

00362

5
Lej



**UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

**TRANSFERENCIA DE CALOR CONJUGADA POR CONVECCION
NATURAL ENTRE DOS FLUIDOS SEPARADOS POR UNA
PLACA HORIZONTAL**

T E S I S

Que para obtener el grado Académico de:

MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)

P r e s e n t a:

ERICK EMANUEL, LUNA ROJERO



DIRECTOR: CESAR TREVIÑO TREVIÑO

MEXICO, D. F.

1996

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi familia

A través de estas líneas quiero dar gracias de manera especial a mi asesor, el Dr César Treviño, y a mis amigos Federico Méndez, Abraham Medina, Julio Martínez y Luz Piña.

Agradezco a la dirección de asuntos del personal académico (DGAPA), por su apoyo al proyecto IN-107795, el cual dio origen a este proyecto.

Índice

1	Introducción	4
1.1	Antecedentes	4
1.2	Objetivos	5
1.3	Resumen	5
2	Análisis Dimensional	9
2.1	Planteamiento del Problema	9
2.2	Análisis de los Órdenes de Magnitud para el Problema Independiente del Tiempo	10
2.2.1	Aproximación de Pared Térmicamente Delgada	16
2.2.2	Aproximación de Pared Térmicamente Gruesa	17
2.3	Flujo de Calor Promedio (estacionario)	17
2.4	Análisis de los Órdenes de Magnitud para el Problema Dependiente del Tiempo	19
2.4.1	Aproximaciones de Pared Térmicamente Delgada y Gruesa	21
2.4.2	Análisis de los Tiempos Característicos	22
2.4.3	Límite Cuasi-estacionario	23
3	Formulación de las Ecuaciones	25
3.1	Ecuaciones de Capa Límite y Aproximación de Boussinesq	25
3.2	Ecuación de la Energía en la Placa	27
3.3	Ecuaciones Adimensionales	28
4	Análisis Asintótico	31
4.1	Análisis Estacionario	31
4.1.1	Pared Térmicamente Delgada	31
4.1.2	Pared Térmicamente Gruesa	34

	2
4.2 Análisis Transitorio	36
4.2.1 Pared Térmicamente Delgada	36
4.2.2 Pared Térmicamente Gruesa	43
5 Análisis Numérico	48
5.1 Ecuación de Energía en la Placa	49
5.2 Ecuaciones de Capa Límite	51
5.2.1 Método de Diferencias Finitas	53
5.2.2 Método de Newton	55
5.2.3 Estimación del Error	59
6 Resultados y Conclusiones	61
6.1 Caso Estacionario	61
6.2 Caso Transitorio	64
Referencias	73

Nomenclatura

Símbolo	Definición
c_i	calor específico del fluido i
f_i	función de corriente adimensional para el fluido i
g	aceleración de la gravedad
h	grosor de la placa
L	mitad del largo de la placa
Pr_i	número de Prandtl del fluido i , $Pr_i = \mu_i c_i / \lambda_i$
Ra_i	número de Rayleigh del medio i , $Ra_i = g \beta_i \Delta T Pr_i L^3 / \nu_i^3$
s	escala lenta de tiempo
$T_{i\infty}$	temperatura del medio i lejos de la placa
x, y	coordenadas cartesianas horizontal y vertical
z	coordenada transversal adimensional para la placa, $z = y/h$
α	parámetro de conducción de calor
β	razón de las resistencias térmicas de las capas límite
β_i	coeficiente de expansión térmica del fluido i
χ	coordenada adimensional longitudinal, $\chi = x/L$
ΔT_{∞}	diferencia de temperatura, $\Delta T_{\infty} = T_{1\infty} - T_{2\infty}$
ε	relación de esbeltez, $\varepsilon = h/L$
ϕ_i	presión adimensional del fluido i
λ_i	conductividad térmica del medio i
λ_w	conductividad térmica del sólido
μ_i	viscosidad dinámica del fluido i
ν_i	viscosidad cinemática del fluido i
ψ_i	función de corriente adimensional para el fluido i
σ	escala rápida de tiempo
τ	tiempo adimensional
θ_i	temperatura adimensional del medio i
θ_w	temperatura adimensional de la placa

Capítulo 1

Introducción

1.1 Antecedentes

El estudio de la interacción acoplada de conducción y convección de calor es muy importante debido a su aparición en muchos casos prácticos e industriales. La influencia de la conducción en un sólido sobre la transferencia de calor convectiva en un fluido ha sido analizada en muchos trabajos relacionados a convección natural sobre superficies verticales, tal es el caso de Kelleher y Yang [1], Lock et al [2]-[3], Anderson y Bejan [4]-[5], Churchill y Ozoe [7], hasta los más recientes como Sakakibara, Amaya, Mori y Tanimoto [8], Treviño, Méndez, e Higuera [9], y Córdova y Treviño [10]. Sin embargo, en relación al intercambio de calor convectivo sobre placas horizontales existen pocos estudios que analizan problemas de transferencia de calor conjugada (por conjugada se entiende: sistemas en los que aparecen diferentes mecanismos de transferencia de calor). En la literatura han aparecido muchos trabajos en donde reportan la transferencia de calor de superficies cara arriba o abajo, pero con perfiles de temperatura o flujo de calor ya dados. Tal es el caso de Stewartson [11], Gill et al [12], Rotem et al [13]-[14], Alhara, Yamada y Endo [16], entre otros, hasta llegar a Schulenberg [17], Higuera [18] y Pera *et al* [20]. Excelentes compilaciones de este tipo de estudios son el trabajo de Gebhart, Jaluria, Mahajan y Sarmmakia [19], y Kelleher y Yang [1].

Un trabajo sobre transferencia de calor conjugada de E. Luna, C. Treviño y F. Higuera, titulado "*Conjugate natural convection heat transfer between two fluids separated by an horizontal wall: steady-state analysis*" está actualmente en prensa en la revista *Heat and Mass Transfer* [21].

1.2 Objetivos

Los objetivos principales del presente trabajo son:

- Estudiar los efectos de convección natural y conducción de calor en una placa horizontal que separa a dos fluidos diferentes a números de Rayleigh grandes.
- Encontrar a los parámetros importantes del sistema, ya que esto es un problema en donde intervienen una gran cantidad de ellos.
- Investigar a los perfiles de temperatura, presión, flujo de calor y velocidad en los fluidos, así como a las temperaturas en la placa.
- Obtener el flujo promedio de calor en la placa.
- Investigar el comportamiento del sistema en el tiempo.

