



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

METODOS PARA LA SOLUCION DE LA
ECUACION DE FLUJO ESPACIALMENTE
VARIADO CON GASTO CRECIENTE Y
COMPARACION DE RESULTADOS CON UN
MODELO FISICO

TESIS PROFESIONAL
PARA OBTENER EL TITULO DE:
INGENIERO CIVIL
P R E S E N T A:
JUAN CARLOS GARCIA SALAS

ASESOR: M. en I. VICTOR FRANCO



MEXICO, D. F.

AGOSTO DE 1998

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

33
24

7



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERIA
DIRECCION
60-1-050/96

Señor
JUAN CARLOS GARCIA SALAS
Presente.

En atención a su solicitud me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor **ING. VICTOR FRANCO**, que aprobó esta Dirección, para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de **INGENIERO CIVIL**.

"METODOS PARA LA SOLUCION DE LA ECUACION DE FLUJO ESPACIALMENTE VARIADO CON GASTO CRECIENTE Y COMPARACION DE RESULTADOS CON UN MODELO FISICO"

- INTRODUCCION**
- I. ECUACION DINAMICA DEL FLUJO ESPACIALMENTE VARIADO CON GASTO CRECIENTE**
 - II. METODOS DE SOLUCION**
 - III. EJEMPLO**
 - IV. MEDICIONES EXPERIMENTALES**
 - V. ANALISIS Y DISCUSION DE RESULTADOS APLICANDO LOS DIFERENTES METODOS**
 - VI. CONCLUSIONES**
- REFERENCIAS**
APENDICES

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el título de ésta.

Asimismo le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar Examen Profesional.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria, a 9 de abril de 1996.
EL DIRECTOR.


ING. JOSE MANUEL COVARRUBIAS SOLIS

JMCS/GMP*nl1

7

**MÉTODOS PARA LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN
DE FLUJO ESPACIALMENTE VARIADO
CON GASTO CRECIENTE Y COMPARACIÓN DE
RESULTADOS CON UN MODELO FÍSICO**

1

A JOSEFINA SALAS, MI MADRE

A LA MEMORIA DE SERAFÍN GARCÍA, MI PADRE

***A
LOLY'S
ROSY
CECI
ALMA
CARO
JOSE, MIS HERMANAS***

A ALEJANDRO, MI HERMANO

A LA FAMILIA GARCÍA GARCÍA, MIS TÍOS Y PRIMOS

A LAS PERSONAS QUE ME QUIEREN Y ESTIMAN

INDICE

TEMA	PAGINA
INTRODUCCIÓN	
1. ECUACIÓN DINÁMICA DEL FLUJO ESPACIALMENTE VARIADO CON GASTO CRECIENTE	1
1.1. DETERMINACIÓN DE LA ECUACIÓN DINÁMICA DEL F.E.V.C. A PARTIR DEL PRINCIPIO DEL IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO	2
1.2. COMENTARIOS ACERCA DE LAS CORRECCIONES NO CONTEMPLADAS EN LA ECUACIÓN DEL F.E.V.C.	10
1.3. CONSIDERACIONES GEOMÉTRICAS E HIDRÁULICAS PARA OBTENER UNA SECCIÓN DE CONTROL AL FINAL DEL CANAL COLECTOR	12
2. MÉTODOS DE SOLUCIÓN	15
2.1. MÉTODO DE INTEGRACIÓN	16
2.1.1. INCREMENTOS FINITOS	
2.1.2. INTEGRACIÓN ANALÍTICA	17
2.2. MÉTODO GRÁFICO	18
2.3. MÉTODO PROPUESTO POR J. HINDS	19
2.4. MÉTODO PROPUESTO POR VIPARELLI	20
3. EJEMPLO	21
3.1. CÁLCULO DEL GASTO AFORADO	
3.2. RESUMEN DE DATOS GEOMÉTRICOS E HIDRÁULICAS DEL MODELO EXPERIMENTAL	22
4. MEDICIONES EXPERIMENTALES	25
4.1. INSTALACIÓN EXPERIMENTAL	
4.2. MEDICIONES EXPERIMENTALES	26
4.2.1. TIRANTES OBSERVADOS	

5. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS	29
5.1. CÁLCULOS PREVIOS	
5.1.1. CALCULO DE LA LÍNEA DE TIRANTES CRÍTICOS	
5.1.2. CALCULO DEL TIRANTE EN $x=L$	30
5.1.3. REVISIÓN DE CONDICIÓN DE FLUJO CON RÉGIMEN SUBCRÍTICO	31
5.2. MÉTODO DE INTEGRACIÓN	32
5.2.1. INCREMENTOS FINITOS	
5.2.2. INTEGRACIÓN ANALÍTICA	34
5.3. MÉTODO GRÁFICO	37
5.4. MÉTODO PROPUESTO POR J. HINDS	40
5.5. MÉTODO PROPUESTO POR VIPARELLI	43
5.6. EVALUACIÓN DE RESULTADOS	45
6. CONCLUSIONES	59
REFERENCIAS	
APÉNDICES	
APÉNDICE A	
APÉNDICE B	
APÉNDICE C	
APÉNDICE D	
APÉNDICE E	
APÉNDICE F	

INTRODUCCIÓN

El hombre desde los inicios de su racionalidad y conciencia de su estado sedentario, buscó controlar y aprovechar el agua para satisfacer sus nuevas necesidades; basta recordar para mostrar la importancia de este recurso a los mesopotámicos asentados en las riberas de dos importantes ríos: el Tigris y el Eufrates; y a los antiguos egipcios, que fundaron y desarrollaron su civilización gracias al control que tenían sobre el río Nilo; o los mexicas que, asentados en la cuenca del lago de Texcoco, desarrollaron y engrandecieron su imperio.

Por su naturaleza, el agua es un recurso caprichoso, y por ello el hombre se ha preocupado como hacer para controlarla de una manera más eficiente, para ello han pasado mas de 2200 años de pensamiento científico sobre el comportamiento físico del agua, desde Arquímedes hasta nuestros días.

Es así que la historia y evolución de la Hidráulica se ve matizada por pequeños y grandes avances, retrocesos y sobre todo por el mérito de la racionalidad y experimentación¹, logrando así una clasificación para el comportamiento físico del agua, de ahí que la Hidráulica

¹ Levi, Enzo. EL AGUA SEGÚN LA CIENCIA, C.O.N.A.C Y T. Castilla. México, 1989. p.13

INTRODUCCIÓN

se divide, entonces, en dos grupos: la Hidrostática, que estudia al agua en un estado de reposo y la Hidrodinámica, que estudia al agua en movimiento, ver FIGURA 1.

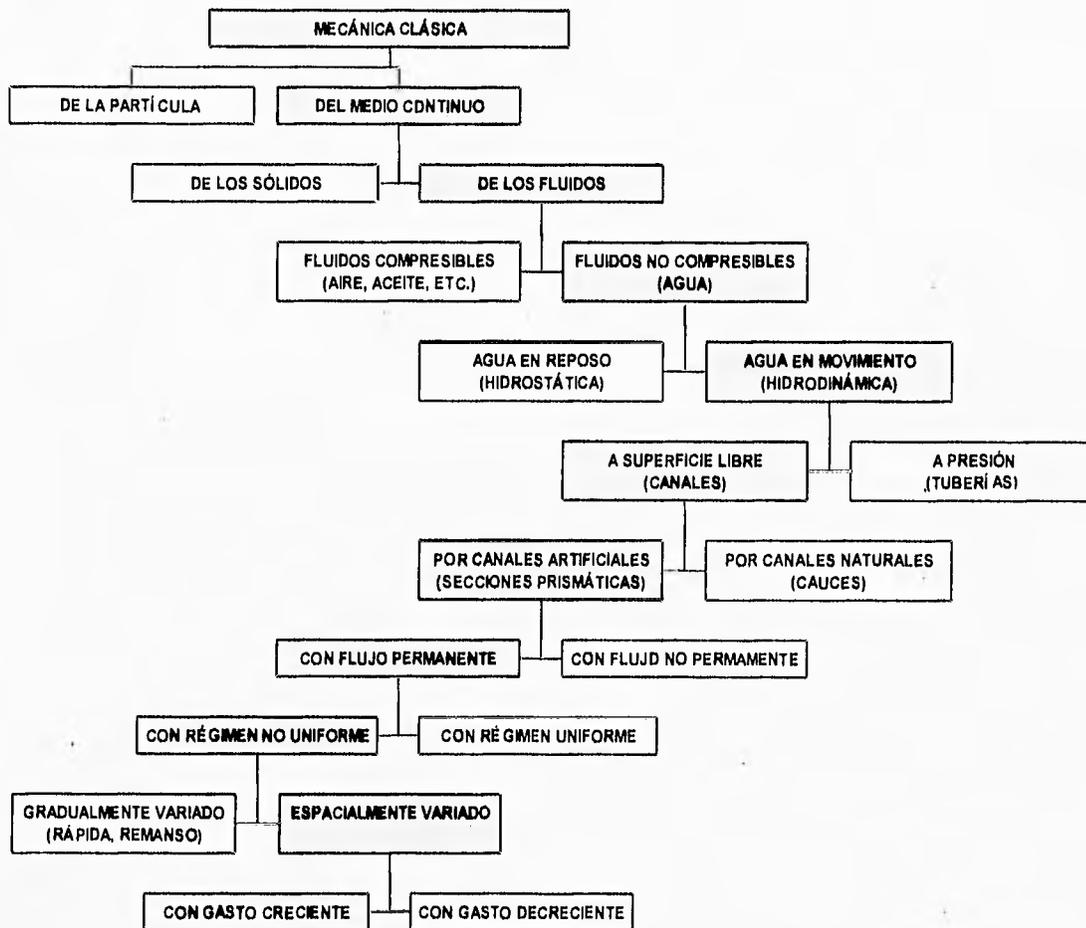


FIGURA 1. Entorno Hidráulico del Flujo Espacialmente Variado a Gasto Creciente

Con base en lo mostrado en la FIGURA 1., se puede llegar a presentar el flujo espacialmente variado cuando éste se desarrolla en la dirección del eje de un canal, es permanente y las características hidráulicas en cualquier sección transversal, estarán en función de la distancia. Para producir este tipo de flujo en una obra de excedencias de una presa (estructura hidráulica de aplicación en este trabajo), existe una estructura que producirá una variación de la cantidad de agua por unidad de tiempo (gasto) a lo largo del canal colector. A esta estructura se le conoce como vertedor de canal lateral y el comportamiento hidráulico de este, se calcula con flujo espacialmente variado a gasto creciente (F.E.V.C.). Por el contrario, si el agua sale del canal, entonces se conocerá como flujo espacialmente variado a gasto decreciente, el cual queda fuera de los alcances de esta tesis.

Al presentarse el F.E.V.C. en los vertedores de canal lateral, la teoría de su funcionamiento, adoptada para este trabajo, se basa en el principio del Impulso y Cantidad de Movimiento,

derivado de la Segunda Ley de Newton^{*}, suponiendo que las únicas fuerzas que producen movimiento en el canal, provienen de la caída de los tirantes hidráulicos en la dirección del eje. Estas fuerzas son: proyección del peso propio del agua en la dirección del movimiento, la fuerza que genera la presión hidrostática y la fuerza de oposición o de fricción; éstas se abordarán ampliamente en el capítulo 1.

Por otra parte, la teoría del funcionamiento del F.E.V.C. se basa también en el principio de energía; lo presenta González C (1991) retomando las ideas de Rouse H. (1970), obteniendo una expresión matemática similar a la deducida a partir del principio del Impulso y Cantidad de Movimiento.

Respecto a las características de descarga de un vertedor de canal lateral, éstas son semejantes a la de los vertedores ordinarios y dependen del perfil elegido para la cresta, sin embargo, para las descargas máximas, el funcionamiento hidráulico puede diferir de los vertedores ordinarios en que su cresta puede quedar parcialmente ahogada, y dado que el mezclado turbulento del gasto aportado lateralmente, con el que fluye en el canal colector en dirección de su eje producen una resistencia al flujo, lo hacen no ser lo suficientemente eficiente, pero las circunstancias físicas y económicas (topografía, geología, geomorfología, beneficio-costo, etc.) a veces hacen factible el diseño y construcción de tales estructuras. Por esta razón, Viparelli (1952), en su trabajo "Sue Proorzionamento dei Canali Collectori a Servizio di Scarichi di Superficie", plantea para tomar en cuenta en el diseño de vertedores de canal lateral, las turbulencias creadas por el agua que ingresa y la que fluye en el canal colector.

Es así, que el presente trabajo presenta la comparación de los resultados de diversos métodos matemáticos y uno gráfico para la solución de la ecuación del F.E.V.C. (ecuación elemental dentro del diseño) y los obtenidos en un modelo físico, con características geométricas conocidas.

^{*} La Segunda Ley de Newton, refiere que la resultante de un sistema de fuerzas aplicadas a un cuerpo está en función de la variación de su velocidad experimentada en el tiempo, y que esta resultante estará en proporción directa de la masa del cuerpo.

1. ECUACIÓN DINÁMICA DEL FLUJO ESPACIALMENTE VARIADO

Ciertamente la representatividad de un fenómeno físico se obtiene con la ayuda de una expresión matemática que a su vez depende de hipótesis simplificadoras que lo sustentan, por ello el objetivo de este capítulo es presentar el desarrollo matemático de la expresión que representa al F.E.V.C. a partir del principio del Impulso y Cantidad de Movimiento, basado en ciertas hipótesis que se presentan enseguida, así como comentarios que absorben las correcciones no contempladas dentro de la estructura matemática de la ecuación, finalizando con las consideraciones geométricas e hidráulicas para obtener una sección de control al final del canal colector, para garantizar un flujo con régimen subcrítico a lo largo de este.

De los primeros registros que se tienen, donde se desarrolla una expresión matemática para el F.E.V.C., corresponde al publicado por J. Hinds (1926), en su trabajo "Side Channel Spillway". Sin duda, la forma más conocida y la que aborda este trabajo, es el desarrollo de la ecuación diferencial que, basada en el principio del Impulso y Cantidad de Movimiento da a conocer Ven Te Chow (1959).

La expresión matemática que representa al F.E.V.C. es una ecuación diferencial (donde la variable dependiente es la función que determina la variación de los tirantes que se presentan en la dirección del flujo) similar a la expresión que representa el flujo gradualmente variado

1. ECUACIÓN DINÁMICA DEL FLUJO ESPACIALMENTE VARIADO A GASTO CRECIENTE

(deducida ésta a partir del principio de Energía), existiendo entre ambas una sola diferencia en su estructura matemática que consiste en que la ecuación del F.E.V.C. aparece un tercer término en el numerador, el cual toma en cuenta la variación del gasto en el desarrollo de la longitud del canal colector.

1.1. DETERMINACIÓN DE LA ECUACIÓN DINÁMICA DEL F.E.V.C. A PARTIR DEL PRINCIPIO DEL IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Como en todo estudio formal de la ingeniería, es imprescindible generar hipótesis para el desarrollo matemático del fenómeno a estudiar, con el fin de hacer simplificaciones que lleven a una solución matemática relativamente fácil; de ahí que para el desarrollo de la ecuación que representa al F.E.V.C. se presenten las simplificaciones siguientes:

- **El análisis matemático es unidimensional**, debido a que el análisis en las otras dos direcciones, para efectos de este estudio, no tienen una interpretación física, determinando el sentido positivo como el que se desarrolla en la dirección del flujo o el de izquierda a derecha.
- **La pendiente del canal es relativamente pequeña**, con ello se asume que su efecto sobre el tirante (carga de presión) entre dos secciones separadas por una diferencial de longitud, es despreciable.
- **La distribución de presiones sigue la ley hidrostática**, debido a que las líneas de corriente generadas a lo largo del canal tienen una curvatura despreciable.
- **La distribución de la velocidad no cambia**, con lo que el coeficiente de Coriolis (α) será igual a la unidad.
- **El coeficiente de momentum no cambia**, con lo que el coeficiente de Boussinesq (β) permanecerá constante e igual a uno.

Para la determinación de la ecuación dinámica del F.E.V.C., se parte del principio de Impulso y Cantidad de Movimiento, derivado de la Segunda Ley de Newton, que para este primer análisis se hará en una sección cualquiera.

Sea un volumen de control en el canal colector (FIGURA 1.1), donde exista flujo con un gasto Q y con masa m , en este se experimenta una aceleración \bar{a} y la fuerza \bar{F} asociada al producto de ambas. Aplicando la Segunda Ley de Newton

$$\bar{F} = m \cdot \bar{a}$$

1. ECUACIÓN DINÁMICA DEL FLUJO ESPACIALMENTE VARIADO A GASTO CRECIENTE

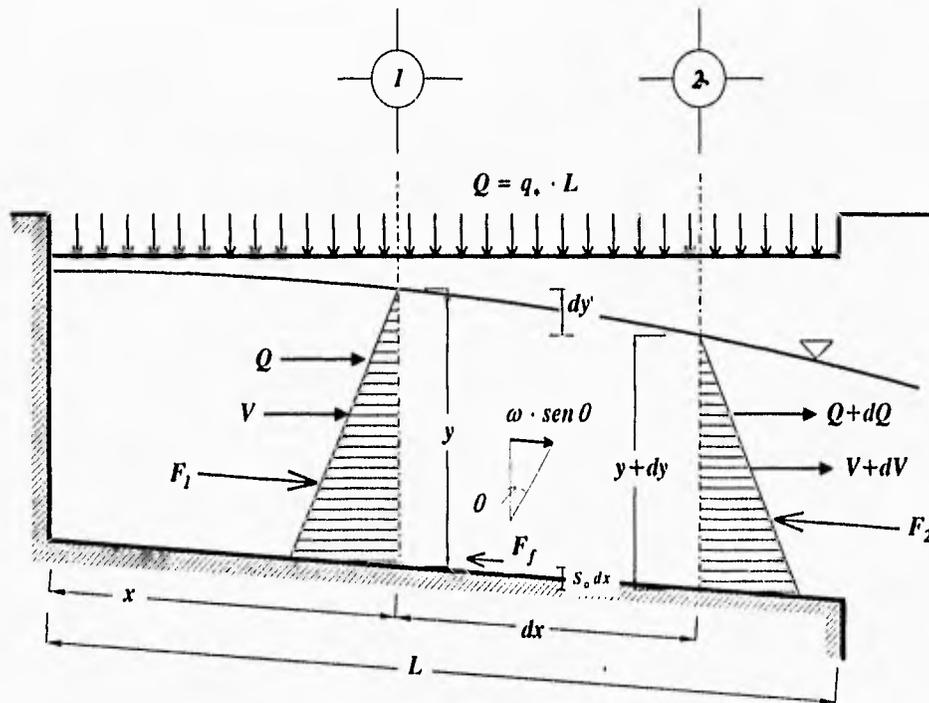


FIGURA 1.1 Análisis gráfico del F.E.V.C.

por lo tanto

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} \Rightarrow \vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{V}}{dt}$$

quiere decir

$$dt \cdot \vec{F} = m \cdot d\vec{V} \quad (1.1)$$

Siendo el primer miembro de la ECUACIÓN (1.1) el impulso, y el segundo miembro la cantidad de movimiento experimentados por el flujo en esa sección.

Partiendo de la ECUACIÓN (1.1) y tratando a \vec{F} y \vec{V} como escalares, dado que el análisis es unidimensional

$$dt \cdot F = m \cdot dV \quad (1.1a)$$

donde

- F fuerza resultante en una sección
- dt intervalo de tiempo en el que sucede la variación de la velocidad
- m masa de un volumen de control
- dV variación de la velocidad

Si

$$\omega = m \cdot g \Rightarrow \quad (1.2)$$

1. ECUACIÓN DINÁMICA DEL FLUJO ESPACIALMENTE VARIADO A GASTO CRECIENTE

$$\gamma = \frac{\omega}{V}$$

donde:

- γ peso volumétrico del agua
- ω peso del volumen de control
- V volumen ocupado por el volumen de control

Dividiendo y multiplicando el segundo miembro de la última expresión por el tiempo se tiene

$$\gamma = \frac{\omega}{Vol} \cdot \frac{t}{t} = \frac{\omega}{Q \cdot t}$$

sustituyendo (1.3) en la expresión anterior

$$\gamma = \frac{m \cdot g}{Q \cdot t}$$

despejando a m

$$m = \frac{\gamma \cdot Q \cdot t}{g} \quad (1.4)$$

sustituyendo (1.4) en (1.1)

$$\frac{d}{dt} \int_V \bar{x} \cdot F = \frac{\gamma}{g} \cdot Q \cdot t \cdot \frac{dV}{dt}$$

integrando ambos miembros de la ecuación

$$\int_V \bar{x} = \frac{\gamma}{g} \cdot Q \cdot t \cdot \int_V \frac{dV}{dt} = F \cdot t = \frac{\gamma}{g} \cdot Q \cdot t \cdot V$$

Por lo tanto

$$\bar{x} = M = \frac{\gamma}{g} \cdot Q \cdot V \quad (1.5)$$

donde

- M momento en una sección cualquiera del canal resultante de las fuerzas ejercidas
- Q gasto en una sección
- V volumen de agua en una sección

Assumiendo que la ECUACIÓN (1.5) corresponde al momento en la sección 1, de la FIGURA 1.1 se deduce que el momento en la sección 2 es

$$M_2 = \frac{\gamma}{g} \cdot (Q - U_2^2) \cdot (V_2 - V_2^2)$$

por lo que la variación de momento entre las secciones 1 y 2, es dada por

1. ECUACIÓN DINÁMICA DEL FLUJO ESPACIALMENTE VARIADO A GASTO CRECIENTE

$$\gamma = \frac{\omega}{\nabla}$$

donde:

- γ peso volumétrico del agua
- ω peso del volumen de control
- ∇ volumen ocupado por el volumen de control

Dividiendo y multiplicando el segundo miembro de la última expresión por el tiempo se tiene

$$\gamma = \frac{\omega}{Vol} \cdot \frac{t}{t} = \frac{\omega}{Q \cdot t}$$

sustituyendo (1.2) en la expresión anterior

$$\gamma = \frac{m \cdot g}{Q \cdot t}$$

despejando a m

$$m = \frac{\gamma \cdot Q \cdot t}{g} \quad (1.2a)$$

sustituyendo (1.2a) en (1.1a)

$$dt \cdot F = \frac{\gamma}{g} \cdot Q \cdot t \cdot dV$$

integrando ambos miembros de la ecuación

$$F \cdot \int_0^t dt = \frac{\gamma}{g} \cdot Q \cdot t \cdot \int_0^V dV \quad \Rightarrow \quad F \cdot t = \frac{\gamma}{g} \cdot Q \cdot t \cdot V$$

Por lo tanto

$$F = M = \frac{\gamma}{g} \cdot Q \cdot V \quad (1.3)$$

donde

- M momentum en una sección cualquiera del canal (resultante de las fuerzas externas)
- Q gasto en una sección
- V velocidad media en una sección

Asumiendo que la ECUACIÓN (1.3) corresponde al momentum en la sección 1, de la FIGURA 1.1 se observa que el momentum en la sección 2 es

$$M_2 = \frac{\gamma}{g} \cdot (Q + dQ) \cdot (V + dV)$$

por lo que la variación del momentum entre las secciones 1 y 2, está dado por

1. ECUACIÓN DINÁMICA DEL FLUJO ESPACIALMENTE VARIADO A GASTO CRECIENTE

$$M_2 - M_1 = \frac{\gamma}{g} \cdot (Q + dQ) \cdot (V + dV) - \frac{\gamma}{g} \cdot Q \cdot V = \Sigma F_i$$

Desarrollando y simplificando el miembro de la derecha de la expresión anterior

$$\frac{\gamma}{g} \cdot (Q \cdot V + Q \cdot dV + V \cdot dQ + dQ \cdot dV) - \frac{\gamma}{g} \cdot Q \cdot V$$

eliminando productos de diferenciales y en lo sucesivo considerándolos como cero, se tiene

$$M_2 - M_1 = \frac{\gamma}{g} [Q \cdot dV + dQ \cdot (V + dV)] \quad (1.4)$$

Por otra parte, calculando cada una de las fuerzas externas actuando en el volumen de control en la dirección del flujo, se tiene que

- **Fuerza debida al peso propio**

Siendo el ángulo θ el de inclinación de la plantilla del canal muy pequeño, implica que

$$S_o = \tan \theta \cong \text{sen } \theta$$

Si ω es el peso del volumen de control entre las secciones 1 y 2 y de la FIGURA 1.1 se observa que su componente en el sentido del flujo es

$$\omega \cdot \text{sen } \theta = \gamma \cdot \left(A + \frac{1}{2} \cdot dA \right) \cdot dx \cdot S_o$$

donde

- ω peso del agua entre las secciones 1 y 2
- θ ángulo de inclinación de la plantilla del canal colector
- A área transversal en la sección 1
- S_o pendiente de la plantilla del canal colector

Desarrollando y eliminando el producto de diferenciales se llega a

$$\omega \cdot \text{sen } \theta = \gamma \cdot A \cdot S_o \quad (1.5)$$

- **Fuerza de fricción**

Por definición

1. ECUACIÓN DINÁMICA DEL FLUJO ESPACIALMENTE VARIADO A GASTO CRECIENTE

$$S_f = \frac{h_f}{L} \quad S_{f_{1-2}} = \frac{h_{f_{1-2}}}{dx}$$

donde

$S_{f_{1-2}}$ pendiente hidráulica entre las secciones 1 y 2

$h_{f_{1-2}}$ pérdida de energía entre las secciones 1 y 2

Por lo tanto

$$F_f = \gamma \cdot \left(A + \frac{1}{2} \cdot dA \right) \cdot h_{f_{1-2}} = \gamma \cdot \left(A + \frac{1}{2} \cdot dA \right) \cdot S_{f_{1-2}} \cdot dx$$

eliminando producto de diferenciales, se tiene que

$$F_f = \gamma \cdot A \cdot S_{f_{1-2}} \cdot dx \quad (1.6)$$

donde

F_f fuerza de fricción

• Fuerza debida a la presión hidrostática

Obteniendo las fuerzas debidas a las presiones hidrostáticas en las secciones 1 y 2

$$F_1 = \gamma \cdot \bar{z} \cdot A$$

donde

F_1 fuerza debida a la presión hidrostática en la sección 1

\bar{z} profundidad al centro geométrico en la sección 1

A área hidráulica de la sección 1

Análogamente, la fuerza debida a la presión hidrostática en la sección 2, es

$$F_2 = \gamma \cdot (\bar{z} + dy) \cdot \left(A + \frac{1}{2} \cdot dA \right) = \gamma \cdot (\bar{z} + dy) \cdot A + \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot dA \cdot dy + \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot \bar{z} \cdot dA$$

donde

dy diferencia de los tirantes entre las secciones 1 y 2

Desarrollando y eliminando productos de diferenciales se llega a

$$F_2 = \gamma \cdot (\bar{z} + dy) \cdot A$$

quiere decir, que la diferencia de las fuerzas debidas a la presión hidrostática es igual a

$$F_1 - F_2 = \gamma \cdot \bar{z} \cdot A - \gamma \cdot (\bar{z} + dy) \cdot A$$

