

76  
25j



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UN PROBLEMA NOLINEAL SOBRE  
CUERDAS ELASTICAS ROTANTES

T E S I S

Que para obtener el Título de:

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a:

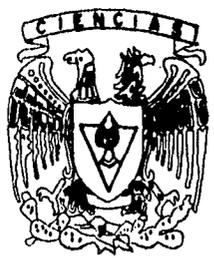
ENRIQUE LOUBET FERNANDEZ

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Jorge Andrés Iza Lamache



FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCUELA  
1998



**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**M. en C. Virginia Abrín Batule**  
**Jefe de la División de Estudios Profesionales de la**  
**Facultad de Ciencias**  
**Presente**

**Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:**

Un Problema Nolineal sobre Cuerdas Elásticas Rotantes

realizado por

Enrique Loubet Fernández

con número de cuenta 9150779-4 , pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

**Atentamente**

Director de Tesis Propietario	Dr. Jorge Ize Lamache
Propietario	Dr. Antomaria Minzoni Alessio
Propietario	Dr. Gilberto Flores Gallegos
Suplente	Dr. Arturo Olvera Chavez
Suplente	Dra. María del Carmen Jorge y Jorge

*J. Ize*

*J. Gilberto Flores*

*Arturo Olvera*

*María del Carmen Jorge*

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. *Alfonso* Bravo Mojica

FACULTAD DE CIENCIAS  
CONSEJO DEPARTAMENTAL  
DE  
MATEMÁTICAS

**Un problema no lineal sobre cuerdas elásticas  
rotantes**

**Enrique Loubet Fernández**

# **A mi familia**

**Mariela Fernández**

**Enrique Loubet**

**Jorge Villarreal**

**Mariela Loubet**

# AGRADECIMIENTOS

El noble destino recompensó mi atraso escolar de dos años, cuando desde el inicio de mi carrera me encontré con Jorge Ize.

Tuve afortunadamente grandes maestros y guías, como el inmensurable Profesor Barajas, mi abuelo espiritual si me lo permite Don Alberto, ciertamente tocado por la gracia en su excelsitud humanista, su desbordante inteligencia, y nobleza al contagiar de entusiasmo a todos nosotros.

También tuve la oportunidad de apreciar, aunque sólo fuera un curso, la gran habilidad del Profesor Tim Minzoni, quien con gran originalidad evitaba caer en una cátedra convencional de teoremas y lemas masticados y no siempre bien digeridos, ofreciendo un enfoque de vaivén entre la intuición y el proceso matemático concreto: Gracias Tim.

Agradezco también al Profesor Ricardo Weder, quien sistemáticamente, reformulando los resultados, desnudaba con gran talento sus relaciones intrínsecas fundamentales.

Del Profesor Arturo Olvera espero haber aprendido, entre otras cosas, que obscuro rigor no debe ensombrecer la imagen física de los problemas, hilo conductor que siempre nos sostiene.

Todos estos hombres y otros tantos (María del Carmen Jorge y Jorge, Juan Manuel Lozano, Eugenio Ley Koo...) enriquecieron mi conocimiento grandemente y aquí quisiera hablar, aunque siempre sea demasiado poco, de mi gran maestro: Jorge Ize.

Jorge Ize es un titán de las matemáticas. Sus clases son fulminantes. No dejan ningún cabo suelto, todo lo domina. Nunca aprendí tanto como en sus cursos. Para él, una tiza, una pizarra y suficiente silencio bastaban; el resto fluía por añadidura. Procuré nunca faltar a alguna de sus clases: cada una de ellas pareciera contener una verdad irrecuperable. Ningún texto podría solventar la pérdida. Generoso, desmedido en su riqueza matemática, es paciente para escuchar dudas de sus alumnos, incluso las más descabelladas, que inmediatamente aclara y profundiza. Su imagen impone y pesa a muchos: es todo un líder. Su compromiso con la ciencia es un gran ejemplo. Su capacidad de trabajo asombrosa: de qué está hecho? Jorge estoy en deuda contigo.

Finalmente quisiera agradecerles a cada uno de mis compañeros, por el humor irremplazable y las esperanzas abiertas.

Este trabajo, más allá de las motivaciones personales, es para toda esa gente hermosa que siempre me ha apoyado como, mis grandes amigos, mi familia, las invaluable cocineras y para terminar, con mi adorada Claudine que con su amor logra que yo me sienta más humano. Para tí con todo mi deseo y compromiso.

# Introducción

Entre los vagos recuerdos de la noble infancia, cuando enfrentados por primera vez el mundo de la experiencia, la mejor de las motivaciones, uno saborea el gusto del asombro y el abismo de la duda, vislumbro el placer que yo sentía frente a las oscilaciones regulares de cuerdas: mi hermana jugaba con sus amigas a saltar la cuerda, a mí sólo me era permitido observar. En aquel entonces sus amigas me importaban poco, así, sin distracciones (quizá aún no llegaban mis amigos con un balón, unas monedas u obsoletas estampillas) disfrutaba de la regularidad de movimiento que alcanzaban la niña saltarina y la cuerda. También recuerdo mis juegos con la manguera que no siempre buscaban mojar al enemigo, usualmente mi perro. En fin, esto no es un amable relato de mis motivaciones de infancia, sino parte de mis motivaciones actuales: las matemáticas aplicadas.

Para aclarar las ideas, pensemos por ejemplo en un charro y su riata. Si observamos con cuidado, cuando éste empieza a excitarla mediante movimientos circulares del brazo que sujeta un extremo, ésta apenas se mueve o altera su posición natural (vertical). Sin embargo, conforme va ganando energía, la cuerda alcanza súbitamente un estado regular que se caracteriza por el perfil que observamos. De hecho, un buen charro con habilidad puede conseguir diferentes perfiles regulares ajustando particularmente la velocidad de giro. Ahora, aquí hay varios puntos que deben mencionarse. Una cuerda real, tridimensional, tiene espesor. Una primera aproximación para la descripción de su dinámica, consiste en considerar una cuerda pesada unidimensional. Esto simplifica el problema original ya que al no tener espesor, ignoramos efectos de torsión, lo que reduce el sistema de ecuaciones, pues de golpe eliminamos la relación que iguala a las torcas externas con el cambio de momento angular (i.e. ley de Newton).

Por otro lado, cuando ponemos en movimiento a una cuerda, su longitud varía. De manera que su longitud es función de variables dinámicas. Un caso particular de cuerdas unidimensionales, no uniformes, son aquellas para las cuales su longitud sólo depende de la tensión al tiempo  $t$  en el punto material  $s$  y del punto material mismo. Estas son conocidas como cuerdas elásticas. En este trabajo estudiamos los estados estacionarios de una cuerda elástica, pesada, no uniforme, que gira con velocidad angular  $\omega$  alrededor del eje vertical en el cual está sujeta en sólo un extremo, y sobre la cual únicamente actúa la fuerza de gravedad.

En el primer capítulo se ofrece una derivación del modelo matemático que describe al problema, estudiando con cierto cuidado, la cinemática de la deformación, la física del problema y las propiedades materiales. En este enfoque, resulta claro que los primeros

dos puntos son generales: se aplican a todo objeto que tenga la geometría de una cuerda. En tanto que el tercero depende de la respuesta material: se refiere a las propiedades que resultan de la constricción interna de una cuerda. Mencionamos por completez, varias clases de cuerdas que son estudiadas comúnmente: cuerdas viscoelásticas, termoelásticas, materiales con memoria, etc. En estos casos, uno debe completar el sistema de ecuaciones con otras que resulten al estudiar la física de la respuesta. Todo nuestro análisis está contenido en el texto de Antman [Ant1, cap.2].

En el segundo capítulo, entramos más en detalle en el estudio de nuestro problema particular, observando el hecho importante, de que para cuerdas elásticas unidimensionales, las soluciones estacionarias son planas. Además vemos que el problema de la cuerda elástica que gira alrededor de un eje vertical con un extremo libre sin peso, es singular; mientras que el problema análogo en donde cuelga un peso  $\mu > 0$  en el extremo libre no lo es. Esto nos sugiere dos estrategias de ataque para el problema singular (sin peso en el extremo libre). La primera: estudiar directamente el problema singular, pasando a la formulación integral. Y la segunda consiste en estudiar un conjunto numerable de problemas regulares (donde un peso  $\mu_n \rightarrow 0$  cuelga del extremo libre) a partir del cual podamos concluir sobre el problema singular.

En el capítulo tres estudiamos con cuidado, la estructura de los mapeos que resultan de la formulación integral, probando finalmente que nuestro problema se puede considerar como un problema de punto fijo de un mapeo  $\mathbf{F}$  que tiene la forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{X})(s) = \mathbf{L}(\omega) \cdot \mathbf{X} + \mathbf{g}(\mathbf{X}, \omega).$$

Donde  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{L}$  son operadores compactos y continuos;  $\mathbf{L}$  es lineal, y  $\mathbf{g}$  es  $o(|\mathbf{X}|)$ .

En el capítulo cuatro estudiamos el problema linealizado  $\mathbf{X} = \mathbf{L}\mathbf{X}$  que es de tipo Sturm-Liouville singular. Probamos la existencia y la unicidad de las soluciones, así como sus propiedades nodales. También damos un estudio de la forma variacional del problema, obteniendo una formulación alternativa tipo Fredholm a partir de la cual se pueden deducir muchos resultados más. Explotando la estructura de la ecuación <sup>1</sup> y de su linealización tipo Fredholm, nos avocamos ya en el capítulo cinco al estudio completo del problema singular. Usando los métodos tradicionales de la teoría de bifurcación, como la reducción de Liapunov-Schmidt, que nos permite proyectar la ecuación en dos espacios complementarios (en este caso, puesto que los valores propios son simples, son  $\ker \mathbf{A}$  y  $R(\mathbf{A})$  donde  $\mathbf{A} = \mathbf{I} + \omega \tilde{\mathbf{L}}$  es el operador de Fredholm previamente obtenido). Obteniendo así dos ecuaciones: una de dimensión infinita y otra de dimensión finita. En la primera, el método de contracción nos permite despejar a  $\mathbf{X}_1$  ( $\mathbf{X} = c\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1 \quad \forall \quad \mathbf{X} \in \mathcal{X}$  donde  $\mathcal{X}$  es el espacio de trabajo que es Banach), en términos de  $\lambda = \omega - \lambda_k^0$  y  $c$ . Sustituyendo

<sup>1</sup>En realidad reescribimos varias veces el problema usando formulaciones equivalentes más simétricas.

ese valor en la segunda ecuación, obtenemos la ecuación de bifurcación (ecuación en  $\lambda$  y  $c$ ). Finalmente, usando el teorema de contracción, despejamos a  $\lambda$  como función de  $c$  y estudiamos algunas de sus propiedades.

Con argumentos similares, estudiamos los casos no singulares ( $\mu_n > 0$ ), y damos una prueba de la convergencia de espectro y de las ramas de soluciones no triviales (por lo menos localmente), de los problemas penalizados al problema singular. Posteriormente, mencionamos algunos resultados globales usando los teoremas de bifurcación global de Rabinowitz (que no probamos). También hacemos un estudio, para una clase particular de cuerdas elásticas, no uniformes, para la cuales tenemos bifurcación subcrítica para todas las ramas en cada punto de bifurcación.

Finalmente en el capítulo seis, explotando el hecho de los valores propios del problema lineal son simples, probamos que la estructura nodal se preserva para el problema completo (no lineal) a lo largo de las ramas de bifurcación. El resultado global (alternativa de Rabinowitz) implica que las ramas son no acotadas. Por otra parte, ofrecemos una clasificación para cuerdas elásticas, en base a la forma funcional de su relación constitutiva. Esto nos permite, usando los teoremas de comparación clásicos para ecuaciones de tipo Sturm-Liouville, establecer cotas para el espectro y las ramas, indicando las regiones en el espacio de bifurcación donde pueden o no localizarse las ramas. Vemos como para las llamadas cuerdas muy débiles ( $\hat{\nu}(N, s)/N \rightarrow \infty$  cuando  $N \rightarrow \infty$ ) obtenemos un comportamiento estrictamente distinto al correspondiente para cuerdas inextensibles ( $\hat{\nu} \equiv 1$ ). En efecto, probamos que para cuerdas inextensibles y uniformes, problema estudiado por Kolodner; para valores de la frecuencia  $\omega$  en  $(\omega_k, \omega_{k+1})$ , existe para cada  $j = 1, 2, \dots, k$  una sola solución  $u_j$  que tiene exactamente  $j$  ceros en el intervalo  $[0, 1]$ . Físicamente, ésto significa que para una cuerda uniforme inextensible que gira alrededor del eje  $z$  con una velocidad angular  $\omega \in (\omega_k, \omega_{k+1})$  donde  $\omega_k =$  velocidad propia o modo normal del problema lineal, entonces podemos tener para el caso no lineal, todos los modos normales anteriores (correspondientes a velocidades propias  $\omega_k < \omega$ ). Sin embargo, para cuerdas elásticas no uniformes muy débiles vemos que ésto ya no se cumple, probando que en la proyección del espacio de bifurcación en la representación  $(|u_k|_1, \omega_k^2)$ ,  $\omega_k^2 \rightarrow 0$  conforme  $|u/s|_1 \rightarrow \infty$ . Se ofrece un ejemplo de bifurcación subcrítica para cuerdas elásticas no uniformes, dando una primera aproximación para la forma funcional que conlleva a este comportamiento. Finalmente ofrecemos una prueba del resultado de Kolodner[Ko], basandonos en gran medida en lo sutil de su argumento.

Finalmente, en las conclusiones mencionamos otros problemas relacionados con el problema de Kolodner.

Enrique Loubet Fernández

I.I.M.A.S., U.N.A.M., Ciudad Universitaria, México D.F. 1996

# Contenido

<b>1 Ecuaciones de movimiento</b>	<b>11</b>
1.1 Introducción . . . . .	11
1.2 Las ecuaciones de movimiento clásicas . . . . .	12
1.2.1 Cinemática de la deformación . . . . .	12
1.2.2 Análisis mecánico . . . . .	15
1.2.3 Propiedades materiales . . . . .	16
<b>2 Rotación estacionaria</b>	<b>19</b>
2.1 Introducción . . . . .	19
2.2 Sistemas de referencia sinódicos . . . . .	20
2.3 Estudio de la solución plana . . . . .	23
<b>3 Problema de Kolodner</b>	<b>29</b>
3.1 Introducción . . . . .	29
3.2 Las ecuaciones de movimiento para el problema de Kolodner . . . . .	29
3.3 Problema singular . . . . .	30
3.4 Compacidad del mapeo $\mathbf{F}$ . . . . .	31
3.5 Continuidad del mapeo $\mathbf{F}$ . . . . .	32
3.5.1 Continuidad del mapeo $f_1 : C^0[0,1] \rightarrow C^0[0,1]$ . . . . .	32
3.5.2 Continuidad del mapeo $f_2$ . . . . .	32

3.6	Cambio de variables . . . . .	35
3.7	Compacidad y continuidad del mapeo $\mathbf{F}$ . . . . .	40
3.7.1	Hölder continuidad de $f_1$ como función de $s$ . . . . .	41
3.7.2	Lipschitz continuidad de $f_1$ como mapeo de $C^0 \rightarrow C^{0,1/2}$ . . . . .	42
3.7.3	Hölder continuidad de $f_2$ como función de $s$ . . . . .	42
3.7.4	Lipschitz continuidad de $f_2$ como mapeo de $C^0 \rightarrow C^0$ . . . . .	42
3.7.5	Lipschitz continuidad de $f_2$ como mapeo de $C^0 \rightarrow C^{0,1/2}$ . . . . .	44
3.7.6	Inclusión compacta de $C^{0,1/2}$ en $C^0$ i.e. $C^{0,1/2} \subset\subset C^0$ . . . . .	45
3.8	Compacidad y continuidad de $\mathbf{L}$ . . . . .	45
3.9	Compacidad y continuidad de $\mathbf{g}$ . . . . .	46
<b>4</b>	<b>El problema linealizado</b> . . . . .	<b>51</b>
4.0.1	Estudio de los valores propios . . . . .	51
4.0.2	Existencia y unicidad de la solución en $\phi$ . . . . .	52
4.1	Completez de las funciones propias $u_n$ . . . . .	62
4.1.1	$H^1[0, 1] = \{u \text{ absolutamente continuas con } u' \in L^2[0, 1]\}$ . . . . .	62
4.2	Formulación variacional del problema linealizado . . . . .	65
4.3	Espectro del problema . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Bifurcación</b> . . . . .	<b>71</b>
5.1	Bifurcación local . . . . .	71
5.2	$\mu > 0$ . . . . .	83
5.3	Convexidad local . . . . .	97
<b>6</b>	<b>Bifurcación global</b> . . . . .	<b>103</b>
6.1	Estructura nodal de las ramas de bifurcación . . . . .	103
6.2	Una primera cota . . . . .	105
6.3	Cotas a priori . . . . .	107

6.3.1	Cuerdas muy fuertes en tensión . . . . .	112
6.3.2	Cuerdas fuertes en tensión . . . . .	113
6.3.3	Cuerdas débiles en tensión . . . . .	114
6.3.4	Cuerdas asintóticamente lineales . . . . .	115
6.3.5	Cuerdas muy débiles en tensión . . . . .	116
6.3.6	Ejemplo particular . . . . .	118
6.3.7	Caso general . . . . .	122
6.4	Comportamiento global de las ramas . . . . .	130



# Capítulo 1

## Ecuaciones de movimiento para cuerdas elásticas

### 1.1 Introducción

En este capítulo se ofrece una derivación matemáticamente precisa, físicamente intuitiva y conceptualmente simple, del sistema cuasi-lineal de ecuaciones diferenciales parciales que gobiernan el comportamiento de cuerdas elásticas no lineales sujetas a grandes deformaciones. Parte de este análisis es el uso del principio de poder virtual y la ley equivalente de impulso-momento que juegan un papel importante desde un punto de vista físico y matemático, pues representan generalizaciones de las ecuaciones de movimiento. El principio de poder virtual está íntimamente ligado al estudio de condiciones de salto (condiciones naturales de Weierstrass desde una óptica variacional), formulaciones variacionales y métodos de aproximación.

Por otra parte, las relaciones constitutivas juegan un papel crucial en nuestro análisis. Estas restricciones, que deben reflejar la respuesta del material en estudio, permiten justificar, de manera consistente, el análisis no lineal de las ecuaciones, así como el estudio de estados de equilibrio y el uso de métodos perturbativos. Además, este tipo de formulaciones son la esencia del tratamiento de problemas concretos que abarcan modelación de cuerpos más complicados, como cuerdas con espesor, membranas y cuerpos 3-dimensionales.

Las ecuaciones exactas, para el movimiento plano debido a grandes deformaciones de una cuerda, fueron establecidas por Euler (1744) y las correspondientes al movimiento espacial por Lagrange (1762). Sin embargo, la derivación simple y elegante que propuso Euler - basada en una combinación de geometría y principios mecánicos - fue sustituida por derivaciones basadas en suposiciones geométricas y mecánicas ad-hoc como por ejemplo, el suponer que el movimiento de cada punto material está confinado al plano transversal a su

posición de equilibrio y perpendicular a la línea que une los extremos de la cuerda. Antman [Ant1, I-7] muestra que prácticamente ninguna cuerda elástica ejecuta ese movimiento. Por otra parte, muchas derivaciones hacen caso omiso de las propiedades del material; incluso de la extensibilidad de la cuerda pues suponen que la tensión es prácticamente constante para movimientos pequeños. Si fuese estrictamente constante, entonces ningún segmento de una cuerda uniforme podría cambiar de longitud y si los extremos de la cuerda estuviesen fijos, entonces ésta no podría moverse.

## 1.2 Las ecuaciones de movimiento clásicas

En esta sección derivamos la forma clásica de las ecuaciones de movimiento que describen la dinámica de una cuerda que sufre grandes deformaciones. Una solución *clásica* se define como una solución para la cual todas las derivadas, que aparecen en la ecuación diferencial, son continuas en el interior de su dominio de definición. Así, para la derivación, impondremos restricciones de regularidad para las variables geométricas y mecánicas. Más adelante y puesto que tanto física como matemáticamente las soluciones a dichos problemas no resultan necesariamente *clásicas*, adoptaremos un estudio más riguroso que no asuma -a priori- regularidad de las soluciones.

La derivación de las ecuaciones de movimiento para la cuerda se divide en la descripción de:

- (i) La cinemática de la deformación.
- (ii) Leyes fundamentales de la mecánica (como la generalización de la segunda ley de Newton para medios continuos).
- (iii) Propiedades del material mediante ecuaciones constitutivas.

Este esquema separa el análisis geométrico y mecánico en los puntos (i) y (ii), que son considerados universalmente válidos, del tratamiento de las ecuaciones constitutivas que dependen del material en estudio.

### 1.2.1 Cinemática de la deformación

Sea  $\{i, j, k\}$  una base ortonormal directa del espacio euclidiano  $\mathcal{E}$  de dimensión 3. Definimos configuraciones de la cuerda como curvas en  $\mathcal{E}$ . Una cuerda se define como un conjunto de puntos materiales (o partículas) que tienen la propiedad geométrica de ocupar curvas en  $\mathcal{E}$  y la propiedad mecánica de ser perfectamente flexible. (ver significado más

adelante). Distinguiamos la configuración  $[0, 1] \ni s \mapsto sk$  como configuración de referencia e identificamos a cada punto material de la cuerda por su coordenada  $s$  (longitud de arco en esta configuración) vease figura (1.1). Más adelante, supondremos que esta configuración corresponde a una *configuración natural* en la cual la fuerza total y la torca total en cada parte de la cuerda es cero.<sup>1</sup>

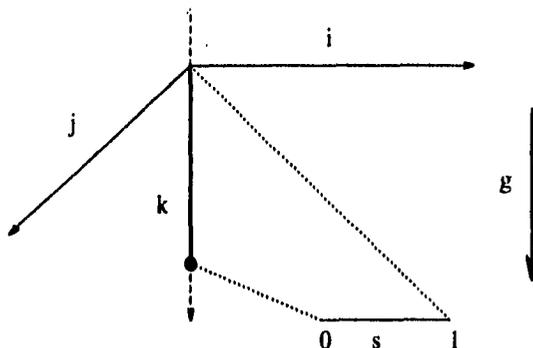


figura 1.1:  $s =$  Longitud de arco con respecto a la configuración de referencia (natural).

Supongamos que la cuerda está en movimiento. Sea  $r(s, t)$  la posición de la partícula  $s$  al tiempo  $t$ . Con el objeto de estudiar problemas de valores iniciales y de frontera, tomaremos como dominio de  $r$  a  $[0, 1] \times [0, \infty)$ .

La función  $r(\cdot, t)$  determina la configuración de la cuerda al tiempo  $t$ , ver figura (1.2).

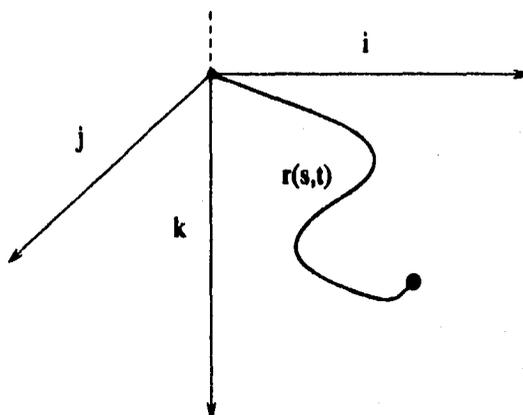


figura 1.2: Configuración de la cuerda al tiempo  $t$ .

El estiramiento  $\nu(s, t)$  de la cuerda en el punto  $(s, t)$  se define como:

<sup>1</sup>Es decir la cuerda está en equilibrio.

$$\lim_{s_1, s_2 \rightarrow s} \frac{\int_{s_1}^{s_2} |\mathbf{r}_s(s, t)| ds}{s_2 - s_1} \equiv \nu(s, t) \quad \text{así} \quad \nu(s, t) \equiv |\mathbf{r}_s(s, t)|,$$

donde la integral es la longitud de la curva, al tiempo  $t$ , del segmento cuya longitud en el estado natural (de referencia) es  $s_2 - s_1$ .

Una característica del movimiento regular está dada por la condición  $\nu(s, t) > 0 \quad \forall (s, t) \in [0, 1] \times (0, \infty)$  (i.e. la razón de longitudes nunca se anula).

Si  $\nu(s, t) > 1$  se dice que la cuerda se ha elongado o estirado.

Si  $\nu(s, t) < 1$  se dice que la cuerda ha sufrido compresión.<sup>2</sup>

Suponiendo que la cuerda se encuentre inicialmente en una configuración  $s \mapsto \mathbf{u}(s)$  con un campo de velocidades  $s \mapsto \mathbf{v}(s)$  al tiempo  $t = 0$  y que en los extremos  $s = 0$  y  $s = 1$  de la cuerda, ésta se encuentre fija en los puntos  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{0}$ , entonces dadas las hipótesis de continuidad<sup>3</sup> sobre  $\mathbf{r}$  tendríamos, ( $s$  longitud de arco al tiempo inicial, que corresponde a la configuración de referencia.)

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(0, t) &= \mathbf{k} & ; & & \mathbf{r}(s, 0) &= \mathbf{u}(s) \\ \mathbf{r}(1, t) &= \mathbf{0} & ; & & \mathbf{r}_t(s, 0) &= \mathbf{v}(s) \end{aligned}$$

$$\implies \mathbf{u}(0) = \mathbf{k}, \mathbf{u}(1) = \mathbf{0}, \mathbf{v}(0) = \mathbf{0}, \mathbf{v}(1) = \mathbf{0}.$$

Esta situación, corresponde a un problema más sencillo que el que estudiaremos en este trabajo: ver [Ant1, VI-3 pág. 189] y la conclusión de esta tesis. Otro problema del mismo genero, es el pedir que en el extremo correspondiente al valor del parámetro  $s = 0$ , permanezca constreñido al eje vertical: ver [Ant1, VI-3 pág.185] y la conclusión de este trabajo para unos breves comentarios alrededor de estos problemas.

El problema que estudiaremos es para el cual el extremo correspondiente al valor  $s = 0$ , está libre sujeto únicamente a un balance de fuerzas, como veremos con detalle en el capítulo siguiente.

Hasta aquí, hemos completado el estudio cinemático de la deformación de la cuerda. Pasemos entonces al análisis mecánico.

<sup>2</sup>La dificultad que uno encuentra al querer comprimir una cuerda real, es consecuencia de la inestabilidad debido a su gran flexibilidad.

<sup>3</sup>Consideramos que  $\mathbf{r}(\cdot, t)$  es continua hasta  $[0, 1] \forall t$ .

### 1.2.2 Análisis mecánico

Asumimos que las fuerzas que actúan en el material  $(a, s) \subset [0, 1]$  en la configuración  $\mathbf{r}(\cdot, t)$  consisten en (ver figura (1.3)):

Una fuerza de contacto  $\mathbf{n}(s, t)$  ejercida en  $(a, s)$  por el segmento material  $(s, 1]$  y que consideramos puntual.

Una fuerza de contacto  $-\mathbf{n}(a, t)$  ejercida en  $(a, s)$  por el segmento material  $[0, a)$  y que consideramos puntual.

Una fuerza de cuerpo ejercida en el segmento  $(a, s)$  por el resto de los agentes (fuerzas externas como la fuerza de gravedad). Consideramos que esta fuerza de cuerpo tiene la siguiente forma,  $\int_a^s \mathbf{f}(s, t) ds$ .

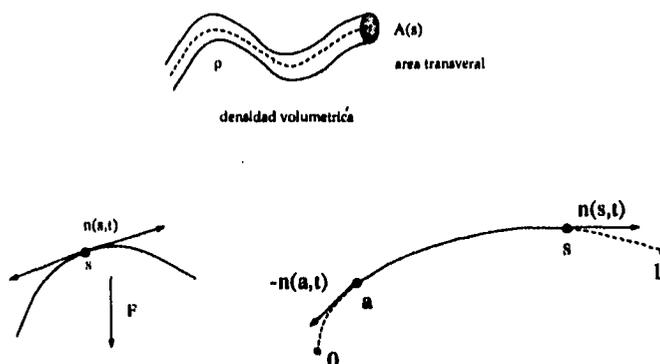


figura 1.3: Origen de la notación para la densidad de masa por unidad de longitud y representación de las fuerzas externas.

Ahora, usando la 2<sup>da</sup> ley de Newton, i.e. igualando la resultante de fuerzas en un segmento cualquiera  $(a, s)$  de la cuerda, con la derivada respecto al tiempo del momento lineal,  $\int_a^s (\rho A)(\xi) \mathbf{r}_t(\xi, t) d\xi$ , del segmento, obtenemos la siguiente forma integral de la ecuación de movimiento,

$$\mathbf{n}(s, t) - \mathbf{n}(a, t) + \int_a^s \mathbf{f}(\xi, t) d\xi = \frac{d}{dt} \int_a^s (\rho A)(\xi) \mathbf{r}_t(\xi, t) d\xi = \int_a^s (\rho A)(\xi) \mathbf{r}_{tt}(\xi, t) d\xi. \quad (1.1)$$

Esta ecuación es válida  $\forall (a, s) \subset (0, 1)$  y  $\forall t > 0$ . Suponiendo mayor regularidad de las funciones que intervienen en la ecuación de movimiento (1.1) tenemos al derivar con respecto a  $s$ ,

$$\mathbf{n}_s(s, t) + \mathbf{f}(s, t) = (\rho A)(s) \mathbf{r}_{tt}(s, t) \quad \text{con } s \in (0, 1); t > 0. \quad (1.2)$$

Estas ecuaciones representan la culminación de los principios mecánicos básicos para la descripción de cuerdas.

### 1.2.3 Propiedades materiales

Ahora describiremos aquellas propiedades materiales de la cuerda que son relevantes para la mecánica, especificando la relación entre la fuerza de contacto  $\mathbf{n}$ , con el cambio de forma sufrido en cada configuración  $\mathbf{r}(s, t)$ . Llamaremos a esta especificación, *relación constitutiva*, y sirve para distinguir la respuesta que se obtiene para distintos materiales. El sistema formado por (1.2) y la relación constitutiva queda así formalmente determinado, pues contiene igual número de ecuaciones que de incógnitas. Una propiedad característica de una cuerda es su llamada *perfecta flexibilidad*. Matemáticamente se refleja en el hecho de que  $\mathbf{n}(s, t)$  sea tangente a la curva  $\mathbf{r}(\cdot, t)$  en  $\mathbf{r}(s, t)$  para cada  $(s, t)$  ver figura (1.3),

$$\mathbf{r}_s(s, t) \times \mathbf{n}(s, t) = \mathbf{0} \quad \forall \quad s, t \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{n}(s, t) = N(s, t) \frac{\mathbf{r}_s(s, t)}{|\mathbf{r}_s(s, t)|}. \quad (1.3)$$

Es importante señalar, que este hecho proviene de la teoría de cuerdas reales (i.e. 3-dimensionales), en donde además de la ecuación (1.2), se necesita una ecuación que exprese la igualdad, para cada segmento, entre la torca resultante, y la derivada respecto al tiempo del momento angular. En el caso degenerado de la cuerda 3-dimensional, en el cual ésta no ofrece resistencia alguna al doblarse, esta segunda relación se reduce a la constricción (1.3).

La componente de fuerza  $N(s, t)$  es la *tensión* en el punto  $(s, t)$ . Cuando  $N > 0$ , tenemos una fuerza *tensoil* y decimos que la cuerda está bajo *tensión*, mientras que  $N < 0$  corresponde a una fuerza *compresiva* y se dice que la cuerda está bajo *compresión*.

En base a experimentos sencillos, podemos concluir que la tensión  $N(s, t)$  depende sólo del estrés (estiramiento)  $\nu(s, t)$  en  $(s, t)$  y del punto material  $s$ . Dichos experimentos, no sugieren dependencia con respecto a la velocidad de cambio de la deformación o a la historia del material deformado. Por lo tanto, podemos representar a un material *elástico* asumiendo la existencia de una función,

$$(0, \infty) \times [0, 1] \ni (\nu, s) \mapsto \hat{N}(\nu, s) \in \mathbf{R} \text{ tal que } N(s, t) = \hat{N}(\nu(s, t), s). \quad (1.4)$$

Notemos que (1.4) no refleja dependencia explícita de  $N(s, t)$  en  $\mathbf{r}(s, t)$ , en la dirección  $\mathbf{r}_s(s, t)$  o en el tiempo absoluto, lo que expresa el hecho físico de que la respuesta del

material, no depende de movimientos rígidos en el espacio y translaciones en el tiempo. Esto es reflejo de considerar al espacio como homogéneo e isotrópico. En varios casos, esta invarianza permite reducir sistemáticamente la forma de la ecuación constitutiva.<sup>4</sup> Entre materiales más complejos, podemos citar las llamadas cuerdas *termoelásticas*. Cualquiera que deforme rápidamente una liga, se percata de un aumento de la temperatura  $\theta$ . Para tomar en cuenta este fenómeno, sustituimos el lado derecho de la ecuación (1.4), por  $N_{00}(\hat{\nu}(s, t), \theta(s, t), s)$ . En este caso requeriríamos una relación complementaria de energía cuyas nuevas variables deben relacionarse mediante restricciones constitutivas. Por otra parte, es común observar amortiguamiento en el movimiento de una cuerda elástica, debido a fricciones internas que están íntimamente relacionadas con efectos térmicos. Uno de los modelos más simples que describen el fenómeno, ignorando efectos térmicos, se obtiene al considerar que la tensión  $N$  depende del estrés  $\nu(s, t)$ , de su velocidad de cambio  $\nu_t(s, t)$  y del punto material  $s$ , i.e. que<sup>5</sup>

$$N(s, t) = N_1(\nu(s, t), \nu_t(s, t), s). \quad (1.5)$$

En este caso hablamos de cuerdas *viscoelásticas*. Uno podría pensar en materiales más caprichosos para los cuales  $N$  dependa de derivadas de orden más alto de  $\nu$ . Materiales para los cuales  $N$  depende de la historia de  $\nu(s, \cdot)$  y de  $s$ , representan una generalización de los anteriores. Se define la historia de  $\nu(s, \cdot)$  hasta el tiempo  $t \in [0, \infty)$  como  $\nu(s, t - \tau)$  para  $\tau \geq 0$ . Así, la relación constitutiva más general, para la clase de materiales viscoelásticos está dada por,

$$N(s, t) = N_\infty(\nu(s, t - \tau), s). \quad (1.6)$$

Notemos que (1.5), (1.6), se reducen a (1.4) cuando la cuerda está en equilibrio y cuando ha permanecido en equilibrio durante todos los tiempos  $t - \tau$  para los cuales  $\nu(s, t - \tau)$  influencia  $N_\infty$ . Esto implica que desde un punto de vista puramente mecánico la respuesta a un estado de equilibrio para todas las cuerdas es elástica. En nuestro análisis nos avocaremos únicamente al estudio de materiales elásticos.

Ahora bien, no nos sirve cualquier función constitutiva. Su expresión debe ser físicamente plausible. No esperamos que una cuerda reduzca su longitud cuando la jalamos y tampoco esperamos que la fricción acelere su movimiento. Podemos asegurar que un incremento en

<sup>4</sup>Físicamente no hay razón alguna para suponer que  $N$  no pueda depender de derivadas en  $s$  de orden más alto. Este tipo de dependencia ocurre en el estudio de efectos de tensión superficial que son significativos para problemas de estructuras de choque y cambios de fase (ver Hagan Slemrod 1983 Carr Gurtin Slemrod 1984).

<sup>5</sup>Como en múltiples modelos mecánicos, dependencia en la velocidad sugiere fricción. (ej. Resortes, Fluidos viscosos, etc...).

la tensión se acompañe de un incremento en el estrés para una cuerda elástica si asumimos que:

$$\nu \mapsto \hat{N}(\nu, t) \text{ sea estrictamente creciente.}$$

Por otra parte, para una cuerda elástica, los hechos de que una fuerza tensil infinita conlleve a un estrés infinito y que una fuerza compresiva infinita conlleve a una compresión total de la cuerda con estrés igual a cero, se traducen como:

$$\hat{N}(\nu, s) \longrightarrow \infty \text{ si } \nu \rightarrow \infty, \quad \hat{N}(\nu, s) \longrightarrow -\infty \text{ si } \nu \rightarrow 0.$$

La configuración de referencia es natural si no hay tensión. Entonces para cuerdas elásticas requerimos de la siguiente restricción constitutiva,

$$\hat{N}(1, s) = 0. \tag{1.7}$$

Notemos que las hipótesis sobre  $\hat{N}(\nu, t)$  y la continuidad de  $\hat{N}$ , nos permiten asegurar, por el teorema de valor intermedio, que

$$\forall s \in [0, 1], N \in \mathbf{R}, \exists \nu \text{ tal que } \hat{N}(\nu, s) = N.$$

Las hipótesis sobre la monotonía de la función  $\hat{N}$ , implican que esta solución -que denotaremos por  $\hat{\nu}(N, s)$ - es única. Más aún, si pedimos que  $\hat{N}_\nu$  sea positiva, entonces usando el teorema clásico de la función implícita, tendríamos que  $\hat{\nu}$  es continuamente diferenciable.

Estos resultados, constituyen un ejemplo simple del teorema global de la función implícita. Así (1.4) es equivalente a,

$$\nu(s, t) \equiv \hat{\nu}(N(s, t), s). \tag{1.8}$$

## Capítulo 2

# Ecuaciones para la rotación estacionaria de cuerdas

### 2.1 Introducción

En este capítulo, derivaremos las ecuaciones para la rotación estacionaria de cuerdas. Supongamos entonces que la cuerda gira alrededor del eje vertical con velocidad angular  $\omega$ . Consideremos el siguiente vector,

$$\mathbf{e}(t) = \cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j}. \quad (2.1)$$

Estudiamos rotaciones estacionarias de la cuerda alrededor de  $\mathbf{k}$ , para las cuales  $\mathbf{r}$  tiene la forma, ver figura (2.1),

$$\mathbf{r}(s, t) = x_1(s)\mathbf{e}(t) + x_2(s)\mathbf{k} \times \mathbf{e}(t) + z(s)\mathbf{k} \quad (2.2)$$

$$x_1(1) = x_2(1) = 0, \quad z(1) = 0 \quad (\text{i.e. cuerda fija en el origen}). \quad (2.3)$$

Supondremos que  $[0, 1] \ni s \mapsto \mathbf{r}(s, t)$  es absolutamente continua para todo  $t$  y definimos,

$$\nu(s) \equiv |\mathbf{r}_s(s, t)|. \quad (2.4)$$

Notemos que el estrés no depende explícitamente del tiempo; esto es consecuencia de estudiar el caso estacionario (ver expresión para la tensión más adelante (2.19)).

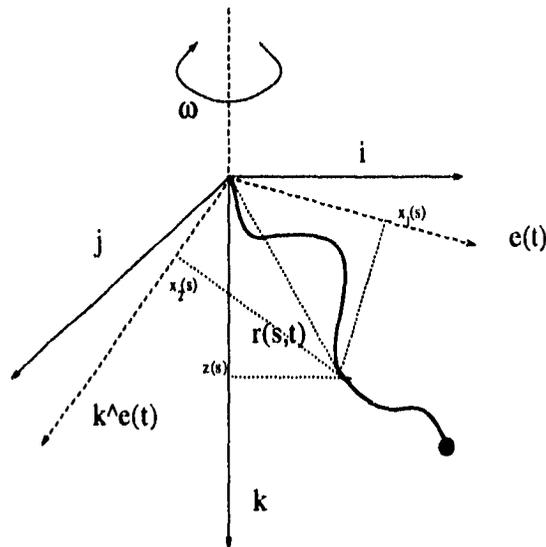


figura 2.1: Representación de los sistemas de referencia inercial  $\{i, j, k\}$  y sinódico  $\{e, k \times e, k\}$ .

Supongamos que un punto material de peso  $\mu$  se une al extremo  $s = 0$  de la cuerda. la única fuerza de cuerpo sobre ésta es la fuerza debida a la gravedad que actúa en la dirección  $k$ . Aquí haremos una pequeña digresión para hablar un poco sobre la física cuando el sistema de referencia es sinódico, i.e. no-inercial.

## 2.2 Sistemas de referencia sinódicos

Sea  $r(s, t)$  el vector posición del punto material  $s$  al tiempo  $t$ , visto desde el sistema de referencia inercial  $\{i, j, k\}$  y sea  $\tilde{r}(s, t)$  el vector posición de la misma partícula pero visto desde el sistema de referencia sinódico (no-inercial)  $\{e(t), k \times e(t), k\}$ . Entonces de la figura (2.2), vemos que, al escribir  $r(s, t)$  sobre la base sinódica

$$r(s, t) = (r \cdot e(t))e(t) + (r \cdot (k \times e))k \times e + (r \cdot k)k$$

Por lo tanto, si  $\tilde{r}(s, t)$  es el vector con componentes  $(r \cdot e(t), r \cdot (k \times e), r \cdot k)$  es claro que,

$$\frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{dt} = \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{e}, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{e}), \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{k} \right) + \left( \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{e}}{dt}, \mathbf{r} \cdot \mathbf{k} \times \frac{d\mathbf{e}}{dt}, 0 \right).$$

$$\Rightarrow \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \omega \mathbf{r} \times \mathbf{k}$$

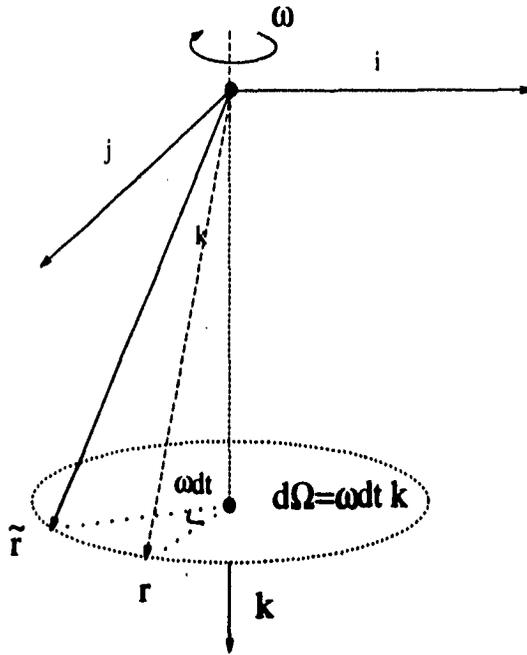


figura 2.2: ilustración de rotación infinitesimal.

Se ve claramente que el primer vector es  $d\mathbf{r}/dt$  escrito en las coordenadas sinodales y, como  $d\mathbf{e}/dt = \omega \mathbf{k} \times \mathbf{e}$ , usando las propiedades del producto mixto, es inmediato ver que el segundo vector es  $\omega \mathbf{r} \times \mathbf{k}$  descrito en la misma base. También se puede derivar directamente  $\mathbf{r}(s, t)$ .

Si definimos  $\hat{\omega} \equiv \omega \mathbf{k}$  entonces por la ecuación anterior tendríamos que,

$$\left( \frac{d}{dt} \right)_{iner} = \left( \frac{d}{dt} \right)_{sinó} + \hat{\omega} \times \quad (2.5)$$

Aquí los subíndices *iner* y *sinó* indican que las derivadas deben calcularse, en las variables observadas desde los sistemas de referencia inercial y sinódico respectivamente. La ecuación (2.5) es la ley básica de la cinemática en la cual están fundadas las ecuaciones de la dinámica para un cuerpo rígido. Su validez no está restringida únicamente al

movimiento de cuerpos rígidos. Es correcta aún en la descripción de una partícula o de un sistema de partículas. Ahora las ecuaciones de Newton son válidas bajo un marco de referencia inercial. Así, aplicando el operador (2.5) al radio vector  $\mathbf{r}$  tenemos,

$$\mathbf{v}_{iner} = \mathbf{v}_{sinó} + \hat{\omega} \times \mathbf{r},$$

$$\mathbf{a}_{iner} \equiv \left( \frac{d\mathbf{v}_{iner}}{dt} \right)_{iner} = \left( \frac{d\mathbf{v}_{iner}}{dt} \right)_{sinó} + \hat{\omega} \times \mathbf{v}_{iner} = \mathbf{a}_{sinó} + 2(\omega \times \mathbf{v}_{sinó}) + \hat{\omega} \times (\hat{\omega} \times \mathbf{r}).$$

Donde  $\mathbf{v}_{iner}$  y  $\mathbf{v}_{sinó}$  son las velocidades de una partícula respecto a los sistemas inercial y sinódico respectivamente y  $\mathbf{a}_{sinó}$ ,  $\mathbf{a}_{iner}$  sus aceleraciones. Así, la ecuación de movimiento, que con respecto a un sistema inercial es simplemente  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_{iner}$ , toma la forma,

$$\mathbf{F} - 2m(\hat{\omega} \times \mathbf{v}_{sinó}) - m\hat{\omega} \times (\hat{\omega} \times \mathbf{r}) = m\mathbf{a}_{sinó}.$$

Por lo que un observador en el sistema rotante (sinódico), juzgaría que la partícula se mueve bajo la acción de una *fuerza efectiva*,

$$\mathbf{F}_{ef} = \mathbf{F} - 2m(\hat{\omega} \times \mathbf{v}_{sinó}) - m\hat{\omega} \times (\hat{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (2.6)$$

Examinemos el origen de los términos de la ecuación (2.6). El último término es un vector normal a  $\hat{\omega} = \omega\mathbf{k}$  que apunta hacia afuera. Se trata de la *fuerza centrífuga*. Cuando la partícula es estacionaria con respecto al sistema de referencia sinódico (rotante), es decir  $d\tilde{\mathbf{r}}/dt = 0$ , como expresa (2.2). Ésta es el único término que se suma a la fuerza efectiva. Mientras que, cuando la partícula se encuentra en movimiento respecto al sistema de referencia en movimiento, el segundo término de (2.6) conocido como *fuerza de Coriolis* entra en juego.

Para una descripción más detallada desde el punto de vista físico, referimos al lector al texto [Gold, 4-10] en el cual nos basamos para la discusión anterior.

En nuestro caso estamos interesados en estudiar estados estacionarios por lo que sólo esperamos términos centrífugos al calcular la expresión de la aceleración.

Además, puesto que estamos interesados en el caso elástico, de ahora en adelante supondremos que  $\nu(s, t) = \dot{\nu}(N(s, t), s)$ : Integrando la ecuación de movimiento (1.1) respecto a  $t$  obtenemos la *ley de momento lineal*,

$$\int_0^T (\mathbf{n}(s, t) - \mathbf{n}(a, t)) dt + \int_0^T \int_a^s \mathbf{f}(\xi, t) d\xi dt = \int_a^s (\rho A)(\xi) [\mathbf{r}_t(\xi, T) - \mathbf{v}(\xi)] d\xi. \quad (2.7)$$

Por otra parte es inmediato ver que,

$$\ddot{\mathbf{e}} = -\omega^2 \mathbf{e} \quad \text{de donde} \quad \mathbf{r}_t(s, t) = x_1 \dot{\mathbf{e}} + x_2 (\mathbf{k} \times \mathbf{e})$$

$$(\mathbf{k} \times \mathbf{e})' = -\omega^2 (\mathbf{k} \times \mathbf{e}), \quad \mathbf{r}_{tt}(s, t) = -\omega^2 [x_1 \mathbf{e} + x_2 (\mathbf{k} \times \mathbf{e})] = -\omega^2 [\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k}].$$

A partir de las ecuaciones (1.1) y (1.3) tenemos,

$$\frac{N(s)[x_1' \mathbf{e} + x_2' (\mathbf{k} \times \mathbf{e}) + z' \mathbf{k}]}{\dot{\nu}(N(s), s)} - \mathbf{n}(0, t) + \int_0^s (\rho A)(\xi) g \mathbf{k} d\xi = -\omega^2 \int_0^s (\rho A)(\xi) [x_1(\xi) \mathbf{e} + x_2(\xi) (\mathbf{k} \times \mathbf{e})] d\xi$$

que proyectando en las componentes  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{k} \times \mathbf{e}$ ,  $\mathbf{k}$  se escribe respectivamente como,

$$\frac{N(s)x_\alpha'(s)}{\dot{\nu}(N(s), s)} + \omega^2 \left[ \int_0^s (\rho A)(\xi) x_\alpha(\xi) d\xi + \frac{\mu x_\alpha(0)}{g} \right] = 0, \quad \text{con } \alpha = 1, 2 \quad (2.8)$$

$$\frac{N(s)z'(s)}{\dot{\nu}(N(s), s)} = -[g \int_0^s (\rho A)(\xi) d\xi + \mu] \equiv -[s\gamma(s) + \mu]. \quad (2.9)$$

El valor de  $\mathbf{n}(0, \tau)$  se calcula a partir de la ley de Newton (tomando en cuenta los términos centrífugos), ver la ilustración (2.3),

$$\sum \mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n}(0, \tau) + \mu \mathbf{k} = \frac{\mu}{g} \mathbf{r}_{tt}(0, \tau) \quad (2.10)$$

$$\mathbf{n}(0, \tau) = -\frac{\mu}{g} \omega^2 [x_1(0) \mathbf{e}(\tau) + x_2(0) \mathbf{k} \times \mathbf{e}(\tau)] - \mu \mathbf{k}. \quad (2.11)$$

En lo sucesivo, supondremos que  $\rho A > 0$ , continua para todo  $s$ ; y que  $\dot{\nu}$  es continua para todo  $s$  y que  $\dot{\nu}(\cdot, s)$  es estrictamente creciente y tiene la forma de la figura (2.4).

