24
2Ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"UN PROBLEMA CON FRONTERA LIBRE PARA LAS ECUACIONES DE NAVIER - STOKES"

T E S I S

Que para obtener el Título de:

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a:

RAMON GABRIEL PLAZA VILLEGAS

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Jorge Andrés Ize Lamache

México, D.F. 1996

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNOMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"UN PROBLEMA CON FRONTERA LIBRE PARA LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES"

realizado por Ramón Gabriel Plaza Villegas

con número de cuenta 8733457-9 **, pasante de la carrera de** Matemático

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario	Dr. Jorge Andrés Ize Lamache	
Propietario	Dr. Antonmaría Minzoni Alessio	
Propietario	Dr. Jorge Gilberto Flores Gallegos	J. Gilberto Flores
Suplente	Dra. María del Carmen Jorge y Jorge	
Suplente	Dr. Pablo Padilla Longoria	Pablo Padilla L.

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

Un problema con frontera libre para las ecuaciones de Navier-Stokes

Ramón Gabriel Plaza Villegas

A mis padres y a mi hermano.

Agradecimientos

Me considero un hombre afortunado. Y por tanto resulta casi imposible agradecer a todas aquellas personas que han contribuido a hacer de este momento algo extraordinario.

Doy gracias a mis padres, a quienes debo no sólo la vida, sino la manera de vivirla dignamente. Esta tesis está dedicada a ellos, con amor y agradecimiento infinitos.

A mi hermano, por su franca y generosa amistad; por que sin él, muchos momentos habrían sido vividos a medias.

Celebro el haber conocido a mi gran maestro, el Dr. Jorge Ize. Ser su alumno es, sin duda, mi mayor privilegio: su presencia es profunda e insoslayable. Es enorme mi admiración por su gran compromiso con la investigación y con la docencia. Su dirección, apoyo y confianza son elementos sin los cuales este trabajo no hubiera podido aparecer. Gracias.

A los Dres. Antonmaría Minzoni y Gilberto Flores les agradezco sus generosos comentarios y la espléndida oportunidad que me brindaron, al compartir conmigo su experiencia y conocimientos durante el desarrollo de esta tesis. A mi maestro Ángel Carrillo, cuya influencia fue decisiva y estimulante, y a la Dra. Alicia Oliver, por su incondicional amistad. A todos mis maestros, quienes de alguna forma tocaron mi vida y la cambiaron para siempre. A todos ellos, gracias.

La deuda es enorme; el compromiso, un privilegio.

Ramón G. Plaza Villegas

Agosto 1996.

Contenido

Introducción

Desde hace más de doscientos años, cuando Daniel Bernoulli (1700-1782) publicara en 1738 su obra "Hidrodinámica", la teoría matemática de la mecánica de fluídos ha sido campo fértil de investigación y sigue dando origen a vigorosos campos de estudio en física y en matemáticas.

En este contexto y con espíritu menos ambicioso, el presente trabajo estudia un problema que involucra a las ecuaciones fundamentales que describen el movimiento de fluidos viscosos, conocidas como las ecuaciones de Navier-Stokes. El problema a tratar, planteado originalmente por Manfred Kötter (cf. [Kötter, 1988]), basándose a su vez en el trabajo de Solonnikov y Scadilov sobre flujos con frontera libre, consiste en encontrar soluciones estacionarias a las ecuaciones de Navier-Stokes en tres dimensiones en un dominio acotado con frontera libre y satisfaciendo condiciones de frontera específicas. Sin embargo, el trabajo de Kötter adolece no sólo de la falta de claridad en la exposición, sino que incurre en errores de cálculo y conceptuales tan importantes como la comprensión incompleta del problema.

Físicamente el problema se plantea de la siguiente manera: Considérese un fluido viscoso incompresible, que fluye de manera estacionaria sobre una superficie plana (que podemos identificar con el plano xy) y cuya frontera con el exterior es una superficie libre cuya forma depende del flujo mismo. Supóngase también que el fluido está rodeado por otro medio continuo, de manera que exista un gradiente de presión externo; pensemos, por ejemplo, en agua que fluye sobre una superficie plana y que el gradiente de presión se origina por el viento que sopla sobre la superficie libre. Nuestra intuición nos hace esperar que se formen olas sobre la superficie del agua si el viento sopla con suficiente fuerza. ¿Podemos a través de la teoría predecir el tipo de soluciones que nuestra experiencia anticipa? ¿Qué clase de soluciones de las ecuaciones concuerdan con la realidad?

A grandes rasgos el problema es determinar la existencia de ondas de forma permanente que sean para amplitud pequeña, perturbaciones de un flujo cortante. ¿Qué entendemos por flujo cortante? Cuando suponemos que la frontera libre es parte de un plano horizontal, existe una solución trivial a las ecuaciones de movimiento, que corresponde a un flujo con perfil parabólico en dirección z, y que se conoce en la literatura como flujo cortante de Poiseuille. Por lo tanto queremos estudiar soluciones que sean perturbaciones de este flujo básico.

Matemáticamente el problema se expresa, por un lado, a través de las ecuaciones fundamentales de movimiento

$$-\nu\,\Delta u + \operatorname{grad} p + (u\cdot\operatorname{grad})u = f_G \tag{0.1}$$

y la condición de incompresibilidad del fluido

$$\operatorname{div} u = 0, \tag{0.2}$$

y por el otro, a través de las condiciones de frontera. Aquí u representa la distribución de velocidades en sentido de Euler, p la presión hidrodinámica, f_G la densidad de la fuerza de gravedad y ν el coeficiente de viscosidad. Sumaremos a las hipótesis anteriores la condición de periodicidad del flujo en x y en y, la cual nos permitirá acotar el dominio en el espacio.

Las condiciones de frontera para el flujo son

$$u_{\Gamma_b} = -c \tag{0.3}$$

$$u\cdot n|_\Gamma = 0 \tag{0.4}$$

$$\tau\cdot T(u)n|_\Gamma = 0 \tag{0.5}$$

$$n\cdot T(u)n|_\Gamma = -p_a + 2\kappa H, \tag{0.6}$$

y las condiciones de periodicidad están dadas por

$$\left.\begin{array}{c} \partial^\alpha u|_{x=0} = \partial^\alpha u|_{x=x_0} \\ \partial^\alpha u|_{y=0} = \partial^\alpha u|_{y=1} \end{array}\right\} \;\forall|\alpha|\leq 1. \tag{0.7}$$

Aquí $\Gamma_b = \{(x,y)\;:\; x\in[0,x_0],\; y\in[0,1]\}$ es la base de nuestro dominio acotado por la periodicidad en x y en y, Γ es la superficie libre, n y τ son los vectores normal unitario y tangente a Γ respectivamente, T es el vector de esfuerzos, H es la curvatura media de la superficie y p_a es la presión exterior. Adicionalmente los parámetros c y κ representan la velocidad constante del sistema de referencia, el primero, y el coeficiente de tensión superficial, el segundo. Una descripción más detallada de esto se presenta en la segunda sección del segundo capítulo.

Un esquema del flujo considerado se presenta en la siguiente figura.

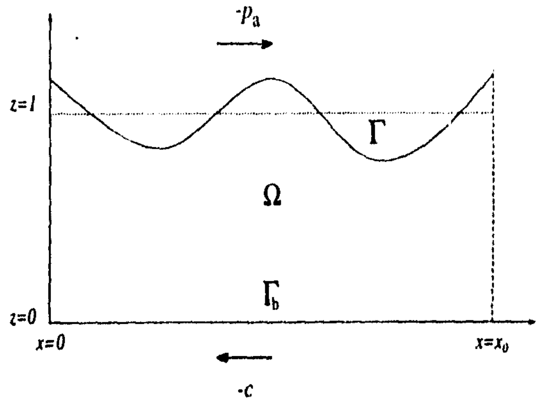

Figura 0.1 : Flujo en tres dimensiones sobre una superficie plana y con frontera libre Γ.

Llamemos Ω al dominio en $\mathbb{R}^3$, acotado por $x = 0$, $x = x_0$, $y = 0$, $= 1$ y en z por Γ_b y Γ.

La estrategia para abordar este problema consiste en estudiar, en primer lugar, la parte principal de las ecuaciones (0.1), y la ecuación (0.2) :

$$\left.\begin{array}{c} -\nu\,\Delta u + \operatorname{grad} p = f \\ \operatorname{div} u = 0 \end{array}\right\} \quad \text{en } \Omega, \tag{0.8}$$

más las condiciones de frontera (0.3)-(0.5), junto con las condiciones de periodicidad (0.7), conocido como *problema de Stokes.*

Si se considera que el dominio es fijo (esto es muy importante y es la razón por la que se omite la condición (0.6)) y que f está en el espacio $L^2(\Omega)$, entonces existe una función única u, solución al problema de Stokes en sentido fuerte, es decir, con tantas derivadas distribucionales como el orden del operador (en este caso $u \in (H^2(\Omega))^3$). De esta forma podemos invertir el operador de Stokes y formular la solución del problema completo como un punto fijo de cierto operador. Esta aproximación constituye la parte medular de nuestro análisis y será detallado con más cuidado.

Como mencionamos si la frontera libre es parte del plano $\{z = 1\}$, y que identificamos con el dominio $\Omega_0 = \{x \in [0, x_0],\ y \in [0,1],\ z \in [0,1]\}$, existe una solución trivial (U_0, P_0) a las ecuaciones (0.1)-(0.7), correspondiente a un flujo básico. Fundamentalmente nos concentraremos en determinar si existen soluciones cuya frontera libre sea una perturbación de la frontera plana $\Gamma_0 = \{z = 1\}$. Así supondremos que la frontera Γ está definida por una función $\xi(x,y)$, de norma pequeña, de forma que

$$\Gamma = \{z = 1 + \xi(x,y)\ :\ (x,y) \in \Gamma_b\}.$$

Surge entonces la pregunta natural ¿Existen soluciones de la forma $(u + U_0, p + P_0)$ en el dominio Ω? Dado que (U_0, P_0) está definida en el dominio fijo Ω_0, no queda claro lo que entendemos por (U_0, P_0) en Ω. La solución depende del dominio, así que no es evidente como vamos a perturbar. Es importante tener en cuenta que nuestro objetivo es encontrar u, p y el dominio Ω definido por la superficie libre ξ.

Si suponemos que la función ξ es conocida, surge una transformación natural del dominio Ω a Ω_0, dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{\Phi} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(1 + \xi(x,y)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}, \tag{0.9}$$

y su respectiva inversa

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} \xrightarrow{\Psi = \Phi^{-1}} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \frac{\bar{z}}{(1+\xi(\bar{x},\bar{y}))} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{0.10}$$

Por supuesto restringimos $\xi > -1$. Es importante hacer notar que el flujo básico corresponde al caso $\xi = 0$. Con esta transformación Φ podemos definir un operador π para "llevar" el campo de velocidades u en Ω_0 a Ω, definido como

$$\bar{u}(\bar{x}) = (\pi(\xi)u)(\bar{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \left.\frac{J(\Phi)}{1+\xi}\right|_{\Psi(\bar{x})} u(\Psi(\bar{x})) \tag{0.11}$$

Este operador es de fundamental importancia ya que preserva la propiedad de que $\operatorname{div} u = 0$, en Ω, lo cual es muy conveniente para la formulación débil, como se podrá percatar el lector más adelante, y por que la transformación de las ecuaciones depende de π.

Ahora bien, en este punto se presentan dos alternativas :

1. Transformar las ecuaciones, por medio de π^{-1}, al dominio fijo Ω_0 y trabajar con un nuevo sistema de ecuaciones para (U, P, ξ).

2. Transformar a Ω la solución básica :

$$(U_0, P_0) \xrightarrow{\pi(\xi)} (u_0, p_0),$$

y establecer las ecuaciones para la perturbación (u, p, ξ) que surgen al considerar soluciones de la forma $(u + u_0, p + p_0)$ en Ω.

La primera alternativa tiene la ventaja de trabajar sobre un dominio conocido fijo. Sin embargo, al transformar el problema de Stokes a Ω_0, obtenemos un sistema de ecuaciones de la forma :

$$\begin{pmatrix} \operatorname{div}\left(G^{-1}\nabla\left(\frac{u_1}{1+\xi}\right)\right) \\ \operatorname{div}\left(G^{-1}\nabla\left(\frac{u_2}{1+\xi}\right)\right) \\ \operatorname{div}\left(G^{-1}\nabla\left(u_3 + \frac{z}{1+\xi}\left(\xi_x u_1 + \xi_y u_2\right)\right)\right) \end{pmatrix} + W(u) + J(\Phi)^{-1}\nabla p = f_G, \qquad (0.12)$$

donde G^{-1} es el inverso del tensor métrico asociado a la transformación (véase 2.23) y W es de primer orden en u. Se trata claramente de un sistema de ecuaciones con coeficientes variables, difícil de manejar en general. Obviamente las condiciones de frontera se transforman también en ecuaciones con coeficientes variables, por lo tanto el probar unicidad, existencia, así como hacer estimaciones (véase por ejemplo, la prueba de la desigualdad de Korn, capítulo 4, pág. 4.11) y en especial demostrar resultados de regularidad de la solución, se convierten en tareas por demás incómodas, al tener que lidiar con los coeficientes variables y expresiones muy complicadas para las condiciones de frontera, aunque el dominio sea fijo. También presenta el inconveniente de que, a pesar de que la linealización del problema de Stokes es la misma en Ω_0 que en Ω, nos tenemos que restringir a perturbaciones suficientemente pequeñas para que el término "dominante" siga siendo el laplaciano (y se conserve la elipticidad del sistema, etc.).

En virtud de los comentarios anteriores se optó por seguir el segundo camino, en la inteligencia de que trabajamos en un dominio desconocido (o, bien, definido por una función ξ desconocida de antemano), y de que algunas estimaciones son un poco más complicadas. No obstante, el precio que se paga no es demasiado alto, en la medida que tenemos la ventaja de trabajar con las ecuaciones originales, que en la prueba de existencia y unicidad no requerimos por parte de la ξ más que ciertas condiciones de regularidad sin importar su norma (excepto por la restricción $1 + \xi > 0$) y que, por otro lado, es menos complicado probar la complementariedad de las condiciones de frontera para los resultados de regularidad de la solución fuerte.

De esta manera se demuestra que el problema de Stokes en Ω tiene una solución débil (o variacional) única en un subespacio de $(H^1(\Omega))^3$. También se prueba que esta solución es una solución fuerte (es decir, que está en $(H^2(\Omega))^3$) y se aplica la teoría general de regularidad para sistemas elípticos de S. Agmon, A. Douglis y L. Nirenberg (véase [Agm/Dou/Nir]), con el fin de obtener resultados de regularidad de la solución en espacios $H^{m,q}(\Omega)$ y $C^{m,\alpha}(\Omega)$ si los datos son suficientemente regulares.

Ahora bien, el importantísimo resultado de existencia de la solución fuerte nos permite invertir el operador de Stokes y formular nuevamente el problema completo como un problema de punto fijo. Las ecuaciones para la perturbación en Ω tienen la siguiente forma :

$$\left.\begin{array}{c} -\frac{1}{\lambda}\Delta u + \operatorname{grad} p + Lu + Bu = f \\ \operatorname{div} u = 0 \end{array}\right\} \quad \text{en } \Omega, \tag{0.13}$$

es decir, tenemos el operador de Stokes más un término lineal Lu y otro no lineal Bu. El parámetro λ es el número de Reynolds, que aparece tras haber escrito las ecuaciones en forma adimensional.

Para $\bar{u}$ dado (definido en Ω_0 por $u = \pi\,\bar{u}$), y considerando que la frontera está definida por una función $\eta \in C^{3,\alpha}(\Gamma_b)$, por el estudio del problema de Stokes se sabe que existe una solución única al problema

$$-\frac{1}{\lambda}\Delta v + \operatorname{grad} p = -Lu - Bu + f \stackrel{\text{def}}{=} g(\bar{u}, \eta, \lambda).$$

Llamamos a esta solución

$$v \stackrel{\text{def}}{=} Tg$$

y definimos $\bar{v} \stackrel{\text{def}}{=} \pi^{-1} Tg$ en Ω_0.

Ahora bien, la condición normal de frontera (0.6) para el esfuerzo superficial provee de una ecuación para la frontera ξ que tiene la siguiente forma:

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla\xi}{\sqrt{1+|\nabla\xi|^2}}\right) + \frac{\lambda}{\sigma}\beta(\xi, \lambda, \mu_i) = \frac{\lambda}{\sigma}(n \cdot T(u)n), \tag{0.14}$$

donde λ, σ, μ_i son parámetros adimensionales (que dependen de a, ν, c). Esta condición se puede escribir como

$$-\Delta\xi = F(\xi) - \frac{\lambda}{\sigma}\beta\frac{\lambda}{\sigma}(n \cdot T(u)n) \stackrel{\text{def}}{=} h(\bar{u}, \xi, \lambda). \tag{0.15}$$

El problema $-\Delta\xi = h(\bar{u}, \eta, \lambda)$ tiene una solución única ξ (para η fijo) suficientemente regular (si $h \in C^{k-2,\alpha}$ entonces $\xi \in C^{k,\alpha}$), y podemos así definir el operador

$$\xi \stackrel{\text{def}}{=} Kh,$$

el cual se linealiza en u, η, y p. Su parte lineal es de la forma $\frac{\lambda}{\sigma}K(L_\eta \eta + L_p p + L_u \bar{u})$.

De esta manera hemos construído el siguiente mapeo analítico :

$$(\bar{u}, \eta) \longrightarrow (\bar{v}, \xi) = (\pi^{-1}Tg(\bar{u}, \eta, ..), Kh(\bar{u}, \eta, ..)). \tag{0.16}$$

Un punto fijo del mapeo anterior es una solución del problema completo.

También recalcamos que $(0,0)$ es punto fijo por construcción, y corresponde al flujo de Poiseuille.

Ahora, si linealizamos los operadores $\pi^{-1}T$ y K se obtiene un operador lineal del tipo

$$\begin{pmatrix} \bar{v} \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & L \\ Q & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \eta \end{pmatrix} = \mathcal{A} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \eta \end{pmatrix}. \tag{0.17}$$

Por lo tanto, para estudiar los posibles puntos fijos del problema es menester determinar la invertibilidad del operador $I - \mathcal{A}$. El espectro de este operador, que depende de los parámetros σ, λ, μ_i, decide la invertibilidad de $I - \mathcal{A}$. Si éste es invertible entonces la única solución cerca de $(0,0)$ es $(0,0)$.

En la primera sección del primer capítulo se ofrece una justificación física de las ecuaciones de Navier-Stokes. El lector familiarizado con este material puede omitir la lectura de esta sección y tomar en cuenta únicamente la notación usada y las definiciones pertinentes.El planteamiento del problema y la deducción de las condiciones de frontera son el contenido de la segunda sección. En particular, la condición normal de frontera para el esfuerzo superficial (que eventualmente provee la ecuación para determinar ξ) resulta de considerar a la superficie como una membrana elástica, en donde existe una discontinuidad en la presión debida a la fuerza de restitución de la tensión superficial.

En el capítulo 2 se hace el cálculo de la solución básica (U_0, P_0) y se establecen las ecuaciones para la perturbación (u, p, ξ) en Ω. Una corrección a u_0 debe hacerse para que la condición de frontera en la base $(z = 0)$ sea homogénea.

En el tercer capítulo se ofrece un compendio de los teoremas y definiciones de análisis funcional más relevantes para el desarrollo posterior del trabajo, los cuales se usan con relativa frecuencia. También se prueban aquí algunos resultados que son de gran utilidad en capítulos posteriores, como es el caso del lema 3.36, que asegura la existencia de la presión.

El capítulo 4 se aboca a formular débilmente el problema y a demostrar que el problema de Stokes tiene una solución débil única en Ω. Para ello se define el espacio de trabajo J, subespacio de $(H^1(\Omega))^3$, en base a las condiciones de frontera homogéneas y se prueba que la forma bilineal

$$E(u,v) = \sum_{i,k} \int_{\Omega} (u_{i x_k} + u_{k x_i})(v_{i x_k} + v_{k x_i})\, d\Omega, \tag{0.18}$$

define en J un producto escalar cuya norma es equivalente a la norma $\|\cdot\|_1$. Así el problema de Stokes se transforma en el problema variacional

$$\tfrac{\mu}{2} E(u,\phi) = (f,\phi) + \int_{\Gamma} \left((\phi \cdot \tau^{(1)})\gamma_1 + (\phi \cdot \tau^{(2)})\gamma_2 \right) dS, \tag{0.19}$$

para toda ϕ en J. La existencia y unicidad es consecuencia del teorema de representación de Riesz.

En el capítulo 5 se ofrece una prueba completa de la regularidad de la solución débil al problema de Stokes, que tiene como consecuencia más importante, la existencia de la solución fuerte al sistema elíptico. Esta demostración es probablemente la más técnica del trabajo y la idea de su implementación es del Dr. Jorge Ize, director de esta tesis. En la segunda sección se dan resultados de regularidad de esta solución fuerte en espacios H^m y $C^{m,\alpha}$, basándonos en la teoría general de regularidad de sistemas elípticos de Agmon, Douglis y Nirenberg (A.D.N.)(cf. [Agm/Dou/Nir]). Para aplicar las estimaciones de A.D.N. se verifica que efectivamente el problema de Stokes es un sistema elíptico que satisface una condición de suplementariedad y cuyas condiciones de frontera complementan al sistema. Gran parte de esta sección está dedicada a comprobar estas hipótesis.

Finalmente en el sexto y último capítulo se estudia la invertibilidad de la ecuación para la frontera ζ, se hace la formulación de punto fijo del problema y se dan resultados sobre condiciones para la existencia de soluciones no triviales en los casos más sencillos.

Capítulo 1

Planteamiento del problema

El objetivo principal de este capítulo es formular matemáticamente el problema que nos ocupa y para ello se ha dividido en dos partes.

En la primera sección se deducen de manera breve las ecuaciones de movimiento para un fluido viscoso, conocidas como las ecuaciones de Navier-Stokes, a partir de las hipótesis que permean la teoría de mecánica de fluidos. Consideraciones sobre vorticidad, transporte de energía y otros conceptos físicos importantes han sido omitidas, de manera que esta deducción, que sigue el camino propuesto en el libro de D. J. Acheson ([Acheson, capítulo 7]), se limita a encontrar las ecuaciones de movimiento y a dar algunas definiciones que son de utilidad a lo largo del trabajo. Para una revisión más profunda se recomienda al lector consultar los excelentes textos de L. D. Landau y E. M. Lifshitz ([Lan/Lif]), G. K. Batchelor ([Batchelor]) y el propio libro de Acheson ([Acheson]).

En la segunda sección se plantean las hipótesis físicas y la geometría que eventualmente definen nuestro problema particular, y se obtienen las condiciones de frontera del mismo. Mención especial merece la condición normal de frontera para el esfuerzo superficial, la cual constituye la ecuación para la frontera libre y cuya deducción se hace a partir de un principio variacional, suponiendo que el comportamiento mecánico de la frontera libre es como el de una membrana elástica.

1.1 Las ecuaciones de Navier-Stokes

La mecánica de fluidos parte de la hipótesis fundamental que la materia de los cuerpos que tratamos puede ser estudiada como si fuera continua y homogénea en su estructura, es decir, asume que las propiedades de porciones pequeñas de materia en que concebimos se puede dividir el cuerpo son las mismas que las del cuerpo como un todo. Esto significa que el comportamiento macroscópico de un fluido es el mismo que si fuese perfectamente continuo, y que sus propiedades físicas como masa y momento asociadas a la materia contenida en un pequeño elemento de volumen dado son funciones continuas de la posición. Esta hipótesis se conoce como *hipótesis del continuo* y es consistente con observaciones experimentales (ver [Batchelor, Cap. 1, pag.4]).

La propiedad fundamental de un fluido es que no puede estar en equilibrio si existen fuerzas tales que la interacción mutua entre dos elementos de fluido tiene una componente tangencial a la superficie común entre ambos. Esta propiedad es la base de la hidrostática, que estudia el comportamiento de fluidos en reposo, y es verificada completamente por los experimentos. Sin embargo, una observación cuidadosa nos permite convencernos de que existen componentes tangenciales de la fuerza debida a la interacción de elementos vecinos en la superficie de un elemento de fluido, cuando éste se encuentra en movimiento. Aquí asumiremos que dichas fuerzas existen y que, efectivamente, el fluido está en movimiento.

Cuando hablamos de un elemento de volumen suponemos que el volumen es muy pequeño comparado con las dimensiones del cuerpo considerado, pero lo suficientemente grande como para contener un gran número de moléculas. Las expresiones *partícula del fluído* y *punto del fluído* deben entenderse en el mismo sentido. De esta forma, un elemento de volumen puede contener un gran número de moléculas y seguir siendo considerado un punto del fluído.

Es importante observar que la hipótesis del continuo nos permite usar el sencillo y útil concepto de *velocidad local* del fluido y vamos a considerar el campo completo constituido por las velocidades locales. Este tipo de descripción se conoce como *euleriana*, y es similar a la especificación que se hace del campo electromagnético en la cual las cantidades del flujo se definen como funciones de la posición en el espacio x y del tiempo t. La cantidad principal asociada al flujo es la *distribución de velocidades* del fluido, que se denota $u(x,t)$ y que representa la velocidad del fluido en cada punto x del espacio al tiempo t. Claramente, si concebimos al espacio físico como un espacio euclideano de tres dimensiones, u tiene tres componentes.

Esta descripción de tipo euleriano de la velocidad de un fluido puede entenderse como una representación espacial de la distribución de velocidades locales en cada instante durante el movimiento. De esta manera, el campo $u(x,t)$ será la principal variable dependiente en nuestro análisis, y análogamente otras cantidades asociadas al flujo, como la presión hidrodinámica $p(x,t)$ y la densidad de masa $\rho(x,t)$, pueden ser concebidas como funciones de x y de t.

Existe otro tipo de especificación o descripción del movimiento de un fluido, conocida como de tipo *lagrangiano*, en la cual, como en la mecánica clásica de partículas, algunas de las cantidades dinámicas y físicas se refieren no sólo a posiciones específicas en el espacio, sino fundamentalmente a elementos de materia identificables. Posteriormente se hará un análisis más detallado en este sentido, en virtud de su utilidad para demostrar algunos resultados de importancia.

Finalmente, es importante hacer notar que para deducir las ecuaciones de movimiento, al igual que en los textos citados, nos basaremos en las leyes fundamentales de conservación de masa, energía, momento lineal y momento angular, así como en la ley de movimiento de Newton.

1.1.1 La ecuación de continuidad

Vamos a obtener, a partir de la ley de conservación de masa, la primera de las ecuaciones fundamentales conocida como la *ecuación de continuidad.*

Sea V un elemento fijo de volumen en el espacio que ocupa nuestro fluido : $V \subset \mathbb{R}^3$ es un dominio acotado, abierto con frontera regular $\partial V = S$, donde el teorema de la divergencia es aplicable (ver figura 1.1).

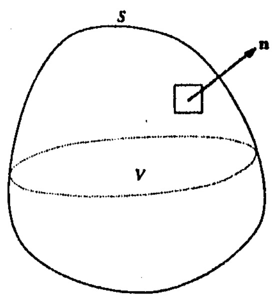

Figura 1.1 : Elemento de volumen.

La masa contenida en V al tiempo t es :

$$\int_V \rho \, dV.$$

Por la ley de conservación de masa, ante la ausencia de fuentes y sumideros en V, la derivada de la masa contenida por V con respecto al tiempo es igual a la masa que entra o sale por S en la unidad de tiempo. Si n es la normal exterior a S, la masa que fluye a través de un elemento de superficie dS en la unidad de tiempo es $\rho u \cdot n \, dS$. Así, la derivada de la masa con respecto al tiempo es

$$-\int_S \rho u \cdot n \, \mathrm{d}S,$$

y como V es independiente del tiempo, podemos escribir,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho \, \mathrm{d}V = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \, \mathrm{d}V = \int_V \rho_t \, \mathrm{d}V = -\int_S \rho u \cdot n \, \mathrm{d}S.$$

Por el teorema de la divergencia

$$\int_V \rho_t \, dV = -\int_V \mathrm{div}(\rho u) \, \mathrm{d}V,$$

es decir,

$$\int_V (\rho_t + \mathrm{div}(\rho u)) \, \mathrm{d}V = 0.$$

Esta relación es válida para cualquier elección del elemento de volumen V dentro del fluido. Dado que el integrando es continuo en (x, y, z), esta última igualdad es cierta si y sólo si

$$\rho_t + \mathrm{div}(\rho u) = 0 \tag{1.1}$$

La ecuación (1.1) se conoce como *ecuación de continuidad* y describe el principio de conservación de masa.

Expandiendo $\mathrm{div}(\rho u) = \rho \, \mathrm{div} u + u \cdot \mathrm{grad} \rho$, e identificando $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \rho_t + u \cdot \mathrm{grad}\, \rho$, podemos escribir alternativamente la ecuación de continuidad de la siguiente forma

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \, \mathrm{div}\, \mathrm{u} = 0. \tag{1.2}$$

1.1.2 El tensor de esfuerzos

Vamos a identificar las fuerzas que actúan sobre un elemento de fluido, de las cuales podemos distinguir dos tipos.

Se llaman fuerzas *externas* o *volumétricas* aquéllas que como su nombre lo indica, son ejercidas por elementos externos a todo el fluido. Son fuerzas de largo alcance y actúan sobre todos los elementos del material en cuestión. La fuerza debida a la gravedad es el ejemplo más evidente de una fuerza de este tipo, y es la única fuerza volumétrica que consideraremos en nuestro problema. Otras fuerzas de interés en mecánica de fluidos son las electromagnéticas, que actúan por ejemplo, cuando el fluido porta carga eléctrica, o la fuerza centrífuga, que aparenta actuar sobre elementos de masa cuando la descripción del movimiento se hace con respecto a un conjunto acelerado de ejes.

Se denominan fuerzas *internas* o *superficiales* sobre un elemento de fluido a aquéllas que actúan debido a la interacción de elemento con elementos vecinos. Son fuerzas de corto alcance y son ejercidas únicamente sobre una delgada superficie adyacente a la frontera del elemento de volumen. Dado que la superficie que encierra un elemento de volumen tiene varias orientaciones, no es útil especificar las fuerzas internas por su efecto total sobre el elemento finito de fluido; en cambio, se considera un elemento de superficie en la frontera y se especifica la densidad superficial de la suma total de fuerzas internas en dicho elemento. Supondremos que entre las fuerzas superficiales se incluyen la fuerza debida a la presión y la debida a la viscosidad.

Sabemos de nuestra experiencia en hidrostática que la fuerza por unidad de área sobre la frontera de un elemento de volumen se debe a la presión hidrostática y que es ejercida en dirección normal a la superficie. En general, para un fluido en reposo las fuerzas internas son normales al elemento de volumen y la magnitud de su densidad superficial (que es independiente de la normal) es lo que llamamos presión hidrostática, $p = p(x, y, z)$.

En el caso de un fluido en movimiento, vamos a definir más adelante la presión hidrodinámica o presión en un punto de un fluido en movimiento, en términos de la densidad superficial de fuerzas sobre una esfera con centro en el punto considerado y cuyo volumen tiende a cero. Veremos que esta definición es consistente con el caso estático.

La representación matemática de la densidad de fuerzas internas está dada en términos de una matriz o tensor de segundo rango conocido como ***tensor de esfuerzos.*** A la densidad superficial de fuerzas se le llama también *esfuerzo superficial.*

Consideremos un elemento de volumen con frontera S. Sea δS un elemento de superficie y n la normal exterior unitaria en dicho elemento. Sobre δS existe una fuerza superficial neta, cuya densidad denotaremos por $\bar{t}$. Por supuesto $\bar{t}$ no es necesariamente colineal a n.

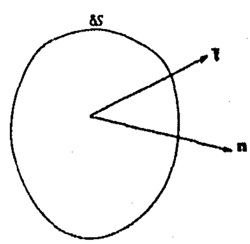

Figura 1.2 : Elemento de superficie; n es la normal y $\bar{t}$ la densidad superficial de fuerzas.

Definición 1.1 *Sea δS un elemento de superficie cuya normal va en dirección j. Llamaremos T_{ij} a la componente i del esfuerzo $\bar{t}$ sobre dicho elemento de superficie. A la matriz T formada por los elementos T_{ij} se define como tensor de esfuerzos.*

Lema 1.2 *El esfuerzo superficial en todo punto x y en todo tiempo t es $\bar{t} = Tn$.*

Prueba :

Consideremos un elemento de volumen, en forma de tetraedro con vértice en x, cuyos lados valen L (véase la figura 1.3). La cara principal la denotamos δS, mientras que las caras laterales las denotamos como I, II y III. Llamemos $\bar{x}$ a todo punto que se encuentre en la superficie del tetraedro, es decir, en cualquiera de sus caras .

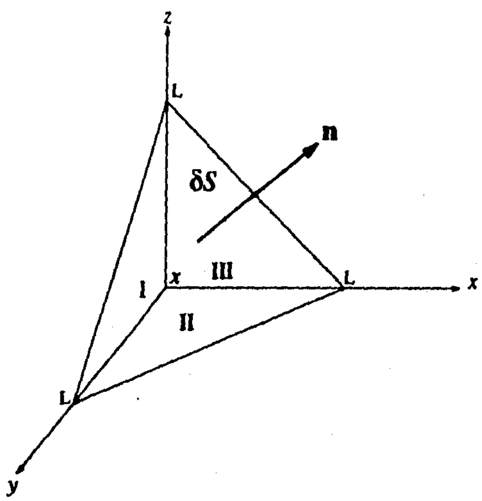

Figura 1.3 : Elemento de volumen tetraédrico, con vértice en x.

La componente i del esfuerzo $\bar{t}$ sobre la cara principal es t_i. Por lo tanto la componente i de la fuerza sobre la cara principal es $t_i\delta S$.

$$n = n_1\hat{e}_1 + n_2\hat{e}_2 + n_3\hat{e}_3,$$

es el vector normal unitario sobre la cara principal.

Claramente $-T_{i1}$ es la componente i de $\bar{t}$ sobre la cara I, cuya normal es $-\hat{e}_1$. El área de la cara I es $n_1\delta S$ por lo que la componente de la fuerza sobre la cara I es $-T_{i1}n_1\delta S$.

De la misma manera, las componentes i de la fuerza sobre las caras II y III son $-T_{i2}n_2\delta S$ y $-T_{i3}n_3\delta S$, respectivamente.

Ahora bien, sumando estas contribuciones en la dirección i obtenemos que la componente i de la fuerza total sobre el elemento de volumen es

$$(t_i - \sum_j T_{ij}n_j)\delta S,$$

donde $i, j = 1, 2, 3$.

Llamemos f_e a la densidad de fuerzas externas al elemento de volumen, ρ la densidad de masa, δV el volumen del tetraedro y u la velocidad promedio del mismo. Supondremos que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho u)$ está acotada por una constante M; esta hipótesis se cumple si suponemos que la densidad de masa, así como u y $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, son finitas al tiempo t y a tiempos posteriores finitos acotados en la región del espacio que ocupa el tetraedro.

Aplicando la ley de Newton al elemento de volumen tenemos :

$$|(t_i - \sum_j T_{ij}n_j)\delta S + f_e\delta V| = |\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho u)\,\delta V| \leq M\delta V.$$

El volumen del tetraedro es $\delta V = \frac{1}{6}L^3$. El área de la cara principal es $\delta S = \frac{\sqrt{3}}{2}L^2$, mientras que cada cara tiene un área igual a $n_i\delta S = L^2/2$. Claramente $n_i = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\forall i$.

Así,

$$|(t_i - \sum_j T_{ij}n_j)\tfrac{\sqrt{3}}{2}L^2 + f_e\tfrac{1}{6}L^3| \leq \tfrac{1}{6}ML^3.$$

Dividiendo entre L^2 llegamos a :

$$|(t_i - \sum_j T_{ij}n_j)\tfrac{\sqrt{3}}{2} + f_e\tfrac{1}{6}L| \leq \tfrac{1}{6}ML. \tag{1.3}$$

Tomando el límite cuando $L \to 0$ en la expresión (1.3) llegamos a que

$$t_i - \sum_{j=0}^{3} T_{ij}n_j = 0, \tag{1.4}$$

en el punto x y para todo $i = 1, 2, 3$; al tender el volumen del tetraedro a 0, $\bar{t}$ en $\bar{x}$ tiende al valor de $\bar{t}$ en x, ya que suponemos que $\bar{t}$ es una función continua de la posición (hipótesis del continuo).

De esta forma, la ecuación (1.4) implica que

$$\bar{t} = Tn, \tag{1.5}$$

para todo punto en el fluido y para todo tiempo t.

□

1.1.3 Hipótesis físicas

Hasta el momento, la definición del tensor de esfuerzos se aplica a cualquier medio continuo. ¿Cómo obtenemos dicho tensor para el caso de un fluido viscoso? Para ello debemos partir de ciertas hipótesis de origen físico, las cuales serán expuestas a continuación. Para ello es preciso definir lo que se entiende por un medio *isotrópico.*

Definición 1.3 *Un material se denomina* <u>*isotrópico*</u> *si sus propiedades mecánicas pueden ser descritas sin referencia a una dirección particular, es decir, si no existe una dirección preferencial de movimiento.*

Definición 1.4 *Un tensor que tiene las mismas componentes con respecto a cada base ortogonal se conoce como un* <u>*tensor isotrópico*</u>.

Por ejemplo, si un tensor de cuarto rango H se expresa con respecto a la base $\hat{e}_i$ como H_{ijkl} y con respecto a la base $\hat{e}_i{}'$ como H'_{ijkl} entonces

$$H_{ijkl} = H'_{ijkl}.$$

Se puede probar que para un medio continuo isotrópico el tensor que relaciona al tensor de esfuerzos con otro tensor asociado al movimiento (en el caso de un fluido se trata del tensor de deformación, ver definición (1.11)) debe ser isotrópico. La demostración para el caso de un fluido viscoso se puede consultar en [Segel, pag. 82].

Asumiremos que para un fluido viscoso se cumplen las siguientes hipótesis :

1. Un fluido viscoso es un medio continuo isotrópico, ya que sus propiedades físicas son tales que no muestran una dirección preferencial de movimiento.

2. La contribución a la densidad de fuerza superficial en todo elemento de fluido, debida a la viscosidad, es proporcional al gradiente de distribución de velocidades. Ésta es una condición física importante pues caracteriza a los fluidos *newtonianos.* Su justificación se basa en observaciones experimentales (consultar referencias [Lan/Lif, pags. 44 - 46] y [Batchelor, pag. 143]).

3. El tensor de esfuerzos T es continuo en la posición y en el tiempo. Esta condición es una extensión de la hipótesis del continuo a la densidad superficial de fuerzas.

Las condiciones anteriores, junto con la hipótesis del continuo, constituyen las características físicas fundamentales de un fluido viscoso newtoniano, a partir de las cuales es posible encontrar las ecuaciones de movimiento.

Finalmente, dadas las propiedades conocidas para la presión de un fluido en reposo, vamos a definir la presión de un fluido en movimiento; veremos más adelante que esta definición es consistente con el caso estático.

Definición 1.5 *La presión de un fluido en movimiento en el punto x y a un tiempo fijo t se define como*

$$p(x) = -\lim_{r\to 0} \frac{1}{4\pi r^2} \int_{|x-y|=r} \bar{t} \cdot n \; \mathrm{d}S_y.$$

Es decir, p es el límite cuando $r \to 0$ del promedio de la componente normal de la densidad superficial de fuerzas $\bar{t}$, en dirección opuesta a la normal exterior sobre la esfera de radio r y centro en x.

Ahora bien, dada la definición anterior y por el lema 1.2 podemos escribir p en función del tensor de esfuerzos T. Haciendo el cambio de variable $y = x + r\eta$, tenemos que $\mathrm{d}S_y = r^2 \,\mathrm{d}S_\eta$, $|\eta| = 1$ y η es normal a la esfera unitaria. Así escribimos

$$p(x) = -\lim_{r\to 0} \frac{1}{4\pi} \int_{|\eta|=1} \eta \cdot T(x + r\eta)\eta \; \mathrm{d}S_\eta.$$

Como ahora el dominio de integración no depende de r y es acotado, y dada la hipótesis de que T es continuo, es posible incluir el límite bajo el signo de integración y de este modo obtener :

$$p(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{|\eta|=1} \lim_{r\to 0}(\eta \cdot T(x + r\eta)\eta) \; \mathrm{d}S_\eta.$$

Como η no depende de r y por la continuidad de T hemos llegado a la siguiente expresión:

$$p(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_{|\eta|=1} \eta \cdot T(x)\eta \; dS_\eta. \tag{1.6}$$

Se observa que p está bien definida y que es continua en x. Esta ecuación nos será de utilidad para expresar p en términos de la traza de T. Aunque esta definición puede parecer un poco artificial, es adecuada para obtener las ecuaciones de movimiento, además de que es consistente con el caso estático como veremos más adelante. Esto es claro ya que $T(x) = p(x)I$.

1.1.4 Formulación lagrangiana y el teorema del transporte de Reynolds

Con el fin de encontrar las ecuaciones de movimiento hemos de demostrar un resultado básico en teoría de medios continuos conocido como el *teorema del transporte de Reynolds*, el cual servirá también para probar una propiedad muy importante del tensor de esfuerzos a partir del principio de conservación del momento angular, que es la de ser un tensor simétrico. Pero antes, es menester explicar en qué consiste la descripción *lagrangiana* del movimiento de un fluido.

En contraste con la descripcion *euleriana* de movimiento, la lagrangiana consiste en definir la posición al tiempo t de cada una de las partículas del fluido considerado. A continuación veremos cómo se formula matemáticamente dicha descripción.

Supongamos que el fluido está contenido para todo tiempo en un conjunto acotado y abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ del espacio físico, con frontera $\partial\Omega$. Asumiremos también que el fluido es un medio continuo de partículas localizadas en puntos de Ω.

Definición 1.6 *Un* *<u>desplazamiento</u>* *es una transformación* $s : \Omega \to \Omega$ *tal que :*

1. *s es invertible y $s(\Omega) = \Omega$.*
2. *$s, s^{-1} \in C^1(\Omega)$.*

De esta manera $\forall A \subset \Omega$, $s(A) \subset \Omega$.

Llamemos S al conjunto de todos los desplazamientos en Ω. Como el mapeo $I : \Omega \to \Omega$, $I(x) = x \; \forall x \in \Omega$, pertenece a S, entonces $S \neq \emptyset$.

Definición 1.7 *Una* *<u>traslación</u>* *o* *<u>flujo</u>* *es una función de* $t, t_0 \in \mathbb{R} \to \varphi_{t_0,t} \in S$, *tal que* $\forall x \in \Omega$ *:*

(i) $\varphi_{t_0,t_1}(\varphi_{t_1,t_2}(x)) = \varphi_{t_0,t_2}(x)$.

(ii) $\varphi_{t_0,t}(\varphi_{t,t_0}(x)) = \varphi_{t_0,t_0}(x) = x$.

(iii) $\varphi_{t_0,t}$ *es continuamente diferenciable en t y t_0.*

Aquí $\varphi_{t_0,t}(x)$ denota la posición al tiempo t de una partícula del fluido que en el tiempo t_0 estaba en x.

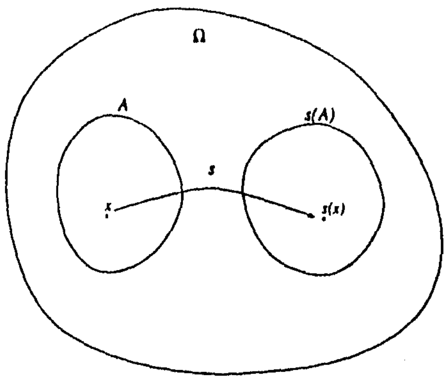

Figura 1.4 : Desplazamiento.

Notamos que las condiciones (i), (ii) y (iii) son propiedades razonables de regularidad, es decir, satisfacen las características que esperamos de la traslación de una partícula. La condición de que $\varphi_{t_0,t}$ sea invertible significa que dos partículas no pueden ocupar la misma posición al mismo tiempo.

Si una partícula ocupa la posición x_0 al tiempo t_0, al tiempo t su posición es $x = \varphi_{t_0,t}(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} X(x_0, t)$. A la variable x_0 se le denomina ***variable lagrangiana***.

Consideremos un conjunto de partículas que ocupan un volumen $V_0 \subset \Omega$ al tiempo $t_0 = 0$. Definimos

$$V(t) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi_{0,t}(x) \,/\, x \in V_0\}\,. \tag{1.7}$$

Dado que $\varphi_{t_0,t} \in S$, $\varphi_{t_0,t}(x_0) = X(x_0, t)$ es una función en $C^1(\Omega \times \mathbb{R})$, invertible en la variable x_0. Esta propiedad de invertibilidad nos permitirá relacionar nuestra variable lagrangiana con la descripción euleriana de movimiento en términos de la distribución de velocidades.

Nuestra hipótesis es la siguiente : dados t_0 y t en $\mathbb{R}$, existe, para cada partícula del fluido una función $\varphi_{t_0,t} \in S$ que satisface las propiedades $(i), (ii)$ y (iii), y que nos describe el movimiento de dicha partícula. En otras palabras, existe una función de traslación.

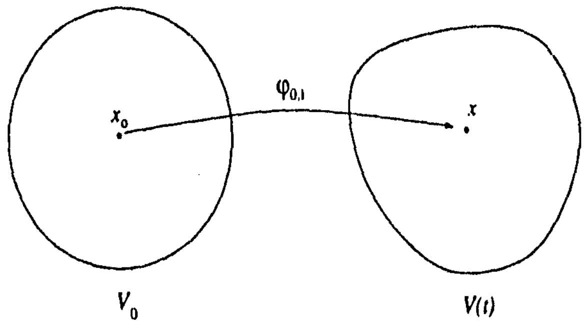

Figura 1.5 : Traslación.

Ahora bien, por simplicidad tomemos $t_0 = 0$; sabemos que la posición de cada partícula es

$$x = \varphi_{0,t}(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} X(x_0, t),$$

donde x_0 es la posición al tiempo inicial. Por ser una función invertible es posible escribir

$$x_0 = \varphi_{0,t}^{-1}(x) \stackrel{\text{def}}{=} X_0(x, t).$$

Por lo tanto la velocidad de la partícula es

$$\frac{\mathrm{d}X(x_0, t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi_{0,t}(x_0)) \stackrel{\text{def}}{=} X'(x_0, t),$$

ya que, $\varphi_{0,t} \in C^1(\Omega)$ y es continuamente diferenciable en t y t_0. Si $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ es una función de x_0, por invertibilidad tenemos

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X'(X_0(x, t), t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x, t),$$

es decir, podemos escribir $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ en función de x y de t, que es la distribución o campo de velocidades según la descripción euleriana.

Sea $J(t) = \frac{D(X)}{D(X_0)}$ el jacobiano de la transformación $\varphi_{0,t}$. La relación de Euler establece que

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = J(t)\,\mathrm{div}_x \mathbf{u} \tag{1.8}$$

Esta ecuación relaciona la descripción euleriana de movimiento con la variable lagrangiana (ver [Cou/Joh, pag. 74]). La demostración se encuentra en el apéndice A.

La hipótesis de la existencia de la función invertible $\varphi_{0,t}$ nos permite justificar la existencia de la distribución de velocidades y por ende, la utilización de la ecuación de continuidad en la prueba del teorema del transporte, el cual se enuncia a continuación.

Teorema 1.8 (Teorema del transporte de Reynolds) *Consideremos un conjunto de partículas de un medio continuo que ocupa un volumen acotado $V_0 \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$ al tiempo $t_0 = 0$. Entonces, para cualquier función escalar o vectorial $G(x,t) \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^+)$, se cumple que*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)} G(x,t)\,\mathrm{d}V = \int_{V(t)} \left(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} + G\,\mathrm{div}\mathbf{u}\right) \mathrm{d}V,$$

donde $V(t)$ es el volumen ocupado por dichas partículas al tiempo t (definido en la ecuación (1.7)), y $\mathbf{u}(x,t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X(X_0(x,t),t)$ es la distribución de velocidades.

Aquí, $\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}$ tiene el mismo significado que en la ecuación de continuidad, es decir, para una función escalar $\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial G}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot \mathbf{grad}\, G$.

Prueba :

La transformación $x = X(x_0,t)$ es invertible en x_0, por lo tanto podemos hacer un cambio de variable; la posición x_0 en $t = 0$ es fija. Así, $V_0 = V(0) \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un conjunto que no depende de t.

Si llamamos $J(t) = \frac{D(X)}{D(X_0)}$ al jacobiano de la transformación y hacemos el cambio de variable tenemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)} G(x,t)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(0)} G(X(x_0,t),t)\,J\,\mathrm{d}x_0.$$

Como $V(0)$ no depende de t y es acotado

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)} G(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_{V(0)} \left(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}J + G\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}x_0.$$

Por la relación de Euler (ecuación (1.8)), podemos escribir

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)} G(x,t)\,\mathrm{d}x &= \int_{V(0)} \left(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}J + G\,J\,\mathrm{div}u\right)\mathrm{d}x_0\\ &= \int_{V(0)} \left(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} + G\,\mathrm{div}u\right)J\,\mathrm{d}x_0\\ &= \int_{V(t)} \left(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} + G\,\mathrm{div}u\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

De esta forma hemos probado que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)} G(x,t)\,\mathrm{d}V = \int_{V(t)} \left(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} + G\,\mathrm{div}u\right)\mathrm{d}V, \tag{1.9}$$

que es la relación que deseábamos demostrar.

□

En particular si $G = \rho(x,t)F(x,t)$, donde ρ es la densidad y aplicando el teorema del transporte obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)} \rho F\,\mathrm{d}V &= \int_{V(t)} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho F) + \rho F\,\mathrm{div}u\right)\mathrm{d}V\\ &= \int_{V(t)} \left(\rho\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\,\mathrm{div}u\right)F\right)\mathrm{d}V.\end{aligned}$$

Por la ecuación de continuidad (1.2), la cual es válida puntualmente y para todo tiempo t, llegamos a la importante relación

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)} \rho F\,\mathrm{d}V = \int_{V(t)} \rho\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}V. \tag{1.10}$$

1.1.5 Ecuaciones de movimiento

Vamos a aplicar la ley de Newton a un elemento de fluido que ocupa un volumen $V(t)$ al tiempo t, para obtener las ecuaciones de movimiento.

Haremos la suposición de que la única fuerza volumétrica que actúa sobre cada elemento de fluido es la fuerza de gravedad. Sabemos que ρu es la densidad de momento lineal, $\bar{t}$ es la densidad de fuerzas superficiales y ρg es la densidad de fuerza debida a la gravedad. De esta manera, aplicando la ley de Newton a nuestro elemento de fluido

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)} \rho u \, \mathrm{d}V = \int_{S(t)} \bar{t} \, \mathrm{d}S + \int_{V(t)} \rho g \, \mathrm{d}V, \tag{1.11}$$

donde $S(t) = \partial V(t)$ al tiempo t y suponemos es regular.

Escribiendo la ecuación (1.11) por componentes,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)} \rho u_i \, \mathrm{d}V = \int_{S(t)} t_i \, \mathrm{d}S + \int_{V(t)} \rho g_i \, \mathrm{d}V, \tag{1.12}$$

$\forall i = 1,2,3$. Para el caso de la gravedad $g_1 = g_2 = 0$ y $g_3 = -g$.

Por la ecuación (1.4) y por el teorema de la divergencia, escribimos

$$\begin{aligned}\int_{S(t)} t_i \, \mathrm{d}S &= \int_{S(t)} \sum_j T_{ij} n_j \, \mathrm{d}S = \int_{S(t)} \begin{pmatrix} T_{i1} \\ T_{i2} \\ T_{i3} \end{pmatrix} \cdot n \, \mathrm{d}S \\ &= \int_{V(t)} \mathrm{div}\begin{pmatrix} T_{i1} \\ T_{i2} \\ T_{i3} \end{pmatrix} \mathrm{d}V = \int_{V(t)} \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \, \mathrm{d}V.\end{aligned}$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación de movimiento y aplicando el teorema del transporte (ecuación (1.10)) a la primera integral tenemos :

$$\int_{V(t)} \rho \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} \, \mathrm{d}V = \int_{V(t)} \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \, \mathrm{d}V + \int_{V(t)} \rho g_i \, \mathrm{d}V,$$

es decir,

$$\int_{V(t)} \left(\rho \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} - \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} - \rho g_i \right) \mathrm{d}V = 0, \tag{1.13}$$

$\forall i = 1,2,3$, $\forall V(t) \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$. La ecuación (1.13) se cumple para todo elemento de volumen en todo tiempo t. Dada la hipótesis de que el integrando es continuo, ésto es posible si y sólo si

$$\rho \frac{du_i}{dt} - \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} - \rho g_i = 0, \tag{1.14}$$

$\forall x \in \Omega$, $\forall t$ y con $i = 1, 2, 3$.

Las ecuaciones (1.14) constituyen las *ecuaciones de movimiento* del fluido.

A continuación se demuestra, en base al principio de conservación del momento angular, que el tensor de esfuerzos está representado por una matriz simétrica.

Proposición 1.9 *El tensor de esfuerzos es simétrico.*

Prueba :

Nuevamente sea $V(t)$ un elemento de volumen con frontera $S(t)$. El momento angular por unidad de volumen es $x \wedge \rho u$; la densidad de torca debida al esfuerzo superficial $\bar{t}$ y a la fuerza de gravedad son $x \wedge \bar{t}$ y $x \wedge \rho g$, respectivamente, siendo densidad superficial la primera y volumétrica la segunda.

Así, por la conservación de momento angular en el elemento de volumen considerado,

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} x \wedge \rho u \, dV = \int_{S(t)} x \wedge \bar{t} \, dS + \int_{V(t)} x \wedge \rho g \, dV.$$

Dado que ρ es una función escalar y por el teorema del transporte (ecuación (1.10)), la integral del lado izquierdo se escribe como

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{V(t)} x \wedge \rho u \, dV &= \frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho (x \wedge u) \, dV \\
&= \int_{V(t)} \rho \frac{d}{dt}(x \wedge u) \, dV \\
&= \int_{V(t)} \rho \left(\frac{dx}{dt} \wedge u + x \wedge \frac{du}{dt} \right) dV \\
&= \int_{V(t)} x \wedge \rho \frac{du}{dt} \, dV,
\end{aligned}$$

ya que $(dx/dt) \wedge u \equiv 0$. Por lo tanto,

$$\int_{V(t)} x \wedge \rho \frac{du}{dt} \, dV = \int_{S(t)} x \wedge \bar{t} \, dS + \int_{V(t)} x \wedge \rho g \, dV. \tag{1.15}$$

Sean $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ los vectores unitarios de nuestra base ortogonal. Por ende, $x = x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 + x_3\hat{e}_3$. Por la ecuación de movimiento (1.14) escribimos,

$$\rho\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \sum_i \rho\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}\hat{e}_i = \sum_i\left(\sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i\right)\hat{e}_i.$$

Si n es la normal unitaria a $S(t)$, también tenemos que

$$\bar{t} = \sum_i t_i\hat{e}_i = \sum_i\left(\sum_j T_{ij}n_j\right)\hat{e}_i.$$

En consecuencia, es posible escribir la ecuación (1.15) de la siguiente forma

$$\int_{V(t)}\left[\sum_k x_k\hat{e}_k \wedge \sum_i\left(\sum_j\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i\right)\hat{e}_i - \sum_k x_k\hat{e}_k \wedge \sum_i \rho g_i\hat{e}_i\right]\mathrm{d}V =$$

$$= \int_{S(t)}\left[\sum_k x_k\hat{e}_k \wedge \sum_i\left(\sum_j T_{ij}n_j\right)\hat{e}_i\right]\mathrm{d}S,$$

es decir,

$$\int_{V(t)}\sum_{i,k}\left(\hat{e}_k \wedge \hat{e}_i\left(x_k\sum_j\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}\right)\right)\mathrm{d}V = \int_{S(t)}\sum_{i,k}\left(\hat{e}_k \wedge \hat{e}_i\left(x_k\sum_j T_{ij}n_j\right)\right)\mathrm{d}S,$$

ya que el término $\sum_k x_k\hat{e}_k \wedge \sum_i \rho g_i\hat{e}_i$ se cancela. Por lo tanto,

$$\sum_{i,k}\hat{e}_k \wedge \hat{e}_i\left[\int_{V(t)} x_k\sum_j\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}\,\mathrm{d}V - \int_{S(t)} x_k\sum_j T_{ij}n_j\,\mathrm{d}S\right] = 0.$$

Por el teorema de la divergencia

$$\begin{aligned}\int_{V(t)} x_k\sum_j\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}\,\mathrm{d}V &= \int_{V(t)} x_k\mathrm{div}\begin{pmatrix}T_{i1}\\T_{i2}\\T_{i3}\end{pmatrix}\mathrm{d}V\\ &= \int_{V(t)}\left(\mathrm{div}\, x_k\begin{pmatrix}T_{i1}\\T_{i2}\\T_{i3}\end{pmatrix} - T_{ik}\right)\mathrm{d}V\end{aligned}$$

$$= \int_{S(t)} x_k \begin{pmatrix} T_{i1} \\ T_{i2} \\ T_{i3} \end{pmatrix} \cdot n \, \mathrm{d}S - \int_{V(t)} T_{ik} \, \mathrm{d}V$$
$$= \int_{S(t)} x_k \sum_j T_{ij} n_j \, \mathrm{d}S - \int_{V(t)} T_{ik} \, \mathrm{d}V,$$

por lo que,

$$\sum_{i,k} \left((\hat{e}_k \wedge \hat{e}_i) \int_{V(t)} T_{ik} \, \mathrm{d}V \right) = 0.$$

La base $\{\hat{e}_i\}$ es una base ortogonal derecha, por lo que $\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 = \hat{e}_3$, $\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3 = \hat{e}_1$ y $\hat{e}_3 \wedge \hat{e}_1 = \hat{e}_2$. De esta manera,

$$\hat{e}_1 \int_{V(t)} (T_{23} - T_{32}) \, \mathrm{d}V + \hat{e}_2 \int_{V(t)} (T_{31} - T_{13}) \, \mathrm{d}V + \hat{e}_3 \int_{V(t)} (T_{12} - T_{21}) \, \mathrm{d}V = 0.$$

Esto implica que

$$\int_{V(t)} (T_{ij} - T_{ji}) \, \mathrm{d}V = 0, \tag{1.16}$$

$\forall i \neq j$. La ecuación (1.16) se cumple para todo elemento de volumen $V(t) \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$ en todo tiempo t. Como T es continuo, esto es posible si y sólo si

$$T_{ij} = T_{ji}, \tag{1.17}$$

para todo x y t.