1.3 Resumen

En el Capítulo 2 se realiza una descripción detallada de la geometría del problema, así como de las condiciones de frontera e iniciales. En seguida se muestran brevemente los aspectos físicos de los fenómenos involucrados en el sistema. Después se estudian los órdenes de magnitud de las variables que intervienen para el caso estacionario. Se definen los parámetros adimensionales importantes, que son: α (parámetro de conducción de calor en la placa), β (relación de conductancias térmicas entre los fluidos) y ϵ (relación de esbeltez de la placa). En función del orden de magnitud de los parámetros α , β y ϵ , se definen las aproximaciones de pared térmicamente delgada y pared térmicamente gruesa. En ambos casos se determina el orden de magnitud de los flujos de calor. Para terminar este Capítulo, se analiza el caso transitorio. Aquí se estudian los órdenes de magnitud de los tiempos característicos del problema. Comparando estos órdenes de magnitud, se definen las aproximaciones de pared térmicamente gruesa y delgada. El orden de magnitud de los flujos de calor para ambas aproximaciones se expresa en función de los parámetros importantes. Se define el límite cuasiestacionario y se analizan los intervalos de validez.

Para el Capítulo 3 se ha dejado la deducción de las ecuaciones y sus condiciones de frontera, tanto para el caso de los fluidos como el de la placa. Para el caso de los fluidos se utilizaron las aproximaciones de capa límite y de Boussinesq. Se adimensionalizan y

reescalan las variables del problema, utilizando los resultados del análisis de órdenes de magnitud del Capítulo 2.

El Capítulo 4 empieza con el estudio para el problema estacionario. Para este caso se analiza la aproximación de pared térmicamente delgada utilizando técnicas asintóticas de perturbación. Como parámetro de perturbación se toma $1/\alpha \rightarrow 0$. En la placa se encuentran las temperaturas y el flujo de calor promedio, definido por el número de Nusselt reducido. En la aproximación de pared térmicamente gruesa (límite $\alpha/\varepsilon^2 \rightarrow 0$) se propone una solución de semejanza. Se encuentra la temperatura en la placa y una línea en la cual la temperatura se mantiene constante para toda α . En el problema dependiente del tiempo se trata primero el límite de aproximación de pared térmicamente delgada $\alpha \gg 1$. En este caso, se pretendió utilizar en primera instancia las técnicas clásicas de perturbación. Sin embargo, este tipo de perturbación no cumplía con las condiciones iniciales. Se propuso entonces utilizar técnicas de escalas múltiples, definiendo para ello dos escalas de tiempo: una lenta s y otra rápida τ . Mediante técnicas de la transformada de Fourier, se encuentran la temperatura y el flujo promedio de calor en la placa. Por último, para el caso de pared térmicamente gruesa dependiente del tiempo, el parámetro de expansión es $\alpha/\varepsilon^2 \rightarrow 0$. Aquí se utilizan técnicas de transformada de Fourier en la placa y perfiles de semejanza para los fluidos. Se encuentra la temperatura y la energía térmica adimensional promedio en la placa.

En el Capítulo 5 el problema se estudia numéricamente. En la placa se utilizan técnicas de diferencias finitas centradas (o método de la caja). Esto lleva a un sistema de ecuaciones lineales que se resuelven utilizando métodos de descomposición LU , donde L es una matriz triangular superior y U es triangular inferior. Con esto, se obtienen las temperaturas en toda la placa. En el caso de las ecuaciones de los fluidos, éstas se llevan primeramente a un sistema de ecuaciones no lineales de primer orden. Después se utilizan técnicas de diferencias finitas centradas para llegar a un sistema de ecuaciones no lineales. La forma de llegar a un sistema lineal es utilizando el método iterativo de Newton para sistemas no lineales. Finalmente se obtienen los perfiles de temperatura, función de corriente, presión y flujos de calor en ambos fluidos. Los cálculos fueron realizados tanto en una estación de trabajo SUN Sparc 10 con doble procesador, 64 MB de memoria RAM y disco duro de 4 GB, como en una Silicon Graphics INDY con 32 MB de memoria RAM. Las subrutinas para la solución de las matrices de banda se obtuvieron vía internet desde las librerías de LINPACK. Los paquetes utilizados para graficar fueron el GNUplot, del dominio público

(accesible por internet), y Grapher.

Por último, en el Capítulo 6 se presentan los resultados y las conclusiones, así como las gráficas con diferentes valores de los parámetros importantes. En el caso estacionario, cuando se tienen grandes valores de α/ε^2 (pared térmicamente delgada), la temperatura adimensional de la placa tiende a uniformizarse, mientras que cuando el valor de α/ε^2 es pequeño (pared térmicamente gruesa), la temperatura en las superficies superior e inferior tiende a la temperatura del fluido vecino correspondiente. El promedio del número de Nusselt reducido (flujo de calor promedio) se incrementa monótonicamente con α/ε^2 cuando tal cantidad es pequeña (pared térmicamente gruesa) y tiende a un máximo cuando $\alpha/\varepsilon^2 \rightarrow \infty$ (pared térmicamente delgada). En el caso de pared térmicamente gruesa, la conducción longitudinal de calor está presente, especialmente en las fronteras, sin embargo, la influencia de la conducción longitudinal de calor no es importante en el régimen de pared térmicamente delgada. En el caso transitorio las más importantes conclusiones son: la conducción de calor longitudinal es muy importante, contrariamente al problema estacionario, el tiempo adimensional necesario para llegar a una energía fija promedio en la placa muestra un mínimo para valores finitos de α , y por último, el proceso transitorio para el régimen de pared térmicamente delgada es más rápido cuando el efecto de la conducción de calor longitudinal es despreciable.

Capítulo 2

Análisis Dimensional

2.1 Planteamiento del Problema

Una placa conductora de calor está colocada horizontalmente en un espacio bidimensional. La longitud y el espesor de la placa son $2L$ y h respectivamente. La superficie en los dos lados más pequeños de la placa es adiabática, mientras que en los bordes más extensos se permite el flujo libre de calor. Inicialmente la placa tiene una temperatura uniforme $T_w(t=0)$.

La placa separa a dos fluidos, colocados por debajo (fluido I) y encima de ella (fluido II), que se extienden hasta el infinito y que pueden ser o no diferentes. Los fluidos no se pueden mezclar, para esto se puede suponer que la placa tiene una continuación de paredes adiabáticas que se extienden hasta el infinito. Al tiempo $t=0$ los fluidos están completamente en reposo y sus temperaturas son, $T_{1\infty}$ para el fluido colocado abajo de la placa y $T_{2\infty}$ para el de arriba. Las temperaturas $T_{1\infty}$ y $T_{2\infty}$ son tales que $T_{1\infty} > T_{2\infty}$ y $T_{1\infty} > T_w$. Los ejes de coordenadas están colocados de tal forma que el origen de la coordenada longitudinal x está en el extremo izquierdo de la placa, incrementándose positivamente hacia la derecha. La coordenada transversal y tiene su origen en el centro de cualquier sección de corte transversal y se incrementa positivamente hacia abajo, con igual dirección que el vector de la aceleración gravitacional. *La tarea fundamental en este trabajo es conocer los flujos de calor globales, así como las distribuciones de temperatura en la placa y el tiempo requerido para llegar a determinada energía promedio en la placa.* En la figura 2.1 se muestra un esquema representativo del problema al tiempo $t=0$.