1. ECUACIÓN DINÁMICA DEL FLUJO ESPACIALMENTE VARIADO A GASTO CRECIENTE

desarrollando y simplificando, se tiene

$$F_1 - F_2 = -\gamma \cdot dy \quad (1.7)$$

Igualando la diferencia de momentums entre las secciones 1 y 2, con todas las fuerzas externas actuantes en el volumen de control; es decir, las ECUACIONES (1.4) con (1.5), (1.6) y (1.7), se obtiene

$$M_2 - M_1 = \omega \cdot \text{sen } \theta - F_f + (F_1 - F_2) \quad (1.8)$$

llevando (1.4) a (1.8), y desarrollando

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{g} [Q \cdot dV + dQ \cdot (V + dV)] &= \gamma \cdot S_o \cdot A \cdot dx - \gamma \cdot A \cdot S_{f_{1-2}} \cdot dx - \gamma \cdot A \cdot dy \\ \frac{\gamma}{g} (Q \cdot dV + V \cdot dQ + dQ \cdot dV) &= \gamma \cdot S_o \cdot A \cdot dx - \gamma \cdot A \cdot S_{f_{1-2}} \cdot dx - \gamma \cdot A \cdot dy \end{aligned} \quad (1.9)$$

simplificando y eliminando productos de diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} (Q \cdot dV + V \cdot dQ) &= A \cdot [dx \cdot (S_o - S_{f_{1-2}}) - dy] \\ \frac{1}{g} \left(\frac{Q}{A} \cdot dV + \frac{V}{A} \cdot dQ \right) &= (S_o - S_{f_{1-2}}) \cdot dx - dy \end{aligned}$$

por continuidad se observa

$$V = \frac{Q}{A} \quad \Rightarrow \quad V + dV = \frac{Q + dQ}{A + dA}$$

Despejando a dy , sustituyendo la relación anterior y desarrollando, se tiene que

$$\begin{aligned} dy &= -\frac{1}{g} \cdot \left(V \cdot dV + \frac{V}{A} \cdot dQ \right) + (S_o - S_{f_{1-2}}) \cdot dx = -\frac{V}{g} \cdot \left(dV + \frac{1}{A} \cdot dQ \right) + (S_o - S_{f_{1-2}}) \cdot dx \\ dy &= -\frac{V}{g} \cdot \left(\frac{Q + dQ}{A + dA} - V + \frac{1}{A} \cdot dQ \right) + (S_o - S_{f_{1-2}}) \cdot dx \\ dy &= -\frac{V}{g} \cdot \left(\frac{Q + dQ}{A + dA} - \frac{Q}{A} + \frac{1}{A} \cdot dQ \right) + (S_o - S_{f_{1-2}}) \cdot dx \end{aligned}$$

1. ECUACIÓN DINÁMICA DEL FLUJO ESPACIALMENTE VARIADO A GASTO CRECIENTE

$$dy = -\frac{V}{g} \left[\frac{A \cdot (Q + dQ) - (A + dA) \cdot Q + (A + dA) \cdot dQ}{A \cdot (A + dA)} \right] + (S_1 - S_{f, 1-2}) \cdot dx$$

$$dy = -\frac{V}{g} \left[\frac{A \cdot Q + A \cdot dQ + A \cdot dQ + dA \cdot dQ - A \cdot Q - dA \cdot Q}{A^2 + A \cdot dA} \right] + (S_1 - S_{f, 1-2}) \cdot dx$$

simplificando y eliminando productos de diferenciales, se obtiene

$$dy = -\frac{V}{g} \left(\frac{2 \cdot A \cdot dQ - Q \cdot dA}{A^2} \right) - (S_1 - S_{f, 1-2}) \cdot dx$$

multiplicando y dividiendo por dx ambos miembros de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{V}{g} \left(\frac{2 \cdot A \cdot dQ - Q \cdot dA}{A^2} \right) - (S_1 - S_{f, 1-2})$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2 \cdot V \cdot A}{g \cdot A^2} \frac{dQ}{dx} + \frac{V \cdot Q}{g \cdot A^2} \frac{dA}{dx} - (S_1 - S_{f, 1-2})$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2 \cdot Q}{g \cdot A^2} \frac{dQ}{dx} + \frac{V \cdot Q}{g \cdot A^2} \frac{dA}{dx} - (S_1 - S_{f, 1-2})$$

Como se ve, para la sección trapezoidal de la FIGURA 1.1 se cumple que

$$3 \cdot Q = dQ \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{dQ}{Q}$$



FIGURA 1.1. Simbolos del método de Manning

sección

sección trapezoidal de la FIGURA 1.1 se cumple que

1. ECUACIÓN DINÁMICA DEL FLUJO ESPACIALMENTE VARIADO A GASTO CRECIENTE

$$dy = -\frac{V}{g} \cdot \left[\frac{A \cdot (Q + dQ) - (A + dA) \cdot Q + (A + dA) \cdot dQ}{A \cdot (A + dA)} \right] + (S_o - S_{f_{1-2}}) \cdot dx$$

$$dy = -\frac{V}{g} \cdot \left[\frac{A \cdot Q + A \cdot dQ + A \cdot dQ + dA \cdot dQ - A \cdot Q - dA \cdot Q}{A^2 + A \cdot dA} \right] + (S_o - S_{f_{1-2}}) \cdot dx$$

simplificando y eliminando productos de diferenciales, se obtiene

$$dy = -\frac{V}{g} \cdot \left(\frac{2 \cdot A \cdot dQ - Q \cdot dA}{A^2} \right) + (S_o - S_{f_{1-2}}) \cdot dx$$

multiplicando y dividiendo por dx ambos miembros de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{V}{g} \cdot \left(\frac{2 \cdot A \cdot dQ - Q \cdot dA}{A^2} \right) \cdot \frac{1}{dx} + S_o - S_{f_{1-2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(-\frac{2 \cdot V \cdot A}{g \cdot A^2} \cdot \frac{dQ}{dx} + \frac{V \cdot Q}{g \cdot A^2} \cdot \frac{dA}{dx} + S_o - S_{f_{1-2}} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2 \cdot Q}{g \cdot A^2} \cdot \frac{dQ}{dx} + \frac{V \cdot Q}{g \cdot A^2} \cdot \frac{dA}{dx} + S_o - S_{f_{1-2}} \quad (1.9a)$$

Ahora bien, para la sección trapezoidal de la FIGURA 1.2 se cumple que

$$B \cdot dy = dA \quad \Rightarrow \quad B = \frac{dA}{dy}$$

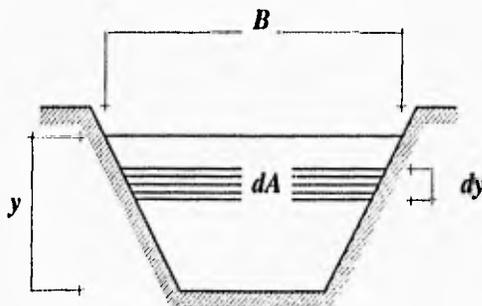


FIGURA 1.2 Análisis del ancho hidráulico

donde

B ancho hidráulico de la superficie libre en una sección

1. ECUACIÓN DINÁMICA DEL FLUJO ESPACIALMENTE VARIADO A GASTO CRECIENTE

Dividiendo y multiplicando por dy el segundo término de la suma en la ECUACIÓN (1.9a)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2 \cdot Q}{g \cdot A^2} \cdot \frac{dQ}{dx} + \frac{V \cdot Q}{g \cdot A^2} \cdot \frac{dA}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + S_o - S_{f_{1-2}}$$

sustituyendo la relación del ancho hidráulico, y despejando a $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{V \cdot Q}{g \cdot A^2} \cdot B \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{2 \cdot Q}{g \cdot A^2} \cdot \frac{dQ}{dx} + S_o - S_{f_{1-2}}$$

reordenando

$$\frac{dy}{dx} \cdot \left(1 - \frac{V \cdot Q}{g \cdot A^2} \cdot B \right) = -\frac{2 \cdot Q}{g \cdot A^2} \cdot \frac{dQ}{dx} + S_o - S_{f_{1-2}}$$

Por lo tanto, la ecuación anterior se reduce a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_{f_{1-2}} - \frac{2 \cdot Q}{g \cdot A^2} \cdot \frac{dQ}{dx}}{\left(1 - \frac{V \cdot Q}{g \cdot A^2} \cdot B \right)}$$

por definición de tirante hidráulico

$$Y = \frac{A}{B}$$

donde

Y tirante hidráulico

Retomando la expresión anterior, multiplicando y dividiendo por A el segundo término del denominador, por continuidad se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_{f_{1-2}} - \frac{2 \cdot Q}{g \cdot A^2} \cdot \frac{dQ}{dx}}{\left(1 - \frac{V \cdot Q}{g \cdot A^2} \cdot \frac{B \cdot A}{A} \right)} \quad (1.9b)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_{f_{1-2}} - \frac{2 \cdot Q}{g \cdot A^2} \cdot \frac{dQ}{dx}}{\left(1 - \frac{Q^2}{g \cdot A^2 \cdot Y} \right)} \quad (1.9c)$$

Ahora bien, si

1. ECUACIÓN DINÁMICA DEL FLUJO ESPACIALMENTE VARIADO A GASTO CRECIENTE

$$Fr = \frac{Q}{\sqrt{g \cdot Y \cdot A}} \qquad Fr^2 = \frac{Q^2}{g \cdot A^2 \cdot Y}$$

entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_{f_{1-2}} - \frac{2 \cdot Q}{g \cdot A^2} \cdot \frac{dQ}{dx}}{1 - Fr^2}$$

Si definimos a la siguiente relación como

$$\frac{dQ}{dx} = q.$$

Por lo tanto la Ecuación Dinámica del Flujo Espacialmente Variado a gasto creciente (F.E.V.C.), queda

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_{f_{1-2}} - \frac{2 \cdot Q}{g \cdot A^2} \cdot q}{1 - Fr^2} \qquad (1.9d)$$

donde

- $\frac{dy}{dx}$ variación del tirante a lo largo del canal
- q gasto unitario, o variación del gasto a lo largo del canal
- Y tirante hidráulico medio
- S_0 pendiente de la plantilla
- $S_{f_{1-2}}$ pendiente hidráulica entre dos secciones
- A área de la sección hidráulica en una sección
- Q gasto acumulado en una sección
- g aceleración de la gravedad
- Fr número de Froude correspondiente a la sección en estudio

Como se mencionó anteriormente, también la ECUACIÓN (1.9d) puede obtenerse a partir del principio de energía, planteando como punto de partida la diferencia de energías entre dos secciones en el sentido del flujo, adicionando a ésta la energía debida al gasto que ingresa lateralmente.

1.2. COMENTARIOS ACERCA DE LAS CORRECCIONES NO CONTEMPLADAS EN LA ECUACIÓN DEL F.E.V.C.

En el caso que, por las características del problema por resolver en el vertedor de canal lateral, exista una distribución de velocidades no uniforme y que el ángulo de acceso del agua a la cresta vertedora fuera diferente a 90° (ver FIGURA 1.3) la ECUACIÓN (1.9d), cambiaría su estructura matemática siendo de la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_{f_{1-2}} - \frac{2 \cdot \alpha \cdot Q}{g \cdot A^2} \cdot q_* \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{u}{V} \cdot \text{sen } \delta\right)}{1 - Fr^2}$$

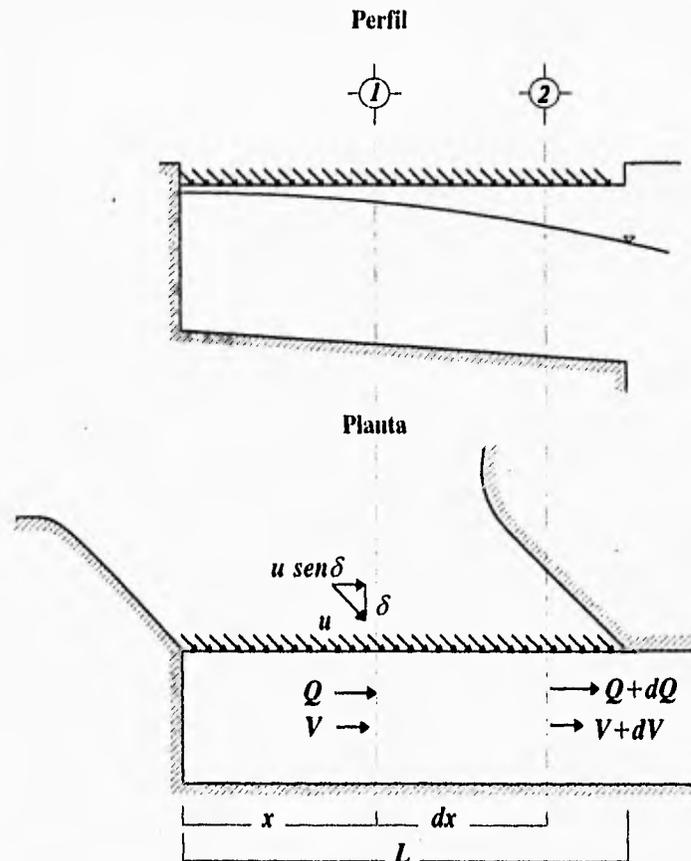


FIGURA 1.3 Análisis gráfico del F.E.V.C. con acceso del gasto no perpendicular al vertedor

donde

- α coeficiente de corrección de distribución de velocidades, Coriolis*
- δ ángulo de acceso del agua a la cresta vertedora
- u velocidad de acceso del agua a la cresta vertedora

Respecto a la corrección por el ángulo de entrada, se puede demostrar análogamente que en el análisis del momentum, entre las secciones 1 y 2 (ECUACIÓN 1.4) interviene la proyección en el

* El coeficiente de Coriolis sirve para tomar en cuenta que se está utilizando una distribución de velocidad media, en lugar de usar la verdadera distribución de velocidades.

1. ECUACIÓN DINÁMICA DEL FLUJO ESPACIALMENTE VARIADO A GASTO CRECIENTE

sentido del eje longitudinal del canal colector, el momentum debido al ingreso del gasto por el vertedor, como se puede apreciar en la FIGURA 1.3.

1.3. CONSIDERACIONES GEOMÉTRICAS E HIDRÁULICAS PARA OBTENER UNA SECCIÓN DE CONTROL AL FINAL DEL CANAL COLECTOR

Tanto en el F.E.V.C.; como en el Gradualmente Variado, se presentan diversos tipos de perfiles, éstos dependerán tanto del número de Froude como del valor de la pendiente. Li (1955), realizó el análisis de los perfiles del F.E.V.C., en canales cortos, de sección hidráulica muy ancha* y de geométrica indistinta, en los que la pérdida por fricción es despreciable. Sus resultados tienen utilidad en el análisis de los perfiles de flujo, encontrando que su clasificación depende de una relación entre el número de Froude en la sección con cadenamiento $x = L$ y del parámetro G .

$$G = \frac{S_o \cdot L}{y_L}$$

donde

- S_o pendiente de la plantilla del canal colector
- L longitud total del canal colector
- y_L tirante al final del canal colector

Los resultados de este análisis, se pueden resumir en el diagrama general presentado en la FIGURA 1.4.

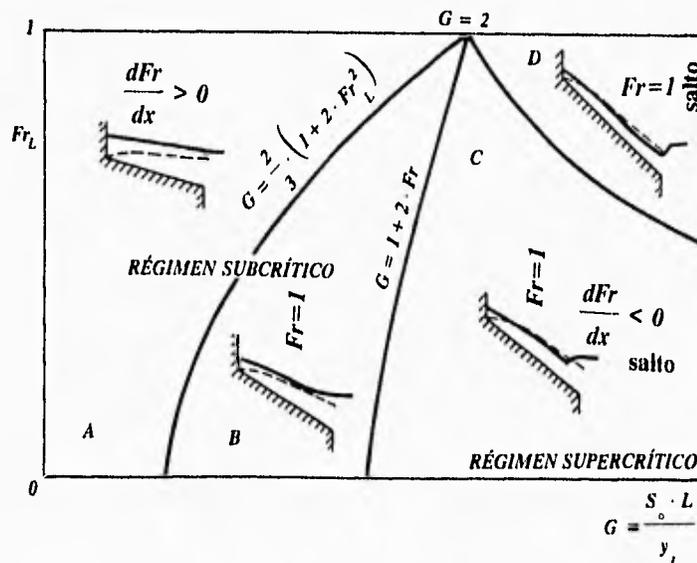


FIGURA 1.4 Tipos de régimen en F.E.V.C.

* Experimentalmente se ha determinado que una sección hidráulica muy ancha, es aquella en donde la relación ancho (B) tirante (y) es > 40

1. ECUACIÓN DINÁMICA DEL FLUJO ESPACIALMENTE VARIADO A GASTO CRECIENTE

Este diagrama consiste en 4 regiones, representando cuatro condiciones de flujo, y sus respectivos perfiles.

En la Región A se presenta la condición donde el flujo es subcrítico en cada una de las secciones del canal colector, y en donde el valor del número de Froude tiende a 1 a medida que el flujo recorre la distancia en el canal colector (FIGURA 1.5), siendo esta la presentada en este trabajo.

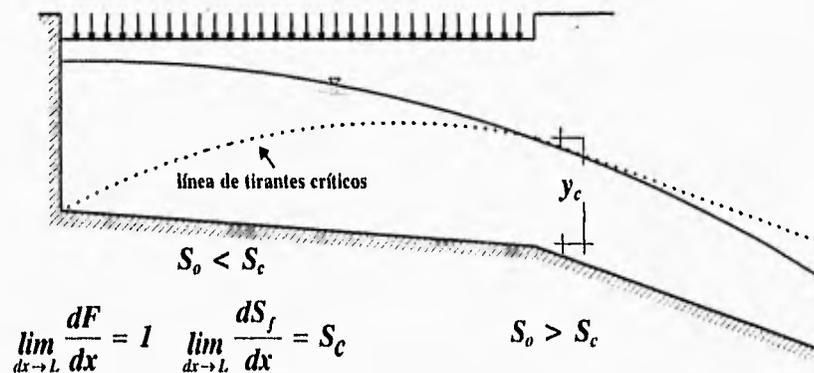


FIGURA 1.5 Tirante crítico generado por cambio de pendiente, de subcrítica a supercrítica en la sección con cadenamiento $x=L$

Para forzar a esta condición, es necesario generar un tirante controlado o crítico en la sección con cadenamiento $x=L$. Este tirante se logra con la construcción de un escalón, con una reducción o con un cambio de pendiente subcrítica a supercrítica, por lo que la desigualdad obtenida por Li se debe cumplir en los términos de

$$\frac{S_0 \cdot L}{y_L} \leq \frac{2}{3} \cdot (1 + 2 \cdot Fr_L^2) \quad (1.10)$$

donde

Fr_L número de Froude en la sección $x = L$

Un escalón, como el que se usó en este trabajo, en el extremo aguas abajo del canal colector, permite establecer un tirante crítico, independiente del gasto, encontrándose a una distancia d aguas abajo, como se ilustra en la FIGURA 1.6, en el canal colector de la sección con cadenamiento $x = L$.

1. ECUACIÓN DINÁMICA DEL FLUJO ESPACIALMENTE VARIADO A GASTO CRECIENTE

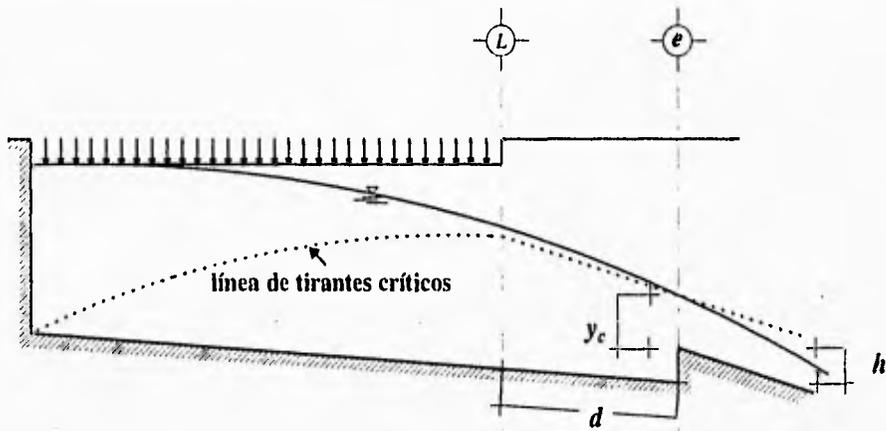


FIGURA 1.6 Tirante crítico generado por escalón a una distancia d

La distancia d tiene por objeto aplicar la ecuación de la energía entre las secciones e y L . Guarga R. (1983), comprobó experimentalmente que para $d = 3 \cdot h$ se verifica un buen funcionamiento en el momento de aplicar la ecuación de la energía entre las secciones mencionadas. Cabe señalar que el autor antes citado, también clasifica los diferentes tipos de perfiles en función de la pendiente de la plantilla y de un punto llamado singular, donde este punto de abscisa x_0 y ordenada y_0 , resulta de la intersección de la línea de los tirantes críticos y del perfil de la lámina de agua en el canal colector, presentándose ahí una sección crítica.

Finalmente, si el régimen del flujo es subcrítico, existirá otra forma de aforo siendo este a través de una reducción en el ancho de la plantilla del canal de descarga, generando así una reducción del área hidráulica y, por continuidad aumentará la velocidad; si se aplica el principio de la energía entre las dos secciones (original y reducida) podrá conocerse el ancho b para las condiciones de un gasto dado.

2. MÉTODOS DE SOLUCIÓN

Es importante destacar que la ecuación dinámica del F.E.V.C., es una ecuación del tipo diferencial, de primer orden, no homogénea y de coeficientes variables, por la cual su solución, es una función que determina la variación de los tirantes en un canal colector; dependiente de la distancia.

También, dentro de la ecuación, existe otra función que define a la expresión matemática del F.E.V.C., esta función es la del gasto de ingreso, y depende de la longitud, aunque esta, por lo general, y en la mayoría de los casos será de tipo lineal, por lo que su variación respecto a la longitud se denota mediante una constante, q .

Como se puede apreciar, la ecuación dinámica del F.E.V.C. tiene una complejidad matemática importante para poderla resolver de una forma analítica, si se contemplan cada uno de sus términos, por ello a través de varios autores en el tiempo, desde que J. Hinds¹ interpretó este fenómeno, se han presentado varias formas y métodos para obtener dicha solución. Estas formas y métodos presentan simplificaciones que hacen, por una parte, reducir la expresión matemática

¹ Hinds, J. SIDE CHANNEL SPILLWAYS: HYDRAULIC THEORY, ECONOMIC FACTORS AND EXPERIMENTAL DETERMINATION OF LOSSES. Transactions ASCE, Vol . 89, pp. 881-927. E.U.A. 1926.

2. MÉTODOS DE SOLUCIÓN

a una mas fácil, manteniendo su condición de continuidad, y por otra, aplicar métodos experimentales así como la utilización de métodos numéricos para discretizar la función que se desea resolver. Favre², incluye un término de fricción y una componente de la velocidad en la dirección del eje del canal colector, este método requiere un cálculo con iteraciones sucesivas. Para canales prismáticos con variación uniforme del gasto a través de la longitud del canal colector, la ecuación diferencial del F.E.V.C., ha sido integrada por Camp³ y Li⁴. En estudios teóricos y experimentales del F.E.V.C., fueron hechos también por De Marchi⁵, Citrini⁶, Fochheimer⁷, Viparelli⁸, Keulegan⁹, Bleij¹⁰, Guarga¹¹, Hager¹².

En este capítulo se presentan cinco de los varios métodos de solución existentes, los cuales para el diseño de canales laterales en presas, cuatro son comunmente utilizados, su fundamento matemático e hidráulico se presenta en los **Apéndices A, B, C, D, E**.

2.1. MÉTODO DE INTEGRACIÓN

Este método integra la función de la variación de los tirantes respecto a la distancia mediante dos formas, éstas se describen a continuación:

2.1.1. INCREMENTOS FINITOS

Este método de solución fue desarrollado por Ven Te Chow (1959) y es el más difundido hasta el momento en la bibliografía especializada. Parte de la igualdad del momentum y de las fuerzas actuantes en un volumen de control (ECUACIÓN 1.9).

$$\frac{\gamma}{g} \cdot [Q \cdot \Delta V + \Delta Q \cdot (V + \Delta V)] = \gamma \cdot S_o \cdot A_{I-2} \cdot x - \gamma \cdot A_{I-2} \cdot S_{f_{I-2}} \cdot x - \gamma \cdot A_{I-2} \cdot y$$

El volumen de control, está acotado en el eje longitudinal por dos secciones separadas por un

² Favre, H. CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES COURANTS LIQUIDES. Dunond. Paris 1933.

³ Camp, Thomas R. LATERAL SPILLWAYS CHANNEL. Transactions, ASCE. Vol 105. pp. 606-617. EUA. 1940.

⁴ Li, Wen-II. OPEN CHANNELS WITH NON UNIFORM DISCHARGE. Transactions, ASCE. Vol 120. pp. 255-274. EUA. 1955.

⁵ De Marchi. CANALI CON PORTATA PROGRESSIVAMENTE CRESCENTE. L' Energia Elettrica. Vol 18 No 16. pp. 351-360. Italia, 1941

⁶ Citrini, D. CANALI RETTANGOLARI CON PORTATA E LARGHEZZA GRADUALMENTE VARIABILI. L' Energia Elettrica. Vol. 9 No 5. pp. 254-262. Italia, 1942.

⁷ Fochheimer, P. GRUNDISS DER HYDRAULIK. Teubener Verlagsgesellschaft pp. 93-95. Alemania 1920.

⁸ Keulegan, G.H. DETERMINATION OF CRITICAL DEPTH IN SPATIALLY VARIABLE FLOW. Proceedings of the 2d. Midwestern Conference of Fluid Mechanics. The Ohio State University, Engineering Experimental Station. Boletín 149, pp. 67-80. EUA 1952.

⁹ Bleig, K.H. FLOW IN ROOF GUTTERS. Journal Research del U.S. National Bureau of Standars. Vol 12, p. 193. EUA 1934

¹⁰ Gaurga, R. CANALES CON GASTO CRECIENTE, TEORÍA Y APLICACIONES. Series del Instituto de Ingeniería No 463. U.N.A.M. México 1983

¹¹ Hager, W.H. OPEN CHANNEL HYDRAULICS OF LOWS WITH INCREASING DISCHARGE. Journal Research del IAHR Vol 21, No 23, pp. 117-193. EUA 1983

incremento finito de distancia (FIGURA 1.1) y en el eje vertical por el tirante y el decremento de éste al pasar de la sección 1 a la 2.

Al establecer matemáticamente la igualdad entre el momentum y las fuerzas actuantes (peso propio, fricción, presión), se llega a la expresión mediante la cual se calcula la caída del tirante entre las secciones que acotan al volumen de control (ECUACIÓN a.4), siendo esta

$$\Delta y' = \frac{Q_1}{g} \cdot \left(\frac{V_1 + V_2}{Q_1 + Q_2} \right) \cdot \left[(V_2 - V_1) + (Q_2 - Q_1) \cdot \frac{V_2}{Q_1} \right] + \left(\frac{S_{f_1} + S_{f_2}}{2} \right) \cdot \Delta x$$

donde

- $\Delta y'$ caída del tirante entre las secciones 1 y 2
- Q_1 gasto en la sección 1
- Q_2 gasto en la sección 2
- V_1 velocidad en la sección 1
- V_2 velocidad en la sección 2
- Δx incremento de la distancia
- S_{f_1} pendiente hidráulica en la sección 1
- S_{f_2} pendiente hidráulica en la sección 2
- g aceleración de la gravedad

Se le denomina solución por integración mediante incrementos finitos, debido a que al conocer un tirante controlado en alguna de las secciones del canal colector, se pueden conocer las demas mediante el incremento de la distancia entre dos secciones predeterminadas que con las herramientas actuales de cálculo podrán ser lo suficientemente pequeñas para tender a una solución analítica que se puede entender como el desarrollo de incrementos finitos muy pequeños. Para ver el desarrollo matemático de este método, conviene consultar el **Apéndice A**.

