$, cuyas columnas son vectores desplazamiento-esfuerzo independientes satisfaciendo condiciones iniciales diferentes, entonces $\mathbf{B}(z)$ es generada por la ecuación matricial:

$$\partial_z \mathbf{B}(z) = \omega \mathbf{A}(p, z) \mathbf{B}(z) \quad (\text{A.36})$$

Las columnas podrán ser vectores b correspondientes a ondas ascendentes y descendentes. Para ondas *SH*:

$$\mathbf{B}_H = [b_1; b_2] \quad (\text{A.37})$$

y para ondas P - SV (P ascendentes y SV descendentes, por ejemplo):

$$\mathbf{B}_p = [b_{11}, b_{12}; b_{21}, b_{22}] \quad (\text{A.38})$$

y en cada caso, la matriz \mathbf{B} puede particionarse para desplegar los elementos de desplazamiento-esfuerzo, esto es:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ T_1 & T_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.39})$$

en términos de las matrices de desplazamiento W y sus matrices de tracción asociadas T . Para el sistema P - SV , W será una matriz de 2×2 cuyas columnas pueden ser pensadas como soluciones independientes del sistema de segundo orden (A.18) y la matriz de tracción es generada como en (A.20).

En el caso SH , W y T son los elementos de desplazamiento y esfuerzo W , T y cualquier vector de desplazamiento-esfuerzo puede ser creado tomando una combinación lineal de las columnas de \mathbf{B} , de modo que $b = \mathbf{B}c$ en términos de algún vector constante c .

Sea ahora para las matrices de desplazamiento w_1 y w_2 :

$$\langle w_1, w_2 \rangle = W_1^T T_2 - T_1^T W_2 \quad (\text{A.40})$$

Luego, el elemento ij en $\langle w_1, w_2 \rangle$ es la expresión $\langle w_{1i}, w_{2j} \rangle$ construida a partir de la i -ésima columna de W_1 y la j -ésima columna de W_2 . Para ondas SH tampoco hay distinción entre esta última expresión (A.40) y la expresión derivada de (A.22), pero para ondas P - SV , $\langle w_1, w_2 \rangle$ es una matriz de 2×2 , y como cada uno de los elementos de (A.40) es independiente de la profundidad, así lo es también $\langle w_1, w_2 \rangle$, teniéndose una matriz invariante de propagación. De (A.40):

$$\langle w_1, w_2 \rangle^T = -\langle w_2, w_1 \rangle \quad (\text{A.41})$$

Cuando los vectores de desplazamiento en W_1 satisfacen una condición de frontera "común", una combinación lineal de desplazamiento y tracción se desvanece en algún nivel z_0 , es decir:

$$\mathbf{C}w(z_0) + \mathbf{D}t(z_0) = 0 \quad (\text{A.42})$$

para algunas matrices \mathbf{C} , \mathbf{D} , cuando:

$$\langle w_{1i}, w_{1j} \rangle = 0, \forall i, j \quad (\text{A.43})$$

En este caso, donde las condiciones de frontera incluyen una superficie libre y condición de irradiación, se tiene entonces:

$$\langle w_1, w_2 \rangle = 0 \quad (\text{A.44})$$

Y se supone que (A.44) incluirá a W_1 y W_2 , de modo que a partir de (A.40) se tratará de construir la matriz inversa de la matriz fundamental (A.39) partiendo de las transpuestas de las matrices de desplazamiento y tracción. Así, el producto de matrices será:

$$\begin{bmatrix} T_2^T & -W_2^T \\ -T_1^T & W_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ T_1 & T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle w_1, w_2 \rangle & 0 \\ 0 & \langle w_1, w_2 \rangle \end{bmatrix}$$

Cuando se emplea (A.44), la inversa de la matriz fundamental tiene entonces la forma particionada:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \langle w_1, w_2 \rangle^{-T} T_2^T & -\langle w_1, w_2 \rangle^{-T} W_2^T \\ -\langle w_1, w_2 \rangle^{-1} T_1^T & \langle w_1, w_2 \rangle^{-1} W_1^T \end{bmatrix} \quad (\text{A.45})$$

Donde el superíndice "-T" indica la inversa de una transpuesta. Para muchos casos de interés, W_1 y W_2 pueden ser elegidos de manera que $\langle w_1, w_2 \rangle$ tenga una forma muy simple, a reducir sólo un múltiplo de la matriz unitaria, en cuyo caso (A.45) se simplifica por la extracción de un factor común.