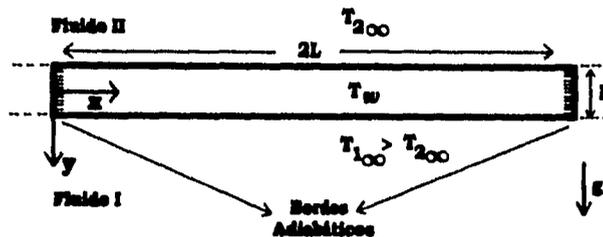


Figura 2.1: Se muestra el modelo físico del problema en el instante inicial. La placa está separando a dos fluidos en reposo y con distintas temperaturas.

2.2 Análisis de los Órdenes de Magnitud para el Problema Independiente del Tiempo

Debido a la conducción de calor, a través del sistema se producen diferencias de temperatura del orden $\Delta T_{\infty} = T_{1\infty} - T_{2\infty}$. Los gradientes de temperatura inducen cambios en la densidad de los fluidos, ya que ésta, es función de la temperatura (donde los efectos de variación de la densidad debido a la presión han sido despreciados), es decir, $\rho = \rho(T)$. Debido a la fuerza de gravedad los cambios en la densidad provocan que el fluido más denso caiga, mientras que el más ligero se eleve, (a tales fuerzas se les conoce como de flotación). Lo anterior tiene como resultado un transporte de masa y energía en el fluido. A este proceso se le conoce comúnmente como **convección natural**. En este sistema en particular, los efectos de flotación provocan en forma indirecta la generación de flujos en dirección longitudinal sobre y bajo la placa. En la región central de la superficie superior de la placa, al ser ésta más caliente, se tiene un fluido menos denso que cerca de los extremos. Ello genera gradientes de presión longitudinales que van desde los extremos al centro, produciendo flujo en esta dirección. En la superficie inferior de la placa se produce un fenómeno similar.

La velocidad del fluido en la superficie de la placa siempre es cero, mientras que la velocidad de flujo en un punto alejado de la superficie será el de la corriente libre, cero en este caso. Entre estas dos fronteras se desarrollará el perfil de velocidades longitudinales debido a los efectos indirectos de la flotación. La región en que exista este campo de veloci-

dades dependerá principalmente del valor de la viscosidad, ν , (o del número de Reynolds $Re = u_c L / \nu$, aquí u_c y L son la velocidad y longitud características del problema, respectivamente). Cuando el valor de la viscosidad es pequeño, (ó $Re \gg 1$), se usa teoría de capa límite para dividir el problema en dos: un problema externo, donde se pueden despreciar los efectos de la viscosidad y que tiene validez en zonas alejadas de la placa, y un problema interno, en donde la magnitud de los gradientes de velocidad no permite despreciar a los efectos viscosos. Este último problema es válido en una región cercana a la placa que se conoce como capa límite viscosa. De forma similar se genera una capa límite térmica, es decir, una región en donde las variaciones del campo de temperaturas de los fluidos son más importantes, lo que limita a los efectos de conducción de calor a una zona cercana a las paredes de la placa. Para el problema externo la solución a primer orden es trivial, por lo que no se considera importante para este estudio [11].

Cuando el número de Rayleigh es muy grande, las capas límite viscosa y térmica son muy pequeñas, como se muestra más adelante. El número de Rayleigh se define como $Ra_i = g \beta_i \Delta T_\infty Pr_i L^3 / \nu_i^2$, con $i = 1, 2$, denotando respectivamente el fluido caliente y el frío. g es la aceleración de la gravedad, β_i y ν_i representan el coeficiente de expansión térmica y el coeficiente de viscosidad cinemática de los fluidos. Pr_i es el número de Prandtl del fluido i , con $Pr_i = \mu_i c_i / \lambda_i$, donde μ_i es la viscosidad dinámica del fluido, c_i es el calor específico y λ_i es la conductividad térmica del *ésimo* fluido. El número de Rayleigh se interpreta como la razón entre fuerzas gravitacionales y fuerzas viscosas, el de Prandtl relaciona a las difusividades térmicas y de cantidad de movimiento.

En el sistema de convección natural que se analiza, la capa límite térmica es la generadora de movimiento (pues en ella se producen los gradientes de presión), tal movimiento está contenido en la región de capa límite viscosa. Cuando $Pr \gg 1$ el grosor de la capa límite viscosa es $Pr^{-1/2}$ veces el de la capa límite térmica, mientras que para números de Prandtl de orden uno ($Pr \sim 1$), ambos son del mismo orden [24]. La figura 2.2 muestra un esquema representativo de ambas.

En este problema, las capas límite viscosas que se producen son cuatro. La geometría de las capas límite es tal, que se desarrollan desde cada una de las cuatro esquinas de la placa y aumentan de tamaño en dirección hacia el centro de las fronteras sólido-fluido. En el centro ocurre el "choque" de las dos capas pertenecientes a la misma interface, teniendo como efecto la formación de una "pluma" o columna que se despega justo desde la mitad de la cara hasta el infinito. Obviamente, en la zona donde se unen las capas límite

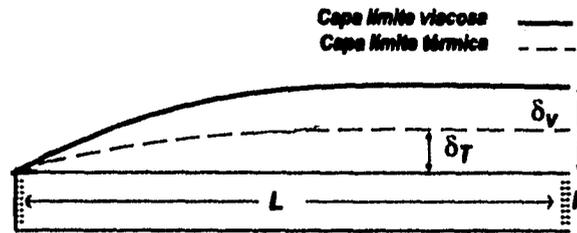


Figura 2.2: Se muestran las capas límite térmica y viscosa en una de las esquinas.

se pueden generar fácilmente turbulencias, sin embargo, en este trabajo sólo se considera el caso de flujos laminares. La figura 2.3 muestra la formación de las capas límite y las plumas o columnas.

Para conocer el orden de magnitud del espesor de la capa límite viscosa o térmica (como se dijo antes, éstas son de espesores parecidos para $Pr \sim 1$) y la velocidad del fluido dentro de ella, se comparan en la ecuación de balance de cantidad de movimiento, los términos viscosos y de gradiente de presión

$$\frac{\partial p}{\partial x} \sim \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (2.1)$$

donde, p es la presión y u la velocidad en la dirección longitudinal x . Los términos convectivos no se toman en cuenta debido a que las velocidades dentro de la zona de capa límite son pequeñas. Igualmente, el término difusivo restante es pequeño por estar en dicha zona. En este punto se introducen las cantidades características del problema asociadas a la capa límite viscosa o térmica. En la coordenada x , la longitud característica se propone como la mitad del largo de la placa, L . Para la coordenada transversal y , la longitud característica se toma como el espesor característico de las capas límite, δ (cantidad a determinar), y por último la diferencia de presión característica, $\Delta p \sim (\rho - \rho_\infty) g \delta$. Aquí ρ es la densidad en la capa límite, y ρ_∞ es la densidad en el exterior de ella.