## 2.3 Estudio de la solución plana

Hasta ahora no hemos explotado el hecho de haber escogido un sistema de referencia que gira con la cuerda. Un primer resultado se encuentra en el enunciado de la siguiente,

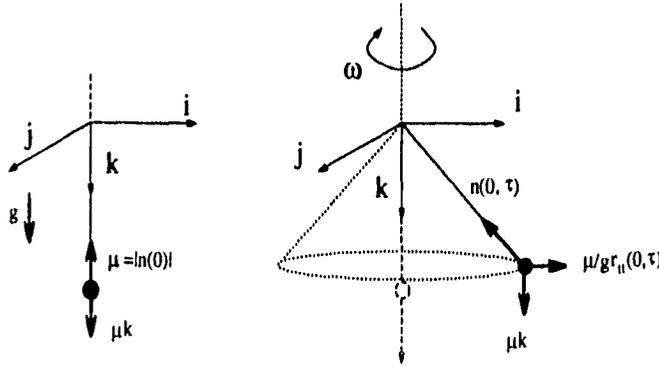


figura 2.3: Estado natural en  $t = 0$  y configuración en  $t = \tau$ .

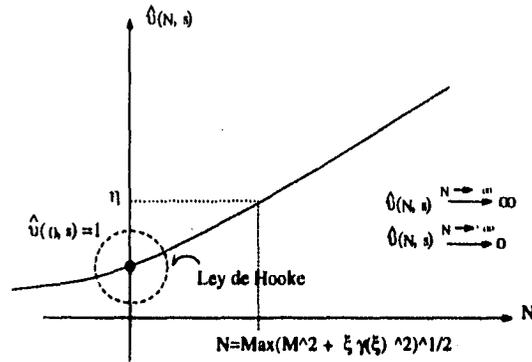


figura 2.4: Dependencia cualitativa de la función  $\hat{v}(N, s)$ . Notemos que para valores pequeños de  $N$  esperamos una respuesta lineal, i.e. la ley de Hooke.

**Proposición 2.1** Sean  $r$  y  $N$  soluciones de (2.4), (2.3), (2.8), (2.9) con  $r(\cdot, t)$  absolutamente continua y con  $N$  continua. Entonces  $\forall t$ ,  $r(\cdot, t)$  es una curva plana.

**Prueba** Sea

$$u_\alpha \equiv \frac{N(s)x'_\alpha(s)}{\hat{v}(N(s), s)} \tag{2.12}$$

Por (2.8) tenemos que  $u_\alpha$  son continuamente diferenciables. Las condiciones (2.3) y (2.4), implican que  $(u_1, x_1)$  y  $(u_2, x_2)$  satisfacen cada uno el problema de valores de frontera:

$$u'(s) + \omega^2(\rho A)(s)x(s) = 0, \tag{2.13}$$

$$x'(s) = \frac{u(s)\hat{\nu}(N(s), s)}{N(s)}, \quad (2.14)$$

$$gu(0) = -\omega^2 \mu x(0); \quad x(1) = 0. \quad (2.15)$$

Ahora como estamos suponiendo que (2.4), (2.3), (2.8), (2.9) tiene solución, la función  $s \mapsto \frac{N(s)}{\hat{\nu}(N(s), s)}$  puede suponerse conocida y así el problema (2.13), (2.14) puede considerarse lineal en  $(u, x)$ . Por otra parte la segunda ecuación del sistema (2.14), es singular siempre que  $N$  se anule. Elevando al cuadrado ambos miembros del sistema (2.8), (2.9) y sumando término a término obtenemos,

$$N^2(s) = u_1^2(s) + u_2^2(s) + [s\gamma(s) + \mu]^2. \quad (2.16)$$

De manera que  $N$  no se anula si  $\mu \neq 0$  ( $\mu > 0$ ). Si  $\mu = 0$ , entonces a partir las ecuaciones (2.8), (2.9) vemos que  $N$  sólo puede anularse para  $s = 0$ . De aquí que el problema correspondiente a  $\mu = 0$  sea singular.

El sistema de segundo orden, lineal, dado por las ecuaciones (2.13), (2.14), tiene dos soluciones independientes y una sola solución independiente satisfaciendo la ecuación (2.15). Fijemos una de estas soluciones independientes y denotemosla por  $(u, x)$ . Puesto que  $(u_\alpha, x_\alpha)$  cada una satisface el sistema (2.13), (2.14), se sigue que existen constantes  $\beta_1$  y  $\beta_2$  tales que:

$$(u_\alpha, x_\alpha) = \beta_\alpha (u, x) \text{ con } \alpha = 1, 2.$$

Si  $\beta_1^2 + \beta_2^2 = 0$  entonces  $\mathbf{r}$  se reduce a  $z\mathbf{k}$ , que es una curva plana (i.e. una solución trivial de equilibrio).

Si no, entonces  $\mathbf{r}$  tiene la siguiente forma,

$$\mathbf{r}(s, t) = x\beta_1\mathbf{e} + x\beta_2\mathbf{k} \times \mathbf{e} + z\mathbf{k} = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2} \left[ \frac{\beta_1\mathbf{e}(t) + \beta_2\mathbf{k} \times \mathbf{e}(t)}{\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}} \right] x(s) + z(s)\mathbf{k} \quad (2.17)$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}(s, t) = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2} x(s)\dot{\mathbf{e}}(t) + z(s)\mathbf{k}, \quad (2.18)$$

lo que muestra que  $\mathbf{r}(\cdot, t)$  está confinada al plano generado por  $\{\dot{\mathbf{e}}(t), \mathbf{k}\}$ . Ajustando el origen del tiempo adecuadamente, podemos identificar a  $\dot{\mathbf{e}}$  con  $\mathbf{e}$  y entonces fijar  $x_1 = x$ ,  $u_1 = u$ ,  $x_2 = 0$  y  $u_2 = 0$ .

En efecto de la expresión para  $\ddot{\mathbf{e}}$ , definiendo a  $\tau$  mediante,

$$\cos \omega \tau = \frac{\beta_1}{\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}}, \quad \sin \omega \tau = \frac{\beta_2}{\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}},$$

tenemos que,

$$\ddot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{e}(t + \tau).$$

Así, el problema (2.4), (2.3), (2.8), (2.9) es equivalente a (2.3), (2.9), (2.13), (2.14) y

$$N(s) = \pm \sqrt{u^2(s) + [s\gamma(s) + \mu]^2}. \quad (2.19)$$

Combinando (2.19) y (2.13), (2.14) obtenemos,

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{u'(s)}{(\rho A)(s)} \right) \pm \frac{\omega^2 u(s) \hat{v}(\pm \sqrt{u^2(s) + [s\gamma(s) + \mu]^2}, s)}{\sqrt{u^2(s) + [s\gamma(s) + \mu]^2}} = 0, \quad (2.20)$$

sujeta a las condiciones de frontera,

$$g(\rho A)(0)u(0) = \mu u'(0) \quad (2.21)$$

$$u'(1) = 0. \quad (2.22)$$

Si  $\rho A$  no es diferenciable, entonces el significado de (2.20) está dado por (2.13), (2.14) y (2.19). A continuación, resolveremos la ambigüedad de signo de (2.19).

Puesto que  $s\gamma(s) \equiv g \int_0^s (\rho A)(\xi) d\xi > 0 \forall s$ , (2.9) implica que  $z'N(s) < 0$  (i.e.  $z'$  y  $N$  tienen signos opuestos). Una consecuencia física es que la cuerda sólo puede encontrarse, sea completamente arriba del soporte en el origen si  $N \leq 0$  o bien completamente por abajo de éste si  $N \geq 0$ . Veremos que el primer caso es de poco interés, como lo muestra la siguiente,

**Proposición 2.2** *La única solución clásica de (2.13), (2.14), (2.15), (2.19) -con el signo menos- es la solución trivial en la cual, en vista de (2.9), la cuerda está balanceada verticalmente por encima del soporte.*

**Prueba** Si  $\omega = 0$ , entonces por (2.13), (2.14) tenemos  $u' = 0 \Rightarrow u = \text{cte} = u(0) = \frac{\mu}{g(\rho A)(0)} u'(0) = 0 \Rightarrow u(s) = 0 \forall s$  lo que por (2.12)  $\Rightarrow x' = 0 \Rightarrow x = \text{cte} = x(1) = 0$  así  $r(s, t) = z(s)\mathbf{k}$ , i.e. solución trivial.

Supongamos ahora  $\omega \neq 0 \Rightarrow \omega^2 > 0$ .

Probaremos primero que  $u \leq 0$ . Supongamos que no es así, i.e. supongamos que  $u > 0$  para algún  $s$ . Por la continuidad de  $u$ , tendríamos que  $u$  admite un máximo  $u(\sigma) > 0$  en  $[0, 1]$ .<sup>1</sup> Ahora,  $\sigma$  no puede ser 0 pues en ese caso, la primera condición de (2.15) implicaría  $x(0) < 0$ , y (2.13) implicaría entonces que  $u'(0) > 0$ , lo que es incompatible con el carácter maximal de  $u(\sigma)$ . Si  $\sigma \in (0, 1)$  entonces  $u'(\sigma) = 0$  por cálculo elemental. Si  $\sigma = 1$  entonces (2.13) y (2.15) nos dirían que  $u'(1) = 0$ . Entonces, para  $\sigma \in (0, 1]$ , por (2.13), (2.14) y (2.19) (usando el signo menos), tendríamos que  $x(\sigma) = 0$  y  $x'(\sigma) < 0$ . La continuidad de  $x$  nos diría que  $x(\xi) > 0, \forall \xi \in [\sigma - \epsilon, \sigma)$ . Así (2.13) implica que  $u'(\xi) < 0 \forall \xi \in [\sigma - \epsilon, \sigma)$ , lo cual es contradictorio con el supuesto de que  $u(\sigma)$  era un máximo (i.e.  $\sigma$  es un punto donde  $u'$  cambia de signo de valores positivos a valores negativos); notemos que si  $u$  fuera dos veces continuamente diferenciable esta última aseveración se reduce a la conocida condición necesaria para la existencia de un máximo dada por  $u''(\sigma) \leq 0$ . Por lo tanto  $u \leq 0$ .

Observando que si  $(u, x)$  es solución, también lo es  $(-u, -x)$  tenemos por el resultado anterior que  $u \geq 0$ , de manera que  $u \equiv 0$  i.e. una solución trivial. Completando así la prueba.

La ecuación (2.20) con el signo (+) es un problema de valores propios no lineal. Es evidente que  $u = 0$  representa una solución trivial. Sin embargo, no resulta obvio que existan soluciones no triviales para valores arbitrarios del parámetro  $\omega$ . Además - como lo hicimos notar - es claro que si  $u$  es solución del problema, entonces  $cu$  es solución sólo para  $c = -1$ . De ahora en adelante, nos referiremos al par  $(u, x)$  y  $-(u, x)$  respectivamente como a una sola solución.

Escribiendo  $(\rho A)(s) \equiv \rho(s)$ , para simplificar la notación, el problema (2.8) (2.9) se reduce a

$$u(s) = -\omega^2 \int_0^s \rho(\xi)x(\xi) d\xi - \omega^2 \mu \frac{x(0)}{g} \quad (2.23)$$

$$x(s) = - \int_s^1 \frac{\hat{p}(N(\xi), \xi)u(\xi)}{N(\xi)} d\xi, \quad (2.24)$$

$$\text{con } N(s) = \sqrt{u^2(s) + (s\gamma(s) + \mu)^2}, \quad (2.25)$$

<sup>1</sup>Toda función continua alcanza sus extremos en un compacto.

$$y \quad s\gamma(s) = g \int_0^s \rho(\xi) d\xi. \quad (2.26)$$

En efecto, si  $(u, x)$  es solución de estas ecuaciones, entonces la solución,  $z(s)$ , de (2.9) se obtiene por simple integración. Esta formulación, derivada de la física, es equivalente a la formulación (2.13)- (2.15) y, para  $\mu > 0$  o para  $s > 0$ , es equivalente a (2.20)-(2.22), con el signo positivo. Definiendo a  $y(s) \equiv \omega x(s)$ , se obtiene también la forma más simétrica, la cual usaremos más adelante,

$$u(s) = -\omega \int_0^s \rho(\xi)y(\xi) d\xi - \omega\mu \frac{y(0)}{g} \quad (2.27)$$

$$y(s) = -\omega \int_s^1 \frac{\hat{v}(N(\xi), \xi)u(\xi)}{N(\xi)} d\xi, \quad (2.28)$$

El objetivo de este trabajo es el estudiar las soluciones no triviales de estas ecuaciones para  $\mu \geq 0$ , y en particular para  $\mu = 0$ . Hay por lo tanto dos posibles estrategias:

- (i) Estudiar el caso  $\mu > 0$ , un problema no lineal de Sturm-Liouville clásico para el cual uno puede aplicar sin problemas los resultados de bifurcación local y global de [C-R 71] [R-71a]. Tomar el "límite" de estos resultados cuando  $\mu$  tiende a 0: esto conlleva a dificultades al pasar al problema singular ya que en los puntos de bifurcación no hay unicidad de la solución y uno podría, en principio, obtener varios límites para el caso  $\mu = 0$ , al menos que se tenga un control fino sobre la convergencia.
- (ii) Analizar directamente el caso  $\mu = 0$  y, a partir de los resultados para ese caso, deducir sin dificultades las propiedades para el caso  $\mu > 0$  y su convergencia cuando  $\mu$  tiende a 0. En este caso la dificultad técnica es el estudio del caso singular, es decir la formulación integral en lugar de la formulación diferencial.

En este trabajo escogimos la segunda estrategia.

# Capítulo 3

## El problema de Kolodner

### 3.1 Introducción

En este capítulo, estudiaremos el problema singular de valores en la frontera de Kolodner. Kolodner[Ko] estudió el problema no lineal de valores propios, que describe estados estacionarios planos de una cuerda pesada, inextensible, que gira con un extremo libre. En acuerdo con la teoría lineal, una cuerda de longitud dada, sólo puede rotar a ciertas velocidades propias  $\omega_n$ , que constituyen un espectro discreto. Kolodner probó mediante la teoría más exacta del análisis no lineal, que ésta puede rotar a cualquier velocidad angular  $\omega > \omega_1$  y que para cada  $\omega$  en el rango  $\omega_n < \omega < \omega_{n+1}$  existen exactamente  $n$  modos distintos de rotación. Su trabajo - basado en una combinación del método de shooting y de la teoría de Sturm-Liouville - es justificadamente considerado un clásico de la entonces naciente teoría de *Bifurcación*.

En lo sucesivo, reescribiremos las ecuaciones con el objeto de que su forma final satisfaga las hipótesis del teorema de bifurcación. Pasemos entonces al problema de Kolodner.

### 3.2 Las ecuaciones de movimiento para el problema de Kolodner

Como mencionamos en la introducción de este capítulo, Kolodner estudió el problema de una cuerda uniforme, inelástica (es decir con  $\hat{\nu}(N(s), s) \equiv 1$ ) que gira alrededor del eje vertical y que está sujeta en uno de sus extremos. Así, además de las ecuaciones resultantes para la rotación estacionaria de cuerdas (2.13), (2.14), (2.15), tomaremos,

$$N(s) = \sqrt{u^2(s) + [s\gamma(s) + \mu]^2}. \quad (3.1)$$

Para simplificar la notación, escribiremos de ahora en adelante  $(\rho A)(s) \equiv \rho(s)$

### 3.3 Problema singular

En esta sección estudiaremos el problema singular i.e. cuando  $\mu = 0$ . Físicamente esto representa que no hay ningún peso suspendido en el extremo libre de la cuerda. Así, fijando el valor  $\mu = 0$  tenemos el siguiente problema singular:

$$u(s) = -\omega^2 \int_0^s \rho(\xi)x(\xi) d\xi, \quad (3.2)$$

$$x(s) = - \int_s^1 \frac{u(\xi) \dot{v}(\sqrt{u^2(\xi) + \xi^2 \gamma^2(\xi)}, \xi)}{\sqrt{u^2(\xi) + \xi^2 \gamma^2(\xi)}} d\xi, \quad (3.3)$$

o en la forma más simétrica (2.27), (2.28) con  $y(s) = \omega x(s)$ .

El problema anterior se puede considerar, como un problema de punto fijo del mapeo  $\mathbf{F}$  dado por,

$$\mathbf{F}[(u, x)] \equiv \begin{pmatrix} -\omega^2 \int_0^s \rho x d\xi \\ - \int_s^1 \frac{u \dot{v}(\sqrt{u^2 + \xi^2 \gamma^2}, \xi)}{\sqrt{u^2 + \xi^2 \gamma^2}} d\xi \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

También se puede pensar en un punto fijo del mapeo

$$\tilde{\mathbf{F}}[(u, y)] \equiv \begin{pmatrix} -\omega \int_0^s \rho y d\xi \\ -\omega \int_s^1 \frac{u \dot{v}(\sqrt{u^2 + \xi^2 \gamma^2}, \xi)}{\sqrt{u^2 + \xi^2 \gamma^2}} d\xi \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Las propiedades de  $\tilde{\mathbf{F}}$  se pueden deducir fácilmente de las propiedades de  $\mathbf{F}$ . La función  $\tilde{\mathbf{F}}$  será de utilidad más adelante, por lo tanto, aquí nos limitaremos al estudio de  $\mathbf{F}$ , dejando al lector la tarea de traducir los resultados correspondientes a  $\tilde{\mathbf{F}}$ .

A continuación veremos que  $\mathbf{F}$  es un mapeo,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} : C^0[0, 1] \times C^0[0, 1] &\rightarrow C^0[0, 1] \times C^0[0, 1] \\ (u(s), x(s)) &\mapsto \mathbf{F}[(u(\xi), x(\xi))](s), \end{aligned}$$

pero antes mencionaremos un teorema importante que nos será de utilidad.

**Teorema 3.1 (Arzelà - Ascoli)** Sea  $\{g_k\}$  una sucesión de funciones uniformemente acotadas (i) y equicontinuas (ii), i.e.  $g_k : \mathbf{K} \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{K}$  compacto

(i)  $\exists N$  independiente de  $k$ , tal que  $\text{Max}_s \{|g_k(s)| : s \in \mathbf{K}\} \leq N$

(ii)  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0$  tal que  $|g_k(s_1) - g_k(s_2)| < \epsilon$  si  $|s_1 - s_2| < \delta$ ,  $\forall s_1, s_2 \in \mathbf{K}$ ,  $\forall k$

$\Rightarrow \{g_k\}$  admite una subsucesión convergente.

**Definición:**

Sean  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{Y}$ , dos espacios métricos y  $\mathbf{F} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un mapeo entre estos dos espacios.  $\mathbf{F}$  es un mapeo compacto, si toda sucesión acotada en  $\mathcal{X}$ , tiene como imagen en  $\mathcal{Y}$  a un precompacto, es decir, a un subconjunto de  $\mathcal{Y}$  del cual se puede extraer una subsucesión convergente.

i.e.  $\forall \{x_k\}$  tal que  $|x_k|_{\mathcal{X}} \leq M$ ,  $\exists y \in \mathcal{Y}$  tal que  $\mathbf{F}(x_k) \rightarrow y \in \mathcal{Y}$ .

Veremos que  $\mathbf{F}$  es un mapeo compacto de  $C^0 \times C^0$  en  $C^0 \times C^0$ .

### 3.4 Compacidad del mapeo F

Sea entonces  $\{(u_k(s), x_k(s))\} \in C^0[0, 1] \times C^0[0, 1]$  tal que<sup>1</sup>  $|u_k|_0, |x_k|_0 < M$ . Si  $\mathbf{F}[(u, x)] \equiv (f_1[x], f_2[u])$ , entonces,

$$|f_1[x_k](s)|_0 \leq \omega^2 |x_k|_0 |\rho|_0 s \leq \omega^2 |\rho|_0 M,$$

$$|f_2[u_k](s)|_0 \leq \eta(1 - s) \leq \eta.$$

<sup>1</sup>  $|\cdot|_0$  denota la norma del supremo.

Donde usamos el hecho de que  $|u/\sqrt{u^2 + \xi^2 \gamma^2}| \leq 1$  y  $\hat{v}$  continuo por lo que  $|\hat{v}| \leq \eta$ , ver figura (2.4). Así tenemos que

$$|\mathbf{F}[(u_k, x_k)](s)|_0 = |f_1|_0 + |f_2|_0 < \eta + \omega^2 |\rho|_0 M. \quad (3.6)$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{F}[(u_k, x_k)](s) \text{ son uniformemente acotadas.}$$

Por otra parte,

$$|f_1[x_k](s) - f_1[x_k](s_0)|_0 \leq \omega^2 M |s - s_0|,$$

$$|f_2[u_k](s) - f_2[u_k](s_0)|_0 \leq \eta |s - s_0|,$$

Así, probamos que  $\mathbf{F}[(u_k, x_k)](s)$  son *equicontinuas*. Por el teorema de Arzelà-Ascoli, tenemos que existe una subsucesión uniformemente convergente y puesto que el límite uniforme de funciones continuas, es una función continua tenemos el resultado.

Ahora estudiaremos la continuidad del mapeo  $\mathbf{F}$ .

## 3.5 Continuidad del mapeo $\mathbf{F}$

### 3.5.1 Continuidad del mapeo $f_1 : C^0[0, 1] \longrightarrow C^0[0, 1]$

$$|f_1[x](s) - f_1[y](s)|_0 = \left| -\omega^2 \int_0^s \rho(x - y) d\xi \right|_0 \leq \omega^2 |\rho|_0 |x - y|_0.$$

Así,  $f_1$  es Lipschitz continuo de  $C^0[0, 1]$  a  $C^0[0, 1]$ .

### 3.5.2 Continuidad del mapeo $f_2$

Definiendo las expresiones  $A, B, C$ , como :

$$A \equiv |f_2[u](s) - f_2[v](s)|, \quad (3.7)$$

$$B \equiv \int_s^1 |u - v| \frac{\hat{v}(u)}{\sqrt{u^2 + \xi^2 \gamma^2}} d\xi, \quad (3.8)$$

$$C \equiv \int_s^1 |v| \left| \frac{\hat{v}(u)}{\sqrt{u^2 + \xi^2 \gamma^2}} - \frac{\hat{v}(v)}{\sqrt{v^2 + \xi^2 \gamma^2}} \right| d\xi, \quad (3.9)$$

donde  $\hat{v}(u) \equiv \hat{v}(\sqrt{u^2 + \xi^2 \gamma^2}, \xi)$  y análogamente para  $\hat{v}(v)$ , es fácil ver que,

$$A \leq B + C. \quad (3.10)$$

Observando que,

$$\begin{aligned} \sqrt{u^2 + \xi^2 \gamma^2} \geq \xi \gamma(\xi) &\Rightarrow \int_s^1 \frac{d\xi}{\sqrt{u^2 + \xi^2 \gamma^2}} \leq -\frac{\text{Log } s}{g \rho_{\min}}, \\ \gamma(s) &\equiv \frac{g}{s} \int_0^s \rho(\xi) d\xi \geq g \rho_{\min}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

tenemos las siguientes estimaciones para los términos  $B$  y  $C$  definidos por las expresiones (3.8), (3.9), respectivamente ;

$$B \leq |u - v|_0 |\hat{v}(u)|_0 \left( -\frac{\text{Log } s}{g \rho_{\min}} \right), \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} C &= \int_s^1 |v| \left| \frac{\hat{v}(u) - \hat{v}(v)}{\sqrt{v^2 + \xi^2 \gamma^2}} + \frac{\hat{v}(u)}{\sqrt{u^2 + \xi^2 \gamma^2} \sqrt{v^2 + \xi^2 \gamma^2}} (\sqrt{v^2 + \xi^2 \gamma^2} - \sqrt{u^2 + \xi^2 \gamma^2}) \right| d\xi \\ &\leq D + E. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Donde  $D$  y  $E$  denotan los términos siguientes:

$$D \equiv \int_s^1 \frac{|v|}{\sqrt{v^2 + \xi^2 \gamma^2}} |\hat{v}(u) - \hat{v}(v)| d\xi, \quad (3.14)$$

$$E \equiv \int_s^1 \frac{|v| \hat{v}(u) |v^2 - u^2|}{\sqrt{u^2 + \xi^2 \gamma^2} \sqrt{v^2 + \xi^2 \gamma^2} (\sqrt{u^2 + \xi^2 \gamma^2} + \sqrt{v^2 + \xi^2 \gamma^2})} d\xi. \quad (3.15)$$

Ahora, usando el teorema fundamental del cálculo, escribimos,

$$\begin{aligned} \hat{v}(u) - \hat{v}(v) &= \int_0^1 \frac{d}{d\tau} \hat{v}(\sqrt{(v + \tau(u-v))^2 + \xi^2 \gamma^2}, \xi) d\tau = \int_0^1 \hat{v}_N \frac{(v + \tau(u-v))(u-v)}{\sqrt{(v + \tau(u-v))^2 + \xi^2 \gamma^2}} d\tau \\ &\leq |\hat{v}_N|_0 |u-v|_0, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow D \leq \int_s^1 |\hat{v}(u) - \hat{v}(v)| d\xi \leq |\hat{v}_N|_0 |u-v|_0 (1-s). \quad (3.16)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} E &\leq \int_s^1 \frac{\hat{v}(u) |u-v|}{\sqrt{u^2 + \xi^2 \gamma^2}} \left( \frac{|v|}{\sqrt{v^2 + \xi^2 \gamma^2}} \right) \left( \frac{|u| + |v|}{\sqrt{u^2 + \xi^2 \gamma^2} + \sqrt{v^2 + \xi^2 \gamma^2}} \right) d\xi \\ &\leq |\hat{v}(u)|_0 |u-v|_0 \left( -\frac{\text{Log } s}{g\rho_{\min}} \right), \end{aligned} \quad (3.17)$$

por las desigualdades (3.16), (3.17), tenemos por (3.13);

$$C \leq |u-v|_0 |\hat{v}(u)|_0 \frac{|\text{Log } s|}{g\rho_{\min}} + |\hat{v}_N|_0 |u-v|_0 (1-s). \quad (3.18)$$

A partir de las expresiones (3.18), (3.12), recordando el significado de  $A$  y su relación con  $B$  y  $C$  -ver (3.10)- no podemos concluir sobre la continuidad de  $f_2$  cuando  $s \rightarrow 0$ . De hecho, no insistiremos más en esta dirección ya que al calcular la derivada de Gâteaux [Ize 87, def. 3.1, II.3 pág. 28] de  $\mathbf{F}$  en la solución trivial  $(u, x) = (0, 0)$ , obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon} \mathbf{F}[(\epsilon h, \epsilon k)](s) |_{\epsilon=0} &\equiv D_{(h,k)} \mathbf{F}[(0, 0)](s) = \begin{pmatrix} D_k f_1[0](s) \\ D_h f_2[0](s) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\omega^2 \int_0^s \rho(\xi) k(\xi) d\xi \\ -\int_s^1 \frac{h(\xi) \hat{v}(\xi \gamma(\xi), \xi)}{\xi \gamma(\xi)} d\xi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora tomando como dirección a  $h(s) = (\text{Log } s/2)^{-1}$  para la segunda componente, tenemos que,

$$\begin{aligned} \left| - \int_s^1 \frac{\hat{\nu}(\xi\gamma, \xi)}{\xi\gamma \text{Log} \frac{\xi}{2}} d\xi \right| &\geq \frac{|\hat{\nu}|_{\min}}{|\gamma|_0} \int_s^1 \frac{d\xi}{\xi \text{Log} \frac{\xi}{2}} \\ &\geq \frac{|\hat{\nu}|_{\min}}{2|\gamma|_0} \text{Log} \left| \text{Log} \frac{\xi}{2} \right| \Big|_s^1 \rightarrow \infty \text{ cuando } s \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Es decir, no tenemos derivada de Gâteaux de  $f_2$  en todas las direcciones, por lo que  $f_2$  no es Fréchet [Ize 87, prop. 3.2,3.3, II.3 pág. 31] diferenciable en  $u = 0$ .

**Nota:**

$f_2[u](s)$  es Gâteaux diferenciable en  $u = 0$ , en todas las direcciones  $h$  tales que  $|h| < c\xi^\alpha$  con  $\alpha > 0$ . En efecto,

$$\begin{aligned} |D_h f_2[0](s)| &= \left| \int_s^1 \frac{h(\xi) \hat{\nu}(\xi\gamma(\xi), \xi)}{\xi\gamma(\xi)} d\xi \right| \\ &\leq \tilde{c} \int_s^1 \frac{d\xi}{\xi^{1-\alpha}} \\ &\leq \frac{\tilde{c}}{\alpha} (1 - s^\alpha) \rightarrow \frac{\tilde{c}}{\alpha}, \text{ cuando } s \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Esta limitación es consecuencia de haber fijado el valor  $\mu = 0$ . Una manera de atacar el problema, sería considerar un conjunto numerable de problemas con  $\mu_n > 0$  tales que  $\mu_n \rightarrow 0$ , conforme  $n \rightarrow \infty$ . Para estos problemas (no singulares) se satisfacen las hipótesis del teorema de bifurcación global [Ant1, V-4-19 pág. 156]. Finalmente se podría usar el teorema [Ant1, V-4-21 pág. 157] para probar que el problema límite preserva las mismas propiedades en las ramas de soluciones bifurcadas que las correspondientes a los problemas penalizados. Veremos más adelante, en el capítulo 5, una prueba alternativa. Ver también los comentarios relativos en las conclusiones.

### 3.6 Cambio de variables

Para este problema contamos con la siguiente alternativa.

Sean,

$$u(s) = \sqrt{s}w(s), \quad (3.19)$$

$$h(w(s), s) = \frac{\hat{\nu}(\sqrt{sw^2(s) + s^2\gamma^2(s)}, s)}{\sqrt{w^2(s) + s\gamma^2(s)}}, \quad (3.20)$$

entonces (3.2), (3.3), se escriben como: <sup>2</sup>

$$w(s) = -\frac{\omega^2}{\sqrt{s}} \int_0^s \rho(\xi)x(\xi) d\xi \equiv f_1[x](s), \quad (3.21)$$

$$x(s) = -\int_s^1 w(\xi)h(w(\xi), \xi) d\xi \equiv f_2[w](s). \quad (3.22)$$

Definiendo así un nuevo mapeo que también denotaremos por  $\mathbf{F}[w, x]$ . Ahora,

$$f_1[x+k](s) - f_1[x](s) = -\frac{\omega^2}{\sqrt{s}} \int_0^s \rho(\xi)k(\xi) d\xi \equiv Df_1[x](s)k. \quad (3.23)$$

Donde  $Df_1[x](s) : C^0[0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ , es un operador lineal acotado por  $\omega^2 |\rho|_0$ , i.e.  $Df_1[x]$  es la derivada de Fréchet [Ize 87, def. 3.2, II.3 pág 29] de  $f_1$ , por lo que  $f_1$  es continuo de  $C^0[0, 1]$  en  $C^0[0, 1]$ .

Por otra parte,

$$D_\varphi f_2[w](s) = -\int_s^1 \varphi(h(w, \xi) + wh_w(w, \xi)) d\xi, \quad (3.24)$$

donde,

$$wh_w(w, \xi) = w^2 \left( \frac{\sqrt{\xi} \hat{\nu}_N(\sqrt{\xi w^2 + \xi^2 \gamma^2}, \xi)}{w^2 + \xi \gamma^2} - \frac{\hat{\nu}(\sqrt{\xi w^2 + \xi^2 \gamma^2}, \xi)}{(w^2 + \xi \gamma^2)^{3/2}} \right). \quad (3.25)$$

Ahora usando las estimaciones siguientes,

$$\frac{w^{2(1-\epsilon)}}{(w^2 + s\gamma^2)^{1-\epsilon}} \leq 1$$

<sup>2</sup> Hemos usando los mismos nombres para el lado derecho de la expresión. Veremos más adelante la conveniencia cuando estudiemos la continuidad de estos nuevos mapeos.

$$\frac{|w|^2}{(w^2 + s\gamma^2)^{3/2}} = \frac{|w|^{2\epsilon} |w|^{2(1-\epsilon)}}{(w^2 + s\gamma^2)^{1-\epsilon} (w^2 + s\gamma^2)^{\frac{1}{2}+\epsilon}} \leq \frac{|w|^{2\epsilon}}{(w^2 + s\gamma^2)^{\frac{1}{2}+\epsilon}}, \quad (3.26)$$

queremos probar que el segundo término del lado derecho de la ecuación (3.24) es  $O(|w|_0)$ . A partir de la expresión (3.26), tenemos,

$$\begin{aligned} \int_s^1 \frac{|\varphi| w^2 \hat{\nu}}{(w^2 + \xi\gamma^2)^{3/2}} d\xi &\leq |\varphi|_0 |\hat{\nu}|_0 \int_s^1 \frac{|w|^{2\epsilon}}{(w^2 + \xi\gamma^2)^{\frac{1}{2}+\epsilon}} d\xi \\ &\leq \frac{|\varphi|_0 |\hat{\nu}|_0 |w|_0^{2\epsilon}}{g^{1+2\epsilon} \rho_{\min}^{1+2\epsilon}} \frac{1 - s^{\frac{1}{2}-\epsilon}}{\frac{1}{2} - \epsilon} \leq K |w|_0^{2\epsilon} |\varphi|_0 \\ \int_s^1 \left| \frac{\varphi w^2 \sqrt{\xi} \hat{\nu}_N}{w^2 + \xi\gamma^2} \right| d\xi &\leq 2 \frac{|\varphi|_0 |w|_0^2 |\hat{\nu}_N|_0}{g^2 \rho_{\min}^2} (1 - \sqrt{s}) \leq \tilde{K} |w|_0^2 |\varphi|_0, \end{aligned}$$

donde hicimos uso de la desigualdad  $(w^2 + \xi\gamma^2)^{-1} \leq (\xi\gamma^2)^{-1}$ . Tomando  $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$

$$K |w|_0^{2\epsilon} |\varphi|_0, \tilde{K} |w|_0^2 |\varphi|_0 \rightarrow 0 \text{ uniformemente,}$$

$$\forall s \in [0, 1] \text{ y } \forall \varphi \in C^0[0, 1], \quad |\varphi|_0 \leq M \text{ cuando } |w|_0 \rightarrow 0,$$

i.e. lo que se quería probar. Entonces, evaluando la expresión (3.24) en  $w = 0$ , obtenemos,

$$D_\varphi f_2[0](s) = - \int_s^1 \varphi h(0, \xi) d\xi.$$

Claramente  $D_\varphi f_2[0](s)$  es un funcional lineal y continuo pues,

$$|D_\varphi f_2[0](s)| \leq 2 \frac{|\varphi|_0 |\hat{\nu}|_0}{g \rho_{\min}} (1 - \sqrt{s}) \leq \tilde{M} |\varphi|_0.$$

Veremos que de hecho  $D_\varphi f_2[0](s) = Df_2[0](s)\varphi$ , i.e.  $f_2$  es Fréchet diferenciable en  $w = 0$ . Para esto, probamos que  $f_2$  se escribe como,

$$f_2[w](s) = f_2[0](s) + Df_2[0](s)w + o(|w|_0), \quad (3.27)$$

es decir, puesto que  $f_2[0](s) = 0$ , hay que probar que,  $|f_2[w](s) - D_w f_2[0](s)|_0 = o(|w|_0)$  para toda  $w \in C^0[0, 1]$ ; o bien que  $f_2$  es  $C^1$ , i.e.  $f_2$  continuamente Fréchet diferenciable en  $w = 0$ .<sup>3</sup>

En este caso, de la relación (3.24), es claro que  $D_\varphi f_2[w]$  es lineal en  $\varphi$  y

$$|D_\varphi f_2[w](s)|_0 \leq |\varphi|_0 K(1 - \sqrt{s}) + \tilde{K} |\varphi|_0 |w|_0^{2c} + \tilde{K} |\varphi|_0 |w|_0^2,$$

$\Rightarrow D_\varphi f_2[w](s)$  es un operador lineal continuo de  $C^0 \rightarrow C^0$ .

$$\text{Además } \left| - \int_s^1 \varphi w h_w d\xi \right|_0 \leq |\varphi|_0 (K |w|_0^{2c} + \tilde{K} |w|_0^2) \rightarrow 0, \quad (3.28)$$

conforme  $|w|_0 \rightarrow 0 \quad \forall \varphi$  tales que  $|\varphi|_0 \leq M$  i.e. tiende a 0 en norma.

Finalmente, la otra parte del residuo, que denotaremos por  $H$ ,

$$H \equiv \left| - \int_s^1 \varphi (h(w, \xi) - h(0, \xi)) d\xi \right|,$$

$$\begin{aligned} H &\leq \int_s^1 |\varphi| \left| \frac{\hat{v}(w) - \hat{v}(0)}{\sqrt{\xi}\gamma} + \frac{\hat{v}(w)(\sqrt{\xi}\gamma - \sqrt{w^2 + \xi\gamma^2})}{\sqrt{\xi}\gamma\sqrt{w^2 + \xi\gamma^2}} \right| d\xi \\ &\leq 2 \frac{|\varphi|_0 |\hat{v}(w) - \hat{v}(0)|_0}{g\rho_{\min}} (1 - \sqrt{s}) + |\varphi|_0 |\hat{v}(w)|_0 \int_s^1 \frac{w^2 d\xi}{\sqrt{\xi}\gamma\sqrt{w^2 + \xi\gamma^2}(\sqrt{\xi}\gamma + \sqrt{w^2 + \xi\gamma^2})} \\ &\leq C |\varphi|_0 |w|_0 + \tilde{C} |\varphi|_0 |\hat{v}(w)|_0 |w|_0^{1/2} \rightarrow 0 \text{ conforme } |w|_0 \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Donde usamos la relación;  $2ab \leq a^2 + b^2$  con,

$$a^2 = \sqrt{\xi}\gamma,$$

$$b^2 = \sqrt{w^2 + \xi\gamma^2},$$

las siguientes implicaciones, donde  $J$  representa el término integral del lado derecho de la desigualdad anterior a (3.29),

<sup>3</sup>i.e.  $Df_2[w](s)$  existe en una vecindad de  $w = 0$  y  $Df_2[w](s) \rightarrow Df_2[0](s)$  en la norma del operador, aquí  $| \cdot |_0$ .

$$\left(\sqrt{\xi\gamma}\sqrt{w^2 + \xi\gamma^2} \left(\sqrt{\xi\gamma} + \sqrt{w^2 + \xi\gamma^2}\right)\right)^{-1} \leq \left(2\xi^{3/4}\gamma^{3/2} (w^2 + \xi\gamma^2)^{3/4}\right)^{-1}$$

$$J \leq \frac{4|w|_0^{1/2}(1-s^{1/4})}{2g^{3/2}\rho_{\min}^{3/2}} \\ \leq \check{C}|w|_0^{1/2},$$

y el hecho de que  $\hat{\nu}$  es  $C^1$  implica que  $|\hat{\nu}(w) - \hat{\nu}(0)|_0 \leq C|w|_0$ .

Así por (3.28), (3.29), tenemos que  $|D_\varphi f_2[w](s) - D_\varphi f_2[0](s)|_0$  tiende a 0 conforme  $|w|_0$  se aproxima a 0 para toda  $\varphi \in C^0[0, 1]$  tal que  $|\varphi|_0 \leq M$ , i.e.  $f_2$  es continuamente Fréchet diferenciable en  $w = 0$ , lo que concluye la prueba de (3.27).

Habiendo probado que es continuamente Fréchet <sup>4</sup> diferenciable en  $(w, x) = (0, 0)$ , podemos desarrollar  $\mathbf{F}$  a primer orden.

$$\mathbf{F}[(w, x)](s) = \mathbf{F}[(0, 0)](s) + D\mathbf{F}[(0, 0)](w, x)(s) + o(|x|_0 + |w|_0) \\ \equiv \mathbf{L}(\omega^2) \cdot [(w, x)](s) + \mathbf{g}[\omega^2, (w, x)](s). \quad (3.30)$$

Así el sistema formado por (3.21), (3.22), se descompone como (3.30), donde

$$\mathbf{L}(\omega^2) \cdot [(w, x)] \equiv D\mathbf{F}[(0, 0)] \cdot (w, x) = \begin{pmatrix} -\frac{\omega^2}{\sqrt{s}} \int_0^s \rho(\xi)x(\xi) d\xi \\ -\int_s^1 w(\xi)h(0, \xi) d\xi \end{pmatrix}, \quad (3.31) \\ \mathbf{g}[\omega^2, (w, x)] = \begin{pmatrix} 0 \\ -\int_s^1 w(\xi)(h(w(\xi), \xi) - h(0, \xi)) d\xi \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, podemos pensar el problema original, como una perturbación no lineal del problema linealizado en una vecindad de la solución trivial  $(w, x) = (0, 0)$ . A continuación, estudiaremos la compacidad y la continuidad de estos mapeos.

<sup>4</sup>Por lo tanto  $\mathbf{F}$  es continua en  $(0, 0)$

Notemos que para la forma simétrica (2.27), (2.28), con  $y(s) = \omega x(s)$ , podemos escribir

$$\tilde{\mathbf{F}}[(w, y)] = -\omega \left( \tilde{\mathbf{L}}[(w, y)] + \tilde{\mathbf{g}}[(w, y)] \right) \quad (3.32)$$

$$\text{con } \tilde{\mathbf{L}}[(w, y)] \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{s}} \int_0^s \rho(\xi) y(\xi) d\xi \\ \int_s^1 w(\xi) h(0, \xi) d\xi \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

$$\tilde{\mathbf{g}}[(w, y)] \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \int_s^1 w(\xi) (h(w(\xi), \xi) - h(0, \xi)) d\xi \end{pmatrix}.$$

### 3.7 Compacidad y continuidad del mapeo $\mathbf{F}$

5

En esta sección probaremos que  $\mathbf{F}$  es un mapeo continuo de  $C^0 \times C^0$  en  $C^{0,1/2} \times C^{0,1/2}$ .

**Para  $s > 0$**

Es inmediato ver que  $f_1$  y  $f_2$  son  $C^1$  con,

$$f_1' = \frac{\omega^2}{2s^{3/2}} \int_0^s \rho(\xi) x(\xi) d\xi - \frac{\omega^2}{\sqrt{s}} \rho(s) x(s), \quad (3.34)$$

$$f_2' = w(s) h(w(s), s). \quad (3.35)$$

**Para  $s \rightarrow 0$**

Utilizando el mismo razonamiento que en secciones anteriores, es claro que,

<sup>5</sup>El título de esta sección, no debe causar confusión con su homólogo (3.5), pues no hay que olvidar que se efectuó un cambio de variables después del cual adoptamos los mismos nombres que en secciones anteriores para no saturar la notación, y porque determinaremos y justificaremos varias cotas para las desigualdades basados en estimaciones previas.

$$|f_1| \leq \frac{\omega^2}{\sqrt{s}} |\rho|_0 |x|_0 \quad s \leq \omega^2 |\rho|_0 |x|_0$$

$$|f_2| \leq \eta(1-s) \leq \eta \quad \text{donde } \eta \text{ sólo depende de } |w|_0.$$

De aquí que  $|f_1|, |f_2| \leq \tilde{M} \quad \forall s \in [0, 1]$ . Claramente de la desigualdad para  $|f_1|$ , se tiene que este último tiende a cero cuando  $s$  lo hace. De hecho, por la regla de l' Hôpital,

$$\lim_{s \rightarrow 0} f_1(s) = -\omega^2 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\rho(s)x(s)}{\frac{1}{2\sqrt{s}}} = 0 \quad \text{por lo tanto} \quad f_1(0) = 0. \quad (3.36)$$

Por otra parte,  $|f_2| \leq \tilde{M}$  en  $[0, 1]$ , de manera que  $f_2(0)$  existe por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue [Roy, 4-16 pág. 91] y

$$|f_2(s) - f_2(0)| \leq \int_0^s |w|h(w, \xi) d\xi \leq \frac{2|w|_0|\hat{\nu}|_0}{g\rho_{\min}} \sqrt{s} \xrightarrow{s \rightarrow 0} 0, \quad (3.37)$$

Así,  $f_1$  y  $f_2 \in C^0[0, 1] \quad \forall (w, x) \in C^0 \times C^0$ .

### 3.7.1 Hölder continuidad de $f_1$ como función de $s$

Sin pérdida de generalidad, sea  $s \geq s_0 > 0$ . De las siguientes relaciones:

$$\frac{\sqrt{s} - \sqrt{s_0}}{\sqrt{s}} \sqrt{s_0} = \frac{(s - s_0)\sqrt{s_0}}{\sqrt{s}(\sqrt{s} + \sqrt{s_0})} \leq \sqrt{s - s_0} \sqrt{\frac{s_0}{s + s_0}} \sqrt{\frac{s - s_0}{s + s_0}} \leq \sqrt{s - s_0} \quad (3.38)$$

$$\frac{s - s_0}{\sqrt{s}} = \sqrt{s - s_0} \sqrt{\frac{s - s_0}{s}} \leq \sqrt{s - s_0}, \quad (3.39)$$

se infiere que,

$$\begin{aligned} f_1(s) - f_1(s_0) &= -\omega^2 \left[ \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{s_0}^s \rho x d\xi + \left( \frac{1}{\sqrt{s}} - \frac{1}{\sqrt{s_0}} \right) \int_0^{s_0} \rho x d\xi \right] \\ |f_1(s) - f_1(s_0)| &\leq \omega^2 \left[ |\rho|_0 |x|_0 \frac{s - s_0}{\sqrt{s}} + \frac{\sqrt{s} - \sqrt{s_0}}{\sqrt{s}\sqrt{s_0}} s_0 |\rho|_0 |x|_0 \right] \\ &\leq 2\omega^2 |\rho|_0 |x|_0 \sqrt{s - s_0}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$|f_1| \leq \frac{\omega^2}{\sqrt{s}} |\rho|_0 |x|_0 \quad s \leq \omega^2 |\rho|_0 |x|_0$$

$$|f_2| \leq \eta(1-s) \leq \eta \quad \text{donde } \eta \text{ sólo depende de } |w|_0.$$

De aquí que  $|f_1|, |f_2| \leq \tilde{M} \quad \forall s \in [0, 1]$ . Claramente de la desigualdad para  $|f_1|$ , se tiene que este último tiende a cero cuando  $s$  lo hace. De hecho, por la regla de l' Hôpital,

$$\lim_{s \rightarrow 0} f_1(s) = -\omega^2 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\rho(s)x(s)}{\frac{1}{2\sqrt{s}}} = 0 \quad \text{por lo tanto} \quad f_1(0) = 0. \quad (3.36)$$

Por otra parte,  $|f_2| \leq \tilde{M}$  en  $[0, 1]$ , de manera que  $f_2(0)$  existe por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue [Roy, 4-16 pág. 91] y

$$|f_2(s) - f_2(0)| \leq \int_0^s |w| h(w, \xi) d\xi \leq \frac{2|w|_0 |\hat{\nu}|_0}{g\rho_{\min}} \sqrt{s} \xrightarrow{s \rightarrow 0} 0, \quad (3.37)$$

Así,  $f_1$  y  $f_2 \in C^0[0, 1] \quad \forall (w, x) \in C^0 \times C^0$ .