2.1.2. INTEGRACIÓN ANALÍTICA

Este método nace de la inquietud de generar una expresión con fundamentos matemáticos formales y de la necesidad de tener una expresión relativamente sencilla para la solución de la ecuación dinámica del F.E.V.C., fue propuesta, en un principio por G. Sotelo (1977), aunque este autor, lo desarrolla para una sección rectangular; con ello, hace una simplificación importante dentro del desarrollo, al utilizar la igualdad del tirante hidráulico Y y el tirante y , donde

$$Y = \frac{B}{A}$$

La expresión obtenida por el autor de este escrito, parte al igual que la de G. Sotelo, de considerar las pérdidas iguales a cero, asumiendo que la ecuación se aplicará en secciones en donde el incremento de su distancia será mínimo; también asume que la pendiente es pequeña o

2. MÉTODOS DE SOLUCIÓN

igual a cero. Con estas simplificaciones se llega a una ecuación diferencial de primer orden, coeficientes constantes, no homogénea, que para solucionarla se planteará la hipótesis en donde el tirante hidráulico Y de la sección es directamente proporcional al tirante y . Análogamente se establece una relación entre el área de la sección en estudio (trapezoidal en esta tesis) y el área de la sección rectangular implícita, mediante otro factor de proporcionalidad (ECUACIÓN b.13), siendo la ecuación para una sección trapezoidal, la siguiente

$$\frac{x^2}{L^2} = \left[1 + \frac{1}{2 \cdot Fr_{RL}} \cdot \left(\frac{b + k \cdot y}{b} \right)^2 \right] \cdot \frac{Y}{Y_L} - \left[\frac{1}{2 \cdot Fr_{RL}} \cdot \left(\frac{b + k \cdot y}{b} \right)^2 \right] \cdot \left(\frac{Y}{Y_L} \right)^3$$

donde

- x distancia a partir del origen de un cadenamiento del canal
- L longitud total del canal
- b ancho de la plantilla del canal
- k talud del canal
- y tirante existente en la distancia x
- Y tirante hidráulico medio en la distancia x
- Y_L tirante hidráulico medio en la sección con cadenamiento $x = L$
- Fr_{RL} número de Froude de la sección rectangular implícita en la sección trapezoidal con cadenamiento $x = L$

Donde las soluciones serán aquellas que cumplan la relación

$$\frac{y}{y_L} = \frac{Y}{Y_L} \geq 1$$

Es así, que al sustituir los valores de los factores de proporcionalidad (de sección rectangular a sección trapezoidal), se presenta la ecuación en donde ésta será función sólo del tirante. Para ver el desarrollo matemático de este método, conviene consultar el **Apéndice B**.

2.2. MÉTODO GRÁFICO

En el método gráfico, para la obtención del perfil del agua, en un canal colector de un vertedor lateral, parte del estudio de un punto llamado singular, definido por las coordenadas (x_0, y_0) .

Este método fue desarrollado por R. Guarga (1983), y para la obtención de lo que él llamó ecuación de parámetros adimensionales del F.E.V.C., anula tanto el numerador, como el denominador de la ecuación dinámica.

Al establecer cambios de variable para la obtención del citado punto, se demuestra que los valores del perfil (en cadenamiento y tirante) estarán en función directa del punto (x_0, y_0) , y a las variables adimensionales (X, Y) , con lo que se define la ecuación de parámetros adimensionales del F.E.V.C. (ECUACIÓN c.12) como sigue,

$$\frac{dY}{dX} = 2 \cdot \frac{1 + \eta_0}{1 + 2 \cdot \eta_0} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1 + \eta_0}{1 + \eta_0 \cdot Y} \right)^2 \cdot \frac{X}{Y^2}}{1 - \left(\frac{1 + 2 \cdot \eta_0 \cdot Y}{1 + 2\eta_0} \right) \cdot \left(\frac{1 + \eta_0}{1 + \eta_0 \cdot Y} \right)^3 \cdot \frac{X^2}{Y^3}}$$

En otras palabras, el punto singular es aquel que define la posición del tirante crítico en un canal colector donde sucede F.E.V.C. Ahí se intersecta por lo tanto la línea de tirantes críticos y la del perfil del agua. Se observa que si el punto (x_0, y_0) define a la posición de la sección crítica, la pareja de parámetros adimensionales asumirán un valor de uno, con ello se observa que las gráficas de parámetros adimensionales son perfiles proporcionales a (x_0, y_0) .

Por último, la solución de esta ecuación, se plasma en las gráficas de parámetros adimensionales (FIGURA f.1 a la f.9 Apéndice F), con sus diferentes condiciones de frontera. Para ver el desarrollo matemático de este método, conviene consultar el Apéndice C.

2.3. MÉTODO PROPUESTO POR J. HINDS

Este método es posiblemente el primer intento para estudiar al F.E.V.C. y lo desarrolló J. Hinds (1926), plantea la diferencia de momentums entre dos secciones separadas por un incremento de longitud (ECUACIÓN d.5).

$$M_2 - M_1 = \frac{Q + q \cdot \Delta x}{g} \cdot (V + \Delta V) - \frac{Q \cdot V}{g}$$

Demuestra que la variación del momentum respecto al tiempo es función directa del gasto y de la variación del desnivel entre la superficie del agua y la del embalse respecto a la longitud, (ECUACIÓN d.18) con ello

$$\frac{dM}{dt} = Q \cdot \frac{dZ}{dx}$$

propone un ley de velocidades $(V = a \cdot x^n)$ en función de la longitud y en donde los factores a y n son evaluados para las condiciones finales de operación (en la sección final), demuestra con ello que en la sección final del canal la suma del tirante y el desnivel mencionado ocurren para una energía mínima (ECUACIONES d.25. y d.30).

$$H = y_L + Z_L \quad \Rightarrow$$

$$\frac{(n + 1)}{n} \cdot \frac{Q^2}{g \cdot A^3} \cdot B = 1 \quad (\text{energía mínima})$$

2. MÉTODOS DE SOLUCIÓN

donde

H	desnivel entre la plantilla del canal y el vaso en la sección final
Q	gasto en el canal colector
B	ancho hidráulico
A	área de la sección final
n	factor de velocidad
g	aceleración de la gravedad

Para ver el desarrollo matemático de este método, conviene consultar el **Apéndice D**.

2.4. MÉTODO PROPUESTO POR VIPARELLI

El método de Viparelli, es una continuación de los estudios realizados en 1926 por J. Hinds, lo desarrolla en 1954 con las experiencias efectuadas al modelo del vertedor de las presas Boulder y Barrea, se demostró con ello que la teoría de Hinds conduce a un funcionamiento hidráulico incorrecto, y sólo en base de correcciones experimentales con los modelos mencionados, se llegó a un diseño que según Viparelli funcionaría bien.

Este criterio parte de la anulación de la energía de la lámina vertiente en el canal colector tomando en cuenta las turbulencias provocadas por ésta en toda su longitud (ECUACIÓN e.3).

$$m \cdot u = \frac{\gamma}{g} \cdot q_v \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot Z}$$

donde

u velocidad de ingreso al canal colector de la lámina vertedora

Propone, al igual que Hinds, una ley de variación de velocidades del tipo potencial en donde los valores **a** y **n** estarán en función de las condiciones hidráulicas en la sección final (energía mínima), aunque las acota experimentalmente como se verá mas adelante. Para ver el desarrollo matemático de este método, conviene consultar el **Apéndice D**.

3. EJEMPLO

En este capítulo se presentan los datos que servirán de base para el desarrollo de los cálculos en la obtención del perfil de la superficie libre del agua del canal colector en la instalación experimental utilizada (esta será ampliamente descrita en el capítulo siguiente), mediante los diferentes métodos presentados en este trabajo.

Los datos fueron medidos en un modelo físico, que esta disponible en el laboratorio de Hidráulica de la Facultad de Ingeniería de la U.N.A.M., estos contemplan características geométricas e hidráulicas, siendo las hidráulicas, en donde se desarrollan cálculos, debido a que el aforo del gasto en el modelo se realizó en un vertedor de pared delgada con sección triangular

3.1. CÁLCULO DEL GASTO AFORADO

Para el cálculo del gasto, se utilizó la ecuación obtenida por la Universidad Católica de Chile, dada por

$$Q = \frac{8}{15} \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot \tan \frac{\theta}{2} \cdot \mu \cdot k \cdot h_v^{5/2}$$

3. EJEMPLO

donde

- Q gasto aforado, en m^3/s
- θ ángulo del vertedor en grados
- μ, k coeficientes de gasto en vertedores triangulares
- h_v carga sobre la cresta del vertedor aforador, en m

Con la geometría en la FIGURA 3.1 se procede al cálculo del gasto

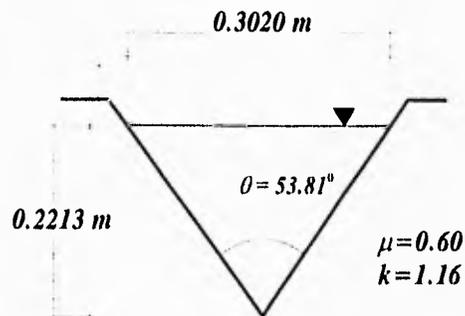


FIGURA 3.1 Vertedor experimental de aforo

Por lo tanto

$$Q = \frac{8}{15} \cdot \sqrt{19.62} \cdot \tan \frac{53.81^\circ}{2} \cdot 0.60 \cdot 1.16 \cdot 0.2213^3 = 0.0192 \quad m^3/s$$

3.2. RESUMEN DE DATOS GEOMÉTRICOS E HIDRÁULICOS DEL MODELO EXPERIMENTAL

- b ancho de plantilla en el canal colector, en m
- k_a, k_b taludes en paredes a y b , respectivamente en la sección del canal y la de control
- S_o pendiente de la plantilla del canal colector, adimensional
- L longitud del canal colector, en m
- h altura del escalón en la sección de control, en m
- d distancia del cadenamamiento final a la sección de control, en m
- H_o carga en de la cresta vertedor, en m
- Q gasto total vertido, en m^3/s

* Tomados los valores μ, k de las figuras 7.9 y 7.10 de HIDRÁULICA GENERAL. Sotelo, Gilberto. Limusa. México 1976. p.253

- Sección del canal colector

$$b = 0.143 \text{ m}, \quad k_a = 2/3, \quad k_b = 0.50$$

- Canal colector

$$L = 0.93 \text{ m}, \quad n = 0.016 \text{ (Manning)}, \quad S_o = 0.0079$$

- Sección de control

$$b = 0.143 \text{ m}, \quad k_a = 0.43, \quad k_b = 1/3, \quad h = 0.018 \text{ m}, \quad d = 0.140 \text{ m}$$

- Cresta vertedora

$$Q = 0.0192 \text{ m}^3/\text{s}, \quad H = 0.041 \text{ m}$$

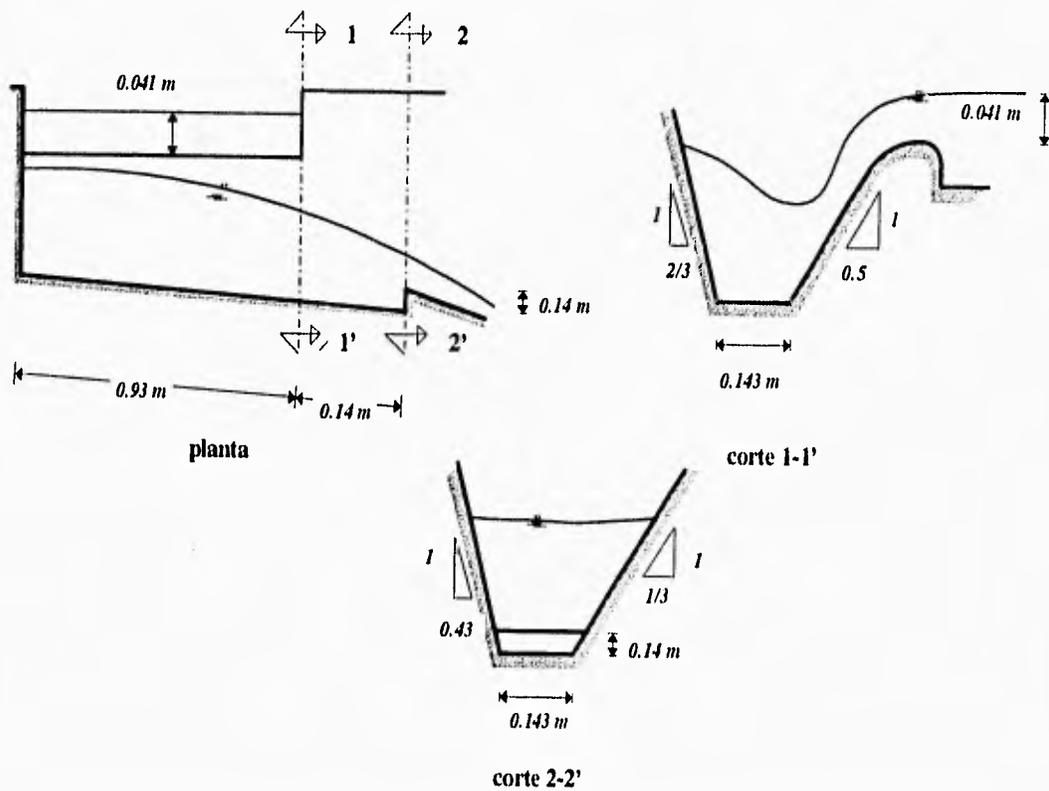


FIGURA 3.2 Condiciones geométricas e hidráulicas del modelo experimental

4. MEDICIONES EXPERIMENTALES

4.1. INSTALACIÓN EXPERIMENTAL

La instalación experimental, donde se sitúa el modelo utilizado en la presente tesis, se encuentra dentro de la zona de laboratorios al norte de la Facultad de Ingeniería de la U.N.A.M., este dispositivo se localiza dentro del laboratorio, en la zona de canales abiertos, al poniente del mismo.

Para abastecer al modelo se cuenta con un sistema de bombeo, en donde la bomba tiene una capacidad de 5 HP, la descarga de ésta, se realiza a un tanque de carga constante para proporcionar al sistema estabilidad en las condiciones hidráulicas, así como el amortiguamiento de las variaciones de gasto debidas a la eficiencia de la bomba. Del tanque de carga se suministra el agua al modelo mediante una tubería de 10" que trabaja a presión existiendo una bifurcación, para llegar al tanque del modelo con un diámetro de 4" (ver FIGURA 4.1).

El gasto en el modelo, se controla mediante una válvula de compuerta, y se afora con un vertedor de pared delgada de geometría triangular (FIGURA 4.1).

El modelo está constituido (ver FIGURA 4.1) por:

4. MEDICIONES EXPERIMENTALES

Tanque, vertedor aforador, dissipador de energía, vaso, vertedor de canal lateral, rápida y cubeta deflectora.

4.2. MEDICIONES EXPERIMENTALES

Para llevar a cabo las mediciones experimentales, primero se procedió al levantamiento con apoyo de equipo topográfico, de las siguientes características geométricas en el modelo.

- **Dimensiones del vertedor aforador**

Ancho, altura, ángulo.

- **Canal colector**

Pendiente de plantilla, ancho de plantilla, taludes laterales.

- **Sección de control**

Altura del escalón, distancia de la sección final del canal colector al pie del escalón, taludes laterales.

Determinadas las características geométricas se procedió a determinar los cadenamientos, estos se situaron a cada **0.10 m**; sólo el primero está a **0.03 m** debido a que la longitud del canal es de **0.93 m**. Siendo que el modelo tiene un aporte normal al canal lateral, se fabricó un obstáculo a este acceso para generar las condiciones de trabajo deseadas.

4.2.1. TIRANTES OBSERVADOS

Para leer los datos se utilizó un limnómetro con resolución de **0.0001 m**. Los datos se leyeron de la siguiente forma:

- 1.- Previa estabilización, se aforó el modelo mediante el vertedor triangular.
- 2.- Se realizó la lectura de la elevación de la plantilla en las secciones medias de las mismas.
- 3.- Se efectuó la lectura de la elevación del perfil en las secciones medias de las mismas.
- 4.- Realizados los pasos anteriores en toda la longitud del canal colector, se procedió a lo propio en la sección de control.
- 5.- Por último se realizaron varias lecturas en el vaso mediante un manómetro abierto para obtener un promedio de la carga en el vertedor de canal lateral.

Para corroborar la variación de los tirantes a lo largo del canal lateral se hizo lo propio en los extremos de su plantilla.

Finalmente los tirantes observados fueron:

x (m)	y (m)
0.03	0.1815
0.13	0.1810
0.23	0.1807
0.33	0.1806
0.43	0.1786
0.53	0.1767
0.63	0.1752
0.73	0.1700
0.83	0.1655
0.93	0.1615
1.07	0.1578

TABLA 4.1 Tirantes observados experimentalmente

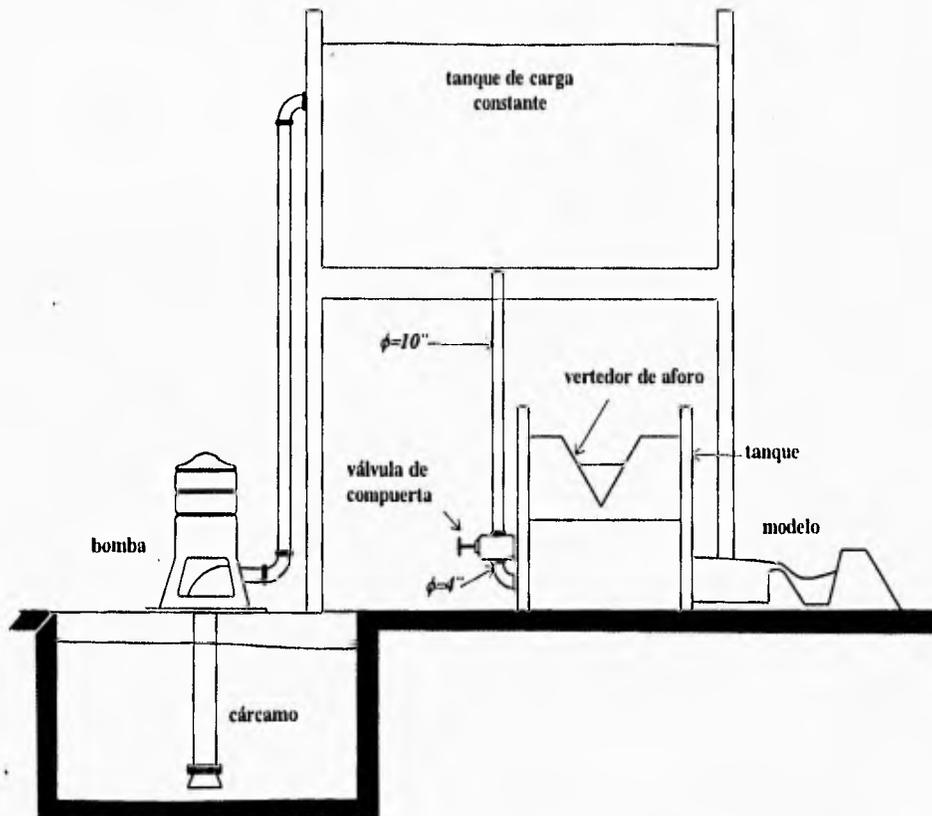


FIGURA 4.1 Esquema del sistema hidráulico de la instalación experimental

5. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

5.1. CÁLCULOS PREVIOS

Dentro del análisis del F.E.V.C. es imprescindible conocer el régimen con el que se desarrollará a lo largo del canal colector, con el fin de conocer el sentido del cálculo dada una sección de control, para ello, se aplicará la ECUACIÓN 1.10. Para dar una idea más clara del régimen se dibuja la línea de los tirantes críticos en las gráficas de los perfiles calculados.

Siendo un escalón, la estructura que genera el tirante crítico y localizado éste a una distancia d se podrá conocer el tirante al final del canal colector aplicando la ecuación de la energía, entre las secciones e y L (FIGURA 1.6), ya que se presenta flujo gradualmente variado.

5.1.1. CÁLCULO DE LA LÍNEA DE LOS TIRANTES CRÍTICOS

- Cálculo del tirante crítico en el escalón

De la ecuación general para sección crítica,

$$\frac{Q^2}{9.81} = \frac{A_c^3}{B_c}$$

5. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

sustituyendo valores y teniendo como única incógnita a y_c , se tiene

$$\frac{0.0192^2}{9.81} = \frac{A_c^3}{B_c}$$

Por lo tanto

$$y_c = 0.1104 \text{ m}$$

- **Área crítica**

$$A_c = \left[0.143 + \left(\frac{0.43 + 0.33}{2} \right) \cdot 0.1104 \right] \cdot 0.1104 = 0.0204 \text{ m}^2$$

- **Línea de tirantes críticos**

Aplicando de nuevo la ecuación de condición crítica, se tiene que con las características geométricas e hidráulicas observadas y calculadas, respectivamente, a lo largo del canal colector, los tirantes críticos en las secciones de interés son

x (m)	Q (m ³ /s)	y_c (m)
0.00	0.0000	0.0000
0.03	0.0006	0.0120
0.13	0.0027	0.0317
0.23	0.0047	0.0449
0.33	0.0068	0.0565
0.43	0.0089	0.0667
0.53	0.0109	0.0754
0.63	0.0130	0.0837
0.73	0.0150	0.0912
0.83	0.0171	0.0985
0.93	0.0192	0.1053
1.07	0.0192	0.1104

TABLA 5.1 Línea de tirantes críticos

5.1.2. CÁLCULO DEL TIRANTE EN $x = L$

Estableciendo el plano horizontal de comparación al pie del escalón, y aplicando la ecuación de la energía entre e (sección crítica) y L (sección final del canal colector), sin considerar pérdidas se tiene que

$$h + y_c + \frac{V_c^2}{2 \cdot g} = S_o \cdot d + y_L + \frac{V_L^2}{2 \cdot g}$$

donde

h altura del escalón en m

Aplicando la ecuación de continuidad

$$h + y_c + \frac{Q^2}{2 \cdot g \cdot A_c^2} = S_o \cdot d + y_L + \frac{Q^2}{2 \cdot g \cdot A_L^2}$$

sustituyendo valores

$$0.1735 = 0.0011 + y_L + \frac{0.0192^2}{19.62 \cdot A_L^2}$$

Por lo tanto se tiene que

$$y_L = 0.1590 \text{ m}$$

5.1.3. REVISIÓN DE CONDICIÓN DE FLUJO CON RÉGIMEN SUBCRÍTICO

De la ECUACIÓN 1.10

$$\frac{S_o \cdot L}{y_L} \leq \frac{2}{3} \cdot (1 + Fr_L^2)$$

ahora bien

$$Fr_L^2 = \frac{Q^2}{g \cdot A_L^2 \cdot Y_L}$$

y con los valores

$$y_L = 0.1590 \text{ m}, \quad Q = 0.0192 \text{ m}^3/\text{s}, \quad S_o = 0.00799, \quad L = 0.93 \text{ m}$$

se tiene que

$$\frac{S_o \cdot L}{y_L} = 0.0462 \leq \frac{2}{3} \cdot (1 + Fr_L^2) = 0.97$$

Con el cálculo anterior se demuestra que el régimen es subcrítico como se observa en la posición de la línea de los tirantes críticos con respecto la de los perfiles calculados.

5.2. MÉTODO DE INTEGRACIÓN

5.2.1. INCREMENTOS FINITOS

Definido el tirante crítico en la sección de control, así como el tirante en la sección final del canal colector, para el cálculo del perfil por este método, y en lo sucesivo, se procede al cálculo iterativo del cadenamamiento $x=0.93 \text{ m}$ hasta el cadenamamiento $x=0.00 \text{ m}$ como se presenta en la TABLA 5.3 y FIGURA 5.2.

La memoria de cálculo se desarrolla en el cadenamamiento $x=0.73 \text{ m}$ de la manera siguiente:

- **Columna 1**

Cadenamiento de la sección, en m

$$x=0.73 \text{ m}$$

- **Columna 2**

Incremento de la distancia, en m

$$\Delta x=0.10 \text{ m}$$

- **Columna 3**

Tirante propuesto de la sección, en m , que en este caso es el valor exacto, ya que los cálculos al ser iterativos convergen al valor presentado en esta columna.

$$y=0.1687 \text{ m}$$

- **Columna 4**

Elevación en m de la superficie del agua tomando como valor de referencia el pie del escalón con valor de 1.0000 m .

$$1.1714 = 1.0000 + 0.1687 + S_o \cdot (1.07 - 0.73)$$

- **Columna 5**

Cambio de la elevación de la superficie libre del agua en m , y se calcula a partir de la diferencia de la elevación entre $x=0.73 \text{ m}$ y $x=83 \text{ m}$

$$\Delta y' = 1.1714 - 1.1665 = 0.0049 \text{ m}$$

este valor deberá ser igual al de la columna 15.

- **Columna 6**

Área de la sección correspondiente al cadenamamiento en consideración, en m^2

$$A = 0.0407 \text{ m}^2$$

• **Columna 7**

Gasto en la sección, en m^3/s , obtenido por la expresión

$$Q = q \cdot x = 0.0206 \cdot 0.73 = 0.0151 \quad m^3/s$$

• **Columna 8**

Velocidad correspondiente a las características hidráulicas y geométricas de la sección en consideración, en m/s . Se obtiene por continuidad. Cociente de los valores de las columnas 7 y 6

$$\frac{Q}{A} = \frac{0.0151}{0.0407} = 0.3701 \quad m/s$$

• **Columna 9**

Suma de los gastos del cadenamiento previo y el cadenamiento considerado, en m^3/s

$$0.0171 + 0.0151 = 0.0322 \quad m^3/s$$

• **Columna 10**

Suma de las velocidades del cadenamiento previo y el cadenamiento considerado, en m/s

$$0.4356 + 0.3701 = 0.8056 \quad m/s$$

• **Columna 11**

Incremento de los gastos, en m^3/s . Es la diferencia de los gastos del cadenamiento previo y el cadenamiento considerado.

$$0.0171 - 0.151 = 0.0021 \quad m^3/s$$

• **Columna 12**

Incremento de la velocidad, en m/s . Es la diferencia de las velocidades del cadenamiento previo y el cadenamiento considerado.

$$0.4356 - 0.3701 = 0.0655 \quad m/s$$

• **Columna 13**

Perdidas, en m . Se obtiene por medio de la ecuación de Manning.

$$h_{f1} = 0.000108 \quad m$$

• **Columna 14**

Promedio de las pérdidas, en m . Se obtiene con la suma entre dos, del cálculo de las pérdidas en el cadenamiento previo y el cadenamiento considerado por medio de la ecuación de Manning.

5. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

$$\left(\frac{h_{f1} + h_{f2}}{2}\right) = \left(\frac{0.000108 + 0.000153}{2}\right) = 0.000131 \text{ m}$$

• Columna 15

Representa la caída en m de la elevación de la superficie entre el cadenamiento previo y el cadenamiento considerado, esta es estimada con la siguiente ecuación

$$\Delta y' = \frac{Q_1}{g} \cdot \left(\frac{V_1 + V_2}{Q_1 + Q_2}\right) \cdot \left[(V_2 - V_1) + (Q_2 - Q_1) \cdot \frac{V_2}{Q_1}\right] + \left(\frac{S_{f1} + S_{f2}}{2}\right) \cdot \Delta x$$

donde

- $\Delta y'$ caída del tirante entre las secciones 1 y 2, en m
- Q_1 gasto en la sección 1, m^3/s
- Q_2 : gasto en la sección 2, m^3/s
- V_1 velocidad en la sección 1, m/s
- V_2 velocidad en la sección 2, m/s
- Δx incremento de la distancia, en m
- S_{f1} pendiente hidráulica en la sección 1
- S_{f2} pendiente hidráulica en la sección 2
- g aceleración de la gravedad, en m/s^2

Al cumplir con la igualdad de los valores de las columna 5 y 15 se incrementa la distancia y se vuelven a repetir los pasos 3 al 15 hasta cumplir con la longitud total del canal.

Es importante señalar, como ya se mencionó, que los valores de los tirantes son los exactos, y que para llegar a ellos hay que iterar.

5.2.2. ANALÍTICA

Este método no es iterativo, ya que al proponer tirantes, por la naturaleza de la expresión, se podrá conocer el cadenamiento en el que se presenta dicho tirante, pero como lo que interesa es conocer el valor del tirante en los cadenamientos señalados, se procederá a resolver la ecuación de manera inversa como la que se presenta en la TABLA 5.4 y FIGURA 5.3.