A partir de aquí, se puede construir una matriz propagadora para una porción del medio como:

$$\mathbf{P}(z, z_0) = \mathbf{B}(z) \mathbf{B}^{-1}(z_0) \quad (\text{A.46})$$

que facilitará el cálculo de la solución de (A.36) al nivel z_0 mediante:

$$b(z) = \mathbf{P}(z, z_0) b(z_0) \quad (\text{A.47})$$

Escribiendo (A.43) en forma particionada:

$$\begin{bmatrix} w(z) \\ t(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{WW} & P_{WT} \\ P_{TW} & P_{TT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(z_0) \\ t(z_0) \end{bmatrix} \quad (\text{A.47'})$$

se tiene que los elementos de desplazamiento en z dependen tanto de los elementos de desplazamiento, como de esfuerzo en z_0 y las particiones del propagador corresponden a las matrices de desplazamiento-esfuerzo tipo (A.40), pudiéndose usar la expresión general para la inversa de una matriz fundamental (A.45) para encontrar la forma particionada para $\mathbf{P}^{-1}(z, z_0)$, y entonces, puesto que $\mathbf{P}(z_0, z_0) = I$, es decir:

$$\langle p_{WW}, p_{WT} \rangle = I$$

entonces:

$$P^{-1}(z, z_0) = \begin{bmatrix} P_{TT}^T & -P_{WT}^T \\ -P_{TW}^T & P_{WW}^T \end{bmatrix} \quad (\text{A.48})$$

La cantidad del vector b en discontinuidades en los parámetros elásticos significa que la matriz propagadora de (A.47) como una función de transferencia para el desplazamiento y esfuerzo entre dos niveles, puede ser construida para una estructura arbitraria con profundidad. $\mathbf{P}(z, z_0)$ como una función de z será continua a través de todos los planos $z = \text{cte}$.

Los propagadores son esencialmente los mismos empleados en el método de *Haskell* y pueden adaptarse al modelado de la propagación de ondas generadas por fuentes. El lector puede revisar el texto de Kennett (1983) para profundizar en el tema.

A partir de lo anteriormente expuesto, pueden construirse ecuaciones para la propagación de ondas mediante la formulación de sus vectores de desplazamiento-esfuerzo.

Así, para un medio uniforme (caso más simple de "medio estratificado"), puede hacerse una descomposición del campo de ondas en ascendentes y descendentes, para luego tratar el caso donde las propiedades sísmicas varían suavemente con la profundidad y se puede extender el caso uniforme a más complejos en los puntos de retorno de las ondas P y S , evadiendo dificultades mediante el uso de funciones de *Airy* que se comportan asintóticamente como ondas descendentes.

Entonces, simulando una "perturbación sísmica" en un medio uniforme mediante la introducción de sus contribuciones de onda P y S , la Transformada de Fourier-Hankel (A.11) preserva esta separación y las ondas cilíndricas generadas pueden ser caracterizadas como ondas ascendentes y descendentes, según su dependencia de z .

Para una onda cilíndrica de frecuencia ω , lentitud p y orden angular m , se introduce una transformación que conecta al vector desplazamiento-esfuerzo b a un nuevo vector v :

$$b = \mathbf{D}v \quad (\text{A.49})$$

tratando de que \mathbf{D} de una forma simple a la evolución de v con z .

En una región libre de fuentes, v debe satisfacer:

$$\partial_z(\mathbf{D}v) = \omega \mathbf{A}(p, z) \mathbf{D}v \quad (\text{A.50})$$

y así mismo:

$$\partial_z v = [\omega \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{D} - \mathbf{D}^{-1} \partial_z \mathbf{D}] v \quad (\text{A.51})$$

Si \mathbf{D} es una matriz de vectores característicos, para $\mathbf{A}(p, z)$, el primer elemento en el miembro derecho de (A.51) se reduce a la forma diagonal:

$$\omega \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{D} = i\omega \Lambda \quad (\text{A.52})$$

donde $i\Lambda$ es una matriz diagonal, cuyas componentes son los eigenvalores de A . A partir de las formas explícitas de las matrices de coeficientes en (A.12) y (A.13), se encuentra que para las ondas P y SV :

$$\Lambda_P = \text{diag}[-q\alpha, -q\beta, q\alpha, q\beta] \quad (\text{A.53})$$

y para ondas SH :

$$\Lambda_H = \text{diag}[-q\beta, q\beta] \quad (\text{A.54})$$

donde:

$$\begin{aligned} q\alpha &= (\alpha^{-2} - p^2)^{1/2} \\ q\beta &= (\beta^{-2} - p^2)^{1/2}; \text{Im}(\omega q\alpha) \geq 0 \\ &\text{Im}(\omega q\beta) \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