### 3.7.1 Hölder continuidad de $f_1$ como función de $s$

Sin pérdida de generalidad, sea  $s \geq s_0 > 0$ . De las siguientes relaciones:

$$\frac{\sqrt{s} - \sqrt{s_0}}{\sqrt{s}} \sqrt{s_0} = \frac{(s - s_0)\sqrt{s_0}}{\sqrt{s}(\sqrt{s} + \sqrt{s_0})} \leq \sqrt{s - s_0} \sqrt{\frac{s_0}{s + s_0}} \sqrt{\frac{s - s_0}{s + s_0}} \leq \sqrt{s - s_0} \quad (3.38)$$

$$\frac{s - s_0}{\sqrt{s}} = \sqrt{s - s_0} \sqrt{\frac{s - s_0}{s}} \leq \sqrt{s - s_0}, \quad (3.39)$$

se infiere que,

$$\begin{aligned} f_1(s) - f_1(s_0) &= -\omega^2 \left[ \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{s_0}^s \rho x d\xi + \left( \frac{1}{\sqrt{s}} - \frac{1}{\sqrt{s_0}} \right) \int_0^{s_0} \rho x d\xi \right] \\ |f_1(s) - f_1(s_0)| &\leq \omega^2 \left[ |\rho|_0 |x|_0 \frac{s - s_0}{\sqrt{s}} + \frac{\sqrt{s} - \sqrt{s_0}}{\sqrt{s}\sqrt{s_0}} s_0 |\rho|_0 |x|_0 \right] \\ &\leq 2\omega^2 |\rho|_0 |x|_0 \sqrt{s - s_0}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

así como  $f_1$  es  $C^0[0, 1]$ , por (3.40) tenemos que,

$$|f_1|_{0,1/2} \leq 3\omega^2 |\rho|_0 |x|_0 \quad (3.41)$$

$$|f_1|_{0,1/2} \equiv |f_1|_0 + \text{Max}_{s \neq s_0} \frac{|f_1(s) - f_1(s_0)|}{\sqrt{s - s_0}}. \quad (3.42)$$

Es decir  $f_1$  es  $C^{0,1/2}$ .

### 3.7.2 Lipschitz continuidad de $f_1$ como mapeo de $C^0 \rightarrow C^{0,1/2}$

A partir de la relación (3.21), que define a  $f_1$  es claro que  $f_1[x](s)$  es un mapeo lineal, por lo que usando (3.41) de la sección anterior, podemos escribir,

$$|f_1[x](s) - f_1[y](s)|_{0,1/2} \leq 3\omega^2 |\rho|_0 |x - y|_0 ; \quad (3.43)$$

lo que muestra que  $f_1$  es Lipschitz continuo como operador de  $C^0 \rightarrow C^{0,1/2}$ .

### 3.7.3 Hölder continuidad de $f_2$ como función de $s$

Utilizando el mismo camino que seguimos al principio de la sección, tenemos directamente que,

$$\frac{|f_2[w](s) - f_2[w](s_0)|}{\sqrt{s - s_0}} \leq \eta \sqrt{s - s_0} \leq 2\eta, \quad (3.44)$$

y puesto que  $f_2$  es  $C^0$ , se concluye que  $|f_2|_{0,1/2} \leq 3\eta$ , i.e.  $f_2$  es  $C^{0,1/2}$ .

### 3.7.4 Lipschitz continuidad de $f_2$ como mapeo de $C^0 \rightarrow C^0$

Sean entonces  $w$  y  $w_0$  dos funciones continuas en  $[0, 1]$ . Así, definiendo a  $h(w) \equiv h(w(s), s)$ , es inmediato que,

$$R \equiv \int_s^1 |w - w_0| h(w) d\xi, \quad (3.45)$$

$$S \equiv \int_s^1 |w_0| |h(w) - h(w_0)| d\xi, \quad (3.46)$$

$$|f_2[w](s) - f_2[w_0](s)| \leq R + S. \quad (3.47)$$

Usando el mismo razonamiento que en la derivación de las expresiones (3.12), (3.13), (3.16), (3.17), encontramos sin mayor dificultad,

$$R \leq \frac{2|w - w_0|_0 |\hat{v}(w)|_0 (1 - \sqrt{s})}{g\rho_{\min}}, \quad (3.48)$$

$$S \leq T + V \quad \text{donde } T \text{ y } V \text{ están dados por,} \quad (3.49)$$

$$T \equiv \int_s^1 |w_0| \left| \frac{\hat{v}(w) - \hat{v}(w_0)}{\sqrt{w_0^2 + \xi\gamma^2}} \right| d\xi, \quad (3.50)$$

$$V \equiv \int_s^1 |w_0| |\hat{v}(w)| \left| \frac{\sqrt{w_0^2 + \xi\gamma^2} - \sqrt{w^2 + \xi\gamma^2}}{\sqrt{w_0^2 + \xi\gamma^2} \sqrt{w^2 + \xi\gamma^2}} \right|, \quad (3.51)$$

análogamente,

$$\hat{v}(w) - \hat{v}(w_0) = \int_0^1 \hat{v}_N \frac{\xi(w_0 + \tau(w - w_0))(w - w_0)}{\sqrt{\xi(w_0 + \tau(w - w_0))^2 + \xi^2\gamma^2}} d\tau \quad (3.52)$$

$$|\hat{v}(w) - \hat{v}(w_0)| \leq |\hat{v}_N|_0 \sqrt{\xi} |w - w_0|_0. \quad (3.53)$$

Donde usamos la desigualdad  $[(w_0 + \tau(w - w_0)) \sqrt{\xi}] [\xi(w_0 + \tau(w - w_0))^2 + \xi^2\gamma^2]^{-1/2} \leq 1$ . Así,

$$T \leq 2/3 |\hat{v}_N|_0 |w - w_0|_0 (1 - s^{3/2}) \quad (3.54)$$

$$\leq 2 |\hat{v}_N|_0 |w - w_0|_0 (1 - \sqrt{s}), \quad (3.55)$$

donde claramente usamos  $1 - (s^{1/2})^3 = (1 - s^{1/2})(1 + s^{1/2} + s) \leq 3(1 - \sqrt{s})$  en el último paso de la expresión anterior.

Por otra parte,

$$\begin{aligned} V &= \int_s^1 \left( \frac{|w_0|}{\sqrt{w_0^2 + \xi\gamma^2}} \right) \frac{\hat{\nu}(w)}{\sqrt{w^2 + \xi\gamma^2}} |w - w_0| \left( \frac{|w| + |w_0|}{\sqrt{w^2 + \xi\gamma^2} + \sqrt{w_0^2 + \xi\gamma^2}} \right) d\xi \\ &\leq \frac{2|w - w_0|_0 |\hat{\nu}(w)|_0}{g\rho_{min}} (1 - \sqrt{s}). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Juntando los resultados (3.48), (3.55), (3.56), por (3.49) y la desigualdad (3.47), tenemos finalmente:

$$\begin{aligned} |f_2[w](s) - f_2[w_0](s)| &\leq 2|w - w_0|_0 (1 - \sqrt{s}) \left( \frac{2|\hat{\nu}(w)|_0}{g\rho_{min}} + |\hat{\nu}_N|_0 \right) \\ &\leq c|w - w_0|_0 (1 - \sqrt{s}) |\hat{\nu}|_{\mathcal{H}}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

donde  $|\hat{\nu}|_{\mathcal{H}} \equiv |\hat{\nu}|_0 + |\hat{\nu}_N|_0$ . Así,  $f_2$  es un mapeo Lipschitz continuo de  $C^0$  en  $C^0$ . De hecho, veremos que  $f_2$  es un mapeo Lipschitz de  $C^0$  en  $C^{0,1/2}$ .

### 3.7.5 Lipschitz continuidad de $f_2$ como mapeo de $C^0 \rightarrow C^{0,1/2}$

En efecto si  $s \geq s_0 > 0$  escribiendo,

$$U \equiv |(f_2[w](s) - f_2[w_0](s)) - (f_2[w](s_0) - f_2[w_0](s_0))| \quad (3.58)$$

$$U \leq \int_{s_0}^s |wh(w) - w_0h(w_0)| d\xi \quad (3.59)$$

y usando la derivación que siguió de (3.47) -lo único que cambia son los límites de integración 1 por  $s_0$ - se tiene que (ver (3.57)),

$$\begin{aligned} U &\leq \check{c} |\hat{\nu}|_{\mathcal{H}} |w - w_0|_0 (\sqrt{s} - \sqrt{s_0}) \\ &\leq \check{c} |\hat{\nu}|_{\mathcal{H}} |w - w_0|_0 \sqrt{s - s_0}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

i.e. lo que queríamos probar.

### 3.7.6 Inclusión compacta de $C^{0,1/2}$ en $C^0$ i.e. $C^{0,1/2} \subset\subset C^0$

En efecto, consideremos una sucesión  $\{\gamma_n\}$  acotada de  $C^{0,1/2}$ . Escribiendo la definición de la norma usual de este espacio vemos que  $\gamma_n$  satisfacen las hipótesis del teorema de Arzelà-Ascoli. Puesto que  $\gamma_n \in C^{0,1/2} \subset C^0$  y que el límite uniforme de funciones continuas es una función continua, se tiene que  ${}^6\gamma \in C^0$  i.e.  $C^{0,1/2}$  está compactamente contenido en  $C^0$ .

Estamos listos para completar la prueba sobre la compacidad del mapeo **F**.

#### Compacidad del mapeo **F**

En la siguiente sección probaremos finalmente que **F** define un mapeo compacto de  $C^0[0,1] \times C^0[0,1]$  en sí mismo.

En efecto por los resultados de la sección precedente, tenemos que **F** es continuo de  $C^0 \times C^0$  en  $C^{0,1/2} \times C^{0,1/2}$ ; y que este último espacio está contenido compactamente en el anterior. Así, para probar que **F** es un mapeo compacto de  $C^0 \times C^0$  en  $C^0 \times C^0$ , basta verificar que **F** manda toda sucesión acotada de  $C^0 \times C^0$ , a una sucesión acotada de  $C^{0,1/2}$ . De las estimaciones para  $|f_1|_{0,1/2}$  y  $|f_2|_{0,1/2}$ , que resultan de las relaciones (3.41) y (3.57) respectivamente y tomando  $(w_k, x_k) \in C^0[0,1] \times C^0[0,1]$  tal que  $|x_k|_0, |w_k|_0 \leq M$  tenemos el resultado. <sup>7</sup>

## 3.8 Compacidad y continuidad de L

En esta sección probaremos que el mapeo **L** es compacto de  $C^0 \times C^0$  en  $C^0 \times C^0$  exhibiendo que es Lipschitz continuo como mapeo de  $C^0 \times C^0$  en  $C^{0,1/2} \times C^{0,1/2}$ . En efecto, llamando  $l[w](s)$  a la segunda componente de (3.31) que define a la parte lineal **L** tenemos que,

$$\begin{aligned} |l[w](s) - l[w_0](s)| &\leq \int_s^1 |w - w_0| \frac{\hat{\nu}(\xi, \gamma, \xi)}{\sqrt{\xi} \gamma} d\xi \\ &\leq \frac{2|w - w_0|_0 |\hat{\nu}|_0 (1 - \sqrt{s})}{g\rho_{\min}} \end{aligned}$$

<sup>6</sup> $\gamma_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma$  uniformemente.

<sup>7</sup>Para un estudio detallado sobre relaciones entre espacios, se recomienda consultar el texto de Adams [Adm]

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &\leq \int_{s_0}^s |w - w_0| h(0, \xi) d\xi \\
&\leq \frac{2|w - w_0|_0}{g\rho_{\min}} |\hat{\nu}|_0 (\sqrt{s} - \sqrt{s_0}) \\
&\leq \frac{2|w - w_0|_0 |\hat{\nu}|_0}{g\rho_{\min}} \sqrt{s - s_0}, \\
\mathcal{L} &\equiv |(l[w](s) - l[w_0](s)) - (l[w](s_0) - l[w_0](s_0))|.
\end{aligned}$$

Usando resultados anteriores tenemos que,

$$|l[w](s) - l[w_0](s)|_{0,1/2} \leq \frac{4\hat{\nu}(\xi\gamma(\xi), \xi)}{g\rho_{\min}} |w - w_0|_0, \quad (3.61)$$

i.e.  $l$  es un mapeo Lipschitz continuo de  $C^0$  en  $C^{0,1/2}$ . Por estar este último compactamente contenido en  $C^0$  tenemos el resultado.<sup>8</sup>

Ahora falta probar que la no linealidad  $\mathbf{g}$  es también un mapeo compacto y continuo.

### 3.9 Compacidad y continuidad de $\mathbf{g}$

Despejando el término no lineal en la ecuación integral (3.30) i.e.

$$\mathbf{g}[\omega^2, (w, x)] = \mathbf{F}[(w, x)] - \mathbf{L}(\omega^2) \cdot [(w, x)], \quad (3.62)$$

vemos que el lado derecho de (3.62) es la diferencia de dos mapeos Lipschitz continuos de  $C^0 \times C^0 \rightarrow C^{0,1/2} \times C^{0,1/2} \subset C^0 \times C^0$  y compactos de  $C^0 \times C^0$  en  $C^0 \times C^0$  por lo que  $\mathbf{g}$  cumple con las mismas propiedades. De hecho estudiando directamente  $\mathbf{g}$ , se puede probar que:

$$|\mathbf{g}[w](s) - \mathbf{g}[w](s_0)| \leq C |w|_0^{2-\epsilon} |s - s_0|^{\epsilon/2}, \quad 0 \leq \epsilon \leq 1.$$

Fijando el valor  $\epsilon = 1$ , resulta que  $\mathbf{g}$  es continua de  $C^0[0, 1]$  en  $C^{0,1/2}[0, 1]$  satisface  $|\mathbf{g}[w](s)|_{0,1/2} \leq K |w|_{0,1/2}$ . Si en cambio tomamos  $\epsilon < 1$ , entonces se tiene que  $|\mathbf{g}|_{0,\epsilon/2} \leq$

<sup>8</sup>El estudio para la primera componente de  $\mathbf{L}$  se efectuó en la (3.7.1).

$C^1|w|_{0,\epsilon/2}^{2-\epsilon}$ . En este caso  $L$  es la derivada de Fréchet de  $F$  como mapeo de  $C^0 \times C^0$  en  $C^{0,\epsilon/2} \times C^{0,\epsilon/2}$ , como ya habíamos visto.

### Nota

Analícemos un poco más de cerca el tipo de regularidad que tendrían las soluciones suponiendo por el momento su existencia. Sea entonces  $(w, x)$  un punto fijo <sup>9</sup> del mapeo  $F$ , es decir  $(w, x) = F[(w, x)]$ . Por lo anterior,  $(w, x) \in C^0 \times C^0$  sería también elemento de  $C^{0,1/2} \times C^{0,1/2}$ . Ahora puesto que  $f_1[\cdot](0) = 0$  -ver (3.36)- la componente  $w$  del punto fijo debe satisfacer  $w(0) = 0$ . Por los cálculos (3.34), (3.35), tendríamos que tanto  $w$  como  $x$  son funciones  $C^1$  para  $s > 0$ . Quisieramos saber si lo siguen siendo aún en  $s = 0$ . Para esto recordando (2.13) y puesto que  $u(0) = 0$  <sup>10</sup> tenemos que,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{u(s) - u(0)}{s} = -\omega^2 \rho(0)x(0) = u'(0) \Rightarrow u \text{ es } C^1 \quad (3.63)$$

Por <sup>11</sup>otro lado de (2.14) y (3.1) -con  $\mu = 0$ - , vemos que  $x'(s)$  es tan diferenciable como la  $\hat{v}$ . Como  $u(s)$  es  $C^1[0, 1]$ , podemos expandirla primer orden,

$$u(s) = -\omega^2 \rho(0)x(0)s + o(s). \quad (3.64)$$

Sustituyendo a  $u(s)$  por el valor de su expansión (3.64), en la expresión de  $x'(s)$  se obtiene,

$$x'(s) = -\frac{\omega^2 \rho(0)x(0)\hat{v}}{(\omega^4 \rho^2(0)x^2(0) + \gamma^2(s))^{1/2}} + O(s).$$

$$\text{Así } x'(s) \xrightarrow{s \rightarrow 0} -\frac{\omega^2 x(0)}{(\omega^4 x^2(0) + g^2)^{1/2}} \quad (3.65)$$

$$\text{puesto que } \gamma(s) = \frac{g}{s} \int_0^s \rho d\xi \xrightarrow{s \rightarrow 0} g\rho(0) \text{ y } \hat{v}(0, 1) = 1.$$

Este argumento prueba que si  $(u, x)$  es un punto fijo de (3.2), (3.3), entonces  $(u, x)$  son  $C^1$  en  $[0, 1]$ , en particular  $u'/\rho = -\omega^2 x$  es  $C^1$  en  $[0, 1]$ , y  $(w = u/\sqrt{s}, x)$  es un punto fijo

<sup>9</sup> A través del cambio de variables esto es equivalente a tener un punto fijo  $(u, x)$  del correspondiente mapeo.

<sup>10</sup> Ver ecuación (3.2).

<sup>11</sup> y satisface la ecuación (3.2), (3.3), junto con (3.19).

de (3.21), (3.22). Inversamente, si  $(w, x)$  es un punto fijo de  $\mathbf{F}$ , entonces  $(u = \sqrt{sw}, x)$  será un punto fijo para (3.2), (3.3). Es decir, las formulaciones son equivalentes, así como para los puntos fijos de  $\tilde{\mathbf{F}}$  de la forma  $(w, y)$  con  $y = \omega x$ .

Por la equivalencia entre las dos formulaciones <sup>12</sup> del problema, lo mismo ocurre para la solución vía  $(w, x)$ . También se cumplen las mismas condiciones de regularidad para las soluciones del problema linealizado (3.31). Así, tenemos equivalencia entre la formulación integral (*débil*) y la formulación (*fuerte*) del problema no lineal y de su linealización (ver (2.13) a (2.15)). Esto nos permite estudiar el problema integral mediante la siguiente formulación de tipo singular no lineal de *Sturm-Liouville*.

$$\left(\frac{u'}{\rho}\right)' + \frac{\omega^2 u \hat{\nu}(\sqrt{u^2 + s^2 \gamma^2}, s)}{\sqrt{u^2 + s^2 \gamma^2}} = 0, \quad (3.66)$$

$$u(0) = 0, \quad u'(1) = 0. \quad (3.67)$$

Por su parte al problema linealizado le corresponde el equivalente problema singular de Sturm-Liouville:

$$\left(\frac{u'}{\rho}\right)' + \frac{\omega^2 u \hat{\nu}(s\gamma(s), s)}{s\gamma(s)} = 0, \quad (3.68)$$

$$u(0) = 0, \quad u'(1) = 0. \quad (3.69)$$

### Nota

Por la simetría ante reflexiones de las ecuaciones (3.66) y (3.68), vemos que si  $u$  es solución también  $-u$  lo será. Más adelante, probaremos que existe una única curva que bifurca a partir de  $(\lambda_k^0, (0, 0))$ , donde  $\lambda_k^0$  es valor propio del problema linealizado. La unicidad de la rama de bifurcación y el hecho de que tanto  $u$  como  $-u$  sean soluciones, implica que la bifurcación es vertical, como quedará rigurosamente probado en la sección correspondiente a la bifurcación local.

A continuación pasaremos al estudio de los valores propios del problema linealizado. La compacidad de  $\mathbf{L}(\omega^2)$  implica que estos son de multiplicidad finita [Br] [C-L]. Ahora del problema (3.68), (3.69), que podemos descomponer como (2.13) - (2.15) escribiendo  $N(s) = s\gamma(s)$  y  $\mu = 0$ , resulta, multiplicando la primera ecuación por  $x$  e integrando por partes que,

<sup>12</sup>Con  $(w, x)$  o  $(u, x)$  puntos fijos de sus mapeos respectivos.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \omega^2 \rho x^2 d\xi &= - \int_0^1 u' x d\xi \\ &= \int_0^1 \frac{u^2 \hat{\nu}}{\xi^\gamma},\end{aligned}$$

i.e. los valores críticos de  $L$  son reales y positivos.



# Capítulo 4

## El problema linealizado

### 4.0.1 Estudio de los valores propios

1

Con el fin de estudiar los valores críticos del problema linealizado así como los vectores propios correspondientes, consideramos la siguiente transformación de *Prüfer*, que geoméricamente corresponde a utilizar coordenadas polares en el espacio fase. Sean entonces dos funciones  $\phi(s)$  y  $r(s)$  tales que,

$$u = r \sin \phi \quad (4.1)$$

$$-\omega x = r \cos \phi. \quad (4.2)$$

Sustituyendo  $(u, x)$  en términos de las nuevas variables  $(r, \phi)$  en las ecuaciones (2.13), (2.14) y simplificando un poco, se obtienen,<sup>2</sup>

$$\phi' = \omega \left( \rho \cos^2 \phi + \frac{\dot{\nu}}{s\gamma} \sin^2 \phi \right), \quad (4.3)$$

$$\equiv H(\phi(s), s),$$

<sup>1</sup>Aquí vale la pena aclarar que se trata en realidad de valores críticos del mapeo  $L(\omega^2)$ . Sin embargo veremos más adelante, que estos corresponden efectivamente a valores propios de otro mapeo, por lo que no haremos distinción entre estos términos.

<sup>2</sup>Después de simplificar, la primera ecuación (4.3) queda multiplicada en ambos lados por  $r$ . El haber tomado  $r \neq 0$  para la simplificación ulterior se justificará más adelante.

$$r' = \omega \rho r \cos \phi \sin \phi \left( 1 - \frac{\hat{\nu}}{s\gamma} \right). \quad (4.4)$$

Salta a la vista el hecho de que la ecuación para  $\phi$  no depende de  $r$ , por lo que una vez resuelta podemos determinar la solución para  $r$ . En efecto, suponiendo  $\phi$  conocida, por integración elemental tendríamos: <sup>3</sup>

$$r(s) = r(0) e^{\frac{\omega}{2} \int_0^s \left( \rho(\xi) - \frac{\hat{\nu}(\xi\gamma(\xi), \xi)}{\xi\gamma(\xi)} \right) \sin 2\phi(\xi) d\xi}. \quad (4.5)$$

Puesto que  $\cos^2 \phi$  y  $\sin^2 \phi$  son uniformemente acotadas, hay solución para  $\phi$  si  $\omega\rho$  y  $\frac{\omega\hat{\nu}}{s\gamma}$  son integrables [C-L, pág. 43 Teo1.1 Carathéodory]. Sin embargo en este caso,

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &\equiv \int_s^1 \frac{\omega \hat{\nu}(\xi\gamma(\xi), \xi)}{\xi\gamma(\xi)} d\xi, \\ \mathcal{N} &\geq \frac{-\omega |\hat{\nu}|_{\min} \text{Log } s}{g |\rho|_0} \xrightarrow{s \rightarrow 0} \infty, \\ \mathcal{N} &\leq \frac{-\omega |\hat{\nu}|_0 \text{Log } s}{g \rho_{\min}} \xrightarrow{s \rightarrow 0} \infty, \end{aligned}$$

por lo que  $\frac{\omega\hat{\nu}}{s\gamma}$  es integrable en  $[\sigma, 1]$  con  $\sigma > 0$ . Así el estudio para la existencia y unicidad de la función  $\phi$  dada por (4.3), no se puede determinar usando la teoría estandar de ecuaciones diferenciales ordinarias, Por lo que buscamos un camino alternativo.

#### 4.0.2 Existencia y unicidad de la solución en $\phi$

4

Si  $\phi$  fuera  $C^1[0, 1]$ , entonces desarrollando a primer orden,

$$\phi(s) = \phi'(0)s + o(s) \quad \text{con} \quad \phi(0) = 0. \quad (4.6)$$

<sup>3</sup>De ésta relación queda claro que si hay unicidad por parte de  $\phi$  entonces  $r(0) = 0$  implica  $r(s) \equiv 0$ , lo que en parte justifica la simplificación de la ecuación para  $\phi$  antes mencionada.

<sup>4</sup>Para una demostración distinta ver [C-L, cap. 8]

<sup>5</sup>De (4.1) y la primera condición (3.67) se sigue que  $\phi(0) \stackrel{\text{mod } \pi}{\equiv} 0$ . Como la ecuación (4.3) es  $\pi$ -

Así, tomando en cuenta los desarrollos,  $\cos x = 1 + O(x^2)$ ;  $\sin x = x + O(x^3)$  y (4.3) tendríamos que,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \phi'(s) \equiv \lim_{s \rightarrow 0} \left( \omega[\rho(s) + \frac{\hat{\nu}}{s^\gamma} s^2 \phi''(0)] + o(s) \right) = \omega\rho(0). \quad (4.7)$$

Ahora

$$|H(\phi, s) - H(\eta, s)| = \left| \omega \left( \frac{\hat{\nu}}{s^\gamma} - \rho \right) (\phi - \eta) \int_0^1 \sin 2(\eta + \tau(\phi - \eta)) d\tau \right|.$$

Esta última expresión tiene una singularidad en  $s = 0$ . En consecuencia  $H(\phi, s)$  no es Lipschitz continua en  $\phi$  uniformemente para  $s \in [0, 1]$ .<sup>6</sup>

De manera que para probar existencia y unicidad, dentro de una subclase de funciones, a saber, las que son  $C^1[0, 1]$  con  $\phi(0) = 0$ , usaremos la siguiente alternativa:

Sea  $\phi(s) = s^\alpha \psi(s)$  con  $0 < \alpha \leq 1$ . Entonces la función  $\psi$  satisface la siguiente ecuación integral:

$$\begin{aligned} \psi(s) &= \frac{\omega}{s^\alpha} \int_0^s \rho \cos^2 \xi^\alpha \psi + \frac{\hat{\nu}(\xi^\gamma, \xi)}{\xi^\gamma} \sin^2 \xi^\alpha \psi d\xi \\ &= \frac{\omega}{s^\alpha} \int_0^s \rho d\xi + \frac{\omega}{s^\alpha} \int_0^s \left( \frac{\hat{\nu}}{\xi^\gamma} - \rho \right) \sin^2 \xi^\alpha \psi d\xi \\ &\equiv A[\psi](s). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Claramente, directamente del cálculo  $A[\psi](s)$  es  $C^1$  para  $s > 0$ ; además viendo que,

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{s^\alpha} \int_0^s \left( \frac{\hat{\nu}}{\xi^\gamma} - \rho \right) \sin^2 \xi^\alpha \psi d\xi &\leq \frac{\omega}{s^\alpha} \int_0^s \left[ \frac{|\hat{\nu}|_0}{g\rho_{\min}} \xi^{2\alpha-1} + |\rho|_0 \xi^{2\alpha} \right] |\psi|_0 d\xi \\ &\leq (Ks^\alpha + \tilde{K}s^{\alpha+1}) |\psi|_0 \xrightarrow{s \rightarrow 0} 0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\omega}{s^\alpha} \int_0^s \rho d\xi = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\omega\rho(s)}{\alpha s^{\alpha-1}} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < \alpha < 1 \\ \omega\rho(0) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}, \quad (4.10)$$

periódica en  $\phi$ , si  $\phi$  es solución, también lo será  $\phi + k\pi$ ; por lo que -sin pérdida de generalidad- podemos fijar el valor  $\phi(0) = 0$ .

<sup>6</sup>Si para  $s \in [\sigma, 1]$ ,  $\sigma > 0$ .

entonces definiendo el valor de  $A$  en 0 como:

$$A[\psi](0) \equiv \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < \alpha < 1 \\ \omega\rho(0) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}, \text{ resulta que } A[\psi](s) \in C^0[0, 1]. \quad (4.11)$$

Obteniendo una nueva formulación del problema dada por:

$$\begin{aligned} \psi(s) &= A[\psi](s), \quad \text{con } A[\psi](s) \in C^0[0, 1] \\ A[\psi](0) &= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < \alpha < 1 \\ \omega\rho(0) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Ahora si  $\mathcal{X}_\alpha$ , representa el espacio de funciones: <sup>7</sup>

$$\mathcal{X}_\alpha \equiv \begin{cases} \{\psi / \psi \in C^0[0, \epsilon] \text{ tal que } \psi(0) = 0\} & \text{si } 0 < \alpha < 1 \\ \{\psi / \psi \in C^0[0, \epsilon] \text{ tal que } \psi(0) = \omega\rho(0)\} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}. \quad (4.13)$$

Entonces  $\mathcal{X}_\alpha$  es un espacio de *Banach* <sup>8</sup> y además:

$$\begin{aligned} A : \mathcal{X}_\alpha &\longrightarrow \mathcal{X}_\alpha \\ \zeta &\longmapsto A[\zeta](s). \end{aligned}$$

De manera que hemos reformulado nuestro problema en una vecindad de  $s = 0$ , como otro problema de punto fijo. Tendremos el resultado, probando que el mapeo anterior es una contracción en una vecindad de la función  $\psi_0(s)$  definida por,

$$\psi_0(s) \equiv \frac{\omega}{s^\alpha} \int_0^s \rho(\xi) d\xi. \quad (4.14)$$

En efecto, por el teorema fundamental del cálculo, podemos escribir:

$$\sin^2 \xi^\alpha \psi_1 - \sin^2 \xi^\alpha \psi_2 = \xi^\alpha (\psi_1 - \psi_2) \int_0^1 \sin 2\xi^\alpha (\psi_2 + \tau(\psi_1 - \psi_2)) d\tau,$$

<sup>7</sup>Tomando  $\|\cdot\|_{\mathcal{X}_\alpha} \equiv \|\cdot\|_0$ .

<sup>8</sup>Convergencia uniforme de funciones continuas tiene como límite a una función continua.

de aquí que,

$$A[\psi_1] - A[\psi_2] = \frac{\omega}{s^\alpha} \int_0^s \left( \frac{\hat{\nu}}{\xi\gamma} - \rho \right) \xi^\alpha (\psi_1 - \psi_2) \left( \int_0^1 \sin 2\xi^\alpha (\psi_2 + \tau(\psi_1 - \psi_2)) d\tau \right) d\xi$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} |A[\psi_1] - A[\psi_2]| &\leq \frac{\omega}{s^\alpha} |\psi_1 - \psi_2|_0 \int_0^s \left( \frac{K}{\xi} + \tilde{K} \right) \xi^{2\alpha} (|\psi_1|_0 + |\psi_2|_0) d\xi \\ &\leq \omega |\psi_1 - \psi_2|_0 (|\psi_1|_0 + |\psi_2|_0) (K_1 s^\alpha + K_2 s^{\alpha+1}) \\ &\leq \tilde{K} s^\alpha (|\psi_1|_0 + |\psi_2|_0) |\psi_1 - \psi_2|_0, \end{aligned}$$

donde  $\tilde{K}$  es una constante independiente de  $\epsilon$  y de las funciones argumento  $\psi_1, \psi_2$ .

Por la desigualdad anterior, recordando los significados de  $A[\psi]$  (4.8) y de  $\psi_0$  (4.14), tenemos directamente,

$$|A[\psi](s) - \psi_0(s)| \leq K s^\alpha |\psi|_0. \quad (4.15)$$

Ahora, tomando  $\psi$  en la bola  $B(\psi_0(s), R)$ , i.e geoméricamente escogiendo a  $\psi$  tal que  $|\psi|_0 \leq |\psi_0|_0 + R$ , se infiere que:

$$|A[\psi](s) - \psi_0(s)| \leq K s^\alpha (R + |\psi_0|_0) < R \quad (4.16)$$

$$\text{si } s \leq \epsilon < \left( \frac{R}{K(R + |\psi_0|_0)^2} \right)^{1/\alpha},$$

y por otra parte que,

$$\begin{aligned} |A[\psi_1](s) - A[\psi_2](s)| &\leq 2K s^\alpha (R + |\psi_0|_0) |\psi_1 - \psi_2|_0 \\ &\leq k |\psi_1 - \psi_2|_0, \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\text{con } k < 1 \text{ si } s \leq \epsilon < (2K(R + |\psi_0|_0))^{-1/\alpha}.$$

Fijando entonces el valor de la constante  $\epsilon$ ,

$$\epsilon^\alpha < \min \left( \frac{R}{K(R + |\psi_0|_0)}, (2K(R + |\psi_0|_0))^{-1} \right),$$

se tiene que  $A$  manda la bola en su interior, i.e.

$$A : B(\psi_0(s), R) \longrightarrow B^{\text{int}}(\psi_0(s), R),$$

es una contracción [C-J]; de aquí la existencia de un único punto fijo  $\psi$  del mapeo  $A$  en  $B^{\text{int}}$ . En efecto, sean  $\psi_{n+1} = A[\psi_n]$  con  $\psi_0 = \psi_0(s)$ , para toda  $n \in \mathbf{N}$ . Por las relaciones (4.16), (4.17) y la desigualdad del triángulo,

$$\begin{aligned} |\psi_{n+p} - \psi_n|_0 &\leq |\psi_{n+p} - \psi_{n+p-1}|_0 + \dots + |\psi_{n+1} - \psi_n|_0 \\ &\leq k^n |\psi_1 - \psi_0|_0 (1 + k + k^2 + \dots + k^{p-1}) \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} |\psi_1 - \psi_0|_0, \end{aligned}$$

$$|\psi_p - \psi_0|_0 \leq R.$$

Puesto <sup>9</sup> que  $k < 1$  el lado derecho de la primera desigualdad tiende a cero conforme  $n \rightarrow \infty$ . Así, la sucesión  $\{\psi_n\}$  es de *Cauchy* en  $B^{\text{int}}(\psi_0(s), R) \subset \mathcal{X}_\alpha$ , espacio de Banach i.e. cerrado bajo la norma del supremo. Puesto que toda sucesión de Cauchy es convergente y que el mapeo  $A$  es continuo, tenemos el resultado. Para probar la unicidad, basta notar que de existir dos puntos fijos  $\psi = A[\psi]$  y  $\tilde{\psi} = A[\tilde{\psi}]$  entonces, por (4.17),  $|\psi - \tilde{\psi}|_0 = |A[\psi] - A[\tilde{\psi}]|_0 < k |\psi - \tilde{\psi}|_0$ , lo cual no es posible pues  $k < 1$ . Por lo tanto  $\psi \equiv \tilde{\psi}$ .

De ahora en adelante, fijaremos el valor del parámetro  $\alpha = 1$ . Hemos probado que en una vecindad de  $s = 0$ , existe una única solución  $\phi$  que satisface  $\phi(0) = 0$  y  $\phi'(0) = \omega\rho(0)$ .

Por otra parte para  $s = \epsilon$ , la ecuación (4.3) admite una única solución <sup>10</sup> que satisface

<sup>9</sup>Ver (4.15).

<sup>10</sup>Fuera de una vecindad del punto  $s = 0$  vimos que  $\omega\rho$  y  $\hat{\nu}/s\gamma$  eran integrables o bien que  $H(\phi(s), s)$  era uniformemente Lipschitz en  $\phi$  y continua en  $s$ . Entonces aplicando directamente el teorema antes mencionado o el clásico teorema de Picard de existencia y unicidad para las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias, tendríamos el resultado.

las condiciones en  $s = 0$  antes mencionadas, así como el pertenecer a  $C^1[0, 1]$ , ver figura (4.1).

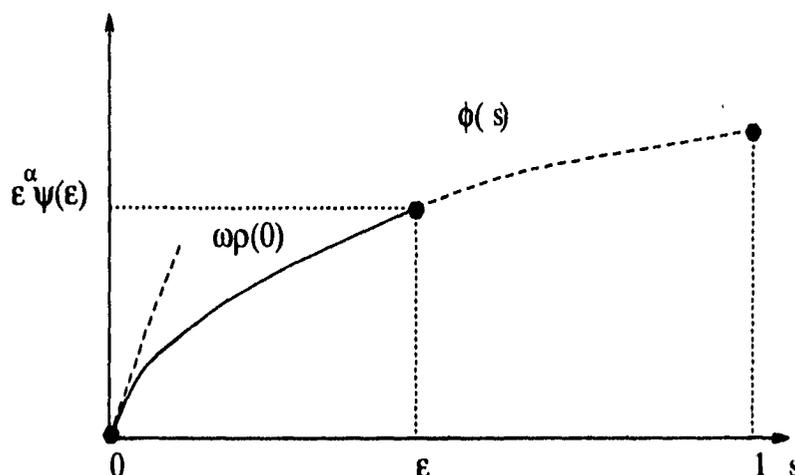


figura 4.1: Representación de la solución en la vecindad de  $s = 0$ .

Sean  $\psi_2, \psi_1$ , las soluciones correspondientes para dos valores  $\omega = \omega_2, \omega_1$  del parámetro. Entonces si  $\omega_2 > \omega_1$ , visto que  $\psi_1(0) = \rho(0)\omega_1 < \rho(0)\omega_2 = \psi_2(0)$  y dado que  $\psi_i, i = 1, 2$  son continuas, se deriva que  $\psi_2(s) > \psi_1(s)$  para  $s \sim 0$ ; lo que conlleva -por definición de la función  $\psi$ - a la desigualdad  $\phi_2(s) > \phi_1(s)$  para  $0 < s \leq s_0$ , ver figura (4.2). Aquí es razonable preguntarse si esta desigualdad se mantiene para todo  $s \in (0, 1]$  o bien si existen valores de  $s$  para los cuales tenemos intersecciones entre las curvas definidas por  $(s, \phi_i(s))$  con  $i = 1, 2$ .

**Proposición 4.1** Si  $\omega_2 > \omega_1$  entonces  $\phi_2(s) > \phi_1(s) \quad \forall s \in (0, 1]$

En efecto, consideremos el siguiente subintervalo  $I \equiv \{s / \phi_2(\xi) > \phi_1(\xi) \quad \forall \xi \in (0, s]\} \subset [0, 1]$ . Por la discusión anterior, es claro que  $s_0 \in I$  por lo que  $I \neq \emptyset$ . Además la continuidad de las funciones  $\phi_1$  y  $\phi_2$  implica que  $I$  es *abierto*. En efecto, sea  $\Omega(s) \equiv \phi_2(s) - \phi_1(s)$ . Claramente  $\Omega$  es continua y si  $s \in I$ , entonces  $\Omega(\xi) > 0, \quad \forall \xi \in (0, s]$ ; en particular  $\Omega(s) = \delta$ . Además tomando  $1 \gg \mu > 0$  es claro que  $\Omega(s + \mu) > \Omega(s) - \epsilon = \delta - \epsilon$ . Así, tomando  $\epsilon \ll 1$  suficientemente chico para que  $\delta - \epsilon > 0$ , tendríamos que existe  $\mu > 0$  con  $\Omega(s + \mu) > 0$ , de aquí que  $s + \mu \in I$ , i.e. lo que se quería probar.

Por otra parte veremos que  $I$  es *cerrado* en  $\mathbf{R}^+$ .

Consideremos una sucesión  $\{s_n\} \subset I$  convergente i.e.  $s_n \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \bar{s} > 0$ . Por la definición de este conjunto, el único caso de interés corresponde a  $\{s_n\} \nearrow \Rightarrow \bar{s} > 0$  y  $\phi_2(\bar{s}) = \phi_1(\bar{s})$ ,

ver figura (4.2). Ahora  $s_n \in I \quad \forall n \in \mathbf{N}$  con  $\{s_n\}$  estrictamente creciente implica que  $s_n - \bar{s} < 0$ , por lo que,

$$\frac{\phi_2(s_n) - \phi_2(\bar{s})}{s_n - \bar{s}} \leq \frac{\phi_1(s_n) - \phi_1(\bar{s})}{s_n - \bar{s}}.$$

En el límite cuando  $n \rightarrow \infty$  esta última expresión indica que,

$$\phi_2'(\bar{s}) \leq \phi_1'(\bar{s}) \Rightarrow \omega_2 \leq \omega_1,$$

lo cual es contradictorio con la hipótesis inicial. Por lo tanto  $I$  es *conexo*, i.e.  $I = \mathbf{R}^+ \cap [0, 1] = (0, 1]$ . Es decir,  $\phi_2(s) > \phi_1(s) \quad \forall s > 0$ . En otras palabras las curvas correspondientes a la gráfica de  $\phi$  que resultan al variar el parámetro  $\omega$ , no se intersectan salvo en el origen.

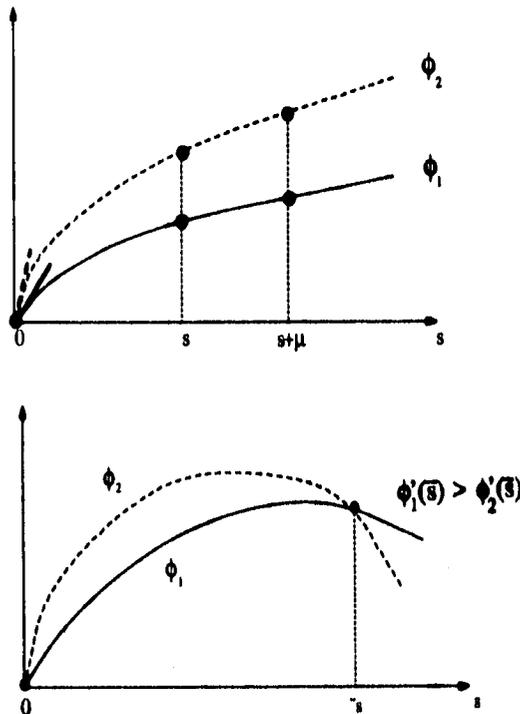


figura 4.2: Curvas definidas por las funciones correspondientes a distintos valores del parámetro  $\omega$  e ilustración de lo que no puede ocurrir.

Más aún dados  $\bar{s} \in [0, 1]$  y  $k$ , existe una única  $\check{\omega}$  tal que  $\check{\phi}(\bar{s}) = \pi/2 + k\pi$  pues:

$$\phi' = \omega \left( \rho \cos^2 \phi + \frac{\hat{\nu}}{s\gamma} \sin^2 \phi \right) \geq \omega \left( \rho_{\min} \cos^2 \phi + \frac{\min |\hat{\nu}|}{g|\rho|_0} \sin^2 \phi \right)$$

$$\phi' \geq \omega a$$

$$\text{con } a \equiv \text{Min} \left( \rho_{\min}, \frac{\min |\hat{\nu}|}{g|\rho|_0} \right)$$

$$\Rightarrow \phi(s) \geq \omega s.$$

Tomando  $\bar{s}\omega \leq \pi/2 + k\pi \Leftrightarrow \omega \leq (\pi/2 + k\pi)/(\bar{s})$  se tiene el resultado ver figura (4.3), ya que  $\phi(\bar{s})$  cubre, como función creciente de  $\omega$ , el intervalo  $[0, \pi/2 + k\pi]$ .

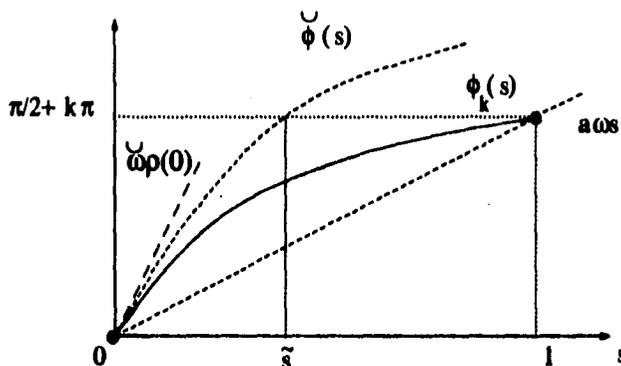


figura 4.3: Representación del hecho que todo punto en el espacio es alcanzable por una y una sola curva.

Así, existe una relación biunívoca entre puntos  $(s, \Upsilon) \in (0, 1] \times \mathbf{R}^+$  y los valores de  $\omega$ . Geométricamente, esto nos dice que todo punto en el espacio  $(0, 1] \times \mathbf{R}^+$ , es alcanzado por una sola  $\phi$  caracterizada por  $\bar{\omega}$ , i.e el valor de la pendiente en el punto  $s = 0$  excepto por un factor constante  $\rho(0)$ . En particular dado  $k$ , existe una única  $\omega_k$  tal que  $\phi_k(1) = \pi/2 + (k-1)\pi$ . Recordando la forma de  $u$  en términos de  $\phi$ , (4.1), queda claro que la función correspondiente  $u_k(s) \equiv r_k(s) \sin \phi_k(s)$ , tiene exactamente  $k$  ceros en el intervalo  $[0, 1]$ , en los puntos  $s = 0$  y  $s = s_l$  donde  $\phi_k(s_l) = l\pi$ ,  $0 < l \leq k-1$ . Análogamente, sea repitiendo el razonamiento anterior para  $x$ , o bien usando directamente el teorema de Rolle,<sup>11</sup> obtenemos que  $-\omega x_k(s) = r_k(s) \cos \phi_k(s)$ , tiene exactamente  $k$  ceros en  $[0, 1]$  en los puntos  $s = 1$  y  $s = s_j$  con  $\phi_k(s_j) = \pi/2 + j\pi$ ,  $0 \leq j \leq k-1$ .

Ya vimos que  $\phi$  alcanza los valores  $\Upsilon = \pi/2 + k\pi$  en los ceros de  $x$ . También es claro que dos ceros positivos y consecutivos de  $\bar{u}$  corresponden exactamente a los valores

<sup>11</sup>Ya que  $x$  es esencialmente la derivada de  $u$ , ver (2.13).

$\Upsilon_1 = k\pi$  y  $\Upsilon_2 = (k+1)\pi$  que toma  $\bar{\phi}$  correspondiente a  $\omega = \bar{\omega}$  digamos en  $s_1$  y  $s_2$ ; i.e.  $\bar{\phi}(s_i) = \Upsilon_i$  con  $i = 1, 2$ . Ahora sea  $\tilde{\omega} > \bar{\omega}$  y  $\tilde{\phi}$ , la solución correspondiente a ese valor. Entonces si  $\tilde{u} \equiv \tilde{r} \sin \tilde{\phi}$  no admitiera ceros en  $[s_1, s_2]$ , i.e. si  $\sin \tilde{\phi}$  no tuviera ceros en ese intervalo, existiría un entero  $l > 0$  tal que  $(k+l)\pi < \tilde{\phi}(s) < (k+l+1)\pi \Leftrightarrow k\pi < \tilde{\phi}(s) - l\pi < (k+1)\pi \quad \forall s \in [s_1, s_2]$ . Ahora, claramente  $\hat{\phi}(s) \equiv \tilde{\phi}(s) - l\pi$ , satisface la misma ecuación que  $\tilde{\phi}$  y además  $\hat{\phi}(s_1) = \tilde{\phi}(s_1) - l\pi > k\pi = \bar{\phi}(s_1)$ . Utilizando el mismo argumento que siguió a la definición del conjunto  $I$ , pero en este caso aplicado a  $I' \equiv \{s / \hat{\phi}(\xi) > \bar{\phi}(\xi) \quad \forall \xi \in [s_1, s_2]\}$ , tendríamos que  $\hat{\phi}(s) > \bar{\phi}(s) \quad \forall s \geq s_1$ . Pero,  $\hat{\phi}(s_2) = \tilde{\phi}(s_2) - l\pi < (k+1)\pi = \bar{\phi}(s_2)$ ; es decir una contradicción.

Hemos probado que entre dos ceros consecutivos de  $\bar{u}$ , debe de existir al menos un cero de  $\tilde{u}$  donde  $\bar{u}$  es la solución correspondiente al valor  $\omega = \bar{\omega}$  y  $\tilde{u}$  su similar para  $\omega = \tilde{\omega}$ , con  $\tilde{\omega} > \bar{\omega}$ . En otras palabras, si  $\tilde{\omega}^2 > \bar{\omega}^2$ , las funciones propias  $(\tilde{u}, \tilde{x})$  asociadas al valor propio  $\omega^2 = \tilde{\omega}^2$ , se anulan al menos una vez entre ceros consecutivos de las funciones propias  $(\bar{u}, \bar{x})$  con la obvia correspondencia  $\omega^2 = \bar{\omega}^2$ , ver figura (4.4).

El único resultado que no se puede justificar a partir del análisis de la geometría de la transformación de Prüfer, es que  $u_k$  y  $x_k$  no puedan anularse simultáneamente en  $s = 0$ . En efecto recordando la forma de la solución (4.5), es claro que si  $r(0) \neq 0$ , entonces  $r(s) \neq 0$  para todo  $s \in [0, 1]$ . Esto último nos daría el resultado de que los ceros de  $u_k$  son simples (no coinciden con los ceros de  $x$ , ver (4.1), (4.2)). El lema siguiente, indica que el caso  $r(0) = 0$  corresponde a la solución trivial, i.e.  $(w, x) \equiv (0, 0)$ . Pero antes necesitamos el siguiente resultado;

**Proposición 4.2** *Sea  $x$  absolutamente continua en  $(0, 1)$ ,  $|x|$  es también absolutamente continua entonces  $|x(s)|' \leq |x'(s)|$  p.p.*

### Prueba

Usando el hecho de que  $x$  y  $|x|$  son absolutamente continuas en el intervalo  $(0, 1)$ , tenemos inmediatamente para  $s \geq a$  que,

$$\begin{aligned} |x(s)| &\leq |x(a)| + \int_a^s |x'(\xi)| \, d\xi \\ |x(s)| &= |x(a)| + \int_a^s |x(\xi)|' \, d\xi \\ \Rightarrow \int_a^s |x(\xi)|' \, d\xi &\leq \int_a^s |x'(\xi)| \, d\xi, \quad 1 \geq s \geq a \geq 0. \end{aligned}$$

Ahora, si  $|x|' > |x|'$  en un subconjunto  $J$  de medida no nula, entonces  $\int_a^s (|x|' - |x|') \, d\xi > 0$  para todo  $(a, s) \subset [0, 1]$ . Puesto que todo subconjunto de  $[0, 1]$  está contenido en una

unión finita de intervalos  $I_i$ , entonces por las características antes mencionadas,  $J$  debe contener al menos un intervalo de la forma  $(a, s) \equiv I_i$ . De manera que,

$$\int_{J \supset I_i} (|x'| - |x'|) d\xi > \int_{I_i} (|x'| - |x'|) d\xi,$$

lo cual nos dá una contradicción con una desigualdad más arriba. Por lo tanto tenemos el resultado.