Introduciendo estas cantidades características en la relación (2.1), se obtiene en términos de órdenes de magnitud

$$\frac{(\rho - \rho_\infty) g \delta}{L} \sim \mu \frac{u_c}{\delta^2}. \quad (2.2)$$

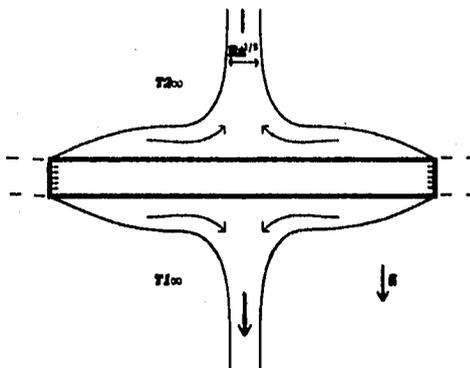


Figura 2.3: Esquema de las cuatro capas límite generadas y las dos plumas de la región central.

Aquí u_c es la velocidad característica en la dirección x , (a determinar). Para ello utilizamos la aproximación de Boussinesq que consiste en que los cambios de la densidad sólo se toman en cuenta en los términos de flotación de la ecuación de movimiento. En esta relación aún falta introducir la función $\rho(T)$. Si la densidad es únicamente función de la temperatura se puede expandir a primer orden para obtener la aproximación $(\rho - \rho_\infty)g \simeq g\rho_\infty\beta\Delta T$. Substituyendo este resultado en la relación (2.2), se obtiene

$$\frac{\rho_\infty\beta(\Delta T_\infty)g}{L} \sim \mu \frac{u_c}{\delta^3}. \quad (2.3)$$

De igual forma, comparando en el balance de energía, los términos difusivos con los convectivos:

$$\rho_\infty u_c \frac{\partial T}{\partial x} \sim \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (2.4)$$

En esta relación c y λ son, respectivamente, el calor específico y la conductividad térmica de fluido. Los términos convectivos y difusivos restantes no se tomaron en cuenta, debido a que las velocidades en y y los gradientes de temperatura en x son pequeños comparados con los términos de la relación (2.4), (en la región de la capa límite). Substituyendo en (2.4) las cantidades características se obtiene la relación de órdenes de magnitud para la energía,

$$\frac{\rho_{\infty} u_0 c}{L} \sim \frac{\lambda}{\delta^2}. \quad (2.5)$$

Combinando las relaciones (2.3) y (2.5), se obtienen tanto la velocidad como el espesor característicos de cada capa límite

$$u_{ci} \sim \frac{Ra_i^{\frac{1}{2}} \nu_i}{Pr_i L} \left(\frac{\Delta T_{\infty}}{\Delta T_i} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad \delta_i \sim L \left(\frac{\Delta T_{\infty}}{Ra_i \Delta T_i} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{con } i = 1, 2. \quad (2.6)$$

Aquí, $\Delta T_i = T_{i\infty} - T_w$.

Es fácil observar, que si el número de Rayleigh es grande, la magnitud del grosor característico de la capa límite δ_i es muy pequeño. Por otro lado, si se considera que las "plumas" o columnas que se forman en el centro de la placa, tanto arriba como abajo, se comportan como los "brazos" de un punto de estancamiento, entonces la velocidad y el espesor característicos de la pluma serán similares a los de la capa límite, por lo que sus efectos pueden ser despreciados si el número Rayleigh es grande. Por ejemplo, si el Rayleigh es 1×10^6 , δ_i resulta ser del orden del 5% de L . Lo anterior se comprueba perfectamente con los experimentos de Husar y Sparrow, quienes demostraron que las plumas de flotación sólo afectan en regiones cercanas al punto de colisión [28], Stewartson encontró también que ambas capas límite eran independientes hasta una distancia desde el centro del orden $O(\nu^{2/3})$ [11]. La dispersión de las plumas tendrá que ser también despreciada. Por esta razón en este análisis se considerará que el número Rayleigh es lo suficientemente grande para que las plumas no intervengan de manera trascendente en la dinámica del problema, aunque las predicciones cerca de las plumas deberán de tomarse con cautela.

Por la simetría del sistema, sólo se requiere analizar el intervalo de la placa que va desde cero a L en el eje x . La condición de frontera en $x = L$ resulta ser de superficie adiabática cuando se tienen condiciones ideales, es decir, las corrientes producidas por convección natural en los fluidos son laminares, ya que de haber turbulencia es muy probable un rompimiento de la simetría, caso que no es de interés en este trabajo. Los datos experimentales para este tipo de problemas pero con temperaturas constantes en la placa para la estabilidad, son de turbulencia para valores del $Ra > 1 \times 10^7$ [24].

Debido a las condiciones adiabáticas en la orilla de la placa $x = 0$ y en el plano de simetría $x = L$, los flujos de calor a través de la placa y de los fluidos, en el intervalo $x : [0, L]$ deben de ser del mismo orden (en estado estacionario)

$$q_1 \sim q_2 \sim q_w. \quad (2.7)$$

Por la ley de Fourier, que dice que los flujos de calor son proporcionales al gradiente de temperaturas, se obtiene,

$$\frac{\lambda_1 \Delta T_1}{\delta_1} \sim \frac{\lambda_2 \Delta T_2}{\delta_2} \sim \frac{\lambda_w \Delta T_w}{h}. \quad (2.8)$$

Después de substituir (2.6) en (2.8) se llega a la relación entre las diferencias características de temperatura de cada fluido y la correspondiente a la placa

$$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_\infty} \sim \left(\frac{\alpha \Delta T_w}{\epsilon^2 \Delta T_\infty} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad \frac{\Delta T_2}{\Delta T_\infty} \sim \left(\frac{\alpha \beta \Delta T_w}{\epsilon^2 \Delta T_\infty} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.9)$$

en donde $\epsilon = h/L$ se conoce como la relación de esbeltez y es menor que la unidad, α es el parámetro adimensional de conducción de calor definido como,

$$\alpha = \frac{\lambda_w h}{\lambda_1 L} Ra_1^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.10)$$

y por último β relaciona las conductancias térmicas de ambos fluidos,

$$\beta = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \left(\frac{Ra_1}{Ra_2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.11)$$

El parámetro α corresponde a la razón del calor conducido longitudinalmente por la placa y el calor transportado por convección en el fluido más caliente. Este parámetro puede ser mucho mayor o menor que la unidad. El parámetro β es de orden uno para casos prácticos y es exactamente la unidad en caso de tener dos fluidos iguales en ambos lados de la placa, sin embargo, β puede variar fuertemente si se usan fluidos con grandes diferencias en viscosidad, conductividad térmica, coeficiente de expansión térmica, etc.. En este trabajo β se considera de orden uno.

