28
2Ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

REPLICACION OPTIMA DE CARTERAS DE INVERSION

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I A

P R E S E N T A :

MARIA VERONICA MIYOKO FUJIYOSHI TAMAE

DIRECTOR DE TESIS: DR GILBERTO CALVILLO VIVES

UNIVERSIDAD NACIONAL
AVPNºMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

REPLICACION OPTIMA DE CARTERAS DE INVERSION

realizado por MARIA VERONICA MIYOKO FUJIYOSHI TAMAE

con número de cuenta 8637494-9 **, pasante de la carrera de** ACTUARIA

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	DR. GILBERTO CALVILLO VIVES	
Propietario	M. EN C. BEATRIZ RODRIGUEZ FERNANDEZ	
Propietario	M. EN C. AGUSTIN CANO GARCES	
Suplente	M. EN C. CARMEN HERNANDEZ AYUSO	Ma. del Carmen Hdez Ayuso
Suplente	M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE	Virginia Abrín Batule

Claudia Carrillo Q.
Consejo Departamental de Matemáticas
ACT. CLAUDIA CARRILLO QUIROZ

Dedicatorias

A mis padres, a Takeo y Tía Lola

Por estar siempre conmigo, compartiendo todas mis alegrías, tristezas y logros, y brindándome todo su apoyo, amor y paciencia en cada momento de mi vida.

A mis tíos y primos

Por tener siempre, su cariño, alegría y apoyo incondicional en mi vida.

A mis amigos

Por compartir conmigo tantos momentos de alegría y ayudarme a alcanzar esta meta, muy en especial a Mónica, Rocio y Arturo.

A todos mis profesores y compañeros

Por todo lo que me han enseñado y me permite seguir creciendo.

A la memoria de mis abuelos y tíos

Que sé que comparten conmigo esta alegría.

Y especialmente *al Dr. Gilberto Calvillo*

Por su tiempo y paciencia para dirigir esta tesis.

Indice

Introducción

En la teoría moderna de inversión financiera, el concepto de cobertura de riesgo juega un papel preponderante. La intermediación financiera consiste en captar el dinero del público inversionista y prestarlo o invertirlo en algún tipo de instrumento financiero.

El negocio consiste en asumir cierto riesgo y obtener una ganancia del diferencial entre la tasa a la cual se captan los recursos y la tasa a la que se prestan los mismos. Desde luego el mejor negocio es aquel en el que no hay riesgo y se puede conservar dicho diferencial de tasas. Es de esperarse que en un mercado de competencia perfecta, tal probabilidad sea muy remota, por lo que en general se pretende construir carteras de activos que repliquen las de los pasivos con cierta aproximación para disminuir el riesgo y obtener así, la máxima ganancia posible. Este es precisamente el problema tratado en el artículo "Optimal Replication" del Dr. Ron Dembo, en el cual se basa esta tesis. El enfoque del Dr. Dembo es diferente de otros enfoques tales como la teoría de opciones basada en los modelos propuestos por Black y Scholes. A decir del Dr. Dembo su enfoque puede ser más práctico en ciertas circunstancias, debido a que sus supuestos son menos restrictivos que los clásicos de Black y Scholes.

En el primer capítulo se presentan los conceptos básicos, tales como cartera de inversión, incertidumbre, riesgo, etc. Se comenta sobre diferentes tipos de riesgos y se ve la importancia de modelos matemáticos como auxiliares en el diseño de carteras de inversión para los intermediarios financieros.

En el segundo capítulo se desarrolla el modelo general para replicar carteras de inversión, definiendo las variables, las funciones que sirven como objetivo para encontrar la cartera de inversión de replicación óptima y la restricción que permite garantizar alguna utilidad. También se introducen los conceptos de mercado completo y arbitraje. Asi mismo, se dan algunos ejemplos de mercados con y sin arbitraje, cömpletos e incompletos.

En el tercer capítulo se definen los vectores de ponderadores de mercado y los vectores de ponderadores "meta". Después se desarrolla el modelo de replicación de carteras de inversión, utilizando la norma $\mathcal{L}_1$, viendo los resultados que se pueden obtener por medio de los problemas Primal\Dual tales como la obtención de vectores de ponderadores y su relación con el arbitraje. A continuación se utiliza este modelo para ver si los valores están cotizados por debajo, por arriba o equitativamente. Y finalmente, se demuestra el teorema principal de esta teoría.

En el cuarto capítulo se analiza el caso de un mercado completo y sin arbitraje. Utilizando el resultado del teorema del capítulo anterior, se obtiene un método para encontrar vectores de probabilidades de mercado con riesgo neutral y una tasa libre de riesgo.

La tesis cuenta con tres apéndices. El primero es un glosario con los términos utilizados en la tesis. En el segundo, se desarrolla brevemente el modelo de Markowitz para la selección de una cartera de inversión. Y en el tercero se hace una demostración que no se incluyó en el capítulo 2 para no perder la secuencia del modelo expuesto en dicho capítulo.

Capítulo 1
Conceptos básicos

En este capítulo se plantean dos enfoques diferentes acerca de la inversión financiera. Uno de ellos conduce a modelos matemáticos de selección óptima de carteras de inversión, mientras que el otro resulta en modelos de replicación de carteras de inversión. En ambos casos la incertidumbre juega un papel central.

La *incertidumbre* implica el *riesgo* en una inversión. Si no existiera el riesgo ni la incertidumbre, el problema de encontrar carteras óptimas estaría resuelto.

La incertidumbre tiene dos facetas: En primer lugar, las apreciaciones subjetivas, es decir juicios y valoraciones que dependen de gustos, experiencias, estilo, intuición, etc., pero que en el fondo es imposible apoyar racionalmente con lógica rigurosa en todos sus aspectos. En segundo lugar, el medio o ámbito dentro del cual se realiza la elección, debido a que en él operan gran cantidad de factores fuera del control del sujeto que hace la elección. Así, el inversionista está expuesto a incertidumbre en cuanto a los precios de los distintos activos en los mercados, a las disposiciones gubernamentales en cuanto a requisitos legales y fiscales, a sus necesidades de liquidez, ya que es imposible predecir con exactitud, nuevas oportunidades de inversión más redituables que las existentes, o simplemente la ocurrencia de una desgracia como una enfermedad, que le obligue a hacer un gasto no previsto.

En problemas con carteras de inversión existen varios tipos de riesgos, entre los cuales se pueden mencionar los siguientes:

1. *Riesgos de mercado*: Son los riesgos inherentes del mercado financiero en el que se está invirtiendo, tales como:
   a) *Riesgo en el poder de compra*: Este riesgo es la posibilidad de que la ganancia de una inversión sea peor que la esperada exclusivamente a consecuencia de la inflación.
   b) *Riesgo de tipo de cambio*: Esta es la posibilidad de que las ganancias sean afectadas por las variaciones en el tipo de cambio debido a que las inversiones han sido hechas en otra moneda.
   c) *Riesgo de tasa de rendimiento*: Esta es la posibilidad de que por el cambio en las tasas de rendimiento, el valor de los títulos comprados se reduzca.

2. *Riesgo político*: Es la posibilidad de que las ganancias sean afectadas por la política y estabilidad de los países.

3. *Riesgo de crédito*: Es el riesgo de que la contraparte no cumpla el contrato de inversión por insolvencia.

4. *Riesgo de elección de la inversión*: Es decir, asignar recursos a ciertos activos menos redituables que otros.

5. *Riesgo de liquidez*: Es decir, comprometer recursos en activos difíciles de convertir en dinero, provocando una pérdida en el momento en que se hace necesario efectuar un pago imprevisto.

Para este análisis, se considerarán dos tipos de inversionistas:

- *Inversionistas puros*

  Son aquellas personas o instituciones que tienen cierta cantidad de dinero, ya sea que se trate de sus ahorros, sus remanentes de operación, alguna herencia, etc. y desean invertir este dinero para obtener rendimientos.

  Estos inversionistas desean obtener el mejor rendimiento posible por su inversión asumiendo el menor riesgo posible, por lo que tienen un problema de *selección de cartera de inversión.*

  Este tipo de inversionistas sólo pueden evitar el riesgo invirtiendo en instrumentos que no tengan riesgo. En general, deben hacer frente al riesgo y para tal propósito, usan modelos en los cuales el riesgo se trata de minimizar aunque no pueda anularse.

  Para resolver el problema de selección de cartera existen muchos modelos matemáticos. Como ejemplo, en el apéndice B se presenta el modelo de Markowitz por ser uno de los más conocidos.

- *Intermediarios financieros.*

  Los intermediarios financieros son instituciones como los bancos o las compañías aseguradoras que captan recursos del público inversionista. Estos recursos deben ser invertidos por estas instituciones para obtener ganancias y así cumplir con sus compromisos.

  A diferencia de los inversionistas puros, los intermediarios financieros tienen como pasivo los recursos captados del público y como activo los instrumentos en los que han invertido y los préstamos que han hecho.

  Dada su cartera de pasivos, desean constituir una cartera de activos que se comporte similarmente a la otra en cuanto a riesgo pero con un costo menor. A este proceso lo llamaremos *replicación de una cartera de inversión*. Cuando se logra que la nueva cartera se comporte de forma idéntica a la original, se dice que se ha logrado una *replicación perfecta*, aunque en general esto no es posible y lo que se procura, es obtener una cartera lo más parecida a la original.

> En cuanto a los préstamos que hacen, los intermediarios financieros obtienen su ganancia por el diferencial de la tasa con la que prestan y la tasa que pagan al público inversionista; el riesgo que corren es el de que no se les paguen los préstamos hechos, por lo que deben hacer un análisis de la solvencia de las personas o instituciones a las que prestan.

Así, para la planeación de una inversión deben fijarse los objetivos deseados en términos de los principales parámetros, que son el rendimiento, el riesgo, la liquidez y el plazo. Las decisiones se tomarán de acuerdo al tipo de inversionista, de sus necesidades al invertir y definiendo los niveles de riesgo aceptables por el inversionista.

También debe hacerse un análisis sobre la economía del país, los diferentes instrumentos de inversión, cuáles son de renta fija, cuáles de renta variable, cuáles son inversiones de protección, etc.; para que con todo este análisis se forme la **cartera de inversión** deseada. Una **cartera de inversión** se entenderá como un vector cuyas entradas representan el monto invertido en cada uno de los instrumentos.

En esta tesis, se expondrá un modelo para resolver el problema de replicación de una cartera de inversión propuesto por el Dr. Ron Dembo[1]. Dada una cartera de inversión "meta", el objetivo será constituir otra que se comporte similarmente a la cartera "meta" dada, en el sentido de que se tenga aproximadamente el mismo riesgo en ambas carteras, en todos los posibles escenarios del sistema. Claramente, una replicación perfecta producirá una cobertura perfecta para la cartera de inversión "meta". Suponiendo que dada una cartera "meta", exista una replicación perfecta "más barata" que la "meta", se obtiene una situación de arbitraje pues con una posición en corto en la cartera de inversión de replicación junto con una posición en largo de la cartera de inversión "meta", se obtendrá una ganancia sin riesgo.