**Lema 4.3** Sea  $(\omega^2, (w, x))$  solución del sistema dado por (3.21), (3.22) y la condición adicional  $x(0) = 0$ . Entonces  $(w, x) = (0, 0)$ .

### Prueba

Por la relación (3.19),  $(u, x)$  satisface (3.2) y (3.3) y consecuentemente las condiciones  $x(0) = u(0) = u'(0) = 0$ . Ahora directamente de estas ecuaciones y de la proposición anterior tenemos que,

$$|u'| \leq |u'| \leq \omega^2 |\rho|_0 |x| \equiv C |x|, \quad (4.18)$$

$$|x'| \leq |x'| \leq \frac{|\hat{v}|_0 |u|}{g \rho_{\min} s} \equiv K \frac{|u|}{s}. \quad (4.19)$$

Recordando (3.64) y por la condición extra  $x(0) = 0$  es evidente que el lado derecho de la desigualdad (4.19) tiende a cero cuando  $s \rightarrow 0$ , lo que implica en este caso particular, que  $x'(0) = 0$ . Definiendo las funciones  $x \equiv 2Ky$  y  $v \equiv |u| + |y|$  y teniendo en mente las relaciones (4.18), (4.19), tenemos,

$$\begin{aligned} v' &= |u'| + \frac{1}{2K} |x'| \leq 2CK |y| + \frac{1}{2K} K \frac{|u|}{s} \\ &\leq \frac{|u| + |y|}{2s} + 2CK(|y| + |u|) \\ \Rightarrow v' &\leq \frac{v}{2s} + 2CKv \end{aligned}$$

Sea  $\eta = e^{-2CKs}/\sqrt{s} > 0$  un factor integrante. Entonces no es difícil ver que,

$$\left( \frac{e^{-2CKs}}{\sqrt{s}} v(s) \right)' \leq 0$$

$$\frac{e^{-2CKs}}{\sqrt{s}} v(s) \leq \lim_{a \rightarrow 0} \frac{e^{-2CKa} v(a)}{\sqrt{a}}.$$

Por las condiciones en  $s = 0$ , el límite del lado derecho de esta última desigualdad tiende a cero, de donde determinamos que  $v(s) = 0$ , i.e.  $(w, x) = (0, 0)$ .

## 4.1 Completez de las funciones propias $u_n$

En la sección anterior, vimos que el problema linearizado (3.68), (3.69), admite una única solución linealmente independiente; y que ésta es  $C^1$ . Ahora para probar la completez de las funciones propias  $u_n$  podrían usarse los resultados de la teoría de Sturm-Liouville [C-L, cap.7] o bien pasar al contexto de espacios de Sobolev [Br, cap. VIII]. A continuación proponemos una prueba más cercana en espíritu al segundo caso. Consideremos el siguiente espacio:

$$H \equiv \{u / u \in H^1[0, 1] / u(0) = 0\}, \quad (4.20)$$

con producto escalar definido por,

$$(u, v)_1 \equiv \int_0^1 \frac{u'v'}{\rho} d\xi \quad (4.21)$$

### 4.1.1 $H^1[0, 1] = \{u \text{ absolutamente continuas con } u' \in L^2[0, 1]\}$

$$\mathbf{A)} u \in C^1[0, 1] \Rightarrow u^2(s) \leq k |u|_{H_1}^2$$

Por el teorema fundamental del cálculo,

$$u(s)^2 = \left( u(s_0) + \int_{s_0}^s u'(\xi) d\xi \right)^2 \leq 2 \left[ u^2(s_0) + \left( \int_{s_0}^s u' d\xi \right)^2 \right]$$

$$\begin{aligned} &\leq 2u^2(s_0) + 2|s - s_0| \int_{s_0}^s u'^2 d\xi \\ &\leq 2u^2(s_0) + 2|u|_{H^1}^2. \end{aligned}$$

Integrando respecto a  $s_0$  en  $[0, 1]$ ,

$$u^2(s) \leq 2|u|_{H^1}^2 + 2 \int_0^1 u^2(s_0) ds_0 \leq k|u|_{H^1}^2. \quad (4.22)$$

### B) Prueba de $\Rightarrow$

Sea  $u \in H^1[0, 1] \Rightarrow \exists \{u_n\} \in C^\infty[0, 1]$  tal que  $u_n \xrightarrow{H^1} u$  (por densidad). En particular  $\{u_n\}$  es una sucesión de Cauchy en  $H^1$ , por (4.22) tenemos

$$|u_n(s) - u_m(s)|^2 \leq k|u_n - u_m|_{H^1}^2 < \epsilon \quad \text{si } n, m > N(\epsilon).$$

Lo que indica que  $\{u_n(s)\}$  es una sucesión de Cauchy en  $C^0[0, 1]$  espacio de Banach bajo la norma del supremo. Por lo tanto  $u_n \rightarrow u$  en  $|\cdot|_0$ . Puesto que  $u_n \rightarrow u$  en  $|\cdot|_{H^1}$ ; se tiene por un lado, una cota uniforme para  $|u'_n|_{L^2}$  pero además,

$$\begin{aligned} |u_n(s) - u_n(s_0)| &\leq \int_{s_0}^s |u'_n| d\xi \leq \sqrt{|s - s_0|} \left( \int_{s_0}^s u_n'^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &\leq M|s - s_0|^{1/2}. \end{aligned}$$

Tomando el límite de esta expresión se tiene que:

$$|u(s) - u(s_0)| \leq M|s - s_0|^{1/2} \Rightarrow u \in C^{0,1/2} \text{ y } u' \in L^2$$

### C) Prueba de $\Leftarrow$

Sea  $u$  absolutamente continua con  $u' \in L^2$ . Entonces

$$u(s) - u(s_0) = \int_{s_0}^s u' d\xi \leq |s - s_0|^{1/2} |u'|_{L^2},$$

por lo que  $u \in C^{0,1/2} \Rightarrow u \in L^2$ . De aquí que  $u \in H^1[0, 1]$  como se quería probar. Para una prueba distinta ver [Br, pág. 125].

### Nota

Si  $u \in H^1(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ,  $n \geq 2$  entonces no se verifica necesariamente que  $u$  sea continua (Ej.  $n = 2$ ,  $\Omega = \{x / |x| \leq \frac{1}{e^2}\}$ , con  $u(r, \theta) = \text{Log} |\text{Log } r|$ , no es continua en el origen).

### D) Desigualdad de Poincaré

Sea  $u \in H$ , entonces por (4.1.1),

$$u^2(s) = \left( \int_0^s u' d\xi \right)^2 \leq s \int_0^s u'^2 d\xi \leq s \int_0^1 u'^2 d\xi,$$

integrando respecto a  $s$  en  $[0, 1]$  se obtiene

$$|u|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2} |u'|_{L^2}^2. \quad (4.23)$$

Para casos más generales se recomienda el libro [Rek].

### E) Equivalencia entre la norma inducida por el producto escalar del espacio $H$ y la norma usual de $H^1$

En efecto, usando (4.23) en la primera desigualdad; claramente

$$c|u|_{H_1}^2 \leq \frac{1}{|\rho|_0} \int_0^1 u'^2 d\xi \leq \int_0^1 \frac{u'^2}{\rho} d\xi \equiv |u|_1^2 \leq \frac{1}{\rho_{\min}} \int_0^1 u'^2 d\xi \leq \tilde{c}|u|_{H_1}^2.$$

Por lo tanto

$$||_1 \sim ||_{H_1}. \quad (4.24)$$

### F) $u \in H \Rightarrow u \in C^{0,1/2}[0, 1]$

$u \in H \Rightarrow u \in H^1$  y  $u(0) = 0$ . Por (4.1.1)-(B) es claro que

$$|u(s) - u(s_0)| \leq |s - s_0|^{1/2} \left( \int_0^1 u'^2 d\xi \right)^{1/2} \leq |s - s_0|^{1/2} |u|_{H_1}.$$

Finalmente por (4.24),

$$|u(s) - u(s_0)| \leq k |s - s_0|^{1/2} |u|_1, \quad (4.25)$$

lo que se quería probar.

## 4.2 Formulación variacional del problema linearizado

Consideremos el siguiente funcional:

$$J : H \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$u \longmapsto J[u] = \frac{1}{2} E(u, u) \equiv \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{-u'^2}{\rho} + \frac{\omega^2 \hat{\nu}}{s\gamma} u^2 ds.$$

Una condición necesaria para la existencia de punto crítico está dada por

$$D_v J[u] = \int_0^1 \frac{-u'v'}{\rho} + \frac{\omega^2 \hat{\nu}}{s\gamma} uv ds = 0 \quad \forall v \text{ en el espacio de trabajo.}$$

Ahora tomando  $v \in C_0^\infty[0, 1]$  y usando el lema de Meyers-Serrin ( que es una generalización del lema de Dubois Reymond )<sup>12</sup> se infiere que,

$$\frac{-u'}{\rho} \text{ es } C^1 \text{ y } \left( \frac{-u'}{\rho} \right)' = \frac{\omega^2 \hat{\nu} u}{s\gamma},$$

i.e. la ecuación de *Euler-Lagrange* coincide con el problema linearizado (3.68) que denotaremos por  $\Lambda[u]$ . Para  $v \in H$  y puesto que el punto crítico satisface  $-u'/\rho \in C^1$  podemos integrar por partes;

$$0 = D_v J[u] = \int_0^1 (\Lambda[u])v ds - \frac{u'v}{\rho} \Big|_0^1 \Rightarrow u'(1) = 0.$$

Esta es una condición que debe satisfacer el punto crítico de manera natural. Se trata de una *condición natural de Weierstrass*. [Ize 87, pág. 81]<sup>13</sup>

<sup>12</sup>Para ver los detalles de estos resultados se recomienda [Ize 87, pág. 45].

<sup>13</sup>Notemos que en la definición del espacio  $H$  no podíamos incluir esta condición ya que carecería de sentido. Sin embargo vemos que ésta se recupera, como era de esperarse, pues una formulación no es -matemáticamente- mejor que otra.

Ahora analicemos un poco más de cerca la estructura de los funcionales que intervienen en este nuevo enfoque.

$$\begin{aligned} E : H \times H &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (u, v) &\longmapsto E(u, v). \end{aligned}$$

Claramente por su definición (4.26),  $E$  es una forma bilineal simétrica. Recordando la definición (4.21) del producto interno del espacio  $H$ , podemos escribir,

$$E(u, v) = -(u, v)_1 + \omega^2 E_0(u, v), \quad (4.26)$$

donde;

$$\begin{aligned} E_0 : H \times H &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (u, v) &\longmapsto \int_0^1 \frac{\hat{\nu}}{s\gamma} uv \, ds. \end{aligned}$$

Ahora, usando en el último paso de la siguiente relación el resultado (4.25), es inmediato que

$$|E_0(u, v)| \leq \frac{|\hat{\nu}|_0}{g\rho_{\min}} \int_0^1 \frac{u}{\sqrt{s}} \frac{v}{\sqrt{s}} \, ds \leq \tilde{k} |u|_1 |v|_1. \quad (4.27)$$

Fijando cualquiera de las funciones  $u$  o  $v$ ,  $E_0$  resulta un funcional lineal acotado de  $H \rightarrow \mathbf{R}$ . Por el teorema de representación de Riesz, existe un único elemento  $\mathbf{K}[u] \in H$  tal que

$$E_0(u, v) = (\mathbf{K}[u], v)_1 \quad \text{con} \quad |\mathbf{K}|_1 \leq \tilde{k}, \quad (4.28)$$

i.e.  $\mathbf{K} : H \longrightarrow H$  es un operador continuo. Puesto que  $E_0(u, v)$  es una forma bilineal simétrica, nos convencemos fácilmente de que,

$$(\mathbf{K}[u], v)_1 = (u, \mathbf{K}[v])_1 \quad \text{i.e.} \quad \mathbf{K} \text{ es autoadjunto.} \quad (4.29)$$

Además dado que  $(\mathbf{K}[u], u)_1 = \int_0^1 (\hat{\nu}u^2)/(s\gamma)ds \geq 0$  se tiene que el operador  $\mathbf{K}$  es también positivo. Ahora escribiendo explícitamente,

$$E_0(u, v) = (\mathbf{K}[u], v)_1 \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{(\mathbf{K}[u])'v'}{\rho} - \frac{\hat{\nu}uv}{s\gamma} ds \equiv 0,$$

y tomando  $v \in C_0^\infty[0, 1]$  deducimos que,

$$\frac{(\mathbf{K}[u])'}{\rho} \in C^1 \quad \text{y} \quad \left( \frac{(\mathbf{K}[u])'}{\rho} \right)' = -\frac{\hat{\nu}}{s\gamma} u, \quad (\mathbf{K}[u])'(1) = 0.$$

Así vemos que un valor crítico de  $J$  debe satisfacer la condición  $0 = D_v J[u] = E(u, v) = (-u + \omega^2 \mathbf{K}[u], v)_1 \quad \forall v \in H$ . Por ser denso este último espacio en  $H^1$ , de esta relación se infiere que  $\mathbf{K}[u] = \lambda u$  p.p.<sup>14</sup>. Pero el análisis anterior reveló que el valor crítico debe satisfacer cierta regularidad ( ser miembro de  $C^1$  ) por lo que de hecho:

$$\mathbf{K}[u] = \lambda u, \quad \text{con} \quad \lambda \equiv \frac{1}{\omega^2}. \quad (4.30)$$

Es decir, los puntos críticos de  $J$  coinciden con las funciones propias del operador  $\mathbf{K} : H \rightarrow H$  y los valores propios correspondientes  $\lambda_n = \omega_n^{-2}$ , son iguales a los inversos de los valores críticos del operador  $\mathbf{L}(\omega^2) : C^0 \times C^0 \rightarrow C^0 \times C^0$ , como se vió en (3.68), (3.69), donde la función propia de  $\mathbf{L}(\omega^2)$  es  $(w, x)$  con  $w = u/\sqrt{s}$  y  $x = -u'/\rho\omega^2$ . Lo mismo pasa con la versión simétrica  $\tilde{\mathbf{L}}$  con función propia  $(w, y)$  donde  $y = \omega x$ .

A continuación, probaremos que  $K$  es un operador compacto.

### **K operador compacto de $H$ en $H$**

Sea entonces una sucesión  $\{u_n\} \in H$  acotada  $|u_n|_1 \leq M$ . Escribiendo  $\omega_n \equiv \mathbf{K}[u_n]$  se cumple que,

$$\left( \frac{\omega_n'}{\rho} \right)' = -\frac{\hat{\nu}}{s\gamma} u_n \quad \text{para} \quad s > 0 \quad \text{y} \quad \omega_n'(1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega_n \in C^{2,1/2} \quad \text{para} \quad s > 0 \quad \text{ya que} \quad u_n \in H \Rightarrow u_n \in C^{0,1/2}.$$

Además <sup>15</sup>

<sup>14</sup>Presque partout, es decir en casi todo punto.

<sup>15</sup>Ver (4.25).

$$\left| \frac{\omega'_n(s)}{\rho(s)} - \frac{\omega'_n(s_0)}{\rho(s_0)} \right| = \left| \int_{s_0}^s -\frac{\hat{\nu}}{\xi\gamma} u_n d\xi \right| \leq \frac{|\hat{\nu}|_0 k |u_n|_1}{g\rho_{\min}} \left| \int_{s_0}^s \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} \right| \leq c |s - s_0|^{1/2}.$$

Por otra parte,

$$\left| \int_{s_0}^s -\frac{\hat{\nu}}{\xi\gamma} u_n d\xi - \int_0^s -\frac{\hat{\nu}}{\xi\gamma} u_n d\xi \right| = \left| \int_0^{s_0} \frac{\hat{\nu}}{\xi\gamma} u_n d\xi \right| \leq c\sqrt{s_0} \xrightarrow{s_0 \rightarrow 0} 0.$$

Así, por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue tenemos que,

$$\int_{s_0}^s -\frac{\hat{\nu}}{\xi\gamma} u_n d\xi \xrightarrow{s_0 \rightarrow 0} \int_0^s -\frac{\hat{\nu}}{\xi\gamma} u_n d\xi,$$

y por lo tanto para  $s$  fijo,  $\omega'_n(s_0)/\rho(s_0)$  tiene un límite, lo cual nos indica que,

$$\frac{\omega'_n}{\rho} \in C^{0,1/2}[0,1] \quad \text{y} \quad \left| \frac{\omega'_n}{\rho} \right|_{0,1/2} \leq \tilde{k} |u_n|_1 \leq \tilde{k} M.$$

De manera que  $K$  es un operador continuo de  $H \rightarrow C^{1,1/2} \subset H$ .

Finalmente probaremos un resultado de tipo Sturm, para el operador linealizado.

### 4.3 Espectro del problema

**Teorema 4.4 (Sturm)** *Los valores propios  $\omega^2 = \lambda_1, \lambda_2, \dots$  de (2.13), (3.31), son simples y pueden ordenarse de la siguiente forma  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$  con  $\lambda_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ . Las funciones  $u_k$  y  $x_k$  constituyen el vector propio correspondiente al valor propio  $\lambda_k$ , tienen exactamente  $k$ -ceros en  $[0,1]$ . Los ceros de  $u_k$  son distintos de los correspondientes a  $x_k$ . Además las funciones  $u_k$  son una base ortogonal de  $H$  con la norma definida en (4.21).*

#### Prueba

Por la equivalencia con el problema integral, las funciones propias de  $\mathbf{K}$  son simples, es decir  $\ker(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{I})$  tiene dimensión 1. Dado que  $\mathbf{K}$  es compacto, autoadjunto y positivo, su espectro es discreto, positivo con un solo punto de acumulación en 0 (por lo tanto  $\omega_n \rightarrow \infty$ ) y las funciones propias  $u_n$  son una base ortogonal, en la norma  $|\cdot|_0$ , de  $H$ . Sea

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} w \\ x \end{pmatrix} \equiv (\mathbf{I} - \mathbf{L}(\omega^2)) \begin{pmatrix} w \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w + \frac{\omega^2}{\sqrt{s}} \int_0^s \rho x \, d\xi \\ x + \int_s^1 w h(0, \xi) \, d\xi \end{pmatrix}$$

Acabamos de probar que si  $u_0$  es la única función en  $H$  tal que  $\mathbf{K}[u_0] = \lambda u_0$ , con  $\lambda = \omega^{-2}$ , i.e.  $(u'_0/\rho)' = -\omega^2 u_0/s\gamma$ , con  $u_0(0) = 0$ ,  $u'_0(1) = 0$ , entonces  $\mathbf{A}(w, x) = 0$  si y solo si  $w = w_0 = u_0/\sqrt{s}$ ,  $x = x_0 = -u'_0/\rho\omega^2$ . Por lo tanto  $\ker \mathbf{A}$  tiene dimensión 1 y  $\mathbf{A}$  es un operador de *Fredholm*. Ahora bien, si  $(w, x)$  es un elemento de  $\ker \mathbf{A}^2$ , entonces, por lo anterior,  $\mathbf{A}(w, x) = c(w_0, x_0)$ . Definiendo  $u(s) = \sqrt{s}w(s)$ , entonces

$$\begin{aligned} u(s) &= cu_0(s) - \omega^2 \int_0^s \rho x \, d\xi \\ x(s) &= cx_0(s) - \int_s^1 u(\xi) \frac{\hat{\nu}(\xi\gamma, \xi)}{\xi\gamma} \, d\xi. \end{aligned}$$

De la primera ecuación, se tiene que  $w(0) = 0$ ,  $u(0) = 0$ ,  $u'(s) = cu_0(s) - \omega^2 \rho(s)x(s)$ , es decir que  $u$  está en  $C^1[0, 1]$  y en  $H$ . Usando la expresión para  $x(s)$  y de la definición de  $x_0$ , se obtiene

$$\frac{u'}{\rho} = 2c \frac{u'_0}{\rho} + \omega^2 \int_s^1 u(\xi) \frac{\hat{\nu}(\xi\gamma, \xi)}{\xi\gamma} \, d\xi.$$

Como  $u(\xi)$  es  $C^1$  y  $u(0) = 0$ , la parte derecha es  $C^1$  y se tiene

$$\left(\frac{u'}{\rho}\right)' = 2c \left(\frac{u'_0}{\rho}\right)' - \omega^2 \frac{\hat{\nu}(s\gamma, s)}{s\gamma} u(s).$$

Multiplicando esta expresión por  $u_0$  e integrando por partes, obtenemos

$$\int_0^1 \left( -\frac{u'u'_0}{\rho} + \omega^2 \frac{\hat{\nu}(\xi\gamma, \xi)}{\xi\gamma} u u_0 \right) d\xi = -2c \int_0^1 \frac{u_0'^2}{\rho} d\xi.$$

Se usó aquí el hecho que  $u_0(0) = u'_0(1) = 0$  y  $u'(1) = cu'_0(1) - \omega^2 \rho(1)x(1) = 2cu'_0(1)$ . Esta expresión es  $E(u_0, u) = -2c |u_0|_1^2$ . Pero  $E(u_0, v) = 0$  para todo  $v$  en  $H$ , en particular para  $u$ . Por lo tanto  $c = 0$  lo que nos dice que  $\ker \mathbf{A}^2 = \ker \mathbf{A}$ . En otras palabras,  $(w, x)$  es función propia simple de  $\mathbf{A}$ . Lo mismo vale para la forma simétrica con  $\tilde{\mathbf{L}}$ .

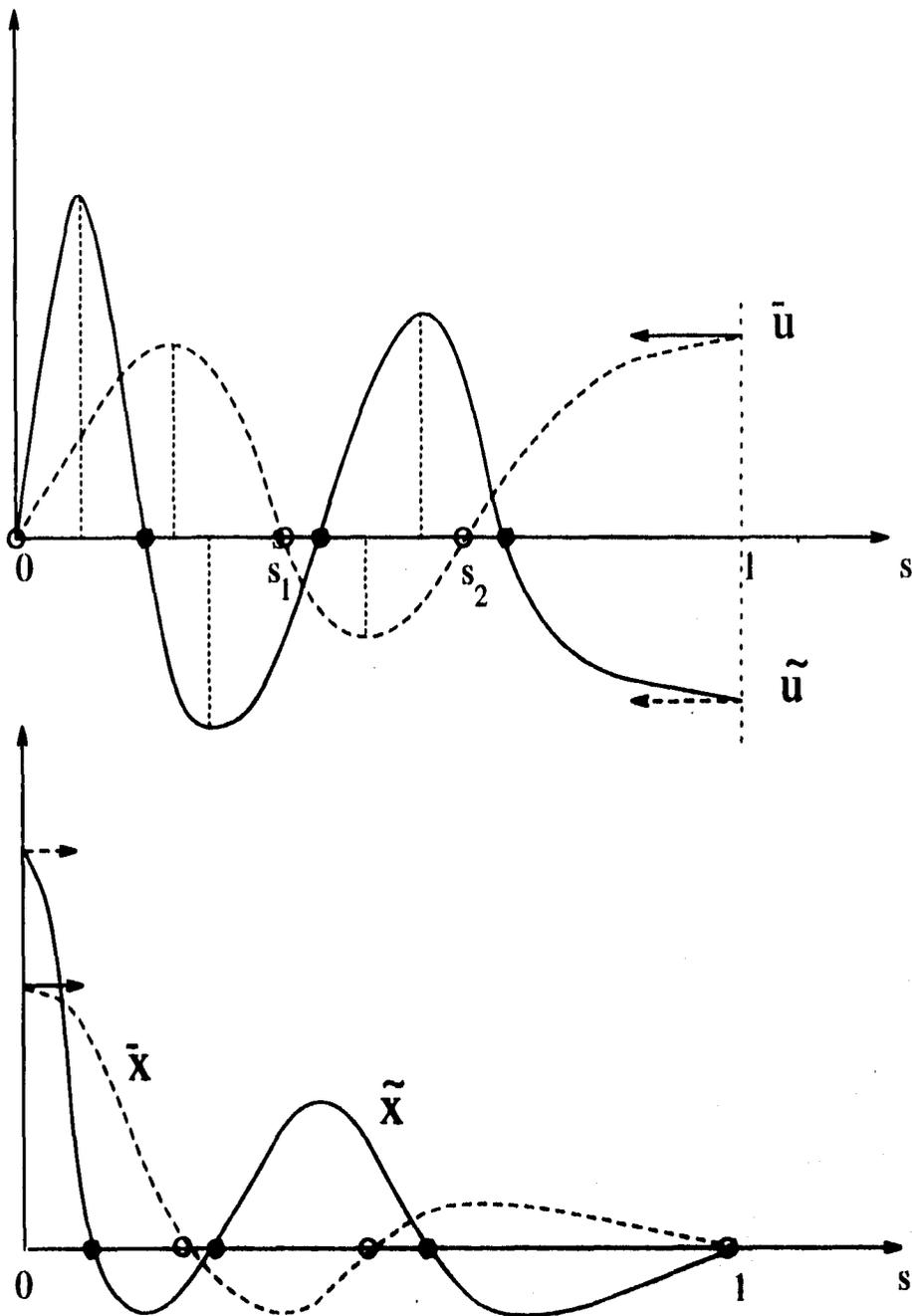


figura 4.4: Representación de las funciones  $(\tilde{u}, \tilde{x})$ ,  $(\bar{u}, \bar{x})$  correspondientes a los valores del parámetro  $\tilde{\omega}^2 = \omega_1^2$  y  $\bar{\omega}^2 = \omega_3^2$ . Nótese que estas funciones admiten exactamente cuatro y tres ceros en el intervalo  $[0, 1]$ .

# Capítulo 5

## Bifurcación

### 5.1 Bifurcación local

Sea  $\tilde{\mathbf{F}}$  dada por (3.32), (3.33), es decir,

$$\tilde{\mathbf{F}}[(w, y)] = -\omega(\tilde{\mathbf{L}}[(w, y)] + \tilde{\mathbf{g}}[(w, y)]) . \quad (5.1)$$

Tenemos que estudiar los puntos fijos del mapeo  $\tilde{\mathbf{F}}$  (ya que estos coinciden con los puntos fijos del mapeo  $\mathbf{F}$ , que es lo que queremos determinar) es decir,

$$(\mathbf{I} + \omega\tilde{\mathbf{L}}) \cdot (w, y) + \omega\tilde{\mathbf{g}}[(w, y)] = \mathbf{0} \quad , \quad \text{con } \omega \geq 0 , \quad (5.2)$$

donde  $\tilde{\mathbf{L}}$  es un operador compacto de  $C^0 \times C^0$  en  $C^0 \times C^0$  (dejamos al lector que se convenza inspirado por los resultados de la sección (3.8)) y con valores propios simples por lo que si  $\ker \mathbf{A} \equiv \ker(\mathbf{I} + \omega\tilde{\mathbf{L}})$  es no trivial, entonces tiene dimensión = 1 y  $\ker \mathbf{A}^2 = \ker \mathbf{A}$ .

Si  $\ker \mathbf{A} = \{\mathbf{0}\}$ , entonces tendríamos que  $\mathbf{A}$  (que depende de  $\omega$ ) es invertible por lo que (5.2) sería equivalente a:

$$(w, y) = -\omega \mathbf{A}^{-1} \tilde{\mathbf{g}}[(w, y)] \quad \text{con} \quad \tilde{\mathbf{g}}[(w, y)] = o(|w|_0 + |y|_0) , \quad (5.3)$$

la cual tiene como única solución al par  $(w, y) = (0, 0)$ . En otras palabras si  $\omega$  no es un valor crítico de  $\mathbf{A}$ , entonces  $(0, 0)$  es una solución aislada. Notemos además que la única solución correspondiente al caso  $\omega = 0$  es  $(w, y) = (0, 0)$ . Así, una condición necesaria para la existencia de soluciones no triviales, pequeñas en norma, es que  $\omega \sim \lambda_k^0$ , donde

$\lambda_k^0$  representa un valor crítico del operador  $\mathbf{A}$  (es decir,  $\lambda_k^0$  tal que  $\mathbf{A}$  no sea invertible o equivalentemente tal que  $\ker \mathbf{A} \neq \{\mathbf{0}\}$ ).

En este caso podríamos escribir la ecuación (5.2) de la siguiente forma que resulta conveniente para su estudio

$$\mathbf{A}[(w, y)] + \lambda \tilde{\mathbf{L}}[(w, y)] + (\lambda_k^0 + \lambda) \tilde{\mathbf{g}}[(w, y)] = \mathbf{0} \quad (5.4)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} + \lambda_k^0 \tilde{\mathbf{L}} \quad (5.5)$$

$$\lambda = \omega - \lambda_k^0. \quad (5.6)$$

Ahora, sea  $\mathbf{X}_0 \equiv (w_0, y_0) \in C^0 \times C^0 \equiv \mathcal{X}$  un generador de  $\ker \mathbf{A}$ , i.e.  $\ker \mathbf{A} = \langle \mathbf{X}_0 \rangle$ . Dado que en este caso  $\ker \mathbf{A}^2 = \ker \mathbf{A}$ , ( $\mathbf{A}$  operador de *Fredholm*) el [Ize76, lema 3.1 pág. 13] nos da una descomposición del espacio de Banach  $\mathcal{X}$  de la forma,

$$\mathcal{X} = \ker \mathbf{A} \oplus R(\mathbf{A}). \quad (5.7)$$

Esto implica que

$$\forall \mathbf{X} \in \mathcal{X} \implies \mathbf{X} = c\mathbf{X}_0 \oplus \mathbf{X}_1, \quad \text{con } c \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{X}_1 \in R(\mathbf{A}). \quad (5.8)$$

Además, podemos definir una proyección ( $\ker \mathbf{A}$  subespacio cerrado de  $\mathcal{X}$ )<sup>1</sup> de  $\mathcal{X}$  en  $\ker \mathbf{A}$

$$\begin{aligned} \mathbf{P} : \mathcal{X} &\longrightarrow \ker \mathbf{A} \\ \mathbf{X} &\longmapsto \mathbf{P}\mathbf{X} = c\mathbf{X}_0. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{X} = \mathbf{X}_1$ , i.e.  $(\mathbf{I} - \mathbf{P}) = \mathbf{Q}$  es una proyección de  $\mathcal{X}$  en el rango  $R(\mathbf{A})$ . Por otra parte,  $\tilde{\mathbf{L}}\mathbf{A} \equiv \tilde{\mathbf{L}}(\mathbf{I} + \lambda_k^0 \tilde{\mathbf{L}}) = (\mathbf{I} + \lambda_k^0 \tilde{\mathbf{L}})\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{L}}$ , es decir  $\mathbf{A}$  y  $\tilde{\mathbf{L}}$  conmutan. Lo mismo ocurre para  $\tilde{\mathbf{L}}$  y  $\mathbf{P}$ ; por lo que<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{L}} : \ker \mathbf{A} &\longrightarrow \ker \mathbf{A} \\ R(\mathbf{A}) &\longrightarrow R(\mathbf{A}). \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Dado un subespacio cerrado  $M$  de un espacio de Banach  $B$ , existe una proyección de  $B$  en  $M$ .

<sup>2</sup>Esta es la ventaja de haber reformulado el problema con  $\tilde{\mathbf{F}}$  en lugar de  $\mathbf{F}$ .

Descomponiendo la ecuación (5.4) mediante sus proyecciones respectivas en  $\ker \mathbf{A}$  y en  $R(\mathbf{A})$ , resulta que

$$\mathbf{P} \left[ (\mathbf{A} + \lambda \tilde{\mathbf{L}}) \mathbf{X} + (\lambda_k^0 + \lambda) \tilde{\mathbf{g}} \right] \oplus (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \left[ (\mathbf{A} + \lambda \tilde{\mathbf{L}}) \mathbf{X} + (\lambda_k^0 + \lambda) \tilde{\mathbf{g}} \right] = \mathbf{0},$$

se satisface si sólo si, cada una de las componentes es idénticamente 0, es decir

$$\mathbf{A}\mathbf{X} + \lambda(\mathbf{I} - \mathbf{P})\tilde{\mathbf{L}}\mathbf{X} + (\lambda_k^0 + \lambda)(\mathbf{I} - \mathbf{P})\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{0} \quad (5.9)$$

$$\lambda\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{L}}\mathbf{X} + (\lambda_k^0 + \lambda)\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{0}. \quad (5.10)$$

Puesto que  $\mathbf{A}\mathbf{X}_0 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{L}}\mathbf{X}_0 = -\mathbf{X}_0/\lambda_k^0$ , entonces si en (5.9), (5.10), sustituimos el valor de  $\mathbf{X}$  en términos de sus proyecciones (5.8), obtenemos después de simplificar (recordar que  $\lambda_k^0$  valor crítico de  $\mathbf{A}$  es necesariamente positivo)

$$(\mathbf{A} + \lambda \tilde{\mathbf{L}})\mathbf{X}_1 + (\lambda_k^0 + \lambda)(\mathbf{I} - \mathbf{P})\tilde{\mathbf{g}}[c\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1] = \mathbf{0} \quad (5.11)$$

$$\lambda c\mathbf{X}_0 - \lambda_k^0(\lambda_k^0 + \lambda)\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{g}}[c\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1] = \mathbf{0}. \quad (5.12)$$

Como  $R(\mathbf{A})$  es cerrado y que  $\mathbf{A} |_{R(\mathbf{A})}$  es uno a uno y sobre, existe un inverso de  $\mathbf{A}$  restringido a  $R(\mathbf{A})$ . Para  $|\lambda| \ll 1$ ,  $(\mathbf{A} + \lambda\mathbf{I}) |_{R(\mathbf{A})}$  sigue siendo invertible. (Pues podemos considerar a  $\lambda\mathbf{I}$  como una pequeña perturbación del operador  $\mathbf{A}$  que como vimos es invertible en  $R(\mathbf{A})$ ). También podríamos justificar este resultado observando (5.5). En efecto, la invertibilidad de  $\mathbf{A}$  restringido a  $R(\mathbf{A})$  nos diría que  $-(\lambda_k^0)^{-1}$  estaría en el conjunto resolvente  $\rho(\tilde{\mathbf{L}})$  del operador compacto  $\tilde{\mathbf{L}}$ . La teoría de operadores compactos nos dice que este último es abierto. Tomando  $|\lambda| \ll 1$  tendríamos que  $(-\lambda_k^0)^{-1} - |\lambda|/\lambda_k^0, -(\lambda_k^0)^{-1} + |\lambda|/\lambda_k^0 \subset \rho(\tilde{\mathbf{L}})$ , i.e.  $\mathbf{A} + \lambda\mathbf{I}$  invertible.)

Entonces si  $|\lambda| \ll 1$ , tenemos que (5.11) es equivalente a

$$\mathbf{X}_1 = M(\lambda, c, \mathbf{X}_1) \quad (5.13)$$

$$M(\lambda, c, \mathbf{X}_1) \equiv -(\mathbf{A} + \lambda \tilde{\mathbf{L}})^{-1}(\lambda_k^0 + \lambda)(\mathbf{I} - \mathbf{P})\tilde{\mathbf{g}}. \quad (5.14)$$

Ahora, así como se probó en la sección (3.6) que  $\mathbf{F}$  era  $C^1$  en  $(0, 0)$ , no es difícil convencerse de que lo mismo ocurre para  $\tilde{\mathbf{F}}$ . De aquí que  $\tilde{\mathbf{g}}$  sea a su vez  $C^1$  en  $(0, 0)$ .

Directamente del cálculo  $D\tilde{\mathbf{g}}[\mathbf{0}] = \mathbf{0}$ ; por lo que el teorema de la función implícita para espacios de Banach nos permite despejar de forma única en (5.13) a  $\mathbf{X}_1$  como función de  $\lambda$  y  $c$ . Además  $\mathbf{X}_1(\lambda, c)$  satisface  $\mathbf{X}_1(\lambda, 0) = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{X}_1$  es tan diferenciable con respecto a  $c$  como  $M$ , i.e. como  $\tilde{\mathbf{g}}$  (la diferenciable respecto a  $\lambda$  es obvia).

**Teorema 5.1 (Hilderbrandt-Graves)** Sean  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$ ,  $\mathcal{Z}$ , espacios de Banach y sea  $\mathcal{E}$  una vecindad de  $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$  en  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ . Sea  $\mathcal{E} \ni (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{g}[(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \in \mathcal{Z}$  continua, tal que  $\mathbf{g}[(\mathbf{0}, \mathbf{0})] = \mathbf{0}$ , con derivada de Fréchet  $D\mathbf{g}[\cdot]\mathbf{x}$  continua en  $\mathcal{E}$ , y  $D\mathbf{g}[(\mathbf{0}, \mathbf{0})]\mathbf{x}$  con inverso acotado. Entonces, existe una vecindad  $\mathcal{G}$  de  $\mathbf{0}$  en  $\mathcal{Y}$  donde  $\mathbf{g}[(\mathbf{x}, \mathbf{y})] = \mathbf{0}$  admite una única solución para  $\mathbf{x}$  dada por un operador continuo  $\mathbf{h} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}$  con  $\mathbf{h}[\mathbf{0}] = \mathbf{0}$  y tal que  $\mathbf{g}[(\mathbf{h}[\mathbf{y}], \mathbf{y})] = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{G}$ . Si además  $\mathbf{g}$  es  $k$  veces continuamente diferenciable en  $\mathcal{E}$ ,  $k \geq 1$ , entonces  $\mathbf{h}$  también lo será.

Otra manera de convencerse, es mostrando que el mapeo  $M$  definido por (5.14) es, para  $\lambda$  y  $c$  fijos y suficientemente pequeños, una contracción en una vecindad del punto  $\mathbf{X}_1 \sim \mathbf{0}$ .

A continuación, veremos que si  $|\lambda| \leq \rho$ ,  $|c| \leq \tilde{R}$ ,  $|\mathbf{X}_1| \leq R$ , entonces  $|M| < R$ , i.e.  $M : B(\mathbf{0}; R) \rightarrow B^{\text{int}}(\mathbf{0}; R)$ , donde  $B(\mathbf{0}; R)$  denota la bola o vecindad alrededor del origen. En efecto, por (3.34),

$$|\tilde{\mathbf{g}}[c\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1]| = \left| \int_0^1 (cw_0 + w_1)[h(cw_0 + w_1) - h(0)] d\xi \right|. \quad (5.15)$$

Claramente (5.15) tiene la forma de  $H$  (3.29) por lo que identificando adecuadamente los términos en juego, tenemos usando el lema (5.2) en la penúltima desigualdad,

$$\begin{aligned} |\tilde{\mathbf{g}}| &\leq C|cw_0 + w_1|_0^2 + \tilde{C}|\hat{\nu}(cw_0 + w_1)|_0|cw_0 + w_1|_0^{3/2} \\ &\leq K|cw_0 + w_1|_0^{3/2} \\ &\leq K|c\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1|_0^{3/2} \\ &\leq \hat{K}(|c|^{3/2} + |\mathbf{X}_1|_0^{3/2}). \end{aligned} \quad (5.16)$$

**Lema 5.2**  $\forall a, b \geq 0, \alpha > 0, \exists c$  tal que  $(a + b)^\alpha \leq c(a^\alpha + b^\alpha)$ .

**Prueba**

Si  $b = 0$  entonces basta tomar  $c \geq 1$ .

Si  $b \neq 0$  entonces definiendo  $x \equiv a/b$ , tenemos que probar que  $g(x) \leq 0$ , para alguna  $c$  donde

$$g(x) = (1+x)^\alpha - c(1+x^\alpha).$$

Observamos que  $g(0) = 1 - c \leq 0$  por lo que  $c \geq 1$ . Además para  $x \gg 1$ ,  $g(x) \sim x^\alpha(1-c)$ , es negativo para  $c \geq 1$ . Analizando con más cuidado la expresión de  $g$ ;

$$g'(x) = \alpha[(1+x)^{\alpha-1} - cx^{\alpha-1}].$$

De aquí que  $g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = (d-1)^{-1}$  donde  $d \equiv c^{\frac{1}{\alpha-1}}$ . Distinguimos así dos casos:

Si  $\alpha < 1$  entonces puesto que  $c \geq 1$ , tenemos que  $d < 1$ , es decir, en este caso  $g'$  no tiene ceros positivos por lo que mantiene un mismo signo para toda  $x \geq 0$ . Puesto que  $g'(0) = \alpha(1-c) \leq 0$ ,  $g$  es decreciente en  $\mathbf{R}^+$ , lo que implica que  $g(x) \leq g(0) = 1 - c \leq 0$ .

Si  $\alpha > 1$  entonces  $d > 1$ , así  $g'$  admite un cero positivo en el punto  $x_0$ . Además es inmediato ver que  $g'(x) < 0 \Leftrightarrow x > x_0$  y  $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq x_0$ . Por lo tanto  $g$  tiene un valor máximo en  $x_0$ . Basta entonces escoger  $c$  de forma tal que  $g(x_0) < 0$ .

$$g(x_0) = \frac{d^{\alpha-1}}{(d-1)^{\alpha-1}} [1 - (d-1)^{\alpha-1}].$$

Ahora,  $g(x_0) \leq 0 \Leftrightarrow (d-1)^{\alpha-1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow d \geq 2$ . En consecuencia, la desigualdad es válida si  $c \geq 2^{\alpha-1}$ .

Finalmente, recordando la forma explícita de la expresión que define al mapeo  $M$  (5.14) y puesto que  $|\lambda| \leq \rho \ll 1$ , es claro que  $M$  permanece acotado digamos por  $\Omega$ , i.e.  $|M| \leq \Omega$ . Tomando por ejemplo  $R = \tilde{R}$  y  $R \leq (9\Omega^2 \tilde{K}^2)^{-1}$  (5.16) implica que

$$|M(\lambda, c, \mathbf{X}_1)| \leq \Omega \tilde{K} (|c|^{3/2} + R^{3/2}) < R.$$

Por otra parte, no es difícil (ya lo hemos repetido en varias ocasiones) ver que

$$|\tilde{g}[c\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1] - \tilde{g}[c\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_2]| \leq \tilde{S} + \tilde{H} \quad (5.17)$$

$$\tilde{S} \equiv \int_s^1 |cw_0 + w_2| |h(cw_0 + w_1) - h(cw_0 + w_2)| d\xi \quad (5.18)$$

$$\tilde{H} \equiv \int_s^1 |w_1 - w_2| |h(cw_0 + w_1) - h(0)| d\xi . \quad (5.19)$$

Ahora si  $a_i = cw_0 + w_i$ ,  $i = 1, 2$ , tenemos además que

$$\tilde{S} \leq \tilde{T} + \tilde{V} \quad (5.20)$$

$$\tilde{T} \equiv \int_s^1 \frac{|a_2|}{\sqrt{a_2^2 + \xi\gamma^2}} |\hat{\nu}(a_1) - \hat{\nu}(a_2)| d\xi \quad (5.21)$$

$$\tilde{V} \equiv \int_s^1 \frac{|\hat{\nu}(a_1)| |a_2| |a_2^2 - a_1^2| d\xi}{\sqrt{a_1^2 + \xi\gamma^2} \sqrt{a_2^2 + \xi\gamma^2} (\sqrt{a_1^2 + \xi\gamma^2} + \sqrt{a_2^2 + \xi\gamma^2})} . \quad (5.22)$$

Siguiendo razonamiento de (3.16) y usando la primera estimación de (3.11) tenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{T} &\leq |a_1 - a_2|_0 |a_2|_0 |\hat{\nu}_N|_0 \int_s^1 \frac{d\xi}{\gamma(\xi)} \\ &\leq k_1 |w_1 - w_2|_0 |cw_0 + w_2|_0 . \end{aligned} \quad (5.23)$$

Para estimar (5.22), basándose en las expresiones (3.15), (3.17) es claro que

$$\begin{aligned} \tilde{V} &\leq \int_s^1 |a_2|^{\frac{1}{2}} |a_2 - a_1| \frac{|\hat{\nu}(a_1)|}{\sqrt{a_1^2 + \xi\gamma^2} (a_2^2 + \xi\gamma^2)^{\frac{1}{4}}} V_1 V_2 d\xi \\ V_1 &\equiv \left( \frac{|a_2|^{\frac{1}{2}}}{(a_2^2 + \xi\gamma^2)^{\frac{1}{4}}} \right) \\ V_2 &\equiv \left( \frac{|a_1| + |a_2|}{\sqrt{a_1^2 + \xi\gamma^2} + \sqrt{a_2^2 + \xi\gamma^2}} \right) . \end{aligned}$$

Ahora, los términos entre paréntesis son evidentemente menores que 1, mientras que el tercer término está acotado por  $|\hat{\nu}(a_1)|_0 / \xi^{3/4} \gamma^{3/2}$ , así

$$\begin{aligned}\tilde{V} &\leq 4 |a_1 - a_2|_0 |a_2|_0^{\frac{1}{2}} \frac{|\hat{\nu}(a_1)|_0}{\gamma_{\min}^{\frac{3}{2}}} (1 - s^{\frac{1}{2}}) \\ &\leq k_2 |w_1 - w_2|_0 |cw_0 + w_2|_0^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\quad (5.24)$$

A partir de (5.23), (5.24) se infiere de (5.20) que

$$\begin{aligned}\tilde{S} &\leq |w_1 - w_2|_0 |cw_0 + w_2|_0^{\frac{1}{2}} (k_1 |cw_0 + w_2|_0^{\frac{1}{2}} + k_2) \\ &\leq K_1 |w_1 - w_2|_0 (|c|^{\frac{1}{2}} + R^{\frac{1}{2}}).\end{aligned}\quad (5.25)$$

Del mismo modo, o bien usando (3.29) encontramos que  $\tilde{H}$  (5.19) está acotado por

$$\begin{aligned}\tilde{H} &\leq |w_1 - w_2|_0 |cw_0 + w_1|_0^{\frac{1}{2}} (\tilde{k}_2 + \tilde{k}_1 |cw_0 + w_1|_0^{\frac{1}{2}}) \\ &\leq K_2 |w_1 - w_2|_0 (|c|^{\frac{1}{2}} + R^{\frac{1}{2}}).\end{aligned}\quad (5.26)$$

Finalmente usando (5.17), (5.25), (5.26) y recordando (5.14) tenemos que

$$\begin{aligned}|M(\lambda, c, \mathbf{X}_1) - M(\lambda, c, \mathbf{X}_2)|_0 &\leq \tilde{k}(c^{\frac{1}{2}} + R^{\frac{1}{2}}) |w_1 - w_2|_0 \\ &\leq k |\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2|_0,\end{aligned}\quad (5.27)$$

con  $k < 1$  para  $c$  y  $R$  suficientemente pequeños, lo que muestra que  $M$  es una contracción. Existe pues una única  $\mathbf{X}_1(\lambda, c)$  que satisface (5.13),  $\mathbf{X}_1(\lambda, 0) = \mathbf{0}$ .<sup>3</sup>

Además por (5.27) es inmediato ver que

$$|\mathbf{X}_1(\lambda, c)|_0 \leq |M(\lambda, c, \mathbf{X}_1) - M(\lambda, c, \mathbf{0})|_0 + |M(\lambda, c, \mathbf{0})|_0$$

<sup>3</sup>Si en (5.14) tomamos  $\mathbf{X}_1 = \mathbf{0}$ , la única forma de que  $M$  se anule es tomando  $c = 0$ . Así, si  $c = 0$ , (5.13) se satisface si y sólo si  $\mathbf{X}_1(\lambda, 0) = \mathbf{0}$ .

$$\begin{aligned} &\leq k |\mathbf{X}_1|_0 + |M(\lambda, c, \mathbf{0})|_0 \\ &\leq \frac{1}{1-k} |M(\lambda, c, \mathbf{0})|_0. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Para estimar el lado derecho de (5.28), basta estimar  $|\tilde{\mathbf{g}}[c\mathbf{X}_0]|_0$ . Siguiendo el razonamiento implícito en (5.17) - (5.25), tenemos que

$$|\tilde{\mathbf{g}}[c\mathbf{X}_0]| \leq \int_s^1 \frac{|cw_0| |\hat{\nu}(cw_0) - \hat{\nu}(0)|}{\sqrt{c^2 w_0^2 + \xi \gamma^2}} d\xi + \int_s^1 \frac{|cw_0|^3 |\hat{\nu}(0)| d\xi}{\sqrt{\xi} \gamma \sqrt{c^2 w_0^2 + \xi \gamma^2} (\sqrt{\xi} \gamma + \sqrt{c^2 w_0^2 + \xi \gamma^2})}.$$

Usando (5.21), (5.23) para estimar el primer término del lado derecho de esta última desigualdad; observando que el denominador del segundo término es mayor que  $k\xi^{3/2}$  y puesto que  $|w_0| \leq k'\xi^{1/2}$  (se puede probar, como lo hicimos para  $\mathbf{L}$  en la sección (3.8), que  $\tilde{\mathbf{L}}$  es Lipschitz continuo como mapeo de  $C^0 \times C^0$  en  $C^{0,1/2} \times C^{0,1/2}$ ) claramente

$$\begin{aligned} |\tilde{\mathbf{g}}[c\mathbf{X}_0]| &\leq K(c^2 |w_0|_0^2 + c^3 |\hat{\nu}(0)|_0) \int_s^1 d\xi \\ &\leq \tilde{K} c^2 \\ \Rightarrow |M(\lambda, c, \mathbf{0})|_0 &\leq \Lambda c^2. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Así juntando los resultados (5.28), (5.29) obtenemos una estimación para  $|\mathbf{X}_1|_0$  en función de  $c$ .

$$|\mathbf{X}_1(\lambda, c)|_0 \leq \frac{\Lambda}{1-k} c^2. \quad (5.30)$$

Por otra parte, por la desigualdad del triángulo

$$|\tilde{\mathbf{g}}[c\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1] - \tilde{\mathbf{g}}[c'\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_2]| \leq |\tilde{\mathbf{g}}[c\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1] - \tilde{\mathbf{g}}[c\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_2]| + |\tilde{\mathbf{g}}[c\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_2] - \tilde{\mathbf{g}}[c'\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_2]|. \quad (5.31)$$

El primer término del lado derecho de (5.31) está acotado por  $k|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2|_0/\Omega$ . (Ver expresiones (5.17) - (5.27).) Para el segundo término, llamando  $a'_2 = c'\omega_0 + w_2$ , es claro que

$$|\tilde{g}[c\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_2] - \tilde{g}[c'\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_2]| \leq \check{S} + \check{H} \quad (5.32)$$

$$\check{S} \equiv \int_s^1 |a_2| |h(a_2) - h(a_2')| d\xi \quad (5.33)$$

$$\check{H} \equiv \int_s^1 |w_0| |c - c'| |h(a_2') - h(0)| d\xi. \quad (5.34)$$

Como antes descomponemos todavía (5.33) mediante

$$\check{S} \leq \check{T} + \check{V} \quad (5.35)$$

$$\check{T} \equiv \int_s^1 \frac{|a_2|}{\sqrt{a_2'^2 + \xi\gamma^2}} |\hat{v}(a_2') - \hat{v}(a_2)| d\xi \quad (5.36)$$

$$\check{V} \equiv \int_s^1 |a_2| |\hat{v}(a_2')| |c - c'| \frac{|w_0|}{\sqrt{a_2'^2 + \xi\gamma^2} \sqrt{a_2'^2 + \xi\gamma^2}} \left( \frac{|a_2| + |a_2'|}{\sqrt{a_2'^2 + \xi\gamma^2} + \sqrt{a_2'^2 + \xi\gamma^2}} \right) d\xi \quad (5.37)$$

Ahora (5.36) no es más que (5.21) tomando  $a_2'$  en lugar de  $a_1$ , por lo que tendremos una cota análoga a (5.23). De igual manera la misma correspondencia relaciona a (5.34) con (5.19), por lo cual tendremos, haciendo los cambios pertinentes, para (5.34) la cota (5.26). Claramente el término entre paréntesis de (5.37) es menor que 1, mientras que el término  $|w_0| (a_2'^2 + \xi\gamma^2)^{-1/2} (a_2'^2 + \xi\gamma^2)^{-1/2} \leq k\xi^{-1/2}\gamma^{-1}$  (Recordar que  $|w_0| < k\xi^{1/2}$ ), lo que indica que es integrable; obteniendo así una cota para  $\check{V}$  de la forma  $\bar{k} |c - c'| |cw_0 + w_2|_0$ . Todos estos resultados por (5.35) y (5.32) implican que

$$\begin{aligned} |\tilde{g}[c\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_2] - \tilde{g}[c'\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_2]|_0 &\leq K |c - c'| (|cw_0 + w_2|_0 + |c'w_0 + w_2|_0) \\ &\leq \tilde{K} |c - c'| (|c| + |c'| + |w_2|_0). \end{aligned} \quad (5.38)$$

Es decir,  $\tilde{g}$  es Lipschitz continua ( (5.31), (5.27), (5.38) ).