La memoria de cálculo se desarrolla en el cadenamiento $x=0.73 \text{ m}$ de la manera siguiente:

• Columna 1

Cadenamiento de la sección, en m

$$x = 0.73 \text{ m}$$

• **Columna 2**

Incremento de la distancia, en m

$$\Delta x = 0.10 \text{ m}$$

• **Columna 3**

Cociente al cuadrado del incremento de la distancia y la longitud total del canal colector, esta deberá ser igual al valor de la columna 13.

$$\frac{x^2}{L^2} = \frac{0.73^2}{0.93^2} = 0.616$$

• **Columna 4**

Tirante propuesto de la sección, en m , que en este caso es el valor exacto, ya que los cálculos al ser iterativos convergen al valor presentado en esta columna.

$$y = 0.1715 \text{ m}$$

• **Columna 5**

Elevación de la superficie del agua, en m , tomando como valor de referencia el pie del escalón con valor de 1.0000 m .

$$1.1742 = 1.0000 + 0.1715 + S_o \cdot (1.07 - 0.73)$$

• **Columna 6**

Área de la sección correspondiente de la sección en consideración, en m^2

$$A = 0.0417 \text{ m}^2$$

• **Columna 7**

Gasto en la sección, en m^3/s , obtenido por la expresión

$$Q = q \cdot x = 0.0206 \cdot 0.73 = 0.0151 \text{ m}^3/s$$

• **Columna 8**

Velocidad correspondiente a las características hidráulicas y geométricas de la sección en consideración, en m/s . Se obtiene por continuidad. Cociente de los valores de las columnas 7 y 6

$$\frac{Q}{A} = \frac{0.0151}{0.0417} = 0.3616 \text{ m/s}$$

• **Columna 9**

Ancho hidráulico en la sección considerada, en m

$$B = b + (k_a + k_b) \cdot y = 0.143 + (2/3 + 0.5) \cdot 0.1717 = 0.3431 \text{ m}$$

5. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

• Columna 10

Factor de conversión de sección rectangular a sección trapezoidal.

$$n = \left(\frac{b + k \cdot y}{b} \right) = \left(\frac{0.143 + 0.583 \cdot 0.1715}{0.143} \right) = 2.8883$$

donde

k talud promedio del canal colector

• Columna 11

Tirante hidráulico medio de la sección considerada, en m

$$Y = \frac{A}{B} = \frac{0.0417}{0.3431} = 0.1215 \quad m$$

• Columna 12

Relación de tirante hidráulico medio en la sección considerada y tirante hidráulico medio en la sección final del canal colector.

$$\frac{Y}{Y_L} = \frac{0.1215}{0.1141} = 1.0646$$

• Columna 13

Valor de la relación al cuadrado del cadenamiento en consideración y la longitud total del canal colector, esta se calcula por la expresión

$$\frac{x^2}{L^2} = \left[1 + \frac{1}{2 \cdot Fr_{RL}} \cdot \left(\frac{b + k \cdot y}{b} \right)^2 \right] \cdot \frac{Y}{Y_L} - \left[\frac{1}{2 \cdot Fr_{RL}} \cdot \left(\frac{b + k \cdot y}{b} \right)^2 \right] \cdot \left(\frac{Y}{Y_L} \right)^3$$

donde

x distancia a partir del origen de un cadenamiento del canal, en m

L longitud total del canal, en m

b ancho de la plantilla del canal, en m

k talud promedio del canal

y tirante existente en la distancia x , en m

Y tirante hidráulico medio en la distancia x , en m

Y_L tirante hidráulico medio en la sección con cadenamiento $x=L$, en m

Fr_{RL} número de Froude de la sección rectangular implícita en la sección trapezoidal con cadenamiento $x = L$

Donde las soluciones serán aquellas que cumplan la relación

$$\frac{y}{y_L} = \frac{Y}{Y_L} \geq 1$$

Al cumplir con la igualdad de los valores de las columnas 3 y 13 se incrementa al cadenamiento inmediato y se vuelven a repetir los pasos anteriores hasta cumplir con la longitud total del canal.

5.3. MÉTODO GRÁFICO

Con los datos geométricos medidos (taludes, pendiente, ancho de la plantilla, longitud, distancia de la sección final del canal colector al escalón) e hidráulicos calculados (gasto, tirante al final de la sección, tirante crítico en el escalón) para calcular el perfil se procederá de la forma siguiente:

1.- Cálculo de M

Con los datos medidos y calculados se aplica la expresión siguiente

$$M = \frac{4 \cdot q^2 \cdot k}{g \cdot S_o^2 \cdot b^3}$$

donde

- q . gasto unitario, en $m^3 s/m$
- k talud promedio de la sección del canal
- S_o pendiente de la plantilla, adimensional
- b ancho de la plantilla, en m

Por lo tanto

$$M = \frac{4 \cdot 0.0206^2 \cdot 0.583}{9.81 \cdot 0.0079^2 \cdot 0.143^3} = 555.5$$

2.- Cálculo de $\eta_o = \eta_o(M)$

Con la ECUACIÓN c.7

$$2 \cdot \eta_o^3 + 3 \cdot \eta_o^2 + \eta_o - M = 0$$

sustituyendo el valor de M resolviendo y eliminando las raíces negativas se tiene que

$$\eta_o = 6.04$$

Para la obtención de η_o , también se puede hacer uso de la FIGURA f.10 (la manera de utilizar esta gráfica, se presenta dentro de la misma figura)

3.- Cálculo de x_o y y_o

Este cálculo se realiza por medio de las ecuaciones

5. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

$$y_o = \frac{\eta_o \cdot b}{k} \quad x_o = \frac{2 \cdot y_o \cdot (1 + \eta_o)}{S_o \cdot (1 + 2 \cdot \eta_o)}$$

donde

y_o , x_o factor de proporción en m de los parámetros adimensionales

Sustituyendo valores

$$y_o = \frac{6.04 \cdot 0.143}{0.583} = 1.48 \text{ m}$$

$$x_o = \frac{2 \cdot 1.48 \cdot (1 + 6.04)}{0.0079 \cdot (1 + 2 \cdot 6.04)} = 201.75 \text{ m}$$

4.- Cálculo de los parámetros adimensionales X_L y Y_L

Este cálculo se realiza por medio de las ecuaciones

$$X_L = \frac{L}{x_o} \quad Y_L = \frac{L}{y_o}$$

donde

X_L , Y_L variables adimensionales en la sección final del canal colector.

Por lo tanto

$$X_L = \frac{0.93}{201.75} = 0.0046$$

$$Y_L = \frac{0.93}{1.48} = 0.1074$$

6.- Obtencion de los valores Y_i

Con el valor de η_o encontrado, se elige el diagrama X , Y (en su forma logarítmica) con η_o mas próximo a este valor. Se disponen de diagramas para los valores $\eta_o = 0, 0.3, 1, 2, 5, 12, 30, 100, \infty$. (FIGURAS f.2 a la f.9). El diagrama $\eta_o = \infty$ (FIGURA F.9) debe escogerse cuando $\eta_o > 200$. Su forma logarítmica corresponde a la necesidad de cubrir intervalos muy amplios en los valores de X , Y .

Si recordamos la definición de punto singular, y definida la figura correspondiente al valor de η_o , se observará (en el caso que la sección crítica fuera la sección final del canal colector) que la pareja de valores X_L , Y_L estará ubicado en la curva $Fr = 1$ (trazo discontinuo), que separa la región de flujo supercrítico de la del subcrítico (FIGURA f.11), quiere decir esto que los puntos que definen la línea discontinua en todos diagramas correspondientes a los valores de η_o (FIGURAS f.1 a la f.9) son los puntos singulares (donde se presenta el tirante crítico) de los diferentes perfiles proporcionales correspondientes con diferentes condiciones hidráulicas. En el

caso de la existencia de otra estructura que genere el tirante crítico, por ejemplo un escalón (caso estudiado en esta tesis), y definida la gráfica correspondiente al valor de η_o , se observará que la pareja de datos X_L, Y_L estará ubicada por encima de la línea de puntos singulares comprobando así la condición de régimen subcrítico a lo largo del canal colector, como se observa en la FIGURA f.12.

Con el valor $\eta_o = 6.04$ obtenido en el paso 2, la gráfica correspondiente será la que tiene $\eta_o = 5$ (FIGURA f.5) para conocer el valor de Y_i , pero como se tiene una resolución poco confiable, se procede a la integración numérica (método de Runge-Kutta), fijando los valores de X_L, Y_L y proponiendo los valores de X_i .

Por lo tanto el cálculo y gráfica del perfil se reduce a la TABLA 5.5 y FIGURA 5.4 respectivamente.

La memoria de cálculo se desarrolla en el cadenamiento $x = 0.73 \text{ m}$ de la manera siguiente:

• **Columna 1**

Valor del parámetro calculado para cada sección del canal colector. Se obtiene por medio de la expresión

$$X = \frac{x}{x_o} = \frac{0.73}{201.75} = 0.00362$$

donde

x valor del cadenamiento, en m

• **Columna 2**

Valor calculado de Y por medio de la integración numérica (Runge-Kutta') fijando el valor $X = 0.00362$ con la expresión:

$$\frac{dY}{dX} = 2 \cdot \frac{1 + \eta_o}{1 + 2 \cdot \eta_o} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1 + \eta_o}{1 + \eta_o \cdot Y} \right)^2 \cdot X \cdot Y^2}{1 - \left(\frac{1 + 2 \cdot \eta_o \cdot Y}{1 + 2 \eta_o} \right) \cdot \left(\frac{1 + \eta_o}{1 + \eta_o \cdot Y} \right)^3 \cdot X^2 \cdot Y^3} \Rightarrow Y = 0.1138$$

• **Columna 3**

Cadenamiento de las sección en consideración, en m

$$x = 0.73 \text{ m}$$

* Fuentes M.,O. INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS NUMÉRICOS APLICADOS A LA HIDRÁULICA. Series de divulgación No 5 IMTA. México 1988

5. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

• Columna 5

Tirante en m calculado por:

$$y = Y_L \cdot y_o = 0.1138 \cdot 1.48 = 0.1685$$

• Columna 6

Elevación en m de la superficie del agua tomando como valor de referencia el pie del escalón con valor de $1.0000 m$.

$$1.1712 = 1.0000 + 0.1685 + S_o \cdot (1.07 - 0.73)$$

5.4. MÉTODO PROPUESTO POR J. HINDS

Conocido el tirante en el cadenamamiento final del canal colector así como las condiciones hidráulicas, se procede de la forma siguiente:

1.- Revisión de la condición de energía mínima para $H = y_L + Z_L$.

Esta condición estará acotada por la ecuación

$$\left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot \frac{Q^2}{g} \cdot \frac{B_L}{A_L^3} = 1 \quad \Rightarrow \quad H_{min} = y_L + Z_L$$

donde

- n valor del exponente que define la ecuación de variación de velocidad a lo largo del canal colector
- B_L ancho hidráulico de la sección final del canal colector, en m
- A_L área hidráulica de la sección final del canal colector, en m^2
- y_L tirante hidráulico al final del canal colector, en m
- Z_L diferencia entre la elevación del vaso y el tirante en la sección final del canal colector*, en m

Del cálculo del tirante ($y = 0.1590 m$) por balance de energías entre la sección crítica y la final en el canal colector ($x = 0.93 m$), las características hidráulicas en esta sección quedan

$$B = 0.3285 m, \quad A = 0.0375 m^2$$

Sustituyendo valores en la ECUACIÓN d.30 se tiene

$$\left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot \frac{0.0192^2}{9.81} \cdot \frac{0.3285}{0.0375^3} = 1$$

* Hidráulicamente, la diferencia de elevaciones entre el vaso y el tirante al final de la sección en el canal colector es la energía máxima que puede alcanzar el flujo en esa sección.

por lo tanto

$$n = 0.3056$$

donde

n exponente de variación de la velocidad, según J.Hinds

Ahora bien, si los valores de n están dentro del rango siguiente

$$0.83 \leq n \leq 0.86$$

Como se puede observar, el valor obtenido sale del rango experimental obtenido por J.Hinds.

Con ello se puede observar que la condición de energía mínima en la sección final con $y = 0.1590$ m, no se cumple como se verá enseguida.

Si se supone un valor de $n = 0.86$ que cae dentro del rango experimental propuesto y con el valor de $y = 0.1590$ m, se tiene

$$\left(\frac{0.86 + 1}{0.86} \right) \cdot \frac{0.0192^2}{9.81} \cdot \frac{0.3285}{0.0375^3} = 0.50 \neq 1$$

Estableciendo así, que las condiciones del modelo experimental utilizado en esta tesis no cumplen con las determinadas por J. Hinds.

Como en cada una de las secciones del canal colector se debe cumplir que

$$H = y + Z$$

el cálculo del perfil, se hará de la forma siguiente.

Si, el método propone la siguiente ley de variación de velocidades de la forma

$$V = a \cdot x^n$$

$$Z = \left(\frac{n + 1}{n} \right) \cdot \frac{a^2 \cdot x^{2n}}{2 \cdot g} = \left(\frac{n + 1}{n} \right) \cdot \frac{Q^2}{2 \cdot g \cdot A^2}$$

Entonces

$$H = y + \left(\frac{n + 1}{n} \right) \cdot \frac{Q^2}{2 \cdot g \cdot A^2}$$

pero como

$$A = (b + k \cdot y) \cdot y$$

sustituyendo

*Rango obtenido experimentalmente en el modelo de la presa Bolder, U.S.A.

5. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

$$H = y + \left(\frac{n+1}{n} \right) \cdot \frac{Q^2}{2 \cdot g \cdot (b+k \cdot y) \cdot y}$$

y si el valor medido al final del canal colector es

$$H = 0.1782 - S_o \cdot (L - x)$$

sustituyendo se tiene

$$0.1782 - S_o \cdot (L - x) = y + \left(\frac{n+1}{n} \right) \cdot \frac{Q^2}{2 \cdot g \cdot (b+k \cdot y) \cdot y}$$

Se puede observar que el único valor desconocido es y , con lo que se utilizará esta ecuación para el cálculo del perfil proponiendo $n=0.86$.

El cálculo del perfil y su gráfica se resumen en la TABLA 5.6. y FIGURA 5.5. respectivamente. La memoria de cálculo se desarrolla en el cadenamamiento $x=0.73 \text{ m}$ de la manera siguiente:

- **Columna 1**

Cadenamiento en m de las sección en consideración.

$$x=0.73 \text{ m}$$

- **Columna 2**

Gasto en en la sección, m^3/s obtenido por la expresión

$$Q = q \cdot x = 0.0206 \cdot 0.73 = 0.0151 \text{ m}^3/s$$

- **Columna 3**

Tirante propuesto en la sección, en m , obtenido de

$$y=0.1685 \text{ m}$$

- **Columna 4**

Elevación en m de la superficie del agua tomando como valor de referencia el pie del escalón con valor de 1.0000 m .

$$1.1723 = 1.0000 + 0.1685 + S_o \cdot (1.07 - 0.73)$$

- **Columna 5**

Valor de H en m obtenido con la expresión este valor deberá ser igual al de la columna 6.

$$0.1782 - S_o \cdot (0.93 - 0.73) = 0.1766 \text{ m}$$

donde

$$0.1782 \text{ m} = H \text{ (medida experimentalmente en la sección final del canal colector)}$$

• **Columna 6**

Valor de H , en m , con la ecuación:

$$H = y + Z = y + \left(\frac{n + I}{n} \right) \cdot \frac{Q^2}{2 \cdot g \cdot (b + k \cdot y) \cdot y}$$

$$H = 0.1685 + \left(\frac{0.86 + I}{0.86} \right) \cdot \frac{0.0151^2}{2 \cdot g \cdot (0.14 + 0.53 \cdot 0.1685) \cdot 0.1685} = 0.1766 \quad m$$

La ecuación utilizada para el cálculo del perfil, es una ecuación en donde el tirante es la única incógnita, por lo que ésta se podrá resolver de manera exacta. Aquí se presenta de manera iterativa con el fin de presentar una tabla de cálculo como apoyo al desarrollo del mismo.

5.5. MÉTODO PROPUESTO POR VIPARELLI

Este es un método similar al que propuso J. Hinds, solo que en él se contempla la disipación de la energía de la lámina vertiente.

Debido a que ya se conocen ciertos valores, el cálculo se reduce, como en los otros, a la revisión de las condiciones obtenidas por Viparelli, y en base a ellas el perfil.

1.- Cálculo de Z_L

Para la determinación de Z_L (desnivel entre la superficie libre del agua en la sección final del canal colector y el embalse), hay que determinar el desnivel que existe en la sección inicial por medio de la siguiente ecuación

$$Z_o = (1 - \tau) \cdot H_o$$

donde

- Z_o desnivel la superficie libre del agua en el canal colector en la sección inicial y el embalse, en m
- τ ahogamiento del canal
- H_o carga sobre el vertedor, en m

Experimentalmente, se observó que $\tau = 0$, por lo tanto

$$Z_o = H_o = 0.041 \quad m$$

Se procederá por tanteos, haciendo uso de las ECUACIONES e.9 y e.11

$$(b_L + k \cdot y_L) \cdot y_L = \frac{Q}{a \cdot L^n}$$

5. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

$$Z_L = Z_o + \frac{a^2 \cdot (n + 1)}{2 \cdot g \cdot n} \cdot L^{2n}$$

Como ya se conocen los valores de $Z_L + y_L = 0.1782 \text{ m}$, el tirante $y_L = 0.1590 \text{ m}$ y el ahogamiento del canal, las ECUACIONES e.9 y e.11 serán simultáneas, al resolverlas se conocerán valores de n y a , al sustituir valores quedan

$$a \cdot 0.93^n = 0.512$$

$$0.1372 = + \frac{a^2 \cdot (n + 1)}{19.62 \cdot n} \cdot 0.93^{2n}$$

Como ya se estudió n estará en el siguiente rango

$$0.83 \leq n \leq 0.87$$

Para la solución de las ecuaciones, el valor de a variará de 0.07 a 0.16 . Estos valores fueron obtenidos por experiencias realizadas en laboratorio, como ya se explicó en su momento.

Para dar una idea de la solución simultánea de las ecuaciones se proporcionan las siguientes tablas de cálculo, así como de su convergencia mediante la FIGURA 5.1 con los valores a y n .

Para la construcción de las gráficas, de cada una de las ecuaciones se despeja el valor de a para que esta quede en función de n .

$$a \cdot 0.93^n = 0.512$$

n/a	0.07	0.08	0.09	0.1	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15	0.16
0.83	0.0659	0.0753	0.0847	0.0942	0.1036	0.1130	0.1224	0.1318	0.1412	0.1506
0.84	0.0659	0.0753	0.0847	0.0941	0.1035	0.1129	0.1223	0.1317	0.1411	0.1505
0.85	0.0658	0.0752	0.0846	0.0940	0.1034	0.1128	0.1222	0.1316	0.1410	0.1504
0.86	0.0658	0.0752	0.0846	0.0939	0.1033	0.1127	0.1221	0.1315	0.1409	0.1503
0.87	0.0657	0.0751	0.0845	0.0939	0.1033	0.1127	0.1220	0.1314	0.1408	0.1502

TABLA 5.2a

$$0.1372 = + \frac{a^2 \cdot (n+1)}{19.62 \cdot n} \cdot 0.93^{2n}$$

n/a	0.07	0.08	0.09	0.1	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15	0.16
0.83	0.0070	0.0080	0.0090	0.0100	0.0110	0.0120	0.0130	0.0139	0.0149	0.0159
0.84	0.0069	0.0079	0.0089	0.0099	0.0109	0.0119	0.0128	0.0138	0.0148	0.0158
0.85	0.0069	0.0078	0.0088	0.0098	0.0108	0.0118	0.0127	0.0137	0.0147	0.0157
0.86	0.0068	0.0078	0.0088	0.0097	0.0107	0.0117	0.0126	0.0136	0.0146	0.0156
0.87	0.0068	0.0077	0.0087	0.0097	0.0106	0.0116	0.0126	0.0135	0.0145	0.0154

TABLA 5.2b

Como se puede observar en la FIGURA 5.1, los valores de a y n divergen con las características hidráulicas y geométricas empleadas, no existiendo así, el punto de intersección que determina la solución con los datos experimentales de esta tesis, por lo tanto, el método es inaplicable para estas condiciones.

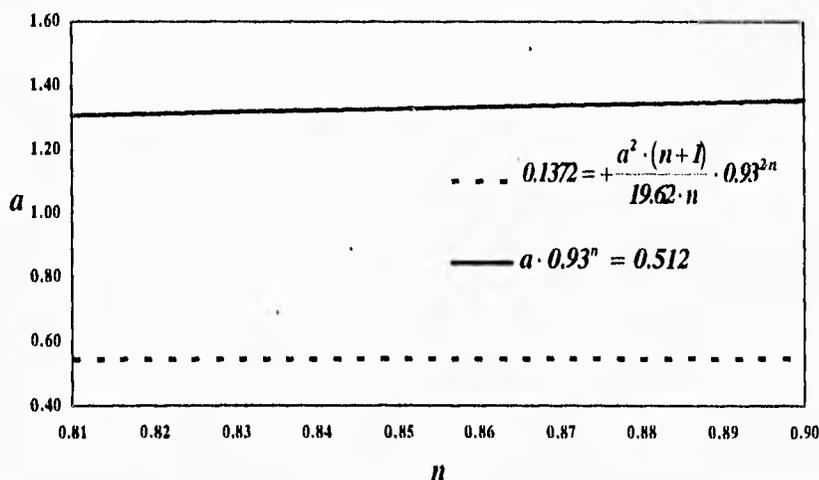


FIGURA 5.1 Divergencia en los valores a y n

Para ilustrar la aplicación completa de este método conviene revisar la referencia N° 3.

5.6. EVALUACIÓN DE RESULTADOS

A continuación se presentan las tablas de cálculo de los diferentes métodos así como los perfiles dibujados. También se presenta un análisis de sensibilidad cualitativo (dispersión de datos) y otro cuantitativo (suma de los errores al cuadrado).

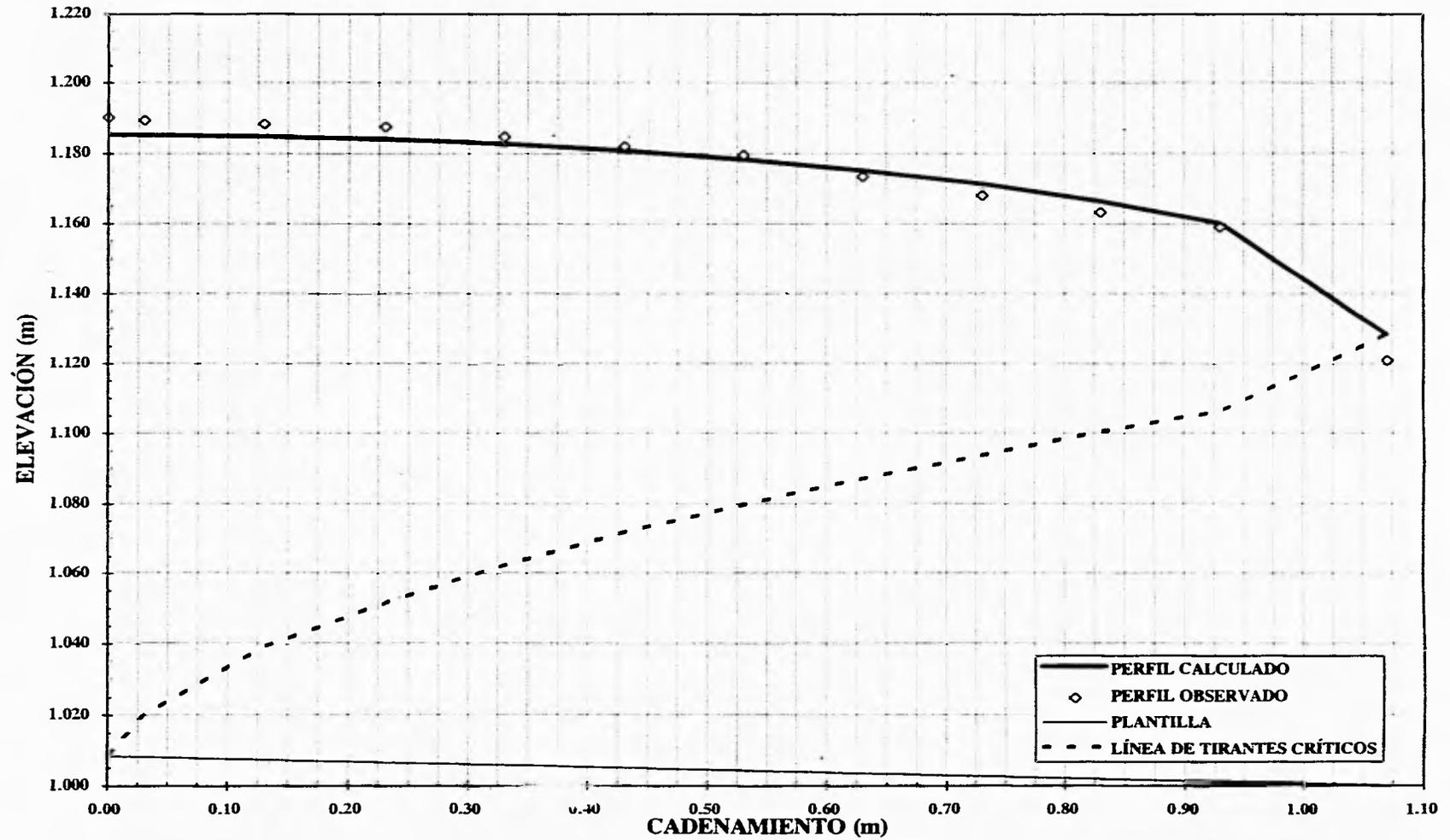


FIGURA 5.2 Perfil de la lámina de agua, (integración por incrementos finitos)

x (m)	Δx (m)	y (m)	ELEV. (m)	$\Delta y'$ (m)	A (m ²)	Q (m ³ /s)	V (m/s)	Q1+Q2 (m ³ /s)	V1+V2 (m/s)	Q2-Q1 (m ³ /s)	V2-V1 (m/s)	h_{f1} (m)	h_{f1-2} (m)	$\Delta y'$ (m)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1.07	0.00	0.1104	1.1284		0.0204	0.0192								
0.93	0.00	0.1590	1.1601		0.0375	0.0192	0.5122							
0.83	0.10	0.1646	1.1665	0.0064	0.0393	0.0171	0.4356	0.0363	0.9478	0.0021	0.0767	0.000153	0.000077	0.0064
0.73	0.10	0.1687	1.1714	0.0049	0.0407	0.0151	0.3701	0.0322	0.8056	0.0021	0.0655	0.000108	0.000131	0.0049
0.63	0.10	0.1718	1.1753	0.0039	0.0418	0.0130	0.3113	0.0281	0.6813	0.0021	0.0588	0.000075	0.000092	0.0039
0.53	0.10	0.1741	1.1784	0.0031	0.0426	0.0109	0.2570	0.0239	0.5683	0.0021	0.0543	0.000051	0.000063	0.0031
0.43	0.10	0.1757	1.1808	0.0024	0.0431	0.0089	0.2058	0.0198	0.4628	0.0021	0.0512	0.000032	0.000042	0.0024
0.33	0.10	0.1767	1.1825	0.0018	0.0435	0.0068	0.1567	0.0157	0.3625	0.0021	0.0491	0.000019	0.000025	0.0018
0.23	0.10	0.1772	1.1838	0.0013	0.0437	0.0047	0.1088	0.0116	0.2655	0.0021	0.0479	0.000009	0.000014	0.0013
0.13	0.10	0.1772	1.1846	0.0008	0.0437	0.0027	0.0615	0.0074	0.1702	0.0021	0.0473	0.000003	0.000006	0.0008
0.03	0.10	0.1768	1.1850	0.0004	0.0435	0.0006	0.0142	0.0033	0.0757	0.0021	0.0472	0.000000	0.000002	0.0004
0.00	0.03	0.1767	1.1852	0.0001	0.0435	0.0000	0.0000	0.0006	0.0142	0.0006	0.0142	0.000000	0.000000	