Encontrar replicaciones perfectas con costo menor al de la cartera "meta" es indudablemente buen negocio, pues suponiendo que la cartera de pasivos de un banco se pudiera replicar perfectamente a un costo menor, entonces el banco obtendría una ganancia sin riesgo por el solo hecho de su intermediación.

Ejemplo 1.

Un banco vende una aceptación bancaria a plazo de 28 días por un millón de pesos a la tasa de rendimiento del Cete a 28 días. Por otra parte, el banco compra Cetes del mismo plazo a vencimiento a un precio más bajo en la subasta primaria o en el mercado primario, con lo cual tiene una ganancia sin riesgo. Este ejemplo es trivial pues la cartera "meta" y la replicación perfecta constan de un solo instrumento libre de riesgo. El caso interesante es cuando hay mayor diversidad e incertidumbre.

Capítulo 2
Un modelo general para resolver el problema de replicación de carteras de inversión.

En este capítulo se desarrolla el modelo general para replicar carteras de inversión, definiendo las variables, funciones y restricciones del mismo. También se definen conceptos como mercados completos y arbitraje.

La modelación se hace a través de la técnica de optimización de escenarios expuesta en el artículo "Scenario Optimization" del Dr. Ron Dembo[2]. Un *escenario* está constituido por los precios de cada uno de los instrumentos al final del periodo.

Primeramente se supondrá que se opera en un mercado en el que existen un número finito, N, de instrumentos de inversión disponibles, con algunos de los cuales, está constituida la cartera "meta" y que también servirán para constituir la cartera de replicación. Los instrumentos se negociarán por montos finitos sin afectar su precio, es decir tienen liquidez finita. El análisis consiste de un solo período y se supondrá que hay un número fijo y finito, S, de escenarios posibles que pueden ocurrir en este periodo. Exactamente uno de estos escenarios se realizará al final del período, pero el análisis se hará al inicio, donde hay incertidumbre de cuál de estos escenarios ocurrirá.

En este mercado, el inversionista está caracterizado por sus expectativas, que se representan por el vector de probabilidades $\bar{p}$ en $\mathbf{R}^s$, cuyas componentes son las probabilidades (estimadas) de que ocurra cada uno de los S escenarios en el futuro.

Se utilizará la siguiente notación:

- $\bar{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix}$

  es el vector columna de dimensión N, de precios de los instrumentos de replicación al inicio del periodo; estos precios se supondrán conocidos.

- $\bar{a}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{iN} \end{pmatrix}$

  es el vector columna de dimensión N, cuyas componentes son los valores de los instrumentos de replicación al final del periodo si el escenario i $(i = 1, 2, \ldots, S)$ ocurriese.

- $A = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_S) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{S1} \\ a_{12} & \ddots & & a_{S2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1N} & \cdots & \cdots & a_{SN} \end{pmatrix}$

  es la matriz de dimensión N por S que tiene como columnas los vectores $\bar{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, S)$.

- $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$

  es el vector columna de dimensión N que representará la cartera de inversión de replicación.

- c

  es el precio con el que la cartera de inversión "meta"es comprada al principio del periodo.

- $\bar{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_S)$

  es el vector columna de dimensión S con los precios t_i al que será vendida la cartera de inversión "meta"; donde i $(i = 1, 2, \ldots, S)$ indica el escenario que ocurre al final del periodo.

El superíndice T será utilizado para denotar la trasposición de un vector o de una matriz.

En el siguiente cuadro se ve gráficamente un periodo de replicación:

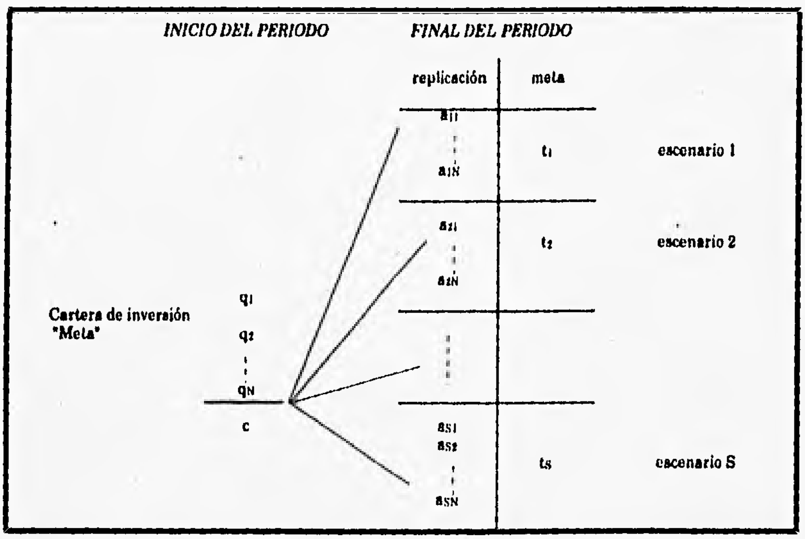

Figura 1

Utilizando la notación anterior y dados los supuestos del modelo, la situación de obtener una replicación perfecta consistirá en buscar una cartera de inversión $\overline{x}$, que satisfaga la siguiente ecuación:

$$\sum_j a_{ij} x_j = t_i \quad (i = 1, 2, \ldots, S) \tag{1}$$

o escrito en forma matricial:

$$A^T \overline{x} = \overline{t} \tag{2}$$

Sin embargo, no siempre existe esta cartera de inversión que replique perfectamente, por lo que en lugar de buscar una solución a $A^T\overline{x} = \overline{t}_{(2)}$, se buscará una cartera $\overline{x}$ que minimice $\left\| A^T\overline{x} - \overline{t} \right\|$ para alguna norma sobre todos los escenarios. Puesto que los escenarios ocurren con cierta probabilidad es conveniente introducir la ***función de arrepentimiento R***, definiéndola como:

$$R = E\left(\left\| A^T\overline{x} - \overline{t} \right\| \right) \tag{3}$$

donde $E(.)$ es el operador de esperanza matemática con respecto a los escenarios y $\|\ .\ \|$ es una norma arbitraria.

La función de arrepentimiento R, mide la esperanza de la diferencia entre el valor de una cartera de replicación dada, $\overline{x}$, y la cartera de inversión "meta" tomadas al vencimiento. Esto mide lo que se obtiene con una decisión tomada el día de hoy en comparación con lo que se pudiera obtener teniendo la información perfecta de los posibles escenarios y sus distribuciones de probabilidad correspondientes, conocidas al inicio del periodo.

Una cartera de inversión de replicación con función de arrepentimiento R, igual a cero, corresponderá a una replicación perfecta de la cartera de inversión "meta" en todos los posibles escenarios. Otra interpretación de la función de arrepentimiento R, es como el valor residual o conocido del riesgo en la cartera de inversión de replicación.

Se introducirán algunos conceptos necesarios para continuar este trabajo:

Un *mercado completo* es aquél en el que siempre existe una cartera de inversión $\overline{x}$ que replica perfectamente una cartera de inversión "meta" arbitraria. En otras palabras, siempre existe una $\overline{x}$ que satisfaga la condición $A^T\overline{x} = \overline{l}_{(2)}$ para cualquier $\overline{l}$ arbitraria. Esto sucede cuando el mercado es suficientemente rico en número y tipo de instrumentos. Desafortunadamente los mercados reales son incompletos. Es decir, no siempre es posible encontrar una cartera de replicación $\overline{x}$ que satisfaga $A^T\overline{x} = \overline{l}_{(2)}$ para una cartera de inversión "meta" $\overline{l}$ arbitraria.

En los mercados completos siempre es posible encontrar una cartera de inversión $\overline{x}$, tal que su función de arrepentimiento sea igual a cero para una cartera de inversión "meta" arbitraria dada y su distribución de escenarios; ya que en los mercados completos siempre se puede encontrar una cartera de inversión $\overline{x}$, tal que $A^T\overline{x} = \overline{l}_{(2)}$ y por lo tanto $R = E\left(\left\| A^T\overline{x} - \overline{l} \right\| \right)_{(3)} = 0$.

En los casos donde la función de arrepentimiento no puede tomar el valor de cero es natural intentar obtener una cartera de inversión de replicación que tenga el menor valor en la función de arrepentimiento. Esto lleva a la definición de la ***función de arrepentimiento mínimo MR***, como:

$$MR = Minimizar_{\overline{x}}\ E\left(\left\| A^T\overline{x} - \overline{l} \right\| \right) \tag{4}$$

Similarmente se definirá la función de *arrepentimiento negativo DR* como:

$$DR = E\left(\left\| \left(A^T\overline{x} - \overline{l}\right)_- \right\| \right) \tag{5}$$

en la cual sólo son consideradas las desviaciones negativas y la ***función de arrepentimiento negativo mínimo MDR*** como:

$$MDR = Minimizar_{\overline{x}}\ E\left(\left\| \left(A^T\overline{x} - \overline{l}\right)_- \right\| \right) \tag{6}$$

Una cartera de inversión con arrepentimiento negativo mínimo puede ser vista como aquélla con la más pequeña y posible pérdida esperada bajo los escenarios supuestos.

Por lo tanto, los mercados completos son caracterizados por $MR = 0$ para toda l. En los mercados incompletos se cumple que $MR \geq 0$. De esta forma, se interpretará la *cartera de inversión con arrepentimiento mínimo*, $\bar{x}^*$, como la cartera de inversión con el más pequeño riesgo residual posible que se puede obtener bajo incertidumbre. En el caso de la función de arrepentimiento R, $\bar{x}^*$ es la cartera de replicación óptima, ya que minimiza el riesgo residual. Recordando que en el caso de los mercados discretos e incompletos, rara vez se obtiene una cobertura perfecta, se tiene que una posición en largo en la cartera de inversión "meta" y una posición en corto en $\bar{x}^*$ (o viceversa) es la mejor cobertura que se puede obtener en un ambiente de incertidumbre.

El costo de una replicación puede ser determinado de diferentes maneras. Por ejemplo, se podría calcular como el costo inicial de compra de la cartera de replicación, $\overline{q}^T\overline{x}$. Sin embargo no se consideraría el valor de la cartera en el futuro. Por lo que una mejor medida está en tomar las ganancias o pérdidas esperadas a lo largo del tiempo que dura la cobertura. Esto se calculará como sigue.

Considérese un inversionista que vende en corto la cartera de inversión "meta" al inicio del período y cubre su posición con una cobertura multiescenarios obtenida por la replicación. Esta es, por lo tanto, liquidada al final del período. El resultado de esta transacción será:

Al inicio del periodo:

- c por la venta de la cartera de inversión "meta"
- $-q^T\overline{x}$ por la compra de la cartera de replicación.

Al final del periodo:

- $E\left(A^T\overline{x}\right)$ el pago esperado por la venta de la cartera de replicación
- $-E(\overline{l})$ el costo esperado por la compra de la cartera de inversión "meta" al liquidar el convenio.

El valor presente de la ganancia esperada del convenio es, por tanto, $r^{-1}E\left(A^T\overline{x}-\overline{l}\right)+\left(c-\overline{q}^T\overline{x}\right)$, donde r es la tasa de descuento del período.