Directamente del análisis anterior, y recordando (5.30)

$$\begin{aligned} |\mathbf{X}_1(\lambda, c) - \mathbf{X}_1(\lambda, c')|_0 &\leq k |\mathbf{X}_1(\lambda, c) - \mathbf{X}_1(\lambda, c')|_0 + \bar{k} |c - c'| (|c| + |c'| + \frac{\Lambda}{1 - k} c^2) \\ &\leq \bar{k} |c - c'| (|c| + |c'|), \end{aligned} \quad (5.39)$$

probando así que  $\mathbf{X}_1(\lambda, c)$  es Lipschitz continuo en  $c$ . El mismo tipo de argumento, examinando la integrabilidad de cada expresión, da que de hecho  $\mathbf{X}_1$  es  $C^1$  como función del parámetro  $c$ .

Por otra parte, de la definición de  $\tilde{\mathbf{g}}$  (3.34) es inmediato ver que  $\tilde{\mathbf{g}}[-c\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_1] = -\tilde{\mathbf{g}}[c\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1]$  lo que conlleva por (5.13), (5.14), y la unicidad del teorema de contracción, al resultado  $\mathbf{X}_1(\lambda, -c) = -\mathbf{X}_1(\lambda, c)$  i.e.  $\mathbf{X}_1$  es una función impar de  $c$ . Sustituyendo el valor de  $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_1(\lambda, c)$  en (5.12) obtenemos la *ecuación de bifurcación*,

$$\lambda c\mathbf{X}_0 - \lambda_k^0(\lambda_k^0 + \lambda)\mathbf{P}\tilde{\mathbf{g}}[c\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1(\lambda, c)] = \mathbf{0}. \quad (5.40)$$

Ahora  $\mathbf{P}\tilde{\mathbf{g}}[c\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1(\lambda, c)] = d(\lambda, c)\mathbf{X}_0$  i.e. la proyección en  $\ker \mathbf{A}$  de  $c\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1(\lambda, c)$  es una función de  $\lambda$  y  $c$ . Usando la linealidad de  $\mathbf{P}$  y una relación análoga a (5.38), (5.39), vemos que

$$\begin{aligned} |(d(\lambda, c) - d(\lambda, c'))\mathbf{X}_0| &= |\mathbf{P}(\tilde{\mathbf{g}}[c\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1(\lambda, c)] - \tilde{\mathbf{g}}[c'\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1(\lambda, c')])| \\ &\leq |\tilde{\mathbf{g}}[c\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1(\lambda, c)] - \tilde{\mathbf{g}}[c'\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1(\lambda, c')]| \\ &\leq \frac{k}{\Omega} |\mathbf{X}_1(\lambda, c) - \mathbf{X}_1(\lambda, c')| + \tilde{k} |c - c'| (|c| + |c'|) \\ &\leq \tilde{K} |c - c'| (|c| + |c'|), \end{aligned}$$

por lo que  $d(\lambda, c)$  es Lipschitz continua en  $c$  y  $|d(\lambda, c)| \leq Kc^2$ . Además, por su definición  $d(\lambda, c)$  es también una función impar en  $c$ . Dividiendo (5.40) por  $c$  y factorizando  $\mathbf{X}_0$  obtenemos

$$\lambda - \lambda_k^0(\lambda_k^0 + \lambda)\tilde{d}(\lambda, c) = 0, \quad (5.41)$$

donde  $\tilde{d}(\lambda, c) \equiv d(\lambda, c)/c$ . Sin pérdida de generalidad, si  $|c| > |c'|$ , escribiendo

$$\tilde{d}(\lambda, c) - \tilde{d}(\lambda, c') = \frac{d(\lambda, c) - d(\lambda, c')}{c} + \frac{d(\lambda, c')}{cc'}(c - c'),$$

y tomando valor absoluto en esta última expresión, es inmediato ver que  $|\tilde{d}(\lambda, c) - \tilde{d}(\lambda, c')| \leq \sigma |c - c'|$ , por lo que  $\tilde{d}$  es Lipschitz continua en  $c$  y satisface  $|\tilde{d}'| < kc$ . Además, directamente de la definición, tenemos que  $\tilde{d}$  es  $C^1$  en  $\lambda$ . Así, vemos que podemos aplicar

el teorema de contracción en la ecuación de bifurcación (5.41), <sup>4</sup>obteniendo una única solución  $\lambda = \lambda(c)$  que satisface  $\lambda(0) = 0$ ,  $\lambda \in C^1$  tan diferenciable como  $\tilde{d}$ . Puesto que  $\tilde{d}$  es par en  $c$ , la unicidad de la solución implica que  $\lambda(-c) = \lambda(c)$ , i.e.  $\lambda$  resulta una función par en  $c$ . Geométricamente, tenemos que en el espacio  $(\omega, c)$  existe, en cada vecindad de un valor crítico  $\lambda_k^0$  de  $\mathbf{A}$ , una curva que bifurca verticalmente, ver figura (5.1).

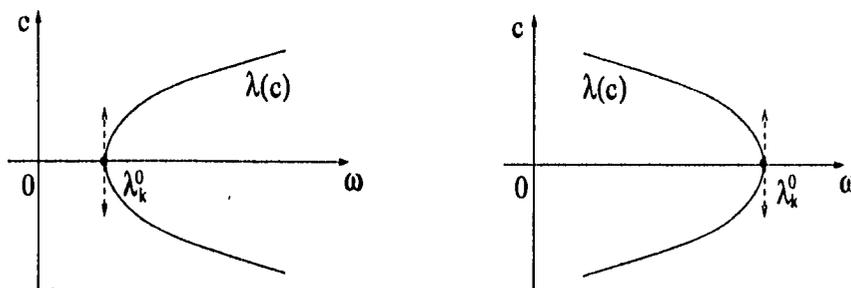


figura 5.1: Bifurcación vertical. Aún no sabemos cual es la concavidad de la rama.

### Nota

Otra manera de probar estos resultados es utilizando los métodos de [C-R 71] o Krasnolskii basados en la teoría de grado topológico [Ize76], [Ize93].

Ahora, como vimos en (3.64) la solución  $c\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1(c, \lambda(c))$  es tal que su componente  $w$  satisface  $|w|_0 \leq k\sqrt{s}$  por lo tanto:

**Teorema 5.3** A partir de  $\lambda_k^0$  valor crítico de  $\mathbf{A}$  hay una única rama  $S(\lambda_k^0(c))$  que bifurca verticalmente de la forma  $\omega(c) = \lambda_k^0 + \lambda(c)$ ,  $\mathbf{X}(c) = c\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1(\lambda(c), c)$  con  $\lambda$  y  $\mathbf{X}_1$  funciones  $C^1$  que satisfacen  $\lambda(-c) = \lambda(c)$ ,  $\lambda'(0) = 0$ ,  $\mathbf{X}_1(-c) = -\mathbf{X}_1(c)$ ,  $|\mathbf{X}_1(c)|_0 \leq \check{K}c^2$ . <sup>5</sup>

Probando más diferenciabilidad, tendríamos que <sup>6</sup>

$$\lambda(c) = ac^2 + O(c^4) \quad (5.42)$$

$$\mathbf{X}_1(\lambda(c), c) = c^3\mathbf{X}_1 + O(c^5). \quad (5.43)$$

<sup>4</sup>Estrictamente el teorema de la función implícita requiere que las funciones sean  $C^1$  en una vecindad, lo cual no se probó.

<sup>5</sup>En general, para problemas de bifurcación a partir de valores críticos simples, la componente  $c$  es un parámetro natural en una vecindad de la rama.

<sup>6</sup>En el trabajo de Antman [Ant2] no están justificadas las expresiones (5.42), (5.43).

Hasta ahora, no hemos determinado la concavidad de la rama bifurcada, ni tampoco hemos establecido algunas de sus propiedades globales:

no sabemos si la rama se detiene en algún punto, continua indefinidamente, si se intersecta con otra rama o bien, si regresa al eje de las soluciones triviales. (Ver figura (5.2)).

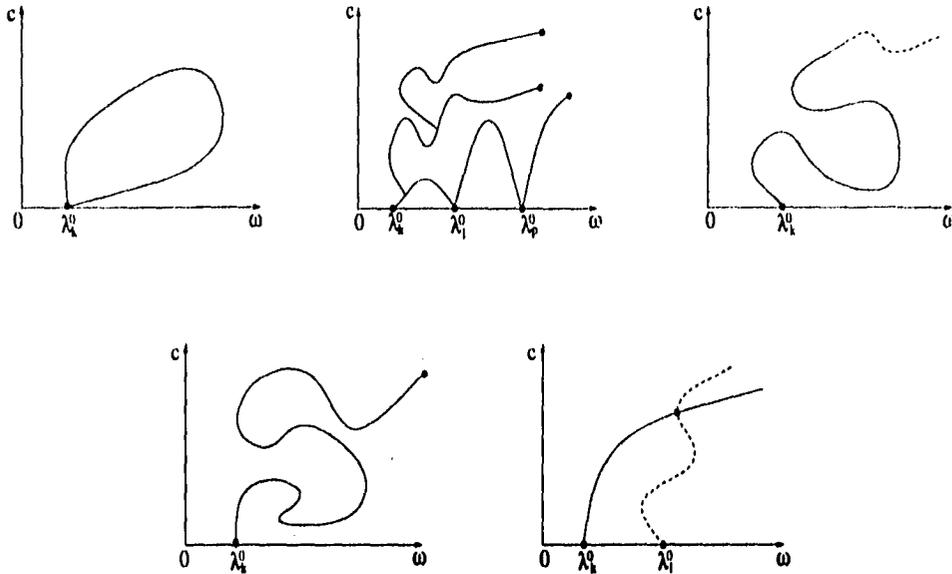


figura 5.2: Ilustración de situaciones que uno podría imaginar. Más adelante veremos cuáles son realizables.

Varios de estos cuestionamientos encuentran respuestas en el teorema de bifurcación global (alternativa de Rabinowitz) [R-71a].

**Teorema 5.4 (Alternativa de Rabinowitz [R-71a])** Cada rama que bifurca a partir de  $(\lambda_k^0, \mathbf{0}) \in S_k(\lambda_k^0)$ , donde  $\lambda_k^0$  es un valor propio de la linealización del problema no lineal, es una componente conexa (máximo conjunto conexo) cerradura del conjunto  $S$  de pares de soluciones  $(\omega, \mathbf{X}) \in \mathbf{R} \times \mathcal{X}$  no triviales. Además  $S_k(\lambda_k^0)$  satisface alguna de las siguientes alternativas:

- (i)  $S_k(\lambda_k^0)$  es no acotada en el espacio  $\mathbf{R} \times \mathcal{X}$ .
- (ii)  $S_k(\lambda_k^0)$  regresa al eje de soluciones triviales en  $(\lambda_j^0, \mathbf{0})$ , donde  $\lambda_j^0$  es otro valor propio del problema linealizado.

En el siguiente capítulo (6.1) veremos que  $S_k(\lambda_k^0) \cap S_j(\lambda_j^0) = \emptyset$  para  $k \neq j$  por lo que el teorema anterior (5.4), nos dice que  $S_k(\lambda_k^0)$  es no acotada.

**Nota<sup>7</sup>**

La forma esencial del teorema fue probada por Rabinowitz [R-71a]. Representa una generalización tanto de la teoría local de Kranselski (1956) como de los resultados globales de Crandall-Rabinowitz [C-R 71] para problemas no lineales de Sturm-Liouville. Muchas aplicaciones de estos resultados, así como distintas exposiciones se pueden encontrar en los trabajos de Rabinowitz [R-71b]-[R-73a]-[R-75], Nirenberg [N74] e Ize [Ize76, V.4, V.8]-[Ize93].

Muchos problemas singulares, no pueden estudiarse directamente usando los teoremas estándar de bifurcación (5.4) (No se cumple alguna de las hipótesis). Una manera, como acabamos de ver, es pensar en un cambio de variables astuto que nos permita deshacernos de la singularidad. Otro camino sería considerar un conjunto de problemas "cercanos" al problema singular, para los cuales se satisfagan las hipótesis de los teoremas de bifurcación global. Ahora, convergen las ramas individuales de los problemas penalizados a conjuntos conexos; y de ser así, corresponden estos últimos a las ramas no triviales del problema original (singular)? Despejaremos la conjetura en la siguiente sección.<sup>8</sup>

**5.2 Bifurcación local (caso  $\mu > 0$ )**

En esta sección estudiaremos el problema no singular que resulta al considerar un peso  $\mu > 0$  suspendido en el extremo libre de la cuerda. Nuestro análisis se concentrará fuertemente en determinar hasta que punto podemos atacar el problema singular ( $\mu = 0$ ), mediante el estudio riguroso de la dependencia, que heredan las soluciones del problema penalizado, con respecto al parámetro  $\mu$ . Procuraremos no entrar nuevamente en los detalles de las derivaciones de varios resultados que dependan de relaciones similares a las ya estudiadas.

Por las ecuaciones (2.27), (2.28) es claro que buscamos determinar las soluciones del problema

$$\mathbf{X}(s) = \omega \check{\mathbf{F}}[\mathbf{X}](s) \equiv \begin{pmatrix} \check{f}_1[y](s) \\ \check{f}_2[u](s) \end{pmatrix} \quad (5.44)$$

$$\check{f}_1[y](s) \equiv - \int_0^s \rho(\xi)y(\xi) d\xi + \frac{\mu y(0)}{g} \quad (5.45)$$

<sup>7</sup>Estas referencias fueron copiadas del texto de Antman [Ant1][pág. 157].

<sup>8</sup>Antman basa estos métodos en el teorema [Ant1, 4.21 pag 157]

**Nota<sup>7</sup>**

La forma esencial del teorema fue probada por Rabinowitz [R-71a]. Representa una generalización tanto de la teoría local de Kranoselski (1956) como de los resultados globales de Crandall-Rabinowitz [C-R 71] para problemas no lineales de Sturm-Liouville. Muchas aplicaciones de estos resultados, así como distintas exposiciones se pueden encontrar en los trabajos de Rabinowitz [R-71b]-[R-73a]-[R-75], Nirenberg [N74] e Ize [Ize76, V.4, V.8]-[Ize93].

Muchos problemas singulares, no pueden estudiarse directamente usando los teoremas estándar de bifurcación (5.4) (No se cumple alguna de las hipótesis). Una manera, como acabamos de ver, es pensar en un cambio de variables astuto que nos permita deshacernos de la singularidad. Otro camino sería considerar un conjunto de problemas "cercaos" al problema singular, para los cuales se satisfagan las hipótesis de los teoremas de bifurcación global. Ahora, convergen las ramas individuales de los problemas penalizados a conjuntos conexos; y de ser así, corresponden estos últimos a las ramas no triviales del problema original (singular)? Despejaremos la conjetura en la siguiente sección.<sup>8</sup>

**5.2 Bifurcación local (caso  $\mu > 0$ )**

En esta sección estudiaremos el problema no singular que resulta al considerar un peso  $\mu > 0$  suspendido en el extremo libre de la cuerda. Nuestro análisis se concentrará fuertemente en determinar hasta que punto podemos atacar el problema singular ( $\mu = 0$ ), mediante el estudio riguroso de la dependencia, que heredan las soluciones del problema penalizado, con respecto al parámetro  $\mu$ . Procuraremos no entrar nuevamente en los detalles de las derivaciones de varios resultados que dependan de relaciones similares a las ya estudiadas.

Por las ecuaciones (2.27), (2.28) es claro que buscamos determinar las soluciones del problema

$$\mathbf{X}(s) = \omega \check{\mathbf{F}}[\mathbf{X}](s) \equiv \begin{pmatrix} \check{f}_1[y](s) \\ \check{f}_2[u](s) \end{pmatrix} \quad (5.44)$$

$$\check{f}_1[y](s) \equiv - \int_0^s \rho(\xi)y(\xi) d\xi + \frac{\mu y(0)}{g} \quad (5.45)$$

<sup>7</sup>Estas referencias fueron copiadas del texto de Antman [Ant1][pág. 157].

<sup>8</sup>Antman basa estos métodos en el teorema [Ant1, 4.21 pag 157]

$$\check{f}_2[u](s) \equiv - \int_s^1 \frac{\hat{\nu}(N(\xi), \xi) u(\xi)}{N(\xi)} d\xi \quad (5.46)$$

$$N(\xi) \equiv \sqrt{u^2(\xi) + (\xi\gamma + \mu)^2}, \quad (5.47)$$

donde  $\mathbf{X}(s) \equiv (u(s), y(s))$ . Siguiendo la pauta de secciones anteriores, es fácil ver que  $\check{\mathbf{F}} : C^0 \times C^0 \rightarrow C^1 \times C^1$ . Claramente,  $\check{f}_1[y](s)$  es lineal en  $y$ , además de verificar  $|\check{f}_1|_0, |\check{f}_1'|_0 \leq c|y|_0$ , (ver (5.45)). Es decir,  $\check{f}_1$  es un operador lineal y continuo de  $C^0$  en  $C^1$ , por lo que  $\check{f}_1 : C^0 \rightarrow C^0$  es un operador compacto. Para la segunda componente, basándose en los resultados contenidos en (3.7) - (3.18) y recordando que en este caso  $N \geq \mu > 0$ , no es difícil convencerse de que  $|\check{f}_2|_0, |\check{f}_2'|_0 \leq c_2|u|_0/\mu$  y que  $|\check{f}_2[u] - \check{f}_2[v]|_1 \leq K(1 + 1/\mu)|u - v|_0$ . Esto nos muestra que  $\check{\mathbf{F}}$  es un mapeo Lipschitz continuo de  $C^0 \times C^0$  en  $C^1 \times C^1$ . De hecho tenemos que  $\check{\mathbf{F}}$  es continuamente diferenciable de  $C^0 \times C^0$  en  $C^0 \times C^0$  con (ver resultados (3.27) - (3.29)).

$$D\check{\mathbf{F}}[\mathbf{X}_0]\mathbf{X} = - \left( \begin{array}{c} \int_0^s \rho y d\xi + \frac{\mu y(0)}{g} \\ \int_s^1 \frac{u}{N(u_0)^2} \left[ \frac{\hat{\nu}(N(u_0), \xi)(\xi\gamma + \mu)^2}{N(u_0)} + \hat{\nu}_N(N(u_0), \xi) u_0^2 \right] d\xi \end{array} \right) \quad (5.48)$$

$$N(u_0) = \sqrt{u_0^2 + (\xi\gamma + \mu)^2}.$$

Directamente de (5.48), estimando cada término de cada componente, se determina una cota para la norma del operador  $D\check{\mathbf{F}}[\mathbf{X}_0]$ , dada por <sup>9</sup>

$$|D\check{\mathbf{F}}[\mathbf{X}_0]| \leq K \left( 1 + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^3} \right) \quad \text{para } |\mathbf{X}_0| \leq M. \quad (5.49)$$

Mientras que para el caso particular  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{0}$ , es inmediato ver que

$$|D\check{\mathbf{F}}[\mathbf{0}]| \leq K \left( 1 + \frac{1}{\mu} \right). \quad (5.50)$$

Enrollando a (3.30) podemos descomponer (5.44) como ( $\check{\mathbf{F}}[\mathbf{0}] = \mathbf{0}$ )

<sup>9</sup>Para no recargar la notación usaremos también  $|\cdot|$  para la norma de operadores.

$$\mathbf{X} = \omega D\check{\mathbf{F}}[0]\mathbf{X} + \omega \check{\mathbf{g}}[\mathbf{X}] \quad (5.51)$$

$$D\check{\mathbf{F}}[0]\mathbf{X} \equiv - \begin{pmatrix} \int_0^s \rho y \, d\xi + \frac{\mu y(0)}{g} \\ \int_s^1 \frac{u \hat{\nu}(\xi\gamma + \mu, \xi)}{(\xi\gamma + \mu)} \, d\xi \end{pmatrix} \quad (5.52)$$

$$\check{\mathbf{g}}[\mathbf{X}] \equiv - \begin{pmatrix} 0 \\ \int_s^1 u \left[ \frac{\hat{\nu}(N(\xi), \xi)}{N(\xi)} - \frac{\hat{\nu}(\xi\gamma + \mu, \xi)}{\xi\gamma + \mu} \right] \, d\xi \end{pmatrix}. \quad (5.53)$$

A estas alturas, es claro que un primer paso para determinar la existencia de soluciones a la ecuación (5.51), consiste en estudiar con cuidado su linealización:

$$\mathbf{X} - \omega D\check{\mathbf{F}}[0]\mathbf{X} = \mathbf{0}. \quad (5.54)$$

Como antes, una condición necesaria para la existencia de soluciones no triviales de (5.54) es que  $\omega^{-1}$  pertenezca al espectro del operador compacto  $D\check{\mathbf{F}}[0]$ . Siguiendo nuestros pasos (5.54) resulta equivalente a la siguiente ecuación (no singular) de Sturm-Liouville.

$$\left( \frac{u'}{\rho} \right)' + \omega^2 \frac{\hat{\nu}(s\gamma(s) + \mu, s)}{s\gamma(s) + \mu} u = 0 \quad (5.55)$$

$$u'(1) = 0 \quad ; \quad u(0) + \frac{\mu}{g} u'(0) = 0. \quad (5.56)$$

Por los resultados estándar de la teoría de Sturm-Liouville [C-L] o bien, basándose en el análisis de la sección (4) (en este caso es más sencillo, pues no tenemos singularidades), tenemos que las funciones propias son simples, constituyen una base de  $L^2$  y se pueden ordenar los valores propios de forma tal que  $u_k$  asociada a  $\lambda_k^0(\mu)$  se anule exactamente  $k$  veces en el intervalo  $[0, 1]$ . (ver (4.4))

Usando el teorema de bifurcación<sup>10</sup> encontramos que a partir de cada valor propio  $\lambda_k^0(\mu)$ , existe una rama de soluciones no triviales que bifurcan verticalmente de la forma (ver (5.42), (5.43) y (5.6))

<sup>10</sup>Invitamos al lector escrupuloso a que se aburra con los detalles que justifiquen que (5.51) cumple con las hipótesis que exige el enunciado del teorema. En realidad este trabajo está esencialmente cubierto en las entrañas de las secciones (3.7), (3.8) y (3.9).

$$\omega(c, \mu) = \lambda_k^0(\mu) + \lambda(\mu, c) \quad (5.57)$$

$$u(c, \mu) = cu_k(\mu) + u_1(c, \mu), \quad (5.58)$$

con  $\lambda(\mu, -c) = \lambda(\mu, c)$ ;  $\lambda(0, \mu) = \lambda'(0, \mu) = 0$ ;  $u_1(-c, \mu) = -u_1(c, \mu)$  y  $\lambda$  y  $u_1$  tan diferenciables como  $\hat{v}$ . En particular si  $\hat{v}$  es  $C^\infty$  (o mejor analítica), entonces

$$\lambda(\mu, c) = a_0(\mu)c^2 + O(c^4) \quad (5.59)$$

$$u_1(c, \mu) = c^3 u_1(\mu) + O(c^5). \quad (5.60)$$

Sin embargo, las estimaciones para  $a_0(\mu)$  y  $u_1(\mu)$ , derivadas de las anteriores, contienen términos de la forma  $k/\mu$  por lo que este método no nos permite establecer la comparación deseada entre los casos  $\mu > 0$  y  $\mu = 0$  (no hay convergencia).

Reformularemos el problema para  $\mu > 0$  en una forma que permita el análisis del caso límite  $\mu = 0$ .<sup>11</sup>

Definamos entonces,

$$v(s) \equiv u(s) + \omega \frac{\mu y(0)}{g}. \quad (5.61)$$

Así, un punto fijo del problema (5.44) corresponde a un punto fijo de

$$v(s) = -\omega \int_0^s \rho y \, d\xi \quad (5.62)$$

$$y(s) = -\omega \int_s^1 \frac{\hat{v}(\tilde{N}(\xi), \xi)}{\tilde{N}(\xi)} \left[ v(\xi) - \omega \frac{\mu y(0)}{g} \right] d\xi \quad (5.63)$$

$$\tilde{N}(\xi) \equiv \sqrt{\left( v - \omega \frac{\mu y(0)}{g} \right)^2 + (\xi \gamma + \mu)^2}. \quad (5.64)$$

<sup>11</sup> Como era de esperarse, hay que pagar el precio de alguna u otra manera.

Como  $v(0) = 0$ , no generamos mayores dificultades si consideramos el siguiente cambio de variable  $\sqrt{s}w(s) = v(s)$ , obteniendo una formulación equivalente a (5.62), (5.63) y (5.64).<sup>12</sup>

$$w(s) = -\frac{\omega}{\sqrt{s}} \int_0^s \rho y \, d\xi \quad (5.65)$$

$$y(s) = -\omega \int_s^1 \frac{\hat{v}(\bar{N}(\xi), \xi)}{\bar{N}(\xi)} \left[ \sqrt{\xi} w - \omega \frac{\mu y(0)}{g} \right] d\xi \quad (5.66)$$

$$\bar{N}(\xi) \equiv \sqrt{\left( \sqrt{\xi} w - \omega \frac{\mu y(0)}{g} \right)^2 + (\xi\gamma + \mu)^2}, \quad (5.67)$$

que escribiendo como (en este caso  $\mathbf{X} = (w, y)$  obviamente)

$$\mathbf{X} = \omega \bar{\mathbf{F}}[\mathbf{X}] = \omega \left( \bar{\mathbf{L}}(\mu)\mathbf{X} + \bar{\mathbf{g}}[\omega, \mu, \mathbf{X}] \right), \quad (5.68)$$

donde claramente,

$$\bar{\mathbf{L}}(\mu)\mathbf{X} = - \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{s}} \int_0^s \rho y \, d\xi \\ \int_s^1 \frac{\hat{v}(\xi\gamma + \mu, \xi)}{\xi\gamma + \mu} \left[ \sqrt{\xi} w - \omega \frac{\mu y(0)}{g} \right] d\xi \end{pmatrix} \quad (5.69)$$

$$\bar{\mathbf{g}}[\omega, \mu, (w, y)] = - \begin{pmatrix} 0 \\ \int_s^1 \left( \sqrt{\xi} w - \omega \frac{\mu y(0)}{g} \right) \left[ \frac{\hat{v}(\bar{N}(\xi), \xi)}{\bar{N}(\xi)} - \frac{\hat{v}(\xi\gamma + \mu, \xi)}{\xi\gamma + \mu} \right] d\xi \end{pmatrix}. \quad (5.70)$$

Descomponiendo todavía a  $\bar{\mathbf{L}}(\mu)$  en términos de la linearización del problema singular (3.33), es claro que  $\bar{\mathbf{L}}(0) \equiv -\hat{\mathbf{L}}$  por lo que

$$\bar{\mathbf{L}}(\mu) = -\hat{\mathbf{L}} + \mathbf{R}(\mu) \quad (5.71)$$

<sup>12</sup>Notemos que en el fondo estamos calcando el razonamiento perpetrado para el caso singular, por lo cual es lógico pensar que en esta nueva formulación podamos establecer la convergencia cuando  $\mu \rightarrow 0$ .

$$\mathbf{R}[\mu, (w, y)] = - \begin{pmatrix} 0 \\ \int_s^1 \frac{\hat{v}(\xi\gamma + \mu, \xi)}{\xi\gamma + \mu} \left[ \sqrt{\xi}w - \omega \frac{\mu y(0)}{g} \right] - \frac{\hat{v}(\xi\gamma, \xi)}{\sqrt{\xi}\gamma} w d\xi \end{pmatrix}. \quad (5.72)$$

Basándonos en el razonamiento alrededor de (3.48) - (3.57), no es difícil ver que

$$|\mathbf{R}[\mu, (w, y)]| \leq I_1 + I_2 + I_3 \quad (5.73)$$

$$I_1 = \int_s^1 \frac{\mu |w| \hat{v}(\xi\gamma + \mu, \xi)}{\sqrt{\xi}\gamma(\xi\gamma + \mu)} d\xi$$

$$I_2 = \frac{\mu |w|}{\sqrt{\xi}\gamma} \left( \int_0^1 \hat{v}_N(\xi\gamma + \tau\mu) d\tau \right) d\xi$$

$$I_3 = \frac{\mu\omega}{g} |y(0)| \int_s^1 \frac{\hat{v}(\xi\gamma + \mu, \xi)}{\xi\gamma + \mu} d\xi.$$

Usando las siguientes estimaciones

$$\int_s^1 \frac{\mu d\xi}{\xi\gamma + \mu} \leq \int_s^1 \left( \frac{\mu}{\xi\gamma + \mu} \right)^{1-\epsilon} d\xi \leq K|\mu|^{1-\epsilon}, \quad \text{si } \epsilon > 0 \quad (5.74)$$

$$\int_s^1 \frac{\mu d\xi}{\sqrt{\xi}(\xi\gamma + \mu)} \leq c \int_s^1 \frac{|\mu|^{1-\epsilon}}{\xi^{\frac{3}{2}-\epsilon}} d\xi \leq K_2|\mu|^{1-\epsilon}, \quad \text{si } \epsilon > \frac{1}{2}, \quad (5.75)$$

encontramos finalmente que para  $\epsilon > 1/2$ ,

$$\begin{aligned} |\mathbf{R}[\mu, (w, y)]| &\leq c(|\mu| + |\mu|^{1-\epsilon}) \\ &\leq \tilde{c}|\mu|^{1-\epsilon} \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} 0. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Es decir,  $\mathbf{R}(\mu)$  es una perturbación compacta (ejercicio) del operador  $-\tilde{\mathbf{L}}$ . Puesto que tanto  $-\tilde{\mathbf{L}}$  como  $\tilde{\mathbf{L}}(\mu)$  tienen valores propios simples, es un resultado clásico [Kato] que

$$\lambda_k^0(\mu) \longrightarrow \lambda_k^0, \quad \text{conforme } \mu \longrightarrow 0. \quad (5.77)$$

Otra manera de probar esta convergencia de espectro, sin recurrir a un resultado abstracto, es la siguiente:

consideremos el problema lineal

$$\mathbf{X} = \omega \tilde{\mathbf{L}}(\mu) \mathbf{X} \equiv -\omega \tilde{\mathbf{L}} \mathbf{X} + \omega \mathbf{R}(\mu) \mathbf{X}, \quad (5.78)$$

y tomemos  $\omega \sim \lambda_k^0$ , valor crítico de  $\mathbf{A} = \mathbf{I} + \omega \tilde{\mathbf{L}}$ , entonces (5.78) se escribe como (5.2)

$$(\mathbf{I} + \omega \tilde{\mathbf{L}}) \mathbf{X} - \omega \mathbf{R}(\mu) \mathbf{X} = \mathbf{0}, \quad (5.79)$$

que a su vez, con la proyección de *Liapunov-Schmidt*,<sup>13</sup> escribiendo  $\mathbf{X} = c\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1$  (5.79) se parte en (ver (5.11), (5.12))

$$(\mathbf{A} + \lambda \tilde{\mathbf{L}}) \mathbf{X}_1 - (\lambda_k^0 + \lambda)(\mathbf{I} - \mathbf{P}) \mathbf{R}(\mu)(c\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1) = \mathbf{0} \quad (5.80)$$

$$\lambda c\mathbf{X}_0 + \lambda_k^0(\lambda_k^0 + \lambda) \mathbf{P} \mathbf{R}(\mu)(c\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1) = \mathbf{0}. \quad (5.81)$$

La primera ecuación, siendo lineal, se resuelve de manera única para  $\mathbf{X}_1$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= c \left[ \mathbf{A} + \lambda \tilde{\mathbf{L}} - (\lambda_k^0 + \lambda)(\mathbf{I} - \mathbf{P}) \mathbf{R}(\mu) \right]^{-1} (\lambda_k^0 + \lambda)(\mathbf{I} - \mathbf{P}) \mathbf{R}(\mu) \mathbf{X}_0 \\ &= c \hat{\mathbf{X}}_1(\lambda, \mu), \end{aligned} \quad (5.82)$$

ya que para  $(\lambda, \mu)$  pequeños, tenemos una perturbación del operador invertible  $\mathbf{A} |_{\mu}$  ( $\mathbf{A}$ ). Además usando (5.76) es inmediato ver que  $|\mathbf{X}_1|_0 \leq k|c||\mu|^{1-\epsilon}$ . Sustituyendo el valor de  $\mathbf{X}_1$  (5.82) en (5.81), la ecuación de "bifurcación" se vuelve, ver (5.41)<sup>14</sup>

<sup>13</sup>En los problema de bifurcación, uno se enfrenta a operadores cuya linearización puede no satisfacer las hipótesis del teorema de la función implícita (5.1). El método de Liapunov-Schmidt, representa una alternativa, proyectando la ecuación en dos espacios complementarios, en uno de los cuales, podemos aplicar el teorema de la función implícita (o más generalmente el teorema de contracción), en tanto que en el otro, el problema se reduce a un sistema de ecuaciones en un espacio de dimensión finita. Esto es lo que sucede con operadores de Fredholm.

<sup>14</sup>Es importante aclarar que no estamos estudiando por ahora bifurcación alguna. Únicamente explotamos las ideas que se utilizan en los casos no lineales, i.e. cuando sí puede haber bifurcación, (5.11), (5.12); para determinar la convergencia de problemas lineales (5.80), (5.81).

$$\lambda + \lambda_k^0(\lambda_k^0 + \lambda)\mathbf{PR}(\mu)(\mathbf{X}_0 + \tilde{\mathbf{X}}_1(\lambda, \mu)) = 0. \quad (5.83)$$

Es fácil convencerse que, para  $\mu$  fijo,  $\tilde{\mathbf{X}}_1(\lambda, \mu)$  es  $C^1$  en  $\lambda$  y por (5.76) que para  $\mu$  suficientemente chico, tenemos una contracción, obteniendo una única solución  $\lambda(\mu) \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} 0$ . De hecho, <sup>15</sup> vemos que,  $\lambda(\mu)$  es Hölder continua en  $\mu$ . Para esto basta ver que  $\mathbf{R}(\mu)\mathbf{X}$  lo es. En efecto, directamente de (5.72)

$$|(\mathbf{R}(\mu) - \mathbf{R}(\mu'))\mathbf{X}| \leq M_1 + M_2 \quad (5.84)$$

$$M_1 = \int_0^1 \left| \frac{\hat{\nu}(\xi\gamma + \mu, \xi)}{\xi\gamma + \mu} - \frac{\hat{\nu}(\xi\gamma + \mu', \xi)}{\xi\gamma + \mu'} \right| \left| \sqrt{\xi}w - \omega \frac{\mu y(0)}{g} \right| d\xi \quad (5.85)$$

$$M_2 = \int_0^1 |\mu - \mu'| \left| \omega \frac{y(0)\hat{\nu}(\xi\gamma + \mu')}{(\xi\gamma + \mu')g} \right| d\xi. \quad (5.86)$$

Usando el teorema fundamental del cálculo en (5.85), es claro que

$$M_1 \leq k_1 |\mu - \mu'| \int_0^1 (\sqrt{\xi}|w| + \mu) \left( \frac{1}{\xi\gamma + \mu} + \frac{1}{(\xi\gamma + \mu)^2} \right) d\xi \quad (5.87)$$

$$M_2 \leq k_2 |\mu - \mu'| \int_0^1 \frac{d\xi}{\xi\gamma + \mu'}. \quad (5.88)$$

Ahora, puesto que  $(\sqrt{\xi}|w| + \mu)(\xi\gamma + \mu)^{-1} \leq |w|(\sqrt{\xi}\gamma)^{-1} + 1$  integrable; usando  $|\mu - \mu'| \leq c|\mu - \mu'|^{1-\epsilon}(|\mu|^\epsilon + |\mu'|^\epsilon)$  (recordar el lema (5.2)), (5.74) y (5.75), tenemos que  $M_1$  en (5.87) es acotado por términos de la forma  $a_1|\mu - \mu'|$ ,  $a_2|\mu - \mu'|^{1-\epsilon}$  con  $\epsilon > 0$ , y  $a_3|\mu - \mu'|^{1-\epsilon}$  con  $\epsilon > 1/2$  o bien, con  $\epsilon > 0$  si  $|w| < k\sqrt{\xi}$  (este es el caso para  $\mathbf{X}_0$ ). De igual manera tenemos que  $M_2$  (5.88) es acotado por  $a_4|\mu - \mu'|^{1-\epsilon}$  para  $\epsilon > 0$ . Así, por (5.84) tenemos que  $\mathbf{R}(\mu)\mathbf{X}$  es Hölder continua en  $\mu$ . Finalmente, usando (5.83) llegamos a

$$|\lambda(\mu) - \lambda(\mu')| \leq c|\mu - \mu'|^{1-\epsilon} \quad \text{para } \epsilon > 0 \quad (o \quad \epsilon > \frac{1}{2}). \quad (5.89)$$

Nótese que las propiedades nodales ( $k$ -ceros de  $\mathbf{X}(\lambda, c)$  en  $[0, 1]$ ) también se conservan en el paso límite  $\mu \rightarrow 0$ . Por lo tanto, si  $\omega(\mu)$  es vecino a  $\omega_k(\mu)$  necesariamente  $\omega(\mu)$  es

<sup>15</sup>Es decir, hay convergencia de espectro.

$\omega_k(\mu)$ : todo el espectro para  $\mu > 0$  converge al espectro para  $\mu = 0$ .<sup>16</sup>

También podemos escribir la ecuación completa<sup>17</sup> y usar la misma descomposición de Liapunov-Schmidt obteniendo,

$$(\mathbf{A} + \lambda \bar{\mathbf{g}}) \mathbf{X}_1 - (\lambda_k^0 + \lambda)(\mathbf{I} - \mathbf{P}) [\mathbf{R}(\mu)(c\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1) + \bar{\mathbf{g}}[\omega, \mu, c\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1]] = \mathbf{0} \quad (5.90)$$

$$c\lambda \mathbf{X}_0 + \lambda_k^0(\lambda_k^0 + \lambda) \mathbf{P} [\mathbf{R}(\mu)(c\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1) + \bar{\mathbf{g}}[\omega, \mu, c\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1]] = \mathbf{0}. \quad (5.91)$$

Para poder aplicar el razonamiento anterior, se necesita probar que  $\bar{\mathbf{g}}$  tiene las mismas propiedades para  $\mu$  pequeño que para  $\mu = 0$ . Es necesario entonces, estudiar  $\bar{\mathbf{g}}[\omega, \mu, \mathbf{X}] - \bar{\mathbf{g}}[\omega, 0, \mathbf{X}]$  (ya que la parte lineal  $\mathbf{R}(\mu)$  ya fue estudiada).

Ahora, si fijamos  $\omega$ , claramente por (5.70)

$$|\bar{\mathbf{g}}[\mu, \mathbf{X}]| = \left| \int_s^1 \tilde{\omega} [\tilde{h}(\mu, \tilde{\omega}) - \tilde{h}(\mu, 0)] d\xi \right|, \quad (5.92)$$

donde

$$\tilde{\omega} \equiv \sqrt{\xi} w - \omega \frac{\mu y(0)}{g} \quad (5.93)$$

$$\tilde{h}(\mu, \tilde{\omega}) \equiv \frac{\hat{\nu}(N(\mu, \tilde{\omega}))}{N(\mu, \tilde{\omega})} \quad (5.94)$$

$$N(\mu, \tilde{\omega}) = \sqrt{\tilde{\omega}^2 + (\xi\gamma + \mu)^2}. \quad (5.95)$$

Entonces mediante una descomposición tipo (3.16), (3.17) es claro que

$$|\tilde{h}(\mu, \tilde{\omega}) - \tilde{h}(\mu, 0)| \leq P_1 + P_2 \quad (5.96)$$

$$P_1 = \int_0^1 \frac{\hat{\nu}_N(N(\mu, \tau\tilde{\omega}))\tau\tilde{\omega}^2}{N(\mu, \tilde{\omega})N(\mu, \tau\tilde{\omega})} d\tau \quad (5.97)$$

<sup>16</sup>A priori, uno podría esperar algo semejante a lo que ocurre con los ceros de ecuaciones algebraicas que dependen de un parámetro que al variar, puede cambiar su multiplicidad. Aquí, la estructura nodal se mantiene invariante bajo la perturbación  $\mathbf{R}(\mu)$ .

<sup>17</sup> $-(\mathbf{R}(0) + \bar{\mathbf{g}}[\omega, 0, \mathbf{X}]) \equiv \bar{\mathbf{g}}$ .

$\omega_k(\mu)$ : todo el espectro para  $\mu > 0$  converge al espectro para  $\mu = 0$ .<sup>16</sup>

También podemos escribir la ecuación completa<sup>17</sup> y usar la misma descomposición de Liapunov-Schmidt obteniendo,

$$(\mathbf{A} + \lambda \bar{\mathbf{g}})\mathbf{X}_1 - (\lambda_k^0 + \lambda)(\mathbf{I} - \mathbf{P})[\mathbf{R}(\mu)(c\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1) + \bar{\mathbf{g}}[\omega, \mu, c\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1]] = \mathbf{0} \quad (5.90)$$

$$c\lambda\mathbf{X}_0 + \lambda_k^0(\lambda_k^0 + \lambda)\mathbf{P}[\mathbf{R}(\mu)(c\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1) + \bar{\mathbf{g}}[\omega, \mu, c\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1]] = \mathbf{0}. \quad (5.91)$$

Para poder aplicar el razonamiento anterior, se necesita probar que  $\bar{\mathbf{g}}$  tiene las mismas propiedades para  $\mu$  pequeño que para  $\mu = 0$ . Es necesario entonces, estudiar  $\bar{\mathbf{g}}[\omega, \mu, \mathbf{X}] - \bar{\mathbf{g}}[\omega, 0, \mathbf{X}]$  (ya que la parte lineal  $\mathbf{R}(\mu)$  ya fue estudiada).

Ahora, si fijamos  $\omega$ , claramente por (5.70)

$$|\bar{\mathbf{g}}[\mu, \mathbf{X}]| = \left| \int_s^1 \tilde{w}[\tilde{h}(\mu, \tilde{w}) - \tilde{h}(\mu, 0)] d\xi \right|, \quad (5.92)$$

donde

$$\tilde{w} \equiv \sqrt{\xi}w - \omega \frac{\mu y(0)}{g} \quad (5.93)$$

$$\tilde{h}(\mu, \tilde{w}) \equiv \frac{\dot{v}(N(\mu, \tilde{w}))}{N(\mu, \tilde{w})} \quad (5.94)$$

$$N(\mu, \tilde{w}) = \sqrt{\tilde{w}^2 + (\xi\gamma + \mu)^2}. \quad (5.95)$$

Entonces mediante una descomposición tipo (3.16), (3.17) es claro que

$$|\tilde{h}(\mu, \tilde{w}) - \tilde{h}(\mu, 0)| \leq P_1 + P_2 \quad (5.96)$$

$$P_1 = \int_0^1 \frac{\dot{v}_N(N(\mu, \tau\tilde{w}))\tau\tilde{w}^2}{N(\mu, \tilde{w})N(\mu, \tau\tilde{w})} d\tau \quad (5.97)$$

<sup>16</sup>A priori, uno podría esperar algo semejante a lo que ocurre con los ceros de ecuaciones algebraicas que dependen de un parámetro que al variar, puede cambiar su multiplicidad. Aquí, la estructura nodal se mantiene invariante bajo la perturbación  $\mathbf{R}(\mu)$ .