□

El siguiente resultado nos permite escribir explícitamente el tensor de esfuerzos. Para su demostración usamos fuertemente el hecho de que T es simétrica.

Proposición 1.10

$$p = -\tfrac{1}{3} \operatorname{traza}(T) = -\tfrac{1}{3} \sum_i T_{ii},$$

para todo x y t.

Prueba :

Para todo tiempo fijo t, la presión está dada por la ecuación (1.6). Llamemos B a la esfera unitaria con centro en x, cuya normal unitaria es η.

De esta manera

$$p(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\partial B}\eta^{\mathrm{T}}T(x)\eta \; \mathrm{d}S_\eta.$$

Como T es real y simétrica, y x está fijo, entonces existe una matriz M, tal que

$$M^{\mathrm{T}}TM = \Lambda(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & .. & 0 \\ : & \lambda_2 & : \\ 0 & .. & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

con $\lambda_i = \lambda_i(x)$. La existencia de M está asegurada por ser $\eta^{\mathrm{T}}T\eta$ una forma hermiteana (ver [Cou/Hil, pags. 13-14]).

Sea $\xi = M^{\mathrm{T}}\eta$, la rotación de η dada por M. ξ es unitario ya que η y M son unitarios. De esta forma

$$\eta^{\mathrm{T}}T\eta = \eta^{\mathrm{T}}(M\Lambda(x)M^{\mathrm{T}})\eta = (M^{\mathrm{T}}\eta)^{\mathrm{T}}\Lambda(x)(M^{\mathrm{T}}\eta) = \xi^{\mathrm{T}}\Lambda(x)\xi.$$

El jacobiano de la transformación $\xi = M^{\mathrm{T}}\eta$ es

$$J = \det(M^{\mathrm{T}}) = 1,$$

por lo que $p(x)$ se puede escribir como

$$p(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_{|\xi|=1}\xi^{\mathrm{T}}\Lambda(x)\xi \; \mathrm{d}S_\xi;$$

ahora ξ es la normal unitaria. Pasando a coordenadas esféricas escribimos $\xi_1 = \cos\theta\,\mathrm{sen}\phi$, $\xi_2 = \mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\phi$, $\xi_3 = \cos\phi$, por lo que

$$\begin{aligned} p(x) &= -\frac{1}{4\pi}\int_{|\xi|=1}(\lambda_1(x)\xi_1^2 + \lambda_2(x)\xi_2^2 + \lambda_3(x)\xi_3^2)\;\mathrm{d}S_\xi \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(\lambda_1(x)\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\phi + \lambda_2\mathrm{sen}^2\theta\,\mathrm{sen}^2\phi + \lambda_3\cos^2\phi)\,\mathrm{sen}\phi\;\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\ &= -\tfrac{1}{3}(\lambda_1(x) + \lambda_2(x) + \lambda_3(x)) = -\tfrac{1}{3}\,\mathrm{traza}(\Lambda(x)). \end{aligned}$$

Dado que M es una matriz unitaria, sabemos que traza$(\Lambda(x))$ = traza$(T(x))$, por lo que

$$p(x) = -\tfrac{1}{3}\,\mathrm{traza}(T(x)),$$

es decir,

$$p = -\tfrac{1}{3}\sum_i T_{ii}. \tag{1.18}$$

□

1.1.6 El tensor de viscosidad

Hemos visto que una contribución importante a la componente normal de la densidad superficial de fuerzas internas $t_n = n^T T n$ se debe a la presión, definida por la ecuación (1.6). En base a esta observación podemos escribir el tensor de esfuerzos como la suma de dos tensores, a saber,

$$T = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_{11}+p & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22}+p & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33}+p \end{pmatrix},$$

es decir,

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij}. \tag{1.19}$$

Al tensor σ_{ij} se le define como *tensor de viscosidad* y representa la contribución de las fuerzas de viscosidad, a la densidad superficial de fuerzas internas en cada elemento de fluido. Por nuestras hipótesis físicas (pag. 22), este tensor debe ser proporcional al gradiente de velocidades y esta relación de proporcionalidad debe ser isotrópica. Esto significa que la fuerza de viscosidad o arrastre depende directamente del cambio en la distribución de velocidades según la posición, por lo cual esperamos que para un fluido en reposo las fuerzas de viscosidad se anulen; veremos que en el caso estático $\sigma_{ij} = 0$.

Definición 1.11 *A la matriz formada por los elementos*

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),$$

se le conoce como tensor de deformación.

Notamos que el tensor de deformación es simétrico. Por otro lado, debido a la proporcionalidad entre cada elemento del tensor de viscosidad y el gradiente de velocidades, cada σ_{ij} es una función lineal de los elementos de e_{ij}. Esa relación se expresa en términos de un tensor isotrópico de rango cuatro

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l} H_{ijkl}\, e_{kl}.$$

La demostración de esta propiedad, para el caso de un fluido viscoso, se encuentra en [Segel, pag. 82]. También es posible probar (para ello consultar [Jeff, pags. 24-25]), que todo tensor isotrópico de cuarto rango se escribe como

$$H_{ijkl} = \alpha\, \delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\, \delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma\, \delta_{il}\delta_{jk},$$

donde α, β y γ son constantes. De este modo la relación entre el tensor de viscosidad y el tensor de deformación se puede expresar como

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= \sum_{k,l}(\alpha\, \delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\, \delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma\, \delta_{il}\delta_{jk})e_{kl} \\
&= \alpha\, \delta_{ij} \sum_{k,l} \delta_{kl} e_{kl} + (\beta + \gamma) \sum_{k,l} \delta_{ik}\delta_{jl}\, e_{kl} \\
&= \alpha\, \delta_{ij} \sum_{k} e_{kk} + (\beta + \gamma) e_{ij}.
\end{aligned}$$

Por la definición de e_{ij} notamos que $\sum_k e_{kk} = \operatorname{div} \mathbf{u}$, y si definimos $\nu \stackrel{\text{def}}{=} (\beta + \gamma)/2$ obtenemos

$$\sigma_{ij} = \alpha \operatorname{div} \mathbf{u}\, \delta_{ij} + 2\nu e_{ij}.$$

Por lo tanto el tensor de esfuerzos se escribe como

$$T_{ij} = (-p + \alpha \operatorname{div} \mathbf{u})\delta_{ij} + 2\nu e_{ij}.$$

Por la ecuación (1.18), y sustituyendo la ecuación anterior se obtiene

$$
\begin{aligned}
-p = \tfrac{1}{3}\sum_i T_{ii} &= \tfrac{1}{3}\sum_i ((-p+\alpha \operatorname{div} u)\delta_{ii} + 2\nu e_{ii}) \\
&= \tfrac{1}{3}(-p+\alpha \operatorname{div} u)\sum_i \delta_{ii} + \tfrac{2}{3}\nu \sum_i e_{ii} \\
&= -p + (\alpha + \tfrac{2}{3}\nu)\operatorname{div} u,
\end{aligned}
$$

lo cual implica que $\alpha = -\frac{2}{3}\nu$, ya que $\operatorname{div} u$ no es idénticamente cero. De este modo el tensor de viscosidad tiene la forma

$$\sigma_{ij} = -\tfrac{2}{3}\nu \operatorname{div} u\, \delta_{ij} + 2\nu e_{ij}(u). \tag{1.20}$$

La constante ν recibe el nombre de ***coeficiente de viscosidad cinemática***, y su valor depende de las propiedades del material. Así mismo el tensor de esfuerzos queda completamente definido por la expresión

$$T_{ij} = -(p + \tfrac{2}{3}\nu \operatorname{div} u)\delta_{ij} + 2\nu e_{ij}(u). \tag{1.21}$$

Para el caso estático $u \equiv 0$, tenemos $T_{ij} = -p\delta_{ij}$, es decir, recobramos las ecuaciones para la fuerza superficial que depende únicamente de la presión hidrostática.

Finalmente, escribimos el tensor de esfuerzos,

$$T = \begin{pmatrix} -p + 2\nu(\frac{1}{3}\operatorname{div} u + u_{1x_1}) & \nu(u_{1x_2} + u_{2x_1}) & \nu(u_{1x_3} + u_{3x_1}) \\ \nu(u_{1x_2} + u_{2x_1}) & -p + 2\nu(\frac{1}{3}\operatorname{div} u + u_{2x_2}) & \nu(u_{3x_2} + u_{2x_3}) \\ \nu(u_{1x_3} + u_{3x_1}) & \nu(u_{3x_2} + u_{2x_3}) & -p + 2\nu(\frac{1}{3}\operatorname{div} u + u_{3x_3}) \end{pmatrix},$$

cuya expresión nos permitirá formular completamente las ecuaciones de movimiento como veremos a continuación.

1.1.7 Derivación de las ecuaciones de Navier-Stokes

Una vez obtenida la expresión del tensor de esfuerzos (1.21), podemos sustituirla en las ecuaciones de movimiento (1.14) y obtener

$$\rho \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-(p + \tfrac{2}{3}\nu \operatorname{div} u)\delta_{ij} + 2\nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right) + \rho g_i$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{2\nu}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(\operatorname{div} u) + \sum_j \nu\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}\right) + \rho g_i.$$

Identificando $\sum_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\operatorname{div} u)$ y $\sum_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = \Delta u_i$,

$$\rho\,\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(\operatorname{div} u) + \nu\,\Delta u_i + \rho g_i. \tag{1.22}$$

Podemos escribir las anteriores ecuaciones en forma vectorial, esto es,

$$\rho\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\operatorname{grad} p + \tfrac{1}{3}\nu \operatorname{grad}(\operatorname{div} u) + \nu\,\Delta u + \rho g. \tag{1.23}$$

Expandiendo

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = u_t + u_1 u_{x_1} + u_2 u_{x_2} + u_3 u_{x_3} = u_t + (u \cdot \operatorname{grad})u,$$

y sustituyendo obtenemos

$$\rho\,(u_t + (u \cdot \operatorname{grad})u) = -\operatorname{grad} p + \tfrac{1}{3}\nu \operatorname{grad}(\operatorname{div} u) + \nu\,\Delta u + \rho g. \tag{1.24}$$

Las ecuaciones (1.24) son conocidas como las *ecuaciones de Navier-Stokes*, y describen el movimiento de un fluido viscoso. Si el fluido es además incompresible, esto es, si la densidad de masa es constante, por la ecuación de continuidad (1.2) tenemos que $\operatorname{div} u = 0$ y las ecuaciones (1.24) se reducen a

$$\rho\,(u_t + (u \cdot \operatorname{grad})u) = -\operatorname{grad} p + \nu\,\Delta u + \rho g. \tag{1.25}$$

Si además de la incompresibilidad, suponemos que el flujo es estacionario, es decir, que u es sólo función de la posición y no del tiempo tenemos

$$\rho(u \cdot \operatorname{grad})u = -\operatorname{grad} p + \nu\,\Delta u + \rho g. \tag{1.26}$$

Veremos que, por las hipótesis de nuestro problema particular y que serán expuestas en la siguiente sección, las ecuaciones (1.26) son las ecuaciones de movimiento del flujo considerado.

1.2 El problema particular y las condiciones de frontera

En esta sección se plantea el problema de Navier-Stokes que deseamos estudiar, mediante la formulación de hipótesis con respecto a las características del flujo, como son, incompresibilidad e independencia con respecto al tiempo, entre otras, y a la geometría del espacio físico que ocupa. También se establecen las ecuaciones de las condiciones en la frontera que debe satisfacer la solución buscada.

Las hipótesis que haremos con respecto a nuestro flujo son las siguientes :

1. Consideraremos un fluido viscoso, incompresible, que fluye en una región acotada en z de $\mathbb{R}^3$ y sobre el plano x, y.

2. El flujo es *estacionario*, es decir, la distribución de velocidades y la presión no dependen del tiempo.

3. Supondremos que la descripción del movimiento del fluido se hace desde un sistema de referencia que se mueve con velocidad constante $c = (c_1, c_2, 0)$, y además, que el flujo es periódico en las variables x y y.

4. La frontera que limita al fluido con el resto del espacio en la variable z es una *frontera libre*, la cual denotamos por Γ y depende solamente de x y de y en el sistema de referencia escogido.

5. En el exterior, es decir, en la región no acotada en z, existe un gradiente de presión constante $\partial p_a / \partial x = -a$.

6. La superficie libre, que sirve de interfase entre el fluido y el exterior, se comporta como una membrana elástica.

Las condiciones (1) y (2) tienen un evidente origen físico: pensemos en un fluido viscoso, incompresible, por ejemplo, agua, que fluye de forma estacionaria sobre una superficie no acotada. Las condiciónes (3) y (4) nos permiten considerar que la frontera libre Γ se mantiene fija en el tiempo en nuestro sistema de referencia, y la condición (5) se explica si pensamos que existe otro fluido en el exterior como aire, por ejemplo, y que el gradiente de presión constante se debe al viento.

Observaciones experimentales de interfases entre fluidos de diferente naturaleza permiten justificar la hipótesis (6). Veremos que ésta es muy importante físicamente para formular una de las condiciones de frontera.

Una representación de nuestro problema se puede apreciar en la figura 0.1, página 8.

Dado que el flujo es periódico, podemos acotar nuestro dominio y considerar soluciones en

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y,z)\ :\ 0 \le x \le x_0, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le \phi(x,y)\} \subset \mathbb{R}^3, \tag{1.27}$$

donde $\Gamma = \{z = \phi(x,y)\}$ es la superficie libre y el flujo es de periodo x_0 en x y de periodo 1 en y.

Por la condición (1), la densidad de masa es constante y por simplicidad asumiremos que en las unidades físicas adecuadas $\rho = 1$. Por las condiciones (1) y (2), el flujo es estacionario e incompresible, y si suponemos que la densidad de la fuerza debida a a la gravedad es $f_G = (0,0,-g)$, las ecuaciones (1.26) describen el movimiento del fluido:

$$\left.\begin{array}{c} -\nu\,\Delta u + \operatorname{grad} p + (u \cdot \operatorname{grad})u = f_G \\ \operatorname{div} u = 0 \end{array}\right\} \text{ en } \Omega. \tag{1.28}$$

La superficie libre es $\Gamma = \{z = \phi(x,y)\}$, donde suponemos que ϕ es una función de clase por lo menos C^2; más adelante daremos condiciones específicas para Γ.

Llamemos

$$\Gamma_b \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y,0)\ :\ 0 \le x \le x_0, 0 \le y \le 1\}, \tag{1.29}$$

a la base del dominio Ω. Por la condición (3), la velocidad en Γ_b debe ser igual a $-c$, la cual es una condición de no resbalamiento. Así, nuestra primera condición de frontera es

$$u|_{\Gamma_b} = -c. \tag{1.30}$$

Si tomamos un punto del fluido en $\Gamma = \{z = \phi(x,y)\}$ y tomamos la derivada con respecto al tiempo se obtiene

$$u|_\Gamma = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \\ \phi(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \phi_x x' + \phi_y y' \end{pmatrix}.$$

El vector normal a Γ es $(-\phi_x, -\phi_y, 1)$, por lo que, si n denota al vector normal unitario en cualquier punto de Γ, nuestra segunda condición de frontera es

$$u \cdot n|_{\Gamma} = 0. \tag{1.31}$$

Hemos supuesto que la frontera libre Γ es independiente del tiempo. ¿Que pasaría si la componente tangencial de la densidad de fuerza superficial sobre Γ fuese distinta de cero? La respuesta es una deformación en la frontera y por ende, una contradicción con la hipótesis de que Γ no cambia en el tiempo. Si llamamos T_I y T_{II} a los tensores de esfuerzos del fluido considerado y del exterior (aire), respectivamente, y si suponemos que el fluido exterior es ideal y no viscoso, entonces éste ejerce una fuerza normal sobre Γ cuya componente tangencial es cero. Si τ es cualquier vector tangencial a la superficie, en las direcciones tangenciales tenemos

$$\tau \cdot T_I n = \tau \cdot T_{II} n,$$

ya que el punto sobre la superficie solo tiene desplazamientos normales. Esto es consecuencia de la hipótesis (6), ya que la aproximación de la superficie por una membrana implica que los desplazamientos tangenciales son de orden más alto. Como hemos supuesto que el fluido externo es ideal, entonces $T_{II} = -p_a I$ (donde p_a es el gradiente de presión exterior constante) y $T_{II}n$ es normal a Γ, y por ende,

$$\tau \cdot T_I n = \tau \cdot T_{II} n = 0.$$

De esta forma, nuestra condición tangencial de frontera es

$$\tau \cdot Tn|_{\Gamma} = 0, \tag{1.32}$$

para todo vector tangencial τ.

¿Que pasa con la componente normal de la densidad de fuerzas $n \cdot Tn$? Esperamos que haya una discontinuidad en la fuerza normal, debido al gradiente de presión externo. En este punto es necesario hacer un análisis más detallado, razón por la que el cálculo de dicha discontinuidad se hace en la siguiente sección.

Una de nuestras hipótesis (3) es que el flujo es periódico en x y y; esto significa que u_i y $\partial u_i/\partial x_j$ son de periodo x_0 en x y de periodo 1 en y. Si denotamos

$$\partial^\alpha u = \frac{\partial^\alpha u}{\partial x_j^\alpha}\ \forall j, \text{ con } |\alpha| \le 1,$$

entonces deben cumplirse, por periodicidad, las siguientes condiciones de frontera :

$$\left.\begin{array}{r}\partial^\alpha u|_{x=0} = \partial^\alpha u|_{x=x_0} \\ \partial^\alpha u|_{y=0} = \partial^\alpha u|_{y=1}\end{array}\right\} \quad \forall|\alpha| \leq 1. \tag{1.33}$$

Así, nuestro problema queda descrito por el siguiente conjunto de ecuaciones :

$$\left.\begin{array}{c}-\nu\,\Delta u + \operatorname{grad} p + (u\cdot\operatorname{grad})u = f_G \\ \operatorname{div} u = 0\end{array}\right\} \quad \text{en } \Omega. \tag{1.34}$$

$$\left.\begin{array}{r}\partial^\alpha u|_{x=0} = \partial^\alpha u|_{x=x_0} \\ \partial^\alpha u|_{y=0} = \partial^\alpha u|_{y=1}\end{array}\right\} \quad \forall|\alpha| \leq 1. \tag{1.35}$$

$$u|_{\Gamma_b} = -c. \tag{1.36}$$

$$u\cdot n|_\Gamma = 0. \tag{1.37}$$

$$\tau\cdot Tn|_\Gamma = 0, \tag{1.38}$$

donde

u = distribución de velocidades
p = presión hidrodinámica
ν = coeficiente de viscosidad cinemática
f_G = densidad de fuerza de gravedad
$c = (c_1, c_2, 0)$ es la velocidad constante
T = tensor de esfuerzos : $T_{ij} = -p\delta_{ij} + \nu(u_{i_{x_j}} + u_{j_{x_i}})$
n = vector unitario normal a Γ
τ = cualquier vector unitario tangente a Γ

y Ω está definido por (1.27) y $\Gamma = \{z = \phi(x,y)\}$.

La última condición de frontera es la siguiente :

$$n\cdot Tn|_\Gamma = -p_a + 2\kappa H, \tag{1.39}$$

donde

p_a = presión exterior
κ = coeficiente de tensión superficial
H = curvatura media de la superficie.

A continuación justificaremos la ecuación (1.39).

1.2.1 La componente normal de la densidad de fuerzas en la frontera libre.

Consideremos dos medios continuos como en nuestro problema, cuya interfase es una delgada capa de transición, la cual es tan delgada que podemos aproximarla por una superficie. Veremos que debido a que los medios son de diferente naturaleza, existe una discontinuidad en la componente normal de la fuerza superficial en cada punto de la interfase, que es proporcional a la tensión superficial de la misma.

Supongamos que dicha interfase es una superficie de la forma $\{z = \phi(x,y)\}$, en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, cuya intersección con el plano (x,y) denotamos por $D \subset \mathbb{R}^2$. Llamemos (I) y (II) a los medios continuos, y tomemos la normal exterior a la superficie apuntando hacia (II). Un esquema del sistema considerado se muestra en la figura 1.7.

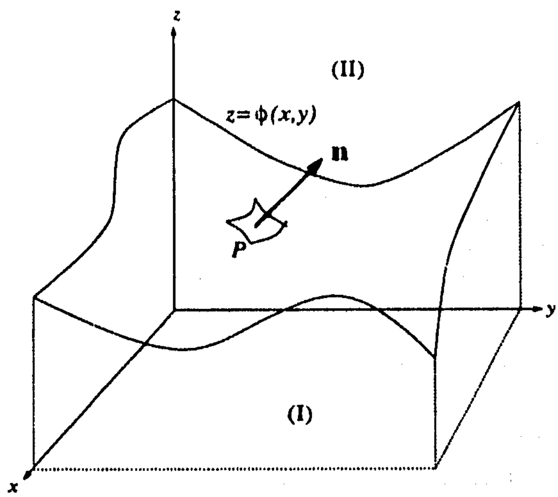

Figura 1.6 : Frontera entre dos fluidos.

Sea T_I el tensor de esfuerzos del medio (I) y T_{II} su equivalente para el medio (II). La fuerza superficial en un punto P de la superficie en dirección normal es

$$n \cdot (\bar{t}_I - \bar{t}_{II}) = n \cdot (T_I n - T_{II} n).$$

Por la hipótesis (6), el comportamiento mecánico de la interfase es como el de una membrana elástica; esta condición es la característica física más importante de la interfase entre los medios continuos que estamos considerando, ya que nos permite estimar su energía potencial, en términos de la deformación que sufre debido a la fuerza normal aplicada. Así, asumiremos que la energía potencial es proporcional a la diferencia en el área de la superficie suponiendo que parte del reposo, es decir,

$$E = \int_B \kappa(\sqrt{1 + \phi_x^2 + \phi_y^2} - 1)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y, \tag{1.40}$$

donde κ es una constante conocida como ***coeficiente de tensión superficial*** y B es un dominio local tal que $B \subset D \subset \mathbb{R}^2$, y lo suficientemente pequeño como para que κ se mantenga constante. Esta aproximación de la energía potencial es el equivalente en dos dimensiones a la ley de Hooke.

Ahora tomemos una deformación de la membrana debida a las fuerzas normales que actúan sobre ella en la región B, que matemáticamente se expresa como una función $\gamma \in C^\infty(B)$, de manera que $\phi_1(x, y) = \phi(x, y) + \gamma(x, y)$, ($\gamma$ es pequeño). Véase la figura 1.8.

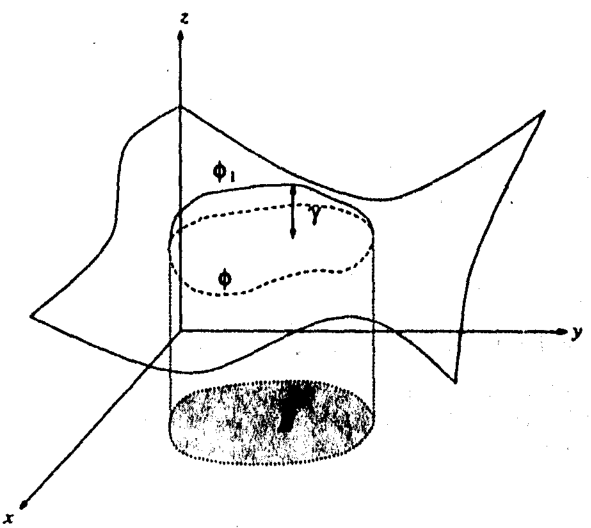

Figura 1.7 : Deformación de la membrana.

La energía potencial de la superficie deformada es

$$E_1 = \int_B \kappa(\sqrt{1 + \phi_{1x}^2 + \phi_{1y}^2} - 1)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

y definimos el funcional $A(\phi) : C^1(B) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$A(\phi) = \int_B \sqrt{1 + \phi_x^2 + \phi_y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y, \tag{1.41}$$

que es el área de la superficie. Por lo tanto el cambio en la energía potencial de la superficie tras haber sufrido la deformación es

$$\begin{aligned} E_1 - E &= \kappa \int_B \sqrt{1 + {\phi_1}_x^2 + {\phi_1}_y^2} - \sqrt{1 + \phi_x^2 + \phi_y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\ &= \kappa(A(\phi_1) - A(\phi)). \end{aligned}$$

En otras palabras, el cambio en la energía potencial es proporcional al cambio en el área de la superficie en la región deformada. Por otro lado, sabemos que este cambio debe ser igual al trabajo realizado por la fuerza neta normal en la superficie, que se expresa como

$$-\int_B \gamma\, (\bar{t}_{I\,n} - \bar{t}_{II\,n})\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

ya que el desplazamiento vertical es precisamente γ y tomamos la normal exterior apuntando hacia el medio (II). De esta forma obtenemos

$$-\int_B \gamma\, (\bar{t}_I - \bar{t}_{II}) \cdot n\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \kappa(A(\phi_1) - A(\phi)). \tag{1.42}$$

Aquí n es la normal unitaria a $\{z = \phi(x, y)\}$ para todo $(x, y) \in B$.

Dado que $A(\phi)$ es un funcional en $C^\infty(B)$ podemos aproximar $A(\phi_1) - A(\phi)$ por $DA(\phi)\,\gamma$, donde $DA(\phi)$ es la derivada de Fréchet del funcional $A(\phi)$, que en este caso es un funcional de la forma

$$\int_B F(x, y, \phi, \phi_x, \phi_y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Se puede demostrar (véase [Ize 87, pags. 29-30]) que la derivada de Fréchet en dirección γ de un funcional de este tipo es

$$DA(\phi)\gamma = \int_B (F_\phi \gamma + F_{\phi_x}\gamma_x + F_{\phi_y}\gamma_y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y, \tag{1.43}$$

razón por la cual, ya que en este caso $F = \sqrt{1+\phi_x^2+\phi_y^2}$, podemos hacer la siguiente aproximación

$$A(\phi_1) - A(\phi) = \int_B \frac{\phi_x\gamma_x + \phi_y\gamma_y}{\sqrt{1+\phi_x^2+\phi_y^2}}\, dx\, dy. \tag{1.44}$$

De la ecuación (1.43), sabiendo que $F_\phi = 0$ y aplicando el teorema de la divergencia se obtiene

$$A(\phi_1) - A(\phi) = -\int_B \left((F_{\phi_x})_x + (F_{\phi_y})_y\right)\gamma\, dx\, dy + \int_{\partial B} \gamma \begin{pmatrix} F_{\phi_x} \\ F_{\phi_y} \end{pmatrix} \cdot n\, dS,$$

para toda $\gamma \in C^\infty(B)$, donde n es la normal exterior a $\partial B \subset \mathbb{R}^2$.

Ahora bien, si en particular escogemos $\gamma \in C_0^\infty(B)$, la segunda integral de línea del lado derecho es cero y por lo tanto

$$A(\phi_1) - A(\phi) = -\int_B \left((F_{\phi_x})_x + (F_{\phi_y})_y\right)\gamma\, dx\, dy.$$

El hecho de que $\gamma = 0$ en ∂B significa que la deformación es tal que $\phi = \phi_1$ en ∂B, es decir, ϕ_1 es una protuberancia en la membrana debida a las fuerzas normales que actúan sobre ella (véase figura 1.8).

Haciendo los cálculos se obtiene

$$\begin{aligned}
(F_{\phi_x})_x + (F_{\phi_y})_y &= \frac{\phi_{xx}+\phi_{yy}}{\sqrt{1+\phi_x^2+\phi_y^2}} - \frac{2\phi_{xy}\phi_x\phi_y + \phi_y^2\phi_{yy} + \phi_x^2\phi_{xx}}{(1+\phi_x^2+\phi_y^2)^{3/2}} \\
&= \frac{\Delta\phi}{(1+|\nabla\phi|^2)^{1/2}} + \nabla\left(\frac{1}{(1+|\nabla\phi|^2)^{1/2}}\right)\cdot\nabla\phi \\
&= \operatorname{div}\left(\frac{\nabla\phi}{(1+|\nabla\phi|^2)^{1/2}}\right) = 2H,
\end{aligned}$$

donde H es la curvatura media de la superficie $\{z = \phi(x, y,)\}$ (véase apéndice B, página 179).

De esta forma, por la ecuación (1.42) y sustituyendo al tensor de esfuerzos, tenemos

$$-\int_B \gamma(n\cdot(T_I n - T_{II} n) - 2H)\, dx\, dy = 0, \tag{1.45}$$

$\forall\gamma \in C_0^\infty(B)$. Por el lema de Haar (consúltese [Ize 87, pag. 48]) podemos afirmar que

$$n \cdot T_I n - n \cdot T_{II} n = 2\kappa H$$

en B.

Como B es una región pequeña y arbitraria, y T es evaluado en $\{z = \phi(x, y)\}$, podemos concluir que para todo punto en Γ se debe cumplir

$$n \cdot T_I n|_\Gamma = n \cdot T_{II} n|_\Gamma + 2\kappa H. \tag{1.46}$$

Para nuestro problema sabemos que el medio (II) es un fluido ideal y que el gradiente de presión es constante, por lo que $n \cdot T_{II} n|_\Gamma = -p_a$ y por ende

$$n \cdot T n|_\Gamma = -p_a + 2\kappa H,$$

que es la condición de frontera (1.39).

Capítulo 2

El problema perturbado

Como vimos en el capítulo anterior, hemos definido un problema con frontera libre para las ecuaciones de Navier-Stokes en el caso estacionario, con condiciones de frontera y de periodicidad para el flujo. Si suponemos que el dominio es conocido, fijando una condición para la frontera Γ, es posible encontrar una solución trivial al sistema que llamamos ***solución básica.***

Nuestra hipótesis más importante para plantear nuevamente el problema proviene de buscar soluciones que constituyan una perturbación del flujo dado por la solución básica en el dominio original, el cual suponemos es una ligera deformación del dominio conocido. El objetivo de este capítulo es encontrar las ecuaciones para dicha perturbación.

Como se ha visto anteriormente, el problema completo está definido por el siguiente conjunto de ecuaciones :

$$\left.\begin{array}{c} -\nu\,\Delta u + \operatorname{grad} p + (u \cdot \operatorname{grad})u = f_G \\ \operatorname{div} u = 0 \end{array}\right\} \text{ en } \Omega. \tag{2.1}$$

$$\left.\begin{array}{c} \partial^\alpha u|_{x=0} = \partial^\alpha u|_{x=x_0} \\ \partial^\alpha u|_{y=0} = \partial^\alpha u|_{y=1} \end{array}\right\} \forall |\alpha| \leq 1. \tag{2.2}$$

$$u|_{\Gamma_b} = -c. \tag{2.3}$$

$$u \cdot n|_\Gamma = 0. \tag{2.4}$$

$$\tau \cdot Tn|_\Gamma = 0, \tag{2.5}$$

$$n \cdot Tn|_\Gamma = -p_a + 2\kappa H, \tag{2.6}$$

donde

u = distribución de velocidades
p = presión hidrodinámica
ν = coeficiente de viscosidad cinemática
f_G = densidad de fuerza de gravedad
$c = (c_1, c_2, 0)$ es la velocidad constante
T = tensor de esfuerzos : $T_{ij} = -p\delta_{ij} + \nu(u_{i_{x_j}} + u_{j_{x_i}})$
n = vector unitario normal a Γ
τ = cualquier vector unitario tangente a Γ
p_a = presión exterior
κ = coeficiente de tensión superficial
H = curvatura media de la superficie.

y Ω está definido por (1.27) y $\Gamma = \{z = \phi(x, y)\}$.

La superficie libre Γ y el dominio Ω dependen claramente de la solución, y la ecuación (2.6) es una condición para la función $\phi(x, y)$ que define la frontera Γ.

Las ecuaciones (2.1) son las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido viscoso, incompresible y estacionario en Ω. Asimismo, las condiciones de periodicidad (2.2) para u deben satisfacerse en los extremos del dominio : $x = 0$, $x = x_0$ y $y = 0$, $y = 1$. Aquí $\partial^\alpha u$ denota cualquier derivada en x, y o z (x_1, x_2 o x_3) de orden $|\alpha| \leq 1$.

La ecuación (2.3) es la condición de no resbalamiento en el sistema móvil de referencia. Como se ha hecho notar, la condición (2.4) es consecuencia directa de la existencia de la frontera.

Por último, las ecuaciones (2.5) y (2.6) son resultado del hecho de que para el flujo el esfuerzo superficial no tiene componente en dirección tangencial en la frontera, y de que existe una discontinuidad en la componente normal del mismo esfuerzo superficial, proporcional a la curvatura media de la superficie, respectivamente.

2.1 La solución básica

En el caso en que Ω es un dominio conocido, para el cual Γ está contenida en un plano $\{z = \text{cte.}\}$, podemos hallar una solución trivial (U_0, P_0) y para ello haremos las siguientes hipótesis :

1. Γ es parte del plano $\{z = 1\}$.

2. U_0 es sólo función de z.

3. $\operatorname{grad} P_0 = (-a, 0, -g)$ con $a =$ cte. y $g =$ aceleración de la gravedad.

4. $p_a = -ax$

Llamemos

$$\Omega_0 \equiv \{(x,y,z) \,:\, 0 \leq x \leq x_0 \,;\, 0 \leq y \leq 1 \,;\, 0 \leq z \leq 1\} \tag{2.7}$$

$$\Gamma_0 \equiv \{(x,y,z) \,:\, 0 \leq x \leq x_0 \,;\, 0 \leq y \leq 1 \,;\, z = 1\}. \tag{2.8}$$

Podemos hallar fácilmente una solución a las ecuaciones (2.1) - (2.6) en Ω_0 y Γ_0, que satisfaga las condiciones (1) - (4). Esta solución representa el caso de flujo uniforme en x y y con perfil parabólico en z (véase figura 2.1).

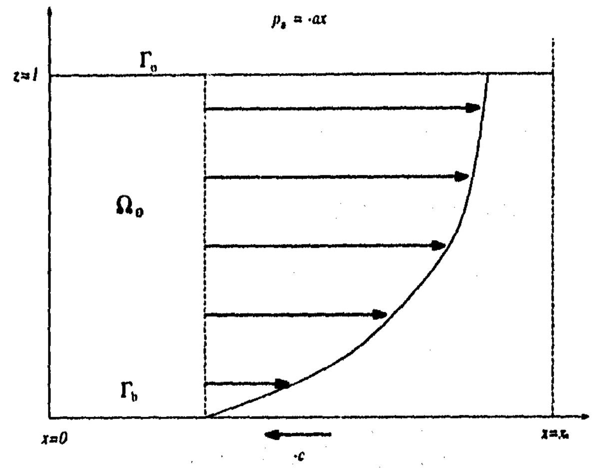

Figura 2.1 : Solución básica U_0.

A continuación haremos el cálculo de dicha solución (U_0, P_0). Por la condición (2) sabemos que

$$U_0 = \begin{pmatrix} U_1(z) \\ U_2(z) \\ U_3(z) \end{pmatrix}.$$

Por (2.1), $\operatorname{div} U_0 = U_{3_z} = 0$ en Ω_0, por lo que $U_3 =$ constante. Ahora, usando (2.3) resulta que

$$U_0|_{\Gamma_b} = \begin{pmatrix} -c_1 \\ -c_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad U_3 = \text{constante} \equiv 0. \tag{2.9}$$

Por otro lado, por la hipótesis (3),

$$\operatorname{grad} P_0 = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad P_0 = -ax - gz + k_1, \tag{2.10}$$

con k_1 constante.

Dada la condición (2) y por la ecuación (2.9) escribimos

$$(U_0 \cdot \operatorname{grad})U_0 = U_1 U_{0_x} + U_2 U_{0_y} + U_3 U_{0_z} = 0.$$

También por (2) tenemos $\Delta U_0 = U_{0_{zz}}$, por lo que la ecuación (2.1) se puede escribir

$$-\nu U_{0_{zz}} + \operatorname{grad} P_0 = f_G \quad \text{en } \Omega_0,$$

es decir,

$$-\nu \begin{pmatrix} U_{1_{zz}} \\ U_{2_{zz}} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}.$$

De este modo obtenemos

$$\begin{aligned} \nu U_{1_{zz}} + a &= 0 \\ \nu U_{2_{zz}} &= 0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Integrando las ecuaciones (2.11) se obtiene

$$U_1 = -\frac{a}{2\nu}z^2 + d_1 z + d_2 \tag{2.12}$$

$$U_2 = e_1 z + e_2, \tag{2.13}$$

donde d_1, d_2, e_1 y e_2 son constantes. Ahora, por la ecuación (2.3) y evualando en $z = 0$ tenemos que $d_2 = -c_1$ y $e_2 = -c_2$; de esta forma

$$\begin{gathered} U_0 = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2\nu}z^2 + d_1 z - c_1 \\ e_1 z - c_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ P_0 = -ax - gz + k_1. \end{gathered} \tag{2.14}$$

Si $\Gamma_0 = \{z = 1\}$ la normal exterior es $n = (0,0,1)$. Observamos que la condición de frontera (2.4) se satisface naturalmente si U_0 tiene la forma de (2.14) :

$$U_0 \cdot n|_\Gamma = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2\nu} + d_1 - c_1 \\ e_1 - c_2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Veamos ahora que forma tiene el tensor de esfuerzos. Escribiendo T explícitamente (véase página 36) obtenemos

$$T = \begin{pmatrix} ax + gz - k_1 & 0 & -az + \nu d_1 \\ 0 & ax - gz - k_1 & \nu e_1 \\ -az + \nu d_1 & \nu e_1 & ax - gz - k_1 \end{pmatrix}.$$

Así notamos que en Γ_0 $(z = 1, n = (0,0,1))$ el esfuerzo superficial es

$$\bar{t} = Tn|_{\Gamma_0} = \begin{pmatrix} -a + \nu d_1 \\ \nu e_1 \\ ax - g - k_1 \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, como parte de nuestras condiciones de frontera pedimos que (2.5) se cumpla para cualquier vector τ tangencial a Γ_0. Tomemos los vectores $\tau_1 = (1,0,0)$ y $\tau_2 = (0,1,0)$; escribiendo (2.5) para ambos llegamos a

$$\tau_1 \cdot Tn = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a + \nu d_1 \\ \nu e_1 \\ ax - g - k_1 \end{pmatrix} = -a + \nu d_1 = 0$$

$$\tau_2 \cdot Tn = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a + \nu d_1 \\ \nu e_1 \\ ax - g - k_1 \end{pmatrix} = \nu e_1 = 0,$$

es decir,

$$d_1 = \frac{a}{\nu} \quad \text{y} \quad e_1 = 0.$$

Por la condición normal de frontera (2.6) podemos escribir

$$n \cdot Tn|_{\Gamma_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a + \nu d_1 \\ \nu e_1 \\ ax - g - k_1 \end{pmatrix} = ax + g - k_1 = -p_a + 2\kappa H. \tag{2.15}$$

Finalmente, dado que Γ_0 es una parte del plano $\{z = 1\}$ la curvatura media es cero ($H = 0$) y por la hipótesis (4) la ecuación (2.15) implica que

$$ax + g - k_1 = -p_a = ax \quad \Rightarrow \quad k_1 = g.$$

De esta forma hemos calculado la solución básica en el dominio Ω_0 :

$$U_0 = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2\nu}z^2 + \frac{a}{\nu}z - c_1 \\ -c_2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

$$P_0 = -ax + g(1 - z). \tag{2.17}$$

(U_0, P_0) es solución de (2.1) - (2.5) en Ω_0 por construcción; las condiciones de periodicidad (2.2) se satisfacen claramente pues U_0 no depende de x ni de y.

2.2 Planteamiento del problema perturbado

Hasta el momento hemos encontrado una solución trivial a nuestro problema cuando el dominio es conocido y la frontera es parte del plano $\{z = 1\}$, que corresponde a un flujo con perfil parabólico en z. ¿Qué pasa si este flujo es perturbado?, es decir, ¿qué tipo de soluciones podemos encontrar si suponemos que la frontera libre Γ de nuestro problema original es una ligera deformación de la frontera plana? Para ello hemos de considerar que

Γ es de la forma $\{z = 1 + \xi\}$, donde $\xi(x, y)$ es la perturbación de la frontera plana, función de x y y. Ahora bien, dado que $\Omega = \{0 \leq x \leq x_0\ ,\ 0 \leq y \leq 1\ ;\ 0 \leq z \leq 1+\xi(x,y)\} \neq \Omega_0$, no es claro qué entendemos por soluciones del tipo $(u + U_0, p + P_0)$, y por lo tanto es necesario, a partir de la perturbación ξ, definir una transformación natural de Ω_0 a Ω y considerar soluciones de la forma $(u + u_0, p + p_0)$, donde (u_0, p_0) resulta de transformar la solución básica al nuevo dominio.

El propósito de este capítulo es precisamente plantear las ecuaciones para la perturbación (u, p, ξ), en virtud de que la condición normal de frontera provee la ecuación para la frontera libre Γ.

2.2.1 Las transformaciones Φ y Ψ

Denotemos cualquier punto de Ω_0 por (x, y, z), y de Ω por $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Supongamos que existe una transformación definida de manera natural como

$$\Phi : \Omega_0 \to \Omega,$$

dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{\Phi} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(1+\xi(x,y)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

Un esquema de la transformación se puede apreciar en la figura 2.2.

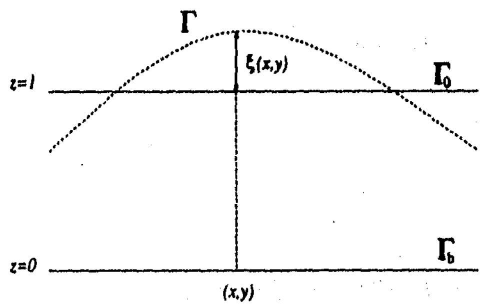

Figura 2.2 : La perturbación ξ.

La transformación así definida es tal que la frontera Γ es la gráfica de la función

$1+\xi(x,y)$. Asumiremos que la perturbación $\xi(x,y)$ es una función al menos de clase C^2 en el dominio Γ_b, y que satisface condiciones de periodicidad en x y en y, es decir,

$$\left.\begin{aligned} \partial^\alpha\xi|_{x=0} &= \partial^\alpha\xi|_{x=x_0} \\ \partial^\alpha\xi|_{y=0} &= \partial^\alpha\xi|_{y=1} \end{aligned}\right\} \ \forall|\alpha|\leq 1. \tag{2.19}$$

Conocida Φ podemos calcular la matriz jacobiana y el tensor métrico asociados a la transformación. La matriz jacobiana es

$$J(\Phi)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ z\xi_x & z\xi_y & 1+\xi \end{pmatrix}, \tag{2.20}$$

la cual nos permite definir la matriz funcional como

$$D(\Phi)\stackrel{\text{def}}{=}J(\Phi)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & z\xi_x \\ 0 & 1 & z\xi_y \\ 0 & 0 & 1+\xi \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

Las componentes del tensor métrico se definen como $G_{ij}\stackrel{\text{def}}{=}\partial_i\Phi\cdot\partial_j\Phi$, donde $\partial_i\Phi=(\Phi_{1x_i},\Phi_{2x_i},\Phi_{3x_i})$, por lo que

$$G=\begin{pmatrix} 1+(z\xi_x)^2 & z^2\xi_x\xi_y & z\xi_x(1+\xi) \\ z^2\xi_x\xi_y & 1+(z\xi_y)^2 & z\xi_y(1+\xi) \\ z\xi_x(1+\xi) & z\xi_y(1+\xi) & (1+\xi)^2 \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

Claramente, el determinante es $\det G=(1+\xi)^2$. Por otro lado, el inverso del tensor métrico está dado por

$$G^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-z\xi_x}{1+\xi} \\ 0 & 1 & \frac{-z\xi_y}{1+\xi} \\ \frac{-z\xi_x}{1+\xi} & \frac{-z\xi_y}{1+\xi} & \frac{1+(z\xi_x)^2+(z\xi_y)^2}{(1+\xi)^2} \end{pmatrix}. \tag{2.23}$$

Notamos que para cualquier función definida en Ω, $\bar{F}=\bar{F}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\stackrel{\text{def}}{=}F(x,y,z)$ se tiene

$$\nabla_x F=\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}=J(\Phi)^{\mathrm{T}}\nabla_{\bar{x}}\bar{F}|_{(x,y,z)}=D(\Phi)\nabla_{\bar{x}}\bar{F}|_{(x,y,z)}. \tag{2.24}$$

La transformación inversa de Φ, que denotamos por

$$\Psi \stackrel{\text{def}}{=} \Phi^{-1} : \Omega \rightarrow \Omega_0,$$

es claramente

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot \Psi} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \frac{\bar{z}}{(1+\xi(\bar{x},\bar{y}))} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{2.25}$$

De la misma forma la matriz jacobiana asociada es

$$J(\Psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-\bar{z}\xi_x}{(1+\xi)^2} & \frac{-\bar{z}\xi_y}{(1+\xi)^2} & \frac{1}{1+\xi} \end{pmatrix}, \tag{2.26}$$

y la matriz funcional se escribe de la siguiente manera

$$D(\Psi) \stackrel{\text{def}}{=} J(\Psi)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-\bar{z}\xi_x}{(1+\xi)^2} \\ 0 & 1 & \frac{-\bar{z}\xi_y}{(1+\xi)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+\xi} \end{pmatrix}. \tag{2.27}$$

El tensor métrico de esta transformación ($H_{ij} = \partial_i \Psi \cdot \partial_j \Psi$) tiene la siguiente forma

$$H = \begin{pmatrix} 1 + \frac{(\bar{z}\xi_x)^2}{(1+\xi)^4} & \frac{\bar{z}\xi_x\xi_y}{(1+\xi)^4} & \frac{-\bar{z}\xi_x}{(1+\xi)^3} \\ \frac{\bar{z}\xi_x\xi_y}{(1+\xi)^4} & 1 + \frac{(\bar{z}\xi_y)^2}{(1+\xi)^4} & \frac{-\bar{z}\xi_y}{(1+\xi)^3} \\ \frac{-\bar{z}\xi_x}{(1+\xi)^3} & \frac{-\bar{z}\xi_y}{(1+\xi)^3} & \frac{1}{(1+\xi)^2} \end{pmatrix}, \tag{2.28}$$

mientras que su inverso está dado por

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\bar{z}\xi_x}{1+\xi} \\ 0 & 1 & \frac{\bar{z}\xi_y}{1+\xi} \\ \frac{\bar{z}\xi_x}{1+\xi} & \frac{\bar{z}\xi_y}{1+\xi} & \frac{\bar{z}^2({\xi_x}^2+{\xi_y}^2)+(1+\xi)^4}{(1+\xi)^2} \end{pmatrix}. \tag{2.29}$$

Claramente el determinante del tensor métrico es $\det H = 1/(1+\xi)^2$.

De la misma forma que en el caso de Φ, notamos que para cualquier función definida en Ω_0, $F = F(x, y, z) \stackrel{\Psi}{=} \bar{F}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ se tiene

$$\nabla_{\bar{x}}\tilde{F} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_{\bar{x}} \\ \tilde{F}_{\bar{y}} \\ \tilde{F}_{\bar{z}} \end{pmatrix} = J(\Psi)^{\mathrm{T}}\nabla_x F|_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})} = D(\Psi)\nabla_x F|_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}. \tag{2.30}$$

Finalmente escribimos las matrices inversas de las jacobianas correspondientes en Ω y Ω_0:

$$J(\Phi)^{-1} = J(\Psi)|_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-z\xi_x}{1+\xi} & \frac{-z\xi_y}{1+\xi} & \frac{1}{1+\xi} \end{pmatrix}, \tag{2.31}$$

$$J(\Psi)^{-1} = J(\Phi)|_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\bar{z}\xi_{\bar{x}}}{1+\xi} & \frac{\bar{z}\xi_{\bar{y}}}{1+\xi} & 1+\xi \end{pmatrix}. \tag{2.32}$$

2.2.2 Vectores normales y tangentes

Para formular el problema perturbado nos será útil transformar, de Ω a Ω_0 y viceversa, los vectores normales y tangentes en la superficie libre que intervienen en las condiciones de frontera en Γ.

De Ω a Ω_0 :

El vector normal unitario en Γ es

$$\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla\xi|^2}}\begin{pmatrix} -\xi_{\bar{x}} \\ -\xi_{\bar{y}} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\nabla(\bar{z}-\xi(\bar{x},\bar{y}))}{|\nabla(\bar{z}-\xi(\bar{x},\bar{y}))|}.$$

Si denotamos $\tilde{F}(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \equiv \bar{z}-\xi(\bar{x},\bar{y}) \stackrel{\Phi}{=} F(x,y,z)$, y aplicando la fórmula (2.24), obtenemos el vector transformado a Ω_0

$$\begin{aligned} \Psi(\bar{n}) &= \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla\xi|^2}} J(\Phi)^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} -\xi_{\bar{x}} \\ -\xi_{\bar{y}} \\ 1 \end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y,z)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla\xi|^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & z\xi_x \\ 0 & 1 & z\xi_y \\ 0 & 0 & 1+\xi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\xi_x \\ -\xi_y \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla\xi|^2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+\xi \end{pmatrix},$$

que denotamos

$$n = \Psi(\bar{n}) = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla\xi|^2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+\xi \end{pmatrix}, \tag{2.33}$$

y es evidentemente un vector normal a la superficie Γ_0.

Tomemos ahora un vector $\bar{M}$ en la superficie Γ y $\bar{T}$ tangente a ella; es claro que $\bar{M} + h\bar{T}(h)$ también es un vector sobre Γ. De esta forma el vector

$$\frac{\Psi(\bar{M} + h\bar{T}(h)) - \Psi(\bar{M})}{h},$$

es un vector en la superficie Γ_0. Haciendo una expansión en serie de Taylor de la expresión anterior se obtiene

$$\frac{\Psi(\bar{M} + h\bar{T}(h)) - \Psi(\bar{M})}{h} = J(\Psi)\bar{T}(h) + O(h),$$

por lo que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Psi(\bar{M} + h\bar{T}(h)) - \Psi(\bar{M})}{h} = J(\Psi)\bar{T},$$

de donde se concluye que $J(\Psi)\bar{T}$ es tangencial a Γ_0. Por lo tanto si tenemos un vector $\bar{\tau}$ tangente a Γ, su transformado es el vector $\Psi(\bar{\tau}) = J(\Psi)\bar{\tau}$, tangente a Γ_0.

Consideremos los siguientes vectores ortogonales y tangentes unitarios a Γ

$$\bar{\tau}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi_{\bar{x}}^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \xi_{\bar{x}} \end{pmatrix}, \tag{2.34}$$

$$\bar{\tau}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi_{\bar{x}}^2}}\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla\xi|^2}}\begin{pmatrix} -\xi_{\bar{x}}\xi_{\bar{y}} \\ 1+\xi_{\bar{x}}{}^2 \\ \xi_{\bar{y}} \end{pmatrix}, \tag{2.35}$$

de forma que $\forall \bar{\tau}$ tangente, $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\bar{\tau} = \alpha_1 \bar{\tau}^{(1)} + \alpha_2 \bar{\tau}^{(2)}$.
Transformándolos a Ω_0 obtenemos

$$
\begin{aligned}
\tau^{(1)} = \Psi(\bar{\tau}^{(1)}) &= J(\Psi)\bar{\tau}^{(1)}|_{(x,y,z)\in\Gamma_0} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\xi_x^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-z\xi_x}{1+\xi} & \frac{-z\xi_y}{1+\xi} & \frac{1}{1+\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \xi_x \end{pmatrix} \Bigg|_{\Gamma_0} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\xi_x^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{2.36}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau^{(2)} = \Psi(\bar{\tau}^{(2)}) &= J(\Psi)\bar{\tau}^{(2)}|_{(x,y,z)\in\Gamma_0} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\xi_x^2}} \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla\xi|^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-z\xi_x}{1+\xi} & \frac{-z\xi_y}{1+\xi} & \frac{1}{1+\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\xi_x\xi_y \\ 1+\xi_x^2 \\ \xi_y \end{pmatrix} \Bigg|_{\Gamma_0} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\xi_x^2}} \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla\xi|^2}} \begin{pmatrix} -\xi_x\xi_y \\ 1+\xi_x^2 \\ 0 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{2.37}
$$

vectores claramente tangentes a Γ_0.

De Ω_0 a Ω :

El vector normal unitario en Γ_0 es

$$
n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \nabla(z-1).
$$

Al transformarlo a Ω, vía la ecuación (2.30) obtenemos el vector

$$
\begin{aligned}
\bar{n} = \Psi(n) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-z\xi_x}{(1+\xi)^2} \\ 0 & 1 & \frac{-z\xi_y}{(1+\xi)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Bigg|_{\Gamma} \\
&= \frac{1}{1+\xi} \begin{pmatrix} -\xi_x \\ -\xi_y \\ 1 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{2.38}
$$

el cual es normal a Γ.

Por otro lado, si M es un vector en Γ_0 y T es tangente a Γ_0, entonces el vector

$$\frac{\Phi(M + hT(h)) - \Phi(M)}{h},$$

está en Γ. Haciendo una expasión en serie de Taylor hacemos notar que

$$\frac{\Phi(M + hT(h)) - \Phi(M)}{h} = J(\Phi)T(h) + O(h),$$

por lo que, al tomar el límite cuando $h \to 0$ nos queda $J(\Phi)T$, vector tangente a Γ. Así, si tenemos un vector τ tangente a Γ_0, su transformado será $J(\Phi)\tau$, a su vez tangente a Γ.

Considerando los siguientes vectores tangentes a Γ_0, ortogonales y unitarios

$$\tau^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y transformándolos a Ω,

$$\Phi(\tau^{(1)}) = J(\Phi)\tau^{(1)}|_\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \xi_x & \xi_y & 1+\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \xi_x \end{pmatrix},$$

$$\Phi(\tau^{(2)}) = J(\Phi)\tau^{(2)}|_\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \xi_x & \xi_y & 1+\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \xi_y \end{pmatrix},$$

obtenemos dos vectores evidentemente tangentes a la superficie Γ

$$\bar{\tau}^{(1)} = \Phi(\tau^{(1)}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \xi_x \end{pmatrix}, \tag{2.39}$$

$$\bar{\tau}^{(2)} = \Phi(\tau^{(2)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \xi_y \end{pmatrix}. \tag{2.40}$$

2.2.3 Transformación de la solución básica

Podemos ahora transformar la solución básica obtenida en la sección 2.1 para el dominio Ω_0 al nuevo dominio Ω, y en consecuencia plantear las ecuaciones para una eventual solución de la forma $(u + u_0, p + p_0)$ y en especial las condiciones de frontera para la perturbación (u, p).

La presión P_0 está dada por la ecuación (2.17) en Ω_0, por lo que transformando

$$\Phi(P_0) = P_0(x(\bar x, \bar y, \bar z), \ldots) \stackrel{\text{def}}{=} p_0(\bar x, \bar y, \bar z) = -a\,\bar x + g\left(1 - \frac{\bar z}{1+\xi(\bar x, \bar y)}\right).$$

Obtenemos así

$$p_0 = -a\,\bar x + g\left(1 - \frac{\bar z}{1+\xi(\bar x, \bar y)}\right) \quad \text{en } \Omega. \tag{2.41}$$

Vamos a transformar la distribución de velocidades U_0 a un campo $\bar u_0$ en Ω; recordando el significado físico de la distribución de velocidades y aplicando la regla de la cadena se deduce que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = J(\Phi)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} \bar x \\ \bar y \\ \bar z \end{pmatrix},$$

de esta manera obtenemos

$$\begin{aligned} \bar u_0 = J(\Phi)U_0|_{(\bar x, \bar y, \bar z)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\bar z \xi_{\bar x}}{1+\xi} & \frac{\bar z \xi_{\bar y}}{1+\xi} & 1+\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{a}{2\nu}z^2 + \frac{a}{\nu}z - c_1 \\ -c_2 \\ 0 \end{pmatrix}\Bigg|_{(\bar x, \bar y, \bar z)} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{a}{2\nu}\frac{\bar z}{1+\xi}\left(2 - \frac{\bar z}{1+\xi}\right) - c_1 \\ -c_2 \\ \frac{a\,\bar z^2}{2\nu}\frac{\xi_{\bar x}}{(1+\xi)^2}\left(2 - \frac{\bar z}{1+\xi}\right) - \frac{\bar z}{1+\xi}(c_1\,\xi_{\bar x} + c_2\,\xi_{\bar y}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Un cálculo sencillo convencerá al lector que, desafortunadamente, div $\bar u_0 \neq 0$ en Ω. Sin embargo, en vez de tomar $\bar u_0$, nos conviene definir la siguiente transformación para la solución básica, cuya importancia se revelará más adelante.