Puesto que se desea obtener la mejor replicación sujeta a que se obtenga una cierta ganancia, en el modelo se utilizará la siguiente fórmula de optimización paramétrica:

$$MDR(k) = Minimizar_{\overline{x}}\; r^{-1}E\left(\left\|\left(A^T\overline{x}-\overline{l}\right)\right\|_{-}\right) \qquad (7)$$

sujeto a

$$r^{-1}E\left(A^T\overline{x}-\overline{l}\right)+\left(c-\overline{q}^T\overline{x}\right) \geq k \qquad (8)$$

La variable $\overline{x}$, que representa la cartera de replicación, no tiene restricciones en cuanto a signo, entendiendo que cuando $x_i < 0$ significa que en el instrumento i, se tiene una posición en corto.

La desigualdad $r^{-1}E\left(A^T\overline{x}-\overline{l}\right)+\left(c-\overline{q}^T\overline{x}\right)\geq k_{(8)}$, establece que se espera obtener al menos k pesos (donde k puede ser positiva o negativa). $MDR\ (k)$ es una función ímplicita en k por ser el valor de k dado, el que determina la región de factibilidad en la que se encuentre el valor mínimo de la función $r^{-1}E\left(\left\|\left(A^T\overline{x}-\overline{l}\right)\right\|_{-}\right)$. Por otra parte, analizando la restricción $r^{-1}E\left(A^T\overline{x}-\overline{l}\right)+\left(c-\overline{q}^T\overline{x}\right)\geq k$, que desarrollándola es igual a:

$$r^{-1}E\left[\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{S1} & \cdots & a_{SN} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_S \end{pmatrix}\right]+\left(c-\begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}\right)\geq k$$

$\Rightarrow$

$$r^{-1}E\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1N}x_N-l_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2N}x_N-l_2 \\ \vdots \\ a_{S1}x_1+a_{S2}x_2+\ldots+a_{SN}x_N-l_S \end{pmatrix}+\left(c-\left(q_1x_1+q_2x_2+\ldots+q_Nx_N\right)\right)\geq k$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} &r^{-1}[p_1\left(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1N}x_N-l_1\right)+p_2\left(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2N}x_N-l_2\right)+\ldots+ \\ &\quad +p_S\left(a_{S1}x_1+a_{S2}x_2+\ldots+a_{SN}x_N-l_S\right)]+\left(c-\left(q_1x_1+q_2x_2+\ldots+q_Nx_N\right)\right)\geq k \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} &\left(r^{-1}p_1a_{11}+r^{-1}p_2a_{21}+\ldots+r^{-1}p_Sa_{S1}-q_1\right)x_1+\left(r^{-1}p_1a_{12}+r^{-1}p_2a_{22}+\ldots+r^{-1}p_Sa_{S2}-q_2\right)x_2+\ldots+ \\ &\quad +\left(r^{-1}p_1a_{1N}+r^{-1}p_2a_{2N}+\ldots+r^{-1}p_Sa_{SN}-q_N\right)x_N+\left(c-\left(r^{-1}p_1l_1+r^{-1}p_2l_2+\ldots+r^{-1}p_Sl_S\right)\right)\geq k \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\left(r^{-1}\overline{pa}_1-q_1\right)x_1+\ldots+\left(r^{-1}\overline{pa}_N-q_N\right)x_N+\left(c-r^{-1}\overline{p}\overline{l}\right)\geq k \qquad (9)$$

se observa que se trata de una restricción lineal, que puede ser interpretada como un semiespacio en $\mathbf{R}^S$. Por lo que la función $MDR(k)$ es una función monótona no decreciente ya que al aumentar un valor de k_0 a k_1, la región de factibilidad se reduce y el valor de la función $MDR(k_1)$ será mayor que $MDR(k_0)$ si $\bar{x}_0^*$ (que es el valor que minimiza el problema $r^{-1}E\left(\left\|\left(A^T\bar{x}-\bar{t}\right)\right\|_-\right)$con k_0) ya no se encuentra en la región de factibilidad, o tomar el mismo valor que $MDR(k_0)$ en el caso de que $\bar{x}_0^*$ esté en la región de factibilidad.

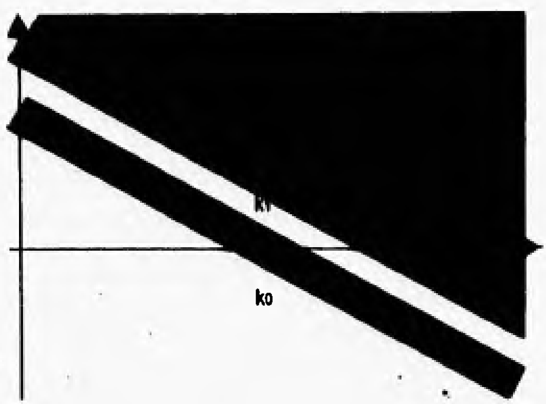

Figura 2

Por lo que a mayor ganancia esperada, se requiere un contrato con mayor riesgo residual (es decir con un valor de la función de mínimo arrepentimiento negativo mayor).

Ahora, se desea obtener el valor óptimo de k. El inversionista obtiene una ganancia esperada k, asumiendo el riesgo de arrepentimiento negativo mínimo $MDR\,(k)$. Por lo tanto una estimación de su *ganancia esperada ajustada al riesgo* será:

$$k - MDR(k) \tag{10}$$

Un criterio natural para maximizar la ganancia ajustada al riesgo será:

$$\max_k \; (k - MDR(k)) \tag{11}$$

Se demostrará que el problema $\max_k\,(k - MDR\,(k))_{(11)}$ alcanza su óptimo en k^*, que ocurre cuando $\lambda = 1$, donde λ es la variable del problema dual asociada a la restricción $r^{-1}E\left(A^T\overline{x} - \overline{l}\right) + \left(c - \overline{q}^T\overline{x}\right) \geq k_{(8)}$; por lo que se harán algunas demostraciones que resuelvan este problema.

Primeramente se considerará el siguiente problema. Sea $f\,(k) : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ una función monótona no decreciente, f diferenciable, entonces la función $h\,(k) = k - f\,(k)$, $k \in \mathbf{R}$, tiene su máximo cuando:

$$\frac{dh}{dk} = 1 - \frac{df\,(k^*)}{dk} = 0$$

$$\Rightarrow \text{h}\,(k) \text{ tiene su máximo si } \frac{df\,(k^*)}{dk} = 1 \tag{12}$$

y es máximo ya que $\dfrac{d^2h}{dk^2} = -\dfrac{d^2f}{dk^2} \leq 0$ por ser $f\,(k)$ una función monótona no decreciente.

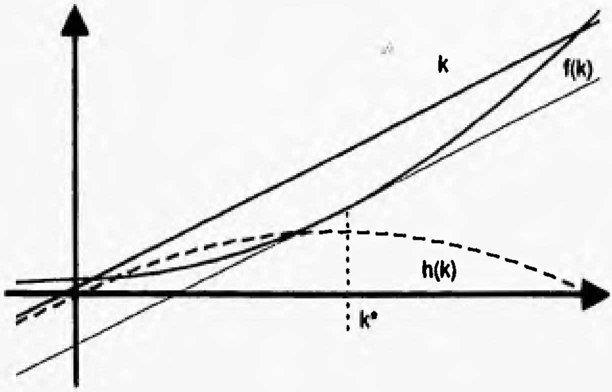

Figura 3

Por otra parte considérese el siguiente problema de optimización $\Gamma(k)$:

$$\begin{aligned} \Gamma(k) = \min \gamma(\overline{x}) & \\ \text{sujeto a} & \\ \alpha(\overline{x}) \geq k & \\ k \in \mathbf{R}, \overline{x} \in \mathbf{R}^N & \end{aligned}$$

donde $\Gamma(k) : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $\gamma(\overline{x}) : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{R}$, $\alpha(\overline{x}) : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{R}$ son funciones diferenciables.

Entonces la función de Lagrange asociada a este problema es:

$$L(\overline{x},\lambda) = \gamma(\overline{x}) - \lambda(\alpha(\overline{x}) - k)$$

por lo que para encontrar los óptimos de este problema, se igualan las derivadas a cero obteniendo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L(\overline{x},\lambda)}{\partial \lambda} = 0 &\Rightarrow \quad \alpha(\overline{x}) - k = 0 \\
\nabla_{\overline{x}} L(\overline{x},\lambda) = \overline{0} &\Rightarrow \quad \nabla_{\overline{x}}\gamma(\overline{x}) - \lambda\nabla_{\overline{x}}\alpha(\overline{x}) = \overline{0} \\
&\Rightarrow \quad \nabla_{\overline{x}}\gamma(\overline{x}) = \lambda\nabla_{\overline{x}}\alpha(\overline{x}) \qquad (13)
\end{aligned}$$

Para este problema, $\Gamma(k) = \gamma(\overline{x}_k^*)$ donde $\overline{x}_k^*$ es el valor que minimiza la función $\gamma(\overline{x})$ para una k dada, por lo que se puede ver a $\overline{x}_k^*$ como una función de k, por ejemplo $\overline{x}_k^* = \xi(k)$ $(\xi(k) : R \longrightarrow R^N)$, quedando $\Gamma(k) = \gamma(\xi(k))$, y utilizando la regla de la cadena se obtiene:

$$\frac{d\Gamma(k)}{dk} = \nabla_{\overline{x}}\gamma(\xi(k)) \cdot D\xi(k) \qquad (14)$$

pero si se observa como se definió a $\xi(k)$; primeramente se tiene que $\alpha(\xi(k)) = k$ ya que $\xi(k) = \overline{x}_k^*$, que cumple que $\alpha(\overline{x}_k^*) = k$ y por otro lado, $\xi(\alpha(\overline{x}_k^*)) = \overline{x}_k^*$ restringiendo la función α a aquellos valores de $\overline{x}_k^*$ que optimicen $\Gamma(k)$ para cada k; por lo que para estos valores, las funciones α y ξ son funciones inversas y por lo tanto, aplicando el teorema de la función inversa, se deduce que:

$$\nabla_{\overline{x}}\alpha(\xi(k)) \cdot D\xi(k) = 1$$

y como se ha visto anteriormente que $\nabla_{\overline{x}}\gamma(\overline{x}) = \lambda\nabla_{\overline{x}}\alpha(\overline{x})_{(13)}$ y que $\frac{d\Gamma(k)}{dk} = \nabla_{\overline{x}}\gamma(\xi(k)) \cdot D\xi(k)_{(14)}$, entonces:

$$\frac{d\Gamma(k)}{dk} = \lambda\nabla_{\overline{x}}\alpha(\xi(k)) \cdot D\xi(k) = \lambda[\nabla_{\overline{x}}\alpha(\xi(k)) \cdot D\xi(k)] = \lambda(1) = \lambda$$

Finalmente, haciendo $\Gamma(k) = MDR(k)$, $\gamma(\overline{x}) = r^{-1}E\left(\left\|\left(A^T\overline{x} - \overline{l}\right)\right\|_{-}\right)$, $\alpha(\overline{x}) = r^{-1}E\left(A^T\overline{x} - \overline{l}\right) + \left(c - \overline{q}^T\overline{x}\right)$ y por lo demostrado en los resultados de los párrafos anteriores y además, sabiendo que $MDR(k)$ es una función monótona no decreciente (como también ya se demostró), se deduce que la función $k - MDR(k)$ alcanza su máximo cuando $\dfrac{dMDR(k)}{dk} = \lambda_{(12)} = 1$.