<sup>17</sup>-( $\mathbf{R}(0) + \bar{\mathbf{g}}[\omega, 0, \mathbf{X}] \equiv \bar{\mathbf{g}}$ ).

$$P_2 = \frac{\hat{\nu}(N(\mu, 0))\tilde{w}^2}{N(\mu, 0)N(\mu, \tilde{w})[N(\mu, 0) + N(\mu, \tilde{w})]}. \quad (5.98)$$

Como  $|\tau\tilde{w}|(N(\mu, \tau\tilde{w}))^{-1} \leq 1$ ,  $P_1$  es acotado por  $K \int_0^1 |\tilde{w}|(N(\mu, \tilde{w}))^{-1} d\tau \leq c_1 |\tilde{w}|^{1-\epsilon} \xi^{\epsilon-1}$  ya que  $|\tilde{w}|^\epsilon (N(\mu, \tilde{w}))^{-1} \leq 1/\xi^{1-\epsilon}$ . Por otro lado,  $P_2$  es claramente acotado por  $k|\tilde{w}|^{1-\epsilon}(N(\mu, \tilde{w}))^{\epsilon-1}(N(\mu, 0))^{-1} \leq c_2 |\tilde{w}|^{1-\epsilon}(N(\mu, 0))^{\epsilon-2}$ . Así, por (5.96) y (5.92) obtenemos una estimación para  $\bar{\mathbf{g}}$ ,

$$\begin{aligned} |\bar{\mathbf{g}}[\mu, \mathbf{X}]| &\leq c_1 \int_s^1 \frac{|\tilde{w}|^{2-\epsilon}}{\xi^{1-\epsilon}} d\xi + c_2 \int_s^1 \left( \frac{|\tilde{w}|}{N(\mu, 0)} \right)^{2-\epsilon} d\xi \\ &\leq K(|w|^{2-\epsilon} + |y(0)|^{2-\epsilon}) \\ &\leq \tilde{K}|\mathbf{X}|^{2-\epsilon}; \end{aligned} \quad (5.99)$$

es decir,  $\bar{\mathbf{g}}$  es efectivamente la parte no lineal. Por otra parte,

$$|\bar{\mathbf{g}}[\mu, \mathbf{X}_1] - \bar{\mathbf{g}}[\mu, \mathbf{X}_2]| \leq G_1 + G_2 \quad (5.100)$$

$$G_1 \equiv \int_s^1 |\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2| |\tilde{h}(\mu, \tilde{w}_1) - \tilde{h}(\mu, 0)| d\xi \quad (5.101)$$

$$G_2 \equiv \int_s^1 |\tilde{w}_2| |\tilde{h}(\mu, \tilde{w}_1) - \tilde{h}(\mu, \tilde{w}_2)| d\xi. \quad (5.102)$$

Razonando como en (5.96), (5.97), (5.98) para estimar a  $G_1$ , tenemos después de una primera simplificación,

$$G_1 \leq k \int_s^1 |\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2| |\tilde{w}_1| N(\mu, \tilde{w}_1)^{-1} \left(1 + \frac{1}{N(\mu, 0)}\right) d\xi. \quad (5.103)$$

Mediante criterios similares a (5.74), (5.75) no es difícil determinar

$$|\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2| \leq c_1(\sqrt{\xi}|w_1 - w_2| + \mu|y_1(0) - y_2(0)|) \quad (5.104)$$

$$|\tilde{w}_i| \leq c_2(\sqrt{\xi}|w_i| + \mu|y_i(0)|) \quad (5.105)$$

$$\frac{|\tilde{w}_i|}{N(\mu, \tilde{w}_i)} \leq c_3 \frac{|w_i|}{\sqrt{\xi}} + \frac{\mu^{1-\epsilon}}{\xi^\epsilon} |y_i(0)|, \quad (5.106)$$

$$\frac{\sqrt{\xi}}{N(\mu, 0)} \leq c_4 \frac{1}{\sqrt{\xi}}, \quad (5.107)$$

$$\frac{\mu}{N(\mu, 0)} \leq c_5 \frac{\mu^{1-\epsilon}}{\xi^{1-\epsilon}}. \quad (5.108)$$

Claramente (5.107) y (5.108) nos permiten estimar términos de la forma  $|\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2| (N(\mu, 0))^{-1}$ ;  $|\tilde{w}_i| (N(\mu, 0))^{-1}$ , jugando un poco con estas expresiones no es difícil convencerse <sup>18</sup>

$$\int_s^1 \frac{|\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2| |\tilde{w}_1|}{N(\mu, \tilde{w}_1)} d\xi \leq k_1 (|w_1 - w_2|_0 + \mu |y_1(0) - y_2(0)|) (|w_1|_0^{1-\epsilon} + (\mu |y_1(0)|)^{1-\epsilon}) \quad (5.109)$$

$$\int_s^1 \frac{|\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2| |\tilde{w}_1|}{N(\mu, \tilde{w}_1) N(\mu, 0)} d\xi \leq k_2 (|w_1 - w_2|_0 + \mu^{1-\epsilon} |y_1(0) - y_2(0)|) (|w_1|_0^{1-\epsilon} + (\mu |y_1(0)|)^{1-\epsilon}) \quad (5.110)$$

Es inmediato repetir el razonamiento anterior para estimar el término  $G_2$  y encontrar

$$G_2 \leq J_1 + J_2$$

$$J_1 = \int_s^1 \frac{|\tilde{w}_2|}{N(\mu, \tilde{w}_2)} \left( \int_0^1 \frac{|\tilde{w}_1 + \tau(\tilde{w}_2 - \tilde{w}_1)| |\tilde{w}_2 - \tilde{w}_1| \dot{\nu}_N}{N(\tilde{w}_1 + \tau(\tilde{w}_2 - \tilde{w}_1))} d\tau \right) d\xi$$

$$J_2 = \int_s^1 \frac{|\tilde{w}_2| |\tilde{w}_2^2 - \tilde{w}_1^2|}{N(\mu, \tilde{w}_1) N(\mu, \tilde{w}_2) (N(\mu, \tilde{w}_1) + N(\mu, \tilde{w}_2))} d\xi$$

$$G_2 \leq k \left( \int_s^1 \frac{|\tilde{w}_2| |\tilde{w}_2 - \tilde{w}_1|}{N(\mu, \tilde{w}_2)} d\xi + \int_s^1 \frac{|\tilde{w}_2| |\tilde{w}_2 - \tilde{w}_1|}{N(\mu, \tilde{w}_1) N(\mu, \tilde{w}_2)} d\xi \right). \quad (5.111)$$

El primer término del lado derecho de (5.111) está acotado por el lado derecho de (5.109) (intercambiando los papeles de  $\tilde{w}_1$  y  $\tilde{w}_2$ ) mientras que el segundo término de (5.111), notando que  $N(\mu, \tilde{w}_1) \geq (\xi\gamma + \mu) \equiv N(0, \mu)$ , es acotado por el lado derecho de (5.110) usando la misma substitución. Juntando los resultados obtenemos para (5.100)

<sup>18</sup>También usamos el lema (5.2).

$$|\tilde{w}_i| \leq c_2(\sqrt{\xi}|w_i| + \mu|y_i(0)|) \quad (5.105)$$

$$\frac{|\tilde{w}_i|}{N(\mu, \tilde{w}_i)} \leq c_3 \frac{|w_i|}{\sqrt{\xi}} + \frac{\mu^{1-\epsilon}}{\xi^\epsilon} |y_i(0)|, \quad (5.106)$$

$$\frac{\sqrt{\xi}}{N(\mu, 0)} \leq c_4 \frac{1}{\sqrt{\xi}}, \quad (5.107)$$

$$\frac{\mu}{N(\mu, 0)} \leq c_5 \frac{\mu^{1-\epsilon}}{\xi^{1-\epsilon}}. \quad (5.108)$$

Claramente (5.107) y (5.108) nos permiten estimar términos de la forma  $|\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2| (N(\mu, 0))^{-1}$ ;  $|\tilde{w}_i| (N(\mu, 0))^{-1}$ , jugando un poco con estas expresiones no es difícil convencerse <sup>18</sup>

$$\int_s^1 \frac{|\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2| |\tilde{w}_1|}{N(\mu, \tilde{w}_1)} d\xi \leq k_1 (|w_1 - w_2|_0 + \mu |y_1(0) - y_2(0)|) (|w_1|_0^{1-\epsilon} + (\mu |y_1(0)|)^{1-\epsilon}) \quad (5.109)$$

$$\int_s^1 \frac{|\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2| |\tilde{w}_1|}{N(\mu, \tilde{w}_1) N(\mu, 0)} d\xi \leq k_2 (|w_1 - w_2|_0 + \mu^{1-\epsilon} |y_1(0) - y_2(0)|) (|w_1|_0^{1-\epsilon} + (\mu |y_1(0)|)^{1-\epsilon}) \quad (5.110)$$

Es inmediato repetir el razonamiento anterior para estimar el término  $G_2$  y encontrar

$$G_2 \leq J_1 + J_2$$

$$J_1 = \int_s^1 \frac{|\tilde{w}_2|}{N(\mu, \tilde{w}_2)} \left( \int_0^1 \frac{|\tilde{w}_1 + \tau(\tilde{w}_2 - \tilde{w}_1)| |\tilde{w}_2 - \tilde{w}_1| \hat{\nu}_N}{N(\tilde{w}_1 + \tau(\tilde{w}_2 - \tilde{w}_1))} d\tau \right) d\xi$$

$$J_2 = \int_s^1 \frac{|\tilde{w}_2| |\tilde{w}_2^2 - \tilde{w}_1^2|}{N(\mu, \tilde{w}_1) N(\mu, \tilde{w}_2) (N(\mu, \tilde{w}_1) + N(\mu, \tilde{w}_2))} d\xi$$

$$G_2 \leq k \left( \int_s^1 \frac{|\tilde{w}_2| |\tilde{w}_2 - \tilde{w}_1|}{N(\mu, \tilde{w}_2)} d\xi + \int_s^1 \frac{|\tilde{w}_2| |\tilde{w}_2 - \tilde{w}_1|}{N(\mu, \tilde{w}_1) N(\mu, \tilde{w}_2)} d\xi \right). \quad (5.111)$$

El primer término del lado derecho de (5.111) está acotado por el lado derecho de (5.109) (intercambiando los papeles de  $\tilde{w}_1$  y  $\tilde{w}_2$ ) mientras que el segundo término de (5.111), notando que  $N(\mu, \tilde{w}_1) \geq (\xi\gamma + \mu) \equiv N(0, \mu)$ , es acotado por el lado derecho de (5.110) usando la misma substitución. Juntando los resultados obtenemos para (5.100)

<sup>18</sup>También usamos el lema (5.2).

$$|\bar{g}[\mu, \mathbf{X}_1] - \bar{g}[\mu, \mathbf{X}_2]| \leq K\Upsilon\Psi$$

$$\leq \tilde{K} |\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2|_0 (|\mathbf{X}_1|_0^{1-\epsilon} + |\mathbf{X}_2|_0^{1-\epsilon}) \quad (5.112)$$

$$\Upsilon = |w_1 - w_2|_0 + (\mu + \mu^{1-\epsilon}) |y_1(0) - y_2(0)|_0$$

$$\Psi = |w_1|_0^{1-\epsilon} + |w_2|_0^{1-\epsilon} + \mu^{1-\epsilon} (|y_1(0)|_0^{1-\epsilon} + |y_2(0)|_0^{1-\epsilon}).$$

Es decir,  $\bar{g}$  es Lipschitz continua con constante de Lipschitz teniendo a  $\mathbf{0}$  cuando  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \rightarrow \mathbf{0}$ . Podemos entonces usar el argumento de bifurcación local para la ecuación de bifurcación con  $\mu > 0$ <sup>19</sup>, obteniendo una rama local  $S_k(\lambda_k^0(\mu), c)$ . Falta probar que  $S_k(\lambda_k^0(\mu), c) \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} S_k(\lambda_k^0, c)$  (rama correspondiente al problema singular  $\mu = 0$ ). Para esto, se podría probar que  $\bar{g}[\mu, \mathbf{X}] \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} -\bar{g}$  (lo cual ya se probó). La unicidad de la solución local nos daría el resultado  $S_k(\lambda_k^0(\mu), c) \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} S_k(\lambda_k^0, c)$  con la misma tasa de convergencia de  $\mu$ . (Es decir,  $|\mathbf{X}(\lambda, \mu) - \mathbf{X}(\lambda, 0)| \leq c\mu^{1-\epsilon}$  si  $|\bar{g}[\mu, \lambda] - \bar{g}[0, \lambda]| \leq c\mu^{1-\epsilon}$ , para  $\epsilon > 1/2$  ya que como vimos  $|\bar{\mathbf{L}}(\mu) - \bar{\mathbf{L}}(0)| < c\mu^{1-\epsilon}$ .)

$$|\bar{\mathbf{F}}[\mu, \mathbf{X}] - \bar{\mathbf{F}}[0, \mathbf{X}]| = \left| \int_s^1 \tilde{w} \frac{\hat{v}(N(\mu, \tilde{w}))}{N(\mu, \tilde{w})} - \sqrt{\xi} w \frac{\hat{v}(\sqrt{\xi} w^2 + \xi^2 \gamma^2)}{\sqrt{\xi} w^2 + \xi^2 \gamma^2} d\xi \right|$$

$$\leq A + B \quad (5.113)$$

$$A = k \int_s^1 \sqrt{\xi} |w| \left| \frac{\hat{v}(N(\mu, \tilde{w}))}{N(\mu, \tilde{w})} - \frac{\hat{v}(N(0, w))}{N(0, w)} \right| d\xi \quad (5.114)$$

$$B = k \int_s^1 \mu |y(0)| \frac{\hat{v}(N(\mu, \tilde{w}))}{N(\mu, \tilde{w})} d\xi. \quad (5.115)$$

Claramente de (5.115), puesto que  $N(\mu, \tilde{w}) \geq N(\mu, 0)$  y usando (5.108) obtenemos

$$B \leq k_1 |y(0)| \mu^{1-\epsilon}. \quad (5.116)$$

Ahora, para estimar el término  $A$  (5.114), usaremos una descomposición similar a las antes ejecutadas (pedimos al lector que no pierda la calma, en ocasiones hay que ensuciarse las manos). Entonces,

<sup>19</sup>Ecuación que se deriva de (5.90) y (5.91).

$$A \leq A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \quad (5.117)$$

$$A_1 = k \int_0^1 \sqrt{\xi} |w| \frac{|\hat{\nu}(N(\mu, \tilde{w})) - \hat{\nu}(N(\mu, w))|}{N(\mu, \tilde{w})} d\xi \quad (5.118)$$

$$A_2 = k \int_0^1 \sqrt{\xi} |w| \frac{|\hat{\nu}(N(\mu, w)) - \hat{\nu}(N(0, w))|}{N(\mu, w)} d\xi \quad (5.119)$$

$$A_3 = k \int_0^1 \sqrt{\xi} |w| \frac{|N^2(\mu, \tilde{w}) - N^2(\mu, w)|}{N(\mu, \tilde{w})N(\mu, w)(N(\mu, \tilde{w}) + N(\mu, w))} d\xi \quad (5.120)$$

$$A_4 = k \int_0^1 \sqrt{\xi} |w| \frac{|N^2(\mu, w) - N^2(0, w)|}{N(\mu, w)N(0, w)(N(\mu, w) + N(0, w))} d\xi \quad (5.121)$$

Escribiendo

$$Q \equiv \frac{\hat{\nu}_N(\dot{N}(\mu, w + \tau(\tilde{w} - w)))(w + \tau(\tilde{w} - w))}{N(\mu, w + \tau(\tilde{w} - w))}$$

$$\begin{aligned} |\hat{\nu}(N(\mu, \tilde{w})) - \hat{\nu}(N(\mu, w))| &= \left| \int_0^1 Q d\tau \right| |\tilde{w} - w| \\ &\leq |\tilde{w} - w|, \end{aligned}$$

tenemos que

$$A_1 \leq k \int_0^1 \frac{\sqrt{\xi} |w|}{N(\mu, \tilde{w})} \mu |y(0)| d\xi \leq k_1 \mu |y(0)| |w|_0. \quad (5.122)$$

El mismo argumento con  $A_2$  dará

$$A_2 \leq k_2 \mu |w|_0. \quad (5.123)$$

Como  $\sqrt{\xi} |w| / N(\mu, w) \leq 1$ , tenemos

$$A_3 \leq k \int_0^1 \frac{\mu |y(0)|}{\xi\gamma + \mu} d\xi \leq k_3 |y(0)| \mu^{1-\epsilon}. \quad (5.124)$$

Finalmente, como  $\xi\gamma + \xi\gamma + \mu \leq N(\mu, w) + N(0, w)$ , tenemos

$$\begin{aligned}
A_4 &\leq k \int_0^1 \frac{\sqrt{\xi} |w| \mu}{N(\mu, w) N(0, w)} d\xi \leq k \int_0^1 \frac{|w|^{1-\epsilon} \xi^{\frac{1-\epsilon}{2}} \mu^{1-\eta}}{N(0, w)^{1-\epsilon} N(\mu, w)^{1-\eta}} d\xi \\
&\leq K' |w|_0^{1-\epsilon} \mu^{1-\eta} \int_0^1 \xi^{\frac{1-\epsilon}{2} - 2 + \epsilon + \eta} d\xi.
\end{aligned}$$

Tomando  $\eta > 1/2 > \epsilon \geq 0$ , tenemos que

$$A_4 \leq k_4 |w|_0^{1-\epsilon} \mu^{1-\eta} \quad (5.125)$$

Así, un simple vistazo a (5.122)- (5.125), (5.116), (5.117) y (5.113) nos convence de que, con  $\epsilon > 1/2$ ,

$$|\bar{\mathbf{F}}[\mu, \mathbf{X}] - \bar{\mathbf{F}}[0, \mathbf{X}]| \leq \tilde{K} (|w|_0 + |y(0)|) (\mu + \mu^{1-\epsilon}) \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} 0. \quad (5.126)$$

Ya vimos que (5.126) implica que  $S_k(\lambda_k^0(\mu)) \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} S_k(\lambda_k^0)$  para  $|\mathbf{X}|$  pequeño  $\omega \sim \lambda_k^0$ , como  $\mu^{1-\epsilon}$  con  $\epsilon > 1/2$ .

Ahora para  $|\mathbf{X}|$  y  $\omega$  arbitrarios pero acotados por  $M$ , sean  $\mathbf{X}_n, \omega_n$  soluciones de los problemas

$$\mathbf{X}_n = \omega_n \bar{\mathbf{F}}[\mu_n, \mathbf{X}_n] \quad \text{con} \quad \mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (5.127)$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $\omega_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \omega_0$  y reescribir (5.127) como

$$\mathbf{X}_n = \omega_n (\bar{\mathbf{F}}[\mu_n, \mathbf{X}_n] - \bar{\mathbf{F}}[0, \mathbf{X}_n]) + (\omega_n - \omega_0) \bar{\mathbf{F}}[0, \mathbf{X}_n] + \omega_0 \bar{\mathbf{F}}[0, \mathbf{X}_n]. \quad (5.128)$$

Ahora claramente por (5.126), (5.99) o (5.16), (de donde podemos fácilmente determinar una cota para  $\bar{\mathbf{F}}[0, \mathbf{X}] \equiv -\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{X})$ ), i.e.  $\bar{\mathbf{F}}$  manda conjuntos acotados en conjuntos acotados,

$$|\bar{\mathbf{F}}[\mu_n, \mathbf{X}_n] - \bar{\mathbf{F}}[0, \mathbf{X}_n]| \leq \tilde{K} (|\omega_n|_0 + |y_n(0)|) (\mu_n + \mu_n^{1-\epsilon}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (5.129)$$

$$|\omega_n - \omega_0| |\bar{\mathbf{F}}[0, \mathbf{X}_n]| \leq K |\omega_n - \omega_0| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (5.130)$$

Como  $\bar{F}[0, \mathbf{X}_n]$  es acotado, la compacidad del mapeo  $\bar{F}$  nos dice que existe una subsucesión convergente. Así,  $\omega_0 \bar{F}[0, \mathbf{X}_{n_j}] \xrightarrow{n_j \rightarrow \infty} \mathbf{Y}$ . Entonces de (5.130), (5.129) y (5.128) inferiríamos que  $\mathbf{X}_{n_j} \xrightarrow{n_j \rightarrow \infty} \mathbf{Y}$  y por la continuidad del mapeo  $\bar{F}$ , tendríamos  $\bar{F}[0, \mathbf{X}_{n_j}] \xrightarrow{n_j \rightarrow \infty} \bar{F}[0, \mathbf{Y}]$ . Es decir,  $\mathbf{Y} = \omega_0 \bar{F}[0, \mathbf{Y}]$  (i.e. un punto fijo del mapeo  $\bar{F}$  con  $\omega_0$  ver (5.1)).

Ahora bien, escogiendo los elementos de la sucesión que tengan exactamente  $k$  ceros en el intervalo  $[0, 1]$ , entonces el mismo argumento y la convergencia nos daría que  $\mathbf{Y}$  también goza de esa propiedad. Finalmente, se puede probar con resultados de topología general, que si  $\mathbf{X}_n \in S_k(\lambda_k^0(\mu_n))$  entonces,  $\mathbf{Y} \in S_k(\lambda_k^0)$  (límite uniforme de continuos es continuo).

**Teorema 5.5** Si  $\mu \rightarrow 0$  y  $\mathbf{X}_n \in S_k(\lambda_k^0(\mu))$ , entonces existe una subsucesión  $\mathbf{X}_{n_j}$  que converge a  $\mathbf{Y} \in S_k(\lambda_k^0)$ .

Finalmente tenemos el siguiente resultado global, adelantandonos a los resultados del siguiente capítulo

**Teorema 5.6** Para  $\mu \geq 0$  tenemos una "superficie" de dimensión local al menos 2, que bifurca a partir de  $(\lambda_k^0, 0)$ , con las propiedades nodales ( $k$  ceros de las funciones que constituyen al par de soluciones no triviales) y que no es acotada en el espacio  $(\lambda, |u|_1)$  para cada  $\mu$ .

En general uno podría estudiar directamente el problema de bifurcación con la  $\mu$  como un problema de bifurcación con dos parámetros en juego,  $\lambda$  y  $\mu$ , en vez de un sólo parámetro. Nos encontraríamos entonces en el contexto de problemas de bifurcación multiparamétrica. (Ver [Ize93].)

## 5.3 Convexidad local

Podemos analizar todavía más la curva de bifurcación local, estudiando su concavidad por ejemplo que, como sabemos, está relacionada con su estabilidad. Nos concentraremos en un caso particular para el cual observaremos un comportamiento radicalmente distinto al correspondiente para cuerdas inextensibles y uniformes, pues probaremos que nuestra clase particular de cuerdas elásticas, genera bifurcación subcrítica.

De (5.41), la curva de soluciones no triviales, está dada por:

$$\lambda = \lambda_k^0(\lambda_k^0 + \lambda)\tilde{d}(\lambda, c), \quad (5.131)$$

donde  $c\tilde{d}(\lambda, c)\mathbf{X}_0 = \mathbf{P}\tilde{\mathbf{g}}(c\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1(\lambda, c))$ , y  $\tilde{d}(\lambda, c)$  es una función par en  $c$ , que satisface  $|\tilde{d}(\lambda, c)| \leq K|c|$ . Por lo tanto, el signo de  $\tilde{d}(\lambda, c)$ , para valores del parámetro  $c$ , suficientemente pequeños, nos dirá si tenemos una bifurcación supercrítica (i.e. una bifurcación que en el diagrama de bifurcación se ve como una curva que inicialmente se carga a la derecha) si  $\tilde{d}(\lambda, c) > 0$  o bien una bifurcación subcrítica (para la cual las ramas se desplazan inicialmente a la izquierda) si  $\tilde{d}(\lambda, c) < 0$ .

Para determinar el signo de  $\tilde{d}$ , se podría determinar  $\mathbf{P}$  (a partir del núcleo del operador adjunto) o regresarse a la formulación diferencial del problema, lo que está bien justificado, ya que sabemos que  $u$  es solución y por lo tanto  $C^1[0, 1]$  con  $|u(s)| \leq ks$ . Consideremos entonces,

$$\left(\frac{u'}{\rho}\right)' + \omega^2 \frac{\hat{\nu}(N(u), s)}{N(u)} u = 0, \quad (5.132)$$

con  $N(u) = (u^2 + s^2\gamma^2)^{1/2}$ ,  $u(0) = 0$ ,  $u'(1) = 0$ , donde sabemos que  $u = c(u_0 + c^2u_1)$ ,  $\omega^2 = \lambda_k^0 + c^2\lambda_1$ , dados por el teorema de bifurcación local. Recordemos que  $u_0$  es la solución de la ecuación con  $N(0) = s\gamma$ , (única solución propia linealmente independiente del problema lineal). Efectuando los siguientes desarrollos de Taylor <sup>20</sup>

$$\frac{\hat{\nu}(N(u))}{N} = \frac{\hat{\nu}(N_0)}{N_0} + \left(\frac{\hat{\nu}_N}{N} - \frac{\hat{\nu}}{N^2}\right)_{N_0} (N - N(0)) + O((N - N(0))^2) \quad (5.133)$$

$$\text{y } N(u) - N(0) = \frac{1}{2s\gamma} u^2 + O(u^4), \quad (5.134)$$

venmos que la expansión para  $\hat{\nu}/N$  alrededor de  $N(0)$  en términos de  $u$  está dada por

$$\frac{\hat{\nu}(N(u))}{N(u)} = \frac{\hat{\nu}(N_0)}{N_0} + \left(\frac{\hat{\nu}_N}{N} - \frac{\hat{\nu}}{N^2}\right) \frac{u^2}{2s\gamma} + O(u^4). \quad (5.135)$$

Ahora, dividiendo la ecuación por  $c$  y usando el hecho de que  $u_0$  es solución de (5.132) con  $N = N(0)$ , tenemos que

$$c^2 \left[ \left(\frac{u_1'}{\rho}\right)' + \lambda_k^0 \frac{\hat{\nu}(0)}{N(0)} u_1 + \lambda_1 \frac{\hat{\nu}(0)}{N(0)} u_0 + \lambda_k^0 \left(\frac{\hat{\nu}_N}{N} - \frac{\hat{\nu}}{N^2}\right) \frac{u_0^3}{2s\gamma} \right] + O(c^4) = 0, \quad (5.136)$$

<sup>20</sup>Estamos abusando un poco de la notación, como por ejemplo tomar  $u(0) \equiv u_0$ . Sin embargo son, en cierto sentido notaciones estándar para un matemático, por lo que pedimos al lector que tenga esto en mente.

debe satisfacerse, para todo  $c$  (recordar que  $u_1$  depende de  $c$ ). Así, cancelando el factor  $c^2$  y tomando el límite cuando  $c$  tiende a cero, entonces si  $\lim_{c \rightarrow 0} u_1(c) \equiv u_1$ ,  $\lim_{c \rightarrow 0} \lambda_1(c) \equiv \lambda_1$ ,  $u_1(0) = 0$ ,  $u_1'(0) = 0$ , ocurre que:

$$\left(\frac{u_1'}{\rho}\right)' + \lambda_k^0 \frac{\hat{\nu}(0)}{N(0)} u_1 = -\lambda_1 \frac{\hat{\nu}(0)}{N(0)} u_0 - \lambda_k^0 \left(\frac{\hat{\nu}_N}{N} - \frac{\hat{\nu}}{N^2}\right) \frac{u_0^3}{2s\gamma}. \quad (5.137)$$

Por la alternativa de Fredholm, la ecuación (5.137) admite solución para  $u_1$ , sólo si el lado derecho de (5.137) es ortogonal (en el sentido  $L^2$ ) al generador del núcleo del operador que actúa del lado izquierdo sobre la  $u_1$ . Entonces,

$$\lambda_1 \int_0^1 \frac{\hat{\nu}(0)}{s\gamma} u_0^2 ds = \lambda_k^0 \int_0^1 \left(\frac{\hat{\nu}}{N} - \hat{\nu}_N\right) \frac{u_0^4}{2(s\gamma)^2} ds. \quad (5.138)$$

### Nota

Aquí, el lector puede estar confundido por el hecho de que, habiendo tomado el límite cuando  $c$  tiende a 0, no sustituyamos el valor de  $N$  por  $N(0) = s\gamma$ . Hay dos razones, la primera para que el lector pueda ver con claridad de donde salen los cálculos, y la segunda, muy importante porque no hay que perder de vista que buscamos establecer resultados relativos a la concavidad de las ramas, en una vecindad de los puntos de bifurcación. Veremos que tal como está escrita, (5.138) nos llevará a la condición sobre la forma funcional de  $\hat{\nu}$  en términos de  $N$  que se necesita para observar uno u otro comportamiento. Más adelante veremos que efectivamente uno puede clasificar algunos materiales mediante las propiedades que dependen crucialmente de la forma funcional de su constricción constitutiva.

La relación (5.138), muestra que el signo de  $\lambda_1 \equiv 2\lambda''(0)$ , está dado por el signo del término integral del lado derecho, donde  $N = s\gamma$ . Tenemos entonces el resultado,

**Teorema 5.7** *Si para  $0 \leq N \leq |\gamma|_0$ ,  $\hat{\nu}(N)/N \geq \hat{\nu}_N(N)$ , entonces, todas las ramas bifurcan supercríticamente. Este es el caso cuando  $\hat{\nu} \equiv 1$ , (i.e. el caso inextensible y uniforme).*

Sin embargo, podemos tener bifurcación subcrítica si  $\hat{\nu}$  crece rápidamente cerca de 0 ( $\hat{\nu}_N \leq \hat{\nu}/N$  para  $0 \leq N \leq a$  implica que  $\hat{\nu}(N) \leq 1 + kN$  para ese intervalo). Por ejemplo si  $\hat{\nu}(N) = 1 + MN^p$ , para  $0 \leq N \leq |\gamma|_0$ , entonces  $\hat{\nu}/N - \hat{\nu}_N = (1 - M(p-1)N^p)$ , es negativo en parte del intervalo si  $p > 1$  y  $M$  es suficientemente grande. Como  $u_0$  depende de  $M$ , tenemos que seguir el siguiente razonamiento. Supondremos para fijar las ideas, que  $\rho$  es constante, y  $g = 1$  por lo que  $\gamma = \rho$ . En este caso tenemos entonces que  $N = s$ . Sea

$$u_0 = sy = -\omega^2 \int_0^s \rho x \, d\xi, \quad \text{con } \omega^2 = \lambda_1^0$$

$$x(s) = - \int_s^1 \frac{\hat{v}(\xi)}{\rho} y \, d\xi$$

Tomaremos solamente el caso correspondiente a la primera rama, donde  $u_0(s) \geq 0$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} sy(s) &= -\omega^2 \rho \int_0^s x(\xi) \, d\xi \\ &= \omega^2 \int_0^s \int_\xi^1 \hat{v}(\tau) y(\tau) \, d\tau d\xi \\ &= \omega^2 \left( \int_0^s \xi y(\xi) \hat{v}(\xi) \, d\xi + s \int_s^1 y(\xi) \hat{v}(\xi) \, d\xi \right), \end{aligned}$$

donde evidentemente se usó el teorema de Fubini. Así, es claro que

$$\frac{y(s)}{\omega^2} = \int_s^1 y \hat{v} \, d\xi + \frac{1}{s} \int_0^s \xi y \hat{v} \, d\xi. \quad (5.139)$$

En particular, derivando (5.139) tenemos

$$\frac{y'(s)}{\omega^2} = -\frac{1}{s^2} \int_0^s \xi y \hat{v} \, d\xi. \quad (5.140)$$

Como la función correspondiente a la primera rama no se anula en el intervalo  $[0, 1]$ , podemos tomar sin perder generalidad,  $y(s) > 0$ . Esto implica (ver (5.140)) que  $y(s)$  es una función estrictamente decreciente. En particular tendremos

$$\frac{y(1)}{\omega^2} = \int_0^1 \xi y \hat{v} \, d\xi \geq y(1) \int_0^1 \xi \hat{v} \, d\xi \quad (5.141)$$

$$\frac{y(0)}{\omega^2} = \int_0^1 y \hat{v} \, d\xi \leq y(0) \int_0^1 \hat{v} \, d\xi. \quad (5.142)$$

Por lo tanto tenemos que,

$$\int_0^1 \xi \hat{\nu} d\xi \leq \frac{1}{\omega^2} \leq \int_0^1 \hat{\nu} d\xi \quad (5.143)$$

$$\frac{y(0) - y(1)}{\omega^2} = \int_0^1 (1 - \xi) y \hat{\nu} d\xi \leq y(0) \int_0^1 (1 - \xi) \hat{\nu} d\xi. \quad (5.144)$$

Es decir

$$y(0) \left( \frac{1}{\omega^2} - \int_0^1 (1 - \xi) \hat{\nu} d\xi \right) \leq \frac{y(1)}{\omega^2}. \quad (5.145)$$

Ahora usando las relaciones (5.143) resulta inmediato

$$y(0) \int_0^1 (2\xi - 1) \hat{\nu} d\xi \leq y(1) \int_0^1 \hat{\nu} d\xi, \quad (5.146)$$

desigualdad válida para la primera rama de una cuerda homogénea. Tomando la siguiente forma funcional para la elongación,  $\hat{\nu}(N) = 1 + MN^p$ , con  $N(\xi) = \xi$ , tenemos

$$y(0) \int_0^1 (2\xi - 1)(1 + MN^p) d\xi \leq y(1) \int_0^1 (1 + MN^p) d\xi \quad (5.147)$$

$$My(0) \left( \frac{2}{p+2} - \frac{1}{p+1} \right) \leq y(1) \left( 1 + \frac{M}{p+1} \right) \quad (5.148)$$

$$y(0) \leq \frac{p+2}{p} \left( \frac{p+1}{M} + 1 \right) y(1) \quad (5.149)$$

$$y(1) \leq y(0). \quad (5.150)$$

Ahora puesto que en este caso  $N = s$ ,  $\gamma = \rho$ ,  $u_0 = sy$  el término integral del lado derecho de (5.138), definiendo  $s_0^p = [M(p-1)]^{-1}$ , se ve como

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1 - M(p-1)s^p) sy^4 ds &= \int_0^{s_0} + \int_{s_0}^1 \\ &\equiv I_1 - I_2. \end{aligned} \quad (5.151)$$

La primera integral  $I_1$  es positiva en tanto que la segunda  $-I_2$  es negativa. Así, para encontrarnos el caso subcrítico, basta escoger adecuadamente los parámetros para forzar

que, en valor absoluto, la segunda sea mayor. Analizando un poco más cada término tenemos

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_0^{s_0} (1 - M(p-1)s^p) s y^4(0) ds = y^4(0) s_0^2 \left( \frac{1}{2} - M(p-1) \frac{s_0^p}{p+2} \right) \\ &\leq y^4(0) \frac{p s_0^2}{2(p+2)} \\ I_2 &= \int_{s_0}^1 (M(p-1)s^p - 1) s y^4(1) ds \geq y^4(1) \left( M \frac{p-1}{p+2} - \frac{1}{2} + s_0^2 \frac{p}{2(p+2)} \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto tendremos  $I_2 > I_1$  si podemos escoger a  $M$  tal que

$$y^4(1) \left( M \frac{p-1}{p+2} - \frac{1}{2} + s_0^2 \frac{p}{2(p+2)} \right) \geq y^4(0) \frac{p}{2(p+2)} s_0^2. \quad (5.152)$$

Esto será cierto si (usar las relaciones (5.149), (5.150))

$$\left( \frac{p+2}{p} \left( \frac{p+1}{M} + 1 \right) \right)^4 \left( M \frac{p-1}{p+2} - \frac{1}{2} + s_0^2 \frac{p}{2(p+2)} \right) \geq \frac{p}{2(p+2)} s_0^2. \quad (5.153)$$

Finalmente, juntando los términos en  $s_0$  a la derecha, tendremos un número negativo por lo que es suficiente que

$$M \frac{p-1}{p+2} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow M > \frac{1}{2} \frac{p+2}{p-1}. \quad (5.154)$$

**Teorema 5.8** Si la cuerda es homogénea, i.e. ( $\rho$  una constante), si en una vecindad de  $N = 0$  la elongación tiene la forma  $\hat{v}(N) = 1 + MN^p$ , con  $M$  y  $p > 1$ , tales que satisfacen  $M > (p+2)/[2(p-1)]$ , entonces la primera rama bifurca a la izquierda.

# Capítulo 6

## Bifurcación global

### 6.1 Estructura nodal de las ramas de bifurcación

Hemos visto que las soluciones correspondientes al problema linealizado, gozan de una estructura muy particular como lo expresa el teorema (4.4). Uno se preguntaría entonces hasta que punto podemos esperar resultados análogos para las soluciones no triviales del problema completo. En la siguiente sección veremos que la estructura nodal de las soluciones se conserva aún en el caso no lineal producto de la topología del espacio de trabajo. Este es uno de los múltiples aspectos que nos revelan indirectamente las posibles estructuras que resultan de la naturaleza de los operadores en juego, con el carácter topológico de los espacios sobre los cuales operan. Como consecuencia del lema (4.3), tenemos que una condición que debe cumplir una solución no trivial es que  $x(0) \neq 0$ . Geométricamente - recordar (3.64) - esto expresa el hecho de que las gráficas de las soluciones no triviales, sean transversales en el origen  $s = 0$ . Por otra parte, si  $u(\tau) = u'(\tau) = 0$  para algún valor  $\tau \in (0, 1]$ , entonces, como mencionamos páginas atrás, la teoría estándar de existencia y unicidad de ecuaciones ordinarias, nos daría  $u \equiv 0$  i.e. una solución trivial. Esto implica que las soluciones no triviales no admiten ceros dobles.<sup>1</sup> De aquí que las curvas representativas de las soluciones no triviales sean transversales al eje  $u = 0$  en todo punto de contacto (ver figura (4.4)). Ahora definamos a  $\mathcal{Z}$  como el subconjunto de  $C^0 \times C^0$  de todas las funciones  $C^1 \times C^1$  que satisfacen (3.66), (3.67) para un valor de  $\omega^2$ .<sup>2</sup> Como quedo manifiesto, éstas coinciden con los puntos fijos del mapeo  $F$ . Por la regularidad de estos últimos, tenemos que  $\mathcal{Z}$  es cerrado y localmente compacto en la topología de  $C^1 \times C^1$  inducida por la norma  $\|\cdot\|_1$ . Consideremos  $\mathcal{Z}_j \subset \mathcal{Z}$

<sup>1</sup>A partir de (4.5) y por la definición de la transformación de Prüfer (4.1), (4.2), esta última aseveración resulta más que evidente.

<sup>2</sup>Como vimos  $\mathcal{Z}$  no es otra cosa que en conjunto de soluciones no triviales.

un subconjunto cuyos elementos  $w$ <sup>3</sup> tienen exactamente  $j - 1$  ceros en  $(0, 1)$ . Es claro que podemos caracterizar a  $\mathcal{Z}_j$  como el subconjunto de elementos de  $\mathcal{Z}$  para los cuales  $x$  tiene exactamente  $j - 1$  ceros en  $(0, 1)$ .

Sean  $\xi \in \mathcal{Z}_j$  y  $\varphi \in \mathcal{Z}$ . Por la regularidad de los elementos de  $\mathcal{Z}_j$  es inmediato, a partir de la definición de la norma de este espacio, que si  $|\varphi - \xi|_1 < \epsilon$ , entonces por un lado, los valores de  $\varphi$  deben encontrarse en una vecindad de los correspondientes a  $\xi$  ( $|\varphi - \xi|_0 < \epsilon$ ). Geométricamente esto se refleja en el hecho de que la gráfica de la función  $\varphi$  se restrinja a permanecer en un tubo alrededor de la gráfica que representa a  $\xi$ . De aquí que, fijando el valor de  $\epsilon$  adecuadamente,  $\varphi$  sólo pueda anularse en cada vecindad de un cero de  $\xi$ . Por otro lado se cumple la desigualdad  $|\varphi' - \xi'|_0 < \epsilon$ . Dado que los ceros de  $\xi$  son simples, tenemos que la curva correspondiente a  $\varphi$  debe encontrarse dentro de un cono en cada una de las vecindades de los ceros de  $\xi$ . Es decir  $\varphi$  también resulta transversal al eje. Hemos demostrado que toda vecindad de puntos de  $\mathcal{Z}_j$  por puntos de  $\mathcal{Z}$  está contenida en  $\mathcal{Z}_j$ . En otras palabras  $\mathcal{Z}_j$  es abierto en la topología inducida por la norma  $|\cdot|_1$ .<sup>4</sup> Ver ilustración (6.1).

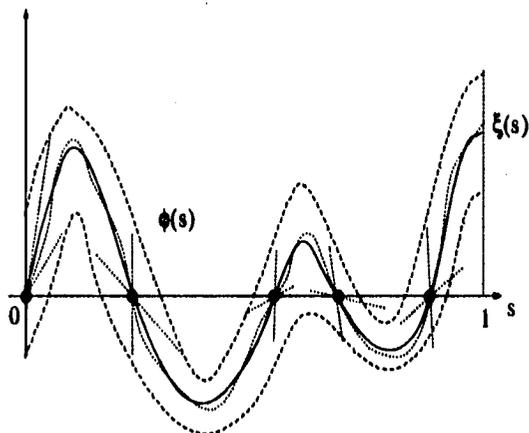


figura 6.1:  $\mathcal{Z}_j$  espacio abierto de funciones en la norma  $|\cdot|_1$

La frontera de  $\mathcal{Z}_j$  pertenece al subconjunto de elementos  $(w, x) \in C^0 \times C^0$  para los cuales  $(w, x)$  se anulan para un mismo valor de  $s \in [0, 1]$  que como vimos conlleva a soluciones triviales. Ahora por el teorema de bifurcación global, el par no trivial  $(\omega^2, (w, x))$  de la rama  $S(\lambda_k^0)$  tiene las mismas propiedades nodales que  $(\lambda_k^0, (0, 0)) \in S(\lambda_k^0)$ , i.e. que la función propia correspondiente al valor propio  $\lambda_k^0$ . En efecto, dado  $(\tilde{\omega}^2, (\tilde{w}, \tilde{x})) \in S(\lambda_k^0)$  existe un compacto  $E$  en el espacio  $\mathbf{R} \times C^0 \times C^0$  que contiene a  $(\tilde{\omega}^2, (\tilde{w}, \tilde{x})) \in S(\lambda_k^0)$ . Podemos entonces cubrir a  $S(\lambda_k^0) \cap E$  con un número finito de vecindades. Por la conexidad de

<sup>3</sup>El cambio de  $u$  a la función  $w$  no debe causar confusión ya que como vimos resultan de formulaciones equivalentes.

<sup>4</sup>No así en la topología inducida por la norma  $|\cdot|_0$ .

$S(\lambda_k^0)$ , cada bola debe contener al menos un punto límite de una bola adjacente. Además visto que las propiedades nodales se preservan en vecindades  $C^1$ , éstas deben mantenerse a lo largo de  $S(\lambda_k^0)$ . Finalmente un argumento similar conlleva a que  $S(\lambda_k^0) \cap S(\lambda_l^0) = \emptyset$  si  $k \neq l$  pues de lo contrario  $S(\lambda_l^0)$  alcanzaría un punto en la frontera de  $S(\lambda_k^0)$  es decir un punto con al menos un cero doble, lo cual no es posible.

Así cada rama  $S(\lambda_k^0)$  está globalmente caracterizada por las propiedades nodales, i.e. cada solución no trivial  $u \in S(\lambda_k^0)$  tiene exactamente  $k$ -ceros simples en  $[0, 1]$ . Esta propiedad se hereda de la función propia correspondiente al problema linealizado. Además puesto que  $\mathcal{Z}_k \cap \mathcal{Z}_l = \emptyset$  para  $k \neq l$ , la rama  $S(\lambda_k^0)$  no puede regresar al eje de soluciones triviales. Así por la alternativa de Rabinowitz, cada rama  $S(\lambda_k^0)$  es no acotada en el espacio  $(\lambda, (w, x))$ .

## 6.2 Una primera cota

De acuerdo con la teoría lineal, la cuerda sólo puede rotar a ciertas velocidades angulares propias. Sin embargo, como se puede apreciar en experimentos con cadenas, la deflexión de una cuerda pesada, con un extremo libre, no puede considerarse pequeña en relación a su elongación. Por ello, los resultados del tratamiento lineal, no pueden considerarse indicativos para el caso no lineal. En efecto, experimentalmente se observa, que una cuerda puede rotar prácticamente, a cualquier velocidad angular con tal de que ésta no sea muy pequeña. Veremos en efecto, que existe un umbral a vencer. Para esto, sustituyendo (3.22) en (3.21) y usando el teorema de *Fubini*, encontramos que

$$w(s) = \omega^2 \int_0^1 K(\eta, s) w(\eta) d\eta$$

$$\text{con } K(\eta, s) = \begin{cases} \frac{h(w(\eta), \eta)}{g\sqrt{s}} \eta \gamma(\eta) = \frac{\hat{\nu}(\sqrt{\eta w^2(\eta) + \eta^2 \gamma^2(\eta)})}{g\sqrt{w^2(\eta) + \eta \gamma^2(\eta)}} \frac{\eta}{\sqrt{s}} \gamma(\eta) & \text{si } 0 \leq \eta \leq s \\ \frac{h(w(\eta), \eta)}{g\sqrt{s}} s \gamma(\eta) = \frac{\hat{\nu}(\sqrt{\eta w^2(\eta) + \eta^2 \gamma^2(\eta)})}{g\sqrt{w^2(\eta) + \eta \gamma^2(\eta)}} \sqrt{s} \gamma(\eta) & \text{si } s \leq \eta \leq 1 \end{cases}$$

entonces,

$$|w(s)| \leq \omega^2 \int_0^1 K(\eta, s) |w(\eta)| d\eta$$

$$\begin{aligned} &\leq \omega^2 \left( \int_0^1 |w(\eta)|^2 d\eta \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^1 K^2 d\eta \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \omega^2 |w|_{L^2} \left( \int_0^1 K^2 d\eta \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ahora puesto que

$$\begin{aligned} \int_0^1 K^2 d\eta &= \int_0^s \left( \frac{\hat{\nu}(\sqrt{\eta w + \eta^2 \gamma^2}, \eta)}{g\sqrt{w + \eta \gamma^2}} \right)^2 \frac{\eta^2 \gamma^2(\eta)}{s} d\eta + \int_s^1 \left( \frac{\hat{\nu}(\sqrt{\eta w + \eta^2 \gamma^2}, \eta)}{g\sqrt{w + \eta \gamma^2}} \right)^2 s \gamma^2(s) d\eta \\ &\leq \frac{|\hat{\nu}|_0^2 s^2}{2g^2} + \frac{|\hat{\nu}|_0^2 s \gamma^2(s)}{g^2} \int_s^1 \frac{d\eta}{\eta \gamma^2(\eta)} \\ &\leq \frac{|\hat{\nu}|_0^2}{g^2} \left[ \frac{s}{2} - \frac{s \gamma^2(s)}{g^2 \rho_{\min}^2} \text{Log } s \right] \\ &\leq \frac{|\hat{\nu}|_0^2 s}{g^2} \left[ \frac{1}{2} - \left( \frac{|\rho|_0}{\rho_{\min}} \right)^2 \text{Log } s \right] \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} |w(s)|^2 &\leq \omega^4 |w|_0^2 \int_0^1 K^2 d\eta \\ &\leq \frac{\omega^4 |w|_0^2 |\hat{\nu}|_0^2 s}{g^2} \left( \frac{1}{2} - \left( \frac{|\rho|_0}{\rho_{\min}} \right)^2 \text{Log } s \right). \end{aligned}$$

Integrando esta última expresión con respecto a  $s$  en  $[0, 1]$  tenemos que,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left( \frac{s}{2} - \left( \frac{|\rho|_0}{\rho_{\min}} \right)^2 s \text{Log } s \right) ds &= \frac{s^2}{4} - \left( \frac{|\rho|_0}{\rho_{\min}} \right)^2 \frac{s^2}{2} (\text{Log } s - \frac{1}{2}) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{4} \left( 1 + \left( \frac{|\rho|_0}{\rho_{\min}} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Por lo que resulta claro que

$$|w|_{L^2}^2 \equiv \int_0^1 |w(s)|^2 ds \leq \frac{\omega^4 |w|_{L^2}^2 |\hat{v}|_0^2}{4g^2} \left( 1 + \left( \frac{|\rho|_0}{\rho_{min}} \right)^2 \right).$$

Esta última desigualdad tiene sentido si  $|w|_{L^2} = 0$ , lo que nos lleva al caso trivial, o bien si

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2 |\hat{v}|_0}{2g} \sqrt{1 + \left( \frac{|\rho|_0}{\rho_{min}} \right)^2} &\geq 1 \\ \Leftrightarrow \omega^2 &\geq \frac{2g}{|\hat{v}|_0 \sqrt{1 + \left( \frac{|\rho|_0}{\rho_{min}} \right)^2}} \equiv \frac{k}{|\hat{v}|_0}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

El lado derecho de la desigualdad (6.1) representa el umbral que hay que vencer (velocidad crítica). A continuación estudiaremos con cuidado cotas para los valores del parámetro  $\omega^2$  a lo largo de las ramas de bifurcación en base a distintas respuestas elásticas.

