

36
2ej



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**ECUACIONES VARIAS DE LA TEORIA
DE PROBLEMAS INVERSOS**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

F I S I C O

P R E S E N T A:

PABLO LUIS RENDON GARRIDO



**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS

COMPLETA



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: Ecuaciones Varias de la Teoría de Problemas Inversos.

realizado por Pablo Luis Rendón Garrido

con número de cuenta 9150787-3 , pasante de la carrera de Física

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario DR. CARLOS ARTURO VARGAS GUADARRAMA *CAS*

Propietario M. EN C. RAUL WAYNE GOMEZ GONZALEZ *R. Wayne Gomez*

Propietario DR. JOSE JULIO EMILIO HERRERA VELAZQUEZ *J. Herrera*

Suplente DR. ANTONMARIA MINZONI ALLESSIO *AM*

Suplente DR. ERNESTO ROSALES GONZALEZ *Ernesto Rosales Gonzalez*

R. Ruelas
Consejo Departamental de Física
DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS



FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

A Elena Adriana y Pablo.

Ecuaciones Varias de la Teoría de Problemas
Inversos

Pablo Luis Rendón Garrido

Agradecimientos

Sin duda habrá que agradecer a Arturo Vargas, Tim Minzoni, Raúl Gómez, Julio Herrera, Ernesto Rosales, y María del Carmen Jorge por el trabajo que les ha significado guiar y aconsejar. También será necesario reconocer las muchas facilidades que ha brindado el Departamento de Matemáticas y Mecánica del IIMAS, en conjunto, para la realización de esta tesis. En cuanto a la larga lista de amistades que suele aparecer en estos apartados, considero que aquellos que en mi caso la hubieran conformado sabrían, con una excepción, que es Ricardo, ubicarse sin problema en ella. Por otra parte, imagino que de cualquier modo la inclusión de sus nombres en alguna parte de este trabajo no resulta especialmente emocionante para la mayoría; aún así, un nombre debe aparecer, y es el de Paulina.

Contenido

1	Introducción	3
1.1	El problema inverso	3
1.2	Ecuaciones básicas y sus transformaciones	5
1.3	La cuerda elásticamente amortiguada	10
2	Formulación de Marchenko	15
2.1	Ecuación de Schrödinger: dispersión	16
2.2	Derivación en el dominio de frecuencias	25
2.3	Derivación en el dominio temporal	32
3	Formulación de Gelfand–Levitan	39
3.1	Preliminares	39
3.2	Soluciones causales y no-causales	45
3.3	Ecuaciones integrales de Gelfand–Levitan	51
4	Ecuaciones de Gopinath–Sondhi	57
4.1	Planteamiento del problema	57
4.2	Obtención de las ecuaciones de Gopinath–Sondhi	59

5 Solución del problema inverso	67
5.1 Recuperación del potencial $q(x)$	68
5.2 La constante concentrada de resorte h	75
5.3 Problema inverso de Gopinath-Sondhi	77
5.4 Un ejemplo	82
5.5 Conclusiones	86
A Funciones de Green y distribuciones	89
A.1 Distribuciones	89
A.2 Funciones de Green	101
B Una representación integral	107

Capítulo 1

Introducción

1.1 El problema inverso

Es posible afirmar, a un nivel muy elemental, que los diversos trabajos que realizan como norma los físicos son muy similares en el plano heurístico, es decir, en lo que se refiere al método deductivo (o inductivo) empleado. Tal vez se trate de efectuar predicciones sobre las trayectorias de un sistema de partículas, basándose en un conocimiento de las fuerzas que sobre éste actúan, o de describir la propagación de radiación emitida por un cuerpo cuya constitución es conocida. Hay una gran variedad de ejemplos similares: en general, se intenta obtener un estado final del sistema estudiado a partir de un conocimiento de los factores que lo afectan, y de la manera en que lo hacen. En cuanto a los ejemplos anteriores, un acercamiento radicalmente distinto consistiría en intentar concluir cuáles son las fuerzas que han dado lugar al movimiento que observamos, o cuál es la constitución de la materia que se requiere para que ésta irradie de una manera particular. A este planteamiento, por razones obvias, se le conoce como el *problema inverso*. Aunque es posible que en principio parezca un tanto rebuscado, se trata en realidad de un planteamiento muy natural, pues una buena parte de nuestro contacto sensorial con el medio que nos rodea requiere que seamos capaces de dar soluciones intuitivas a este tipo de problemas: inferimos las formas, tamaños, colores y texturas de los objetos por medio de la dispersión y absorción de luz detectadas por nuestros ojos.

Naturalmente, este tipo de problemas tiene un interés matemático además del puramente físico; sin embargo, como es común en la historia, la rapidez con que los aspectos matemáticos de estos problemas se fueron clarificando estuvo ineludiblemente ligada en un principio al interés existente en problemas físicos relacionados. No es extraño que la primera persona en atacar un problema de este tipo haya sido Newton, quien en los famosos *Principia* ya plantea el problema de la recuperación de las fuerzas que actúan sobre un sistema a partir del movimiento observado en éste. El primero en plantear un problema de esta manera en el campo de la mecánica ondulatoria, el área de principal interés que se estudia en este trabajo, fue - esto tampoco resulta sorprendente- Lord Rayleigh. En 1877, al describir las vibraciones de una cuerda de densidad variable, discutió brevemente ya las posibilidades de obtener la distribución de densidad sobre la cuerda a partir de las frecuencias de vibración. Es este el primer precursor de la teoría moderna de los problemas espectrales inversos.

A principios del siglo veinte, la aparición de la ecuación de Schrödinger actuó como un catalizador que sirvió para ampliar tremendamente la gama de aplicaciones físicas de los conocimientos matemáticos sobre el espectro de las ecuaciones diferenciales con condiciones de frontera preestablecidas. Las ecuaciones que hasta ese momento habían descrito únicamente vibraciones mecánicas ahora adquirirían un papel fundamental en el estudio de átomos y moléculas. Aún así, el problema específico de reconstruir las funciones, o condiciones de frontera, de un sistema Sturm-Liouville a partir de un conocimiento de su espectro se comenzó a estudiar sistemáticamente hasta la década de los cuarentas.

Un desarrollo especialmente importante en este campo ocurrió cuando, al estudiar la construcción de potenciales con base en el espectro molecular observado, usando una aproximación semiclásica de la mecánica cuántica, surgió la idea de emplear la información experimental sobre el espectro *continuo* para inferir las fuerzas involucradas. Para los cincuentas, el problema de dispersión ya se había estudiado ampliamente, y se sabía que toda la información relativa a este fenómeno estaba contenida en la llamada *matriz-S*, que describe el comportamiento asintótico de las soluciones; en particular, era posible obtener los estados ligados (soluciones cuadrado-integrables, o cuadrático-integrables) del sistema, que constituyen un espectro discreto, conociendo únicamente esta matriz. Fue posible entonces implementar un procedimiento para reconstruir un potencial a partir del cambio de fase y los estados ligados que ocurren con un determinado momento angular, disponiendo

de esta información para todas las energías. Las herramientas esenciales que se han utilizado desde entonces para la solución de este problema son las ecuaciones integrales de Marchenko y Gelfand-Levitan. Estas ecuaciones son el corazón de un par de métodos equivalentes en cuanto a que llevan al mismo resultado, pero que contienen al menos una diferencia esencial en el procedimiento.

En el presente trabajo se presentan, entre otras cosas, las formulaciones de Marchenko y Gelfand-Levitan unidimensionales en un contexto distinto a aquél en el que aparecieron por vez primera; esto es, nuestras derivaciones no ocurren en el dominio espectral, sino en el *temporal*. Bajo esta perspectiva, es tal vez más adecuado situar este tipo de problemas en el campo de propagación de ondas; se trata, en realidad, de problemas de medición en mecánica de continuos. El ejemplo mejor conocido de un problema inverso en propagación de ondas es el de la búsqueda de petróleo por medios sísmicos. En un principio, se estimula movimiento sobre la corteza terrestre por medio de grandes fuentes de energía (como puede ser la dinamita, por ejemplo), y se miden cuidadosamente las respuestas de la roca debajo por medio de sensores de movimiento distribuidos sobre la superficie. De esta gran cantidad de información se puede inferir, por medio de procesadores de datos sísmicos, la estructura de la capa externa y, por lo tanto, la presencia de formaciones rocosas que probablemente contengan petróleo. Esta inferencia es posible, hasta cierto punto, debido a que en estas regiones el movimiento de la tierra consiste, aproximadamente, de ondas elásticas lineales. La ecuación de movimiento de dichas ondas está relacionada de una manera sorprendente con la ecuación de Schrödinger. Comenzamos nuestro trabajo con una exposición de dicha relación, gradualmente estableciendo las bases de nuestra obtención de las ecuaciones integrales de Marchenko y Gelfand-Levitan.

1.2 Ecuaciones básicas y sus transformaciones

Sea $\mathbf{R}(x, y, z, t) = U\hat{i} + V\hat{j} + W\hat{k}$ el vector de desplazamiento de un punto (x, y, z) en un medio elástico a un tiempo t . Asumimos que se trata de un *medio isótropo*; esto es, no hay direcciones preferenciales en el material y las constantes elásticas permanecen invariantes ante rotaciones del sistema coordenado cartesiano en el que evaluamos las componentes de los tensores de esfuerzo y de deformación. Por otro lado, tenemos que en un medio isótropo bastan dos constantes elásticas para describir el sistema; se les denomina λ y μ , y son los llamados *parámetros de Lamé*. En estos términos,

y restringiéndonos al problema en una dimensión, la ecuación de movimiento que rige a $\mathbf{R}(x, t)$ es

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial U}{\partial x} \right] \hat{i} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \right) = 0, \quad (1.1)$$

en donde $\rho = \rho(x)$ es la densidad del medio. Esta ecuación es bien conocida como la *ecuación de Navier*, o en ocasiones también como la *ecuación de Lamé - Navier*. A partir de ésta podemos ahora desacoplar tres ecuaciones según las coordenadas cartesianas de \mathbf{U} y obtener de este modo el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial U}{\partial x} \right] &= 0, \\ \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial V}{\partial x} \right) &= 0, \\ \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial W}{\partial x} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Es fácil ahora ver que las distintas componentes de \mathbf{R} satisfacen ecuaciones de onda en una dimensión. Sin embargo, la velocidad de propagación de onda varía en cada caso: para U ésta es $[(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2}$, mientras que para V y W se trata de $(\mu/\rho)^{1/2}$. Queda claro que las ondas asociadas con la componente U son tales que el desplazamiento ocurre en la dirección de la propagación de ondas; por eso es que se les llama *ondas longitudinales*. En cambio, para V y W observamos que los desplazamientos ocurren en un plano perpendicular a la dirección de propagación de ondas, por lo que en este caso nos referimos a *ondas transversales*. Como λ , μ y ρ son todas positivas, es fácil ver que las ondas longitudinales viajan a mayor velocidad que las transversales.

Es posible, pues, escribir (1.1) como la ecuación de onda de un sistema elástico en una dimensión, como sigue:

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho c^2 \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0, \quad (1.2)$$

donde t es el tiempo y z es ahora la coordenada espacial. $U(z, t)$ es el desplazamiento elástico, $\rho(z)$ es la densidad del medio, y $c(z)$ es la velocidad de la onda. Esta velocidad está dada por

$$\rho c^2 = \begin{cases} \mu & \text{para desplazamiento transversal} \\ \lambda + 2\mu & \text{para desplazamiento longitudinal.} \end{cases}$$

Para establecer la relación entre esta ecuación y la ecuación de Schrödinger, como se ha mencionado en la Sección 1.1, es necesario realizar una serie de transformaciones de las funciones y variables involucradas. Comenzamos la transformación de la ecuación (1.2) efectuando el siguiente cambio de variable,

$$\frac{dz}{dx} = c(z),$$

de tal modo que podemos escribir $x(z)$ del siguiente modo:

$$x(z) = \int_0^z \frac{1}{c(s)} ds. \quad (1.3)$$

Ahora, utilizando esta relación queda claro que

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x},$$

con lo que podemos reescribir el segundo término de (1.2), utilizando subíndices para denotar derivación parcial :

$$(\rho c^2 U_z)_z = (\rho c U_x)_z = \frac{1}{c} (\rho c U_x)_x. \quad (1.4)$$

Sustituyendo en la ecuación (1.2) obtenemos la *ecuación de Webster*, donde ahora la variable espacial es x :

$$\rho c \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho c \frac{\partial U}{\partial x} \right) = 0. \quad (1.5)$$

Para el problema en una dimensión, con condiciones dadas para $x = 0$, está claro que no será posible recuperar por separado tanto ρ como c ; sólo podremos obtener la combinación ρc . Esta cantidad se conoce como *impedancia característica* del material y está asociada con el esfuerzo necesario en el medio para generar movimiento, por lo que también se le llama *resistencia de onda*. En base a esta cantidad definimos una nueva variable

$$\eta(x) = \sqrt{\rho(z)c(z)}, \quad (1.6)$$

donde la relación entre x y z está dada por (1.3). Reescribimos la ecuación (1.5) en términos de esta nueva variable

$$\eta^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta^2 \frac{\partial U}{\partial x} \right) = 0. \quad (1.7)$$

El siguiente paso es definir una nueva variable de desplazamiento elástico,

$$u(x, t) = \eta(x)U(x, t), \quad (1.8)$$

con la que reescribimos ambos términos de la ecuación (1.7):

$$\eta^2 U_{tt} = \eta u_{tt}, \quad (1.9)$$

y también

$$\begin{aligned} (\eta^2 U_x)_x &= \left[\eta^2 \left(\frac{\eta u_x - u \eta_x}{\eta^2} \right) \right]_x \\ &= \eta_x u_x + \eta u_{xx} - u \eta_{xx} - \eta_x u_x \\ &= \eta u_{xx} - u \eta_{xx}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Ahora sustituimos estas expresiones en la ecuación (1.7), y dividimos la ecuación resultante entre η para obtener

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x)u = 0, \quad (1.11)$$

donde hemos definido $q(x) = \eta_{xx}/\eta$. De hecho, es interesante apuntar la similitud existente entre esta última relación, que podemos escribir

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - q(x)\eta = 0,$$

y la forma *sin dependencia temporal* de la ecuación (1.11), que es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q(x)u = 0.$$

Lo que nos interesa ahora es estudiar el problema planteado por la ecuación (1.11), con condiciones de frontera dadas sobre $x = 0$. En el contexto de problemas de propagación de ondas en medios elásticos es común que la condición que se especifique en $z = 0$ sea el *esfuerzo*, $-\rho c^2 U_z(0, t)$. Ahora bien, utilizando sucesivamente (1.4), (1.6) y (1.10) tendremos

$$-\rho c^2 \frac{\partial U}{\partial z} = -\rho c \frac{\partial U}{\partial x} = -\eta^2 \frac{\partial U}{\partial x} = -\eta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} u.$$

Si ahora suponemos que no existe esfuerzo alguno en el extremo $z = 0$ (nótese que coincide con $x = 0$), obtenemos condiciones de frontera homogéneas

$$-\eta(0)u_x(0, t) + \eta_x(0)u(0, t) = 0.$$

Dividiendo ahora esta ecuación entre $\eta(0)$ obtenemos

$$-u_x(0, t) + hu(0, t) = 0, \quad (1.12)$$

donde hemos definido $h = \frac{\eta_x(0)}{\eta(0)}$.

El sistema descrito por la ecuación (1.11) junto con condiciones de frontera (1.12) es, en efecto, de importancia central para desarrollos posteriores de este trabajo, pues el problema inverso que nos plantearemos consiste precisamente en reconstruir el potencial $q(x)$ y la constante de resorte h . Analizando en este momento un sistema elástico que da lugar a este problema, intentamos dar un sentido físico a nuestra derivación de las ecuaciones de Marchenko y Gelfand–Levitan, contrastando con su derivación a partir de la ecuación de Schrödinger, cuya interpretación física es muy conocida.

1.3 Ecuación de la cuerda elásticamente amortiguada

Consideramos la ecuación de movimiento transversal de una cuerda contenida en un medio elástico, sujeta a una fuerza por unidad de longitud $F(x, t)$, donde hemos escogido unidades de tiempo y longitud tales que tanto la densidad de la cuerda como la tensión en ésta están normalizadas a 1:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t), \quad (1.13)$$

donde evidentemente $u(x, t)$ es el desplazamiento transversal. Suponemos que es de hecho el medio elástico el que proporciona la fuerza F , de tal modo que ésta se opone al movimiento, actuando de manera restitutiva, y que F es proporcional en magnitud al desplazamiento u . Tendremos entonces que $F(x, t) = -q(x)u(x, t)$, señalando que q es un parámetro de proporcionalidad que depende únicamente de la posición. Nos interesan las situaciones en que $q(x)$ está *localizada*; esto es, q es cero o decrece exponencialmente al alejarse suficientemente de una fuente central. Hablamos entonces de q comúnmente como *coeficiente elástico distribuido*. Adicionalmente pedimos por argumentos físicos que q sea positiva o cero, pues se trata de una densidad de fuerza restitutiva. Vemos entonces de esta manera que $u(x, t)$ satisface nada menos que la ecuación (1.11).

Observamos ahora que la fuerza $F_0 = F(0, t)$ que se ejerce sobre el extremo $x = 0$ está dada por

$$F_0 = -u_x(0, t). \quad (1.14)$$

Llamemos al coeficiente elástico en este caso $h = q(0)$, de tal manera que, bajo el mismo supuesto previamente establecido $F_0 = -hu$; h es la *constante concentrada de resorte*. Escribimos, pues, (1.14) del siguiente modo:

$$-u_x(0, t) + hu(0, t) = 0, \quad (1.15)$$

que, por supuesto, coincide con (1.12). Este sistema es el de una cuerda elásticamente amortiguada.

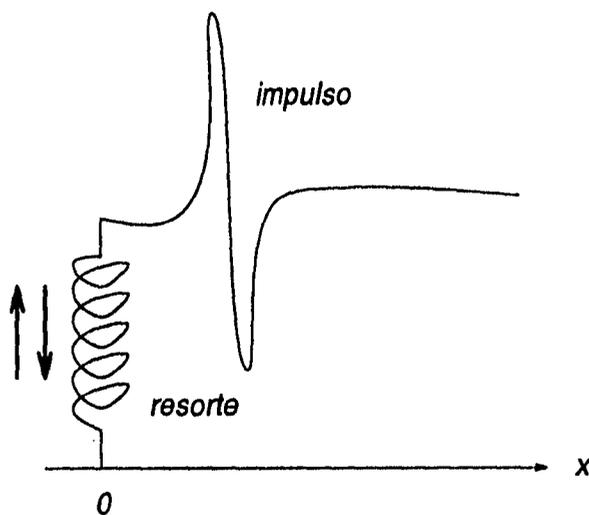


Figura 1.1: Cuerda elásticamente amortiguada por un resorte en el extremo $x = 0$, a la que se introduce un impulso en este extremo.

Existe una particular condición de frontera de especial interés que será necesario considerar. Supongamos que en el extremo $x = 0$ la cuerda es amortiguada por un simple resorte, con constante de resorte h ; referimos al lector a la Figura 1.1. La condición (1.15) describe una situación en que la tensión en el extremo de la cuerda y la fuerza ejercida por el resorte se hallan en equilibrio. En el caso en que el resorte diera un repentino empujón a la cuerda a un tiempo $t = 0$, la condición (1.15) sería reemplazada por

$$-u_x(0, t) + hu(0, t) = \delta(t). \quad (1.16)$$

Una situación similar dará lugar al problema que finalmente nos será de utilidad. Supongamos que el resorte da un súbito jalón a la cuerda, seguido de un empujón igualmente repentino; puede pensarse que sería equivalente a tomar el extremo con la mano y moverlo rápidamente de abajo a arriba, y de nuevo hacia abajo. Ver, de nuevo, la Figura 1.1. Esta condición de frontera se escribe de la siguiente forma (ver la descripción de $\delta'(t)$ en el Apéndice A, particularmente la Figura A.3):

$$-u_x(0, t) + hu(0, t) = \delta'(t). \quad (1.17)$$

Bajo estas condiciones, la cuerda se halla inmóvil antes de que ocurra el impulso ($u(x, t) = 0$ para $t < 0$).

Como ya hemos mencionado, en este caso, el problema inverso consiste en recuperar no sólo el potencial $q(x)$ que aparece en la ecuación (1.11), sino también la constante de resorte h . Antes de continuar, conviene señalar la diferencia principal entre las formulaciones de Marchenko y Gelfand–Levitan. Mientras que en la formulación de Marchenko se considera como dominio espacial la recta completa, Gelfand y Levitan consideran en su trabajo únicamente la semirecta $x > 0$, introduciendo precisamente la condición (1.17) sobre la frontera. En la formulación de Marchenko no aparece la constante h , y el problema inverso consiste solamente de la recuperación del potencial $q(x)$.

En los siguientes dos capítulos mostraremos como, a partir de (1.11) y (1.17), podemos construir las ecuaciones de Marchenko y Gelfand–Levitan, que nos permiten resolver los problemas inversos en cuestión. En un principio estas ecuaciones fueron obtenidas en el contexto de la ecuación de Schrödinger, que resulta de aplicar una transformada de Fourier en tiempo a la ecuación (1.11). Supongamos que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} u_t = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} u = 0.$$

Tenemos, entonces, integrando por partes y denotando la transformada de Fourier en tiempo de u por \tilde{u} :

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{tt}(x, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{tt} e^{i\omega t} dt \\ &= -\omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} u e^{i\omega t} dt = -\omega^2 \tilde{u}(x, \omega).\end{aligned}$$

El resultado de transformar (1.11) es pues, en efecto, la *ecuación de Schrödinger*,

$$\tilde{u}_{xx} + (\lambda - q(x))\tilde{u} = 0, \quad (1.18)$$

con $\lambda = \omega^2$, donde, como se ha visto, ω es la variable conjugada de t en la transformación.

Los detalles de la solución al problema inverso en discusión han sido estudiados con mucho cuidado para la ecuación de Schrödinger, por lo que es común que se transforme la ecuación (1.2) en (1.18), como hemos mostrado que se puede hacer, para resolver el problema. En el siguiente capítulo comenzamos por trabajar sobre (1.18) para obtener las ecuaciones de Marchenko de la manera clásica, en el dominio espectral. Sin embargo, en algunos casos no es ésta la manera más natural de dar solución al problema, ni tampoco la más práctica, por razones que discutiremos más tarde; en varias ocasiones, la derivación en el dominio temporal resulta más adecuada. Acto seguido, presentaremos también esta última derivación, lo que servirá para ilustrar las múltiples diferencias que existen entre estos dos planteamientos.

Capítulo 2

Formulación de Marchenko

La ecuación de Marchenko no es solamente utilizada ampliamente para resolver problemas Sturm-Liouville inversos, sino que es fundamental en la solución de algunas ecuaciones de evolución, como la *ecuación Kortweg-De Vries*, por medio de la técnica de dispersión inversa. Su derivación en este caso está planteada de manera natural en el dominio de frecuencias. Presentamos en las siguientes secciones esta formulación, que no sólo es importante desde el punto de vista histórico, como catalizador de los estudios en este campo, sino que sirve muy bien para ilustrar el significado físico de varios elementos que aparecerán en la derivación temporal de la Sección 2.3.

