

18
rej



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**ANÁLISIS DE UN MEDIO
ANISOTRÓPICO INHOMOGÉNEO
MEDIANTE TÉCNICAS DE ÓPTICA
MATRICIAL.**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

F Í S I C O

P R E S E N T A :

MARTHA DE LA LUZ HERNÁNDEZ PRIAN
DIRECTOR: DR. ENRIQUE GEFFROY AGUILAR



**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

MÉXICO, D.F.

DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES
FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

AGOSTO 1996

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVÁNAMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: ANÁLISIS DE UN MEDIO ANISOTROPICO INHOMOGENEO MEDIANTE TECNICAS DE OPTICA MATRICIAL

realizado por Martha de la Luz Hernández Prian

con número de cuenta 8652176-5 , pasante de la carrera de Física

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario DR. ENRIQUE GEFFROY AGUILAR

Propietario M. EN C. ENRIQUE LOPEZ MORENO

Propietario FIS. ANDRES VALENTIN PORTA CONTRERAS

Suplente DRA. MA. CRISTINA PIÑA BARBA

Suplente DR. JORGE GARCIA MACEDO

p. a. 
Consejo Departamental de Física
DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORGA

FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FISICA

SUMARIO

El objetivo principal de este trabajo es el estudio de la anisotropía óptica de fluidos poliméricos cuando éstos están sujetos a deformaciones inducidas por flujos. Experimentalmente se tienen ventajas en el uso de técnicas ópticas en la determinación de la anisotropía, la cual a su vez permite estudiar la dinámica microscópica de moléculas poliméricas. Las ventajas principales de las técnicas ópticas son su carácter no intrusivo, su rapidez de medida y porque permite estudiar fluidos sujetos a deformaciones finitas, es decir, deformaciones no-lineales.

Las deformaciones finitas son *indispensables* para los estudios de dinámica no-lineal de sistemas poliméricos. Estas deformaciones se logran generar mediante flujos "**fuertes**" no-homogéneos que son los que con mayor frecuencia se encuentran en la naturaleza, pero que para el experimentalista son difíciles de generar y controlar a la vez. A pesar de las limitaciones experimentales, en el laboratorio es posible generar flujos *bidimensionales fuertes* con características casi ideales, útiles para conocer la anisotropía inducida por flujos en forma precisa y para estudiar la dinámica polimérica. Para esto, se requiere de un análisis teórico capaz de evaluar las contribuciones de la no-homogeneidad del flujo en la dirección de propagación de la luz.

Aquí se presenta la solución, en forma general y de utilidad en el laboratorio, para estudiar una anisotropía diferencial no-homogénea, la cual se presenta en líquidos poliméricos como resultado de la no-homogeneidad del flujo. La solución se alcanza utilizando el Cálculo Matricial de Müller para luz polarizada y considerando que la anisotropía inducida es el resultado del *perfil* de la rapidez de deformación a lo largo del camino óptico, consecuencia de las características del flujo fuerte y del dispositivo experimental. La existencia de dicha solución hace posible *corregir* los datos experimentales que son adversamente afectados por las inhomogeneidades, y tiene importantes ventajas en el estudio de líquidos poliméricos desde un punto de vista microscópico, ya que permite contar con información precisa acerca del fenómeno de interés, la cual a su vez permite validar las hipótesis básicas de los modelos que describen los sistemas macromoleculares.

A MIS PADRES

LEONOR PRIAN CALETTI

JOSÉ V. HERNÁNDEZ MIRANDA

Porque gracias a su ayuda y el apoyo que en todo momento siempre me han brindado, he logrado cumplir satisfactoriamente uno de mis objetivos que me había trazado en la vida.

A LA MEMORIA DE MIS ABUELOS

LEONOR CALETTI MARTÍNEZ

JESÚS PRIAN MARTÍNEZ

A MIS HERMANOS

Ma. LEONOR

LAURA ELENA

PABLO JOSÉ

DAVID JESÚS

Gracias por su apoyo y cariño hacia mi.

A

Pedro Cuatlayol Anrubio.

Con cariño.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer mucho a mi asesor y director de tesis por el apoyo y la formación académica, además de haberme brindado su amistad:

Dr. Enrique Geffroy Aguilar

También agradezco al jurado que evaluó este trabajo, contribuyendo a estas correcciones, comentarios y sugerencias.

Asimismo, quiero agradecer muy en especial a mi madre **Leonor Piran Caletti** por su apoyo, del mismo modo a **Pedro Cuatláyol Anrubio** por su paciencia y dedicación para la revisión final de este trabajo. Ayudando con sus comentarios a mejorar y aclarar ideas. Agradezco al **Dr. Guillermo Pulos** por la impresión final de este trabajo.

Agradezco a todos los profesores que me han formado como profesionista durante toda mi carrera.

Agradezco a todos mis amigos y compañeros por haber compartido experiencias buenas y malas a lo largo de la carrera.

Agradezco al Departamento de Polímeros "Reología-Óptica" del Instituto de Investigaciones en Materiales de la U.N.A.M., donde realicé este trabajo.

Finalmente, agradezco a la **Universidad Nacional Autónoma de México** por la formación que me ha brindado.

"Por mi raza hablará el espíritu"

Universidad Nacional Autónoma de México.

ÍNDICE

	PAG
INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO I: EL MÉTODO MATRICIAL PARA EVALUAR LA ANISOTROPÍA ÓPTICA DE MEDIOS HOMOGÉNEOS.	6
1.1 INTRODUCCIÓN	7
1.2 POLARIZACIÓN Y MATERIALES ÓPTICAMENTE ANISOTRÓPICOS	
1.2.A LUZ POLARIZADA	8
1.2.B ANISOTROPÍA ÓPTICA	14
1.2.C BIRREFRINGENCIA Y DICROISMO	16
1.2.D ANISOTROPÍA INDUCIDA POR FLUJOS	20
1.3 EL MÉTODO MATRICIAL DE MÜLLER PARA EL ANÁLISIS DE UN SISTEMA ÓPTICO POLARIZANTE	25
1.4 ECUACIÓN DIFERENCIAL PARA MEDIOS ANISOTRÓPICOS	33
CAPÍTULO II: ANISOTROPÍA ÓPTICA DE MEDIOS NO-HOMOGÉNEOS.	39
2.1 INTRODUCCIÓN	40
2.2 MATRIZ DIFERENCIAL M DE UN MEDIO BIRREFRINGENTE	44
2.3 CÁLCULO DE LA MATRIZ DIFERENCIAL M A PARTIR DE LA MATRIZ GENERAL PARA UN MEDIO BIRREFRINGENTE	60

	PAG
CAPÍTULO III: ANISOTROPÍA ÓPTICA NO-HOMOGÉNEA DE LÍQUIDOS POLIMÉRICOS.	68
3.1 BIRREFRINGENCIA BICOLOR DE FLUJO. EL DISPOSITIVO EXPERIMENTAL.	69
3.2 ANÁLISIS DE LAS ECUACIONES DE BIRREFRINGENCIA Y ORIENTACIÓN PARA LA TÉCNICA DE DOS COLORES.	74
3.3 APLICACIÓN DE LA MATRIZ INTEGRABLE EN MEDIOS BIRREFRINGENTES NO-HOMOGÉNEOS.	83
CAPÍTULO IV: CONCLUSIONES.	105
APÉNDICE "A"	111
REFERENCIAS.	122

INTRODUCCIÓN

Las actividades de investigación sobre las que esta tesis se basa en estudiar la dinámica de sistemas poliméricos. En particular, es de interés estudiar dichos fluidos poliméricos cuando están sujetos a grandes deformaciones y conocer los espectros de relajamiento del fluido macromolecular.

Para realizar estas actividades de investigación, es necesario conjuntar tres ideas básicas: (1) el uso de una técnica óptica capaz de medir los cambios que el flujo sufre cuando está sujeto a deformaciones, (2) la aplicación de una técnica capaz de generar las deformaciones en el fluido que pueden considerarse como grandes o finitas y (3) el estudio de modelos macromoleculares con una dinámica microscópica, que es el objeto fundamental de estos estudios.

El programa de trabajo de esta tesis se ha enmarcado dentro de las dos primeras actividades, buscando esencialmente resolver un problema que se tiene con la metodología experimental cuando se acoplan las técnicas ópticas con las de mecánica de fluidos.

Esto es, en el laboratorio es posible generar grandes deformaciones (deformaciones finitas) en una pequeña celda de flujos de manera que las historias de deformación generadas se pueden describir con base en un modelo matemático

que permite una solución analítica. Sin embargo, el flujo exhibe marcados efectos de borde ocasionando que los datos experimentales acarreen un error sistemático debido a dichas limitaciones experimentales. Los datos representan la anisotropía del fluido que se induce con el flujo y están directamente relacionados con la dinámica de los polímeros. Por tanto, el objetivo de este trabajo es: *evaluar los efectos sobre la anisotropía de fluidos poliméricos cuando éstos se generan mediante deformaciones finitas, las cuales son espacialmente no-homogéneas.*

Las deformaciones finitas son indispensables para los estudios de dinámica no-lineal de sistemas poliméricos. Estas deformaciones se generan mediante *flujos fuertes* no-homogéneos. Se consideran *flujos fuertes* aquellos que son fundamentalmente elongacionales, aunque pueden presentar un cierto grado de vorticidad.

Éstos se pueden realizar fácilmente en el laboratorio utilizando una celda de dos rodillos giratorios generando así flujos *bidimensionales fuertes*. Los rodillos giran con la misma velocidad angular y dirección, produciéndose una historia de deformaciones esencialmente elongacional en la región entre los rodillos. Con esta geometría es posible generar flujos con valores diferentes del cociente de velocidad de deformación y vorticidad, así como de la *rapidez de corte* (llamado "shear rate" en la literatura inglesa). Estos dos parámetros, el cociente y la rapidez de corte del flujo, son suficientes para conocer o calcular las historias de deformación a las cuales están sujetas las sustancias o fluidos poliméricos y que a su vez, generan los cambios de conformación de la estructura polimérica que son de interés. En el Capítulo III se amplían estas ideas.

Los cambios conformacionales en la sustancia polimérica se pueden observar porque conllevan anisotropías ópticas que experimentalmente es posible medir. Estas anisotropías se deben a que el índice de refracción a lo largo de la estructura principal de la molécula, es ligeramente diferente al índice de refracción en la dirección perpendicular a la estructura principal.

Un sistema polimérico en reposo, sin deformación, tiene un estado macroscópico isotrópico, ya que la cadena polimérica tiende a una estructura conformacional de forma esférica (máximo desorden configuracional). En este caso, los diferentes elementos de la cadena polimérica producen una anisotropía promedio que es cero, ya que no existe orientación preferencial de los segmentos

en la cadena polimérica. Los cuerpos con índices de refracción diferentes en al menos dos direcciones principales, se dice que son anisotrópicos. Si el polímero está sometido a una deformación, la anisotropía promedio del polímero resulta ser diferente de cero, pues existe una orientación promedio para los segmentos en la cadena polimérica. Con esto, la anisotropía óptica del fluido polimérico que se observa en el laboratorio está directamente relacionada con la orientación de sus elementos, resultado de las deformaciones por la acción del flujo.

Existen varias técnicas ópticas útiles para evaluar la anisotropía óptica de una muestra, y que generalmente están definidas en el campo de la elipsometría. Todas estas técnicas utilizan luz polarizada para evaluar la anisotropía óptica de la muestra. Existe una técnica para evaluar las propiedades de anisotropía óptica inducida por flujo, conocida como *anisotropía bicolor inducida por flujos*. Ésta es una técnica que permite conocer tanto el grado de anisotropía óptica como la orientación de los ejes principales del tensor del índice de refracción con respecto a los ejes principales del campo del flujo que induce la anisotropía en el líquido polimérico. De esta manera, es posible estudiar las conformaciones de los sistemas poliméricos sujetos a flujos.

Las técnicas mecánicas que frecuentemente se usan para mediciones reológicas también se utilizan para conocer las conformaciones poliméricas. Sin embargo, las técnicas ópticas tienen ventajas en el estudio de sistemas con tiempos característicos cortos, pues permiten una medición muy rápida, que en estos casos es indispensable. También dichas técnicas permiten obtener información del comportamiento del material que es local en la escala del flujo del líquido polimérico y por tanto, resultan convenientes en el estudio de sistemas inhomogéneos. La rapidez de las técnicas para la anisotropía óptica hace posible conocer los *tiempos de relajamiento* de las cadenas poliméricas (al ser sometidas a una deformación finita como resultado del flujo generado). Igualmente, es posible conocer las propiedades mecánicas, como la viscosidad, midiendo los cambios en la anisotropía y la orientación de la cadena polimérica cuando ésta se deforma, o evaluando dichas propiedades durante el proceso de relajamiento de los esfuerzos como resultado de la deformación.

Esta anisotropía inducida por los esfuerzos del flujo es uno de los temas fundamentales de este estudio. Los esfuerzos existentes dentro de la cavidad

(en el centro, entre los dos rodillos) varían localmente pues *no se produce un flujo homogéneo* y como consecuencia, la retardancia (la anisotropía óptica) está en función de la posición dentro del líquido. Esto es, las propiedades ópticas varían *espacialmente* y las mediciones experimentales dependen del camino óptico recorrido.

Existen varios métodos que utilizan técnicas matriciales apropiadas para el análisis de sistemas ópticos que interaccionan con luz polarizada. Las técnicas matriciales para medios anisotrópicos permiten representar las interacciones de la luz polarizada con la materia (el haz de luz que va atravesando el material) como la multiplicación de un vector que representa la luz incidente y una matriz que describe la actividad óptica del material. Existen dos representaciones matriciales que frecuentemente se utilizan, éstas son el Cálculo de Müller y el Cálculo de Jones donde el haz incidente se representa en cada caso por el vector de Stokes o de Jones y las propiedades del material por las matrices de Müller o de Jones.

En este trabajo se utiliza la primera representación porque con ella es posible describir sistemas ópticos no-homogéneos cuyas propiedades son función de la posición. En este caso, la interacción del haz con el material se expresa como una serie de matrices que describen el comportamiento de pequeñas secciones (rebanadas a lo largo del camino óptico) y la anisotropía global es el resultado de la multiplicación de las matrices asociadas a todas las diferentes secciones o elementos. Así, el Cálculo de Müller es el más apropiado para evaluar los datos experimentales que se obtienen del estudio de soluciones poliméricas, ya que el flujo no-homogéneo induce diferentes grados de anisotropía a lo largo del camino óptico. Además, el Cálculo de Müller resulta ser de gran utilidad para el diseño y evaluación de sistemas ópticos. En particular, para el estudio de sistemas poliméricos que tienen efectos de birrefringencia, dicroísmo y dispersión depolarizante *.

*) Todos los cálculos analíticos más tediosos se realizaron con el programa para procesamiento de matemáticas simbólicas Mathematica de Wolfram [1]. En una estación de trabajo HP 9000 con 124 M Bytes de memoria y 40 M Flops de capacidad de computo. De igual manera, Mathematica se utilizó para la presentación de las diferentes gráficas, por lo que los marcadores para los puntos se diferencian en las tonalidades de gris.

En el Capítulo I se presentan las ideas básicas del cálculo de Müller y su formalismo diferencial, como se conoce hasta ahora en la literatura [5, 13]. En el Capítulo II se obtienen soluciones explícitas para tres casos particulares de birrefringencia que están relacionados con los experimentos de interés para el laboratorio. El tercer caso representa una solución general de amplia aplicación. Por lo tanto, **este trabajo de tesis presenta una solución, de forma general y de utilidad en el laboratorio, para la determinación de una anisotropía diferencial no-homogénea.**

Por lo tanto, el análisis óptico aquí propuesto debe considerar las inhomogeneidades a lo largo del camino óptico. El efecto anterior se debe fundamentalmente a un campo de esfuerzos (debidos al flujo) que no tiene un valor constante a lo largo del camino óptico. En particular, es claro que el campo de velocidades y el gradiente del mismo (proporcional a los esfuerzos) tienden a anularse en las paredes de la celda de los rodillos, generando valores diferentes para la anisotropía entre las regiones cercanas y aquellas lejanas a las paredes.

Así, el análisis óptico debe considerar valores de la anisotropía dependientes de la posición sobre el camino óptico. Estas anisotropías pueden representarse como funciones continuas que se anulan en las paredes. Para lo anterior se requiere un cálculo matricial para luz polarizada que suponga un valor de la anisotropía en forma diferencial. El problema básico se reduce a integrar las contribuciones diferenciales en una matriz integrable.

En el Capítulo III se lleva a cabo el análisis de las ecuaciones de birrefringencia y orientación para la técnica de dos colores. De manera general, se aplica la matriz integrable para medios birrefringentes (no-homogéneos) obtenida en el Capítulo II; suponiendo como hipótesis del trabajo, un "perfil" que describe las inhomogeneidades sobre la trayectoria óptica. El perfil se expresa de forma matemática de manera que supone físicamente un caso extremo y dado que es posible una representación en series de Fourier para el mismo, puede considerarse que la técnica es muy general y con un amplio campo de posibles aplicaciones. Los resultados se aplican al caso particular de mediciones de birrefringencia inducidas por flujos. Finalmente se dan las conclusiones más relevantes de esta tesis.

CAPÍTULO I

**EI MÉTODO MATRICIAL PARA
EVALUAR LA ANISOTROPÍA
ÓPTICA DE MEDIOS
HOMOGÉNEOS.**

1.1. INTRODUCCIÓN

La anisotropía óptica de un medio se caracteriza para la capacidad del material de reaccionar a la influencia de la luz incidente en forma diferente dependiendo de la dirección de polarización. Al propagarse la luz en el material, con velocidad o con una atenuación distinta según la dirección, aparecen interesantes fenómenos como: la birrefringencia, la polarización, el dicroísmo, etc. También se observan anisotropías ópticas en el material cuando éste se somete a esfuerzos mecánicos, ya que el material sufre cambios en el índice de refracción de manera diferencial a lo largo de la dirección del esfuerzo. Para determinar la anisotropía óptica de un material es necesario conocer la parte real e imaginaria del índice de refracción del material. La primera está relacionada con la velocidad de propagación de la onda electromagnética en el medio. La segunda está asociada a la atenuación de las ondas por fenómenos de dispersión y absorción.

En este trabajo, se aplican las técnicas de óptica matricial para el análisis de datos experimentales de anisotropía óptica, que se obtienen como resultado de los cambios en la configuración de polímeros, los cuales son inducidos por flujos. La técnica matricial consiste en representar las interacciones de luz polarizada y de la materia como la multiplicación de un vector (que representa la luz incidente) y una matriz (que describe la actividad óptica del material). Existen dos representaciones matriciales. Éstas son: el Cálculo de Müller y el de Jones. En el Cálculo de Müller el haz incidente se representa por el vector de Stokes de 4×1 y las propiedades del material por las matrices de Müller representadas como matrices de 4×4 .

1.2 POLARIZACIÓN Y MATERIALES ÓPTICAMENTE ANISOTRÓPICOS.

1.2.A Luz Polarizada

Físicamente, la radiación luminosa es el resultado de la propagación de una onda electromagnética. Los campos eléctrico y magnético de una onda electromagnética son cantidades vectoriales, ya que tienen tanto magnitud como dirección, denominada dirección de vibración. Para una descripción basada en las ecuaciones de Maxwell de luz plana monocromática y polarizada, véase el apéndice "A". Para una onda plana electromagnética en un medio isotrópico, esta dirección debe ser perpendicular a la normal de la onda, siendo esta última la dirección de propagación. Si esta se mantiene constante, se dice que la onda está *polarizada* en el plano (formado por el vector del campo y la dirección de propagación), y si la dirección cambia en forma aleatoria se dice que la onda está polarizada aleatoriamente o no tiene polarización (conocido también como luz natural) [2].

En la Figura 1.1 se muestran dos casos en los que se define el plano de polarización con base en la dirección de vibración y la dirección de propagación. La Figura 1.1a se presenta dos ondas en un mismo plano de polarización pero con distinta dirección de vibración, en cambio en la Figura 1.1b se muestran dos ondas con igual dirección de vibración pero con planos de polarización perpendiculares. Así el fenómeno de polarización es el movimiento transversal de la onda y su descripción matemática requiere de una representación

vectorial para la dirección del campo eléctrico de la onda y la dirección de propagación k * [4].

La representación más general de la luz polarizada es *la luz elípticamente polarizada o luz elíptica* [5], donde el vector del campo eléctrico resultante E rota y cambia en su magnitud, dando como resultado una elipse en un plano fijo perpendicular al vector de propagación k (en la dirección de propagación del haz luminoso).

Esto es, la ecuación de onda de los campos eléctrico y magnético tiene como solución una onda plana armónica en el tiempo y se puede representar como la curva que describen la "punta" del campo eléctrico para un punto en el espacio que corresponde a la ecuación de una elipse**.

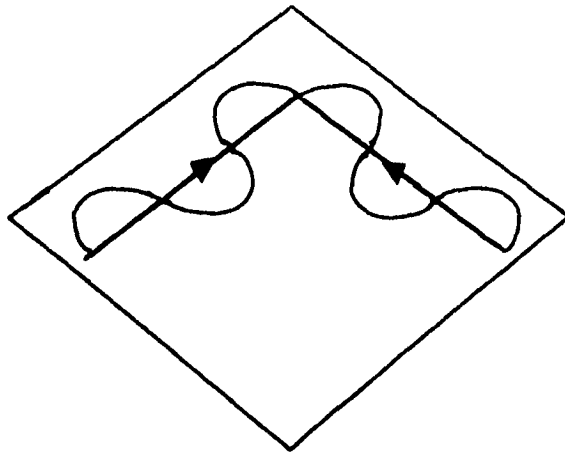
$$\left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)^2 + \left(\frac{E_x}{E_{ox}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_{ox}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)\cos(\phi) - \text{sen}^2(\phi) = 0, \quad (1.1)$$

Esta ecuación representa la luz elípticamente polarizada, donde ϕ es la diferencia de fase. La orientación de la elipse con respecto a los ejes E_x, E_y y E_x, E_y forma un ángulo α , Figura 1.2 [2]. Así, la relación entre el ángulo de orientación α y la diferencia de fase ϕ es:

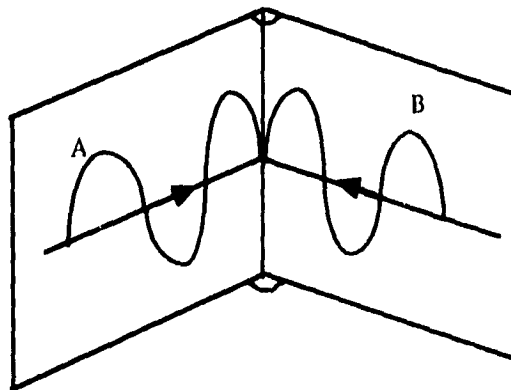
$$\tan(2\alpha) = \frac{2 E_{ox} E_{oy} \cos(\phi)}{E_{ox}^2 - E_{oy}^2}. \quad (1.2)$$

*) Este trabajo presupone ondas electromagnéticas monocromáticas *planas y armónicas* (ver Sec. 1.3.1, pag. 14 [3]), las cuales pueden representarse como una onda vectorial en la cual los vectores del campo eléctrico y del campo magnético son transversales a la dirección de propagación (Sec. 1.4.1, pag. 23 [3]).

***) Para mayores detalles ver Sección 1.4.2, pag. 24 [3] y Apéndice "A".



1.a) Dos ondas de luz A, B , en un mismo plano de polarización y con direcciones de vibración perpendiculares.



1.b) Dos ondas de luz A, B , con igual dirección de vibración pero con planos de polarización perpendiculares.

Figura 1.1 En estos dos diagramas 1.a y 1.b, se hace una distinción entre los planos de polarización y la dirección de propagación.

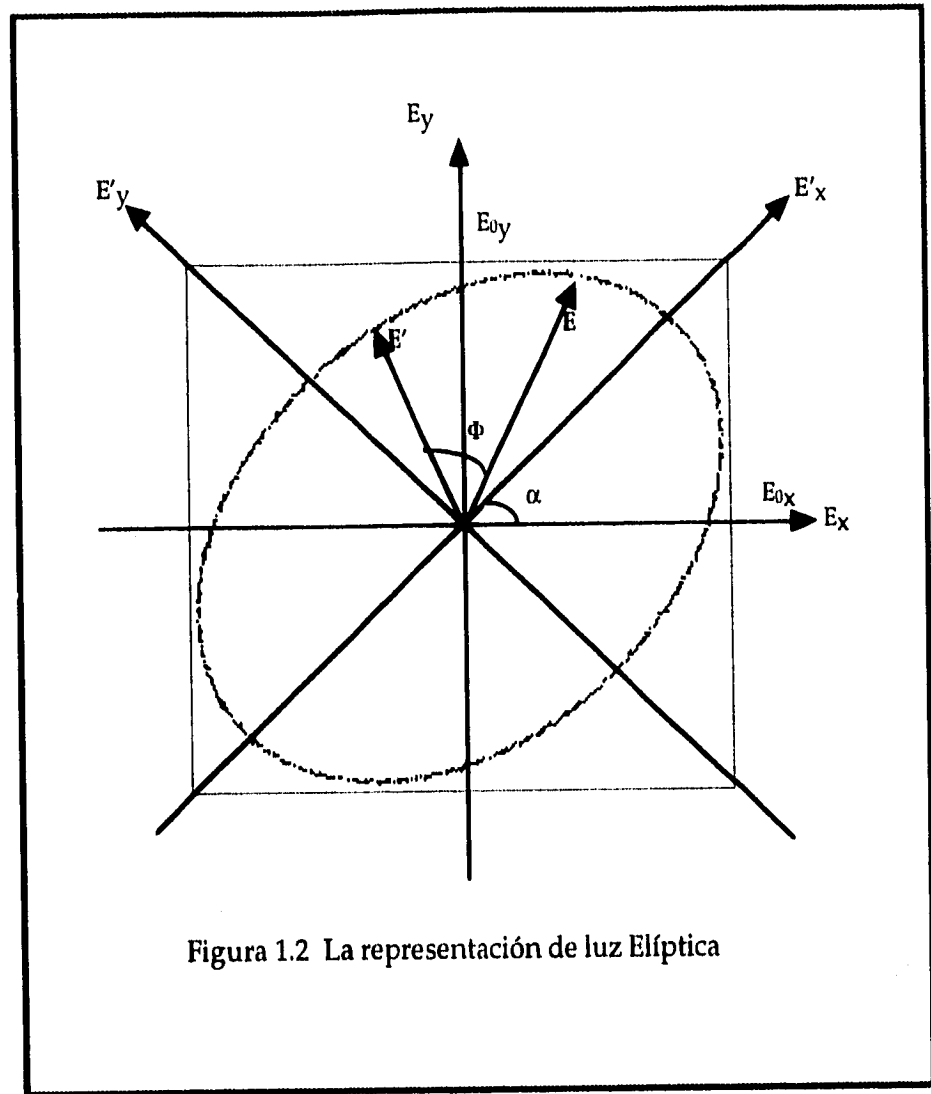


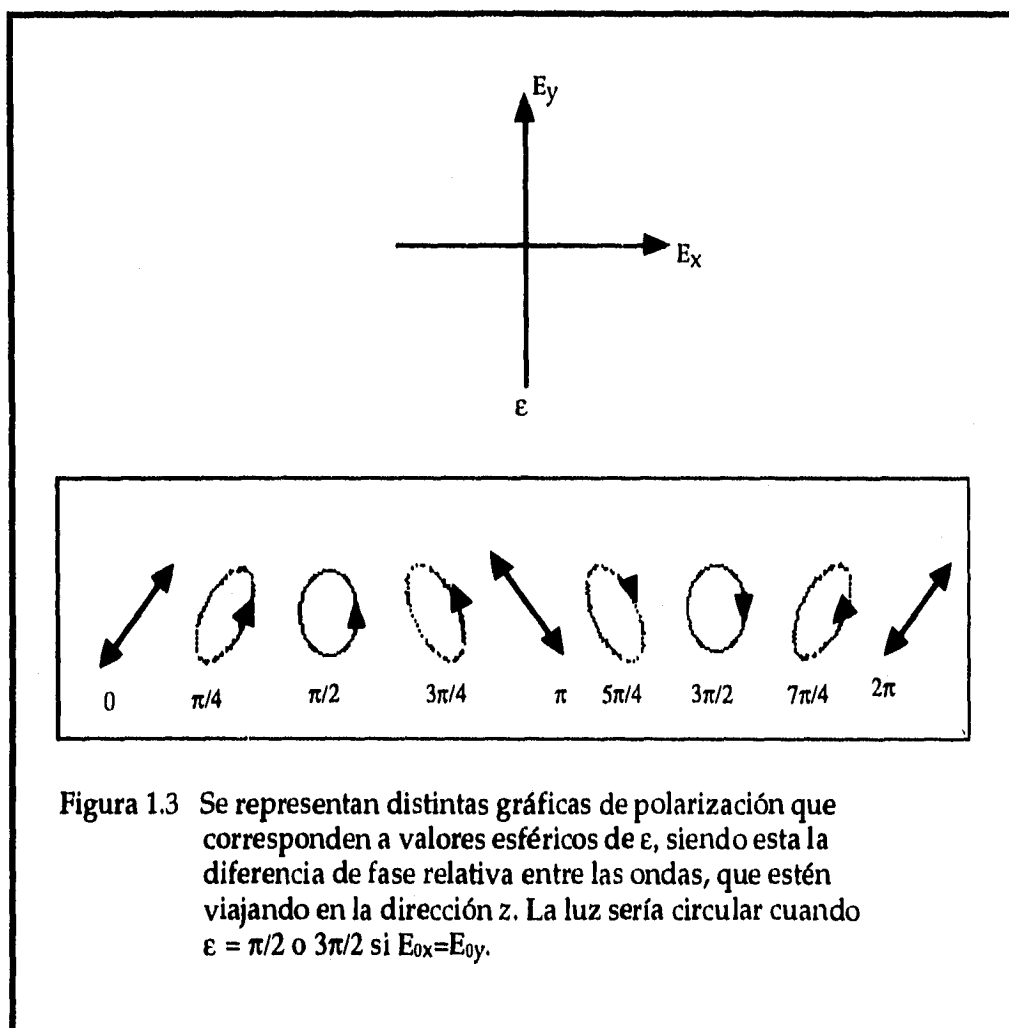
Figura 1.2 La representación de luz Elíptica

Si se considera a los ejes principales de la elipse alineados con los ejes coordenados, esto es $\alpha = 0$, o equivalente $\phi = \pm\pi/2, \pm3\pi/2, \pm5\pi/2, \dots$, etc., entonces la representación de la elipse en su forma más común es

$$\left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)^2 + \left(\frac{E_x}{E_{ox}}\right)^2 = 1. \quad (1.3)$$

De aquí se puede ver que si $E_{oy} = E_{ox} = E_o$, la Ecuación 1.3 se reduce a la ecuación del círculo, y físicamente se dice que se tiene luz *polarizada circularmente*.

Si ϕ es un múltiplo par o impar de π , se obtiene la ecuación de una recta con pendiente $\pm E_{oy}/E_{ox}$ para ambos casos y entonces se tiene luz *linealmente polarizada*. Esto se puede ver gráficamente en la Figura 1.3.