son las lentitudes para ondas P y S para una lentitud p y el factor ω viene de (A.52). En un medio uniforme además, la matriz de coeficientes A es constante, y así la matriz de vectores característicos D es independiente de z , con el resultado de que $D^{-1}\partial_z D$ desaparece. El vector v es entonces gobernado por la ecuación diferencial:

$$\partial_z v = im\Lambda v \quad (\text{A.56})$$

con solución:

$$v(z) = \exp[i\omega(z - z_0)\Lambda]v(z_0) = Q(z, z_0)v(z_0) \quad (\text{A.57})$$

en términos de un "propagador de ondas" Q , que depende de la diferencia entre la profundidad actual z y el nivel de referencia z_0 . El exponencial de una matriz diagonal es otra matriz diagonal con componentes exponenciales, y así, para ondas P - SV :

$$Q_P(h, 0) = \text{diag}[e^{-i\omega q\alpha h}, e^{-i\omega q\beta h}, e^{i\omega q\alpha h}, e^{i\omega q\beta h}] \quad (\text{A.58})$$

y para ondas SH :

$$Q_H(h, 0) = \text{diag}[e^{-i\omega q\beta h}, e^{i\omega q\beta h}] \quad (\text{A.59})$$

Con la convención de que z se incrementa con la profundidad, estas exponenciales corresponden a los incrementos de fase que se esperarían para una propagación de ondas P y S viajando hacia arriba a través de una distancia vertical h . Para ondas planas descendentes a un ángulo j con respecto al eje z , entonces: $p = \text{sen } j/\beta$; $q_\beta = \text{cos } j/\beta$ y la diferencia de fase

que se esperaría al atravesar un intervalo h sería: $\exp(i\omega h \cos j/\beta) = \exp(i\omega q_\beta h)$, siendo su inversa la correspondiente a las ondas ascendentes.

De (A.57), el vector de ondas v en z es justamente una versión de fase cambiada de su valor en z_0 y pueden identificarse los elementos de v con ondas P y SV ascendentes o descendentes por medio de (A.58) y (A.59). Así, para ondas P - SV :

$$V_P = [P_U, S_U, P_D, S_D]^T \quad (\text{A.60})$$

donde P y S están asociadas a la propagación P y SV y los sufijos U , D representan ondas ascendentes y descendentes, respectivamente; para ondas SH , los elementos son:

$$U_H = [H_U, H_D]^T \quad (\text{A.61})$$

y puede resumirse el comportamiento del vector de onda v introduciendo las particiones correspondientes a ondas ascendentes y descendentes:

$$v = [v_U, v_D]^T \quad (\text{A.62})$$

Cuando la lentitud horizontal se vuelve mayor a las velocidades inversas α^{-1} , β^{-1} , los radicales correspondientes q_α , q_β se vuelven complejos y con la elección hecha para el radical en un medio perfectamente elástico con $p > \beta^{-1}$:

$$\exp[i\omega q_\beta z] = \exp[-\omega |q_\beta| z] \quad (\text{A.63})$$

Y así, las ondas descendentes v_D en el régimen de propagación ($p < \beta^{-1}$) mapea a ondas evanescentes que decaen con la profundidad. Esta propiedad se extiende a un medio disipativo pero no es fácilmente ilustrable. De un modo similar, las ondas ascendentes v_U mapean a ondas evanescentes que incrementan exponencialmente con la profundidad creciente z .

A partir de la solución de valor inicial para el vector de onda v (A.57), puede construirse la solución de valor inicial para el desplazamiento-esfuerzo b , en la forma:

$$b(z) = \mathbf{D} \exp[i\omega(z - z_0)\Lambda] \mathbf{D}^{-1} b(z_0) \quad (\text{A.64})$$

y así, de (A.47) puede reconocerse al propagador para el medio uniforme como:

$$\mathbf{P}(z, z_0) = \exp[\omega(z - z_0)\mathbf{A}] = \mathbf{D} \{ \exp[i\omega(z - z_0)\Lambda] \} \mathbf{D}^{-1} \quad (\text{A.65})$$

Así, ha sido posible simplificar el cálculo de la matriz exponencial por el uso de una transformación de similaridad dada por \mathbf{D} . A partir de la representación de la matriz propagadora \mathbf{B} (A.46) puede reconocerse una matriz fundamental para el medio uniforme:

$$\mathbf{B}(z) = \mathbf{D} \exp[i\omega(z - z_{ref})\Lambda] \quad (\text{A.66})$$

donde z_{ref} es el nivel de referencia para la fase de los elementos de onda P y S . La matriz de eigenvectores \mathbf{D} puede ahora ser visto como esta matriz fundamental evaluada al nivel de referencia z_{ref} , y así, sus columnas pueden ser identificadas como vectores de *desplazamiento-esfuerzo elementales*, correspondientes a los diferentes tipos de onda. Para ondas P - SV :