Antes de continuar, hay un detalle formal que vale la pena aclarar. A lo largo de este trabajo, debido al énfasis que colocamos en la dispersión de impulsos, manejamos en forma extensa varias "funciones" delta. Como es bien sabido, estos objetos no residen en realidad en el mundo de las funciones, sino en el de las distribuciones, o funciones generalizadas. Por simplicidad, adoptamos en este texto una notación simplificada que nos permite escribir distribuciones en el mismo contexto que funciones. En el Apéndice A se puede encontrar una discusión más detallada de estas disposiciones, así como una breve introducción a las funciones de Green y al concepto de soluciones débiles de ecuaciones diferenciales.

2.1 Ecuación de Schrödinger: dispersión

La motivación más común de la ecuación de Schrödinger ocurre en la mecánica cuántica. En el marco de esta teoría, escribimos la ecuación, a un tiempo t_0 fijo, como

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi, \quad (2.1)$$

donde \hbar es la constante de Planck dividida sobre 2π , m es la masa de una partícula, E es la energía total de la partícula, y $V(x)$ es el campo de potencial para la partícula en la posición x . En dicho contexto, esta ecuación describe de alguna forma el movimiento de una partícula elemental. La manera precisa en que lo hace, de la que depende la interpretación de la función $\psi(x, t_0)$, fue propuesta por Max Born. Born sugirió que la cantidad $|\psi(x, t)|^2 dx$ representa la *probabilidad* de encontrar la partícula entre x y $x + dx$, a un tiempo t_0 . Esto es, en lo relativo a partículas elementales no se debe pensar en la posición exacta que ocupan, sino en una posición descrita en términos de una *densidad de probabilidad*. Para que esta interpretación sea válida, requerimos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t_0)|^2 dx = 1, \quad (2.2)$$

ya que la partícula se debe de encontrar en algún lugar del espacio. La solución $\psi(x, t_0)$ es entonces una función de onda para esta partícula, y se pide que $\psi(x, t_0) \in L^2(-\infty, \infty)$. Esta es la curiosa naturaleza de la mecánica cuántica: que el comportamiento de una partícula sea descrito por una función de onda.

Ya establecido, aunque de manera muy rudimentaria, el significado de la ecuación de Schrödinger, efectuamos un par de cambios para facilitar la escritura de esta ecuación; ponemos $k^2 = (2mE)/\hbar^2$ y $q(x) = (2mV)/\hbar^2$. Además, reemplazamos ψ por y . En la forma resultante analizaremos la ecuación de Schrödinger con un potencial localizado $q(x)$, para $x \in (-\infty, \infty)$:

$$y'' + [k^2 - q(x)]y = 0. \quad (2.3)$$

Para potenciales localizados, cuando $x \rightarrow \pm\infty$ el potencial se anula o se hace exponencialmente pequeño; en este caso pediremos adicionalmente que

$$\int_{-\infty}^{\infty} q(x) dx < \infty, \quad (2.4)$$

es decir, que sea localmente integrable, y también requerimos que satisfaga lo que se conoce como la condición de Faddeev (Faddeev, 1958):

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) |q(x)| dx < \infty. \quad (2.5)$$

Tanto (2.4) como (2.5) son necesarias para exhibir existencia y analiticidad de soluciones; no trataremos este problema en profundidad. Dadas las condiciones anteriores, cuando x tomara valores muy grandes, tendríamos:

$$y'' + k^2 y = 0,$$

cuya solución general es bien conocida. Cualquier solución de la ecuación (2.3) se reduciría en esta región a una combinación lineal de las funciones $e^{\pm ikx}$. Como consecuencia vemos que es natural escribir toda solución de la ecuación de Schrödinger como una combinación lineal de una solución $f_1(x, k)$ que se reduzca a e^{ikx} cuando $x \rightarrow +\infty$ y otra solución $f_2(x, k)$ tal que ésta se reduzca a e^{-ikx} cuando $x \rightarrow -\infty$. De este modo, el comportamiento asintótico de estas soluciones, que llamaremos *soluciones fundamentales*, está dado por:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [e^{-ikx} f_1(x, k)] = 1, \quad (2.6)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [e^{ikx} f_2(x, k)] = 1. \quad (2.7)$$

No es posible encontrar de manera explícita estas soluciones fundamentales para un potencial $q(x)$ arbitrario; sin embargo, podemos determinar algunas de sus propiedades a partir de ciertas ecuaciones integrales que satisfacen. Tomamos $q(x)y$ como un término inhomogéneo del lado derecho de la ecuación (2.3), y usamos el método de variación de parámetros. Proponemos una solución de la forma

$$\Psi(x, k) = \eta_1(x)e^{ikx} + \eta_2(x)e^{-ikx}, \quad (2.8)$$

donde por variación de parámetros hemos determinado $\eta_1(x)$ y $\eta_2(x)$:

$$\eta_1(x) = \frac{1}{2ik} \int_0^x q(\xi) \Psi(\xi, k) e^{-ik\xi} d\xi + c_1, \quad (2.9)$$

$$\eta_2(x) = -\frac{1}{2ik} \int_0^x q(\xi) \Psi(\xi, k) e^{ik\xi} d\xi + c_2, \quad (2.10)$$

donde c_1 y c_2 son constantes de integración, que pueden depender de k . En el caso de $f_1(x, k)$, buscamos una solución con comportamiento asintótico como se ve en (2.6); examinando la solución general (2.8) es claro que se requiere $\eta_1 = 1$ y $\eta_2 = 0$ cuando $x \rightarrow \infty$. Ésto se logra fácilmente disponiendo c_1 y c_2 de la siguiente manera:

$$c_1 = 1 - \frac{1}{2ik} \int_0^\infty q(\xi) \Psi(\xi, k) e^{-ik\xi} d\xi,$$

$$c_2 = \frac{1}{2ik} \int_0^\infty q(\xi) \Psi(\xi, k) e^{ik\xi} d\xi.$$

Utilizando éstas en las ecuaciones (2.9) y (2.10), y después sustituyendo en la solución general (2.8) con $\Psi(x, k) = f_1(x, k)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} f_1(x, k) &= e^{ikx} + \frac{1}{2ik} \int_x^\infty q(\xi) f_1(\xi, k) e^{ik(\xi-x)} d\xi \\ &\quad - \frac{1}{2ik} \int_x^\infty q(\xi) f_1(\xi, k) e^{-ik(\xi-x)} d\xi \\ &= e^{ikx} + \frac{1}{2ik} \int_x^\infty q(\xi) f_1(\xi, k) [e^{ik(\xi-x)} - e^{-ik(\xi-x)}] d\xi \\ &= e^{ikx} - \frac{1}{k} \int_x^\infty q(\xi) f_1(\xi, k) \operatorname{sen} k(x - \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (2.11)$$

De manera completamente análoga se llega a la representación que corresponde a $f_2(x, k)$:

$$f_2(x, k) = e^{-ikx} - \frac{1}{k} \int_{-\infty}^x q(\xi) f_2(\xi, k) \operatorname{sen} k(x - \xi) d\xi. \quad (2.12)$$

Las soluciones fundamentales de la ecuación (2.3) con comportamiento asintótico como el descrito por (2.6) y (2.7) son, por lo tanto, únicas. Este hecho será de gran importancia más adelante. Ahora, supongamos que tanto $q(x)$ como k son reales. En este caso, comparando $f_1(x, -k)$ y $f_1^*(x, k)$ (denotaremos conjugación compleja por medio de un asterisco) observamos que ambas son soluciones de la misma ecuación integral, la ecuación (2.11), y que además tienen la misma forma asintótica; se sigue pues que $f_1(x, -k) = f_1^*(x, k)$, y también, aduciendo las mismas razones, que $f_2(x, -k) = f_2^*(x, k)$.

Es esencial tener en cuenta que las ecuaciones integrales que hemos obtenido no indican que efectivamente existan las funciones $f_1(x, k)$ y $f_2(x, k)$, sino solamente que si existen, entonces se pueden representar de esta forma. En el caso en que si existan, nos interesa averiguar en que región del plano complejo son analíticas. Ambas incógnitas se pueden intentar resolver obteniendo las soluciones de las ecuaciones integrales (2.11) y (2.12) por un método de iteración. Debido a que se trata, en ambos casos, de ecuaciones integrales de Volterra, es posible asegurar que las series que resultan de iterar son convergentes siempre para $\operatorname{Im} k > 0$. No entraremos en los detalles de la teoría de ecuaciones integrales; el desarrollo se puede leer en los libros de Lovitt y Keener [13, 9]. Aseguramos que las funciones $f_1(x, k)$ y $f_2(x, k)$ existen y son analíticas en el semiplano complejo superior ($\operatorname{Im} k > 0$), y que satisfacen (2.11) y (2.12) respectivamente en esta región.

Continuamos con nuestro análisis de la ecuación de Schrödinger examinando el Wronskiano de dos soluciones arbitrarias de esta ecuación,

$$W(y_1; y_2) \doteq y_1' y_2 - y_2' y_1,$$

que difiere de la definición usual en los signos, que estarían invertidos. Realizamos esta variante únicamente por conveniencia futura. Recordemos ahora que si $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son soluciones de la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0,$$

entonces el Wronskiano satisface la siguiente ecuación (nuestra variante en la definición del mismo no altera este conocido resultado):

$$W' + p(x)W = 0. \quad (2.13)$$

En el caso de la ecuación de Schrödinger, una ecuación lineal de segundo orden, no hay término con primera derivada, por lo que, según (2.13), el Wronskiano es tal que $W' = 0$. Concluimos que el Wronskiano de cualesquiera dos soluciones linealmente independientes es únicamente función de k . Las soluciones fundamentales tienen formas muy simples en los límites cuando $x \rightarrow \pm\infty$, por lo que calcularemos los Wronskianos para $|x|$ muy grande, y aprovecharemos el hecho de que sean solamente funciones de k , y no de x . En particular, evaluando f_1 cuando $x \rightarrow \infty$ y f_2 cuando $x \rightarrow -\infty$,

$$W[f_1(x, k), f_1(x, -k)] = 2ik, \quad (2.14)$$

$$W[f_2(x, k), f_2(x, -k)] = -2ik. \quad (2.15)$$

Por lo tanto, hemos establecido la independencia lineal de los pares de soluciones $[f_1(x, k), f_1(x, -k)]$ y $[f_2(x, k), f_2(x, -k)]$, con lo que será posible escribir cualquier solución en términos de éstos, ya que cualquier solución se puede dar como combinación lineal de soluciones linealmente independientes. Aprovechamos para escribir:

$$f_2(x, k) = c_{11}(k)f_1(x, k) + c_{12}(k)f_1(x, -k), \quad (2.16)$$

$$f_1(x, k) = c_{21}(k)f_2(x, -k) + c_{22}(k)f_2(x, k). \quad (2.17)$$

Refiriéndonos a las formas asintóticas de las soluciones fundamentales cuando $x \rightarrow \pm\infty$, dadas por (2.6) y (2.7), la primera de las anteriores relaciones, (2.16),

representa una solución de la ecuación de Schrödinger que se reduce a e^{-ikx} cuando $x \rightarrow -\infty$ y a la combinación $c_{11}e^{ikx} + c_{12}e^{-ikx}$ cuando $x \rightarrow \infty$. Corresponde pues, a un problema de dispersión en el que una onda de amplitud c_{12} que viene desde $x = \infty$ incide en el potencial de dispersión. Esta onda se refleja, y viaja con amplitud c_{11} hacia la derecha, hasta $x = \infty$. Por otra parte, una parte de la energía de la onda se transmite a través del potencial, con amplitud unitaria, viajando hacia $x = -\infty$. Una interpretación similar se puede aplicar también a (2.17). Ver la Figura 2.1.

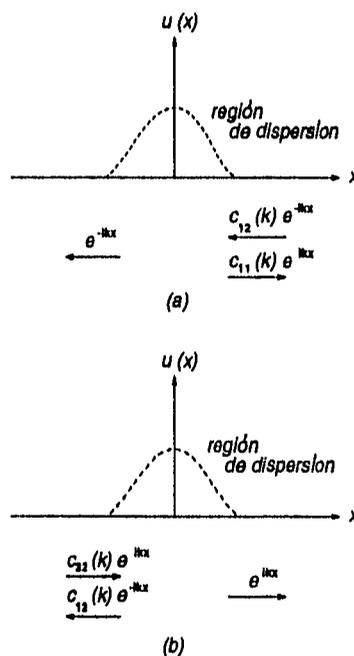


Figura 2.1: Dispersión de ondas (a) incidentes por la derecha y (b) incidentes por la izquierda.

La manera más natural de tratar la ecuación (2.16) como una situación dispersiva es normalizándola de modo que sea la onda *incidente* la que tenga amplitud unitaria, y no la transmitida. Así es más fácil visualizar el efecto que el potencial tiene sobre la onda incidente. Definimos, pues,

$$R_d(k) = \frac{c_{11}(k)}{c_{12}(k)}, \quad T_d(k) = \frac{1}{c_{12}(k)}, \quad (2.18)$$

donde usamos el subíndice d para indicar que se trata de ondas incidentes por la derecha. Llamaremos a R_d *coeficiente de reflexión* y a T_d *coeficiente de transmisión*. Del mismo modo,

$$R_i(k) = \frac{c_{22}(k)}{c_{21}(k)}, \quad T_i(k) = \frac{1}{c_{21}(k)}, \quad (2.19)$$

denotan ondas incidentes por la izquierda, con amplitud unitaria.

Hay un número de relaciones entre los coeficientes c_{ij} que se pueden encontrar sustituyendo la relación (2.16) en (2.17) e igualando coeficientes de $f_1(x, k)$ y $f_2(x, -k)$. Otras se encuentran sustituyendo al revés, (2.17) en (2.16). Usando estas relaciones en conjunto con (2.14) y (2.15) se encuentra, en particular, que

$$c_{12} = c_{21} = \frac{1}{2ik} W[f_1(x, k); f_2(x, k)], \quad (2.20)$$

lo que tiene como consecuencia inmediata que $T_d(k) = T_i(k)$. Denotaremos, en adelante, al coeficiente de transmisión simplemente por $T(k)$. Hemos omitido los cálculos anteriores ya que, aunque son sumamente sencillos, resulta incómodo incluirlos por su extensión. Se encuentran también relaciones que describen a c_{11} y c_{22} en términos de Wronskianos, pero teniendo como meta la obtención de las ecuaciones de Marchenko, sólo se requiere la ecuación (2.20). Un resultado que se obtiene a partir de las relaciones entre coeficientes c_{ij} , que vale la pena mencionar es el siguiente, válido para q y k reales:

$$|T(k)|^2 + |R_d(k)|^2 = |T(k)|^2 + |R(k)|^2 = 1. \quad (2.21)$$

El lector perspicaz inmediatamente se dará cuenta que esta última ecuación no es más que una manifestación de la conservación de energía.

Nos interesa ahora examinar el comportamiento de $T(k)$ – es decir, de $c_{12}(k)$ – cuando k es muy grande. De las representaciones (2.11) y (2.12) veremos que para valores muy grandes de k ,

$$f_1(x, k) \sim e^{ikx} \quad \text{y} \quad f_2(x, k) \sim e^{-ikx}. \quad (2.22)$$

Sabemos ya que $W[e^{ikx}, e^{-ikx}] = 2ik$. Por lo tanto, utilizando la relación (2.20),

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} c_{12}(k) = 1. \quad (2.23)$$

Esto significa que el coeficiente de transmisión se aproxima a la unidad a medida que k crece. Ésta es la motivación detrás de nuestra definición de la siguiente integral de Fourier:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz} [T(k) - 1] dk. \quad (2.24)$$

En la siguiente sección, como en varias otras aplicaciones, será útil contar con expresiones de este tipo, que de algún modo actuarán como transformadas de Fourier, y, como tales, son invertibles. En el caso de los coeficientes de reflexión, definimos,

$$r_d(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} R_d(k) dk, \quad (2.25)$$

$$r_i(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz} R_i(k) dk. \quad (2.26)$$

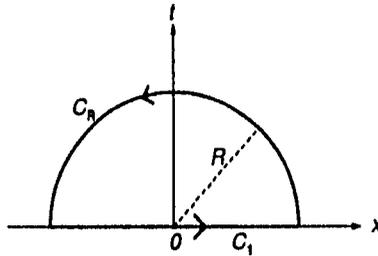
La utilidad de escribir las anteriores integrales de Fourier en estas formas particulares, y no como transformadas de Fourier usuales, se hará patente en la siguiente sección. En particular, la integral (2.24) conduce a un resultado interesante cuando $z < 0$. Consideremos la integral $\oint_C e^{-ikz} [T(k) - 1] dk$ sobre el contorno $C = C_1 \cup C_R$ que se muestra en la Figura 2.2.

Es oportuno en este momento recordar el *lema de Jordan* de la teoría de variable compleja.

Teorema (lema de Jordan)

Sea $I(R) = \int_{C(R)} e^{iaz} g(z) dz$, donde $a \in \mathfrak{R}$, $a > 0$, y $C(R)$ es el arco $z = R\epsilon^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Supongamos que existe $\Phi(R)$ tal que

1. $\Phi(R) \rightarrow 0$ cuando $R \rightarrow \infty$.

Figura 2.2: Contorno de integración C .

$$2. |g(Re^{i\theta})| \leq \Phi(R).$$

Entonces,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I(R) = 0.$$

Como un sencillo resultado de la aplicación de este lema, obtenemos que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{-ikz} [T(k) - 1] dk = 0 \quad \text{para } z < 0, \quad (2.27)$$

ya que hemos visto en (2.23) que $[T(k) - 1] \rightarrow 0$ cuando $|k| = R \rightarrow \infty$. Si ahora suponemos que $T(k)$ es analítica en todo el semiplano k superior, podemos usar este último resultado junto con el teorema de Cauchy-Goursat para afirmar que cuando $R \rightarrow \infty$, con $z < 0$,

$$\oint_C e^{-ikz} [T(k) - 1] dk = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz} [T(k) - 1] dk = 0. \quad (2.28)$$

Esto es, para $z < 0$, $\Gamma(z) = 0$, si el coeficiente de transmisión no tiene puntos singulares en el semiplano k superior. Este resultado será de gran importancia en la fase final de la obtención de las ecuaciones de Marchenko; es un buen ejemplo para resaltar la conveniencia de alterar las definiciones usuales de las integrales de Fourier.

Hemos concluido una breve formulación matemática de los fenómenos involucrados en un proceso de dispersión. Es especialmente importante la ecuación (2.16), no

sólo porque contiene en buena medida la información física relevante del problema, sino porque será la piedra angular sobre la que basaremos nuestra construcción de las ecuaciones de Marchenko en la siguiente sección.

2.2 Derivación en el dominio de frecuencias: dispersión de pulsos

Nuestro punto de partida es la ecuación de la cuerda elásticamente amortiguada, que escribimos de nuevo para facilitar las referencias:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + q(x)y = 0; \quad (2.29)$$

como antes, hemos escogido unidades de modo que la velocidad de propagación c sea uno. El dominio es, como antes, el plano xt entero. Hemos visto ya en la sección anterior que (2.29) es la transformada de Fourier de la ecuación de Schrödinger, (1.18), y que esta última tiene soluciones linealmente independientes $f_1(x, k)$ y $f_2(x, k)$, analíticas en el semiplano k superior. Tomando una transformada inversa de Fourier a $f_1(x, k)$, y usando (2.11), tendremos una solución de (2.29) de la siguiente forma:

$$y_1(x, t) = \delta(t - x) + H(t - x)A_1(x, t), \quad (2.30)$$

donde $H(x)$ es la función escalón de Heaviside, y $A_1(x, t)$ es una cómoda abreviación del resultado de invertir el segundo término de la derecha de (2.11). Esta solución consiste de un pulso que deja detrás de sí una estela de forma $A_1(x, t)$. No es extraño que hayamos obtenido una solución con esta forma: debido a su interacción con un potencial elástico, anticipamos que parte del pulso será dispersado, y que dejará una especie de estela detrás de un pronunciado borde. Se trata evidentemente de una onda que se propaga hacia la derecha. La idea de escribir una solución de este modo se debe originalmente a Balanis [2]. Ver la Figura 2.3.