TABLA 5.2 Cálculo del perfil, (integración por incrementos finitos)

x (m)	Δx (m)	y (m)	$ELEV.$ (m)	$\Delta y'$ (m)	A (m ²)	Q (m ³ /s)	V (m/s)	$Q1+Q2$ (m ³ /s)	$V1+V2$ (m/s)	$Q2-Q1$ (m ³ /s)	$V2-V1$ (m/s)	h_f (m)	h_{f-2} (m)	$\Delta y'$ (m)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1.07	0.00	0.1104	1.1284		0.0204	0.0192								
0.93	0.00	0.1590	1.1601		0.0375	0.0192	0.5122							
0.83	0.10	0.1646	1.1665	0.0064	0.0393	0.0171	0.4356	0.0363	0.9478	0.0021	0.0767	0.000153	0.000077	0.0064
0.73	0.10	0.1687	1.1714	0.0049	0.0407	0.0151	0.3701	0.0322	0.8056	0.0021	0.0655	0.000108	0.000131	0.0049
0.63	0.10	0.1718	1.1753	0.0039	0.0418	0.0130	0.3113	0.0281	0.6813	0.0021	0.0588	0.000075	0.000092	0.0039
0.53	0.10	0.1741	1.1784	0.0031	0.0426	0.0109	0.2570	0.0239	0.5683	0.0021	0.0543	0.000051	0.000063	0.0031
0.43	0.10	0.1757	1.1808	0.0024	0.0431	0.0089	0.2058	0.0198	0.4628	0.0021	0.0512	0.000032	0.000042	0.0024
0.33	0.10	0.1767	1.1825	0.0018	0.0435	0.0068	0.1567	0.0157	0.3625	0.0021	0.0491	0.000019	0.000025	0.0018
0.23	0.10	0.1772	1.1838	0.0013	0.0437	0.0047	0.1088	0.0116	0.2655	0.0021	0.0479	0.000009	0.000014	0.0013
0.13	0.10	0.1772	1.1846	0.0008	0.0437	0.0027	0.0615	0.0074	0.1702	0.0021	0.0473	0.000003	0.000006	0.0008
0.03	0.10	0.1768	1.1850	0.0004	0.0435	0.0006	0.0142	0.0033	0.0757	0.0021	0.0472	0.000000	0.000002	0.0004
0.00	0.03	0.1767	1.1852	0.0001	0.0435	0.0000	0.0000	0.0006	0.0142	0.0006	0.0142	0.000000	0.000000	

TABLA 5.2 Cálculo del perfil, (integración por incrementos finitos)

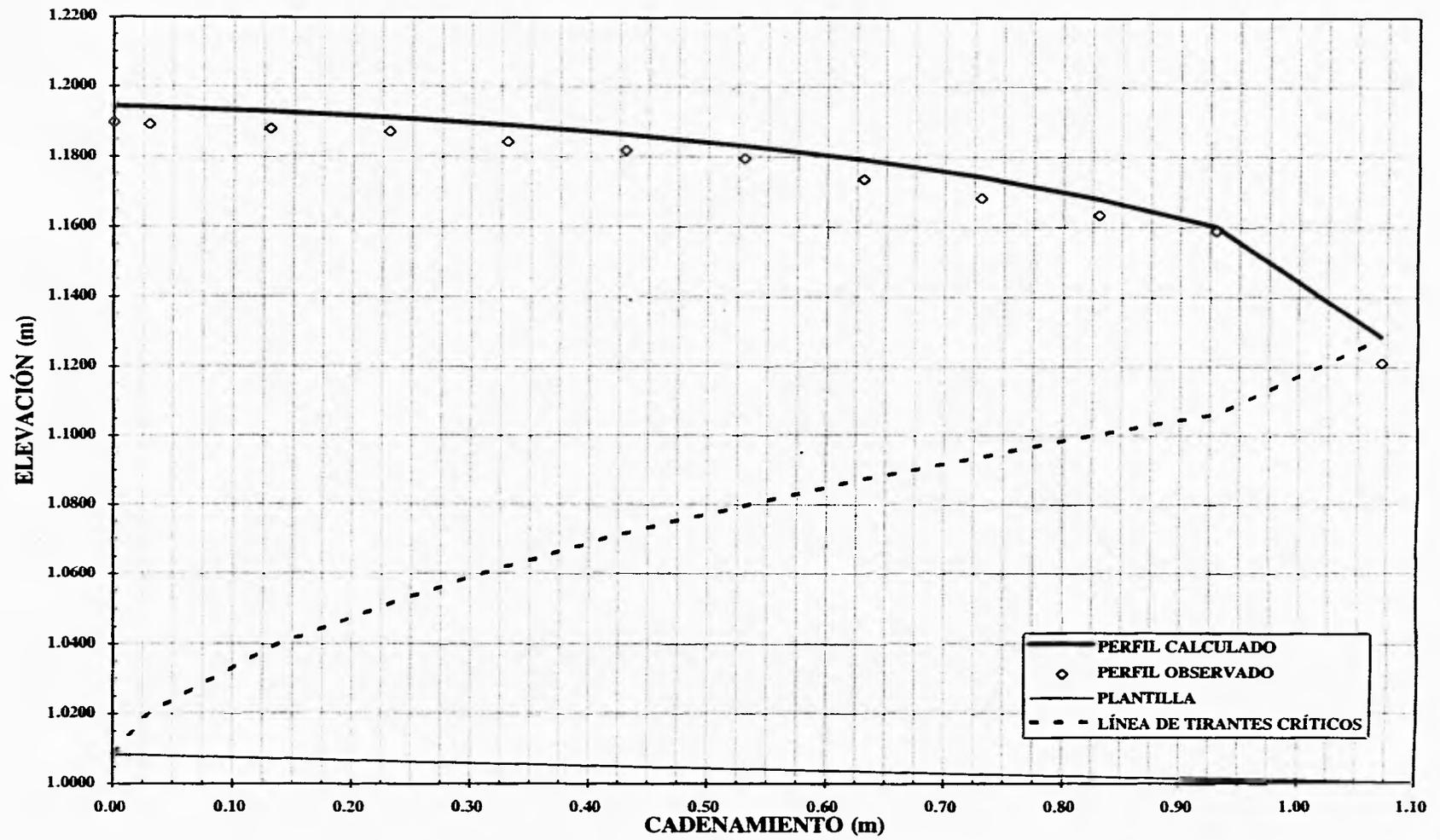


FIGURA 5.3 Perfil de la lámina de agua, (integración analítica)

x (m)	Δx (m)	x^2/L^2	y (m)	<i>ELEV.</i> (m)	A (m ²)	Q (m ³ /s)	V (m/s)	B (m)	n	Y	Y/Y_L	x^2/L^2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1.07			0.1104	1.1104	0.0204	0.0192						
0.93	0.00	1.000	0.1590	1.1601	0.0375	0.0192	0.5122	0.3285	2.717887	0.114107	1.000000	1.000
0.83	0.10	0.797	0.1661	1.1680	0.0398	0.0171	0.4300	0.3368	2.814221	0.118313	1.036862	0.797
0.73	0.10	0.616	0.1715	1.1742	0.0417	0.0151	0.3616	0.3431	2.888336	0.121480	1.064608	0.616
0.63	0.10	0.459	0.1756	1.1791	0.0431	0.0130	0.3017	0.3479	2.946010	0.123904	1.085852	0.459
0.53	0.10	0.325	0.1789	1.1832	0.0443	0.0109	0.2473	0.3517	2.992134	0.125818	1.102632	0.324
0.43	0.10	0.214	0.1814	1.1865	0.0451	0.0089	0.1967	0.3546	3.027519	0.127273	1.115382	0.214
0.33	0.10	0.126	0.1833	1.1891	0.0458	0.0068	0.1487	0.3569	3.054551	0.128377	1.125053	0.126
0.23	0.10	0.061	0.1847	1.1913	0.0463	0.0047	0.1026	0.3584	3.073973	0.129165	1.131965	0.061
0.13	0.10	0.020	0.1855	1.1929	0.0466	0.0027	0.0576	0.3594	3.086144	0.129658	1.136281	0.020
0.03	0.10	0.001	0.1859	1.1941	0.0467	0.0006	0.0133	0.3599	3.091593	0.129878	1.138209	0.001
0.00	0.03	0.000	0.1859	1.1944	0.0467	0.0000	0.0000	0.3599	3.091736	0.129884	1.138260	0.000

TABLA 5.4 Cálculo del perfil, (integración analítica)

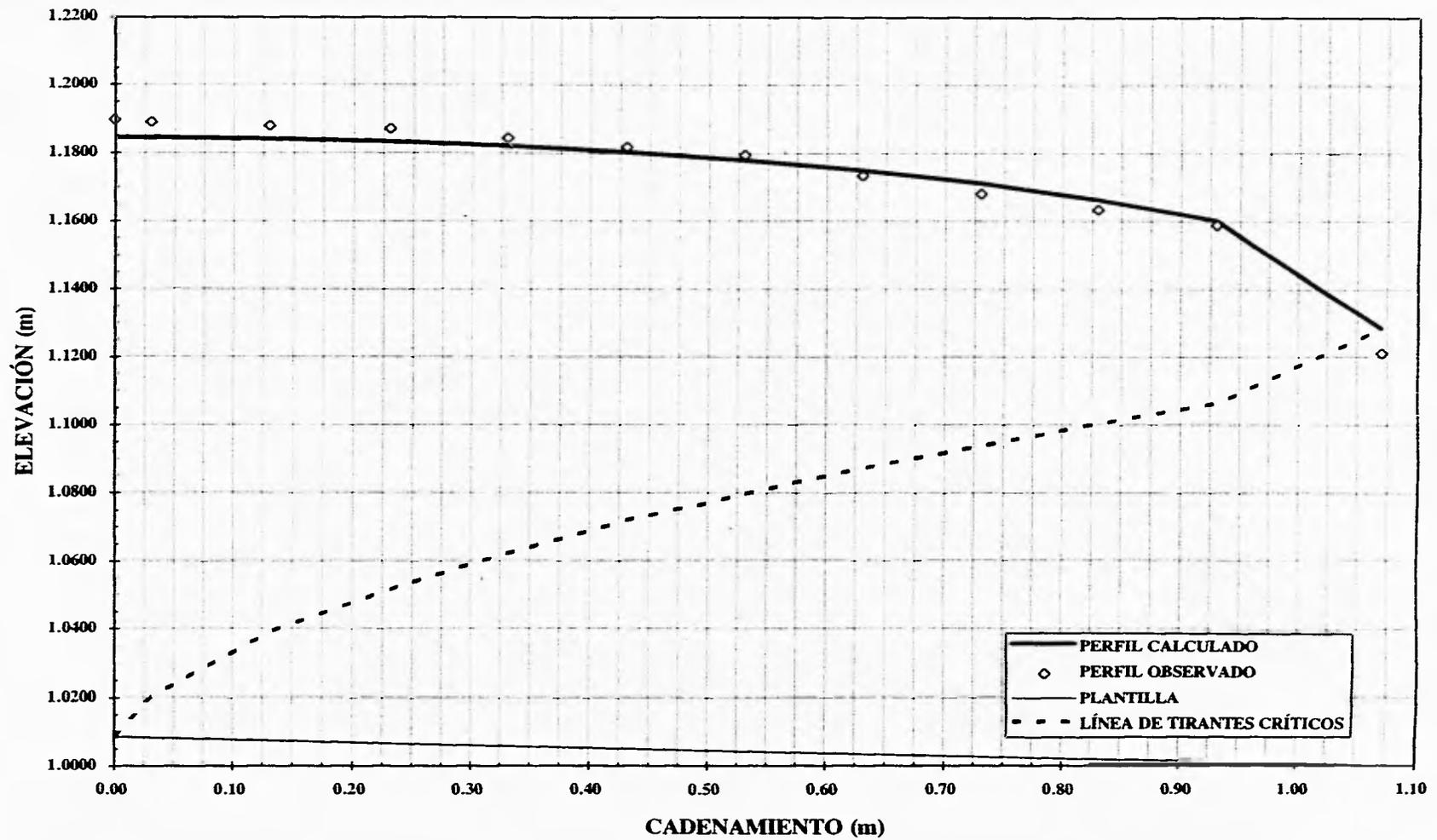


FIGURA 5.4 Perfil de la lámina de agua, (método gráfico)

X	Y	x	y	ELEV
		(m)	(m)	(m)
1	2	3	4	5
0.00000	0.11901	0.00	0.1762	1.1847
0.00015	0.11916	0.03	0.1764	1.1846
0.00064	0.11944	0.13	0.1769	1.1843
0.00114	0.11942	0.23	0.1768	1.1835
0.00164	0.11907	0.33	0.1763	1.1821
0.00213	0.11839	0.43	0.1753	1.1804
0.00263	0.11733	0.53	0.1737	1.1780
0.00312	0.11584	0.63	0.1715	1.1750
0.00362	0.11381	0.73	0.1685	1.1712
0.00411	0.11110	0.83	0.1645	1.1664
0.00461	0.10738	0.93	0.1590	1.1601
		1.07	0.1104	1.1284

TABLA 5.5 Cálculo del perfil, (método gráfico)

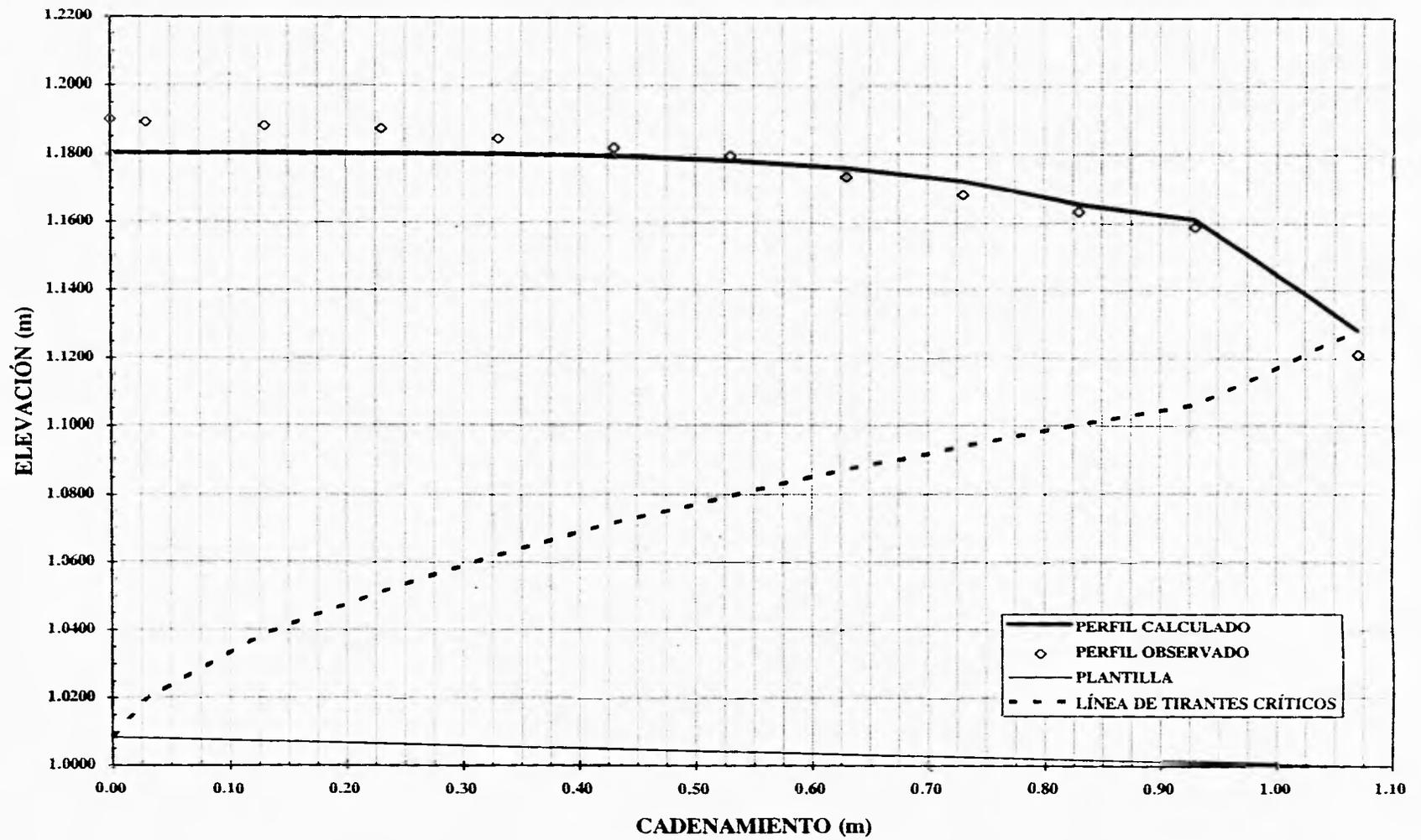


FIGURA 5.5 Perfil de la lámina de agua, (método propuesto por J. Hinds)

<i>x</i> (m)	<i>Q</i> (m ³ /s)	<i>y</i> (m)	<i>ELEV.</i> (m)	<i>H</i> (m)	<i>y+Z</i> (m)
1	2	3	4	5	6
0.00	0.0000	0.1709	1.1805	0.1709	0.1709
0.03	0.0006	0.1711	1.1804	0.1711	0.1711
0.13	0.0027	0.1719	1.1804	0.1719	0.1719
0.23	0.0047	0.1726	1.1803	0.1727	0.1727
0.33	0.0068	0.1732	1.1802	0.1735	0.1735
0.43	0.0089	0.1734	1.1796	0.1743	0.1743
0.53	0.0109	0.1729	1.1783	0.1750	0.1750
0.63	0.0130	0.1715	1.1761	0.1758	0.1758
0.73	0.0151	0.1685	1.1723	0.1766	0.1766
0.83	0.0171	0.1625	1.1655	0.1774	0.1774
0.93	0.0192	0.1590	1.1612	0.1782	0.1782
1.07	0.0192	0.1104			

TABLA 5.6 Cálculo del perfil, (método propuesto por J. Hinds)

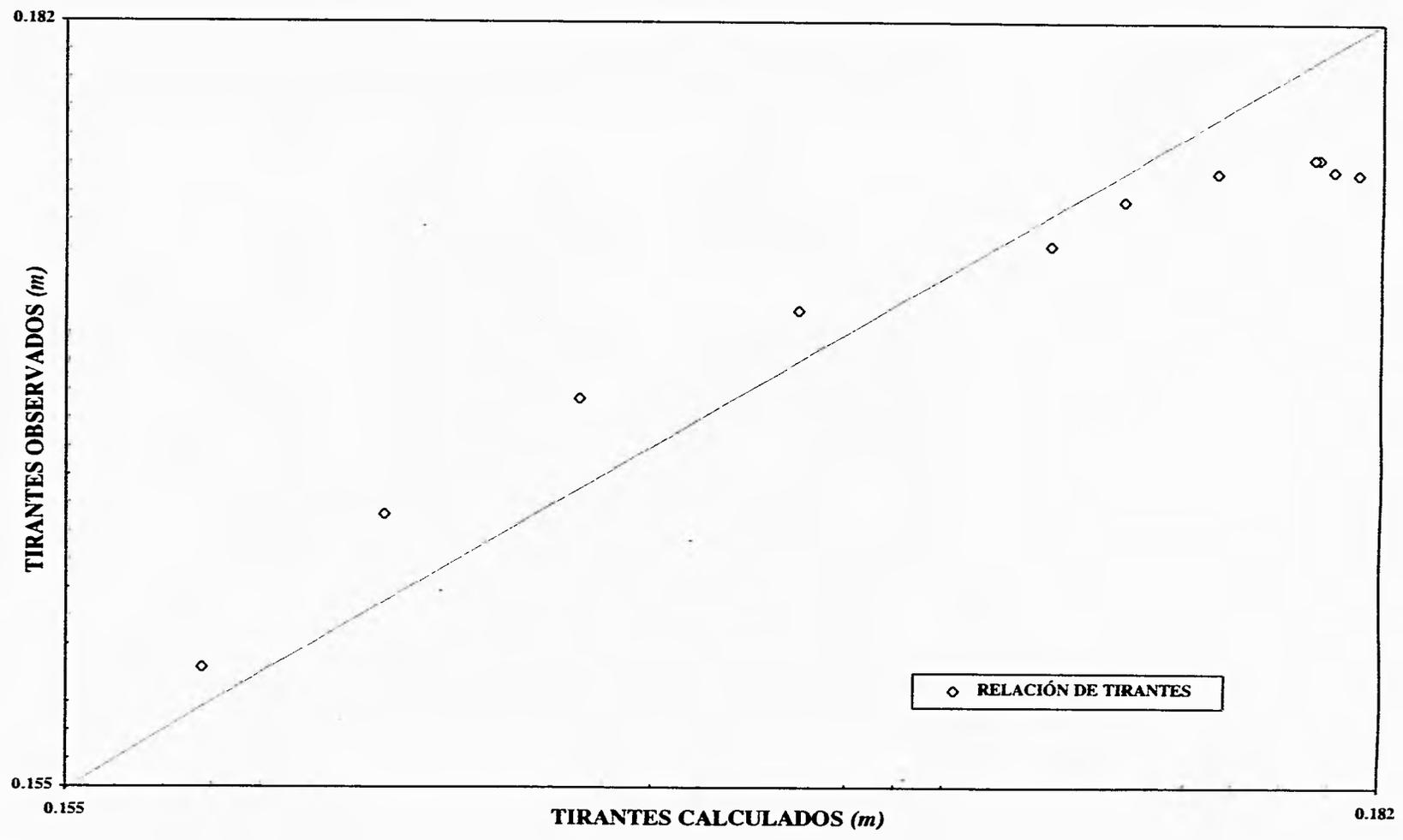


FIGURA 5.6 Análisis de sensibilidad, (integración por incrementos finitos)

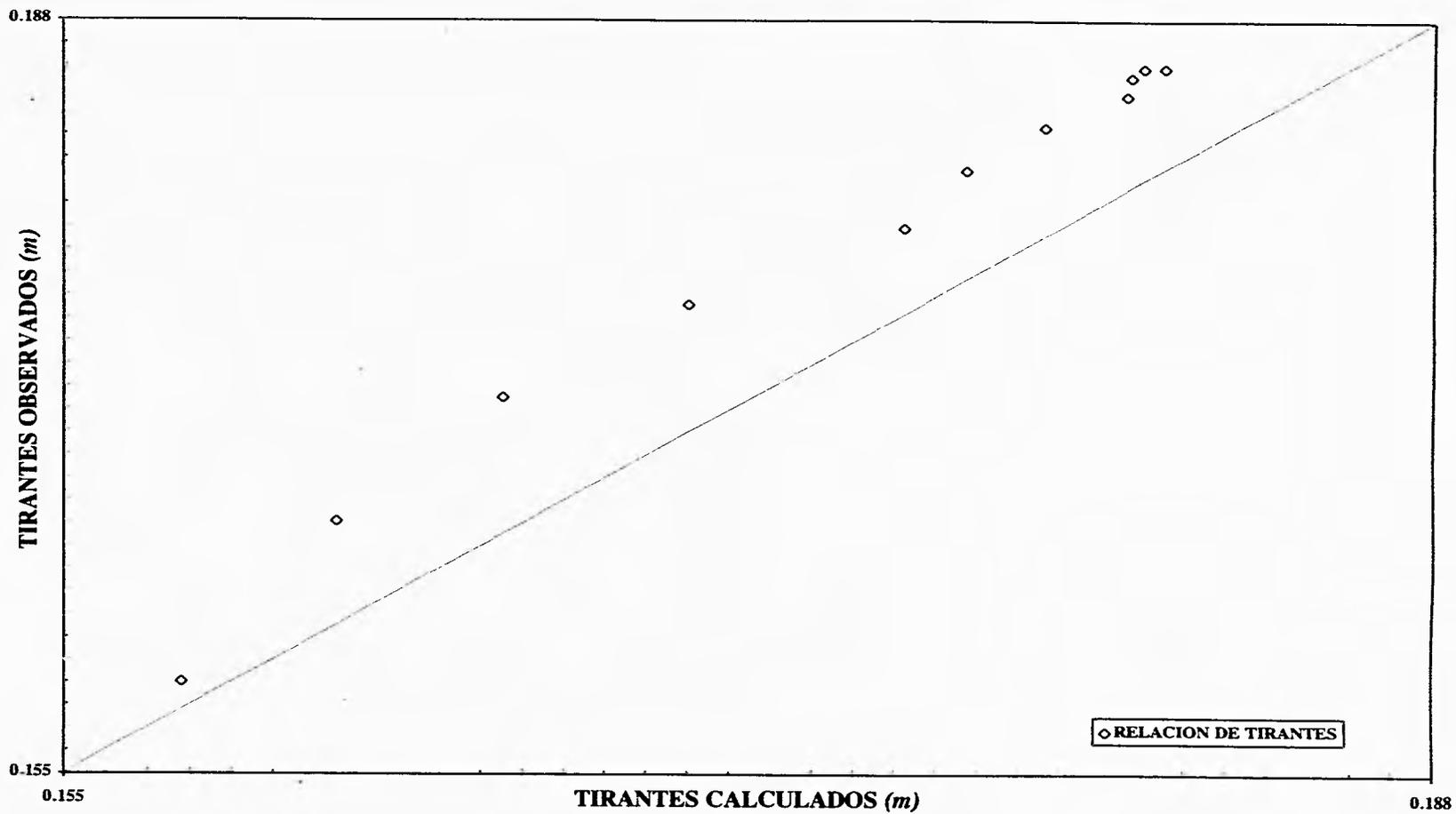


FIGURA 5.7 Análisis de sensibilidad, (integración analítica)

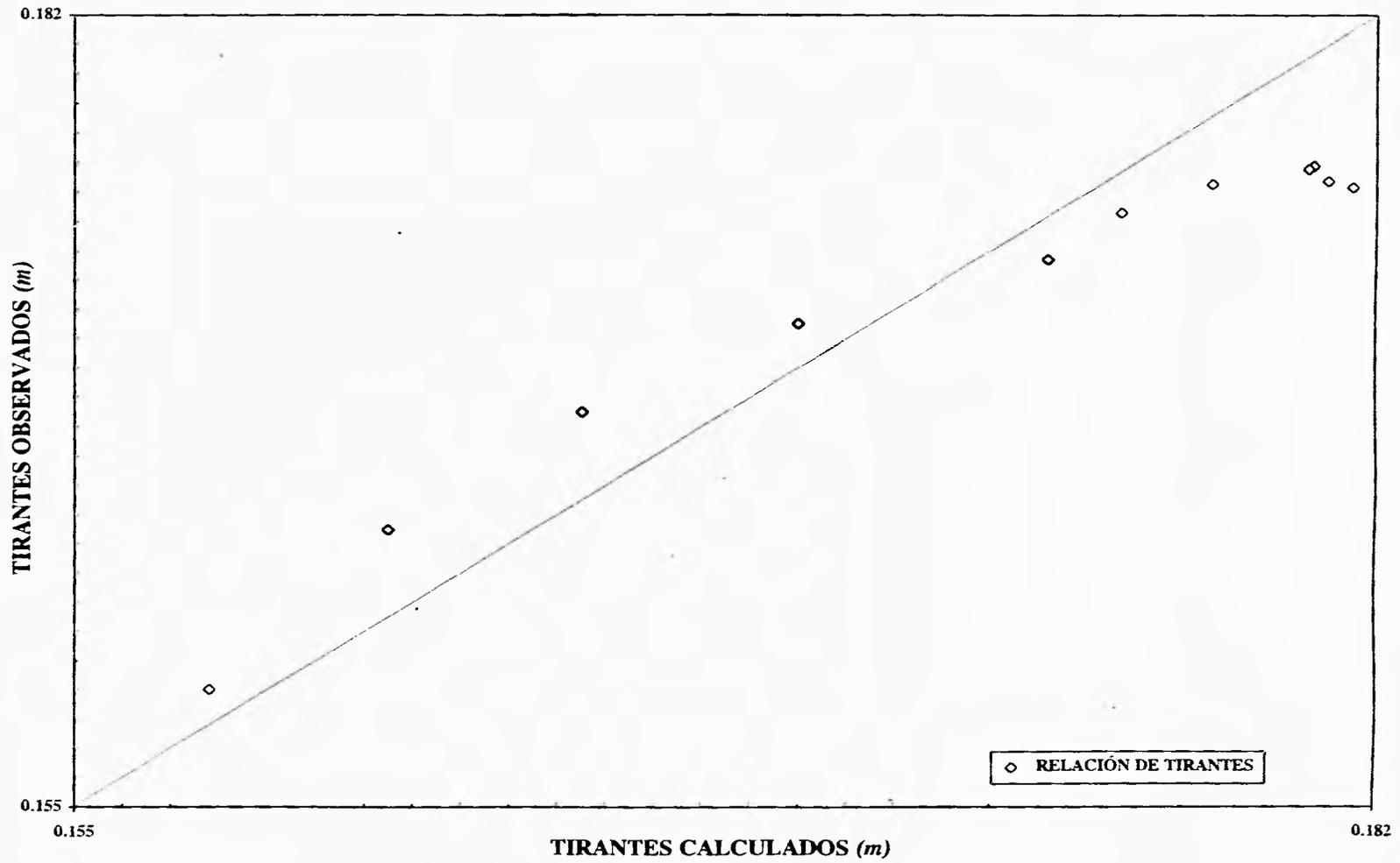


FIGURA 5.8 Análisis de sensibilidad, (método gráfico)