De las relaciones (2.9) y del hecho $\Delta T_\infty \sim \Delta T_1 + \Delta T_2 + \Delta T_w$, se obtiene la variación relativa de temperaturas en la placa como una función de los parámetros más importantes del problema:

$$\left(\frac{\alpha \Delta T_w}{\epsilon^2 \Delta T_\infty} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \beta^{\frac{1}{2}} \right) + \frac{\Delta T_w}{\Delta T_\infty} \sim 1. \quad (2.12)$$

En esta relación $\Delta T_w / \Delta T_\infty$ puede ser mucho menor que uno, en cuyo caso el primer término izquierdo de la suma en (2.12) deberá ser de orden uno. Por otro lado,

$\Delta T_w/\Delta T_\infty$ a lo más, es del orden de la unidad, bajo estas circunstancias el primer término izquierdo sólo puede ser de orden uno, entonces $\Delta T_w/\Delta T_\infty \sim \epsilon^2/(\alpha(1+\beta^{5/6})^{6/5})$. Esta relación es importante, por lo que en las siguientes secciones se estudia detenidamente para diferentes órdenes de magnitud de los parámetros que la conforman.

2.2.1 Aproximación de Pared Térmicamente Delgada

Analizando el término de la parte izquierda de la suma en (2.12) se obtiene:

$$\frac{\Delta T_w}{\Delta T_\infty} \sim \frac{\epsilon^2}{\alpha(1+\beta^{5/6})^{6/5}}. \quad (2.13)$$

Para valores muy pequeños de este cociente, las variaciones de la temperatura en la dirección transversal dentro de la placa son mucho menores que la unidad y pueden ser ignoradas en una primera aproximación. En dicho límite se tiene la aproximación de **pared térmicamente delgada**. Este caso puede ser obtenido para grandes valores de α/ϵ^2 con cualquier valor de β , o bien, para valores de β tales que

$$\beta \gg \left| \left(\frac{\epsilon^2}{\alpha} \right)^{5/6} - 1 \right|^{6/5}. \quad (2.14)$$

En el límite de pared térmicamente delgada, los incrementos característicos de temperatura en la dirección transversal para ambos fluidos son:

$$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_\infty} \sim \frac{1}{1+\beta^{5/6}} \text{ y } \frac{\Delta T_2}{\Delta T_\infty} \sim \frac{\beta^{5/6}}{1+\beta^{5/6}}. \quad (2.15)$$

Si el valor de β es de orden uno, los cambios de temperatura en ambos fluidos son de orden uno y deberán ser retenidos en el análisis. En cambio, para valores grandes de β , la resistencia térmica del fluido I es muy pequeña, por lo que el problema se reduce a una placa isotérmica horizontal con un proceso de convección en el fluido sobre ella. Por otro lado, para valores pequeños de β , el problema se convierte en una placa isotérmica horizontal con un proceso de transferencia de calor en el fluido bajo ella. Ambos casos son clásicos en la literatura y están resueltos [19].

2.2.2 Aproximación de Pared Térmicamente Gruesa

La aproximación de pared térmicamente gruesa corresponde al caso en el que las variaciones relativas de temperatura en la dirección transversal dentro de la pared son de orden unidad. Para valores de β de orden uno, se puede ver fácilmente de la relación (2.13), que este límite ocurre cuando $\alpha/\varepsilon^2 \sim 1$. Bajo estas circunstancias la relación (2.13) se reduce a

$$\frac{\Delta T_w}{\Delta T_\infty} \sim \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \quad (2.16)$$

y las ecuaciones de incrementos característicos para los fluidos (2.9) quedan de la forma

$$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_\infty} \sim \left(\frac{\alpha}{\varepsilon^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad \frac{\Delta T_2}{\Delta T_\infty} \sim \left(\frac{\alpha\beta}{\varepsilon^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.17)$$

Para valores de $\alpha/\varepsilon^2 \sim 1$, con $\beta \ll 1$, el problema se reduce a uno de transferencia de calor en una placa horizontal con una temperatura conocida en la superficie de arriba, sin embargo, en este caso las variaciones de temperatura en la pared son muy importantes y deben ser consideradas. El último enunciado es la principal diferencia entre este caso y el mencionado como pared térmicamente delgada tratado anteriormente. Otro límite es cuando tenemos valores pequeños de α/ε^2 con $\beta \sim \alpha/\varepsilon^2$, es decir, $\alpha \ll \varepsilon^2 \ll 1$. En este caso se tiene el problema inverso al anterior, es decir, una placa con temperatura conocida en su cara inferior.

2.3 Flujo de Calor Promedio (estacionario)

El parámetro más importante a determinar es la cantidad adimensional que representa al flujo promedio de calor, conocido como el número de Nusselt y definido como

$$Nu = \frac{qL}{\lambda_1 \Delta T} \sim Ra_1^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\Delta T_1}{\Delta T}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.18)$$

Por comodidad se define al número de Nusselt reducido como

$$Nu^* = \frac{Nu}{Ra_1^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.19)$$

Después de substituir en (2.19) el término de incrementos característicos de temperatura del fluido I , se tiene que para el caso de pared térmicamente delgada el número de Nusselt reducido es

$$Nu^* \sim \frac{1}{(1 + \beta^{\frac{5}{6}})^{\frac{6}{5}}}, \quad (2.20)$$

siendo independiente de los parámetros α y ε . Mientras que para el caso de pared térmicamente gruesa queda

$$Nu^* \sim \frac{\alpha}{\varepsilon^2}. \quad (2.21)$$

De estas dos últimas relaciones se concluye que, para valores pequeños de α/ε^2 , el número de Nusselt reducido Nu^* es una función lineal creciente con α/ε^2 , y que para grandes valores de α/ε^2 , el Nusselt promedio alcanza un valor asintótico dado por $1/(1 + \beta^{\frac{5}{6}})^{\frac{6}{5}}$. Uno de los objetivos principales de este trabajo consiste en obtener una solución que cubra todo el espacio paramétrico de Nu^* como función de α/ε^2 , considerando valores para β de orden uno.

El análisis anterior permite predecir el comportamiento de los flujos de calor promedio, aún sin resolver las ecuaciones de los fluidos o de la placa, en el sentido estricto.

Por otra parte, la influencia relativa de la conducción longitudinal de calor en la placa se obtiene de la razón entre los términos de conducción de calor longitudinal y transversal

$$\frac{q_L}{q_T} \sim R \sim \alpha (1 + \beta^{\frac{5}{6}})^{\frac{6}{5}} \frac{\Delta T_{Lw}}{\Delta T_{\infty}}, \quad (2.22)$$

en donde ΔT_{Lw} corresponde a la diferencia característica de la temperatura longitudinal, dentro de la pared. Para grandes valores de α , $\Delta T_{Lw}/\Delta T_{\infty}$ es muy pequeño, del orden de $(1 + \beta^{5/6})^{-6/5}/\alpha$, ya que R es de orden unidad en su valor máximo. Como consecuencia, la conducción longitudinal de calor en la placa puede ser ignorada si $\alpha \ll (1 + \beta^{\frac{5}{6}})^{-\frac{6}{5}}$.