Denotamos la transformada de Fourier en tiempo de $y(x, t)$ por $\tilde{y}(x, \omega)$. Tomamos ahora la transformada de Fourier en tiempo de la solución (2.30):

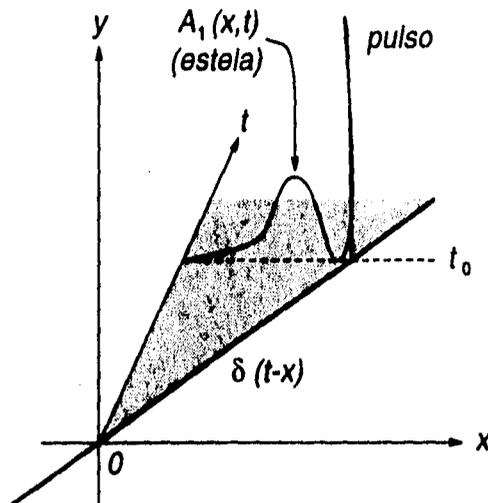


Figura 2.3: Propagación hacia la derecha de un pulso seguido por una estela de forma $A_1(x, t)$. El soporte de $A_1(x, t)$ se muestra sombreado.

$$\begin{aligned}\tilde{y}_1(x, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} y_1(x, t) e^{i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-x) e^{i\omega t} dt + \int_x^{\infty} A_1(x, t) e^{i\omega t} dt.\end{aligned}\quad (2.31)$$

En este caso, como $c = 1$, tenemos que $\omega = k$, por lo que $\tilde{y}_1(x, \omega) = \tilde{y}(x, k)$. Ésta es una solución de la ecuación (2.29) transformada, que como ya hemos visto en el capítulo anterior, es la ecuación de Schrödinger,

$$\tilde{y}_{xx} + [\omega^2 - q(x)]\tilde{y} = 0. \quad (2.32)$$

Inmediatamente se puede ver de (2.31) que $\tilde{y}_1(x, \omega)$ también tiene la propiedad

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [e^{-ikx} \tilde{y}_1(x, \omega)] = 1. \quad (2.33)$$

La solución fundamental de la ecuación (2.32) que tiene el comportamiento descrito

por la propiedad (2.33) es única; por lo tanto, la expresión (2.31) debe coincidir con la solución fundamental (2.11) que hemos introducido en la Sección 2.1:

$$f_1(x, k) = \tilde{y}_1(x, \omega) = e^{ikx} + \int_x^\infty A_1(x, t)e^{ikt} dt. \quad (2.34)$$

Del mismo modo podemos escribir una solución que representa un pulso viajando hacia la izquierda como

$$y_2(x, t) = \delta(t + x) + H(t + x)A_2(x, -t); \quad (2.35)$$

la forma de la estela que sigue al pulso ahora está dada por $A_2(x, -t)$. La transformada de Fourier de esta expresión nos lleva a un resultado análogo a (2.34):

$$f_2(x, k) = \tilde{y}_2(x, \omega) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x A_2(x, t)e^{-ikt} dt. \quad (2.36)$$

Nos interesa también considerar la solución $y_1(x, -t)$ de la ecuación (2.29), es decir una solución con el sentido del tiempo invertido. A partir de (2.30) se le puede escribir,

$$y_1(x, -t) = \delta(t + x) + H(-t - x)A_1(x, -t); \quad (2.37)$$

se trata ahora de un pulso que viaja hacia la izquierda con una estela por delante. Esta función y la solución fundamental $f_1(x, k)$ están relacionadas por la siguiente ecuación integral, que resulta de aplicar una transformada inversa de Fourier a $f_1(x, -k)$:

$$y_1(x, -t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega t} f_1(x, -\omega) d\omega. \quad (2.38)$$

Contamos ya en este momento con los elementos necesarios para finalmente obtener la ecuación de Marchenko en el dominio de frecuencias. En la sección siguiente, el primer objetivo será establecer una representación integral en términos de una respuesta causal conocida en $x = 0$. Mientras tanto, en esta formulación,

la ecuación que eventualmente se convierte en la de Marchenko es (2.16), que contiene la información del comportamiento de las ondas después de la interacción de la onda incidente con el potencial de dispersión, para valores de $|x|$ muy grandes. La diferencia conceptual entre ambos acercamientos es clara, pues en el primero nos interesa conocer un comportamiento localizado, mientras que en el segundo necesitamos las formas asintóticas de las ondas dispersadas. Continuamos con esta última formulación repitiendo la multicitada ecuación (2.16), pero dividiendo entre $c_{12}(k)$ y utilizando las relaciones (2.18) para reescribirla como

$$T(k)f_2(x, k) = R_d(k)f_1(x, k) + f_1(x, -k). \quad (2.39)$$

También repetimos, por comodidad, las relaciones integrales (2.24) y (2.25), pues nos serán muy útiles, como lo será igualmente el recordar algunas de sus propiedades, examinadas en la sección anterior;

$$r_d(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} R_d(k) dk, \quad (2.40)$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz} [T(k) - 1] dk. \quad (2.41)$$

Falta solamente introducir una representación de la delta, que utilizaremos varias veces en el desarrollo que sigue:

$$\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(x-x')} d\omega. \quad (2.42)$$

La relación equivalente a (2.39) en el dominio temporal se obtiene tomando una transformada inversa de Fourier precisamente a esta ecuación. Comenzaremos por el lado derecho, *L.D.*, usando (2.38):

$$L.D. = y_1(x, -t) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} R_d(\omega) f_1(x, \omega) d\omega. \quad (2.43)$$

Llamaremos $\mathbf{I_D}$ a la integral que aparece en (2.43). Ya que la ecuación (2.40) representa efectivamente una transformada de Fourier, podemos escribir $R_d(\omega)$ como sigue, invirtiendo esta ecuación:

$$R_d(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega z} r_d(z) dz. \quad (2.44)$$

Sustituyendo este resultado y la forma de $f_1(x, \omega)$ dada por (2.34) en la integral \mathbf{I}_D :

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_D &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega z} r_d(z) dz \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega \tau} y_1(x, \tau) d\tau \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+z-\tau)} r_d(z) y_1(x, \tau) d\omega dz d\tau \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z+t-\tau) r_d(z) y_1(x, \tau) dz d\tau \quad (2.46)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} r_d(\tau-t) y_1(x, \tau) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} r_d(\tau-t) [\delta(\tau-x) + H(\tau-x) A_1(x, \tau)] d\tau$$

$$= r_d(x-t) + \int_x^{\infty} r_d(\tau-t) A_1(x, \tau) d\tau. \quad (2.47)$$

Hemos utilizado el teorema de Fubini para escribir (2.45), y la representación (2.42) para obtener (2.46) a partir de la anterior. Para lo que sigue, no hemos hecho más que sustituir la forma (2.30) de la solución $y_1(x, \tau)$. Utilizando (2.37) para reescribir $y_1(x, -t)$, y la expresión final (2.47) de \mathbf{I}_D , el lado derecho de la ecuación queda como sigue:

$$\begin{aligned} L.D. &= \delta(t+x) + H(-t-x) A_1(x, -t) \\ &\quad + r_d(x-t) + \int_x^{\infty} r_d(\tau-t) A_1(x, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Para transformar el lado izquierdo de modo similar es necesario invertir la ecuación (2.41), y de este modo obtener una representación integral de $T(k)$:

$$T(k) - 1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} \Gamma(z) dz. \quad (2.49)$$

Continuamos ahora con la transformación en el lado izquierdo, *L.I.*:

$$\begin{aligned} L.I. &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} y_2(x, \tau) ds \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega z} \Gamma(z) dz + 1 \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-\tau-z)} y_2(x, \tau) \Gamma(z) d\omega dz d\tau \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-\tau)} y_2(x, \tau) d\omega d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y_2(x, \tau) \Gamma(z) \delta(t - \tau - z) dz d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} y_2(x, \tau) \delta(t - \tau) d\tau \\ &= y_2(x, t) + \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t - \tau) [\delta(\tau + x) + H(\tau + x) A_2(x, -\tau)] d\tau \\ &= y_2(x, t) + \Gamma(t + x) + \int_{-x}^{\infty} A_2(x, -\tau) \Gamma(t - \tau) d\tau \\ &= \delta(t + x) + H(t + x) A_2(x, -t) + \Gamma(t + x) \\ &\quad + \int_{-x}^{\infty} A_2(x, -\tau) \Gamma(t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Para llegar a la expresión (2.50) hemos seguido exactamente los mismos pasos que realizamos al transformar el lado derecho de la ecuación; no es necesario ahondar en los detalles de nuevo.

En esta ocasión nos restringimos a la región $x + t < 0$. Observamos inmediatamente que $\delta(t + x) = H(t + x) = 0$, y por el otro lado, $H(-t - x) = 1$; también es posible eliminar los términos que contienen Γ en la ecuación (2.50). Hemos visto ya en la sección pasada, precisamente en (2.28), que para $z < 0$, si no hay polos del coeficiente de transmisión en el semiplano k superior, $\Gamma(z) = 0$. En este caso tendremos, por lo tanto, que $\Gamma(t + x) = 0$, ya que $t + x < 0$. No sólo eliminamos este

término; una breve inspección de la última integral en (2.50) revela que el intervalo de integración contiene solamente valores para los cuales $\Gamma(t - \tau)$ es cero, ya que $t - \tau \leq t + x < 0$. Esta integral también es cero. Con esto observamos que todos los términos del lado izquierdo se hacen cero en esta región, al igual que la delta que aparece en el lado derecho.

Para hacer notar claramente la equivalencia de la forma de la ecuación de Marchenko, que acto seguido escribiremos, con aquella que obtendremos en la Sección 2.3, [ecuación (2.72)], realizamos un cambio de variable, $t \mapsto -s$. De este modo, la transformada inversa de la ecuación (2.39) queda

$$A_1(x, s) + r_d(x + s) + \int_x^\infty r_d(\tau + s) A_1(x, \tau) d\tau = 0, \text{ con } x < s. \quad (2.51)$$

Esta es la ecuación integral de Marchenko. Solamente hemos considerado el caso en que el coeficiente de transmisión $T(k)$ no tiene polos en el semiplano k superior. En el supuesto de que hubiera polos en el semiplano superior, no sería muy complicado establecer que se trata de polos simples ubicados sobre el eje imaginario. Estos polos estarían asociados con los llamados *estados ligados*, que no son sino soluciones cuadrado integrables (obviamente en el sentido de Lebesgue), correspondientes a un espectro discreto. Dichas soluciones juegan un papel en extremo importante en la teoría de dispersión inversa, y contribuyen términos adicionales a la ecuación (2.51); sin embargo, éstos se pueden combinar, junto con r_d , en una función que juegue el papel de la misma r_d y deje la ecuación (2.51) formalmente intacta. Este análisis queda fuera del alcance de este texto, que no tiene como objeto presentar un estudio detallado de la teoría de dispersión inversa. El lector interesado se podrá referir a alguno de los varios textos sobre este tema citados en la bibliografía [5, 10, 9].

Nuestro punto de partida para llegar a la ecuación (2.51) ha sido la ecuación (2.16) de la Sección 2.1. Partiendo, en su lugar, de la ecuación (2.1), que describe la dispersión de un pulso incidente por la izquierda, e imitando punto a punto el desarrollo de esta sección, nos encontramos con otra forma de la ecuación de Marchenko:

$$A_2(x, s) + r_i(x + s) + \int_{-\infty}^x r_i(\tau + s) A_2(x, \tau) d\tau, \text{ con } x > s. \quad (2.52)$$

Con esto concluimos la derivación de las ecuaciones de Marchenko en el dominio de frecuencias.

2.3 Derivación en el dominio temporal

Para obtener la ecuación integral de Marchenko en el dominio temporal, nuestro punto de partida es, nuevamente, la ecuación de la cuerda elásticamente amortiguada, (1.11), que estudiaremos sobre el plano xt completo; repetimos esta ecuación por comodidad:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x)u = 0, \quad (2.53)$$

pero tal que

$$q(x) = 0 \text{ para } x < 0. \quad (2.54)$$

Tenemos entonces que, en la región $x < 0$, la función $u(x, t)$ es simplemente una solución de la ecuación de onda homogénea con velocidad de propagación igual a uno. En este caso, la solución general es

$$u(x, t) = f(t - x) + g(t + x), \quad (2.55)$$

que representa, como es bien sabido, una onda que se propaga a la derecha y otra que se propaga a la izquierda. Consideramos una solución que consista únicamente de ondas con propagación a la izquierda en $x < 0$,

$$u(x, t) = g(t + x),$$

de modo que

$$u_x(x, t) = u_t(x, t) = \frac{dg(t+x)}{d(t+x)} \text{ para } x \leq 0. \quad (2.56)$$

Incluimos la recta $x = 0$ debido a que se supone que $q(x)$ es un potencial localizado, continuo y suave. Es muy importante enfatizar que sólo en el caso en que $q(x)$ es continua y suficientemente suave será posible atacar el problema en la manera en que lo haremos a continuación. En este caso, $q(x)$ sería derivable de una impedancia $\rho c(x)$ continua y suave, por medio de las transformaciones de la Sección 1.2.

Hemos mencionado ya que en la formulación de Marchenko no se requiere la condición de frontera (1.17); sin embargo, se puede utilizar (2.56) para dar otras condiciones de frontera sobre $x = 0$:

$$u_t(0, t) - u_x(0, t) = 0. \quad (2.57)$$

Usando la misma idea de Balanis que apareció en la sección anterior, proponemos ahora una solución fundamental de la ecuación (2.53) con condiciones (2.57):

$$G(x, t) = \delta(t - x) + K(x, t), \quad (2.58)$$

en la cual $K(x, t)$ es acotada en la región dada por:

$$\text{soporte } [K(x, t)] = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq |t| \leq x\}. \quad (2.59)$$

Se trata de una solución no-causal, o acausal; esto es, la solución en un tiempo t no queda completamente determinada por lo que ha ocurrido en tiempos anteriores. Para $x < 0$ consiste solamente de un impulso que se propaga hacia la derecha; hemos mencionado ya que $\delta(t \pm x)$ es una solución débil de la ecuación de onda homogénea. Ver la Figura 2.4.

Ahora es posible obtener una solución cuya única dirección de propagación cuando $x < 0$ sea hacia la izquierda, utilizando esta misma función $K(x, t)$. Definimos esta nueva solución invirtiendo el signo de t en (2.58):

$$\hat{G}(x, t) = G(x, -t) = \delta(t + x) + K(x, -t). \quad (2.60)$$

En cuanto a esta función, es evidente que también es una solución de la ecuación (2.53), ya que

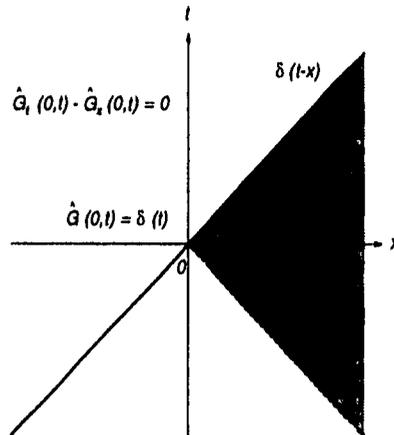


Figura 2.4: Soporte de $G(x, t) = \delta(t - x) + K(x, t)$ en el plano $x - t$, con condiciones de frontera indicadas. La zona sombreada es el soporte de $K(x, t)$ y la línea gruesa el soporte de $\delta(t - x)$.

$$\frac{\partial^2 G}{\partial(-t)^2} = \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}.$$

Además, hereda de $G(x, t)$ el satisfacer también las condiciones de frontera (2.57),

$$\hat{G}_t(0, t) - \hat{G}_x(0, t) = 0. \quad (2.61)$$

No es todo; de la ecuación (2.58) podemos inferir que

$$\hat{G}(0, t) = \delta(t). \quad (2.62)$$

Ahora, consideramos una solución cualquiera $u(x, t)$ del problema (2.53), (2.57), y damos una representación integral de dicha solución en términos de $\hat{G}(x, t)$, nuestra solución fundamental no-causal. Esta representación aparecerá como punto medular en nuestra obtención de la ecuación de Marchenko.

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{G}(x, \tau) u(0, t - \tau) d\tau. \quad (2.63)$$

Sustituimos (2.60) en esta última ecuación:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\tau + x) + K(x, -\tau)] u(0, t - \tau) d\tau \\ &= u(0, t + x) + \int_{-x}^x K(x, -\tau) u(0, t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$= u(0, t + x) + \int_{-x}^x K(x, \tau) u(0, t + \tau) d\tau. \quad (2.65)$$

En (2.64) hemos utilizado el hecho de que el soporte de $K(x, -t)$ es obviamente igual a aquél de $K(x, t)$ (el lector podrá referirse a la Figura 2.4 o a la ecuación (2.59) para confirmarlo). Para pasar a (2.65), no hemos hecho más que efectuar el cambio de variable $\tau \mapsto -\tau'$. Ésta es la representación que resultará de utilidad para nosotros.

Para obtener la ecuación de Marchenko, no basta con estudiar soluciones no-causales; es necesario considerar también una solución causal del problema (2.53), (2.57):

$$G_i(x, t) = \delta(t - x) + K_i(x, t), \quad (2.66)$$

donde, para $q(x)$ continua y suficientemente suave, $K_i(x, t)$ está acotada y

$$\text{soporte } [K_i(x, t)] = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq |x| \leq t\}. \quad (2.67)$$

Por causalidad, esta solución debe anularse para $t < 0$, en donde suponemos que efectivamente la fuente se halla en $t = 0$. En este caso, la respuesta $K(0, t)$ es un dato que se conoce; de hecho, digamos que $K(0, t) = r(t)$. En la siguiente sección daremos una interpretación física a esta función. Ver la Figura 2.5.

Sea $F(x, t) = G_i(x, t) - G(x, t)$. Es muy fácil comprobar que $F(x, t)$ satisface (2.53) y (2.57); es posible entonces utilizar la representación (2.65) con $u = F$. Restando la ecuación (2.58) de (2.66) obtenemos:

$$F(x, t) = K_i(x, t) - K(x, t). \quad (2.68)$$

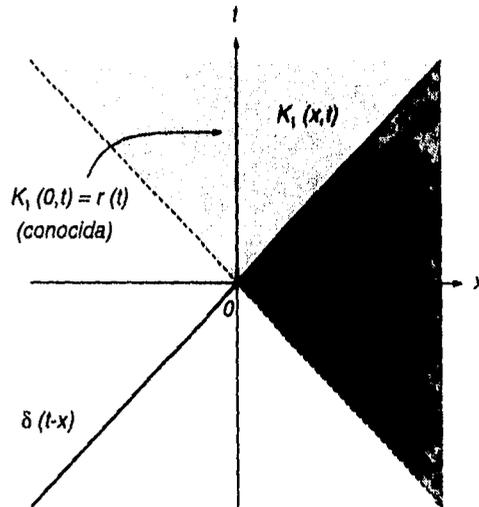


Figura 2.5: Soporte de $G_i(x, t) = \delta(t - x) + K_i(x, t)$ en el plano $x - t$. La zona sombreada es el soporte de $K_i(x, t)$ y la línea gruesa el soporte de $\delta(t - x)$. $K_i(0, t)$ es un dato conocido.

Ahora, por (2.65) podemos escribir $F(x, t)$ como:

$$F(x, t) = F(0, t + x) + \int_{-x}^x K(x, \tau) F(0, t + \tau) d\tau. \quad (2.69)$$

En el dominio $t < x$, sin embargo, podemos simplificar bastante algunos términos de la ecuación anterior. En esta región la función $K_i(x, t)$ es cero, como se puede ver en (2.67). Por lo tanto,

$$F(x, t) = -K(x, t) \text{ para } t < x. \quad (2.70)$$

Por otra parte, un examen somero del soporte de $K(x, t)$, descrito en (2.59), es suficiente para determinar que $K(0, t) = 0$. Tendremos entonces:

$$F(0, t) = K_i(0, t) = r(t); \quad (2.71)$$

esto es, el problema está planteado únicamente en términos de la respuesta causal

de impulso en $x = 0$, que en esta ocasión es $r(t)$. Sustituyendo ahora (2.70) y (2.71) en la ecuación (2.69) obtenemos

$$K(x, t) + r(t + x) + \int_{-t}^x K(x, \tau) r(t + \tau) d\tau = 0, \text{ con } t < x, \quad (2.72)$$

que es la *ecuación integral de Marchenko*. La ecuación (2.52), que obtuvimos en la Sección 2.2, es equivalente a (2.72) con un par de diferencias. Los límites de integración varían de una a otra, pues en el caso de la segunda integramos sobre una región acotada en el plano xt (estamos en el dominio del tiempo), mientras que en (2.52) es necesario integrar sobre todo el espectro de k , de $-\infty$ a ∞ . En la ecuación que hemos obtenido en esta sección se conoce la respuesta causal de impulso sobre la recta $x = 0$; en la ecuación (2.52), lo que se da es el coeficiente de reflexión de la onda dispersada. Esta última diferencia, en especial, nos habla de las diferentes aplicaciones para las que fueron concebidas estas formulaciones, y de las situaciones en las que cada una resulta útil.

A pesar de estas ligeras diferencias a nivel formal, ambas permiten, al resolverse, recuperar el potencial $q(x)$ que da origen a las respuestas medidas. Éste es, finalmente, todo el objeto de plantear estas ecuaciones. Queda, sin embargo, la incógnita de cómo, a partir de la solución de las ecuaciones de Marchenko, se reconstruye en la práctica el potencial $q(x)$. En el Capítulo 5 mostraremos como se resuelve el problema inverso a partir de las soluciones de estas ecuaciones integrales.

Capítulo 3

Formulación de Gelfand–Levitan

3.1 Preliminares

En este capítulo presentaremos una derivación estrictamente en el dominio temporal de las ecuaciones integrales de Gelfand y Levitan. Partiremos – como ya parece haberse hecho costumbre – de la ecuación de la cuerda elásticamente amortiguada, (1.11). En este caso, sin embargo, consideramos el problema sobre la semirecta $x \geq 0$, con la condición (1.17) dada sobre la frontera $x = 0$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x)u = 0, \quad (3.1)$$

$$-u_x(0, t) + hu(0, t) = \delta'(t). \quad (3.2)$$

Será necesario obtener soluciones fundamentales causales y no-causales análogas a (2.66) y (2.58) del capítulo anterior, pero primero hay que justificar de algún modo la existencia de soluciones de dicha forma, pues no sabemos de que manera la condición (3.2) pueda afectar la forma de las soluciones. Para este efecto, consideraremos un ejemplo particular, en el que consideramos la ecuación de onda homogénea,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (3.3)$$

con condiciones de frontera tales que en un determinado límite se aproximen a (3.2). En el Apéndice A se incluyen resultados sobre la convergencia débil de sucesiones de derivadas que nos serán extremadamente útiles. Para aproximar $\delta'(t)$ sencillamente consideramos una sucesión que tenga a $\delta(t)$ como su límite, y la derivamos. Los resultados mencionados aseguran que la sucesión resultante es convergente en el sentido débil, y que su límite es, de hecho, $\delta'(t)$. Por lo tanto, consideramos la siguiente aproximación :

$$\delta'_\epsilon(t) = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{\epsilon} [H(t) - H(t - \epsilon)] \right\}. \quad (3.4)$$

La sucesión con la que aproximamos $\delta(t)$ aparece como (A.20) en el Apéndice A. Ahora, nos es posible escribir las condiciones de frontera como sigue:

$$-u_{\epsilon x}(0, t) + hu_\epsilon(0, t) = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{\epsilon} [H(t) - H(t - \epsilon)] \right\}. \quad (3.5)$$

Hemos usado el subíndice ϵ para denotar que se trata de soluciones exactas del problema para una determinada ϵ . A medida que ϵ tiende a cero, $\delta'_\epsilon(t)$ tiende a $\delta'(t)$, y las soluciones $u_\epsilon(x, t)$ tienden a la solución exacta del problema con condiciones (3.2), $u(x, t)$.

Veremos que eliminar el término $q(x)u$ de la ecuación (3.1) no alterará la forma general de la solución, siempre y cuando $q(x)$ sea suficientemente suave.