### 6.3 Cotas a priori

Hasta ahora, no hemos explorado los efectos particulares que resultarían al considerar clases de materiales elásticos, caracterizados por la forma funcional de la constricción constitutiva. En lo que sigue, echaremos un vistazo a las propiedades cualitativas que heredan, significativamente, las soluciones a partir de la respuesta material. Veremos que incluso en los casos más sencillos, nos enfrentamos a la riqueza fenomenológica de los modelos no lineales. Nuestro objetivo es obtener cotas para el valor del parámetro  $\omega^2$  a lo largo de la rama no trivial correspondiente, en términos de propiedades de funciones conocidas, como las funciones de Bessel.<sup>5</sup> Para facilitar nuestro análisis, trabajaremos con la función  $y$  dada por

$$sy(s) \equiv u(s). \quad (6.2)$$

Examinaremos soluciones que satisfagan  $|y|_0 \leq R$  o equivalentemente  $|u/s|_0 \leq R$ . Como  $u(0) = 0$  entonces  $u(s)/s = 1/s \int_0^s u'(\xi) d\xi \Rightarrow |u/s| \leq |u'|_0$ , i.e. podemos considerar aquellas soluciones tales que  $|u|_1 = R$ . Entonces a partir de la expresión (3.20) que define a  $h$ , tenemos que

<sup>5</sup>Podríamos establecer estas relaciones directamente de la forma integral de las ecuaciones y de la correspondiente representación para las funciones de Bessel.

$$\sqrt{sh} \equiv \frac{\hat{\nu}(s\sqrt{y^2 + \gamma^2}, s)}{\sqrt{y^2 + \gamma^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{R^2 + |\gamma|_0^2}} \equiv \mu, \quad (6.3)$$

donde usamos el hecho de que  $\hat{\nu}$  es una función creciente de  $N$  y que  $\hat{\nu}(0, s) \equiv 1$ . Así escribiendo (3.66) en términos de  $y$  y una ecuación análoga cuyos coeficientes mantengan las relaciones adecuadas con el fin de satisfacer las hipótesis de los teoremas de comparación [C-L, cap. 8] obtenemos

$$\left( \frac{(sy)'}{\rho} \right)' + \omega^2(\sqrt{sh})y = 0 \quad (6.4)$$

$$\frac{(sy)''}{\rho_{\min}} + \omega^2\mu y = 0, \quad (6.5)$$

con las condiciones de frontera (3.67), que en términos de la función  $y$  se escriben como

$$\lim_{s \rightarrow 0} sy(s) = 0 \quad (6.6)$$

$$y(1) + y'(1) = 0. \quad (6.7)$$

Aquí haremos una breve digresión para determinar las soluciones correspondientes a ecuaciones de la forma

$$s^2 y'' + 2sy' + \bar{\alpha} sy = 0, \quad \text{con } \bar{\alpha} = \mu\omega^2\rho_{\min} \quad (6.8)$$

$$sy \xrightarrow{s \rightarrow 0} 0, \quad y'(1) + y(1) = 0. \quad (6.9)$$

**Lema 6.1 (fórmula de Lommel)** [Wat, pág. 97]

$$z^2 \frac{d^2 u}{dz^2} + (2\alpha - 2\beta\nu + 1)z \frac{du}{dz} + (\beta^2 \gamma^2 z^{2\beta} + \alpha(\alpha - 2\beta\nu)) u = 0$$

tiene solución dada por  $u = z^{\beta\nu - \alpha} C_\nu(\gamma z^\beta)$ , donde  $C_\nu$  denota una función cilíndrica.

Si  $\beta = 0$ , la solución general degenera en  $u = z^{-\alpha}(c_1 + c_2 \text{Log} z)$ .

Si  $\gamma = 0$ , la solución tiene la forma  $u = z^{-\alpha}(c_1 + c_2 z^{2\beta\nu})$ .

**Prueba** Ejercicio (hint regla de la cadena).

Identificando coeficientes en (6.8), encontramos  $(\alpha, \beta, \gamma, \nu) = (0, 1/2, |4\bar{\alpha}|^{1/2}, -1)$  o bien,  $(\alpha, \beta, \gamma, \nu) = (1, 1/2, |4\bar{\alpha}|^{1/2}, 1)$ . Ahora, puesto que  $J_1 = -J_{-1}$  y  $Y_1 = -Y_{-1}$ , donde  $J$  y  $Y$  son las funciones de Bessel de primera y segunda especie, tenemos que la solución de (6.8) está dada por,

$$y(s) = s^{-\frac{1}{2}} \left[ aJ_1(2\sqrt{\bar{\alpha}}s^{\frac{1}{2}}) + bY_1(2\sqrt{\bar{\alpha}}s^{\frac{1}{2}}) \right]. \quad (6.10)$$

Para determinar el valor de las constantes  $a$  y  $b$ , basta observar la forma de las soluciones independientes  $s^{-\frac{1}{2}}J_1$  y  $s^{-\frac{1}{2}}Y_1$  cerca de  $s = 0$ . Como [Abr, pág. 360]

$$J_1(z) \sim \frac{z}{2} \quad \text{cuando } z \rightarrow 0 \quad (6.11)$$

$$Y_1(z) \sim \frac{2}{\pi z}, \quad (6.12)$$

entonces la condición  $sy(s) \rightarrow 0$  (6.9) implica  $s^{-\frac{1}{2}}J_1(2\sqrt{\bar{\alpha}}s^{\frac{1}{2}}) \sim \sqrt{\bar{\alpha}}s \xrightarrow{s \rightarrow 0} 0$ , mientras que  $s^{-\frac{1}{2}}Y_1(2\sqrt{\bar{\alpha}}s^{\frac{1}{2}}) \sim 1/(\pi\sqrt{\bar{\alpha}}) \neq 0$ . Por lo tanto, en (6.10) debemos tomar  $b = 0$ . Falta ver a que condiciones conlleva la segunda condición de frontera de (6.9). Para esto haremos uso del siguiente

**Lema 6.2** [Wat, pág. 83]  $C_\nu(z)$  *satisface las fórmulas de recurrencia*

$$\begin{aligned} zC'_\nu(z) + \nu C_\nu(z) &= zC_{\nu-1}(z) \\ zC'_\nu(z) - \nu C_\nu(z) &= -zC_{\nu+1}(z). \end{aligned}$$

Directamente del cálculo, (recordar que  $y(s) = as^{-\frac{1}{2}}J_1(2\sqrt{\bar{\alpha}}s^{\frac{1}{2}})$ ),

$$y(1) + y'(1) = \frac{a}{2} \left[ J_1(2\sqrt{\bar{\alpha}}) + 2\sqrt{\bar{\alpha}}J'_1(2\sqrt{\bar{\alpha}}) \right] = a\sqrt{\bar{\alpha}}J_0(2\sqrt{\bar{\alpha}}) = 0. \quad (6.13)$$

Es decir, hay 3 posibilidades. La primera,  $a = 0$  conlleva a  $y(s) \equiv 0$ , i.e. una solución trivial. Si  $\bar{\alpha} = 0$ , resolviendo (6.8) mediante dos integraciones, encontramos que  $y(s) =$

$s - \text{Log}s$ . Finalmente, si  $\bar{\alpha} \neq 0$  (este es nuestro caso general), entonces los valores propios  $\lambda_k^+$  de (6.5) deben satisfacer  $\lambda_k^+(R) = j_k^2 \sqrt{R^2 + |\gamma|_0^2} / 4\rho_{\min}$  donde  $j_k$  es el  $k$ -ésimo cero de  $J_0$ . Así, ya sea usando los teoremas de comparación o bien, recordando el análisis que siguió a la transformación de Prüfer en el estudio del problema linealizado, tendríamos de inmediato que

$$\lambda_k^+(R) \equiv \frac{j_k^2 \sqrt{R^2 + |\gamma|_0^2}}{4\rho_{\min}} \geq \omega_k^2, \quad (6.14)$$

donde  $\omega_k^2$  y  $\lambda_k^+(R)$  son los  $k$ -ésimos valores propios de (6.4) y (6.5) respectivamente. En particular, para  $|u|_1 = R = 0$ ,  $\omega_k^2 \equiv \lambda_k^0 \leq j_k^2 |\gamma|_0 / 4\rho_{\min}$ , i.e. obtenemos una cota superior para el  $k$ -ésimo punto de bifurcación. (Ver figura (6.2).)

El teorema de comparación que se usó <sup>6</sup>es [C-L, cap.8] es el siguiente:

**Teorema 6.3** Si  $(p_i y')' + g_i y = 0$  con  $0 < p_2 \leq p_1$ ,  $g_2 \geq g_1$ , con las mismas condiciones de frontera separadas. Entonces si  $\lambda_k^1$  y  $\lambda_k^2$  son los  $k$ -ésimos valores propios para  $i = 1, 2$ , se tiene que  $\lambda_2 \leq \lambda_1$ .

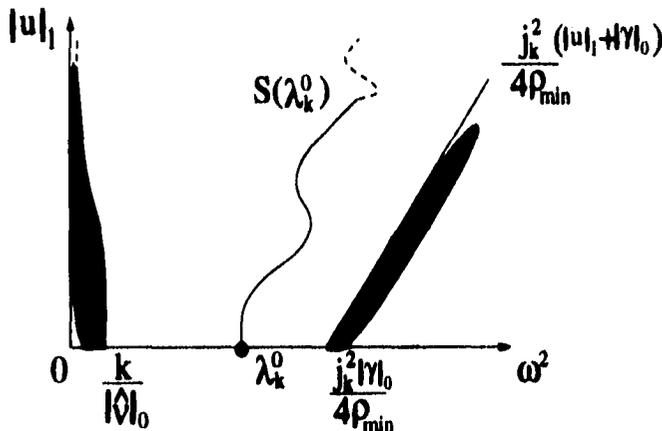


figura 6.2:  $S(\lambda_k^0)$  tiende a infinito en  $\omega^2$  y en  $|u|_1$  al menos linealmente.

Otra manera de probar el resultado sería usar el método *Minimax de Courant* [C-H, cap. 7] para la caracterización de los valores propios de los problemas lineales. En efecto, considerando que el coeficiente  $h/\sqrt{s}$  es conocido, tendríamos,<sup>7</sup>

<sup>6</sup>De hecho los resultados que se probaron para la prueba de la existencia y unicidad de la solución cerca de la singularidad i.e.  $s \sim 0$ , contiene entre otros, estos resultados.

<sup>7</sup>Donde  $(u, v)_1 \equiv \int_0^1 u'v' / \rho d\xi$  y  $(u, v)_2 \equiv \int_0^1 u'v' / \rho_{\min} d\xi$ .

$$\mathbf{K}u = \frac{1}{\omega^2}u \quad \text{donde} \quad (\mathbf{K}u, v)_1 \equiv \int_0^1 \frac{h}{\sqrt{\xi}} uv \, d\xi,$$

$$\tilde{\mathbf{K}}u = \frac{1}{\lambda}u \quad \text{donde} \quad (\tilde{\mathbf{K}}u, v)_2 \equiv \int_0^1 \frac{\mu}{\sqrt{\xi}} uv \, d\xi.$$

El espacio de trabajo  $H$  es  $H^1[0, 1]$  con cualquiera de estas normas y la condición  $u(0) = 0$ . En efecto,

$$|u|_2^2 \equiv \int_0^1 \frac{u'^2}{\rho_{\min}} d\xi \geq \int_0^1 \frac{u'^2}{\rho} d\xi \equiv |u|_1^2 \geq \frac{\rho_{\min}}{|\rho|_0} \int_0^1 \frac{u'^2}{\rho_{\min}} d\xi \equiv \frac{\rho_{\min}}{|\rho|_0} |u|_2^2$$

por lo que  $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ . Usando las estimaciones previas, si  $V_{k-1}$  denota cualquier subespacio de  $H$  de dimensión  $k-1$ ,<sup>8</sup>

$$\frac{1}{\omega_k^2} = \text{Min}_{V_{k-1}} \text{Max}_{V_{k-1}^\perp} \frac{(\mathbf{K}u, u)_1}{|u|^2} \geq \text{Min}_{V_{k-1}} \text{Max}_{V_{k-1}^\perp} \frac{(\tilde{\mathbf{K}}u, u)_2}{|u|^2} = \frac{1}{\lambda_k^+}$$

recobrando así el resultado (6.14).

Ahora, puesto que la rama  $S(\lambda_k^0)$  es no acotada,  $|u|_1 = R$  y (6.14) nos muestran que  $|u|_1$  es no acotado en cada una de las ramas. En efecto, (6.14) nos indica que en el diagrama de bifurcación en el espacio  $(\omega^2, |u|_1)$ , la imagen de la  $k$ -ésima rama se encuentra a la izquierda de la curva dada por  $\omega^2 = j_k^2 \sqrt{R^2 + |\gamma|_0^2 / 4\rho_{\min}}$ . Claramente, la función  $\lambda_k^+(R)$  es asintóticamente lineal para valores grandes de  $|u|_1$ . Así, (6.14) restringe el espacio donde se localizan las ramas.

**Teorema 6.4**  $S(\lambda_k^0)$  tiende a infinito tanto en  $\omega^2$  como en  $|u|_1$ , por lo menos linealmente y

$$\omega^2 > \frac{k}{|\hat{\nu}|_0} > 0$$

A continuación caracterizaremos, para algunos casos simples, a las cuerdas elásticas por medio del tipo de respuesta que uno observa cuando por ejemplo el valor de la tensión crece indefinidamente, es decir el orden de estiramiento con respecto a la magnitud de la fuerza tensil.

<sup>8</sup>Cuidado  $u \perp v$  en la norma  $\|\cdot\|_1$ , no implica  $u \perp v$  en la norma  $\|\cdot\|_2$ .

### 6.3.1 Cuerdas muy fuertes en tensión

Diremos que una cuerda es *muy fuerte en tensión* si

$$\frac{\hat{\nu}(N, s)}{N} \rightarrow 0 \text{ cuando } N \rightarrow \infty. \quad (6.15)$$

**Lema 6.5** Si  $(\omega^2, u)$  es solución de (3.21) y (3.22), entonces

$$\sqrt{|u|_1^2 + |\gamma|_0^2} \leq \omega^2 \text{Max}_s \hat{\nu}(\sqrt{|u|_1^2 + |\gamma|_0^2}, s) + |\gamma|_0 \quad (6.16)$$

#### Prueba

A partir de las expresiones (3.21) y (3.22) es inmediato ver que

$$|u|_0 \leq \omega^2 |\rho|_0 |x|_0 \leq \omega^2 |\rho|_0 \text{Max}_s(\sqrt{|u|_0^2 + |\gamma|_0^2}, s), \quad (6.17)$$

ya que  $\sqrt{|u|^2 + s^2 \gamma^2} \leq \sqrt{|u|_0^2 + |\gamma|_0^2}$  y  $\hat{\nu}$  es una función creciente de la tensión  $N$ . Además, directamente de (2.13), tenemos que

$$|u'|_0 \leq \omega^2 |\rho|_0 \text{Max}_s(\sqrt{|u|_0^2 + |\gamma|_0^2}, s). \quad (6.18)$$

finalmente, observando que  $(|u|_0^2 + |u'|_0^2 + |\gamma|_0^2)^{1/2} \leq |u|_0 + |u'|_0 + |\gamma|_0$ , las relaciones (6.17) y (6.18) nos dan el resultado (6.16). Esta desigualdad muestra que  $\omega^2$  no puede permanecer acotado. En efecto, si  $\omega^2$  fuera acotado, (6.16) conllevaría a la desigualdad  $1 \leq M(\text{Max} \hat{\nu} + 1)/\sqrt{|u|_1^2 + |\gamma|_0^2}$ . Ahora, puesto que forzosamente la rama diverge, tendríamos en este caso que  $|u|_1 \rightarrow \infty$ , lo que genera una contradicción junto con esa última desigualdad. Hemos probado que para cuerdas muy fuertes en tensión (6.15), necesariamente  $\omega^2 \rightarrow \infty$  y satisface  $\omega^2 \Lambda(\check{N}) + c/\check{N} \geq 1$  donde  $\Lambda(\check{N}) \equiv \hat{\nu}(\check{N})/\check{N}$  y  $\check{N} \equiv \sqrt{|u|_1^2 + |\gamma|_0^2}$ . Así, tenemos el

**Teorema 6.6** Supongamos que (6.15), se cumpla. Entonces, para cada  $\omega^2$  en  $(\lambda_k^0, \lambda_{k+1}^0)$  y para cada  $j = 1, 2, \dots, k$ , existe al menos una  $u$  tal que  $(\omega^2, \pm u) \in S(\lambda_j^0)$ . Además, en cada rama  $S(\lambda_k^0)$ ,  $\omega^2$  está acotado inferiormente y tanto  $\omega^2$  como  $|u|_1$  son no acotados.

En su análisis sobre cuerdas uniformes e inextensibles (i.e. donde  $\hat{\nu} \equiv 1$  por lo que claramente se verifica (6.15)), Kolodner probó un resultado más fuerte, en el cual el

término "al menos" del teorema (6.6) es remplazado por "exactamente". Más adelante, veremos un ejemplo donde esto no necesariamente es cierto para cuerdas elásticas no uniformes.

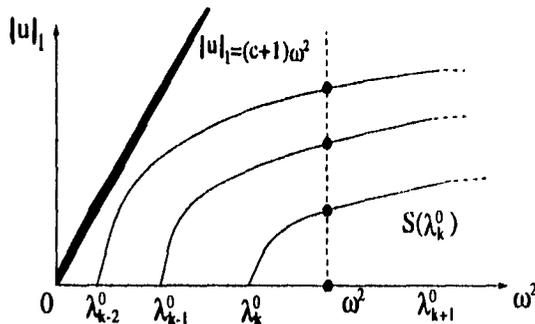


figura 6.3: Diagrama cualitativo para cuerdas inextensibles y uniformes. En nuestro problema, hasta ahora no sabemos si las ramas admiten o no puntos de inflexión.

El teorema (6.6), muestra que las cuerdas muy fuertes en tensión tiene un comportamiento similar al correspondiente para cuerdas inextensibles y uniformes.

### 6.3.2 Cuerdas fuertes en tensión

Si consideramos que esta clase de cuerdas está caracterizada por el hecho de que exista una constante  $M$  tal que

$$\hat{v}(N, s) \leq M(1 + N) \quad \text{para } N \geq 0, \quad \forall s \in [0, 1], \quad (6.19)$$

de donde obtenemos una cota superior para

$$\begin{aligned} h &\leq M\left(\sqrt{s} + \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + s\gamma^2}}\right) \leq M\left(\sqrt{s} + \frac{1}{\sqrt{s\gamma_{\min}}}\right) \\ &\Rightarrow \sqrt{s}h \leq M\left(1 + \frac{1}{\gamma_{\min}}\right). \end{aligned} \quad (6.20)$$

Repetiendo el razonamiento que siguió (6.8), (6.9); pero en esta ocasión tomando  $\bar{\alpha} = \lambda_k |\rho|_0 M(1 + 1/\gamma_{\min})$ , se infiere que, por un lado, los valores propios  $\lambda_k$  son tales que

$$\lambda_k = \frac{j_k^2}{4|\rho|_0 M(1 + 1/\gamma_{\min})};$$

además dado que  $1/\rho \geq 1/|\rho|_0 > 0$ , obtenemos comparando (6.4) y (6.21)

$$\frac{(sy)''}{|\rho|_0} + \omega^2 M(1 + 1/\gamma_{\min})y = 0, \quad (6.21)$$

una cota inferior positiva para los valores del parámetro

$$\omega_k^2 \geq \frac{j_k^2}{4|\rho|_0 M(1 + \frac{1}{\gamma_{\min}})}. \quad (6.22)$$

### Nota

Oservemos que para que exista  $\omega_k^2$  que satisfaga (6.14) y (6.22) es necesario que  $[|\rho|_0 M(1 + 1/\gamma_{\min})]^{-1} \leq |\gamma|_0 / \rho_{\min} \Leftrightarrow (|\rho|_0 / \rho_{\min})^2 \geq 1/M(1 + 1/\gamma_{\min})$  lo cual es cierto si  $M > 1$ . Puesto que  $\hat{v}(0, s) \equiv 1$ , esto se cumple. Así, cada rama  $S(\lambda_k^0)$  está acotada inferior y superiormente, (Ver figura (6.4))

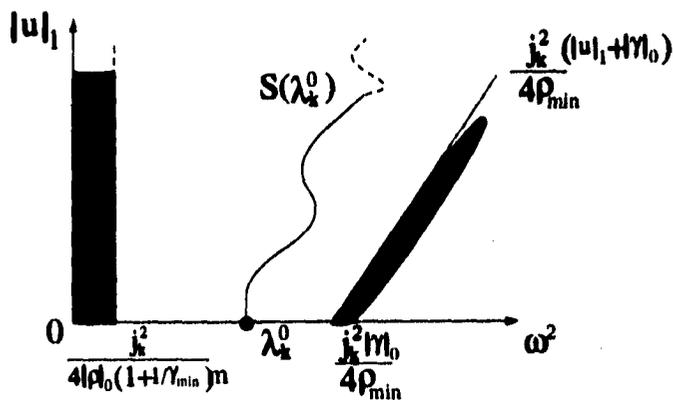


figura 6.4: restringen la localización de la rama.

### 6.3.3 Cuerdas débiles en tensión

Llamaremos a una cuerda débil en tensión si:

$$\hat{v}(N, s) \geq mN \quad \text{para } N \geq 0 \quad \forall s \in [0, 1]. \quad (6.23)$$

Como antes, (6.23) nos da una cota para  $h \geq m\sqrt{s}$ . Así, en este caso hay que comparar,<sup>9</sup>

$$\left(\frac{u'}{\rho}\right)' + \omega^2 \frac{h}{\sqrt{s}} u = 0 \quad (6.24)$$

$$\frac{u''}{\rho_{\min}} + \omega^2 m u = 0, \quad (6.25)$$

con las condiciones de frontera (3.67) equivalentes a (6.6), (6.7). Como  $0 < 1/\rho < 1/\rho_{\min}$  y  $h \geq m\sqrt{s}$ , los teoremas de comparación implican que (tenemos un caso análogo a (6.14))

$$\omega_k^2 \leq \lambda_k^2,$$

donde  $\lambda_k^2 m \rho_{\min} \equiv \mu_k^2$ , es el  $k$ -ésimo valor propio de  $u'' + \mu^2 u = 0$ , con condiciones  $u(0) = u'(1) = 0$ . Es inmediato convencerse de que  $\mu = (2k-1)\pi/2$ . Además los ceros de las soluciones  $u_k(s) = a \sin[(2k-1)\pi s/2]$  a esta última ecuación son  $s_l = 2l/(2k-1)$ , donde  $l = 0, 1, 2, \dots, k-1$ .

De manera que, para este tipo de cuerdas, cada rama  $S(\lambda_k^0)$  se encuentra en una banda alrededor de  $\lambda_k^0$ , al menos localmente (i.e.  $|u|_1 \sim 0$ ) y a la izquierda de un valor fijo para toda  $|u|_1$ , como representa la figura (6.5).

$$\omega_k^2 \leq \frac{1}{m\rho_{\min}} \left(\frac{(2k-1)\pi}{2}\right)^2 \equiv \eta_k. \quad (6.26)$$

**Teorema 6.7** *Si la cuerda es débil en tensión, i.e. si se tiene (6.23), entonces los valores del parámetro  $\omega_k^2$  están acotados por arriba (6.26).*

### 6.3.4 Cuerdas asintóticamente lineales

Es importante recalcar, que una cuerda uniforme no debe satisfacer necesariamente alguna de las condiciones (6.19), (6.23). También es posible que verifique ambas constricciones (si  $M \geq m$ ). En ese caso,  $\omega^2$  estaría acotado por arriba y por abajo en cada rama bifurcada. Entre esta clase de materiales se encuentran los llamados asintóticamente

<sup>9</sup> (6.24) no es más que (6.4) en términos de  $u \equiv sy$ .

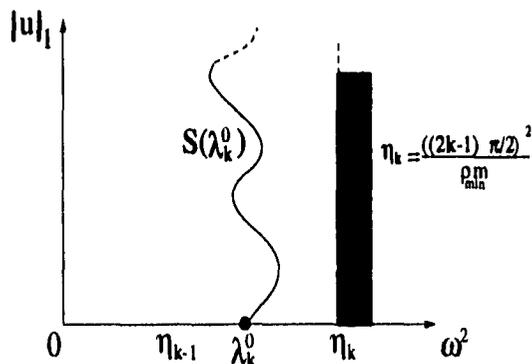


figura 6.5: Cuerdas débiles en tensión.

lineales, i.e. aquellos para los cuales  $\hat{v}(\cdot, s)$  es asintóticamente lineal, o en otras palabras tales que exista una función  $\mu(s)$  definida positiva, tal que  $\hat{v}(N, s)/N \rightarrow \mu(s)$  conforme  $N \rightarrow \infty$ . En particular, si definimos  $v(s) \equiv u/|u|_0^2$  es claro que (6.4) implica que  $(v'/\rho)' + \omega^2 v \hat{v}(N(u), s)/N(u) = 0$  con  $v(0) = v'(1) = 0$ , de manera que si  $|u|_0 \rightarrow \infty$ , entonces  $|v|_0 \rightarrow 0$ . Puesto que  $\hat{v}(N(u), s)/N(u) \rightarrow \mu(s)$ ; es fácil ver que la linealización de este problema es  $(v'/\rho)' + \omega^2 \mu(s)v = 0$ , si  $\hat{v}(N(u), s)/N(u) = \mu(s) + o(v)$ . En este caso  $\omega^2 \rightarrow \Lambda_k$ , donde  $\Lambda_k$  denotan a los valores propios del problema lineal que resulta cuando  $N \rightarrow \infty$ .<sup>10</sup>

### 6.3.5 Cuerdas muy débiles en tensión

Este es el caso de cuerdas para las cuales

$$\frac{\hat{v}(N, s)}{N} \rightarrow \infty, \quad \text{conforme } N \rightarrow \infty. \quad (6.27)$$

Es lógico pensar que este tipo de cuerdas conlleve a comportamientos radicalmente distintos de los estudiados previamente como por ejemplo los relativos a las cuerdas muy fuertes en tensión (6.3.1), las cuales vimos, guardan una estructura cercana a las cuerdas inextensibles y uniformes (6.6). Quisieramos pues, localizar las ramas de bifurcación para esta nueva clase de respuesta material. Empezaremos con un estudio particular para la primera rama. Finalmente, veremos por medio de varios resultados el caso general, probando así el siguiente

<sup>10</sup>Existen numerosos trabajos y teoría sobre este tipo de problemas (Dancer (74), Kranoselskii (56), Pimbley (62-63), Rabinowitz (73), Stuart y Tolland entre otros). Sin embargo, la riqueza de los resultados que uno puede determinar para esta clase particular de problemas esta contrarrestada por lo inusual que resultan las funciones linealmente asintóticas para casos físicos concretos.

**Teorema 6.8** Sea  $u(s) = \sqrt{sw(s)} = sy(s)$ . Si (6.27) se satisface, entonces sobre la rama  $S(\lambda_k^0)$  se tiene que

$$\omega_k^2 \rightarrow 0, \quad y \quad |u|_0, |u|_1, |y|_0, |x|_0 \rightarrow \infty \quad \text{en } S(\lambda_k^0) \quad \text{para } k = 1, 2, \dots$$

Probaremos que  $|w|_0 \rightarrow \infty$  y  $|u|_0 \rightarrow \infty$  conforme  $|y|_0 \rightarrow \infty$ .

**Prueba**

Escribiendo (3.66) y (3.67) en términos de las funciones  $x$  y  $y$ , y sustituyendo el valor de  $x$  dado por (3.67) en (3.66); obtenemos, usando el teorema de Fubini, ver (6.6), una ecuación integral para  $y$ .

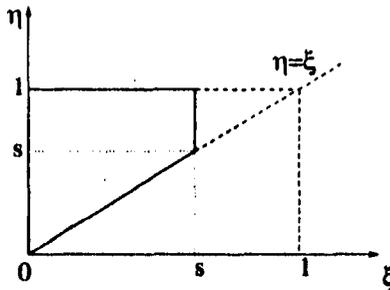


figura 6.6: Dominio de integración.

$$\begin{aligned} \frac{gy(s)}{\omega^2} &= \frac{g}{s} \int_0^s \rho(\xi) \left( \int_{\xi}^1 \frac{y(\eta) \hat{v}(\eta \sqrt{y^2(\eta) + \gamma^2(\eta)}, \eta)}{\sqrt{y^2(\eta) + \gamma^2(\eta)}} d\eta \right) d\xi \\ &= \frac{g}{s} \left[ \int_0^s \frac{y \hat{v}(\eta \sqrt{y^2 + \gamma^2}, \eta)}{\sqrt{y^2 + \gamma^2}} \left( \int_0^{\eta} \rho(\xi) d\xi \right) d\eta + \int_s^1 \frac{y \hat{v}(\eta \sqrt{y^2 + \gamma^2}, \eta)}{\sqrt{y^2 + \gamma^2}} \left( \int_0^s \rho(\xi) d\xi \right) d\eta \right] \end{aligned} \quad (6.28)$$

recordando que  $s\gamma(s) \equiv g \int_0^s \rho d\xi$  tenemos que (6.28) se escribe como,

$$\frac{gy(s)}{\omega^2} = \gamma(s) \int_s^1 \frac{y \hat{v}(\xi \sqrt{y^2 + \gamma^2}, \xi)}{\sqrt{y^2 + \gamma^2}} d\xi + \frac{1}{s} \int_0^s \frac{\xi \gamma y \hat{v}(\xi \sqrt{y^2 + \gamma^2}, \xi)}{\sqrt{y^2 + \gamma^2}} d\xi \quad (6.29)$$

$$\frac{gy(0)}{\omega^2} = g\rho(0) \int_0^1 \frac{y \hat{v}(\xi \sqrt{y^2 + \gamma^2}, \xi)}{\sqrt{y^2 + \gamma^2}} d\xi \quad \text{cuando } s \rightarrow 0. \quad (6.30)$$

### 6.3.6 Un ejemplo particular para la primera rama

En la primera rama,  $w$  no se anula en el intervalo  $(0, 1]$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que sea positiva a lo largo de ésta. claramente de (6.29) se obtiene la estimación

$$\gamma_{\min} f(s) \leq \frac{gy(s)}{\omega^2} \leq |\gamma|_0 f(s) \quad (6.31)$$

$$f(s) = \int_0^1 \frac{y\hat{\nu}(\xi\sqrt{y^2 + \gamma^2}, \xi)}{\sqrt{y^2 + \gamma^2}} d\xi + \frac{1}{s} \int_0^s \frac{\xi y \hat{\nu}(\xi\sqrt{y^2 + \gamma^2}, \xi)}{\sqrt{y^2 + \gamma^2}} d\xi. \quad (6.32)$$

Ahora, tomando el límite cuando  $s \rightarrow 0$  en (6.32) (el segundo término del lado derecho de (6.32) tiende a 0 pues recordemos que  $y(0) = -\omega^2 \rho(0)x(0) \neq 0$  ver (3.64) y  $\gamma(0) = g\rho(0) \neq 0$ ) usando (6.29)

$$f(0) = \int_0^1 \frac{y\hat{\nu}(\xi\sqrt{y^2 + \gamma^2}, \xi)}{\sqrt{y^2 + \gamma^2}} d\xi = \frac{gy(0)}{\omega^2 \gamma(0)} = \frac{y(0)}{\omega^2 \rho(0)}. \quad (6.33)$$

Análogamente, tomando el límite cuando  $s \rightarrow 1$ , obtenemos sin mayor dificultad (ver (6.32) y (6.29) o (6.31))

$$\frac{gy(1)}{\omega^2 |\gamma|_0} \leq f(1) = \int_0^1 \frac{\xi y \hat{\nu}}{\sqrt{y^2 + \gamma^2}} d\xi \leq \frac{gy(1)}{\omega^2 \gamma_{\min}}. \quad (6.34)$$

Derivando (6.32),  $f'(s) = -s^{-2} \int_0^s \xi y \hat{\nu} / \sqrt{y^2 + \gamma^2} d\xi < 0$ .<sup>11</sup> Así,  $f$  es decreciente, por lo tanto  $f(1) \leq f(s) \leq f(0)$ . Finalmente usando (6.31), (6.33) y (6.34), es fácil obtener

$$\frac{y(1)\rho_{\min}}{|\rho|_0} \leq \frac{y(1)\gamma_{\min}}{|\gamma|_0} \leq y(s) \leq \frac{y(0)|\gamma|_0}{g\rho(0)} \leq \frac{y(0)|\rho|_0}{\rho(0)}. \quad (6.35)$$

Directamente de (6.35), usando la propiedad característica de cuerdas muy débiles en tensión (6.27)<sup>12</sup>

$$\frac{y(s)\hat{\nu}(s\sqrt{y^2 + \gamma^2}, s)}{s\sqrt{y^2 + \gamma^2}} \rightarrow \infty \text{ conforme } y(1) \rightarrow \infty \text{ para } s > 0.$$

<sup>11</sup>Recordemos que  $y$  es positiva a lo largo de la primera rama.

<sup>12</sup>Recordar que  $\hat{\nu}$  es una función creciente de  $N$ .

Sin embargo, esta divergencia no tiene por que ser uniforme: no podemos afirmar que exista  $\alpha$  tal que  $\hat{v}(N, s)/N > \alpha$  con  $\alpha \rightarrow \infty$ , ver figura (6.7).

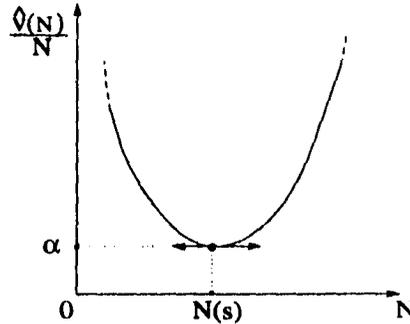


figura 6.7: Existe  $s$  (dependiente de  $y(1)$ ) tal que  $\hat{v}/N$  alcanza un valor mínimo; que no necesariamente es una función creciente de  $y(1)$ .

Así, tal como están las cosas, no es claro como podríamos aplicar los teoremas de comparación para probar que  $\omega_1^2 \rightarrow 0$  conforme  $y(1) \rightarrow \infty$ , lo que se probará más adelante cuando probemos el caso general, usando un método alternativo.

Ahora  $|u|_0 \equiv \text{Max}_s |u(s)| \geq u(1) = y(1)$  por lo que  $y(1) \rightarrow \infty \Rightarrow |u|_0 \rightarrow \infty$ .

Por otra parte (6.29) es equivalente a

$$\begin{aligned} \frac{gu(s)}{\omega^2} &= s\gamma(s) \int_s^1 \frac{y\hat{v}}{\sqrt{y^2 + \gamma^2}} d\xi + \int_0^s \frac{\xi\gamma y\hat{v}}{\sqrt{y^2 + \gamma^2}} d\xi \\ &\leq |\gamma|_0 \left( \int_s^1 \frac{sy\hat{v}}{\sqrt{y^2 + \gamma^2}} d\xi + \int_0^s \frac{\xi y\hat{v}}{\sqrt{y^2 + \gamma^2}} d\xi \right) \\ &\leq |\gamma|_0 \int_0^1 \frac{\xi y\hat{v}}{\sqrt{y^2 + \gamma^2}} d\xi. \end{aligned}$$

Claramente el lado derecho de esta última desigualdad es  $|\gamma|_0 f(1)$  por lo que (6.34) nos da, después de una obvia simplificación,  $u(s) \leq |\gamma|_0 y(1)/\gamma_{\min}$ . Es decir  $y(1) \rightarrow \infty$  si  $|u|_0 \rightarrow \infty$ . Hemos probado entonces que en la primera rama:

$$|u|_0 \rightarrow \infty \Leftrightarrow y(1) \rightarrow \infty. \tag{6.36}$$

Ahora usando que  $\hat{v}$  es creciente como función de  $N$ , usando (3.3) obtenemos  $|x|_0 \leq \int_0^1 \hat{v}(\sqrt{|u|_0^2 + |\gamma|_0^2}, s) ds$ , de donde claramente por un argumento de contradicción tenemos

que  $|x|_0 \rightarrow \infty \Rightarrow |u|_0 \rightarrow \infty$ . Además, la relación (2.13) implica que si  $|u'|_0 \rightarrow \infty$  entonces  $|x|_0 \rightarrow \infty$ . Así, tenemos que  $|x|_0 \rightarrow \infty \Rightarrow |u|_1 \rightarrow \infty$ .

Supongamos ahora que  $|y|_0 \rightarrow \infty$  en la primera rama. Entonces de (6.35) se infiere que  $y(0) \rightarrow \infty$ . Por otro lado, la relación (3.64) nos permite concluir que  $|y|_0 \rightarrow \infty \Rightarrow |u'|_0 \rightarrow \infty$ , que juntando con el argumento anterior y (6.36) nos dice que  $|y|_0 \rightarrow \infty \Rightarrow y(1) \rightarrow \infty$ . Recapitulando, hemos probado que en la primera rama:

$$\begin{aligned} |y|_0 \rightarrow \infty &\iff |u|_0 \rightarrow \infty \\ \iff |x|_0 \rightarrow \infty &\iff |u|_1 \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (6.37)$$

$$|y|_0 \rightarrow \infty \Rightarrow |x|_0 \rightarrow \infty \Rightarrow |u|_0 \rightarrow \infty \Rightarrow |y|_0 \rightarrow \infty.$$

Así, puesto que sobre la primera rama  $S(\lambda_1^0)$ ,  $\omega^2$  está acotado (ver (6.30)), necesariamente <sup>13</sup>  $|u|_1 \rightarrow \infty$ , lo que como vimos (6.37) implica que cada una de las cantidades  $|x|_0$ ,  $|y|_0$ ,  $|u|_0$ ,  $|u'|_0$  diverge.

Usando los teoremas de comparación, es posible obtener una función  $\varphi$  tal que  $\varphi(y) \rightarrow 0$  conforme  $y \rightarrow \infty$ , y tal que  $\omega_1^2 \leq \varphi(y(1))$  en la primera rama; si existen constantes  $m > 0$ ,  $p > 1$  tales que  $\hat{\nu}(N, s) \geq 1 + mN^p$  para  $N \geq 0$ ; contando así con una estimación para la tasa con la cual se alcanza el límite  $\omega_1^2 \rightarrow 0$  cuando  $|y|_0 \rightarrow \infty$ . En efecto, en este caso

$$h \geq (N^{-1} + mN^{p-1})\sqrt{s}$$

$$N = s\sqrt{y^2 + \gamma^2}$$

$$s|\gamma|_0 \sqrt{\left(\frac{y(0)}{g\rho(0)}\right)^2 + 1} \geq N \geq s\gamma_{\min} \sqrt{\left(\frac{y(1)}{|\gamma|_0}\right)^2 + 1},$$

obteniendo así la siguiente cota para el término  $h$ ,

$$h \geq \frac{\sqrt{s}}{|\gamma|_0 \sqrt{1 + \left(\frac{y(0)}{g\rho(0)}\right)^2}} + ms^{p-\frac{1}{2}} \gamma_{\min}^{p-1} \left[ \left(\frac{y(1)}{|\gamma|_0}\right)^2 + 1 \right]^{\frac{p-1}{2}}$$

<sup>13</sup>Recordemos que la rama es no acotada.

$$\geq ms^{p-\frac{1}{2}}\gamma_{\min}^{p-1} \left[ \left( \frac{y(1)}{|\gamma|_0} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{p-1}{2}}. \quad (6.38)$$

Repetiendo el razonamiento (6.3)-(6.14), tomando en este caso  $\bar{\alpha} = \omega^2 \rho_{\min} \gamma_{\min}^{p-1} [(y(1)/|\gamma|_0)^2 + 1]^{\frac{p-1}{2}}$  queremos comparar (6.4) con

$$(sy)'' + \bar{\alpha}s^p y = 0, \quad (6.39)$$

que en términos del lema (6.1), se escribe como

$$s^2 y'' + 2s y' + \bar{\alpha}s^{p+1} y = 0. \quad (6.40)$$

Sin mayor dificultad, identificando coeficientes, encontramos que en este caso  $(\alpha, \beta, \gamma, \nu) = (0, (p+1)/2, 2\sqrt{|\bar{\alpha}|}/(p+1), -1/(p+1))$  o bien  $(\alpha, \beta, \gamma, \nu) = (1, (p+1)/2, 2\sqrt{|\bar{\alpha}|}/(p+1), 1/(p+1))$ . Así la solución de (6.40)<sup>14</sup>

$$y(s) = s^{-\frac{1}{2}} C_{\pm \frac{p+1}{2}} \left( \frac{2\sqrt{|\bar{\alpha}|}}{p+1} s^{\frac{p+1}{2}} \right). \quad (6.41)$$

Puesto que  $J_\nu \sim (z/2)^\nu / \Gamma(\nu+1)$ , la condición (6.6) se satisface sólo para el signo +. Por otro lado, imponiendo la condición (6.7) tenemos usando el lema (6.2),

$$\begin{aligned} y(1) + y'(1) &= \frac{p+1}{2} \left[ \frac{1}{p+1} C_{\pm \frac{p+1}{2}} \left( \frac{2\sqrt{|\bar{\alpha}|}}{p+1} \right) + \frac{2\sqrt{|\bar{\alpha}|}}{p+1} C_{\pm \frac{p+1}{2}} \left( \frac{2\sqrt{|\bar{\alpha}|}}{p+1} \right) \right] \\ &= \pm \sqrt{|\bar{\alpha}|} C_{\mp \frac{p}{2}} \left( \frac{2\sqrt{|\bar{\alpha}|}}{p+1} \right) = 0. \end{aligned}$$

Como antes el caso  $\bar{\alpha}$  conlleva a soluciones triviales. Así, para garantizar la existencia de soluciones no triviales, es suficiente que  $2\sqrt{|\bar{\alpha}|}/(p+1)$  sea un cero de  $J_{-p/(p+1)}$ . La solución es  $y(s) = s^{-\frac{1}{2}} C_{1/(p+1)}(2\sqrt{|\bar{\alpha}|} s^{\frac{p+1}{2}} / (p+1))$ . Estamos buscando una cota para  $\omega_1^2$  en términos de una función de  $y(1)$ . Basta entonces escoger como valor propio de (6.40) a  $\Omega_1$  tal que

<sup>14</sup>Recordar que  $C$  denota una función cilíndrica.

$$\Omega_1 = \frac{(p+1)^2 \zeta_1^2}{4\rho_{\min} m \gamma_{\min}^{p-1} \left[ 1 + \left( \frac{y(1)}{|\gamma|_0} \right)^2 \right]^{\frac{p-1}{2}}} \quad \text{donde } \zeta_1 = \text{primer cero de } J_{-\frac{p}{p+1}}. \quad (6.42)$$

Finalmente, aplicando los teoremas de comparación a las ecuaciones (6.4) y (6.39) vemos que

$$\Omega_1 \geq \omega_1^2. \quad (6.43)$$

Así, (6.42) nos muestra que  $\Omega_1 \equiv \varphi(y(1))$ , con las propiedades antes mencionadas, por lo que si  $|y|_0 \rightarrow \infty$ , (6.43) nos da el resultado:

$$\text{Si } |y|_0 \rightarrow \infty \implies \omega_1^2 \rightarrow 0.$$

### 6.3.7 Caso general

Para probar el teorema (6.8), basta aplicar la transformación de Prüfer (4.1), (4.2) al sistema de ecuaciones (3.2), (3.3); expresando  $\cos \phi$  y  $\sin \phi$  en términos de  $u$  y  $x$ . Así, recordando (4.3), (4.5)

$$\phi(s) = \int_0^s \frac{\omega}{u^2 + \omega^2 x^2} \left[ \rho \omega^2 x^2 + \frac{\hat{v}(\sqrt{u^2 + \xi^2 \gamma^2}, \xi) u^2}{\sqrt{u^2 + \xi^2 \gamma^2}} \right] d\xi. \quad (6.44)$$

Ahora, imponiendo la condición que garantiza que la función  $u_k$  tenga exactamente  $k$  ceros en  $[0, 1]$ , i.e.  $\phi(1) = (2k-1)\pi/2$ , usando (6.44) y puesto que el primer término del lado derecho es positivo, resulta que

$$\frac{(2k-1)\pi}{2\omega} \geq \int_0^1 \frac{\hat{v}(\sqrt{u^2 + \xi^2 \gamma^2}, \xi) u^2}{(u^2 + \omega^2 x^2) \sqrt{u^2 + \xi^2 \gamma^2}} d\xi. \quad (6.45)$$

Recordando (2.13) y usando (6.26) no es difícil ver que <sup>15</sup>

$$\frac{(2k-1)\pi}{2\omega_k^3} \geq \int_0^1 \frac{\hat{v}(\sqrt{u_k^2 + \xi^2 \gamma^2}, \xi) u_k^2}{[\eta_k u_k^2 + (u_k'/\rho)^2] \sqrt{u_k^2 + \xi^2 \gamma^2}} d\xi. \quad (6.46)$$

<sup>15</sup>De ahora en adelante escribiremos los distintos términos con el subíndice  $k$ .

Queremos probar que cuando  $|y|_0 \rightarrow \infty$  (lo cual es implicado por  $|u|_0 \rightarrow \infty$ , la integral del lado derecho de (6.46) diverge. Para ello requerimos (6.27), además de cerciorarnos de que el crecimiento puntual de  $u$  (o  $y$ ), no está confinado a intervalos tan pequeños como para evitar que el término integral diverja aún cuando  $|u|_0 \rightarrow \infty$ . En lo que sigue, examinaremos con cuidado la forma de las soluciones entre sus ceros, probando una serie de lemas que nos llevarán al resultado.

**Lema 6.9**  $u'_k$  tiene exactamente  $k$  ceros  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$  en  $[0, 1]$  simples que satisfacen

$$0 = \xi_0 < \sigma_1 < \xi_1 < \dots < \sigma_{k-1} < \xi_{k-1} < \sigma_k = 1$$

donde  $\xi_j$ ,  $y j = 0, \dots, k-1$  denotan los  $k$  ceros de  $u_k$  en  $[0, 1]$ .

### Prueba

El teorema de Sturm (4.4) nos dice que  $u_k, u'_k$  tienen exactamente  $k$  ceros en  $[0, 1]$  que no coinciden. El ordenamiento se sigue del teorema de Rolle.

### Lema 6.10

$$|\rho|_0 |u_k(s)| \geq \rho_{\min} |u_k(\sigma_j)| \cdot \begin{cases} \frac{s-\xi_{j-1}}{\sigma_j-\xi_{j-1}} & \text{si } s \in [\xi_{j-1}, \sigma_j] \\ \frac{\xi_j-s}{\xi_j-\sigma_j} & \text{si } s \in [\sigma_j, \xi_j] \end{cases}$$

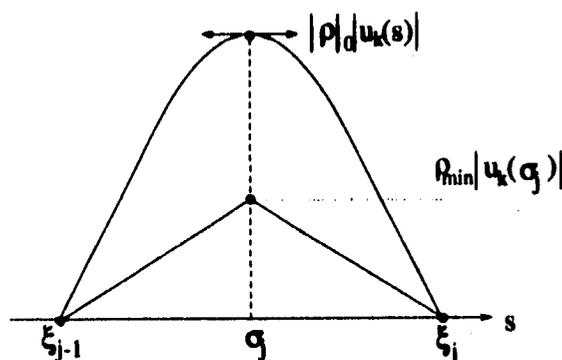


figura 6.8: el resultado del lema implica que  $|u_k(s)|$  es esencialmente cóncava en cada  $I_j = (\xi_{j-1}, \xi_j)$ .

### Prueba

Consideremos la función  $y_k$  tal que  $(y'_k/\rho)' = 0$  para todo  $s$  en  $(\xi_{j-1}, \sigma_j) \cup (\sigma_j, \xi_j)$  con  $y_k(\xi_{j-1}) = y_k(\xi_j) = 0$  y  $y_k(\sigma_j) = u_k(\sigma_j)$ . Es inmediato ver que

$$y_k(s) = u_k(\sigma_j) \cdot \begin{cases} \frac{\int_{\xi_{j-1}}^s \rho \, d\xi}{\int_{\xi_{j-1}}^{\sigma_j} \rho \, d\xi} & \text{si } s \in (\xi_{j-1}, \sigma_j) \equiv I_j^1 \\ \frac{\int_{\sigma_j}^s \rho \, d\xi}{\int_{\sigma_j}^{\xi_j} \rho \, d\xi} & \text{si } s \in (\sigma_j, \xi_j) \equiv I_j^2. \end{cases} \quad (6.47)$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad que  $u_k$  es positiva en  $I_j \equiv (\xi_{j-1}, \xi_j)$ , entonces por (3.66) y la definición de  $y_k$ , es claro que

$$\left(\frac{u'_k}{\rho}\right)' = \left(\frac{(u_k - y_k)'}{\rho}\right)' \equiv \left(\frac{\zeta'_k}{\rho}\right)' < 0 \quad \forall s \in I_j. \quad (6.48)$$

La función  $\zeta_k \equiv u_k - y_k$ , tiene 3 ceros en  $I_j$  en los puntos  $s = \xi_{j-1}, \sigma_j, \xi_j$ . El teorema de Rolle, nos garantiza la existencia de al menos un cero de  $\zeta'_k$  en cada subintervalo  $I_j^\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ . De hecho, veremos que sólo hay un cero de  $\zeta'_k$  en cada  $I_j^\alpha$ . Daremos la prueba para  $I_j^1$ , la prueba correspondiente a  $I_j^2$  es igual. Supongamos entonces que  $\zeta'_k(a) = \zeta'_k(b) = 0$  con  $a, b$  en  $I_j^1$ . La desigualdad (6.48) nos dice que  $\zeta'_k/\rho$  es estrictamente decreciente en  $I_j$  y por lo tanto, en  $I_j^1$ . Así, si  $a < b$  tendríamos que  $\zeta'_k(a)/\rho(a) > \zeta'_k(s)/\rho(s) > \zeta'_k(b)/\rho(b)$  para todo  $s$  en  $(a, b) \subset I_j^1$ , lo cual evidentemente no es posible. Además sabemos que  $\zeta_k$  tiene un sólo signo en cada uno de los subintervalos  $I_j^\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Directamente de (6.47) y recordando que hemos supuesto que  $u_k > 0$  ( $u_k(\sigma_j) > 0$  pues si fuera cero, entonces dado que  $u'_k(\sigma_j) = 0$ , entonces  $u_k \equiv 0$ , i.e. una solución trivial). Encontramos que  $\zeta'_k(\sigma_j^-) < 0$  y  $\zeta'_k(\sigma_j^+) > 0$ , por lo que  $\zeta_k \geq 0$  en  $I_j$ . En otras palabras,  $u_k(s) \geq y_k(s)$  para todo  $s$  en  $I_j$ . Usando (6.47) tenemos finalmente el resultado.