2.4 Análisis de los Órdenes de Magnitud para el Problema Dependiente del Tiempo

En el caso dependiente del tiempo, los valores característicos del grosor de las capas límite y sus velocidades se consideran iguales a los obtenidos en el caso estacionario, ya que se debe de conservar la relación entre los términos dominantes de las ecuaciones de balance de momento y de energía. Sin embargo, el tiempo, juega en este caso un papel muy importante. Es por esta razón que se analizan a continuación los tiempos característicos del problema.

El tiempo característico de residencia del fluido i sobre la placa, dado por $t_{ri} \sim L/u_{ci}$, es el que tarda el fluido con velocidad u_{ci} , en recorrer la mitad de la placa L . Sustituyendo el valor obtenido anteriormente para u_c (2.6) se encuentra,

$$t_{ri} \sim \frac{Pr_i L^2}{\nu_i Ra_i^{2/3}}. \quad (2.23)$$

De manera equivalente, el tiempo característico de conducción de calor, en la dirección longitudinal dentro de la placa, se obtiene por medio de la ecuación de balance de energía en el sólido, en donde el término de acumulación de energía se compara con el término difusivo en la dirección longitudinal

$$\rho_w c_w \frac{\partial T}{\partial t} \sim \lambda_w \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (2.24)$$

Si se introducen las cantidades características en la relación anterior, se obtiene el tiempo característico de conducción longitudinal, t_L , en la placa,

$$t_L \sim \frac{\rho_w c_w}{\lambda_w} L^2. \quad (2.25)$$

Igualmente se procede para el cálculo del orden de magnitud del tiempo característico en la dirección transversal

$$t_h \sim \frac{\rho_w c_w h^2}{\lambda_w}. \quad (2.26)$$

Para calcular el tiempo característico en que la placa almacena energía, t_e , se necesitan los flujos de calor característicos en ambos fluidos. De la ley de Fourier, aplicada en las capas límite viscosas,

$$q_i \sim \frac{\lambda_i \Delta T_i}{\delta_i} \quad \text{para } i = 1, 2, \quad (2.27)$$

mientras el calor almacenado en el sólido es

$$q_w \sim \frac{\rho_w c_w h L (T_{wf} - T_{w0})}{t_e}, \quad (2.28)$$

en donde, T_{wf} y T_{w0} son las temperaturas final e inicial en la placa, respectivamente. Con estas dos últimas relaciones y la relación de balance de flujos de calor (2.7), se obtiene el tiempo característico de almacenamiento de energía

$$t_e \sim t_L \alpha \frac{\Delta T_{\infty}^{\frac{1}{2}} (T_{wf} - T_{w0})}{\left(\Delta T_{1,0}^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\beta} \Delta T_{2,0}^{\frac{1}{2}} \right)}. \quad (2.29)$$

Aquí, $\Delta T_{1,0} = T_{1\infty} - T_{w0}$ y $\Delta T_{2,0} = T_{w0} - T_{2\infty}$. En donde el cero de la derecha en el subíndice denota el valor inicial de la variable.

Cuando el proceso llega a un estado estacionario, se cumple la relación $q_1 \sim q_2$, ya que la placa ni recibe ni entrega energía calorífica, y se deduce que:

$$T_{wf} - T_{w0} \sim \frac{\beta^{\frac{1}{2}} \Delta T_{1,0} - \Delta T_{2,0}}{1 + \beta^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.30)$$

Si se substituye este resultado en la relación (2.29), encontramos finalmente la relación para el tiempo característico de almacenamiento de energía en la placa.

$$t_e \sim t_L \alpha \frac{\beta \Delta T_{\infty}^{\frac{1}{2}} (\beta^{\frac{1}{2}} \Delta T_{1,0} - \Delta T_{2,0})}{(1 + \beta^{\frac{1}{2}}) (\beta \Delta T_{1,0}^{\frac{1}{2}} - \Delta T_{2,0}^{\frac{1}{2}})}. \quad (2.31)$$

Obviamente, en un problema dependiente del tiempo, las condiciones iniciales juegan un papel muy importante en el análisis asintótico. Para los fines perseguidos en este estudio se escogieron dos casos:

Caso 1: La placa y el fluido sobre ella están a una misma temperatura, mientras que el fluido abajo de ellos esta a una temperatura más alta, esto es, $T_{w,0} = T_{2,\infty}$ y $\Delta T_{2,0} = 0$ bajo estas circunstancias el tiempo característico (2.31) se convierte en

$$t_e \sim t_L \alpha \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{1 + \beta^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.32)$$

Caso 2: La placa y el fluido bajo ella se encuentran a una misma temperatura, y el fluido sobre ellos está a una temperatura más baja. Si tales son las condiciones iniciales, se tiene, $T_{w,0} = T_{1,\infty}$ y $\Delta T_{1,0} = 0$; de aquí, el tiempo característico para almacenamiento de energía (2.31) tiene la forma

$$t_e \sim t_L \alpha \frac{\beta}{1 + \beta^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.33)$$

En ambos casos t_e no depende de la temperatura, y si β es de orden unidad, $t_e \sim t_L \alpha$, entonces, el caso general se puede aproximar como

$$t_e \sim t_L \alpha G(\beta, \Delta T_{1,0}, \Delta T_{2,0}), \quad (2.34)$$

en donde G es una función de β , $\Delta T_{1,0}$ y $\Delta T_{2,0}$, cuyo valor es de orden unidad. Si el análisis en con base a órdenes de magnitud, la relación (2.34) se puede escribir simplemente como $t_e \sim t_L \alpha$.

2.4.1 Aproximaciones de Pared Térmicamente Delgada y Gruesa

Es lógico suponer que para el caso dependiente del tiempo también se tienen casos límites para pared delgada y gruesa. A continuación se analiza la dependencia de los parámetros importantes sobre estos límites.

El flujo de calor en la placa, debe ser del orden del promedio de los flujos de calor en cada fluido, esto es,

$$q_1 + q_2 \sim 2q_w, \quad (2.35)$$

sustituyendo las relaciones para los flujos de calor, se obtiene la relación para las diferencias de temperatura transversales en la placa

$$\frac{\Delta T_w}{\Delta T_\infty} \sim \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \left[\left(\frac{\Delta T_1}{\Delta T_\infty} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\beta} \left(\frac{\Delta T_2}{\Delta T_\infty} \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (2.36)$$

Pared Térmicamente Delgada

El caso de pared térmicamente delgada ocurre si $\varepsilon^2/\alpha \ll 1$, ya que si esto ocurre la relación (2.36) lleva a

$$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_\infty} \sim \frac{\Delta T_2}{\Delta T_\infty} \sim 1 \text{ y } \frac{\Delta T_w}{\Delta T_\infty} \sim \frac{\varepsilon^2}{\alpha}. \quad (2.37)$$

En donde se aprecia claramente que los gradientes de temperatura en la dirección transversal dentro de la placa son muy pequeños, justo como en el caso estacionario.