En la literatura comúnmente se define a la luz *lineal* o polarizada en un plano, también llamada linealmente polarizada, como aquella que está en el estado de polarización P . La luz circular derecha o izquierda se dice que está en estado R o L respectivamente, y a la luz elíptica se le asigna un estado de polarización E . Un estado de polarización P se puede representar como la superposición de los estados R y L al igual que para el estado E . Si las amplitudes de las dos ondas circulares son diferentes tenemos luz elíptica. Para generar luz no-polarizada hay que superponer dos estados P ortogonales, incoherentes y de igual magnitud.

Así, un polarizador es un dispositivo óptico transparente en el cual la luz transmitida es de alguna forma polarizada. Los más comunes son los polarizadores lineales que entregan luz linealmente polarizada. También se pueden tener polarizadores circulares o elípticos. Los polarizadores están basados en mecanismos físicos fundamentales: dicroísmo o absorción selectiva, reflexión, dispersión y birrefringencia o doble refracción [11]. Todos éstos comparten alguna forma de asimetría asociada con el proceso, ya que el polarizador debe de alguna manera seleccionar un estado de polarización particular, descartando todos los demás [7].

1.2.B Anisotropía Óptica

Se dice que un material tiene propiedades *anisotrópicas* cuando presenta distintos valores para un mismo fenómeno (conductividad eléctrica o térmica, velocidad de transmisión de la luz, elasticidad, etc.), según la dirección en que se observe dicho fenómeno. Frecuentemente, los distintos valores se deben a una fuerza de cohesión de las moléculas que varía con la dirección (e.g. la estructura reticular de la materia cristalina) y por lo tanto, dichas propiedades cambian de valor de acuerdo con la dirección de observación. La anisotropía de los cristales se manifiesta claramente en muchos minerales por las notables diferencias que se observan en su fragilidad y de otras propiedades tales como la dureza, la tenacidad, etc. Con lo cual, las propiedades ópticas son anisotrópicas cuando tienen valores distintos para los diferentes ejes cristalográficos (la solución completa del problema de propagación de la onda en una red cristalina se logra utilizando la teoría de Maxwell *). Los cuerpos que tienen la misma propiedad en todas direcciones se dicen *isotrópicos*, es decir, que se comportan como los cuerpos amorfos (los cuerpos carentes de estructura cristalina cuyas partículas integrantes pueden ser moléculas, átomos o iones, sin que éstos ocupen sitios de una red de puntos).

*) Maxwell llegó a la conclusión de que la luz es un fenómeno electromagnético, lo que le permitió relacionar la velocidad de la luz en el vacío c , la velocidad del medio v , la permeabilidad dieléctrica ϵ y magnética μ , mediante la igualdad $c/v = \sqrt{\epsilon\mu}$. También se tiene $c/v = n$, donde n es el índice de refracción, por lo que tenemos $n = \sqrt{\epsilon\mu}$; esta ecuación enlaza las constantes óptica, eléctrica y magnética del medio [2].

En general los materiales con propiedades ópticas anisotrópicas pueden tener hasta tres índices de refracción *complejos*, denominados índices de refracción principales. Cada uno de estos índices de refracción tiene asociada una dirección en el material. Un haz luminoso con dirección de vibración paralela a la dirección de un índice de refracción principal se propaga con una velocidad y amplitud de onda determinada por el índice de refracción que actúa en esta dirección.

Una de las características importantes de un medio anisotrópico es que por lo menos existe una dirección N , en la cual es posible propagar dos ondas de polarización plana, con dos índices de refracción diferentes cada uno y correspondientes a dos direcciones distintas. Estas dos direcciones singulares de oscilación están determinadas por las propiedades del medio (muestra) y permanecen mutuamente perpendiculares entre sí. Una onda polarizada cuyas oscilaciones son paralelas a una de éstas dos direcciones, se propaga a través de la muestra, con su velocidad constante permaneciendo en polarización plana. Del mismo modo, la parte compleja del índice de refracción ocasiona un coeficiente de extinción constante como se explica en la siguiente sección.

Ahora, si la dirección de la oscilación inicial forma un ángulo con las direcciones singulares, dicha oscilación se pueden representar como la suma de dos oscilaciones que se propagan paralelas a las direcciones singulares, con distintas velocidades y que adquieren una diferencia de fase así como de amplitud a medida que atraviesan el material. La presencia de dos direcciones principales (determinadas por los ejes del elipsoide de la constante dieléctrica) corresponden a dos distintas velocidades. Esto es conocido como el fenómeno de *Birrefringencia* y cuando la presencia de dos direcciones principales generan dos grados diferentes de atenuación (amplitud de la onda), entonces se tiene el fenómeno de *dicroísmo*.

En general los materiales con propiedades ópticas anisotrópicas pueden tener hasta tres índices de refracción *complejos*, denominados índices de refracción principales. Cada uno de estos índices de refracción tiene asociada una dirección en el material. Un haz luminoso con dirección de vibración paralela a la dirección de un índice de refracción principal se propaga con una velocidad y amplitud de onda determinada por el índice de refracción que actúa en esta dirección.

Una de las características importantes de un medio anisotrópico es que por lo menos existe una dirección N , en la cual es posible propagar dos ondas de polarización plana, con dos índices de refracción diferentes cada uno y correspondientes a dos direcciones distintas. Estas dos direcciones singulares de oscilación están determinadas por las propiedades del medio (muestra) y permanecen mutuamente perpendiculares entre sí. Una onda polarizada cuyas oscilaciones son paralelas a una de éstas dos direcciones, se propaga a través de la muestra, con su velocidad constante permaneciendo en polarización plana. Del mismo modo, la parte compleja del índice de refracción ocasiona un coeficiente de extinción constante como se explica en la siguiente sección.

Ahora, si la dirección de la oscilación inicial forma un ángulo con las direcciones singulares, dicha oscilación se pueden representar como la suma de dos oscilaciones que se propagan paralelas a las direcciones singulares, con distintas velocidades y que adquieren una diferencia de fase así como de amplitud a medida que atraviesan el material. La presencia de dos direcciones principales (determinadas por los ejes del elipsoide de la constante dieléctrica) corresponden a dos distintas velocidades. Esto es conocido como el fenómeno de *Birrefringencia* y cuando la presencia de dos direcciones principales generan dos grados diferentes de atenuación (amplitud de la onda), entonces se tiene el fenómeno de *dicroísmo*.

1.2.C Birrefringencia y Dicroísmo.

Siendo la luz una onda electromagnética, la ecuación que describe a la propagación electromagnética de luz elípticamente polarizada, con un campo eléctrico transversal [6], es:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = [E' \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \delta')] \mathbf{u}' + [E'' \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \delta'')] \mathbf{u}'', \quad (1.4)$$

con

\mathbf{k} : representa la dirección de propagación de la onda electromagnética,

\mathbf{r} corresponde al vector de posición con coordenadas (x, y, z) ,

E', E'' : representan las amplitudes de los vectores eléctricos a lo largo de las direcciones ortogonales \mathbf{u}' y \mathbf{u}'' respectivamente, y

δ', δ'' : corresponden a las fases del vector eléctrico relativas a un marco de referencia en el laboratorio.

La Ecuación 1.4 es útil para aplicaciones de elipsometría cuando se elimina la descripción temporal de la onda.

La luz que pasa a través de un material con birrefringencia y dicroísmo puede expresarse mediante la ecuación de onda:

$$\mathbf{E} = \left(E_x e^{i\delta'_x}, E_y e^{i\delta'_y} \right), \quad (1.5)$$

Donde E_x y E_y son las componentes del vector de campo eléctrico. Los parámetros δ'_x y δ'_y corresponden a la fase de la onda en cada una de las direcciones principales perpendiculares a la dirección de propagación de la luz. Suponiendo que el valor de la fase es cero al incidir en el material, la *diferencia de*

fase respecto al marco de referencia en el laboratorio para cualquier componente del vector eléctrico, cuando se recorre una distancia d dentro del material es

$$\delta_i = 2 \pi d n_i / \lambda, \quad (1.6)$$

donde n_i corresponde al índice de refracción en la dirección del campo eléctrico y λ es la longitud de la onda de luz que pasa a través del material.

La Ecuación 1.6 contiene toda la información para la caracterización completa de la luz polarizada, puesto que n_i alcanza valores complejos. Para cada componente perpendicular del vector de campo eléctrico se tiene:

$$\begin{aligned} E_{x,o} &= E_{x,i} \exp[i \delta_x] = E_x \exp[i 2 \pi d (n'_x + i n''_x) / \lambda] \\ &= E_x \exp[i n'_x 2 \pi d / \lambda] \exp[-n''_x 2 \pi d / \lambda], \\ &= E_x \rho_x \exp[i n'_x 2 \pi d / \lambda] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{y,o} &= E_{y,i} \exp[i \delta_y] = E_y \exp[i (2 \pi d (n'_y + i n''_y) / \lambda)] \\ &= E_y \exp[i n'_y 2 \pi d / \lambda] \exp[-n''_y 2 \pi d / \lambda], \\ &= E_y \rho_y \exp[i n'_y 2 \pi d / \lambda] \end{aligned}$$

donde $\rho_x = \exp[-n''_x 2 \pi d / \lambda]$ y $\rho_y = \exp[-n''_y 2 \pi d / \lambda] \equiv$ factor de atenuación.

Por lo tanto,

$$\mathbf{E} = \left(E_x \rho_x e^{i \delta_x}, E_y \rho_y e^{i \delta_y} \right). \quad (1.7)$$

Cuando los valores de la parte real de los índices de refracción para dos direcciones perpendiculares son distintos, entonces la diferencia $n'_x - n'_y$ es

distinta de cero, dando como resultado la presencia del fenómeno de birrefringencia.

La birrefringencia se caracteriza por dos parámetros: *la retardancia*, que corresponde a la diferencia de fases entre las dos componentes perpendiculares del vector eléctrico de luz polarizada al atravesar el material anisotrópico y el *ángulo de orientación* de la birrefringencia en el material, relativo a su eje principal. La diferencia de fase está directamente relacionada con la diferencia relativa de los índices de refracción a lo largo de los ejes perpendiculares del vector de luz polarizada. Entonces, *la birrefringencia* del medio es proporcional a la retardancia y se define como

$$\Delta n' = (n'_o - n'_e) / n'_o, \quad (1.8)$$

aquí,

n'_e corresponde al índice de refracción del medio para el vector de luz polarizada que es paralelo al eje de simetría del medio (eje extraordinario).

n'_o corresponde al índice de refracción para luz polarizada que atraviesa perpendicularmente al eje de simetría (eje ordinario). (ver R. M. A. Azzam & N. M. Bashara, pag. 73 [5], David S. Kliger James, W. Lewis & Cora E. Randall, pag. 41[11] y Max Born & Emil Wolf, Capítulo 14 [3]).

La diferencia $n_o - n_e$, que representa la medida de la anisotropía (Δn), puede ser negativa o positiva (al tener $n'_e < n'_o$ se dice que hay birrefringencia positiva). Además n_e y n_o dependen de la longitud de onda a causa del fenómeno de dispersión de la luz y sin embargo, $\Delta n = (n_o - n_e) / n_o$ tiene una dependencia con λ muy débil pues sólo a segundo orden depende de la dispersión luminosa.

En la literatura científica frecuentemente se identifica al índice de refracción extraordinario n_e como $n_{||}$, de manera equivalente para el índice de refracción ordinario n_o se representa como n_{\perp} que gráficamente representa la

dirección del eje de simetría estructural (véase David S. Kliger, James W. Lewis & Cora E. Randall, Capítulo 6 [11]).

Otro fenómeno físico que puede producir un cambio en el estado de polarización del haz de luz cuando atraviesa un material anisotrópico, es el *dicroísmo*, el cual produce un efecto macroscópico similar a la retardancia causada por la birrefringencia.

El dicroísmo es la *absorción diferencial* de una de las dos componentes ortogonales del estado de polarización de un haz incidente, y un polarizador dicroico es físicamente anisotrópico, dando así una fuerte asimetría de absorción preferencial de una componente del campo, mientras que es esencialmente transparente para la otra componente. El dicroísmo es semejante a la birrefringencia, ya que produce un cambio en la polarización.

De la Ecuación 1.7, se tiene que $\rho_x - \rho_y \neq 0$ representa la absorción o atenuación *relativa* de la luz para las direcciones principales de propagación en el material y representa el dicroísmo del mismo. La *absorción* del material está dada por :

$$\rho_i = \exp[2 \pi d n_i'' / \lambda], \quad (1.9)$$

donde n_i'' corresponde a la *parte imaginaria* del índice de refracción principal del material. Así, también se le llama coeficiente de extinción. Si sus valores son diferentes para las direcciones paralela y perpendicular al camino óptico, se dice que hay absorción máxima o mínima, dependiendo del valor de n'' en cada dirección.

1.2.D Anisotropía inducida por flujos.

En general, un material es anisotrópico cuando sus propiedades presentan distintos valores para diferentes direcciones.

En general, un sólido cristalino en *equilibrio* es anisotrópico si su estructura presenta diferencias para distintas direcciones. En cambio, un líquido en reposo es generalmente isotrópico; tal es el caso del agua o de las soluciones poliméricas. Del mismo modo, los sólidos *amorfos* son isotrópicos cuando el tiempo en equilibrio es mayor que el tiempo de relajamiento, tal es el caso de los materiales vítreos. Así los vidrios, líquidos y soluciones macromoleculares no presentan anisotropía óptica cuando se encuentra en reposo.

Sin embargo, y en general para todo material es posible *inducir* anisotropías cuando se aplica un campo externo que genera asimetrías estructurales. Tal es el caso de la aplicación de un campo eléctrico a un material dieléctrico o como se ha mencionado con anterioridad, cuando se aplican esfuerzos mecánicos a un sólido. Es así como se pueden generar anisotropías ópticas en el vidrio (o muchos otros materiales) a pesar de que es un material amorfo. De manera equivalente, una solución polimérica se vuelve anisotrópica cuando está sujeta a condiciones de flujo, pues en este caso también existe un campo de fuerzas para cada punto del fluido.

Existen sistemas líquidos donde su anisotropía óptica está limitada únicamente a un efecto óptico (al menos, en una región del espectro). Un ejemplo de esto son las soluciones poliméricas, que en la región visible de las ondas electromagnéticas tienden a ser altamente birrefringentes y a su vez muestran poco dicroísmo. *En este trabajo se analizan datos experimentales que son consecuencias de birrefringencias inducidas por flujos [6].*

Para soluciones macromoleculares los efectos de birrefringencia son el resultado de un valor de la polarizabilidad molecular, *a lo largo* de la estructura

principal de la cadena, que es ligeramente distinto al valor observado en la dirección *perpendicular* a la estructura principal. La birrefringencia de las soluciones poliméricas tiene dos contribuciones posibles: la llamada *birrefringencia de forma* debida a la anisotropía causada por la forma elipsoidal que toma la molécula en solución y la *birrefringencia intrínseca* que está asociada directamente con la orientación de los segmentos de cadenas poliméricas. La primera se presenta generalmente en soluciones diluidas mientras que la segunda domina en las soluciones concentradas, el cual es el caso que nos interesa.

Ahora, independientemente de la contribución posible a la birrefringencia, los materiales macromoleculares muestran una anisotropía óptica cuando la microestructura es diferente a la configuración de equilibrio, siendo la anisotropía mayor a medida que los cambios en la conformación son más importantes.

Entonces, a diferencia de una estructura cristalina, un líquido polimérico puede no tener birrefringencia. El estado isotrópico sólo existe al considerar un sistema polimérico en reposo que no está sometido a ninguna deformación. Es decir, cuando se retiran los esfuerzos, la cadena polimérica tiende a una conformación isomorfa, donde las contribuciones a la anisotropía de los distintos elementos de la cadena polimérica (monómeros) producen una anisotropía promedio nula.

Ahora, si el polímero se somete a una *deformación* o a una *historia de deformaciones*, entonces la anisotropía promedio del polímero resulta ser distinta de cero, ya que existe una conformación polimérica con una orientación promedio de los monómeros. Por tanto, la anisotropía óptica del polímero está directamente relacionada con la orientación de sus elementos, resultado de las deformaciones por la acción de la deformación del flujo. Es esta configuración no isomorfa (anisotrópica) la que genera los efectos mecánicos en materiales elásticos. El fluido polimérico generalmente pierde su anisotropía óptica una vez que los esfuerzos se relajan como resultado del término (o extinción) de las condiciones de flujo, y cuando los tiempos de relajamiento estructural son largos, se observan los efectos conocidos como "memoria".

Si se conoce simultáneamente la anisotropía óptica inducida por el flujo y la orientación de esta anisotropía con respecto al eje principal del aparato

experimental que genera el flujo, entonces es posible conocer la orientación promedio de los segmentos poliméricos y su dependencia con los parámetros más importantes del flujo. Si el experimento permite conocer dicha anisotropía como función del tiempo, se puede conocer la evolución temporal en la conformación macromolecular del líquido polimérico, resultado de la historia de deformación impuesta por el campo del flujo, permitiendo así estudios importantes para el entendimiento de la dinámica de sistemas macromoleculares.

Existen varias técnicas para evaluar la anisotropía óptica de una muestra. Éstas se encuentran descritas dentro de la rama de la elipsometría* o polarimetría, pues se usa luz polarizada para medir la anisotropía óptica de la muestra de interés [9].

La muestra puede ser un medio isotrópico (en reposo) sujeto a una condición de compresión uniaxial y que consecuentemente presenta dos valores para el índice de refracción. Como se muestra en la Figura 1.4. Los índices de refracción n_e y n_o corresponden a este caso a los índices principales con direcciones vibratoriales paralelas a M y N (en el plano normal a la dirección de propagación) y distinguiéndose el máximo el uno del otro.

Desde el punto de vista de la determinación experimental de la birrefringencia, los planos de polarización de los polarizadores lineales N_1 y N_2 deben formar un ángulo de 90° entre sí y están orientados preferentemente a 45° respecto a la dirección M o N . De esta manera se pueden determinar los cambios en el estado de polarización de la luz incidente cuando atraviesa un medio birrefringente colocado entre el polarizador y el analizador. La birrefringencia del medio provoca que la dirección de polarización del haz ya no sea perpendicular al eje de polarización del analizador, por lo que no hay una extinción total de su intensidad al pasar por el analizador. Esta intensidad distinta de cero es una medida de la anisotropía de la sustancia colocada entre el polarizador y el analizador.

*) Se define generalmente a la Elipsometría como la medida del estado de polarización de un vector de onda polarizado y permite obtener la información sobre un sistema óptico que modifica el estado de polarización del haz incidente.

En particular, la Figura 1.4, muestra el arreglo indispensable para determinar la birrefringencia con sus componentes principales: el polarizador *P*, la muestra (o material de estudio), el analizador *A* y finalmente un detector de luz. Esta configuración se conoce como elipsómetro de nulos.

Ahora, si se consideran dos longitudes de onda en vez de una, se puede llegar a *conocer al grado de birrefringencia, así como la orientación de los ejes principales del tensor del índice de refracción en forma simultánea sin mover ningún componente óptico*. Esto es, cada juego de medidas proporciona suficiente información para determinar la birrefringencia del medio y la orientación de su anisotropía. El uso de un haz de dos colores, con un elipsómetro asignado a cada color permite fácilmente determinar ambos parámetros a la vez [6] y se conoce como técnica de birrefringencia bicolor y es la que se analiza en este trabajo.

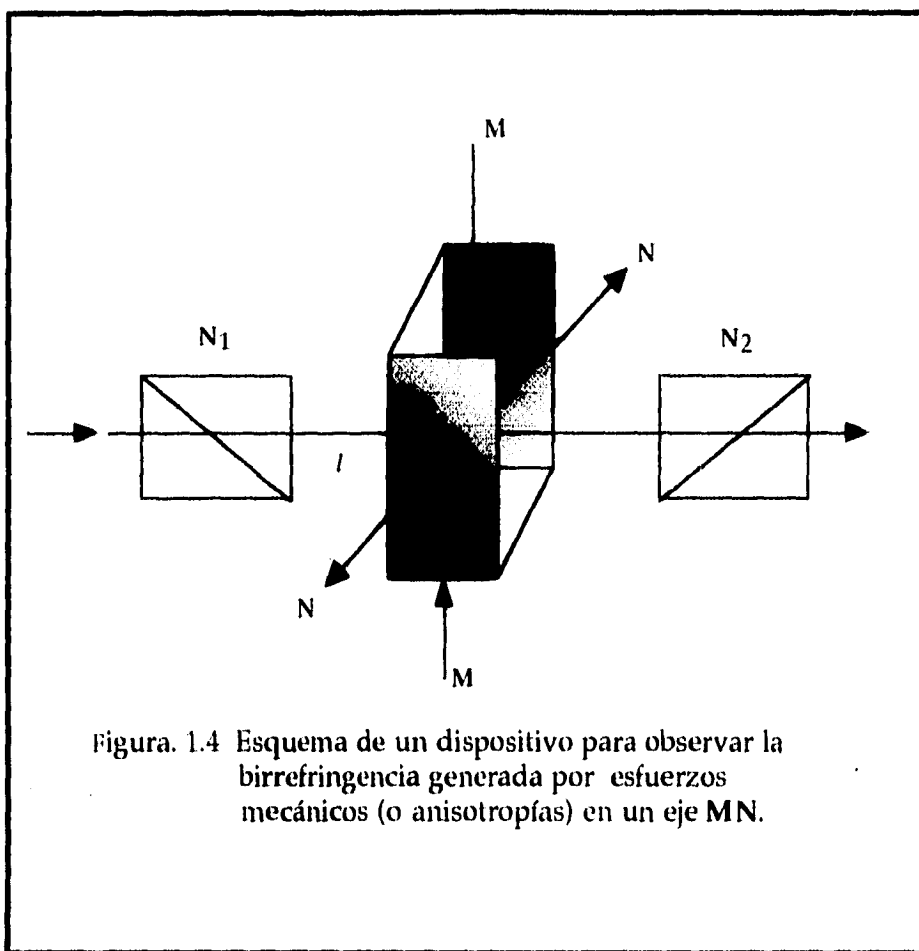


Figura. 1.4 Esquema de un dispositivo para observar la birrefringencia generada por esfuerzos mecánicos (o anisotropías) en un eje MN .

1.3 EL MÉTODO MATRICIAL DE MÜLLER PARA EL ANÁLISIS DE UN SISTEMA ÓPTICO POLARIZANTE.

LOS PARÁMETROS DE STOKES.

La representación matricial de luz polarizada tuvo sus orígenes con el trabajo de G. G. Stokes de quien heredamos la representación vectorial de la luz, conocido como *vector de Stokes* [5, 11, 16 y 17]. Este vector consta de cuatro elementos. Los elementos vectoriales *corresponden a intensidades luminosas* y en consecuencia sus valores son *reales y medibles*.

El vector de Stokes puede describir el estado de polarización de un haz de luz, ya sea natural, total o parcialmente polarizado.

El vector de Stokes se representa como

$$S = \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \{I, Q, U, V\} = \{S_0, S_1, S_2, S_3\}, \quad (1.10)$$

siendo:

- $I \equiv$ es la intensidad total de luz,
 $Q \equiv I_0 - I_{90}$ = es la diferencia de intensidades entre las componentes de la luz polarizada *lineal*, en las direcciones horizontal y vertical .
 $U \equiv I_{+45} - I_{-45}$ = es la diferencia de intensidades entre la orientación de las componentes de la luz polarizada *lineal*, en las direcciones de + 45 y - 45 grados.
 $V \equiv I_{pcd} - I_{pci}$ = es la diferencia de intensidades, entre las componentes de la polarización circular derecha y la polarización circular izquierda.

El campo eléctrico para un haz de luz completamente polarizado, que se propaga a lo largo de la dirección positivo del eje z , se puede expresar en un sistema cartesiano como

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_x + \mathbf{E}_y = [A_x \hat{i} + A_y \hat{j}] \text{sen}[\omega t + \phi],$$

(1.11)

$$\mathbf{E} = A_x \text{sen}[\omega t + \phi_x] \hat{i} + A_y \text{sen}[\omega t + \phi_y] \hat{j}.$$

donde ϕ_x y ϕ_y corresponden a las fases. Con estas dos ecuaciones los parámetros de Stokes se pueden escribir en términos de la amplitud de la onda como

$$\begin{aligned} I &= A_x^2 + A_y^2, \\ Q &= A_x^2 - A_y^2, \\ U &= 2 A_x A_y \cos[\Delta], \\ V &= 2 A_x A_y \text{sen}[\Delta]; \end{aligned}$$

(1.12)

con $\Delta = \phi_y - \phi_x$ que corresponde a la diferencia de fase entre las dos componentes del campo en las direcciones xy y Δ se encuentra en el intervalo de $-180^\circ < \Delta \leq 180^\circ$.

Para la luz *no-polarizada* tenemos que los términos Q , U , V , desaparecen. En cambio, para luz *parcialmente polarizada* ocurre que $0 < (Q^2 + U^2 + V^2)^{1/2} < I$. Asimismo, dividiendo cada uno de los parámetros Q , U , y V entre I se conforma un vector de Stokes *normalizado* [11].

Así, la luz completamente polarizada cumple con la condición

$$I^2 = Q^2 + U^2 + V^2, \quad (1.13)$$

o con una notación equivalente que con frecuencia aparece en la literatura

$$S_0^2 = (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2).$$

De igual manera, para la luz *parcialmente polarizada*, tenemos que su grado de polarización está dado por

$$|S| = (Q^2 + U^2 + V^2)^{1/2} = (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)^{1/2}. \quad (1.14)$$

Con base en las Ecuaciones 1.12 - 1.14 es posible describir de modo sencillo algunos estados de polarización de la luz. En particular, en la representación normalizada, el vector de Stokes para la luz natural es de la forma $\{1,0,0,0\}$, ver Tabla 1.1. Si la luz está polarizada *horizontalmente* (no tiene componente vertical), los parámetros normalizados son $\{1,1,0,0\}$. De la misma forma, para la luz polarizada *verticalmente* se tiene $\{1,-1,0,0\}$. En la Tabla 1.1 se presentan otros estados de polarización y sus respectivos vectores de Stokes [11].

Tabla 1.1. Vectores de Stokes

ESTADO DE POLARIZACIÓN	VECTOR DE STOKES
Polarización a 0°	$\{1,1,0,0\}$
Polarización a 90°	$\{1,-1,0,0\}$
Polarización a 45°	$\{1,0,1,0\}$
Polarización a -45°	$\{1,0,-1,0\}$
Polarización a 30°	$\{1,1/2,\sqrt{3}/2,0\}$
Polarización a 60°	$\{1,-1/2,-\sqrt{3}/2,0\}$
Polarización circular	$\{1,0,0,1\}$
Polarización elíptica 0°	$\{1,3/5,0,4/5\}$
Polarización elíptica 90°	$\{1,-3/5,0,4/5\}$

CÁLCULO MATRICIAL DE MÜLLER

Hans Müller [5,11 y 12] propuso un método de matrices para trabajar con los vectores de Stokes, representando con ello la interacción de la luz con materiales anisotrópicos. Matemáticamente, *la interacción luz-materia* se define como operaciones de multiplicación de matrices, donde las propiedades del haz que atraviesa el material es el resultado de la multiplicación de la matriz del medio por el vector de Stokes del haz incidente.

Esto es, dado el haz incidente con vector de Stokes S_i , que interacciona con el medio (representado por una matriz de Müller) y del cual emerge el vector de salida S_f . El medio óptico se representa matemáticamente por una matriz de 4×4 [9, 12 y 13] donde

$$S_f = M S_i. \quad (1.15)$$

Es decir,

$$S_f = \begin{bmatrix} S_{0f} \\ S_{1f} \\ S_{2f} \\ S_{3f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{0i} \\ S_{1i} \\ S_{2i} \\ S_{3i} \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

donde M es la matriz de Müller que describe el medio óptico. La explicación detallada del significado físico para los elementos de la matriz de Müller se presenta en la Sección 1.4.

Algunos ejemplos de la representación matricial de Müller para distintos elementos ópticos se presentan en la Tabla. 1.2. De igual manera, la Tabla 1.2 presenta algunas matrices de medios anisotrópicos dentro de una gran variedad de posibilidades. En particular y por la importancia que tiene respecto a este trabajo, se muestran las matrices de medios birrefringentes, sin que esto signifique que los fenómenos de dicroísmo, polarización parcial, etc., no pueden considerarse [11].

Tabla 1.2 Matrices de Müller que describen a un polarizador del que se obtiene luz con polarización lineal horizontal.

ELEMENTO ÓPTICO LINEAL	MATRIZ DE MÜLLER
a) Polarización lineal a 0° . \leftrightarrow	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
b) Polarización lineal a 90° . \updownarrow	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
c) Polarización lineal a $+45^\circ$.	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
d) Polarización lineal a -45° .	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Tabla 1.2 (Continuación) Matrices de Müller para medios birrefringentes.

MEDIOS BIRREFRINGENTES	MATRIZ DE MÜLLER
e) Para una retardancia $\delta=180^\circ$ y para cualquier orientación ρ .	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(4\rho) & \text{sen}(4\rho) & 0 \\ 0 & \text{sen}(4\rho) & -\cos(4\rho) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Bmatrix}$
f) Para cualquier retardancia δ y una orientación $\rho = 0^\circ$.	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\delta) & \text{sen}(\delta) \\ 0 & 0 & -\text{sen}(\delta) & \cos(\delta) \end{Bmatrix}$
g) Para cualquier retardancia δ y una orientación $\rho = 90^\circ$.	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\delta) & -\text{sen}(\delta) \\ 0 & 0 & \text{sen}(\delta) & \cos(\delta) \end{Bmatrix}$
h) Para cualquier retardancia δ y una orientación $\rho = 45^\circ$.	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\delta) & 0 & -\text{sen}(\delta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \text{sen}(\delta) & 0 & \cos(\delta) \end{Bmatrix}$
i) Para una retardancia $\delta=90^\circ$ y para cualquier orientación ρ .	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(2\rho) & \text{sen}(2\rho)\cos(2\rho) & -\text{sen}(2\rho) \\ 0 & \text{sen}(2\rho)\cos(2\rho) & \text{sen}^2(2\rho) & \cos(2\rho) \\ 0 & \text{sen}(2\rho) & -\cos(2\rho) & 0 \end{Bmatrix}$

Tabla 1.2 (Continuación) Matrices de Müller para medios birrefringentes.

MEDIOS BIRREFRINGENTES	MATRIZ DE MÜLLER
j) Para cualquier retardancia δ y una orientación $\rho = -45^\circ$.	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\delta) & 0 & \text{sen}(\delta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\text{sen}(\delta) & 0 & \cos(\delta) \end{pmatrix}$
k) Para una orientación circular derecha y cualquier retardancia δ .	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\delta) & \text{sen}(\delta) & 0 \\ 0 & -\text{sen}(\delta) & \cos(\delta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
l) Para una orientación circular izquierda y cualquier retardancia δ .	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\delta) & -\text{sen}(\delta) & 0 \\ 0 & \text{sen}(\delta) & \cos(\delta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
m) Para cualquier retardancia δ y orientación ρ (matriz general).	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 \text{sen}^2(\delta/2) + \cos^2(\delta/2) & C_4 \text{sen}^2(\delta/2) & -C_3 \text{sen}(\delta) \\ 0 & C_4 \text{sen}^2(\delta/2) & -C_2 \text{sen}^2(\delta/2) + \cos^2(\delta/2) & C_1 \cos(\delta) \\ 0 & C_3 \text{sen}(\delta) & -C_1 \cos(\delta) & \cos(\delta) \end{pmatrix}$
donde:	$C_1 = \cos(2\rho), C_2 = \cos(4\rho), C_3 = \text{sen}(2\rho), C_4 = \text{sen}(4\rho)$

1.4 ECUACIÓN DIFERENCIAL PARA MEDIOS ANISOTRÓPICOS.

En la práctica frecuentemente se requiere representar las propiedades de un medio como la multiplicación de varias matrices de Müller. En estos casos, para conocer el vector de Stokes de salida, es indispensable considerar cuidadosamente *el orden de la multiplicación de las matrices*, fundamentalmente por dos razones. Primero, las operaciones de matrices no son conmutativas en lo general y segundo, es importante representar matemáticamente la física de interés en este trabajo.