$$\mathbf{D}_p = [\varepsilon_\alpha b_{U,D}^p, \varepsilon_\beta b_{U,D}^s; \varepsilon_\alpha b_{D,D}^p, \varepsilon_\beta b_{D,D}^s] \quad (\text{A.67})$$

donde:

$$b_{U,D}^p = [\mp i q_\alpha, p, \rho(2\beta^2 p^2 - 1), \mp 2i\rho\beta^2 p q_\alpha]^T$$

$$b_{U,D}^s = [p, \mp i q_\beta, \mp 2i\rho\beta^2 p q_\beta, \rho(2\beta^2 p^2 - 1)]^T$$

(A.68)

toman el signo superior para las ondas ascendentes, y el inferior para las descendentes. Para ondas SH :

$$\mathbf{D}_H = [\varepsilon_H b_{U,D}^H; \varepsilon_H b_{D,D}^H] \quad (\text{A.69})$$

con:

$$b_{U,D}^H = [\beta^{-1}, \mp i\rho\beta q_\beta]^T \quad (\text{A.70})$$

Se ha elegido el escalamiento para dar una dimensionalidad comparable a los elementos correspondientes a b^p , b^s , b^H ; la lentitud de onda SH β^{-1} aparece en (A.70) en un papel similar a la lentitud horizontal en (A.68). Conviene normalizar estos vectores b , de modo que en un medio perfectamente elástico, cada uno de ellos lleve el mismo flujo de energía en la dirección z para cada onda propagante. El lector podrá revisar la evaluación del flujo de energía para ondas P , SV y SH en el texto de Kennett (ver referencias).

Se sabe ya que \mathbf{D} es un caso especial de matriz fundamental, y el papel que juega es el de una transformación que escrita en la forma particionada queda:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} M_U & M_D \\ N_U & N_D \end{bmatrix} \quad (\text{A.71})$$

La partición M_U transforma los elementos ascendentes v_U del vector de onda en desplazamientos, y M_D genera desplazamientos a partir de v_D . Las particiones N_U , N_D generan esfuerzos a partir de v_U y v_D . Tal estructura ocurrirá en todos los casos, incluyendo la anisotropía total. Para ondas P y SV , se tiene la forma (A.68):

$$M_{U,D} = \begin{bmatrix} \mp i q_\alpha \varepsilon_\alpha & p \varepsilon_\beta \\ p \varepsilon_\alpha & \mp i q_\beta \varepsilon_\beta \end{bmatrix}$$

$$N_{U,D} = \begin{bmatrix} \rho(2\beta^2 p^2 - 1) \varepsilon_\alpha & \mp 2i \rho \beta^2 p q_\beta \varepsilon_\beta \\ \mp 2i \rho \beta^2 p q_\alpha \varepsilon_\alpha & \rho(2\beta^2 p^2 - 1) \varepsilon_\beta \end{bmatrix}$$

(A.72)

y para ondas SH :

$$M_{U,D} = \beta^{-1} \varepsilon_\beta; \quad N_{U,D} = \mp i \rho \beta q_\beta \varepsilon_\beta$$

(A.73)

y a partir de estas formas particionales, se pueden construir las invariantes de propagación $\langle M_U, M_D \rangle$ donde, para cada caso:

$$\langle M_U, M_D \rangle = iI$$

(A.74)

Lo que implica que se tiene una forma inversa simple cerrada para \mathbf{D} , vía la representación de (A.45):

$$\mathbf{D}^{-1} = i \begin{bmatrix} -N_D^T & M_D^T \\ N_U^T & -M_U^T \end{bmatrix}$$

(A.75)

Así, a partir de estas expresiones para la matriz de eigenvectores \mathbf{D} y su inversa, puede usarse (A.65) para construir expresiones para el propagador de desplazamiento-esfuerzo en el medio uniforme, esto es, para ondas P - SV :

$$\mathbf{P}_P(h, 0) = \mathbf{D}_P \text{diag} \left[e^{-i\omega q_\alpha h}, e^{-i\omega q_\beta h}, e^{i\omega q_\alpha h}, e^{i\omega q_\beta h} \right] \mathbf{D}_P^{-1}$$