Examinaremos este problema únicamente para $t \geq 0$, por lo que introducimos un par de condiciones iniciales,

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad (3.6)$$

y tomamos transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación (3.3), que de este modo queda:

$$s^2 U(x, s) - U_{xx}(x, s) = 0, \quad (3.7)$$

donde hemos usado mayúsculas para denotar transformación de Laplace. Ya que estaremos trabajando continuamente con transformadas de Laplace en las próximas páginas, es conveniente aquí escribir explícitamente algunas transformadas que usaremos:

$$1. \quad \mathcal{L}\{u^{(n)}(t)\} = s^n U(s) - s^{n-1}u(0) - \dots - u^{(n-1)}(0), \quad (3.8)$$

$$2. \quad \mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s-a} \text{ para } s > a, \quad (3.9)$$

$$3. \quad \mathcal{L}\{H(t-c)\} = \frac{e^{-cs}}{s}, \quad (3.10)$$

$$4. \quad \mathcal{L}\{H(t-c)u(t-c)\} = e^{-cs}U(s). \quad (3.11)$$

Para transformar (3.3) hemos usado (3.8) junto con las condiciones iniciales (3.6). La solución general de la ecuación resultante, (3.7), conocida por todos, es

$$U(x, s) = A(s)e^{-sx} + B(s)e^{sx}. \quad (3.12)$$

Sin embargo, debido a que buscamos soluciones acotadas, se debe cumplir que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} U(x, s) = 0, \quad (3.13)$$

por lo que es necesario que $B(s) \equiv 0$. La solución (3.12) queda entonces

$$U(x, s) = A(s)e^{-sx}. \quad (3.14)$$

Falta, evidentemente, determinar $A(s)$; para obtener esta función, tomamos transformada de Laplace a ambos lados de (3.5), y sustituimos la solución (3.14). Retomamos aquí la notación en la que un subíndice ϵ se refiere a una solución correspondiente a una ϵ particular en la condición (3.5):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{-u_{\epsilon x}(0, t) + hu_{\epsilon}(0, t)\} &= -U_{\epsilon x}(0, s) + hU_{\epsilon}(0, s) \\
 &= (s + h) A_{\epsilon}(s) \\
 &= \frac{1}{\epsilon} \mathcal{L} \left\{ \frac{d}{dt} [H(t) - H(t - \epsilon)] \right\} \\
 &= \frac{s}{\epsilon} \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-\epsilon s}}{s} \right), \tag{3.15}
 \end{aligned}$$

donde hemos utilizado (3.8) y (3.10). Por lo tanto,

$$A_{\epsilon}(s) = \frac{(1 - e^{-\epsilon s})}{\epsilon(s + h)}, \tag{3.16}$$

con lo que sólo hace falta invertir (3.14) para obtener la solución $u_{\epsilon}(x, t)$. Invertimos primero (3.16), usando (3.9) y (3.11):

$$a_{\epsilon}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{A_{\epsilon}(s)\} = \frac{1}{\epsilon} [e^{-ht} - H(t - \epsilon) e^{-h(t-\epsilon)}]. \tag{3.17}$$

Con este resultado, la inversión de (3.14) es muy sencilla, de nuevo usando (3.11):

$$\begin{aligned}
 u_{\epsilon}(x, t) &= H(t - x) \frac{[e^{-h(t-x)} - H(t - x - \epsilon) e^{-h(t-x-\epsilon)}]}{\epsilon} \\
 &= e^{-h(t-x)} \frac{[H(t - x) - H(t - x - \epsilon) e^{h\epsilon}]}{\epsilon}. \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

Contamos ya con la solución parcial a nuestro problema. Queda claro que $u_{\epsilon}(x, t)$ es la solución exacta de la ecuación de onda homogénea (3.3) con condiciones iniciales

3.1. PRELIMINARES

(3.6), y condiciones de frontera (3.5). Sin embargo, para obtener una solución que cumpla condiciones de frontera (3.2), es necesario aún tomar el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ de la solución (3.18). Para ϵ muy pequeña, utilizamos un desarrollo de Taylor para escribir:

$$\begin{aligned} u_\epsilon(x, t) &= e^{-h(t-x)} \frac{[H(t-x) - H(t-x-\epsilon)(1+h\epsilon + O(\epsilon^2))]}{\epsilon} \\ &= e^{-h(t-x)} \left\{ \frac{[H(t-x) - H(t-x-\epsilon)]}{\epsilon} \right. \\ &\quad \left. - hH(t-x-\epsilon) + O(\epsilon) \right\}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Llamaremos \mathbf{T}_1 al primer término del lado derecho de (3.19). Las distribuciones inducidas tanto por la función exponencial como por la función escalón son *regulares* (ver Apéndice A), por lo que la acción de la distribución descrita por \mathbf{T}_1 es:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{T}_1, \phi(t) \rangle &= \langle e^{-h(t-x)} \frac{[H(t-x) - H(t-x-\epsilon)]}{\epsilon}, \phi(t) \rangle \\ &= \frac{1}{\epsilon} \int_x^{x+\epsilon} e^{-h(t-x)} \phi(t) dt. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Podemos ahora calcular el límite de $\langle \mathbf{T}_1, \phi \rangle$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$ empleando primero la regla de L'Hôpital para obtener (3.21) y después la de Leibnitz para obtener (3.22):

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle \mathbf{T}_1, \phi(t) \rangle &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_x^{x+\epsilon} e^{-h(t-x)} \phi(t) dt \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \int_x^{x+\epsilon} e^{-h(t-x)} \phi(t) dt \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{-h\epsilon} \phi(x+\epsilon) \quad (3.22)$$

$$= \phi(x), \quad (3.23)$$

con lo que verificamos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{-h(t-x)} \frac{[H(t-x) - H(t-x-\epsilon)]}{\epsilon} = \delta(t-x), \quad (3.24)$$

en el sentido débil, por supuesto. Entonces, tomando finalmente el límite de (3.19) cuando ϵ tiende a cero, tendremos:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_\epsilon(x, t) \\ &= \delta(t-x) - H(t-x) h e^{-h(t-x)}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

que es la solución que satisface las condiciones de frontera (3.2). Esta solución consiste, como esperábamos que ocurriera, de un pulso que se propaga hacia la derecha sobre la característica $t = x$, seguido por una estela que decrece exponencialmente en amplitud mientras se aleja del pulso. Es muy importante, sin embargo, señalar que para que el segundo término de esta solución decrezca exponencialmente y sea acotado, *es necesario que $h > 0$* ; en el caso contrario, este término *crecería* exponencialmente, lo cual no tiene sentido. En la Sección 1.3 hemos dado una interpretación de este problema en términos de la dispersión efectuada sobre una cuerda por un resorte; para que el resorte se comporte como tal, es decir, proporcionando energía al sistema, h debe ser una constante positiva.

Puede resultar curioso para el lector que en la solución (3.25) aparezca una δ cuando en la condición (3.2) se tiene una singularidad de orden mayor, δ' . Esto se explica sin dificultad debido a la presencia en dicha condición del término u_x . Como se ve en el desarrollo anterior, los términos que determinan el comportamiento general de la solución son los de mayor orden. De hecho, ya que el término qu es de orden menor, la forma general de la solución no se verá alterada aún cuando consideremos la ecuación (3.1) con el potencial q distinto de cero. Por lo tanto, mientras la q sea una función suave, la solución general de la ecuación (3.1), con condiciones de frontera (3.2), se puede escribir como

$$u(x, t) = \delta(t-x) - H(t-x)K(t, x), \quad (3.26)$$

en la que q únicamente contribuye a determinar $K(x, t)$, que debe ser una función acotada. Este argumento, aunque intuitivo y no formal, es una de las principales bases sobre las que trabajamos en la siguiente sección para obtener las ecuaciones de Gelfand-Levitan. No hemos presentado una demostración formal del resultado anterior, sino que lo aceptamos sin prueba, dando solamente una noción intuitiva de porqué es cierto en general.

3.2 Soluciones causales y no-causales

Respuesta causal

Como se ha mencionado previamente, la formulación de Gelfand-Levitan se usa con frecuencia en algunas aplicaciones geofísicas. La condición (3.2), cuya introducción caracteriza a esta formulación, se interpreta como un impulso localizado que ocasiona una respuesta del medio bajo estudio. Esta respuesta es un dato conocido. En particular, entonces, consideramos una función $G_i(x, t)$ tal que satisface las siguientes condiciones:

1. $G_i(x, t)$ es solución de (3.1).
2. $G_i(x, t)$ satisface condiciones de frontera impulsivas (3.2) en el extremo $x = 0$,

$$-G_{i,x}(0, t) + hG_i(0, t) = \delta'(t). \quad (3.27)$$
3. $G_i(x, t) = 0$ para $t < 0$ (condiciones iniciales).
4. $G_i(0, t)$ es una cantidad conocida. En algunas aplicaciones, como en sismología, es posible medir esta última.

Ésta es la solución *causal* del problema, ya que $G_i(x, t)$ no siente la influencia de tiempos anteriores a $t_0 = 0$. Esta función será de fundamental importancia para nuestro análisis, como la *respuesta de impulso causal*; nótese que no es una función de Green definida en el sentido convencional. La conveniencia de introducir $G_i(x, t)$ como lo hemos hecho se hará patente cuando la utilizemos para obtener una

representación integral que será básica en la presente derivación de las ecuaciones de Gelfand-Levitan.

Nos referimos a los resultados de la sección anterior para escribir esta solución de la siguiente forma:

$$G_i(x, t) = \delta(t - x) - K_i(x, t). \quad (3.28)$$

Definimos $K_i(x, t)$ de tal modo que sea acotada en la región $0 < x < t$, y cero en cualquier otro lugar. Es decir,

$$\text{soporte } [K_i(x, t)] = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq t\} \quad (3.29)$$

$K_i(x, t)$ aparece como la función $K_1(x, t)$ en el artículo de Gelfand y Levitan [8]. Ver la Figura 3.1.

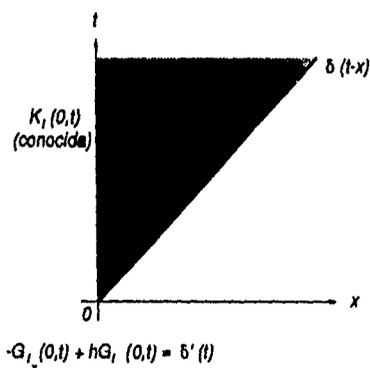


Figura 3.1: Soporte de la función $G_i(x, t) = \delta(t - x) - K_i(x, t)$ en el plano $x - t$, con condiciones iniciales y de frontera indicadas. La zona sombreada es el soporte de $K_i(x, t)$ y la línea gruesa es el soporte de $\delta(t - x)$.

Introducimos ahora una solución arbitraria $u(x, t)$ de (3.1), con condiciones de frontera homogéneas, como en (1.15),

$$-u_x(0, t) + hu(0, t) = 0, \quad (3.30)$$

tal que, además,

$$u_i(x, 0) = 0. \quad (3.31)$$

Con miras a dar una representación integral para esta solución, en términos de $G_i(x, t)$, definimos una nueva función $\hat{G}_i(x, t)$ que sea solución de (3.1), con las condiciones de frontera (1.16),

$$-\hat{G}_{i,x}(0, t) + h\hat{G}_i(0, t) = \delta(t), \quad (3.32)$$

y condiciones iniciales iguales a las anteriores,

$$\hat{G}_i(x, t) = 0 \text{ para } t < 0. \quad (3.33)$$

También esta función debe tener el mismo soporte en el plano que $G_i(x, t)$, que especificamos previamente en (3.29). Podemos comprobar que también $\hat{G}_i(x, t)$ es, de hecho, una solución de (3.1), pues

$$(\hat{G}_i)_{tt} - (\hat{G}_i)_{xx} + q(\hat{G}_i) = (\hat{G}_{i,tt} - \hat{G}_{i,xx} + q\hat{G}_i)_t = 0,$$

ya que \hat{G}_i es, por definición, solución de (3.1). Además, derivando con respecto a t ambos lados de (3.32) observamos que

$$-\hat{G}_{i,x}(0, t) + h\hat{G}_i(0, t) = \delta'(t),$$

lo que coincide exactamente con la condición (3.27) impuesta para $G_i(0, t)$. Está visto que también las condiciones iniciales para estas dos funciones son las mismas, por lo que nos encontramos ahora con la libertad de escribir

$$\hat{G}_i(x, t) = G_i(x, t). \quad (3.34)$$

Utilizando la segunda identidad de Green, es ahora posible valernos de $\hat{G}_i(x, t)$ para dar una representación integral de la solución arbitraria $u(x, t)$ sobre el eje t

en términos de la respuesta causal $G_i(x, t)$. Los detalles de la obtención de esta representación resultan muy intrincados, por lo que referimos al lector interesado en ellos al Apéndice B. Escribimos aquí únicamente el resultado final:

$$u(0, t) = \int_0^\infty G_i(x, t) u(x, 0) dx. \quad (3.35)$$

Sustituimos ahora la forma (3.28) de la función $G_i(x, t)$ en esta ecuación:

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \int_0^\infty [\delta(t-x) - K_i(x, t)] u(x, 0) dx \\ &= u(t, 0) - \int_0^t K_i(x, t) u(x, 0) dx, \end{aligned} \quad (3.36)$$

donde hemos utilizado en (3.36) el hecho de que $K_i(x, t) = 0$ para $t < x$. A partir de estos resultados es posible ya derivar las ecuaciones *no-lineales* de Gelfand-Levitan. Sin embargo, será necesario también considerar una respuesta *no-causal* y una representación análoga a (3.36) relacionada con ésta para finalmente dar como resultado también las ecuaciones *lineales* de Gelfand-Levitan.

Respuesta no-causal

Llamaremos simplemente $G(x, t)$ a la *respuesta de impulso no-causal*, a la que imponemos las siguientes condiciones:

1. $G(x, t)$ es solución de (3.1).
2. $G(x, t)$ satisface condiciones de frontera (1.15) sobre $x = 0$,

$$-G_x(x, t) + hG(x, t) = 0, \quad (3.37)$$

y también

$$G(0, t) = 2\delta(t). \quad (3.38)$$

3. Es fácil comprobar que $G(x, -t)$ satisface también (3.1), (1.15), y (3.38), lo que nos permite escribir

$$G(x, t) = G(x, -t); \quad (3.39)$$

esto es, $G(x, t)$ es una función par de t .

En este caso se pueden modificar los resultados de la sección anterior para tomar en cuenta no sólo que el dominio es ahora el semiplano $x \geq 0$, sino también la paridad en t de la respuesta no-causal. Se puede entonces comprobar fácilmente que la forma análoga a (3.28) es, para esta solución,

$$G(x, t) = \delta(t + x) + \delta(t - x) + K_j(x, t), \quad (3.40)$$

donde $K_j(x, t)$ coincide con la función $K(x, t)$ en el trabajo de Gelfand y Levitan. Como sucedió en el caso causal con $K_c(x, t)$, veremos aquí que $K_j(x, t)$ tiene un soporte en el plano $x - t$, dado por

$$\text{soporte } [K_j(x, t)] = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq |t| \leq x\}. \quad (3.41)$$

Además, $K_j(x, t)$ es acotada en esta región, como en el caso anterior. Nótese también que la condición (3.39) implica también que $K_j(x, t)$ es una función par de t . Ver la Figura 3.2.

Como hicimos antes, tomamos una solución $u(x, t)$ del problema (3.1), (3.30), pero ahora pedimos de manera explícita que se trate de una función par de t ; como consecuencia inmediata de este hecho se sigue que $u(x, t)$ también satisface la condición (3.31). En el caso de la respuesta causal no tendría sentido pedir que $u(x, t)$ fuera par en t , pues el dominio se restringía al cuadrante $x \geq 0, t \geq 0$. Sin embargo, en ambos casos tratamos con soluciones de (3.1), (3.30), con la condición adicional (3.31).

La representación análoga a (3.36) se obtiene en este caso formando la convolución de $\frac{1}{2}G(x, t)$ en t con $u(0, t)$, recordando (3.37) y (3.38), y es:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, t - \tau) u(0, \tau) d\tau. \quad (3.42)$$

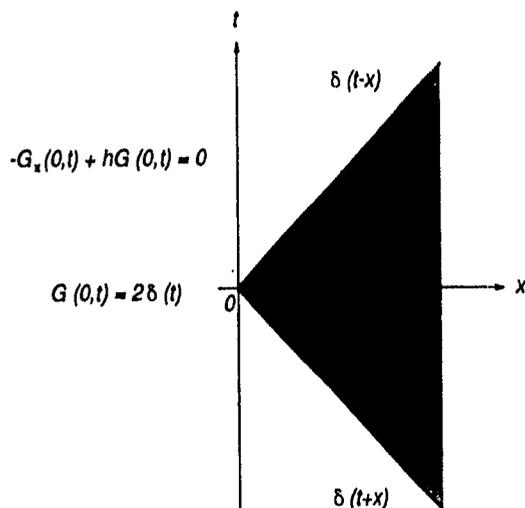


Figura 3.2: Soporte de $G(x, t) = \delta(t+x) + \delta(t-x) - K_j(x, t)$ en el plano $x-t$, con condiciones de frontera indicadas. La zona sombreada es el soporte de $K_j(x, t)$ y las líneas gruesas el soporte de $\delta(t \pm x)$.

Falta ahora sustituir (3.40) en esta última y poner $t = 0$, para obtener

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\tau-x) + \delta(\tau+x) + K_j(x, -\tau)] u(0, \tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \{u(0, x) + u(0, -x) + \int_{-\infty}^{\infty} K_j(x, -\tau) u(0, \tau) d\tau\} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Recordemos, sin embargo, que tanto $u(x, t)$ como $K_j(x, t)$ son funciones pares de t , y que además podemos restringir el intervalo de integración en (3.43) utilizando (3.41). Tenemos entonces la forma final de la representación (3.42), que es completamente análoga a la representación (3.36) del caso causal:

$$u(x, 0) = u(0, x) + \int_0^x K_j(x, \tau) u(0, \tau) d\tau. \quad (3.44)$$

Teniendo ya (3.44) y (3.36), la obtención de las formas lineales y no-lineales de las ecuaciones de Gelfand-Levitan procede de manera muy similar para cada caso.

Por eso es que hemos preferido esperar a tener ambas representaciones integrales para finalmente dar estos resultados.

3.3 Ecuaciones lineales y no-lineales de Gelfand-Levitan

Comenzamos por definir una extensión par de la respuesta de impulso causal $G_i(x, t)$ al semiplano $x > 0$, $-\infty < t < \infty$, como sigue:

$$F(x, t) = G_i(x, t) + G_i(x, -t). \quad (3.45)$$

Es evidente, por construcción, que $F(x, t)$ es solución de la ecuación (3.1). Buscamos también que satisfaga las condiciones de frontera (3.30), pero esto hay que revisarlo con más cuidado. Sabemos que $G_i(x, t)$ satisface condiciones de frontera impulsivas (3.27) en $x = 0$. Escribimos, entonces,

$$\begin{aligned} F_x(0, t) + hF(0, t) &= -[G_{i_x}(0, t) + G_{i_x}(0, -t)] + h[G_i(0, t) \\ &\quad + G_i(0, -t)] = [-G_{i_x}(0, t) + hG_i(0, t)] \\ &\quad + [-G_{i_x}(0, -t) + hG_i(0, -t)] \\ &= \delta'(t) + \delta'(-t). \end{aligned}$$

Haciendo referencia a la definición de la distribución delta en el Apéndice A, no resulta difícil establecer que se puede entender a $\delta(t)$ como un funcional par, por lo que su derivada, $\delta'(t)$, sería una distribución impar. Sea $\phi(t)$ una función de prueba. Usando la definición (A.10) de este apéndice, encontramos que

$$\langle \delta(t), \phi(t) \rangle = \langle \delta(-t), \phi(t) \rangle.$$

Por lo tanto, tenemos que $\delta'(t) + \delta'(-t) = \delta'(t) - \delta'(t) = 0$ y entonces en efecto $F(x, t)$ está sujeta a condiciones de frontera (3.2). Lo que es más, podemos utilizar la forma (3.28) de $G_i(x, t)$ para dar el valor de $F(x, t)$ sobre el eje $x = 0$:

$$\begin{aligned}
 F(0, t) &= \delta(t) - K_i(0, t) + \delta(-t) - K_i(0, -t) \\
 &= 2\delta(t) - (K_i(0, t) + K_i(0, -t)) \quad (3.46)
 \end{aligned}$$

$$= 2\delta(t) - K_i(0, |t|), \quad (3.47)$$

donde hemos utilizado la paridad de $\delta(t)$ en (3.46). Para establecer la igualdad (3.47) basta únicamente notar que, como se vio en la Figura 3.1, $K_i(x, t) = 0$ para $t < 0$. Es claro también para este punto que

$$\text{soporte } [F(x, t)] = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq |t| \leq x\}, \quad (3.48)$$

y que $F(x, t)$ es, en efecto, una función par de t . Ver Figura 3.3.

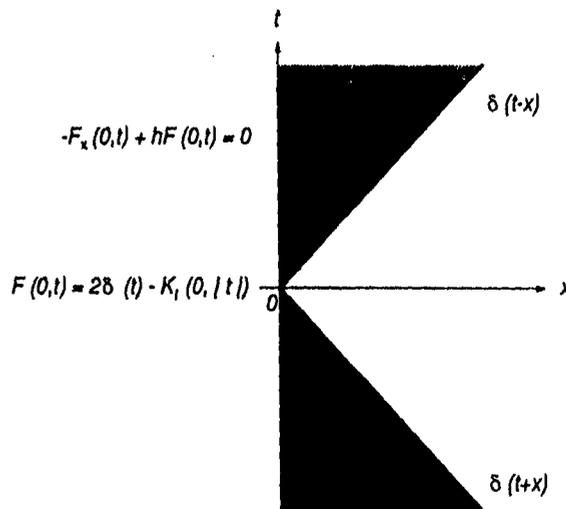


Figura 3.3: Soporte de $F(x, t) = G_i(x, t) + G_i(x, -t)$ en el plano $x-t$, con condiciones de frontera indicadas. La zona sombreada es el soporte de $K_i(x, t)$ y las líneas gruesas el soporte de $\delta(t \pm x)$.

A continuación construimos una variante de la solución $F(x, t)$ con dependencia sobre un parámetro T , y tal que sea par en t :

$$\hat{F}(x, t; T) = \frac{1}{2} [F(x, t - T) + F(x, t + T)]. \quad (3.49)$$

La paridad con respecto a t de $\hat{F}(x, t; T)$ es heredada de la propiedad correspondiente de la $F(x, t)$ a partir de la cual está definida:

$$\begin{aligned} \hat{F}(x, -t; T) &= \frac{1}{2} [F(x, -t - T) + F(x, -t + T)] \\ &= \frac{1}{2} [F(x, t + T) + F(x, t - T)] = \hat{F}(x, t; T). \end{aligned}$$

Es claro que $2\hat{F}(x, t; T)$ es la superposición de una $F(x, t)$ adelantada por un tiempo T y otra $F(x, t)$ retrasada el mismo tiempo T . Por esto mismo tenemos que $\hat{F}(x, t; T)$ es una solución par en t de (3.1), con condiciones de frontera (3.30), al igual que $F(x, t)$. Al ser par en t , afirmamos también que $\hat{F}_t(x, 0; T) = 0$. Veremos entonces que $\hat{F}(x, t; T)$ cumple todas las condiciones necesarias para que podamos emplear la representación integral (3.36) con $u(x, t) = \hat{F}(x, t; T)$.

Será necesario calcular $\hat{F}(0, t; T)$ para este efecto:

$$\begin{aligned} \hat{F}(0, t; T) &= \frac{1}{2} [F(0, t - T) + F(0, t + T)] \\ &= \delta(t - T) + \delta(t + T) \\ &\quad - \frac{1}{2} [K_i(0, |t - T|) + K_i(0, |t + T|)] \quad (3.50) \\ &= \delta(t - T) + \delta(t + T) + f(t, T), \quad (3.51) \end{aligned}$$

con

$$f(t, T) = -\frac{1}{2} [K_i(0, |t - T|) + K_i(0, |t + T|)]. \quad (3.52)$$

Habrá que notar que para obtener (3.50) hemos utilizado el valor de frontera de $F(0, t)$ dado por (3.47).

De la mayor importancia es el hecho de que $f(t, T)$ está dada únicamente en términos de la respuesta de impulso causal $K_i(0, t)$ medida en la frontera, que es la cantidad que consideramos como conocida en el planteamiento del problema. En problemas de sismología, como el que hemos descrito en la Sección 1.1, se diseñan experimentos precisamente para medir esta cantidad. Gelfand y Levitan consideran en su derivación la *función espectral* $\rho(\lambda)$ como un dato conocido.

Finalmente sustituimos (3.52) y (3.51) en la ecuación (3.36), usando, como ya hemos mencionado, $u(x, t) = \hat{F}(x, t; T)$ para la región $0 < t < T$:

$$\begin{aligned}\hat{F}(0, t; T) &= \delta(t - T) + \delta(t + T) + f(t, T) \\ &= \frac{1}{2} [F(t, -T) + F(t, T)] \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^t (F(x, -T) + F(x, T)) K_i(x, t) dx \\ &= F(t, T) - \int_0^t K_i(x, t) F(x, T) dx,\end{aligned}\tag{3.53}$$

ya que hemos visto que $F(x, t)$ es una función par de t . Por otra parte, tenemos que $\delta(t \pm T) = 0$ en este caso, ya que hemos especificado que $t < T$, y en particular, $t \neq T$. Es posible entonces escribir (3.53) como sigue:

$$f(t, T) = F(t, T) - \int_0^t K_i(x, t) F(x, T) dx.\tag{3.54}$$

Examinemos ahora $F(t, T)$ y $F(x, T)$:

$$F(t, T) = \delta(t + T) + \delta(t - T) - K_i(t, T) - K_i(t, -T),\tag{3.55}$$

$$F(x, T) = \delta(x + T) + \delta(x - T) - K_i(x, T) - K_i(x, -T).\tag{3.56}$$

Resulta de gran utilidad confirmar que en la región $0 < t < T$ varios de los términos de estas dos ecuaciones son idénticamente cero. Por ejemplo, ya hemos visto que

$\delta(t \pm T) = 0$ para $0 < t < T$, lo que elimina los dos primeros términos de (3.55). Además, $\delta(x + T) = 0$, ya que $x > 0$ y $T > 0$, y $\delta(x - T) = 0$, debido a que $x < T$. Con esto anulamos ambas funciones delta de la ecuación (3.56). El soporte de $K_i(x, t)$ está indicado en (3.29); veremos en esta forma que $K_i(x, t) = 0$ para $t < 0$. Como $T > 0$, tendremos que $K_i(t, -T) = K_i(x, -T) = 0$.