Jones [9] propuso el *cálculo diferencial* (hoy conocido como Cálculo Diferencial de Jones) para analizar sistemas con propiedades ópticas que varían a lo largo de la trayectoria recorrida. Es decir, el estado de polarización de un haz de luz cambia continuamente cuando éste se propaga a través de un medio anisotrópico, y entonces se requiere utilizar matrices que representan la física del material para *una rebanada infinitesimal*, para posteriormente "integrar" la contribución de cada rebanada y así conocer las propiedades (globales) del medio.

A continuación se dan las bases para el análisis de un medio anisotrópico *no-homogéneo* basándose para ello en el cálculo diferencial de Müller [13] con el que, a diferencia del Cálculo de Jones, simplemente la ecuación que describe el estado de polarización en la dirección de propagación se puede representar por una ecuación diferencial lineal de primer orden [13] que utiliza matrices de Müller y vectores de Stokes.

Físicamente, el cambio de la propiedad anisotrópica debe de ser proporcional al valor de la propiedad en ese punto. Esto es

$$\frac{dS}{dz} = m S, \quad (1.17)$$

donde

- $S \equiv$ es el vector de Stokes de 4×1 , cuyos elementos son los 4 parámetros de Stokes $\{ S_0, S_1, S_2, S_3 \}$ en la posición z ,
- $z \equiv$ es la dirección de propagación y
- $m \equiv$ es la matriz con elementos reales de 4×4 . Resume las propiedades ópticas del medio anisotrópico de carácter *local*, es decir, en su forma diferencial.

La Ecuación 1.17 se obtiene cuando se considera que el haz de luz viaja a lo largo del eje z (en un sistema cartesiano derecho con coordenadas xyz), en un medio ópticamente anisotrópico en el cual se puede observar depolarización*.

El significado físico de la ecuación anterior (Ecuación 1.17) se puede visualizar de la siguiente manera [13]. Para las posiciones en el medio z y $z + \Delta z$, el vector de Stokes es $S(z)$ y $S(z + \Delta z)$ respectivamente. La relación entre estos dos vectores está dada por la siguiente Ecuación

$$S(z + \Delta z) = M_{\Delta z} S(z), \quad (1.18)$$

donde $M_{\Delta z}$ es la matriz de Müller para una rebanada *finita* del medio que se encuentra en la posición z con un grosor Δz , Figura 1.5.

Restando $S(z)$ en ambos lados de la Ecuación 1.18 y factorizando se obtiene:

$$\begin{aligned} S(z + \Delta z) - S(z) &= M_{\Delta z} S(z) - S(z) \\ S(z + \Delta z) - S(z) &= (M_{\Delta z} - I) S(z) \end{aligned} \quad (1.19)$$

*) La depolarización se produce con varios retardadores birrefringentes colocados en serie con distintos ángulos de orientación entre ellos. El efecto que produce para un haz incidente es complicado ya que los haces emergentes tienen distinta forma de polarización para cada retardador, por lo que la "depolarización" altera o realmente disminuye el grado de polarización inicial de la luz transmitida.

donde I es la matriz identidad de 4×4 . Ahora, dividiendo ambos lados por Δz y tomando el limite cuando $\Delta z \rightarrow 0$, se obtiene la ecuación diferencial para el medio, Ecuación 1.17

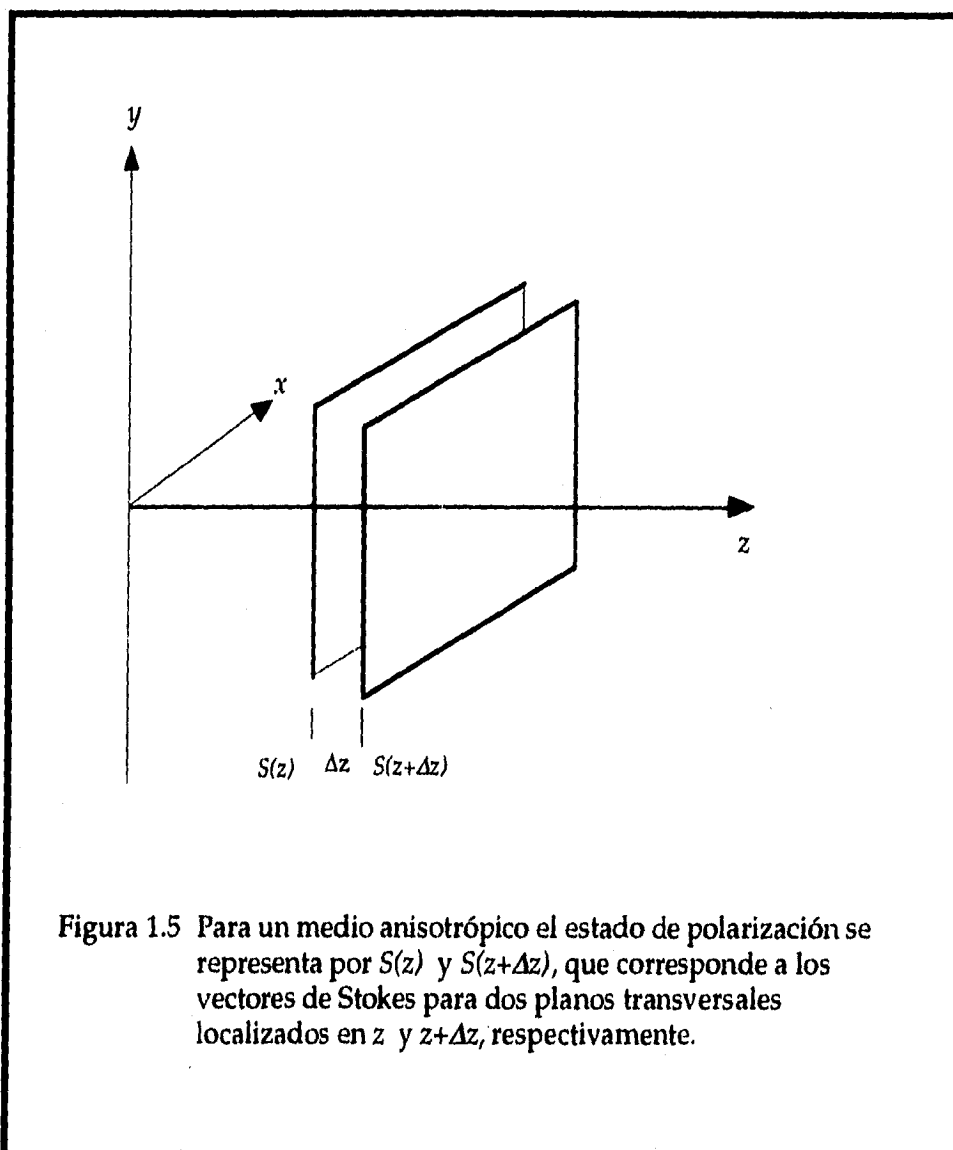


Figura 1.5 Para un medio anisotrópico el estado de polarización se representa por $S(z)$ y $S(z+\Delta z)$, que corresponde a los vectores de Stokes para dos planos transversales localizados en z y $z+\Delta z$, respectivamente.

$$\frac{S(z + \Delta z) - S(z)}{\Delta z} = \frac{(M_{\Delta z} - I) S(z)}{\Delta z},$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{S(z + \Delta z) - S(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(M_{\Delta z} - I) S(z)}{\Delta z}, \quad (1.20)$$

$$\frac{d S(z)}{dz} = m S(z). \quad (1.21)$$

Así, $m = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(M_{\Delta z} - I)}{\Delta z}$ resume las propiedades ópticas *locales* del medio y puede ser función de la posición *. A m se le llama *matriz diferencial de propagación* en el medio (matriz diferencial de Müller de 4×4).

Una segunda manera de calcular m es partiendo de M_z la matriz del medio (de grosor z). Ahora, la Ecuación 1.17 tiene una solución de la forma

$$S(z) = M_z S(0) \quad (1.22)$$

donde M_z representa al medio anisotrópico y $S(0)$ es el vector de Stokes inicial en $z=0$. Derivando la Ecuación 1.22 con respecto a z se obtiene

$$\frac{d S(z)}{dz} = \frac{d M_z}{dz} S(0) \quad (1.23)$$

y aplicando la ecuación diferencial Ecuación 1.17 en la Ecuación 1.23, se tiene

$$m S(z) = \frac{d M_z}{dz} S(0). \quad (1.24)$$

*) La expresión diferencial (Ecuación 1.17) debe tomarse operativamente como la Ecuación 1.20 dado que las ecuaciones diferenciales en el sentido clásico (véase por ejemplo "Introducción al cálculo y al análisis matemático" de R. Courant y John [14]) se aplican únicamente a variables, y una ecuación diferencial contiene las derivadas o diferenciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes. Gilbert Strang [15] presenta las propiedades de ecuaciones diferenciales con elementos matriciales.

Además, $S(z) = M_z S(0)$ que al sustituirlo en la Ecuación 1.23 nos queda

$$m M_z = \frac{d M_z}{dz} \quad (1.25)$$

Por lo tanto

$$m = \left(\frac{d M_z}{dz} \right) M_z^{-1} \quad (1.26)$$

siendo m la *matriz diferencial* (la propiedad local) para un medio con propiedades globales M_z , la cual especifica *las propiedades ópticas de cada rebanada en la que está dividido el medio óptico*.

Las matrices diferenciales de Müller tienen una ventaja, desde el punto de vista de su utilidad en la práctica, ya que cada uno de sus elementos identifica de manera *única* la física del material. Esto es, cada elemento de la matriz m ($m_{11}, m_{12}, m_{13}, \dots$ etc.) está relacionado de manera exclusiva con un fenómeno físico del material. Así los elementos a lo largo de la diagonal principal son iguales y representan la absorción y refracción isotrópica ($m_{kk} = \alpha$). Los elementos a lo largo de la segunda diagonal representan la birrefringencia circular, $m_{23} = -m_{32} = \mu$ y el dicroísmo circular con los elementos $m_{14} = m_{41} = \delta$. En la primera fila y segunda columna se representa el dicroísmo lineal a lo largo de los ejes coordenados, $m_{12} = m_{21} = \beta$. El dicroísmo lineal a lo largo de la bisectriz de los ejes coordenados se manifiesta en los elementos $m_{13} = m_{31} = \gamma$. La birrefringencia lineal a lo largo de los ejes coordenados esta dada por, $m_{34} = -m_{43} = \eta$ y la birrefringencia lineal a lo largo de la bisectriz de los ejes coordenados corresponden a $m_{24} = -m_{42} = \nu$. Así, la matriz tiene la siguiente conformación [13]:

$$m = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} ; \quad (1.27)$$

esto es:

$$m = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \beta & \alpha & \mu & \nu \\ \gamma & -\mu & \alpha & \eta \\ \delta & -\nu & -\eta & \alpha \end{bmatrix}. \quad (1.28)$$

Resumiendo, para diferentes medios anisotrópicos no depolarizantes la matriz diferencial está dada por ocho condiciones básicas de comportamiento óptico.

- Refracción isotrópica.
- Absorción.
- Birrefringencia lineal a lo largo de los ejes coordenados xy .
- Dicroísmo lineal a lo largo de los ejes coordenados xy .
- Birrefringencia lineal a lo largo de la bisectriz de las coordenadas xy .
- Dicroísmo lineal a lo largo de la bisectriz de las coordenadas xy .
- Birrefringencia circular.
- Dicroísmo circular.

CAPÍTULO II

ANISOTROPÍA ÓPTICA DE MEDIOS NO-HOMOGÉNEOS.

2.1 INTRODUCCIÓN

Como se vio en el Capítulo I, existen dos formalismos matemáticos útiles en la representación de la anisotropía óptica. Es de interés para este trabajo el Cálculo de Müller, pues utiliza para la descripción de la luz polarizada matrices de 4×4 , con valores *reales* para cada elemento, siendo todos ellos *intensidades luminosas* que se pueden medir experimentalmente. Las propiedades del haz saliente del medio (o material) están descritas por el producto de la multiplicación matricial (vector resultante).

El Cálculo de Müller es el más apropiado cuando la superposición de haces es totalmente incoherente o cuando la información sobre la fase del haz no es relevante. El uso del Cálculo de Müller, se justifica ampliamente cuando se requiere describir sistemas ópticos *no-homogéneos*, como es nuestro caso, o cuando se trata de conocer las propiedades de anisotropía combinada con efectos depolarizantes. En los experimentos de interés, los efectos depolarizantes se deben esencialmente a la presencia de partículas dispersoras en el líquido polimérico, que disminuyen el grado de polarización inicial de la luz transmitida, por lo que conviene desde ahora utilizar dicho cálculo, si bien en este trabajo no se analizará el problema de la presencia de polvos.

Nuestro interés en el uso del cálculo matricial para evaluar anisotropías ópticas se basa en su aplicación al estudio de la dinámica de fluidos poliméricos. Dos razones importantes existen para ello. La primera porque los líquidos poliméricos generalmente son ópticamente anisotrópicos cuando están fuera de equilibrio. Por ejemplo, los líquidos poliméricos son anisotrópicos como resultado de los esfuerzos que un flujo impone sobre las moléculas del fluido, dependiendo dicha anisotropía del tipo de flujo y de la rapidez del mismo. En estos casos, las birrefringencias y dicroismos observados corresponden a la anisotropía que se induce para cada elemento de fluido a lo largo del camino óptico recorrido dentro del fluido.

Para este trabajo de tesis interesa el caso de fluidos sujetos a deformaciones bajo condiciones reales de laboratorio. En particular, cuando se coloca el fluido a estudiar dentro de una cavidad (*celda de flujos*) que en su interior tiene dos rodillos con *ejes paralelos*, los cuales rotan en la misma dirección y en sincronía, a una cierta velocidad dentro del fluido (Figura 2.1) [6]. Entonces al girar los rodillos se generan esfuerzos que dependen de la geometría de la celda de flujo (del diámetro de los rodillos y de su velocidad de rotación) y que ocasionan que el fluido sufra deformaciones; éstas últimas, inducen una anisotropía óptica en el material polimérico.

La segunda razón, y de gran importancia para el enfoque de este trabajo de tesis, es considerar que los esfuerzos existentes dentro de la cavidad dependen localmente, pues se produce un flujo *no-homogéneo*, por lo que la retardancia (causada por la anisotropía óptica) es función de la posición dentro del líquido. Esto es, *las cantidades físicas varían espacialmente* y en consecuencia las mediciones experimentales dependen del camino óptico recorrido. De la Figura 2.2 puede inferirse que, para las líneas de corriente calculadas (ver Figura 2.1b *), el tensor gradiente de deformación tiene valores que dependen de la posición. En consecuencia, el polímero presenta anisotropías ópticas que varían con la posición, alcanzando los valores mayores en el punto de estancamiento y tendiendo a cero a medida que nos acercamos a los rodillos. Además, debido a la presencia de las paredes del contenedor en la dirección del camino óptico (ver Figura 2.1a), también el tensor gradiente de deformación a lo largo del camino óptico depende de la posición. Son estas no-homogeneidades las que se analizan en este trabajo.

En este Capítulo se desarrolla el formalismo matemático** para evaluar tales anisotropías no-homogéneas, mientras que en el Capítulo III se evalúan las consecuencias físicas del formalismo.

En las siguientes dos secciones se analizan tres Casos diferentes de medios anisotrópicos no-homogéneos con grados de complejidad crecientes. El objetivo es mostrar con claridad las implicaciones físicas y comprobar la exactitud de los resultados.

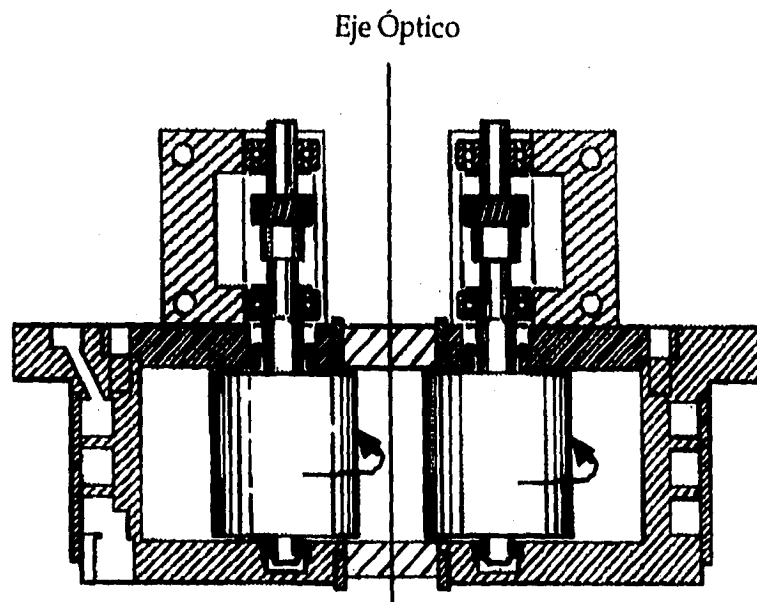
*) Agradezco a Marco A. Reyes Huesca el haberme facilitado el diagrama de flujo (líneas de corriente) para una celda de dos rodillos, resultado de su trabajo de tesis [25].

**) Para realizar las operaciones algebraicas y matriciales se utilizó como herramienta el programa *Mathematica* [1].

El Caso 1 corresponde a una anisotropía con orientación vertical constante. El Caso 2 considera una anisotropía con orientación constante pero arbitraria. El Caso 3 (Sección 2.3) considera los fenómenos físicos que "a priori" pueden considerarse que existen en las condiciones del laboratorio como se muestra en la Figura 2.1.

Por el momento, se dan los resultados analíticos únicamente; el análisis detallado y la discusión de la física del problema y su solución se da con detalle en el Capítulo III.

Figura 2.1a El dispositivo de los rodillos y su dirección de rotación.



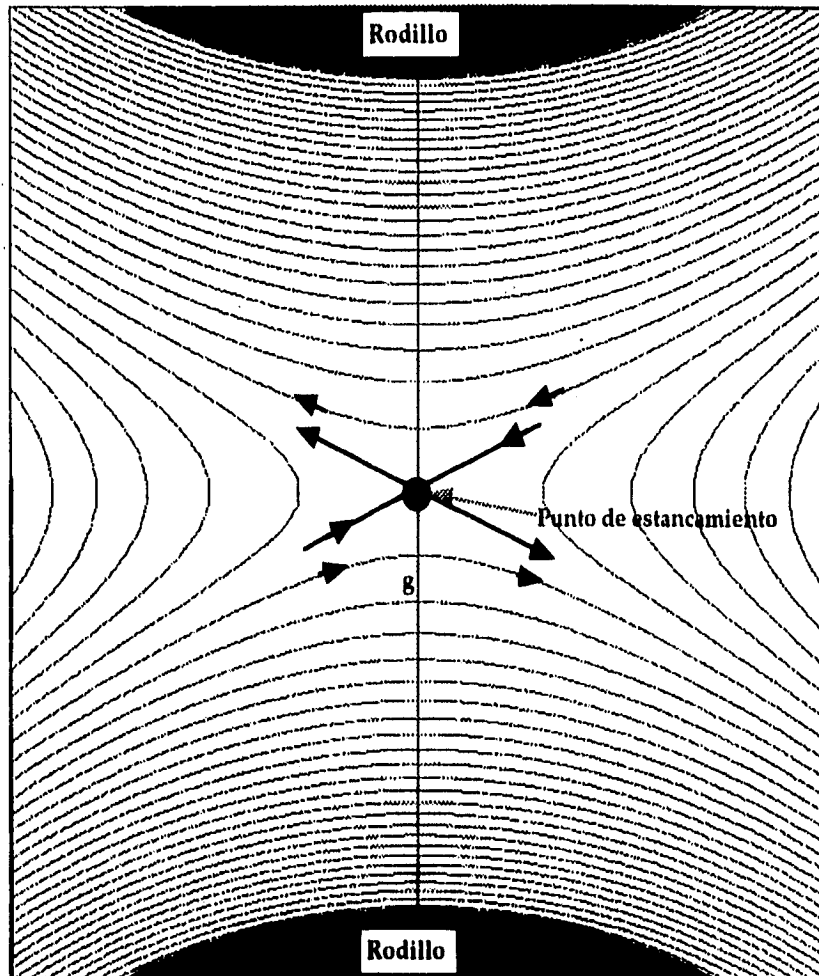


Figura 2.1b Las líneas del flujo (o de corriente) generadas cuando los rodillos giran simultáneamente en la misma dirección. Separación entre rodillos $g=1.250$ cm, con un radio de cada rodillo de $R=1.075$ cm.

2.2 MATRIZ DIFERENCIAL m DE UN MEDIO BIRREFRINGENTE

Dado el posible impacto tecnológico y teórico de conocer las propiedades *globales* a partir de las propiedades *locales* de la anisotropía, en esta sección se plantea el problema inverso que permite encontrar la Ecuación 1.28. Es decir, resulta de suma importancia predecir la birrefringencia global de un medio M cuando las propiedades del medio varían a lo largo de la trayectoria óptica recorrida. Así, utilizando las ideas del Capítulo I se busca integrar la ecuación diferencial [13]

$$\frac{dS(z)}{dz} = m(z) S(z), \quad (2.1)$$

cuando $m(z)$ representa una función (matricial) con coeficientes dependientes de la posición en la dirección del eje z del camino óptico.

La solución de la ecuación diferencial anterior cumple con la ecuación $S(z) = M S(0)$ [13]. Ahora, es necesario encontrar la matriz de Müller M que depende de la matriz m , la cual a su vez depende de la posición z . Es posible integrar la ecuación anterior y obtener que

$$M = e^{\int_0^z m(z) dz} = I + \int_0^z m(z) dz + \frac{1}{2!} \left(\int_0^z m(z) dz \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\int_0^z m(z) dz \right)^3 + \dots \quad (2.2)$$

o, equivalentemente

$$M = e^{m'} = I + m' + \frac{1}{2!} m'^2 + \frac{1}{3!} m'^3 + \dots \quad (2.3)$$

donde I es la matriz identidad de 4×4 y ésta es justificable por la condición inicial a la frontera en $M(z=0) = I$. Así que, la integración de la matriz m puede reescribirse considerando

$$\int_0^z m(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n m_i(z) = m', \quad (2.4)$$

donde m' corresponde a la integración de las contribuciones diferenciales (de cada rebanada del material anisotrópico) sobre toda la muestra y m_i es el valor de la matriz diferencial en la posición z_i . Tomando en cuenta lo anterior, la matriz m' está conformada por elementos m'_{ij} , y cada uno representa una propiedad del medio según sea el caso.

La matriz m' tiene su traza igual a cero, con elementos constantes* [15 y 21] y la Ecuación 2.4 representa la única manera de conservar la relación entre las propiedades físicas de las rebanadas del material y las propiedades globales del mismo. Nótese que la propiedad multiplicativa de las matrices M de Müller se pierde para las matrices m . Es decir, la Ecuación 2.4 permite *sumar* la contribución de cada rebanada conservando la física del medio anisotrópico. La *multiplicación de matrices diferenciales* ocasiona que aparezcan elementos, de acuerdo a la Tabla 1.2, en posiciones que representan diferentes fenómenos físicos.

En particular, interesan valores m'_{ij} acotados, con $m'_{ij} < \infty$ para todo punto en el material. Desde luego, no son de interés, materiales cuyas propiedades ópticas son indefinidas para un punto en el material. Además m'_{ij} , puede ser cualquier función continua y acotada dependiente de la posición z . Es decir,

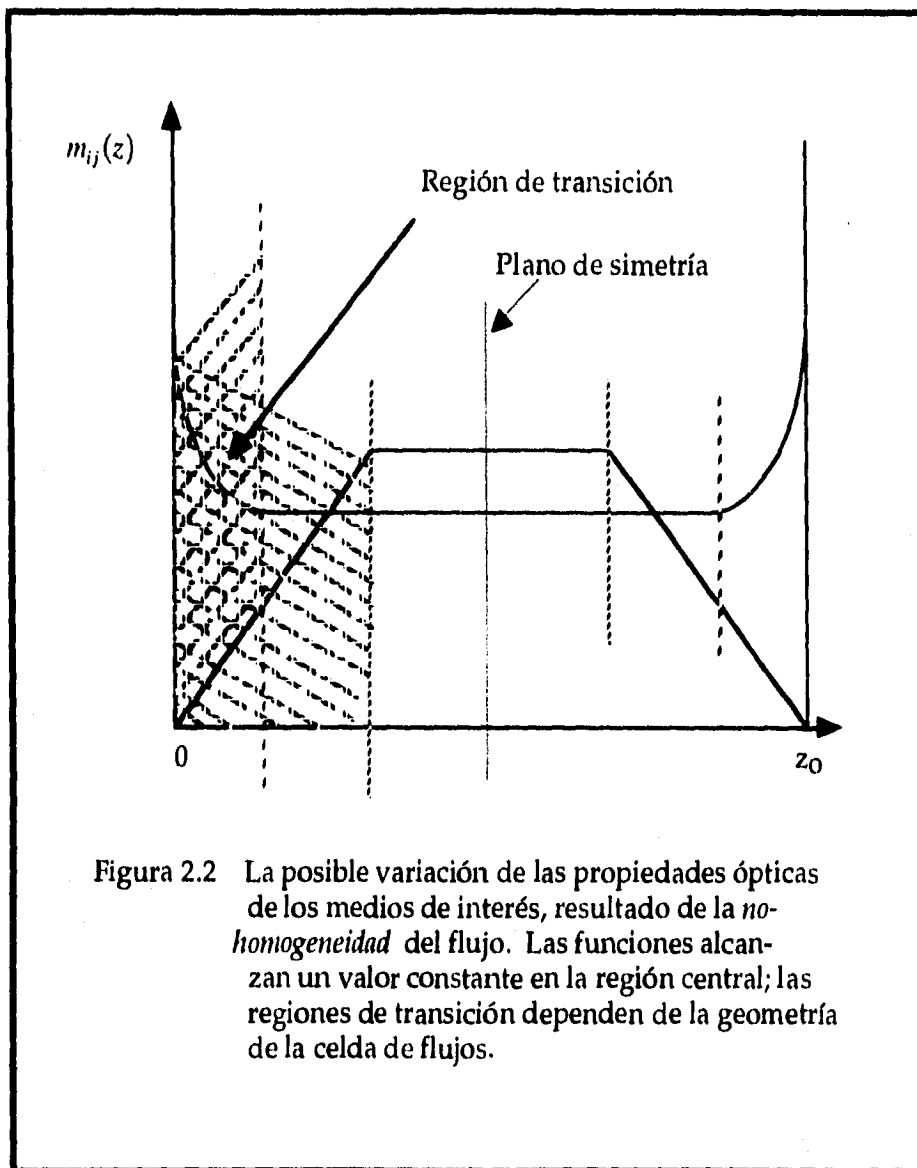
$$m'_{ij} = \int_0^z f(z) dz. \quad (2.5)$$

De esta manera, la Ecuación 2.4 representa la contribución *global* de las rebanadas, aunque esta Ecuación mantiene la forma *matricial diferencial* de manera explícita puesto que no contiene términos en la diagonal principal.

Para el caso de fluidos en la celda de dos rodillos, son de interés propiedades ópticas que varían desde cero en las fronteras (el fluido en esta región no está sujeto a deformaciones y por lo tanto es isotrópico) y alcanzan un valor máximo en la región central del fluido, como lo muestra la Figura 2.2. Así, m'_{ij} corresponde a la integración de funciones con características similares a las que se muestran en la Figura 2.2.

*) Si una matriz A de 4×4 , tiene su determinante igual a cero, se dice que es una matriz singular.

El resultado físico de la Ecuación 2.4, que facilita considerablemente el cálculo de la anisotropía, no resulta evidente para el experimentalista; en particular en los casos en que la anisotropía varía en magnitud y orientación. Deben considerarse las Ecuaciones 2.4 y 2.5 como un resultado de gran utilidad en la práctica, como se verá en el Caso 2.



En general, se puede esperar que las anisotropías se desvanezcan en las paredes del contenedor y alcancen un valor constante en la región central, esperando que se comporten como una función suave y continua. En el Capítulo III discutiremos y ampliaremos la física de la Figura 2.2 y su análisis.

Para continuar con el cálculo de M , es necesario encontrar las potencias de m' , lo cual resulta más sencillo teniendo en cuenta la siguiente transformación

$$m' = T m'_D T^{-1}, \quad (2.6)$$

donde T es la matriz que transforma a m' a la forma diagonal m'_D . Los elementos de la matriz diagonal son los *eigenvalores* de m' que son las raíces de la ecuación característica $\det(m' - \nu I) = 0$. La matriz transformación T está compuesta por columnas:

$$T = [T_0, T_1, T_2, T_3], \quad (2.7)$$

donde T_i ($i = 0, 1, 2, 3$) son los *eigenvectores* de m' asociados con los *eigenvalores* ν_i ($i = 0, 1, 2, 3$). Los T_i y los ν_i forman el conjunto de cuatro ecuaciones lineales homogéneas equivalentes a la ecuación de la matriz de eigenvalores, es decir

$$m' T_i = \nu_i T_i, \quad (2.8)$$

La ventaja de escribir a m' en la forma anterior (Ecuación 2.6) es que la n -ésima potencia de m' está dada por

$$m'^n = T m'^n_D T^{-1}. \quad (2.9)$$

La matriz m'_D es una matriz diagonal, que al ser multiplicada n -veces por si misma no cambia su estructura, es decir, cada término de la matriz está de igual manera elevado a la n -ésima potencia. De este modo, resulta que la estructura matemática de la matriz queda como [13 y 15]

$$(m'_{Dij})^n = (m'^n_{Dij}). \quad (2.10)$$

Es necesario ahora presentar dos observaciones ya que tienen implicaciones fuertes e importantes para el estudio de la anisotropía óptica, y muy probablemente para otros tipos de anisotropía no-homogéneas. Primero, la descomposición de la anisotropía del medio en términos de las matrices m es muy importante porque cada elemento m_{ij} expresa un fenómeno físico y permite calcular m'_{ij} para cualquier dependencia del fenómeno en función de z . Segundo, la matriz global M requiere la Ecuación 2.3 completa, no debe truncarse a priori, pues aunque se sabe que sus elementos están acotados no son necesariamente pequeños. Estas ideas se amplían posteriormente en el Capítulo III. Por el momento, se aplican los resultados anteriores a casos específicos de anisotropía.

Caso 1: Birrefringencia lineal vertical no-homogénea.