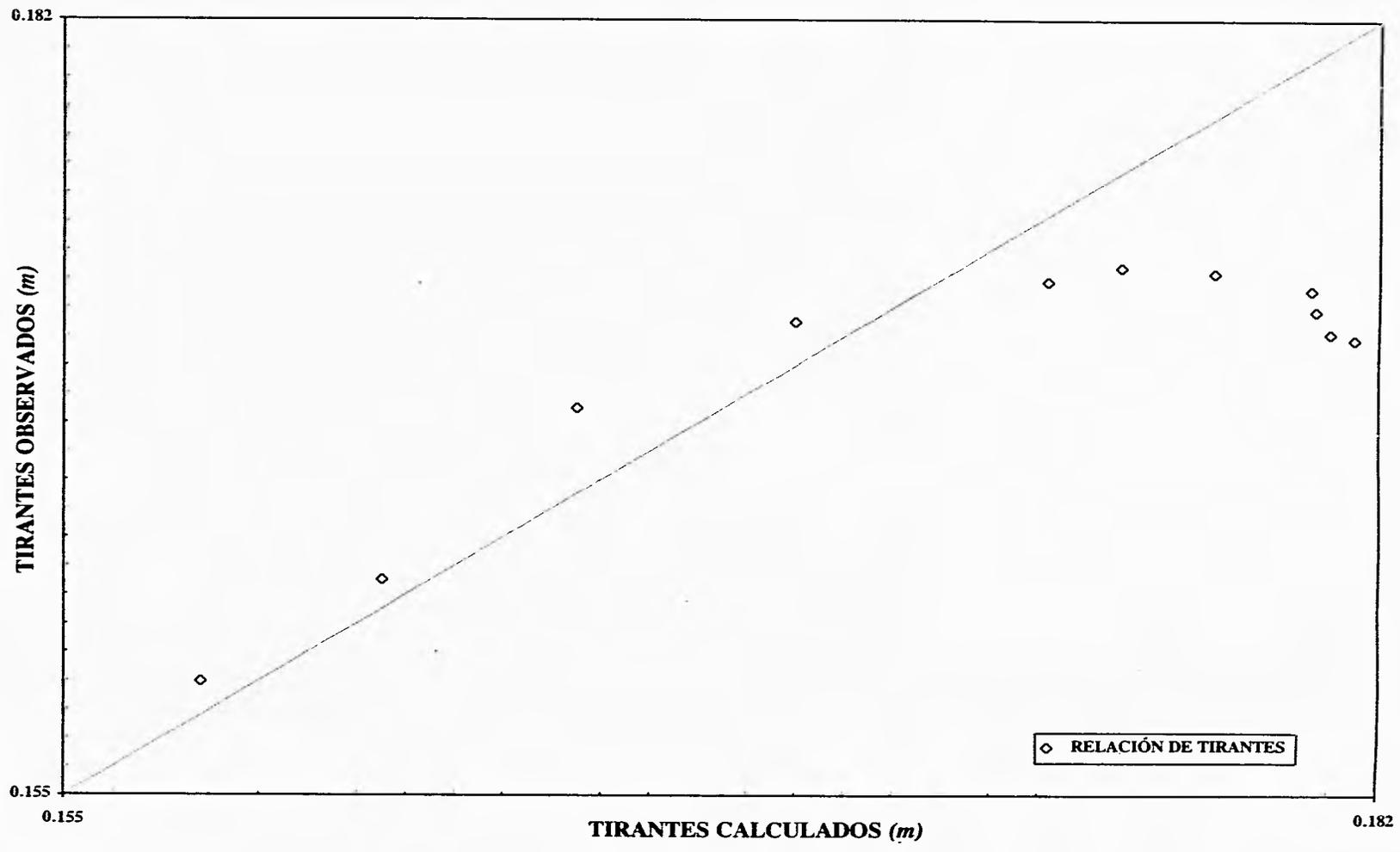


FIGURA 5.9 Análisis de sensibilidad, (método de J. Hinds)

MODELO FÍSICO		INCREMENTOS FIN.		ANALÍTICO		GRÁFICO		HINDS	
x (m)	y (m)	y (m)	e ²	y (m)	e ²	y (m)	e ²	y (m)	e ²
0.00	0.1815	0.1767	2.30E-05	0.1859	1.94E-05	0.1762	2.81E-05	0.1790	6.25E-06
0.30	0.1810	0.1768	1.76E-05	0.1859	2.40E-05	0.1764	2.12E-05	0.1711	9.80E-05
0.13	0.1807	0.1772	1.23E-05	0.1855	2.30E-05	0.1769	1.44E-05	0.1719	7.74E-05
0.23	0.1806	0.1772	1.16E-05	0.1847	1.68E-05	0.1768	1.44E-05	0.1726	6.40E-05
0.33	0.1786	0.1767	3.61E-06	0.1833	2.21E-05	0.1763	5.29E-06	0.1732	2.92E-05
0.43	0.1767	0.1757	1.00E-06	0.1814	2.21E-05	0.1753	1.96E-06	0.1734	1.09E-05
0.53	0.1752	0.1741	1.21E-06	0.1789	1.37E-05	0.1737	2.25E-06	0.1729	5.29E-06
0.63	0.1700	0.1718	3.24E-06	0.1756	3.14E-05	0.1715	2.25E-06	0.1715	2.25E-06
0.73	0.1655	0.1687	1.02E-05	0.1715	3.60E-05	0.1685	9.00E-06	0.1685	9.00E-06
0.83	0.1615	0.1646	9.61E-06	0.1661	2.12E-05	0.1645	9.00E-06	0.1625	1.00E-06
0.93	0.1578	0.1590	1.44E-06	0.1590	1.44E-06	0.1590	1.44E-06	0.1590	1.44E-06
SUMA			9.48E-05		2.31E-04		1.09E-04		3.05E-04

TABLA 5.7 Diferencia de tirantes observados- teóricos

6. CONCLUSIONES

Siendo el objetivo de este trabajo, la comparación de los resultados de diversos métodos matemáticos para la solución de la ecuación del F.E.V.C., contra los datos obtenidos en un modelo físico; las conclusiones que se presentan enseguida de cada uno de los métodos, guardarán el orden con el que fueron presentados dentro del trabajo, haciendo una comparación cuantitativa y cualitativa entre ellos. Por ello y de acuerdo con los resultados obtenidos (capítulo 5), se concluye que:

El método de integración por incrementos finitos, para el cálculo del perfil en el canal de un vertedor lateral, con pendiente subcrítica en toda su longitud y con la geometría utilizada en el modelo experimental, es el que da mejor aproximación, (ver **FIGURA 5.2**), ya que analizando los valores de la suma de los errores al cuadrado, calculando el error como la diferencia entre el tirante calculado y el medido, se observó que la mínima diferencia cuadrática se obtuvo con este método, como se puede observar en la **TABLA 5.7** y **FIGURAS 5.2** y **5.6**.

Cualitativamente, el método de mejor aproximación para el cálculo de un perfil en un canal lateral con las características antes mencionadas, es el de integración analítica, ya que el perfil observado en toda su longitud guarda una mejor consistencia (los tirantes observados están por debajo del perfil calculado en toda la longitud del canal) como se puede apreciar en las **FIGURAS**

6. CONCLUSIONES

5.3 y 5.7. Cuantitativamente, con este método, la dispersión de los datos observados es mayor, existiendo una suma de los errores al cuadrado superior a la que presentan los métodos de integración por incrementos finitos y gráfico, así entonces se concluye que, con la combinación de las características cuantitativas y cualitativas del método, este es confiable, ya que sus variables no están en función de ningún parámetro experimental, debiendo cumplir solo con la relación de tirantes hidráulicos, demostrada en el **Apéndice B**, para asegurar un régimen subcrítico a lo largo del canal colector.

El método gráfico en su desarrollo, para la obtención del perfil, es poco confiable, ya que primeramente, depende de la apreciación de quien lo calcula, además se puede generar un error sistemático importante, debido a que no existen gráficas de los parámetros adimensionales para valores exactos de η , por tal razón se recomienda utilizar la técnica matemática empleada en este método (integración numérica por Runge-Kutta). Con la utilización de esta técnica, el método genera una suma de los errores al cuadrado (TABLA 5.7) un poco mayor que la generada por el método de integración por incrementos finitos. Por otra parte, existe en el método una inconsistencia mínima (FIGURAS 5.4 y 5.8) de lo observado experimentalmente y lo calculado, concluyendo así que el método gráfico empleando la técnica matemática propuesta, es también confiable para el cálculo del perfil de un canal lateral, con las características hidráulicas y geométricas aplicadas en este trabajo.

Respecto a los métodos propuestos por J. Hinds y Viparelli estos son inaplicables en su totalidad a este trabajo. Hinds, como se demostró en su momento, propone una ley de variación de velocidades, obtenida de experiencias realizadas en el modelo de la presa Boulder, Viparelli adopta esta ley de velocidades en su respectivo trabajo. Aplicadas las características hidráulicas de esta ley a las condiciones consideradas en esta tesis, hace que los valores a y n estén fuera de los rangos obtenidos por Hinds, como fue demostrado en el capítulo 5, por tal razón ambos métodos son poco confiables al no poderse aplicar a otras condiciones que no son las estudiadas por estos autores, aunque Viparelli propone una revisión de la pendiente transversal del perfil del agua en el canal colector, que puede ser de utilidad en el diseño,

Conociendo las características hidráulicas al final del canal colector, y respetando las condiciones de régimen subcrítico en el canal lateral, se pueden hacer simplificaciones matemáticas, como las desarrolladas en este trabajo, tanto en el método propuesto por J. Hinds como en el propuesto por Viparelli. Estas simplificaciones radican en la anulación matemática de uno de los valores (a y n), o de los dos. Aplicando las simplificaciones en el método de J. Hinds se concluye que este es poco confiable al generar una suma de los errores al cuadrado mayor que en todos los métodos (TABLA 5.7), y se mantiene una inconsistencia entre lo observado experimentalmente y lo calculado por el método, (FIGURAS 5.5 y 5.9).

Con base en los resultados obtenidos se concluye por medio de las tablas siguientes que

MÉTODO	BUENA	REGULAR	MALA
INCR. FINITOS	X		
INT. ANALÍTICA		X	
GRÁFICO		X	
HINDS			X
VIPARELLI			X

TABLA 6.1a Bondad cuantitativa de los métodos empleados

MÉTODO	BUENA	REGULAR	MALA
INCR. FINITOS		X	
INT. ANALÍTICA	X		
GRÁFICO		X	
HINDS			X
VIPARELLI			X

TABLA 6.1b Bondad cualitativa de los métodos empleados

Por otra parte, la razón por la cual se calcula el perfil de la lámina de agua en un canal de vertedor lateral, es para determinar una geometría óptima que genere una excavación mínima para la avenida de diseño con la cual la obra de excedencias fue diseñada. Por tal razón con las herramientas de cálculo actuales, se concluye que se podrán calcular tantos perfiles como se quiera, ello, para establecer patrones de bondad con las características cualitativas y cuantitativas que el proyectista desee a fin de obtener los métodos más confiables que este último considere pertinente para el diseño.

Por último, en el método gráfico, al utilizar la integración numérica para el cálculo del perfil, se observó que esta herramienta matemática genera un error tan pequeño como se desee, concluyendo así que esta técnica se puede aplicar desde la misma ecuación dinámica del F.E.V.C., fijando las características hidráulicas y geométricas de una sección conocida, y variando los incrementos de las distancias, que deberán ser muy pequeños, tanto como el apoyo de la solución numérica lo soporte (computadoras personales, calculadoras, etc). Una de las características importantes de esta herramienta es que se pueden considerar las pérdidas entre dos secciones calculadas, situación no contemplada en cuatro de los cinco métodos utilizados en este trabajo, (integración analítica, gráfico, Hinds y Viparelli).

REFERENCIAS

- 1.- C.F.E., Instituto de Investigaciones Eléctricas. **MANUAL DE OBRAS CIVILES (HIDRÁULICA)**, Vol. **A.2.10 (OBRAS DE EXCEDENCIAS)**. Comisión Federal de Electricidad. México, 1983.
- 2.- Chow V., Te. **OPEN CHANNEL HYDRAULICS**. McGraw-Hill Book Co. New York, 1959.
- 3.- Cruickshank G., Ramírez P. **DISEÑO DEL VERTEDOR DE LA PRESA NEJAPA APLICANDO EL MÉTODO DE VIPARELLI**. Revista de Ingeniería Hidráulica en México, Vol. VIII, No 2 abril-mayo-junio. México, 1964.
- 4.- French, Richard. **HIDRÁULICA DE CANALES ABIERTOS**. McGraw-Hill Interamericana de México. México, 1985.
- 5.- Fuentes M., Oscar. **INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS NUMÉRICOS APLICADOS A LA HIDRÁULICA**. Series de Divulgación 5, I.M.T.A. México, 1988.
- 6.- Gardea V., Humberto, **APROVECHAMIENTOS HIDROELÉCTRICOS Y DE BOMBEO**. Trillas. México, 1992.
- 7.- Gardea V., Humberto. **APUNTES DE HIDRÁULICA DE CANALES**. Facultad de Ingeniería, U.N.A.M. México, 1987.
- 8.- González C., Juan A. Tesis Maestría: **ANÁLISIS Y SOLUCIÓN NUMÉRICA DE FLUJO ESPACIALMENTE VARIADO A GASTO CRECIENTE**. División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería, U.N.A.M. México, 1989.
- 9.- Guarga F., Rafael. **CANALES CON GASTO CRECIENTE**. Series del Instituto de Ingeniería, U.N.A.M., No. 463. México, 1986.
- 10.- Guarga F., Rafael. Tesis Maestría: **CANALES A GASTO CRECIENTE, TEORÍA Y APLICACIONES**. División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería, U.N.A.M. México, 1989.
- 11.- Henderson, F. **OPEN CHANNEL FLOW**. McMillan Publishing Co, U.S.A., 1966.
- 12.- León V., Luis F. **NOTAS SOBRE EL DISEÑO HIDRÁULICO DE VERTEDORES DE CANAL LATERAL**. Facultad de Ingeniería, U.N.A.M. México, 1990.
- 13.- Levi, Enzo. **EL AGUA SEGÚN LA CIENCIA**. C.O.N.A.C.y T. Castilla. México, 1989.
- 14.- Sotelo A., Gilberto. **APUNTES DE HIDRÁULICA II**. Facultad de Ingeniería, U.N.A.M. México, 1989.
- 15.- Sotelo A., Gilberto. **HIDRÁULICA GENERAL**. Vol. 1. Limusa. México, 1969.
- 16.- Swokoswski, Earl W. **CÁLCULO CON GEOMETRÍA ANALÍTICA**. Wadsworth Internacional Iberoamérica. México, 1982.
- 17.- U.S. Bureau of Reclamation. **DISEÑO DE PRESAS PEQUEÑAS**. Cia. Ed. Continental. México, 1969.
- 18.- Zill, P. **ECUACIONES DIFERENCIALES CON APLICACIONES**. Ed. Grupo Editorial Iberoamérica. México, 1992

APÉNDICE A

DEMOSTRACIÓN DEL MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR INCREMENTOS FINITOS

Partiendo de la ECUACIÓN 1.9

$$\frac{\gamma}{g} \cdot [Q \cdot dV + dQ \cdot (V + dV)] = \gamma \cdot S_o \cdot A \cdot dx - \gamma \cdot A \cdot S_{f_{1-2}} \cdot dx - \gamma \cdot A \cdot dy \quad (a.1)$$

Considerando incrementos diferenciales en el lado izquierdo de la ECUACIÓN a.1

$$\frac{\gamma}{g} \cdot [Q \cdot \Delta V + \Delta Q \cdot (V + \Delta V)] = \gamma \cdot S_o \cdot A \cdot dx - \gamma \cdot A \cdot S_{f_{1-2}} \cdot dx - \gamma \cdot A \cdot dy$$

integrando del lado derecho y considerando las condiciones de frontera como las existentes en el volumen de control comprendido entre las secciones 1 y 2

$$\frac{\gamma}{g} \cdot [Q \cdot \Delta V + \Delta Q \cdot (V + \Delta V)] = \gamma \cdot S_o \cdot \int_{A_{1-2}} A \cdot dx - \gamma \cdot S_{f_{1-2}} \cdot \int_{A_{1-2}} A \cdot dx - \gamma \cdot \int_{A_{1-2}} A \cdot dy$$

resolviendo

$$\frac{\gamma}{g} \cdot [Q \cdot \Delta V + \Delta Q \cdot (V + \Delta V)] = \gamma \cdot S_o \cdot A_{1-2} \cdot x - \gamma \cdot A_{1-2} \cdot S_{f_{1-2}} \cdot x - \gamma \cdot A_{1-2} \cdot y$$

haciendo

$$x = \Delta x \quad y = \Delta y$$

se tiene que

$$\frac{1}{g} \cdot [Q \cdot \Delta V + \Delta Q \cdot (V + \Delta V)] = S_o \cdot A_{1-2} \cdot \Delta x - A_{1-2} \cdot S_{f_{1-2}} \cdot \Delta x - A_{1-2} \cdot \Delta y$$

donde

$$A_{1-2} = \bar{A} \text{ área promedio entre las secciones 1 y 2}$$

factorizando

$$\frac{1}{g} \cdot [Q \cdot \Delta V + \Delta Q \cdot (V + \Delta V)] = -\bar{A} \cdot \Delta x \cdot \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - S_o + S_{f_{1-2}} \right)$$

Ahora bien por continuidad

$$Q = Q_1 \quad V + \Delta V = V_2 \quad \bar{A} = \left(\frac{Q_1 + Q_2}{V_1 + V_2} \right)$$

Por lo tanto

$$-\frac{I}{A \cdot g} \cdot [Q_1 \cdot \Delta V + \Delta Q \cdot V_2] = \Delta x \cdot \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - S_o + S_{f_{1-2}} \right)$$

dividiendo y multiplicando por Q_1 el miembro izquierdo de la ecuación

$$-\frac{Q_1}{A \cdot g} \cdot \left[\Delta V + \Delta Q \cdot \frac{V_2}{Q_1} \right] = \Delta x \cdot \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - S_o + S_{f_{1-2}} \right)$$

aplicando la ecuación de continuidad y despejando a Δy se tiene

$$-\frac{Q_1}{g} \cdot \left(\frac{V_1 + V_2}{Q_1 + Q_2} \right) \cdot \left[\Delta V + \Delta Q \cdot \frac{V_2}{Q_1} \right] = \Delta y - S_o \cdot \Delta x + S_{f_{1-2}} \cdot \Delta x$$

Ahora bien de la FIGURA 1.1 se observa

$$S_o \cdot dx - dy = dy'$$

Considerando de nuevo a los diferenciales como incrementos

$$S_o \cdot \Delta x - \Delta y = \Delta y' \tag{a.2}$$

retomando

$$\Delta y = -\frac{Q_1}{g} \cdot \left(\frac{V_1 + V_2}{Q_1 + Q_2} \right) \cdot \left[\Delta V + \Delta Q \cdot \frac{V_2}{Q_1} \right] + S_o \cdot \Delta x - S_{f_{1-2}} \cdot \Delta x \tag{a.3}$$

sustituyendo (a.2) en (a.3) y reduciendo

$$\frac{Q_1}{g} \cdot \left(\frac{V_1 + V_2}{Q_1 + Q_2} \right) \cdot \left[\Delta V + \Delta Q \cdot \frac{V_2}{Q_1} \right] + S_{f_{1-2}} \cdot \Delta x = \Delta y'$$

Si

$$\Delta V = V_2 - V_1 \qquad \Delta Q = Q_2 - Q_1 \qquad \Rightarrow$$

$$\Delta y' = \frac{Q_1}{g} \cdot \left(\frac{V_1 + V_2}{Q_1 + Q_2} \right) \cdot \left[(V_2 - V_1) + (Q_2 - Q_1) \cdot \frac{V_2}{Q_1} \right] + S_{f_{1-2}} \cdot \Delta x$$

y

$$S_{f_{1-2}} = \frac{S_{f_1} + S_{f_2}}{2}$$

donde

S_{f_1} pendiente hidráulica en la sección 1

S_{f_2} pendiente hidráulica en la sección 2

Finalmente se llega a

$$\Delta y' = \frac{Q_1}{g} \cdot \left(\frac{V_1 + V_2}{Q_1 + Q_2} \right) \cdot \left[(v_2 - v_1) + (Q_2 - Q_1) \cdot \frac{V_2}{Q_1} \right] + \left(\frac{S_{f_1} + S_{f_2}}{2} \right) \cdot \Delta x$$

donde

- Q_1 gasto en la sección 1
- Q_2 gasto en la sección 2
- V_1 velocidad en la sección 1
- V_2 velocidad en la sección 2
- Δx incremento de la distancia
- S_{f_1} pendiente hidráulica en la sección 1
- S_{f_2} pendiente hidráulica en la sección 2
- g aceleración de la gravedad

APÉNDICE B

DEMOSTRACIÓN DEL MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR INTEGRACIÓN ANALÍTICA

Partiendo de la ECUACIÓN 1.9c

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_{f_{i-1}} - \frac{2 \cdot Q}{g \cdot A^2} \cdot \frac{dQ}{dx}}{1 - \frac{Q^2}{g \cdot A^2 \cdot Y}}$$

y considerando

$$S_o = S_{f_{i-1}} \approx 0$$

queda entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{2 \cdot Q}{g \cdot A^2} \cdot \frac{dQ}{dx}}{1 - \frac{Q^2}{g \cdot A^2 \cdot Y}} \quad (\text{b.1})$$

Por otro lado se observa que

$$Q = q \cdot x \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ}{dx} = q. \quad (\text{b.2})$$

sustituyendo (b.2) en (b.1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{2 \cdot q \cdot x}{g \cdot A^2} \cdot q}{1 - \frac{q^2 \cdot x^2}{g \cdot A^2 \cdot Y}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2 \cdot q^2 \cdot x}{g \cdot A^2 \cdot \left(1 - \frac{q^2 \cdot x^2}{g \cdot A^2 \cdot Y}\right)}$$

desarrollando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2 \cdot q^2 \cdot x}{g \cdot A^2 - \frac{q^2 \cdot x^2}{Y}}$$

reordenando

$$\frac{dx}{dy} \cdot \left(\frac{-2 \cdot q^2 \cdot x}{g \cdot A^2 - \frac{q^2 \cdot x^2}{Y}} \right) = 1$$

$$\frac{dx}{dy} \cdot (-2 \cdot q^2 \cdot x) = g \cdot A^2 - \frac{q^2 \cdot x^2}{Y}$$

reagrupando

$$-2 \cdot q^2 \cdot x \cdot \frac{dx}{dy} + q^2 \cdot \frac{x^2}{Y} = g \cdot A^2$$

despejando a los terminos constantes

$$-2 \cdot x \cdot \frac{dx}{dy} + \frac{x^2}{Y} = \frac{g \cdot A^2}{q^2}$$

Por otra parte se cumple que

$$2 \cdot x \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{dx^2}{dy}$$

aplicando esta propiedad a la ecuación diferencial anterior

$$\frac{dx^2}{dy} - \frac{x^2}{Y} = - \frac{g \cdot A^2}{q^2} \quad (b.3)$$

Siendo la ecuación (b.3) la ecuación diferencial del F.E.V.C. , con pendiente hidráulica y de plantilla nulas, para una sección cualquiera. La ecuación es del tipo diferencial lineal de primer orden, no homogénea y coeficientes variables donde Y es el tirante hidráulico medio en una sección cualquiera.

Aplicando el método de factor de integración para la solución de la ecuación diferencial del F.E.V.C.