Como hemos venido haciendo a lo largo de todo nuestro desarrollo, empleamos una vez más argumentos de causalidad para obtener los resultados de interés. En ambas ecuaciones, los términos que quedan son distintos de cero, como se puede ver fácilmente refiriéndonos de nuevo a (3.29) y tomando en cuenta otra vez que $t < T$. Como paso final, sustituimos estos términos restantes de (3.55) y (3.56) en la ecuación (3.54):

$$f(t, T) = -K_i(t, T) + \int_0^t K_i(x, t)K_i(x, T)dx, \text{ con } 0 < t < T. \quad (3.57)$$

Ésta es la *ecuación integral no-lineal de Gelfand-Levitan*. Obtener la ecuación lineal será ahora menos complicado; usaremos ahora la representación (3.44). Las condiciones para aplicar esta representación son las mismas que las que usamos para (3.36), por lo que podemos de nueva cuenta definir $u(x, t) = \hat{F}(x, t; T)$. En este caso el dominio que consideramos es $x > T > 0$. Para emplear (3.44), es necesario que calculemos $\hat{F}(x, 0; T)$:

$$\begin{aligned} \hat{F}(x, 0; T) &= \frac{1}{2} [F(x, -T) + F(x, T)] = F(x, T) \\ &= \delta(T - x) + \delta(T + x) \\ &\quad - K_i(x, T) - K_i(x, -T) = 0. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Hemos utilizado argumentos de causalidad en función del dominio $x > T > 0$ del mismo modo en que lo hicimos para cancelar términos en las ecuaciones (3.55) y (3.56). En efecto, los cuatro términos en la segunda línea de (3.58) se anulan de esta manera. No repetimos los detalles, pues es muy sencillo que el lector los revise en el caso anterior. Hacemos exactamente lo mismo con las otras expresiones que se verán involucradas al usar (3.44):

$$\begin{aligned}\hat{F}(0, t; T) &= \delta(t - T) + \delta(t + T) + f(t, T) = f(t, T), \\ \hat{F}(0, x; T) &= \delta(x - T) + \delta(x + T) + f(x, T) = f(x, T).\end{aligned}$$

Sustituyendo ahora estos resultados en la representación (3.44) obtenemos la *ecuación integral lineal de Gelfand-Levitan*:

$$f(x, T) + K_j(x, T) + \int_0^x K_j(x, t) f(t, T) dt = 0, \text{ con } 0 < T < x. \quad (3.59)$$

Dependiendo del problema particular que se estudie, se recurre a la forma más adecuada de las ecuaciones de Gelfand-Levitan. Tanto la forma lineal como la no-lineal incorporan las mismas cantidades, pero los métodos que se utilizan para resolverlas pueden variar; la solución de estas ecuaciones para problemas específicos, sin embargo, no queda dentro del alcance de este trabajo.

Capítulo 4

Ecuaciones de Gopinath–Sondhi

4.1 Planteamiento del problema

En la Sección 1.2, a través de múltiples manipulaciones, transformamos la ecuación de Webster, (1.5), en la ecuación de una cuerda elásticamente amortiguada, (1.11). Se puede efectuar una transformación alternativa de la ecuación de Webster, que da como resultado un sistema de dos ecuaciones equivalente a (1.11). Antes de continuar, repetimos aquí la ecuación de Webster,

$$\rho c \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho c \frac{\partial U}{\partial x} \right) = 0, \quad (4.1)$$

con la misma interpretación de las variables involucradas que en la Sección 1.2. Definimos ahora un par de nuevas variables, η y ξ , como sigue:

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= U_i(x, t), \\ \xi(x, t) &= \rho c U_x. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Sustituyendo éstas en la ecuación (4.1) obtenemos

$$\rho c \eta_t - \xi_x = \rho c U_{tt} - (\rho c U_x)_x = 0 \text{ para } x > 0; \quad (4.3)$$

por otra parte, usando únicamente las relaciones (4.2) encontramos que

$$\begin{aligned} \rho c \eta_x - \xi_t &= \rho c U_{tx} - (\rho c U_x)_t \\ &= \rho c U_{xt} - \rho c U_{xt} = 0 \text{ para } x > 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

debido a que $(\rho c) = (\rho c)(x)$. Este par es equivalente a aquél tratado por Gopinath y Sondhi. Pongamos $A(x) = -(\rho c)(x)$, y $p = \eta$, $u = \xi$; de este modo las ecuaciones (4.3) y (4.4) se escriben, respectivamente,

$$A(x)p_t(x, t) + u_x(x, t) = 0, \text{ para } x > 0, \quad (4.5)$$

$$A(x)p_x(x, t) + u_t(x, t) = 0, \text{ para } x > 0, \quad (4.6)$$

que coinciden exactamente con las formas que manejan en su trabajo Gopinath y Sondhi.

Gopinath y Sondhi introdujeron la ecuación integral que ahora lleva su nombre al estudiar problemas inversos que fueran de utilidad en el desarrollo de tecnologías de síntesis de voz. La forma del tracto vocal, que varía con el tiempo durante el habla, juega un papel fundamental en los estudios de la voz. El método que han empleado Gopinath y Sondhi consiste en intentar estimar la forma de este tracto vocal a partir de sus propiedades acústicas. En el estudio de la propagación de ondas acústicas, se supone que el tracto vocal se extiende a lo largo de una recta y es estacionario. Aunque la forma de este tracto cambia con el tiempo, esta suposición es válida debido a que los movimientos son muy lentos en la escala de tiempo de los fenómenos acústicos de interés. Por lo tanto, el modelo más sencillo describe al tracto vocal como un tubo estacionario, de área transversal variable, con paredes rígidas, que contiene un gas perfecto. En el sistema (4.5), (4.6), x representa la posición sobre el tracto vocal, con los labios en $x = 0$; p denota la presión y u el flujo volumétrico a lo largo del tracto. La función que nos interesa recuperar, $A(x)$, es el área de la sección transversal en la posición x . Una descripción más completa

de este y otros modelos de producción de la voz se puede encontrar en el artículo de Sondhi [14].

4.2 Obtención de las ecuaciones de Gopinath-Sondhi

Respuesta causal

Se plantea el problema inverso en términos de $A(x)$, para cuya recuperación formularemos una ecuación integral, relacionada a la ecuación lineal de Gelfand y Levitan, obtenida en el Capítulo 3. Como en aquél capítulo, nos restringimos a tratar la semirecta $x > 0$. Normalizamos la función $A(x)$ de manera que $A(0) = 1$. Para la obtención de las ecuaciones integrales de Gopinath y Sondhi partimos de un par de funciones, $p(x, t)$ y $u(x, t)$, tales que:

1. Son soluciones del sistema (4.5), (4.6) .
2. Se conoce la respuesta causal de impulso en $x = 0$. Más específicamente, se conoce por medición la función $h(t)$, donde

$$p(0, t) = \delta(t) + h(t). \quad (4.7)$$

Esta cantidad, $h(t)$, se puede obtener, por ejemplo, midiendo la presión detectada por un micrófono colocado justo en frente de los labios.

3. p y u satisfacen condiciones de frontera

$$u(0, t) = \delta(t), \quad (4.8)$$

4. y también tienen la propiedad

$$\begin{aligned} p(x, t) &= 0, \\ u(x, t) &= 0, \text{ para } t < 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Consideramos ahora un par de funciones $p = P(x, t)$ y $u = U(x, t)$ que resuelven el sistema (4.5), (4.6), y cuya derivada temporal es exactamente la respuesta causal de impulso; esto es, P_t y U_t satisfacen las condiciones (4.7) y (4.8) respectivamente. El soporte de $P(x, t)$ y $U(x, t)$ se define como

$$\text{soporte } [P_t(x, t)] = \text{soporte } [U_t(x, t)] = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \geq x\}. \quad (4.10)$$

Sobre las funciones mismas imponemos condiciones de frontera

$$U(0, t) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn} t, \quad (4.11)$$

y condiciones iniciales

$$\begin{aligned} P(x, t) &= 0, \\ U(x, t) &= -\frac{1}{2}, \text{ para } t < 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Por lo tanto, $p = P_t(x, t)$ y $u = U_t(x, t)$ conforman la respuesta de impulso definida por (4.5) - (4.9). Es fácil confirmar que se trata de una solución de (4.5), (4.6), pues

$$A(x)(P_t)_t + (G_x)_t = [A(x)P_t + G_x]_t = 0;$$

del mismo modo se establece que P_t y U_t satisfacen (4.6). En cuanto a las condiciones iniciales descritas por (4.9), se ve de (4.12) que $P_t(x, t) = 0$ y $U_t(x, t) = -(\frac{1}{2})_t = 0$, para $t < 0$. Las condiciones (4.7) y (4.8) se satisfacen por construcción. De especial interés resultarán en adelante las soluciones tales que satisfagan la condición de frontera homogénea

$$u(0, t) = 0. \quad (4.13)$$

Buscamos que la obtención de la ecuación integral de Gopinath y Sondhi se lleve a cabo de manera muy similar a las que ya hemos presentado de las ecuaciones de

Gelfand-Levitan y Marchenko (la derivación en el dominio temporal). De este modo esperamos exhibir una cierta consistencia entre estas formulaciones. De manera muy parecida a como procedimos en la Sección 3.2, definimos un par de funciones

$$\begin{aligned} p &= \hat{P}(x, t) = P(x, t) - P(x, -t), \\ u &= \hat{U}(x, t) = U(x, t) + U(x, -t), \end{aligned} \quad (4.14)$$

tales que son, evidentemente, soluciones de (4.5), (4.6). Además, observamos que $\hat{U}(0, t)$ satisface la condición (4.13), ya que, usando (4.11),

$$\begin{aligned} \hat{U}(0, t) &= U(0, t) + U(0, -t) \\ &= \frac{1}{2} [\operatorname{sgn}(t) + \operatorname{sgn}(-t)] = 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Por otra parte, el valor de frontera de $\hat{P}(0, t)$ está dado por

$$\hat{P}(0, t) = P(0, t) - P(0, -t), \quad (4.16)$$

que da como resultado, derivando con respecto a t y usando el hecho de que P y U satisfacen (4.7), (4.8), respectivamente,

$$\hat{P}_t(0, t) = P_t(0, t) - P_t(0, -t) = 2\delta(t) + h(|t|). \quad (4.17)$$

El sistema (4.5), (4.6) admite soluciones constantes, $p = \alpha_1$, $u = \alpha_2$. Para $t < x$, según se ve en (4.10), se requiere que $P_t(x, t) = U_t(x, t) = 0$. Esto implicaría que en esta región del plano tanto P como U son funciones únicamente de x . Suponiendo que lo son, y sustituyendo en el sistema (4.5), (4.6), del cual deben ser solución, se ve de inmediato que, efectivamente, se trata de constantes. Si exigimos continuidad sobre toda esta área, y recordamos las condiciones (4.12), encontramos que $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$; esto es,

$$\begin{aligned} P(x, t) &= 0, \\ U(x, t) &= -\frac{1}{2}, \text{ para } t < x, \end{aligned} \quad (4.18)$$

de modo que

$$\hat{U}(x, t) = -1, \text{ para } |t| < x, \quad (4.19)$$

como se ilustra en la Figura 4.1

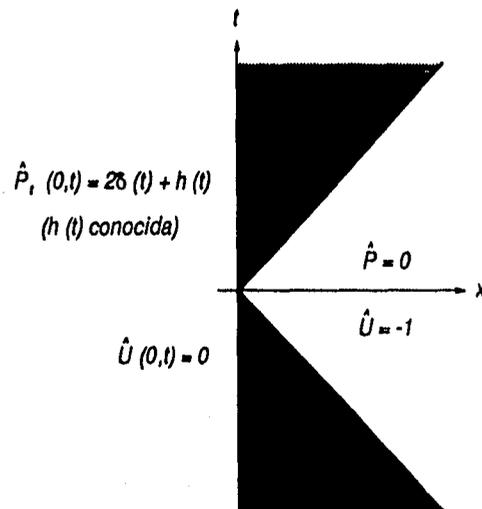


Figura 4.1: Soporte de las soluciones $\hat{P}(x, t)$ y $\hat{U}(x, t)$, con condiciones de frontera indicadas. Cuando $|t| < x$, las soluciones son constantes.

Concluimos la descripción de la respuesta causal de impulso. Aunque evidentemente la analogía no es exacta, la introducción en este punto de una respuesta no-causal resultará familiar para el lector del capítulo sobre las ecuaciones de Gelfand-Levitan.

Respuesta no-causal

Denotamos la solución no-causal del problema (4.5), (4.6), con condición de frontera (4.13) sobre $x = 0$, por $p = J(x, t)$, $u = K(x, t)$, tales que

$$J(0, t) = -\text{sgn}(t) \quad (4.20)$$

$$K(0, t) = 0. \quad (4.21)$$

Como hemos hecho habitualmente hasta ahora, escribimos el soporte de estas funciones:

$$\text{soporte } [K(x, t)] = \{(x, t) \in \mathfrak{R}^2 \mid |t| \leq x\}. \quad (4.22)$$

Fuera de esta región, J es una constante, aunque no cero. Precisamente en $|t| > x$, por consistencia con (4.20) y (4.21) respectivamente, pedimos

$$J(x, t) = -\text{sgn}(t), \text{ para } |t| > x, \quad (4.23)$$

$$K(x, t) = 0, \text{ para } |t| > x, \quad (4.24)$$

con lo que será posible dar valores sobre $x = 0$ de las parciales con respecto a t de J y K . Estos valores serán necesarios en el último paso de nuestro desarrollo.

Es oportuno ahora recordar que se puede hablar de $\delta(t)$ como un funcional par, esto es, $\delta(t) = \delta(-t)$. En el Apéndice A hemos visto que la derivada de una función escalón de Heaviside es precisamente la función delta. Por lo tanto, si expresamos la función signo en términos de funciones de Heaviside, reescribiremos (4.20) como

$$J(0, t) = -[H(t) - H(-t)],$$

y al derivar esta ecuación obtendremos

$$J_t(0, t) = -\delta(-t) - \delta(t) = -2\delta(t). \quad (4.25)$$

Por otra parte, es evidente, a partir de (4.21), que

$$K_t(0, t) = 0. \quad (4.26)$$

Ver la Figura 4.2.

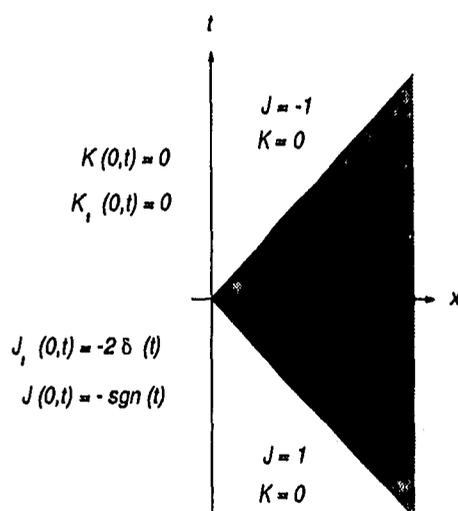


Figura 4.2: Soporte de las soluciones $J(x, t)$ y $K(x, t)$, con condiciones de frontera indicadas. Cuando $x < |t|$, las soluciones son constantes.

Las funciones que integran la solución no-causal, J y K , permiten establecer, en la región $|t| < x$, una representación integral para cualquier solución de (4.5), (4.6) que además satisfaga la condición homogénea (4.13), y para la cual $p(0, t)$ sea conocida:

$$-u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} K(x, \tau) p_\tau(0, t - \tau) d\tau, \quad \text{para } |t| < x. \quad (4.27)$$

Hemos ya establecido que $p = \hat{P}(x, t)$ y $u = \hat{U}(x, t)$ conforman una solución del

problema (4.5), (4.6) con condición (4.13). Sustituyendo entonces estas soluciones en la anterior integral de convolución, obtenemos

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^{\infty} K(x, \tau) [\delta(t - \tau) + \frac{1}{2} h(|t - \tau|)] d\tau \\ &= K(x, t) + \frac{1}{2} \int_{-x}^x h(|t - \tau|) K(x, \tau) d\tau, \quad \text{para } |t| < x, \end{aligned} \quad (4.28)$$

donde usamos (4.19) para escribir \hat{U} en el dominio $|t| < x$, y la condición (4.17) para dar \hat{P} sobre el eje t . La ecuación (4.28) es la *ecuación integral de Gopinath-Sondhi*.

Capítulo 5

Solución del problema inverso

En los capítulos anteriores hemos obtenido algunas ecuaciones integrales que nos permitirán resolver finalmente – al menos en principio – problemas inversos del tipo descrito en la introducción, aunque la manera en que esto se logrará no está aún clara. A partir de n soluciones de las ecuaciones integrales de Marchenko, Gelfand-Levitan y Gopinath-Sondhi se pueden recuperar el potencial $q(x)$ de la ecuación de la cuerda elásticamente amortiguada, (1.11), en el caso de las dos primeras, y la función $A(x)$ de las ecuaciones (4.5), (4.6), en el caso último, de diversas maneras. En este capítulo atacaremos precisamente este problema, con lo que completamos una descripción de la solución del problema inverso. En particular, nos interesa reconstruir el potencial $q(x)$ a partir de las respuestas de impulso causales y no-causales que introdujimos en los primeros dos capítulos, y la función $A(x)$ a partir de las soluciones no-causales J y K del sistema (4.5), (4.6).

El método que utilizaremos para realizar estas reconstrucciones es el de *propagación de singularidades*. Es conocido el hecho de que las discontinuidades y singularidades de soluciones de ecuaciones hiperbólicas lineales se propagan a lo largo de las curvas características de las ecuaciones. A esto se debe esencialmente el que el comportamiento de soluciones de dichas ecuaciones en la vecindad de una característica a lo largo de la cual ocurren discontinuidades u otras variaciones rápidas de la solución se pueda estudiar por separado. Los resultados obtenidos de esta manera no rinden, en general, una descripción completa de la solución, pero si pueden des-

cribirla en una región de interés, como lo puede ser un frente de onda. Recurriremos precisamente a ésta última opción en nuestro desarrollo.

5.1 Recuperación del potencial $q(x)$

Repetimos, una vez más, la ecuación de la cuerda elásticamente amortiguada por un potencial $q(x)$, donde de nuevo suponemos que este potencial es suficientemente suave :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x)u = 0, \quad (5.1)$$

que tiene como solución causal a la función $G_i(x, t)$, que se escribe, de acuerdo con (3.28), del siguiente modo:

$$G_i(x, t) = \delta(t - x) - K_i(x, t). \quad (5.2)$$

Se ha visto ya que, al resolver las ecuaciones de Gelfand-Levitan, es posible obtener $K_i(x, t)$ contando de antemano únicamente con la respuesta sobre la frontera $x = 0$, $K_i(0, t)$. En el caso de la formulación de Marchenko en el dominio temporal contamos exactamente con la misma situación, con una representación causal completamente análoga a (5.2), donde sólo cambia el signo que antecede a $K_i(x, t)$. Por lo tanto, el resultado que obtendremos a continuación se obtiene de exactamente la misma manera para ambas formulaciones.

Estudiaremos el comportamiento de una solución de (5.1) en las proximidades de un frente de onda que, en su forma más general, se denotaría por $\psi(x, t) = 0$, pero que aquí escribimos de manera muy conveniente como $\psi(x, t) = t - \varphi(x) = 0$. De esta forma, $\varphi(x)$ es una función de fase, y $\varphi(x) = cte.$ representa la posición de los frentes de onda para tiempos fijos t . Se presupone que a lo largo de estas características ocurren las singularidades que nos interesa estudiar. Motivamos de este modo la proposición de una solución de (5.1) de la siguiente forma:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) g_n[t - \varphi(x)], \quad (5.3)$$

donde las funciones g_n son conocidas *a priori* y $a_n(x)$ son simplemente coeficientes. Por conveniencia pediremos que

$$a_n(x) = 0 \text{ para } n < 0. \quad (5.4)$$

Además, la serie (5.3) es asintótica cuando $t \rightarrow \varphi(x)$; esto es, aún tomando pocos términos de la serie, ésta describe el comportamiento de la solución $u(x, t)$ de manera adecuada en la vecindad de la característica $t = \varphi(x)$.

Es necesario que la sucesión $\{g_n\}$ sea tal que se cumpla la siguiente condición:

$$g'_n(z) = g_{n-1}(z), \quad (5.5)$$

por razones que resultarán evidentes dentro de poco. La sucesión que emplearemos es la siguiente:

$$g_n(z) = \begin{cases} \delta^{(-n)}(z), & \text{para } n \leq 0 \\ \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} H(z), & \text{para } n > 0, \end{cases} \quad (5.6)$$

lo que representa esencialmente una serie de potencias apenas detrás del frente de onda, con primer término en forma de impulso, pues $g_0 = \delta$. La posición del frente de onda queda determinada evidentemente por $\varphi(x)$. Falta revisar si en efecto las funciones g_n satisfacen la condición (5.5). Será necesario para este efecto utilizar un resultado del Apéndice A, que señala que $x\delta(x) = 0$ en el sentido distribucional:

$$\begin{aligned} g'_n(z) &= \frac{1}{(n-1)!} [(n-1)z^{n-2}H(z) + z^{n-1}\delta(z)] \\ &= \frac{z^{n-2}}{(n-2)!} H(z) = g_{n-1}(z) \text{ para } n \geq 2. \end{aligned}$$

En los demás casos el resultado se obtiene de manera muy sencilla.