A continuación se calcula de manera explícita la anisotropía óptica global para un medio birrefringente lineal no-homogéneo, cuando la magnitud de la anisotropía es función de la posición, $\eta(z)$ no es constante, y con orientación para la anisotropía en la dirección del eje y . Su matriz diferencial es (de acuerdo a la Tabla 1.2 Matriz g y la Ecuación 1.17 [13]):

$$m_a(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta(z) \\ 0 & 0 & -\eta(z) & 0 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

La integración de esta matriz se puede expresar como la matriz diferencial global m'_a , donde

$$m'_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \int_0^z \eta(z) dz \\ 0 & 0 & -\int_0^z \eta(z) dz & 0 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Entonces, la matriz m'_a puede expresarse de la forma

$$m'_a = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi \\ 0 & 0 & -\phi & 0 \end{Bmatrix}, \quad (2.13)$$

donde $\phi = \int_a^z \eta(z) dz$.

Para el cálculo de M , es necesario obtener los *eigenvalores*, de m'_a siendo éstos cuatro y representados por ev_r , con $r=1, 2, 3, 4$, cuyos valores son

$$ev_1 = ev_2 = 0, \quad (2.14)$$

$$-ev_3 = ev_4 = i\phi;$$

los correspondientes *eigenvectores* son:

$$T_0 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad T_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad T_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad T_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (2.15)$$

La matriz T se forma con los anteriores *eigenvectores*; éstos se colocan en una matriz renglón, como se muestra a continuación,

$$T = [T_0, T_1, T_2, T_3] = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & -i \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{Bmatrix}, \quad (2.16)$$

y teniendo como su matriz inversa*,

$$T^{-1} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & i/2 & 1/2 \end{Bmatrix}. \quad (2.17)$$

En la matriz m'_a (Ecuación 2.13) tenemos que ϕ puede tener cualquier valor $< \infty$. Aún más, dado que la física del fenómeno es constante, los elementos $m_{ij} \neq m_{43} = -m_{34}$ son nulos, ya que las propiedades físicas del medio se mantienen sólo cuando las matrices diferenciales y sus correspondientes diferenciales "globales" ocupan exclusivamente los mismos elementos.

De manera semejante, una vez definidos los eigenvalores (Ecuación 2.14), entonces la matriz T de los eigenvalores mantiene la misma estructura, con coeficientes que no dependen de $\eta(z)$ o de ϕ , siendo dicha estructura dependiente únicamente de la física del problema.

Con las matrices m'_a , T y T^{-1} (Ecuaciones 2.13, 2.16 y 2.17) es fácil el cálculo de la matriz diagonal diferencial "global" [20 y 21] mediante la ecuación

$$m'_{aD} = T^{-1} m'_a T, \quad (2.18)$$

Siendo los elementos de esta matriz los que corresponden a los eigenvalores de la matriz m'_a . Es decir

$$m'_{aD} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\phi \end{Bmatrix}. \quad (2.19)$$

*) Por definición una matriz A de $n \times n$ al realizar el producto con otra matriz B de $n \times n$ de manera que $AB = BA = I$, donde I es la matriz identidad multiplicativa, entonces se dice que B es la *inversa* multiplicativa de la matriz A y se denota $B = A^{-1}$ [27].

Utilizando la Ecuación 2.6, la potencia n -ésima de m'_{aD} es

$$m'^n_a = T m'^n_{aD} T^{-1}, \quad (2.20)$$

que al substituir, la ecuación anterior en la Ecuación 2.4, se obtiene la solución de la ecuación diferencial M ,

$$M_a = e^{m'} = I + m'_a + \frac{1}{2!} m'^2_a + \frac{1}{3!} m'^3_a + \dots \quad (2.21)$$

La ecuación anterior se reduce a

$$M_a = T M_{aD} T^{-1}. \quad (2.22)$$

tomando en cuenta que $\phi = \int_0^z \eta(z) dz$, tenemos que M_{aD} es la matriz diagonal de la forma

$$M_{aD} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\phi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\phi} \end{Bmatrix}. \quad (2.23)$$

Realizando las operaciones de la Ecuación 2.22 se obtiene la matriz de Müller M para un medio birrefringente no-homogéneo con polarización vertical.

$$M_a = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} & -i \left(\frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2} \right) \\ 0 & 0 & i \left(\frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2} \right) & \left(\frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} \right) \end{Bmatrix}, \quad (2.24)$$

y la transformación trigonométrica de la matriz anterior es

$$M_a = \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\phi) & -\text{sen}(\phi) \\ 0 & 0 & \text{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{array} \right\}. \quad (2.25)$$

Con lo que se obtiene la matriz integrable que representa al medio birrefringente lineal no-homogéneo y que se puede comparar con la Matriz g de la Tabla 1.2, recordando que $\phi = \int \eta(z) dz$.

Caso 2: Birrefringencia lineal no-homogénea.

Es claro que un medio birrefringente lineal no-homogéneo puede tomar cualquiera de las posibles orientaciones $0 \leq \chi < 360^\circ$. Si el ángulo de orientación no coincide con el eje y (la vertical), el fenómeno de birrefringencia lineal no-homogénea no cambia; es sólo la representación matemática la que puede ser diferente. Entonces el Caso 2 considera un medio cuya birrefringencia lineal tiene orientación constante (como función de la posición) y sin embargo, está dirigida en cualquier dirección contenida en el plano xy. Físicamente, la representación de dicha birrefringencia puede realizarse fácilmente como la combinación lineal de dos birrefringencias lineales en dos direcciones complementarias; por ejemplo, la matriz m_a , con propiedades de birrefringencia lineal a lo largo de los ejes xy con propagación en la dirección del eje z, más la matriz m_b con birrefringencia lineal a lo largo de la bisectriz de los mismos ejes y con propagación en la dirección del eje z (ver Figura 2.3). Esto es,

$$m_a = \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta(z) \\ 0 & 0 & -\eta(z) & 0 \end{array} \right\} \quad (2.26)$$

y

$$m_b = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v(z) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -v(z) & 0 & 0 \end{Bmatrix}. \quad (2.27)$$

De manera semejante al primer caso, es de interés evaluar un sistema birrefringente no-homogéneo el cual está representado por la combinación lineal $a m_a(z) + b m_b(z)$, de tal manera que la matriz m_{a+b} es una matriz que depende de $\eta(z)$ y $v(z)$. La matriz m_{a+b} queda como

$$m_{a+b} = m_G = a \cdot m_a + b \cdot m_b \quad (2.28)$$

con a y b constantes.

Se ha considerando a y b acotadas, $-1 \leq a, b \leq 1$, cumpliendo la condición de $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$, es decir, los casos de m_a y m_b deben recuperarse cuando $a=1, b=0$ y $a=0, b=1$ respectivamente. Así, al tener $a=1, b=0$ se tiene el caso anterior previamente discutido. Cuando $a=0, b=1$ tenemos que el vector de polarización se encuentra a 45° de la vertical, para $a=-1, b=0$ el plano de polarización es horizontal. Por lo que cualquier combinación lineal corresponde a un vector de polarización en el plano para la birrefringencia lineal, ver Figura 2.4.

Tomando en cuenta lo anterior es necesario considerar que $v(z)$ y $\eta(z)$ tienen el mismo valor; lo que interesa en el Caso 2 es analizar por el momento la dependencia angular de la orientación de la birrefringencia. Si $v(z) = \eta(z)$, tenemos que la matriz Ecuación 2.28, se puede reescribir como:

$$m_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-a^2) \eta(z) \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \eta(z) \\ 0 & -(1-a^2) \eta(z) & -a^2 \eta(z) & 0 \end{Bmatrix}, \quad (2.29)$$

donde $1 - a^2 = b^2$.

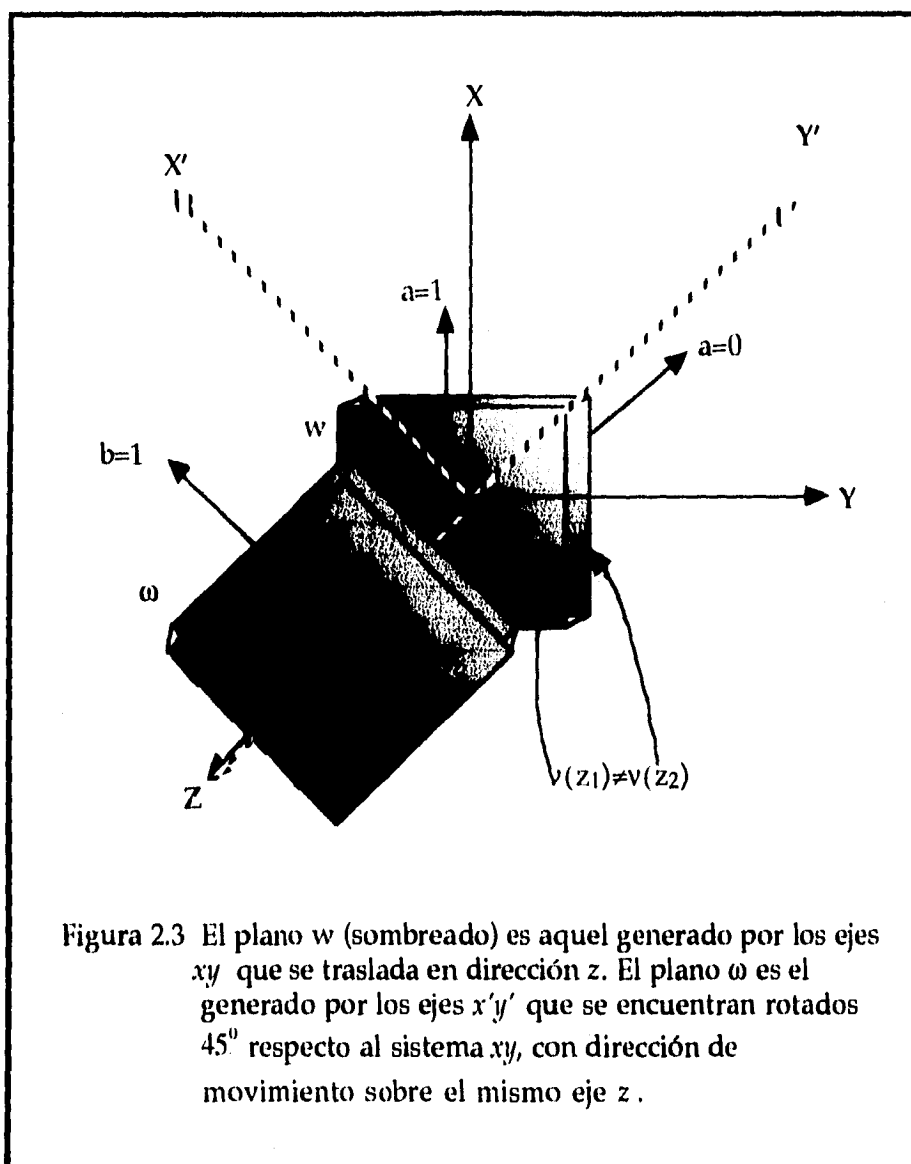
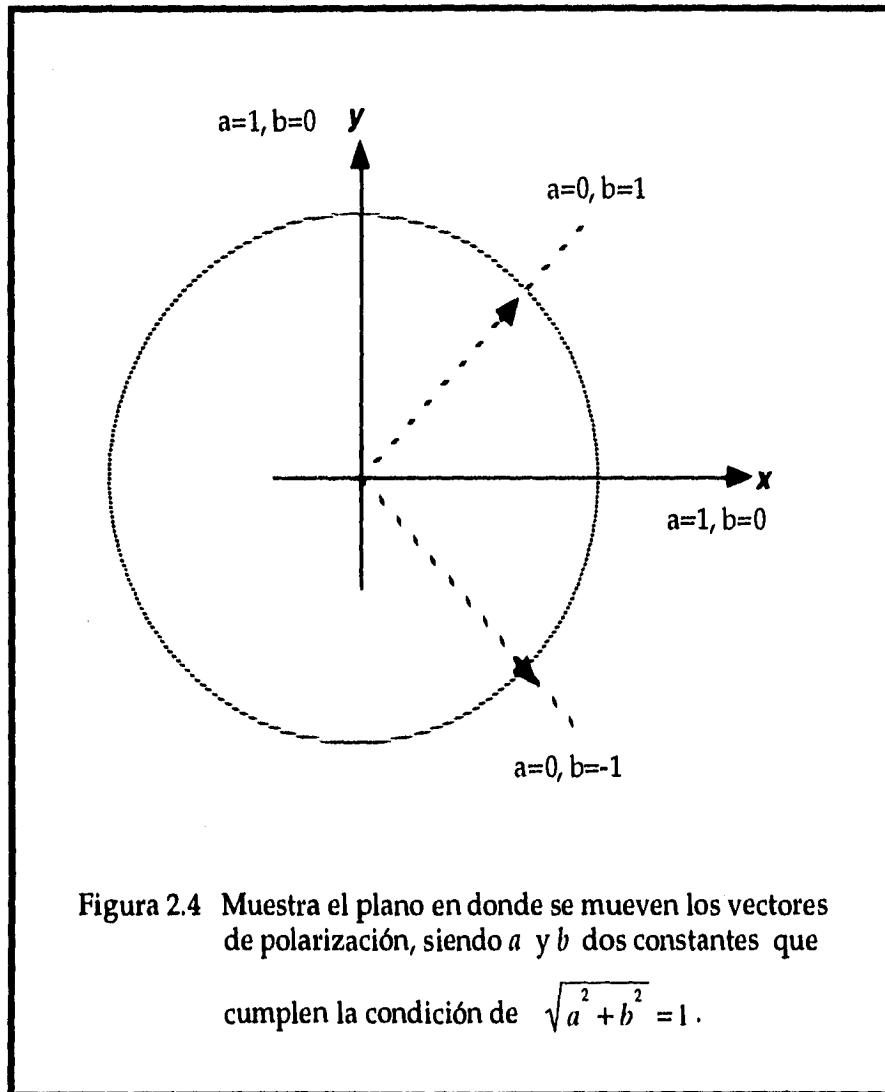


Figura 2.3 El plano w (sombreado) es aquel generado por los ejes xy que se traslada en dirección z . El plano ω es el generado por los ejes $x'y'$ que se encuentran rotados 45° respecto al sistema xy , con dirección de movimiento sobre el mismo eje z .



Una vez que se obtiene la matriz que representa la física de interés, se puede efectuar el mismo procedimiento que en el primer caso. Integrando la matriz Ecuación 2.29 m_G , se tiene

$$m'_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-a^2) \int_0^z \eta(z) dz \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \int_0^z \eta(z) dz \\ 0 & -(1-a^2) \int_0^z \eta(z) dz & -a^2 \int_0^z \eta(z) dz & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

Como en el primer caso, $\phi = \int_0^z \eta(z) dz$ y

$$m'_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-a^2) \phi \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \phi \\ 0 & -(1-a^2) \phi & -a^2 \phi & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Los eigenvalores representados por ev_r , con $r = 1, 2, 3, 4$ para esta matriz son

$$ev_1 = ev_2 = 0, \quad (2.32)$$

$$-ev_3 = ev_4 = i \phi w,$$

donde $w = \sqrt{1 + 2a^2(a^2 - 1)}$ y siendo sus eigenvectores

$$T_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ a^2 \\ -1+a^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1+a^2}{w} \\ -\frac{a^2}{w} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1-a^2}{w} \\ \frac{a^2}{w} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

De esta manera

$$T = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & \frac{-1+a^2}{w} & \frac{1-a^2}{w} \\ 0 & -1+a^2 & -\frac{a^2}{w} & \frac{a^2}{w} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{Bmatrix}. \quad (2.34)$$

La matriz inversa T^{-1} corresponde a

$$T^{-1} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{-w^2} & \frac{-1+a^2}{-w^2} & 0 \\ 0 & \frac{1-a^2}{2w} & \frac{a^2}{2w} & 1/2 \\ 0 & \frac{-1+a^2}{2w} & \frac{-a^2}{2w} & 1/2 \end{Bmatrix}. \quad (2.35)$$

Así mismo la matriz diagonal (m_{GD}), utilizando la Ecuación 2.18, queda como

$$m_{GD} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -w\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w\phi \end{Bmatrix}. \quad (2.36)$$

Utilizando la Ecuación 2.9, la potencia n -ésima de $m'_{GD}(z)$ es

$$m'^n = T m'^n_{GD} T^{-1}. \quad (2.37)$$

que al substituir, la ecuación anterior en la Ecuación 2.6, se obtiene la solución de la ecuación diferencial M para este Caso 2.

$$M'_G = e^{m'} = I + m'_G + \frac{1}{2!} m'^2_G + \frac{1}{3!} m'^3_G + \dots \quad (2.38)$$

La ecuación anterior se reduce a

$$M_G = T M_{GD} T^{-1}, \quad (2.39)$$

siendo M_{GD} la matriz diagonal, tomando en cuenta que $\phi = \int_0^z \eta(z) dz$, por lo que,

$$M_{GD} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-w\phi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{w\phi} \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Realizando las operaciones de la Ecuación 2.39, tenemos que la matriz M_G queda de la forma

$$M_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^4}{\alpha} + \frac{(-1+a^2)^2}{2\alpha e^{\beta\phi}} + \frac{(-1+a^2)^2 e^{\beta\phi}}{2\alpha} & \frac{a^2(-1+a^2)(-1+e^{\beta\phi})^2}{-2\alpha e^{\beta\phi}} & \frac{(1-a^2)(-1+e^{2\beta\phi})}{2\beta e^{\beta\phi}} \\ 0 & \frac{a^2(-1+a^2)(-1+e^{\beta\phi})^2}{2\alpha e^{\beta\phi}} & \frac{(-1+a^2)^2}{\alpha} + \frac{a^4}{2\alpha e^{\beta\phi}} + \frac{a^4 e^{\beta\phi}}{2\alpha} & \frac{a^2(-1+e^{2\beta\phi})}{2\beta e^{\beta\phi}} \\ 0 & \frac{(-1+a^2)(-1+e^{2\beta\phi})}{2\beta e^{\beta\phi}} & \frac{a^2(1-e^{2\beta\phi})}{2\beta e^{\beta\phi}} & \frac{e^{-\beta\phi} + e^{\beta\phi}}{2} \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

donde: $\alpha = 1 - 2a^2 + 2a^4$, $\beta = \sqrt{-\alpha} = i\sqrt{\alpha}$.

Los elementos de la matriz anterior pueden reescribirse en términos de funciones senos y cosenos de la siguiente manera.

$$M_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^4 + (1+a^2)^2 \cos(\phi)}{\alpha} & \frac{a^2(1-a^2)(1-\cos(\phi))}{\alpha} & \frac{(1-a^2)\text{sen}(\phi)}{\alpha} \\ 0 & \frac{-a^2(1-a^2)(\cos(\phi)-1)}{\alpha} & \frac{-(1-a^2)^2 + a^4 \cos(\phi)}{\alpha} & \frac{a^2 \text{sen}(\phi)}{\alpha} \\ 0 & \frac{-(1-a^2)\text{sen}(\phi)}{\alpha} & \frac{-a^2 \text{sen}(\phi)}{\alpha} & \cos(\phi) \end{pmatrix}, \quad (2.42)$$

con $\alpha = 1 - 2a^2 + 2a^4$.

La ecuación anterior describe cualquier medio birrefringente lineal no-homogéneo. Es de esperarse que cuando la orientación de la birrefringencia coincida con los ejes x, y o los bisectores a $\pm 45^\circ$, entonces dicha ecuación debe corresponder a la forma simplificada para tales casos. Por ejemplo, si se toma la condición de que $a = 1$, se tiene que la matriz anterior corresponde al Caso 1, es decir, a la birrefringencia lineal en los ejes x y y con la dirección de propagación z

$$M_G|_{a=1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\phi) & \text{sen}(\phi) \\ 0 & 0 & -\text{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

Ahora al tomar $a = 0$, se obtiene la matriz que corresponde a la birrefringencia en los bisectores a -45° , en la dirección de propagación z . Es decir

$$M_G|_{a=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & 0 & \text{sen}(\phi) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\text{sen}(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Por lo que se tiene que M_G genera todo el plano perpendicular a la dirección de propagación de la luz en un medio birrefringente.

2.3. CÁLCULO DE LA MATRIZ DIFERENCIAL m A PARTIR DE LA MATRIZ GENERAL PARA UN MEDIO BIRREFRINGENTE.

En esta Sección se calcula la matriz diferencial para el caso general de un medio birrefringente que es no-homogéneo, en el cual tanto la *orientación* de la birrefringencia (relativa a los ejes x, y) como su *magnitud* pueden depender de la posición. La matriz de Müller que representa a este medio, como se vio en el Capítulo I (Tabla 1.2 Matriz m), requiere considerar ahora un caso más general donde la orientación $\beta(z)$ y la retardancia $\delta(z)$ dependen de la posición de propagación z . Sólo así, es posible conocer las medidas de birrefringencia que están directamente relacionadas con el cambio en la conformación de la molécula polimérica cuando ésta se somete a esfuerzos provocados por los flujos generados en la celda de dos rodillos.

La matriz de Müller cuya retardancia *global* es δ y orientación *global* β está dado por [11],

$$M_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(4\beta)\text{sen}^2(\delta/2) + \cos^2(\delta/2) & \text{sen}(4\beta)\text{sen}^2(\delta/2) & -\text{sen}(2\beta)\text{sen}(\delta) \\ 0 & \text{sen}(4\beta)\text{sen}^2(\delta/2) & -\cos(4\beta)\text{sen}^2(\delta/2) + \cos^2(\delta/2) & \cos(2\beta)\text{sen}(\delta) \\ 0 & \text{sen}(2\beta)\text{sen}(\delta) & -\cos(2\beta)\text{sen}(\delta) & \cos(\delta) \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

Debe recordarse que, en el medio no-homogéneo, la retardancia *local* es $\delta' = \delta'(z)$ y su orientación *local* es $\beta' = \beta'(z)$.

A partir de la anterior ecuación general, que representa la birrefringencia *global* del medio, se desea conocer la ecuación para la birrefringencia *local*. Para este objetivo se puede aplicar la Ecuación 1.26,

$$m = \left(\frac{dM_z}{dz} \right) M_z^{-1},$$

donde la matriz inversa está dada como

$$M_z^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2 + 2\cos(4\beta) - \cos(4\beta + \delta)}{+2\cos(\delta) - \cos(4\beta + \delta)/4} & \text{sen}(4\beta)\text{sen}^2(\delta/2) & \text{sen}(2\beta)\text{sen}(\delta) \\ 0 & \text{sen}(4\beta)\text{sen}^2(\delta/2) & \frac{2 - 2\cos(4\beta) + \cos(4\beta + \delta)}{+2\cos(\delta) + \cos(4\beta + \delta)/4} & -\cos(2\beta)\text{sen}(\delta) \\ 0 & -\text{sen}(2\beta)\text{sen}(\delta) & \cos(2\beta)\text{sen}(\delta) & \cos(\delta) \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

La derivada de la Ecuación 2.45 es

$$\frac{dM_g}{dz} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-4\text{sen}(4\beta)\text{sen}^2(\delta/2)\dot{\beta} - (\text{sen}(\delta)\dot{\delta} + \cos(4\beta)\text{sen}(\delta)\dot{\delta})/2}{2} & 4\cos(4\beta)\text{sen}(\delta/2)\dot{\beta} + \text{sen}(4\beta)\text{sen}(\delta)\dot{\delta}/2 & -2\text{sen}(2\beta)\text{sen}(\delta)\dot{\beta} - \cos(\delta)\text{sen}(2\beta)\dot{\delta} \\ 0 & \frac{4\cos(4\beta)\text{sen}^2(\delta/2)\dot{\beta} + (\text{sen}(4\beta)\text{sen}(\delta)\dot{\delta}/2)}{2} & 4\text{sen}(4\beta)\text{sen}^2(\delta/2)\dot{\beta} - (\text{sen}(\delta)\dot{\delta} - \cos(4\beta)\text{sen}(\delta)\dot{\delta})/2 & -2\text{sen}(2\beta)\text{sen}(\delta)\dot{\beta} + \cos(2\beta)\cos(\delta)\dot{\delta} \\ 0 & 2\cos(2\beta)\text{sen}(\delta)\dot{\beta} + \cos(\delta)\text{sen}(2\beta)\dot{\delta} & 2\text{sen}(2\beta)\text{sen}(\delta)\dot{\beta} - \cos(2\beta)\cos(\delta)\dot{\delta} & -\text{sen}(\delta)\dot{\delta} \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

En la matriz anterior, se muestra de manera explícita la dependencia de $\delta(z)$ y $\beta(z)$ en la posición con los términos $\dot{\delta} = \frac{d\delta}{dz}$ y $\dot{\beta} = \frac{d\beta}{dz}$. Así, utilizando la Ecuación 1.26, se obtiene la *matriz diferencial* m

$$m_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4\text{sen}^2(\delta/2)\dot{\beta} & \begin{matrix} \text{sen}(2\beta - \delta)\dot{\beta} \\ -\text{sen}(2\beta + \delta)\dot{\beta} \\ -\text{sen}(2\beta)\dot{\delta} \end{matrix} \\ 0 & 4\text{sen}^2(\delta/2)\dot{\beta} & 0 & \begin{matrix} -\text{cos}(2\beta - \delta)\dot{\beta} \\ +\text{cos}(2\beta + \delta)\dot{\beta} \\ +\text{cos}(2\beta)\dot{\delta} \end{matrix} \\ 0 & \begin{matrix} -\text{sen}(2\beta - \delta)\dot{\beta} \\ +\text{sen}(2\beta + \delta)\dot{\beta} \\ +\text{sen}(2\beta)\dot{\delta} \end{matrix} & \begin{matrix} \text{cos}(2\beta - \delta)\dot{\beta} \\ -\text{cos}(2\beta + \delta)\dot{\beta} \\ -\text{cos}(2\beta)\dot{\delta} \end{matrix} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

Realizando una comparación con la Ecuación 1.27, es claro que la matriz diferencial m_s tiene términos (distintos de cero) en las posiciones, $m_{23} = -m_{32}$, $m_{42} = -m_{24}$ y $m_{43} = -m_{34}$, que corresponden físicamente a un medio con birrefringencia circular (m_{32}), birrefringencia lineal en los ejes x , y (m_{43}) y birrefringencia lineal en los bisectores (m_{42}). Ahora, la ecuación que representa birrefringencia global M_s sólo representa birrefringencia *lineal* sin que incluya de manera alguna la presencia de birrefringencia circular. La Ecuación 2.48 significa que, aún para el caso de una matriz representativa de birrefringencia lineal, si se considera de manera explícita en la Ecuación 2.47 una dependencia del ángulo de orientación de la birrefringencia como función de la posición, entonces se puede obtener contribuciones de birrefringencia *circular*, proporcionales a $\dot{\beta} = d\beta/dz$, que aparecen en la posición $m_{23} = -m_{32}$.

El resultado anterior presenta una predicción teórica de importantes consecuencias experimentales; en especial, para datos de birrefringencia en celdas de dos rodillos, ya que no se ha reportado en la literatura birrefringencia circular.

Una posible explicación para la correlación entre los resultados teóricos aquí expuestos y los experimentales es suponer que los flujos bidimensionales que la celda de flujos genera, aún cuando, son no-homogéneos a lo largo del camino óptico, estos si son simétricos respecto al plano perpendicular al eje óptico que corta los cilindros a media altura (véase la Figura 2.2). Así se simplifica el análisis de la birrefringencia de fluidos poliméricos generada en una celda de flujos, que presenta simetrías respecto del plano central perpendicular a la dirección de propagación, pues el giro total (acumulado) en el ángulo de orientación que se logra con $\beta(z)$ es siempre cero. Esto es, cada una de las regiones de transmisión ocasiona un giro de igual magnitud y sentido opuesto. Por ello, el análisis de cambios de anisotropía de polímeros sujetos a flujos bidimensionales fuertes no se ve limitado por la suposición de $\dot{\beta} = 0$; por el momento se ha de suponer que tal condición es válida y suficiente. Así, la birrefringencia circular que como resultado de $\beta(z)$ aparece en la Ecuación 2.47, puede incluirse en un análisis aparte, que se integra al resultado final, sin mayor problema. Desde el punto de vista de la aplicación a datos experimentales generados en una celda de dos rodillos, la contribución de birrefringencia circular, por el momento, no es importante y por tanto se ha de suponer $\dot{\beta}(z) = 0$ a partir de aquí.

Tomando en cuenta lo anterior, la matriz diferencial m_g (Ecuación 2.48) queda de la siguiente forma

$$m_g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen}(2\beta)\dot{\delta}(z) \\ 0 & 0 & 0 & \text{cos}(2\beta)\dot{\delta}(z) \\ 0 & \text{sen}(2\beta)\dot{\delta}(z) & -\text{cos}(2\beta)\dot{\delta}(z) & 0 \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

Realizando el mismo procedimiento que para el Caso 1 y el Caso 2 de la sección anterior, es posible ahora calcular los eigenvalores y los eigenvectores de

m_x respectivamente y obtener así la matriz de transformación T , la inversa de la misma, al igual que su diagonal $m_{x,D}$.

Los eigenvalores y los eigenvectores de la matriz diferencial (Ecuación 2.49) son cuatro, eigenvalores descritos como ev_r , con $r = 1, 2, 3, 4$ que corresponden a

$$\begin{aligned} ev_1 = ev_2 = 0, \\ -ev_3 = ev_4 = i \delta(z), \end{aligned} \tag{2.50}$$

y sus eigenvectores

$$T_0 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, T_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \cot(2\beta) \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, T_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -i \operatorname{sen}(2\beta) \\ i \cos(2\beta) \\ 1 \end{Bmatrix}, T_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ i \operatorname{sen}(2\beta) \\ -i \cos(2\beta) \\ 1 \end{Bmatrix}, \tag{2.51}$$

de manera que

$$T = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cot(2\beta) & -i \operatorname{sen}(2\beta) & i \operatorname{sen}(2\beta) \\ 0 & 1 & i \cos(2\beta) & -i \cos(2\beta) \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{Bmatrix}. \tag{2.52}$$

El cálculo de la matriz inversa T^{-1} da como resultado

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\text{sen}(4\beta)}{2} & \text{sen}^2(2\beta) & 0 \\ 0 & \frac{i \text{sen}(2\beta)}{2} & \frac{-i \cos(2\beta)}{2} & 1/2 \\ 0 & \frac{-i \text{sen}(2\beta)}{2} & \frac{i \cos(2\beta)}{2} & 1/2 \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

La matriz diagonal (m_{rD}) se calcula utilizando la Ecuación 2.18 obteniéndose

$$m_{rD} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \dot{\delta}(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \dot{\delta}(z) \end{pmatrix}. \quad (2.54)$$

De modo equivalente a los casos anteriores y utilizando la Ecuación 2.9, la potencia n -ésima de m_{rD} se calcula como

$$m_r^n = T m_{rD}^n T^{-1}. \quad (2.55)$$

Al substituir la ecuación anterior en la Ecuación 2.6, se obtiene M la solución de la ecuación diferencial; para este caso,

$$M_r = e^m = I + m_r + \frac{1}{2!} m_r^2 + \frac{1}{3!} m_r^3 + \dots \quad (2.56)$$

La ecuación anterior se reduce a

$$M_r = T M_{rD} T^{-1}, \quad (2.57)$$

siendo M_{rD} la matriz diagonal

$$M_{gD} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\delta(z)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\delta(z)} \end{pmatrix}. \quad (2.58)$$

Considerando a $\phi = \int_0^z \delta(z) dz$ y realizando las operaciones de la Ecuación 2.58, tenemos que la matriz M_g queda de la forma

$$M_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(2\beta) + \frac{e^{-i\phi} \operatorname{sen}^2(2\beta)}{2} & \frac{-(e^{-i\phi} (e^{i\phi} - 1)^2 \operatorname{sen}(4\beta))}{4} & \frac{i e^{-i\phi} (e^{i2\phi} - 1) \operatorname{sen}(2\beta)}{2} \\ 0 & \frac{e^{i\phi} \operatorname{sen}(2\beta)^2}{2} & \frac{e^{-i\phi} \cos^2(2\beta) + e^{i\phi} \cos^2(2\beta)}{2} + \operatorname{sen}^2(2\beta) & \frac{-i e^{-i\phi} (e^{i2\phi} - 1) \cos(2\beta)}{2} \\ 0 & \frac{-e^{-i\phi} (e^{i\phi} - 1)^2 \operatorname{sen}(4\beta)}{4} & \frac{i e^{-i\phi} (e^{i2\phi} - 1) \cos(2\beta)}{2} & \frac{e^{-i\phi} + e^{i\phi}}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.59)$$

o equivalentemente,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(2\beta) + \cos(\phi) \operatorname{sen}^2(2\beta) & \frac{-((\cos(\phi) - 1) \operatorname{sen}(4\beta))}{2} & -\operatorname{sen}(2\beta) \operatorname{sen}(\phi) \\ 0 & \frac{-((\cos(\phi) - 1) \operatorname{sen}(4\beta))}{2} & \cos(\phi) \cos^2(2\beta) + \operatorname{sen}^2(2\beta) & \operatorname{sen}(\phi) \cos(2\beta) \\ 0 & \operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}(2\beta) & -\cos(2\beta) \operatorname{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

Así, la Ecuación diferencial 1.22 tiene como solución

$$S(z) = M_s(z)S(0), \quad (2.61)$$

donde $S(z)$ corresponde al vector de Stokes de salida y $S(0)$ al vector de Stokes de entrada del haz de luz.