Esto se muestra gráficamente en las Figuras 4, 5, 6 y 7. La tangente de la curva MDR (k) en k^* es el precio sombra de la restricción de la ganancia esperada (λ) y tiene una pendiente igual a 1. Viéndolo gráficamente es fácil determinar que éste es el punto en el cual la diferencia $k - MDR$ (k) es máxima.

En el caso de la norma $\mathcal{L}_1$, la función MDR (k) es lineal por partes y, por tanto, no es diferenciable en los puntos de ruptura. En este caso la condición necesaria de optimalidad es que la subdiferencial de MDR (k^*) sea 1. Esta demostración se hará en el Apéndice C.

En ciertos casos podría usarse MR (k) en lugar de MDR (k), como por ejemplo, cuando la replicación es utilizada como el precio de la cartera de inversión "meta". Para estos casos, ambas desviaciones de la cartera de inversión "meta" se consideran como "costos". En adelante MDR (k) y MR (k) se utilizarán indistintamente.

Se definirá la noción de arbitraje en este contexto, para interpretar algunos casos interesantes.

Un *arbitraje* es una cartera de inversión $\overline{x}$, tal que:

$$\begin{aligned} &\left(c-\overline{q}^T\overline{x}\right) > 0 \text{ y } \left(A^T\overline{x}-\overline{l}\right) \geq \overline{0} \\ \text{o } &\left(c-\overline{q}^T\overline{x}\right) \geq 0 \text{ y } \left(A^T\overline{x}-\overline{l}\right) > \overline{0} \end{aligned}$$

Esto es, hay arbitraje si se puede vender la cartera de inversión "meta" y comprar una cobertura para obtener una ganancia presente considerando cada uno de todos los posibles escenarios en el futuro y además se puede liquidar la cartera de inversión sin tener pérdida alguna.

Por lo tanto, un sistema de $|S|$ restricciones que pudiera evitar el arbitraje es:

$$r^{-1}\left(A^T\overline{x}-\overline{l}\right)+\mathbf{I}\left(c-\overline{q}^T\overline{x}\right)=\overline{0} \tag{15}$$

ya que si se cumple que $r^{-1}\left(A^T\overline{x}-\overline{l}\right)+\mathbf{I}\left(c-\overline{q}^T\overline{x}\right)=\overline{0}$entonces

$$\begin{aligned} \text{si } &\left(c-\overline{q}^T\overline{x}\right) > 0 \text{ implicaría que } \left(A^T\overline{x}-\overline{l}\right) < \overline{0} \\ \text{y si } &\left(c-\overline{q}^T\overline{x}\right) \geq 0 \text{ implicaría que } \left(A^T\overline{x}-\overline{l}\right) \leq \overline{0}. \end{aligned}$$

Un *arbitraje esperado* es una cartera de inversión $\overline{x}$ que cumple con:

$$\begin{aligned} &\left(c-\overline{q}^T\overline{x}\right) > 0 \text{ y } E\left(A^T\overline{x}-\overline{l}\right) \geq 0 \\ \text{o } &\left(c-\overline{q}^T\overline{x}\right) \geq 0 \text{ y } E\left(A^T\overline{x}-\overline{l}\right) > 0. \end{aligned}$$

Esto es, existe arbitraje esperado si se puede vender la cartera de inversión "meta" y comprar una cobertura de la misma para obtener una ganancia presente y además, se espera liquidar la cartera de inversión sin tener pérdidas.

Una sola restricción podría evitar el arbitraje esperado y es:

$$r^{-1}E\left(A^T\overline{x}-\overline{l}\right)+\left(c-\overline{q}^T\overline{x}\right)=0 \tag{16}$$

Claramente no tener arbitraje implica no tener arbitraje esperado. A la condición $r^{-1}E\left(A^T\overline{x}-\overline{l}\right)+\left(c-\overline{q}^T\overline{x}\right)=0$ se le llamará la ***condición de ganancia cero*** (por ser la condición en $MDR\ (0)$).

Para ejemplificar el arbitraje y los mercados completos, se verán 4 distintos casos:

Caso 1: $MR\ (0)=0$, $MR\ (k)>0$ para toda $k>0$

Este es el caso que se pudiera observar en un mercado completo y sin arbitraje. Esto es, una replicación perfecta bajo la restricción de no arbitraje en la que se quiere obtener una ganancia mayor a cero, forzosamente se debe asumir algún riesgo. En esta situación, se podría esperar que los inversionistas busquen una cartera de inversión con un pago esperado de k^*, asumiendo un riesgo (mayor que 0) de $MR\,(k^*)$.

Siendo un mercado completo (por lo que siempre ocurre que $A^T\overline{x}=\overline{l}$) y sin arbitraje; y utilizando la ecuación $r^{-1}\left(A^T\overline{x}-\overline{l}\right)+\left(c-\overline{q}^T\overline{x}\right)=0$ se tiene que:

$$c=\overline{q}^T\overline{x}^* \tag{17}$$

donde $\overline{x}^*$ es la cartera de inversión con función de arrepentimiento mínimo y obviamente igual a cero, por ser el mercado completo. Esto es, el costo de la cartera de inversión "meta" será igual al precio de la cartera de replicación (que es perfecta).

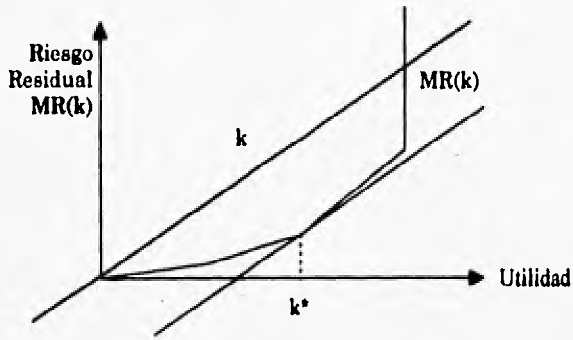

Figura 4

Caso 2: $MR(0) > 0$

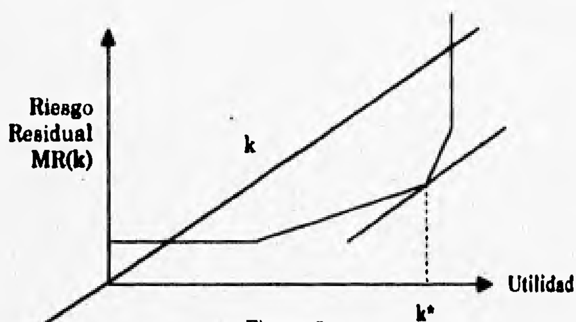

Figura 5

Este caso surge en situaciones en las que no hay arbitraje y el mercado es incompleto.

Caso 3: $MR(k) > k$ para toda k.

En este caso no hay arbitraje y el contrato siempre producirá una pérdida ajustada al riesgo, es decir, $k - MR(k) < 0$ para toda k. Un inversionista racional jamás llevará a cabo este contrato.

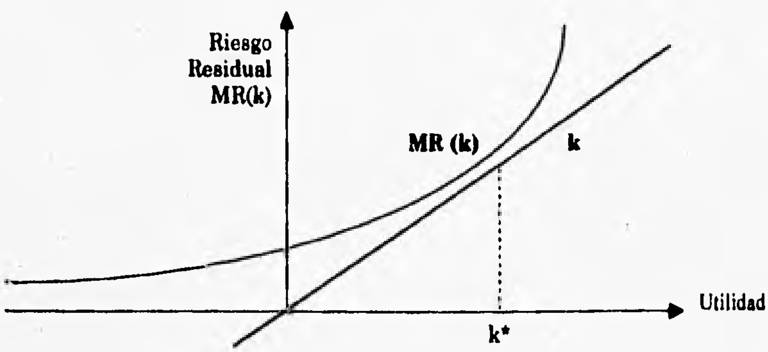

Figura 6

Caso 4: $MR\,(k) = 0$ para $k = 0$ hasta $k = k_b > 0$

Esto ocurre en un mercado (posiblemente completo) donde el arbitraje es posible.

Es interesante que aún en este caso que es óptimo, el inversionista desea maximizar su ganancia ajustada al riesgo para buscar una ganancia de $k^* > k_b$, que conlleva a un riesgo de $MR\,(k^*) > 0$ en lugar de tomar la ganancia sin riesgo de k_b.

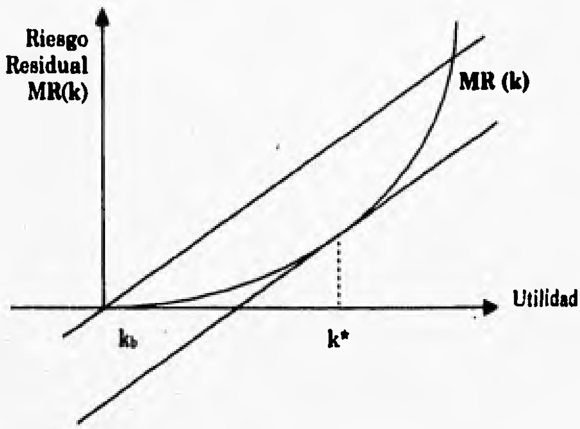

Figura 7

Capítulo 3
Un modelo de programación lineal para encontrar carteras de replicación

Este capítulo iniciará definiendo los vectores de ponderadores de mercado y los vectores de ponderadores "meta". Después se desarrollará el modelo de replicación de carteras de inversión utilizando la norma $\mathcal{L}_1$, viendo los resultados que se pueden obtener por medio de los problemas Primal\Dual tales como la obtención de vectores de ponderadores y su relación con el arbitraje. A continuación se utiliza este modelo para ver si los valores están cotizados por debajo, por arriba o equitativamente. Y finalmente se obtiene el teorema principal de la tesis.

Primeramente se define como un vector de ponderadores de mercado a un vector no negativo $\overline{\psi}$, $\overline{\psi} \in \mathbf{R}^S$ que satisface:

$$A\overline{\psi} = \overline{q} \quad (18)$$
$$\overline{l}^T\overline{\psi} = c \quad (19)$$

para un vector arbitrario fijo, $\overline{l} \in \mathbf{R}^S$.

Y un vector de ponderadores "meta" será un vector $\overline{\psi}$ que satisface:

$$A\overline{\psi} = \overline{q}$$
$$\overline{l}^T\overline{\psi} = c$$

para algún vector "meta" $\overline{l} \in \mathbf{R}^S$ dado.

Esto es, un vector de ponderadores de mercado o un vector de ponderadores "meta" $\overline{\psi}$, es un vector que transforma los precios inciertos al final del periodo, en precios conocidos en el inicio del periodo, de una manera consistente, haciendo que $\overline{\psi}$ sea independiente de las preferencias del inversionista, es decir que no depende del valor del vector de probabilidades $\overline{p}$.