Pared Térmicamente Gruesa

El caso cuando los gradientes en la dirección transversal dentro de la placa no pueden ser despreciados y se tiene pared térmicamente gruesa ($\varepsilon^2/\alpha \sim 1$ ó < 1), ocurre si

$$\alpha \sim \varepsilon^2 \ll 1, \text{ con } \frac{\Delta T_w}{\Delta T} \sim \frac{\Delta T_1}{\Delta T} \sim \frac{\Delta T_2}{\Delta T} \sim 1, \quad (2.38)$$

o bien,

$$\alpha \ll \varepsilon^2 \ll 1, \text{ con } \frac{\Delta T_w}{\Delta T} \sim 1 \text{ y } \frac{\Delta T_1}{\Delta T} \sim \frac{\Delta T_2}{\Delta T} \ll 1. \quad (2.39)$$

Es bueno señalar en este punto, como era de esperarse, que los límites ocurren bajo las mismas condiciones que en el caso estacionario, es decir, pared térmicamente delgada cuando $\varepsilon^2/\alpha \ll 1$ y térmicamente gruesa cuando $\alpha/\varepsilon^2 \sim 1$ ó $\alpha/\varepsilon^2 \ll 1$.

2.4.2 Análisis de los Tiempos Característicos

Si se calculan las razones entre los distintos tiempos característicos, se obtiene

$$\frac{t_e}{t_h} \sim \frac{\alpha}{\varepsilon^2}, \quad \frac{t_e}{t_L} \sim \alpha \quad \text{y} \quad \frac{t_e}{t_{ri}} \sim \varepsilon Ra_1^{\frac{1}{2}} \frac{\rho_w c_w}{\rho_{1\infty} c_1} \left(\frac{\Delta T_1}{\Delta T_\infty} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.40)$$

En el caso límite de pared térmicamente delgada, esto es $\alpha/\varepsilon^2 \gg 1$, se tiene de (2.40) que los tiempos de reacción de almacenamiento de energía en la placa, son mucho mayores que los tiempos de conducción en la dirección transversal, lo que concuerda con la definición de pared térmicamente delgada. Para la aproximación de pared térmicamente gruesa, los tiempos anteriormente mencionados son del mismo orden, por lo que las posibles

diferencias de temperatura en la dirección transversal deben tomarse en cuenta. En el caso de tiempos de conducción en la dirección longitudinal, los efectos de tal conducción se toman en cuenta para $\alpha \sim 1$, mientras que se pueden despreciar si $\alpha \ll 1$.

2.4.3 Límite Cuasi-estacionario

La última relación a discutir, es justamente el último término de las relaciones (2.40). Esta cantidad indica cómo son los tiempos característicos en la placa respecto a los tiempos en los fluidos. Un límite muy importante es el quasi-estacionario, que ocurre cuando

$$Ra_i \gg \left[\frac{1}{\epsilon} \frac{\rho_{100} c_i}{\rho_w c_w} \right]^5, i = 1, 2. \quad (2.41)$$

Si tal condición se satisface, los tiempos en los fluidos son cortos respecto a los de la placa, entonces los efectos temporales en las ecuaciones de los fluidos se pueden ignorar, lo que facilita en mucho la solución de este problema. En el presente estudio sólo se trabaja con este límite, por eso es conveniente señalar el intervalo para el número de Rayleigh en el que dicho problema se puede resolver bajo esta aproximación. En el caso de los gases, el Rayleigh debe ser mayor que $\sim 10^{-10}$, según (2.41), para estar en el límite quasi-estacionario. Por otro lado, para líquidos basta con que el número de Rayleigh sea mayor que $\sim 10^5$. Cabe resaltar que los intervalos para el número de Rayleigh descritos líneas antes, sólo indican si el problema está o no, en el límite quasi-estacionario, ya que por otro lado, se tienen restricciones adicionales para que el número de Rayleigh sea grande, con el fin de poder minimizar el efecto de las plumas.

Capítulo 3

Formulación de las Ecuaciones

En este capítulo se deducen las ecuaciones para ambos fluidos a partir de Navier-Stokes y utilizando las aproximaciones de capa límite y Boussinesq. Estas ecuaciones, junto a la de la energía en la placa y las condiciones de frontera, definen completamente al problema planteado en el Capítulo 2.

3.1 Ecuaciones de Capa Límite y Aproximación de Boussinesq

Las ecuaciones de balance de momento para un flujo bidimensional en un campo gravitacional cuyo vector de aceleración está en la dirección y son:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.1)$$

y

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + F_p. \quad (3.2)$$

La ecuación de conservación de la masa, se expresa como

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.3)$$

y la de conservación de energía

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \Phi + \lambda \nabla^2 T. \quad (3.4)$$

En donde u y v son las velocidades del fluido en dirección x y y , respectivamente. p es la presión, ρ la densidad, ν la viscosidad cinemática, T la temperatura, t el tiempo, C_p la capacidad calorífica a presión constante, λ la conductividad térmica de fluido, Φ es la función de disipación de la energía y F_g es la contribución de las fuerzas gravitacionales sobre el movimiento en la dirección y , ($F_g = (\rho - \rho_\infty)g/\rho$, en donde ρ_∞ es la densidad en lugares alejados de la placa).

Utilizando la aproximación de capa límite para ($Re = Lu_c/\nu \rightarrow \infty$, para ambos fluidos), la aproximación de Boussinesq (sólo se toman en cuenta las variaciones de densidad en los términos de flotación de las ecuaciones de movimiento), y la ecuación de estado proveniente de la expansión a primer orden $\rho_\infty/\rho(T) \simeq 1 + \beta(T - T_\infty)$, se obtiene para el balance en la cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_\infty} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (3.5)$$

$$g\tilde{\beta}(T - T_\infty) = \frac{1}{\rho_\infty} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (3.6)$$

Aquí $\tilde{\beta}$ y g representan el coeficiente de expansión térmica del fluido y la aceleración de la gravedad, respectivamente. La ecuación de continuidad bajo cualquier aproximación de capa límite,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3.7)$$

Para la conservación de la energía se tiene,

$$\rho_\infty C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \Phi + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (3.8)$$

Aún más, si se utiliza la aproximación cuasiestacionaria (previamente justificada en el capítulo 2) y se considera que el término de disipación de energía es muy pequeño comparado con la unidad, el resultado es

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_\infty} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (3.9)$$

$$g\tilde{\beta}(T - T_\infty) = \frac{1}{\rho_\infty} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.11)$$

y

$$\rho_{\infty} C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (3.12)$$

La ecuación (3.11) lleva a proponer la función de corriente ψ , tal que

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ y } v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (3.13)$$

pues bajo ella se satisface automáticamente, lo que reduce el número de ecuaciones a tres.