CAPÍTULO III

ANISOTROPÍA ÓPTICA NO-HOMOGÉNEA DE LÍQUIDOS POLIMÉRICOS.

3.1 BIRREFRINGENCIA BICOLOR DE FLUJO. EL DISPOSITIVO EXPERIMENTAL.

Para el estudio de la dinámica no-lineal de sistemas poliméricos es necesario considerar las deformaciones finitas generadas en el sistema. Estas deformaciones se logran mediante flujos "fuertes" no-homogéneos, los cuales son fundamentalmente elongacionales, aunque pueden presentar un cierto grado de vorticidad. Como se vio en el Capítulo I, las deformaciones se pueden generar en una celda de dos rodillos obteniendo así flujos *bidimensionales*. Los rodillos giran con la misma dirección y velocidad angular, produciéndose así una historia de deformación esencialmente elongacional en la región entre los rodillos, capaz de inducir cambios conformacionales en la estructura del líquido polimérico.

Los cambios conformacionales en la sustancia polimérica inducidos por un flujo se pueden observar porque conllevan anisotropías ópticas que experimentalmente podemos medir. Estas anisotropías se deben a que el índice de refracción a lo largo del eje principal de la estructura molecular es ligeramente diferente al índice de refracción en la dirección perpendicular a la misma. Entonces existe una relación directa entre los cambios de la conformación del polímero y los valores de anisotropía del fluido.

Dada una anisotropía óptica inducida por un flujo, con la técnica de anisotropía de dos colores (o bicolor) es posible conocer tanto el grado de anisotropía óptica como la orientación de los ejes principales del índice de refracción, respecto a los ejes principales del campo del flujo que induce la anisotropía en el líquido polimérico. Esta técnica necesita de dos haces de luz, de diferente color, para poder medir, en forma simultánea, la *magnitud* y la *orientación* de la anisotropía inducida. Esto es, dos colores permiten realizar dos medidas (complementarias) en forma casi instantánea que permiten conocer dos parámetros: la retardancia y su orientación. Tales medidas se logran sin tener que utilizar elementos ópticos dinámicos, es decir sin que los elementos modifiquen algún valor de sus propiedades en función del

tiempo. Esta técnica presenta otras ventajas útiles en el estudio de flujos poliméricos [6 y 23].

La técnica de birrefringencia bicolor de flujos (del inglés: Two Color Flow Birrefringence TCFB) esencialmente consiste de dos elipsómetros de nulos con los polarizadores orientados de manera complementaria, a manera de simplificar el cálculo de la retardancia y la orientación a partir de las intensidades de luz observadas. El arreglo óptico considera que un color tiene polarización de entrada que difiere en 45° con respecto a la orientación de la luz polarizada del segundo color.

Cada elipsómetro de nulos consiste de un polarizador (lineal), la muestra de interés, un analizador (un segundo polarizador colocado a 90° con respecto del polarizador de entrada) y un detector de luz. Ver la Figura 3.1. Cuando la anisotropía de la muestra es cero, entonces la intensidad de luz que alcanza al detector es *cero*, puesto que el polarizador y analizador están cruzados. En el caso de una anisotropía finita, se tiene que el vector del haz de luz linealmente polarizado ya no es perpendicular al eje de polarización del analizador, por lo que no hay una extinción total de la intensidad al pasar por el analizador. Esta intensidad (distinta de cero) da una medida de la anisotropía de la sustancia colocada entre el polarizador y el analizador.

Para obtener información con la técnica de anisotropía de dos colores se requiere considerar el arreglo óptico de la Figura 3.2. Donde se pueden observar los cambios en el estado de polarización de la luz incidente cuando atraviesa un medio birrefringente colocado entre los polarizadores y los analizadores. Para esto se requiere un haz producido por un láser de Argón, generando dos haces con distinta longitud de onda. Estos dos son: el color azul (con una longitud de onda de 4880 \AA) y el color verde (de 5145 \AA). Un arreglo óptico para tal fin se muestra en la Figura 3.1a y Figura 3.1b.

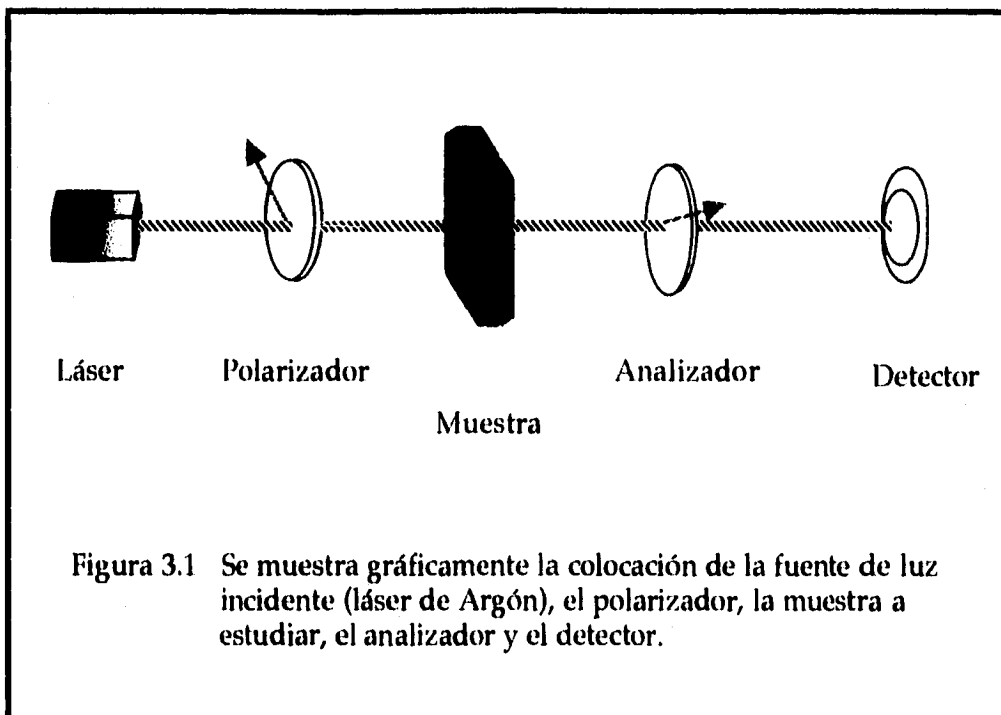


Figura 3.1 Se muestra gráficamente la colocación de la fuente de luz incidente (láser de Argón), el polarizador, la muestra a estudiar, el analizador y el detector.



Figura 3.1a Aquí se muestra el arreglo experimental que se analiza, el cual fue reportado en Gelfroy y Leal [24].

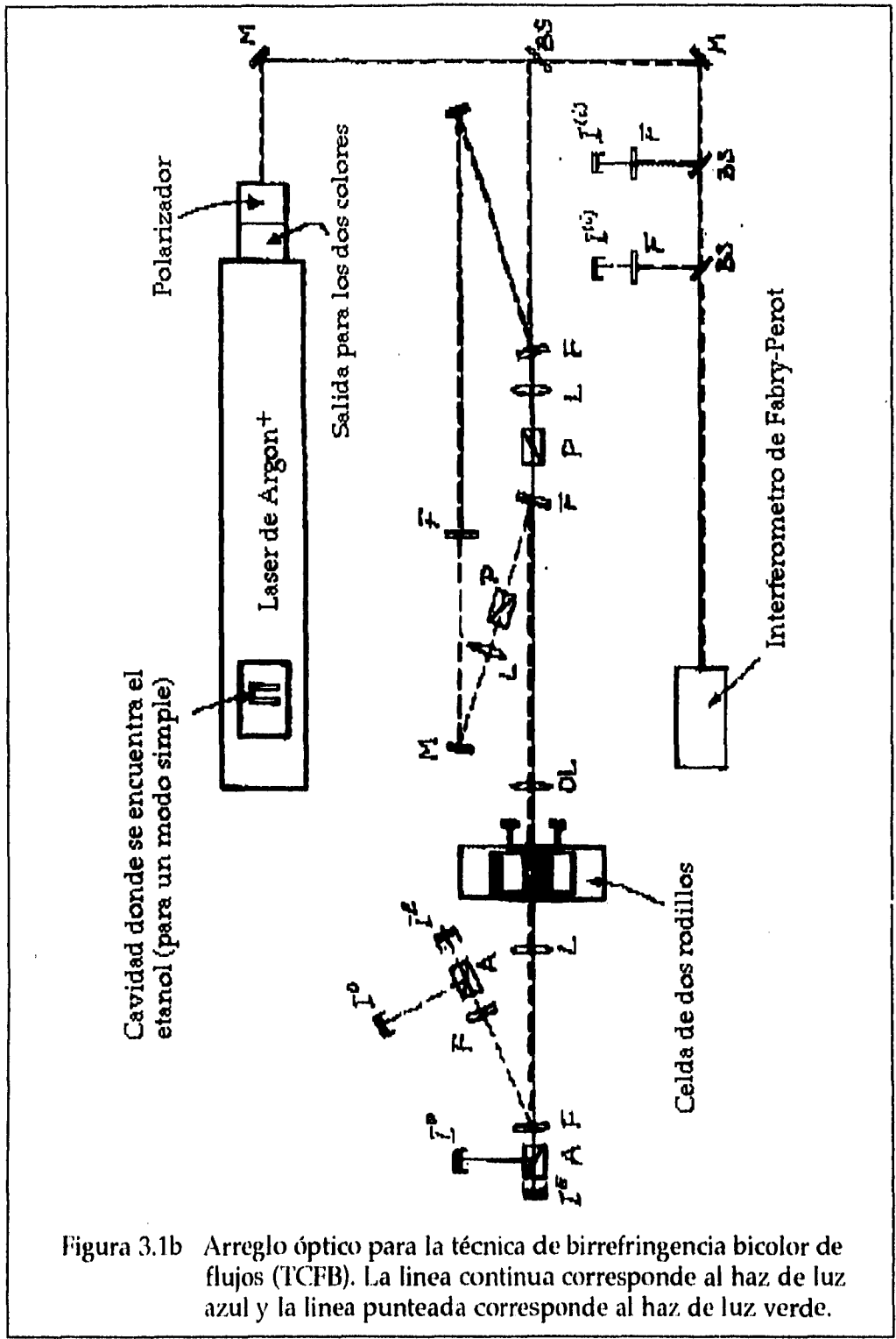


Figura 3.1b Arreglo óptico para la técnica de birrefringencia bicolor de flujos (TCFB). La línea continua corresponde al haz de luz azul y la línea punteada corresponde al haz de luz verde.

3.2 ANÁLISIS DE LAS ECUACIONES DE BIRREFRINGENCIA Y ORIENTACIÓN PARA LA TÉCNICA DE DOS COLORES.

El análisis de las ecuaciones de birrefringencia y de orientación puede llevarse a cabo considerando la polarización del rayo de luz emergente S_0 (que ha pasado ya por el analizador), por el producto de cuatro matrices de Müller que representan los elementos ópticos anteriores al detector, es decir,

$$S_0 = A(\alpha_a) B(\beta, \phi) P(\alpha_p) S_i, \quad (3.1)$$

donde S_i representa el vector de Stokes de luz incidente y S_0 es el vector de luz de salida. $A(\alpha_a)$ corresponde a la matriz del analizador con orientación α_a , $P(\alpha_p)$ a la matriz del polarizador orientado hacia α_p , y $B(\beta, \phi)$ es la matriz que representa al medio birrefringente con *orientación* β y *retardancia* ϕ .

Los resultados del Capítulo II permiten representar de manera implícita una dependencia de la anisotropía en función de la posición, es decir, la retardancia diferencial δ que depende de la posición $\delta(z)$ y $\beta(z)$. La Ecuación 3.1 simplemente muestra la *retardancia global* ϕ y su *orientación promedio* β para toda la muestra. En este Capítulo se analizan detalladamente las dependencias de $\delta(z)$, e igualmente $\beta(z)$, en función del camino óptico recorrido en la celda de flujos.

La matriz para un polarizador lineal y un analizador lineal tienen una orientación azimutal α y α' sobre el plano xy respectivamente, con ángulos definidos en el sentido matemático estandar correspondiente a

$$P(\alpha) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos(2\alpha) & \operatorname{sen}(2\alpha) & 0 \\ \cos(2\alpha) & \cos^2(2\alpha) & \operatorname{sen}(2\alpha)\cos(2\alpha) & 0 \\ \operatorname{sen}(2\alpha) & \operatorname{sen}(2\alpha)\cos(2\alpha) & \operatorname{sen}^2(2\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}'$$

(3.2)

$$A(\alpha') = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos(2\alpha') & \operatorname{sen}(2\alpha') & 0 \\ \cos(2\alpha') & \cos^2(2\alpha') & \operatorname{sen}(2\alpha')\cos(2\alpha') & 0 \\ \operatorname{sen}(2\alpha') & \operatorname{sen}(2\alpha')\cos(2\alpha') & \operatorname{sen}^2(2\alpha') & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}'$$

Asimismo, la matriz del medio birrefringente (utilizando la matriz obtenida en la Sección 2.3) puede expresarse como

$$B(\beta, \phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(2\beta) + \cos(\phi)\operatorname{sen}^2(2\beta) & \frac{-((\cos(\phi) - 1)\operatorname{sen}(4\beta))}{2} & -\operatorname{sen}(2\beta)\operatorname{sen}(\phi) \\ 0 & \frac{-((\cos(\phi) - 1)\operatorname{sen}(4\beta))}{2} & \cos(\phi)\cos^2(2\beta) + \operatorname{sen}^2(2\beta) & \operatorname{sen}(\phi)\cos(2\beta) \\ 0 & \operatorname{sen}(\phi)\operatorname{sen}(2\beta) & -\cos(2\beta)\operatorname{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}'$$

(3.3)

donde la retardancia global es ϕ , la cual es resultado de la contribución diferencial dada por $\phi = \int \delta(z) dz$ y la orientación β se considera constante. Como se vio en la Sección 2.2, si se considera un material con β dependiente de la posición, entonces el material muestra birrefringencia circular. En el caso de fluidos poliméricos sujetos a historias de deformación, nuestro interés es la birrefringencia lineal ya que está relacionada con la conformación de las moléculas. Aún más, no se ha reportado *birrefringencia circular* inducida por flujos para polímeros lineales y flexibles.

En particular debe quedar claro que el término $m_{32} = -m_{23}$ sólo aparece cuando $\dot{\beta}(z) \neq 0$. Ahora, al suponer que $\dot{\beta}(z) = 0$, para el siguiente análisis, los resultados pueden aún ser útiles en el experimento (suponiendo sólo la dependencia de $\dot{\delta}(z) \neq 0$) ya que la birrefringencia circular sólo aparece como resultado de los efectos de borde y los cambios en las regiones de transición se anulan, esto es,

$$\dot{\beta}(z) \Big|_{z \in (0,b)} = -\dot{\beta}(d-z) \Big|_{z \in (d-b,d)}.$$

Así, en el análisis del experimento de birrefringencia bicolor (Ecuación 3.1) para el color azul y el verde se considera que $\dot{\beta}(z) = 0$.

Tomando la salida del láser con una polarización lineal y vertical (orientación paralela al eje y) y los polarizadores a $\pm \pi/8$ de la línea vertical, entonces se tiene que el ángulo para el polarizador del color azul es $\alpha_{A,p} = 5\pi/8$ y para el polarizador del color verde es $\alpha_{V,p} = 3\pi/8$. Los analizadores están girados $\pi/2$ respecto del polarizador correspondiente; por lo tanto, el ángulo para el analizador del azul es $\alpha_{A,a} = \pi/8$ y para el verde es $\alpha_{V,a} = -\pi/8$ (ver en la Figura 3.2).

Si además el haz (emitido por el láser de Argón) incidente está linealmente polarizado en dirección vertical, entonces

$$S_i = \{1, -1, 0, 0\} = S_{i,A} = S_{i,V}, \quad (3.4)$$

donde $S_{i,A}$ y $S_{i,V}$ corresponden a los vectores de entrada para el haz de luz azul y para el haz de luz verde respectivamente.

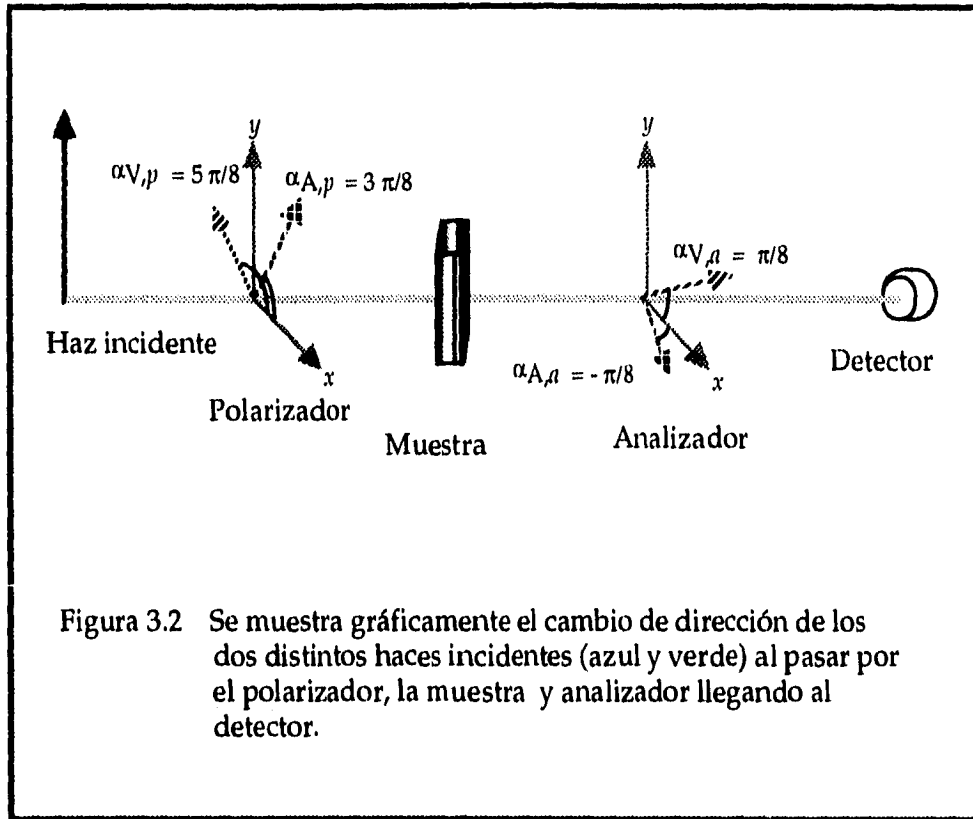


Figura 3.2 Se muestra gráficamente el cambio de dirección de los dos distintos haces incidentes (azul y verde) al pasar por el polarizador, la muestra y analizador llegando al detector.

De esta manera, los elipsómetros de nulos quedan especificados como

$$S_{0,A} = A\left(\frac{\pi}{8}\right) B(\beta, \phi) P\left(\frac{5\pi}{8}\right) S_i, \tag{3.5}$$

$$S_{0,V} = A\left(-\frac{\pi}{8}\right) B(\beta, \phi) P\left(\frac{3\pi}{8}\right) S_i,$$

donde

$$B(\beta, \phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(2\beta) + \cos(\phi)\text{sen}^2(2\beta) & \frac{-((\cos(\phi) - 1)\text{sen}(4\beta))}{2} & -\text{sen}(2\beta)\text{sen}(\phi) \\ 0 & \frac{-((\cos(\phi) - 1)\text{sen}(4\beta))}{2} & \cos(\phi)\cos^2(2\beta) + \text{sen}^2(2\beta) & \text{sen}(\phi)\cos(2\beta) \\ 0 & \text{sen}(\phi)\text{sen}(2\beta) & -\cos(2\beta)\text{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Realizando las operaciones de las Ecuaciones 3.5, para cada color se tiene respectivamente

$$S_{0,A} = \begin{pmatrix} \frac{(2 + \sqrt{2})(\cos(2\beta) - \text{sen}(2\beta))^2 \text{sen}^2(\delta(z)/2)}{8} \\ \frac{(1 + \sqrt{2})(\cos(2\beta) + \text{sen}(2\beta))^2 \text{sen}^2(\delta(z)/2)}{8} \\ \frac{-(1 + \sqrt{2})(\cos(2\beta) + \text{sen}(2\beta))^2 \text{sen}^2(\delta(z)/2)}{8} \\ 0 \end{pmatrix},$$

y

(3.5a)

$$S_{0,V} = \begin{pmatrix} \frac{(2 + \sqrt{2})(\cos(2\beta) + \text{sen}(2\beta))^2 \text{sen}^2(\delta(z)/2)}{8} \\ \frac{(1 + \sqrt{2})(\cos(2\beta) + \text{sen}(2\beta))^2 \text{sen}^2(\delta(z)/2)}{8} \\ \frac{-(1 + \sqrt{2})(\cos(2\beta) + \text{sen}(2\beta))^2 \text{sen}^2(\delta(z)/2)}{8} \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde $S_{0,A}$ y $S_{0,V}$ corresponden al vector de Stokes de salida para el haz de luz azul y para el haz de luz verde respectivamente.

Los vectores para $S_{0,A}$ y $S_{0,V}$ son totalmente equivalentes a aquellos que se obtienen de las operaciones con las Ecuaciones 3.5 pero substituyendo la matriz $B(\beta, \phi)$ siendo esta la matriz de Müller m) de la Tabla 1.2 del Capítulo I [6, 22 y 23]. Los cálculos anteriores demuestran la validez de la metodología que hasta ahora se ha desarrollado, ya que el vector de salida es idéntico para los dos casos. Así que, la matriz general (Ecuación 2.45) y la matriz obtenida por medio de la matriz diferencial (al integrarse esta, Ecuación 2.60) son totalmente equivalentes.

Utilizando un detector de luz isotrópico* después del analizador, se mide la primera componente del vector de Stokes ya que esta representa la intensidad total del haz de luz que atraviesa el sistema óptico (ver Figura 2.1). Obteniéndose que la intensidad para el azul y el verde son respectivamente

$$i_A = \frac{(2 + \sqrt{2}) (\cos(2\beta) - \text{sen}(2\beta))^2 \text{sen}^2(\delta(z)/2)}{8}, \quad (3.6)$$

$$i_V = \frac{(2 + \sqrt{2}) (\cos(2\beta) + \text{sen}(2\beta))^2 \text{sen}^2(\delta(z)/2)}{8}. \quad (3.7)$$

Los coeficientes $\frac{(2 + \sqrt{2})}{8}$ aparecen como resultado de suponer que la intensidad de entrada $S_{i,1} = 1$. Si ahora se considera que el valor de la intensidad de salida del polarizador $P(\alpha)$ tiene magnitud igual a 1, entonces las Ecuaciones 3.6 y 3.7 pierden dichos coeficientes y los resultados son iguales a los reportados inicialmente por A. W. Chow y G. G. Fuller [22]. Además, para evaluar experimentalmente la birrefringencia y su orientación sólo es necesario conocer las intensidades relativas para el azul y el verde, respecto de la magnitud de intensidades después del polarizador.

*) En general, los detectores de luz son anisotrópicos variando su sensibilidad en función del tipo y orientación de la polarización de la luz incidente. Para el arreglo experimental propuesto en la Figura 3.2 y dado que el detector permanece fijo, entonces la dependencia de la sensibilidad con la polarización es irrelevante en la práctica.

Consecuentemente, a partir de ahora las intensidades medidas para el azul y el verde son cantidades normalizadas con el valor de la intensidad de luz correspondiente, una vez que ha pasado por el polarizador.

A partir de los valores de intensidades relativas de luz medidos experimentalmente utilizando las Ecuaciones 3.6 y 3.7, se puede calcular la orientación β y la retardancia del medio δ . Ahora, dada una birrefringencia $\Delta n'$, un grosor del medio d y luz de longitud λ_i , la retardancia se expresa como

$$\delta_i = 2 \pi d \Delta n' / \lambda_i \quad (3.8)$$

Entonces, el análisis para la birrefringencia medida con la técnica de dos colores debe de poner especial énfasis en evaluar y medir correctamente la diferencia relativa de los índices de refracción. Sin embargo, a diferencia de la retardancia, la orientación de la anisotropía es una propiedad del material (depende de la orientación de su microestructura) y no debe depender de la longitud de onda. Esta restricción física se debe reflejar en las ecuaciones que describen al experimento como lo veremos más adelante.

Las Ecuaciones 3.5 y 3.6 son un sistema de ecuaciones no-lineales (con funciones trascendentes cuyos argumentos son las incógnitas). Para resolver este sistema, se puede usar el método iterativo de Newton-Raphson que para valores de $\delta < \pi$ no presenta problemas*. Aquí se presenta una solución aproximada a primer orden [5 y 6], que se obtiene de expresar la retardancia como una expansión en términos de un coeficiente perturbativo ε , tal que

$$\varepsilon = (\lambda_v - \lambda_a) / \lambda_v \quad (3.9)$$

La retardancia para los haces de luz azul y verde se consideran respectivamente

$$\delta_\lambda = \frac{2 \pi d}{\lambda_\lambda} \Delta n' = \frac{2 \pi d}{\lambda} \Delta n = \delta, \quad (3.10)$$

*) Las funciones se anulan para valores de $\delta = \pi$ y entonces la convergencia no está garantizada o resulta muy lenta.

$$\delta_v = \frac{2 \pi d}{\lambda_v} \Delta n' = \frac{2 \pi d}{\lambda} \Delta n (1 - \varepsilon) = (1 - \varepsilon) \delta, \quad (3.11)$$

y ahora se introduce una expansión para $\delta(\varepsilon)$, ya que ε es pequeña (del orden de 0.05) para las longitudes del azul-verde del láser de argón ionizado

$$\delta(\varepsilon) = \delta_0 + \delta_1 \varepsilon + \delta_2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad (3.12)$$

Con lo anterior, se resuelve el sistema dado por las Ecuaciones 3.10 y 3.11 [6, 22 y 23], obteniéndose la birrefringencia y la orientación como

$$\Delta n' = \frac{\lambda_a}{\pi d} \left(1 + \frac{\varepsilon i_v}{i_t} \right) \text{sen}^{-1}(\sqrt{i_t}) \quad (3.13)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{i_A \text{sen}^2 \left(\frac{(1 - \varepsilon) \pi d \Delta n'}{\lambda_A} \right)}{i_v \text{sen}^2 \left(\frac{\pi d \Delta n'}{\lambda_A} \right)}}}{1 + \sqrt{\frac{i_A \text{sen}^2 \left(\frac{(1 - \varepsilon) \pi d \Delta n'}{\lambda_A} \right)}{i_v \text{sen}^2 \left(\frac{\pi d \Delta n'}{\lambda_v} \right)}}} \right) \quad (3.14)$$

siendo i_t la intensidad total, que es igual a la suma de la intensidades del azul y del verde; es decir

$$i_t = i_A + i_v. \quad (3.15)$$

La orientación β puede reescribirse como

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{i_A \operatorname{sen}^2 \left(\frac{(1-\varepsilon) \pi d \Delta n'}{\lambda_a} \right)}{i_V \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi d \Delta n'}{\lambda_a} \right)} \right)$$
$$= \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{i_A}{i_V}} \alpha \right),$$

donde

$$\alpha = \frac{\operatorname{sen}^2 \left(\frac{(1-\varepsilon) \pi d \Delta n'}{\lambda_a} \right)}{\operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi d \Delta n'}{\lambda_a} \right)}$$

y para $\Delta n \approx 10^{-8}$, $d \approx 10^{-2}$, $\lambda \approx 5 \times 10^{-7}$ y $\varepsilon \approx 0.05$, y se obtiene que $\alpha \approx 1.0004$. Por lo tanto, la orientación no depende de la longitud de onda.

3.3 APLICACIÓN DE LA MATRIZ INTEGRABLE EN MEDIOS BIRREFRINGENTES NO-HOMOGÉNEOS.

Partiendo de las Ecuaciones 3.13 y 3.14, se puede determinar Δn y β en función de las intensidades de luz que alcanzan los detectores para el azul y el verde, además debe recordarse que en dicho análisis, se supone un valor *constante* para Δn y una orientación *promedio* de la anisotropía. Esto es, se ha supuesto que la birrefringencia es constante a lo largo del camino óptico recorrido de manera que la retardancia total aumente en forma *lineal* con el recorrido.

Sin embargo, en el experimento es necesario considerar que el valor de la birrefringencia no es el mismo para todo punto a lo largo del camino óptico. Aún más, dadas las características del flujo y los efectos que sobre el material polimérico se indican, es posible *proponer* una dependencia del valor de Δn como función de la posición.

Para el caso de estudios experimentales de dinámica de polímeros con anisotropías inducidas por una celda de dos rodillos, lo que interesa fundamentalmente es considerar las correcciones explícitas a las propiedades ópticas *globales* debidas a las paredes del contenedor. Esto es, por un lado, las condiciones sobre la frontera (Ω) tales que el campo de velocidades $u(x \in \Omega) = 0$.

Por otra parte, la condición de flujo fuerte se presenta alrededor del punto de estancamiento (véase la Figura 2.1b) y a medida que uno se aleja de este, el flujo reduce su capacidad elongacional hasta que se vuelve de carácter "débil", es decir, en reposo junto a las paredes o bajo *flujo cortante simple* junto a los rodillos. Es por lo anterior que el polímero está fuertemente deformado alrededor del punto de estancamiento.

Generalmente, se puede esperar que las anisotropías se desvanezcan en las paredes del contenedor y alcancen un valor constante en la región central. Para

representar esto se considera un función $\delta(z)$ cualquiera, con la propiedad de que depende de la geometría de la celda de la forma expresada anteriormente.