Definición 2.1 *Definimos la transformación $\pi(\xi)$ como*

$$\bar u(\bar x) = (\pi(\xi)u)(\bar x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{J(\Phi)}{1+\xi}\bigg|_{\Psi(\bar x)} u(\Psi(\bar x)).$$

Demostraremos que la transformación anterior preserva la propiedad de un campo vectorial u de ser solenoidal, es decir, que $\operatorname{div} u = 0$.

Proposición 2.2

$$\operatorname{div}_{\bar{x}} \bar{u} = \operatorname{div}_{\bar{x}}(\pi(\xi)u)(\bar{x}) = \frac{\operatorname{div}_x u}{1+\xi},$$

para todo campo $u(x)$.

Prueba :

Sea $u_i(x)$, $i = 1,2,3$ un campo vectorial definido en Ω_0, de manera que por la definición de $\pi(\xi)$ sabemos que

$$\bar{u}(\bar{x}) = \frac{1}{1+\xi} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{z\xi_x}{1+\xi} & \frac{z\xi_y}{1+\xi} & 1+\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \Bigg|_x = \begin{pmatrix} \frac{u_1}{1+\xi} \\ \frac{u_2}{1+\xi} \\ \frac{z\xi_x u_1}{(1+\xi)^2} + \frac{z\xi_y u_2}{(1+\xi)^2} + u_3 \end{pmatrix}.$$

Basta con hacer el simple cálculo de las derivadas $\bar{u}_{i\bar{x}_i}$ y hacer la evaluación en las variables x para obtener el resultado :

$$\bar{u}_{1\bar{x}} = \left(\frac{u_1}{1+\xi}\right)_x x_{\bar{x}} + \left(\frac{u_1}{1+\xi}\right)_z z_{\bar{x}} = \frac{1}{1+\xi}\left(u_{1x} - \frac{\xi_x}{1+\xi}(u_1 + z\,u_{1z})\right)$$

$$\bar{u}_{2\bar{y}} = \left(\frac{u_2}{1+\xi}\right)_y y_{\bar{y}} + \left(\frac{u_2}{1+\xi}\right)_z z_{\bar{y}} = \frac{1}{1+\xi}\left(u_{2y} - \frac{\xi_y}{1+\xi}(u_2 + z\,u_{2z})\right)$$

$$\begin{aligned}
\bar{u}_{3\bar{z}} &= \frac{\xi_x u_1}{(1+\xi)^2} + \frac{\xi_y u_2}{(1+\xi)^2} + u_{3z} z_{\bar{z}} + \frac{z\,\xi_x}{1+\xi}(u_{1z} z_{\bar{z}}) + \frac{z\,\xi_y}{1+\xi}(u_{2z} z_{\bar{z}}) \\
&= \frac{1}{1+\xi}\left[u_{3z} + \frac{\xi_x}{1+\xi}(u_1 + z\,u_{1z}) + \frac{\xi_y}{1+\xi}(u_2 + z\,u_{2z})\right].
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{div}_{\bar{x}} \bar{u} = \frac{1}{1+\xi}\left(u_{1x} + u_{2y} + u_{3z}\right) = \frac{\operatorname{div}_x u}{1+\xi}.$$

□

Corolario 2.3

$$\operatorname{div}_x u = 0 \Rightarrow \operatorname{div}_{\bar{x}} \bar{u} = \operatorname{div}_{\bar{x}}(\pi(\xi)u) = 0.$$

Consecuentemente vamos a transformar la solución básica U_0 a un campo vectorial solenoidal dado por

$$u_0(\bar{x}) \stackrel{\text{def}}{=} (\pi(\xi)U_0)(\bar{x}) = \left.\frac{J(\Phi)}{1+\xi}\right|_{\Psi(x)} U_0(\Psi(x)). \tag{2.42}$$

Por el corolario anterior $\mathrm{div}_{\bar{x}} u_0 = 0$, ya que por construcción $\mathrm{div}_x U_0 = 0$. Calculando explícitamente u_0 obtenemos

$$u_0 = \frac{1}{1+\xi}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{z\xi_x}{1+\xi} & \frac{z\xi_y}{1+\xi} & 1+\xi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{a}{2\nu}\frac{z}{1+\xi}\left(2-\frac{z}{1+\xi}\right)-c_1 \\ -c_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

es decir,

$$u_0 = \begin{pmatrix} \frac{a}{2\nu}\frac{z}{(1+\xi)^2}\left(2-\frac{z}{1+\xi}\right)-\frac{c_1}{1+\xi} \\ \frac{-c_2}{1+\xi} \\ \frac{az^2}{2\nu}\frac{\xi_x}{(1+\xi)^3}\left(2-\frac{z}{1+\xi}\right)-\frac{z}{(1+\xi)^2}(c_1\,\xi_x+c_2\,\xi_y) \end{pmatrix}. \tag{2.43}$$

De esta manera hemos transformado U_0 a un campo u_0 cuya divergencia también es cero. Con esta transformación $\pi(\xi)$ también notamos que, si $n = (0,0,1)$ es normal unitario en Γ_0, entonces

$$\begin{aligned} \bar{u}(\bar{x})\cdot\bar{n} &= \frac{J(\Phi)}{1+\xi}u\cdot\frac{1+\xi}{\sqrt{1+|\nabla\xi|^2}}J(\Psi)^T n \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla\xi|^2}}u^T\underbrace{J(\Phi)^T J(\Psi)^T}_{I} n = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla\xi|^2}}u\cdot n, \end{aligned}$$

es decir,

$$\bar{u}(\bar{x})\cdot\bar{n} = \frac{u\cdot n}{\sqrt{1+|\nabla\xi|^2}} \tag{2.44}$$

2.2.4 Las ecuaciones de la perturbación

Hemos transformado la solución básica al dominio Ω y ahora nuestra intención es considerar soluciones de la forma $(u+u_0, p+p_0)$ para obtener las ecuaciones de la perturbación.

Por simplicidad, a partir de ahora, llamaremos (x, y, z) a los puntos de

$$\Omega = \{(x, y, z) \;:\; x \in [0, x_0]\,,\; y \in [0, 1],\; ,0 \leq z \leq 1 + \xi(x, y)\},$$

y por lo tanto la solución básica se ha transformado a

$$p_0 = -ax + g\left(1 - \frac{z}{1 + \xi(x, y)}\right) \tag{2.45}$$

$$u_0 = \begin{pmatrix} \frac{a}{2\nu}\frac{z}{(1+\xi)^2}\left(2 - \frac{z}{1+\xi}\right) - \frac{c_1}{1+\xi} \\ \frac{-c_2}{1+\xi} \\ \frac{az^2}{2\nu}\frac{\xi_x}{(1+\xi)^3}\left(2 - \frac{z}{1+\xi}\right) - \frac{z}{(1+\xi)^2}(c_1\,\xi_x + c_2\,\xi_y) \end{pmatrix} \tag{2.46}$$

Si $(u + u_0, p + p_0)$ es solución de las ecuaciones (2.1) en Ω, sustituyendo llegamos a

$$\begin{aligned} &-\nu\,\Delta(u + u_0) + \mathbf{grad}\,(p + p_0) + ((u + u_0)\cdot\mathbf{grad})(u + u_0) = f_G \\ \Longrightarrow\; &-\nu\,\Delta u + \mathbf{grad}\,p + (u\cdot\mathbf{grad})u + (u\cdot\mathbf{grad})u_0 + (u_0\cdot\mathbf{grad})u = f, \end{aligned}$$

donde

$$f \stackrel{\text{def}}{=} f_G - (-\nu\,\Delta u_0 + \mathbf{grad}\,p_0 + (u_0\cdot\mathbf{grad})u_0).$$

También,

$$\operatorname{div}(u + u_0) = \operatorname{div}u + \underbrace{\operatorname{div}u_0}_{=0} = 0,$$

por lo que podemos concluir que u debe satisfacer

$$\left.\begin{array}{c} -\nu\,\Delta u + \mathbf{grad}\,p + (u\cdot\mathbf{grad})u + (u\cdot\mathbf{grad})u_0 + (u_0\cdot\mathbf{grad})u = f \\ \operatorname{div}u = 0 \end{array}\right\} \text{ en } \Omega. \tag{2.47}$$

Hemos pedido que ξ y sus derivadas sean periódicas en x y en y, razón por la que, si U_0 satisface las condiciones de periodicidad, también $u_0 = \pi(\xi)U_0$. De esta forma, las condiciones (2.2) para $u + u_0$

$$\left.\begin{array}{c} \partial^\alpha(u + u_0)|_{x=0} = \partial^\alpha(u + u_0)|_{x=x_0} \\ \partial^\alpha(u + u_0)|_{y=0} = \partial^\alpha(u + u_0)|_{y=1} \end{array}\right\} \;\forall|\alpha| \leq 1,$$

implican, por la periodicidad de u_0 y sus derivadas, que

$$\left.\begin{array}{r}\partial^\alpha u|_{x=0} = \partial^\alpha u|_{x=x_0} \\ \partial^\alpha u|_{y=0} = \partial^\alpha u|_{y=1}\end{array}\right\} \ \forall|\alpha| \leq 1. \tag{2.48}$$

Vamos a pedir también condiciones de periodicidad para la presión, las cuales, como veremos más adelante, se satisfacen naturalmente si la presión es una función suficientemente regular :

$$p|_{x=0} = p|_{x=x_0} \ , \ p|_{y=0} = p|_{y=1}. \tag{2.49}$$

Pasemos ahora al cálculo de las condiciones de frontera. Sabemos que en $\Gamma_b = \{z = 0\} \cap \Omega$,

$$\left.\frac{J(\Phi)}{1+\xi}\right|_{z=0} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\xi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+\xi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

por lo que

$$u_0|_{\Gamma_b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\xi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+\xi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c_1 \\ -c_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-c}{1+\xi}.$$

La condición de frontera es $(u + u_0)|_{\Gamma_b} = -c$. Consecuentemente la condición para la perturbación de convierte en

$$u|_{\Gamma_b} = \frac{-\xi}{1+\xi}c \stackrel{\text{def}}{=} \phi_0. \tag{2.50}$$

Por la ecuación (2.44) sabemos que $u_0 \cdot n|_\Gamma = 0$. En virtud de la condición de frontera $(u + u_0) \cdot n|_\Gamma = 0$,

$$u \cdot n|_\Gamma = 0. \tag{2.51}$$

Las condiciones tangencial y normal de frontera en Γ.

Deseamos que nuestra solución $u + u_0$ satisfaga

$$\tau \cdot T(u + u_0)n|_\Gamma = 0$$

$$n \cdot T(u+u_0)n|_\Gamma = -p_a + 2\kappa H,$$

donde τ es cualquier vector tangente a Γ. Por ende, es necesario calcular la condición de frontera para u_0 con el fin de encontrar su correspondiente para u. De esta forma, en Γ tenemos

$$\tau \cdot T(u_0)n = \tau^T(-p_0 I + \sigma(u_0))n = -p_0 \underbrace{\tau^T I n}_{=0} + \tau^T\sigma(u_0)n$$

$$n \cdot T(u_0)n = n^T(-p_0 I + \sigma(u_0))n = -p_0|_\Gamma + n^T\sigma(u_0)n.$$

Dado que $-p_0|_\Gamma = -p_a = ax$, la condición de frontera se puede expresar de la siguiente forma, que involucra al tensor de viscosidad :

$$n^T T(u)n = -n^T\sigma(u_0)n + 2\kappa H \tag{2.52}$$

$$\tau^T T(u)n = -\tau^T\sigma(u_0)n. \tag{2.53}$$

En este punto es menester calcular las derivadas de primer orden de u_0 y de esta manera obtener el tensor de viscosidad dado por $\sigma_{ij}(u_0) = \nu e_{ij}(u_0)$, el cual es simétrico (véase definición 1.11).

A partir de la ecuación (2.46) calculamos las primeras derivadas de u_0, y al evaluarlas en $\Gamma = \{z = 1 + \xi(x, y)\}$ llegamos a

$$u_{1_x}|_\Gamma = \frac{-\xi_x}{(1+\xi)^2}\left(\frac{a}{2\nu} - c_1\right)$$

$$u_{1_y}|_\Gamma = \frac{-\xi_y}{(1+\xi)^2}\left(\frac{a}{2\nu} - c_1\right)$$

$$u_{1_z}|_\Gamma = 0$$

$$u_{2_x}|_\Gamma = \frac{c_2\xi_x}{(1+\xi)^2}\ ,\quad u_{2_y}|_\Gamma = \frac{c_2\xi_y}{(1+\xi)^2}\ ,\quad u_{2_z}|_\Gamma = 0$$

$$u_{3_x}|_\Gamma = \frac{\left(\frac{a}{2\nu} - c_1\right)}{(1+\xi)^2}\left[(1+\xi)\xi_{xx} - 2\xi_x{}^2\right] + \frac{c_2}{(1+\xi)^2}\left[2\xi_x\xi_y - (1+\xi)\xi_{xy}\right]$$

$$u_{3_y}|_\Gamma = \frac{\left(\frac{a}{2\nu} - c_1\right)}{(1+\xi)^2}\left[(1+\xi)\xi_{xy} - 2\xi_x\xi_y\right] + \frac{c_2}{(1+\xi)^2}\left[2\xi_y{}^2 - (1+\xi)\xi_{yy}\right]$$

$$u_{3_z}|_\Gamma = \frac{\left(\frac{a}{2\nu} - c_1\right)}{(1+\xi)^2}\xi_x - \frac{c_2\xi_y}{(1+\xi)^2}.$$

Sustituyendo las derivadas en las componentes del tensor de viscosidad en Γ obtenemos

$$\sigma_{11} = \frac{-2\left(\frac{a}{2} - c_1\nu\right)\xi_x}{(1+\xi)^2}\ , \quad \sigma_{22} = \frac{2c_2\nu\,\xi_x}{(1+\xi)^2}$$

$$\sigma_{33} = \frac{2}{(1+\xi)^2}\left[\left(\frac{a}{2} - c_1\nu\right)\xi_x - c_2\nu\,\xi_y\right]$$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{(1+\xi)^2}\left[\left(\frac{a}{2} - c_1\nu\right)\xi_x - c_2\nu\,\xi_y\right]$$

$$\sigma_{13} = \frac{1}{(1+\xi)^2}\left[\left(\frac{a}{2} - c_1\nu\right)((1+\xi)\xi_{xx} - 2\xi_x{}^2) + c_2\nu(2\xi_x\xi_y - (1+\xi)\xi_{xy})\right]$$

$$\sigma_{23} = \frac{1}{(1+\xi)^2}\left[\left(\frac{a}{2} - c_1\nu\right)((1+\xi)\xi_{xy} - 2\xi_x\xi_y) + c_2\nu(2\xi_y{}^2 - (1+\xi)\xi_{yy})\right].$$

Ahora bien, sabemos que el vector normal unitario en la superficie es

$$n = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla\xi|^2}}\begin{pmatrix} -\xi_x \\ -\xi_y \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (2.54)$$

Calculando,

$$\sqrt{1+|\nabla\xi|^2}(\sigma(u_0)n) = \begin{pmatrix} \sigma_{13} - \xi_x\sigma_{11} - \xi_y\sigma_{12} \\ \sigma_{23} - \xi_x\sigma_{12} - \xi_y\sigma_{22} \\ \sigma_{33} - \xi_x\sigma_{13} - \xi_y\sigma_{23} \end{pmatrix},$$

por lo que

$$\begin{aligned}(1+|\nabla\xi|^2)\,n^T\sigma(u_0)n &= \begin{pmatrix} -\xi_x & -\xi_y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_{13} - \xi_x\sigma_{11} - \xi_y\sigma_{12} \\ \sigma_{23} - \xi_x\sigma_{12} - \xi_y\sigma_{22} \\ \sigma_{33} - \xi_x\sigma_{13} - \xi_y\sigma_{23} \end{pmatrix} \\ &= \sigma_{11}\xi_x{}^2 + \sigma_{22}\xi_y{}^2 + \sigma_{33} + 2\sigma_{12}\xi_x\xi_y - 2\sigma_{13}\xi_x - 2\sigma_{23}\xi_y\,.\end{aligned}$$

Así, sustituyendo las expresiones obtenidas para el tensor de viscosidad en Γ, llegamos a que

$$\begin{aligned}(1+\xi)^2(1+|\nabla\xi|^2)\,n^T\sigma(u_0)n = -2\Bigg[&\left(\frac{a}{2} - c_1\nu\right)\left[(1+\xi)(\xi_y\xi_{xy} + \xi_x\xi_{xx}) - \xi_x(1+|\nabla\xi|^2)\right] + \\ &+ c_2\nu\left[-(1+\xi)(\xi_y\xi_{yy} + \xi_x\xi_{xy}) + \xi_y(1+|\nabla\xi|^2)\right]\Bigg]\end{aligned}$$

$$= -2 \begin{pmatrix} \left(\frac{a}{2} - c_1\nu\right) \\ c_2\nu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (1+\xi)(\xi_y \xi_{xy} + \xi_x \xi_{xx}) - \xi_x(1+|\nabla\xi|^2) \\ -(1+\xi)(\xi_y \xi_{yy} + \xi_x \xi_{xy}) + \xi_y(1+|\nabla\xi|^2) \end{pmatrix}.$$

Simplificando esta última expresión obtenemos

$$n^{\mathrm{T}}\sigma(u_0)n = \frac{2\nu}{\sqrt{1+|\nabla\xi|^2}} \begin{pmatrix} c_1 - \frac{a}{2\nu} \\ c_2 \end{pmatrix} \cdot \nabla \left(\frac{\sqrt{1+|\nabla\xi|^2}}{1+\xi} \right).$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (2.53) encontramos la condición normal de frontera para la perturbación

$$n \cdot T(u)n|_\Gamma = \frac{2\nu}{\sqrt{1+|\nabla\xi|^2}} \begin{pmatrix} \frac{a}{2\nu} - c_1 \\ -c_2 \end{pmatrix} \cdot \nabla \left(\frac{\sqrt{1+|\nabla\xi|^2}}{1+\xi} \right) + \kappa \operatorname{div} \left(\frac{\nabla\xi}{\sqrt{1+|\nabla\xi|^2}} \right). \quad (2.55)$$

El plano tangente a la superficie Γ en todo punto es el plano formado por los vectores unitarios

$$\tau^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi_x^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \xi_x \end{pmatrix}, \quad (2.56)$$

$$\tau^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi_x^2}} \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla\xi|^2}} \begin{pmatrix} -\xi_x \xi_y \\ 1+\xi_x{}^2 \\ \xi_y \end{pmatrix}. \quad (2.57)$$

Vamos a calcular dos condiciones tangenciales de frontera, una para $\tau^{(1)}$ y otra para $\tau^{(2)}$. Sustituyendo el tensor de viscosidad en la condición para $\tau^{(1)}$ se llega a que

$$\begin{aligned} (1+\xi)^2 \sqrt{1+\xi_x^2}\sqrt{1+|\nabla\xi|^2}\,(\tau^{(1)})^{\mathrm{T}}\sigma(u_0)n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \xi_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{13} - \xi_x \sigma_{11} - \xi_y \sigma_{12} \\ \sigma_{23} - \xi_x \sigma_{12} - \xi_y \sigma_{22} \\ \sigma_{33} - \xi_x \sigma_{13} - \xi_y \sigma_{23} \end{pmatrix} \\ &= \sigma_{13}(1-\xi_x{}^2) + \sigma_{33}\xi_x - \sigma_{11}\xi_x - \sigma_{12}\xi_y - \sigma_{23}\xi_x\xi_y . \end{aligned}$$

Sustituyendo σ_{ij} valuada en Γ en la expresión anterior obtenemos

$$\begin{aligned} (\tau^{(1)})^{\mathrm{T}}\sigma(u_0)n = \frac{1}{(1+\xi)^2\sqrt{1+|\nabla\xi|^2}\sqrt{1+\xi_x^2}} \Big[\left(\tfrac{a}{2} - c_1\nu\right) \left[(1+\xi)(\xi_{xx}(1-\xi_x{}^2) - \xi_{xy}\xi_x\xi_y) + \xi_y{}^2 + 2\xi_x{}^2(1+|\nabla\xi|^2) \right] + \\ + c_2\nu \left[(1+\xi)(\xi_{yy}\xi_x\xi_y - \xi_{xy}(1-\xi_x{}^2)) + \xi_x\xi_y - 2\xi_x\xi_y(1+|\nabla\xi|^2) \right] \Big] \stackrel{\mathrm{def}}{=} -\gamma_1, \end{aligned}$$

de manera que la condición tangencial de frontera para la perturbación es

$$\tau^{(1)} \cdot T(u)n|_\Gamma = \gamma_1. \tag{2.58}$$

Aplicando la condición de frontera en el caso del vector $\tau^{(2)}$ llegamos a la siguiente expresión

$$\sqrt{1+\xi_x^2}(1+|\nabla\xi|^2)\,(\tau^{(2)})^{\mathrm{T}}\sigma(u_0)n = \begin{pmatrix} -\xi_x\xi_y & 1+\xi_x{}^2 & \xi_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{13}-\xi_x\sigma_{11}-\xi_y\sigma_{12} \\ \sigma_{23}-\xi_x\sigma_{12}-\xi_y\sigma_{22} \\ \sigma_{33}-\xi_x\sigma_{13}-\xi_y\sigma_{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= -\sigma_{13}\xi_x\xi_y + \xi_x{}^2\xi_y\sigma_{11}\xi_x + \sigma_{12}\xi_x\xi_y{}^2 + (1+\xi_x{}^2)(\sigma_{23}-\sigma_{12}\xi_x - \sigma_{22}\xi_y) \\ &\quad + \sigma_{33}\xi_y - \sigma_{13}\xi_x\xi_y - \sigma_{23}\xi_y{}^2, \end{aligned}$$

la cual, al sustituir nuevamente los valores de σ_{ij} nos conduce a la condición de frontera restante

$$\begin{aligned} (\tau^{(2)})^{\mathrm{T}}\sigma(u_0)n = \frac{1}{(1+\xi)^2(1+|\nabla\xi|^2)\sqrt{1+\xi_x^2}} \Big[\Big(\tfrac{\beta}{2}-c_1\nu\Big)\Big[(1+\xi)(\xi_{xy}(1+\xi_x{}^2-\xi_y{}^2)-2\xi_{xx}\xi_x\xi_y)+\xi_x\xi_y(1+|\nabla\xi|^2)\Big] \\ c_2\nu\Big[(1+\xi)(2\xi_{xy}\xi_x\xi_y - \xi_{yy}(1+\xi_x{}^2-\xi_y{}^2)-(\xi_x{}^2+2\xi_y{}^2)(1+|\nabla\xi|^2)\Big]\Big] \stackrel{\text{def}}{=} -\gamma_2, \end{aligned}$$

es decir,

$$\tau^{(2)} \cdot T(u)n|_\Gamma = \gamma_2. \tag{2.59}$$

Ahora vamos a modificar ligeramente la condición de frontera (2.50) de manera que sea una condición homogénea para la perturbación u. El lector se dará cuenta en los capítulos posteriores la conveniencia de este cambio. Para tal efecto sumaremos a u_0 un campo u_1 tal que $\operatorname{div} u_1 = 0$ y que u_1 sea cero en Γ. De esta forma ahora consideraremos soluciones de la forma $u + \tilde{u}_0$ donde $\tilde{u}_0 = u_0 + u_1$. Si queremos que la condición en Γ_b sea homogénea entonces $(u+\tilde{u}_0)|_{\Gamma_b} = -c$ implica que $\tilde{u}_0|_{\Gamma_b} = (u_0+u_1)|_{\Gamma_b} = -c$.

Sea $\chi(z)$ una función de clase C^∞, con $\chi(z) = 1$ si $|z| < 1/4$, $\chi(z) \equiv 0$ si $|z| > 1/2$ y $\int_0^{1/2}\chi(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Por ejemplo tómese la función $a(z)$ de clase C^∞ tal que $a(z) = z$ para $|z| < 1/4$, $a(z) \geq 0$ y $a(z) \equiv 0$ si $z \geq 1/2$. Si se define $\chi(z) \stackrel{\text{def}}{=} a'(z)$, ésta tiene las propiedades deseadas.

Sea entonces

$$u_1 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} -\frac{\xi}{1+\xi}\chi(z)c_1 \\ -\frac{\xi}{1+\xi}\chi(z)c_2 \\ \left(c_1\left(\frac{\xi}{1+\xi}\right)_x + c_2\left(\frac{\xi}{1+\xi}\right)_y\right)\left(\int_0^z \chi(t)\,\mathrm{d}t\right) \end{pmatrix}.$$

Por construcción es claro que $\operatorname{div} u_1 = 0$ en Ω. Dado que $(\frac{\xi}{1+\xi})_x = \frac{\xi_x}{(1+\xi)^2}$, u_1 también se puede escribir como

$$u_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\xi}{1+\xi}\chi(z)c_1 \\ -\frac{\xi}{1+\xi}\chi(z)c_2 \\ \left(\frac{c_1\xi_x+c_2\xi_y}{(1+\xi)^2}\right)\left(\int_0^z \chi(t)\, dt\right) \end{pmatrix}. \tag{2.60}$$

Como ξ y $\partial\xi$ son periódicas, también u_1 es periódica. Notamos así mismo que $u_1|_{z=0} = -\frac{\xi}{1+\xi}c$. En Γ dado que $\chi(z) \equiv 0$ si $|z| > 1/2$ y por la propiedad de que $\int_0^{1/2}\chi(z)\,dz = 0$, es obvio que $u_1|_\Gamma = 0$. Por lo tanto las condiciones de frontera en Γ calculadas con tanto trabajo hasta ahora no cambian si sustituímos u_0 por $u_0 + u_1$. Como habíamos mencionado, definamos

$$\tilde{u}_0 \stackrel{\text{def}}{=} u_0 + u_1,$$

por lo cual $\tilde{u}_0|_{\Gamma_b} = u_0|_{z=0} + u_1|_{z=0} = -\frac{c}{1+\xi} - \frac{c\xi}{1+\xi} = -c$. De esta manera, consideremos soluciones de la forma $u + \tilde{u}_0$, y se modificará la condición de frontera (2.50) por

$$u|_{\Gamma_b} = 0. \tag{2.61}$$

La forma explícita de $\tilde{u}_0$ es

$$\tilde{u}_0 = \begin{pmatrix} \frac{a}{2\nu}\frac{z}{(1+\xi)^2}\left(2-\frac{z}{1+\xi}\right) - \frac{c_1}{1+\xi}(1+\xi\chi(z)) \\ \frac{-c_2}{1+\xi}(1+\xi\chi(z)) \\ \frac{az^2}{2\nu}\frac{\xi_x}{(1+\xi)^3}\left(2-\frac{z}{1+\xi}\right) + \frac{1}{(1+\xi)^2}\left(\int_0^z \chi(t)\, dt - z\right)(c_1\xi_x + c_2\xi_y) \end{pmatrix}. \tag{2.62}$$

Para resumir los cálculos anteriores haremos algunas definiciones que serán de utilidad posteriormente.

Definición 2.4

$$\beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\nu}{\sqrt{1+|\nabla\xi|^2}} \begin{pmatrix} \frac{a}{2\nu} - c_1 \\ -c_2 \end{pmatrix} \cdot \nabla \left(\frac{\sqrt{1+|\nabla\xi|^2}}{1+\xi}\right) \tag{2.63}$$

$$\gamma_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{-1}{(1+\xi)^2\sqrt{1+|\nabla\xi|^2}\sqrt{1+\xi_x^2}}\Big[\left(\tfrac{a}{2}-c_1\nu\right)\left[(1+\xi)(\xi_{xx}(1-\xi_x^2)-\xi_{xy}\xi_x\xi_y)+\xi_y^2+2\xi_x^2(1+|\nabla\xi|^2)\right]+$$
$$+c_2\nu\left[(1+\xi)(\xi_{yy}\xi_x\xi_y-\xi_{xy}(1-\xi_x^2))+\xi_x\xi_y-2\xi_x\xi_y(1+|\nabla\xi|^2)\right]\Big] \tag{2.64}$$

$$\gamma_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{-1}{(1+\xi)^2(1+|\nabla\xi|^2)\sqrt{1+\xi_x^2}}\Big[\left(\tfrac{a}{2}-c_1\nu\right)\left[(1+\xi)(\xi_{xy}(1+\xi_x^2-\xi_y^2)-2\xi_{xx}\xi_x\xi_y)+\xi_x\xi_y(1+|\nabla\xi|^2)\right]$$
$$c_2\nu\left[(1+\xi)(2\xi_{xy}\xi_x\xi_y-\xi_{yy}(1+\xi_x^2-\xi_y^2)-(\xi_x^2+2\xi_y^2)(1+|\nabla\xi|^2)\right]\Big] \tag{2.65}$$

$$\tilde{u}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{a}{2\nu}\frac{z}{(1+\xi)^2}\left(2-\frac{z}{1+\xi}\right)-\frac{c_1}{1+\xi}(1+\xi\chi(z)) \\ \frac{-c_2}{1+\xi}(1+\xi\chi(z)) \\ \frac{a z^2}{2\nu}\frac{\xi_x}{(1+\xi)^3}\left(2-\frac{z}{1+\xi}\right)+\frac{1}{(1+\xi)^2}\left(\int_0^z \chi(t)\, dt - z\right)(c_1\,\xi_x + c_2\,\xi_y) \end{pmatrix} \tag{2.66}$$

$$f \stackrel{\text{def}}{=} f_G - (-\nu\,\Delta\tilde{u}_0 + \operatorname{grad} p_0 + (\tilde{u}_0\cdot\operatorname{grad})\,\tilde{u}_0) \tag{2.67}$$

Notamos que β también se puede escribir como $\beta = \beta_1 + \beta_2$, donde

$$\beta_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2(\frac{a}{2}-c_1\nu)}{(1+\xi)^2(1+|\nabla\xi|^2)}\left[(1+\xi)(\xi_y\,\xi_{xy}+\xi_x\,\xi_{xx})-\xi_x(1+|\nabla\xi|^2)\right] \tag{2.68}$$

$$\beta_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{-2c_2\nu}{(1+\xi)^2(1+|\nabla\xi|^2)}\left[(1+\xi)(\xi_y\,\xi_{yy}+\xi_x\,\xi_{xy})-\xi_y(1+|\nabla\xi|^2)\right]. \tag{2.69}$$

Así mismo definimos

$$\varphi_1(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\xi_y\,\xi_{xy}+\xi_x\,\xi_{xx}}{1+|\nabla\xi|^2}-\frac{\xi_x}{1+\xi} = \frac{1}{2}\frac{(1+|\nabla\xi|^2)_x}{1+|\nabla\xi|^2}-\frac{\xi_x}{1+\xi} \tag{2.70}$$

$$\varphi_2(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\xi_x\,\xi_{xy}+\xi_y\,\xi_{yy}}{1+|\nabla\xi|^2}-\frac{\xi_y}{1+\xi} = \frac{1}{2}\frac{(1+|\nabla\xi|^2)_y}{1+|\nabla\xi|^2}-\frac{\xi_y}{1+\xi}, \tag{2.71}$$

por lo que podemos escribir

$$\beta = \frac{2(\frac{a}{2}-c_1\nu)}{1+\xi}\varphi_1(\xi)-\frac{2c_2\nu}{1+\xi}\varphi_2(\xi). \tag{2.72}$$

Finalmente, resumiendo los cálculos hechos en este capítulo, escribimos las ecuaciones para la perturbación (u, p, ξ).

$$\left.\begin{matrix} -\nu\,\Delta u + \operatorname{grad} p + (u\cdot\operatorname{grad})u + (u\cdot\operatorname{grad})\,\tilde{u}_0 + (\tilde{u}_0\cdot\operatorname{grad})u = f \\ \operatorname{div} u = 0 \end{matrix}\right\} \text{ en } \Omega \tag{2.73}$$

$$\left.\begin{matrix} \partial^\alpha u|_{x=0} = \partial^\alpha u|_{x=x_0} \\ \partial^\alpha u|_{y=0} = \partial^\alpha u|_{y=1} \end{matrix}\right\} \ \forall|\alpha|\le 1. \tag{2.74}$$

$$p|_{x=0} = p|_{x=x_0} \ , \ p|_{y=0} = p|_{y=1} \tag{2.75}$$

$$u|_{\Gamma_b} = 0, \tag{2.76}$$

$$u\cdot n|_{\Gamma} = 0, \tag{2.77}$$

$$\tau^{(k)} \cdot T(u)n|_\Gamma = \gamma_k, \quad k = 1,2 \tag{2.78}$$

$$n \cdot T(u)n|_\Gamma = \beta + 2\kappa H, \tag{2.79}$$

donde $f, \tilde{u}_0, \gamma_k, \beta$ y H se definen en 2.4.

2.2.5 Ecuaciones en forma adimensional

Más adelante será necesario considerar las ecuaciones en forma adimensional; por esta razón definiremos aquí los parámetros adimensionales y los valores de referencia respectivos. Como veremos, es conveniente que los coeficientes de las ecuaciones no tengan dimensiones. Denotemos a las unidades de longitud y tiempo utilizadas como [L] y [T], respectivamente.

Definición 2.5 *Los valores de referencia para la longitud, la velocidad y la presión se definen como*

$$\begin{aligned} l_R &= 1 \quad [\mathrm{L}] \\ u_R &= u_0|_{(\Gamma_0, c=0)} = \frac{a l_R^2}{2\nu} \quad [\mathrm{LT}^{-1}] \\ p_R &= u_R^2 \quad [\mathrm{L}^2 T^{-2}] \\ \nu_R &= \nu \quad [\mathrm{L}^2 T^{-1}] \end{aligned}$$

Notemos que a tiene unidades de $[\mathrm{LT}^{-2}]$. *Definimos también los siguientes parámetros adimensionales*

$$\begin{aligned} \lambda &\overset{\mathrm{def}}{=} \frac{u_R l_R}{\nu_R} = \frac{a l_R^3}{2\nu^2}, \quad \textit{(número de Reynolds)} \\ \mu_i &\overset{\mathrm{def}}{=} \frac{c_i l_R}{\nu_R}, \quad (i = 1,2) \\ \theta &\overset{\mathrm{def}}{=} \frac{g l_R^3}{\nu^2}, \\ \sigma &\overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\kappa l_R}{\nu^2}. \end{aligned}$$

Consideremos la presión básica (2.41). Como a tiene unidades de $[\mathrm{LT}^{-2}]$, si lo dividimos entre $a^2 l_R^3/4\nu^2$, con dimensiones $[\mathrm{LT}^{-2}]$, el coeficiente se vuelve adimensional. Del mismo modo al dividir g $[\mathrm{LT}^{-2}]$ entre $a^2 l_R^3/4\nu^2$ el coeficiente ya no tiene dimensiones. Consideramos, pues, a la presión p_0 como

$$p_0 = -\frac{2}{\lambda}x + \frac{\theta}{\lambda^2}\left(1 - \frac{z}{1+\xi(x,y)}\right). \tag{2.80}$$

El coeficiente del primer término de $\tilde{u}_{01}$ es $l_R^3 a/2\nu$, con dimensiones $[L^2T^{-1}]$; al dividir entre $l_R^3 a/2\nu = \lambda\nu$ el coeficiente se vuelve adimensional. El coeficiente $l_R c_1$ $[L^2T^{-1}]$ del segundo término lo dividimos también entre $\lambda\nu$, y hacemos lo mismo para los coeficientes de $\tilde{u}_{02}$ y $\tilde{u}_{03}$ con ese propósito. Así, podemos considerar que $\tilde{u}_0$ está dado por

$$\tilde{u}_0 = \begin{pmatrix} \frac{z}{(1+\xi)^2}\left(2 - \frac{z}{1+\xi}\right) - \frac{\mu_1}{\lambda}\frac{1}{1+\xi}(1+\xi\chi(z)) \\ -\frac{\mu_2}{\lambda}\frac{1}{1+\xi}(1+\xi\chi(z)) \\ \frac{z^2\xi_x}{(1+\xi)^3}\left(2 - \frac{z}{1+\xi}\right) + \frac{1}{\lambda}\frac{1}{(1+\xi)^2}(\mu_1\xi_x + \mu_2\xi_y)(\int_0^z \chi(t)\,\mathrm{d}t - z) \end{pmatrix}. \tag{2.81}$$

Por último los coeficientes $\left(\frac{a}{2} - c_1\nu\right)$ y $c_2\nu$ con dimensiones $[L^3T^{-2}]$ se dividen entre $al_R^2/2$ $[L^3T^{-2}]$, por lo que β y γ_k cambian los coeficientes $\left(\frac{a}{2} - c_1\nu\right)$ y $c_2\nu$ por $\left(1 - \frac{\mu_1}{\lambda}\right)$ y $\frac{\mu_2}{\lambda}$, respectivamente.

De esta manera el problema (2.73) - (2.79) formulado adimensionalmente es

$$\left.\begin{array}{c} -\frac{1}{\lambda}\Delta u + \operatorname{grad} p + Lu + Bu = f \\ \operatorname{div} u = 0 \end{array}\right\} \text{ en } \Omega, \tag{2.82}$$

donde

$$Lu \stackrel{\text{def}}{=} (\tilde{u}_0 \cdot \operatorname{grad})u + (u \cdot \operatorname{grad})\,\tilde{u}_0, \tag{2.83}$$

$$Bu \stackrel{\text{def}}{=} (u \cdot \operatorname{grad})u, \tag{2.84}$$

con condiciones de periodicidad (2.74), (2.75) y condiciones de frontera (2.76), (2.77) y

$$\tau^{(k)} \cdot T(u)n|_\Gamma = \gamma_k, \quad k = 1,2 \tag{2.85}$$

$$n \cdot T(u)n|_\Gamma = \beta + \frac{2\sigma}{\lambda}H. \tag{2.86}$$

Aquí $\tilde{u}_0$ y p_0 están determinadas por las ecuaciones (2.81) y (2.80), respectivamente, y β, γ_k, $k = 1,2$ están dadas por

$$\beta = \frac{2\left(1 - \frac{\mu_1}{\lambda}\right)}{1+\xi}\varphi_1(\xi) - \frac{2\frac{\mu_2}{\lambda}}{1+\xi}\varphi_2(\xi), \tag{2.87}$$

$$\gamma_1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{-1}{(1+\xi)^2\sqrt{1+|\nabla\xi|^2}\sqrt{1+\xi_x^2}}\Big[\left(1-\tfrac{\mu_1}{\lambda}\right)\Big[(1+\xi)(\xi_{xx}(1-\xi_x{}^2)-\xi_{xy}\xi_x\xi_y)+\xi_y{}^2+2\xi_x{}^2(1+|\nabla\xi|^2)\Big]+ \\ +\tfrac{\mu_2}{\lambda}\Big[(1+\xi)(\xi_{yy}\xi_x\xi_y-\xi_{xy}(1-\xi_x{}^2))+\xi_x\xi_y-2\xi_x\xi_y(1+|\nabla\xi|^2)\Big]\Big], \tag{2.88}$$

$$\gamma_2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{-1}{(1+\xi)^2(1+|\nabla\xi|^2)\sqrt{1+\xi_x^2}}\Big[\left(1-\tfrac{\mu_1}{\lambda}\right)\Big[(1+\xi)(\xi_{xy}(1+\xi_x{}^2-\xi_y{}^2)-2\xi_{xx}\xi_x\xi_y)+\xi_x\xi_y(1+|\nabla\xi|^2)\Big]+ \\ +\tfrac{\mu_2}{\lambda}\Big[(1+\xi)(2\xi_{xy}\xi_x\xi_y-\xi_{yy}(1+\xi_x{}^2-\xi_y{}^2)-(\xi_x{}^2+2\xi_y{}^2)(1+|\nabla\xi|^2)\Big]\Big]. \tag{2.89}$$

De esta manera hemos formulado las ecuaciones para la perturbación en forma adimensional.

Capítulo 3

Elementos de análisis funcional

Con el fin de formular débilmente el problema perturbado, esto es, para transformar el sistema de ecuaciones a una representación integral y buscar así soluciones en un espacio de funciones, es necesario hacer un compendio de las definiciones y elementos de análisis funcional que proporcionan la herramienta fundamental para dicha tarea. En la primera sección de este capítulo se enuncian los teoremas y definiciones más relevantes, omitiendo las demostraciones en virtud de que éstas pueden encontrarse en la literatura y de que algunas de ellas son demasiado técnicas o muy largas para ser incluídas aquí. La segunda sección se aboca a demostrar algunos lemas que serán de utilidad en el siguiente capítulo.

3.1 Preliminares

En esta sección se presentan algunos importantes teoremas y definiciones relacionados con espacios de Sobolev, espacios de Hölder, teoremas de traza y de encaje, entre otros.

Se recomienda al lector consultar el excelente texto de R. Adams ([Adams, capítulos 1-3]), el libro de R. Temam ([Temam, capítulo 1, sección 1] y las notas de J. Ize ([Ize 78, capítulo 2]), así como los textos clásicos de ecuaciones en derivadas parciales ([Friedman], [John])

En lo que sigue supondremos que Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$, con frontera $\partial\Omega$. Denotamos también el operador diferenciación como

$$D^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial {x_n}^{\alpha_n}},$$

donde $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. El campo será $\mathbb{R}$. Denotamos como $\bar{\Omega}$ y Ω^{int} a la cerradura y el interior de Ω, respectivamente. Si u es una fución definida en Ω se denota también el soporte de u en Ω como $\operatorname{supp} u \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$. Llamamos también distancia de F a G, con $F, G \in \mathbb{R}^n$, como

$$\operatorname{dist}(f, G) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\substack{x \in G \\ y \in F}} \{|x - y|\}.$$

A continuación enunciaremos dos resultados muy conocidos sobre espacios de Hilbert y que se pueden encontrar en el libro de N.I. Akhiezer e I.M. Glazman [Akh/Gla, capítulos 1-2].

Teorema 3.1 (Teorema de representación de Riesz) *Sea H de Hilbert. Un funcional lineal l está en el dual de H si y sólo si $\exists x_l \in H$ tal que*

$$l(x) = (x_l, x) \quad \forall x \in H,$$

y $\|l\| = \|x_l\|_H$.

Definición 3.2 *Sea H de Hilbert. Se dice que la sucesión $\{x_n\} \in H$ converge débilmente a x en H si*

$$(x_n, y) \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} (x, y) \ \forall y \in H,$$

y se denota $x_n \stackrel{H}{\rightharpoonup} x$.

Lema 3.3 *En un espacio de Hilbert H todo conjunto acotado es débilmente compacto, es decir, para toda sucesión $\{x_n\}$ en H acotada, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ tal que* $x_{n_j} \stackrel{H}{\rightharpoonup} x \in H$.

El siguiente teorema es de importancia fundamental para probar los resultados de existencia de soluciones débiles o en sentido variacional. Su demostración, consecuencia del teorema de representación de Riesz, se puede consultar en [Rektorys, pág 383].

Teorema 3.4 (Lax-Milgram) *Sea H un espacio de Hilbert con producto escalar $(\cdot,\cdot)$. Sea $B(u,v)$ una forma bilineal definida para $v, u \in H$ tal que existen constantes $k, \alpha > 0$, independientes de u, v, tales que para toda $u, v \in H$ se tiene que*

$$|B(u,v)| \leq K\|u\|\|v\|,$$

$$B(u,u) \geq \alpha\|u\|.$$

Entonces para cada funcional lineal f definido en H, existe $u_f \in H$, único, tal que f se puede expresar de la forma

$$f(v) = B(v, u_f),$$

para toda $v \in H$. Además se tiene la desigualdad

$$||u_f|| \leq \frac{||f||}{\alpha},$$

donde $||f||$ es la norma, como operador, de f.

3.1.1 Espacios de funciones

Sea $0 < p < 1$. Se denota $L^p(\Omega)$ al espacio de funciones reales en Ω tales que

$$||u||_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right)^{1/p} < \infty.$$

$L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach con esta norma. Si $p = 2, L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega u(x)v(x) \, dx.$$

Sea $u \in C(\Omega)$, acotada y uniformemente continua en Ω. Entonces u posee una única extensión acotada en $\bar{\Omega}$. Se define el espacio $C^m(\bar{\Omega})$ como aquellas funciones en $C^m(\Omega)$ tales de $\mathrm{D}^\alpha u$ es acotada y uniformemente continua en Ω para $0 \leq |\alpha| \leq m$. $C^m(\bar{\Omega})$ es un espacio de Banach en la norma

$$||u||_{C^m(\bar{\Omega})} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |\mathrm{D}^\alpha u(x)|.$$

Definición 3.5 (Espacios de Schauder) *Sea $0 < \mu \leq 1$. Se define $C^{m,\mu}(\bar{\Omega})$ como el subespacio de $C^m(\bar{\Omega})$ de las funciones u cuyas derivadas $\mathrm{D}^\alpha u$, con $|\alpha| \leq m$, satisfacen en Ω una condición de Hölder de exponente μ, es decir, existe K tal que*

$$|\mathrm{D}^\alpha u(x) - \mathrm{D}^\alpha u(y)| \leq K|x - y|^\mu \quad \forall x, y \in \Omega.$$

$C^{m,\mu}(\bar{\Omega})$ es un espacio de Banach en la norma

$$||u||_{C^{m,\mu}} = ||u||_{C^m} + \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|\mathrm{D}^\alpha u(x) - \mathrm{D}^\alpha u(y)|}{|x - y|^\mu} \right\}.$$

Sea $u \in C^m(\Omega)$, con $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ y sea $1 \leq p < \infty$. Se define

$$||u||_{m,p} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} ||\mathrm{D}^\alpha u||^p_{L^p} \right)^{1/p} .$$

Lema 3.6 *$||\cdot||_{m,p}$ tiene las propiedades de una norma. Si $p = 2$ se denota únicamente $||\cdot||_{m,p}$ y se define*

$$(u, v)_m \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} \mathrm{D}^\alpha u \, \mathrm{D}^\alpha v \, \mathrm{d}\Omega, \tag{3.1}$$

y tiene las propiedades de un producto escalar.

Definimos los siguientes espacios de Sobolev :

Definición 3.7 (Espacios de Sobolev)

$$H^{m,p}(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\{u \in C^m(\Omega) \ : \ ||u||_{m,p} < \infty\}}^{||\cdot||_{m,p}},$$

$$W^{m,p}(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\{u \in L^p(\Omega) \ : \ \mathrm{D}^\alpha u \in L^p(\Omega) 0 \leq |\alpha| \leq m\}}^{||\cdot||_{m,p}},$$

$$W_0^{m,p}(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{||\cdot||_{m,p}},$$

donde $\mathrm{D}^\alpha u$ es una derivada débil, es decir,

$$\int_\Omega \mathrm{D}^\alpha u \varphi \, \mathrm{d}\Omega = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u \, \mathrm{D}^\alpha \varphi \, \mathrm{d}\Omega, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Los siguientes resultados se encuentran en [Adams, págs. 45, 48].

Teorema 3.8 *$W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach en la norma $||\cdot||_{m,p}$.*

Teorema 3.9 (Meyers-Serrin) $H^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega) \ \ \forall 1 \leq p < \infty, m \geq 0.$

Si $p = 2$ se denotan simplemente como $H^m(\Omega)$ y $H_0^m(\Omega)$ y claramente son espacios de Hilbert con el producto escalar (3.1). El espacio dual de $H_0^m(\Omega)$ se denota $H^{-m}(\Omega)$ y es el conjunto de funcionales lineales en $H_0^m(\Omega)$. Si $l \in H^{-m}(\Omega)$, por el teorema de representación de Riesz $\exists g \in H_0^m(\Omega)$ tal que $l(u) = (g, u)_m \ \forall u \in H_0^m(\Omega)$, y además $||l|| = ||g||_m$.

$$(g,u)_m = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha g, D^\alpha u) = (-1)^{|\alpha|} \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha D^\alpha g, u),$$

$\forall u \in H_0^m(\Omega)$. Esto define un funcional lineal sobre $H_0^m(\Omega)$ como $\sum_{|\alpha|\leq m}(D^\alpha f_\alpha, u)$, donde $f_\alpha = (-1)^\alpha D^\alpha g \in L^2(\Omega)$. Entonces $l = \sum_{|\alpha|\leq m} D^\alpha f_\alpha$. Esto implica que el conjunto de derivadas débiles de orden $\leq m$ de funciones en $L^2(\Omega)$ es el dual de $H_0^m(\Omega)$. Así, trabajaremos con $H^{-m}(\Omega)$ en la dualidad L^2 :

Definición 3.10 *$\phi \in H^{-m}(\Omega)$ si $\forall \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ $\exists \phi_\alpha \in L^2(\Omega)$ tal que*

$$\phi(u) = \sum_{|\alpha|\leq m} (\phi_\alpha, D^\alpha u) = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega \phi_\alpha D^\alpha u \, d\Omega \quad \forall u \in H_0^m(\Omega).$$

Lema 3.11 *$H^{-m}(\Omega)$ es un espacio de Banach con la norma negativa de Lax :*

$$\|\phi\|_{-m} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{u\in H_0^m(\Omega)\\ \|u\|_m\leq 1}} \{|(u,\phi)|\} = \sup_{\substack{u\in H_0^m(\Omega)\\ \|u\|_m\leq 1}} \{|\phi(u)|\}.$$

Comentario : Dado que cada $u \in L^2(\Omega)$ define un funcional lineal continuo a través de la dualidad L^2, entonces $L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$.

Recordemos ahora que el dual de $C_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}$ lo denotamos $\mathcal{D}'$, y es el espacio de distribuciones. El siguiente resultado se menciona en [Ize 78, pág. 23].

Lema 3.12 *1. $C_0^\infty(\Omega) \subset H_0^m(\Omega)$ y la inclusión es densa.*

2. $\mathcal{D} \subset \bigcap_{m=0}^{\infty} H_0^m(\Omega) \subset \ldots \subset H_0^m(\Omega) \subset \ldots \subset H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega) \subset \ldots \subset H^{-m}(\Omega) \subset \ldots \subset \bigcup_{m=0}^{\infty} H^{-m}(\Omega) \subset \mathcal{D}'$ y las inclusiones son densas.

3.1.2 Tipos de dominios

Las siguientes definiciones pueden encontrarse principalmente en el libro de R. Adams ([Adams, capítulo 3]) y en las notas de J. Ize ([Ize 78, sección 2]).

Definición 3.13 *Un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ acotado se dice que es de clase C^k para $k \in \mathbb{Z}^+$ si existen abiertos $U_i \subset \mathbb{R}^n$ y mapeos $\phi_i : U_i \mapsto \mathbb{R}^n$, $i \in I$ conjunto de índices, tales que*

1. $\bigcup_{i \in I} U_i \supset \Omega$.

2. *Cada* $\phi_i : U_i \mapsto \mathbb{R}^n$ *es una transformación 1 - 1 de clase* C^k.

3. $\phi_i(U_i \cap \partial\Omega) \subset \{x \in \mathbb{R}^n \;:\; x_n = 0\}$, *para toda* i, *y con* $U_i \cap \partial\Omega \neq 0$.

El par $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ *es llamado una cubierta* C^k.

Definición 3.14 *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *acotado. Se dice que* Ω *es un dominio estrellado con respecto a un punto* $x_0 \in \Omega$ *si para toda* $0 \leq \theta < 1$

$$\theta\bar{\Omega} \stackrel{\text{def}}{=} \{x_0 + \theta x \;:\; x \in \Omega\} \subset \Omega.$$

Definición 3.15 *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *acotado. Se dice que* Ω *es un dominio Lipschitz si para toda vecindad* $\mathcal{O}$ *de un punto* $x \in \partial\Omega$, *entonces* $\partial\Omega$ *se puede representar como una hipersuperficie* $y_n = \varphi(y_1, \ldots, y_{n-1})$, *donde* φ *es una función Lipschitz y* (y_i) *son coordenadas rectangulares en* $\mathbb{R}^n$ *en una base que puede ser diferente de la base canónica.*

Observación : Si Ω es de clase C^m, con $m > 0$ entonces Ω es Lipschitz.

Definición 3.16 Ω *es localmente estrellado si para toda* $x_i \in \partial\Omega$ *existe una vecindad abierta* $\mathcal{O}_i$ *tal que* $\Omega \cap \mathcal{O}_i$ *es estrellado con respecto a alguno de sus puntos.*

Lema 3.17 *Si* Ω *es Lipschitz entonces es localmente estrellado.*

Corolario 3.18 *Si* Ω *es de clase* $C^{0,1}$ *(en sentido de Hölder, véase definición 3.13) entonces* Ω *es localmente estrellado.*

A continuación enunciaremos un lema que se encuentra demostrado en [Kötter, capítulo 2] y que será de utilidad para demostrar el lema 3.34.

Definición 3.19 $X(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in H^{-1}(\Omega) \;:\; u_{x_i} \in H^{-1}(\Omega),\; i = 1, 2, 3\}$.

Lema 3.20 *Si* Ω *es de clase* $C^{0,1}$, *entonces* $X(\Omega) = L^2(\Omega)$.

3.1.3 Teoremas de compacidad

Definición 3.21 *Se dice que un espacio X está compactamente incluído en Y si el operador inclusión $I : X \mapsto Y$, definido como $Ix = x$, $\forall x \in X$ es compacto, es decir, $\overline{I(A)}$ es compacto en Y para todo $A \subset X$ acotado en X. La compacidad de la inclusión se denota $X \hookrightarrow Y$.*

Corolario 3.22 *$X \hookrightarrow Y$ si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}$ en X acotada $\|x_n\|_X \leq M, \forall n$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ convergente en Y.*

El siguiente teorema se encuentra en [Ize 78, pág. 33].

Teorema 3.23 (Rellich) *Sea Ω acotado, Lipschitz. Si $m > k \geq 0$, entonces la inclusión $H^m(\Omega) \hookrightarrow H^k(\Omega)$ es compacta. Lo mismo se aplica a $H_0^m(\Omega) \hookrightarrow H_0^k(\Omega)$.*

Corolario 3.24 *En particular se tiene que $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$.*

La generalización del teorema anterior se puede encontrar en el libro de Adams ([Adams, pág. 144]) :

Teorema 3.25 (Rellich-Kondrachov) *Sea Ω acotado. Sea $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$, y $1 \leq p \leq \infty$, $j \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq j < m$. Sea $q \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m-j}{n}$.*

1. *Si j es tal que $0 < q \leq 1$ entonces la inclusión $W^{m,p}(\Omega) \subset W^{j,q}(\Omega)$ es continua. La inclusión $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q'}(\Omega)$ es compacta si $q' < q$.*
2. *$C^{m,\mu}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow C^{m',\mu'}(\bar{\Omega})$ compactamente si $m' \leq m$ y $m' + \mu' < m + \mu$.*
3. *Sea $\mu = m - \frac{n}{p} - j$. Si $0 < \mu < 1$ entonces la inclusión $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\mu}(\bar{\Omega})$ es compacta.*

A continuación daremos algunas propiedades muy conocidas del alisador o molificador de Friedrichs, y que se pueden consultar, por ejemplo, en el libro de O.A. Ladyzhenskaya [Lad 76, pág. 17]. Sea $\rho \in (C_0^\infty(\Omega))^3$ una función $\rho \geq 0$ tal que

(i) $\rho = 0$ si $|x| \geq 1$.
(ii) $\int_{\mathbb{R}^3} \rho \, dx = 1$.

Es fácil construir una función con tales características (para ello consultar [Lad 76, pág. 17]).

Definición 3.26 *Sea $u \in L^2(\Omega)$ con $u \equiv 0$ fuera de Ω acotado. Sea $\varepsilon > 0$. Se define*

$$J_\varepsilon u(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \rho\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right) u(y)\, dy,$$

como el alisador o molificador de Friedrichs.

Lema 3.27 *El alisador de Friedrichs definido anteriormente tiene las siguientes propiedades:*

1. *$J_\varepsilon u$ es de clase C^∞.*
2. *$J_\varepsilon u \longrightarrow u$ puntualmente en Ω^{int} si $\varepsilon \to 0$.*
3. *Si $u \in C^1(\Omega)$ entonces $J_\varepsilon u \xrightarrow{C^1} u$ $\forall x \in \Omega$.*
4. *J_ε visto como un operador $J_\varepsilon : L^2(\Omega) \mapsto L^2(\Omega)$, es lineal y continuo con norma $||J_\varepsilon|| \leq 1$.*
5. *Si $u \in L^2(\Omega)$ entonces $J_\varepsilon u \xrightarrow{L^2(\Omega)} u$ cuando $\varepsilon \to 0$.*
6. *Si $u \in H^1(\Omega)$ entonces $J_\varepsilon u \xrightarrow{H^1(\Omega)} u$ cuando $\varepsilon \to 0$.*

3.1.4 Teoremas de traza

A continuación expondremos algunos resultados muy conocidos con respecto a la traza de una función en la frontera del dominio. Para esta parte se recomienda consultar el libro de R. Adams ([Adams]) y el texto de R. Temam ([Temam]).