Proseguimos sustituyendo la expresión (5.3) en la ecuación (5.1). Para esto, primero habremos de calcular las derivadas involucradas, utilizando de manera extensa precisamente la propiedad (5.5), así como el hecho de que $a_n(x) = 0$ para $n < 0$. Omitimos, por comodidad al escribir, las dependencias tanto de a_n como de g_n :

$$u_{tt}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_{n-2}, \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} u_x(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} [a_n' g_n - a_n g_n' \varphi'] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [a_n' g_n - a_n g_{n-1} \varphi'], \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} [a_n'' g_n - a_n' g_n' \varphi' - a_n' g_{n-1} \varphi' - a_n (g_{n-1} \varphi'' - g_{n-1}' (\varphi')^2)] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\varphi')^2 g_{n-2} - \sum_{n=-1}^{\infty} (2a_{n-1}' \varphi' + a_{n-1} \varphi'') g_{n-2} + \sum_{n=-2}^{\infty} a_{n-2}'' g_{n-2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [a_n (\varphi')^2 - 2a_{n-1}' \varphi' - a_{n-1} \varphi'' + a_{n-2}'']. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Ahora realizamos la sustitución antes mencionada, y agrupamos según los coeficientes a_n :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{ [1 - (\varphi')^2] a_n + 2a_{n-1}' \varphi' + a_{n-1} \varphi'' - a_{n-2}'' + a_{n-2} \} g_{n-2} = 0. \quad (5.10)$$

Para que la anterior igualdad se mantenga es necesario que los coeficientes sucesivos de g_{n-2} sean todos cero. Comenzaremos por $n = 0$, lo que implica

$$[1 - (\varphi')^2] a_0 = 0, \quad (5.11)$$

lo que se debe, nuevamente, a la convención (5.4), pues $a_{-1} = a_{-2} = 0$. Descartamos la posibilidad de que $a_0 = 0$, pues pediremos que se trate del primer término de la serie; por lo tanto,

$$\varphi'(x) = \pm 1, \quad (5.12)$$

lo que indica que los frentes de onda $t = \varphi(x)$ viajan con una rapidez característica de ± 1 . También resulta interesante señalar que la ecuación (5.12) no es sino una *ecuación eiconal* en una dimensión espacial. Debido a esta aparición de la ecuación eiconal se asocia comúnmente este método con la teoría de *óptica geométrica*. Estudiaremos ahora el caso $\varphi'(x) = +1$. Tenemos, pues, $\varphi(x) = x + \alpha$, donde α es una constante. Colocaremos nuestro eje t de modo que $\varphi(0) = 0$. Se deduce que $\alpha = 0$ y

$$\varphi(x) = x, \quad (5.13)$$

por lo que se ve también que

$$\varphi''(x) = 0. \quad (5.14)$$

Continuamos con el siguiente término, poniendo $n = 1$, y utilizando (5.13) y (5.14) obtenemos

$$2\varphi'(x)a_0'(x) = 2a_0'(x) = 0, \quad (5.15)$$

de donde se deduce que $a_0(x)$ es una constante, y por lo tanto $a_0''(x) = 0$. Empleando estos últimos resultados al tomar $n = 2$, se ve que

$$2a_1'(x) + q(x)a_0 = 0. \quad (5.16)$$

Estas últimas dos ecuaciones, (5.15) y (5.16), se conocen como *ecuaciones de transporte*, debido a que, considerando que $\varphi(x)$ es un término de fase y $a_n(x)$ son términos de amplitud, describen la variación de los términos de amplitud a lo largo de las características determinadas a partir de la ecuación eiconal, (5.12).

Mostraremos ahora como se pueden aplicar estas ecuaciones de transporte en conjunto con la solución (3.28) de la ecuación (5.1) para obtener el resultado que buscamos. Escribimos esta solución en la forma (5.3), para estudiar su comportamiento cuando $t \rightarrow x$:

$$G_i(x, t) = \delta(t - x) - K_i(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) g_n[t - \varphi(x)]. \quad (5.17)$$

Haciendo uso de (5.13) y (5.15), con los dos primeros términos de la serie dados por (5.6), reescribimos (5.17) de la siguiente manera:

$$\delta(t - x) - K_i(x, t) = a_0 \delta(t - x) + a_1(x) H(t - x) + R(x, t), \quad (5.18)$$

de donde se puede ver que a_0 debe ser $+1$, con lo que las deltas desaparecen. $R(x, t)$ es el residuo que resulta de truncar la serie después del segundo término. Escrito de manera explícita, se trata de

$$R(x, t) = H(t - x) \sum_{n=2}^{\infty} a_n(x) \frac{(t - x)^{n-1}}{(n - 1)!}, \quad (5.19)$$

de donde es fácil ver que $R(x, t)$ es continuo y se anula cuando t tiende a x . Antes de continuar recordaremos una notación bastante común para denotar límites por la izquierda y por la derecha:

$$f(y + 0) = \lim_{x \rightarrow y^+} f(x),$$

$$f(y - 0) = \lim_{x \rightarrow y^-} f(x).$$

La idea principal es ahora aprovechar la continuidad de $R(x, t)$ sobre la característica $t = x$, es decir,

$$R(x, x + 0) - R(x, x - 0) = -K_i(x, x + 0) + K_i(x, x - 0)$$

$$\begin{aligned} & - (H[(x+0) - x] - H[(x-0) - x]) a_1(x) \\ & = -K_i(x, x+0) - a_1(x) = 0. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Para obtener (5.20) hemos recurrido a (3.29), en la que se especifica el soporte de la función $K_i(x, t)$ y a la definición usual de la función escalón de Heaviside, discontinua en este caso sobre $t = x$. En este momento recordamos la ecuación de transporte (5.16), en la que sustituimos (5.20) para obtener

$$q(x) = -2a_1'(x) = 2 \frac{dK_i(x, x)}{dx}. \quad (5.21)$$

Con esta ecuación se establece la manera de recuperar $q(x)$ a partir de la respuesta causal $K_i(x, t)$. La recuperación con base en la respuesta no-causal es completamente análoga. Antes de continuar, sin embargo, será conveniente analizar el caso alterno de (5.12), en el que $\varphi'(x) = -1$, con lo que

$$\varphi(x) = -x. \quad (5.22)$$

Es muy fácil verificar que el resultado (5.15) no se altera con esta variante, y que en (5.16) lo único que cambia es un signo:

$$-2a_1'(x) + q(x)a_0 = 0. \quad (5.23)$$

Tenemos pues un par de soluciones tales que la rapidez característica de los frentes de onda que describen es la misma (de magnitud 1), pero con signos distintos. Escribimos la solución tal que $\varphi(x) = +x$ como $u^+(x, t)$, y a la solución con $\varphi(x) = -x$ como $u^-(x, t)$. Los coeficientes en el desarrollo (5.3) se denotan por $a_n^+(x)$ y $a_n^-(x)$ respectivamente. Por linealidad de (5.1), la combinación

$$u(x, t) = u^+(x, t) + u^-(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^+(x) g_n(t-x) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n^-(x) g_n(t+x) \quad (5.24)$$

será también una solución de dicha ecuación.

La solución no-causal de (5.1), dada por (3.40) en el Capítulo 3 es

$$G(x, t) = \delta(t + x) + \delta(t - x) + K_j(x, t). \quad (5.25)$$

Combinando esta expresión con la representación dada en (5.24) se obtiene, poniendo, $a_0^- = 1$ como en el caso anterior:

$$\begin{aligned} G(x, t) &= \delta(t - x) + \delta(t + x) + K_j(x, t) \\ &= \delta(t - x) + a_1^+(x)H(t - x) + R^+(x, t) \\ &\quad + \delta(t + x) + a_1^-(x)H(t + x) + R^-(x, t). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Por $R^+(x, t)$ y $R^-(x, t)$ nos referimos evidentemente a los residuos que resultan de truncar las series que representan a u^+ y u^- respectivamente en el tercer término. Escribiendo ambos residuos en forma explícita, como ya se hizo en (5.19), se ve claramente que en ambos casos se trata de funciones continuas sobre las características $t = x$ y $t = -x$. En contraste con lo realizado anteriormente, nos apoyaremos en la continuidad sobre $x = -t$ para escribir

$$K_j(x, -x + 0) + a_1^-(x) = 0, \quad (5.27)$$

donde hemos usado la descripción (3.41) del soporte de $K_j(x, t)$ para llegar a esta forma final. Sustituyendo ahora (5.27) en (5.23) (recordemos que $a_0^- = 1$), tendremos

$$q(x) = 2a_1^-(x) = -2 \frac{dK_j(x, -x)}{dx}, \quad (5.28)$$

que es formalmente muy similar a (5.21), como era de esperarse. Por lo tanto, se confirma que el potencial $q(x)$ se puede obtener a partir tanto de la respuesta causal como de la no-causal, por medio de las ecuaciones (5.21) y (5.28) respectivamente.

5.2 La constante concentrada de resorte h

En la formulación de Gelfand-Levitan aparece como punto distintivo una condición adicional sobre las soluciones en el eje $x = 0$. Esta condición de frontera, (1.12), se repite aquí, para facilitar la referencia:

$$-u_x(0, t) + hu(0, t) = 0. \quad (5.29)$$

En el caso de la respuesta causal, $G_i(x, t)$, la condición anterior no es homogénea, sino que incorpora una fuerte singularidad en el origen, como se ha descrito antes en (3.27). Repetimos aquí esta condición para la solución causal:

$$-G_{i_x}(0, t) + hG_i(0, t) = \delta'(t). \quad (5.30)$$

La constante h , como ya se ha discutido, es la constante concentrada de resorte, y nuestro objetivo en esta sección es recuperarla a partir de las soluciones causales y no-causales del problema, como se hizo ya en la sección anterior para el potencial $q(x)$. El método que adoptamos es también completamente análogo al de aquel desarrollo. Usaremos de nuevo la representación (5.3) de la solución $u(x, t)$, y la forma que obtuvimos en (5.9) de la primera derivada en x de aquella solución. Escribimos ambas funciones, con $x = 0$:

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(0) g_n[t - \varphi(0)] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-1}(0) g_{n-1}[t - \varphi(0)] \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} u_x(0, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \{a'_n(0) g_n[t - \varphi(0)] - a_n(0) \varphi'(0) g_{n-1}[t - \varphi(0)]\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \{a'_{n-1}(0) - a_n(0) \varphi'(0)\} g_{n-1}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Usaremos en esta ocasión la solución causal, por lo que ahora sustituimos éstas en

la condición (5.30):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{a_n(0)\varphi'(0) - a'_{n-1}(0) + ha_{n-1}(0)\} g_{n-1}[t - \varphi(0)] = \delta'(t). \quad (5.33)$$

La ecuación (5.12) (eiconal) y las ecuaciones de transporte de la sección anterior deben seguir aplicando en este caso, pues además de satisfacer la condición de frontera (5.30), $G_i(x, t)$ debe ser solución de la ecuación (5.1). Consideramos entonces $a_0 = 1$ y $\varphi(x) = x$; usando la segunda propiedad, la ecuación (5.33) queda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{a_n(0) - a'_{n-1}(0) + ha_{n-1}(0)\} g_{n-1}(t) = \delta'(t). \quad (5.34)$$

Observamos que cuando $n = 0$, refiriéndonos a (5.6), tendremos que aparece una $\delta'(t)$ del lado izquierdo de la ecuación anterior, con la que se cancela la misma función del lado derecho, ya que, como hemos dicho, $a_0 = 1$. Se deduce, entonces, que cada uno de los coeficientes de las g_{n-1} sucesivas de la serie se debe anular. Para $n = 1$ se obtiene la siguiente ecuación de transporte:

$$a_1(0) + h = 0, \quad (5.35)$$

que resultará ser de importancia primordial en la recuperación de h . Volvemos a usar (5.18), aunque esta vez evaluando sobre $x = 0$, y con $a_0 = 1$ de antemano:

$$\delta(t) - K_i(0, t) = \delta(t) + a_1(0)H(t) + R(0, t), \quad (5.36)$$

De nuevo aprovechamos la continuidad de $R(x, t)$ sobre $x = t$ junto con (3.29) para escribir

$$-K_i(0, 0+0) = a_1(0). \quad (5.37)$$

El último paso es en realidad muy sencillo, pues sólo hay que sustituir (5.35) en (5.37) para dar h en términos del valor de $K_i(x, t)$ en el origen:

$$h = K_i(0, 0). \quad (5.38)$$

Realizando un procedimiento muy semejante al que apenas concluimos, e incorporando algunos elementos del desarrollo por medio del cual se obtuvo (5.28) se obtiene sin mayor problema que la ecuación que relaciona a h con $K_j(x, t)$, la respuesta no-causal, es idéntica a (5.38):

$$h = K_j(0, 0). \quad (5.39)$$

Es muy interesante anotar que no es necesario conocer el comportamiento de las soluciones, causales o no-causales, en todo el semiplano derecho, sino únicamente sobre las características $t = x$, y en su caso, $t = -x$. Este hecho reviste especial importancia en vista de que el método de propagación de singularidades se centra precisamente en el estudio de las soluciones en la vecindad de estas curvas.

5.3 Problema inverso de Gopinath-Sondhi

El punto de partida en esta instancia es el sistema de ecuaciones (4.5), (4.6), que sirve como base para obtener las ecuaciones integrales de Gopinath-Sondhi. Escribimos de nuevo aquí este sistema, aunque en una forma que a la postre resultará más conveniente para nosotros:

$$\begin{pmatrix} 0 & A^{-1} \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix}_x = 0, \quad (5.40)$$

donde $\mathbf{0}$ denota obviamente el vector cero con dos renglones por una columna. Es muy fácil ver que esta ecuación matricial es exactamente equivalente al sistema de ecuaciones (4.5), (4.6). En la formulación de Gopinath y Sondhi, el objetivo último es recuperar la función $A(x)$ que aparece en este sistema de ecuaciones. Es más fácil observar una similitud entre este desarrollo y los realizados anteriormente para recuperar $q(x)$ y h si planteamos el problema en términos de matrices. De aquí en adelante, por comodidad, denotaremos

$$M = \begin{pmatrix} 0 & A^{-1} \\ A & 0 \end{pmatrix}.$$

Proponemos para este sistema una solución en forma de una serie de potencias que describe al frente de onda, escrita de la misma manera que en las secciones anteriores:

$$\begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{v}_n(x) g_n[t - \varphi(x)], \quad (5.41)$$

donde los coeficientes \mathbf{v}_n son vectores de dos componentes, y las g_n satisfacen la condición (5.5), $g'_n = g_{n-1}$. Además tenemos que, al igual que los coeficientes a_n de las secciones anteriores de este capítulo,

$$\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \text{ para } n < 0. \quad (5.42)$$

Como antes, consideramos que la serie (5.41) es asintótica cuando $t \rightarrow x$. La sucesión de funciones $\{g_n\}$ se conoce de antemano y es, en este caso, muy parecida a (5.6), aunque con algunas diferencias:

$$g_n(z) = \begin{cases} \delta^{-(n+1)}(z), & \text{para } n < 0 \\ \frac{z^n}{n!} H(-z), & \text{para } n \geq 0. \end{cases} \quad (5.43)$$

No es difícil cerciorarse de que esta sucesión tiene la propiedad (5.5), derivando de exactamente la misma manera en que derivamos (5.6) con anterioridad.

Falta sustituir la serie (5.41) en la ecuación (5.40); primero calculamos las derivadas que aparecen en esta ecuación:

$$\begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix}_t = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{v}_n g_{n-1}, \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix}_x &= \sum_{n=0}^{\infty} (v_n' g_n + v_n \varphi' g_{n-1}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (v_{n-1}' + v_n \varphi') g_{n-1}, \end{aligned} \quad (5.45)$$

donde hemos utilizado la propiedad (5.42) para ajustar el límite inferior de la serie. Sustituyendo ahora estas expresiones en la ecuación (5.40):

$$\sum_{n=0}^{\infty} (M v_n + v_{n-1}' - \varphi' v_n) g_{n-1} = 0. \quad (5.46)$$

Como ya hemos hecho en repetidas ocasiones, es necesario anular cada término de esta serie. Comenzando con $n = 0$ se tiene

$$M v_0 = \varphi' v_0; \quad (5.47)$$

esto es, φ' es un eigenvalor de M , con eigenvector correspondiente v_0 . Para analizar que valores puede tomar φ' , obtenemos explícitamente los eigenvalores de M :

$$\det |M - \lambda I| = \lambda^2 - 1,$$

por lo que los eigenvalores son ± 1 , y

$$\varphi'(x) = \pm 1, \quad (5.48)$$

lo que indica que en este caso la rapidez característica del frente de onda es, al igual que aquella de las secciones anteriores, ± 1 . Calculamos los eigenvectores derechos normalizados, que son, para estos eigenvalores:

$$v_n^{\pm} = \begin{pmatrix} \pm A^{-\frac{1}{2}} \\ A^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix},$$

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

donde denotamos los eigenvectores correspondientes a $\varphi' = \pm 1$ por \mathbf{v}_n^\pm respectivamente. Consideramos ahora, como antes, $\varphi'(x) = +1$ y $\varphi(x) = x$, con lo que podemos expresar los eigenvectores correspondientes de la siguiente forma:

$$\mathbf{v}_0 = a_0(x) \begin{pmatrix} A^{-\frac{1}{2}} \\ A^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \quad (5.49)$$

Hemos omitido el superíndice + de los eigenvectores \mathbf{v}_n , ya que está claro que se trata de aquellos eigenvectores correspondiente al eigenvalor +1. La función $a_0(x)$ que aparece en (5.49) debe satisfacer una ecuación de transporte, que podremos obtener anulando el segundo término de la serie (5.46), poniendo $n = 1$:

$$\mathbf{M}\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_0' = 0. \quad (5.50)$$

Podemos calcular el término \mathbf{v}_0' explícitamente, usando (5.49):

$$\mathbf{v}_0' = a_0' \begin{pmatrix} A^{-\frac{1}{2}} \\ A^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} + \frac{a_0 A'}{2A} \begin{pmatrix} -A^{-\frac{1}{2}} \\ A^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \quad (5.51)$$

En este momento nos será de gran utilidad calcular también el eigenvector izquierdo de \mathbf{M} correspondiente al eigenvalor +1, pues al premultiplicar por este vector permitirá simplificar bastante la ecuación (5.50), después de sustituir (5.51) en ella. Este eigenvector izquierdo es

$$\mathbf{w}_0 = (A^{\frac{1}{2}} \quad A^{-\frac{1}{2}}).$$

Premultiplicando (5.50) por este vector, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_0 \mathbf{M} \mathbf{v}_1 - \mathbf{w}_0 \mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_0 \mathbf{v}_0' &= \\ \mathbf{w}_0 \mathbf{v}_1 - \mathbf{w}_0 \mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_0 \mathbf{v}_0' &= \\ \mathbf{w}_0 \mathbf{v}_0' = 2a_0' &= 0, \end{aligned} \quad (5.52)$$

de donde se deduce inmediatamente que a_0 es una constante; veremos más adelante que nuevamente $a_0 = 1$.

La pareja solución que analizamos en el Capítulo 4 fue $p = J(x, t)$, $u = K(x, t)$. De acuerdo con las condiciones establecidas en (4.23), (4.24), tanto $J + 1$ como K son cero en la región $t > x$, $x \geq 0$; esta pareja también es, evidentemente, solución de (5.40) y será ésta la que tomaremos en cuenta:

$$\begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J + 1 \\ K \end{pmatrix}. \quad (5.53)$$

Sustituyendo esta solución en (5.41), con las funciones g_n dadas por (5.43), y con $\varphi(x) = x$, obtenemos

$$\begin{pmatrix} J(x, t) + 1 \\ K(x, t) \end{pmatrix} = a_0 \begin{pmatrix} A^{-\frac{1}{2}} \\ A^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} H(x - t) + \mathbf{R}(x, t), \quad (5.54)$$

donde $\mathbf{R}(x, t)$ es el residuo que resulta de truncar la serie a partir del segundo término. Como era de esperarse, este residuo es continuo sobre la característica $x = t$, y esta continuidad es precisamente lo que nos permite escribir:

$$\mathbf{R}(x, x + 0) - \mathbf{R}(x, x - 0) = - \begin{pmatrix} J(x, x - 0) + 1 \\ K(x, x - 0) \end{pmatrix} + a_0 \begin{pmatrix} A^{-\frac{1}{2}} \\ A^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = 0. \quad (5.55)$$

Hemos utilizado, por supuesto, las condiciones (4.23) y (4.24) en la obtención de (5.55). En el capítulo anterior se señaló que $A(x)$ debe estar normalizada de modo que $A(0) = 1$; también se describe el comportamiento de $J(x, t)$ sobre el eje $x = 0$. Un vistazo a la condición (4.20) confirmará que $J(0, 0) = 0$. De la ecuación (5.55), evaluando en el origen y tomando en cuenta estos resultados, se obtiene:

$$J(0, 0) + 1 = 1 = a_0 A^{-\frac{1}{2}}(0) = a_0;$$

por lo tanto, a_0 efectivamente es igual a 1. De este modo concluimos que la función $A(x)$ se puede recuperar a partir tanto de $J(x, t)$ como de $K(x, t)$, por medio de las siguientes ecuaciones:

$$A(x) = \frac{1}{(J(x, x) + 1)^2}, \quad (5.56)$$

$$A(x) = K^2(x, x). \quad (5.57)$$

La expresión (5.57) es más sencilla que (5.56), por lo que es la primera la que generalmente se adopta para dar solución a este problema. De las ya citadas condiciones (4.23), (4.24), se ve que existe otra característica que se podría usar para obtener un resultado semejante al anterior. Se trata de la recta $x = -t$; efectuando un ligero cambio en la sucesión (5.43), donde consideraríamos $H(+z)$ en vez de la $H(-z)$ que aparece, y tomando $\varphi(x) = x$, podemos emplear argumentos similares a los que acabamos de usar para obtener resultados alternativos:

$$A(x) = \frac{1}{(J(x, -x) - 1)^2}, \quad (5.58)$$

$$A(x) = K^2(x, -x). \quad (5.59)$$

Nuevamente subrayamos el hecho de que las inversiones se realizan con conocimiento de las soluciones únicamente sobre las características y no sobre el dominio completo. Recalcamos también la importancia de que $A(x)$ sea una función suave para que el desarrollo anterior tenga sentido.