Supóngase una función $\delta(z)$, la cual es una combinación de tres funciones: una función lineal creciente, otra función constante y por último una función lineal decreciente. Es decir, la función corresponde a una función trapezoidal del tipo

$$\delta(z) = \begin{cases} \frac{az}{b} & 0 \leq z \leq b \\ a & b \leq z \leq d-b \\ \frac{a(d-z)}{b} & d-b \leq z \leq d \end{cases} \quad (3.16)$$

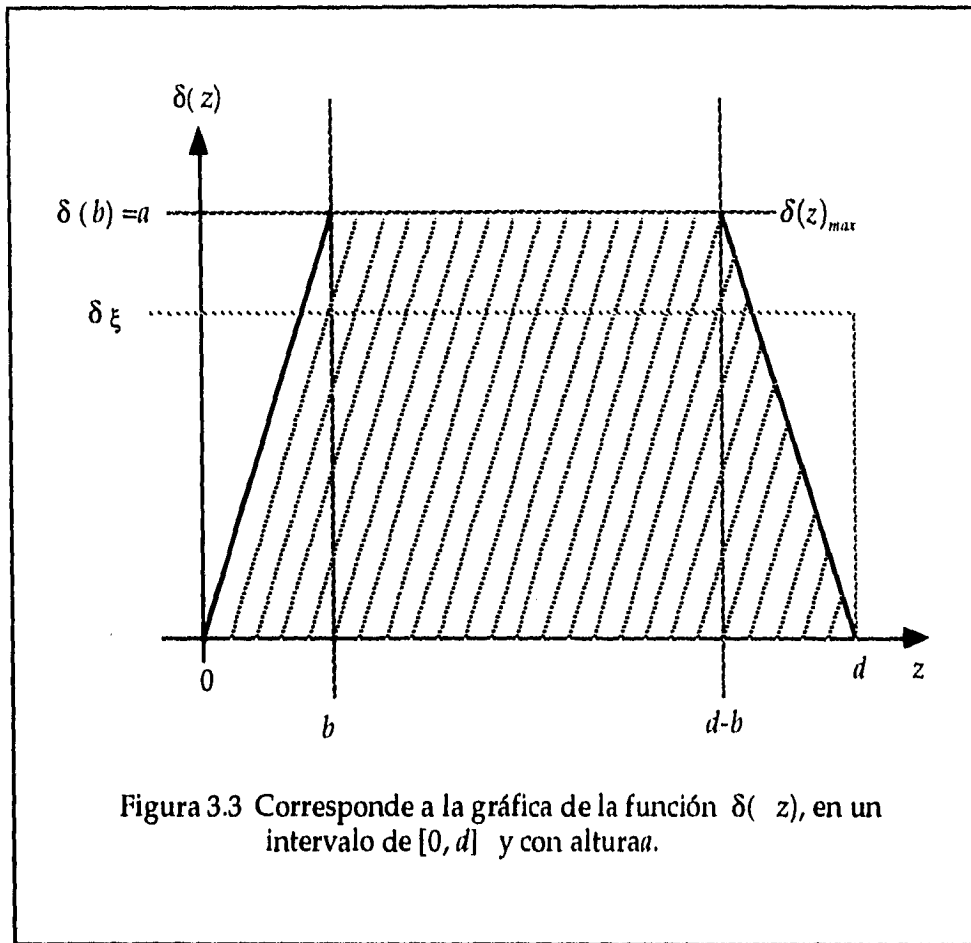
que gráficamente corresponde a la Figura 3.3.

Aunque ésta es una función discontinua en sus primeras derivadas, ésta función acepta una representación en serie de Fourier para cualquier valor acotado de los parámetros a , b , y d .

$$\delta(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nz) + b_n \operatorname{sen}(nz) \quad (3.17)$$

De esta manera se puede aproximar a $\delta(z)$ por una suma de funciones suaves en el intervalo $[0, d]$ y por tanto, esta función representa un posible caso de interés. Dicha aproximación también es válida para cualquier función con un número finito de discontinuidades en su derivada y a pesar de esto, siempre es posible integrar $\delta(z)$ para conocer

$$\phi = \int_0^d \delta(z) dz$$



Para el caso de la función trapezoidal el primer coeficiente de la expansión de Fourier corresponde al valor promedio de la función $\delta(z)$

$$a_0 = a - \frac{a b}{d} = \delta_\xi, \quad (3.18)$$

y los coeficiente a_n y b_n como

$$a_n = \frac{a (-1 + \cos(b n) - \cos(d n) + \cos((d - b) n))}{b n^2 d}, \quad (3.19)$$

$$b_n = \frac{a (\text{sen}(b n) - \text{sen}(d n) + \text{sen}((d - b) n))}{b n^2 d}.$$

La Figura 3.4 muestra la aproximación en series de Fourier para $\delta(z)$ (Ecuación 3.17) con coeficientes a_0 , a_n y b_n , Ecuaciones 3.18 y 3.19.

Utilizando la Ecuación 3.17 se puede integrar $\delta(z)$ y calcular ϕ que en nuestro caso, con geometría trapezoidal, la integral equivale al área del rectángulo formado por la media aritmética*. Gráficamente corresponde a la δ_z en la Figura 3.3.

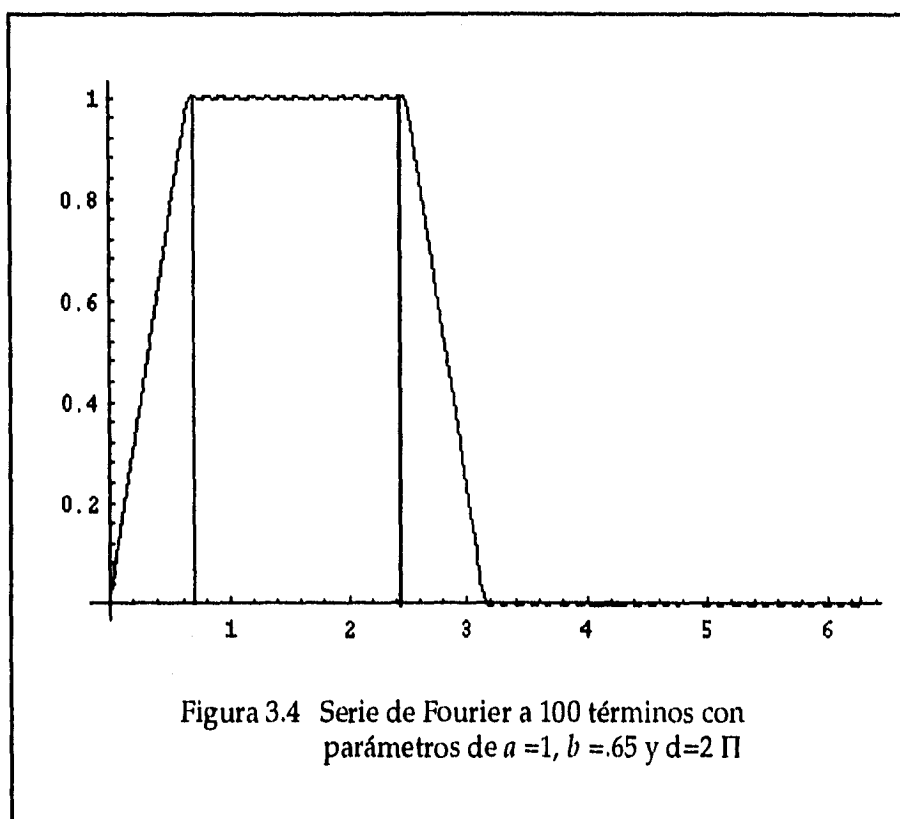


Figura 3.4 Serie de Fourier a 100 términos con parámetros de $a = 1$, $b = .65$ y $d = 2 \Pi$

*) Como se observa en la Figura 3.3 y 3.4 se tiene una función continua e integrable para todo punto. Con esto se puede aplicar el *teorema del valor medio* [10], el cual dice que: para una función continua $f(x)$ en el intervalo cerrado $[0, d]$ existe un valor ξ en el intervalo tal que

$$\int_0^d f(z) dz = f(\xi) (d - 0)$$

Este teorema asegura la existencia de por lo menos una ξ en el intervalo, para el cual $f(\xi)$ es igual al valor promedio de f . En otras palabras, afirma que el valor medio de una función continua en un intervalo pertenece al intervalo de la función.

A continuación se analiza el efecto que tiene $\delta(z)$ (Ecuación 3.17 con los coeficientes: Ecuaciones 3.18 y 3.19) sobre las intensidades i_A e i_V detectadas. El resultado se muestra gráficamente en las Figuras 3.5, 3.6 y 3.7. Para las tres gráficas se ha mantenido $\beta(z) = \text{constante}$.

Los resultados de las Figuras 3.5 - 3.7 para las intensidades i_A y i_V muestran que existe una correspondencia entre ellas equivalente a un corrimiento sobre β , es decir, $\beta_A = \beta_V \pm \pi/4$. Gráficamente las funciones son idénticas bajo la transformación anterior y visualmente se puede comprobar que el valor de la función es

$$i_A(\delta(z), \beta_A) = i_A(\delta(z), \beta_A - \pi/4).$$

Asimismo, la birrefringencia observada es proporcional a la suma de intensidades $i = i_A + i_V$ (Ecuaciones 3.13 y 3.15). Si se suman las intensidades, el resultado debe ser una función que no dependa de β (Figura 3.8 y 3.9) y para diferentes funciones trapezoidales se observa el mismo fenómeno en las Figuras 3.5, 3.6, 3.7, 3.8 y 3.9.

Al conocer la birrefringencia *global* y suponer el perfil de $\delta(z)$, entonces es posible recuperar la información sobre la anisotropía inducida por flujos que es *independiente* de la geometría (en la dirección z) de la celda de dos rodillos. Es decir, se tiene la posibilidad de evaluar y cuantificar los efectos de frontera y calcular $\delta(z)_{\max}$ que es el parámetro de interés para el estudio de la dinámica de fluidos macromoleculares, pues no acarrea errores sistemáticos por efectos de borde (ver Figuras 3.10 y 3.11).

De esta manera, si los efectos de borde se conocen, al menos cualitativamente, entonces el modelo aquí desarrollado permite corregir la información experimental. En particular resulta que la distancia b en la Ecuación 3.16 depende linealmente con la separación entre los cilindros de la celda, mientras d se mantiene fija. Los experimentos reportados [6 y 24] se realizaron con rodillos de diferentes diámetros, manteniendo fija la distancia entre sus ejes y por lo tanto, cuando el flujo tiene un carácter de mayor elongación (el parámetro de flujo λ aumenta, de acuerdo a Geffroy y Leal [24]), la distancia b también aumenta *proporcional* a g (la distancia de separación entre los rodillos). Esta es la única suposición (hipótesis) hecha para los cálculos que siguen, en los que se aplican el modelo de medios anisotrópicos propuesto en las Ecuaciones 2.48, 2.49 y 2.60.

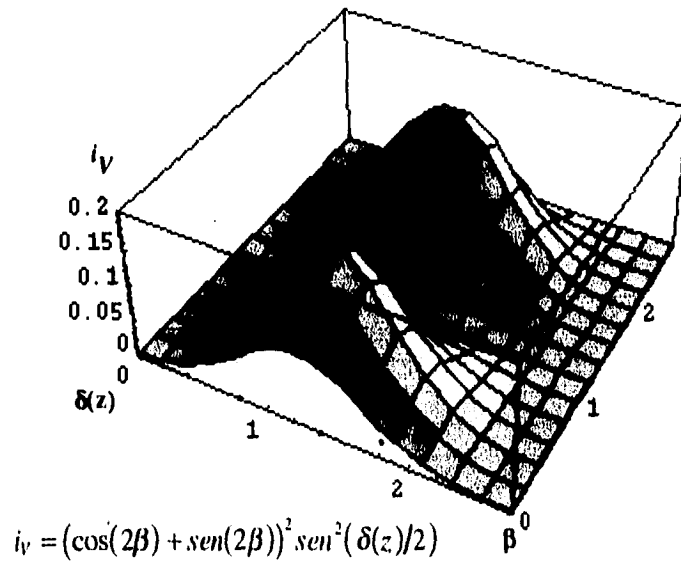
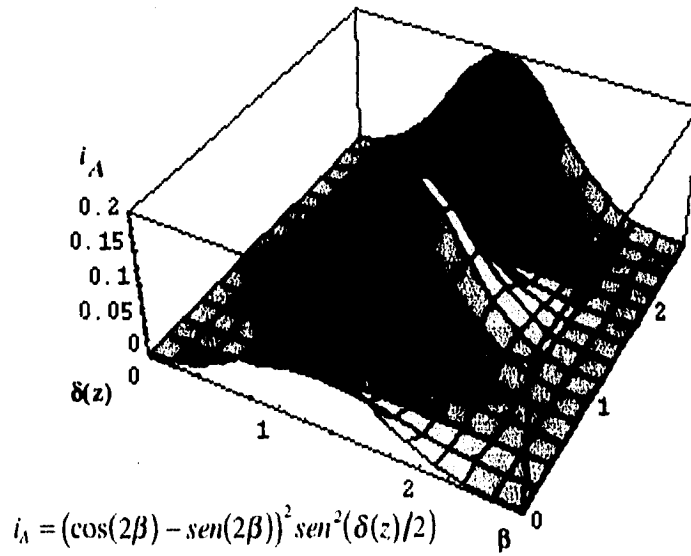


Figura 3.5 Gráficas que muestran el cambio de intensidad con respecto a la retardancia $\delta(z)$ y orientación β , correspondientes a la intensidad del haz de luz azul i_A y el haz de luz verde i_V , con parámetros de la serie de Fourier de $a=1$, $d=2.5$ y $b=1.062$.

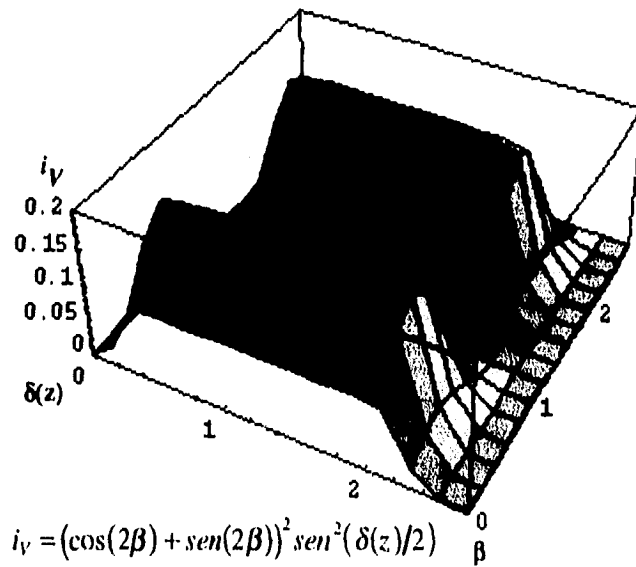
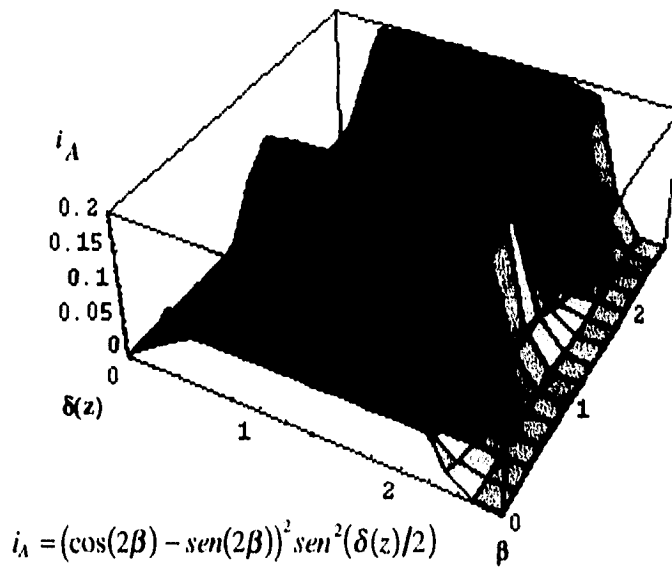
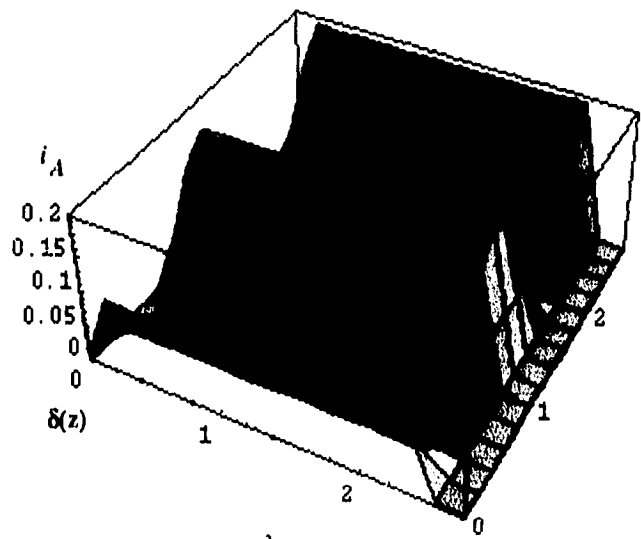
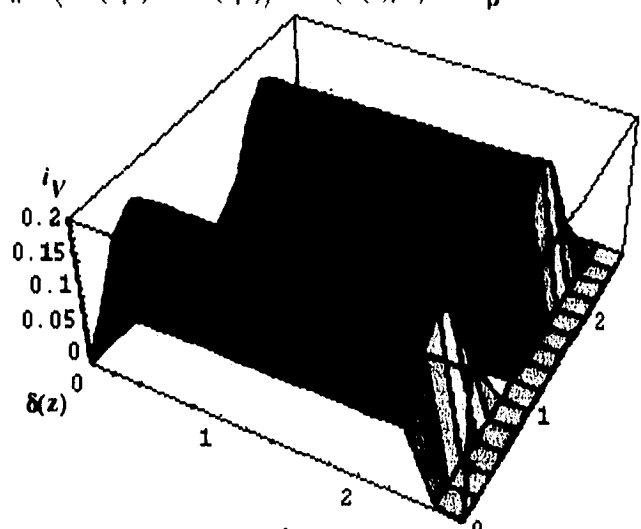


Figura 3.6 Gráficas que muestran el cambio de intensidad con respecto a la retardancia $\delta(z)$ y orientación β , correspondientes a la intensidad del haz de luz azul i_A y el haz de luz verde i_V , con parámetros de la serie de Fourier de $a=1$, $d=2.5$ y $b=0.308$.



$$i_A = (\cos(2\beta) - \text{sen}(2\beta))^2 \text{sen}^2(\delta(z)/2)$$



$$i_V = (\cos(2\beta) + \text{sen}(2\beta))^2 \text{sen}^2(\delta(z)/2)$$

Figura 3.7 Gráficas que muestran el cambio de intensidad con respecto a la retardancia $\delta(z)$ y orientación β , correspondientes a la intensidad del haz de luz azul i_A y el haz de luz verde i_V , con parámetros de la serie de Fourier de $a=1$, $d=2.5$ y $b=0.130$.

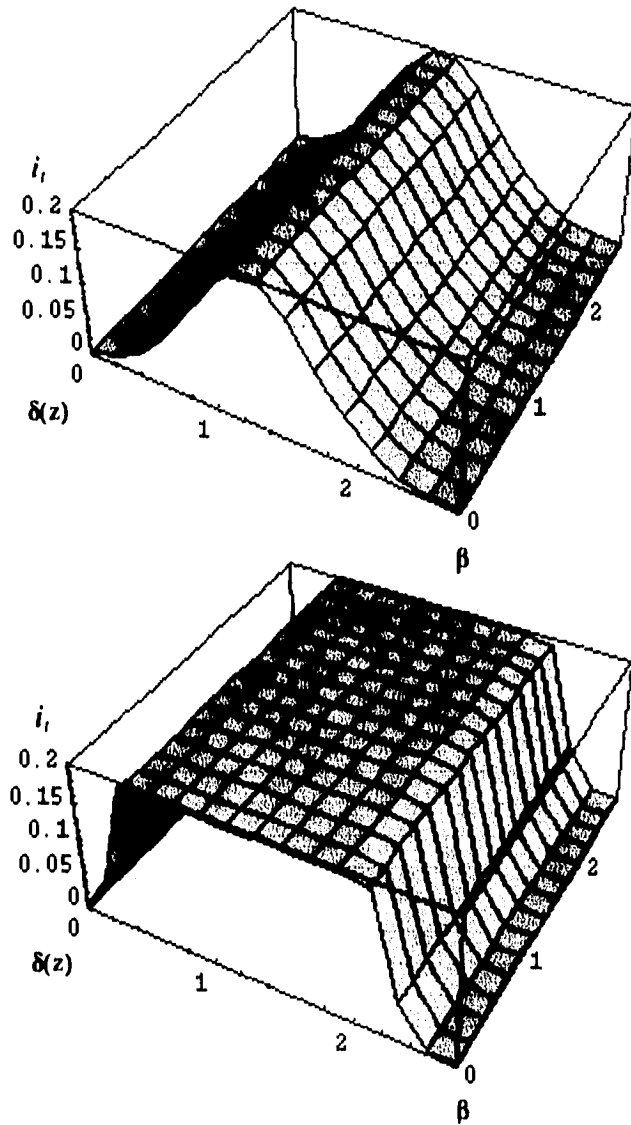


Figura 3.8 Gráfica que muestra la suma total de las intensidades del haz de luz azul i_A y el haz de luz verde i_V , $i_t = i_V + i_A$, donde los parámetros de la serie de Fourier son $a=1$, $d=2.5$, siendo en el primer caso $b=1.052$ y en el segundo caso $b=0.380$.

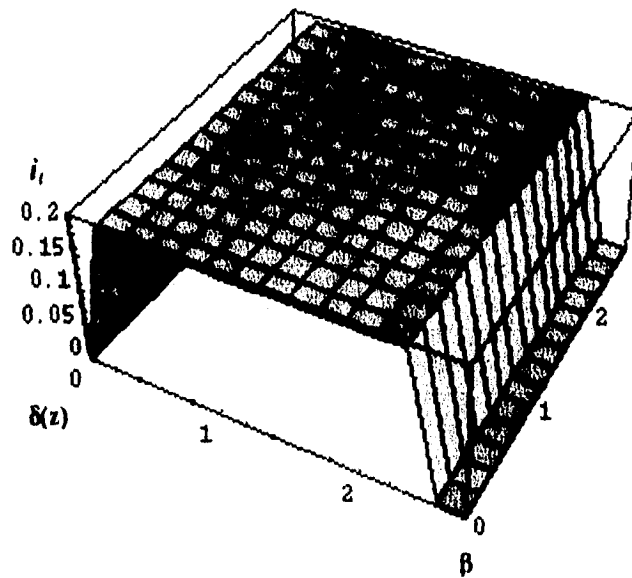


Figura 3.9 Gráfica que muestra la suma total de las intensidades del haz de luz azul i_A y el haz de luz verde i_V , $i_t = i_V + i_A$, donde los parámetros de la serie de Fourier son $n=1$, $d=2.5$ y $b=0.130$.

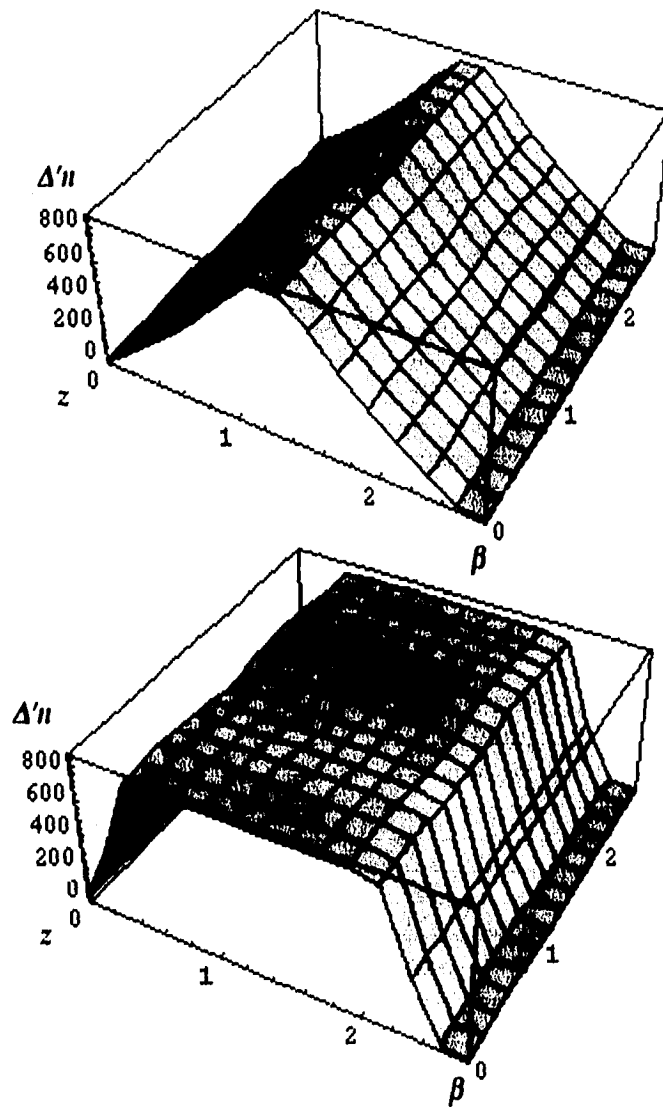


Figura 3.10 Ambas gráficas muestran como cambia la birrefringencia con respecto a la posición y la orientación. La diferencia entre estas dos curvas, es que los parámetros de la serie de Fourier son: $a=1, d=2.5$, tomando en cuenta que para el primer caso $b=1.062$ y el segundo caso $b=0.308$.

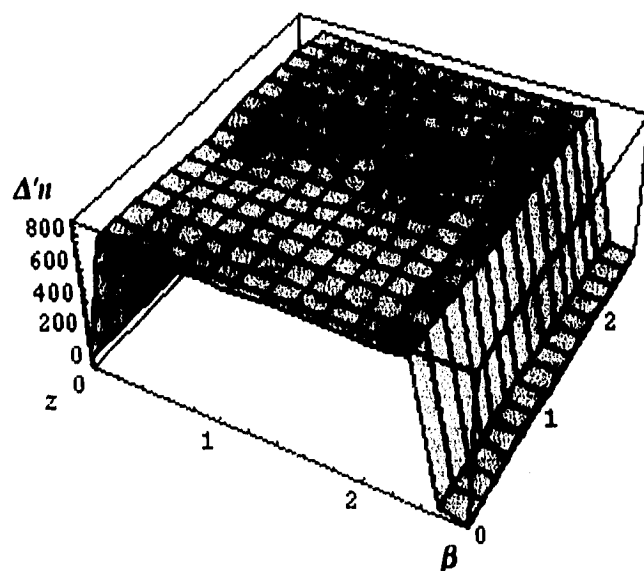


Figura 3.11 Cambio de la birrefringencia con respecto a la posición y a la orientación, siendo los parámetros de la serie de Fourier $a=1$, $d=2.5$ y $b=0.130$.

La Tabla 3.1 lista las dimensiones críticas de la celda de flujos de acuerdo a Geffroy y Leal [24]. Los datos experimentales de birrefringencia reportados en la referencia antes citada se tomaron para los rodillos B, D, G y H, y la Tabla presenta los factores de corrección (ρ) que se aplican en cada caso de modo que corrijen los errores sistemáticos e introducidos por las fronteras.

El factor de corrección en los radios ρ , se debe únicamente a un error en los parámetros geométricos que fue detectado *después* de la publicación de la referencia 24. Una vez ajustado este factor, ρ_δ y ρ_β representan los factores de corrección que se aplican a los datos de birrefringencia y ángulo de orientación respectivamente.

El factor de corrección ρ_δ corresponde al cociente de

$$\rho_\delta = \frac{\delta(x)_{\max}}{\delta_\xi}$$

donde el numerador es la variable de interés para la dinámica polimérica y δ_ξ corresponde a la cantidad medida experimentalmente. El factor de corrección ρ_δ se basa: (a) en la hipótesis de un efecto de frontera proporcional a la separación entre rodillos y (b) en el modelo para la representación de la interacción materia-campo electromagnético propuesto en el Capítulo II. Como puede verse en la Tabla 3.1, el factor de corrección que debe aplicarse a los valores ya reportados es más del 3 % para los rodillos **A**, pero requiere una corrección de aproximadamente de más de 75 % para los rodillos **H**. Así, los datos experimentales corregidos para los rodillos **H** pueden verse en la Figura 3.12 y en la Figura 3.14 para los rodillos **B** *.

Las Figuras 3.14 y 3.15 presentan la información experimental de la anisotropía inducida (Figuras 3.14a y 3.15a) para todos los datos reportados. Igualmente se da la información para los ángulos β (Figura 3.14b y 3.15b). Las anisotropías Δn y ángulos β se aplican contra el eigenvalor principal del tensor gradiente de velocidad ($\dot{\gamma}\sqrt{\lambda}$) que permite correlacionar las velocidades de deformación en cada geometría. Es decir, si las velocidades de deformación aplicadas ($\dot{\gamma}\sqrt{\lambda}$) al polímero son las mismas, entonces se espera que las birrefringencias tengan el mismo valor, independientemente de la geometría de la celda utilizada. De esta manera todas las curvas de Δn vs $\dot{\gamma}\sqrt{\lambda}$ para las diferentes geometrías *deben colapsarse en una sola*. Los datos reportados por Geffroy y Leal [24] claramente no coinciden, ver la Figura 3.18, Figuras 3.16 y 3.17.

*) La corrección de datos experimentales no ha contemplado las incertidumbres que existe para tales dato. En general, los datos tienen incertidumbres de aproximadamente 2% del valor de la birrefringencia que es aproximadamente el tamaño del punto, considerando la escala del eje vertical.

El análisis del ángulo de orientación β requiere considerar que el líquido polimérico junto a las paredes está casi en reposo, con una anisotropía muy pequeña. Lo anterior implica también que la conformación molecular es esencialmente esférica y entonces el esferoide se alinea a 45° respecto al flujo pues la vorticidad no puede girarlo, comparado con el giro que logra la misma vorticidad que se aplica a un objeto más elongado; un elipsoide.

En consecuencia, la función $\beta(z)$ debe comenzar muy cerca de los 45° , posteriormente descendiende en la región central del flujo cuando Δn es máxima y vuelve a 45° en el otro extremo de la celda. Es así como se calcula el factor de corrección ρ_β para el ángulo β .

Tabla 3.1 Muestra los diferentes rodillos.