Ahora se definirá a $\rho = \psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_S$ y al vector $\overline{\omega} = \overline{\psi}/\rho$, que podría ser visto como un vector de probabilidades ya que $\overline{\omega}$ tiene componentes no negativos que suman 1. Como estas probabilidades también son independientes de p, las preferencias del inversionista, se llamarán a $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_S$ las ***probabilidades de riesgo neutral.***

Haciendo esta transformación, las ecuaciones $A\overline{\psi} = \overline{q}_{(18)}$ y $\overline{t}^T\overline{\psi} = c_{(19)}$ podrían ser reescritas como:

$$(\rho)A\overline{\omega} = \overline{q} \tag{20}$$

$$(\rho)\overline{t}^T\overline{\omega} = c \tag{21}$$

que dicen que el valor presente de los pagos futuros con riesgo neutral será igual a los precios de hoy, si ρ es interpretado como el factor de descuento libre de riesgo para el periodo y $\overline{\omega}$ como el vector de probabilidades con riesgo neutral.

Las siguientes preguntas serán: ¿cuándo existe el vector de ponderadores de mercado o el vector de ponderadores "meta"?, ¿cuándo este vector es único? y si hay relación entre la existencia de este vector y el arbitraje.

Para esto se tomará el modelo de la función de mínimo arrepentimiento utilizando la norma $\mathcal{L}_1$, es decir $\|(z_1, z_2, \ldots, z_N)\|_1 = |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_N|$, transformando el problema:

$$MR(k) = \min_{\bar{x}} r^{-1} E\left(\left\|\left(A^T\bar{x} - \bar{l}\right)\right\| \right) \quad (4)$$

sujeto a

$$r^{-1} E\left(A^T\bar{x} - \bar{l}\right) + \left(c - \bar{q}^T\bar{x}\right) \geq k \quad (8)$$

en:

$$MR(k) = \min_{\bar{x}} r^{-1} E\left[|\bar{a}_1\bar{x} - t_1| + \ldots\ldots + |\bar{a}_S\bar{x} - t_S|\right] \qquad (22)$$

sujeto a

$$r^{-1} E\left(A^T\bar{x} - \bar{l}\right) + \left(c - \bar{q}^T\bar{x}\right) \geq k \qquad (23)$$

y, haciendo el cambio de variables por $\bar{y}^+$, $\bar{y}^- \in \mathbf{R}^S$, $\bar{y}^+$, $\bar{y}^- \geq \bar{0}$, tales que $\bar{y}^+ - \bar{y}^- = r^{-1}\left(A^T\bar{x} - \bar{l}\right)$ (ec. 24), es decir, todos los valores $\bar{a}_i\bar{x} - t_i$ que resulten positivos se tomarán en cuenta en $\bar{y}^+$, mientras que los valores $\bar{a}_j\bar{x} - t_j$ que resulten negativos, se considerarán en $\bar{y}^-$; por lo que finalmente se obtendrá el siguiente par de problemas Primal/Dual de programación lineal:

Primal:

$$MR(k) = \min \bar{p}^T\left(\bar{y}^+ + \bar{y}^-\right) \qquad (25)$$

sujeto a

$$-\bar{y}^+ + \bar{y}^- + r^{-1}A^T\bar{x} = r^{-1}\bar{l}; \quad (\bar{\pi}) \qquad (26)$$

$$\bar{p}^T\left(\bar{y}^+ - \bar{y}^-\right) - \bar{q}^T\bar{x} \geq k - c; \quad (\lambda) \qquad (27)$$

$$\bar{y}^+, \bar{y}^- \geq 0 \qquad (28)$$

donde $\bar{p}$ es el vector de probabilidades de ocurrencia de los escenarios.

Dual:

$$
\begin{aligned}
&\max r^{-1}\bar{\iota}^T\bar{\pi} + (k-c)\lambda \\
&\quad \text{sujeto a} \\
&\qquad r^{-1}A\bar{\pi} - \lambda\bar{q} = \bar{0}; && \langle\bar{x}\rangle \\
&\qquad -\bar{\pi} + \lambda\bar{p} \le \bar{p}; && \left\langle\bar{y}^{+}\right\rangle \\
&\qquad \bar{\pi} - \lambda\bar{p} \le \bar{p}; && \left\langle\bar{y}^{-}\right\rangle \\
&\qquad \lambda \ge 0
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$

Dual:

$$\max r^{-1}\bar{\iota}^T\bar{\pi} + (k-c)\lambda \tag{29}$$

sujeto a

$$r^{-1}A\bar{\pi} - \lambda\bar{q} = \bar{0}; \quad \langle\bar{x}\rangle \tag{30}$$

$$-\bar{p} \le \bar{\pi} - \lambda\bar{p} \le \bar{p}; \quad \left\langle\bar{y}^{+},\bar{y}^{-}\right\rangle \tag{31}$$

$$\lambda \ge 0 \tag{32}$$

Se examinarán algunos resultados interesantes obtenidos de este par de problemas Primal/Dual

Para una $\bar{x}$ finita y una $\bar{t}$ finita arbitraria fija, el problema Primal es factible ya que la restricción $-\bar{y}^{+} + \bar{y}^{-} + r^{-1}A^{T}\bar{x} = r^{-1}\bar{t}_{(24)}$ se satisface por definición de las variables $\bar{y}^{+}$, $\bar{y}^{-}$; y la restricción $\bar{p}^{T}(\bar{y}^{+} - \bar{y}^{-}) - \bar{q}^{T}\bar{x} \geq k - c_{(27)}$, que está asociada con la restricción original $r^{-1}E\left(A^{T}\bar{x} - \bar{t}\right) + \left(c - \bar{q}^{T}\bar{x}\right) \geq k_{(8)}$, se podrá satisfacer para una k suficientemente pequeña (quizá una k negativa) por tratarse, como se ha dicho anteriormente, de una restricción lineal en un problema de minimización con $\geq$. Además el problema Primal está acotado por la restricción $r^{-1}E\left(A^{T}\bar{x} - \bar{t}\right) + \left(c - \bar{q}^{T}\bar{x}\right) \geq k_{(8)}$ para alguna k suficientemente pequeña. Por lo tanto, dada la teoría de dualidad de programación lineal, el problema Dual es factible y acotado, alcanzando el óptimo en el mismo valor.

A continuación se demostrará que para $\lambda \geq 1$, el vector $r^{-1}\left(\frac{\bar{\pi}}{\lambda}\right)$ es un vector de ponderadores de mercado o de ponderadores "meta", ya que cumple con las siguientes condiciones:

i) $r^{-1}A\left(\frac{\bar{\pi}}{\lambda}\right) = \bar{q}$

Esto es cierto despejando la restricción $r^{-1}A\bar{\pi} - \lambda\bar{q} = \bar{0}_{(30)}$ del problema Dual y suponiendo que $\lambda \neq 0$.

ii) $r^{-1}\bar{t}^{T}\left(\frac{\bar{\pi}}{\lambda}\right) = c$

Como en el óptimo, el problema Primal y el problema Dual alcanzan el mismo valor, entonces:

$$\bar{p}^{T}\left(\bar{y}^{+*} + \bar{y}^{-*}\right)_{(25)} = r^{-1}\bar{t}^{T}\bar{\pi}^{*} + (k - c)\,\lambda^{*}_{(29)}$$

suponiendo que $\lambda \neq 0$, entonces

$$\frac{\bar{p}^{T}\left(\bar{y}^{+*} + \bar{y}^{-*}\right)}{\lambda^{*}} = r^{-1}\bar{t}^{T}\left(\frac{\bar{\pi}^{*}}{\lambda^{*}}\right) + (k - c)$$

por lo que eligiendo $k = \frac{\overline{p}^T\left(\overline{y}^{+*} + \overline{y}^{-*}\right)}{\lambda^*}$, se obtiene que:

$$r^{-1}\overline{t}^T\left(\frac{\overline{\pi}^*}{\lambda^*}\right) = c$$

iii) $r^{-1}\left(\frac{\overline{\pi}}{\lambda}\right) \geq 0$

Tomando la restricción $-\overline{p} \leq \overline{\pi} - \lambda\overline{p}_{(31)}$, y si $\lambda > 0$, entonces:

$$\frac{\overline{p}}{\lambda} \leq \frac{\overline{\pi}}{\lambda} - \overline{p}$$

$$\overline{p} - \frac{\overline{p}}{\lambda} = \overline{p}\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \leq \frac{\overline{\pi}}{\lambda}$$

Sabiendo que $\overline{p} \geq \overline{0}$, y si $\overline{p}\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \geq 0$ entonces $\frac{\overline{\pi}}{\lambda} \geq 0$, por lo que haciendo $\lambda \geq 1$, se obtiene $\overline{p}\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \geq 0$ y por lo tanto $\left(\frac{\overline{\pi}}{\lambda}\right) \geq 0$ (al igual que $r^{-1}\left(\frac{\overline{\pi}}{\lambda}\right)$).

La dependencia de $\overline{\pi}$ con $\overline{p}$ (las preferencias estimadas del inversionista) se observa en la restricción del problema Dual $-\overline{p} \leq \overline{\pi} - \lambda\overline{p} \leq \overline{p}_{(31)}$. Si estas restricciones son redundantes como podrían serlo en el caso de que $\overline{y}^+, \overline{y}^- = 0$ (este es el caso en que la función de arrepentimiento sea igual a cero), entonces $\overline{\pi}$ sería independiente de estas preferencias.

Por lo tanto, para $\lambda \geq 1$, $\left(r^{-1}\frac{\overline{\pi}}{\lambda}\right)$ podría ser utilizado para obtener el vector de probabilidades con riesgo neutral ω, haciendo $\omega = \rho\left(r^{-1}\frac{\overline{\pi}}{\lambda}\right)$, donde $\rho = r^{-1}\frac{\pi_1}{\lambda} + r^{-1}\frac{\pi_2}{\lambda} + \ldots + r^{-1}\frac{\pi_S}{\lambda}$, será la tasa libre de riesgo para el mercado.

Como las restricciones del problema Dual son independientes de $\overline{t}$, éste podrá ser resuelto para diferentes vectores "meta", lo que representa una gran ventaja, comparándolo con resolver el problema para cada vector.