Sea Ω acotado, de clase C^2 (ver [Temam, pág 9]).

Lema 3.28 *Existe un operador lineal continuo $\gamma_0 : H^1(\Omega) \mapsto L^2(\partial\Omega)$ tal que $u|_{\partial\Omega} = \gamma_0(u)$, para toda $u \in H^1(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega})$ y con $\ker \gamma_0 = H_0^1(\Omega)$. Se denomina operador de traza.*

Lema 3.29 *La imagen de $H^1(\Omega)$ bajo γ_0, $\gamma_0(H^1(\Omega))$, es un subespacio denso de $L^2(\partial\Omega)$. Se denota $H^{1/2}(\Omega)$.*

Lema 3.30 *Si Ω es acotado, Lipschitz, entonces existe $c > 0$ tal que*

$$||\gamma_0(u)||^2 \leq c||u||_1^2,$$

para toda $u \in H^1(\Omega)$.

Teorema 3.31 (Compacidad de la traza) *El operador $\gamma_0 : H^1(\Omega) \mapsto L^2(\partial\Omega)$ es compacto (es decir, para toda sucesión acotada $\{u_n\}$ en $H^1(\Omega)$ existe una subsucesión u_{n_j} tal que $\gamma_0(u_{n_j})$ converge en $L^2(\partial\Omega)$).*

Observaciones :

Si $u \in H^m(\Omega)$ entonces el rango de γ_0 se define como $H^{m-1/2}$. Es decir, si $|\alpha| \leq m-1$,

$$D^\alpha u \xrightarrow{\Gamma_0} H^{1/2}(\partial\Omega),$$

y en general,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial n} &\in H^{m-3/2}(\partial\Omega)\\
\frac{\partial^2 u}{\partial^2 n} &\in H^{m-5/2}(\partial\Omega)\\
&\vdots\\
\frac{\partial^{m-1} u}{\partial^{m-1} n} &\in H^{1/2}(\partial\Omega)
\end{aligned}$$

Se puede definir una traza generalizada $\Gamma_0(u)$

$$u \xrightarrow{\Gamma_0(u)} \left(\gamma_0(u), \gamma_0(\frac{\partial u}{\partial n}), \ldots, \gamma_0(\frac{\partial^{m-1} u}{\partial^{m-1} n})\right) \in H^{m-1/2}(\partial\Omega) \times H^{m-3/2}(\partial\Omega) \times \ldots \times H^{1/2}(\partial\Omega).$$

Se puede probar que $\Gamma_0(u)$ es sobre y que $\ker \Gamma_0 = H_0^m(\Omega)$. Como operador de $H_0^m(\Omega)$ a $H^{m-1}(\partial\Omega) \times \ldots \times L^2(\partial\Omega)$, el teorema de compacidad de Rellich implica que Γ_0 es compacto.

3.2 Algunos lemas útiles

Se probarán en esta sección algunos resultados que aunque se pueden encontrar en la literatura, son relevantes para la formulación débil del problema y cuyas demostraciones contienen elementos útiles para razonamientos posteriores.

Vamos a suponer que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un dominio acotado. Si $u \in H^1(\Omega)$, ∇u está definido en sentido débil, es decir, ∇u es una función en $(L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega))^3$, tal que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \phi \, d\Omega = -\int_\Omega u \operatorname{div} \phi \, d\Omega \quad \forall \phi \in (H_0^1(\Omega))^3.$$

Definimos por lo tanto el siguiente funcional

$$l_u(\phi) \stackrel{\text{def}}{=} -\int_\Omega u \operatorname{div}\phi \, d\Omega, \tag{3.2}$$

para $\phi \in (H_0^1(\Omega))^3$, claramente lineal en ϕ. Notamos que $|l_u(\phi)| \leq ||u||_{H^1(\Omega)}||\phi||_{(H^1(\Omega))^3}$, por lo que l_u es continuo y su norma negativa de Lax, es decir, su norma en $(H^{-1}(\Omega))^3$, es acotada :

$$||l_u||_{-1} \leq ||u||_{L^2} \leq ||u||_1. \tag{3.3}$$

Observamos que si $u \in L^2(\Omega)$ el funcional l_u también está definido y tiene las mismas propiedades. Podemos resumir lo anterior en la siguiente

Definición 3.32 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ acotado. Si $u \in L^2(\Omega)$ definimos el funcional en $(H^{-1}(\Omega))^3$, $l_u : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ y dado por la ecuación (3.2), $\forall \phi \in (H_0^1(\Omega))^3$.*

En consecuencia se puede construir de manera natural el siguiente operador.

Definición 3.33 *Sea $u \in L^2(\Omega)$. Se define el operador $\nabla : L^2(\Omega) \longrightarrow (H^{-1}(\Omega))^3$, como*

$$\nabla u \stackrel{\text{def}}{=} l_u \in (H^{-1}(\Omega))^3.$$

Observamos que ∇ es lineal pues $l_u(\phi)$ es lineal en u para toda ϕ, y continuo, por la ecuación (3.3). El siguiente lema será de utilidad más adelante.

Lema 3.34 *Sea Ω de clase $C^{0,1}$. El operador ∇ tiene rango cerrado en $(H^{-1}(\Omega))^3$.*

Prueba :

Sea una sucesión $\{u_n\}$ en $L^2(\Omega)$ tal que $\nabla u_n \xrightarrow{H^{-1}} v \in (H^{-1}(\Omega))^3$, es decir,

$$\sup_{||\phi||_1 \leq 1} \{|(\nabla u_n, \phi) - (v, \phi)|\} = \sup_{||\phi||_1 \leq 1} \{|-\textstyle\int_\Omega u_n \operatorname{div}\phi \, d\Omega - (v, \phi)|\} \to 0,$$

si $n \to \infty$. Queremos probar que $\exists u \in L^2(\Omega)$, tal que $\nabla u = v$. Primero demostraremos que la sucesión $\{u_n\}$ debe ser acotada.

Supongamos que $\{u_n\}$ no es acotada; por lo tanto existe una subsucesión que también denotaremos por $\{u_n\}$ con la propiedad de que $||u_n||_{L^2} \to \infty$, si $n \to \infty$. Claramente podemos suponer que $u_n \in (\ker \nabla)^{\perp}\ \forall n$. Sea

$$v_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u_n}{||u_n||_{L^2}},$$

por lo que $||v_n||_{L^2} = 1$. Ahora,

$$-\int_\Omega v_n \operatorname{div}\phi \, d\Omega = -\frac{1}{||u_n||_{L^2}} \int_\Omega u_n \operatorname{div}\phi \, d\Omega = -\frac{(\nabla u_n, \phi)}{||u_n||_{L^2}},$$

para toda $\phi \in (H_0^1(\Omega))^3$. Sabemos que $\nabla u_n \xrightarrow{H^{-1}} v \Rightarrow (\nabla u_n, \phi) \to (v, \phi)\ \forall \phi \in (H_0^1(\Omega))^3$, por lo tanto $(\nabla u_n, \phi)$ está acotado $\forall n$. De esta manera

$$(\nabla v_n, \phi) = \frac{(\nabla u_n, \phi)}{||u_n||_{L^2}} \longrightarrow 0,$$

si $n \to \infty$, dado que $||u_n||_{L^2} \to \infty$. Esto implica que $\nabla v_n \xrightarrow{H^{-1}} 0$.

Pero $||v_n||_{L^2} = 1\,\forall n$, así que por el lema 3.3 existe una subsucesión $\{v_{n_j}\}$ tal que $v_{n_j} \stackrel{L^2}{\rightharpoonup} v \in (L^2(\Omega))^3 \subset (H^{-1}(\Omega))^3$. Por lo tanto tenemos que

$$(\nabla v_{n_j}, \phi) = -(v_{n_j}, \operatorname{div}\phi) \longrightarrow -(v, \operatorname{div}\phi) = (\nabla v, \phi).$$

Sabíamos que $(\nabla v_{n_j}, \phi) \to 0$, por lo que $(\nabla v, \phi) = 0$, para toda $\phi \in (H_0^1(\Omega))^3$, o bien, $v \in \ker \nabla$. Como $v_n \in (\ker \nabla)^{\perp}$, cerrado, entonces $v \in (\ker \nabla)^{\perp}$, de donde se concluye que $v = 0$.

Por otro lado sabemos que $v_{n_j} \xrightarrow{L^2} 0$ y por la compacidad de la inclusión $(L^2(\Omega))^3 \hookrightarrow (H^{-1}(\Omega))^3$, entonces existe una subsucesión $\{v_{n_k}\}$ tal que $v_{n_k} \xrightarrow{H^{-1}} 0$. Tenemos, pues, que $v_{n_k} \xrightarrow{H^{-1}} 0$ y $\nabla v_{n_k} \xrightarrow{H^{-1}} 0$. Por el lema 3.20, concluímos que $v_{n_k} \xrightarrow{L^2} 0$, contradiciendo $||v_{n_k}||_{L^2} = 1\,\forall n_k$.

Por lo tanto la sucesión $\{u_n\}$ debe ser acotada.

De esta manera $\exists M > 0$ tal que $||u_n||_{L^2} \leq M$. Así existe una subsucesión que denotamos nuevamente $\{u_n\}$ tal que $u_n \stackrel{L^2}{\rightharpoonup} u \in L^2(\Omega)$, y en consecuencia,

$$(u_n, v) \longrightarrow (u, v) \quad \forall v \in L^2(\Omega).$$

Si $\phi \in (H_0^1(\Omega))^3$, entonces $\operatorname{div}\phi \in L^2(\Omega)$, por lo que

$$(\nabla u_n, \phi) = -(u_n, \operatorname{div}\phi) \longrightarrow -(u, \operatorname{div}\phi) = (\nabla u, \phi),$$

para toda ϕ, es decir $\nabla u_n \overset{H^{-1}}{\rightharpoonup} \nabla u$. Por unicidad del límite

$$\nabla u = v.$$

□

A continuación se demostrará un lema a partir del cual se prueba, a su vez, el teorema que justifica la existencia de la presión p si se cumplen algunas condiciones sobre el dominio y sobre los datos f.

Lema 3.35 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de clase $C^{0,1}$, y $f \in (H^{-1}(\Omega))^3$. Supóngase que $(f, u) = 0$ $\forall u \in (H_0^1(\Omega))^3$, y con $\operatorname{div} u = 0$. Entonces $\exists p \in L^2(\Omega)$ tal que $f = \nabla p$.*

Prueba :

Sea

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \text{rango}(\nabla) = \left\{ f \in (H^{-1}(\Omega))^3 \ : \ f = \nabla p,\, p \in L^2(\Omega) \right\},$$

el cual es cerrado por el lema 3.34. Sea también

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ u \in (H_0^1(\Omega))^3 \ : \ \operatorname{div} u = 0 \right\}.$$

Consideramos $R^\perp$ en la dualidad L^2, esto es si $u \in (H_0^1(\Omega))^3$,

$$u \in R^\perp \iff l_p(u) = (\nabla p, u) = 0 \quad \forall p \in L^2(\Omega).$$

Si tomamos $u \in R^\perp$ y para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, entonces $(\nabla\phi, u) = -(\operatorname{div} u, \phi) = 0$. Esto es cierto si y sólo si $\operatorname{div} u = 0$ a.e. en Ω.

De esta forma $R^\perp = M$. Por lo tanto $M^\perp = R^{\perp\perp} = \bar{R} = R$, pues R es cerrado. Así, si $f \in M^\perp$ entonces $f \in (H^{-1}(\Omega))^3$ y $(f, u) = 0\ \forall u \in M$, es decir, $f \in M^\perp = R$, por lo que $\exists p \in L^2(\Omega)$ tal que $f = \nabla p$.

□

A continuación enunciaremos el teorema que garantiza la existencia de la presión, cuya demostración se basa en las propiedades del alisador de Friedrichs.

Lema 3.36 *Sea Ω de clase $C^{0,1}$ y $f \in (H^{-1}(\Omega))^3$ tal que $(f,\phi) = 0$ $\forall\phi \in (C_0^\infty(\Omega))^3$ y con $\operatorname{div}\phi = 0$. Entonces $\exists p \in L^2(\Omega)$ tal que $f = \nabla p$.*

Prueba :

Caso 1 : Ω es estrellado con respecto a un punto x_0. Sin pérdida de generalidad supongamos que $x_0 = 0$. Entonces dado $0 \leq \theta \leq 1$,

$$\theta\bar{\Omega} = \{\theta x \ : \ x \in \Omega\} \subset \Omega,$$

por ser Ω estrellado. Sea $u \in (H_0^1(\Omega))^3$ con $\operatorname{div} u = 0$, y extendemos $u \equiv 0$ fuera de Ω. Definimos

$$u_\theta(x) \stackrel{\text{def}}{=} u\left(\frac{x}{\theta}\right),$$

por lo que $\operatorname{div} u_\theta = \theta^{-1}\operatorname{div} u = 0$. u_θ tiene soporte compacto en Ω y puede ser aproximada por funciones en $(C_0^\infty(\Omega))^3$ (véase [Schwartz, pág. 72]). Sea $\rho \in (C_0^\infty(\Omega))^3$ una función $\rho \geq 0$ tal que

(i) $\rho = 0$ si $|x| \geq 1$.
(ii) $\int_{\mathbb{R}^3} \rho \ dx = 1$,

como en la definición del alisador de Friedrichs. Definamos ahora

$$\rho_\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varepsilon^3}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

con $\varepsilon > 0$, y tomamos el alisador de Friedrichs de la función u_θ :

$$J_\varepsilon(u_\theta)(x) = \frac{1}{\varepsilon^3}\int_\Omega \rho\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right) u_\theta(y) \ dy.$$

Con el cambio de variable $y = x + \varepsilon z$ tenemos

$$J_\varepsilon(u_\theta)(x) = \int_{|z|\leq 1} \rho(z)u_\theta(x+\varepsilon z) \ dz \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \int_{|z|\leq 1} \rho(z)u_\theta(x) \ dz = u_\theta(x),$$

pues ρ es C^∞ y el dominio de integración acotado. Por lo tanto tenemos que, puntualmente, $J_\varepsilon(u_\theta)(x) \to u_\theta(x)$ si $\varepsilon \to 0$. Por el lema 3.27 sabemos también que

$$J_\varepsilon(u_\theta) \xrightarrow{L^2} u_\theta,$$

$$\text{y} \quad J_\varepsilon(u_\theta) \xrightarrow{H^1} u_\theta.$$

Por otro lado si escogemos ε tal que $\varepsilon \leq \operatorname{dist}(\operatorname{supp} u_\theta, \partial\Omega)$, entonces $J_\varepsilon(u_\theta) \in (C_0^\infty(\Omega))^3$. De esta forma usando también la continuidad y la convergencia en H^1 del alisador tenemos que

$$(f, u_\theta) = \lim_{\varepsilon \to 0} (f, J_\varepsilon(u_\theta)) = 0,$$

ya que $(f, J_\varepsilon(u_\theta)) = 0$ por hipótesis sobre f y que por

$$\operatorname{div} J_\varepsilon(u_\theta) = \int_{|z| \leq 1} \rho(z) \operatorname{div} u_\theta \, dz = 0.$$

Por otra parte, como $f \in (H^{-1}(\Omega))^3$, es un funcional lineal continuo en $(H_0^1(\Omega))^3$, y por la convergencia $u_\theta \xrightarrow{H^1} u$, entonces

$$(f, u) = \lim_{\theta \to 1} (f, u_\theta) = 0,$$

$\forall u \in (H_0^1(\Omega))^3$ con $\operatorname{div} u = 0$. Por el lema 3.35 $\exists p \in L^2(\Omega)$ tal que $f = \nabla p$.

Caso 2 : Ω no es estrellado. Como Ω es de clase $C^{0,1}$, para toda $x \in \Omega$, existe $\mathcal{O}$ vecindad abierta de clase $C^{0,1}$ estrellada. Aplicando el caso 1 en $\mathcal{O}$, tenemos que existe $q \in L^2(\mathcal{O})$ tal que $f = \nabla q$ en $\mathcal{O}$.

Si lo hacemos para $x_1, x_2 \in \partial\Omega$, $\exists q_1 \in L^2(\mathcal{O}_1)$ y $\exists q_2 \in L^2(\mathcal{O}_2)$ tales que $f = \nabla q_1$ en $\mathcal{O}_1$ y $f = \nabla q_2$ en $\mathcal{O}_2$, por lo que $q_1|_{\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2} - q_2|_{\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2} =$ constante.

Es decir, todas las q's difieren por una constante. Así, $\exists p \in L^2(\Omega)$, con $p|_{\mathcal{O}} - q =$ constante, tal que

$$f = \nabla p \quad \text{en } \Omega.$$

□

Para finalizar probaremos un lema muy sencillo que será utilizado más adelante para un caso particular.

Lema 3.37 *Sean Ω_1, Ω_2 dominios en $\mathbb{R}^3$ tales que $\Omega_1^{\rm int} \cap \Omega_2^{\rm int} = \emptyset$ (véase figura 3.1). Sean $\varphi_1 \in H^1(\Omega_1)$, $\varphi_2 \in H^1(\Omega_2)$ tales que $\varphi_1|_{\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_2} = \varphi_2|_{\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_2}$. Definimos $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ y φ en Ω como*

$$\varphi \stackrel{\rm def}{=} \begin{cases} \varphi_1(x) & : x \in \Omega_1 \\ \varphi_2(x) & : x \in \Omega_2 \end{cases}.$$

Entonces φ está en $H^1(\Omega)$.

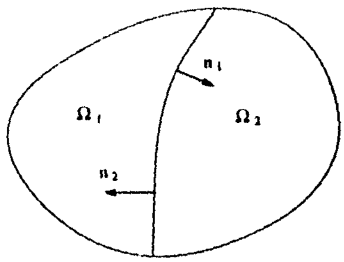

Figura 3.1 : Dominios con frontera común.

Prueba :

Claramente $\int_\Omega \varphi \, dx = \int_{\Omega_1} \varphi_1 \, dx + \int_{\Omega_2} \varphi_2 \, dx < \infty$, por lo que $\varphi \in L^2(\Omega)$.

Sea $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \psi\varphi_x \, dx &= \int_{\Omega_1} \psi\varphi_{1x} \, dx + \int_{\Omega_2} \psi\varphi_{2x} \, dx \\
&= \int_{\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_2} \begin{pmatrix} \psi\varphi_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot n \, dS + \int_{\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_2} \begin{pmatrix} \psi\varphi_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot n \, dS \\
&\quad - \int_{\Omega_1} \psi_x\varphi_1 \, dx - \int_{\Omega_2} \psi_x\varphi_2 \, dx.
\end{aligned}$$

Ahora, sobre $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$, la normal exterior a Ω_1, $n_1 = -n_2$, la normal exterior a Ω_2. Por lo tanto

$$\int_{\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_2} \begin{pmatrix} \psi\varphi_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot n_1 \, dS + \int_{\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_2} \begin{pmatrix} \psi\varphi_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot n_2 \, dS = \int_{\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_2} \begin{pmatrix} \psi(\varphi_1 - \varphi_2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot n_1 \, dS = 0,$$

ya que $\varphi_1|_{\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_2} = \varphi_2|_{\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_2}$.

Así, $\int_\Omega \psi\varphi_x \, dx = -\int_\Omega \psi_x\varphi \, dx$, para toda $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$. Es decir, la función

$$\varphi_x \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \varphi_{1x} & : \; x \in \Omega_1 \\ \varphi_{2x} & : \; x \in \Omega_2 \end{cases},$$

es la derivada distribucional de φ en Ω. También vemos que $\int_\Omega |\varphi_x|^2 \, dx = \int_{\Omega_1} |\varphi_{1x}|^2 \, dx + \int_{\Omega_2} |\varphi_{2x}|^2 \, dx < \infty$, y por ende, $\varphi \in H^1(\Omega)$.

Capítulo 4

La formulación débil

A continuación se expondrán dos resultados de gran importancia en el estudio del problema que son, primero, la definición de solución débil y la prueba de su equivalencia con una solución en sentido distribucional, y segundo, la existencia y unicidad de dicha solución para el problema linealizado conocido como problema de Stokes.

Para ello vamos a suponer que el dominio Ω es conocido, definido por una función $\xi(x,y)$ de clase al menos C^2 que representa la perturbación del dominio con frontera plana, y en consecuencia asumiremos que la condición normal para el esfuerzo superficial se satisface de manera natural razón por la que nos olvidaremos de ella por el momento. El sistema restante con condiciones de frontera puede ser transformado a una ecuación integral equivalente, definida en un espacio de trabajo que es subespacio de $(H^1(\Omega))^3$, y cuya norma es equivalente a la norma $\|\cdot\|_1$. En la definición de dicho espacio se incluyen las condiciones de frontera homogéneas y las condiciones de periodicidad.

Posteriormente se probará la existencia y unicidad de una solución u para este problema como consecuencia del teorema de representación de Riesz.

4.1 El espacio de trabajo J

Definiremos un subespacio de $(H^1(\Omega))^3$ que incluya las condiciones de frontera homogéneas y a las funciones tales que $\operatorname{div} u = 0$ en Ω, pero antes recurriremos a la siguiente

Definición 4.1 *Sea el conjunto*

$$W \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in (C^\infty(\Omega))^3 \,:\, u|_{\Gamma_b} = 0\,;\, u\cdot n|_\Gamma = 0\,;\, \partial^\alpha u|_{x=0} = \partial^\alpha u|_{x=x_0}\,;\, \partial^\alpha u|_{y=0} = \partial^\alpha u|_{y=1}\,\}, \tag{4.1}$$

con $|\alpha| \leq 1$. *Definimos el siguiente subespacio de* $(H^1(\Omega))^3$ *como la cerradura de* W *con respecto a la norma* $\|\cdot\|_1$:

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \overline{W}^{\|\cdot\|_1}. \tag{4.2}$$

En base al espacio V definimos ahora lo que será el espacio de trabajo para la formulación débil del problema.

Definición 4.2

$$J(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in V \ : \ \operatorname{div} u = 0\}. \tag{4.3}$$

Cabe mencionar que las condicionesde frontera se conservan al completar el espacio, lo cual es una consecuencia de la continuidad de la traza, excepto por las condiciones de periodicidad para las derivadas de u. Por esa razón definimos el siguiente subespacio de $(C^2(\Omega))^3$.

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \left\{u \in (C^2(\Omega))^3 \ : \ u|_{\Gamma_b} = 0\,;\ u\cdot n|_{\Gamma} = 0\,;\ \partial^\alpha u|_{x=0} = \partial^\alpha u|_{x=x_0}\,;\ \partial^\alpha u|_{y=0} = \partial^\alpha u|_{y=1}\ \forall|\alpha| \leq 1\right\}, \tag{4.4}$$

con las mismas condiciones homogéneas de frontera y de periodicidad. Claramente B es denso en V, por lo que $B \cap J$ es denso en J.

4.1.1 Normas en los espacios V y J

Demostraremos que la norma del gradiente en $(L^2(\Omega))^3$ vista como una norma en $(H^1(\Omega))^3$ es equivalente a la norma $\|\cdot\|_1$ en el espacio V, y por lo tanto, también en el espacio J.

Definición 4.3 *Si* $u, v \in (H^1(\Omega))^3$ *se denota*

$$(u,v)_\nabla \stackrel{\text{def}}{=} (\nabla u, \nabla v) = \sum_{|\alpha|=1} \int_\Omega \mathrm{D}^\alpha u \cdot \mathrm{D}^\alpha v \, d\Omega.$$

Definimos también $\|u\|_\nabla^2 \stackrel{\text{def}}{=} (u,u)_\nabla = \|u\|_{L^2}^2$.

Lema 4.4 $\|\cdot\|_\nabla$ *define una norma en* V.

Prueba :

Es obvio que $||u||_\nabla \geq 0$ $\forall u \in V$. Sean u, v en V. $||u||_\nabla = 0 \;\Rightarrow \mathrm{D}^\alpha u = 0$ a.e. $\forall |\alpha| \leq 1$, por lo que $u =$ constante a.e., y como $u|_{\Gamma_b} = 0$, entonces $u \equiv 0$. Claramente $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $||\lambda u||_\nabla^2 = \lambda^2 \sum_{|\alpha|\leq 1} \int_\Omega (\mathrm{D}^\alpha u)^2 \, \mathrm{d}\Omega = \lambda^2 ||u||_\nabla^2$, por lo cual $||\lambda u||_\nabla = |\lambda| ||u||_\nabla$ $\forall u$. Finalmente aplicando Cauchy-Schwarz en $L^2(\Omega)$ tenemos

$$\begin{aligned} ||u+v||_\nabla^2 = (u+v, u+v)_\nabla = ||u||_\nabla^2 + ||v||_\nabla^2 + 2(\nabla u, \nabla v) &\leq ||u||_\nabla^2 + ||v||_\nabla^2 + 2||u||_\nabla ||v||_\nabla \\ &= (||u||_\nabla + ||v||_\nabla)^2. \end{aligned}$$

Esto implica que $||u+v||_\nabla \leq ||u||_\nabla + ||v||_\nabla$.

□

Sabemos que $||\cdot||_1 \sim ||\cdot||_\nabla$ en V, si y sólo si $\exists\, c_0, c_1 > 0$ constantes tales que

$$c_1 ||u||_1 \leq ||u||_\nabla \leq c_0 ||u||_1,$$

$\forall u \in V$. Es evidente que

$$||u||_1^2 = ||u||_{L^2}^2 + ||u||_\nabla^2 \geq ||u||_\nabla^2 \quad \forall u \in V,$$

y si probamos que $\exists c_0 > 0$ tal que $||u||_{L^2}^2 \leq c_0 ||u||_\nabla^2$, entonces

$$||u||_1^2 = ||u||_{L^2}^2 + ||u||_\nabla^2 \leq (c_0 + 1)||u||_\nabla^2 \quad \forall u \in V.$$

Esto es, basta con probar la desigualdad de Poincaré en el espacio V para poder concluir la equivalencia de ambas normas.

Lema 4.5 (Desigualdad de Poincaré) $\exists c_0 > 0$ *y sea* $u \in V$, *entonces*

$$||u||_{L^2}^2 \leq c_0 ||u||_\nabla^2.$$

Prueba :

Sea $u \in B$, definido en (4.4). Tomamos $x \in \Omega$ y consideramos el segmento que une a x con su proyección en Γ_b : $C \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{(x_1, x_2, tx_3) \;:\; 0 \leq t \leq 1\}$. Podemos escribir

$$u_i(x) = \int_0^{x_3} u_{i x_3}(x_1, x_2, t) \; \mathrm{d}t,$$

para toda i. Por Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} u_i(x)^2 &\leq \left(\int_0^{x_3} dt\right)\left(\int_0^{x_3} u_{i_{x_3}}^2(x_1,x_2,t)\, dt\right) \\ &= x_3 \int_0^{x_3} u_{i_{x_3}}^2(x_1,x_2,t)\, dt. \end{aligned}$$

Llamemos $z_\Gamma(x_1,x_2)$ a la coordenada x_3 tal que $(x_1,x_2,z_\Gamma) \in \Gamma$, es decir, $z_\Gamma(x_1,x_2) = 1+\xi(x_1,x_2)$. Por lo tanto $x_3 \leq z_\Gamma \forall (x_1,x_2) \in \Gamma_b$, y así

$$u_i(x)^2 \leq x_3 \int_0^{z_\Gamma} u_{i_{x_3}}^2(x_1,x_2,t)\, dt.$$

Ahora, integrando en Ω y aplicando el teorema de Fubini llegamos a

$$\begin{aligned} \int_\Omega u_i^2\, d\Omega &\leq \int_\Omega \left(x_3 \int_0^{z_\Gamma} u_{i_{x_3}}^2(x_1,x_2,t)\, dt\right) d\Omega \\ &= \int_{\Gamma_b}\int_0^{z_\Gamma}\left(x_3\int_0^{z_\Gamma} u_{i_{x_3}}^2(x_1,x_2,t)\, dt\, dx_3\right) dx_1\, dx_2 \\ &= \int_{\Gamma_b}\left(\int_0^{z_\Gamma} u_{i_{x_3}}^2(x_1,x_2,t)\, dt\right)\left(\int_0^{z_\Gamma} x_3\, dt\right) dx_1\, dx_2. \end{aligned}$$

Pero Γ es acotada en x_3, por lo que $\exists c > 0$ tal que $c \geq \sup_{(x_1,x_2)\in\Gamma_b} \{z_\Gamma(x_1,x_2)\}$. De esta manera

$$\begin{aligned} \int_\Omega u_i^2\, d\Omega &\leq \frac{z_\Gamma^2}{2}\left(\int_{\Gamma_b}\int_0^{z_\Gamma} u_{i_{x_3}}^2(x_1,x_2,t)\, dt\, dx_1\, dx_2\right) \\ &\leq \frac{c^2}{2}\int_\Omega u_{i_{x_3}}^2\, d\Omega \leq \frac{c^2}{2}\int_\Omega |\nabla u_i|^2\, d\Omega. \end{aligned}$$

para toda i. Sumando las desigualdades obtenemos

$$\int_\Omega u^2\, d\Omega \leq \frac{c^2}{2}\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega |\nabla u_i|^2\, d\Omega,$$

es decir,

$$||u||_{L^2}^2 \leq c_0 ||u||_\nabla^2,$$

$\forall u \in B$.

Si $u \in V$, $\exists\{u_n\}$ en B tal que $u_n \xrightarrow{H^1} u$. Por lo que $u_n \xrightarrow{L^2} u$ y $||u_n||_\nabla \to ||u||_\nabla$ cuando $n \to \infty$. Consecuentemente, la desigualdad se preserva para $u \in V$. Notamos también que la constante $c_0 = c^2/2$ depende de Ω.

$\square$

Corolario 4.6 *Las normas $||\cdot||_\nabla$ y $||\cdot||_1$ son equivalentes en los espacios V y J.*

A continuación se definirá una forma bilineal que resulta ser un producto escalar en J y que aparece con frecuencia en teoría de elasticidad.

Definición 4.7 *Si $u, v \in V$ se define*

$$E(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,k} \int_\Omega (u_{ix_k} + u_{kx_i})(v_{ix_k} + v_{kx_i})\, d\Omega = 4 \sum_{i,k} \int_\Omega e_{ik}(u) e_{ik}(v)\, d\Omega. \tag{4.5}$$

donde e_{ik} es el tensor de deformación (véase definición 1.11, pág. 34).

Lema 4.8 $E(\cdot,\cdot)$ *es un producto escalar en J.*

Prueba :

Sean $u, v, w \in J$. Es claro que $E(u,v) = E(v,u)$. también si $\lambda \in \mathbb{R}$

$$E(\lambda u, v) = 4\lambda \sum_{i,k} \int_\Omega e_{ik}(u) e_{ik}(v)\, d\Omega = \lambda E(u,v).$$

También es evidente que

$$\begin{aligned} E(u+v,w) &= 4 \sum_{i,k} \int_\Omega e_{ik}(u+v) e_{ik}(w)\, d\Omega \\ &= 4 \sum_{i,k} \int_\Omega e_{ik}(u) e_{ik}(w)\, d\Omega + 4 \sum_{i,k} \int_\Omega e_{ik}(v) e_{ik}(w)\, d\Omega = E(u,w) + E(v,w), \end{aligned}$$

$\forall u, v, w \in J$.

Obviamente si $u = 0$ entonces $E(u,u) = 0$. Basta demostrar que $E(u,u) = 0 \Rightarrow u = 0$ para concluir la demostración. Supongamos que $u \in B \cap J$ (denso en J) y que $E(u,u) = 0$, es decir,

$$E(u,u) = \sum_{i,k} \int_{\Omega} (u_{i x_k} + u_{k x_i})^2 \, d\Omega = 0,$$

de donde se deduce que $u_{i x_k} = -u_{k x_i}$ a.e. en Ω, $\forall i,k$. De esta forma obtenemos

$$\begin{aligned} u_{1y} &= -u_{2x} \\ u_{1z} &= -u_{3x} \\ u_{2z} &= -u_{3y} \\ u_{1x} = u_{2y} &= u_{3z} = 0, \end{aligned}$$

$\forall x \in \Omega$. Por lo tanto concluimos que $u_{1y} = b_1, u_{1z} = b_2$ y $u_{3y} = -b_3$, con b_i constante. Al integrar se obtiene

$$\begin{aligned} u_1 &= b_1 y + b_2 z + a_1, \\ u_2 &= -b_1 x + b_3 z + a_2, \\ u_3 &= -b_2 x - b_3 y + a_3, \end{aligned}$$

con $A = (a_1, a_2, a_3)$ constante. Es decir, u debe ser de la forma $u = B \wedge x + A$, con A, B constantes. Como $u \in J$, deben cumplirse las condiciones de periodicidad, por lo cual,

$$\begin{aligned} u_3|_{x=0} = u_3|_{x=x_0} &\Rightarrow b_2 x_0 = 0 \Rightarrow b_2 = 0 \\ u_2|_{x=0} = u_2|_{x=x_0} &\Rightarrow b_1 x_0 = 0 \Rightarrow b_1 = 0 \\ u_3|_{y=0} = u_3|_{y=1} &\Rightarrow b_3 = 0. \end{aligned}$$

De esta manera $B = 0$ y $u = A$ constante. Finalmente, por la condición de frontera $u|_{\Gamma_b} = 0$, concluimos que $u \equiv 0$. Por un argumento de densidad podemos determinar que si $u \in J$, $E(u,u) = 0 \Rightarrow u = 0$. Así, hemos probado que $E(\cdot,\cdot)$ define un producto escalar en J.

□

Corolario 4.9 *El producto escalar $E(\cdot,\cdot)$ induce una norma en J dada por*

$$||u||_E \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{E(u,u)}, \tag{4.6}$$

que se denomina norma de la energía.

Se probará que la norma $||\cdot||_E$ es equivalente a la norma $||\cdot||_\nabla$ en el espacio J, y por consiguiente, equivalente también a la norma $||\cdot||_1$.

4.1.2 La desigualdad de Korn

La siguiente desigualdad

$$\sum_{i,k}\int_\Omega (u_{ix_k})^2\, d\Omega \leq c_1 \sum_{i,k}\int_\Omega (u_{ix_k}+u_{kx_i})^2\, d\Omega,$$

con $c_1 \geq 0$, es conocida como la desigualdad de Korn y es ampliamente utilizada en teoría de elasticidad (véase [Rektorys, pag. 281]). En este caso, vamos a demostrarla para u en el espacio J, haciendo hincapié en que la constante c_1 depende del dominio Ω considerado. Pero antes probaremos el siguiente lema.

Lema 4.10 $\exists c_0 > 0$ *tal que* $\forall u \in J$ *entonces,* $||u||_E^2 \leq c_0||u||_\nabla^2$.

Prueba :

$$\begin{aligned} ||u||_E^2 &= \sum_{i,j}\int_\Omega (u_{ix_j}+u_{jx_i})^2\, d\Omega \\ &= 2\sum_{i,j}\int_\Omega {u_{ix_j}}^2\, d\Omega + 2\sum_{i,j}\int_\Omega u_{ix_j}u_{jx_i}\, d\Omega \leq 4||u||_\nabla^2. \end{aligned}$$

□

Lema 4.11 (Desigualdad de Korn) $\exists c_1 > 0$ *tal que* $\forall u \in J$ *entonces,* $||u||_\nabla^2 \leq c_1||u||_E^2$.

Prueba :

Consideremos $u \in B \cap J$. Calculando,

$$||u||_E^2 = \sum_{i,j}\int_\Omega (u_{ix_j}+u_{jx_i})^2\, d\Omega = 2||u||_\nabla^2 + 2\sum_{i,j}\int_\Omega u_{ix_j}u_{jx_i}\, d\Omega.$$

Pero

$$\begin{aligned} \sum_{i,j}\int_\Omega u_{ix_j}u_{jx_i}\, d\Omega &= \sum_i\int_\Omega \operatorname{div}(u_iu_{x_i})\, d\Omega - \sum_i\int_\Omega u_i\frac{\partial}{\partial x_i}\underbrace{\left(\sum_j u_{jx_j}\right)}_{=\operatorname{div} u=0} d\Omega \\ &= \sum_i\int_\Omega \operatorname{div}(u_iu_{x_i})\, d\Omega, \end{aligned}$$

Así, por el teorema de la divergencia

$$\sum_{i,j}\int_{\Omega} u_{i_{x_j}} u_{j_{x_i}}\,\mathrm{d}\Omega = \sum_{i}\int_{\partial\Omega} u_i u_{x_i}\cdot n\,\mathrm{d}S = \sum_{i,k}\int_{\partial\Omega} u_i\,u_{k_{x_i}}\,n_k\,\mathrm{d}S.$$

Definimos ahora

$$\begin{aligned}\Gamma_x &\stackrel{\text{def}}{=} \partial\Omega\cap(\{x=0\}\cup\{x=x_0\})\\ \Gamma_y &\stackrel{\text{def}}{=} \partial\Omega\cap(\{y=0\}\cup\{y=1\})\end{aligned} \tag{4.7}$$

De esta forma,

$$\int_{\partial\Omega}\underbrace{u_i\,u_{k_{x_i}}\,n_k}_{\stackrel{\text{def}}{=}(\cdot)}\,\mathrm{d}S = \int_{\Gamma}(\cdot)\,\mathrm{d}S + \int_{\Gamma_b}(\cdot)\,\mathrm{d}S + \int_{\Gamma_x}(\cdot)\,\mathrm{d}S + \int_{\Gamma_y}(\cdot)\,\mathrm{d}S.$$

$\forall i,k$. Como $u|_{\Gamma_b}=0$, entonces $\int_{\Gamma_b}(\cdot)\,\mathrm{d}S=0$. También, dado que $u\in B\cap J$, u_i y $u_{k_{x_i}}$ son periódicas en x y en y. Por otro lado notamos que $n_k|_{x=0}=-n_k|_{x=x_0}\ \forall k$, por lo cual

$$\int_{\Gamma_x}(\cdot)\,\mathrm{d}S = \int_{\partial\Omega\cap\{x=0\}}(\cdot)\,\mathrm{d}S + \int_{\partial\Omega\cap\{x=x_0\}}(\cdot)\,\mathrm{d}S = \int_{\partial\Omega\cap\{x=0\}}(\cdot)\,\mathrm{d}S - \int_{\partial\Omega\cap\{x=0\}}(\cdot)\,\mathrm{d}S = 0.$$

El mismo razonamiento aplicado a la integral en Γ_y conduce a que $\int_{\Gamma_y}(\cdot)\,\mathrm{d}S=0$. Así, $\forall u\in B\cap J$, tenemos que

$$\|u\|_E^2 = 2\|u\|_V^2 + 2\sum_{i,k}\int_{\Gamma} u_i\,u_{k_{x_i}}\,n_k\,\mathrm{d}S. \tag{4.8}$$

Definimos

$$I(\Gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,k}\int_{\Gamma} u_i\,u_{k_{x_i}}\,n_k\,\mathrm{d}S. \tag{4.9}$$

Para continuar con la demostración hemos de suponer que Γ es suficientemente regular, por ejemplo, que ξ está en $C^2(\Gamma_b)$ por lo menos. Esto nos permitirá hacer una estimación de $|I(\Gamma)|$ en el espacio $B\cap J$ y posteriormente, usando un argumento de densidad, extrapolar a J el resultado del siguiente

Lema 4.12 $\exists c_0>0$ *tal que* $\forall u\in J$ *entonces,* $|I(\Gamma)|\le c_0\|u\|^2_{L^2(\Gamma)}$.

Prueba :

Sea $u \in B \cap J$. Dado que la frontera Γ está definida por la gráfica de $x_3 - \xi(x_1, x_2) = 0$ y que el vector normal unitario es (2.54), entonces

$$
\begin{aligned}
I(\Gamma) &= \sum_{i,k} \int_{\Gamma} u_i\, u_{kx_i}\, n_k \, dS = \sum_{i,k} \int_{\Gamma_b} u_i(\Gamma)\, u_{kx_i}(\Gamma)\, n_k \sqrt{1 + |\nabla \xi|^2}\, dx_1\, dx_2 \\
&= -\sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_b} u_i(\Gamma)\, u_{kx_i}(\Gamma)\, \xi_{x_k}\, dx_1\, dx_2 + \sum_{i=1}^{3} \int_{\Gamma_b} u_i(\Gamma)\, u_{3x_i}(\Gamma)\, dx_1\, dx_2,
\end{aligned}
$$

donde $u_i(\Gamma) \stackrel{\text{def}}{=} u_i|_\Gamma = u_i(x_1, x_2, 1 + \xi(x_1, x_2))$, y lo mismo para las derivadas $u_{kx_i}(\Gamma)$. Calculando

$$
\frac{\partial}{\partial x_i}(u_k(\Gamma)) = \frac{\partial}{\partial x_i}(u_k(x_1, x_2, 1 + \xi(x_1, x_2))) = u_{kx_i}(\Gamma) + u_{kx_3}(\Gamma)\, \xi_{x_i},
$$

$\forall i = 1, 2,\ k = 1, 2, 3$. Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
I(\Gamma) = &- \sum_{i,k=1}^{2} \int_{\Gamma_b} u_i(\Gamma) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(u_k(\Gamma)) - u_{kx_3}\, \xi_{x_i} \right) \xi_{x_k}\, dx_1\, dx_2 \\
&- \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_b} u_3(\Gamma)\, u_{kx_3}(\Gamma)\, \xi_{x_k}\, dx_1\, dx_2 \\
&+ \sum_{i=1}^{2} \int_{\Gamma_b} u_i(\Gamma) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(u_3(\Gamma)) - u_{3x_3}\, \xi_{x_i} \right) dx_1\, dx_2 \\
&+ \int_{\Gamma_b} u_3(\Gamma)\, u_{3x_3}(\Gamma)\, dx_1\, dx_2,
\end{aligned}
$$

es decir,

$$
\begin{aligned}
I(\Gamma) &= \sum_{i,k=1}^{2} \int_{\Gamma_b} u_i(\Gamma) \frac{\partial}{\partial x_i}(u_k(\Gamma))\, \xi_{x_k}\, dx_1\, dx_2 \\
&+ \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_b} u_{kx_3}(\Gamma)\, \xi_{x_k}(-u_3(\Gamma) + \xi_{x_1}\, u_1(\Gamma) + \xi_{x_2}\, u_2(\Gamma))\, dx_1\, dx_2 \\
&+ \sum_{i=1}^{2} \int_{\Gamma_b} u_i(\Gamma) \frac{\partial}{\partial x_i}(u_3(\Gamma))\, dx_1\, dx_2 \\
&+ \int_{\Gamma_b} u_{3x_3}(\Gamma)(u_3(\Gamma) - \xi_{x_1}\, u_1(\Gamma) - \xi_{x_2}\, u_2(\Gamma))\, dx_1\, dx_2.
\end{aligned}
$$

La condición de frontera $u \cdot n|_\Gamma = 0$ implica que $u_3(\Gamma) - \xi_{x_1} u_1(\Gamma) - \xi_{x_2} u_2(\Gamma) = 0,\ \forall (x_1, x_2) \in$

Γ_b, por lo cual

$$\begin{aligned}
I(\Gamma) &= -\sum_{i,k=1}^{2}\int_{\Gamma_b} u_i(\Gamma)\,\frac{\partial}{\partial x_i}(u_k(\Gamma))\,\xi_{x_k}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 + \sum_{i=1}^{2}\int_{\Gamma_b} u_i(\Gamma)\,\frac{\partial}{\partial x_i}(u_3(\Gamma))\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\\
&= \sum_{i,k=1}^{2}\int_{\Gamma_b}\left(u_i(\Gamma)\,u_k(\Gamma)\,\xi_{x_ix_k} - u_i(\Gamma)\,\frac{\partial}{\partial x_i}(u_k(\Gamma)\,\xi_{x_k})\right)\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\\
&\quad+\sum_{i=1}^{2}\int_{\Gamma_b} u_i(\Gamma)\,\frac{\partial}{\partial x_i}(u_3(\Gamma))\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\\
&= \sum_{i,k=1}^{2}\int_{\Gamma_b} u_i(\Gamma)\,u_k(\Gamma)\,\xi_{x_ix_k}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\\
&\quad+\sum_{i=1}^{2}\int_{\Gamma_b} u_i(\Gamma)\,\frac{\partial}{\partial x_i}\underbrace{(u_3(\Gamma)-\xi_{x_1}u_1(\Gamma)-\xi_{x_2}u_2(\Gamma))}_{=0}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2,
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow I(\Gamma) = \sum_{i,k=1}^{2}\int_{\Gamma_b} u_i(\Gamma)\,u_k(\Gamma)\,\xi_{x_ix_k}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2. \tag{4.10}$$

Como $\xi \in C^2(\Gamma_b)$, $|\xi_{x_ix_k}|$ está acotada, por lo que $\exists M > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
|I(\Gamma)| &\leq \sum_{i,k=1}^{2}\int_{\Gamma_b} |u_i(\Gamma)\,u_k(\Gamma)|\,\frac{|\xi_{x_ix_k}|}{\sqrt{1+|\nabla\xi|^2}}\sqrt{1+|\nabla\xi|^2}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\\
&\leq M\sum_{i,k=1}^{2}\int_{\Gamma_b} |u_i(\Gamma)\,u_k(\Gamma)|\,\sqrt{1+|\nabla\xi|^2}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\\
&= M\sum_{i,k=1}^{2}\int_{\Gamma} |u_i(\Gamma)\,u_k(\Gamma)|\,\mathrm{d}S \leq c_0\int_{\Gamma} u^2\,\mathrm{d}S = c_0\|u\|^2_{L^2(\Gamma)},
\end{aligned}$$

ya que

$$\sum_{i,k=1}^{2}\int_{\Gamma} |u_i(\Gamma)\,u_k(\Gamma)|\,\mathrm{d}S = \int_{\Gamma}(u_1^2+u_2^2)\,\mathrm{d}S + 2\int_{\Gamma}|u_1u_2|\,\mathrm{d}S \leq 2\int_{\Gamma} u^2\,\mathrm{d}S.$$

Como M depende de ξ, hacemos notar que la constante c_0 depende del dominio Ω. Así, $\exists c_0 > 0$ tal que $\forall u \in B \cap J$ se tiene que $|I(\Gamma)| \leq c_0\|u\|^2_{L^2(\Gamma)}$.

Finalmente, para concluir la demostración, haremos uso del siguiente resultado.

Lema 4.13 *Dada $\delta > 0$, $\exists M_\delta$ tal que $\forall u \in B \cap J$ se tiene que,*

$$||u||^2_{L^2(\Gamma)} \leq \delta||u||^2_\nabla + M_\delta||u||^2_E.$$

Aplicando el lema 4.13 tomando $\delta = \frac{1}{2c_0}$ y $M_0 \stackrel{\text{def}}{=} c_0 M_\delta$ tal que $c_0||u||^2_{L^2} \leq \frac{1}{2}||u||^2_\nabla + M_0||u||^2_E$. Por lo tanto

$$|I(\Gamma)| \leq c_0||u||^2_{L^2(\Gamma)} \leq \frac{1}{2}||u||^2_\nabla + M_0||u||^2_E.$$

Hemos visto que $||u||^2_E = 2||u||^2_\nabla + 2I(\Gamma)$, por lo cual

$$||u||^2_\nabla \leq \frac{1}{2}||u||^2_E + |I(\Gamma)| \leq \left(\frac{1}{2} + M_0\right)||u||^2_E + \frac{1}{2}||u||^2_\nabla,$$

es decir,

$$||u||^2_\nabla \leq (1 + 2M_0)||u||^2_E, \tag{4.11}$$

$\forall u \in B \cap J$. Sólo resta probar el lema 4.13.

Prueba del lema 4.13 :

Es suficiente probar la desigualdad en la esfera unitaria puesto que si definimos $v \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u}{||u||_{L^2(\Gamma)}}$, entonces

$$1 = ||v||_{L^2(\Gamma)} \leq \delta||v||^2_\nabla + M||v||^2_E = \frac{1}{||u||_{L^2(\Gamma)}}\left(\delta||u||^2_\nabla + M||u||^2_E\right),$$

ya que $||u||_{L^2(\Gamma)}$ es constante y $||\cdot||_\nabla$ y $||\cdot||_E$ son homogéneas de grado 1, con lo cual se cumple la desigualdad también para u.

Sea $\delta_0 > 0$ y supongamos que no existe $M > 0$ tal que la desigualdad sea cierta. Entonces $\forall n \in \mathbb{N}$ existe $u_n \in B \cap J$ tal que $||u||_{L^2(\Gamma)} = 1$ y

$$1 > \delta_0||u_n||^2_\nabla + n||u||^2_E.$$

Como $||u_n||^2_\nabla < 1/\delta_0$ y $||\cdot||_\nabla \sim ||\cdot||_1$, entonces $\{u_n\}$ es una sucesión acotada en $(H^1(\Omega))^3$. Por el teorema de compacidad de la traza (véase teorema 3.31)), la restricción $\gamma : (H^1(\Omega))^3 \hookrightarrow (L^2(\Gamma))^3$ es compacta, por lo que $\exists\{u_{n_j}\}$ subsucesión convergente en $(L^2(\Gamma))^3$ que denotamos nuevamente como $\{u_n\}$: $u_n \xrightarrow{(L^2(\Gamma))^3} \bar{u}$ y $\lim_{n\to\infty} ||u_n||_{(L^2(\Gamma))^3} = 1 = ||\bar{u}||_{(L^2(\Gamma))^3}$.

Por otro lado, sabemos que $||u_n||^2_E \leq \frac{1}{n}\,\forall n$, de manera que $||u_n||_E \to 0$ cuando $n \to \infty$. Si $u, v \in J$, entonces $E(u - v, u - v) \geq 0$, por lo cual

$$E(u_n,u_n)+E(u,u)\geq 2E(u_n,u)\ \ \forall u\in J.$$

Pero $E(u_n,u_n)=||u_n||_E^2\to 0$ cuando $n\to\infty$, por lo tanto

$$E(u_n,u_n)+E(u,u)\longrightarrow E(u,u)\ \text{ si } n\to\infty.$$

Ahora bien, sabemos que $\{u_n\}$ es acotada en $(H^1(\Omega))^3$, por lo que existe una subsucesión que denotamos nuevamente por $\{u_n\}$ tal que $u_n\overset{H^1}{\rightharpoonup}\bar{u}\in(H^1(\Omega))^3$. De esta forma tenemos que $u_n\overset{L^2(\Gamma)}{\longrightarrow}\bar{u}$ y además converge débilmente en $(H^1(\Omega))^3$.

Por otro lado si $v\in(H^1(\Omega))^3$ es fijo, entonces $E(\cdot,v)$ es un funcional lineal continuo en $(H^1(\Omega))^3$ puesto que $|E(u,v)|\leq M||u||_1||v||_1=K_v||u||_1$. Así,

$$E(u_n,u_n)+E(u,u)\geq 2E(u_n,u)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}2E(u,u),$$

$\forall u\in J$. Tomando $u=\bar{u}$ tenemos que

$$E(\bar{u},\bar{u})=\lim_{n\to\infty}E(u_n,u_n)+E(u,u)\geq 2E(\bar{u},\bar{u}),$$

lo cual implica que $||\bar{u}||_E=0$ y por ende $\bar{u}=0$. Esto es una contradicción con el hecho de que $||\bar{u}||_{(L^2(\Gamma))^3}=1$. Por lo tanto la desigualdad debe ser cierta.

De esta forma hemos probado que existe $c_1>0$ tal que $\forall u\in B\cap J$, entonces

$$||u||_V^2\leq c_1||u||_E^2.$$

Junto con el lema 4.10, esto implica que $||\cdot||_E\sim||\cdot||_V$ en $B\cap J$, denso en J, así que la desigualdad se preserva en J.

□

Podemos resumir los resultados anteriores en el siguiente

Teorema 4.14 *$E(\cdot,\cdot)$ define un producto escalar en J, cuya norma inducida $||\cdot||_E$ es equivalente a la norma $||\cdot||_1$ en J.*

4.2 La formulación débil del problema linealizado

En esta sección definiremos lo que entendemos por una solución débil del problema, es decir, transformaremos el sistema de ecuaciones con valores a la frontera a una ecuación integral, probaremos la equivalencia entre una solución débil y una solución en sentido distribucional y verificaremos que las condiciones de periodicidad que exigimos para la presión p y para $\partial^\alpha u$ deben cumplirse si u y p son suficientemente regulares. Esto justifica la elección de dichas condiciones para p impuestas en el capítulo 2. Así mismo veremos que la condición tangencial de frontera para el esfuerzo superficial se cumple en casi todo punto si consideramos una solución en sentido distribucional que sea suficientemente regular.

Para formular el problema en sentido débil consideraremos el conocido problema de Stokes, que representa la parte linealizada y principal de las ecuaciones de Navier-Stokes completas en el caso estacionario.

Nuevamente asumiremos que el dominio Ω es conocido, de clase al menos $C^{0,1}$ y definido por una funión $\xi \in C^2(\Gamma_b)$, razón por la cual en esta parte del estudio nos olvidaremos de la condición normal de frontera para el esfuerzo superficial, que supondremos se satisface naturalmente.