Rodillos	Radios (cm.)	g (cm.)	λ $0.01 \leq \lambda \leq 0.25$	ρ_r	ρ_δ	ρ_β
A	1.665	0.070	0.0104	—	1.0288	1.0158
B	1.635	0.130	0.0196	—	1.0548	1.0297
C	1.570	0.260	0.0403	—	1.1160	1.0613
D	1.510	0.380	0.0605	—	1.1792	1.0922
E	1.417	0.566	0.0940	0.9676	1.2926	1.1439
F	1.400	0.600	0.1004	0.8178	1.3157	1.1538
G	1.278	0.844	0.1501	0.8652	1.5096	1.2308
H	1.269	1.062	0.2005	0.8958	1.7385	1.3089

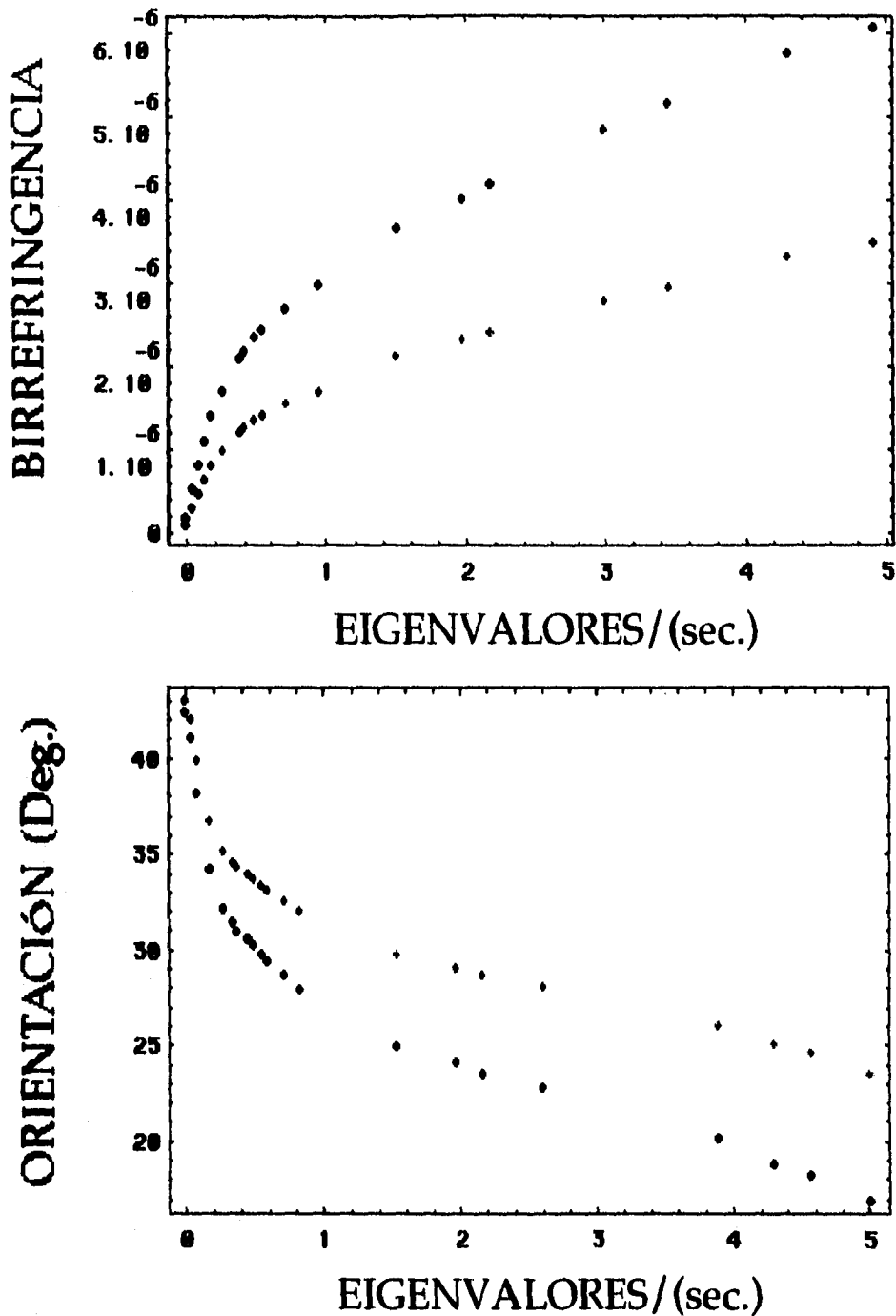


Figura 3.12 Gráfica de Birrefringencia y ángulo de orientación. Para el parámetro de flujo $\lambda=0.2005$. Donde \bullet representan los datos reportados y \bullet son los mismos datos corregidos.

BIRREFRINGENCIA VS. EIGENVALORES (/sec).

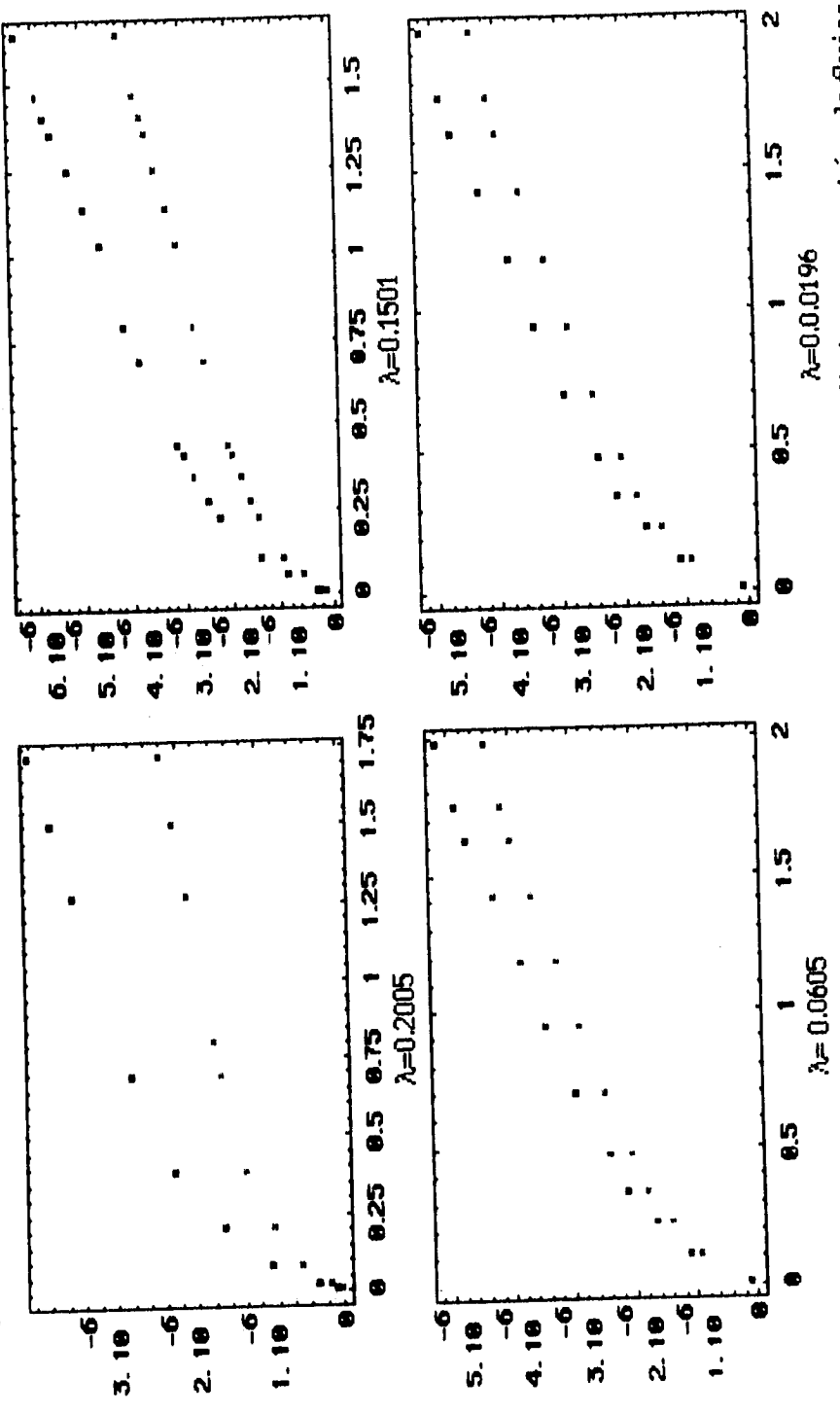


Figura 3.14a Gráficas de birrefringencia contra eigenvalores, para distintas geometrías de flujos. Donde ■ representa los datos experimentales reportados y ■ representa los datos corregidos.

ORIENTACIÓN Vs. EIGENVALORES (/sec.)

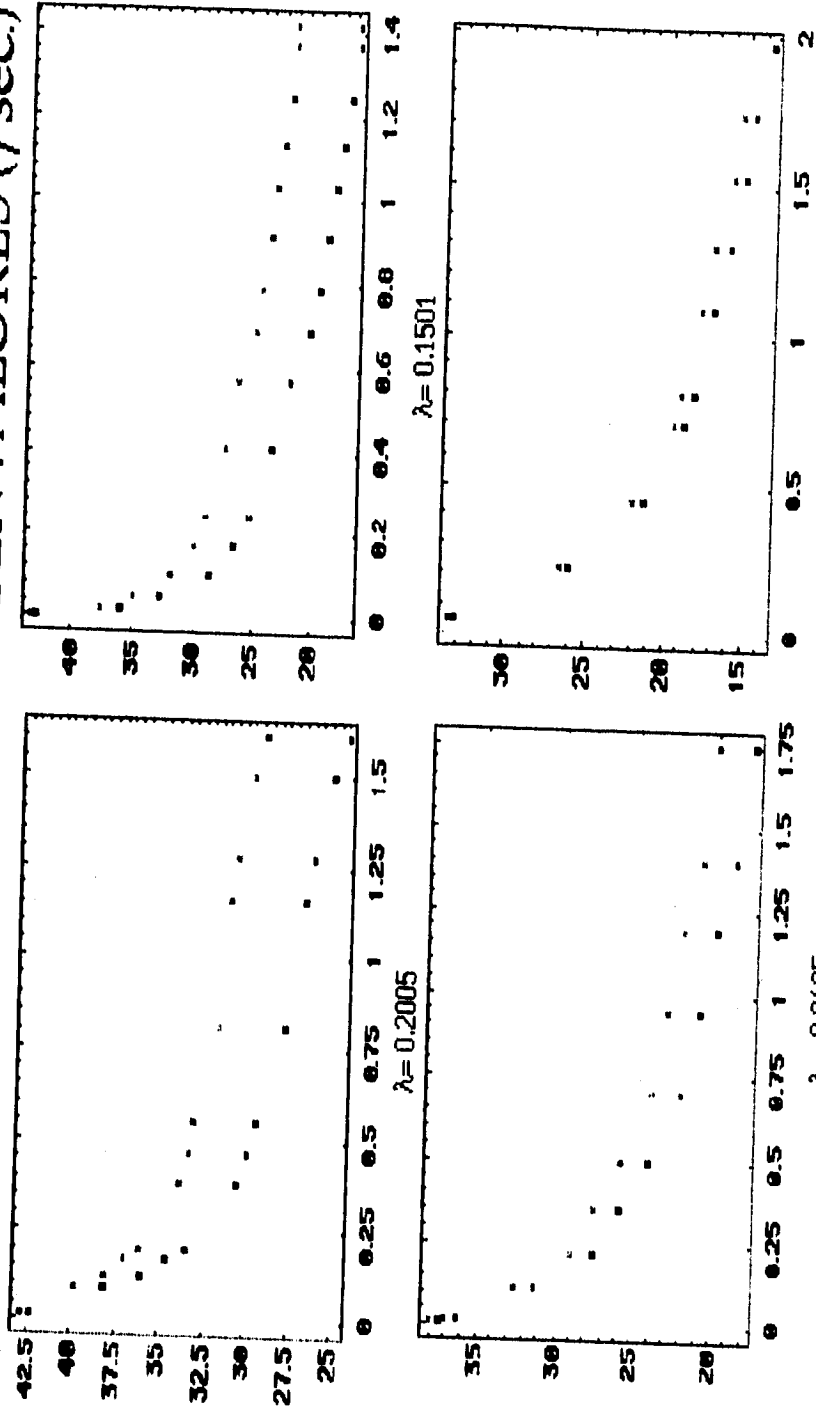
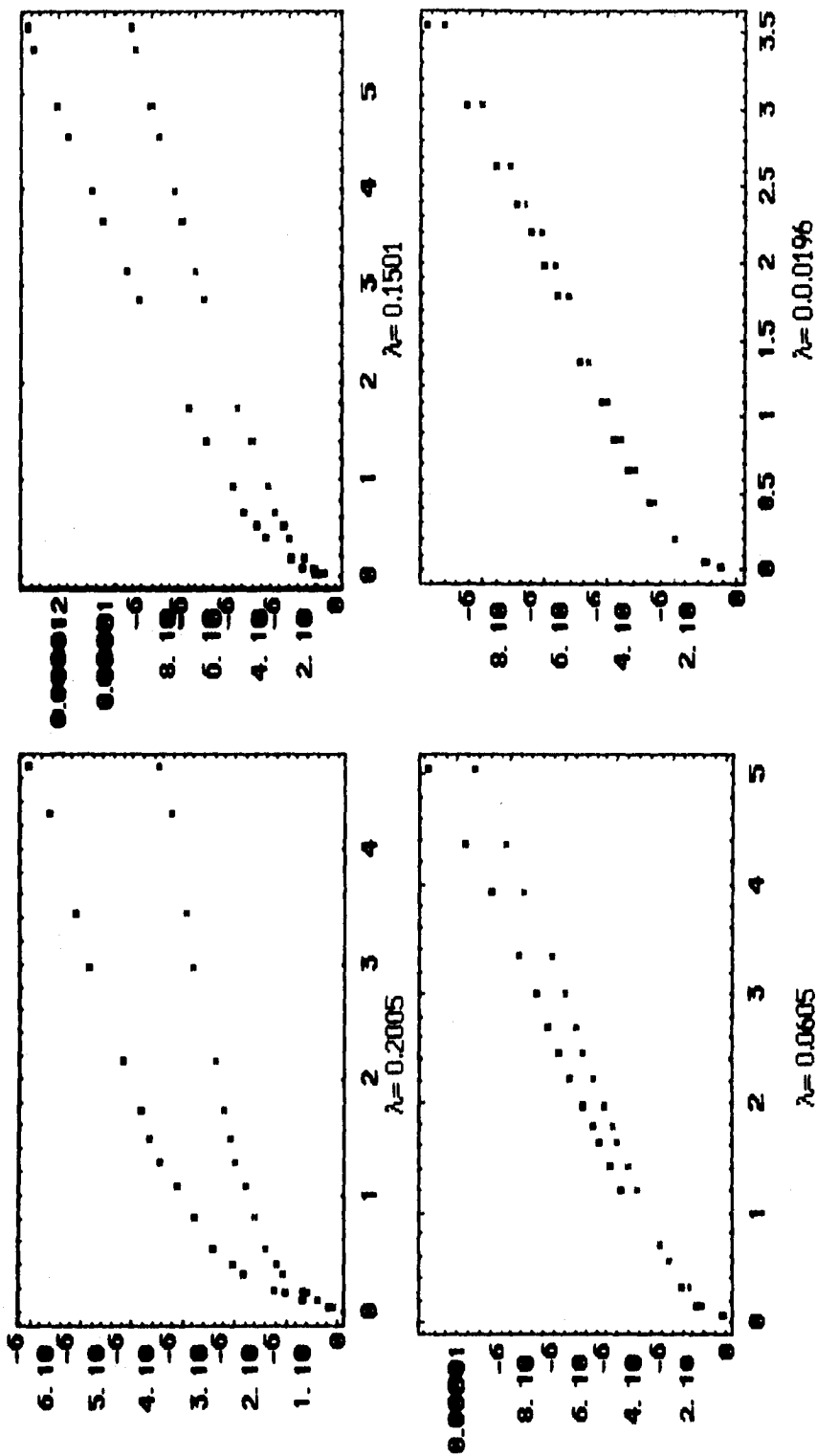


Figura 3.14b Gráficas de orientación contra eigenvalores, para distintas geometrías de flujos. Donde \square representa los datos experimentales reportados y \blacksquare representa los datos corregidos.

BIRREFRINGENCIA Vs. EIGENVALORES (/sec).



Gráfica 3.15a. Gráficas de birrefringencia contra eigenvalores, para distintas geometrías de flujos. Donde ■ representa los datos experimentales reportados y ● representa los datos corregidos.

ORIENTACIÓN VS. EIGENVALORES (/sec.).

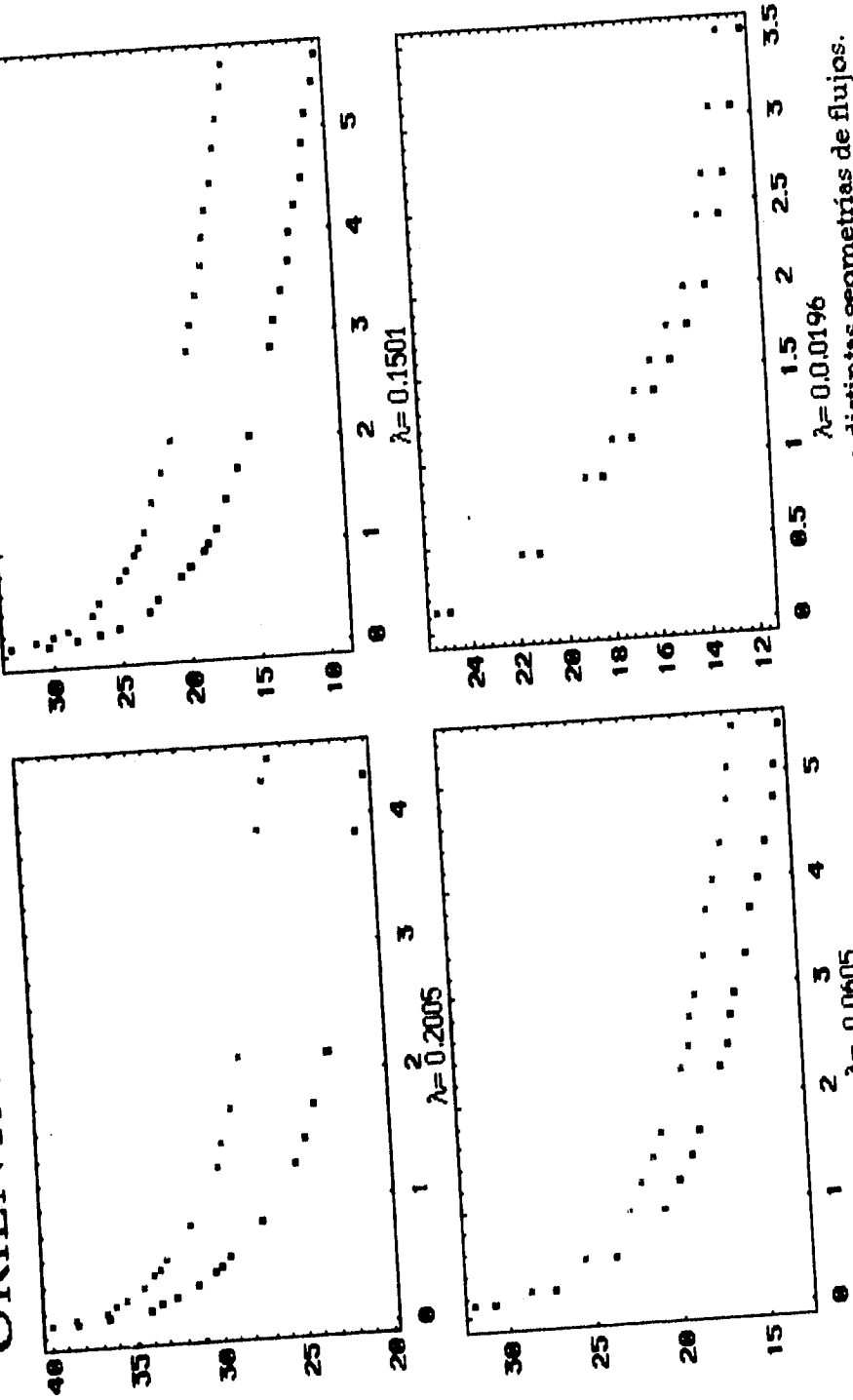


Figura 3.15b Gráficas de orientación contra eigenvalores, para distintas geometrías de flujos.
 Donde ■ representa los datos experimentales reportados y □ representa los datos corregidos

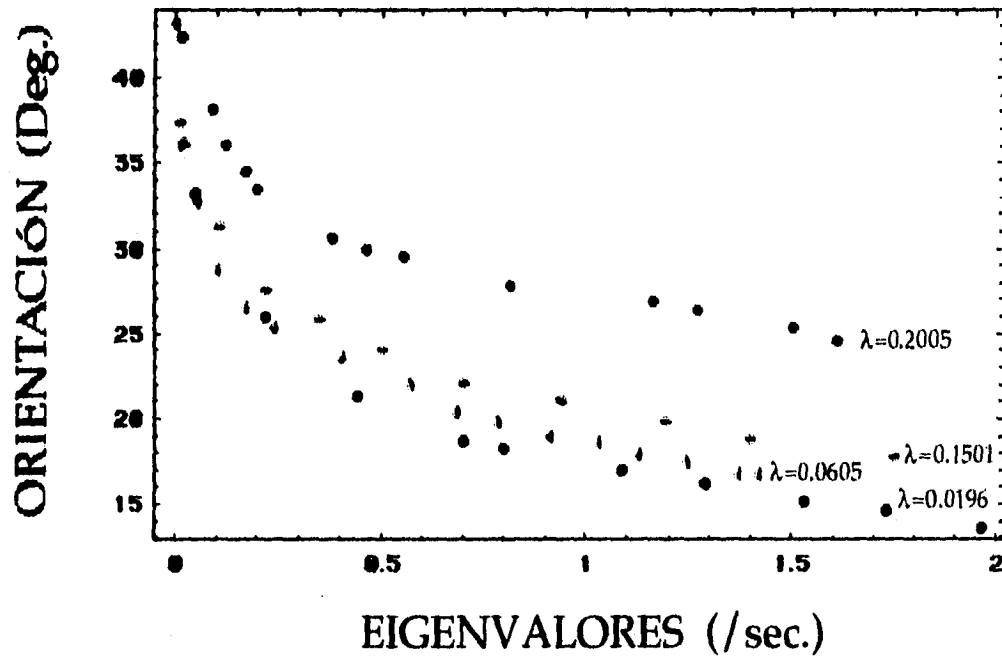
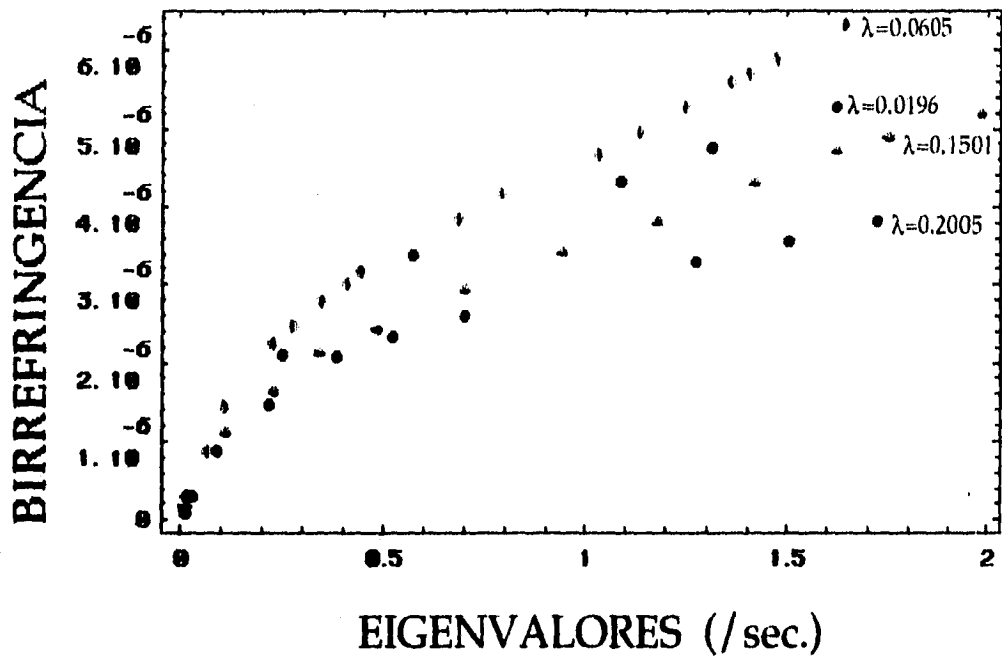


Figura 3.16 Gráfica de la Birrefringencia y el ángulo de orientación.
 Los diferentes colores representan las distintas geometrías de flujo:
 $\lambda=0.2005$, $\lambda=0.1501$, $\lambda=0.0605$, $\lambda=0.0196$.

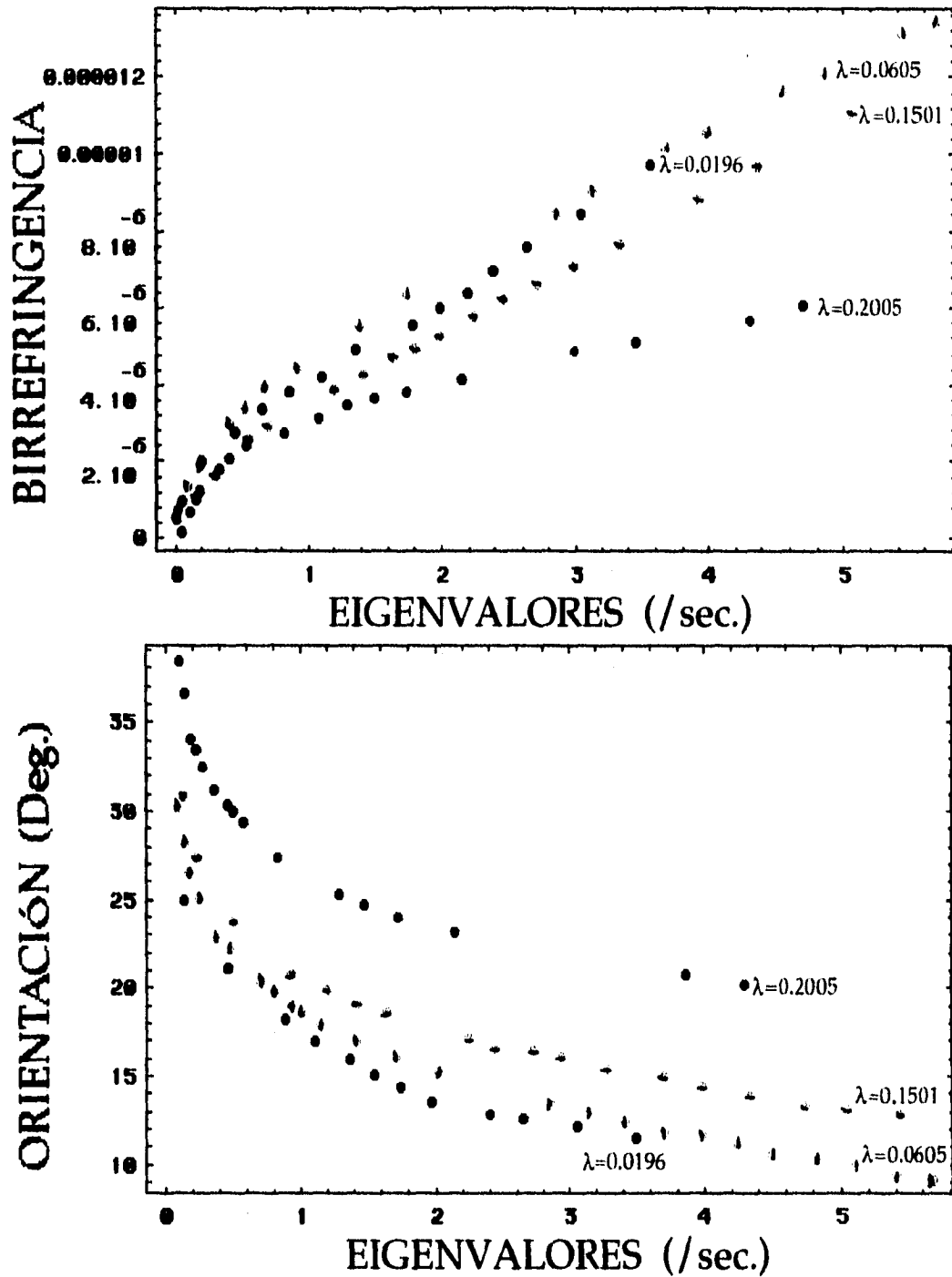


Figura 3.17 Gráfica de la Birrefringencia y el ángulo de orientación.
 Los diferentes formas representan las distintas geometrías de flujo:
 ● $\lambda=0.2005$, ● $\lambda=0.1501$, ● $\lambda=0.0605$, ● $\lambda=0.0196$.

TWO-COLOR FLOW BIREFRINGENCE
Steady State Flow

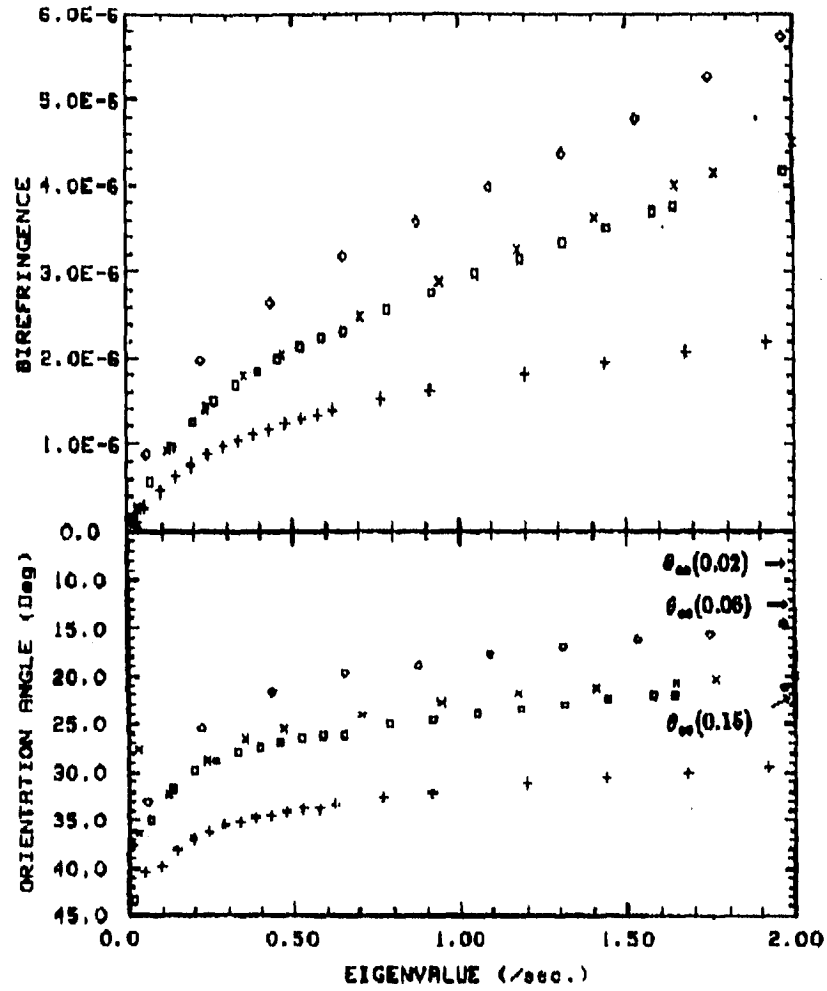


Figura 3.18 Birrefringencia y ángulo de extinción como función de $\dot{\gamma}\sqrt{\lambda}$. Los diferentes puntos marcados representan la geometría del flujo: $+$ $\lambda=0.249$, \square $\lambda=0.151$, \times $\lambda=0.061$, \diamond $\lambda=0.0196$, \circ $\lambda=0.0196$. $\theta_m(\lambda)$ corresponde al eje del flujo de un fluido Newtoniano.