Sin embargo, se desea encontrar una condición menos estricta que $\lambda \geq 1$ que garantice la existencia de un vector de ponderadores de mercado o de ponderadores "meta"; para ello se tomará el modelo con la función de mínimo arrepentimiento negativo utilizando nuevamente la norma $\mathcal{L}_1$; por lo que este problema Primal se transformará de

$$MDR(k) = \min_{\bar{x}} r^{-1} E\left(\left\| \left(A^T\bar{x} - \bar{t} \right)_- \right\| \right) \quad (6)$$

sujeto a

$$r^{-1} E\left(A^T\bar{x} - \bar{t}\right) + \left(c - \bar{q}^T\bar{x}\right) \geq k \quad (8)$$

en:

$$MDR(k) = \min_{\bar{x}} r^{-1} E\left[m(1)\left|\bar{a}_1\bar{x} - t_1\right| + \ldots\ldots + m(S)\left|\bar{a}_S\bar{x} - t_S\right|\right] \quad (33)$$

sujeto a

$$r^{-1} E\left(A^T\bar{x} - \bar{t}\right) + \left(c - \bar{q}^T\bar{x}\right) \geq k \quad (34)$$

donde se define temporalmente a la función

$$m(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\bar{a}_i\bar{x} - t_i) \leq 0 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

y haciendo una transformación semejante a la que se hizo anteriormente con la función de mínimo arrepentimiento, se considerarán en la variable $\bar{y}^-$, sólo los valores negativos $\bar{a}_i\bar{x} - t_i$, obteniendo así, el siguiente par de problemas Primal/Dual:

Primal:

$$MDR(k) = \min \ \bar{p}^T\bar{y}^- \quad (35)$$

sujeto a

$$-\bar{y}^+ + \bar{y}^- + r^{-1}A^T\bar{x} = r^{-1}\bar{t}; \quad (\bar{\pi}) \quad (36)$$

$$\bar{p}^T\left(\bar{y}^+ - \bar{y}^-\right) - \bar{q}^T\bar{x} \geq k - c; \quad (\lambda) \quad (37)$$

$$\bar{y}^+,\ \bar{y}^- \geq \bar{0} \quad (38)$$

Dual:

$$\max r^{-1}\bar{\iota}^T\bar{\pi} + (k-c)\lambda \tag{39}$$

sujeto a

$$r^{-1}A\bar{\pi} - \lambda\bar{q} = \bar{0}; \qquad \langle\bar{x}\rangle \tag{40}$$

$$\lambda\bar{p} \leq \bar{\pi}; \qquad \langle\bar{y}^{+}\rangle \tag{41}$$

$$\bar{\pi} - \lambda\bar{p} \leq \bar{p}; \qquad \langle\bar{y}^{-}\rangle \tag{42}$$

$$\lambda \geq 0 \tag{43}$$

En este problema se tiene la ventaja que $\bar{\pi}\geq\bar{0}$ para todas las soluciones del problema Dual, como se deduce de las restricciones $\lambda\bar{p} \leq \bar{\pi}_{(41)}$, $\lambda \geq 0_{(43)}$ y suponiendo que $\bar{p}>\bar{0}$, ya que de no ser así, simplemente se borrarán los escenarios con probabilidad cero y se normalizará $\bar{p}$, haciendo cierto el supuesto de $\bar{p}>\bar{0}$. Además de que $\bar{\pi}>\bar{0}$ si $\lambda > 0$ y por lo tanto $\left(r^{-1}\frac{\bar{\pi}}{\lambda}\right)$ es un vector de ponderadores de mercado para todas las soluciones factibles del problema Dual con $\lambda > 0$, haciendo $k = \frac{\bar{p}^T\bar{y}^{-*}}{\lambda^*}$.

Probablemente en la mayoría de situaciones de cobertura, minimizar la función de arrepentimiento negativo es de mayor interés que minimizar la función de arrepentimiento ya que frecuentemente sólo se debe tener cuidado en eliminar los errores que podrían hacer daño a la posición que se desea cubrir y no en los factores que podrían incrementarlo.

La cotización de valores y la habilidad para generar ponderadores de mercado con riesgo neutral que sean independientes de las preferencias del inversionista son muy importantes y solamente puede garantizarse utilizando las funciones de mínimo arrepentimiento. Para ver esto, obsérvese que la ecuación $\lambda\bar{p} \leq \bar{\pi}_{(41)}$ está activa si $\bar{y}^{+} > \bar{0}$; y así, por los resultados de holguras complementarias de programación lineal $\bar{\pi}= \lambda\bar{p}$ y por lo tanto es dependiente de $\bar{p}$, las preferencias estimadas del inversionista. Esto resulta útil en los casos de cobertura ya que ésta es la compra de seguridad basada en la evaluación del futuro.

ARREPENTIMIENTO MÍNIMO Y VALORES COTIZADOS POR DEBAJO DE SU PRECIO

Ahora, se desea examinar si un instrumento o una cartera de inversión está o no por debajo de su precio en un mercado dado y para algún período. Supóngase que el conjunto de escenarios está dado y que un conjunto de instrumentos con precios conocidos y correctos están disponibles.

Tómese el instrumento o la cartera de inversión "meta" que se desea evaluar y como antes sea c su valor de mercado y las componentes del vector $\bar{l}$ serán el valor de esta cartera al final del período bajo cada uno de los S escenarios. Será interesante saber si este instrumento o cartera de inversión está por encima, por debajo o tiene un precio equitativo con relación al mercado.

En lo que sigue, se podrá remplazar $MR(k)$ con $MDR(k)$ en todas las fórmulas dependiendo de que en el problema Primal se esté utilizando el criterio de mínimo arrepentimiento o el de mínimo arrepentimiento negativo.

Como consecuencia de las relaciones de optimalidad entre los problemas Primal y Dual que alcanzan el mismo valor en el óptimo, se deduce que:

$$MR(k) = r^{-1}\bar{l}^T\bar{\pi}^* + (k - c)\lambda^* = MDR(k) \tag{44}$$

y despejando c se obtiene:

$$c = r^{-1}\bar{l}^T\left(\frac{\bar{\pi}}{\lambda}\right) + k - \frac{MR(k)}{\lambda} \tag{45}$$

Por una parte se tiene que, si no hay arbitraje, es decir, $k = 0$, y la cartera de inversión "meta" está valuada equitativamente, entonces $k = MR(k) = MDR(k) = 0$.

Por otra parte, si se elige $\lambda^* = 1$ para que, como se demostró anteriormente la utilidad esperada ajustada al riesgo del inversionista, es decir, $k^* - MDR(k^*)_{(10)}$ sea máxima, entonces:

$$c = r^{-1}\bar{l}^T\left(\frac{\bar{\pi}}{\lambda}\right) + [k^* - MDR(k^*)] \tag{46}$$

Así, dados los escenarios futuros bajo incertidumbre, una manera para ver si un instrumento o una cartera de inversión están valuados por debajo de su precio es examinar la utilidad esperada ajustada al riesgo máxima obtenida al tratar de replicarlos. Como $k^* - MDR(k^*)_{(10)}$ puede ser positivo, negativo o cero, entonces la cartera de inversión puede estar por arriba, por abajo o estar equitativamente valuada según sea el caso.

Es posible tener instrumentos valuados por debajo de su precio en un mercado completo. Esto no podría persistir por largos períodos sin arbitraje en el mercado; sin embargo, podría suceder por un instante. Si esto sucede, es natural preguntarse cuál es el verdadero precio de equilibrio.

En un mercado completo, existe una solución óptima con función de arrepentimiento en el Primal igual a cero que satisface:

$$A^T\bar{x} = \bar{l}; \quad \bar{y}^+, \bar{y}^- = \bar{0} \tag{47}$$

Esto significa que para este caso el problema Primal se reduce a:

$$\begin{aligned} MR(0) = \min_{x} 0 & & & (48)\\ \text{sujeto a} & & & \\ r^{-1}A^T\bar{x} = r^{-1}\bar{l}; & \quad & (\bar{\pi}) & \quad (49)\\ \bar{q}^T\bar{x} \geq k - c; & \quad & (\lambda) & \quad (50) \end{aligned}$$

y el Dual se reduce a:

$$\max r^{-1}\bar{\imath}^T\bar{\pi} + (k-c)\lambda \qquad (51)$$
$$\text{sujeto a}$$
$$r^{-1}A\bar{\pi} - \lambda\bar{q} = \bar{0}; \qquad (\bar{x}) \qquad (52)$$
$$\lambda \geq 0 \qquad (53)$$

Un caso especial es en el cual no hay arbitraje, es decir $k = 0$. En este caso, λ es estrictamente positivo porque al no haber arbitraje, para $k > 0$, la función de arrepentimiento no puede valer cero y además, en el óptimo, el problema Primal y el Dual alcanzan el mismo valor y, por lo tanto, $r^{-1}\bar{\imath}^T\bar{\pi}^* + (k-c)\lambda^*_{(51)} = 0$ y $k = 0$, lo que implica que $0 \leq r^{-1}\bar{\imath}^T\bar{\pi}^* = c\lambda^*$.

Como los problemas Primal y Dual reducidos tienen el mismo valor en el óptimo, se sigue:

$$r^{-1}\bar{\imath}^T\bar{\pi}^* + (k-c)\lambda^* = 0 \qquad (54)$$

Cuando la restricción del Dual $\lambda \geq 0_{(53)}$ está activa en el óptimo, λ es positiva, por lo que:

$$r^{-1}\bar{\imath}^T\left(\frac{\bar{\pi}^*}{\lambda^*}\right) = c - k \qquad (55)$$

y, por lo tanto, si $\bar{\pi}>\bar{0}$, lo cual esta garantizado si se utiliza el modelo con MDR, se tiene que el precio de la cartera de inversión "meta" fué ajustado por $c - k$. Por lo tanto, una cartera de inversión con función de arrepentimiento igual a cero, k puede ser interpretado como el grado de bajo precio en el mercado. Si $k > 0$ entonces la cartera de inversión "meta" está sobrevalorada; $k = 0$ corresponde a un precio equitativo de la cartera de inversión "meta" y $k < 0$ implica que la cartera de inversión está cotizada por debajo de su precio.

Cuando no hay arbitraje, $k = 0$; $\lambda > 0$; y

$$r^{-1}\bar{\ell}^T\left(\frac{\bar{\pi}^*}{\lambda^*}\right) = c \tag{56}$$

lo que indica que el precio de la cartera de inversión "meta" es uno justo y que $\left(r^{-1}\frac{\bar{\pi}}{\lambda}\right)$ es un vector de ponderadores "meta". Por lo tanto, la subvaluación solamente puede ocurrir en presencia de arbitraje. Esto implica el siguiente resultado:

TEOREMA

Suponiendo como función del inversionista, el criterio de Mínimo Arrepentimiento Negativo y que el mercado es completo, entonces:

Un vector de ponderadores de mercado o de ponderadores "meta" existe si y solo si no hay arbitraje.

Capítulo 4
Caso con un mercado completo sin arbitraje

En este capítulo se desarrolla el caso de que el mercado es completo y sin arbitraje debido al resultado del teorema del capítulo anterior, obteniendo un método para encontrar vectores de probabilidades de mercado con riesgo neutral y una tasa libre de riesgo.