El problema de Stokes que consideraremos, con condiciones homogéneas de frontera, es el siguiente :

$$\left.\begin{array}{c} -\nu\,\Delta u + \operatorname{grad} p = f \\ \operatorname{div} u = 0 \end{array}\right\} \text{ en } \Omega \tag{4.12}$$

$$\left.\begin{array}{c} \partial^\alpha u|_{x=0} = \partial^\alpha u|_{x=x_0} \\ \partial^\alpha u|_{y=0} = \partial^\alpha u|_{y=1} \end{array}\right\} \forall|\alpha| \leq 1. \tag{4.13}$$

$$p|_{x=0} = p|_{x=x_0} \ , \ p|_{y=0} = p|_{y=1} \tag{4.14}$$

$$u|_{\Gamma_b} = 0, \tag{4.15}$$

$$u \cdot n|_{\Gamma} = 0, \tag{4.16}$$

$$\tau^{(k)} \cdot T(u)n|_{\Gamma} = \gamma_k, \quad k = 1, 2 \tag{4.17}$$

Vamos a suponer que (u, p) es solución de (4.12)-(4.17). Además, asumiremos que $u \in B \cap J$ (denso en J y definido en la sección anterior) y que $f \in (L^2(\Omega))^3$. Tomemos una función $\phi \in B \cap J$. Multiplicando (4.12) por ϕ e integrando se obtiene

$$(-\nu\,\Delta u + \nabla p, \phi) = (f, \phi). \tag{4.18}$$

El tensor de esfuerzos se expresa como $T_{ik} = -p\delta_{ik} + \nu(u_{i x_k} + u_{k x_i})$. Definimos

$$T_i \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} T_{i1} \\ T_{i2} \\ T_{i3} \end{pmatrix},$$

como el renglón i de T. Calculamos

$$\begin{aligned} \operatorname{div} T_i = \sum_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} &= \sum_k \left(-p_{x_k}\delta_{ik} + \nu \frac{\partial}{\partial x_k}(u_{i x_k} + u_{k x_i}) \right) \\ &= -p_{x_i} + \nu \,\Delta u_i + \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\left(\sum_k u_{k x_k} \right)}_{=\operatorname{div} u = 0}. \end{aligned}$$

Así, $\operatorname{div} T_i = -p_{x_i} + \nu\,\Delta u_i$. Definimos también

$$\operatorname{div} T \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \operatorname{div} T_1 \\ \operatorname{div} T_2 \\ \operatorname{div} T_3 \end{pmatrix}, \tag{4.19}$$

por lo cual $\operatorname{div} T = -\nabla p + \nu\,\Delta u$. Se definen a su vez,

$$T \cdot \operatorname{grad} \phi \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k T_k \cdot \nabla \phi_k = \sum_{i,k} T_{ki} \phi_{k x_i}, \tag{4.20}$$

$$\nabla (T \cdot \phi) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,k} (T_{ki}\phi_k)_{x_i} = \sum_k \operatorname{div}(\phi_k T_k). \tag{4.21}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \nabla (T \cdot \phi) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,k} T_{ki x_i} \phi_k + T_{ki} \phi_{k x_i} \\ &= \sum_k \phi_k \operatorname{div} T_k + \sum_{i,k} T_{ki} \phi_{k x_i} \\ &= \phi \cdot \operatorname{div} T + T \cdot \operatorname{grad} \phi. \end{aligned}$$

De esta manera obtenemos

$$\begin{aligned} (-\nu\,\Delta u + \nabla p, \phi) &= (-\operatorname{div} T, \phi) \\ &= \int_\Omega T \cdot \operatorname{grad} \phi \; d\Omega - \int_\Omega \nabla (T \cdot \phi) \; d\Omega \\ &= \sum_k (T_k, \operatorname{grad} \phi_k) - \int_\Omega \nabla (T \cdot \phi) \; d\Omega. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Ahora bien, usando (4.21) podemos expresar

$$\int_\Omega \nabla(T\cdot\phi)\,\mathrm{d}\Omega = \sum_k \int_\Omega \sum_i (T_{ki}\phi_k)_{x_i}\,\mathrm{d}\Omega = \sum_k \int_\Omega \operatorname{div}(\phi_k T_k)\,\mathrm{d}\Omega, \tag{4.23}$$

y aplicando el teorema de la divergencia obtener

$$\int_\Omega \nabla(T\cdot\phi)\,\mathrm{d}\Omega = \sum_k \int_{\partial\Omega} \phi_k T_k\cdot n\,\mathrm{d}S = \int_{\partial\Omega} \phi\cdot Tn\,\mathrm{d}S. \tag{4.24}$$

Sustituyendo la expresión de T_{ik} en la ecuación anterior se llega a que

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} \phi\cdot Tn\,\mathrm{d}S &= \sum_{i,k}\int_{\partial\Omega} \phi_k T_{ki} n_i\,\mathrm{d}S\\ &= \sum_{i,k}\int_{\partial\Omega}(-p\phi_k n_i\delta_{ik} + \nu\phi_k n_i(u_{ix_k}+u_{kx_i})\,\mathrm{d}S\\ &= -\int_{\partial\Omega} p\phi\cdot n\,\mathrm{d}S + \nu\sum_{i,k}\phi_k n_i(u_{ix_k}+u_{kx_i})\,\mathrm{d}S.\end{aligned}$$

Al sustituir la ecuación anterior en (4.23) obtenemos la siguiente relación

$$\int_\Omega \nabla(T\cdot\phi)\,\mathrm{d}\Omega = -\int_{\partial\Omega} p\phi\cdot n\,\mathrm{d}S + \nu\sum_{i,k}\phi_k n_i(u_{ix_k}+u_{kx_i})\,\mathrm{d}S, \tag{4.25}$$

$\forall\phi\in B\cap J$. Sabemos también que $\phi, \partial^\alpha u$ son periódicas $\forall|\alpha|\le 1$, pues $u,\phi\in B\cap J$. Notando que

$$n|_{\{x=0\}\cap\partial\Omega} = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} = -n|_{\{x=x_0\}\cap\partial\Omega},$$

tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_s}\phi_k n_i(u_{ix_k}+u_{kx_i})\,\mathrm{d}S &= \int_{\{x=0\}}(\cdot)\,\mathrm{d}S + \int_{\{x=x_0\}}(\cdot)\,\mathrm{d}S\\ &= \int_{\{x=0\}}(\cdot)\,\mathrm{d}S - \int_{\{x=0\}}(\cdot)\,\mathrm{d}S = 0.\end{aligned}$$

Por un razonamiento análogo

$$\int_{\Gamma_y}\phi_k n_i(u_{ix_k}+u_{kx_i})\,\mathrm{d}S = 0, \quad \forall i,k.$$

En Γ_b, $\phi = u \equiv 0$, por lo cual la integral sobre $\partial\Omega$ se reduce únicamente a la integral sobre Γ. Como p también es periódica y $\phi|_{\Gamma_b} = 0$, concluímos que

$$\int_\Omega \nabla(T\cdot\phi)\,\mathrm{d}\Omega = \sum_{i,k}\int_\Gamma \phi_k T_{ki} n_i\,\mathrm{d}S = \int_\Gamma \phi\cdot Tn\,\mathrm{d}S, \quad \forall\phi\in B\cap J.$$

Por otra parte la condición de frontera (4.16) implica que ϕ en Γ se puede expresar como

$$\phi|_\Gamma = \alpha_1\tau^{(1)} + \alpha_2\tau^{(2)} = (\phi\cdot\tau^{(1)})\tau^{(1)} + (\phi\cdot\tau^{(2)})\tau^{(2)},$$

donde recordamos que $\tau^{(1)}$ y $\tau^{(2)}$ son los vectores tangentes a Γ, y α_1, α_2 son funciones reales en Γ. De este modo,

$$\phi\cdot Tn|_\Gamma = (\alpha_1\tau^{(1)} + \alpha_2\tau^{(2)})\cdot Tn|_\Gamma = \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2,$$

por la condición de frontera (4.17) en u. Por lo tanto, regresando a la ecuación (4.22) y sustituyendo obtenemos

$$(-\nu\,\Delta u + \nabla p, \phi) = \sum_k (T_k, \operatorname{grad}\phi_k) - \int_\Gamma \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 \,\mathrm{d}S. \tag{4.26}$$

Finalmente vamos a calcular el primer término de lado derecho de la ecuación (4.26) :

$$\begin{aligned}\sum_k (T_k, \operatorname{grad}\phi_k) &= \sum_{i,k}\int_\Omega \left(-p\delta_{ik} + \nu(u_{ix_k} + u_{kx_i})\right)\phi_{kx_i}\,\mathrm{d}\Omega \\ &= -\sum_i\int_\Omega p\phi_{ix_i}\,\mathrm{d}\Omega + \nu\sum_{i,k}\int_\Omega (u_{ix_k} + u_{kx_i})\phi_{kx_i}\,\mathrm{d}\Omega.\end{aligned}$$

Dado que $\sum_i \phi_{ix_i} = \operatorname{div}\phi = 0$, y por el hecho de que podemos escribir

$$\sum_{i,k}\int_\Omega (u_{ix_k} + u_{kx_i})\phi_{kx_i}\,\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i,k}(u_{ix_k} + u_{kx_i})(\phi_{kx_i} + \phi_{ix_k})\,\mathrm{d}\Omega,$$

concluímos que

$$\sum_k (T_k, \operatorname{grad}\phi_k) = \tfrac{1}{2}E(u,\phi). \tag{4.27}$$

Por lo tanto, resumiendo los cálculos anteriores y por ser $B\cap J$ denso en J hemos probado el siguiente lema.

Lema 4.15 *Si (u,p) es solución en sentido distribucional de (4.12)-(4.17) entonces u satisface*

$$\tfrac{\nu}{2}E(u,\phi) = (f,\phi) + \int_\Gamma \left((\phi\cdot\tau^{(1)})\gamma_1 + (\phi\cdot\tau^{(2)})\gamma_2\right)\mathrm{d}S, \tag{4.28}$$

para toda $\phi \in J$.

Estamos en condiciones de definir lo que entendemos por solución débil del problema de Stokes.

Definición 4.16 *$u \in J$ es llamada* <u>*solución débil*</u> *del problema de Stokes si satisface (4.28) para toda $\phi \in J$.*

Inversamente, ahora supongamos que tenemos una solución débil $u \in J$ del problema de Stokes. Sea el espacio

$$\mathcal{V} \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in (C_0^\infty(\Omega))^3 \ : \ \operatorname{div} u = 0\} \qquad (4.29)$$

Si tomamos $\phi \in \mathcal{V}$, al invertir los pasos en los cálculos anteriores y sin preocuparnos por los términos de frontera, puesto que $\phi \in (C_0^\infty(\Omega))^3$, llegamos a que $(-\nu\,\Delta u, \phi) = (f, \phi)$, es decir,

$$(-\nu\Delta u + f, \phi) = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{V}.$$

Sabemos que $f \in (L^2(\Omega))^3 \subset (H^{-1}(\Omega))^3$, y como $u \in J \subset (H^1(\Omega))^3$ implica que $\Delta u \in (H^{-1}(\Omega))^3$, podemos entonces aplicar el lema 3.36 y asegurar que existe $p \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\operatorname{grad} p = -\nu\,\Delta u + f.$$

De esta forma el par $(u,p) \in J \times L^2(\Omega)$ es solución en sentido distribucional de (4.12), (4.15) y (4.16).

A continuación probaremos que si u es solución débil del problema de Stokes (y consecuentemente por el comentario anterior, existe p tal que (u,p) solución distribucional de (4.12), (4.15) y (4.16)) y si u y p son suficientemente regulares, entonces las condiciones de periodicidad para ∂u y p, así como la condición tangencial de frontera para el esfuerzo superficial deben satisfacerse. Es decir, vamos a completar el resultado del lema 4.15 y de esta manera enunciar la equivalencia entre la solución débil y una solución distribucional que satisface también la condición de frontera restante y las condiciones de periodicidad.

Para ello recurriremos a un lema debido a O.A. Ladyzhenskaya, cuya demostración es constructiva y puede hallarse en [Lad 69, págs. 24-17]. En el Apéndice C se enuncia dicho lema y se da un esbozo de la prueba.

4.2.1 La condición tangencial de frontera para el esfuerzo superficial

Supongamos que $u \in J$ es solución débil del problema de Stokes que estamos considerando. Por los resultados anteriores sabemos que $\exists p \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\operatorname{grad} p = -\nu\,\Delta u + f,$$

y por ende, (u,p) es solución distribucional de (4.12), (4.15) y (4.16). Además supondremos que u y p son regulares, $u \in (H^2(\Omega))^3$, $p \in H^1(\Omega)$ y por lo tanto que $f \in L^2(\Omega)$.

Tomemos $x \in \Gamma^{\text{int}}$. Como asumimos que Γ es una variedad de clase C^2, por lo menos, entonces existe una vecindad $\mathcal{O}$ de clase C^2 tal que $x_0 \in \mathcal{O}$. Sea $\Omega' \subset \Omega$ un dominio de clase C^2 tal que $\partial\Omega' \cap \partial\Omega = \mathcal{O}$ (véase figura 4.1).

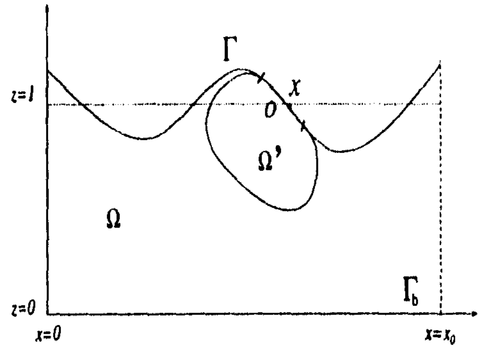

Figura 4.1 : Vecindad $\mathcal{O}$ de clase C^2 alrededor de cualquier punto de Γ, de forma que $\mathcal{O} \subset \partial\Omega'$.

Defínase $J_{\mathcal{O}}(\Omega') \stackrel{\text{def}}{=} \{\phi \in J \;:\; \phi|_{\Omega-\bar{\Omega}'} = 0\} \subset J$, y tómese ϕ en este espacio. Notamos que en los cálculos realizados para la formulación débil, desde la suposición de que (u,p) es solución hasta la deducción de la ecuación (4.24) no se utilizaron la condición tangencial de frontera ni la periodicidad de u ni de la de p. Del mismo modo para encontrar la relación (4.27) no se utilizaron estas propiedades. Así que, tomando esta función $\phi \in J_{\mathcal{O}}(\Omega')$, por los cálculos anteriores de las ecuaciones (4.22), (4.23), (4.24) y (4.27), sabemos que

$$\tfrac{\nu}{2}E(u,\phi) = (f,\phi) + \int_{\partial\Omega} \phi \cdot T(u)n \, \mathrm{d}S,$$

Dado que $\phi|_{\Omega-\Omega'} \equiv 0$, entonces la integral sobre $\partial\Omega$ se reduce a una integral sobre $\mathcal{O}$. Ahora bien, como la solución u es débil, entonces también tenemos que,

$$\tfrac{\nu}{2}E(u,\phi) = (f,\phi) + \int_{\Gamma} \left((\phi\cdot\tau^{(1)})\gamma_1 + (\phi\cdot\tau^{(2)})\gamma_2\right) \mathrm{d}S.$$

Por lo cual deducimos que

$$\int_{\mathcal{O}} \phi \cdot T(u)n \, \mathrm{d}S = \int_{\Gamma} \left((\phi\cdot\tau^{(1)})\gamma_1 + (\phi\cdot\tau^{(2)})\gamma_2\right) \mathrm{d}S,$$

para toda $\phi \in J_{\mathcal{O}}(\Omega')$. Sabemos, por la condición de frontera $\phi\cdot n|_\Gamma = 0$, que podemos escribir $\phi|_\Gamma = (\phi\cdot\tau^{(1)})\tau^{(1)} + (\phi\cdot\tau^{(2)})\tau^{(2)}$. Por lo tanto

$$\int_{\mathcal{O}} (\phi \cdot \tau^{(1)})(\tau^{(1)} \cdot T(u)n - \gamma_1) + (\phi \cdot \tau^{(2)})(\tau^{(2)} \cdot T(u)n - \gamma_2) \, \mathrm{d}S = 0. \tag{4.30}$$

Sea $b_k \stackrel{\text{def}}{=} (\tau^{(k)} \cdot T(u)n - \gamma_k)\tau^{(k)}$, para $k = 1, 2$. Si $u \in (H^2(\Omega))^3$, entonces $T_{ik}(u) \in H^1(\Omega)$, $\forall i, k$, por lo que $T(u)n \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Así $b_k \in (H^{1/2}(\mathcal{O}))^3$. Tenemos de esta forma que

$$\int_{\mathcal{O}} (\phi \cdot b_1 \tau^{(1)} + \phi \cdot b_2) \, \mathrm{d}S = 0, \quad \forall \phi \in J_{\mathcal{O}}(\Omega'). \tag{4.31}$$

Sea una función escalar no trivial y no negativa $\psi \in C_0^2(\partial\Omega')$, tal que $\psi \equiv 0$ en $\partial\Omega' - \mathcal{O}$. Definimos $a_k \stackrel{\text{def}}{=} \psi b_k \in (H^{1/2}(\partial\Omega'))^3$. Claramente a_k es tangente a Γ y $a_k = 0$ fuera de $\mathcal{O}$. En consecuencia

$$\int_{\partial\Omega'} a_k \cdot n \, \mathrm{d}S = 0. \tag{4.32}$$

Así, el lema C.1 (véase Apéndice C) es aplicable a a_k, puesto que Ω' es de clase C^2. Por lo tanto, existe $\phi_k \in (H^1(\Omega'))^3$ tal que $\operatorname{div} \phi_k = 0$ y $\phi_k|_{\partial\Omega'} = a_k$. Si extendemos $\phi_k \equiv 0$ fuera de Ω' tenemos ϕ_k definida en todo Ω y $\operatorname{div}\phi_k = 0$ en Ω. De este modo $\phi_k|_{\Omega-\partial\Omega'} = 0$.

Obviamente ϕ_k y $\partial\phi_k$ son periódicas en x y en y; también es claro que $\phi_k|_{\Gamma_b} = 0$. Por otro lado, como $\phi_k|_{\partial\Omega'} = a_k$ es tangente a Γ y $\phi_k \equiv 0$ en $\Gamma - (\partial\Omega' \cap \Gamma)$, entonces $\phi_k \cdot n|_\Gamma = 0$.

Notamos también que $\phi_k \in (H^1(\Omega'))^3 \cap (H^1(\Omega - \bar{\Omega}'))^3$ y la traza de ϕ_k es cero en $\partial\Omega' - \mathcal{O}$. Por el lema 3.37 deducimos que $\phi_k \in J_{\mathcal{O}}(\Omega')$ y sustituyendo en (4.31) obtenemos

$$\int_{\mathcal{O}} \phi_k \cdot b_k \, \mathrm{d}S = \int_{\mathcal{O}} \psi |b_k|^2 \, \mathrm{d}S = 0. \tag{4.33}$$

Como ψ es una función escalar no negativa, no trivial y arbitraria en $C_0^2(\Omega')$ de la ecuación anterior se sigue que

$$b_k = 0 \quad \text{a.e. en } \mathcal{O},$$

esto es,

$$\tau^{(k)} \cdot T(u)n|_\Gamma - \gamma_k = 0 \quad \text{a.e. en } \mathcal{O}.$$

Por ser $\mathcal{O}$ una vecindad C^2 de todo punto de Γ concluímos que la condición de frontera sobre Γ debe cumplirse en casi todo punto :

$$\tau^{(k)} \cdot T(u)n|_\Gamma - \gamma_k = 0 \quad \text{a.e.} \tag{4.34}$$

4.2.2 Periodicidad de p y ∂u

Nuevamente sea $u \in J$ solución débil y por ende $(u,p) \in J \times L^2(\Omega)$ es solución en sentido distribucional de (4.12), (4.15) y (4.16). Mas aún, asumiremos que $u \in (H^2(\Omega))^3, p \in H^1(\Omega)$. Consideremos un dominio $\Omega' \subset \Omega$ de clase C^2 tal que $\partial\Omega' \cap \partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, donde $\Sigma_1 \subset \{x = 0\} \cap \partial\Omega$ y $\Sigma_2 \subset \{x = x_0\} \cap \partial\Omega$ son dos vecindades arbitrarias de $\{x = 0\}$ y $\{x = x_0\}$, respectivamente. Véase figura 4.2.

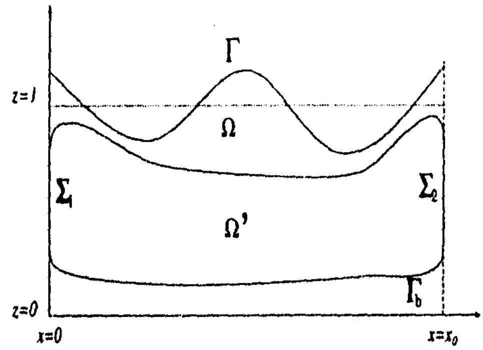

Figura 4.2 : Dominio Ω' de clase C^2 tal que $\partial\Omega' \cap \partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$.

Definamos $J_{\Sigma_1\cup\Sigma_2}(\Omega') \stackrel{\text{def}}{=} \{\phi \in J \ : \ \phi|_{\Omega\sim\Omega'} = 0\} \subset J$, y tomemos una función ϕ en este espacio. Por ser una solución distribucional sabemos (al igual que en la prueba para la condición tangencial de frontera) que se cumple la siguiente relación :

$$\tfrac{\nu}{2}E(u,\phi) = (f,\phi) + \int_{\partial\Omega} \phi \cdot T(u)n \ \mathrm{d}S.$$

Por ser u solución débil, satisface (4.28). Igualando con la ecuación anterior se obtiene

$$\int_\Gamma \left((\phi\cdot\tau^{(1)})\gamma_1 + (\phi\cdot\tau^{(2)})\gamma_2\right) \mathrm{d}S = \int_{\partial\Omega} \phi\cdot Tn \ \mathrm{d}S.$$

Como $\phi \equiv 0$ en Γ y en Γ_b, la relación anterior implica que

$$\int_{\partial\Omega} \phi\cdot Tn \ \mathrm{d}S = \int_{\Sigma_1\cup\Sigma_2} \phi\cdot Tn \ \mathrm{d}S = 0, \tag{4.35}$$

$\forall\phi \in J_{\Sigma_1\cup\Sigma_2}(\Omega')$. Ahora bien, si $u \in J\cap(H^2(\Omega))^3$, entonces $u_{j_{x_i}} \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, $\forall i,j$, y las derivadas tangenciales en Σ_1 y Σ_2 son periódicas. Sobre Σ_1, $n = (-1,0,0)$ y sobre Σ_2.

$n = (1, 0, 0)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma_1\cup\Sigma_2} \phi\cdot Tn \, \mathrm{d}S &= \int_{\Sigma_1\cup\Sigma_2} \left(\sum_{i,k} \nu\phi_k n_i (u_{i_{x_k}} + u_{k_{x_i}}) - \sum_i p\phi_i n_i\right) \mathrm{d}S \\
&= \int_{\Sigma_1} \left(\sum_k -\nu\phi_k (u_{1_{x_k}} + u_{k_{x_1}}) + p\phi_1\right) \mathrm{d}S \\
&+ \int_{\Sigma_2} \left(\sum_k \nu\phi_k (u_{1_{x_k}} + u_{k_{x_1}}) - p\phi_1\right) \mathrm{d}S.
\end{aligned}$$

Las derivadas tangenciales ($u_{i_{x_k}}$ con $i = 1,2,3$, $k = 2,3$) son periódicas y como $\operatorname{div} u = 0$, tenemos también que $u_{1_{x_1}} = -u_{2_{x_2}} - u_{3_{x_3}}$ es periódica. De esta forma $u_{1_{x_k}}$ es periódica para toda k. Así

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma_1\cup\Sigma_2} \phi\cdot Tn \, \mathrm{d}S &= \int_{\Sigma_1} (\nu\phi_2 (u_{2x}|_{x=0} - u_{2x}|_{x=x_0}) + \nu\phi_3 (u_{3x}|_{x=0} - u_{3x}|_{x=x_0}) \\
&\quad +\phi_1 (p|_{x=0} - p|_{x=x_0}))\, \mathrm{d}S = 0,
\end{aligned} \tag{4.36}$$

$\forall\phi \in J_{\Sigma_1\cup\Sigma_2}(\Omega')$. Tomemos ahora, para cada i, una función $\psi_i \in C^2(\Omega')$ tal que: 1. $\psi_i|_{\partial\Omega'-(\Sigma_1\cup\Sigma_2)} = 0$, 2. $\psi_i|_{\Sigma_1} = \psi_i|_{\Sigma_2}$, y 3. $\psi_i \geq 0$ y no trivial. Consideremos ahora $a \in (H^{1/2}(\partial\Omega'))^3$, dada por

$$a = \begin{pmatrix} \psi_1 (p|_{x=0} - p|_{x=x_0}) \\ \psi_2 (u_{2x}|_{x=0} - u_{2x}|_{x=x_0}) \\ \psi_3 (u_{3x}|_{x=0} - u_{3x}|_{x=x_0}) \end{pmatrix},$$

por lo cual $a|_{\Sigma_1} = a|_{\Sigma_2}$ y $a \equiv 0$ en $\partial\Omega' - (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$. De esta manera podemos afirmar que

$$\int_{\partial\Omega'} a\cdot n \, \mathrm{d}S = \int_{\Sigma_1\cup\Sigma_2} a\cdot n \, \mathrm{d}S = 0, \tag{4.37}$$

por la periodicidad de a. Por ende, $a \in (H^{1/2}(\partial\Omega'))^3$ cumple con las condiciones de lema C.1 (véase Apéndice C), puesto que hemos tomado Ω' de clase C^2. Por el lema C.1 existe $\phi \in (H^1(\Omega'))^3$ con $\operatorname{div}\phi = 0$ y tal que $\phi|_{\partial\Omega'} = a$. Sabemos que $a|_{\partial\Omega'-(\Sigma_1\cup\Sigma_2)} = 0$, por lo cual la extensión de $\phi \equiv 0$ fuera de Ω' está en $(H^1(\Omega))^3$ y además $\operatorname{div}\phi = 0$ en Ω. Por el mismo argumento que en la prueba de la condición tangencial de frontera es fácil verificar que efectivamente $\phi \in J_{\Sigma_1\cup\Sigma_2}(\Omega')$, por lo que, sustituyendo en (4.36) obtenemos

$$\int_{\Sigma_1} \left(\nu\psi_2 (u_{2x}|_{x=0} - u_{2x}|_{x=x_0})^2 + \nu\psi_3 (u_{3x}|_{x=0} - u_{3x}|_{x=x_0})^2 + \psi_1 (p|_{x=0} - p|_{x=x_0})^2\right) \mathrm{d}S = 0,$$

para toda ψ_i no negativa y no trivial. Esto implica que

$$u_{2x}\big|_{x=0} = u_{2x}\big|_{x=x_0} \quad \text{a.e.},$$
$$u_{3x}\big|_{x=0} = u_{3x}\big|_{x=x_0} \quad \text{a.e.},$$
$$p_x\big|_{x=0} = p_x\big|_{x=x_0} \quad \text{a.e.},$$

es decir, la periodicidad de p y de las derivadas de u que faltaban se cumple. Lo mismo puede hacerse para la periodicidad en y.

Como consecuencia de los últimos resultados estamos en posición de formular el siguiente

Teorema 4.17 *Sea Ω de clase $C^{0,1}$ y $f \in (L^2(\Omega))^3$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe $p \in L^2(\Omega)$ tal que $(u,p) \in J \times L^2(\Omega)$ es solución en sentido distribucional de (4.12), (4.15) y (4.16). Mas aún, si $(u,p) \in ((H^2(\Omega))^3 \cap J) \times (H^1(\Omega))^3$ entonces las condiciones de periodicidad para ∂u y p también se satisfacen.*

2. *$u \in J$ es solución débil del problema de Stokes, es decir,*

$$\tfrac{\nu}{2}E(u,\phi) = (f,\phi) + \int_\Gamma \left((\phi \cdot \tau^{(1)})\gamma_1 + (\phi \cdot \tau^{(2)})\gamma_2 \right) \mathrm{d}S,$$

   para toda $\phi \in J$.

4.3 Existencia y unicidad de la solución al problema de Stokes

En esta sección se probará que el problema de Stokes (4.12)-(4.17) tiene una solución débil única en J. Para esto primero debemos demostrar que el funcional

$$l(\phi) \stackrel{\text{def}}{=} (f,\phi) + \int_\Gamma \left((\phi \cdot \tau^{(1)})\gamma_1 + (\phi \cdot \tau^{(2)})\gamma_2 \right) \mathrm{d}S, \quad \forall \phi \in J, \tag{4.38}$$

es un funcional lineal continuo en J. Con esto obtendremos existencia y unicidad como consecuencia del teorema de representación de Riesz.

Lema 4.18 *Si τ es un vector tangente en Γ y $\gamma : \Gamma_b \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ es una función en $L^2(\Gamma)$, entonces el funcional*

$$\tilde{l}(\phi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Gamma (\phi \cdot \tau)\gamma \, \mathrm{d}S$$

es lineal y continuo en J.

Prueba :

El operador de traza $\gamma_0 : (H^1(\Omega))^3 \mapsto (L^2(\Omega))^3$ es continuo y compacto (véase lema 3.31). Por lo tanto existe una constante $c_1 > 0$ tal que

$$\int_{\partial\Omega} \phi^2 \, \mathrm{d}S = ||\gamma_0(\phi)||_{L^2}^2 = ||\phi||_{L^2(\partial\Omega)}^2 \le c_1 ||\phi||_1^2,$$

para toda $\phi \in J$. Por el teorema 4.14 existe $c_0 > 0$ tal que

$$||\phi||_{L^2(\partial\Omega)}^2 \le c_1 ||\phi||_1^2 \le c_0 ||\phi||_E^2.$$

Por lo tanto existe $c_2 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |\tilde{l}(\phi)| &\le \int_\Gamma |\phi \cdot \tau||\gamma| \, \mathrm{d}S \le \left(\int_\Gamma |\phi|^2 \, \mathrm{d}S\right)^{1/2} \left(\int_\Gamma |\gamma|^2 \, \mathrm{d}S\right)^{1/2} \\ &\le ||\phi||_{L^2(\partial\Omega)} ||\gamma||_{L^2(\Gamma)} \le c_2 ||\phi||_E, \end{aligned}$$

para toda $\phi \in J$. Es decir, $\tilde{l}$ es un funcional continuo en J. La linealidad es obvia.

□

De esta forma el funcional definido en (4.38) es lineal y continuo en J, en virtud de que $(f, \cdot)$ también lo es si $f \in (L^2(\Omega))^3$. Hacemos la observación de que si $f \in (H^{-1}(\Omega))^3$ por definición (f, ϕ) es también lineal y continuo.

Corolario 4.19 *El funcional l definido en (4.38) es lineal y continuo en J.*

A continuación demostraremos el importante teorema que nos garantiza la existencia y la unicidad de la solución débil al problema de Stokes. Veremos que el resultado es consecuencia inmediata del teorema de representación de Riesz.

Teorema 4.20 (Existencia y unicidad) *Sean Ω de clase $C^{0,1}$, $f \in (L^2(\Omega))^3$ y $\gamma_k \in L^2(\Gamma_b)$, $\forall k = 1, 2$. Entonces existe en J una solución débil única al problema de Stokes.*

Prueba :

Por el corolario 4.19, sabemos que l es un funcional lineal continuo en J. Por otro lado, también sabemos que $E(\cdot, \cdot)$ es un producto escalar en J cuya norma inducida es equivalente a la norma $||\cdot||_1$ (véase teorema 4.14). Así, por el teorema de representación de Riesz existe una única $u \in J$ tal que

$$E(u,\phi) = \tfrac{2}{\nu} l(\phi).$$

Es decir,

$$\tfrac{\nu}{2} E(u,\phi) = (f,\phi) + \int_\Gamma \left((\phi\cdot\tau^{(1)})\gamma_1 + (\phi\cdot\tau^{(2)})\gamma_2 \right)\, \mathrm{d}S,$$

para toda $\phi \in J$. Por lo tanto existe una solución débil única. Por el teorema de equivalencia 4.17 sabemos que existe $p \in L^2(\Omega)$ tal que (u,p) es solución distribucional al problema de Stokes. Además sabemos que

$$\tfrac{\nu}{2}||u||_1^2 \leq ||f||_{L^2}||u||_{L^2} + ||u||_{L^2}||\gamma||_{L^2(\Gamma)}.$$

Por lo tanto existe $c > 0$ tal que

$$||u||_1 \leq c(||f||_{L^2} + ||\gamma||_{L^2(\Gamma)}). \tag{4.39}$$

□

Capítulo 5

Regularidad de la solución al problema de Stokes

En el capítulo anterior se formuló débilmente el problema de Stokes y se probó que existe una solución débil única en el espacio J. Este capítulo se aboca a estudiar la regularidad de dicha solución.

En primer lugar se prueba que la solución débil encontrada $(u,p) \in J \times L^2(\Omega)$ es también una solución fuerte, es decir, que $(u,p) \in (H^2(\Omega))^3 \cap J \times H^1(\Omega)$. La demostración se hace por partes, esto es, primero se prueba que $u \in (H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega))^3$ o la regularidad en el interior. Acto seguido, siguiendo el mismo esquema de la prueba de la regularidad en el interior y haciendo estimaciones se demuestra también la regularidad en la frontera de Ω. Cabe decir que estas demostraciones contienen detalles muy técnicos y se recomienda al lector consultar las ideas centrales en los libros de A. Friedman ([Friedman]) y en las notas de J. Ize ([Ize 78]).

Una vez probada la existencia de la solución fuerte se estudia la regularidad de la misma, en base a la regularidad de los datos. Para tal efecto aplicaremos la teoría general de regularidad para sistemas elípticos de S. Agmon, A. Douglis y L. Nirenberg, en particular las estimaciones de Schauder y en espacios L^p para eventuales soluciones fuertes. Estas estimaciones se publicaron en el artículo de 1964 de la revista "Communications on Pure and Applied Mathematics", volumen 17 (cf. [Agm/Dou/Nir]), y haremos constantemente referencias a dicho artículo en el presente capítulo. Sin embargo reproduciremos aquí las definiciones y los resultados más importantes para la ubicación del lector. Básicamente demostraremos que el problema de Stokes planteado es un sistema elíptico que satisface una condición de suplementariedad, y que las condiciones de frontera complementan a dicho sistema ([Agm/Dou/Nir, págs. 39, 42-44]), para de este modo poder aplicar las estimaciones de Schauder y L^p a la solución fuerte del problema de Stokes.

5.1 Existencia de la solución fuerte

Sabemos que existe una solución débil única $u \in J$ al problema de Stokes (4.12)-(4.17). En esta sección nos abocaremos a demostrar que esta solución es también fuerte. El primer paso consiste en probar la regularidad en el interior del dominio.

5.1.1 Regularidad en el interior

Gran parte de la demostración (y de la demostración para la regularidad en la frontera) está basada en el resultado del siguiente lema.

Lema 5.1 *Sea $w \in (H^1(\Omega))^3$, w periódico y tal que $w \cdot n|_\Gamma = 0$, $w|_{\Gamma_b} = 0$. Entonces existe $\phi \in H^2(\Omega)$, $\partial^\alpha \phi$ periódica para toda $|\alpha| \leq 1$, $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ en $\Gamma \cup \Gamma_b$, tal que $\operatorname{div} w = \Delta\phi$, $\|\phi\|_2 \leq c\|w\|_1$ y con $\nabla\phi - v - w \in J$, donde $v \in (H^1(\Omega))^3$ es una función periódica, $\operatorname{div} v = 0$ y $\operatorname{supp} v \subset \{0 \leq z \leq \varepsilon\}$ para cierto $\varepsilon > 0$, con $v|_{\Gamma_b} = \nabla\phi|_{\Gamma_b}$ y $\|v\|_1 \leq c\|w\|_1$.*

Prueba :

Consideremos el problema :

$$\Delta\phi = \operatorname{div} w \quad \text{en } \Omega,$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{en } \Gamma_b \cup \Gamma,$$
$$\phi \text{ periódico.}$$

Suponiendo que tenemos una solución. Si $\psi \in H^1(\Omega)$, periódica. Entonces

$$\int_\Omega \nabla\phi \cdot \nabla\psi = -\int_\Omega \psi \operatorname{div} w + \underbrace{\int_{\partial\Omega} \psi \frac{\partial \phi}{\partial n}\, dS}_{=0},$$

puesto que $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ en $\Gamma \cup \Gamma_b$, ϕ periódica en Γ_x, Γ_y; y ψ también. Sean

$$B(\phi, \psi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega \nabla\phi \cdot \nabla\psi,$$
$$l(\psi) \stackrel{\text{def}}{=} -\int_\Omega \psi \operatorname{div} w.$$

De esta forma el problema se puede formular variacionalmente como

$$B(\phi, \psi) = l(\psi),$$

para toda $\psi \in \tilde{H}^1(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{\phi \in (H^1(\Omega))^3 \ : \ \phi \text{ periódica}\}$.

Nótese que $B(\psi,\psi) = 0$ sólo si ψ es constante. También si a y b son constantes entonces $B(\psi + a, \phi + b) = B(\psi, \phi)$ para toda ϕ, ψ, así como $l(b + \psi) = l(\psi)$; en efecto,

$$l(b) = -b \int_\Omega \operatorname{div} w = -b \int_{\partial\Omega} w \cdot n = 0,$$

ya que $w \cdot n = 0$ en $\Gamma_b \cup \Gamma$ y por periodicidad. En otras palabras, $\operatorname{div} w$ es ortogonal a las constantes.

Por lo tanto el problema variacional anterior se puede reducir a encontrar $\phi \in \tilde{H}^1(\Omega)$, con $\int_\Omega \phi = 0$, tal que $B(\phi,\psi) = l(\psi)$ para todo $\psi \in \tilde{H}^1(\Omega)$ con $\int_\Omega \psi = 0$, que es el subespacio H de $\tilde{H}^1(\Omega)$ ortogonal a las constantes. Usando la desigualdad generalizada de Poincaré :

$$||u||_1^2 \leq c\left(||\nabla u||_{L^2}^2 + \left(\int_\Omega u\right)^2\right),$$

para toda $u \in (H^1(\Omega))^3$, vemos que $c_1||u||_1^2 \leq B(u,u) \leq c_2||u||_{L^2}^2$. Por lo tanto la forma bilineal $B(\cdot,\cdot)$ satisface las hipótesis de Lax-Milgram en el espacio H (véase lema 3.4).

Así, existe una única $\phi \in H$ que satisface $B(\phi,\psi) = l(\psi)$ para todo $\psi \in H$. La ortogonalidad de $\operatorname{div} w$ a las constantes permite extender esta igualdad a $\psi \in \tilde{H}^1(\Omega)$.

Para probar la desigualdad anterior, se reduce primero, por homogeneidad, al caso donde $||u||_1 = 1$. Suponiendo que no existe la constante c, esto implica que existen $\{u_n\}$ con $||u_n||_1 = 1 \geq \frac{1}{n}(||\nabla u_n||^2 + (\int_\Omega u_n)^2)$. Esto implica que ∇u_n tiende a 0. Por la compacidad del encaje $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, podemos tomar una subsucesión $\{u_n\}$ que converge en $L^2(\Omega)$ a u, con $\nabla u = 0$, es decir, u es constante. Pero también $\int_\Omega u = 0$ y $u = 0$. Dado que $||u_n||_1 = 1$ y por ende, $||u||_1 = 1$, tenemos una contradicción y la desigualdad es, por lo tanto, cierta.

Usando los teoremas de regularidad para una ecuación (el lector cuidadoso podrá ver que los argumentos que veremos más adelante para el caso del operador de Stokes se aplican fácilmente a este caso), vemos que $\phi \in H^2(\Omega)$, con

$$||\phi||_2 \leq c||\operatorname{div} w||_0 \leq c||w||_1. \tag{5.1}$$

Así

$$\int_\Omega \Delta\phi\psi = \int_{\partial\Omega} \psi\frac{\partial\phi}{\partial n} - \int_\Omega \nabla\phi \cdot \nabla\psi = \int_{\partial\Omega} \psi\frac{\partial\phi}{\partial n} + \int_\Omega \psi \operatorname{div} w,$$

para toda $\psi \in \tilde{H}^1(\Omega)$. Tomando $\psi \in C_0^\infty(\Omega) \subset \tilde{H}^1(\Omega)$ se obtiene que

$$\int_\Omega \psi\, \Delta\phi = \int_\Omega \psi \operatorname{div} w \Longrightarrow \Delta\phi = \operatorname{div} w \quad \text{en } \Omega.$$

Tomando ψ arbitraria en $\Gamma \cup \Gamma_b$, con soporte en $\Gamma \cup \Gamma_b \cup \Omega$ se obtiene que $\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0$ en $\Gamma \cup \Gamma_b$.

Finalmente tomando ψ arbitraria, pero periódica, entonces $\frac{\partial\phi}{\partial x}$ es periódico y por ende $\partial^\alpha \phi$ periódico $\forall |\alpha| \leq 1$.

Así, hemos probado que existe un único $\phi \in H^2(\Omega)$, con $\partial^\alpha\phi$ periódico, con $\int_\Omega \phi = 0$, $\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0$ en $\Gamma \cup \Gamma_b$ tal que $\operatorname{div} w = \Delta\phi$.

Sea ahora $v \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\chi}(z)(\nabla\phi - w) + G$ con $\tilde{\chi}(z)$ función C^∞ tal que $\tilde{\chi}(0) = 1, \tilde{\chi}'(0) = 0$ y $\tilde{\chi}(z) = 0$ si $z \geq \varepsilon$, y con $G = (g_1, g_2, g_3)$, donde

$$g_1 \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\chi}'(z) \int_0^\varepsilon \tilde{\chi}(z)(\phi_x - w_1)\, \mathrm{d}z,$$

$$g_2 \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\chi}'(z) \int_0^\varepsilon \tilde{\chi}(z)(\phi_y - w_2)\, \mathrm{d}z,$$

$$g_3 \stackrel{\text{def}}{=} (1 - \tilde{\chi}(z)) \int_0^\varepsilon \tilde{\chi}'(z)(\phi_z - w_3)\, \mathrm{d}z - \int_0^z \tilde{\chi}'(z)(\phi_z - w_3)\, \mathrm{d}z.$$

Claramente $G|_{z=0} = 0$. Como $\tilde{\chi}(0) = 1$, $\tilde{\chi}'(0) = 0$ entonces $v|_{z=0} = \nabla\phi - w$. En Γ, $\tilde{\chi} \equiv 0$, pues $z \geq \varepsilon$ y $\tilde{\chi}'(z) \equiv 0$ si $z \geq \varepsilon$, por lo tanto $g_1 = g_2 = 0$ en Γ; $g_3 = -\int_\varepsilon^z \tilde{\chi}'(z)(\phi_z - w_3) \equiv 0$. Consecuentemente $G|_\Gamma = 0$.

Por otro lado, como $\nabla\phi, w$ son periódicas, entonces G también es periódico. Ahora, calculando,

$$\operatorname{div} v = \tilde{\chi}(z)\underbrace{(\Delta\phi - \operatorname{div} w)}_{=0} + \tilde{\chi}'(z)(\phi_z - w_3) + \operatorname{div} G,$$

$$\operatorname{div} G = \tilde{\chi}'(z) \int_0^\varepsilon \tilde{\chi}(z)(\phi_{xx} + \phi_{yy} - w_{1x} - w_{2y})\, \mathrm{d}z - \tilde{\chi}'(z) \int_0^\varepsilon \tilde{\chi}'(z)(\phi_z - w_3)\, \mathrm{d}z - \tilde{\chi}'(z)(\phi_z - w_3).$$

Integrando por partes obtenemos

$$\int_0^\varepsilon \tilde{\chi}'(z)(\phi_z - w_3)\, \mathrm{d}z = -\int_0^\varepsilon \tilde{\chi}(z)(\phi_{zz} - w_{3z}) + \tilde{\chi}(z)(\phi_z - w_3)\Big|_0^\varepsilon.$$

Sabemos que $\tilde{\chi}(\varepsilon) = 0$. $w_3(0) = 0$ pues $w|_{\Gamma_b} = 0$; $\phi_z(0) = 0$, pues $\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0$. Por lo tanto $\tilde{\chi}(z)(\phi_z - w_3)\Big|_0^\varepsilon = 0$ y de esta forma

$$\operatorname{div} G = \tilde{\chi}'(z) \int_0^\varepsilon \tilde{\chi}(z)\underbrace{(\Delta\phi - \operatorname{div} w)}_{=0}\, \mathrm{d}z - \tilde{\chi}'(z)(\phi_z - w_3).$$

Así, $\operatorname{div} v = 0$ en Ω.

Finalmente hacemos la estimación de $||v||_1$: Como $v = \tilde{\chi}(z)(\nabla\phi - w) + G$, tenemos que

$$||v||_{L^2} \leq c_1(||\phi||_1 + ||w||_0) \leq \tilde{c}_1||w||_1,$$

pues G también depende de $\nabla\phi, w$. Como $\nabla G, \nabla v$ dependen de $\phi_{x_i x_j}, \nabla w$, entonces

$$||\nabla v||_{L^2} \leq c_2(||\phi||_2 + ||w||_1) \leq \tilde{c}_2||w||_1,$$

y por lo tanto $||v||_1 \leq c(||\phi||_2 + ||w||_1) \leq \tilde{c}||w||_1$.

□

Ahora si $w \in \tilde{J} \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in (H^1(\Omega))^3 \;:\; u|_{\Gamma_b} = 0, u \cdot n|_\Gamma = 0, \text{ periódica }\}$, se define el operador K como $Kw \stackrel{\text{def}}{=} \nabla\phi - v = (1 - \tilde{\chi}(z))\nabla\phi + \tilde{\chi}(z)w - G$, definidas según el lema anterior. Como v es lineal en ϕ y w, K es lineal en $(H^1(\Omega))^3$.

Es fácil verificar que el operador $(I - K) : \tilde{J} \mapsto J$ tiene rango en J, donde claramente $(I - K)w = (1 - \tilde{\chi}(z))(w - \nabla\phi) + G = w - (\nabla\phi - v)$.

Sabemos (véase teorema 4.20) que el problema

$$\tfrac{\nu}{2}E(u, \phi) = (f, \phi) + \int_\Gamma \left((\phi \cdot \tau^{(1)})\gamma_1 + (\phi \cdot \tau^{(2)})\gamma_2\right) \, dS,$$

para toda $\phi \in J$, tiene solución única $u \in J$, si $f \in (H^{-1}(\Omega))^3$ y $\gamma_k \in H^{1/2}(\Gamma)$, con $\frac{\nu}{2}||u||_1 \leq C\left(||f||_{-1} + ||\gamma||_{-1/2}\right)$.

Para $(x, y) \in \Gamma_b$, y con z tal que $\varepsilon < z < 1 + \xi - \varepsilon$, con $|h| < \varepsilon$, se define

$$u^h \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{h}(u(x + he_i) - u(x)). \tag{5.2}$$

De esta forma si $u \in J$, div $u^h = 0$. Sea $\chi(x) \in C^\infty(\Omega)$ con suppχ contenido en $\{2\varepsilon < z < 1 + \xi - \varepsilon\} \cap \Omega$, y $\partial^\alpha\chi$ periódico $\forall|\alpha| < \infty$. De esta manera $\chi u^h, (\chi u)^h$ están definidas en Ω (aunque su divergencia no es necesariamente cero). Sabemos que $I - K$ mapea a $(I - K) : \tilde{J} \mapsto J$, por tanto tomemos

$$\varphi_0 \stackrel{\text{def}}{=} (I - K)(\chi u)^h \in J. \tag{5.3}$$

Hay que ver que $(\chi u)^h \in \tilde{J}$. pero esto es claro ya que $u \in J, \partial^\alpha\chi$ periódico $\forall|\alpha|$ y $(\chi u)^h \cdot n|_\Gamma = 0$ pues el soporte de χ es tal que $\chi \equiv 0$ en Γ. También $(\chi u)^h|_{\Gamma_b} = 0$, pues $\chi = 0$ si $z = 0$. La periodicidad resulta de la periodicidad de χ y u.

Ahora es claro que $f(x)g^h(x) = (f(x)g(x))^h - f^h(x)g(x+h)$. $x^h \stackrel{\text{def}}{=} x + h$. Por lo tanto si $\varphi \in J$

$$E((\chi u)^h, \varphi) = E(\chi(x)u^h(x), \varphi) + E(\chi^h(x)u(x^h), \varphi).$$

Los términos de esta expresión son de la forma $(\chi u_k^h)_{x_j}\varphi_{j_{x_k}}$. Llamemos, para simplificar, u a u_k y φ a φ_j. Por lo tanto

$$\begin{aligned} (\chi u^h)_{x_j}\varphi_{x_k} &= \chi_{x_j}u^h\varphi_{x_k} + \chi u^h_{x_j}\varphi_{x_k} \\ &= \chi_{x_j}u^h\varphi_{x_k} + \left((u_{x_j}\chi\varphi_{x_k})^h - (\chi\varphi_{x_k})^h(x)u_{x_j}(x^h)\right) \\ &= \chi_{x_j}u^h\varphi_{x_k} - (\chi\varphi_{x_k})^h(x)u_{x_j}(x^h) + (u_{x_j}(\chi\varphi)_{x_k})^h - (u_{x_j}\chi_{x_k}\varphi)^h. \end{aligned}$$

Si g es una función con soporte en $\{\varepsilon < z < 1 + \xi - \varepsilon\} \cap \Omega$, periódica, entonces

$$\int_\Omega g(x)\ dx = \int_{\Omega-h} g(x+h)\ dx = \int_\Omega g(x+h)\ dx,$$

por lo que $\int_\Omega g^h\ dx = 0$. Si he_i es de la forma $(0,h,0)$ o $(h,0,0)$ se cancela por periodicidad. Si es de la forma $(0,0,h)$ se cancela por el soporte de g. Por lo tanto como $u_{x_j}(\chi\varphi)_{x_k}$, $u_{x_j}\chi_{x_k}\varphi$ son periódicas y con soporte como se indica, tenemos que

$$\int_\Omega (u_{x_j}(\chi\varphi)_{x_k})^h = 0, \quad \int_\Omega (u_{x_j}\chi_{x_k}\varphi)^h = 0.$$

Así, basta considerar

$$\chi_{x_j}u^h\varphi_{x_k} - (\chi\varphi_{x_k})^h(x)u_{x_j}(x^h) = \chi_{x_j}u^h\varphi_{x_k} + (\chi_{x_k}\varphi)^h(x)u_{x_j}(x^h) - (\chi\varphi)^h_{x_k}(x)u_{x_j}(x^h).$$

Las integrales de los dos primeros términos ($\chi_{x_j}u^h\varphi_{x_k}$ y $(\chi_{x_k}\varphi)^h(x)u_{x_j}(x^h)$) están acotados por $\|\chi_{x_j}u^h\|_{L^2}\|\varphi_{x_k}\|_{L^2}$ y $\|(\chi_{x_k}\varphi)^h\|_{L^2}\|u_{x_j}\|_{L^2}$, respectivamente. Por el lema 15.2 del libro de Friedman ([Friedman, pág. 47]), $\|u^h\|_{L^2} \le c\|u\|_1$, por lo cual existe $c > 0$ tal que

$$\int_\Omega |\chi_{x_j}u^h\varphi_{x_k}| + \int_\Omega |\chi_{x_k}\varphi)^h(x)u_{x_j}(x^h)| \le c\|\varphi\|_1\|u\|_1.$$

También se tiene que

$$E(\chi^h(x)u(x^h), \varphi) \le c\|\chi^h u\|_1\|\varphi\|_1 \le \bar{c}\|u\|_1\|\varphi\|_1,$$

ya que $|\chi^h|_{C^1} \le |\chi|_{C^2}$. Falta estimar el término $(\chi\varphi)^h_{x_k}(x)u_{x_j}(x^h)$. Haciendo un cambio de variables

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\chi\varphi)^h_{x_k}(x)u_{x_j}(x^h) &= \int_{\Omega+h} (\chi\varphi)^h_{x_k}(x-h)u_{x_j}(x) \\ &= \int_\Omega (\chi\varphi)^h_{x_k}(x-h)u_{x_j}(x) = -\int_\Omega (\chi\varphi)^{-h}_{x_k}u_{x_j}, \end{aligned}$$

por la periodicidad y el soporte de $(\chi\varphi)_{x_k}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} E((\chi u)^h,\varphi) &= -E(u,(\chi\varphi)^{-h})+a \\ &= -E(u,(\chi\varphi)^{-h}-K(\chi\varphi)^{-h})-E(u,K(\chi\varphi)^{-h})+a, \end{aligned}$$

donde $|a|\leq \tilde{c}||u||_1||\varphi||_1$. Notamos que $(I-K)(\chi\varphi)^{-h}\in J$ y por ser u solución débil obtenemos

$$\begin{aligned} \tfrac{\nu}{2}E((\chi u)^h,\varphi) &= -(f,(I-K)(\chi\varphi)^{-h})-\sum_{k=1}^{2}\int_\Gamma\left((I-K)(\chi\varphi)^{-h}\cdot\tau^{(k)}\right)\gamma_k + \\ &\quad -\tfrac{\nu}{2}E(u,K(\chi\varphi)^{-h})+a. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \tfrac{\nu}{2}E(\varphi_0,\varphi) &= \tfrac{\nu}{2}E((\chi u)^h,\varphi)-\tfrac{\nu}{2}E(K(\chi u)^h,\varphi) \\ &= -(f,(I-K)(\chi\varphi)^{-h})-\sum_{k=1}^{2}\int_\Gamma\left((I-K)(\chi\varphi)^{-h}\cdot\tau^{(k)}\right)\gamma_k + \\ &\quad -\tfrac{\nu}{2}E(u,K(\chi\varphi)^{-h})+a-\tfrac{\nu}{2}E(K(\chi u)^h,\varphi). \end{aligned}$$

para toda $\varphi\in J$. Nótese que $Kw=(1-\tilde{\chi})\nabla\phi-G+\tilde{\chi}w$ es tal que $||\phi||_2\leq c||\text{div}\,w||_0\leq \tilde{c}||w||_1$ (por el lema 5.1). Aquí $\tilde{\chi}\chi\equiv 0$ puesto que $\tilde{\chi}=0$ si $z\geq\varepsilon$ y χ tiene soporte para $z>2\varepsilon$. Tomemos $w=\chi u\in J$. Notamos que $\text{div}\,w=\nabla\chi\cdot u+\chi\text{div}\,u=\nabla\chi\cdot u$, pues $\text{div}\,u=0$. Por lo tanto

$$||\phi||_2\leq c||\text{div}\,w||_0\leq\tilde{c}||u||_{L^2}. \tag{5.4}$$

De hecho, para toda $w=\chi\varphi$, con $\text{div}\varphi=0$ tiene la estimación $||\phi||_2\leq\tilde{c}||\varphi||_{L^2}$.

Ahora, si el soporte de w está a una distancia mayor que ε de Γ_b, entonces $\tilde{\chi}(z)w=0$, pues $\tilde{\chi}=0$ si $z>\varepsilon$, y además los términos que dependen de w_1,w_2,w_3 en la expresión de g_i no aparecen. Como $v=\tilde{\chi}(\nabla\phi-w)+G$, lo anterior implica que

$$||v||_1=||\tilde{\chi}(\nabla\phi-w)+G||_1\leq c||\phi||_2.$$

Tomando $w=\chi u$, su soporte está a una distancia mayor que ε de Γ_b. Por ende,

$$||K\chi u||_1=||\nabla\phi-v||_1\leq\tilde{c}||\phi||_2\leq C||u||_{L^2},$$

por la desigualdad (5.4). Como K es lineal, entonces $K(\chi u)^h=\frac{1}{h}(K(\chi u(x+h))-K(\chi u))$; en consecuencia

$$||K(\chi u)^h||_1\leq c||u^h||_{L^2}\leq c||u||_1.$$

Aquí hemos usado el lema 15.2 de [Friedman, pág. 47]. De esta forma tenemos que

$$\begin{aligned} \tfrac{\nu}{2}|E(\varphi,\varphi_0)| \;\le\; & \|f\|_{L^2}\|(I-K)(\chi\varphi)^{-h}\|_{L^2} + \|\gamma\|_{L^2(\Gamma)}\|(I-K)(\chi\varphi)^{-h}\|_{L^2(\Gamma)} \\ & + \tfrac{\nu}{2}\|u\|_1\|K(\chi\varphi)^{-h}\|_1 + c\|u\|_1\|\varphi\|_1, \end{aligned}$$

ya que $|a| \le \tilde{c}\|u\|_1\|\varphi\|_1$ y también $\|K(\chi u)^h\|_1 \le c\|u\|_1$.

Probaremos ahora que $\|K(\chi\varphi)^{-h}\|_1 \le c\|\varphi\|_1$. Si w es de la forma $\chi\varphi$, donde $\operatorname{div}\varphi = 0$, entonces $K(\chi\varphi) = \nabla\phi - \tilde{\chi}(\nabla\phi - \chi\varphi) + G$, con $\Delta\phi = \operatorname{div}(\chi\varphi) = \nabla\chi\cdot\varphi$, y $\|\phi\|_2 \le c\|\varphi\|_{L^2}$. El soporte de $w = \chi\varphi$ está a una distancia de Γ_b mayor que ε y además $\tilde{\chi}\,\chi = 0$. De esta manera tenemos que

$$\|v\|_1 = \|\tilde{\chi}(\nabla\phi - w) + G\|_1 \le c\|\phi\|_2 \le \tilde{c}\|\varphi\|_{L^2},$$

si $|h| < \varepsilon$; lo mismo pasa para $K(\chi\varphi)^{-h} = \frac{1}{h}(K(\chi\varphi)(x-h) - K(\chi\varphi))$. Por lo tanto, usando nuevamente el lema 15.2 de [Friedman, pág. 47], tenemos

$$\|K(\chi\varphi)^{-h}\|_1 \le c\|\varphi^{-h}\|_0 \le \tilde{c}\|\varphi\|_1.$$

Para el término sobre Γ, notamos que $\chi\varphi = 0$ en Γ pues el soporte de χ está a más de ε de Γ. Fijémonos en $K(\chi\varphi) = (1-\tilde{\chi})\nabla\phi + \tilde{\chi}\chi\varphi - G$, sabiendo que $\tilde{\chi}\,\chi \equiv 0$ y $G = 0$ en Γ por construcción. Así, por el teorema de traza tenemos

$$\|K(\chi\varphi)\|_{L^2(\Gamma)} \le c\|K(\chi\varphi)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \le \tilde{c}\|\phi\|_2 \le c_0\|\varphi\|_{L^2},$$

con $\Omega_\varepsilon = \{z > \varepsilon\} \cap \Omega$. Por lo tanto :

$$\tfrac{\nu}{2}|E(\varphi,\varphi_0)| \le c(\|f\|_{L^2} + \|u\|_1 + \|\gamma\|_{L^2(\Gamma)})\|\varphi\|_1,$$

para toda $\varphi \in J$. Recordando que $\varphi_0 \in J$, tomamos $\varphi = \varphi_0$ y hacemos la estimación

$$\tfrac{\nu}{2}|E(\varphi_0,\varphi_0)| \le c(\|f\|_{L^2} + \|u\|_1 + \|\gamma\|_{L^2(\Gamma)})\|\varphi_0\|_1,$$

que implica

$$\|\varphi_0\|_1 \le 2c(\|f\|_{L^2} + \|\gamma\|_{L^2(\Gamma)}),$$

ya que $\|\cdot\|_E \sim \|\cdot\|_1$ y $\|u\|_1 \le C(\|f\|_{L^2} + \|\gamma\|_{L^2(\gamma)})$.
Como $\varphi_0 = (I-K)(\chi u)^h$ y $\|K(\chi u)^h\|_1 \le c\|u\|_1$ obtenemos

$$\|(\chi u)^h\|_1 \le 3c(\|f\|_{L^2} + \|\gamma\|_{L^2(\Gamma)}), \tag{5.5}$$

si $|h| < \varepsilon$. Por el lema 15.3 de [Friedman, pág. 48] esto implica que

$$\chi u \in H^2(\Omega) \ . \tag{5.6}$$

Recordamos que $\chi \in C^\infty(\Omega)$, con $\partial^\alpha \chi$ periódica $\forall \alpha$, con soporte en $\{2\varepsilon < z < 1 + \xi \ -\varepsilon\} \cap \Omega$. $\varepsilon > 0$ es arbitraria. Por lo tanto

$$\chi u \in H^2(\Omega) \implies u \in H^2(\Omega'),$$

para todo subdominio $\Omega' \subset \Omega$ tal que $\mathrm{dist}(\Omega', \Gamma_b \cup \Gamma) > \varepsilon' > 0$ y además

$$||u||_{H^2(\Omega')} \leq C(\varepsilon')(||f||_{L^2} + ||\gamma||_{L^2(\Gamma)}). \tag{5.7}$$

Se ha probado que $u \in H^2(\Omega')$, donde, por la construcción de χ y las estimaciones subsecuentes, Ω' admite que $\Gamma_x, \Gamma_y \subset \partial\Omega'$. Es decir, se ha probado regularidad en el interior y en las partes laterales.