(A.76)

y las particiones P_{WW} , P_{WT} , P_{TW} , P_{TT} del propagador son:

$$P_{WW} = \begin{bmatrix} 2\beta^2 \rho^2 C_\beta - \Gamma C_\alpha & -p(2\beta^2 q_\alpha^2 S_\alpha) \\ -p(\Gamma S_\alpha + 2\beta^2 q\beta^2 S_\beta) & 2\beta^2 \rho^2 C_\alpha - \Gamma C_\beta \end{bmatrix}$$

$$P_{WT} = \rho^{-1} \begin{bmatrix} q_\alpha^2 S_\alpha + p^2 S_\beta & p(C_\alpha - C_\beta) \\ p(C_\beta - C_\alpha) & pS_\alpha + q_\beta^2 S_\beta \end{bmatrix}$$

$$P_{TW} = -\rho \begin{bmatrix} 4\beta^4 p^2 q_\beta^2 S_\beta + \Gamma^2 S_\alpha & p\beta^2 \Gamma(C_\beta - C_\alpha) \\ p\beta^2 \Gamma(C_\alpha - C_\beta) & 4\beta^4 p^2 q_\alpha^2 S_\alpha + \Gamma^2 S_\beta \end{bmatrix}$$

$$P_{TT} = \begin{bmatrix} 2\beta^2 \rho^2 C_\beta - \Gamma C_\alpha & p(2\beta^2 q_\beta^2 S_\beta + \Gamma S_\alpha) \\ p(\Gamma S_\beta + 2\beta^2 q_\alpha^2 S_\alpha) & 2\beta^2 \rho^2 C_\alpha - \Gamma C_\beta \end{bmatrix}$$

donde: $C_\alpha = \cos(\omega q_\alpha h)$, $C_\beta = \cos(\omega q_\beta h)$, $S_\alpha = q_\alpha^{-1} \text{sen}(\omega q_\alpha h)$

$$S_\beta = q_\beta^{-1} \text{sen}(\omega q_\beta h); \quad \Gamma = 2\beta^2 \rho^2 - 1$$

y el propagador para ondas SH es:

$$\mathbf{P}_H(h, 0) = \begin{bmatrix} C_\beta & (\rho\beta^2)^{-1} S_\beta \\ -\rho\beta^2 q_\beta^2 S_\beta & C_\beta \end{bmatrix} \quad (\text{A.77})$$

que puede ser construída fácilmente a partir de la definición y propiedades de las matrices propagadoras generales. Estos propagadores para estrato uniforme, son idénticos a los obtenidos por el método de *Haskell*, aunque con otra notación, pero han sido obtenidos por un camino diferente, pues se ha diagonalizado \mathbf{A} por medio de la matriz de eigenvectores \mathbf{D} , según Dunkin (1965). Otros autores como Hudson (1969a) proponen otro tipo de transformaciones, aunque el resultado es el mismo. La construcción mostrada aquí del propagador de desplazamiento-esfuerzo vía la ecuación (A.65), se ha separado el campo de ondas en sus partes por medio de \mathbf{D}^{-1} , para luego añadirle incrementos en la fase para separar sus correspondientes partes ascendentes y descendentes en las ondas P y S para un intervalo de profundidad h , para finalmente reconstruir los desplazamientos y esfuerzos por medio de la matriz \mathbf{D} . Por medio de las expresiones (A.71) y (A.75) para \mathbf{D} y su inversa, puede entonces representarse el propagador uniforme como una suma de contribuciones ascendentes y descendentes:

$$\mathbf{P}(h,0) = i \begin{bmatrix} -M_U E_U N_D^T & M_U E_U M_D^T \\ -N_U E_U N_D^T & N_U E_U M_D^T \end{bmatrix} +$$

$$+ i \begin{bmatrix} M_D E_D N_U^T & -M_D E_D M_U^T \\ N_D E_D N_U^T & -N_D E_D M_U^T \end{bmatrix}$$

(A.78)

donde la matriz diagonal E_D es la fase que arriba para ondas descendentes. Así, por ejemplo para ondas P - SV , se tendría:

$$E_D = \text{diag} \left[e^{i\omega q_a h}, e^{i\omega q_p h} \right]$$

y:

$$E_U = E_D^{-1} \quad (\text{A.79})$$

Apéndice B.- Representación Integral Usando Fuentes en la Frontera.

Considérese una curva S , finita o infinita. Si un material elástico ocupa el espacio adyacente, entonces un campo de desplazamientos originado en S , se puede escribir, si se desprecian las fuerzas de cuerpo, en términos de una integral de frontera de capa simple como

$$u_i(\mathbf{x}) = \int_S \phi_j(\xi) G_{ij}(\mathbf{x}, \xi) ds \quad (\text{B.1})$$

donde $u_i(\mathbf{x}) = i$ -ésimo componente del desplazamiento en \mathbf{x} , $G_{ij}(\mathbf{x}, \xi) =$ Función de Green, ésto es, el desplazamiento en la dirección i en el punto \mathbf{x} debido a la aplicación de una fuerza unitaria en la dirección j en el punto ξ y $\phi_j(\xi) =$ densidad de fuerza en la dirección j . Por lo tanto, $\phi_j(\xi) ds$ es una distribución de fuerzas en la frontera. Los subíndices en la diferencial indican la variable espacial sobre la cual se lleva a cabo la integral. Esta integral de capa simple que puede ser obtenida a partir de la identidad de Somigliana (Sánchez-Sesma y Campillo, 1991), ha sido estudiada por Kupradze (1963) desde la perspectiva de la teoría del potencial. Él demostró que el campo de desplazamientos es continuo a lo largo de S si existe continuidad en $\phi_j(\xi)$ a lo largo de S .