Suponiendo que no hay arbitraje, es decir $k = 0$ y organizando el problema primal de una manera diferente se tiene que:

Primal:

$$MR(0) = \min \overline{p}^T\overline{y}^+ + \overline{p}^T\overline{y}^- \tag{57}$$

sujeto a

$$-r\overline{y}^+ + r\overline{y}^- + A^T\overline{x} = \overline{t}; \quad (\overline{\psi}) \tag{58}$$

$$\overline{p}^T\left(\overline{y}^+ - \overline{y}^-\right) - \overline{q}^T\overline{x} \geq -c; \ (\lambda) \tag{59}$$

$$\overline{y}^+, \overline{y}^- \geq \overline{0} \tag{60}$$

Dual:

$$\max \overline{t}^T\overline{\psi} - \lambda c \tag{61}$$

sujeto a

$$A\overline{\psi} - \lambda\overline{q} = \overline{0}; \qquad (\overline{x}) \tag{62}$$

$$-\overline{p} \leq r\overline{\psi} - \lambda\overline{p} \leq \overline{p}; \quad \left(\overline{y}^+, \overline{y}^-\right) \tag{63}$$

$$\lambda \geq 0 \tag{64}$$

Como se está suponiendo que el mercado es completo y no hay arbitraje, entonces $MR(0) = 0$ y por lo tanto:

- $\overline{y}^{+} = \overline{y}^{-} = 0$; haciendo la ecuación $-\overline{p} \leq r\overline{\psi} - \lambda\overline{p} \leq \overline{p}_{(63)}$ redundante.
- ψ es por lo tanto, independiente de las preferencias del inversionista, $\overline{p}$.
- cualquier solución factible del problema dual con $\lambda \geq 1$ puede ser utilizado para construir un vector de precios de mercado, correspondiéndole un vector de probabilidades con riesgo neutral y una tasa libre de riesgo para el periodo.
- $\lambda > 1$ corresponde a una cartera de inversión "meta" cotizada por debajo de su precio, $\lambda < 1$ corresponde a una sobrevaloración de la cartera de inversión "meta" y $\lambda = 1$ corresponde a una cartera de inversión "meta" cotizada eficientemente.
- es posible seleccionar c tal que $\lambda = 1$ ya que incrementando c se incrementará λ

Esto sugiere el siguiente algoritmo para el uso de $MR(0)$ como una herramienta de valuación en un mercado completo y libre de arbitraje.

Elija $\lambda = 1$ y resuelva el problema dual para $\overline{\psi}^{*}$ (de las ecuaciones (61) a la (64)); observando que el valor de $\overline{\psi}^{*}$ es independiente de c ya que no aparece en las restricciones.

Ya que el mercado es completo, si se elige $c = \overline{i}^{T}\overline{\psi}^{*}$, y dada la dualidad en los problemas de programación lineal, se tiene que $(\overline{y}^{+})^{*} = (\overline{y}^{-})^{*} = \overline{0}$ y $\overline{\psi}^{*}$ es independiente de $\overline{p}$.

Por lo tanto, las probabilidades de mercado con riesgo neutral son:

$$\rho_i = \psi_i^{*} / \sum \psi_i^{*}. \tag{65}$$

Y la tasa libre de riesgo es:

$$r^{-1} = \sum \psi_i^{*}. \tag{66}$$

Conclusiones

En esta tesis, se expuso la teoría desarrollada por el Dr. Ron Dembo para resolver el problema de replicación de carteras de inversión. Para tal exposición, fue necesario estudiar diversos conceptos de la Programación Matemática.

Con el desarrollo del modelo, se obtuvo un método para encontrar vectores de ponderadores de mercado con riesgo neutral y una tasa libre de riesgo. Con este mecanismo, se obtuvieron además, criterios de decisión y condiciones para generar carteras de replicación.

El modelo presentado tiene la ventaja sobre otros modelos de que éste se puede aplicar más fácilmente a un mercado financiero como el mexicano, en el cual no se cumplen las hipótesis de las otras teorías.

Considero que la aplicación de modelos matemáticos como el presentado en este trabajo en problemas económicos y financieros, permitirán el tomar mejores decisiones y por lo tanto, lograr un mayor desarrollo.

El presente trabajo, pudiera extenderse en dos direcciones más. La primera, sería el desarrollar la teoría cuando se incluyen restricciones de no negatividad en las variables de constitución de la cartera que no fueron incluídas en este trabajo. La segunda, sería el tratar de aplicar el modelo de esta teoría en problemas reales, viendo las dificultades que presente su aplicación.

Apéndice A
Glosario de Términos

- *Arbitraje*: Se refiere a

    1. La compra venta del mismo valor en mercados distintos que permite obtener una utilidad en virtud de las diferencias en los precios.
    2. la compra de un valor seguida de una venta a corto plazo del mismo valor con objeto de obtener una utilidad en virtud de la diferencia de precio.

- *Cartera de inversión*: Conjunto de inversiones financieras que cumple con los objetivos de liquidez, rendimiento, plazo y riesgo fijados por el inversionista, ya sea una persona física o moral. La cartera de inversión puede contener bonos y acciones comunes o preferenciales de diversas empresas, pero normalemente no se refiere a bienes concretos, tales como oro, plata u obras de arte.

- *Cobertura*: Este término se utiliza para indicar que se tiene parcial o totalmente cubierto el riesgo inherente en una transacción. Limita la posible pérdida de una inversión al neutralizar la posición de los valores. Se dice que una cobertura límite que elimina completamente la posibilidad de pérdida o ganancia es una cobertura perfecta.

- *Cobertura en corto*: Estrategia que limita parcial o totalmente el riesgo de la titularidad de valores Se mantiene la inversión con posiciones en corto y en largo con el fin de reducir el impacto de la caída del precio del valor respectivo.

- *Emisora*: Entidad que capta fondos por medio de la emisión de valores.
- *Especulación*: Inversión a corto plazo, con alto riesgo y la expectativa de alto rendimiento.
- *Inflación*: Aumento sostenido del nivel general de precios, normalmente medido por el índice de precios al consumidor.
- *Instrumento Bursátil*: Término genérico con el cual se denomina a los diversos títulos que documentan emisiones de valores. Se refiere a los documentos mismos que prueban la existencia de los respectivos valores.
- *Inversión*: Aportación de recursos para obtener un beneficio futuro.
- *Liquidez*:
    1. Cualidad que tiene un bien o valor para convertirse en efectivo sin una pérdida significativa de su valor. Es la facilidad de vender o comprar una inversión.
    2. Capacidad de la empresa para hacer frente a sus pasivos a corto plazo.
    3. Capacidad del mercado en general o en relación a un valor específico para absorber una cantidad razonable de compra o venta sin cambio importante de precio.
- *Mercado de Valores*: Un mercado organizado (es decir, un mercado que reúne los requisitos de tener un lugar físico, intermediarios, autoridades y reglas de inscripción, operación e información) para la compraventa de valores. Normalmente, consiste en varios mercados subsidiarios: un mercado de capitales (para inversiones a largo plazo), un mercado de dinero (para inversiones a corto plazo), un mercado primario (para la nueva emisión de valores) y un mercado secundario (para la compraventa de valores ya emitidos).
- *Plazo*: Período que transcurre entre la realización (o compra) de una inversión y su venta o vencimiento.

- *Posición en corto*: Término bursátil que describe la cuenta de un cliente que, para completar una venta, ha recibido valores en préstamo. La cuenta del cliente ocupa una posición en corto ya que el cliente debe títulos al intermediario bursátil. Este término también describe la cuenta de un cliente que ha pedido una opción de compra o venta, pero que no la ha ejercido o que no ha cerrado la operación.

- *Posición en largo*: Expresión financiera que indica la propiedad de un activo y el derecho a transferirlo y que implica el riesgo de pérdida si el precio del valor declina en el mercado. Por ejemplo, se usa para indicar que un intermediario bursátil o un agente de valores posee más acciones o bonos de los que se ha comprometido a entregar. También puede aplicarse a valores de propiedad de un cliente que en un momento dado se hallan en poder de su agente bursátil.

- *Rendimiento*: Beneficio obtenido de la inversión financiera, generalmente expresado por medio de un porcentaje. Hay varias formas de expresar las tasas de rendimiento, puede ser anual, simple, compuesto, nominal, bruta, neta, etc.

  Se pueden obtener rendimientos por los siguientes conceptos:

  (a) Ganancias de capital
  Estas se obtienen al comprar un título a determinado precio y al venderlo, tiempo después, a otro precio más alto. La diferencia entre los dos precios se conoce como ganancia de capital (por supuesto, también puede haber pérdidas de capital).

  (b) Pago de interés
  Algunos valores pagan intereses de acuerdo a una tasa convenida desde la emisión. Esta tasa se expresa generalmente como porcentaje.

  (c) Pago de dividendos.
  Son las cantidades que las sociedades anónimas entregan a los propietarios de sus acciones, por concepto de utilidades, cuando las hay.

- *Riesgo*: Posibilidad de que el rendimiento esperado de una inversión no se realice.

- *Venta en corto*: Una operación en un mercado de valores que implica la venta de un valor que no se posee, la cual se cubre por la compra del mismo valor en una fecha posterior, con la expectativa de conseguirlo en un precio menor al precio de venta.

Apéndice B
El Modelo de Markowitz

Markowitz propuso de manera específica que se utilice la varianza de los rendimientos esperados como medida de riesgo, y que el criterio de selección fuese minimizar la varianza del rendimiento de la cartera con lo cual se minimiza el riesgo.

La idea de utilizar la varianza surge en forma muy natural del hecho de que si la varianza fuese cero no habría incertidumbre. Así mientras menor sea la varianza menor será el posible rango de variación de los rendimientos, menor la incertidumbre y por lo tanto el riesgo. En este sentido, la varianza es una medida indirecta del riesgo ya que lo que mide en realidad es el grado de incertidumbre.

Las variables de decisión en este modelo, son los porcentajes del presupuesto que se deben invertir en cada instrumento. Supóngase que hay N instrumentos y sea

$x_i =$ porcentaje del presupuesto que se debe invertir en el instrumento i tal que

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0 \text{ para } i = 1, 2, \ldots, N$$

Es decir, estas son las variables que están bajo el control del inversionista y que proporcionan la composición de la cartera, una vez que se han fijado.

De cada instrumento i se supone conocido:

i) Su rendimiento esperado

$$\mu_i = E(\gamma_i)$$

ii) La varianza de sus rendimientos

$$\sigma_i^2 = \sigma_{ii} = Var(\gamma_i)$$

iii) La covarianza entre los rendimientos de cada pareja de instrumentos

$$\sigma_{ij} = Cov(\gamma_i, \gamma_j)$$

donde γ_i es la variable aleatoria que representa el rendimiento de cada tipo de instrumento $i = 1, 2, \ldots, N$

Por lo tanto, el rendimiento de la cartera será:

$$\gamma = \sum_{i=1}^{N} x_i \gamma_i$$

su rendimiento esperado será:

$$\mu = \sum_{i=1}^{N} x_i \mu_i$$

y su varianza será:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}$$

Se dirá que una cartera con rendimiento esperado μ es *eficiente* si la varianza asociada a ella es la mínima entre todas las posibles carteras que proporcionan el mismo rendimiento esperado. De manera alternativa, una cartera con varianza σ^2 es *eficiente* si el rendimiento esperado μ es el máximo entre todas las posibles carteras que propocionan la misma varianza.

Lo ideal sería conocer todas las carteras eficientes para que fuera posible tener un panorama completo de las posibilidades de inversión. Entonces se tendría que resolver el problema siguiente para todos los valores posibles de μ:

$$\min \sigma^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \mu_i = \mu$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0; \; i = 1, 2, \ldots, N$$

Resolver este problema para un valor de μ implica obtener una cartera eficiente asociada a este rendimiento esperado. Al resolverlo para todo el rango de valores posibles de μ se obtendría la frontera de carteras eficientes.