5.4 Un ejemplo

Como se mencionó al principio de este trabajo, la motivación del estudio de los problemas inversos se encuentra en las diversas aplicaciones con las que éstos están relacionados. Aunque hemos presentado ya las principales formulaciones que se usan en la solución de dichos problemas, no hemos abordado problemas particulares. Se pueden encontrar un buen número de ejemplos en los que se usan las formulaciones de Marchenko y Gelfand-Levitan en relación a solitones en los libros sobre el tema que citamos en la bibliografía, [5, 10]; no es tan fácil encontrar en la literatura ejemplos concretos en torno a la formulación de Gopinath-Sondhi. A continuación

presentamos un ejemplo, en el que modelamos lo que podría ser el tubo de un instrumento de aliento; en un tiempo inicial ($t = 0$) damos un soplo, y posteriormente observamos que la presión del aire en la embocadura ($x = 0$) disminuye exponencialmente. Escribimos la función $h(t)$, que aparece en la condición (4.7) del capítulo anterior, como sigue:

$$h(t) = e^{-\mu t}, \quad (5.60)$$

donde μ es una constante positiva. Reescribiendo la ecuación de Gopinath-Sondhi, (4.28), en términos de esta función, obtenemos:

$$1 = K(x, t) + \frac{1}{2} \int_{-x}^t e^{-\mu(t-\tau)} K(x, \tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_t^x e^{-\mu(\tau-t)} K(x, \tau) d\tau. \quad (5.61)$$

Para resolver esta ecuación, que es una ecuación integral con núcleo separable, proponemos una solución con la siguiente forma:

$$K(x, t) = C(x)e^{\alpha t} + D(x)e^{-\alpha t} + \gamma, \quad (5.62)$$

donde $\gamma = \gamma(\mu)$ y $\alpha = \alpha(\mu)$ son ambas funciones de μ por determinar. Al sustituir esta solución en (5.61) encontraremos γ , α , y por supuesto $C(x)$ y $D(x)$. Los cálculos involucrados no son complicados, aunque sí un poco largos; después de sustituir y calcular las integrales tendremos:

$$\begin{aligned} 1 - \gamma &= C(x)e^{\alpha t} + D(x)e^{-\alpha t} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{C(x)}{\mu + \alpha} [e^{\alpha t} - e^{-\mu t - (\mu + \alpha)x}] \right. \\ &+ \frac{D(x)}{\mu - \alpha} [e^{-\alpha t} - e^{-\mu t - (\mu - \alpha)x}] + \frac{\gamma}{\mu} [1 - e^{-\mu t - \mu x}] + \frac{C(x)}{\mu - \alpha} [e^{\alpha t} - e^{\mu t - (\mu - \alpha)x}] \\ &\left. + \frac{D(x)}{\mu + \alpha} [e^{-\alpha t} - e^{\mu t - (\mu + \alpha)x}] + \frac{\gamma}{\mu} [1 - e^{\mu t - \mu x}] \right\}. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Igualando los coeficientes de las distintas funciones de t obtendremos las relaciones que buscamos. Comenzando por los términos constantes, obtenemos:

$$\gamma = \frac{\mu}{\mu + 1}. \quad (5.64)$$

Examinando los términos $e^{\pm\alpha t}$ se llega a la siguiente relación, que determina a α :

$$\alpha^2 = \mu^2 + \mu. \quad (5.65)$$

Finalmente, al igualar los coeficientes de $e^{\pm\mu t}$ encontramos un sistema de dos ecuaciones que se puede resolver para $C(x)$ y $D(x)$. Después de considerables manipulaciones, el resultado es el siguiente:

$$C(x) = -\frac{\mu}{(\mu + 1)} \frac{(\mu + \alpha)}{(\mu - \alpha)} e^{\alpha x} \left[\frac{e^{\alpha x}}{(\mu - \alpha) e^{-\alpha x} + (\mu + \alpha) e^{\alpha x}} + \frac{\mu - \alpha}{\mu} \right], \quad (5.66)$$

$$D(x) = \frac{\mu}{\mu + 1} \frac{1}{(\mu - \alpha) e^{-\alpha x} + (\mu + \alpha) e^{\alpha x}}. \quad (5.67)$$

Por lo tanto, utilizando (5.62) podemos escribir la solución de (5.61) como sigue:

$$K(x, t) = -\frac{\mu}{(\mu + 1)} \frac{(\mu + \alpha)}{(\mu - \alpha)} e^{\alpha(x+t)} \left[\frac{e^{\alpha x}}{(\mu - \alpha) e^{-\alpha x} + (\mu + \alpha) e^{\alpha x}} + \frac{\mu - \alpha}{\mu} \right] + \frac{\mu}{\mu + 1} \frac{e^{-\alpha t}}{(\mu - \alpha) e^{-\alpha x} + (\mu + \alpha) e^{\alpha x}} + \frac{\mu}{\mu + 1}, \quad (5.68)$$

donde $\alpha = \sqrt{\mu(\mu + 1)}$. De acuerdo a lo que hemos visto en la sección anterior, es ahora posible reconstruir la función $A(x)$ a partir de (5.70), empleando la relación (5.57):

$$A(x) = K^2(x, x). \quad (5.69)$$

De este modo, tenemos que el área transversal del cuerpo de nuestro instrumento de aliento se obtiene de sustituir (5.70) en (5.69), y es

$$A(x) = \left\{ -\frac{\mu}{\mu+1} \frac{(\mu+\alpha)}{(\mu-\alpha)} e^{2\alpha x} \left[\frac{e^{\alpha x}}{(\mu-\alpha)e^{-\alpha x} + (\mu+\alpha)e^{\alpha x}} + \frac{\mu-\alpha}{\mu} \right] + \frac{\mu}{\mu+1} \frac{e^{-\alpha x}}{(\mu-\alpha)e^{-\alpha x} + (\mu+\alpha)e^{\alpha x}} + \frac{\mu}{\mu+1} \right\}^2. \quad (5.70)$$

Si suponemos que se trata de un instrumento con sección transversal circular, podemos graficar un perfil del instrumento visto de lado; ver Figura 5.1.

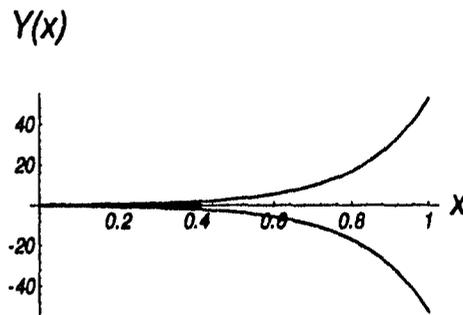


Figura 5.1: Perfil lateral de un instrumento con sección transversal circular y área transversal $A(x)$.

En la Figura 5.1 se ve que nuestro instrumento es una especie de corno; no es sorprendente este resultado, pues al ensancharse el tracto, el número de reflexiones que ocurren dentro de él disminuye, por lo que al aumentar t tendremos cada vez menor presión en la embocadura. Evidentemente para construir un instrumento este análisis es demasiado rudimentario, pues no sirve para determinar frecuencias de vibración; sin embargo muestra, en una sencilla aplicación de la formulación de Gopinath-Sondhi, como se puede determinar la forma de un instrumento a partir de la *intensidad* del sonido que produce.

5.5 Conclusiones

En este trabajo hemos realizado una revisión de algunos de los más importantes esquemas utilizados en el estudio de los problemas inversos, con énfasis en metodología y no en resolver problemas específicos. Aunque las diversas formulaciones surgen de distintas aplicaciones, hemos tratado de presentarlas de manera que las similitudes entre ellas y entre las maneras en que se pueden derivar se puedan observar con cierta claridad.

La formulación tanto de las ecuaciones integrales de Gelfand-Levitan como de las ecuaciones de Marchenko se dio originalmente en el dominio de frecuencias, en el contexto de problemas espectrales inversos. El punto de partida natural en este caso es la ecuación de Schrödinger. Nosotros, en cambio, damos un desarrollo completamente en el dominio del tiempo de estas formulaciones, partiendo de la ecuación de una cuerda elásticamente amortiguada. En el caso de la ecuación de Marchenko, también presentamos una derivación en el dominio espectral, principalmente por el importante papel que ésta juega en la teoría de dispersión inversa. Además, este desarrollo permite ver como los argumentos de causalidad que utilizamos en las formulaciones dependientes del tiempo se ven, en este otro caso, reemplazados por teoremas de integración sobre el plano complejo.

Existe una ventaja notable al formular estos problemas inversos para ecuaciones hipérbolicas, en el dominio temporal: debido a que la velocidad de propagación de las ondas es finita, es posible recuperar la función desconocida de x en un intervalo $(0, T)$ conociendo la respuesta de impulso en el intervalo *finito* $0 < t < 2T$. En cambio, si usáramos un método espectral, sería necesario conocer la información de reflexión para $0 < t < \infty$ para poder emplear una transformada de Fourier.

En cuanto a las ecuaciones de Gopinath y Sondhi, éstas se obtuvieron originalmente en el dominio del tiempo, aunque en una derivación distinta a la que aquí hemos presentado. Los autores utilizaron esta formulación precisamente para eliminar problemas que aparecían al emplear métodos planteados en un dominio de frecuencias. Como en el caso anterior, en estos métodos es necesario tomar medidas en el dominio de frecuencias sobre intervalos de tiempo muy largo para hacer buenas estimaciones de las eigenfrecuencias. Además, también es necesario en este caso conocer la longitud del tracto vocal, que termina en la glotis, y también las condiciones de frontera sobre esta última. Al considerar una formulación en el dominio

del tiempo se evitan estos problemas.

Ya hemos mencionado con anterioridad que varios de los resultados que hemos obtenido no son válidos cuando $q(x)$ o $A(x)$ no son suaves; en general hemos supuesto que ambas funciones son suaves. En algunos casos es posible generalizar un poco de modo que se permitan discontinuidades de salto en algunas de las derivadas o en las funciones en sí, pero no se extienden los resultados en general para discontinuidades más severas o discontinuidades en algunas derivadas. Una discusión más detallada de estas consideraciones, sin ser del todo completa, se puede encontrar en el artículo de Burrige [3]. También en este artículo se pueden encontrar esquemas de demostraciones de la existencia y unicidad de soluciones a las diversas ecuaciones integrales que obtuvimos en el trabajo; bastan un par de teoremas básicos de la teoría de ecuaciones integrales sobre operadores positivos para establecer estos resultados. El lector se puede referir a los textos antes citados sobre este tema para aclarar dudas.

En algunos casos el lector cuidadoso notará que hace falta tal vez mayor rigor matemático al realizar ciertas manipulaciones. Esta tendencia es intencional, y se debe al deseo de evitar que algunos desarrollos, que de por sí resultan complicados, se tornen ininteligibles en medio de un mar de aclaraciones y resultados adicionales. Es muy posible que en algún momento particular realmente sea necesario tratar algún punto con mayor cuidado del que ha recibido aquí, pero en este caso no queda más que mirar en retrospectiva—una actitud muy en tono con el tema de la tesis—e intentar proponer alguna enmienda, aún cuando ésta sea inevitablemente tardía.

Apéndice A

Funciones de Green y distribuciones

A.1 Breves notas sobre distribuciones

Sea L un operador diferencial lineal ordinario, de orden n , actuando sobre un espacio de funciones $u(x) \in C^2[a, b]$. Más adelante pasaremos de manera natural al caso de un operador diferencial parcial, que es el que nos interesa en este trabajo. En general, hay dos métodos que se adoptan con frecuencia para resolver una ecuación de la forma

$$Lu(x) = f(x); \tag{A.1}$$

el primero consiste en encontrar la representación espectral de L estudiando las soluciones de la ecuación

$$Lu(x) = \lambda u(x).$$

No haremos una descripción de este método; nos interesa el segundo, en el que se encuentra el operador inverso L^{-1} , es decir, el operador tal que $LL^{-1} = L^{-1}L = I$, donde I es el operador identidad. Ya que L es un operador diferencial, parece

razonable suponer que L^{-1} se puede escribir como un operador integral, entendiéndose, por supuesto, que se trata de integración en el sentido de Lebesgue. Dicho operador podría representarse, por ejemplo, por

$$L^{-1}u(x) = \int_a^b G(x, \xi) u(\xi) d\xi. \quad (\text{A.2})$$

En este caso, tendríamos ya la solución de la ecuación (A.1), dada por

$$u(x) = L^{-1}(Lu) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi. \quad (\text{A.3})$$

Un resultado interesante que se obtiene de aplicar los operadores L y L^{-1} en el orden contrario a como lo hicimos arriba es

$$u(x) = L(L^{-1}u) = \int_a^b LG(x, \xi) u(\xi) d\xi;$$

es decir, el kernel $G(x, \xi)$ en (A.2) debe satisfacer la ecuación $LG(x, \xi) = \delta(x, \xi)$, donde esta última tiene la siguiente propiedad:

$$\int_a^b \delta(x, \xi) u(\xi) d\xi = u(x), \quad (\text{A.4})$$

para cualquier elección razonable de $u(\xi)$. El kernel $G(x, \xi)$ de la ecuación integral (A.3) es la *función de Green*.

Surge, sin embargo, un problema importante con respecto a la 'función' delta como ha sido definida en (A.4): no existe función alguna tal que la expresión (A.4) tenga sentido matemático. No obstante, la delta aparece con frecuencia en textos de matemáticas y física, ya que la utilidad en la práctica de esta función ha resultado ser inmensa. Una justificación bien fundamentada de la existencia y el cálculo de objetos matemáticos como la delta (llamada también *delta de Dirac*) apareció en 1950 con la teoría de las distribuciones de Laurent Schwartz. Las distribuciones se plantean como una generalización de los conceptos de función y producto interno.

Definición

Una *función de prueba* es una función $\phi(x) \in C_0^\infty(-\infty, \infty)$ con soporte compacto. Esto es, $\phi(x)$ es continua y tiene derivadas continuas de cualquier orden, además de anularse para $|x|$ suficientemente grande.

El conjunto de funciones de prueba es un espacio vectorial lineal, que se denota comúnmente por D . Un ejemplo estándar de una función de prueba es

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{\left(\frac{1}{x^2-1}\right)} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1; \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

es suficiente para probar que D es no-vacío. Ver la Figura A.1.

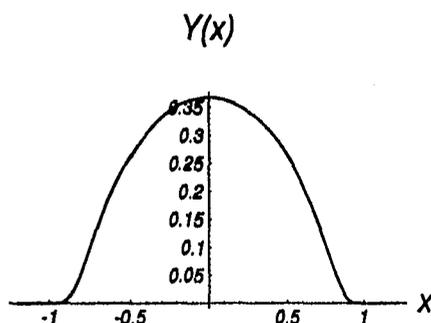


Figura A.1: Función de prueba $\phi(x) = H(1 - |x|) \exp[1/(x^2 - 1)]$.

Definición

Un *funcional lineal* t sobre D es un número real $t(\phi)$ definido para toda $\phi \in D$ y lineal en ϕ .

La notación que emplearemos para funcionales lineales en D es $t(\phi) \doteq \langle t, \phi \rangle$, que se refiere a la acción de en funcional t sobre ϕ . Como es usual, la linealidad de t significa que

$$\langle t, a_1\phi_1 + 2\phi_2 \rangle = a_1\langle t, \phi_1 \rangle + a_2\langle t, \phi_2 \rangle,$$

con $\phi_1, \phi_2 \in D$ y a_1, a_2 constantes reales. La notación que hemos presentado es exactamente la misma que se usa para representar productos internos; esto es intencional, aunque definitivamente inexacto, ya que veremos que t puede no ser representable por un producto interno. De cualquier modo, los ejemplos más sencillos de funcionales lineales son, efectivamente, productos internos. Supongamos que $f(x)$ es una función localmente integrable; esto es, la integral de Lebesgue $\int_I |f(x)| dx$ existe y está acotada en cualquier intervalo finito I . Entonces, el producto interno

$$\langle f, \phi \rangle = \int_I f(x) \phi(x) dx$$

es un funcional lineal para $\phi \in D$, ya que la integración de Lebesgue es lineal en sí.

Definición

Un conjunto $\{\phi_n\}$ de funciones de prueba es una *cero-sucesión* si

1. $\cup_n \{\text{soporte } \{\phi_n\}\}$ está acotado.
2. El límite de $\left(\max_x \left| \frac{\partial^k \phi}{\partial x^k} \right| \right)$ cuando $n \rightarrow \infty$ es cero, para cualquier $k = 0, 1, 2, \dots$

Ahora estamos listos ya para introducir el concepto de distribución, o función generalizada, como se le llama en algunos textos.

Definición

Un funcional lineal es continuo sí y sólo sí $\langle t, \phi_n \rangle \rightarrow 0$ para toda cero-sucesión $\{\phi_n\}$. Un funcional lineal continuo es una *distribución*.

Continuando con la idea de relacionar funcionales y productos internos, escribimos el siguiente teorema, que describe la relación entre funciones localmente integrables y distribuciones:

Teorema

Cualquier función localmente integrable induce una distribución a través del producto interno que hemos definido con anterioridad.

Prueba : Falta solamente revisar que el producto interno, como funcional, sea continuo. Sea f una función localmente integrable $\{\phi_n(x)\}$ una cero-sucesión arbitraria. Tenemos entonces

$$|(f, \phi_n)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| |\phi_n(x)| dx \leq M_n \int_I |f(x)| dx,$$

donde $M_n = \max_x |\phi_n(x)|$ e $I = \cup_n \{\text{soporte } \{\phi_n(x)\}\}$. Sabemos que I es acotada, por lo que $\int_I |f(x)| dx < \infty$. Además, tenemos que $M_n \rightarrow 0$, de donde se sigue que

$$|(f, \phi_n)| \rightarrow 0;$$

el funcional $\langle f, \phi \rangle$ es continuo, y por lo tanto, se trata de una distribución. Q.E.D.

Un corolario sencillo de este teorema es que dos funciones que coinciden en *casi todos* los puntos (esto es, son idénticas excepto en un conjunto de medida cero) inducen la misma distribución. Esto se debe a que al integrar según Lebesgue no distinguimos entre estas dos funciones. A las distribuciones que se pueden representar en términos de un producto interno de una función localmente integrable se les llama *distribuciones regulares*. Un ejemplo de este tipo de distribución, que además adquirirá mayor importancia mas tarde es la distribución de Heaviside,

$$\langle H, \phi \rangle = \int_0^{\infty} \phi(x) dx, \quad (\text{A.6})$$

que resulta de contraer la función escalón con una función de prueba $\phi(x)$. A cualquier función localmente integrable le asociamos inmediatamente una distribución; la implicación contraria no es cierta necesariamente, pues existen distribuciones que no se pueden escribir como un producto interno. Un ejemplo clásico de esta clase de distribuciones, que llamaremos *distribuciones singulares*, es precisamente la delta de Dirac. Definimos esta distribución del siguiente modo:

$$\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0). \quad (\text{A.7})$$

Es claro que se trata de una distribución; no es difícil tampoco verificar que se trata de una distribución singular, pero omitimos la prueba, pues no es particularmente interesante en el contexto de lo que nos proponemos.

Continuamos esta exposición con un par de advertencias sobre notaciones que se usan con cierta frecuencia en la literatura. Es muy común encontrar que a una

distribución f definida sobre el espacio de funciones de prueba D , con variable independiente x , se le denote por $f(x)$, exactamente como ocurre con las funciones habituales. Esto no debe confundir al lector, pues ya hemos señalado que, para una distribución f , $f : D \rightarrow \mathfrak{R}$. Por otra parte, hemos visto también que cuando f es una distribución regular esta notación alternativa no da pie a ambigüedad alguna, debido a la relación uno a uno que existe entre una clase de equivalencia de funciones (compuesta de todas aquellas funciones que difieran entre sí únicamente en un conjunto de medida cero) y la distribución regular correspondiente. En cambio, tratándose de distribuciones singulares, $f(x)$ es sólo una notación simbólica conveniente, pues tiene la ventaja de exhibir la variable x que ocurre en la función de prueba. Se habrá visto que esta es la notación que adoptamos a partir del primer capítulo de este trabajo; nos permite mayor claridad al efectuar convoluciones, transformadas, y algunos cambios de variable, sin implicar que estemos hablando de funciones en el sentido habitual.

En particular, para la distribución delta se usa con frecuencia el símbolo $\delta(x)$, y a menudo se encuentra la expresión

$$\phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \phi(t) dt. \quad (\text{A.8})$$

Esperamos que el lector rápidamente se dé cuenta de que la expresión (A.8) no tiene mayor sentido que el que le da el lado izquierdo de la misma; se trata simplemente de una representación simbólica. Efectuando formalmente las manipulaciones permitidas en el cálculo de funciones ordinarias (en este caso un sencillo cambio de variables), podemos definir una nueva distribución singular $\delta(x - \xi)$, simbólicamente denotada por:

$$\begin{aligned} \langle \delta(x - \xi), \phi(x) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \xi) \phi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) \phi(y + \xi) dy \\ &= \phi(\xi). \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

En un sentido riguroso, es necesario puntualizar que es por medio de la ecuación

$$\langle \delta(x - \xi), \phi(x) \rangle = \phi(\xi) \quad (\text{A.10})$$

que efectivamente se define la distribución $\delta(x - \xi)$. Las manipulaciones de (A.9) sirven meramente para demostrar que hay consistencia con la manera en que ordinariamente trataríamos funciones. Se dice que dos distribuciones f_1 y f_2 son iguales sobre un intervalo I cuando para todas las funciones de prueba ϕ con soporte en I , $\langle f_1, \phi \rangle = \langle f_2, \phi \rangle$. Por lo tanto, se maneja a menudo la idea de que

$$\delta(x - \xi) = 0 \text{ para } x \neq \xi; \quad (\text{A.11})$$

desafortunadamente, es frecuente también que se malentienda esta noción, pues ésta no constituye en sí una definición de la delta.

Nos interesa establecer otra importante propiedad de la distribución delta, para lo cual será necesario ahondar un poco sobre el tema de productos de distribuciones. Un caso en el que es posible definir consistentemente este producto es aquél en el que f es una distribución cualquiera, y g es una distribución regular que corresponde a una función infinitamente suave. En este caso, se define el producto como sigue:

Definición

$$\langle gf, \phi \rangle \doteq \langle f, g\phi \rangle \text{ para } \phi \in D. \quad (\text{A.12})$$

La demostración de que esta definición es consistente con la manera en que hemos definido las distribuciones con anterioridad es sencilla y se deja al lector. Es necesario únicamente probar que $g\phi$ es una función de prueba (trivial) y que gf es efectivamente un funcional lineal continuo sobre D .

Empleando esta definición en conjunto con la propiedad (A.11) se obtiene un resultado interesante que a menudo se maneja de manera intuitiva, sin la justificación formal que hemos incluido. Es evidente que $g(x) = x - \xi$ es una función infinitamente suave, y localmente integrable; por lo tanto, hay una distribución regular correspondiente que podemos multiplicar por $\delta(x - \xi)$ para obtener:

$$\langle (x - \xi)\delta(x - \xi), \phi \rangle = \langle \delta(x - \xi), (x - \xi)\phi \rangle = 0. \quad (\text{A.13})$$

Este resultado se usa un par de veces en el Capítulo 4.

Tanto la integración de Lebesgue como varias de sus propiedades (cambios de variables, integración por partes, etc.) se pueden extender al cálculo de distribuciones; no damos aquí una prueba de lo anterior. Si ahondamos un poco más, sin embargo, en el concepto de derivada de una distribución, pues será fundamental posteriormente al introducir el concepto de formulación débil de una ecuación diferencial.

Derivadas de distribuciones

La derivada f' de una distribución f está definida por $\langle f', \phi \rangle = -\langle f, \phi' \rangle$, para toda $\phi \in D$. Esta definición es completamente natural, pues para funciones diferenciables, utilizando integración por partes,

$$\begin{aligned} \langle f', \phi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \phi(x) dx \\ &= [f(x) \phi(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi'(x) dx \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$= -\langle f, \phi' \rangle. \quad (\text{A.15})$$

El primer término de (A.14) se anula claramente debido a que, por definición, $\phi(x)$ tiene soporte compacto.

Teorema

Si f es una distribución, entonces f' también lo es.

Prueba: Sólo es necesario verificar que f' es continuo; lo demás es trivial. Sea $\{\phi_n\}$ una cero-sucesión en D ; se ve fácilmente que también $\{\phi'_n\}$ lo es. Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f', \phi_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, \phi'_n \rangle = 0;$$

esto es, f' es continuo. Q.E.D.

Como corolario se puede afirmar que para cualquier distribución f existe la derivada distribucional $f^{(n)}$, y que su acción es

$$\langle f^{(n)}, \phi \rangle = (-1)^n \langle f, \phi^{(n)} \rangle.$$

Adelantándonos un poco, diremos ahora que se sigue de lo anterior que cualquier función L^2 tiene derivadas distribucionales de cualquier orden. Presentamos ahora un par de ejemplos relevantes de derivadas distribucionales.

Ejemplos

1. Hemos visto anteriormente, en (A.6) que la acción de la distribución Heaviside es $\langle H, \phi \rangle = \int_0^\infty \phi(x) dx$. Su derivada será

$$\langle H', \phi \rangle = - \int_0^\infty \phi'(x) dx = \phi(0); \quad (\text{A.16})$$

donde por supuesto utilizamos el teorema fundamental del cálculo y el hecho de que $\phi(x)$ tiene soporte compacto. En otras palabras, $H' = \delta$.

2. La derivada de la distribución δ es

$$\langle \delta', \phi \rangle = - \langle \delta, \phi' \rangle = -\phi'(0). \quad (\text{A.17})$$

Aún no se realiza completamente nuestro propósito de extender las herramientas principales del cálculo de funciones al de distribuciones. Es especialmente importante definir el concepto de límite de una sucesión de distribuciones de modo que concuerde con la idea intuitiva que de él tenemos, y tal que sea consistente con su contraparte en el caso de funciones.