La representación integral de la Ec. B.1, permite el cálculo de los esfuerzos y las tracciones por aplicación directa de la ley de Hooke, con excepción de las singularidades en la frontera, esto es, cuando $\mathbf{x} = \xi$ sobre la frontera. Con base en consideraciones de equilibrio alrededor de una vecindad de la frontera es posible escribir para \mathbf{x} sobre S :

$$t_i(\mathbf{x}) = c\phi_j(\mathbf{x}) + \int_S \phi_j(\xi) T_{ij}(\mathbf{x}, \xi) ds_\xi \quad (\text{B.2})$$

donde $t_i = i$ -ésimo componente de la tracción en la frontera, $c = 0.5$ si \mathbf{x} se aproxima a S por dentro de la región y $c = -0.5$ si \mathbf{x} se aproxima a S desde afuera de la región, $T_{ij}(\mathbf{x}, \xi) =$ función de tracción de Green, es decir, la tracción en la dirección i en el punto \mathbf{x} sobre la frontera con normal $n(\mathbf{x})$ (con la suposición de que el vector apunta hacia afuera si \mathbf{x} está en S) debido a la aplicación de una fuerza unitaria en la dirección j , en el punto ξ . El primer término del lado derecho de la ecuación se anula si \mathbf{x} no está en S .

Las funciones de Green para desplazamientos y tracciones del problema bidimensional se expresan mediante las funciones especiales de Hankel. Las expresiones detalladas se dan en el trabajo de Sánchez-Sesma y Campillo (1991). Para problemas tridimensionales, el lector interesado podrá consultar las expresiones correspondientes en los trabajos de Pedersen *et al.* (1994) y Sánchez-Sesma y Luzón (1994).

Difracción de Ondas Elásticas por un Estrato Irregular.

Considérese una inclusión elástica R , en este caso un estrato irregular que en sus extremos es uniforme, que yace sobre un semiespacio E , también elástico, como lo muestra la fig. B.1. Se supone que esta estructura geológica está sometida a la incidencia de ondas planas. La superficie libre es llamada $\partial_1 R$. La interfaz $\partial_2 E = \partial_2 R$ es la frontera común entre ambos medios.

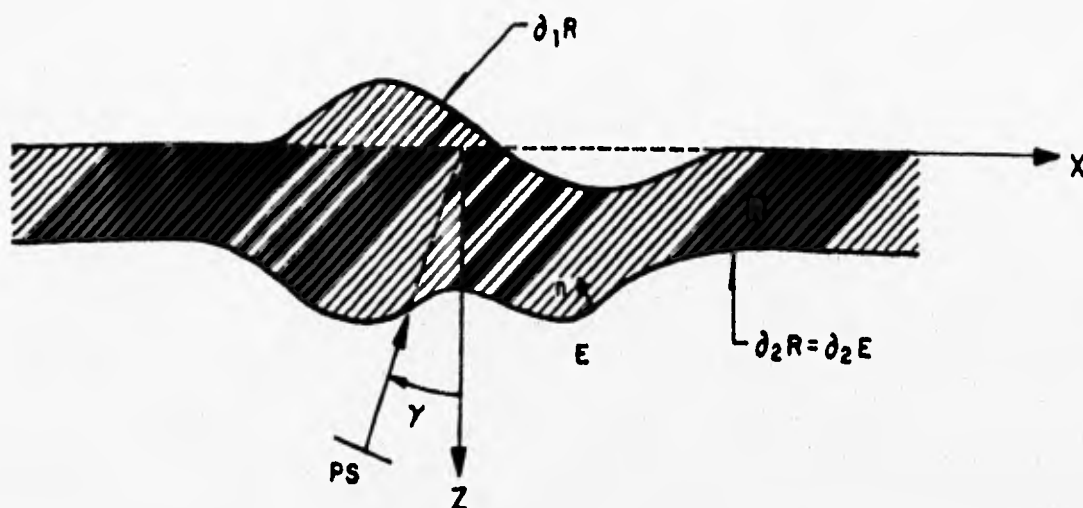


fig. B.1.- Estrato irregular R sobre un semiespacio elástico E . la excitación está dada por ondas planas P y S con ángulos de incidencia γ . La frontera libre se denota con $\partial_1 R$ y la interfaz $\partial_2 R = \partial_2 E$. En esas fronteras se define el vector normal n apuntando hacia el interior de la región R .