Alternativamente se podría resolver el siguiente problema buscando la cartera con mayor rendimiento esperado:

$$\max \ \mu = \sum_{i=1}^{N} x_i \mu_i$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij} = \sigma^2$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0; \ i = 1, 2, \ldots, N$$

para todos los valores de σ^2.

Apéndice C

En este apéndice se hará la demostración de que la función $h(k) = k - MDR(k)$, alcanza su máximo en k^*, siendo k^* el punto donde la subdiferencial es igual a 1.

Obsérvese que la función $E\left(\| A^T\bar{x} - \bar{t} \| \right) : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{R}$ es una función convexa, ya que si se toman $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \mathbf{R}^N$ y $q_1, q_2 \geq 0$, tales que $q_1 + q_2 = 1$, entonces

$$
\begin{aligned}
E\left(\| A^T(q_1\bar{x}_1 + q_2\bar{x}_2) - \bar{t} \| \right) \\
&= E\left(\| A^T(q_1\bar{x}_1) + A^T(q_2\bar{x}_2) - \bar{t} \| \right) \\
&\leq E\left(\| A^T(q_1\bar{x}_1)\| + \|A^T(q_2\bar{x}_2)\| - \| \bar{t} \| \right) \\
&= E\left(\| A^T(q_1\bar{x}_1)\|\right) + E\left(\|A^T(q_2\bar{x}_2)\|\right) - E\left(\| \bar{t} \|\right) \\
&\leq E\left(\| A^T(q_1\bar{x}_1)\|\right) + E\left(\|A^T(q_2\bar{x}_2)\|\right) \\
&= q_1E\left(\| A^T\bar{x}_1\|\right) + q_2E\left(\|A^T\bar{x}_2\|\right) \\
&= q_1E\left(\| A^T\bar{x}_1 - \bar{t}\|\right) + q_2E\left(\|A^T\bar{x}_2 - \bar{t}\|\right)
\end{aligned}
$$

Ahora se demostrará que la función

$$MDR(k) = Minimizar_{\bar{x}}\ \mathrm{r}^{-1}E\left(\left\|\left(A^T\bar{x} - \bar{t}\right)\right\| \right) \qquad (1)$$

sujeto a

$$\mathrm{r}^{-1}E\left(A^T\bar{x} - \bar{t}\right) + \left(\mathrm{c} - \bar{q}^T\bar{x}\right) \geq k \qquad (2)$$

es una función convexa. Para ello se definirá la siguiente función auxiliar como sigue:

$$\Phi(\bar{x},k) = \begin{cases} E\left(\left\| A^T\bar{x} - \bar{l} \right\| \right) & si\ r^{-1}E\left(A^T\bar{x}-\bar{l}\right) + \left(c - \bar{q}^T\bar{x}\right) \geq k \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

por lo que

$$MDR(k) = Minimizar_{\bar{x}}\ \Phi(\bar{x},k) \tag{3}$$

Para demostrar que $MDR(k)$ es una función convexa, se demostrará que el epígrafo de $MDR(k)$, que es el conjunto $P(MDR) = \{\ (k,\alpha) \mid MDR(k) \leq \alpha\ \}$, es un conjunto convexo.

Sean $(k_1,\alpha_1), (k_2,\alpha_2) \in P(MDR)$. Para cada $\epsilon > 0$, se puede encontrar vectores $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \mathbf{R}^N$ tales que

$$\Phi(\bar{x}_1,k_1) \leq Minimizar_{\bar{x}}\ \Phi(\bar{x},k_1) + \epsilon = MDR(k_1) + \epsilon$$
$$\Phi(\bar{x}_2,k_2) \leq Minimizar_{\bar{x}}\ \Phi(\bar{x},k_2) + \epsilon = MDR(k_2) + \epsilon$$

y por ser $\Phi(\bar{x},k)$ una función convexa como ya se demostró anteriormente, se deduce que $\forall q_1, q_2$ tal que $q_1 + q_2 = 1$ y $\epsilon > 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} MDR(q_1k_1 + q_2k_2) &= Minimizar_{\bar{x}}\ \Phi(\bar{x}, q_1k_1 + q_2k_2) \\ &\leq \Phi(q_1\bar{x}_1 + q_2\bar{x}_2,\ q_1k_1 + q_2k_2) \\ &\leq q_1\alpha_1 + q_2\alpha_2 \end{aligned}$$

y por lo tanto, la función $MDR(k)$ es convexa.

A continuación se demostrará que $f(k) : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ si es una función convexa y no decreciente (como ya se ha demostrado que lo es la función $MDR(k)$), entonces la función $h(k) = k - f(k)$, alcanza su máximo en k^*, siendo k^* el punto donde la recta $y = f(k^*) + (k - k^*)$ es tangente a la gráfica de f.

Para ello, se hará la siguiente definición de tangencia:

Definición:

La recta $\mathcal{R} : y = mx + b$ es tangente a la curva $\mathcal{C} : y = f(x)$ en el punto x_0 si existe $\epsilon > 0$ tal que

$$i)\ mx + b \leq f(x) \qquad \forall x \in V(x_0, \epsilon)$$

o

$$ii)\ mx + b \geq f(x) \qquad \forall x \in V(x_0, \epsilon)$$

Ahora se demostrarán dos lemas que permitirán demostrar que la función $h(k) = k - f(k)$ alcanza su máximo en el punto k^*.

Lema 1

Si $f(x)$ es una función convexa y la recta $\mathcal{R} : y = mx + b$ es tangente a la curva $\mathcal{C} : y = f(x)$ en el punto x_0, entonces se cumple la condición $i)\ mx + b \leq f(x) \quad \forall x \in V(x_0, \epsilon)$.

Dem.

Supóngase que se cumple la condición $ii)\ mx + b \geq f(x) \quad \forall x \in V(x_0, \epsilon)$. Sean $x_1, x_2 \in V(x_0, \epsilon)$ tales que $x_0 = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$, $0 \leq \lambda \leq 1$ y

$$mx_1 + b > f(x_1)$$
$$mx_2 + b > f(x_2)$$

Se podrán encontrar siempre estos puntos, ya que si éstos no están en $V(x_0, \epsilon)$, se puede una $\epsilon' > \epsilon$ tal que $x_1', x_2' \in V(x_0, \epsilon')$ cumplan las condiciones anteriores suponiendo que la función no es completamente lineal.

Entonces

$$\lambda (mx_1 + b) > \lambda f(x_1)$$
$$(1-\lambda)(mx_2 + b) > (1-\lambda) f(x_2)$$

y

$$\begin{aligned} mx_0 + b &= m(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) + b \\ &> \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \\ &\geq f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow mx_0 + b > f(x_0)$$

Lo que resulta contradictorio, ya que x_0 era el punto de tangencia. Por lo tanto, se cumple la condición $i)$ $mx + b \leq f(x) \quad \forall x \in V(x_0, \epsilon)$.

<u>Lema 2</u>

Sea $f(x) : D \subseteq \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{R}$ una función convexa y la recta $\mathcal{R} : y = mx + b$ es tangente a la curva $\mathcal{C} : y = f(x)$ en el punto x_0, entonces se cumple la condición $i)$ $mx + b \leq f(x) \quad \forall x \in D$.

<u>Dem</u>.

Supóngase que $\exists x_3 \in D$ tal que no cumple la condición, es decir $mx_3 + b > f(x_3)$. Por el lema anterior tal que se cumple la condición
$i)$ $mx + b \leq f(x) \quad \forall x \in V(x_0, \epsilon)$. Sea $x_1 \in V(x_0, \epsilon)$ entonces $mx_1 + b \leq f(x_1)$.

Por la convexidad de la función se tiene que con $0 \leq \lambda \leq 1$ tal que $x_1 = \lambda x_0 + (1-\lambda) x_3$

$$f(x_1) = f(\lambda x_0 + (1-\lambda) x_3) \leq \lambda f(x_0) + (1-\lambda) f(x_3)$$

pero $f(x_0) = mx_0 + b$ por ser x_0 el punto de tangencia y como se supuso que $f(x_3) < mx_3 + b$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
f(x_1) &= f(\lambda x_0 + (1-\lambda)x_3) \\
&\leq \lambda f(x_0) + (1-\lambda) f(x_3) \\
&< m(\lambda x_0 + (1-\lambda)x_3) + b \\
&\leq m x_1 + b
\end{aligned}
$$

lo que resulta contradictorio, ya que se habia supuesto que x_1 cumplía con la condición $mx_1 + b \leq f(x_1)$. Por lo tanto se cumple la condición i) $mx + b \leq f(x) \quad \forall x \in D$.

Finalmente la función $h(k) = k - f(k)$ alcanza su máximo en el punto k^*, que es el punto de tangencia de la recta $y = f(k^*) + (k - k^*)$, ya que por lo demostrado en el lema anterior se tiene que:

$$
\begin{aligned}
& f(k^*) + (k - k^*) \leq f(k) \qquad \forall x \in D \\
\Rightarrow \quad & k - f(k) \leq k^* - f(k^*) \qquad \forall x \in D \\
\Rightarrow \quad & h(k) \leq h(k^*) \qquad \forall x \in D
\end{aligned}
$$

La condición de que k^* sea el punto de tangencia de la recta $y = f(k^*) + (k - k^*)$, es equivalente a que 1 sea el subgradiente de la función $f(x)$ en el punto k^*.

Bibliografía

1. Dembo, Ron
   Optimal Portfolio Replication
   Algorithmics Incorporated
   September, 1993

2. Dembo, Ron
   Scenario Optimization
   Annals of Operations Research, Vol. 30, 63-80 [1991]

3. Dembo, R.S. and King A. J.
   Tracking Models and the Optimal Regret Distribut. in Asset Allocation
   Applied Stochastic Models and data Analysis, Vol. 8, 151-157 [1992]

4. Bazaraa, Mokhtar and Shetty, C.M.
   Nonlinear Programming
   Theory and Algorithms
   John Wiley & Sons, Inc.
   Canada, 1979

5. Bazaraa, Mokhtar y Jarvis, John
Programación Lineal y Flujo en Redes
Edit. Limusa
México, 1984

6. Márquez Diez-Canedo, Javier
Fundamentos de Teoría de Optimización
Editorial Limusa
México, 1987

7. Márquez Diez-Canedo, Javier
Carteras de Inversión
Fundamentos Teóricos y Modelos de Selección Optima
Editorial Limusa
México, 1981

8. Calvillo Vives, Gilberto
Métodos de la programación lineal
V Coloquio del Departamento de Matemáticas
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados IPN
Pátzcuaro, Michoacán, Agosto de 1987

9. Armitano, Orlando, Edelman, Jorge y García Palomares, Ubaldo
Programación No Lineal
Edit. Limusa
México, 1985

10. John L. Maginn and Donald L. Tuttle
Mananging Investment Portfolios
A Dynamic Process
The Institute of Chartered Financial Analysts
Warren, Gorham & Lamont
Second edition 1990

11. Comisión Nacional de Valores
Glosario de Términos Bursátiles
México, 1987

12. Madura, Jeff
Financial Markets and Institutions
2nd. Edition
West Publishing Company