CAPÍTULO IV

CONCLUSIONES

En este trabajo, se utilizó la representación matricial del Cálculo de Müller para estudiar sistemas ópticos anisotrópicos cuando éstos presentan inhomogeneidades dependientes de la posición. Los resultados obtenidos se aplicaron al análisis de datos experimentales de birrefringencia inducida por flujos, haciendo posible cuantificar los errores sistemáticos que son ocasionados por las características físicas de la celda en la cual se generan dichos flujos.

Como se vio en el Capítulo I, se utilizan las matrices diferenciales de Müller y los resultados de Azzam [13] para el cálculo de anisotropías globales de un medio, utilizando en ello las propiedades ópticas de una sección transversal del mismo (rebanada infinitesimal del medio).

En el Capítulo II se aplican los resultados generales anteriores a tres casos particulares de medios anisotrópicos. El tipo de anisotropía estudiada corresponde a aquella que se puede medir en estudios de líquidos poliméricos. Los tres casos corresponden a evaluaciones de birrefringencia lineal, aumentando progresivamente la complejidad del problema, de manera que el Caso 1 es un caso particular del Caso 2 y los resultados de este segundo se pueden obtener como un resultado particular del Caso 3.

Los tres Casos representan completamente las características de la fenomenología a estudiar en líquidos poliméricos de interés tales como los reportados

en las referencias [6 y 24]. En el estudio de líquidos poliméricos, las anisotropías inducidas por flujos tienen al menos las siguientes características: (1) la magnitud de la anisotropía aumenta cuando aumenta el flujo y (2) la orientación de dichas anisotropías también dependen de la "intensidad" del flujo.

Por lo tanto, en el estudio de flujos de sistemas poliméricos es importante conocer tanto la magnitud como la orientación de las anisotropía inducida. El Caso 1 trata una anisotropía con *orientación fija* (en la dirección vertical) pero de otra forma no limita (en forma severa) las características que tiene la *magnitud* de la anisotropía. Es decir, siendo la magnitud de la anisotropía una propiedad del material, el suponer que ésta no puede ser infinita (que está acotada), debe considerarse una propiedad matemática y no una limitante para el estudio de sistemas físicos. Bajo esta situación, el Caso 1 tiene una solución que permite conocer las propiedades globales si se conocen las propiedades puntuales a lo largo del camino óptico (esto es, si se conocen las propiedades locales de las rebanadas). La solución dada se considera válida, ya que operativamente es indiferente a la descripción matricial de la anisotropía óptica, sea ésta la representación global o la matriz diferencial. Además, hay que señalar la equivalencia que existe entre el formalismo global y el cálculo de las contribuciones diferenciales propuesto, pues solo así se conserva la física del fenómeno que dichas matrices describen.

El Caso 2 analiza una anisotropía con orientación arbitraria pero constante, obteniendo el resultado del Caso 1 cuando la orientación coincide con el eje vertical. Este segundo Caso es importante porque en el experimento, la orientación de la birrefringencia depende de las características del flujo como se mencionó anteriormente y en consecuencia es importante analizar un caso donde el ángulo no coincide con la vertical. Esto significa que analíticamente las matrices diferenciales tienen varios elementos m'_{ij} diferentes de cero, dependiendo de la orientación. Así mismo, es posible generar una orientación sobre todo el plano perpendicular a la propagación del haz de luz en un medio birrefringente, expresándose como la combinación de birrefringencia lineal a lo largo de los ejes xy mas la birrefringencia a lo largo de la bisectriz de los mismos ejes.

Para el Caso 3 y a partir de la matriz más general de un medio birrefringente, se calculó la matriz diferencial m . Para éste Caso, la matriz diferencial m_x con términos (diferentes de cero) en las posiciones $m_{42} = -m_{24}$, y $m_{43} = -m_{34}$, corresponden físicamente al medio con birrefringencia lineal en el plano xy (m_{43}) y

birrefringencia lineal en los bisectores (m_{42}). Además los términos correspondientes a la birrefringencia circular $m_{23} = -m_{32}$ también son diferentes de cero. Para la aplicación específica del Caso 3, los datos experimentales de la celda de dos rodillo y dado que no existe reporte alguno sobre la birrefringencia circular, puede suponerse que

$$\int_0^z \dot{\beta}(z) dz = \int_0^z d\beta(z) = 0$$

sin que ello implique en una pérdida de generalidades.

Físicamente es posible justificar la suposición anterior, ya que los flujos bidimensionales que la celda de flujos genera son no-homogéneos a lo largo del camino óptico y además, son simétricos respecto al plano perpendicular al eje óptico que corta los cilindros rotacionales a media altura. Una consecuencia principal, de esta configuración experimental en el análisis de birrefringencia, es que el giro en el ángulo de orientación que se logra con $\dot{\beta}(z)$ se anula automáticamente por dicha simetría siendo que las moléculas cercanas a las paredes son esencialmente esferoides orientados a 45° , mientras que en la región central son elipsoides alineados con los ejes del flujo. Así, la orientación cambia de 45° hasta un valor mínimo y en la segunda región la transición recupera la orientación a 45° , siendo el cambio total de orientación igual a cero. Es decir, el análisis de los cambios de anisotropía de polímeros sujetos a flujos bidimensionales fuertes no se ve limitado por la suposición de $\dot{\beta} = 0$. Con esta matriz m' (Ecuación 2.49), se calculó la matriz de Müller M que representa el medio dentro del sistema de dos rodillos.

En el Capítulo III se lleva a cabo el análisis de las ecuaciones de birrefringencia y orientación considerando la polarización del rayo de luz emergente S_0 (que ha pasado ya por el analizador) dado por el producto de tres matrices de Müller que representan los elementos ópticos anteriores al detector. Se obtuvieron las ecuaciones $S_{0,A}$ y $S_{0,V}$ para los dos haces (azul y verde) por medio de la matriz diferencial y se mostró que son totalmente equivalentes al realizar las mismas operaciones sustituyendo $B(\beta, \phi)$ por la matriz de Müller m del Capítulo I. Con estos cálculos se demuestra la validez de la metodología que hasta ahora se ha desarrollado. El vector de salida no se modifica para ninguno de los dos casos. Con lo anterior se obtuvieron las ecuaciones para la birrefringencia y la orientación (Ecuaciones 3.13 y 3.14).

Utilizando estas Ecuaciones se evalúan Δn y β en función de las intensidades de luz que alcanzan los detectores del azul y del verde. Dicho análisis supone un valor *promedio* para Δn y de igual forma para la orientación de la anisotropía. Esto es, se ha supuesto que Δn es constante a lo largo del camino óptico recorrido, teniendo la retardancia una contribución *lineal* con base a dicho recorrido. La corrección propuesta en la Sección 3.3 presupone un perfil trapezoidal para la retardancia ($\delta(z)$ se aproxima en series de Fourier) con los resultados analíticos mostrados en las Figuras 3.5, 3.6 y 3.7.

La ventaja de la aproximación en serie de Fourier es que se puede representar cualquier función discontinua físicamente admisible, siendo este caso una función trapezoidal. El área bajo la curva (calculada mediante el teorema del valor medio) es equivalente al primer coeficiente de la expresión de Fourier, e igual al área de un rectángulo con una base de longitud z , pero de altura δ_z que corresponde al valor *promedio local* para la birrefringencia.

La función trapezoidal no limita seriamente la capacidad de análisis de datos experimentales ya que tiene dos parámetros que permiten simular adecuadamente las características de la celda de flujos de interés siendo entonces parámetros dependientes del experimento exclusivamente. Como demostración se comprobó que la correlación de datos de anisotropía para distintos rodillos sólo es posible de encontrar cuando los datos experimentales se corrigen suponiendo una dependencia de la birrefringencia en función de z de forma trapezoidal y del eigenvalor del gradiente de velocidades.

Como vemos en las Figura 3.16 y 3.17 todas las curvas se colapsan en una sola hasta el punto en donde se bifurcan. La bifurcación se debe probablemente a la existencia de otros fenómenos que son difíciles de cuantificar. En general, a medida que $\dot{\gamma}\sqrt{\lambda}$ aumenta, los efectos no-lineales del flujo y del material dificultan el análisis de los datos experimentales. Aun así, la correlación que existe a valores pequeños de $\dot{\gamma}\sqrt{\lambda}$ se observa por primera vez y confirma una predicción de mecánica de fluidos para flujos fuertes. De igual manera, esto confirma la hipótesis planteada y permite obtener los datos experimentales corregidos útiles para estudiar la física del polímero.

Algunas extensiones al presente trabajo que pueden considerarse de interés son:

a) Un análisis de las propiedades matemáticas para las matrices de eigenvalores. Ya que, interesa hacer notar que las propiedades de la base generada

por los eigenvalores contienen toda la información respecto al fenómeno físico que se estudia, mientras que los eigenvectores conservan la información relativa a la magnitud del fenómeno. Esto se puede observar al analizar las matrices, por ejemplo las Ecuación 2.14 y 2.15, donde la fase de la onda está claramente representada por los eigenvalores y se sabe que a la fecha poco se ha explorado en la literatura pues frecuentemente se dice [9, 11 y 13] que el Cálculo de Müller no es útil para fenómenos que requieren la definición de la fase de la onda.

b) La aplicación de estos resultados para el estudio de tensores de esfuerzos en los líquidos poliméricos utilizando la "regla de esfuerzos-óptica" ("strength-optical law"). Esta aplicación puede traer gran impacto porque propone conocer mejor todos las componentes del tensor de esfuerzo que se aplican en un fluido, al conocer las anisotropía en dos direcciones de propagación no paralelas.

c) Buscar resultados al problema de evaluar para cada plano la anisotropía diferencial (local). Así, se propone conjuntar las técnicas de microscopía confocal y los resultados aquí planteados, buscando poder conocer las anisotropías para secciones específicas dentro del material.

Lo realizado anteriormente es una herramienta importante para el laboratorio, ya que permite comprender mejor lo que sucede con el polímero al ser sometido a flujos de deformación. También ayuda a mejorar el montaje del experimento y así poder obtener datos más exactos.

APÉNDICE "A"

Siendo la luz polarizada un fenómeno electromagnético en este Apéndice se representa brevemente las hipótesis necesarias que, junto con las ecuaciones de Maxwell para campos electromagnéticos, permiten una descripción de la luz polarizada en términos de los *vectores de Stokes* [11 y 28], como se utilizó en el Capítulo I. De manera general, una onda es el resultado de una perturbación que ocurre en un punto, en un instante de tiempo determinado, y que se manifiesta en un tiempo después a cierta distancia del punto inicial. Esto es, una perturbación s (que se desplaza a lo largo de una dirección, por ejemplo en la dirección x) puede representarse como una función de x y del tiempo t , tal que $s(x, t) = vt - x$ y además es una función lineal; v es la velocidad de propagación de la perturbación. Si la función está evaluada en el punto x y en un instante t , y esta se repite en un punto más alejado $x + dx$ al instante posterior $t + dt$, entonces esta propiedad de la perturbación puede expresarse como

$$vt - x = v(t + dt) - (x + dx). \quad (\text{A.1})$$

De esta manera, la perturbación en el tiempo dt se traslada a una distancia dx , propagándose con la velocidad dx/dt . Así, de la Ecuación A.1 se obtiene que $dx/dt = v$.

Una onda electromagnética, además de tener la propiedad antes dada para una perturbación que se propaga, debe cumplir con el conjunto de ecuaciones

que relacionan el campo eléctrico E , el campo magnético H y las propiedades del material.

Las ecuaciones de Maxwell establecen las relaciones entre los campos de la siguiente manera [3 y 29]:

Ley de Gauss para el campo magnético, que representa la no existencia de monopolos magnéticos

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 . \quad (\text{A.2})$$

Ley de Gauss para el campo eléctrico

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4 \pi \rho . \quad (\text{A.3})$$

Ley de Ampère-Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}} = \frac{4 \pi}{c} \mathbf{J} . \quad (\text{A.4})$$

Ley de inducción de Faraday-Henry

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}} = 0 . \quad (\text{A.5})$$

donde ρ es la densidad de carga, $\dot{\mathbf{D}}$ es la derivada temporal para el desplazamiento; c es la velocidad de la luz y es una constante universal; \mathbf{J} es la densidad del flujo de carga (corriente) y finalmente $\dot{\mathbf{B}}$ es la derivada, respecto del tiempo, para el campo magnético.

En todo material, la respuesta de este a un estímulo externo se expresa en términos de las ecuaciones *constitutivas*. Suponiendo que la perturbación externa es pequeña (infinitesimalmente pequeña), la respuesta del material es *proporcional* a la perturbación y en este caso las ecuaciones constitutivas electromagnéticas queda expresadas como [30]:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (\text{A.8})$$

donde σ es la conductividad, ε es la permitividad eléctrica o constante dieléctrica y μ es la permeabilidad magnética.

Ahora, si se considera un medio isotrópico, homogéneo y físicamente se encuentra en reposo, tenemos que las ecuaciones de Maxwell son de la siguiente forma [2]

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (\text{A.9})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (\text{A.10})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{A.11})$$

y

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (\text{A.12})$$

A continuación se obtiene la ecuación de la onda electromagnética partiendo de las ecuaciones de Maxwell. Para esto se calcula el rotacional de la Ecuación A.11, tomando en cuenta que las derivadas con respecto al espacio y al tiempo se pueden intercambiar, obteniendo

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu \sigma (\nabla \times \mathbf{E}) + \varepsilon \mu \frac{\partial (\nabla \times \mathbf{E})}{\partial t}. \quad (\text{A.13})$$

si ahora la Ecuación A.11 se sustituye en la ecuación anterior, se tiene

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu \sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \quad (\text{A.14})$$

El triple producto vectorial se puede simplificar haciendo uso de la identidad de operadores

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}. \quad (\text{A.15})$$

por lo tanto

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (\text{A.16})$$

donde en coordenadas cartesianas

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) = \nabla^2 \mathbf{B} \equiv \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial z^2}. \quad (\text{A.17})$$

Como la divergencia de \mathbf{B} es cero, la Ecuación 4.14 queda

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{A.18})$$

Del mismo modo, partiendo de la Ecuación A.12 se tiene que

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial(\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t}. \quad (\text{A.19})$$

Eliminando \mathbf{B} , esto queda

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (\text{A.20})$$

y utilizando la Ecuación A.15, se tiene que

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \nabla \left(\frac{\rho}{\epsilon} \right), \quad (\text{A.21})$$

tomando en cuenta que

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \nabla\left(\frac{\rho}{\epsilon}\right), \quad (\text{A.22})$$

se tiene que la Ecuación A.21 queda como

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{A.23})$$

Siendo así las Ecuaciones A.18 y A.22 las ecuaciones de onda en general. Si ahora éstas se calculan para un medio no conductor (el material se dice que es dieléctrico) $\sigma = 0$ y sin carga $\rho = 0$, estas ecuaciones quedan de la siguiente manera

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{A.24})$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{A.25})$$

Así, es claro que tanto el campo eléctrico como el campo magnético cumplen con ecuaciones de onda.

Ahora, dadas las Ecuaciones A.24 y A.25, la solución más general para una onda puede expresarse como

$$u(x, t) = s'(x - vt) + s''(x + vt) \quad (\text{A.26})$$

donde s' y s'' son dos perturbaciones, una que viaja a la derecha y la otra viaja a la izquierda respectivamente y u representa el campo eléctrico o el campo magnético.

De las ecuaciones de onda electromagnética, se deduce que la velocidad de propagación de la perturbación puede expresarse como $v = c/\sqrt{\epsilon\mu}$, que corresponde a la velocidad de fase de la onda. Si ahora se define el índice de refracción óptico como $n = c/v$, entonces $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ y las propiedades del material caracterizan la velocidad de propagación de una onda electromagnética que viaja dentro de él.

tomando en cuenta que

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \nabla\left(\frac{\rho}{\epsilon}\right), \quad (\text{A.22})$$

se tiene que la Ecuación A.21 queda como

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{A.23})$$

Siendo así las Ecuaciones A.18 y A.22 las ecuaciones de onda en general. Si ahora éstas se calculan para un medio no conductor (el material se dice que es dieléctrico) $\sigma = 0$ y sin carga $\rho = 0$, estas ecuaciones quedan de la siguiente manera

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{A.24})$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{A.25})$$

Así, es claro que tanto el campo eléctrico como el campo magnético cumplen con ecuaciones de onda.

Ahora, dadas las Ecuaciones A.24 y A.25, la solución más general para una onda puede expresarse como

$$u(x, t) = s'(x - vt) + s''(x + vt) \quad (\text{A.26})$$

donde s' y s'' son dos perturbaciones, una que viaja a la derecha y la otra viaja a la izquierda respectivamente y u representa el campo eléctrico o el campo magnético.

De las ecuaciones de onda electromagnética, se deduce que la velocidad de propagación de la perturbación puede expresarse como $v = c/\sqrt{\epsilon\mu}$, que corresponde a la velocidad de fase de la onda. Si ahora se define el índice de refracción óptico como $n = c/v$, entonces $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ y las propiedades del material caracterizan la velocidad de propagación de una onda electromagnética que viaja dentro de él.

Ahora se demuestra una característica fundamental de las ondas electromagnéticas, directamente relacionada con las propiedades de polarización de la luz. Esto es, a diferencia de una onda eléctrica, el vector del campo eléctrico (o magnético) es *transversal* a la dirección de propagación.

Para explicar a continuación el carácter transversal de la luz dentro del contexto de la teoría electromagnética, se considera el caso de una onda plana que se propaga en la dirección positiva x .

Así, considerando el campo magnético más simple, una onda plana, tenemos que cada componente cartesiana del campo vectorial de \mathbf{E} y \mathbf{H} son funciones de una sola variable $u = r \cdot s - vt$, esto es

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(r \cdot s - vt) \quad (\text{A.27})$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(r \cdot s - vt) \quad (\text{A.28})$$

siendo s un vector unitario en la dirección de propagación. Realizando una diferenciación punto con respecto a t y por una diferenciación prima con respecto a la variable u , entonces

$$\dot{\mathbf{E}} = -v \mathbf{E}' \quad (\text{A.29})$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = E'_z s_y - E'_y s_z = (s \times \mathbf{E}')_x \quad (\text{A.30})$$

Sustituyendo estas expresiones dentro de las ecuaciones de Maxwell, cuando éstas representan un medio isotrópico y considerando en este caso a $\mathbf{J} = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} s \times \mathbf{H}' + \frac{\epsilon v \mathbf{E}'}{c} &= 0 \\ s \times \mathbf{E}' - \frac{\mu v \mathbf{H}'}{c} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Haciendo las constantes aditiva iguales a cero (esto es, dejando un campo constante en el espacio) y tomando en cuenta que $v = c/\sqrt{\epsilon\mu}$, se tiene que

$$E = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} s \times H$$

$$H = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} s \times E$$
(A.32)

La multiplicación escalar con s da

$$E \cdot s = H \cdot s = 0$$
(A.33)

Esta relación expresa la transversalidad del campo, es decir, muestra que los campos vectoriales eléctrico y magnético están puestos sobre un plano normal a la dirección de propagación donde son mutuamente perpendiculares; teniendo así una triada ortogonal de los vectores E , H y s , que cumplen con la regla de la mano derecha. La relación entre E y H es lineal, esto es

$$\sqrt{\mu} H = \sqrt{\epsilon} E.$$
(A.34)

y s está en la dirección del flujo de energía.

Así, el movimiento de la energía en la onda electromagnética, se representa como por el vector s al cual se le puede llamar vector de flujo de energía (vector de Poynting) y que corresponde a la cantidad de energía que acarrea la onda por unidad de tiempo.

$$s = \frac{c}{4\pi} (E \times H)$$
(A.35)

Al propagarse una onda monocromática plana siempre es posible encontrar el lugar geométrico de los puntos que se encuentran en una misma fase. Este conjunto de puntos constituyen una superficie que se denomina frente de onda.

Si la intensidad de la fuente de la perturbación es pequeña (puntual) y la velocidad de propagación de la perturbación es igual en todas las direcciones se dice que el medio es isotrópico, entonces, el frente de onda tiene la forma de una superficie esférica con el centro en la fuente. En este caso la onda se llama esférica y el frente de onda se traslada en la dirección normal a la superficie. Estas normales coinciden con los radios vectores llamados haces, trazados desde la fuente a lo largo de los cuales se

transmite la perturbación desde la fuente. De esta manera, la propagación del frente de la onda esférica se realiza a lo largo de los haces. La coincidencia de la dirección de propagación del frente de onda y de los haces, que tiene lugar en los medios isotrópicos no se observa en el caso de medios anisotrópico.

Las leyes generales del movimiento ondulatorio se refieren en igual medida, tanto a las ondas longitudinales como a las transversales. Las oscilaciones longitudinales son simétricas con respecto a la línea de propagación, es decir, su acción sobre cualquier aparato receptor no cambia si este aparato gira al rededor de la dirección de propagación. En el caso de ondas transversales, la acción de las ondas sobre el aparato es diferente y depende del plano que pasa atravez de la línea de propagación, en el cual se efectúa la oscilación transversal.

La particularidad de las ondas transversales señalada lleva el nombre de *polarización*. Si la dirección de la oscilación transversal se mantiene en el plano, a la onda se le llama *polarizada en el plano o linealmente*. Entonces, la polarización es la dirección de las oscilaciones (del vector eléctrico) que está ordenada (orientada) de algún modo. La luz natural visible, esto es, las oscilaciones en distintas direcciones se suceden unas a otras rápida y desordenadamente se le conoce como luz no polarizada

Son posibles otros tipos más complicados de polarización de la onda transversal, en los cuales la oscilación del vector, a pesar de mantenerse en el plano perpendicular a la dirección de propagación, posee un carácter más complejo que puede también expresarse matemáticamente.

Tomando el caso de una onda plana armónica electromagnética, donde sus componentes cartesianas de E y H son de la forma:

$$a \cos(\tau + \delta) = \Re \{ a e^{-i(\tau + \delta)} \} \quad (a > 0) \quad (\text{A.36})$$

donde

$$\tau = \omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}}{v} \right) = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \quad (\text{A.37})$$

y si la dirección de propagación s , es en la dirección z , Tenemos que las componentes del campo son de la forma:

$$E_x = a_1 \cos(\tau + \delta_1) \quad (\text{A.38})$$

$$E_y = a_2 \cos(\tau + \delta_2) \quad (\text{A.39})$$

$$E_z = 0. \quad (\text{A.40})$$

Resolviendo las Ecuaciones A.36 y A.37, para eliminar τ , tenemos que

$$\frac{E_x}{a_1} = \cos(\tau) \cos(\delta_1) - \text{sen}(\tau) \text{sen}(\delta_1), \quad (\text{A.41})$$

$$\frac{E_y}{a_2} = \cos(\tau) \cos(\delta_2) - \text{sen}(\tau) \text{sen}(\delta_2) \quad (\text{A.42})$$

y entonces

$$\frac{E_x}{a_1} \text{sen}(\delta_2) - \frac{E_y}{a_2} \text{sen}(\delta_1) = \cos(\tau) \text{sen}(\delta_2 - \delta_1), \quad (\text{A.43})$$

$$\frac{E_x}{a_1} \cos(\delta_2) - \frac{E_y}{a_2} \cos(\delta_1) = \text{sen}(\tau) \text{sen}(\delta_2 - \delta_1), \quad (\text{A.44})$$

elevando las ecuaciones anteriores al cuadrado y sumándolas

$$\left(\frac{E_x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_2}\right)^2 - 2 \frac{E_x}{a_1} \frac{E_y}{a_2} \cos(\delta) = \text{sen}^2(\delta), \quad (\text{A.45})$$

donde $\delta = \delta_2 - \delta_1$, que representa la ecuación de una elipse (en el plano normal a la dirección de propagación) pues el determinante asociado es no-negativo.

Por lo tanto en este caso, el extremo del vector del campo eléctrico describe una elipse y se tiene una polarización elíptica. Si se considera ahora a $a_1 = a_2 = a_0$, la Ecuación A.43 se reduce a la ecuación del círculo, y físicamente se dice que se tiene luz *polarizada circularmente*. Ahora bien, la luz parcialmente polarizada se caracteriza porque una de sus direcciones resulta ser la privilegiada, pero no la única. La luz parcialmente polarizada puede ser considerada como una mezcla de luz polarizada y natural.

La representación moderna de la luz polarizada tuvo sus orígenes 1852 en el trabajo de trabajo G. G. Stokes [2, 3, 4, 5, 11, 13, 28 y 30]. Stokes introdujo cuatro cantidades que son funciones solamente de observables de la onda electromagnética y

se conocen como parámetros de Stokes. El estado de polarización de un haz de luz (sea natural, total o parcialmente polarizado) se puede describir en términos de estas cantidades. Considerando una onda que se propaga en la dirección z tenemos que

$$E_x = A_x \text{sen}[w t + \phi_x] \hat{\mathbf{i}}, \quad (\text{A.46})$$

$$E_y = A_y \text{sen}[w t + \phi_y] \hat{\mathbf{j}}, \quad (\text{A.47})$$

donde A_x y A_y corresponden a la amplitud de la onda, ϕ_x y ϕ_y son la diferencia de fase. Para el caso de la polarización elíptica, tenemos que las fases ϕ_x y ϕ_y no son iguales, así que, al sumar las Ecuaciones A.46 y A.47 nos queda

$$\mathbf{E} = A_x \text{sen}[w t + \phi_x] \hat{\mathbf{i}} + A_y \text{sen}[w t + \phi_y] \hat{\mathbf{j}} \quad (\text{A.48})$$

y la anterior ecuación puede reescribirse como una exponencial compleja

$$\mathbf{E} = A_x \exp i [\text{sen}[w t + \phi_x] \hat{\mathbf{i}}] + A_y \exp i [\text{sen}[w t + \phi_y] \hat{\mathbf{j}}] \quad (\text{A.49})$$

Como se puede observar la Ecuación A.48 es simplemente una expresión de la parte real de la Ecuación A.49, esta ecuación a su vez puede escribirse como un vector columna, es decir

$$\mathbf{E} = e^{i w t} \begin{vmatrix} A_x e^{i \phi_x} \\ A_y e^{i \phi_y} \end{vmatrix} \quad (\text{A.50})$$

En experimentación es de interés calcular la intensidad del haz de luz. Teniendo que la intensidad es la suma de las amplitudes al cuadrado de las componentes del campo eléctrico de la onda. Así tenemos que la representación de la intensidad esta dada por medio de los vectores de Stokes, es decir

$$\begin{aligned}
s_0 &= A_1^2 + A_2^2, \\
s_1 &= A_1^2 - A_2^2, \\
s_2 &= 2 A_1 A_2 \cos(\delta), \\
s_3 &= 2 A_1 A_2 \operatorname{sen}(\delta).
\end{aligned}
\tag{A.51}$$

donde $\delta = \phi_y - \phi_x$, y donde $s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$ [5, 11 y 28]. Los parámetros de Stokes son cantidades reales.

De esta manera damos una breve explicación sobre en que consisten las ecuaciones de Maxwell y la relación con la luz polarizada. Para poder llegar a la caracterización de la luz polarizada expresada en forma vectorial por medio de los vectores de Stokes, como se puede ver en el Capitulo I.

REFERENCIAS

- [1] Stephen Wolfram. *Mathematica*.
A System for Doing Mathematics by Computer.
2ª edición. The Advanced Book Program.
Addison-Wesley Publishing Company. Inc.

- [2] Hecht & Zajac, *Óptica*.
Fondo Educativo Interamericano, S. A. México, (1977).

- [3] Max Born & Emil Wolf; *Principles of Optics "Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light"*.
3ª Edición. Pergamon Press (1964).

- [4] William A. Shurcliff and Stanley S. Ballard; *Polarized Light*,
D. Van Nostrand Company, Inc. (1968).

- [5] R. M. A. Azzam & N. M. Bashara; *Ellipsometry and Polarized Light*, North Holland, (1987).

- [6] Enrique Geffroy Aguilar. *Birefringence of Polymer Solutions in Time Dependent Flows. Ph. D. Thesis*, California Institute of Technology, Pasadena, Ca. (1989).

- [7] F. G. Smith. J. H. Thompson, *Óptica*.
Editorial Limusa. (1979).
- [8] G. S. Landsberg; *Óptica*, Segundo tomo.
Editorial Mir. Moscú. (1984).
- [9] E. L. O. Nill; *Statistical Optics*, Addison Wesley, Reading
MA. (1963).
- [10] José Jorge Gil. *Depolarization and polarization indices of an optical
system*. *Optica Acta*. (1986). Vol. 33. No. 2., 185-189.
- [11] David S. Kliger, James W. Lewis & Cora E. Randall;
Polarized light in Optics and Spectroscopy,
Academic Press (1990).
- [12] D. J. De Smet. *Brewste's angle and optical anisotropy*.
Am. J. Phys. 62 (3), March 1994.
- [13] R. M. A. Azzam; *Propagation of polarized light through anisotropic
media with or without depolarization: A differential 4×4 matrix
calculus*. *J. Opt. Soc. A*. Vol. 68. No. 12.
December (1978).
- [14] R. Courant. F. John, *Introducción al Cálculo y al Análisis
Matemático* ., Vol. I. Editorial Limusa, (1985).

- [15] Gilbert Strang
Linear Algebra and its Applications,
3ª edición. Harcourt Brace Jovanovich College Publishers.
(1988).
- [16] R. S. Longhorst. *Geometrical and Physical Optics*.
3ª Edición. Ed. Longman.
- [17] Alvan Rolf Mickelson; *Physical Optics* ,
University of Colorado at Boulder.
Van Nostrand Reinhold. New York,(1992).
- [18] Martha Z. Abell. & James P. Braselton;
Differential Equations with Mathematica
Professional, (1992).
- [19] Dimitri Vvedensky.
Partial Differential Equations with mathematica .
Addison-Wesley Publishing Company.
- [21] Kenneth Hoffman. & Ray Kunze;
Álgebra lineal, 1ª ed. en español, (1990)
Prentice-Hall Hispanoamericana S.A.
- [22] A. W. Chow and G. G. Fuller, J. Rheol., 28 (1), 23-43 (1984)

- [23] Bautista Thompson Ernesto Francisco.
Evaluación de la Técnica de anisotropía bicolor inducida por flujos para muestras con dicroísmo, birrefringencia o depolarización residual. Tesis de Física.
México D.F. Facultad de Ciencias. UNAM, 1994.
- [24] Enrique Geffroy and L. Gary Leal.
Flow Birefringence Studies of a Concentrated Polystyrene Solution in a Two-Roll Mill. I. Steady Flow and Start-Up of steady Flow. Journal of Polymer Science: Part B: Polymer Physics.
Vol. 30, 1329-1349 (1992).
- [25] Reyes Huesca Marco Antonio.
Estudio y solución analítica de un flujo fuerte generado por un Molino de Dos Rodillos. Tesis de Ingeniería Mecánica
ENEP. Aragón-UNAM (1996)
- [26] D. Clarke; *Polarized light and Optical Measurement*.,
Pergamon Press,(1971).
- [27] Dennis G. Zill; *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones* ,
Grupo Editorial Iberoamericana, (1982).
- [28] Edward Collett. *Polarized Light. Fundamentals and Applications.*
Dekker.(1992).

- [29] Landau L. D. Lifschitz, E.M. and Pitaevskii, L. P.
Electrodynamics of Continuous Media, 2^a Edición.
Pergamon, Oxford (1984).
- [30] R. W. Munn and C.N. Ironside. *Principles and Applications of
Nonlinear Optical Materials*. 1^a Ed.
C.R.C. Press Inc. (1993).