El movimiento de la superficie en esta configuración irregular proviene de interferencias constructivas y destructivas de los campos de onda incidentes, reflejados, difractados y refractados.

El campo total en el semiespacio es la superposición del campo difractado con la solución de campo libre, *i.e.*:

$$u_i^E = u_i^{(0)E} + u_i^{(d)} \quad (B.3)$$

siendo $u_i^{(0)E}$ = campo libre en la región E , es decir, la solución en el semiespacio bajo el medio estratificado uniforme, en ausencia de irregularidad.

Este medio estratificado será también llamado modelo de referencia. Esta parte de la solución se calcula con el método matricial de Thomson-Haskell, ya abordado en el capítulo III (Haskell, 1953; Aki y Richards, 1980). Si se requiere calcular en un punto del dominio estratificado que corresponde al modelo de referencia, el método es directo. Requerirá de una ligera modificación, que se denominará *extensión analítica* si se desea evaluar el campo libre en una parte del dominio fuera del modelo de referencia. En este trabajo se parte del vector

desplazamiento-esfuerzo en la cima de cada estrato para evaluar el campo de interés. El campo difractado puede escribirse, con los superíndices apropiados indicando la región de validez, como:

$$u_i^{(d)}(\mathbf{x}) = \int_{\partial E} \phi_j^E(\xi) G_{ij}^E(\mathbf{x}, \xi) ds_\xi \quad (\text{B.4})$$

En el estrato irregular R, para el campo de desplazamientos se tiene que:

$$u_i^R = u_i^{(0)R} + u_i^{(r)} \quad (\text{B.5})$$

Donde $u_i^{(0)R}$ = campo libre en la región R, con o sin extensión analítica. De manera análoga, el campo refractado en el estrato irregular queda:

$$u_i^{(r)}(\mathbf{x}) = \int_{\partial R} \phi_j^R(\xi) G_{ij}^R(\mathbf{x}, \xi) ds_\xi \quad (\text{B.6})$$

donde $\partial R = \partial_1 R + \partial_2 R$. La condición de tracción nula en la superficie conduce a:

$$t_i^{(0)R} + t_i^{(r)} = 0 \quad \text{en } \partial_1 R \quad (\text{B.7})$$

Utilizando la Ec. B.2 esta condición pueden expresarse mediante:

$$-0.5 \phi_i^R(\mathbf{x}) + \int_{\partial R} \phi_j^R(\xi) T_{ij}^R(\mathbf{x}, \xi) ds = -t_i^{(0)R}(\mathbf{x}) \quad (\text{B.8})$$

En la interfaz $\partial_2 E = \partial_2 R$, la continuidad de desplazamientos y tracciones implica:

$$u_i^{(0)E} + u_i^{(d)} = u_i^{(0)R} + u_i^{(r)} \quad (\text{B.9})$$

$$t_i^{(0)E} + t_i^{(d)} = t_i^{(0)R} + t_i^{(r)} \quad (\text{B.10})$$

y estas condiciones pueden expresarse como:

$$\int_{\partial E} \phi_j^E(\xi) G_{ij}^E(\mathbf{x}, \xi) ds_\xi - \int_{\partial R} \phi_j^R(\xi) G_{ij}^R(\mathbf{x}, \xi) ds_\xi = -u_i^{(0)E} + u_i^{(0)R} \quad (\text{B.11})$$

$$0.5[\phi_i^E(\mathbf{x}) + \phi_i^R] + \int_{\partial E} \phi_j^E(\xi) T_{ij}^E(\mathbf{x}, \xi) ds_\xi - \int_{\partial R} \phi_j^R(\xi) T_{ij}^R(\mathbf{x}, \xi) ds_\xi = -t_i^{(0)E} + t_i^{(0)R}$$

(B.12)

Las Ecs. B.8, B.11 y B.12 constituyen un sistema de ecuaciones integrales de fuentes en las fronteras. Estas expresiones son discretizadas a lo largo de la frontera ∂E , que es la frontera común entre ambas regiones y sobre ∂R , de acuerdo a la definición de cada integral.