Sea

$$\varphi = x^2$$

Para una sección trapezoidal y asumiendo que existe dentro de ella una sección rectangular implícita, se plantean las proporciones siguientes:

$$A = n \cdot b \cdot y \quad \text{y} \quad Y = m \cdot y \quad \Rightarrow$$

$$n = \frac{A}{b \cdot y} = \frac{b + k \cdot y}{b} \quad \text{y} \quad m = \frac{Y}{y} = \frac{b + k \cdot y}{b + 2 \cdot k \cdot y}$$

donde:

- A área hidráulica de una sección trapezoidal
- Y tirante hidráulico medio de una sección trapezoidal
- b ancho de la plantilla del canal
- y tirante hidráulico
- m, n factores de conversión de sección hidráulica

Retomando la solución de la ecuación diferencial y aplicando las conversiones

$$\frac{d\varphi}{dy} - \frac{1}{m \cdot y} \cdot \varphi = -\frac{g \cdot n^2 \cdot b^2 \cdot y^2}{q^2} \quad (b.4)$$

existiendo una ecuación homogénea asociada, siendo la siguiente

$$\frac{d\varphi}{dy} - \frac{1}{m \cdot y} \cdot \varphi = 0$$

despejando

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{1}{m \cdot y} \cdot \varphi \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{1}{m \cdot y} \cdot dy$$

integrando ambos miembros de la ecuación

$$\int \frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{1}{m} \cdot \int \frac{dy}{y}$$

Por lo tanto

$$\ln \varphi = \frac{1}{m} \cdot \ln y + c$$

aplicando las leyes de los exponentes se observa

$$e^{\ln \varphi} = e^{\frac{1}{m} \cdot \ln y + c} \quad \Rightarrow \quad \varphi = e^{\frac{1}{m} \cdot \ln y} \cdot e^c$$

si

$$e^c = cte = c \quad \Rightarrow \quad \varphi = ce^{\frac{1}{m} \cdot \ln y}$$

aplicando las propiedades de los logaritmos

$$\frac{1}{m} \ln y = \ln y^{\frac{1}{m}}$$

Por lo tanto

$$\varphi = ce^{\ln y^{\frac{1}{m}}}$$

Si se aplican las propiedades de los antilogaritmos a la última expresión

$$\varphi = c \cdot y^{\frac{1}{m}} \quad (b.5)$$

APÉNDICE B

retomando la solución de la ecuación diferencial, se observa de (b.5) que

$$c = \varphi(y)$$

sustituyendo en (b.5)

$$\varphi = \varphi(y) \cdot y^{\frac{1}{m}} \quad (\text{b.6})$$

derivando (b.6)

$$\varphi' = \varphi(y) \cdot \frac{1}{m} \cdot y^{\frac{1}{m}-1} + \varphi(y)' \cdot y^{\frac{1}{m}} = \varphi(y) \cdot \frac{1}{m} \cdot y^{\frac{1-m}{m}} + \varphi(y)' \cdot y \quad (\text{b.7})$$

sustituyendo (b.6) y (b.7) en (b.4)

$$\varphi(y) \cdot \frac{1}{m} \cdot y^{\frac{1-m}{m}} + \varphi(y)' \cdot y^{\frac{1}{m}} - \frac{1}{m \cdot y} \cdot \varphi(y) \cdot y^{\frac{1}{m}} = -\frac{g \cdot n^2 \cdot b^2 \cdot y^2}{q^2}$$

reduciendo se llega a

$$\varphi(y)' \cdot y^{\frac{1}{m}} = -\frac{g \cdot n^2 \cdot b^2 \cdot y^2}{q^2}$$

Ahora bien, asumiendo que en el proyecto de un vertedor de canal lateral se desea realizar la excavación menor, dependiente de los taludes, entre otros factores, se desea que estos sean lo mas escarpados posibles con lo que el valor $\lim_{k \rightarrow 0} m = 1$ (tiende a sección rectangular) por lo tanto la ecuación anterior se simplifica a

$$\varphi'(y) = -\frac{g \cdot n^2 \cdot b^2 \cdot y}{q^2}$$

integrando ambos miembros

$$d[\varphi(y)] = -\frac{g \cdot n^2 \cdot b^2}{q^2} \cdot \int y \cdot dy \quad (\text{b.8})$$

$$\varphi(y) = -\frac{g \cdot n^2 \cdot b^2}{2 \cdot q^2} \cdot y^2 + c$$

sustituyendo (b.8) en (b.6) para obtener la solución particular

$$\varphi = \left[-\frac{g \cdot n^2 \cdot b^2 \cdot y^2}{2 \cdot q^2} + c \right] \cdot y$$

desarrollando

$$\varphi = -\frac{g \cdot n^2 \cdot b^2 \cdot y^3}{2 \cdot q^2} + c \cdot y \quad (\text{b.9})$$

evaluando c para las condiciones de frontera, y haciendo el cambio de variable

$$\varphi = x^2 = L^2 \quad y \quad y = y_L \quad \Rightarrow$$

$$L^2 = -\frac{g \cdot n^2 \cdot b^2 \cdot y_L^3}{2 \cdot q^2} + c \cdot y_L$$

despejando a c

$$c = \left(L^2 + \frac{g \cdot n^2 \cdot b^2 \cdot y_L^3}{2 \cdot q^2} \right) \cdot \frac{1}{y_L} \quad (\text{b.10})$$

sustituyendo en (b.10) en (b.9.) para encontrar la solución particular

$$x^2 = -\frac{g \cdot n^2 \cdot b^2 \cdot y^3}{2 \cdot q^2} + \left[\left(L^2 + \frac{g \cdot n^2 \cdot b^2 \cdot y_L^3}{2 \cdot q^2} \right) \cdot \frac{1}{y_L} \right] \cdot y$$

desarrollando

$$x^2 = -\frac{g \cdot n^2 \cdot b^2 \cdot y^3}{2 \cdot q^2} + L^2 \cdot \left(\frac{y}{y_L} \right) + \frac{g \cdot n^2 \cdot b^2 \cdot y_L^3}{2 \cdot q^2} \cdot \left(\frac{y}{y_L} \right)$$

dividiendo entre L^2 ambos miembros de la ecuación

$$\frac{x^2}{L^2} = -\frac{g \cdot b^2 \cdot y^3}{q^2 \cdot L^2} \cdot \frac{n^2}{2} + \frac{y}{y_L} + \frac{g \cdot b^2 \cdot y_L^3}{q^2 \cdot L^2} \cdot \frac{n^2}{2} \cdot \left(\frac{y}{y_L} \right)$$

Por otra parte, al final del canal y en la sección rectangular implícita se tiene que

$$Fr_{RL} = \frac{q^2 L^2}{g \cdot b^2 \cdot y_L^3}$$

dividiendo y multiplicando por y_L^3 el primer miembro de la ecuación del lado derecho

$$\frac{x^2}{L^2} = -\frac{g \cdot b^2 \cdot y^3}{q^2 \cdot L^2} \cdot \frac{n^2}{2} \left(\frac{y_L^3}{y_L^3} \right) + \frac{y}{y_L} + \frac{g \cdot b^2 \cdot y_L^3}{q^2} \cdot \frac{n^2}{2} \cdot \left(\frac{y}{y_L} \right)$$

sustituyendo la relación

$$\frac{x^2}{L^2} = -\frac{n^2}{2 \cdot Fr_{RL}} \cdot \left(\frac{y^3}{y_L^3} \right) + \frac{y}{y_L} + \frac{n^2}{2 \cdot Fr_{RL}} \cdot \left(\frac{y}{y_L} \right)$$

reordenando

APÉNDICE B

$$\frac{x^2}{L^2} = -\frac{n^2}{2 \cdot Fr_{RL}} \cdot \left(\frac{y}{y_L}\right)^3 + \frac{y}{y_L} \cdot \left(1 + \frac{n^2}{2 \cdot Fr_{RL}}\right)$$

Recordando que

$$\frac{y}{y_L} = \frac{m}{Y_L} = \frac{Y}{m}$$

Por lo tanto

$$\frac{x^2}{L^2} = -\frac{n^2}{2 \cdot Fr_{RL}} \cdot \left(\frac{Y}{Y_L}\right)^3 + \frac{Y}{Y_L} \cdot \left(1 + \frac{n^2}{2 \cdot Fr_{RL}}\right) \quad (b.12)$$

sustituyendo el valor de n para una sección trapezoidal en (b.12) se tiene que

$$\frac{x^2}{L^2} = \left[1 + \frac{1}{2 \cdot Fr_{RL}} \cdot \left(\frac{b + k \cdot y}{b}\right)^2\right] \cdot \frac{Y}{Y_L} - \left[\frac{1}{2 \cdot Fr_{RL}} \cdot \left(\frac{b + k \cdot y}{b}\right)^2\right] \cdot \left(\frac{Y}{Y_L}\right)^3 \quad (b.13)$$

donde

- x distancia a partir del origen de un cadenamiento del canal
- L longitud total del canal
- b ancho de la plantilla del canal
- k talud del canal (promedio en el caso de que fueran diferentes)
- y tirante existente en la distancia x
- Y tirante hidráulico medio en la distancia x
- Y_L tirante hidráulico medio en la sección con cadenamiento $x=L$
- Fr_{RL} número de Froude de la sección rectangular implícita en la sección trapezoidal con cadenamiento $x=L$

Donde las soluciones serán aquellas que cumplan la relación

$$\frac{y}{y_L} = \frac{Y}{Y_L} \geq 1$$

debido a que la condición de régimen subcrítico genera al menor de los tirantes en el canal colector en la sección final.

APÉNDICE C

DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA DEL MÉTODO GRÁFICO

Partiendo de la ECUACIÓN (1.9c)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_{f_{1-2}} - \frac{2 \cdot Q}{g \cdot A^2} \cdot \frac{dQ}{dx}}{\left(1 - \frac{Q^2}{g \cdot A^3} \cdot B\right)}$$

Por otro lado

$$Q = q \cdot x \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ}{dx} = q.$$

sustituyendo queda

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_{f_{1-2}} - \frac{2 \cdot q \cdot x}{g \cdot A^2} \cdot q}{\left(1 - \frac{q^2 \cdot x^2}{g \cdot A^3} \cdot B\right)}$$

estableciendo a la sección en estudio como trapecial con taludes iguales

$$A = (b + k \cdot y) \cdot y \quad B = b + 2 \cdot k \cdot y$$

quiere decir que la ecuación del F.E.V.C. sin considerar pérdidas queda

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - \frac{2 \cdot q^2 \cdot x}{g \cdot (b + k \cdot y)^2 \cdot y^2}}{\left[1 - \frac{q^2 \cdot x^2}{g \cdot (b + k \cdot y)^3 \cdot y^3} \cdot (b + 2 \cdot k \cdot y)\right]} \quad (c.1)$$

para encontrar las coordenadas del punto singular* de la ecuación (c.1.), por el teorema de L' Hôpital se anulará tanto el numerador como el denominador.

Anulando el numerador

$$S_o - \frac{2 \cdot q^2 \cdot x}{g \cdot (b + k \cdot y)^2 \cdot y^2} = 0$$

* El punto singular en un canal donde sucede un F.E.V.C. es aquel localizado en función de las coordenadas (x_o, y_o) donde se presenta la intersección de la línea de los tirantes críticos y del perfil del agua, definiendo así una sección de control.

APÉNDICE C

$$2 \cdot q^2 \cdot x = S_o \cdot g \cdot (b + k \cdot y)^2 \cdot y^2 \quad (c.2)$$

Anulando el denominador

$$1 - \frac{q^2 \cdot x^2}{g \cdot (b + k \cdot y)^3 \cdot y^3} \cdot (b + 2 \cdot k \cdot y) = 0$$

$$q^2 \cdot x^2 \cdot (b + 2 \cdot k \cdot y) = g \cdot (b + k \cdot y)^3 \cdot y^3 \quad (c.3)$$

de (c.2)

$$x = \frac{S_o \cdot g \cdot (b + k \cdot y)^2 \cdot y^2}{2 \cdot q^2}$$

de (c.3)

$$x = \frac{g^{1/2} \cdot (b + k \cdot y)^{3/2} \cdot y^{3/2}}{q \cdot (b + 2 \cdot k \cdot y)^{1/2}}$$

igualando las ecuaciones (c.1) y (c.2) para encontrar el valor de y

$$\frac{g^{1/2} \cdot (b + k \cdot y)^{3/2} \cdot y^{3/2}}{q \cdot (b + 2 \cdot k \cdot y)^{1/2}} = \frac{S_o \cdot g \cdot (b + k \cdot y)^2 \cdot y^2}{2 \cdot q^2}$$

$$\frac{2 \cdot q}{S_o \cdot g^{1/2}} = \frac{(b + k \cdot y)^2 \cdot y^2 \cdot (b + 2 \cdot k \cdot y)^{1/2}}{(b + k \cdot y)^{3/2} \cdot y^{3/2}}$$

simplificando

$$\frac{2 \cdot q}{S_o \cdot g^{1/2}} = (b + k \cdot y)^{1/2} \cdot y^{1/2} \cdot (b + 2 \cdot k \cdot y)^{1/2}$$

elevando al cuadrado

$$\frac{4 \cdot q^2}{S_o^2 \cdot g} = (b + k \cdot y) \cdot y \cdot (b + 2 \cdot k \cdot y) \quad (c.4)$$

Ahora bien, sí

$$\eta \cdot b = k \cdot y \quad (c.5)$$

sustituyendo (c.5) en (c.4),

$$\frac{4 \cdot q^2}{S_o^2 \cdot g} = y \cdot (b + \eta \cdot b) \cdot (b + 2 \cdot \eta \cdot b)$$

factorizando

$$\frac{4 \cdot q^2}{S_o^2 \cdot g} = y \cdot b^2 \cdot (1 + \eta) \cdot (1 + 2 \cdot \eta)$$

$$\frac{4 \cdot q^2}{S_o^2 \cdot g \cdot b^2} = y \cdot (1 + \eta) \cdot (1 + 2 \cdot \eta)$$

multiplicando ambos miembros de la ecuación por $\frac{k}{b}$

$$\frac{k}{b} \cdot \frac{4 \cdot q^2}{S_o^2 \cdot g \cdot b^2} = \frac{k}{b} \cdot y \cdot (1 + \eta) \cdot (1 + 2 \cdot \eta) \quad (c.6)$$

de la ECUACIÓN (c.5) y sustituyéndola en (c.6)

$$\eta = \frac{k \cdot y}{b} \quad \Rightarrow \quad \frac{4 \cdot q^2 \cdot k}{S_o^2 \cdot g \cdot b^3} = \eta \cdot (1 + \eta) \cdot (1 + 2 \cdot \eta)$$

ahora bien, sí

$$\frac{4 \cdot q^2 \cdot k}{S_o^2 \cdot g \cdot b^3} = M$$

por lo tanto

$$\eta \cdot (1 + \eta) \cdot (1 + 2 \cdot \eta) = M$$

desarrollando

$$\eta \cdot (1 + \eta) \cdot (1 + 2 \cdot \eta) - M = 0$$

$$\eta \cdot (1 + 2 \cdot \eta + \eta + 2 \cdot \eta^2) - M = 0$$

$$\eta \cdot + 2 \cdot \eta^2 + \eta^2 + 2 \cdot \eta^3 - M = 0$$

reordenando

$$2 \cdot \eta^3 + 3 \cdot \eta^2 + \eta - M = 0 \quad (c.7)$$

conocido M se podrá conocer η_o que corresponderá a la raíz positiva del polinomio, por lo tanto de la ecuación (c.5), se observa que

$$y_o = \frac{\eta_o \cdot b}{k} \quad (c.8)$$

Siguiendo un proceso análogo para conocer el valor de x_o y que éste sea una función de (y_o, η_o) se creará otra ecuación que cumpla con la solución de la ecuación (c.2) o (c.3), por lo tanto, para las condiciones de y_o y η_o , las ECUACIONES (c.2) y (c.3) se transforman en

$$2 \cdot q^2 \cdot x_o = S_o \cdot g \cdot (b + k \cdot y_o)^2 \cdot y_o^2 \quad (c.9)$$

$$q^2 \cdot x_o^2 \cdot (b + 2 \cdot k \cdot y_o) = g \cdot (b + k \cdot y_o)^3 \cdot y_o^2 \quad (c.10)$$

de la ecuación (c.9) y multiplicando por x_o

$$2 \cdot q_o^2 \cdot x_o^2 = S_o \cdot g \cdot (b + k \cdot y_o)^2 \cdot y_o^2 \cdot x_o$$

$$q_o^2 \cdot x_o^2 = \frac{S_o \cdot g \cdot (b + k \cdot y_o)^2 \cdot y_o^2 \cdot x_o}{2} \quad (c.9a)$$

de la ecuación (c.10)

$$q_o^2 \cdot x_o^2 = \frac{g \cdot (b + k \cdot y_o)^3 \cdot y_o^2}{(b + 2 \cdot k \cdot y_o)} \quad (c.10a)$$

igualando (c.9a) con (c.10a)

$$\frac{S_o \cdot g \cdot (b + k \cdot y_o)^2 \cdot y_o^2 \cdot x_o}{2} = \frac{g \cdot (b + k \cdot y_o)^3 \cdot y_o^2}{(b + 2 \cdot k \cdot y_o)}$$

despejando a x_o

$$x_o = \frac{2 \cdot (b + k \cdot y_o) \cdot y_o}{S_o \cdot (b + 2 \cdot k \cdot y_o)} \quad (c.11)$$

sustituyendo la relación de (c.5) en (c.11)

$$x_o = \frac{2 \cdot (b + \eta_o \cdot b) \cdot y_o}{S_o \cdot (b + 2 \cdot \eta_o \cdot b)} \Rightarrow$$

$$x_o = \frac{2 \cdot y_o}{S_o} \cdot \frac{(1 + \eta_o)}{(1 + 2 \cdot \eta_o)}$$

Se procede a hacer adimensional la ECUACIÓN (c.1), con el siguiente cambio de variables y en donde no se presenta el desarrollo algebraico por razones que no son del dominio de este trabajo

$$x = x_o \cdot X \quad y = y_o \cdot Y$$

sustituyendo y simplificando

$$\frac{dY}{dX} = 2 \cdot \frac{1 + \eta_o}{1 + 2 \cdot \eta_o} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1 + \eta_o}{1 + \eta_o \cdot Y} \right)^2 \cdot \frac{X}{Y^2}}{1 - \left(\frac{1 + 2 \cdot \eta_o \cdot Y}{1 + 2 \eta_o} \right) \cdot \left(\frac{1 + \eta_o}{1 + \eta_o \cdot Y} \right)^3 \cdot \frac{X^2}{Y^3}}$$

Por lo tanto esta es la ecuación adimensional para el F.E.V.C. de sección trapezoidal. Conocido η_0 , en el plano X, Y se define una familia de curvas integrales que satisfacen la ecuación anterior que, se pueden observar en las FIGURAS f.2 a la f.10 para un valor de $\eta_0 = 0, 0.3$, etc.

Cada curva integral es una función $Y = F(X)$, la cual puede transformarse en $y = f(x)$ (tirante en función del cadenamiento de la sección considerada), haciendo el cambio de variable inverso

$$x = x_0 \cdot X \qquad y = y_0 \cdot Y$$

Resulta entonces que las curvas integrales de los diagramas del plano X, Y tienen un significado físico claro, son curvas similares a los perfiles que puede adoptar la superficie libre del canal. Las razones de semejanza son $x = x_0 \cdot X$ en cadenamientos y $y = y_0 \cdot Y$ en tirantes. Haciendo uso de esta propiedad, es factible analizar los escurrimientos posibles en el canal mediante los diagramas X, Y .

APÉNDICE D

DEMOSTRACIÓN DEL MÉTODO DE J. HINDS

Partiendo de la ecuación (1.3) que corresponde al momentum en la sección 1

$$M_1 = \frac{Q \cdot V}{g} \quad (d.1)$$

donde

Q gasto en la sección 1
 V velocidad en la sección 1
 g aceleración de la gravedad

Ahora bien el momentum en la sección 2

$$M_2 = \frac{Q + \Delta Q}{g} \cdot (V + \Delta V) \quad (d.2)$$

se observa que

$$\Delta Q = q \cdot \Delta x \quad (d.3)$$

sustituyendo en (d.3) en (d1)

$$M_2 = \frac{Q + q \cdot \Delta x}{g} \cdot (V + \Delta V) \quad (d.4)$$

restando (d.4) de (d.1), siendo la variación del momentum en el volumen de control

$$M_2 - M_1 = \frac{Q + q \cdot \Delta x}{g} \cdot (V + \Delta V) - \frac{Q \cdot V}{g} \quad (d.5)$$

desarrollando

$$M_2 - M_1 = \frac{Q \cdot V}{g} + \frac{q \cdot \Delta x \cdot V}{g} + \frac{Q \cdot \Delta V}{g} + \frac{q \cdot \Delta x \cdot \Delta V}{g} - \frac{Q \cdot V}{g}$$

eliminando productos de diferenciales y simplificando

$$\Delta M = M_2 - M_1 = \frac{q \cdot \Delta x \cdot V}{g} + \frac{Q \cdot \Delta V}{g}$$

asumiendo que los incrementos son infinitamente pequeños

$$dM = \frac{q \cdot dx \cdot V}{g} + \frac{Q \cdot dV}{g} \quad (d.5a)$$

APÉNDICE D

dividiendo (d.5a) entre dx

$$\frac{dM}{dx} = \frac{q}{g} \cdot V + \frac{Q}{g} \cdot \frac{dV}{dx} \quad (d.6)$$

multiplicando (d.6) por $\frac{dx}{dt}$

$$\frac{dM}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{q}{g} \cdot V \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{Q}{g} \cdot \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

debido a que $\frac{dx}{dt} = V$, sustituyendo la relación anterior en (d.6)

$$\frac{dM}{dt} = \frac{q}{g} \cdot V^2 + \frac{Q}{g} \cdot \frac{dV}{dx} \cdot V \quad (d.7)$$

Por otra parte si se deriva la ecuación (d.1)

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{Q \cdot V}{g} \right) = \frac{Q}{g} \cdot \frac{dV}{dt} \quad (d.8)$$

ahora bien se observa que

$$dV = \frac{dx}{t} \quad (d.9)$$

sustituyendo (d.9) en (d.8)

$$\frac{dM}{dt} = \frac{Q}{g} \cdot \frac{dx}{t \cdot dt} \quad (d.10)$$

sustituyendo en (d.10) la relación que define a la velocidad

$$\frac{dM}{dt} = \frac{Q}{g} \cdot \frac{V}{t} \quad (d.11)$$

si asumimos que la energía máxima que puede alcanzar el agua en una sección es el desnivel entre la superficie libre del agua en esa sección y el vaso se observa que

$$Z = \frac{V^2}{2g} \quad (d.12)$$

donde

Z desnivel entre la superficie libre del agua en una sección y el vaso

Derivando (d.12) respecto de x

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{V^2}{2g} \right) = \frac{1}{2 \cdot g} \cdot \frac{dV^2}{dx} \quad (d.13)$$

pero

$$2 \cdot V \cdot dV = dV^2 \quad (d.14)$$

entonces, sustituyendo (d.14) en (d.13)

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{1}{2 \cdot g} \cdot 2 \cdot V \frac{dV}{dx} \quad (d.15)$$

de (d.9) se observa que

$$\frac{dV}{dx} = \frac{1}{t}$$

sustituyendo la relación anterior en (d.15)

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{1}{2 \cdot g} \cdot \frac{V}{t} \quad (d.16)$$

sustituyendo (d.16) en (d.11), se llega a

$$\frac{dM}{dt} = Q \cdot \frac{dZ}{dx} \quad (d.17)$$

Retomando y sustituyendo (d.17) en (d.7) la ecuación queda

$$Q \cdot \frac{dZ}{dx} = \frac{q}{g} \cdot V^2 + \frac{Q}{g} \cdot \frac{dV}{dx} \cdot V$$

por lo tanto

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{q}{g} \cdot \frac{V^2}{Q} + \frac{V}{g} \cdot \frac{dV}{dx} \quad (d.18)$$

Ahora bien, si se propone para V una ley de variación potencial* de la forma

$$V = a \cdot x^n \quad (d.19)$$

entonces

$$\frac{dV}{dx} = a \cdot n \cdot x^{n-1} \quad (d.19a)$$

y como

$$\frac{q}{Q} = \frac{1}{x} \quad (d.20)$$

por lo tanto, al sustituir (d.19), (d.19a) y (d.20) en (d.18), la ecuación queda

* La ley de variación de velocidades fue propuesta por J. Hinds como resultado de sus experiencias realizadas en el modelo de la presa Boulder

APÉNDICE D

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{1}{g} \left(\frac{V^2}{x} + V \cdot \frac{dV}{dx} \right) \quad (d.21)$$

sustituyendo (d.19) (d.19a) en (d.20)

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{1}{g} \left(\frac{a^2 \cdot x^{2n}}{x} + a \cdot x^n \cdot a \cdot n \cdot x^{n-1} \right) \quad (d.22)$$

simplificando

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{1}{g} \cdot (a^2 \cdot x^{2n-1} + a^2 \cdot n \cdot x^{2n-1}) \Rightarrow \quad (d.22a)$$

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{a^2}{g} \cdot (n+1) \cdot x^{2n-1}$$

integrando ambos miembros de la ECUACIÓN (d.22)

$$\int_0^Z dZ = \frac{a^2}{g} \cdot (n+1) \cdot \int_0^x x^{2n-1} \cdot dx \Rightarrow$$

$$Z = \frac{a^2 \cdot (n+1)}{2 \cdot g \cdot n} \cdot x^{2 \cdot n - 1} \quad (d.23)$$

donde

- a, n constantes obtenidas en la práctica
- Z desnivel entre la superficie libre del agua en el canal colector en una sección y la del embalse
- x distancia del cadenamiento inicial al cadenamiento de la sección en estudio

Por otra parte se observa que

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{a^2 \cdot x^{2 \cdot n - 1}}{2 \cdot g} = h_v \quad (d.24)$$

donde

- h_v carga de velocidad en la sección

por lo tanto al sustituir (d.24) en (d.23)

$$Z = \frac{(n+1)}{n} \cdot h_v \quad (d.25)$$

Si la energía total en una sección del canal colector está dada por se observa que

$$H = y + Z \quad (d.26)$$

donde

H energía en una sección

Sustituyendo (d.25) en (d.26)

$$H = y + \frac{(n+1)}{n} \cdot h_v \quad (d.26a)$$

aplicando el principio de continuidad

$$H = y + \frac{(n+1)}{n} \cdot \frac{Q^2}{A^2 \cdot 2 \cdot g} \quad (d.27)$$

derivando (d.27) respecto a y

$$\frac{dH}{dy} = 1 - \frac{(n+1)}{n} \cdot \frac{Q^2}{g \cdot A^3} \cdot \frac{dA}{dy} \quad (d.27a)$$

de la FIGURA 1.2 se observa

$$B = \frac{dA}{dy} \quad (d.28)$$

sustituyendo (d.28) en (d.26a)

$$\frac{dE}{dy} = 1 - \frac{(n+1)}{n} \cdot \frac{Q^2}{g \cdot A^3} \cdot B \quad (d.29)$$

igualando a cero para encontrar la energía mínima con las condiciones dadas por la constante experimental n en esa sección, y reordenando

$$\frac{(n+1)}{n} \cdot \frac{Q^2}{g \cdot A^3} \cdot B = 1 \quad (d.30)$$

donde

- Q gasto en el canal colector
- B ancho hidráulico
- A área de una sección
- n factor experimental de velocidad
- g aceleración de la gravedad

Con la ECUACIÓN (d.30) se definen los tirantes en el canal colector, y que para garantizar la condición de régimen subcrítico, estos deberán ser mayores a los críticos en cualquier sección, debiendo cumplir con la ley de velocidades propuesta por J. Hinds.