Ahora, si tomamos φ con soporte en Ω' y si se extiende φ como 0 en el complemento, entonces tendremos que para toda φ en $J(\Omega')$ se cumple

$$\tfrac{\nu}{2} E(u, \varphi) = (f, \varphi) = (-\nu \, \Delta u + \nabla p, \varphi).$$

Por lo tanto $-\Delta u + \nabla p = f$ se cumple en $L^2(\Omega')$. De esta manera

$$\nabla p = f + \Delta u \in L^2(\Omega') \ \Rightarrow \ p \in H^1(\Omega').$$

A partir de la estimación anterior (5.7) se tiene que

$$||\nabla p||_{L^2(\Omega')} \leq c(\varepsilon)(||f||_{L^2} + ||\gamma||_{L^2(\Gamma)}).$$

Por el resultado del lema 4.17, p y ∂u son periódicas. Falta probar la regularidad en Γ_b y Γ.

5.1.2 Regularidad en Γ_b

Si seguimos la construcción anterior, tendremos $K(\chi\varphi) = (1 - \tilde{\chi})\nabla\phi + \tilde{\chi}\,\chi\varphi - G$, donde ϕ es la función de lema 5.1 (que depende de $\chi\varphi$), y además, $\nabla\phi$ y el correspondiente término en G, se pueden estimar en H^1 por $||\phi||_2 \leq c||\chi\varphi||_{L^2}$.

Sin embargo el término $\tilde{\chi}\,\chi\varphi$ (y su correspondiente en G) tiene norma en H^1 parecida a la de $\chi\varphi$ (en particular si el soporte de $\chi\varphi$ está donde $\tilde{\chi} \equiv 1$) y por lo tanto no se puede estimar como una perturbación en $L^2(\Omega)$: recordemos que en el caso anterior $\tilde{\chi}\,\chi = 0$; aquí el soporte de χ será diferente para tomar en cuenta a Γ_b.

Ahora,

$$\tfrac{\nu}{2}E(v,\varphi) = (-\nu\,\Delta v + \nabla q, \varphi) + \int_{\partial\Omega} \varphi \cdot T(v)n \,\mathrm{d}S,$$

para toda $v \in (H^2(\Omega))^3$, periódica, $\varphi \in (H^1(\Omega))^3$, $\operatorname{div}\varphi = 0, \varphi \cdot n|_{\partial\Omega} = 0$, φ periódica y $q \in H^1(\Omega)$, periódica.

Por la periodicidad el término de frontera se reduce a integrales sobre Γ y Γ_b, donde, debido a la condición $\varphi \cdot n|_{\partial\Omega} = 0$ y a que en $T(v)n = -pn + \sigma(v)n$, sólo cuenta $\varphi \cdot \sigma(v)n$.

Por la definición de J, existe $v \in (H^2(\Omega))^3 \cap J$ tal que $||v - u||_1 < \varepsilon$. También sabemos que $\nabla : L^2(\Omega) \mapsto (H^{-1}(\Omega))^3$ es continuo. Podemos tomar $q \in H^1(\Omega)$, denso en $L^2(\Omega)$, tal que $||p - q||_{L^2} \leq \hat{\varepsilon}$ y $||\nabla(p - q)||_{-1} \leq \varepsilon$. Es decir

$$-\nu\,\Delta v + \nabla q \xrightarrow{H^{-1}} -\nu\,\Delta u + \nabla p = f,$$

y $v \xrightarrow{H^1} u$, por lo que $E(v,\varphi) \to E(u,\varphi)$.

Por lo tanto $\int_{\partial\Omega} \varphi \cdot \sigma(v)n \,\mathrm{d}S$ converge a

$$\tfrac{\nu}{2}E(u,\varphi) - (f,\varphi) = \int_{\Gamma} \varphi \cdot \gamma \,\mathrm{d}S + \int_{\Gamma_b} \varphi \cdot \sigma(u)n \,\mathrm{d}S,$$

ya que $\varphi \cdot n|_\Gamma = 0$ implica que $\varphi = \varphi_1\tau^{(1)} + \varphi_2\tau^{(2)}$. Tomando φ con soporte en $z > \varepsilon$, tendremos que

$$\int_\Gamma \varphi \cdot T(v)n \,\mathrm{d}S \longrightarrow \int_\Gamma \varphi \cdot \gamma \,\mathrm{d}S.$$

Por lo tanto

$$\tfrac{\nu}{2}E(u,\varphi) = (f,\varphi) + \int_\Gamma \varphi \cdot \gamma \,\mathrm{d}S + \int_{\Gamma_b} \varphi \cdot \sigma(u)n \,\mathrm{d}S,$$

para toda $\varphi \in \tilde{J} \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \in J \;:\; \underline{\text{sin}} \text{ la condición } \varphi_{\Gamma_b} = 0\}$. La integral sobre Γ_b se entiende como $\sigma(u)n \in H^{-1/2}(\Gamma_b)$ y $\varphi|_{\Gamma_b} \in H^{1/2}(\Gamma_b)$.

Consideremos h un desplazamiento horizontal :

$$u^h = \frac{1}{h}(u(x+h) - u(x)).$$

Sera $\chi(z)$ una función C^∞ con $\chi(z) = 1$ si $0 \le z \le \frac{\varepsilon'}{2}$. También $\chi(z) \equiv 0$ para $z \ge \varepsilon'$. Hemos visto que

$$E((\chi u)^h, \varphi) = -E(u, (\chi\varphi)^{-h}) + a,$$

con $|a| \le \hat{c}||u||_1||\varphi||_1$. Así

$$\begin{aligned} E((\chi u)^h - \nabla\phi((\chi u)^h), \varphi) &= -E(u, (\chi\varphi)^{-h} - \nabla\phi((\chi\varphi)^{-h})) + \\ &\quad -E(\nabla\phi((\chi u)^h), \varphi) - E(u, \nabla\phi((\chi u)^{-h})) + a. \end{aligned}$$

Recordemos que $\phi(w)$ está dado, por el lema 5.1, si w es tal que $w \cdot n|_{\partial\Omega} = 0$ y $w = 0$ en Γ_b. Además sabemos que $\Delta\phi = \operatorname{div} w$ en Ω, $\frac{\partial\phi}{\partial n}|_{\Gamma_b \cup \Gamma} = 0$, ϕ periódica, $\int_\Omega \phi = 0$ y

$$||\phi||_2 \le c||\operatorname{div} w||_0 \le \tilde{c}||\varphi||_{L^2},$$

si $w = \chi\varphi$ y $\operatorname{div}\varphi = 0$. En particular $||\nabla\phi((\chi u)^h)||_1 \le c||u||_1$.

Como $\varphi_1 \stackrel{\text{def}}{=} (\chi\varphi)^{-h} - \nabla\phi((\chi\varphi)^{-h}) \in \hat{J}$ por construcción, tenemos que

$$||\varphi_1||_{L^2} \le c(||\varphi||_1 + ||\phi((\chi\varphi)^{-h})||_1 \le \tilde{c}||\varphi||_1.$$

De esta manera podemos acotar

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{2}E((\chi u)^h - \nabla\phi((\chi u)^h), \varphi) &= -(f, \varphi_1) - \int_\Gamma \varphi_1 \cdot \gamma \,\mathrm{d}S - \int_{\Gamma_b} \varphi_1 \cdot \sigma(u)n \,\mathrm{d}S \\ &\quad -E(\nabla\phi((\chi u)^h), \varphi) - E(u, \nabla\phi((\chi\varphi)^{-h})) + a. \end{aligned}$$

El primer término está acotado por $||f||_{L^2}||\varphi_1||_{L^2} \le c||f||_{L^2}||\varphi||_1$. El término $E(\nabla\phi((\chi u)^h), \varphi)$ está acotado por $||\varphi||_1||\nabla\phi(\chi u)^h||_1 \le c||\varphi||_1||u||_1$, y lo mismo para $E(u, \nabla\phi((\chi\varphi)^{-h}))$.

Sobre Γ, $\chi \equiv 0$, por lo cual

$$\int_\Gamma \varphi_1 \cdot \gamma \,\mathrm{d}S = -\int_\Gamma \nabla\phi(\chi\varphi)^{-h} \cdot \gamma \,\mathrm{d}S,$$

está acotado por $c||\gamma||_{L^2(\Gamma)}||\nabla\phi(\chi\varphi)^{-h}||_1 \le \tilde{c}||\gamma||_{L^2(\Gamma)}||\varphi||_1$, por el teorema de la traza.

En la integral $\int_{\Gamma_b} \varphi_1 \cdot \sigma(u)n \,\mathrm{d}S$, el término

$$\int_{\Gamma_b} \nabla\phi((\chi\varphi)^{-h}) \cdot \sigma(u) \,\mathrm{d}S,$$

es acotado por

$$||\nabla\phi((\chi\varphi)^{-h})||_{H^{1/2}(\Gamma_b)}||\sigma(\chi u)||_{H^{-1/2}(\Gamma_b)},$$

notando que $\chi u \equiv u$ en Γ_b, y que $\phi \in H^3(\Omega)$, pues $\Delta\phi = \operatorname{div}(\chi\varphi) = \nabla\chi \cdot \varphi \in H^1(\Omega)$. Así, $\nabla\phi|_{\Gamma_b} \in H^{3/4}(\Gamma_b)$.

Por el teorema de traza tenemos la cota

$$||\nabla\phi((\chi\varphi)^{-h})||_1 ||\sigma(\chi u)||_{L^2} \leq c||\varphi||_1 ||u||_1.$$

Consideremos $\varphi_0 \overset{\mathrm{def}}{=} (\chi u)^h - \nabla\phi((\chi u)^h)$. Como $u \equiv 0$ en Γ_b, sólo queda el término

$$(\chi\nabla\phi((\chi u)^h))^{-h}\Big|_{\Gamma_b} = (\nabla\phi(\chi u)^h)^{-h},$$

y tiene una cota

$$\begin{aligned} ||\nabla\phi(\chi u)^h||_{H^{3/2}(\Gamma_b)} ||\sigma(\chi u)||_{H^{-1/2}(\Gamma_b)} &\leq c||\nabla\phi(\chi u)^h||_2 ||u||_1 \\ &\leq \tilde{c}||\phi(\chi u)^h||_{H^3(\Omega)} ||u||_1 \\ &\leq c_0||(\nabla\chi \cdot u)^h||_1 ||u||_1. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$|E(\varphi_0, \varphi_0)| \leq c(||f||_{L^2} + ||u||_1 + ||\gamma||)||\varphi_0||_1 + \tilde{c}||u||_1||(\nabla\chi \cdot u)^h||_1.$$

Ahora bien, por la desigualdad de Korn, que también es válida en $\tilde{J}$, obtenemos

$$E(\varphi, \varphi) = ||\varphi||_\nabla^2 + \sum_{i,k} \int_{\Gamma_b \cup \Gamma} \varphi_i n_k \varphi_{k x_i} \, \mathrm{d}S = ||\varphi||_\nabla^2 + I(\varphi),$$

con $|I(\varphi)| \leq c_0 \int_{\Gamma_b \cup \Gamma} \varphi^2 \, \mathrm{d}S \leq \tilde{\epsilon}||\varphi||_\nabla^2 + M||\varphi||_{L^2}^2$. Por lo tanto

$$E(\varphi, \varphi) \geq (1 - \epsilon)||\varphi||_\nabla^2 - M||\varphi||_{L^2}^2 \geq (1 - \epsilon)||\varphi||_1^2 - (M + 1 - \epsilon)||\varphi||_{L^2}^2.$$

Ahora

$$||\varphi_0|| \leq c||u||_1 \implies ||\varphi_0||_1^2 \leq c(E(\varphi_0, \varphi_0) + ||u||_1^2),$$
$$(\chi u)^h = \varphi_0 + \nabla\phi((\chi u)^h) \implies ||(\chi u)^h|| \leq ||\varphi_0||_1 + ||u||_1.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} ||(\chi u)^h||_1^2 &\leq c(E(\varphi_0, \varphi_0) + ||u||_1^2) \\ &\leq \tilde{c}(||f||_{L^2} + ||u||_1 + ||\gamma||)(||(\chi u)^h||_1 + ||u||_1) + c||u||_1||(\nabla\chi \cdot u)^h||_1. \end{aligned}$$

Como $\chi \equiv 0$ en $z < \varepsilon/2$, entonces $\nabla\chi \cdot u = \chi'(z)u_3$ tiene soporte en $\varepsilon/2 < z < \varepsilon$, y se ha probado, por la regularidad en el interior, que

$$||\chi'(z)u_3||_1 \le c||u||_{H^1(\{\varepsilon/2<z<\varepsilon\})}.$$

Por lo tanto

$$||(\nabla\chi \cdot u)^h||_1 \le c||u||_{H^2(\varepsilon/2<z<\varepsilon)}.$$

Llegamos así a la desigualdad

$$\begin{aligned} ||(\chi u)^h||_1^2 \;\le\; & c(||f||_{L^2} + ||u||_1 + ||\gamma||_{L^2(\Gamma)})||(\nabla\chi \cdot u)^h||_1 \\ & + c||u||_1(||f||_{L^2} + ||u||_1 + ||\gamma||_{L^2(\Gamma)} + ||u||_{H^2(\varepsilon/2<z<\varepsilon)}). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Obtenemos de esta manera $A^2 \le cA + D$ con $A \stackrel{\text{def}}{=} ||(\chi u)^h||_1$ y por ende $A \le A_0$, donde A_0 es la raíz positiva de esta ecuación de segundo grado. Tomando el límite cuando $h \to 0$ obtenemos que u tiene derivadas u_x, u_y en $H^1(\{0 \le z < 1 + \xi - \varepsilon\})$ (recordemos que el incremento h era horizontal).

Por la relación $\operatorname{div} u = 0$ tenemos también que $u_{3_z} = -u_{1x} - u_{2y} \in H^1(\{0 \le z < 1 + \xi - \varepsilon\})$. También están en este espacio las derivadas horizontales de u_3, por lo que $u_3 \in H^2(\{0 \le z < 1 + \xi - \varepsilon\})$. De la relación $-\Delta u_3 + p_z = f_3 \in L^2(\Omega)$, se obtiene que $p_z \in L^2(\Omega)$.

Como $(-\Delta u - f, \varphi) = (\nabla p, \varphi)$ para toda φ con $\operatorname{div}\varphi = 0$ y $\varphi \equiv 0$ en $z > \varepsilon$, entonces

$$((\nabla p)^h, \varphi) = -((\Delta u)^h + f^h, \varphi) = (\Delta + f, \varphi^{-h}),$$

y

$$|((\nabla p)^h, \varphi)| \le (||\Delta u_h||_{-1} + ||f_h||_{-1})||\varphi||_1,$$

ya que Δu tiene derivada en la dirección h en H^{-1} ($\Delta u_x = u_{xxx} + u_{xyy} + u_{xzz}$ y $u_x \in H^1(\Omega)$). Tomando el supremo para $||\varphi||_1$ se obtiene

$$||(\nabla p)^h||_{-1} \le c \implies \nabla p_h \in H^{-1} \implies \nabla p \in L^2(\Omega)\,.$$

De las ecuaciones para u se obtiene que $u_{zz} \in L^2(\Omega)$, que es la derivada que faltaba. Por lo tanto

$$u \in H^2(\{z < \varepsilon\}). \tag{5.9}$$

5.1.3 Regularidad en Γ

Sea χ una función C^∞ con soporte en $\{z > 3\varepsilon\} \cap \{1 + \xi - 2\varepsilon < z < 1 + \xi\}$, de forma que $\chi \equiv 1$ para $1 + \xi - \varepsilon < z < 1 + \xi$. Si definimos $v \stackrel{\text{def}}{=} \chi u$, sea el incremento

$$v^h = \frac{1}{h}(v(x + h, y, z + \xi(x + h, y) - \xi(x, y)) - v(x, y, z)),$$

es decir, se toma un incremento en dirección paralela a Γ. De esta forma

$$\|v^h\|_{L^2} \leq c\|u_x + \xi_x\, u_z\|_{L^2} \leq c\|u\|_1. \tag{5.10}$$

Cuando $h \to 0$, la expresión anterior tiende a $u_x + \xi_x\, u_z$. Como el vector normal es $(-\xi_x, -\xi_y, 1)$, el vector $(1, 0, \xi_x)$ es tangente a Γ. Ahora,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} v^h &= (\operatorname{div} v)^h + \xi_x{}^h u_{1z} + \xi_y{}^h u_{2z} \\ &= (\nabla\chi \cdot u)^h + \xi_x{}^h u_{1z} + \xi_y{}^h u_{2z}, \end{aligned}$$

por lo cual

$$\|\operatorname{div} v^h\|_{L^2} \leq c\|\nabla\chi \cdot u\|_1 + \|\xi_{xx}\|_{L^2}\|u_{1z}\|_{L^2} + \|\xi_{xy}\|_{L^2}\|u_{2z}\|_{L^2} \leq c\|u\|_1.$$

Si definimos $\psi(v)$ dado por el lema 5.1, tenemos que $\|\psi\|_2 \leq c\|u\|_1$. Sea K como en la prueba de la regularidad interior : $Kw = (1 - \tilde{\chi})\nabla\psi + \tilde{\chi}\, w - G$. Para $w = \chi v$ tendremos $\tilde{\chi}\chi = 0$, $\tilde{\chi}'\chi = 0$ y

$$Kw = (1 - \tilde{\chi})\nabla\psi + \left(\tilde{\chi}' \int_0^\varepsilon \tilde{\chi}\,\psi_x, \tilde{\chi}' \int_0^\varepsilon \tilde{\chi}\,\psi_y, (1 - \tilde{\chi}) \int_0^\varepsilon \tilde{\chi}'\,\psi_z - \int_0^z \tilde{\chi}'\,\psi_z\right),$$

con $\|Kw\|_1 \leq c\|v\|_{L^2}$, donde el último término tiene soporte en $z \leq \varepsilon$. Así $E(v^h, \varphi) = E(\chi u^h, \varphi) + E(\chi^h u(x^h), \varphi)$, donde el segundo término es estimado por $\|\chi\|_2\|u\|_1\|\varphi\|_1$. Para $E(\chi u^h, \varphi)$ se tienen las mismas diferencias que en la regularidad interior, ahora con

$$\begin{aligned} (u^h)_x &= (u_x)^h + \xi_x{}^h u_z(x + h), \\ (u^h)_z &= (u_z)^h. \end{aligned}$$

También se tiene que

$$\begin{aligned} (\chi u^h)_{x_j}\varphi_{x_k} &= \chi_{x_j} u^h \varphi_{x_k} + \chi(u_{x_j})^h \varphi_{x_k} + (\xi_{x_j})^h u_z(x^h)\varphi_{x_k} \\ &= \chi_{x_j} u^h \varphi_{x_k} + (u_{x_j}(\chi\varphi)_{x_k})^h - (u_{x_j}\chi_{x_k}\varphi)^h - (\chi\varphi_{x_k})^h u_{x_j}(x^h) + (\xi_{x_j})^h u_z(x^h)\varphi_{x_k}. \end{aligned}$$

Además
$$\int_\Omega g(x+h,y,z+\triangle\xi)\ d\Omega = \int_{\Omega_h} g(x',y',z')\ d\Omega_h = \int_\Omega g(x',y',z')\ d\Omega,$$

si g es periódica de soporte adecuado y el jacobiano de la transformación es 1. Por lo tanto el único término cuya norma en L^2 no está acotada por $||\varphi||_1||u||_1$ es el que corresponde a

$$\begin{aligned}\int_\Omega((\chi\varphi)_{x_k})^h u_{x_j}(x^h) &= \int_{\Omega_h}((\chi\varphi)_{x_k})^h(x-h)u_{x_j}(x)\\ &= -\int_{\Omega_h}((\chi\varphi)_{x_k})^{-h}u_{x_j}\\ &= -\int_{\Omega_h}((\chi\varphi)^{-h})_{x_k}u_{x_j} - \int_\Omega(\xi_{x_k})^{-h}(\chi\varphi)_z(x^h)u_{x_j}.\end{aligned}$$

El último término está acotado por $c||u||_1||\varphi||_1$. Por lo tanto $E((\chi u)^h,\varphi) = -E(u,(\chi\varphi)^{-h})+a$, con $|a|\le\tilde{c}||u||_1||\varphi||_1$. Si definimos

$$\varphi_0 \stackrel{\text{def}}{=} (\chi u)^h - K(\chi u)^h,$$
$$\varphi_1 \stackrel{\text{def}}{=} (\chi\varphi)^{-h} - K(\chi\varphi)^{-h},$$

entonces,

$$\tfrac{\nu}{2}E(\varphi_0,\varphi) = -(f,\varphi_1) - \int_\Gamma \varphi_1\cdot\gamma - \tfrac{\nu}{2}E(u,K(\chi\varphi)^{-h}) - \tfrac{\nu}{2}E(K(\chi u)^h,\varphi),$$
$$\Longrightarrow |E(\varphi_0,\varphi)| \le c(||f||_{L^2}||\varphi||_1 + ||K(\chi\varphi)^{-h}||_{L^2(\Gamma)}||\gamma||_{L^2(\Gamma)} + \tilde{c}||u||_1||\varphi||_1,$$

pues $\chi\equiv 0$ en Γ. También, por el lema 5.1,

$$||K(\chi\varphi)^{-h}||_{L^2(\Gamma)} \le c||K(\chi\varphi)^{-h}||_1 \le c||\mathrm{div}(\chi\varphi)^{-h}||_{L^2} \le c||\varphi||_1.$$

Por lo tanto
$$|E(\varphi_0,\varphi)| \le c(||f||_{L^2} + ||\gamma||_{L^2(\Gamma)} + ||u||_1)||\varphi||_1.$$

Tomando $\varphi=\varphi_0$, $||\varphi_0||_1 \le c(||f||_{L^2}+||\gamma||_{L^2(\Gamma)}+||u||_1)$, y tendremos el mismo resultado que antes : $||(\chi u)^h||_1 \le c$ y cuando $h\to 0$,

$$u_x + \xi_x u_z \ \text{ y } \ u_y + \xi_y u_z \in (H^1(\Omega))^3\,.$$

De $\mathrm{div}\, u = 0$ se obtiene que

$$u_{3_z} - \xi_x u_{1_x} - \xi_y u_{2_y} \in H^1(\Omega)\,.$$

También, dado que

$$\begin{aligned} |((\nabla p)^h, \varphi)| &\le (\|(\Delta u)^h\|_{-1} + \|f_h\|_{-1})\|\varphi\|_1 \\ &\le c(\|\Delta u_h\|_{-1} + \|f\|_{-1})\|\varphi\|_1. \end{aligned}$$

donde Δu_h es la derivada de Δu en dirección h, en el espacio H^{-1} (mismo argumento), entonces

$$p_x + \xi_x p_z \text{ y } p_y + \xi_y p_z \in L^2(\Omega) .$$

Ahora consideremos la transformación

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} \mapsto x = \begin{pmatrix} x = \bar{x} \\ y = \bar{y} \\ z = \bar{z} + \xi(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix}.$$

Se definen $\bar{u} \stackrel{\text{def}}{=} u(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} + \xi)$, $\bar{p} \stackrel{\text{def}}{=} p(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} + \xi)$. Así

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\bar{x}} &= u_x + \xi_x u_z \quad \in H^1(\Omega), \\ \bar{u}_{\bar{y}} &= u_y + \xi_y u_z \quad \in H^1(\Omega), \\ \bar{u}_{\bar{z}} &= u_z , \\ \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}} &= u_{xx} + 2\xi_x u_{xy} + \xi_x{}^2 u_{zz} + \xi_{xx} u_z \quad \in L^2(\Omega), \\ \Delta_{\bar{x}}\bar{u} &= \Delta_x u + 2\nabla_x \xi \cdot \nabla_x u_z + |\nabla_x \xi|^2 u_{zz} + \Delta_x \xi u_z. \end{aligned}$$

Sea

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \xi_x \\ 0 & 1 & \xi_y \\ -\xi_x & -\xi_y & 1 \end{pmatrix}.$$

Notamos que $\Delta_x u = \frac{1}{\nu}\nabla_x p - \frac{1}{\nu} f$, y

$$A\nabla p = \begin{pmatrix} p_x + \xi_x p_z \\ p_y + \xi_y p_z \\ -\xi_x p_x - \xi_y p_y + p_z \end{pmatrix}.$$

Las dos primeras componentes de la expresión anterior están en $L^2(\Omega)$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} A\Delta_{\bar{x}}\bar{u} &= \frac{1}{\nu}A\nabla_x p - \frac{1}{\nu}Af + 2\begin{pmatrix} \xi_x u_{1_{xz}} + \xi_y u_{1_{yz}} + \xi_x{}^2 u_{3_{xz}} + \xi_x \xi_y u_{3_{yz}} \\ \xi_x u_{2_{xz}} + \xi_y u_{2_{yz}} + \xi_x \xi_y u_{3_{xz}} + \xi_y{}^2 u_{3_{yz}} \\ -\xi_x{}^2 u_{1_{xz}} - \xi_y{}^2 u_{2_{yz}} - \xi_x \xi_y (u_{1_{yz}} + u_{2_{xz}}) + \xi_x u_{3_{xz}} + \xi_y u_{3_{yz}} \end{pmatrix} \\ &\quad + |\nabla\xi|^2 A u_{3_z} + \Delta_x \xi A u_z. \end{aligned}$$

El tercer renglón se escribe

$$-\xi_x(\Delta_{\bar{x}}\bar{u}_1 - \bar{u}_{1_{zz}}) - \xi_x \bar{u}_{1_{zz}} - \xi_y(\Delta_{\bar{x}}\bar{u}_2 - \bar{u}_{2_{zz}}) - \xi_y \bar{u}_{2_{zz}} + (\Delta_{\bar{x}}\bar{u}_3 - \bar{u}_{3_{zz}}) + u_{3_{zz}}.$$

Los términos en paréntesis están en $L^2(\Omega)$, y los otros son derivadas de algo que está en H^1. Por ende, el lado izquierdo está en $L^2(\Omega)$. Lo mismo sucede para el término

$$|\nabla\xi|^2(-\xi_x\, u_{1_{zz}} - \xi_y\, u_{2_{zz}} + u_{3_{zz}}),$$

es decir, está en $L^2(\Omega)$, y el siguiente término se puede escribir como

$$-({\xi_x}^2 u_{1_{xz}} + {\xi_y}^2 u_{2_{yz}} + \xi_x\,\xi_y(u_{1_{yz}} + u_{2_{xz}})) + \xi_x\, u_{3_{xz}} + \xi_y\, u_{3_{yz}} =$$

$$= \xi_x(u_{3_z} - \xi_x\, u_{1_z} - \xi_y\, u_{2_y})_x + \xi_y(u_{3_z} - \xi_x\, u_{1_z} - \xi_y\, u_{2_y})_y + \text{términos en primeras derivadas},$$

por lo tanto está en $L^2(\Omega)$.

De esto tenemos que la tercera componente de $A\nabla_{\bar{x}}p$ también está en $L^2(\Omega)$, y por lo tanto concluímos que $\nabla_{\bar{x}}p$ está en $L^2(\Omega)$.

El primer renglón se escribe, del lado izquierdo, como

$$(\Delta_{\bar{x}}\bar{u}_1 - \bar{u}_{1_{zz}}) + \xi_x(\Delta_{\bar{x}}\bar{u}_3 - \bar{u}_{3_{zz}}) + u_{1_{zz}} + \xi_x\, u_{3_{zz}},$$

donde los términos entre paréntesis están en $L^2(\Omega)$. Los otros términos son la primera componente de Au_{zz}. Ahora $u_{i_x} + \xi_x\, u_{i_z}$ está en $H^1(\Omega)$, por lo tanto sus derivadas están en $L^2(\Omega)$. De esta forma tenemos que el lado derecho es $-|\nabla\xi|^2(u_{1_{zz}} + \xi_x\, u_{3_{zz}})+$ términos en $L^2(\Omega)$. Por lo tanto, $u_{1_{zz}} + \xi_x\, u_{3_{zz}}$ está en $L^2(\Omega)$ y lo mismo para $u_{2_{zz}} + \xi_y\, u_{3_{zz}}$.

En consecuencia tenemos que $A\,\Delta_{\bar{x}}\bar{u}$ está en $L^2(\Omega)$ (ya probamos que la tercera componente también está en $L^2(\Omega)$). Así u_{zz} está en $L^2(\Omega)$, al igual que $\Delta_{\bar{x}}\bar{u}$, y por ende $\nabla_x\xi \cdot \nabla_x u_z$. Del hecho que $u_x + \xi_x u_z$ está en $H^1(\Omega)$ y $u_{zz} \in L^2(\Omega)$ tenemos que $u_{xy}, u_{yz} \in L^2(\Omega)$. Pero entonces $(u_x + \xi_x u_y)_x = u_{xx} + \xi_x u_{xy} + \xi_{xx} u_z \in L^2(\Omega)$, y por lo tanto $u_{xx} \in L^2(\Omega)$ (y del mismo modo u_{yy} y u_{xy}).

Con esto hemos visto que $u \in (H^2(\Omega))^3$. Podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 5.2 *Si $f \in (L^2(\Omega))^3$, la solución débil (u,p) del problema de Stokes está en $(H^2(\Omega))^3 \times H^1(\Omega)$, es decir, es también una solución fuerte. Además*

$$||u||_2 + ||\nabla p||_{L^2} \leq c(||f||_0 + ||\gamma||_{1/2}).$$

5.2 Regularidad de la solución fuerte

Recordamos que nuestro problema de Stokes está definido por el siguiente conjunto de ecuaciones :

$$\left.\begin{array}{r} -\Delta u + \operatorname{grad} p = f \\ \operatorname{div} u = 0 \end{array}\right\} \quad \text{en } \Omega \tag{5.11}$$

con condiciones de frontera :

$$u|_{\Gamma_b} = 0, \tag{5.12}$$

$$u \cdot n|_\Gamma = 0, \tag{5.13}$$

$$\tau^{(k)} \cdot T(u)n|_\Gamma = \gamma_k, \quad k = 1, 2. \tag{5.14}$$

Como hemos visto las condiciones de periodicidad para p y ∂u deben satisfacerse naturalmente si la solución es suficientemente regular. Además, si la solución está en J entonces se cumplen las condiciones de periodicidad para u. Por esta razón estas condiciones no serán consideradas.

5.2.1 Elipticidad del sistema y la condición suplementaria

Cualquier sistema elíptico de ecuaciones, y en particular el problema de Stokes, puede representarse de la siguiente forma (véase [Agm/Dou/Nir, pág. 38]) :

$$\sum_j l_{ij}(P, \partial) u_j(P) = F_i(P), \tag{5.15}$$

donde P es cualquier punto en $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\partial = (\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_{n+1}})$ es el operador diferenciación y las funciones F_i son los datos del problema. El orden de los operadores l_{ij}, polinomios en ∂, dependen de dos sistemas de índices enteros $\{s_i\}$ y $\{t_j\}$, asociados a la ecuación i y a la variable dependiente u_j, respectivamente. Esta dependencia está dada por la ecuación

$$\deg l_{ij}(P, \eta) \le s_i + t_j, \quad \forall i, j, \tag{5.16}$$

donde η es cualquier vector en $\mathbb{R}^{n+1}$ y el grado se refiere por supuesto al grado en η. Se asume que $l_{ij} = 0$ si $s_i + t_j < 0$.

Definimos la matriz l'_{ij} como la parte principal de l_{ij}, esto es, los términos de $l_{ij}(P, \eta)$ que son exactamente de orden $s_i + t_j$.

Definición 5.3 *Un sistema elíptico de la forma (5.15) se define como aquél sistema para el cual se cumple*

$$l(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \det l'_{ij}(P,\eta) \neq 0,$$

para toda $\eta \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\eta \neq 0$.

Para el problema de Stokes que queremos estudiar definimos

$$u_4 = p, \tag{5.17}$$

y vamos a tomar un sistema para u_j con $j = 1,\ldots,4$. De esta forma las ecuaciones (5.11) se pueden escribir como

$$l_{ij}(P,\partial)u = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 & -\partial_{x_1} \\ 0 & \Delta & 0 & -\partial_{x_2} \\ 0 & 0 & \Delta & -\partial_{x_3} \\ \partial_{x_1} & \partial_{x_2} & \partial_{x_3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.18}$$

Por lo tanto tenemos que $l_{ij}(P,\eta) = |\eta|^2\delta_{ij}$ si $i,j \leq 3$. Definimos los sistemas de índices $s_i = 0, t_j = 2$ para $i,j \leq 3$, de forma que $s_i + t_j = 2$ es el orden principal del operador para $i,j \leq 3$, lo cual coincide con el orden de diferenciación de Δ.

Igualmente escogemos $t_4 = 1, s_4 = -1$, y vemos que si $l_{i4} = -\eta_i$ con $i \leq 3$, $l_{4j} = \eta_j$ para $j \leq 3$ y $l_{44} = 0$, entonces $s_i + t_4 = 1$ para toda $i \leq 3$ y $s_4 + t_j = 1$ para toda $j \leq 3$, lo cual coincide con el orden del operador div y ∇. De esta forma si $\eta \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$l_{ij}(P,\eta) = \begin{pmatrix} |\eta|^2 & 0 & 0 & -\eta_1 \\ 0 & |\eta|^2 & 0 & -\eta_2 \\ 0 & 0 & |\eta|^2 & -\eta_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.19}$$

es la matriz asociada al sistema. Notamos que deg $l_{ij}(\eta) = s_i + t_j$, por lo cual $l_{ij}(\eta) = l'_{ij}(\eta)$. Esto se debe al hecho que el problema de Stokes es precisamente la parte principal lineal del problema de Navier-Stokes completo.

Calculando el determinante notamos que

$$\det l_{ij}(\eta) = |\eta|^2(|\eta|^2\eta_3^2 + |\eta|^2\eta_2^2) - \eta_1|\eta|^2(-\eta_1|\eta|^2) = |\eta|^6 \neq 0, \tag{5.20}$$

para toda $\eta \neq 0$ en $\mathbb{R}^{n+1}$. Esto asegura la elipticidad del sistema.

Veremos ahora que el sistema también satisface la condición suplementaria :

Definición 5.4 (Condición suplementaria) *Sea* $\det l'_{ij}(\eta) = l(\eta, P)$ *de grado* $2m$ *con respecto a* $\eta \in \mathbb{R}^{n+1}$. *Para cada par de vectores* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{n+1}$ *linealmente independientes el polinomio* $l(\alpha + z\beta, P)$ *en la variable compleja* z *tiene exactamente* m *raíces con parte imaginaria positiva.*

Aquí tenemos que $l(\eta) = \det l'_{ij}(\eta) = |\eta|^6 = |\eta|^{2m}$ es de orden $2m$ con $m = 3$. Debemos verificar la condición suplementaria, así que consideremos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$ dos vectores linealmente independientes y el polinomio

$$l(\alpha + z\beta) = |\alpha + z\beta|^6.$$

Para estudiar sus raíces vemos que

$$l(\alpha + z\beta) = \left(|\alpha + z\beta|^2\right)^3 = 0 \Longleftrightarrow |\alpha + z\beta|^2 = 0,$$

es decir,

$$|\alpha|^2 + 2z(\alpha \cdot \beta) + z^2|\beta|^2 = 0,$$

cuyas raíces son

$$z^{\pm} = \frac{1}{|\beta|^2}\left(-(\alpha \cdot \beta) \pm \sqrt{(\alpha \cdot \beta)^2 - |\alpha|^2|\beta|^2}\right).$$

Como α y β son linealmente independientes $|\alpha|, |\beta| \neq 0$ y $(\alpha \cdot \beta)^2 - |\alpha|^2|\beta|^2 < 0$, por lo que la raíz con parte imaginaria positiva es

$$z^{+} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|\beta|^2}\left(-(\alpha \cdot \beta) + i\sqrt{|\alpha|^2|\beta|^2 - (\alpha \cdot \beta)^2}\right). \tag{5.21}$$

De esta forma el polinomio $|\alpha + z\beta|^6$ tiene exactamente $m = 3$ raíces (iguales) con parte imaginaria positiva

$$|\alpha + z\beta|^6 = \left(|\beta|^2(z - z^+)(z - z^-)\right)^3,$$

por lo que la condición suplementaria sobre el sistema de ecuaciones se satisface.

5.2.2 Condiciones de frontera complementarias

Las condiciones de frontera consideradas se refieren a una porción regular Γ de $\partial\Omega$, y se expresan, en general, de la siguiente forma

$$\sum_j B_{hj}(P,\partial)u_j(P) = \phi_h(P), \quad \text{en } \Gamma, \tag{5.22}$$

en términos de operadores $B_{hj}(P,\partial)$, polinomios en ∂, y los datos, representados por funciones ϕ_h. El orden de los operadores B_{hj} dependen también de dos sistemas de índices enteros, en este caso, de $\{t_j\}$, asociado a las variables dependientes u_j como habíamos visto, y de un nuevo sistema de índices $\{r_h\}$ asociados a la condición h de frontera en Γ. La dependencia exacta se expresa como

$$\deg B_{hj}(P,\eta) \leq r_h + t_j, \tag{5.23}$$

para cualquier vector $\eta \in \mathbb{R}^{n+1}$. Se entiende que $B_{hj} = 0$ si $r_h + t_j < 0$. También denotamos $B'_{hj}(P,\eta)$ a la parte principal de $B_{hj}(P,\eta)$, esto es, con los términos de orden exactamente $r_h + t_j$.

Para aplicar los teoremas de regularidad, las condiciones de frontera deben "complementar" en cierto sentido al sistema de ecuaciones, acorde a un criterio algebraico que involucra a las partes principales $l'_{ij}(P,\eta)$ y $B'_{hj}(P,\eta)$, el cual detallaremos a continuación.

Sea P cualquier punto sobre $\Gamma \in \partial\Omega$, regular. Sea n el vector normal en Γ y $\tau \neq 0$ cualquier vector tangente a Γ en P. Por la condición suplementaria del sistema el polinomio

$$l(\tau + zn) = \det l'_{ij}(\tau + zn) \tag{5.24}$$

tiene exactamente m raíces con parte imaginaria positiva : z_k^+ con $k = 1, \ldots, m$. Defínase el polinomio

$$M^+(P,z,\tau,n) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{k=1}^{m}(z - z_k^+). \tag{5.25}$$

Sea $L^{jk}(P,\tau + zn)$ la matriz adjunta a $l'_{ij}(P,\tau + zn)$. Recordemos que la matriz adjunta de A es $(\det A)A^{-1}$.

Definición 5.5 (Condición complementaria) *Para todo $P \in \Gamma$ y cualquier vector real $\tau \neq 0$ tangente a Γ en P, los renglones de la matriz*

$$\sum_j B'_{hj}(P,\tau + zn)L^{jk}(P,\tau + zn), \tag{5.26}$$

como polinomios en z son linealmente independientes módulo $M^+(P, z, r, n)$, es decir,

$$\sum_h C_h \sum_j B'_{h_j} L^{js} \equiv 0 \ mod \ M^+ \tag{5.27}$$

sólo si las constantes C_h son todas iguales a cero. Aquí $k = 1, \ldots, m$, donde $2m$ es el grado de $l(\eta, P)$.

Probaremos que las condiciones de frontera del problema de nuestro problema complementan el sistema, de acuerdo a la definición anterior. En nuestro caso, como $m = 3$, se necesitan 3 condiciones en cada punto P de la porción regular de la frontera.

La condición de frontera $u|_{\Gamma_b} = 0$.

Tomemos Γ_b, una porción regular de $\partial\Omega$. Tenemos tres condiciones de frontera, una para cada u_j, $j \leq 3$, que son, a saber

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0, \quad \text{en } \Gamma_b.$$

Así mismo escogemos los índices $r_h = -2$, $\forall h \leq 3$, de manera que $r_h + t_j = 0$, $\forall h$ y si $j \leq 3$, lo cual coincide con el orden de diferenciación de la condición de frontera. Como $r_h + t_4 < 0$, entonces $B_{h4} = 0$. La matriz asociada a la condición de frontera, que coincide con la parte principal, es

$$B = B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.28}$$

Si hacemos los cálculos, la adjunta de la matriz $l'_{ij}(\eta)$ es

$$L(\eta) = |\eta|^2 \begin{pmatrix} \eta_2^2 + \eta_3^2 & -\eta_1\eta_2 & -\eta_1\eta_3 & |\eta|^2\eta_1 \\ -\eta_1\eta_2 & \eta_1^2 + \eta_3^2 & -\eta_2\eta_3 & |\eta|^2\eta_2 \\ -\eta_1\eta_3 & -\eta_2\eta_3 & \eta_1^2 + \eta_2^2 & |\eta|^2\eta_3 \\ -|\eta|^2\eta_1 & -|\eta|^2\eta_2 & -|\eta|^2\eta_3 & |\eta|^4 \end{pmatrix} \tag{5.29}$$

Por definición de la adjunta tenemos que $\sum_j l'_{ij} L^{jk} = \delta_{ik}(\det l'_{ij})$, es decir, $l'(\eta)L(\eta) = |\eta|^6 I$. Calculamos ahora la matriz $B'L$

$$(B'L)(\eta) = |\eta|^2 \begin{pmatrix} \eta_2^2 + \eta_3^2 & -\eta_1\eta_2 & -\eta_1\eta_3 & |\eta|^2\eta_1 \\ -\eta_1\eta_2 & \eta_1^2 + \eta_3^2 & -\eta_2\eta_3 & |\eta|^2\eta_2 \\ -\eta_1\eta_3 & -\eta_2\eta_3 & \eta_1^2 + \eta_2^2 & |\eta|^2\eta_3 \end{pmatrix} \tag{5.30}$$

Si tomamos $\alpha = \tau \neq 0$ tangente en Γ_b y $\beta = n$ el vector normal correspondiente y sustituimos en (5.21), como $n \cdot \tau = 0$ entonces

$$z^+ = i\frac{|\tau|}{|n|}, \tag{5.31}$$

y el polinomio M^+ es

$$M^+ = \left(z - i\frac{|\tau|}{|n|}\right)^3. \tag{5.32}$$

Definimos por lo tanto los polinomios

$$P_k(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{h=1}^{3} C_h \sum_{j=1}^{4} B'_{hj}(P, \tau + zn) L^{jk}(P, \tau + zn), \tag{5.33}$$

con $k \leq 4$. Notamos que $|\tau + zn|^2 = |\tau|^2 + z^2|n|^2$ ya que $n \cdot \tau = 0$. También observamos que en Γ_b, τ es de la forma $(\tau_1, \tau_2, 0)$ con $\tau_1^2 + \tau_2^2 \neq 0$, y que $n = (0, 0, n)$, con $n \neq 0$, es decir,

$$\tau + zn = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ nz \end{pmatrix}.$$

Queremos probar que si $P_k \equiv 0 \bmod M^+$ entonces las constantes $C_h \equiv 0$. Dado que las constantes son las mismas para todos los polinomios $P_k(z)$ (ya que resultan de multiplicar cada renglón h de $B'L$ por C_h), basta con analizar algunos de los polinomios. Fijémonos, por ejemplo, en

$$\begin{aligned} P_3(z) &= (|\tau|^2 + z^2|n|^2)(-nz(C_1\tau_1 + C_2\tau_2) + C_3|\tau|^2) \\ &= |n|^2 \left(z - i\frac{|\tau|}{|n|}\right)\left(z + i\frac{|\tau|}{|n|}\right)(-nz(C_1\tau_1 + C_2\tau_2) + C_3|\tau|^2), \end{aligned}$$

que resulta de considerar la tercera columna de $B'L$. Si $P_3 \equiv 0 \bmod M^+$, entonces $M^+ \big| P_3(z)$, y por ser ambos de grado 3, tenemos que existe $d \in \mathbb{C}$ tal que

$$P_3(z) = dM^+(z).$$

Pero el único cero de M^+ es $i\frac{|\tau|}{|n|}$, mientras que P_3 tiene como ceros a $\pm i\frac{|\tau|}{|n|}$. Esto implica que $d = 0$ y por lo tanto

$$C_3 = 0\,, \tag{5.34}$$
$$C_1\tau_1 + C_2\tau_2 = 0. \tag{5.35}$$

Ahora nos fijamos en el polinomio

$$\begin{aligned} P_1(z) &= (|\tau|^2 + z^2|n|^2)(\tau_2(C_1\tau_2 - C_2\tau_1) - C_3\tau_1 nz + C_1 n^2 z^2) \\ &= n^2\left(z - i\frac{|\tau|}{|n|}\right)\left(z + i\frac{|\tau|}{|n|}\right)(z^2C_1n^2 + \tau_2(C_1\tau_2 - C_2\tau_1))\,, \end{aligned}$$

ya que $C_3 = 0$. Si $P_3 \equiv 0 \bmod M^+$, entonces por ser P_1 de grado 4 y M^+ de grado 3, existe $Q_1(z) = b(z - z_0)$ de grado 1 tal que $P_1 = Q_1M^+$. Al observar que $-i\frac{|\tau|}{|n|}$ es raíz de P_1, tenemos que $z_0 = -i\frac{|\tau|}{|n|}$ y por lo tanto

$$n^2(z^2C_1n^2 + \tau_2(C_1\tau_2 - C_2\tau_1)) = b\left(z - i\frac{|\tau|}{|n|}\right)^2 .$$

Igualando los coeficientes de grado 2 y 1 se obtiene que

$$n^4C_1 - b = 0\,, \tag{5.36}$$
$$2i\frac{|\tau|}{|n|}b = 0\,, \tag{5.37}$$

lo cual implica que

$$C_1 = 0. \tag{5.38}$$

Finalmente tomamos el polinomio

$$\begin{aligned} P_2(z) &= (|\tau|^2 + z^2|n|^2)(C_2n^2z^2 - C_3\tau_2nz + \tau_1(C_2\tau_1 - C_1\tau_2)) \\ &= n^2\left(z - i\frac{|\tau|}{|n|}\right)\left(z + i\frac{|\tau|}{|n|}\right)(C_2n^2z^2 + \tau_1^2C_2)\,, \end{aligned}$$

ya que $C_3 = C_1 = 0$. Nuevamente al suponer que $P_2 \equiv 0 \bmod M^+$, existe $Q_2 = c(z - z_1)$ tal que $P_2 = Q_2M^+$, de donde se deduce que

$$n^2(C_2n^2z^2 + C_2\tau_1^2) = c\left(z - i\frac{|\tau|}{|n|}\right)^2 ,$$

y al igualar los coeficientes de orden 2 y 1, llegamos que

$$n^4 C_2 - c = 0\ , \tag{5.39}$$

$$2i\frac{|\tau|}{|n|}c = 0. \tag{5.40}$$

De aquí se obtiene que $C_2 = 0$. De esta manera hemos probado que $P_k(z) \equiv 0$ mod M^+ implica

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0. \tag{5.41}$$

La condición de frontera $u|_{\Gamma_b} = 0$ es complementaria.

Las condiciones de frontera en Γ

En este caso tenemos en Γ porción regular de $\partial\Omega$, tres condiciones de frontera, a saber,

$$\tau^{(k)} \cdot T(u)n|_\Gamma = \underbrace{\tau^{(k)} \cdot (-pn)}_{=0}|_\Gamma + \tau^{(k)} \cdot \sigma(u)n|_\Gamma = \gamma_k, \quad k = 1, 2, \tag{5.42}$$

$$u \cdot n|_\Gamma = 0, \tag{5.43}$$

donde $\sigma_{ij} = 2e_{ij}(u) = (u_{i_{x_j}} + u_{j_{x_i}})$ y

$$\begin{aligned}
\tau^{(k)} \cdot \sigma(u)n &= \sum_{ij}^{3} \tau_i^{(k)} n_j e_{ij}(u) \\
&= \sum_{ij}^{3} \tau_i^{(k)} n_j (u_{i_{x_j}} + u_{j_{x_i}}) \\
&= \begin{pmatrix} \sum_j (n_j \tau_1^{(k)} + n_1 \tau_j^{(k)})\partial_{x_j} \\ \sum_j (n_j \tau_2^{(k)} + n_2 \tau_j^{(k)})\partial_{x_j} \\ \sum_j (n_j \tau_3^{(k)} + n_3 \tau_j^{(k)})\partial_{x_j} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \gamma_k.
\end{aligned}$$

Si definimos la matriz $K_{ij}{}^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} n_i \tau_j^{(k)} + n_j \tau_i^{(k)}$ para toda $i, j \leq 3$, $K_{4j}^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} 0$, esta condición de frontera se puede escribir

$$\left(K \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \\ \partial_{x_3} \end{pmatrix} \right)^{\mathrm{T}} = (K\nabla)^{\mathrm{T}} u = \gamma_k. \tag{5.44}$$

La matriz de las condiciones de frontera será, por lo tanto,

$$Bu = \begin{pmatrix} \sum_j K_{1j}^{(1)}\partial_{x_j} & \sum_j K_{2j}^{(1)}\partial_{x_j} & \sum_j K_{3j}^{(1)}\partial_{x_j} & 0 \\ \sum_j K_{1j}^{(2)}\partial_{x_j} & \sum_j K_{2j}^{(2)}\partial_{x_j} & \sum_j K_{3j}^{(2)}\partial_{x_j} & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aquí tenemos $t_j = 2$, si $j \leq 3$, $t_4 = 1$, y $r_h + t_j = 1$, para $h \leq 2, j \leq 3$, $r_h + t_4 = 0$ para $h \leq 2$, y $r_3 + t_j = 0$, si $j \leq 4$; por lo tanto, $r_h = -1$, si $h \leq 2$, y $r_3 = -1$. Esto implica que $B = B'$.

Nótese que

$$\begin{aligned} B_{hj}(\eta) &= \sum_l K_{jl}{}^{(h)} \eta_l = \sum_l (n_j \tau_l^{(h)} + n_l \tau_j^{(h)}) \eta_l \\ &= \tau_j^{(h)} n \cdot \eta + n_j \tau^{(h)} \cdot \eta, \end{aligned}$$

para $h = 1, 2$, $i \leq 3$. También podemos escribir la matriz $L(\eta)$, dada en (5.29), como

$$\begin{aligned} L_{jk} &= |\eta|^2 (\delta_{jk}|\eta|^2 - \eta_j \eta_k), \quad \text{si } j, k \leq 3, \\ L_{j4} &= |\eta|^4 \eta_j, \quad \text{si } j \leq 3, \\ L_{4k} &= -|\eta|^4 \eta_k, \quad \text{si } k \leq 3 \\ L_{44} &= |\eta|^6. \end{aligned}$$

Por lo tanto la matriz $BL(\eta)$ (que en nuestro caso es de 3×4) es de la forma

$$\begin{aligned} (BL)_{hk} &= |\eta|^2 \left(\sum_j (\tau_j^{(h)} n \cdot \eta + n_j \tau^{(h)} \cdot \eta)(\delta_{jk}|\eta|^2 - \eta_j \eta_k) \right) \\ &= |\eta|^4 \left(\tau_k^{(h)} n \cdot \eta + n_k \tau^{(h)} \cdot \eta \right) - 2\eta_k (n \cdot \eta)(\tau^{(h)} \cdot \eta)|\eta|^2, \quad \text{si } h \leq 2, k \leq 3, \\ (BL)_{3k} &= |\eta|^2 \sum_j n_j (\delta_{jk}|\eta|^2 - \eta_j \eta_k) = |\eta|^4 n_k - \eta_k n \cdot \eta |\eta|^2, \quad \text{si } k \leq 3 \\ (BL)_{h4} &= |\eta|^4 \sum_j (\tau_j^{(h)} n \cdot \eta + n_j \tau^{(h)} \cdot \eta) \eta_j = 2|\eta|^4 (\tau^{(h)} \cdot \eta)(n \cdot \eta), \quad \text{si } h \leq 2 \\ (BL)_{34} &= |\eta|^4 n \cdot \eta. \end{aligned}$$

Sea C el vector $(C_1, C_2, C_3)^T$. Tenemos que analizar los polinomios

$$P_k(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{h=1}^{3} C_h(BL)_{hk}(P, \tau + z\,\tilde{n}),$$

con $k = 1, \ldots, 4$, y donde $\tilde{n}$ y $\tau \neq 0$ son vectores normal y tangencial a Γ, respectivamente. Para $k = 4$ tendremos

$$P_4(\eta) = |\eta|^4 n \cdot \eta(2C_1\tau^{(1)} \cdot \eta + 2C_2\tau^{(2)} \cdot \eta + C_3).$$

Por lo que, al sustituir $\eta = \tau + z\,\tilde{n}$, con $|\eta|^2 = |\tau|^2 + z^2|\,\tilde{n}\,|^2$, $n \cdot \eta = z|\,\tilde{n}\,|$, se obtiene

$$P_4(z) = |\,\tilde{n}\,|^5 \left(z - i\frac{|\tau|}{|\,\tilde{n}\,|}\right)^2 \left(z + i\frac{|\tau|}{|\,\tilde{n}\,|}\right)^2 z(2C_1\tau^{(1)} \cdot \tau + 2C_2\tau^{(2)} \cdot \tau + C_3).$$

Si suponemos que $P_4 \equiv 0 \bmod M^+$, entonces tenemos que existen $d, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tales que

$$P_4(z) = d(z - z_1)(z - z_2)M^+(z).$$

Pero el único cero de M^+ es $i\frac{|\tau|}{|\tilde{n}|}$, mientras que P_4 tiene como ceros a $\pm i\frac{|\tau|}{|\tilde{n}|}$ y a 0. Esto implica que $d = 0$ y por lo tanto que

$$2C_1\tau^{(1)} \cdot \tau + 2C_2\tau^{(2)} \cdot \tau + C_3 = 0.$$

Para $k \leq 3$ tenemos

$$P_k(\eta) = |\eta|^4 n \cdot \eta(C_1\tau_k^{(1)} + C_2\tau_k^{(2)}) + |\eta|^4 n_k((C_1\tau^{(1)} + C_2\tau^{(2)}) \cdot \eta + C_3).$$

Por lo tanto

$$P_k(z) = |\,\tilde{n}\,|^3 \left(z - i\frac{|\tau|}{|\,\tilde{n}\,|}\right)^2 \left(z + i\frac{|\tau|}{|\,\tilde{n}\,|}\right)^2 \left[z|\,\tilde{n}\,|^2(C_1\tau_k^{(1)} + C_2\tau_k^{(2)}) - n_k(C_1\tau^{(1)} + C_2\tau^{(2)}) \cdot \tau\right].$$

Si suponemos que $P_k \equiv 0 \bmod M^+$, entonces, como antes,

$$P_k(z) = d_k(z - z_1)(z - z_2)M^+(z).$$

De nuevo, considerando los ceros de ambos polimonios, esto es posible sólo si $z_1 = z_2 = -i\frac{|\tau|}{|\tilde{n}|}$ y

$$z|\,\tilde{n}\,|(C_1\tau_k^{(1)} + C_2\tau_k^{(2)}) - n_k(C_1\tau^{(1)} + C_2\tau^{(2)}) \cdot \tau = d_k\left(z - i\frac{|\tau|}{|\,\tilde{n}\,|}\right),$$

es decir, en notación vectorial con $D^T = (d_1, d_2, d_3)$:

$$|\tilde{n}|(C_1\tau^{(1)} + C_2\tau^{(2)}) = D$$

$$n(C_1\tau^{(1)} + C_2\tau^{(2)}) \cdot \tau = i\frac{|\tau|}{|\tilde{n}|}D.$$

El primer vector es tangencial, mientras que el segundo es normal, por lo tanto $D = 0$, y $C_1\tau^{(1)}+C_2\tau^{(2)} = 0$. Como $\tau^{(1)}$ y $\tau^{(2)}$ son linealmente independientes tenemos $C_1 = C_2 = 0$ y por ende, $C_3 = 0$.

Hemos probado que las condiciones de frontera sobre Γ son complementarias.

5.2.3 Estimaciones L^p y de Schauder

Hemos probado que las condiciones de frontera de nuestro problema de Stokes complementan, separadamente, al sistema elíptico en el sentido de la definición 5.5. Esta condición de complementariedad se cumple en porciones regulares de la frontera $\partial\Omega$, por lo que podemos ahora aplicar el teorema 10.5, página 78 de [Agm/Dou/Nir].

Sea $l_1 = \max\{0, r_h + 1\}$ (véase [Agm/Dou/Nir, pág. 76]) para una porción Γ de $\partial\Omega$. Por la elección de $r_h \leq -1$ en cada porción de la frontera, vemos que $l_1 = 0$. Tomemos un entero fijo $m \geq l_1 = 0$, y sea $t' = \max\{t_j\}$, es decir, el orden máximo del operador, que en este caso es $t' = 2$. Supóngase además que Γ es de clase $C^{m+t'}$ en el sentido siguiente : Γ se puede cubrir por abiertos $\{U_j\}$ tales que $U_j \cap \bar{\Omega}$ es la imagen, bajo un mapeo 1-1 que denotamos ϕ_j^{-1}, de la cerradura de un hemisferio $\{y \in B : y_{n+1} > 0\}$ con $B = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : |y| < R_j\}$ y con radios $R_j < 1$. Cada ϕ_j^{-1} y su inversa ϕ_j tiene derivadas continuas de orden $m + t'$, acotadas por una constante K. El lector se convencerá de que ésta es la definición de un dominio de clase $C^{m+t'}$ (véase [Adams, pág. 63]), si $\Gamma = \partial\Omega$.