Con el objeto de lograr una mejor comprensión de la técnica, a continuación se presentan las versiones discretizadas de las Ecs. B.1 y B.2:

$$u_i(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^N \phi_j(\xi_l) g_{ij}(\mathbf{x}, \xi_l) \quad (\text{B.13})$$

donde:

$$g_{ij}(\mathbf{x}, \xi_l) = \int_{\xi_l - \Delta s/2}^{\xi_l + \Delta s/2} G_{ij}(\mathbf{x}, \xi) ds_\xi \quad (\text{B.14})$$

y:

$$t_i(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^N \phi_j(\xi) t_{ij}(\mathbf{x}, \xi_l) \quad (\text{B.15})$$

donde:

$$t_{ij}(\mathbf{x}, \xi_l) = \int_{\xi_l - \Delta s/2}^{\xi_l + \Delta s/2} [c\delta_{ij}\delta(\mathbf{x} - \xi_l) + T_{ij}(\mathbf{x}, \xi)] ds_\xi \quad (\text{B.16})$$

Las integrales en la Ec. B.14 son calculadas numéricamente con integración gaussiana, excepto en el caso en que \mathbf{x} está en la vecindad de ξ_l para la cual se obtuvieron expresiones analíticas a partir de series ascendentes de funciones de Bessel (Abramowitz y Stegun, 1972).

Las integrales en la Ec. B.16 también fueron calculadas numéricamente usando integración gaussiana, excepto cuando $\mathbf{x}_n = \xi_l$. En este caso tenemos que:

$$t_{ij}(\mathbf{x}_n, \xi_n) = 0.5\delta_{ij} \quad (\text{B.17})$$

Las Ecs. B.8, B.11 y B.12 una vez discretizadas forman un sistema de ecuaciones algebraicas lineales que al ser resuelto permite obtener los valores de $\phi_j(\xi_l)$. Los campos difractado y refractado son calculados utilizando una discretización apropiada de las Ecs. B.4 y B.6.

Apéndice C.- Breve Semblanza de Norman Abraham Haskell.

Norman Abraham Haskell (fig. C.1) nace el 30 de junio de 1905 en Alton, Illinois; su familia es de profundas raíces inglesas y se cree que su apellido es el resultado de la evolución del original Herschell, que luego fué Heiskell y finalmente Haskell. Su árbol genealógico se remonta al S. XVII. Después de una infancia y adolescencia caracterizadas por numerosos viajes a Europa, ingresa a Harvard en 1923, donde es becado y se gradúa con honores en Ingeniería de Minas.

En 1927, viaja a Europa y estudia en Alemania. En 1928 es miembro de la Sociedad Americana de Física y de la S.E.G.

En 1935 recibe el grado de maestro en Geología con honores de Harvard y publica su primer artículo sobre la viscosidad de la astenósfera. Ingresa al M.I.T.

En 1936 obtiene el grado de Doctor en Filosofía de la Ciencia con honores de Harvard; posdoctorado ese mismo año. Ese mismo año inicia su desarrollo profesional en la Exploración Sísmica Petrolera en la Western Geophysical Company.

De 1941 a 1946 ingresa al comité de Investigación de la Defensa Nacional y se dedica a la balística antisubmarina y a la localización magnetométrica aérea de submarinos, así como a la teoría del desplazamiento de torpedos, bombas y cohetes.

De 1946 a 1947 es jefe geofísico de los laboratorios de la compañía U.S. Smelting Company de Boston, donde desarrolla técnicas sísmicas para la prospección minera.

En 1948 se une a los Air Force Cambridge Research Laboratories como físico investigador.

En 1949 desarrolla un método aproximado para calcular la refracción de ondas de choque en la atmósfera y los efectos en la altura óptima de estallido de bombas atómicas. Colaboró con la corrección de trabajos relacionados desarrollados en Los Alamos.

1950.- Investigador y profesor asociado al M.I.T, donde desarrolla el programa académico de Geofísica.

1953.- Corrige, extiende y formaliza el método de la matriz propagadora de Thompson para obtener relaciones de dispersión en medios estratificados. El algoritmo desarrollado por él (tema central de esta tesis) se convertiría en una herramienta esencial en estudios de inversión de la Corteza Terrestre en las décadas siguientes.

1962.- Empleo de técnicas sísmicas para la identificación de explosiones nucleares en el subsuelo. Editor asociado del *Journal of Geophysical Research*.

1967.- Condecoración por Servicio Civil Excepcional de parte de la Fuerza Aérea Norteamericana.

1968.- Abre sus puertas el *Haskell Geophysical Laboratory* en la base Hanscom de la Fuerza Aérea en Massachussetts.

1970.- Muere el 11 de Abril en Cape Cod, Massachussetts.



fig. C.1.- Norman Abraham Haskell en septiembre de 1968. Tomada de Ben-Menahem, Ari (ed.), 1990.