APÉNDICE E

DEMOSTRACIÓN DEL MÉTODO DE VIPARELLI

Partiendo de la expresión de la cantidad de movimiento en una sección

$$\frac{\gamma}{g} \cdot Q \cdot v$$

quiere decir que la cantidad de movimiento de la lámina vertedora es

$$\frac{\gamma}{g} \cdot Q \cdot u$$

donde

u velocidad de ingreso de la lámina vertedora

$\frac{\gamma}{g} \cdot Q$ masa de la lámina vertedora

Si

$$Q = q \cdot x \quad \text{y} \quad x = l$$

recordando del capítulo 1 la demostración de la expresión de la cantidad de movimiento

$$\begin{aligned} m \cdot u &= \frac{\gamma}{g} \cdot q \cdot x \cdot u & \Rightarrow \\ m \cdot u &= \frac{\gamma}{g} \cdot q \cdot u & \text{(e.1)} \end{aligned}$$

Si asumimos que la energía máxima que puede alcanzar la lámina vertiente al canal colector es el desnivel entre la superficie libre de la lámina vertiente y el vaso y que ésta es su carga de velocidad, se observa que

$$Z = \frac{u^2}{2 \cdot g}$$

donde

Z desnivel entre la superficie libre de la lámina vertiente y el vaso

Despejando u y sustituyendo en (e.1)

$$u = \sqrt{2 \cdot g \cdot Z} \quad \text{(e.2)}$$

sustituyendo (e.2) en el segundo miembro de la ecuación (e.1), la ecuación queda

$$m \cdot u = \frac{\gamma}{g} \cdot q \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot Z} \quad \text{(e.3)}$$

APÉNDICE E

Cuando la lámina queda sumergida ya en las partes poco inclinadas del paramento aguas abajo de la cresta vertedora, dicha cantidad de movimiento se confunde prácticamente con la componente horizontal de la cantidad de movimiento ver FIGURA e.1

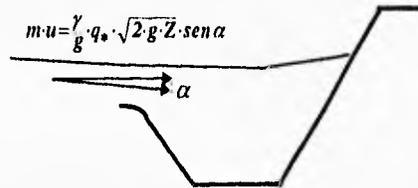


FIGURA e.1 Análisis geométrico del momentum de la lámina vertiente

$$m \cdot u = \frac{\gamma}{g} \cdot q \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot Z} \cdot \text{sen } \alpha$$

donde

α ángulo de ingreso del gasto en la cresta vertedora respecto a la vertical ver FIGURA e.1

pero

$$\alpha \rightarrow 0 \quad \Rightarrow$$

$$m \cdot u = \frac{\gamma}{g} \cdot q \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot Z} \quad (e.3)$$

Siendo las fuerzas que generan los empujes hidrostáticos en las paredes del canal colector, las únicas que intervienen para el cálculo del momentum de la lámina vertedora, se tiene que

- fuerzas debidas a las presiones hidrostáticas en las paredes del canal

En la pared de la lámina vertiente

$$F_a = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot y_a^2$$

en la pared de la margen opuesta

$$F_b = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot y_b^2$$

por lo tanto la resultante es

$$F_b - F_a = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot y_b^2 - \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot y_a^2 \quad (e.4)$$

igualando (e.3) y (e.4), momentum y fuerzas de presión

$$\frac{\gamma}{g} \cdot q \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot Z} = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot y_b^2 - \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot y_a^2 \quad (e.5)$$

factorizando

$$\frac{\gamma}{g} \cdot q \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot Z} = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot (y_b^2 - y_a^2)$$

aplicando productos notables

$$\frac{\gamma}{g} \cdot q \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot Z} = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot (y_b - y_a) \cdot (y_b + y_a)$$

reordenando

$$\frac{\gamma}{g} \cdot q \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot Z} = \gamma \cdot (y_b - y_a) \cdot \frac{(y_b + y_a)}{2} \quad (e.5a)$$

Asumiendo que

$$y \approx \frac{(y_b + y_a)}{2} \quad (e.6)$$

donde

- y tirante hidráulico en la sección media del área hidráulica
- y_a tirante hidráulico al pie del cimacio
- y_b tirante hidráulico en la margen opuesta al cimacio

Sustituyendo (e.6) en (e.5a)

$$\frac{\gamma}{g} \cdot q \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot Z} = \gamma \cdot y \cdot (y_b - y_a) \quad (e.7)$$

aplicando la ecuación que representa la variación de energía* a lo largo de la longitud del canal colector

$$\frac{dE}{dx} = S_o - S_f - \frac{Q}{g \cdot A^2} \cdot \frac{dQ}{dx} \quad (e.8)$$

Por otra parte, la energía específica en una sección cualquiera del canal

$$E = y + \frac{V^2}{2 \cdot g} \quad (e.9)$$

por continuidad se tiene que

$$E = y + \frac{Q^2}{2 \cdot g \cdot A^2} \Rightarrow$$

* Se observa que la ecuación corresponde al numerador de la ecuación del F.E.V.C. obtenida por Chow demostrada en el capítulo I.

$$y = E - \frac{Q^2}{2 \cdot g \cdot A^2}$$

derivando (e.9)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dE}{dx} - \frac{d}{dx} \left(\frac{Q^2}{2 \cdot g \cdot A^2} \right) \quad (\text{e.9a})$$

sustituyendo (e.8) en (e.9a)

$$\frac{dy}{dx} = S_o - S_f - \frac{Q}{g \cdot A^2} \cdot \frac{dQ}{dx} - \frac{d}{dx} \left(\frac{Q^2}{2 \cdot g \cdot A^2} \right) \quad (\text{e.10})$$

$$\frac{dy}{dx} = S_o - S_f - \frac{Q}{g \cdot A^2} \cdot \left(\frac{dQ}{dx} \right) - \frac{2 \cdot Q}{2 \cdot g \cdot A^2} \cdot \left(\frac{dQ}{dx} \right) \quad (\text{e.10a})$$

Por continuidad

$$\frac{dy}{dx} = S_o - S_f - \frac{Q}{g \cdot dx} \cdot \frac{dQ}{A} - \frac{Q}{g \cdot A^2} \cdot \left(\frac{dQ}{dx} \right)$$

dividiendo y multiplicando (e.10a) por Q

$$\frac{dy}{dx} = S_o - S_f - \frac{V}{g} \cdot \left(\frac{dV}{dx} \right) - \frac{Q^2}{g \cdot Q \cdot A^2} \cdot \left(\frac{dQ}{dx} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = S_o - S_f - \frac{V}{g} \cdot \left(\frac{dV}{dx} \right) - \frac{V^2}{g \cdot Q} \cdot \left(\frac{dQ}{dx} \right) \quad (\text{e.11})$$

ahora bien

$$\frac{dQ}{dx} = q \quad (\text{e.12})$$

sustituyendo (e.12) en (e.11)

$$\frac{dy}{dx} = S_o - S_f - \frac{V}{g} \cdot \left(\frac{dV}{dx} \right) - \frac{q}{g} \cdot \frac{V^2}{Q} \quad (\text{e.13})$$

separando diferenciales, e integrando (e.10) en ambos miembros

$$\int_0^y dy = \int_0^x (S_o - S_f) \cdot dx - \frac{1}{g} \int_0^x \left(V \cdot \frac{dV}{dx} + q \cdot \frac{V^2}{Q} \right) \cdot dx$$

Ahora bien, proponiendo para V una ley de variación* exponencial del tipo,

$$V = a \cdot x^n \quad \Rightarrow \quad (e.14)$$

$$\frac{dV}{dx} = a \cdot n \cdot x^{n-1} \quad (e.14a)$$

sustituyendo (e.14) y (e.14a) en (e.13)

$$\int_0^y dy = \int_0^x (S_o - S_f) \cdot dx - \frac{1}{g} \int_0^x \left(a \cdot x^n \cdot a \cdot n \cdot x^{n-1} + \frac{q \cdot a^2 \cdot x^{2 \cdot n}}{Q} \right) \cdot dx$$

ahora bien de (e.12)

$$\frac{q \cdot a^2}{Q} = \frac{1}{x}$$

por lo tanto, la ecuación queda, al sustituir la relación anterior

$$y = \int_0^x (S_o - S_f) \cdot dx - \frac{1}{g} \int_0^x (a^2 \cdot n \cdot x^{2 \cdot n-1} + a^2 \cdot x^{2 \cdot n-1}) \cdot dx \quad (e.15)$$

factorizando

$$y = \int_0^x (S_o - S_f) \cdot dx - \frac{a^2 \cdot (n+1)}{g} \int_0^x x^{2 \cdot n-1} \cdot dx$$

integrando la segunda integral y considerandola indefinida

$$y = \int_0^x (S_o - S_f) \cdot dx - \frac{a^2 \cdot (n+1)}{2 \cdot g \cdot n} \cdot x^{2 \cdot n} + c$$

evaluando en condiciones de frontera, si

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad c = y_o$$

donde

y_o tirante en el cadenamamiento inicial

Por lo tanto

$$y = \int_0^x S_o \cdot dx - \int_0^x S_f \cdot dx - \frac{a^2 \cdot (n+1)}{2 \cdot g \cdot n} \cdot x^{2 \cdot n} + y_o$$

* Esta ley de variación de velocidades fue propuesta por J. Hinds y es adoptada por Viparelli.

APÉNDICE E

despreciando pérdidas

$$y_0 + \int_0^x S_0 \cdot dx = y + \frac{a^2 \cdot (n + 1)}{2 \cdot g \cdot n} \cdot x^{2 \cdot n}$$

si el plano de referencia, coincide con el de la superficie libre del agua en el embalse, de la FIGURA e.2 se observa que

$$Z - Z_0 = \frac{a^2 \cdot (n + 1)}{2 \cdot g \cdot n} \cdot x^{2 \cdot n}$$

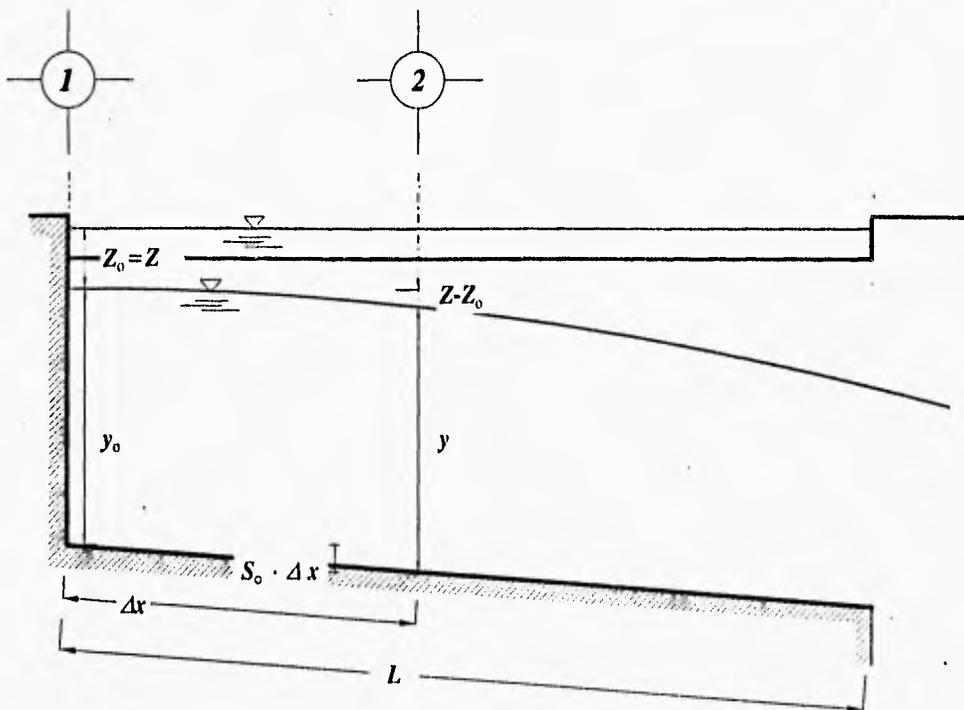


FIGURA e.2 Análisis gráfico del método de Viparelli

despejando a Z

$$Z = \frac{a^2 \cdot (n + 1)}{2 \cdot g \cdot n} \cdot x^{2 \cdot n} + Z_0 \quad (e.16)$$

y si

$$Z_0 = (1 - \tau) \cdot H \quad (e.17)$$

donde

Z_0 desnivel que se presenta entre la superficie libre del agua en el canal, y el embalse en el cadenamamiento inicial en el canal

τ ahogamiento dentro del canal
 H_0 carga sobre el vertedor

Si la sección es trapecial con taludes laterales de igual valor

$$A = (b + k \cdot y) \cdot y \qquad B = b + 2 \cdot k \cdot y$$

de continuidad y recordando la ley de variación potencial de la velocidad

$$A = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{a \cdot x^n}$$

de la ECUACIÓN (e.5)

$$\frac{q \cdot}{g} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot Z} = y \cdot (y_b - y_a)$$

dividiendo y multiplicando (e.5) por B

$$\frac{q \cdot}{g \cdot B \cdot y} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot Z} = \frac{(y_b - y_a)}{B} \qquad (e.18)$$

Si

$$p = \frac{(y_b - y_a)}{B} \qquad (e.19)$$

donde

p pendiente transversal de la superficie libre del agua en el canal

Sustituyendo (e.19) en (e.18)

$$\frac{q \cdot}{g \cdot B \cdot y} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot Z} = p \qquad (e.20)$$

reordenando

$$\frac{q \cdot}{g \cdot p} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot Z} = B \cdot y \qquad (e.20)$$

APÉNDICE F

GRÁFICAS DE PARÁMETROS ADIMENSIONALES DEL MÉTODO GRÁFICO

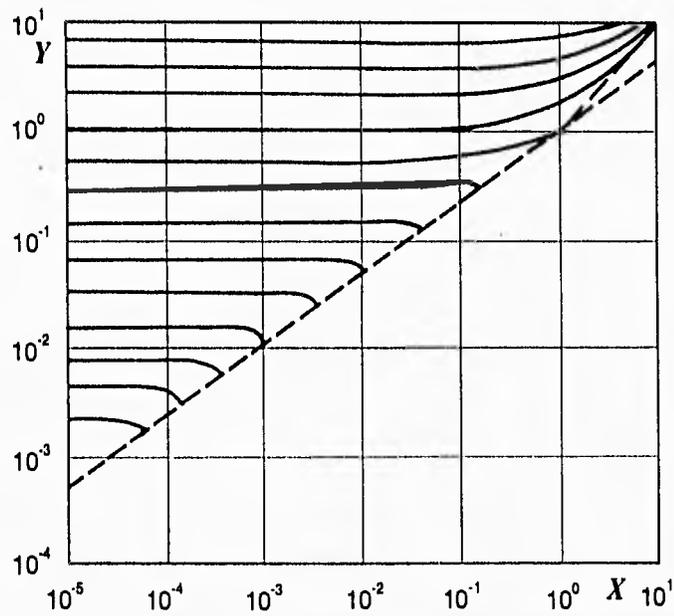


FIGURA f.1 Gráfica de parámetros adimensionales para $\eta = 0$

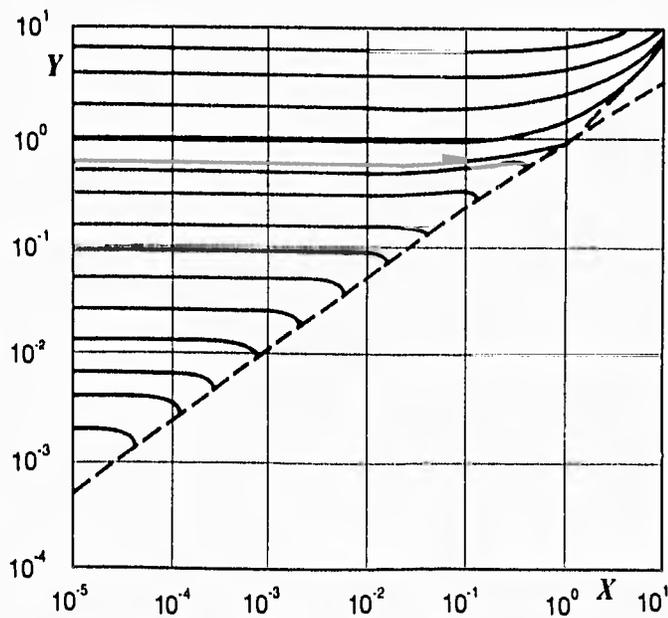


FIGURA f.2 Gráfica de parámetros adimensionales para $\eta = 0.30$

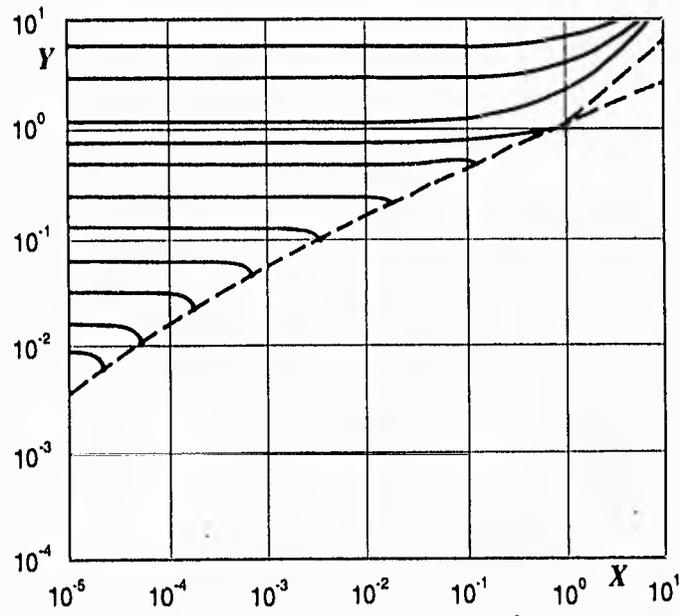


FIGURA f.3 Gráfica de parámetros adimensionales para $\eta = 1$

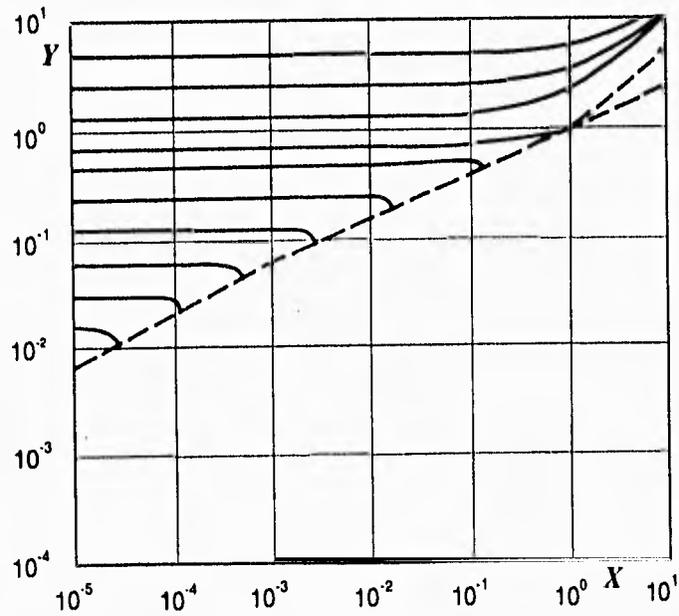


FIGURA f.4 Gráfica de parámetros adimensionales para $\eta = 2$

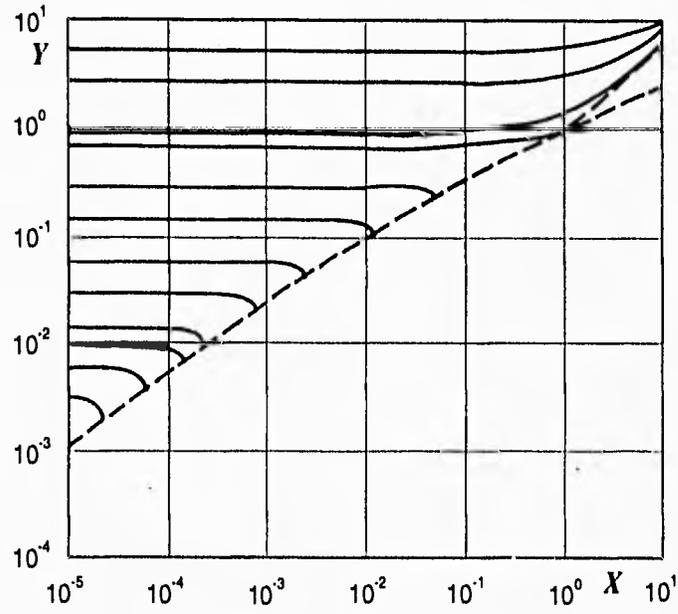


FIGURA f.5 Gráfica de parámetros adimensionales para $\eta = 5$

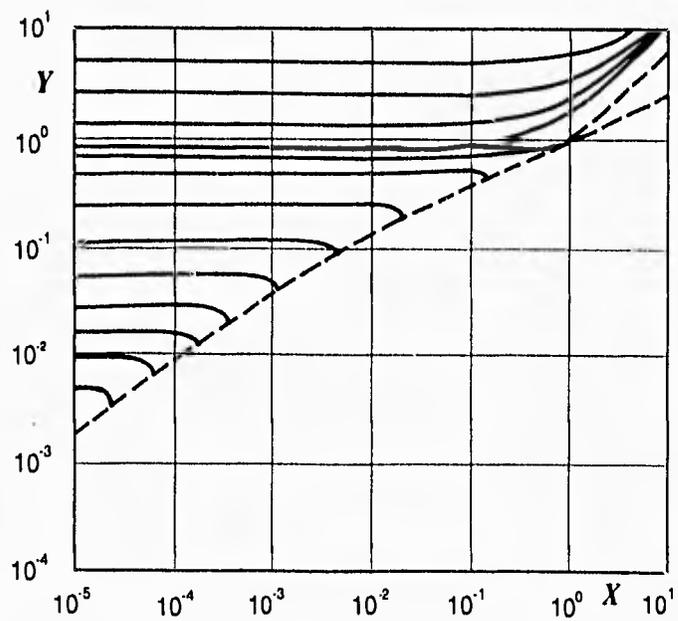


FIGURA f.6 Gráfica de parámetros adimensionales para $\eta = 12$

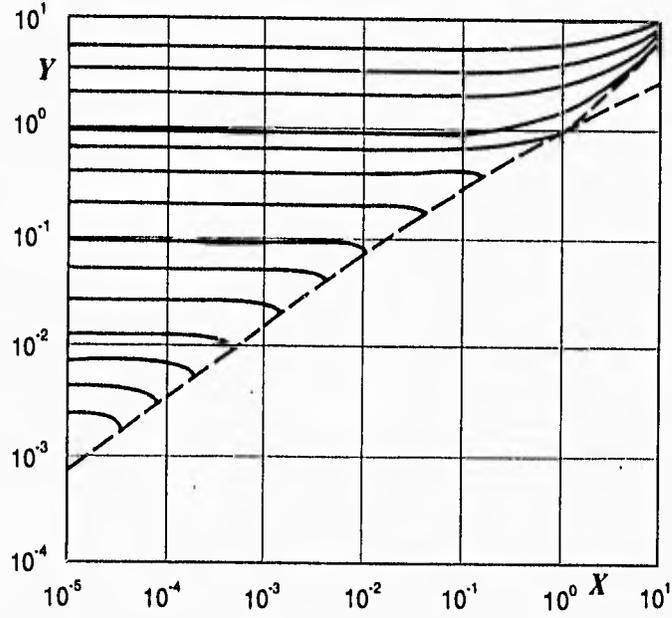


FIGURA f.7 Gráfica de parámetros adimensionales para $\eta = 30$

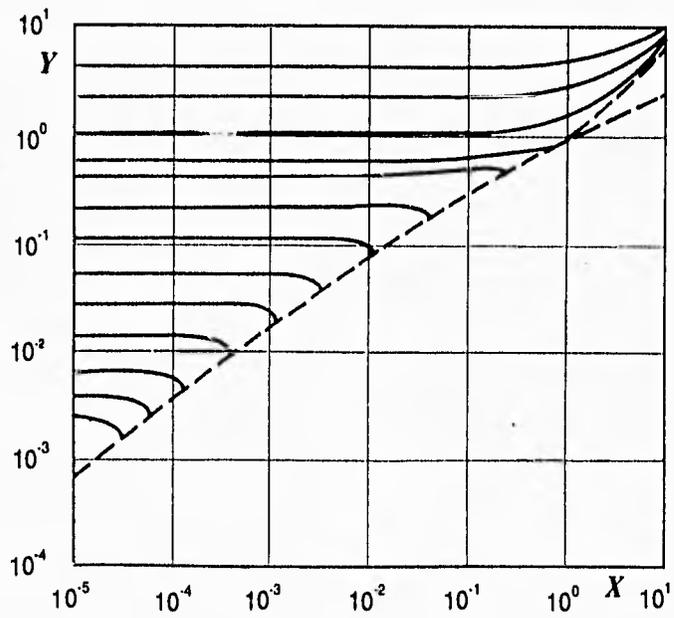


FIGURA f.8 Gráfica de parámetros adimensionales para $\eta = 100$

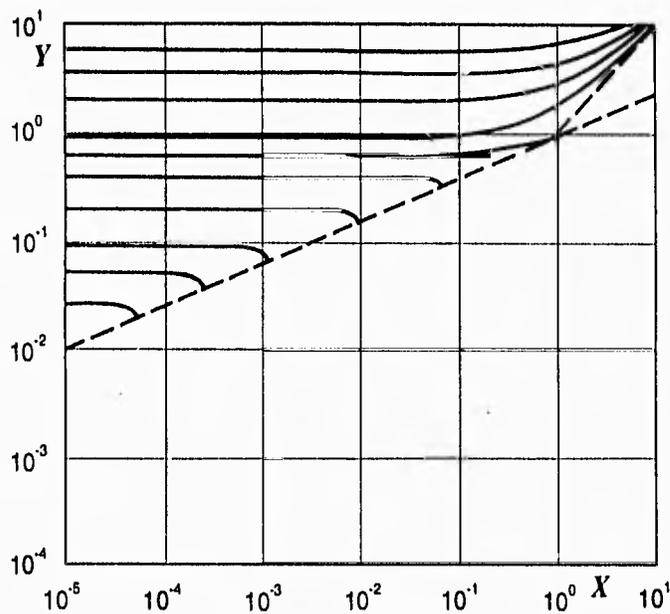


FIGURA F.9 Gráfica de parámetros adimensionales para $\eta = \infty$

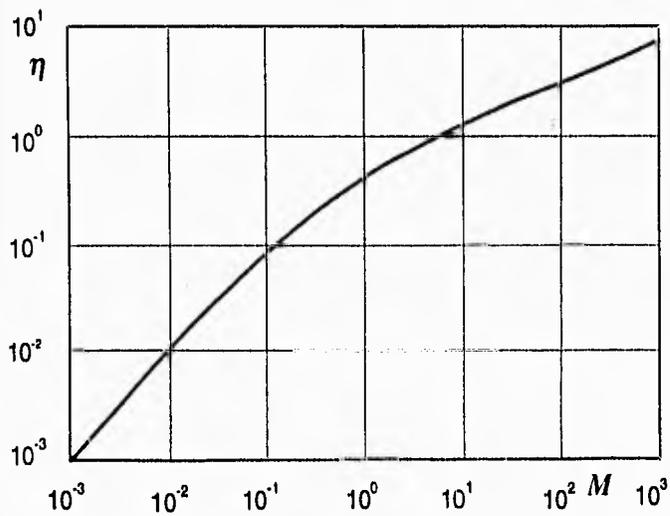


FIGURA F.10 Gráfica M - η

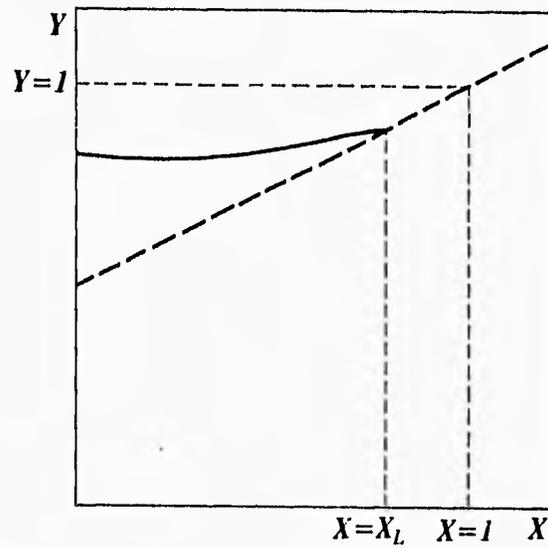


FIGURA f.11 Gráfica de parámetros adimensionales (región crítica)

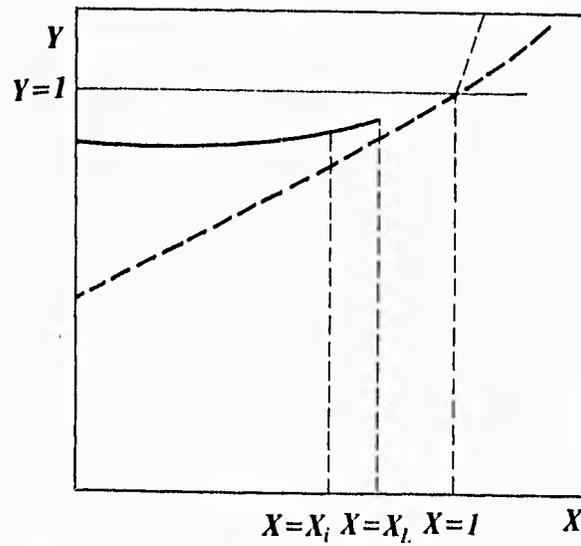


FIGURA f.12 Gráfica de parámetros adimensionales (región subcrítica)

AGRADECIMIENTOS

Agradezco sinceramente para la realización de este trabajo a las siguientes personas y dependencias de la U.N.A.M.:

- Instituto de Ingeniería de la U.N.A.M.
- M. en I. Víctor Franco por su confianza, apoyo y dirección.
- M. en I. Guadalupe E. Fuentes Mariles por sus acertados comentarios así como por su invaluable apoyo y amistad.
- Dr. Oscar Fuentes Mariles por su preocupación demostrada en el tiempo de realización de este trabajo
- Laboratorio de Hidráulica de la Facultad de Ingeniería de la U.N.A.M.
- M. en I. Humberto Gardea Villegas, M. en I. Alfonso Morales García, M. en I. Oscar Vega Roldan por la motivación que me inculcaron para pretender ejercer la Ingeniería Civil en el área de la Hidráulica.