Como en este caso $t' = 2$, si suponemos que Γ es de clase C^{m+2} podemos aplicar el teorema 10.5, pág 78 de [Agm/Dou/Nir] que enunciamos a continuación :

Teorema 5.6 *Sea Γ de clase $C^{m+t'}$ y $1 < p < \infty$. Sea $\Omega_1 \subset \Omega$ tal que $\bar{\Omega}_1 \cap \partial\Omega \subset \Gamma^{int}$. Entonces existe una constante $c_0 > 0$ tal que si u es solución del sistema elíptico (5.15) en Ω con condiciones de frontera (5.22) en Γ, y $\|u_j\|_{l_1+t_j,p} < \infty$, $\|F_i\|_{m-s_i,p} < \infty$, $\|\phi_h\|_{m-r_h-1/p} < \infty$ para toda j, i, h entonces $\|u_j\|_{m+t_j,p} < \infty$ y*

$$\|u_j\|_{H^{m+t_j,p}(\Omega_1)} < c_0\left(\sum_i \|F_i\|_{H^{m-s_i,p}(\Omega)} + \sum_h \|\phi_h\|_{H^{m-r_h-1/p}(\Gamma)} + \sum_j \|u_j\|_{L^p(\Omega)}\right),$$

donde c_0 depende de $\Omega, \Omega_1, m, n, K$ y del módulo de continuidad de l_{ij}.

De esta forma tomemos m entero positivo y $1 < q < \infty$. Si $||u_j||_{m+1,q} < \infty$ para $j \leq 3$ y $||p||_{m,q} < \infty$ entonces se cumple que $||u||_{l_i+l_j=2,q} < \infty$ y $||p||_{l_i+l_k=1,q} < \infty$. Aplicando el teorema anterior podemos enunciar el siguiente resultado :

Teorema 5.7 *Sea m un entero no negativo, $1 < q < \infty$ y Ω un dominio con $\Gamma \subset \partial\Omega$ de clase C^{m+2}. Si $u \in (H^{2,q}(\Omega))^3 \cap J(\Omega)$, $p \in H^{1,q}(\Omega)$ es una solución al problema de Stokes (5.11)-(5.14) en donde $f \in (H^{m,q}(\Omega))^3$ y $\gamma_k \in H^{m+1-1/q,q}(\Gamma)$, entonces*

$$u \in (H^{m+2,q}(\Omega_1))^3,\ p \in H^{m+1,q}(\Omega_1)$$

y existe una constante $c(\Omega_1, q, m) > 0$ tal que

$$||u||_{H^{m+2,q}(\Omega_1)} + ||p||_{H^{m+1,q}(\Omega_1)} \leq c\left(||f||_{m,q} + \sum_k ||\gamma_k||_{m+1-1/q,q} + ||u||_{0,q} + ||p||_{0,q}\right),$$

donde $\Omega_1 \subset \Omega$ es tal que $\bar{\Omega}_1 \cap \partial\Omega \subset \Gamma_b^{int} \cup \Gamma^{int}$.

Al tomar $q = 2$ tenemos el siguiente

Corolario 5.8 *Sea m un entero no negativo y Γ de clase C^{m+2}. Si $u \in (H^2(\Omega))^3 \cap J(\Omega)$, $p \in H^1(\Omega)$ es solución del problema de Stokes (5.11)-(5.14) en donde $f \in (H^m(\Omega))^3$ y $\gamma_k \in H^{m+1-1/2}(\Gamma_b)$ entonces*

$$u \in (H^{m+2}(\Omega_1))^3,\ p \in H^{m+1}(\Omega_1)$$

y existe una constante $c(\Omega_1, m) > 0$ tal que

$$||u||_{H^{m+2}(\Omega_1)} + ||p||_{H^{m+1}(\Omega_1)} \leq c\left(||f||_m + \sum_k ||\gamma_k||_{m+1-1/2} + ||u||_0 + ||p||_0\right),$$

donde $\Omega_1 \subset \Omega$ es tal que $\bar{\Omega}_1 \cap \partial\Omega \subset \Gamma_b^{int} \cup \Gamma^{int}$.

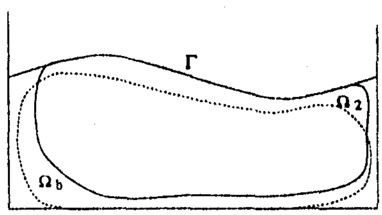

Figura 5.1 : Dominio Ω_b y Ω_2.

Prueba :

Notemos primero que el orden de las condiciones de frontera es diferente en Γ_b y Γ. Tomemos por lo tanto Ω_b y Ω_2 contenidos en Ω y tales que $\bar{\Omega}_b \cap \partial\Omega \subset \Gamma_b^{\text{int}}$, $\bar{\Omega}_2 \cap \partial\Omega \subset \Gamma$ y $\Omega_b \cup \Omega_2 = \Omega_1$. Véase figura.

Por el teorema 5.6 tenemos

$$||u||_{H^{m+2,q}(\Omega_b)} + ||p||_{H^{m+1,q}(\Omega_b)} \leq c_b\left(||f||_{m,q} + ||u||_{0,q} + ||p||_{0,q}\right),$$

$$||u||_{H^{m+2,q}(\Omega_2)} + ||p||_{H^{m+1,q}(\Omega_2)} \leq c_2\left(||f||_{m,q} + \sum_k ||\gamma_k||_{m+1-1/q,q} + ||u||_{0,q} + ||p||_{0,q}\right).$$

Como $||u||_{H^{m+2,q}(\Omega_1)} \leq ||u||_{H^{m+2,q}(\Omega_b)} + ||u||_{H^{m+2,q}(\Omega_2)}$, tenemos el resultado.

$\square$

Del mismo modo podemos aplicar las estimaciones de Schauder, para concluir un resultado análogo de regularidad en dichos espacios (consúltese [Agm/Dou/Nir, cap. 3, secc. 7-9]).

Sea Γ una porción de $\partial\Omega$ donde Ω es un dominio general en $\mathbb{R}^{n+1}$, incluso no acotado (véase [Agm/Dou/Nir, pág. 72]). Sea $0 < \alpha < 1$ fijo y m un entero fijo tal que $m \geq l_0 = \max\{o, r_h\}$. Se asume que existe un número positivo d tal que cada punto $x \in \Omega_1 \subset \Omega$ a una distancia d de $\partial\Omega$ tiene una vecindad U_x tal que : 1. $\bar{U}_x \cap \partial\Omega \subset \Gamma$, 2. U_x contiene una esfera de radio $d/2$ con centro en x, y 3. el conjunto $\bar{U}_x \cap \bar{\Omega}$ es la imagen bajo un homomeorfismo T_p de la cerradura del hemisferio $\{y \in B : y_{n+1} > 0\}$ con $B = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : |y| < R_p\}$, $R_p \leq 1$; T_p y su inversa son de clase $C^{m+\lambda,\alpha}$, donde $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \max\{-s_i, -r_h, t_j\}$. Es decir, se asume que Γ es de clase $C^{m+\lambda,\alpha}$ (véase [Agm/Dou/Nir, págs. 72-73]), y que $\bar{\Omega}_1 \cap \partial\Omega \subset \Gamma^{\text{int}}$. Supondremos también que $||F_i||_{C^{m-s_i,\alpha}}$ y $||\phi_h||_{C^{m-r_h,\alpha}(\Gamma)}$ son finitas.

Bajo estas hipótesis enunciaremos a continuación el teorema 9.3 ([Agm/Dou/Nir, pág. 74]) :

Teorema 5.9 *Sea u_j solución a (5.11) en Ω y a (5.12) - (5.14) en Γ. Si $u_j \in C^{l_0+t_j,\alpha}$ en $\Omega \cup \Gamma$, podemos concluir que $u_j \in C^{m+t_j,\alpha}(\Omega_1)$ y que existe una constante c_1 tal que*

$$||u_j||_{C^{m+t_j,\alpha}(\Omega_1)} \leq c_1\left(\sum_i ||F_i||_{C^{m-s_i,\alpha}} + \sum_h ||\phi_h||_{C^{m-r_h,\alpha}(\Gamma)} + \sum_k ||u_k||_{C^0}\right),$$

para toda j, y donde c_1 depende de $\Omega_1, n, \alpha, d, m$.

En nuestro caso $l_0 = \max\{o, r_h\} = 0$ por la elección de las r_h. También tenemos que $\lambda = \max\{-s_i, -r_h, t_j\} = 2$. Sea escogemos m un entero positivo; en particular

$m > l_0$. Si Γ es de clase $C^{m+2,\alpha}$ podemos aplicar el teorema anterior. Notemos que Γ_b es suficientemente regular (es de clase C^∞). Aquí se usa también el argumento anterior sobre $\Omega_1 = \Omega_b \cup \Omega_2$, como en la prueba del teorema 5.7.

Teorema 5.10 *Sea Γ de clase $C^{m+2,\alpha}$, con m entero no negativo y $0 < \alpha < 1$. Sean $u \in (C^{2,\alpha}(\Omega))^3$, $p \in C^{1,\alpha}(\Omega)$, solución al problema de Stokes (5.11) en Ω con condiciones de frontera (5.12)-(5.14). Si $f \in (C^{m,\alpha}(\Omega))^3$ y $\gamma^{(k)} \in C^{m+1,\alpha}(\Gamma_b)$ entonces*

$$u \in (C^{m+2,\alpha}(\Omega_l))^3, \ p \in C^{m+1,\alpha}(\Omega_1),$$

y existe una constante $c_l(\Omega_1, \alpha, m)$ tal que

$$||u||_{C^{m+2,\alpha}(\Omega_1)} + ||p||_{C^{m+1,\alpha}(\Omega_1)} \leq c_1 \left(||f||_{C^{m,\alpha}} + \sum_k ||\gamma_k||_{C^{m+1,\alpha}(\Gamma_b)} + ||u||_{C^0} + ||p||_{C^0} \right),$$

donde $\Omega_1 \subset \Omega$ es tal que $\bar{\Omega}_1 \cap \partial\Omega \subset \Gamma_b^{\text{int}} \cup \Gamma^{\text{int}}$.

Los teoremas 5.7, 5.10 garantizan la regularidad de la solución fuerte al problema de Stokes si los datos son suficientemente regulares, y dan una estimación para las normas en los espacios correspondientes.

Sin embargo todavía no se pueden extender a Ω, debido al hecho que $\partial\Omega$ no es de clase C^{m+2} (por las partes verticales) y las condiciones de frontera en las paredes no son de la forma (5.22) ni del mismo orden que (5.12)-(5.14).

No obstante la observación anterior, a continuación se demostrará, haciendo una correción del dominio, que dichas estimaciones son aplicables a Ω, con lo que los teoremas de regularidad para la solución fuerte al problema de Stokes quedarán totalmente probados.

5.2.4 Regularidad de la solución en Ω

Sabemos (por los teoremas 4.20 y 5.2) que existe una solución $(u, p) \in (H^2(\Omega))^3 \cap J \times H^1(\Omega)$ al problema de Stokes. Por ser solución fuerte, las condiciones de periodicidad para p y ∂u se satisfacen (véase teorema 4.17).

Por periodicidad, tómese una copia de Ω adyacente a ella que denotamos Ω_j (véase figura 5.2).

Si $u \in H^2(\Omega)$ y es periódica se puede extender a Ω_j por periodicidad. Llamamos a esta extensión u_e. Nótese que u, u_x son periódicas en Γ_x y Γ_y. Integrando u_{exy} se obtiene

$$\int_{\Omega \cup \Omega_j} \phi u_{exy} = \int_\Omega (\cdot) + \int_{\Omega_j} (\cdot) = \int_{\partial\Omega} \begin{pmatrix} u_{ey}\phi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot n \, dS + \int_{\partial\Omega_j} \begin{pmatrix} u_{ey}\phi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot n \, dS$$

$$-\int_{\Omega}\phi_x u_{e_y} - \int_{\Omega_j}\phi_x u_{e_y}$$
$$= \int_{\partial\Omega\cap\partial\Omega_j}\begin{pmatrix}\phi\left(u_{e_y}|_{\Omega} - u_{e_y}|_{\Omega_j}\right)\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\cdot n\, dS - \int_{\Omega\cup\Omega_j}\phi_x u_{e_y}.$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega\cup\Omega_j)$.

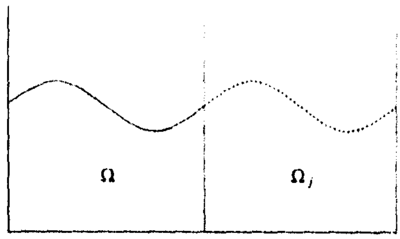

Figura 5.2 : Copia Ω_j adyacente a Ω en una cara lateral.

Como u_y es periódica entonces $u_e \stackrel{\text{def}}{=} u(x-x_0,y,z)$ en Ω_j. Por lo tanto $u_y|_{x=x_0} = u_y|_{x=0}$ implica que $u_{ey}|_{\Omega} = u_{ey}|_{\Omega_j}$ en $\partial\Omega\cap\partial\Omega_j$. De esta forma

$$\int_{\Omega\cup\Omega_j}\phi u_{exy} = -\int_{\Omega\cup\Omega_j}\phi_x u_{ey},$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega\cup\Omega_j)$. Es decir, u_{exy} es la derivada distribucional de u_{ey} en $\Omega\cup\Omega_j$. Además

$$\int_{\Omega\cup\Omega_j}|\phi u_{exy}|^2 = \int_{\Omega}|u_{xy}|^2 + \int_{\Omega_j}|u_{exy}|^2 < \infty,$$

por lo que $u_e \in H^2(\Omega\cup\Omega_j)$.

Por lo tanto, tomemos 8 copias de Ω : $\bigcup_{j=1}^8 \Omega_j$ adyacentes a Ω en las caras laterales y extendemos u y p a estos dominios por periodicidad.

Sea Ω_e un dominio suficientemente suave (por ejemplo, de clase C^{m+2}, es decir, tanto como Γ) tal que $\Omega_e \subset \Omega\cup\bigcup_{j=1}^8\Omega_j$, $\Gamma\subset\partial\Omega_e$ y $\Gamma_b\subset\partial\Omega_e$. Llamemos $\Gamma_e \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma\cup\left(\partial\Omega_e\cap\bigcup_{j=1}^8\Gamma_j\right)$, donde Γ_j es la copia de Γ en cada Ω_j, como se muestra en la figura 5.3.

Sea $\Gamma_{b_e} \stackrel{\text{def}}{=} \partial\Omega_e \cap \{z = 0\}$, porción regular de $\partial\Omega_e$. Las partes curvas se denotan $\Sigma_e \stackrel{\text{def}}{=} \partial\Omega_e - (\Gamma_e \cup \Gamma_{b_e})$.

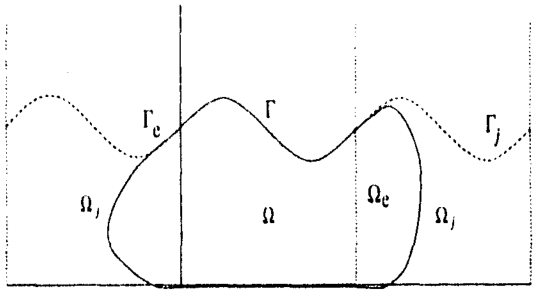

Figura 5.3 : Dominio Ω_e suave.

Si g_e es una función extendida de g a Ω_e por periodicidad, es claro que

$$\int_{\Omega_e} |g_e| = \int_{\Omega} |g| + \int_{(\cup\Omega_j)\cap\Omega_e} |g_e| \leq 9 \int_{\Omega} |g|,$$

y por lo tanto,

$$|g_e|_{C^{0,\alpha}(\Omega_e)} \leq 9|g|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}.$$

Por construcción $(u_e, p_e) \in (H^2(\Omega \cup \cup_{j=1}^{8} \Omega_j))^3 \times H^1(\Omega \cup \cup_{j=1}^{8} \Omega_j)$ es solución al problema

$$\left.\begin{array}{r} -\Delta u_e + \operatorname{grad} p_e = f_e \\ \operatorname{div} u_e = 0 \end{array}\right\} \quad \text{en } \Omega \cup \cup_{j=1}^{8} \Omega_j,$$

$$u_e|_{z=0} = 0,$$

$$u_e \cdot n|_{\Gamma_e \cup \cup_{j=1}^{8} \Gamma_j} = 0,$$

$$\tau^{(k)} \cdot T(u_e) n|_{\Gamma_e \cup \cup_{j=1}^{8} \Gamma_j} = \gamma_e^{(k)},$$

El sistema de ecuaciones satisface la condición suplementaria y de elipticidad, evidentemente. También las condiciones de frontera son complementarias.

Por lo tanto podemos aplicar el teorema 5.6 a la solución (u_e, p_e) :

Si $f_e \in (H^{m,q}(\Omega \cup \cup_{j=1}^{8} \Omega_j))^3$, $\gamma_e^{(k)} \in H^{m+1-1/q,q}(\Gamma_e \cup \cup_{j=1}^{8} \Gamma_j)$ y $u_e \in (H^{m+1,q}(\Omega \cup \cup_{j=1}^{8} \Omega_j))^3$, $p_e \in H^{m,q}(\Omega \cup \cup_{j=1}^{8} \Omega_j)$, entonces

$$u_e \in (H^{m+2,q}(\Omega \cup \cup_{j=1}^{8} \Omega_j))^3, \ p_e \in H^{m+1,q}(\Omega \cup \cup_{j=1}^{8} \Omega_j),$$

y además

$$\begin{aligned} ||u_e||_{m+2,q(\Omega_e)} + ||p_e||_{m+1,q(\Omega_e)} \ \le \ & c\Big(||f_e||_{m,q(\Omega_e)} + \sum_k ||\gamma_k||_{m+1-1/q,q(\Gamma_e)} + \\ & + ||u||_{L^q(\Omega_e)} + ||p||_{L^q(\Omega_e)} \Big), \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} ||u||_{m+2,q} + ||p||_{m+1,q} \ & \le \ ||u_e||_{m+2,q(\Omega_e)} + ||p||_{m+1,q(\Omega_e)} \\ & \le \ 9(\tilde{c}) \left(||f||_{m,q} + \sum_k ||\gamma_k||_{m+1-1/q,q} + ||u||_{0,q} + ||p||_{0,q} \right), \end{aligned}$$

ya que

$$||u_e||_{m+1,q(\Sigma_e)} \le ||u_e||_{m+1,q(\Omega_e)} \le 9||u||_{m+1},$$

$$||p_e||_{L^q(\Omega_e)} \le 9||p||_{L^q} \le 9||p||_{m,q},$$

$$||u_e||_{L^q(\Omega_e)} \le 9||u||_{L^q} \le 9||u||_{m+1,q},$$

y

$$||\gamma^{(k)}||_{m+1-1/q(\Gamma_e)} \le 9||\gamma||_{m+1-1/q(\Gamma)}.$$

Además se tiene que $u \in (H^{m+2,q}(\Omega))^3$, $p \in H^{m+1,q}(\Omega)$.

El siguiente teorema será de utilidad.

Teorema 5.11 *Para el problema con condiciones periódicas, si $\partial^\beta \xi$ es periódica para $|\beta| \le m+2$, entonces los teoremas 5.6 y 5.9 valen con $\Omega = \Omega_1$.*

Usaremos la siguiente versión de estos resultados

Teorema 5.12 *Sea Γ dado por una función ξ de clase $C^{m+2,\alpha}(\Gamma_b)$ y con $\partial^\beta \xi$ periódica para $|\beta| \le m+2$, $m \ge 0$, $\alpha \ge 0$.*

1) Si $f \in H^{m,q}(\Omega)$, $\gamma_k \in H^{m+1-1/q,q}(\Gamma)$, $2 \leq q < \infty$, entonces el problema de Stokes (5.11)-(5.14) tiene una única solución $u \in (H^{m+2,q}(\Omega))^3, p \in H^{m+1,q}(\Omega)$, (p única salvo constantes), tal que

$$||u||_{m+2,q} \leq c(\xi, m, q)\left(||f||_{m,q} + \sum_k ||\gamma_k||_{m+1-1/q,q}\right).$$

2) Si $f \in C^{m,\alpha}(\Omega)$, $\gamma_k \in C^{m+1,\alpha}(\Gamma)$, $\alpha > 0$, entonces $u \in (C^{m+2,\alpha}(\Omega))^3$, $p \in C^{m+1,\alpha}(\Omega)$ y

$$||u||_{C^{m+2,\alpha}} \leq \tilde{c}(\xi, m, \alpha)\left(||f||_{C^{m,\alpha}} + \sum_k ||\gamma_k||_{C^{m+1,\alpha}}\right).$$

Las constantes c y $\tilde{c}$ pueden ser tomadas uniformes en ξ.

Prueba :

Bajos las condiciones del teorema, hemos probado que u no es solamente una solución única débil del problema de Stokes, sino que además u pertenece a $(H^2(\Omega))^3$ y es solución fuerte del problema, con

$$||u||_2 + ||\nabla p||_0 \leq c(||f||_0 + ||\gamma_k||_{1/2}).$$

En la aplicación del teorema 5.11 podemos tomar $p+$ cualquier constante p_0. Tomemos entonces p_0 tal que $\int_\Omega p + p_0 = 0$. Por la desigualdad $||v||^2 \leq c(||\nabla v||^2 + (\int_\Omega v)^2)$, tenemos que

$$||p + p_0|| \leq c||\nabla(p + p_0)|| \leq c||\nabla p|| \leq \tilde{c}(||f|| + ||\gamma_k||_{1/2}).$$

Esto da el resultado para $q = 2$.

Para probar el teorema, es por lo tanto suficiente demostrar que esa única solución $(u, \nabla p)$ está en $(H^{2,q}(\Omega))^3 \times L^q(\Omega)$ o en $(C^{2,\alpha}(\Omega))^3 \times C^{0,\alpha}(\Omega)$: en efecto, si éste es el caso, tendremos las estimaciones de los teoremas 5.7 y 5.10. Por el teorema de encaje de Sobolev (véase [Adams, teo. 5.4]), tenemos que $H^2(\Omega) \subset C^0(\Omega)$, con $||u||_{C^0} \leq c||u||_2$. Como

$$||u||_{L^q} \leq c||u||_{C^0} \leq \tilde{c}||u||_2,$$

podemos usar la desigualdad anterior para acotar por $c(||f||_0 + ||\gamma||_{1/2})$. Tomando la constante en p como se indica, tenemos $||p + p_0||_{L^q} \leq c(||f||_0 + ||\gamma||_{1/2})$. Si $2 \leq q \leq 6$ entonces $H^2(\Omega) \subset H^{1,q}(\Omega)$ (véase [Adams]), y

$$||u||_{1,q} \leq c||u||_2.$$

Si $q > 6$ entonces

$$||p||_{L^q} \leq c||p||_{C^0} \leq \tilde{c}||p||_{1,6} \leq c(||f||_0 + ||\gamma||_{1/2}).$$

Usando el resultado para $q = 6$:

$$||u||_{2,6} \leq C(||f||_0 + ||\gamma||_{1/2}),$$

tendremos el resultado para toda q y para C^0.

Es importante hacer notar que todas las constantes usadas en las estimaciones, así como las dadas por Agmon, Douglis y Nirenberg, dependen solamente de la diferenciabilidad de Γ.

Una manera directa (y que nos será de utilidad más adelante) de ver esto es regresar el problema a Ω_0. Sea $u(x)$ la solución al problema de Stokes en Ω. Para $\bar{x} \in \Omega_0$ definimos $u(\bar{x}) = u(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}(1 + \xi))$. Tanto $\bar{u}$ como $\bar{p}$ son tan periódicas como u, p y ξ. Es inmediato ver que :

$$\nu \Delta_{\bar{x}} \bar{u} + \nabla_{\bar{x}} \bar{p} = \bar{f} + \bar{f}_1 \tag{5.45}$$

$$\operatorname{div}_{\bar{x}} \bar{u} = \bar{g} \tag{5.46}$$

$$\bar{u}\,|_{\bar{z}=0} = 0 \tag{5.47}$$

$$\underset{3}{\bar{u}}\,|_{\bar{z}=1} = 0 \tag{5.48}$$

$$\sigma_{13}(\bar{u}) = \bar{\gamma}_1 + \bar{g}_1 \tag{5.49}$$

$$\sigma_{23}(\bar{u}) = \bar{\gamma}_2 + \bar{g}_2 \tag{5.50}$$

son las ecuaciones que $\bar{u}$ satisface en Ω_0, donde $\bar{f}_1$ depende de ξ, u y de sus derivadas hasta orden 2, de p_x, y g, g_1, g_2 dependen de ξ, u y sus derivadas hasta orden 1. También por la regla de la cadena

$$||\,\bar{u}\,||_m \leq c||u||_m,$$

donde c depende de $||\xi||_{C^m}$. Si $\xi \in C^{m+2}$, $u \in (H^{m+2}(\Omega))^3$, $p \in H^{m+1}(\Omega)$, entonces $\bar{f}_1$ está en $H^m(\Omega_0)$, $\bar{g} \in H^{m+1}(\Omega_0)$, $\bar{g}_1, \bar{g}_2 \in H^{m+1/2}(\{\bar{z} = 1\})$ Además

$$||\bar{f}_1||_m \leq c(\xi)(||u||_{m+2} + ||p||_{m+1}),$$

$$||\bar{g}||_{m+1} \leq c(\xi)||u||_{m+1},$$

$$||\bar{g}_i||_{m+1/2} \leq c(\xi)||u||_{m+2},$$

con $c(\xi) = O(|\xi|_{C^{m+2}})$. Aplicando el resultado para Ω_0, tenemos que

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}\|_{m+2} + \|\tilde{p}\|_{m+1} &\leq c(\|\tilde{f}\|_m + \|\tilde{\gamma}_k\|_{m+1/2} + \|\tilde{f}_1\|_m + \|\tilde{g}\|_{m+1} + \|g_k\|_{m+1/2}) \\ &\leq \tilde{c}(\|f\|_m + \|\gamma_k\|_{m+1/2}) + c(\xi)(\|u\|_{m+2} + \|p\|_{m+1}). \end{aligned}$$

Por lo tanto si $|\xi|_{C^{m+2}} \leq \varepsilon$, de tal forma que $c(\xi) \leq 1/2$, entonces se tiene que

$$\|u\|_{m+2} + \|p\|_{m+1} \leq \tilde{c}(\xi)(\|f\|_m + \|\gamma_k\|_{m+1/2}),$$

con c dependiendo de $\|\xi\|_{C^{m+2}}$ si éste es pequeño.

Para ξ_1, ξ_2 vecinas en la norma de C^{m+2}, se puede hacer lo mismo con la transformación $u(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}(1+\xi_1)/(1+\xi_2))$ para $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ en Ω_2, obteniendo en este caso $\tilde{c}(\xi_1, \xi_2)$ con $\tilde{c}(\xi_1, \xi_2) = O(|\xi_1 - \xi_2|C^{m+2})$.

Obviamente estos resultados valen en L^q y en $C^{m,\alpha}$. Por lo tanto para terminar la prueba del teorema, podemos suponer que Γ es C^∞, al aproximar $\Gamma(\xi)$ por una superficie en C^∞. La corrección de orden $C^{m+2,\alpha}(\Gamma_b)$ cambiará los datos por una pequeña constante $c(\xi)$ multiplicando a $\|\bar{u}\|_{m+2,q} + \|\bar{p}\|_{m+1,q}$ o su equivalente $\|u\|_{C^{m+2,\alpha}} + \|p\|_{C^{m+1,\alpha}}$ en el espacio $C^{m+2,\alpha} \times C^{m+1,\alpha}$, donde $c(\xi) = O(\|\xi - \xi_\infty\|_{m+2,\alpha})$.

También podemos suponer que f y γ_k son C^∞, ya que son aproximables por funciones en C^∞ y obtener así, para la solución única, las cotas en L^q o en $C^{0,\alpha}$ y al tomar el límite en los espacios correspondientes se obtienen las desigualdades del teorema.

De este modo, tendremos una sucesión (u_n, p_n) en $(H^k(\Omega))^3 \times H^{k-1}(\Omega)$ con k arbitrariamente grande, solución del problema aproximado (es decir, con los datos aproximados).

Tomando k tan grande que los teoremas de Sobolev (consúltese [Adams]) impliquen que $H^k(\Omega) \subset H^{m+2,q}(\Omega)$ en el primer caso y $H^k(\Omega) \subset C^{m+2,\alpha}(\Omega)$ en el segundo, tendremos que $(u_n, p_n) \in (H^{m+2,q}(\Omega))^3 \times H^{m+1,q}(\Omega)$ y $(u_n, p_n) \in (C^{m+2,\alpha}(\Omega))^3 \times C^{m+1,\alpha}(\Omega)$ respectivamente.

Aplicando el resultado del teorema 5.11 a (u_n, p_n) tendremos, usando los argumentos anteriores, que

$$\|u_n\|_{m+2,q} \leq c\left(\|f\|_{m,q} + \|\gamma_k\|_{m+1-1/q,q}\right).$$

Como

$$f_n \xrightarrow{H^{m,q}} f, \quad \gamma_n \xrightarrow{H^{m+1-1/q,q}} \gamma,$$

tendremos que u_n es acotada en $H^{m+2,q}(\Omega)$ (y respectivamente en $C^{m+2,\alpha}$). Como toda subsucesión debe converger a la solución única del problema, en el límite se conserva la desigualdad y el límite pertenece al espacio requerido. También se puede tomar $u_n - u_{n'}$, y dado que el problema es lineal

$$||u_n - u_{n'}||_{m+2,q} \leq c(||f_n - f_{n'}||_{m,q} + ||\gamma_n - \gamma_{n'}||_{m+1-1/q,q}),$$

$$||u_n - u_{n'}||_{C^{m+2,\alpha}} \leq \tilde{c}(||f_n - f_{n'}||_{C^{m,\alpha}} + ||\gamma_n - \gamma_{n'}||_{C^{m-1,\alpha}}).$$

Por lo tanto $\{u_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $H^{m+2,q}(\Omega)$ (o en $C^{m+2,\alpha}(\Omega)$) y debe converger a u en ese espacio, única solución débil de la ecuación.

□

Capítulo 6

Estudio del problema completo

Durante los anteriores capítulos hemos considerado que la frontera libre está definida por una función conocida ξ definida en Γ_b, de clase al menos C^2. En este capítulo tomaremos en cuenta el problema completo, es decir, con la condición normal de frontera para el esfuerzo superficial.

6.1 El operador para la frontera

La condición normal de frontera para el esfuerzo superficial provee una ecuación para encontrar la función ξ que eventualemnte define la frontera libre. Así queremos encontrar ξ que satisfaga

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla\xi}{\sqrt{1+|\nabla\xi|^2}}\right)+\frac{\lambda}{\sigma}\beta=\frac{\lambda}{\sigma}(-p+n\cdot\sigma(u)n), \tag{6.1}$$

donde

$$\beta=\left(\frac{2A}{\sqrt{1+|\nabla\xi|^2}}\right)\cdot\nabla\left(\frac{\sqrt{1+|\nabla\xi|^2}}{1+\xi}\right),$$

$$A=\begin{pmatrix}1-\frac{\mu_1}{\lambda}\\ \frac{-\mu_2}{\lambda}\end{pmatrix},$$

Podemos escribir

$$\frac{1}{1+\xi}\nabla\left(\frac{\sqrt{1+|\nabla\xi|^2}}{1+\xi}\right)=\frac{1}{1+\xi}\begin{pmatrix}\varphi_1(\xi)\\ \varphi_2(\xi)\end{pmatrix}=\frac{1}{1+\xi}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\frac{(1+|\nabla\xi|^2)_x}{1+|\nabla\xi|^2}-\frac{\xi_x}{1+\xi}\\ \frac{1}{2}\frac{(1+|\nabla\xi|^2)_y}{1+|\nabla\xi|^2}-\frac{\xi_y}{1+\xi}\end{pmatrix}.$$

Notemos que

$$\int_{\Gamma_b} \operatorname{div}\left(\frac{\nabla\xi}{\sqrt{1+|\nabla\xi|^2}}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0,$$

por la periodicidad de ξ y de $\nabla\xi$ en $\partial\Gamma_b$. Igualmente vemos que

$$\int_{\Gamma_b} -\frac{\xi_x}{(1+\xi\,)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1}{1+\xi}\Big|_{x=0}^{x=x_0} \mathrm{d}y = 0.$$

Pero en general,

$$\int_{\Gamma_b} \frac{1}{1+\xi}\left(\frac{(1+|\nabla\xi|^2)_x}{1+|\nabla\xi|^2}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^1 \frac{\log(1+|\nabla\xi|^2)}{1+\xi}\Big|_{x=0}^{x=x_0} \mathrm{d}y + \int_{\Gamma_b} \frac{\xi_x}{(1+\xi\,)^2}\log(1+|\nabla\xi|^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \neq 0.$$

Hemos visto en capítulos anteriores que la presión es única salvo constantes, por lo cual podemos escoger dicha constante de manera que

$$\int_{\Gamma_b} p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\Gamma_b}\left(\frac{2A}{\sqrt{1+|\nabla\xi|^2}}\right)\cdot\nabla\left(\frac{\sqrt{1+|\nabla\xi|^2}}{1+\xi}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_{\Gamma_b} n\cdot\sigma(u)n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \quad (6.2)$$

Ahora bien, podemos descomponer de forma conveniente la expresión para la curvatura de la superficie

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left(\frac{\nabla\xi}{\sqrt{1+|\nabla\xi|^2}}\right) &= \frac{\Delta\xi}{\sqrt{1+|\nabla\xi|^2}} - \nabla\xi\cdot\frac{\nabla(\sqrt{1+|\nabla\xi|^2})}{1+|\nabla\xi|^2} \\ &= \Delta\xi + \left(\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla\xi|^2}}-1\right)\Delta\xi - \nabla\xi\cdot\frac{\nabla(\sqrt{1+|\nabla\xi|^2})}{1+|\nabla\xi|^2}. \quad (6.3) \end{aligned}$$

Como $\Delta\xi = \operatorname{div}\nabla\xi$, los últimos términos son la divergencia de vectores cuyo promedio en Γ_b es cero.

Vamos a buscar una solución de este problema de la forma siguiente: Sea η una función en $C^{3,\alpha}(\Gamma_b)$, periódica, con derivadas periódicas, y con la propiedad de que

$$\int_{\Gamma_b} \eta\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$

El problema es encontrar ξ con las mismas condiciones tal que

$$\begin{aligned}-\Delta\xi &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla\eta|^2}}-1\right)\Delta\eta - \nabla\eta\cdot\frac{\nabla(\sqrt{1+|\nabla\eta|^2})}{1+|\nabla\eta|^2}\\ &\quad -2\frac{\lambda}{\sigma}\frac{A}{\sqrt{1+|\nabla\eta|^2}}\cdot\nabla\left(\frac{\sqrt{1+|\nabla\eta|^2}}{1+\eta}\right)+\frac{\lambda}{\sigma}(p-n\cdot\sigma(u)n)\stackrel{\text{def}}{=} g. \qquad (6.4)\end{aligned}$$

Notamos que los dos primeros términos son div $\left(\frac{\nabla\eta}{\sqrt{1+|\nabla\eta|^2}}\right)-\Delta\eta$, y por lo tanto integran a 0. Escogiendo la constante en p como antes tenemos que la integral de g sobre Γ_b es 0.

Definición 6.1

$$S_{\Gamma_b}\stackrel{\text{def}}{=} H^1(\Gamma_b)\cap\{\eta \text{ periódica, con} \int_{\Gamma_b}\eta\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0\}.$$

Observaciones : S_{Γ_b} **es un espacio de Hilbert. Podemos entonces formular débilmente el problema de la siguiente forma :**

$$B(\xi,\varphi)\stackrel{\text{def}}{=}\int_{\Gamma_b}\nabla\xi\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=(g,\varphi)_{L^2(\Gamma_b)}, \qquad (6.5)$$

para toda $\varphi\in S_{\Gamma_b}$. $B(\xi,\varphi)$ es bilineal y simétrica en ξ y en φ. También notamos que

$$B(\xi,\xi)=\int_{\Gamma_b}|\nabla\xi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\geq c||\xi||_1^2-\underbrace{\left(\int_{\Gamma_b}\xi\right)^2}_{=0},$$

por la desigualdad de Friedrichs, o de Poincaré generalizada usada en el capítulo anterior.

Así, por el teorema de Lax-Milgram existe una solución única $\xi\in H^1(\Gamma_b)$. En consecuencia podemos definir el siguiente operador $K_0 g\stackrel{\text{def}}{=}\xi$, con $||K_0||<c$.

Para demostrar que $\xi\in S_{\Gamma_b}\cap H^2(\Gamma_b)$ y que $\partial^\alpha\xi$, $|\alpha|\leq 1$ son periódicas se pueden usar los argumentos anteriores (es más sencillo, pues no hay término de divergencia y es una sola ecuación), o bien razonar de la siguiente manera : como Γ_b es un cuadrado, las funciones $\cos\frac{2n\pi x}{x_0}\cos 2k\pi y$, $\operatorname{sen}\frac{2n\pi x}{x_0}\cos 2k\pi y$, $\cos\frac{2n\pi x}{x_0}\operatorname{sen}2k\pi y$, $\operatorname{sen}\frac{2n\pi x}{x_0}\operatorname{sen}2k\pi y$, son base del espacio $H^1(\Gamma_b)$ con condiciones periódicas (son base de L^2, y la periodicidad implica que sean también base de H^1).

Si $f \in L^2(\Gamma_b)$, entonces $f(x,y) = \sum f_{n,k}(e^{i2n\pi\frac{x}{r_0}} + e^{i2k\pi y})$, expandiendo en series de Fourier. Aquí $f_{-n,-k} = \overline{f_{n,k}}$ para que f sea real y además $\sum |f_{n,k}|^2 < \infty$. También sabemos que $f(x,y)$ están en $H^l(\Gamma_b)$ si $\sum (n^2 + k^2)^l |f_{n,k}|^2 < \infty$.

Ahora bien, el problema $-\Delta\xi = g$ es equivalente a

$$4\pi^2(\tfrac{n^2}{r_0^2} + k^2)\xi_{n,k} = g_{n,k},$$

para toda n, k. Si $n^2 + k^2 \neq 0$, entonces $\xi_{n,k} = \frac{g_{n,k}}{4\pi^2(\frac{n^2}{r_0^2} + k^2)}$. Para $n = k = 0$, necesitamos que

$$g_{n,k} = 0 = \int_{\Gamma_b} g \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

que es equivalente a la condición $\int_{\Gamma_b} \xi = 0$. g debe cumplir esta condición.

Nótese también que si $n^2 + k^2 \geq 1$, entonces $||\xi||_k^2 \geq c||\xi||_0^2$, (lo cual da la desigualdad de Friedrichs). Por lo tanto $||\xi||_2^2 \leq c||g||_0^2$.

Para probar la regularidad de esta solución en $C^{k,\alpha}$ se usan los resultados de Agmon, Douglis y Nirenberg (véase capítulo anterior), en un dominio $\Gamma_e \supset \Gamma$, donde se extienden g y ξ por periodicidad y se resuelve el siguiente problema de manera única :

$$\left.\begin{array}{r} -\Delta\varphi = g_e \text{ en } \Gamma_e \\ \varphi|_{\partial\Gamma_e} = \xi_e \end{array}\right\} \tag{6.6}$$

Tenemos, por lo tanto, que el problema

$$-\Delta\xi = g \tag{6.7}$$

$$\xi \text{ periódica en } \partial\Gamma_b \tag{6.8}$$

$$\int_{\Gamma_b} \xi = 0, \tag{6.9}$$

tiene única solución en $C^{k,\alpha}(\Gamma_b)$ si $g \in C^{k-2,\alpha}(\Gamma_b)$, con $k \geq 0$ (tomaremos en nuestro caso $k = 3$). Definimos así

$$\xi \stackrel{\text{def}}{=} Kg, \tag{6.10}$$

con,

$$||\xi||_{k,\alpha} \leq c||g||_{k-2,\alpha}.$$

Nótese que si $\eta \in C^{3,\alpha}(\Gamma_b), u \in (C^{2,\alpha}(\Omega))^3, p \in C^{1,\alpha}(\Omega)$, con las condiciones de periodicidad correspondientes y $\int_{\Gamma_b} \eta = 0$, y además escogiendo la constante en p tal que (6.2) se cumpla, entonces $g \in C^{1,\alpha}(\Gamma_b)$, es periódica y $\int_{\Gamma_b} g = 0$. Hacemos notar también que si $f, g \in C^{1,\alpha}(\Gamma_b)$, entonces $fg \in C^{1,\alpha}(\Gamma_b)$, $\nabla f \in C^{0,\alpha}(\Gamma_b)$ y $\sigma(u) \in C^{1,\alpha}(\Gamma_b)$.

El mapeo $Kg(\eta, p, u) : C^{3,\alpha} \times C^{1,\alpha} \times (C^{2,\alpha})^3 \mapsto \xi \in C^{3,\alpha}$, es Fréchet diferenciable dado que $\sqrt{1+|\nabla\eta|^2}$ y $1+\eta$ son C^∞ y la dependencia en u y p es lineal (la única restricción es que $\eta > -1$).

Ahora bien,

$$\begin{aligned}\xi = Kg \;=\; & K\Bigg(\left(\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla\eta|^2}} - 1\right)\Delta\eta - \nabla\eta \cdot \frac{\nabla(\sqrt{1+|\nabla\eta|^2})}{1+|\nabla\eta|^2} \\ & -2\frac{\lambda}{\sigma}\frac{A}{\sqrt{1+|\nabla\eta|^2}} \cdot \nabla\left(\frac{\sqrt{1+|\nabla\eta|^2}}{1+\eta}\right) + \frac{\lambda}{\sigma}(p - n \cdot \sigma(u)n)\Bigg),\end{aligned}$$

tiene como parte lineal :

$$\begin{aligned} K\left[-\lambda\frac{2A}{\sigma} \cdot \nabla\left(\frac{1}{1+\eta}\right)\Big|_{\eta=0} + \frac{\lambda}{\sigma}p - \frac{\lambda}{\sigma}n \cdot \sigma(u)n\right] &= \frac{\lambda}{\sigma}K\left[-2A \cdot \nabla\eta + p - n \cdot \sigma(u)n\right] \\ &= \frac{\lambda}{\sigma}K\left(L_\eta \eta + L_p p + L_u u\right), \end{aligned}$$

donde L_p y L_u son las linealizaciones de p y $n \cdot \sigma(u)n$ con respecto a η y u (véase siguiente sección), y $L_\eta = -2A \cdot \nabla\eta$. Por lo tanto :

$$\eta - Kg(\eta, u, p) = \eta - \frac{\lambda}{\sigma}\left(K(L_\eta\eta + L_p p + L_u u) + K(O(\|\eta\|^2_{C^{3,\alpha}}))\right). \tag{6.11}$$

Nótese que si $\|\eta_n\|^2_{C^{3,\alpha}} \leq M$ es una sucesión acotada en $C^{3,\alpha}(\Gamma_b)$, entonces existe una subsucesión, que llamamos también η_n, tal que $|\nabla\eta_n|^2$ es convergente en $C^{1,\alpha}(\Gamma_b)$ (ya que la inclusión $C^{3,\alpha}(\Gamma_b) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\Gamma_b)$ es compacta - véase [Adams, teo. 1.31, pág. 11] -). Por lo tanto $KL_\eta\eta_n$ converge en $C^{3,\alpha}(\Gamma_b)$, y el operador KL_η es compacto.

En general los operadores L_p y L_u no son compactos de $C^{1,\alpha} \to C^{3,\alpha}$ y $C^{2,\alpha} \to C^{3,\alpha}$, respectivamente, pero sí lo son de $C^{1,\alpha'} \to C^{3,\alpha}$ y $C^{2,\alpha'} \to C^{3,\alpha}$, si $\alpha' > \alpha$.

6.2 El problema completo

Sean

$$\eta \in S_{\Gamma_b} \cap C^{3,\alpha}(\Gamma_b) = \{\eta \in C^{3,\alpha}(\Gamma_b), \partial^\beta\eta \text{ periódicas }, |\beta| \leq 3, \int_{\Gamma_b} \eta = 0\},$$

$$u \in J(\Omega_0)\cap C^{2,\alpha}(\Omega_0) = \Big\{ v \in C^{2,\alpha}(\Omega_0),\ \partial^\beta \bar{v} \text{ periódica },\ |\beta| \le 2$$
$$v\cdot n|_{z=1} = 0,\ \bar{v}\,|_{z=0} = 0,\ \operatorname{div}_x v = 0 \Big\}\ .$$

Dado η con $1+\eta > 0$, está definido un dominio Ω y un par $(\bar{u}_0, \bar{p}_0)$, solución básica.

Sea la transformación (definida en 2.1) $\pi : J(\Omega_0)\cap C^{2,\alpha}(\Omega_0) \mapsto J(\Omega)\cap C^{2,\alpha}(\Omega)$, dada por

$$u = \pi\,\bar{u} = \frac{J(\Phi)}{1+\eta}\,\bar{u}(\Psi(x)). \tag{6.12}$$

Como hemos visto π es un operador lineal continuo. Recordamos que η define $\tilde{u}_0 = u_0 + u_1$, p_0 definidos en Ω tales que

$$\begin{aligned}
\lambda\,\tilde{u}_0 = \lambda(u_0+u_1) \;&=\; \frac{\lambda}{(1+\eta)^2}\begin{pmatrix} z\left(2-\frac{z}{1+\eta}\right) \\ 0 \\ \frac{z^2\eta_x}{1+\eta}\left(2-\frac{z}{1+\eta}\right)\end{pmatrix} - \frac{\mu_1}{1+\eta}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{z\eta_x}{1+\eta}\end{pmatrix} - \frac{\mu_2}{1+\eta}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{z\eta_y}{1+\eta}\end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} -\frac{\mu_1}{1+\eta}\chi(z)\eta \\ -\frac{\mu_2}{1+\eta}\chi(z)\eta \\ \frac{1}{(1+\eta)^2}\left(\int_0^z \chi(t)\,\mathrm{d}t\right)(\mu_1\eta_x+\mu_2\eta_y)\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

donde

$$\chi(z) \equiv \begin{cases} 1 \ , & |z| < 1/4 \\ 0 \ , & |z| > 1/2 \end{cases},$$

y

$$\int_0^{1/2} \chi(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

p_0 está dado por

$$\lambda p_0 = -2x + \frac{\beta}{\lambda}\left(1-\frac{z}{1+\eta}\right).$$

Por lo tanto $\tilde{u}_0 = u_0 + u_1 \in (C^{2,\alpha}(\Omega))^3$, (de hecho las dos primeras componentes están en $C^{3,\alpha}(\Omega)$).

Sea (v,p) la única solución al problema :

$$\begin{aligned}
-\Delta v + \nabla(\lambda p) \;&=\; \lambda f - \lambda L u - \lambda B u \\
&=\; \lambda f_G - \lambda\nabla p_0 + \Delta(u_0+u_1) - \lambda(u_0+u_1+u)\cdot\nabla(u_0+u_1+u) \stackrel{\text{def}}{=} g
\end{aligned}$$

$$\operatorname{div} v = 0\ \ ,\ \text{en } \Omega$$

con condiciones de frontera

$$v \cdot n|_\Gamma = 0$$

$$v|_{\Gamma_b} = 0$$

$$\tau(k) \cdot \sigma(v)n|_\Gamma = \gamma_k, \quad \forall k = 1, 2.$$

Para $u \in (C^{2,\alpha}(\Omega))^3$, el lado derecho está en $C^{0,\alpha}(\Omega)$ (el término de menor regularidad es $\Delta(u_0+u_1)$). Llamamos a la solución $v = Tg$. Por los resultados del capítulo 5, sabemos que

$$||v||_{C^{2,\alpha}} = ||Tg||_{C^{2,\alpha}} \leq c\Big(||g||_{C^{0,\alpha}} + \sum_k ||\gamma_k||_{C^{1,\alpha}}\Big).$$

Observación : Si $u = v$, entonces $(u + u_0 + u_1, p + p_0)$ es solución del problema completo.

Definamos

$$\begin{aligned}
\bar{v} &\stackrel{\text{def}}{=} \pi^{-1}Tg \in J(\Omega_0) \cap C^{2,\alpha}(\Omega_0) \\
&= \pi^{-1}T\Big(\lambda f_G + \Delta(u_0 + u_1) - \nabla\lambda p_0 - (\lambda(u_0 + u_1) \cdot \nabla)u - (u \cdot \nabla)\lambda(u_0 + u_1) \\
&\quad -\lambda((u_0 + u_1) \cdot \nabla)(u_0 + u_1) - \lambda(u \cdot \nabla)u\Big) \qquad (6.13)
\end{aligned}$$

Nótese que el lado derecho, g, para η fijo, es de clase $C^{1,\alpha}$ como función de u, por lo que si η es de clase $C^{3,\alpha'}$, entonces el término en $\Delta(u_0 + u_1)$ es de clase $C^{0,\alpha'}$ y por los resultados de regularidad

$$\bar{v} \in (C^{2,\alpha'})^3.$$

Si $\alpha' > \alpha$ entonces $\pi^{-1}Tf$ es un mapeo compacto.

Recordemos también que p es único, ya que hemos fijado la constante de manera que $\int_{\Gamma_b} p$ sea fija. Además, por los resultados de regularidad $p \in C^{1,\alpha}(\Omega)$.

En este caso el mapeo $\bar{v} = \bar{v}(\eta, u)$ es un mapeo Fréchet diferenciable de $J(\Omega_0) \cap (C^{2,\alpha}(\Omega))^3$ en él mismo.

Hacemos notar también que $\bar{v}(\eta, u)$ es no lineal en varios términos, además de la parte $(u \cdot \nabla)u$: en efecto, están también l;as condiciones de frontera, que, para η fijo, no son homgéneas y por lo tanto no son lineales.

Observación : el mapeo $(\bar{u}, \eta) \rightarrow (\bar{v}, \xi)$ es analítico.

6.2.1 Linealización de las ecuaciones

Podemos linealizar $\pi^{-1}T$ con respecto a η y a u, cerca de $(0,0)$, descartando los términos no lineales. Esta linealización corresponde a

$$\begin{aligned} \bar{v}(0,0) &= \pi^{-1}T(\lambda f_G + \Delta(u_0+u_1) - \nabla(\lambda p_0) - \lambda((u_1+u_0)\cdot\nabla)(u_1+u_0)) \\ &= \pi^{-1}T(\lambda f_G + \Delta\tilde{u}_0 - \nabla(\lambda p_0) - \lambda(\tilde{u}_0\cdot\nabla)\,\tilde{u}_0), \end{aligned}$$

donde hemos usado que

$$\lambda(u_0+u_1)|_{\eta=0} = \lambda\,\tilde{u}_0\,|_{\eta=0} = \begin{pmatrix} \lambda z(2-z)-\mu_1 \\ -\mu_2 \\ 0 \end{pmatrix} = u_0^0|_{\eta=0},$$

$$\lambda p_0|_{\eta=0} = -2x + \tfrac{\theta}{\lambda}(1-z).$$

Por lo tanto

$$\bar{v}(0,0) = 0,$$
$$\xi(0,0) = 0.$$

Vamos ahora a linealizar en η los términos de $\tilde{u}_0$. Sabemos que

$$\tilde{u}_0 = u_0 + u_1 = u_0^0 + \hat{u}_0 + u_1 + \ldots \text{ términos de orden más alto.}$$

donde $\lambda u_0^0 = \lambda(\tilde{u}_0)|_{\eta=0} = \begin{pmatrix} \lambda z(2-z)-\mu_1 \\ -\mu_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, y

$$\hat{u}_0 + u_1 = \begin{pmatrix} -4z\eta + 3z^2\eta + \frac{\mu_1}{\lambda}(\eta - \chi\eta) \\ \frac{\mu_2}{\lambda}(\eta-\chi\eta) \\ 2z^2\eta_x - z^3\eta_x - \frac{1}{\lambda}(\int_0^z \chi(t)\,dt - z)(\mu_1\eta_x + \mu_2\eta_y) \end{pmatrix}.$$

$$\lambda p_0 = -2x + \tfrac{\theta}{\lambda}(1-z) + \tfrac{\theta}{\lambda}z\eta + \ldots \Rightarrow \nabla(\lambda p_0) = \frac{\theta}{\lambda}\begin{pmatrix} z\eta_x \\ z\eta_y \\ \eta - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El término

$$\begin{aligned} \lambda(\tilde{u}_0\cdot\nabla)\,\tilde{u}_0 &= \lambda(u_0^0\cdot\nabla)u_0^0 + (\lambda u_0^0\cdot\nabla)\,\tilde{u}_0 + (\tilde{u}_0\cdot\nabla)\lambda u_0^0 + \ldots \\ &= \lambda\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde

$$
\begin{aligned}
a' &= \left(z(2-z)-\frac{\mu_1}{\lambda}\right)\left(3z^2-4z+\frac{\mu_1}{\lambda}(1-\chi)\right)+\\
&\quad -\frac{\mu_2}{\lambda}\left(3z^2-4z+\frac{\mu_2}{\lambda}(1-\chi)\right)+(2-2z)\Big[z^2(2-z)\eta_x+\\
&\quad -\frac{1}{\lambda}(\mu_1\eta_x+\mu_2\eta_y)\left(\textstyle\int_0^z\chi(t)\,\mathrm{d}t-z\right)\Big],
\end{aligned}
$$

$$
b' = \left(z(2-z)-\frac{\mu_1}{\lambda}\right)\frac{\mu_2}{\lambda}\eta_x(1-\chi)-\left(\frac{\mu_2}{\lambda}\right)^2\eta_y(1-\chi),
$$

$$
\begin{aligned}
c' &= \left(z(2-z)-\frac{\mu_1}{\lambda}\right)\left[\left(z(2-z)-\frac{\mu_1}{\lambda}\right)z\eta_{xx}-\frac{\mu_2}{\lambda}z\eta_{xy}\right]+\\
&\quad -\frac{\mu_2}{\lambda}\left[\left(z(2-z)-\frac{\mu_1}{\lambda}\right)z\eta_{xy}-\frac{\mu_2}{\lambda}z\eta_{yy}\right]
\end{aligned}
$$

Por otro lado

$$
\Delta(u_0+u_1)=\begin{pmatrix}
-2+6\eta-\frac{\mu_1}{\lambda}\chi''\eta+(3z^2-4z+\frac{\mu_1}{\lambda}(1-\chi))\,\Delta\eta\\
-\frac{\mu_2}{\lambda}\chi''\eta+\frac{\mu_2}{\lambda}(1-\chi)\,\Delta\eta\\
\left(z^2(2-z)+\frac{\mu_1}{\lambda}\left(\int_0^z\chi(t)\,\mathrm{d}t-z\right)\right)\Delta\eta_x+\frac{\mu_2}{\lambda}\left(\int_0^z\chi(t)\,\mathrm{d}t-z\right)\Delta\eta_y+(4-6z)\eta_x+\left(\frac{\mu_1}{\lambda}\eta_x+\frac{\mu_1}{\lambda}\eta_y\right)\chi'
\end{pmatrix}.
$$

la linealización de

$$
\lambda f_G-\nabla(\lambda p_0)+\Delta\tilde{u}_0-(\lambda\,\tilde{u}_0\cdot\nabla)\,\tilde{u}_0-(\lambda\,\tilde{u}_0\cdot\nabla)u-(u\cdot\nabla)(\lambda\,\tilde{u}_0)-\lambda(u\cdot\nabla)u,
$$

es

$$
\begin{pmatrix}0\\0\\f_G+\frac{\theta}{\lambda}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},
$$

donde,

$$
\begin{aligned}
a &= (6-\tfrac{\mu_1}{\lambda}\chi'')\eta+(3z^2-4z+\tfrac{\mu_1}{\lambda}(1-\chi))\,\Delta\eta+\\
&\quad +\lambda\eta_x\Big[-\tfrac{\theta}{\lambda^2}z+z^2(2-z)(2z-3)+\tfrac{\mu_1}{\lambda}(-4z-2z^2-(2z-z^2)\chi+\\
&\quad +2(1-z)\textstyle\int_0^z\chi\,\mathrm{d}t)-(\tfrac{\mu_1}{\lambda})^2(1-\chi)\Big]+\mu_2\eta_y[2z-z^2+2(1-z)\textstyle\int_0^z\chi\,\mathrm{d}t-\tfrac{\mu_1}{\lambda}(1-\chi)]+\\
&\quad -\lambda[(2z-z^2-\tfrac{\mu_1}{\lambda})u_{1x}-\tfrac{\mu_1}{\lambda}u_{1y}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b &= -\tfrac{\theta}{\lambda}z\eta_y+\mu_2[-\chi''\eta+(1-\chi)\,\Delta\eta+(2z-z^2-\tfrac{\mu_1}{\lambda})(1-\chi)\eta_x-\tfrac{\mu_2}{\lambda}(1-\chi)\eta_y]+\\
&\quad -\lambda[(2z-z^2-\tfrac{\mu_1}{\lambda})u_{2x}-\tfrac{\mu_2}{\lambda}u_{2y}]
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} c &= -\tfrac{\theta}{\lambda}\eta + (4 - 6z + \tfrac{\mu_1}{\lambda}\chi')\eta_x + \tfrac{\mu_2}{\lambda}\chi'\eta_y + \lambda z(z(2-z) - \tfrac{\mu_1}{\lambda})^2\eta_{xx} + \\ &\quad -2\mu_2 z(z(2-z) - \tfrac{\mu_1}{\lambda})\eta_{xy} + \tfrac{\mu_2^2}{\lambda}z\eta_{yy} + (z^2(2-z) + \tfrac{\mu_1}{\lambda}(\int_0^z \chi(t)\,\mathrm{d}t - z))\triangle\eta_x + \\ &\quad + \tfrac{\mu_2}{\lambda}(\int_0^z \chi(t)\,\mathrm{d}t - z)\triangle\eta_y - \lambda\Big((z(2-z) - \tfrac{\mu_1}{\lambda})u_{3x} - \tfrac{\mu_2}{\lambda}u_{3y}\Big). \end{aligned}$$

Ahora, π depende también de η :

$$D(\pi\, \bar{u})(0,0)(\eta, u) = D_\eta\left(\frac{J(\Phi)}{1+\eta}\right)\eta(0) + \frac{J(\Phi)}{1+\eta}\Big|_{\eta=0} u,$$

es decir, no tenemos que preocuparnos por la derivada de π.

$$u(\bar{u},\eta) - u(0,0) = \pi(\bar{u},\eta)\,\bar{u} = \pi(0,0)\,\bar{u} + \ldots = \bar{u} + \ldots$$

Del mismo modo

$$\begin{aligned} \bar{v}(\bar{u},\eta) - \bar{v}(0,0) &= \pi^{-1}(\bar{u},\eta)T(\bar{u},\eta)f(\bar{u},\eta) \\ &= \pi^{-1}(\bar{u},\eta)T(\bar{u},\eta)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \ldots \\ &= T(0,0)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \ldots, \end{aligned}$$

ya que a, b, c son lineales en u y η. Ahora $T(0,0)$ corresponde a resolver el problema de Stokes en Ω_0, es decir,

$$-\Delta v + \nabla(\lambda p) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} v = 0$$

$$v_3|_{z=1} = 0$$

$$v|_{z=0} = 0$$

$$\tau^{(1)} \cdot \sigma(v)n|_{z=1} = \sigma_{13} = \tfrac{1}{\lambda}(v_{1_z} + v_{3x}) = \gamma_1|_{\eta=0} = 0$$

$$\tau^{(2)} \cdot \sigma(v)n|_{z=1} = \sigma_{23} = \tfrac{1}{\lambda}(v_{2_z} + v_{3y}) = \gamma_2|_{\eta=0} = 0.$$

Nótese que este problema puede resolverse mediante series de Fourier. Aquí $\eta \in C^{3,\alpha}(\Gamma_b), u \in (C^{2,\alpha}(\Omega))^3$; con $a, b \in C^{1,\alpha}(\Gamma_b)$, $c \in C^{0,\alpha}(\Gamma_b)$ (debido a los términos $\Delta\eta_x, \Delta\eta_y$). Por lo tanto $v \in (C^{2,\alpha}(\Omega))^3$ ($\{z = 1\}$ es de clase C^∞). Y además

$$||v||_{C^{2,\alpha}} \leq c(||a||_{C^{0,\alpha}} + ||b||_{C^{0,\alpha}} + ||c||_{C^{0,\alpha}}) \leq c(||\eta||_{C^{3,\alpha}} + ||u||_{C^{1,\alpha}}).$$

Esto se debe a que sólo aparecen primeras derivadas de u.