Definición

Se dice que una sucesión de distribuciones $\{f_n\}$ converge a la distribución f si sus acciones convergen en \mathfrak{R} , esto es, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle \text{ para toda } \phi \in D.$$

A esta convergencia se le llama convergencia en el sentido de distribución, o *convergencia débil*.

Proposición

Si la sucesión de distribuciones $\{f_n\}$ converge débilmente a f , entonces la sucesión de sus derivadas, $\{f'_n\}$, converge débilmente a f' .

Prueba: El resultado es inmediato, observando lo siguiente:

$$\langle f'_n, \phi \rangle = -\langle f_n, \phi' \rangle,$$

donde, por hipótesis,

$$\langle f_n, \phi' \rangle \rightarrow -\langle f, \phi' \rangle = \langle f', \phi \rangle,$$

para $\phi \in D$. Q.E.D.

Ocurre a veces que una sucesión que puede no tener límite en el sentido tradicional sí converge débilmente. Un ejemplo de tal situación resulta al considerar la sucesión $\{f_n\} = \{(\cos nx)/n\}$. Ésta es tanto una sucesión de funciones ordinarias como de distribuciones, ya que se trata de funciones localmente integrables, que por tanto inducen una sucesión de distribuciones. Mientras n tiende a infinito, f_n tiende a cero, en ambos casos. Sin embargo, considerando $\{f'_n\}$ en el sentido usual

no habrá convergencia puntual, aunque, por el resultado anterior, es fácil ver que $\{f'_n\} = -\{\text{sen } nx\}$ converge a cero en el sentido débil.

Es común en la literatura científica, quizá especialmente en la física, encontrar referencias a la distribución delta donde se le da una interpretación: algunas veces es una carga puntual en un problema electromagnético, otras, como en el trabajo presente, se puede tratar de la propagación de un impulso. Para facilitar un acercamiento más intuitivo al significado de esta curiosa distribución, aprovechamos el recién introducido concepto de convergencia débil para aproximar la distribución delta, que es singular, por una sucesión de distribuciones regulares. No probaremos este resultado, pero afirmamos que la sucesión dada por

$$g_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2} \quad (\text{A.18})$$

converge débilmente a la distribución $\delta(x)$. En la Figura A.2 se puede observar que el área bajo cada una de las curvas (obviamente las más achatadas corresponden a valores más pequeños de n) es constante, y de hecho es igual a uno. El soporte de la función se va haciendo cada vez más pequeño.

También aparece en nuestro trabajo un par de veces la derivada distribucional, $\delta'(x)$, de $\delta(x)$, dada por (A.17), por lo que también incluimos una gráfica de ésta, que es de gran ayuda para visualizar la acción de dicha distribución. Obtenemos la sucesión de distribuciones regulares que aproximan a $\delta'(x)$ derivando la expresión (A.18), y recurriendo a la proposición arriba enunciada para confirmar que tiene el límite deseado:

$$g'_n(x) = -2x \sqrt{\frac{n^3}{\pi}} e^{-nx^2}. \quad (\text{A.19})$$

En la Figura A.3 se alcanza a ver cómo la distribución $\delta'(x)$ está conformada por una especie de "doble pulso".

Otra sucesión que aproxima a la distribución delta, de uso muy común en varios textos, es la siguiente:

$$g_n(x) = \frac{1}{\epsilon} [H(x) - H(x - \epsilon)]. \quad (\text{A.20})$$

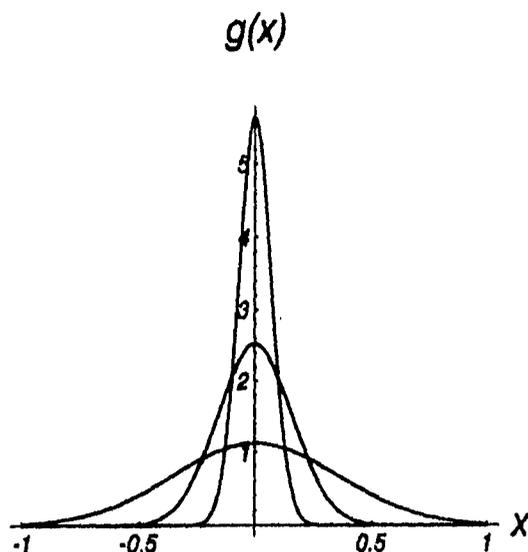


Figura A.2: Gráfica de tres elementos (correspondientes a $n = 4, 20, 100$) de la sucesión $g_n(x) = (n/\pi)^{1/2} \exp(-nx^2)$. Esta sucesión tiende débilmente a $\delta(x)$.

Se trata de pulsos rectangulares, más altos y estrechos a medida que aumenta n ; el área debajo de cada uno de ellos se mantiene constante, y es, de hecho, uno. Esta sucesión, como (A.18), converge débilmente a $\delta(x)$. En la Sección 3.1 utilizamos esta aproximación debido a que es más sencillo trabajar con ésta que con (A.18).

La última extensión que haremos es, tal vez, la más importante en el contexto del trabajo que hemos realizado en los capítulos que preceden a este apéndice. Hemos generalizado los conceptos de funciones, derivadas y límites, lo que nos permite ahora dar una formulación más general, en términos de distribuciones, de una ecuación diferencial.

Definición

Una ecuación diferencial $Lu = f$ es una ecuación diferencial en el sentido distribucional si u y f son distribuciones y todas las derivadas son interpretadas en el sentido de distribución; ésta es la *formulación débil* de la ecuación diferencial, y su solución se denomina *solución débil* de la ecuación.

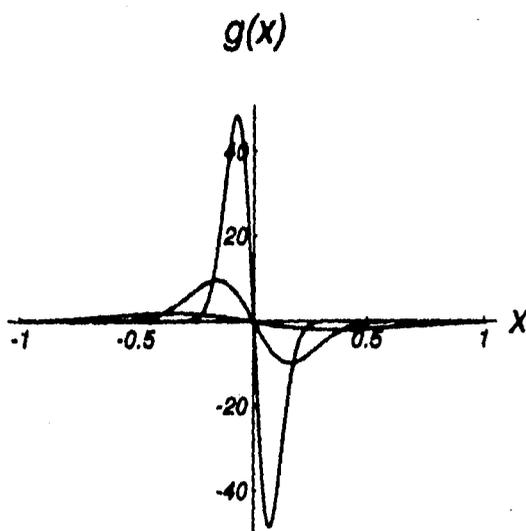


Figura A.3: Gráfica de tres elementos ($n = 4, 20, 100$) de la sucesión $g'_n(x) = -[(4n^3 x^2)/\pi]^{1/2} \exp(-nx^2)$. Esta sucesión tiende débilmente a $\delta'(x)$.

De este modo nos ha sido posible utilizar deltas y no preocuparnos por la diferenciablez de diversas funciones en el cuerpo de nuestro trabajo. Todas las ecuaciones y sus soluciones han sido entendidas en el sentido débil, y los resultados que utilizamos, como la segunda identidad de Green, en la Sección 3.2, son extensiones de su forma usual original. Introducciones mucho más detalladas que ésta a la teoría de las distribuciones se pueden encontrar en los libros de Friedman, Lighthill, y Zemanian, enlistados en la bibliografía [6, 12, 17].

A.2 Funciones de Green

Al principio de la sección anterior consideramos ya el problema de encontrar un operador inverso L^{-1} de un operador diferencial

$$Lu(x) = a_n(x) \frac{d^n u}{dx^n} + \cdots + a_1(x) \frac{du}{dx} + a_0(x)u;$$

propusimos que L^{-1} fuera un operador integral cuyo kernel G , la función de Green por definición, debe satisfacer la ecuación diferencial $LG(x, \xi) = \delta(x - \xi)$. Para que esta ecuación tenga algún sentido, es necesario, como hemos visto en la sección pasada, interpretarla en el sentido distribucional, o débil; es decir, consideramos a $G(x, \xi)$ como una distribución. En este caso, no hay necesidad de preocuparse por la diferenciabilidad requerida para que sea posible la aplicación del operador diferencial L , ya que la existencia de derivadas (en el sentido débil) de cualquier orden está garantizada. En efecto, se pide que $G(x, \xi)$ sea tal que

$$\langle LG(x, \xi), \phi(x) \rangle = \langle \delta(x - \xi), \phi(x) \rangle = \phi(\xi). \quad (\text{A.21})$$

En los Capítulos 2 y 3 no hemos utilizado esta definición (la usual) de las funciones de Green, y sin embargo hablamos de soluciones fundamentales. Es común que a las funciones de Green se les llame también soluciones fundamentales, o de influencia. Explicaremos la razón de esta denominación ocasional valiéndonos de un sencillo ejemplo.

Analicemos una cuerda estirada entre $x = 0$ y $x = 1$, y tal que sus extremos están fijos en esos puntos (digamos $u = 0$). Para cada punto $x \in [0, 1]$, denotamos el desplazamiento vertical desde su posición de equilibrio por $u(x)$. En el estudio del caso estático balanceamos las fuerzas horizontales y verticales y realizamos un par de aproximaciones para $u'(x)$ pequeña para obtener la ecuación que gobierna la forma de la cuerda,

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \rho(x), \text{ con } u(0) = u(1) = 0. \quad (\text{A.22})$$

En esta ecuación, hemos normalizado unidades de tal modo que $\rho(x)$ es la densidad lineal de la cuerda. Es muy fácil resolver esta ecuación por integración directa:

$$\frac{du}{dx} = \int_0^x \rho(s) ds + c_1,$$

y por lo tanto,

$$u(x) = \int_0^x \int_0^t \rho(s) ds dt + c_1 x + c_2. \quad (\text{A.23})$$

Usando el teorema de Fubini en la integral que aparece en (A.23) (suponemos $u(x)$ continua), simplificamos del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \int_0^x \int_0^t \rho(s) ds dt &= \int_0^x \int_t^x \rho(s) dt ds \\ &= \int_0^x (x-t) \rho(t) dt. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Al sustituir en la solución (A.23) y exigir que se satisfagan las condiciones de frontera de (A.22), tenemos que

$$u(0) = c_2 = 0,$$

y

$$u(1) = \int_0^1 (1-t) \rho(t) dt + c_1 = 0;$$

se sigue que $c_1 = -\int_0^1 (1-t) \rho(t) dt$, y de aquí que

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^1 G(x,t) \rho(t) dt \text{ con} \\ G(x,t) &= (x-t)H(x-t) - x(1-t). \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

$G(x,t)$ es la función de Green, pero también se le llama a menudo solución fundamental, por lo siguiente: en (A.25) se ve que $u(x)$ es la superposición de desplazamientos que resultan de aplicar fuerzas a cada elemento de masa $\rho(t)$ y

sumar sobre todas las t . La función $G(x, t)$ representa la influencia de una fuerza puntual en t sobre el desplazamiento en x .

En general, se pide a la función de Green que sea solución de la ecuación (A.21) con algunas condiciones de frontera homogéneas especificadas. Al resolver, buscaremos que la solución esté dada por la contracción de esta función con alguna otra que represente una fuente (de carga, de masa, ...) en el problema. Así es fácil proponer la interpretación de que se trata de una superposición de influencias infinitesimales sobre las fuentes dadas.

Funciones de Green: operadores diferenciales parciales

Terminamos esta breve exposición señalando que la transposición de las ideas manejadas en este apéndice a operadores diferenciales parciales es completamente natural, pues las ideas que se manejan son exactamente las mismas. Sea M un operador diferencial parcial en el espacio n -dimensional; las derivadas parciales distribucionales se definen sin problema de manera que sean consistentes tanto con sus análogas del cálculo de funciones ordinarias como con las derivadas totales de distribuciones. Obviamente, en este caso el espacio D de funciones de prueba contiene funciones de n argumentos. De nuevo, la solución de $Mu = f$ se escribirá como $u = \langle M^{-1}, f \rangle$, donde M^{-1} es un operador integral con núcleo K tal que satisface, distribucionalmente,

$$\langle M, K \rangle = \delta. \quad (\text{A.26})$$

Únicamente habrá que aclarar lo que la δ representa en este contexto, actuando sobre una función de prueba $\phi(x_1, \dots, x_n)$. Sencillamente definimos

$$\langle \delta, \phi \rangle = \phi \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n \text{ argumentos}}, \quad (\text{A.27})$$

o, usando la notación simbólica que introdujimos en la Sección A.1,

$$\langle \delta(x_1 - \xi_1, \dots, x_n - \xi_n), \phi(x_1, \dots, x_n) \rangle = \delta(\xi_1) \cdots \delta(\xi_n). \quad (\text{A.28})$$

Especialmente en el caso de funciones de pruebas de varias variables nos parece más conveniente la representación (A.28) que la estrictamente correcta (A.27), pues señala mucho mejor las variables involucradas.

Es posible repetir punto por punto los desarrollos previos de este apéndice, con pequeñas modificaciones de índole puramente formal para extender los resultados a funciones de prueba de varias variables. Las diversas ecuaciones hiperbólicas que ocurren en el cuerpo de este trabajo se entienden en el sentido débil, del mismo modo que sus soluciones.

Apéndice B

Una representación integral

En este apéndice presentamos detalladamente la obtención de la representación integral (3.35), utilizada en el Capítulo 3 para llegar a las ecuaciones integrales no lineales de Gelfand-Levitan. Comenzamos por escribir la segunda identidad de Green:

$$\int \int_{\Omega} (v \nabla^2 w - w \nabla^2 v) dx d\tau = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds; \quad (\text{B.1})$$

en esta identidad, Ω es una región del plano $x - \tau$ y $\partial\Omega$ su frontera. Nos referimos al operador Laplaciano como ∇^2 , y a la derivada en la dirección normal exterior a la frontera $\partial\Omega$ como $\partial/\partial n$, con s denotando longitud de arco sobre $\partial\Omega$. Para que tanto derivadas como operadores diferenciales tengan sentido al aplicarse a \hat{G}_i , por ejemplo, es necesario recurrir a la interpretación débil de la identidad (B.1). Durante todo este trabajo emplearemos esta interpretación. Aplicaremos esta identidad a las funciones $u(x, \tau)$ y $\hat{G}_i(x, t - \tau)$, donde $t > 0$, en la región A , con frontera $\partial A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$, como se ve en la Figura B.1.

El lado derecho de la identidad (B.1) queda, en este caso, como sigue:

$$L.D. = \int_0^R [\hat{G}_i(x, t) u_\tau(x, 0) - u(x, 0) \hat{G}_{i,\tau}(x, t)] dx \quad (\text{B.2})$$

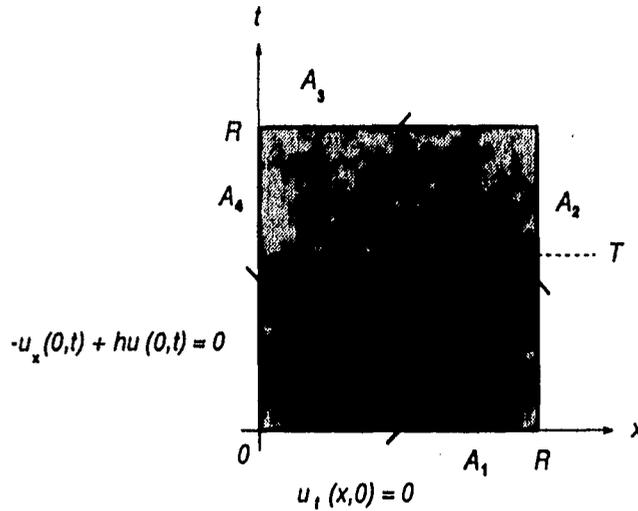


Figura B.1: Contorno de integración. La zona sombreada es A , el dominio de integración.

$$+ \int_0^R [u(R, \tau) \hat{G}_{i_x}(R, t - \tau) - \hat{G}_i(R, t - \tau) u_x(R, \tau)] d\tau \quad (\text{B.3})$$

$$+ \int_R^0 [u(x, R) \hat{G}_{i_r}(x, t - R) - \hat{G}_i(x, t - R) u_r(x, R)] dx \quad (\text{B.4})$$

$$+ \int_R^0 [\hat{G}_i(0, t - \tau) u_x(0, \tau) - u(0, \tau) \hat{G}_{i_x}(0, t - \tau)] d\tau \quad (\text{B.5})$$

En la integral (B.2), podemos anular el primer término utilizando la condición (3.31). Tomando el límite cuando $R \rightarrow \infty$ en lo que resta, veremos que las integrales (B.3) y (B.4) ambas se anulan. En el caso de la integral sobre A_3 , esto ocurre debido a la condición (3.33); cuando $R \rightarrow \infty$ llega un punto en el que, para t fija, $t - R < 0$, con lo que tendremos que tanto $\hat{G}_i(x, t - R)$ como $\hat{G}_{i_r}(x, t - R)$ son idénticamente cero. En cuanto a la anulación de la integral sobre A_2 , necesitamos no sólo esta última condición, sino que también hay que valerse del hecho de que $\hat{G}_i(x, \tau)$ es cero para $x < \tau$, ya que el soporte de $\hat{G}_i(x, \tau)$ es igual al de $G_i(x, \tau)$, por definición. Escribimos de nuevo el lado derecho:

$$\begin{aligned}
L.D. &= - \int_0^\infty u(x,0) \hat{G}_{i,r}(x,t) dx \\
&+ \int_0^\infty [u(0,\tau) \hat{G}_{i,x}(0,t-\tau) - u_x(0,\tau) \hat{G}_i(0,t-\tau)] dt \quad (B.6) \\
&= -\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2,
\end{aligned}$$

donde \mathbf{I}_1 e \mathbf{I}_2 coinciden con la primera y segunda integral, respectivamente. De la condición (3.30) deducimos que

$$h = \frac{u_x(0,t)}{u(0,t)};$$

factorizando $u(0,\tau)$ en \mathbf{I}_2 y empleando esta última relación:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_2 &= \int_0^\infty u(0,\tau) [\hat{G}_{i,x}(0,t-\tau) - h \hat{G}_i(0,t-\tau)] d\tau \\
&= - \int_0^\infty u(0,\tau) \delta(t-\tau) d\tau = -u(0,t). \quad (B.7)
\end{aligned}$$

Para obtener (B.7) nos ha bastado con recordar que $\hat{G}_i(x,t)$ está sujeta a condiciones de frontera (3.32) en $x=0$. Sustituyendo en (B.6), el lado derecho de la identidad (B.1) finalmente queda:

$$L.D. = - \int_0^\infty u(x,0) \hat{G}_{i,r}(x,t) dx - u(0,t). \quad (B.8)$$

Antes de trabajar directamente sobre la integral de área del lado izquierdo, establecemos la siguiente identidad:

$$\begin{aligned}
u \nabla^2 \hat{G}_i - \hat{G}_i \nabla^2 u &= u(\hat{G}_{i,xx} + \hat{G}_{i,tt}) - \hat{G}_i(u_{xx} + u_{tt}) \\
&= u(2\hat{G}_{i,tt} + q\hat{G}_i) - \hat{G}_i(2u_{tt} + qu) \quad (B.9)
\end{aligned}$$

$$= 2(u\hat{G}_{i,tt} - \hat{G}_i u_{tt}) = 2(u\hat{G}_{i,t} - \hat{G}_i u_t); \quad (B.10)$$

hemos aprovechado, está claro, el hecho de que tanto u como \hat{G}_i son soluciones de la ecuación (3.1) para escribir (B.9). Por lo tanto, al integrar el lado izquierdo, obtenemos, sustituyendo (B.10):

$$\begin{aligned}
 L.I. &= \int_0^\infty \int_0^\infty [u(x, \tau) \nabla^2 \hat{G}_i(x, t - \tau) - \hat{G}_i(x, t - \tau) \nabla^2 u(x, \tau)] d\tau dx \\
 &= 2 \int_0^\infty \int_0^\infty [u(x, \tau) \hat{G}_{i,r}(x, t - \tau) - \hat{G}_i(x, t - \tau) u_r(x, \tau)]_r d\tau dx \\
 &= 2 \int_0^\infty \left[u(x, \tau) \hat{G}_{i,r}(x, t - \tau) - \hat{G}_i(x, t - \tau) u_r(x, \tau) \right]_0^\infty dx. \quad (B.11)
 \end{aligned}$$

De nuevo, para $\tau \rightarrow \infty$ tendremos que $t - \tau < 0$, y por lo mismo, tanto \hat{G}_i como $\hat{G}_{i,r}$ se harán cero al ser evaluados en el límite superior del integrando en (B.11), usando otra vez (3.33). Por otra parte, hemos usado ya antes la condición (3.31) para anular el término $u_r(x, 0)$, que aparece al evaluar en el límite inferior; retenemos solamente un término en la integral del lado izquierdo:

$$L.I. = -2 \int_0^\infty u(x, 0) \hat{G}_{i,r}(x, t) dx. \quad (B.12)$$

Finalmente igualamos lados izquierdo y derecho,

$$-2 \int_0^\infty u(x, 0) \hat{G}_{i,r}(x, t) dx = - \int_0^\infty u(x, 0) \hat{G}_{i,r}(x, t) dx - u(0, t),$$

y de este modo obtenemos la representación siguiente:

$$\begin{aligned}
 u(0, t) &= \int_0^\infty \hat{G}_{i,r}(x, t) u(x, 0) dx \\
 &= \int_0^\infty G_i(x, t) u(x, 0) dx, \quad (B.13)
 \end{aligned}$$

donde hemos utilizado (3.34) para llegar a (B.13).

Bibliografía

- [1] Achenbach, J. D., *Wave Propagation in Elastic Solids*. Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1975.
- [2] Balanis, G. N., "The Plasma Inverse Problem". *Journal of Mathematical Physics*, **13** (1972), 1001-1005.
- [3] Burridge, R., "The Gelfand-Levitan, the Marchenko, and the Gopinath-Sondhi Integral Equations". *Wave Motion*, **2** (1980), 305-323.
- [4] Chadan, K. y P. C. Sabatier, *Inverse Problems in Quantum Scattering Theory*. Segunda edición. New York: Springer-Verlag, 1989.
- [5] Drazin, P. G. y R. S. Johnson, *Solitons: an Introduction*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
- [6] Friedman, B., *Principles and Techniques of Applied Mathematics*. New York: Dover Publications, 1956.
- [7] Gasiorowicz, S., *Quantum Physics*. New York: John Wiley & Sons, 1974.
- [8] Gelfand, I. M. y B. M. Levitan, "On the Determination of a Differential Equation from its Spectral Function". *American Mathematical Society Translations*, **1** (1956), 253.
- [9] Keener, J. P., *Principles of Applied Mathematics*. Reading, Mass.: Addison Wesley Publishing Company, 1993.
- [10] Lamb Jr., G. L., *Elements of Soliton Theory*. New York: John Wiley & Sons, 1980.

- [11] Levitan B. M., *Inverse Sturm-Liouville Problems*. Utrecht, the Netherlands: VNU Science, 1987.
- [12] Lighthill, M. J., *Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions*. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
- [13] Lovitt, W. V., *Linear Integral Equations*. New York: Dover Publications, 1950.
- [14] Sondhi, M. M., "A Survey of the Vocal Tract Inverse Problem: Theory, Computations and Experiment", en *Inverse Problems of Electric and Acoustic Waves*, editado por F. Santosa et al. Philadelphia: Siam, 1984.
- [15] Silverman, R. A., *Introductory Complex Analysis*. New York: Dover Publications, 1972.
- [16] Zauderer, E., *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*. Segunda edición. New York: John Wiley & Sons, 1989.
- [17] Zemanian, A. H., *Distribution Theory and Transform Analysis*. New York: Dover Publications, 1987.