### Corolario 6.11

$$|u'_k(\xi_{j-1})| \rightarrow \infty \quad y \quad |u'_k(\xi_j)| \rightarrow \infty \quad \text{conforme} \quad |u_k(\sigma_j)| \rightarrow \infty$$

#### Nota

Geoméricamente se intuye el resultado (ver figura (6.8)), conforme  $u_k(\sigma_j) =$  valor extremo de  $u_k$  en  $I_j$  aumenta, las pendientes en  $\xi_{j-1}$  y  $\xi_j$  deben aumentar.

#### Prueba

Vimos que  $u_k(s) \geq y_k(s)$  para toda  $s$  en  $I_j$ . Así puesto que  $u_k(\xi_{j-1}) = y_k(\xi_{j-1}) = 0$  esta última relación se puede escribir como

$$u_k(s) - u_k(\xi_{j-1}) \geq y_k(s) - y_k(\xi_{j-1}), \quad (6.49)$$

dividiendo (6.49) por  $(s - \xi_{j-1}) > 0$  para todo  $s$  en  $I_j$  y tomando el límite cuando  $s \rightarrow \xi_{j-1}$  obtenemos (ver (6.47))

$$u'_k(\xi_{j-1}) \geq y'_k(\xi_{j-1}) \equiv \frac{u_k(\sigma_j)\rho(\xi_{j-1})}{\int_{\xi_{j-1}}^{\sigma_j} \rho d\xi} \geq \frac{u_k(\sigma_j)\rho_{\min}}{|\rho|_0}, \quad (6.50)$$

lo que nos da el resultado. La prueba para  $\xi_j$  es exactamente igual.

**Lema 6.12** *Supongamos que la cuerda sea débil. Si  $|u_k|_1 \rightarrow \infty$ , entonces  $|u_k(\sigma_j)| \rightarrow \infty$  para  $j = 1, \dots, k$ .*

### Nota

Este es el resultado trascendente. Nos dice que  $|u_k|_1 \rightarrow \infty$  implica que en cada subintervalo  $I_j$ ,  $u_k$  crece indefinidamente. Esto implica también que

$$|u_k|_1 \rightarrow \infty \iff |u_k|_0 \rightarrow \infty. \quad (6.51)$$

Además, puesto que  $u(s) = sy(s) \Rightarrow |u|_0 \leq |y|_0$ , por lo que  $|u_k|_0 \rightarrow \infty$  implica que  $|y|_0 \rightarrow \infty$  y, por el corolario (6.11) que  $|u'_k|_0 \rightarrow \infty$ . Puesto que  $u' = -\omega^2 \rho x$ , también tendríamos que  $|x|_0 \rightarrow \infty$ . Por otra parte, usando la desigualdad del triángulo

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{u(s)}{s} = u'(0) + \frac{1}{s} \int_0^s (u'(t) - u'(0)) dt \\ \implies |y(s)| &\leq 2|u'(0)| + |u'|_0 \leq 3|u'|_0, \end{aligned}$$

de donde se infiere que  $|u'|_0 \rightarrow \infty$  si  $|y|_0 \rightarrow \infty$ . De hecho (6.51), nos daría que  $|y|_0 \rightarrow \infty \Rightarrow |u|_0 \rightarrow \infty$ . Por lo anterior tendríamos que

$$|y|_0 \rightarrow \infty \iff |u|_0 \rightarrow \infty \iff |u'|_0 \rightarrow \infty. \quad (6.52)$$

Pasemos entonces a la prueba del lema (6.12).

### Prueba

$$u_k(s) - u_k(\xi_{j-1}) \geq y_k(s) - y_k(\xi_{j-1}), \quad (6.49)$$

dividiendo (6.49) por  $(s - \xi_{j-1}) > 0$  para todo  $s$  en  $I_j$  y tomando el límite cuando  $s \rightarrow \xi_{j-1}$  obtenemos (ver (6.47))

$$u'_k(\xi_{j-1}) \geq y'_k(\xi_{j-1}) \equiv \frac{u_k(\sigma_j)\rho(\xi_{j-1})}{\int_{\xi_{j-1}}^{\sigma_j} \rho d\xi} \geq \frac{u_k(\sigma_j)\rho_{\min}}{|\rho|_0}, \quad (6.50)$$

lo que nos da el resultado. La prueba para  $\xi_j$  es exactamente igual.

**Lema 6.12** *Supongamos que la cuerda sea débil. Si  $|u_k|_1 \rightarrow \infty$ , entonces  $|u_k(\sigma_j)| \rightarrow \infty$  para  $j = 1, \dots, k$ .*

### Nota

Este es el resultado trascendente. Nos dice que  $|u_k|_1 \rightarrow \infty$  implica que en cada subintervalo  $I_j$ ,  $u_k$  crece indefinidamente. Esto implica también que

$$|u_k|_1 \rightarrow \infty \iff |u_k|_0 \rightarrow \infty. \quad (6.51)$$

Además, puesto que  $u(s) = sy(s) \Rightarrow |u|_0 \leq |y|_0$ , por lo que  $|u_k|_0 \rightarrow \infty$  implica que  $|y|_0 \rightarrow \infty$  y, por el corolario (6.11) que  $|u'_k|_0 \rightarrow \infty$ . Puesto que  $u' = -\omega^2 \rho x$ , también tendríamos que  $|x|_0 \rightarrow \infty$ . Por otra parte, usando la desigualdad del triángulo

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{u(s)}{s} = u'(0) + \frac{1}{s} \int_0^s (u'(t) - u'(0)) dt \\ &\Rightarrow |y(s)| \leq 2|u'(0)| + |u'|_0 \leq 3|u'|_0, \end{aligned}$$

de donde se infiere que  $|u'|_0 \rightarrow \infty$  si  $|y|_0 \rightarrow \infty$ . De hecho (6.51), nos daría que  $|y|_0 \rightarrow \infty \Rightarrow |u|_0 \rightarrow \infty$ . Por lo anterior tendríamos que

$$|y|_0 \rightarrow \infty \iff |u|_0 \rightarrow \infty \iff |u'|_0 \rightarrow \infty. \quad (6.52)$$

Pasemos entonces a la prueba del lema (6.12).

### Prueba

Si  $|u_k|_1 \rightarrow \infty$  entonces existe  $j$  tal que  $|u_k(\sigma_j)| \rightarrow \infty$  o bien,  $|u'_k|_0 \rightarrow \infty$ . Esto nos permite probar el resultado, empezando por demostrar que

$$|u'_k|_0 \rightarrow \infty \implies \exists j \text{ tal que } |u_k(\sigma_j)| \rightarrow \infty. \quad (6.53)$$

Entonces, por lo que afirma el corolario (6.11) probaríamos finalmente que

$$|u'_k(\xi_{j-1})| \rightarrow \infty \implies |u_k(\sigma_{j-1})| \rightarrow \infty \text{ y } |u_k(\sigma_j)| \rightarrow \infty. \quad (6.54)$$

Ahora, para probar (6.53) y (6.54) basta escribir (2.13) sustituyendo el valor de  $x$  dado por (3.3) para ver que

$$u'_k(s) = \omega_k^2 \rho(s) \int_s^1 \frac{u_k \hat{\nu}(\sqrt{u_k^2 + \xi^2 \gamma^2}, \xi)}{\sqrt{u_k^2 + \xi^2 \gamma^2}} d\xi, \quad (6.55)$$

de donde por (6.26) y el hecho de que  $\hat{\nu}$  es función creciente de la tensión, se infiere que

$$|u'_k(s)| \leq \eta_k |\rho|_0 \int_0^1 \hat{\nu}(\sqrt{|u|_0^2 + |\gamma|_0^2}, \xi) d\xi. \quad (6.56)$$

De aquí que, si  $|u'_k|_0 \rightarrow \infty$  necesariamente  $|u|_0 \rightarrow \infty$  i.e. (6.53).

Ahora, puesto que  $u'_k(\sigma_j) \equiv 0 = \omega_k^2 \rho(\sigma_j) \int_{\sigma_j}^1 u_k \hat{\nu} / \sqrt{u_k^2 + \xi^2 \gamma^2} d\xi$ , y que  $u'_k(\sigma_{j-1}) \equiv 0 = \omega_k^2 \rho(\sigma_{j-1}) \int_{\sigma_{j-1}}^1 u_k \hat{\nu} / \sqrt{u_k^2 + \xi^2 \gamma^2} d\xi$ , usando (6.55) tenemos que

$$u'_k(s) = \omega_k^2 \rho(s) \int_s^{\sigma_j} \frac{u_k(\xi) \hat{\nu}(\sqrt{u_k^2 + \xi^2 \gamma^2}, s)}{\sqrt{u_k^2 + \xi^2 \gamma^2}} d\xi = \omega_k^2 \rho(s) \int_s^{\sigma_{j-1}} \frac{u_k(\xi) \hat{\nu}(\sqrt{u_k^2 + \xi^2 \gamma^2}, s)}{\sqrt{u_k^2 + \xi^2 \gamma^2}} d\xi. \quad (6.57)$$

A partir de (6.58) es claro que <sup>16</sup>

$$|u'_k(\xi_{j-1})| \leq \omega_k^2 \rho(\xi_{j-1}) \int_{\sigma_{j-1}}^{\xi_{j-1}} \hat{\nu}(\sqrt{u_k^2(\sigma_j) + \gamma^2(\xi)}, \xi) d\xi$$

<sup>16</sup>Una vez más usamos el hecho de que  $\hat{\nu}$  es una función creciente de  $N$  y que  $u_k$  alcanza sus valores extremos en los puntos  $\sigma_{j-1}, \sigma_j$  en el intervalo  $I_{j-1}, I_j$ , respectivamente.

$$|u'_k(\xi_{j-1})| \leq \omega_k^2 \rho(\xi_{j-1}) \int_{\xi_{j-1}}^{\sigma_j} \hat{v}(\sqrt{u_k^2(\sigma_j) + \gamma^2(\xi)}, \xi) d\xi.$$

Estas expresiones nos permiten escribir

$$|u'_k(\xi_{j-1})| \leq \eta_k |\rho|_0 A, \quad \text{respectivamente} \quad |u'_k(\xi_{j-1})| \leq \eta_k |\rho|_0 B$$

$$A = \int_0^1 \hat{v}(\sqrt{u_k^2(\sigma_{j-1}) + |\gamma|_0^2}, \xi) d\xi$$

$$B = \int_0^1 \hat{v}(\sqrt{u_k^2(\sigma_j) + |\gamma|_0^2}, \xi) d\xi.$$

El mismo argumento que siguió de (6.56) nos da el resultado (6.54). Finalmente, veremos como todos estos resultados nos permiten estimar los valores de  $u_k$  y  $u'_k$  en cada vecindad de  $\sigma_j$ , en términos de  $u_k(\sigma_j)$ .

**Lema 6.13** *Sea  $\alpha \equiv \rho_{\min}/|\rho|_0 \leq 1$ . Entonces, para toda  $s$  en  $(\eta_{j-1}, \eta_j)$ , donde  $\eta_j \equiv \xi_j - (\xi_j - \sigma_j)/2$  y  $\eta_{j-1} \equiv \xi_{j-1} + (\sigma_j - \xi_{j-1})/2$*

$$|u_k(s)| \geq \frac{|u_k(\sigma_j)|}{2} \alpha, \quad \text{y} \quad \left| \frac{u'_k(s)}{\rho(s)} \right| \leq 2 \frac{|u_k(\sigma_j)|}{\rho_{\min} M_j}$$

$$M_j = \begin{cases} \sigma_j - \xi_{j-1} & \text{si } \eta_{j-1} \leq s \leq \sigma_j \\ \xi_j - \sigma_j & \text{si } \sigma_j \leq s \leq \eta_j. \end{cases}$$

Por el lema (6.10) tenemos que

$$|\rho|_0 |u_k(s)| \geq \rho_{\min} |u_k(\sigma_j)| \text{Min}[\varphi(\eta_{j-1}), \varphi(\eta_j)]$$

donde  $\varphi(s) = (s - \xi_{j-1})/(\sigma_j - \xi_{j-1})$ ,  $(\varphi(s) = (\xi_j - s)/(\xi_j - \sigma_j))$  si  $s$  pertenece a  $(\xi_{j-1}, \sigma_j)$ , respectivamente  $(\sigma_j, \xi_j)$ . Por su definición,  $\varphi(\eta_{j-1}) = \varphi(\eta_j) = 1/2$ , lo que junto con la desigualdad anterior nos da uno de los resultados.

Para probar la desigualdad relativa a  $u'_k$ , una vez más supondremos, sin pérdida de generalidad, que  $u_k > 0$  en  $(\xi_{j-1}, \xi_j)$ . Así puesto que  $u'_k(\xi_{j-1}) > 0$  y  $u'_k(\xi_j) < 0$  (ver corolario (6.11)) y dado que  $u'_k(\sigma_j) = 0$ , tenemos que

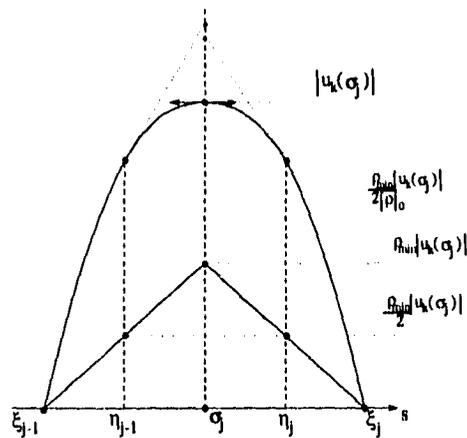


figura 6.9: Visualización de los resultados de los lemas.

$$u'_k(s) > 0 \quad \text{si } s \in (\xi_{j-1}, \sigma_j) \quad (6.58)$$

$$u'_k(s) < 0 \quad \text{si } s \in (\sigma_j, \xi_j). \quad (6.59)$$

Por otra parte, (6.48) implica que  $u'_k/\rho$  es decreciente en  $(\xi_{j-1}, \xi_j)$  por lo que

$$\frac{u'_k(s)}{\rho(s)} \leq \frac{u'_k(t)}{\rho(t)} \quad \text{para } \xi_{j-1} \leq t \leq s \leq \xi_j. \quad (6.60)$$

Tomando  $s$  en  $(\eta_{j-1}, \sigma_j)$  e integrando con respecto a  $t$  entre  $\xi_{j-1}, \eta_{j-1}$  esta desigualdad, tenemos que (en este caso  $u'_k > 0$  por (6.58))

$$\int_{\xi_{j-1}}^{\eta_{j-1}} \frac{u'_k(s)}{\rho(s)} dt \leq \int_{\xi_{j-1}}^{\eta_{j-1}} \frac{u'_k(t)}{\rho(t)} dt \leq \frac{u_k(\eta_{j-1})}{\rho_{\min}} \leq \frac{u(\sigma_j)}{\rho_{\min}}.$$

Así, recordando la definición de  $\eta_{j-1}$  tenemos

$$\frac{u'_k(s)}{\rho(s)} \leq \frac{2u_k(\sigma_j)}{(\sigma_j - \xi_{j-1})\rho_{\min}} \quad \text{para } s \in (\eta_{j-1}, \sigma_j). \quad (6.61)$$

Análogamente, si ahora tomamos  $t$  en  $(\sigma_j, \eta_j)$  e integramos (6.60) con respecto a  $s$  entre  $\eta_j$  y  $\xi_j$ , recordando la definición de  $\eta_j$  y (6.59)

$$\int_{\eta_j}^{\xi_j} \frac{u'_k(s)}{\rho(s)} ds \leq \int_{\eta_j}^{\xi_j} \frac{u'_k(t)}{\rho(t)} ds$$

$$\frac{u_k(\sigma_j)}{\rho_{\min}} \geq \frac{u_k(\eta_j)}{\rho_{\min}} \geq - \int_{\eta_j}^{\xi_j} \frac{u'_k(s)}{\rho(s)} ds \geq - \frac{u'_k(t) \xi_j - \sigma_j}{\rho(t) 2} \quad \text{para } t \in (\sigma_j, \eta_j) \quad (6.62)$$

Finalmente de las relaciones (6.61) y (6.62) es claro que  $|u'_k(s)/\rho(s)| \leq 2u_k(\sigma_j)/(\rho_{\min} M_j)$ .

Contamos ya con los elementos necesarios para concluir la prueba del teorema (6.8). En efecto, puesto que el integrando del término del lado derecho de (6.46) es positivo, podemos acotar el término  $(2k-1)\pi/(2\omega_k^3)$ , por la integral alrededor del punto  $\sigma_j$  (pues  $[\eta_{j-1}, \eta_j] \subset [0, 1]$ ), con el mismo integrando.

$$\frac{(2k-1)\pi}{\omega_k^3} \geq \int_{\eta_{j-1}}^{\sigma_j} + \int_{\sigma_j}^{\eta_j},$$

donde cada integral tiene por integrando a

$$\frac{u_k^2(\xi) \dot{\nu}(\sqrt{u_k^2(\xi) + \xi^2 \gamma^2(\xi)}, s)}{\left[ \eta_k u_k^2(\xi) + \left( \frac{u'_k(\xi)}{\rho(\xi)} \right)^2 \right] \sqrt{u_k^2(\xi) + \xi^2 \gamma^2(\xi)}}$$

Ahora, como  $u_k$  tiene exactamente  $k$  ceros aislados en  $[0, 1]$ , existe  $j$  tal que (donde  $k \geq 1$ )

$$|\xi_j - \xi_{j-1}| \geq \frac{1}{k}$$

$$\text{o } |1 - \xi_{k-1}| \geq \frac{1}{k}$$

pues de lo contrario  $1 = \sum_{j=1}^{k-1} (\xi_j - \xi_{j-1}) + 1 - \xi_{k-1} < 1$  lo cual es absurdo.

Para esa  $j$ , tendremos además que alguno de los términos  $(\sigma_j - \eta_{j-1})$ ,  $(\eta_j - \sigma_j)$  es mayor o igual a  $(2k)^{-1}$  con  $k \geq 1$ . Sin pérdida de generalidad, supondremos que  $(\sigma_j - \eta_{j-1}) \geq (2k)^{-1}$ . Entonces, por el lema (6.13), es claro que  $|u'_k(s)/\rho(s)| \leq 4k |u_k(\sigma_j)|/\rho_{\min}$ , por lo que estimando adecuadamente el integrando de (6.46) (también usamos el resultado  $|u_k(s)| \geq \alpha |u_k(\sigma_j)|/2$ , ver lema (6.13))

<sup>17</sup>Ver lema (6.9)

$$\begin{aligned} \frac{(2k-1)\pi}{\omega_k^3} &\geq \int_{\eta_{j-1}}^{\sigma_j} \frac{\hat{\nu}(u_k(\sigma_j)\frac{\alpha}{2}, \xi)}{u_k(\sigma_j)\frac{\alpha}{2}} \frac{u_k(\sigma_j)\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{u_k^2(\sigma_j) + |\gamma|_0^2 u_k^2(\sigma_j) \left[\eta_k + \frac{16k^2}{\rho_{\min}^2}\right]}} \frac{\alpha^2 u_k^2(\sigma_j)/4}{d\xi} \\ &\geq \text{Min}_\xi \left( \frac{\hat{\nu}(u_k(\sigma_j)\frac{\alpha}{2}, \xi)}{\frac{\alpha}{2} u_k(\sigma_j)} \right) \frac{\alpha^3}{16 \left[\eta_k + \frac{16k^2}{\rho_{\min}^2}\right]}, \end{aligned} \quad (6.63)$$

si  $u_k(\sigma_j)$  es tal que  $|\gamma|_0^2 \leq 3u_k^2(\sigma_j)$ . Por lo tanto, si  $\hat{\nu}(N, s)/N \rightarrow \infty$ <sup>18</sup> cuando  $N \rightarrow \infty$ , (6.63) nos dice que:<sup>19</sup>

$$\omega_k^2 \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad |u_k|_1 \rightarrow \infty,$$

ya que todos los valores extremos de la solución  $u_k$  tienden a  $\infty$ . Si  $(\eta_j - \sigma_j) > (2k)^{-1}$ , es claro que el mismo argumento funciona.

Notemos que para el caso  $k = 1$ , entonces  $\sigma_1 = 1$ ,  $\eta_0 = 1/2$  y se aplica la estimación en el subintervalo  $[1/2, 1]$ .

## 6.4 Comportamiento global de las ramas

Recordemos que nuestro problema se puede plantear en la forma dada por (3.32), (3.33). Usando los mismos argumentos que para la linealización en  $w = 0$ , es fácil ver que  $\tilde{\mathbf{F}}[(w, y)]$  es un mapeo Fréchet diferenciable y compacto de  $C^0 \times C^0$  en el mismo. Definiendo la función  $\sqrt{s}\tilde{h} \equiv h$ , es decir

$$\tilde{h}(w) \equiv \frac{\hat{\nu}(N(w, \xi))}{N(w, \xi)} \quad (6.64)$$

$$N(w, \xi) = (\xi w^2 + \xi^2 \gamma^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (6.65)$$

entonces la derivada de Fréchet es

$$D\tilde{\mathbf{F}}[(w_0, y_0)](w, y) = \left( \begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{s}} \int_0^s \rho(\xi) y(\xi) d\xi \\ \int_s^1 \left( \tilde{h}(w_0) \sqrt{\xi} w + \xi^{\frac{3}{2}} \frac{w^2}{N^3} (N \hat{\nu}_N - \hat{\nu}) w \right) d\xi \end{array} \right), \quad (6.66)$$

<sup>18</sup>i.e. si la cuerda es débil.

<sup>19</sup>Ver lema (6.12).

como se determinó en el capítulo tres (ver . (3.23) y (3.24)). Notemos que la segunda componente se escribe

$$\int_s^1 \left( (\sqrt{\xi} w_0)^2 \sqrt{\xi} w \frac{\hat{v}_N}{N} + \xi^2 \gamma^2 \hat{v} \frac{\sqrt{\xi} w}{N^3} \right) d\xi$$

Si incluimos la dependencia en  $\omega$ , entonces el mapeo

$$(w, y) + \omega \tilde{\mathbf{F}}[(w, y)] \text{ tiene como diferencial de Fréchet en } (w_0, y_0, \omega_0) \text{ a (6.67)}$$

$$(\mathbf{I} + \omega_0 D\tilde{\mathbf{F}}[(w_0, y_0)])(w, y) + \lambda \tilde{\mathbf{F}}[(w_0, y_0)] \text{ en la dirección } (w, y, \lambda). \text{ (6.68)}$$

Notemos que si  $(w_0, y_0) + \omega_0 \tilde{\mathbf{F}}[(w_0, y_0)] = 0$ , entonces el segundo término se puede sustituir por  $-(\lambda/\omega_0)(w_0, y_0)$ . Ahora bien, si  $\mathbf{I} + \omega_0 D\tilde{\mathbf{F}}[(w_0, y_0)]$  es invertible, entonces podemos usar el teorema de la función implícita y probar que la solución de  $(w, y) + \omega \tilde{\mathbf{F}}[(w, y)] = 0$ , cerca de  $(w_0, y_0, \omega_0)$  es única y es una curva  $(w, y)$  en función de  $\omega$ , que será  $C^1$  y tal que

$$(w'(\omega_0), y'(\omega_0)) = \frac{1}{\omega_0} (\mathbf{I} + \omega_0 D\tilde{\mathbf{F}}[(w_0, y_0)])^{-1} (w_0, y_0). \quad (6.69)$$

Notemos que si ese operador es invertible para todo  $(w_0, y_0, \omega_0)$  en  $S_k$ , entonces se tiene una curva parametrizada globalmente por  $\lambda$ , y por lo tanto sin retornos. En particular  $S_k$  siempre deberá encontrarse a la derecha, o bien a la izquierda del punto de bifurcación. Así, de contar con una cota inferior para el valor del parámetro  $\omega$  que tienda a infinito conforme  $|u|_1$  diverge a infinito, entonces  $S_k$  estaría obligada a bifurcar hacia la derecha, y para cada valor de  $\lambda$  entre  $\lambda_k$  y  $\lambda_{k+1}$ <sup>20</sup> hay exactamente  $k$  soluciones no triviales caracterizadas por su estructura nodal.

Ahora, exactamente como se probó para  $w_0 = y_0 = 0$ , el operador  $D\tilde{\mathbf{F}}[(w_0, y_0)]$  es un operador compacto, con valores propios simples y sus funciones propias están caracterizadas por su estructura nodal (en todos los argumentos que hemos desarrollado a lo largo de este trabajo, es suficiente cambiar  $s^2 \gamma^2$  por  $u_0^2 + s^2 \gamma^2$ ). Como vimos, a estos valores propios, les corresponden unas funciones propias que satisfacen la ecuación diferencial

$$\left(\frac{v'}{\rho}\right)' + \omega^2 \left( s^2 \gamma^2 \frac{\hat{v}(N_0)}{N_0^3} + u_0^2 \frac{\hat{v}_N(N_0)}{N_0^2} \right) v = 0, \quad (6.70)$$

<sup>20</sup>Donde  $\lambda_j$  son precisamente los valores propios de la linealización, a partir de los cuales bifurcan las ramas de soluciones no triviales.

donde  $v = \sqrt{s}w$ , satisface las condiciones de frontera,  $v(0) = v'(1) = 0$ ,  $N_0 = (u_0^2 + s^2\gamma^2)^{\frac{1}{2}}$  y  $u_0 = \sqrt{s}w_0$  denota la solución correspondiente a

$$\left(\frac{u_0'}{\rho}\right)' + \omega_0^2 \frac{\hat{v}(N_0)}{N_0} u_0 = 0, \quad (6.71)$$

con las mismas condiciones de frontera. Entonces, si queremos probar que el operador  $\mathbf{I} + \omega D\tilde{\mathbf{F}}[(w_0, y_0)]$  en una vecindad del punto  $w = w_0$ , necesitamos probar que la única solución del problema (6.70) correspondiente al valor  $\omega = \omega_0$  del parámetro es la trivial, i.e.  $v \equiv 0$ . Para esto, usaremos una vez más los métodos de comparación:

Si queremos

$$\xi^2 \gamma^2 \frac{\hat{v}}{N_0^3} + u_0^2 \frac{\hat{v}_N}{N_0} \leq \frac{\hat{v}}{N_0}, \quad (6.72)$$

o equivalentemente, que  $\hat{v}_N \leq \hat{v}/N_0$  para todo  $u_0$ , esto quiere decir (integrando de 0 a  $N$ ) que  $\hat{v}(N) \leq kN + c$ , es decir la cuerda debe ser fuerte en tensión.

Nótese que multiplicando la primera ecuación (6.70) por  $u_0$ , la segunda (6.71) por  $v$ , restándolas e integrando de  $a$  a  $b$ , tenemos que

$$\int_a^b \left(\frac{v'}{\rho}\right)' u_0 - \left(\frac{u_0'}{\rho}\right)' v ds = \frac{v'}{\rho} u_0 - v \frac{u_0'}{\rho} \Big|_a^b = \int_a^b \omega^2 \frac{u_0}{N^2} \left(\frac{\hat{v}}{N} - \hat{v}_N\right) u_0 v ds. \quad (6.73)$$

Por lo tanto, si  $a$  y  $b$  son dos ceros consecutivos de  $v$ , y suponemos, que  $u_0 v \geq 0$  en  $[a, b]$ , si  $u_0$  es positivo en  $[a, b]$ , como  $v'(b) < 0$  y  $v'(a) > 0$ , tendríamos una contradicción: este es el teorema de comparación.

Entre dos ceros consecutivos de  $v$ , hay un cero de  $u_0$ . Por lo tanto  $v$  (si no es idénticamente 0), tiene a lo más  $k$  ceros, cuando  $u_0$  tiene  $k$  ceros). Si ahora uno fija el valor de  $b = 1$ , y el valor complementario  $a$  al último cero de  $v$  y suponiendo que  $v \geq 0$  en  $[a, 1]$ , entonces si además  $u_0 > 0$  en  $[a, 1]$ , dado que  $v'(a) > 0$ , llegamos otra vez a una contradicción: Por lo tanto  $v$  tiene a lo más  $k - 1$  ceros (incluyendo el cero en el origen  $s = 0$ ).

Para probar que tenemos invertibilidad, es decir, que la única solución de (6.68) corresponde a la solución trivial  $v \equiv 0$ , basta probar que la situación anterior no puede suceder.

**Teorema 6.14** Si  $\rho$  es constante (cuerda uniforme, u homogénea) y  $\hat{v} \equiv 1$  (cuerda inextensible), entonces las ramas  $S_k$  son parametrizadas por  $\lambda > \lambda_k$  y  $S_k(\omega)$  es una curva  $C^1$  en  $\omega$ , para la cual  $|u|_1 \rightarrow \infty$  cuando  $\omega \rightarrow \infty$ .

### Prueba

De los casos de cuerdas muy fuertes en tensión y de la discusión anterior, basta probar que  $v \equiv 0$ , es decir llegar a la contradicción basando nuestro argumento sobre el número de ceros (i.e. la estructura nodal). Supongamos entonces que  $v$  no es una solución trivial. Sean  $\alpha_0 = 0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$  sus ceros. Sean  $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_n < \dots$  los ceros de  $u_0$ ,  $0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n < \dots$  los ceros de  $v'$  y finalmente denotemos por  $0 < z_1 < z_2 < \dots < z_n < \dots$  a los ceros de  $u'_0$ .

**Lema 6.15** Si  $v \neq 0$  entonces  $0 = y_0 = \alpha_0 < z_1 < \beta_1 < y_1 < \dots < y_n < \alpha_n < z_{n+1} < \beta_{n+1} < \dots$

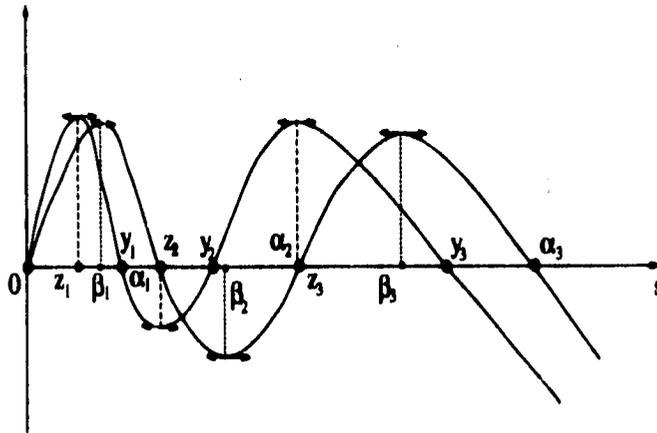


figura 6.10: Representación de la estructura nodal que determina el resultado.

A partir del lema es fácil ver que si pedimos que  $u'_0(1) = 0$ , es decir que  $z_k = 1$ , para  $u_0$  en  $S_k$ , entonces en el intervalo  $[0, 1]$ ,  $v$  tiene exactamente  $k$  ceros, en tanto que  $v'$  sólo tiene  $k - 1$  ceros, lo cual da la contradicción deseada.

### Prueba

Para simplificar los cálculos, podemos sin pérdida de generalidad, suponer que  $\gamma_0 = 1$  y  $\omega = 1$ . Sabemos que  $u_0$  es solución de (6.71)

$$u_0'' + \frac{u_0}{N} = 0 \quad \text{con} \quad u_0(0) = 0, \quad u'(1) = 1. \quad (6.74)$$

Podemos suponer que  $u'_0(0) > 0$ . Por otra parte la función  $v$  satisfice,

$$v'' + \frac{s^2}{N^3}v = 0 \quad \text{con} \quad v(0) = 0, \quad v'(1) = 1, \quad (6.75)$$

también podemos suponer que  $v'(0) > 0$ . Ahora  $u'_0$  es solución de la ecuación,

$$(u'_0)'' + \frac{s^2}{N^3}u'_0 - \frac{s}{N^3}u_0 = 0. \quad (6.76)$$

Sea  $w = (s + \alpha_n)u'_0 - 2u_0$ , entonces, con  $w'' = (s + \alpha_n)u''_0$

$$w'' + \frac{s^2}{N^3}w + s(s - \alpha_n)\frac{u_0}{N^3} = 0. \quad (6.77)$$

como se puede verificar directamente. Ahora multiplicando (6.74) por  $v$ , (6.75) por  $u_0$ , restando e integrando de  $\alpha$  a  $\beta$ , tenemos:

$$vu'_0 - v'u_0 \Big|_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} vu_0 \frac{u_0^2}{N^3} ds = 0. \quad (6.78)$$

Haciendo lo mismo con las expresiones (6.76) y (6.75); (6.77) y (6.75) encontramos

$$vu''_0 - v'u''_0 \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} vu_0 \frac{u_0^2}{N^3} ds = 0 \quad (6.79)$$

$$vw' - v'w \Big|_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{vu_0}{N^3} s(s - \alpha_n) ds = 0. \quad (6.80)$$

Tomando  $(\alpha, \beta)$  como uno cualquiera de los intervalos de la forma  $(\alpha_n, z_{n+1})$  en (6.78), uno de la forma  $(y_n, z_{n+1})$  en (6.79), y finalmente un último de la forma  $(y_n, y_{n+1})$  en (6.80) se obtiene

$$v'(z_{n+1})u_0(z_{n+1}) = v'(\alpha_n)u_0(\alpha_n) + \int_{\alpha_n}^{z_{n+1}} vu_0 \frac{u_0^2}{N^3} ds \quad (6.81)$$

$$v(z_{n+1})u''_0(z_{n+1}) + v'(y_n)u'_0(y_n) - \int_{y_n}^{z_{n+1}} vu_0 \frac{s^2}{N^3} ds = 0 \quad (6.82)$$

$$(v(y_{n+1}) + (y_{n+1} + \alpha_n)v'(y_{n+1})u'_0(y_{n+1})) = \int_{y_n}^{y_{n+1}} s(s - \alpha_n) \frac{vu_0}{N^3} ds + (v(y_n) + (y_n + \alpha_n)v'(y_n)) u'_0(y_n) \quad (6.83)$$

Notando por las ecuaciones, que  $u_0''(0)$ ,  $w'(y_n) = -u_0'(y_n)$ . Notemos también que, debido a que  $v'(0)$ ,  $u_0'(0) > 0$  entonces

$$\begin{aligned} \text{signo de } u_0 &= (-1)^n \text{ si } y_n < s < y_{n+1}, & \text{signo de } u_0' &= (-1)^n \text{ si } z_n < s < z_{n+1} \\ \text{signo de } v &= (-1)^n \text{ si } \alpha_n < s < \alpha_{n+1}, & \text{signo de } v' &= (-1)^n \text{ si } \beta_n < s < \beta_{n+1} \end{aligned} \quad (6.84)$$

Para probar el lema, se usa inducción, así, si suponemos que es válido para un entero  $m$  cualesquiera, y que

$$(v(y_n) + (y_n + \alpha_n)v'(y_n))u_0'(y_n) > 0 \text{ si } n \leq m. \quad (6.85)$$

Para  $m = 1$ , el primer cero de  $u_0$ ,  $\alpha_1$ , debe encontrarse antes del primer cero de  $v$ :

$$y_1 < \alpha_1 \text{ y } vu_0 \geq 0 \text{ en } 0 \leq x \leq y_1. \quad (6.86)$$

Por (6.81) con  $n = 0$ , vemos  $v'(z_1)u_0(z_1) > 0$ . Por (6.83) con  $n = 0$ ,  $(v(y_1) + y_1v'(y_1))u_0'(y_1) > 0$ , entonces  $y_1v'(y_1)u_0'(y_1) > -v(y_1)u_0'(y_1) > 0$ , ya que  $v(y_1) > 0$  y  $u_0'(y_1) < 0$ . Por lo tanto,  $v'(y_1) < 0$ , es decir  $\beta_1 < y_1$ . De la misma forma  $(v(y_1) + (y_1 + \alpha_1)v'(y_1))u_0'(y_1) > 0$ , completando el paso de inducción para  $m = 1$ .

De seguir siendo cierta para un entero  $m$  cualesquiera, por la separación de los ceros sabemos que  $\alpha_m > y_m$ , por lo tanto se sigue de las hipótesis de inducción que  $v(y_m) = (-1)^{m-1}$  y  $v(y_m)u_0'(y_m) < 0$ . las mismas relaciones y la hipótesis nos dictan que  $(y_m + \alpha_m)v'(y_m)u_0'(y_m) > -v(y_m)u_0'(y_m) > 0$ . Por otro lado  $v'(y_m)u_0'(y_m) > 0$ . Para probar que  $y_m < \alpha_m < z_{m+1}$ , razonaremos por contradicción. Si  $v \neq 0$  en  $(y_m, z_{m+1})$ , entonces el signo de  $v$  es el signo en  $y_m$ , es decir  $(-1)^{m-1}$ . Por lo tanto  $vu_0 < 0$  en ese intervalo y  $v(z_{m+1})u_0''(z_{m+1}) > 0$ . Usando esa información en (6.82) se llega a un absurdo.

Dado que  $\alpha_m < \beta_{m+1}$ , el signo de  $v'(\alpha_m)$  es  $(-1)^m$  y  $v'(\alpha_m)u_0(\alpha_m) > 0$ . Por el arreglo que mantienen los ceros  $z_{m+1} < y_{m+1} < \alpha_{m+1}$ . Por lo tanto, el signo  $v = (-1)^m$ , en el intervalo  $(\alpha_m, z_{m+1})$  y  $vu_0 > 0$ . Usando esta información en (6.81), se tiene  $v'(z_{m+1})u_0(z_{m+1}) > 0$  y, como el signo de  $u_0(z_{m+1}) = (-1)^m$ , entonces el signo de  $v'(z_{m+1}) = (-1)^m = \text{signo de } v'(\alpha_m)$ . Así,  $z_{m+1} < \beta_{m+1}$ .

Dado que  $y_m < \alpha_m < y_{m+1} < \alpha_{m+1}$ , el signo de  $v(s - \alpha_m) = (-1)^m \geq 0$  en el intervalo  $(y_m, y_{m+1})$ . Usando esto y la hipótesis de inducción en (6.83) se tiene que  $(v(y_{m+1}) + (y_{m+1} + \alpha_{m+1})v'(y_{m+1}))u_0'(y_{m+1}) > 0$ . Pero  $v(y_{m+1})$  tiene el signo de  $(-1)^m$ , por lo tanto  $v(y_{m+1})v'(y_{m+1}) < 0$ , por lo cual  $v'(y_{m+1})u_0'(y_{m+1}) > 0$ , es decir el signo de  $v'(y_{m+1}) = (-1)^{m+1} = -\text{signo de } v'(z_{m+1})$ . Esto implica que  $\beta_{m+1} < y_{m+1}$ .

Finalmente, por todo lo anterior  $(\alpha_{m+1} - \alpha_m)v'(y_{m+1})u'_0(y_{m+1}) > 0$ , por lo que  $(v(y_{m+1}) + (y_{m+1} + \alpha_{m+1})v'(y_{m+1}))u'_0(y_{m+1}) > 0$ , lo que al concluir la inducción, termina la prueba del teorema (6.14).

Finalmente, por todo lo anterior  $(\alpha_{m+1} - \alpha_m)v'(y_{m+1})u'_0(y_{m+1}) > 0$ , por lo que  $(v(y_{m+1}) + (y_{m+1} + \alpha_{m+1})v'(y_{m+1}))u'_0(y_{m+1}) > 0$ , lo que al concluir la inducción, termina la prueba del teorema (6.14).

## Conclusiones

Este trabajo muestra que incluso para el modelo más simple que uno podría pensar en cuanto a la dependencia de la constricción constitutiva, i.e. la constricción elástica, uno puede encontrar comportamientos radicalmente alejados de los correspondientes a cuerdas inextensibles. En nuestro análisis vimos que el problema singular (sin peso en el extremo libre), se puede atacar mediante un estudio riguroso de la convergencia de problemas penalizados regulares (i.e. en los cuales se encuentran suspendidos pesos  $\mu_n$  cada vez más pequeños). Sin embargo, un par de intentos con un hilo, nos sugieren comportamientos alejados para los problemas correspondientes a los casos de tener un extremo libre y el correspondiente a colgar un peso en el mismo. Pero no hay que olvidar, por un lado que nuestro modelo es una primera aproximación (caso unidimensional) para la descripción de los estados estacionarios de una cuerda que gira alrededor del eje vertical, y por el otro, algo sumamente importante: la condición  $u'(1) = 0$ . En efecto, esta última nos dice desde un punto de vista físico, que en el extremo libre de la cuerda, ésta permanece vertical, haya o no un peso suspendido. Así, vemos que uno podría haber anticipado la efectividad de los métodos empleados para las dos resoluciones: directa (problema singular) e indirecta (problemas penalizados regulares). Sin embargo, pienso que no hay mucho más que decir para estos problemas: uno podría jugar con relaciones funcionales más complicadas para la respuesta material, buscando descubrir otras características de las soluciones. Sin embargo, esto nos alejaría del problema físico concreto que se pretendía describir.

De mayor interés sería, imponer otro tipo de condiciones de frontera o constricciones que sí tengan un significado físico concreto, como por ejemplo estudiar estados estacionarios de una cuerda elástica cuyos extremos permanezcan fijos al eje de rotación. Este problema fue estudiado por Reeken para el caso inextensible. Antman, muestra que el problema se puede escribir en una formulación similar a la correspondiente al análisis de Kolodner. Para este problema cambia ligeramente la forma de la tensión  $N$ , lo que da origen a una posible singularidad en el interior del dominio de las soluciones.

En el caso regular, considerando una fuerza tensil ( $N > 0$ ) uno puede mostrar por un lado que el estudio de la solución trivial se reduce al problema particular de la catenaria, donde uno de los extremos se encuentra por encima del otro. Las condiciones de regularidad, muestran que existen tres casos: un estado vertical (que siempre es posible), un estado con un sólo doblez en el punto más bajo que alcanza la cuerda y un correspondiente estado a un sólo doblez en su punto más alto. También se puede ver que dada una distancia de separación de los extremos fijos, existe una única solución correspondiente

al caso  $N > 0$ . Estas configuraciones, corresponden a las únicas ramas triviales a partir de las cuales puede haber bifurcación. El problema más complicado, en el cual  $N = 0$  en  $b \in (0, 1)$ , i.e. problema con una singularidad interior al dominio, conviene considerar a  $b$  como un parámetro libre ya que físicamente el hecho de que  $N(b) = 0 = u(b)$  nos dice que el problema de Reeken no es más que dos problemas de Kolodner de uno y otro lado de la singularidad. También es claro que los métodos variacionales, concretamente cuando el funcional tiene una singularidad no localizada, se pueden utilizar asumiendo la singularidad como un nuevo parámetro. Para más detalles recomendamos al lector el texto de [Ize 87]. En esta formulación, se encuentra que el extremo debe satisfacer condiciones de regularidad (condiciones naturales de Weierstrass). Para obtener las soluciones no triviales, se construyen las familias de superficies no triviales para los dos problemas de Kolodner con  $\omega^2$  y  $b$  como parámetros. Estas se intersectan en un número numerable de continuos que son curvas en el espacio  $(\omega^2, b, w)$ . Es notable, dice Antman, que los valores propios para los cuales hay bifurcación tienen todos ellos multiplicidad igual a 2.

Otro problema cercano, sería considerar un extremo fijo mientras que el otro permanezca constreñido al eje vertical. Por ejemplo, sujetando este último a un anillo de peso  $\mu$  cuyo centro se encuentra en el eje vertical y pueda deslizarse a lo largo de éste sin fricción. No es difícil llegar a resultados prácticamente idénticos para los establecidos para el problema de Kolodner usando herramientas muy similares.

Finalmente, Stuart estudió un problema similar en el cual ambos extremos yacen fijos en el eje vertical de rotación con el valor de la tensión fijo en el extremo inferior pero sin especificar la longitud. Estas condiciones de frontera aparentemente artificiales se utilizan para un modelo primitivo que describe el proceso mediante el cual se elaboran las cuerdas en la industria. En este caso, la constricción mantiene acotado el valor de la tensión  $N$ , por lo que se puede probar para este caso particular, que cada rama es acotada por arriba y por abajo sin importar la forma funcional de la relación constitutiva. Cabe mencionar que el trabajo de Stuart (que en realidad estudió el problema correspondiente al caso inextensible) representó una de las primeras aplicaciones de los resultados de la teoría de bifurcación global de Rabinowitz.

# Bibliografía

- [Abr] Abramowitz-Stegun, R.A. **Handbook of Mathematical Functions**. Washington Nat. Bureau of Standards.1964.
- [Adm] Adams, R.A. **Sobolev Spaces**. Academic Press, 1975.
- [Ant1] Stuart S.Antman. **Nonlinear Problems of Elasticity**. Applied Mathematical Sciences 107, Springer-Verlag, 1995.
- [Ant2] Stuart S.Antman. **Nonlinear eigenvalue problems for the whirling of heavy elastic strings**. Proceedings of the royal Society of Edinburgh, 85A, 59-85, 1980.
- [Br] Brezis. **Analyse Fonctionnelle Théorie et applications**. Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise sous la direction de Ciarlet et Lions, Masson 1983.
- [C-G-S] Carr, Gurtin, Slemrod(1984).**Structured phase transitions on a finite interval** Arch.Rational Mech. Anal 86 317-351 (II-2, VIII.8, XII-10).
- [C-L] Coddington-Levinson. **Theory of Ordinary Differential Equations**. Mcgraw-Hill Book Company, INC, 1955.
- [C-H] Courant-Hilbert. **Methods of Mathematical Physics, vol I**. Wiley Classis Library, 1989.
- [C-J] Courant- John. **Introduction to Calculus and Analysis, Vol. II**. Springer-Verlag, 1989.
- [C-R 71] Crandall, Rabinowitz. **Bifurcation from simple eigenvalues**. J. Functional Analysis 8 (1971), 321-340.
- [Gold] Goldstein. **Classical Mechanics**. Addison Wesley series in Physics, second edition.
- [H-S] Hagan-Slemrod(1983). **The viscosity-capillarity admissibility criterion for shocks and phase transitions** Arch.Rational Mech. Anal 83, 333-361 (II-2, XII.10,XVI-5).

- [Ize76] Ize. **Bifurcation Theory for Fredholm Operators**. Memoirs of the American Mathematical Society, Number 174, 1976.
- [Ize 87] Ize. **Cálculo de Variaciones**. CINVESTAV, IPN, 1987.
- [Ize93] Ize. **Topological Bifurcation**. Reportes de Investigación IIMAS, vol 3, 34 nov 1993.
- [Kato] Kato. **Perturbation theory for linear operators**. Springer Verlag, second edition.
- [Ko] Kolodner. **Heavy Rotating String- A Nonlinear Eigenvalue Problem**. Communications on pure and applied mathematics, vol.8,395-408 (1955).
- [N74] Nirenberg. **Topics in Nonlinear Functional Analysis**. Lecture Notes, Courant Inst., New York Univ.(V.4, V.8, XIX.3)
- [R-71a] Rabinowitz. **Some global results for nonlinear eigenvalue problems**. J. Functional Analysis 7 (1971), 487-513.
- [R-71b] Rabinowitz. **A global theorem for nonlinear eigenvalue problems and applications**, in contributions to Nonlinear Functional analysis. J. Functional Analysis, E.H. Zarantonello, ed.,Academic Press, 11-36. (V.4)
- [R-73a] Rabinowitz. **Some aspects of nonlinear eigenvalue problems**. Rocky Mountain J. Math. 3, 161-202. (V.3, V.4, V.8. VI.2)
- [R-75] Rabinowitz. **Théorie du degré topologique et applications à des problèmes aux limites non linéaires**. Lecture notes, Univ. Paris VI. (V.4, V.8, XIX.3)
- [Rek] Rektorys. **Variational methods in mathematics, science and engineering**. D. Reidel Publishing Company, 1977.
- [Roy] Royden. **Real analysis** Macmillan third edition.
- [Wat] Watson. **A Treatise on the Theory of Bessel Functions**. Cambridge at the university press, 1966.