En otras palabras, aún para la linealización, no se tiene un mapeo lineal compacto de $C^{3,\alpha} \times C^{2,\alpha} \to C^{2,\alpha}$. Si fuese de $C^{3,\alpha'} \times C^{2,\alpha} \to C^{2,\alpha}$ sí sería compacto (con $\alpha' > \alpha$).

p también depende de η y de u, pero como p está dado de manera única (salvo constantes) por el operador T :

$$p(\bar{u}, \eta) = p(0,0) + \text{solución del problema para } T(0,0).$$

Es decir, $p \in C^{1,\alpha}$ con $||p||_{C^{1,\alpha}} \leq c||v||_{C^{2,\alpha}}$, y p es lineal en v, y por ende también lo es en u y η.

Por la ecuación para ξ :

$$-\Delta\xi = -\frac{2\lambda}{\sigma}\begin{pmatrix} 1 - \frac{\mu_1}{\lambda} \\ \frac{-\mu_2}{\lambda} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \eta_x \\ \eta_y \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{\sigma}n(u,\eta) - \frac{2}{\sigma}v_{3_z}.$$

ya que $n \cdot \sigma(v)A|_{\Omega_0} = v_{3_z}+$ términos cuadráticos en ξ y v.

Para $(\bar{u}, \eta) \in (C^{2,\alpha}(\Omega))^3 \times C^{3,\alpha}(\Gamma_b)$, el lado derecho está en $C^{1,\alpha}$ y la solución ξ está en $C^{3,\alpha}(\Gamma_b)$. La condición de que la constante en p se ajuste de forma que el promedio del lado derecho sea cero es muy sencilla :

Dado que el término de η_x, η_y integra a 0 por periodicidad tenemos

$$\lambda \int_{\Gamma_b} p = 2\int v_{3_z} = 2\left(\frac{\partial}{\partial z}\int_{\Gamma_b} v_3\right)\Big|_{z=1},$$

haciendo notar que $v_3|_{z=1} = 0$.

Escribiendo

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = L\eta + Mu \tag{6.14}$$

$$p = P\eta + Qu \tag{6.15}$$

donde $T = T(0,0)$, $P\eta$ es la solución p para $v_1 = L\eta$ y Qu es la solución para $v_2 = Mu$, y

$$K\left(-2\begin{pmatrix} 1-\frac{\mu_1}{\lambda} \\ \frac{-\mu_2}{\lambda}\end{pmatrix}\cdot\nabla\eta\right) \stackrel{\text{def}}{=} R\eta.$$

Si definimos

$$\tilde{Q}u \stackrel{\text{def}}{=} Qu - \frac{2}{\lambda}(Mu)_{3_z},$$

$$\tilde{P}\eta \stackrel{\text{def}}{=} P\eta - \frac{2}{\lambda}(L\eta)_{3_z},$$

entonces la linealización del problema es

$$\begin{pmatrix} u \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & L \\ \frac{\lambda}{\sigma}K\tilde{Q} & \frac{\lambda}{\sigma}(K\tilde{P}+R)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ \eta \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}\begin{pmatrix} u \\ \eta \end{pmatrix}, \tag{6.16}$$

sobre $(C^{2,\alpha}(\Omega_0))^3 \times C^{3,\alpha}(\Gamma_b)$, con las condiciones descritas.

El operador $\mathcal{A}$ depende de $(\lambda,\theta,\mu_1,\mu_2,\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda$. Si para algún Λ, $I-\mathcal{A}(\Lambda)$ es invertible, entonces la única solución al problema es $(u,\eta) = (0,0)$ y para el problema completo, es decir, con los términos de orden superior, la solución es aislada : en este caso no hay olas.

$$(I-\mathcal{A})\begin{pmatrix} u \\ \eta \end{pmatrix} = G(u,\eta) \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} u \\ \eta \end{pmatrix} = (I-\mathcal{A})^{-1}G(u,\eta),$$

con $G(u,\eta) \le c(||u||^2 + ||\eta||^2)$, por lo tanto la única solución para

$$||u||^2 + ||\eta||^2 \le \frac{c}{||(I-\mathcal{A})^{-1}||},$$

corresponde a $(u,\eta) = (0,0)$.

Por lo tanto hay que determinar los valores de Λ para los cuales $I - \mathcal{A}(\Lambda)$ no es invertible.

6.2.2 Invertibilidad de $I - \mathcal{A}(\Lambda)$

Sabemos que M es tal que los datos del lado derecho del problema de Stokes son de clase $C^{1,\alpha}$, por lo que la solución correspondiente está en $C^{3,\alpha}$. En otras palabras M es compacto.

Lo mismo pasa con el problema completo : si fijamos $\xi \in C^{3,\alpha}(\Gamma_b)$,

$$T(\xi)(g) = T(\xi)(\lambda f_0 - \lambda(\tilde{u}_0 \cdot \nabla)u - \lambda(u \cdot \nabla)\,\tilde{u}_0 - \lambda(u \cdot \nabla)u).$$

Para ξ fijo, λf_0 es fijo y la dependencia en u es $C^{1,\alpha}$. Por lo tanto si $||u_n||_{C^{2,\alpha}} \leq M$, tenemos que $T(\xi)(g_n - \lambda f_0)$ está en $C^{3,\alpha}$ y esto encaja de manera compacta en $C^{2,\alpha}$. T como operador $C^{2,\alpha} \to C^{2,\alpha}$ es un mapeo compacto (para ξ fijo, de hecho basta con que $\xi \in C^{2,\alpha'}$ con $\alpha' > \alpha$, pues en ese caso $T(\xi)(g_n - \lambda f_0)$ estaría en $C^{2,\alpha'}$). Pero T no es compacto de $C^{2,\alpha} \times C^{3,\alpha} \to C^{2,\alpha}$.

Al nivel de la linealización, esto se traduce en que L es un operador continuo de $C^{3,\alpha}$ en $C^{2,\alpha}$, pero no es compacto.

Ahora bien, dado que M es compacto, Q también lo es : $||u_n||_{C^{2,\alpha}} \leq C \Rightarrow Mu_n$ tiene una subsucesión convergente y esto implica, siendo Q continuo, que Qu_n converge en $C^{1,\alpha}$.

El operador $(Mu)_{3z}$ es compacto de $C^{2,\alpha}$ en $C^{1,\alpha}$ (como hemos visto $Mu \in C^{3,\alpha}$), por lo tanto $\check{Q} : C^{2,\alpha} \mapsto C^{1,\alpha}$ es compacto y $K\check{Q} : C^{2,\alpha} \mapsto C^{3,\alpha}$ tambien es compacto.

En el problema no lineal no podemos hacer una descomposición de v y de p : lo único que se tiene es que para ξ fijo, $\xi \in C^{2,\alpha'}$, entonces $p - n \cdot \sigma(u)n$ está en $C^{1,\alpha'}$, y que $K(p - n \cdot \sigma(u)n)$ es compacto como mapeo de $C^{2,\alpha} \mapsto C^{3,\alpha}$. Al hacer variar ξ, para encontrar el punto fijo, en general se pierde la compacidad.

Para $\xi \in C^{3,\alpha}$, $L\xi \in C^{2,\alpha}$ (y L no es compacto), $P\xi \in C^{1,\alpha}$, por lo tanto $\check{P}\xi \in C^{1,\alpha}$ y $K\check{P}\xi \in C^{3,\alpha}$ (y no hay compacidad).

Como $\nabla\xi \in C^{2,\alpha}$, sabemos que $C^{2,\alpha}$ está contenido compactamente en $C^{1,\alpha}$, de aquí se deduce que R es compacto.

Estudiaremos el caso más sencillo, que corresponde cuando σ es muy grande, de forma tal que el operador $I - \frac{\lambda}{\sigma}(K\check{P} + R) \stackrel{\text{def}}{=} S$ es invertible. Entonces la ecuación completa se escribe

$$u = Mu + L\xi + G_1(u,\xi),$$
$$\xi = \lambda S^{-1}\frac{K\check{Q}}{\sigma}u + S^{-1}G_2(u,\xi).$$

(G_1, G_2) es la parte no lineal, con $|G_i| = O(|u|^2 + |\xi|^2)$ para (u,ξ) cerca de $(0,0)$. La segunda ecuación es Frechét diferenciable en una vecindad de $(0,0)$ y vale 0 cuando $(u,\xi) = (0,0)$.

Además, $G_2(u,\xi)$ depende de u a través de $\frac{1}{\sigma}p - \frac{1}{\sigma}(n \cdot \sigma(v)n) - \frac{1}{\sigma}\check{Q}v$, donde $v = Mu + L\xi + G_1(u,\xi)$ es la solución al problema de Stokes. Podemos por lo tanto, usar el teorema de función implícita y resolver la ecuación para $\xi = \xi(u,\Lambda)$, una función C^1

diferenciable (la dependencia en Λ (para $\lambda > 0$) es analítica, con $||\xi(u,\Lambda)||_{C^{3,\alpha}} \leq \frac{c}{\sigma}||u||^2_{C^{2,\alpha}}$, para u pequeño).

El problema se reduce entonces a

$$(I - M - \frac{\lambda}{\sigma} LS^{-1}K\tilde{Q})u = G_1(u, \xi(u)) + LS^{-1}G_2(u, \xi(u)).$$

Ahora M es un operador compacto de la forma

$$M = -T_0(\lambda z(2-z)u_x + \mu_1 u_x + \mu_2 u_y) = \lambda M_0 u + \mu_1 M_1 u + \mu_2 M_2 u.$$

Con T_0 entendemos el operador de Stokes en Ω_0. Tomando $\mu_0 \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_0$, $\mu_3 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda}{\sigma}$ y $M_3 u = LS^{-1}K\check{Q}u$ (operador compacto), tenemos

$$(I - \mu_0 M_0 - \mu_1 M_1 - \mu_2 M_2 - \mu_3 M_3)u = G(u, \Lambda) = (I - \tilde{M})u.$$

Aquí $G(u,\Lambda) \leq c||u||^2_{C^{2,\alpha}}$, si $||u||$ es pequeña y G es Fréchet diferenciable. Nótese que M_3 depende de λ, μ_1, μ_2 y θ, de manera lineal en θ. Aquí vemos otra vez que si $I - \sum \mu_i M_i$ es invertible, entonces la única solución, de norma suficientemente pequeña, es $u = 0$ y por lo tanto $\xi = 0$.

Sea $\Lambda_0 = (\mu_0^0, \mu_1^0, \mu_2^0, \mu_3^0, \theta_0)$ tal que $I - \tilde{M}$ no sea invertible. Entonces,

$$I - \tilde{M}(\Lambda) = I - \tilde{M}(\Lambda_0) + \tilde{M}(\Lambda) - \tilde{M}(\Lambda_0) = A - N(\tilde{\Lambda}),$$

donde $\tilde{\Lambda} = \Lambda - \Lambda_0 = (\tilde{\mu}_1, \ldots, \tilde{\theta})$ y

$$N(\tilde{\Lambda}) = \tilde{\mu}_0 M_1 + \tilde{\mu}_1 M_2 + \tilde{\mu}_3 M_3(\Lambda_0) + \mu_3(M_3(\Lambda_0 + \Lambda) - M_3(\Lambda_0)).$$

Además $N(0) = 0$. Como $A = I - \tilde{M}(\Lambda_0)$, con $\tilde{M}(\Lambda_0)$ compacto, A es un operador de Fredholm de índice cero y se tiene una descomposición de $C^{2,\alpha}$ de la siguiente forma :

$$C^{2,\alpha} = X = \ker A \oplus X_1,$$

$$X = X_2 \oplus \text{Rango} A,$$

donde $\dim X_2 = \dim \ker A$. X_1, Rango$A$ son cerrados. Sea P la proyección sobre $\ker A$, que define X_1, y Q la proyección (definiendo a X_2), sobre X_2 (no confundir con la otra Q).

El método de Lyapunov-Schmidt, generalizado en [Ize 93, pág. 6], permite probar que, si escribimos $u = x_0 \oplus x_1$, con $x_0 = Pu$, $x_1 = (I - P)u$, la ecuación

$$(A - N(\tilde{\Lambda}))u = G(u, \tilde{\Lambda}),$$

es equivalente al sistema

$$x_1 = (I - KQN(\tilde{\Lambda}))^{-1}KQ(N(\tilde{\Lambda})x_0 + G(x_0 + x_1, \tilde{\Lambda})$$

$$B(\tilde{\Lambda})x_0 + \tilde{G}(\tilde{\Lambda}, x_0 + x_1) = 0,$$

donde K es el inverso de $A|_{x_1}$, y es operador continuo de Rango$A$ a X_1.

La primera ecuación, de dimensión infinita, se resuelve de manera única para $x_1 = x_1(x_0, \tilde{\Lambda})$ por el teorema de la función implícita, con $x_1(x_0, \tilde{\Lambda})$ Fréchet diferenciable y

$$||x_1||_{C^{2,\alpha}} \leq c(||x_0||||\tilde{\Lambda}|| + ||x_0||^2).$$

Como x_0 está en ker A, de dimensión finita, todas las normas son equivalentes. Por lo tanto el problema se reduce a la ecuación de bifurcación :

$$B(\tilde{\Lambda})x_0 + \tilde{G}(\tilde{\Lambda}, x_0 + x_1(x_0, \tilde{\Lambda})) = 0, \tag{6.17}$$

donde $B(\tilde{\Lambda})$ es la matriz de $d \times d$ ($d = \dim\ker A$) :

$$B(\tilde{\Lambda}) = (I - Q)N(\tilde{\Lambda})(I - KQN(\tilde{\Lambda}))^{-1}P \tag{6.18}$$

$$\tilde{G}(\tilde{\Lambda}, u) = (I - Q)(I - N(\tilde{\Lambda})KQ)^{-1}G(u, \tilde{\Lambda}). \tag{6.19}$$

Por lo tanto $\tilde{G}(\tilde{\Lambda}, x_0 + x_1(x_0 + \tilde{\Lambda}))$ es C^1 en $\tilde{\Lambda}$ y x_0 y es acotado por $c||x_0||^2$ para $||x_0||$ pequeño.

Como ésta es una formulación abstracta poniendo $G \equiv 0$, la ecuación $\det B(\tilde{\Lambda}) = 0$, para $\tilde{\Lambda} \sim 0$, dará todos los puntos donde $I - \tilde{M}(\Lambda)$ no es invertible.

Ahora $B(\tilde{\Lambda})$ es analítica en $\tilde{\Lambda}$ cerca de 0, por lo tanto $\det B(\tilde{\Lambda}) = 0$ como función de $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}$ es idénticamente cero, o bien, el conjunto de puntos donde el determinante es 0 es un número finito de superficies analíticas de dimensión 3 en $\mathbb{R}^4$ (una manera de ver esto es fijar 3 de las variables en 0 y extender la cuarta variable z a los complejos; entonces el determinante es una función analítica compleja, lo que implica que o es idénticamente cero, o $z = 0$ es un cero aislado. Al variar las otras variables, tendremos que ese cero aislado se convierte en un número finito de ceros (para cada valor fijo de las otras variables). Éstos ceros dependen analíticamente de las otras variables y por lo tanto no pueden tener contactos de orden infinito, a menos que coincidan. Una demostración rigurosa requiere de geometría analítica. Nótese que si

$$\left(\frac{\partial \det B(\tilde{\Lambda})}{\partial z}\right)\Big|_{\tilde{\Lambda}=0} \neq 0,$$

el teorema de la función implícita da una sola superficie.

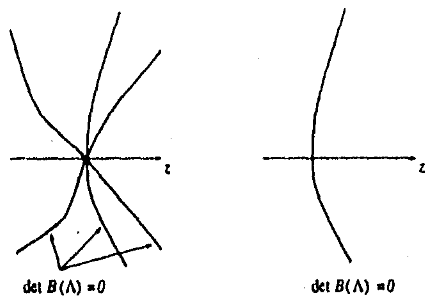

Figura 6.1 : Superficies tales que $\det B = 0$.

El teorema de bifurcación [Ize 93, teo. I] dice que si $\det B(\tilde{\Lambda})$ cambia de signo cuando z pasa de negativo a positivo, entonces hay una bifurcación de una hipersuperficie de soluciones no triviales, partiendo de por lo menos una de las hipersuperficies donde hay cambio de signo.

Usando la teoría de O-epi (generalización de mapeos compactos) se debería poder probar que esa hipersuperficie es o no acotada en el espacio $\mathbb{R}^4 \times X$ o que regresa al espacio $\mathbb{R}^4 \times \{0\}$ es un punto diferente de Λ_0.

Un caso particular del anterior es el siguiente. Si

$$I - M = I - \mu_0 M_0 - \mu_1 M_1 - \mu_2 M_2,$$

no es invertible para $(\mu_0^0, \mu_1^0, \mu_2^0)$, como M es compacto, el espectro de M es aislado. Si ponemos $\mu_i = \tau \mu_i^0$, con $i = 0, 1, 2$, entonces $I - \tau M(\mu_0^0, \mu_1^0, \mu_2^0)$ es invertible para $\tau \neq 1$, pero vecino a 1. Es un hecho conocido que en ese caso $\det B(\tau\mu_0, \tau\mu_1, \tau\mu_2, 0)$ cambia de signo cuando τ atraviesa 1, si y solo si la multiplicidad algebraica de 1, como valor propio de $I - \tau M(\mu_0^0, \mu_1^0, \mu_2^0)$, es impar.

En ese caso, para μ_i pequeño, tendremos bifurcación en las condiciones anteriores.

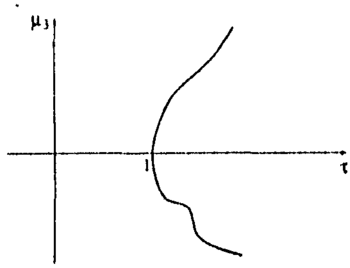

Figura 6.2 : Rama de bifurcación si la multiplicidad algebraica de 1 como valor propio es impar.

Sin embargo, este bello caso no es de utilidad porque $I - M$ es siempre invertible (M tiene espectro con todos sus valores propios no reales). En efecto $(I - M)u = 0$ corresponde a resolver el problema de Stokes en Ω_0 con $\xi = 0$:

$$\begin{aligned} -\Delta u + \nabla p &= -\lambda(2z - z^2)u_x - \mu_1 u_x - \mu_2 u_y \\ \operatorname{div} u &= 0, \end{aligned}$$

y el resto de las ecuaciones.

Tomando la ecuación, multiplicando por u e integrando (recordando que $\nabla p \perp u$) se tiene

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u|^2 &= -\int_0^1 (\lambda(2z - z^2) \int_0^1 \int_0^{x_0} u_x \cdot u \, dx\, dy\, dz - \mu_1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{x_0} u_x \cdot u \, dx\, dy\, dz \\ &\quad - \int_0^1 \mu_1 \int_0^{x_0} \int_0^1 u_y \cdot u \, dx\, dy\, dz. \end{aligned}$$

Notamos que

$$\int_0^{x_0} 2u_x \cdot u \, dx = |u|^2|_0^{x_0} = 0,$$

por la periodicidad. Por lo tanto

$$\int_{\Omega_0} |\nabla u|^2 = 0 \implies u = 0,$$

por el hecho de que $u|_{z=0} = 0$. Esto quiere decir que $I - M(\Lambda_0)$ no es invertible, depende de que $\mu_3 \neq 0$ (o dicho en términos físicos, que $k = \frac{1}{\mu_3} < \infty$, es decir, que la membrana, o la superficie libre, no sea rígida).

En ese caso para μ_3 tan pequeño que se puede resolver ξ en función de u y que $\mu_3 LS^{-1}K\tilde{Q}$ sea pequeño, con respecto a $(I-M)^{-1}$, entonces no hay soluciones no triviales.

Por lo tanto, aprovechando el hecho de que $I - M$ es siempre invertible, se puede plantear el problema de la siguiente forma : Resolver

$$u = (I - M)^{-1}L\xi,$$

y exponer el problema como

$$\xi = \mu_3[K\tilde{Q}(I - M)^{-1}L + (K\tilde{P} + R)]\xi.$$

En otras palabras, estudiar el espectro del operador continuo

$$A(\lambda, \mu_1, \mu_2, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} K\tilde{Q}(I - M)^{-1}L + K\tilde{P} + R.$$

Notamos que para μ_3 chica, la única solución será $\xi = 0$ y $u = 0$. Ahora , recordamos que $\tilde{Q}$ y R son compactos. Sin embargo

$$\tilde{P}\xi = P|_{z=1}(L\xi) - \tfrac{2}{\lambda}\tfrac{\partial}{\partial z}(L\xi)_z,$$

y como hemos visto, si $\xi \in C^{3,\alpha}$, $\tilde{P}\xi$ es $C^{1,\alpha}$ y $K\tilde{P}\xi$ es del mismo orden de diferenciabilidad que ξ : excepto cuando μ_3 es pequeño, $K\tilde{P}$ es un operador de la misma "importancia" que la identidad.

Si probamos que $I - \mu_3 K\tilde{P}$ es un operador de Fredholm de índice cero para cierto μ_3^0, entonces $I - \mu_3 A$ lo será también para μ_3 cercano a μ_3^0 (ya que $I - \mu_3 K\tilde{P}$ lo será también para μ_3 vecino a μ_3^0 y si B es Fredholm y K es compacto entonces $B + K$ es Fredholm del mismo índice).

Si $I - \mu_3^0 A(\Lambda_0)$ tiene a μ_3^0 como valor propio aislado, entonces se puede usar la misma descomposición de Lyapunov-Schmidt y por lo tanto si μ_3^0 es un valor propio de $A(\Lambda_0)$ de multiplicidad algebraica impar, tendremos bifurcación local.

El estudio espectral del operador $K\tilde{Q}(I - M)^{-1}L + K\tilde{P} + R$ está fuera del alcance de este trabajo y, aparentemente, no existen resultados rigurosos sobre el tema.

El estudio numérico se puede hacer con series de Fourier. El hecho que este operador tenga espectro se puede interpretar físicamente de la manera siguiente :

La parte $-\Delta\xi - \mu(\tilde{P} + R)\xi$ corresponde a efectos puramente superficiales, su espectro (las μ's para las cuales este operador no es invertible) comprende a ondas capilares o superficiales. La parte $\tilde{Q}(I - M)^{-1}L$ comprende al efecto en Ω_0 del campo de velocidades, es decir, a ondas de gravedad. Intuitivamente el que $I - \mu_3 A$ no sea invertible corresponde a tener un balance entre estos dos efectos.

6.3 Comentarios finales

Como acotamos en la introducción, el problema consiste en determinar si existen ondas de forma permanente que sean, para amplitud pequeña, perturbaciones a un flujo cortante. En el problema hemos considerado dos fuerzas : la de gravedad y la de tensión superficial. Hay también una fuerza externa sobrepuesta que es un gradiente de presión. De este modo, se buscan ondas con velocidad constante y cuyas crestas tengan un ángulo dado con respecto al gradiente de presión. La interpretación física de nuestros resultados y de lo que falta todavía por hacer es la siguiente :

En el caso no viscoso el problema es simple, ya que el flujo es potencial y el problema involucra solamente a dos funciones, el potencial de velocidad y la superficie libre. En este caso es posible probar la existencia de varios tipos de onda permanente. Éstas bifurcan a partir de soluciones del problema linealizado. Los puntos de bifurcación son aquellos en los que la velocidad v coincide con la velocidad $c(k)$, donde la velocidad de fase de un fluido de profundidad l y tensión superficial H está dada por

$$c(k) = \frac{\omega(k)}{|k|} = \left(g\frac{\tanh(|k|l)}{|k|} + H|k|\right)^{1/2}, \tag{6.20}$$

donde $k = (p, q)$ con p y q enteros, $|k| = (k^2 + q^2)^{1/2}$.

En este caso todos los valores de v que coinciden con la velocidad de fase de la onda lineal son puntos de bifurcación para ondas de pequeña amplitud. En este caso si $|k|$ es grande predomina la componente capilar. Si $|k|$ es pequeño predomina la componente de gravedad. En general las ondas de gravedad y las capilares se combinan.

En el caso viscoso, al incluir viscosidad de Rayleigh, que es proporcional a la velocidad, ya no hay ondas linealizadas que se propaguen, todas decaen. Es decir, ya no hay valores reales de v que den la velocidad de fase, ahora compleja. Esto lo probamos al ver que el operador $I - M$ es siempre invertible.

velocidad y la superficie libre. El problema es el de determinar la existencia de ondas débilmente no lineales que perturben a un flujo cortante en presencia de un gradiente de presión dado.

El problema linealizado puede pensarse en dos partes. La primera es recordar que el flujo cortante (o de Poiseuille) con paredes rígidas es inestable para un gradiente de presión suficientemente grande. Es decir, la relación de dispersión para las ondas de forma

$$e^{i(kx-\omega(k),t)}\varphi_k(z),$$

es

$$\omega(k) = \omega_r(k,\alpha) + i\omega_i(k,\alpha). \tag{6.21}$$

ω_i crece si el gradiente de presión α crece. La $\omega_i(k)$ es la rapidez con la que la energía se transfiere del flujo básico U_0 a las ondas. Por otra parte un cálculo clásico de Lamb encuentra la relación de dispersión para ondas en un fluido viscoso sin flujo cortante. Esta es:

$$\omega(k) = -2\nu k^2 i + \omega_r(k), \tag{6.22}$$

con,

$$\omega_r = (gk\tanh(kl) + Hk^2)^{1/2}.$$

La razón $-2\nu k^2$ es la rapidez de pérdida de energía. Para poder tener una onda permanente, la energía suministrada por el flujo tiene que compensar lo que pierden las ondas. Es precisamente éste mecanismo el que hace posible la aparición de ondas en forma permanente.

La ecuación de dispersión para ondas de gravedad y capilares en presencia de viscosidad tiene la forma

$$(i(\omega - c\cdot k) + 2\nu k^2)^2 + gk + Hk^3 = 4\nu^2 k^3\sqrt{k^2 + \tfrac{1}{\nu}(\omega - c\cdot k)}, \tag{6.23}$$

donde $k = (k_1, k_2)$, $k = |k|$ y c es la velocidad del flujo constante superpuesto. El flujo cortante introduce términos nuevos a la ecuación de dispersión. Estos términos son complejos ya que el flujo cortante es inestable y provienen de la linealización del esfuerzo del flujo cortante sobre la superficie libre. Así la nueva ecuación de dispersión queda de la siguiente forma :

$$(i(\omega - c\cdot k) + 2\nu k^2)^2 + gk + Hk^3 = 4\nu^2 k^3\sqrt{k^2 + \tfrac{1}{\nu}(\omega - c\cdot k)} + G(k,\alpha)\omega, \tag{6.24}$$

donde la función $G(k,\alpha)$ es el efecto del flujo cortante sobre la superficie libre. Es precisamente el término que proviene de linealizar la condición $\tau\cdot Tn|_\Gamma = 0$.

La solución $\omega = 0$ da una onda de forma permanente con velocidad c. Estos puntos corresponden a los valores de la velocidad donde el operador lineal no es invertible. Se tiene una ecuación compleja con dos parámetros : α es gradiente de presión y c la velocidad. El argumento de balance de energía sugiere que puede ajustarse α para que la parte imaginaria de la ecuación de dispersión para ondas libres compense la parte imaginaria de G. Luego puede ajustarse c para que la frecuencia de las ondas libres coincida con la frecuencia de las ondas inestables.

Este argumento sugiere la posibilidad de obtener ramas locales donde la velocidad sea función de la amplitud. Si hay soluciones en forma de onda permanente al problema lineal, éstas pueden extenderse al caso no lineal de pequeña amplitud. Queda por determinar la región de parámetros en la cual esto sucede realmente. Los resultados numéricos encuentran esta región para el primer modo.

Evidentemente el formalizar estas consideraciones requiere de una investigación a fondo del problema linealizado.

Hay poco que agregar en este momento que no haya sido comentado en su oportunidad. Sin embargo, la impresión general es que queda mucho por hacer. El estudio del espectro de los operadores involucrados en la solución de este problema es en sí mismo punto de partida para la investigación en otras direcciones.

Con respecto al trabajo aquí presentado, debemos comentar que el problema de Stokes es útil en virtud de que nos brinda la oportunidad de introducir numerosas herramientas necesarias para el tratamiento del problema de Navier-Stokes completo, además de ser muy interesante incluso si se estudia aisladamente. Se justifica por lo tanto el trabajo realizado a su alrededor.

Para finalizar y de paso contestar parcialmente las preguntas planteadas en la introducción, podemos decir que el tipo de soluciones encontradas (flujo básico, ramas de bifurcación de soluciones no triviales) reflejan indirectamente que nuestra intuición y los modelos matemáticos para la comprensión de los fenómenos naturales van por el mismo camino.

Éste es el principio del camino, estimulante e infinito.

Apéndice A

Relación de Euler

Vamos a demostrar la conocida *relación de Euler*, que conecta las descripciones *euleriana* y *lagrangiana* del movimiento de un fluido :

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = J(t)\,\mathrm{div}_x u \tag{A.1}$$

Supongamos que y es un punto fijo del espacio y que $x = x(y,t)$ es la posición de una partícula al tiempo t, que al tiempo $t_0 = 0$ se encontraba en y. Supongamos también que la transformación es invertible en y, es decir, que podemos escribir $y = y(x,t)$ y que el jacobiano es distinto de cero. De esta forma

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x'(y(x,t),t) \equiv u(x,t),$$

esto es, existe una distribución de velocidades.

Sea $J(t) \equiv \frac{D(x)}{D(y)}$ el jacobiano de la transformación

$$J(t) = \det \begin{pmatrix} x_{1y_1} & x_{1y_2} & x_{1y_3} \\ x_{2y_1} & x_{2y_2} & x_{2y_3} \\ x_{3y_1} & x_{3y_2} & x_{3y_3} \end{pmatrix}.$$

Definamos $M_i \equiv \nabla_y x_i$; entonces claramente $J(t) = \det A$, si A es la matriz que tiene como columnas a los vectores M_i :

$$A \cong \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ .. & .. & .. \end{pmatrix}.$$

Calculando el determinante tenemos

$$J = \det A = M_1 \cdot (M_2 \wedge M_3) = (M_1, M_2, M_3),$$

un producto mixto antisimétrico. Por lo tanto, si se calcula la derivada se tiene

$$\begin{aligned} J'(t) &= (M_1', M_2, M_3) + (M_1, M_2', M_3) + (M_1, M_2, M_3') \\ &= (M_1', M_2, M_3) + (M_2', M_3, M_1) + (M_3', M_1, M_2). \end{aligned}$$

Notamos que $M_i' = \nabla_y \frac{\mathrm{d}r_i}{\mathrm{d}t} = A\nabla_x u_i$, por lo que la derivada es

$$\begin{aligned} J'(t) &= A\nabla_x u_1 \cdot (M_2 \wedge M_3) + A\nabla_x u_2 \cdot (M_3 \wedge M_1) + A\nabla_x u_3 \cdot (M_1 \wedge M_2) \\ &= (\nabla_x u_1)^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} (M_2 \wedge M_3) + (\nabla_x u_2)^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} (M_3 \wedge M_1) + (\nabla_x u_3)^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} (M_1 \wedge M_2). \end{aligned}$$

Dado que A es la traspuesta de la matriz jacobiana, es claro que para todo vector V,

$$A^{\mathrm{T}} V = \begin{pmatrix} M_1 \cdot V \\ M_2 \cdot V \\ M_3 \cdot V \end{pmatrix},$$

por lo que,

$$\begin{aligned} J'(t) &= (\nabla_x u_1)^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} (M_1, M_2, M_3) \\ (M_2, M_2, M_3) \\ (M_3, M_2, M_3) \end{pmatrix} + (\nabla_x u_2)^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} (M_1, M_3, M_1) \\ (M_2, M_3, M_1) \\ (M_3, M_3, M_1) \end{pmatrix} + \\ &+ (\nabla_x u_3)^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} (M_1, M_1, M_2) \\ (M_2, M_1, M_2) \\ (M_3, M_1, M_2) \end{pmatrix} = \\ &= (\nabla_x u_1)^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} (M_1, M_2, M_3) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (\nabla_x u_2)^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 0 \\ (M_1, M_2, M_3) \\ 0 \end{pmatrix} + \end{aligned}$$

$$+ \quad (\nabla_x u_3)^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (M_1, M_2, M_3) \end{pmatrix},$$

ya que $(M_i, M_j, M_k) \equiv 0$ si se repite algún índice. Finalmente tenemos

$$J'(t) = (M_1, M_2, M_3)(u_{1x_1} + u_{2x_2} + u_{3x_3}),$$

es decir, la relación de Euler :

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = J(t)\,\mathrm{div}_x u.$$

□

Apéndice B

Curvatura media de Γ

Consideremos una superficie regular de la forma

$$(u,v) \to X(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}.$$

Es posible demostrar (para ello consultar [Stoker, pag. 56]) que la curvatura media de una superficie de este tipo está dada por

$$H = \frac{1}{2}\frac{NE + GL - 2MF}{EG - F^2}, \tag{B.1}$$

donde $E = |X_u|^2$, $F = X_u \cdot X_v$, $G = |X_v|^2$, $L = X_{uu} \cdot n$, $M = X_{uv} \cdot n$, $N = X_{vv} \cdot n$ y

$$n = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|},$$

es la normal unitaria a la superficie. Claramente si ésta es regular entonces $EG - F^2 = |X_u \wedge X_v|^2 \neq 0$.

Por lo tanto para una superficie de la forma

$$(x,y) \to X(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \phi(x,y) \end{pmatrix},$$

es claro que,

$$X_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \phi_x \end{pmatrix}, \quad X_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \phi_y \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad X_x \wedge X_y = \begin{pmatrix} -\phi_x \\ -\phi_y \\ 1 \end{pmatrix},$$

y por ende

$$\begin{aligned} E &= 1 + \phi_x^2, \\ F &= \phi_x \phi_y, \\ G &= 1 + \phi_y^2, \\ L &= \frac{\phi_{xx}}{\sqrt{1 + \phi_x^2 + \phi_y^2}}, \\ M &= \frac{\phi_{xy}}{\sqrt{1 + \phi_x^2 + \phi_y^2}}, \\ N &= \frac{\phi_{yy}}{\sqrt{1 + \phi_x^2 + \phi_y^2}}, \end{aligned}$$

y $EG - F^2 = 1 + \phi_x^2 + \phi_y^2$.

Por lo tanto, sustituyendo en la ecuación (B.1), y simplificando obtenemos

$$\begin{aligned} H &= \frac{\phi_{yy}(1 + \phi_x^2) + \phi_{xx}(1 + \phi_y^2) - 2\phi_{xy}\phi_x\phi_y}{2(1 + \phi_x^2 + \phi_y^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\Delta\phi}{2(1 + \phi_x^2 + \phi_y^2)^{1/2}} - \frac{\phi_x^2\phi_{xx} + \phi_y^2\phi_{yy} + 2\phi_{xy}\phi_x\phi_y}{2(1 + \phi_x^2 + \phi_y^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\phi}{(1 + |\nabla\phi|^2)^{1/2}} + \nabla\left(\frac{1}{(1 + |\nabla\phi|^2)^{1/2}}\right) \cdot \nabla\phi\right). \end{aligned}$$

Y como $\operatorname{div}(a\nabla\phi) = a\,\Delta\phi + \nabla a \cdot \nabla\phi$, podemos escribir

$$H = \frac{1}{2}\operatorname{div}\left(\frac{\nabla\phi}{(1 + |\nabla\phi|^2)^{1/2}}\right). \tag{B.2}$$

Claramente, para el caso en que la superficie es de la forma $\{z = \text{cte.}\}$, $\nabla\phi = 0$ y por supuesto $H = 0$.

Apéndice C

Lema de Ladyzhenskaya

Vamos a enunciar un resultado debido a O.A. Ladyzhenskaya, cuya demostración se puede encontrar en [Lad 69, pags. 24-27]. Aquí se presenta un esbozo de la prueba de este resultado, resaltando principalmente el método constructivo de la misma, y se enuncia un lema que es de utilidad para demostrar el teorema 4.17.

El problema que se plantea es construir un campo $a(x)$ en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, acotado con frontera suficientemente regular, de manera que $\operatorname{div} a = 0$ en Ω y con $a|_{\partial\Omega} = \alpha$ dado en la frontera. Si $\operatorname{div} a = 0$, entonces

$$\int_\Omega \operatorname{div} a \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \alpha \cdot n \, dS = 0. \tag{C.1}$$

Por esta razón α debe satisfacer la condición anterior. Supongamos que α satisface (C.1), es decir, $\int_{\partial\Omega} \alpha \cdot n \, dS = 0$. Descomponemos $\alpha = \alpha_n n + \alpha_\tau$, con $\alpha_n = \alpha \cdot n$ y $\alpha_\tau = \alpha - (\alpha \cdot n)n$. Procuraremos encontrar un campo $b(x)$ tal que $b = \operatorname{grad}\phi$ y $b_n|_{\partial\Omega} = \alpha_n$. Pediremos que $\operatorname{div} b = \operatorname{div}(\operatorname{grad}\phi) = \Delta\phi = 0$ y que $b_n|_{\partial\Omega} = \operatorname{grad}\phi \cdot n|_{\partial\Omega} = \frac{\partial\phi}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \alpha_n$. Así que el problema se reduce a encontrar ϕ tal que

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= 0 \quad \text{en}\,\Omega \\ \left.\frac{\partial\phi}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} &= \alpha_n \end{aligned} ,$$

es decir, en resolver un problema de Neumann. Ya que $\int_{\partial\Omega} \alpha \cdot n \, dS = 0$, sabemos que este problema tiene solución única salvo constantes (véase [John, pag. 95]), que fijamos en 0. Igualmente sabemos por regularidad del problema de Neumann que si $\phi \in H^2(\Omega)$, entonces $b \in (H^1(\Omega))^3$. El método consiste en definir

$$a(x) \stackrel{\text{def}}{=} b(x) + c(x),$$

donde $b = \operatorname{grad} \phi$, con ϕ solución única de Neumann, y construir $c(x)$ tal que $\operatorname{div} c = 0$ en Ω y $c|_{\partial\Omega} = (a - b)|_{\partial\Omega} \stackrel{\text{def}}{=} \beta$. Si $b \in (H^1(\Omega))^3$, entonces $b|_{\partial\Omega} \in (H^{1/2}(\partial\Omega))^3$ (teorema de traza), y como $\alpha \in (H^{1/2}(\partial\Omega))^3$, entonces $\beta \in (H^{1/2}(\partial\Omega))^3$. Notamos que $\beta \cdot n|_{\partial\Omega} = (\alpha \cdot n - b \cdot n)|_{\partial\Omega} = 0$.

Sea $\phi_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, sucesión de funciones tal que $1 = \sum_{k=1}^N \phi_k(x)$, $\forall x \in \Omega$ (partición de unidad). Es posible (para ello véase [Lad 69, pag. 25]) escoger las ϕ_k tales que :

1. Se pueden hallar coordenadas curvilíneas (y_1^k, y_2^k, y_3^k) suficientemente suaves ortogonales a la superficie

$$S_k \stackrel{\text{def}}{=} \partial\Omega \cap \{x \in \Omega \,:\, \phi_k(x) \not\equiv 0\}.$$

2. Y además, que en S_k, $y_3^k = 0$.

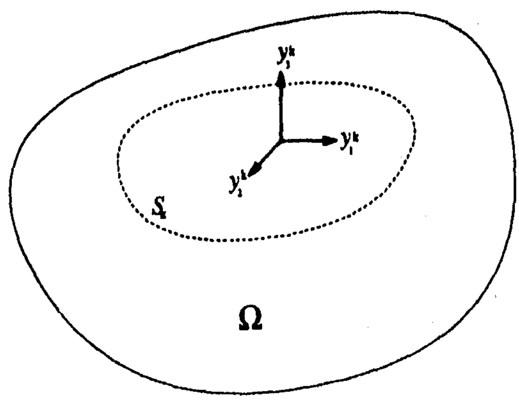

Figura C.1 : Sistema de coordenadas regulares (y_1^k, y_2^k, y_3^k) sobre S_k.

Es decir, escogemos para cada k un sistema de coordenadas orientado de manera que y_3^k sea perpendicular a S_k. Véase figura C.1.

Sean $\beta^k \stackrel{\text{def}}{=} \phi_k\beta$, por lo que $\sum_1^N \beta^k(x) = \beta(x)$ en $\partial\Omega$. Se construye $d^k(x)$ en Ω tal que $\operatorname{rot} d^k|_{\partial\Omega} = \beta^k$, y se define $c^k \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{rot} d^k$. De esta forma si

$$c(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_1^N c^k(x) = \sum_1^N \text{rot}\,(d^k(x)) \quad \text{en } \Omega,$$

se tiene que,

$$\text{div}\, c = \sum_1^N \text{div}\,(\text{rot}\, d^k) = 0 \quad \text{en } \Omega,$$

y además,

$$c(x)|_{\partial\Omega} = \sum_1^N \text{rot}\, d^k\Big|_{\partial\Omega} = \sum_1^N \beta^k = \beta \quad \text{en } \partial\Omega.$$

Veremos cómo, según el método de Ladyzhenskaya, se puede construir dicho campo $d^k(x)$ en Ω y $\forall k$, tal que $\text{rot}\, d^k|_{\partial\Omega} = \beta^k(x)$.

Sea $x_0 \in \partial\Omega$. Tenemos dos casos :

1. **Si $x_0 \in \partial\Omega - S_k$, entonces $\phi_k(x_0) = 0$. Como $\phi_k \equiv 0$ en $\partial\Omega - S_k$, entonces $\beta^k = \phi_k\beta = 0$ y podemos tomar $d^k = d^k_{x_l} \equiv 0, \forall l = 1,2,3$ en x_0. Por lo tanto $d^k \equiv 0$, y $d^k_{x_l} \equiv 0 \forall l = 1,2,3$ en $\partial\Omega - S_k$ es el campo buscado.**

2. **Si $x_0 \in S_k$, tomemos una vecindad $\mathcal{O}$ de x_0.**

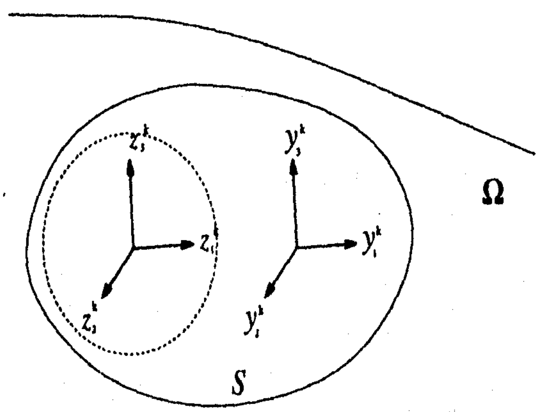

Figura C.2 : Vecindad $\mathcal{O}$ alrededor de x_0, con coordenadas curvilíneas (z_1^k, z_2^k, z_3^k) sobre S_k.

Sean (z_1^k, z_2^k, z_3^k) coordenadas curvilíneas con centro en x_0 y alineadas con (y_1^k, y_2^k, y_3^k) (véase [Lad 69, pag. 26]); es decir, $z_m^k = 0$ en x_0. En estas coordenadas

$$\operatorname{rot} d^k = \beta^k \implies \begin{array}{l} d^k_{3\,z_2} - d^k_{2\,z_3} = \beta_1^k \\ d^k_{1\,z_3} - d^k_{3\,z_1} = \beta_2^k \\ d^k_{2\,z_1} - d^k_{1\,z_2} = \beta_3^k \end{array}$$

En x_0 se escoge $d^k_{i\,z_j}|_{x_0} = 0$, excepto $d^k_{2\,z_3}|_{x_0} = -\beta_1^k$ y $d^k_{1\,z_3}|_{x_0} = \beta_2^k$. También se escoge $d_i^k|_{x_0} \equiv 0\ \forall i = 1,2,3$. De esta forma tenemos $d^k(x)$ tal que $\operatorname{rot} d^k|_{x_0} = \beta^k$.

Después pasamos de las coordenadas (z) a las coordenadas (x). Al tener d^k y $\partial_{z_i} d^k$ en $z = 0$, también están determinadas de manera única d^k y $\partial_{x_i} d^k$ en x_0. Es decir,

$$d^k|_{z=0}\,,\ \left.\frac{\partial d^k}{\partial z_i}\right|_{z=0} \text{ dados } \implies d^k|_{x_0}\,,\ \left.\frac{\partial d^k}{\partial x_i}\right|_{x_0} \text{ determinados de manera única.}$$

Llamemos (x_i, z_k) a los ángulos entre los elementos de la base. El cambio de coordenadas es

$$x_i = \sum_{k=1}^{3} \cos(x_i, z_k) z_k.$$

Así que $d^k = 0$ en $z = 0, \Rightarrow d^k(x_0) = 0$. Como $d^k|_{x_0} = 0$, entonces

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial d^k}{\partial x_m}\right|_{x_0} &= \left.\left[\frac{\partial d^k}{\partial z_1}\cos(x_m, z_1) + \frac{\partial d^k}{\partial z_2}\cos(x_m, z_2) + \frac{\partial d^k}{\partial z_3}\cos(x_m, z_3)\right]\right|_{x_0} \\ &= \begin{pmatrix} d^k_{1\,z_3}|_{z=0} \\ d^k_{2\,z_3}|_{z=0} \\ 0 \end{pmatrix} \cos(x_m, z_3) = \begin{pmatrix} \beta_2^k \\ -\beta_1^k \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y está determinado de manera única. Debe cumplirse, $\forall x_0 \in S$, que d^k y $d^k_{x_j}$ calculados de esta manera sean compatibles. Para esto la única condición es que las derivadas tangenciales sean cero : $\nabla d^k \cdot \tau = 0$.

Se escogieron $d^k{}_{z_m} = 0\,\forall m = 1,2$ y z_1^k, z_2^k tienen dirección tangente a S_k (ya que (z_1^k, z_2^k, z_3^k) tienen la misma dirección que las coordenadas (y_1^k, y_2^k, y_3^k)), por lo cual son compatibles las elecciones de d^k y $d^k_{x_j}$.

La regularidad de d^k y $d^k_{x_j}$ depende de la regularidad de las coordenadas (y_i^k) y de β^k, que a su vez depende de la regularidad de $\partial\Omega$ y de β. Así se construye $d^k(x)$ tal que

$$\begin{aligned} d^k &= 0 \text{ en } \partial\Omega, \\ d^k{}_{x_m} &= 0 \text{ en } \partial\Omega - S_k, \\ \text{y } \ d^k{}_{x_m} & \text{ dado en } S_k, \end{aligned}$$

de manera que $\operatorname{rot} d^k = \beta^k(x)$, en $\partial\Omega$.

De estos valores se puede encontrar (véase [Lad 69, pág. 26]) $d^k(x)$ en todo Ω, asumiendo que es suficientemente suave en Ω^{int} y que es de soporte compacto en Ω. Por ejemplo, si $\beta^k \in (H^{1/2}(\partial\Omega))^3$, entonces $\partial d^k/\partial x_i \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, si el cambio de variables es de clase $C^{0,1}$. Como las derivadas tangenciales son cero, entonces

$$\nabla d^k = \frac{\partial d^k}{\partial n} n.$$

Por el teorema de la traza $d^k \in (H^2(\Omega))^3$. Así definimos

$$c(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{N} \operatorname{rot}(d^k(x)), \tag{C.2}$$

que es el campo deseado, y por ende tenemos

$$\begin{aligned} a(x) &= b(x) + c(x) \\ &= \operatorname{grad}\phi + \sum_{k=1}^{N} \operatorname{rot}(d^k(x)), \end{aligned}$$

con las propiedades deseadas.

Observaciones : Si $\partial\Omega$ es suficientemente suave y α es continua en $\partial\Omega$, $a(x)$ así construida es continua en $\bar{\Omega}$ y tan suave como queramos en Ω^{int}. Por ejemplo si Ω es de clase C^2 y $\alpha \in (H^{1/2}(\partial\Omega))^3$, entonces $a \in (H^1(\Omega))^3$ y

$$a = \operatorname{grad}\phi + \operatorname{rot} d,$$

con $\Delta\phi = 0$, $\phi \in H^2(\Omega)$ por regularidad de Neumann y $d \in (H^2(\Omega))^3$, por los comentarios hechos anteriormente. De esta manera podemos enunciar el siguiente lema :

Lema C.1 *Sea Ω de clase C^2 y $\alpha \in (H^{1/2}(\partial\Omega))^3$ tal que*

$$\int_{\partial\Omega} \alpha \cdot n \, \mathrm{d}S = 0.$$

Entonces $\exists\, a \in (H^1(\Omega))^3$ con $\operatorname{div} a = 0$ y $a|_{\partial\Omega} = \alpha$.

[John] John, F. **Partial Differential Equations**. Fourth edition. Springer-Verlag, 1993.

[Kötter] Kötter, M. **A Free Boundary Value Problem for the Stationary Navier-Stokes Equations**. Universtät Bremen, 1988.

[Lad 69] Ladyzhenskaya, O.A. **Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow**. Gordon & Breach Science Publisher, 1969.

[Lad 76] Ladyzhenskaya, O.A. **The Boundary Value Problems of Mathematical Physics**. Springer-Verlag, 1976.

[Lan/Lif] Landau, L.D.; Lifshitz, E.M. **Fluid Dynamics**. Second edition. Course on Theoretical Physics, Vol. 6. Pergamon Press, 1987.

[Rektorys] Rektorys, K. **Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering**. D. Reidel Publishing Company, 1977.

[Schwartz] Schwartz, L. **Mathematics for the Physical Sciences**. Hermann Addison-Wesley, 1966.

[Segel] Segel, L.A. **Mathematics Applied to Continuum Mechanics**. Macmillan Publishing Co., 1977.

[Stoker] Stoker, J.J. **Differential Geometry**. Wiley-Interscience, 1969.

[Temam] Temam, R. **Navier Stokes Equations**. North Holland Publishing Company, 1977.

Bibliografía

[Acheson] Acheson, D.J. **Elementary Fluid Dynamics**. Clarendon Press Oxford, 1990.

[Adams] Adams, R.A. **Sobolev Spaces**. Academic Press, 1975.

[Agm/Dou/Nir] Agmon, S.; Douglis, A.; Nirenberg, L. **Estimates near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations satisfying General Boundary Conditions II**. Communications in Pure and Applied Mathematics, Vol. 17, pags. 35-92, 1964.

[Akh/Gla] Akhiezer, N.I.; Glazman, I.M. **Theory of Linear Operators in Hilbert Space. Vol. I**. Pitman Advanced Publishing Program, 1981.

[Batchelor] Batchelor, G.K. **An Introduction to Fluid Dynamics**. Cambridge University Press, 1967.

[Cou/Hil] Courant, R.; Hilbert, D. **Methods of Mathematical Physics, Vol. I**. Wiley-Interscience, 1953.

[Cou/Joh] Courant, R.; John, F. **Introduction to Calculus and Analysis, Vol. II**. Springer-Verlag, 1989.

[Friedman] Friedman, A. **Partial Differential Equations**. Robert E. Krieger Publishing Company, New York, 1976.

[Ize 78] Ize, J. **Teoría de existencia para ecuaciones en derivadas parciales**. Comunicaciones técnicas vol. 2. Serie verde: notas. IIMAS-UNAM, 1978.

[Ize 87] Ize, J. **Cálculo de Variaciones**. CINVESTAV, IPN, 1987.

[Ize 93] Ize, J. **Topological Bifurcation**. Reportes de investigación, vol. 3, No. 34, IIMAS-UNAM, 1993.

[Jeff] Jeffreys, H.; Jeffreys, G. **Methods of Mathematical Physics**. Cambridge University Press, 1972.

Bibliografía

[Acheson] Acheson, D.J. **Elementary Fluid Dynamics**. Clarendon Press Oxford, 1990.

[Adams] Adams, R.A. **Sobolev Spaces**. Academic Press, 1975.

[Agm/Dou/Nir] Agmon, S.; Douglis, A.; Nirenberg, L. **Estimates near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations satisfying General Boundary Conditions II**. Communications in Pure and Applied Mathematics, Vol. 17, pags. 35-92, 1964.

[Akh/Gla] Akhiezer, N.I.; Glazman, I.M. **Theory of Linear Operators in Hilbert Space. Vol. I**. Pitman Advanced Publishing Program, 1981.

[Batchelor] Batchelor, G.K. **An Introduction to Fluid Dynamics**. Cambridge University Press, 1967.

[Cou/Hil] Courant, R.; Hilbert, D. **Methods of Mathematical Physics, Vol. I**. Wiley-Interscience, 1953.

[Cou/Joh] Courant, R.; John, F. **Introduction to Calculus and Analysis, Vol. II**. Springer-Verlag, 1989.

[Friedman] Friedman, A. **Partial Differential Equations**. Robert E. Krieger Publishing Company, New York, 1976.

[Ize 78] Ize, J. **Teoría de existencia para ecuaciones en derivadas parciales**. Comunicaciones técnicas vol. 2. Serie verde: notas. IIMAS-UNAM, 1978.

[Ize 87] Ize, J. **Cálculo de Variaciones**. CINVESTAV, IPN, 1987.

[Ize 93] Ize, J. **Topological Bifurcation**. Reportes de investigación, vol. 3, No. 34, IIMAS-UNAM, 1993.

[Jeff] Jeffreys, H.; Jeffreys, G. **Methods of Mathematical Physics**. Cambridge University Press, 1972.

[John] John, F. **Partial Differential Equations**. Fourth edition. Springer-Verlag, 1993.

[Kötter] Kötter, M. **A Free Boundary Value Problem for the Stationary Navier-Stokes Equations**. Universtät Bremen, 1988.

[Lad 69] Ladyzhenskaya, O.A. **Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow**. Gordon & Breach Science Publisher, 1969.

[Lad 76] Ladyzhenskaya, O.A. **The Boundary Value Problems of Mathematical Physics**. Springer-Verlag, 1976.

[Lan/Lif] Landau, L.D.; Lifshitz, E.M. **Fluid Dynamics**. Second edition. Course on Theoretical Physics, Vol. 6. Pergamon Press, 1987.

[Rektorys] Rektorys, K. **Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering**. D. Reidel Publishing Company, 1977.

[Schwartz] Schwartz, L. **Mathematics for the Physical Sciences**. Hermann Addison-Wesley, 1966.

[Segel] Segel, L.A. **Mathematics Applied to Continuum Mechanics**. Macmillan Publishing Co., 1977.

[Stoker] Stoker, J.J. **Differential Geometry**. Wiley-Interscience, 1969.

[Temam] Temam, R. **Navier Stokes Equations**. North Holland Publishing Company, 1977.