Utilizando esta definición, se obtienen:

$$\nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} - \frac{1}{\rho_{\infty}} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad (3.14)$$

$$g \tilde{\beta} (T - T_{\infty}) = \frac{1}{\rho_{\infty}} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (3.15)$$

y

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \rho_{\infty} C_p \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \right). \quad (3.16)$$

Hasta este punto se han planteado las ecuaciones de balance en energía y masa para el caso de cualquier fluido ya sea el superior o inferior. Esta generalidad es simplificada cuando se toman en cuenta las condiciones de frontera e iniciales para cada fluido.

3.2 Ecuación de la Energía en la Placa

En la placa, la ecuación de energía es de la forma

$$\frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_w}{\partial y^2} = \frac{\rho_w C_w}{\lambda_w} \frac{\partial T_w}{\partial t}. \quad (3.17)$$

Aquí T_w es la temperatura, ρ_w es la densidad, C_w la capacidad calorífica y λ_w la conductividad térmica, todas ellas referidas a la placa. Esta es la única ecuación en donde los efectos temporales aparecen, ya que según el límite cuasiestacionario, es sólo aquí donde las variaciones en el tiempo son apreciables.

3.3 Ecuaciones Adimensionales

Finalmente se presenta el sistema completo de ecuaciones para ambos fluidos y la placa, que junto a las condiciones de frontera definen completamente el sistema físico. Si se utilizan los siguientes cambios de variable para adimensionalizar las ecuaciones y reescalarlas según el análisis de órdenes de magnitud del Capítulo anterior

$$\tau = \frac{t\lambda_w}{\alpha L^2 \rho_w c_w}, \quad \theta_1 = \frac{T_{1\infty} - T_1}{T_{1\infty} - T_{2\infty}}, \quad \theta_2 = \frac{T_2 - T_{2\infty}}{T_{1\infty} - T_{2\infty}}, \quad \theta_w = \frac{T_w - T_{2\infty}}{T_{1\infty} - T_{2\infty}},$$

$$\chi = \frac{x}{L}, \quad \eta_1 = Ra_1^{1/5} \frac{(y-h/2)}{5^{1/5} L \chi^{2/5}}, \quad \eta_2 = Ra_2^{1/5} \frac{(y+h/2)}{5^{1/5} L \chi^{2/5}}, \quad z = \frac{y}{h}, \quad (3.18)$$

$$f_i = \frac{\psi_i Pr_i}{5^{4/5} \nu_i Ra_i^{1/5} \chi^{3/5}}$$

y

$$\phi_i = \frac{(p-p_0) L^2 Pr_i}{5^{1/5} \rho_i \nu_i^2 Ra_i^{4/5} \chi^{2/5}},$$

se obtienen las ecuaciones para el fluido i -ésimo:

$$\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial \eta_i^2} + 3f_i \frac{\partial \theta_i}{\partial \eta_i} = 5\chi \left(\frac{\partial f_i}{\partial \eta_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial \chi} - \frac{\partial f_i}{\partial \chi} \frac{\partial \theta_i}{\partial \eta_i} \right), \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_i} = \theta_i, \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial^3 f_i}{\partial \eta_i^3} + \frac{2}{5} \eta_i \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_i} - \frac{2}{5} \phi_i - \chi \frac{\partial \phi_i}{\partial \chi} =$$

$$\frac{1}{Pr_i} \left[\left(\frac{\partial f_i}{\partial \eta_i} \right)^2 - 3f_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial \eta_i^2} + 5\chi \left(\frac{\partial f_i}{\partial \eta_i} \frac{\partial^2 f_i}{\partial \chi \partial \eta_i} - \frac{\partial f_i}{\partial \chi} \frac{\partial^2 f_i}{\partial \eta_i^2} \right) \right] \quad (3.21)$$

y para el sólido

$$\alpha \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \chi^2} + \frac{\alpha}{\epsilon^2} \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial z^2} = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad (3.22)$$

en donde α y ϵ están definidos en el capítulo 2.

Las condiciones de frontera para estas ecuaciones son:

la velocidad de los fluidos sobre la placa es cero (a), la temperatura y el flujo de calor en la frontera sólido-fluido son continuos (b), esto es,

$$f_1 = \frac{\partial f_1}{\partial \eta_1} = 0 \quad (\text{a}), \quad \theta_1 = 1 - \theta_\omega, \quad \frac{\partial \theta_\omega}{\partial z} = -\frac{\varepsilon^2}{\alpha \chi^4} \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta_1} \quad (\text{b}), \quad (3.23)$$

en

$$\eta_1 = z - \frac{1}{2} = 0,$$

$$f_2 = \frac{\partial f_2}{\partial \eta_2} = 0 \quad (\text{a}), \quad \theta_2 = \theta_\omega, \quad \frac{\partial \theta_\omega}{\partial z} = -\frac{\varepsilon^2}{\alpha \beta \chi^4} \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta_2} \quad (\text{b}), \quad (3.24)$$

en

$$\eta_2 = z + \frac{1}{2} = 0,$$

la placa tiene bordes adiabáticos por sus orillas más angostas,

$$\frac{\partial \theta_\omega}{\partial \chi} = 0 \quad \text{para } \chi = 0 \text{ y } \chi = 1, \quad (3.25)$$

y por último, en lugares alejados de la placa las velocidades, la temperatura y la presión en los fluidos tienen los valores del ambiente

$$\frac{\partial f_i}{\partial \eta_i} = \theta_i = \phi_i = 0 \quad \text{para } \eta_i \rightarrow \infty. \quad (3.26)$$

Este sistema de ecuaciones no lineal se resuelve en los próximos capítulos, ya sea por técnicas asintóticas o por simulación numérica.

Capítulo 4

Análisis Asintótico

En este Capítulo se aplican técnicas asintóticas con el fin de resolver el sistema de ecuaciones no lineales que rigen al problema. El tratamiento se realiza tanto en el caso estacionario como en el dependiente del tiempo. Las técnicas de perturbación asintótica se utilizan en los rangos paramétricos que propone el análisis del orden de magnitud del Capítulo 2, comenzando por el límite de pared térmicamente delgada, para después trabajar con el límite de pared térmicamente gruesa.

4.1 Análisis Estacionario

4.1.1 Pared Térmicamente Delgada

El límite de pared térmicamente delgada, ocurre cuando se tienen valores de la forma paramétrica $\alpha(1 + \beta^6/\theta)^{6/5}/\epsilon^2$ grandes comparados con la unidad. Como se dedujo en el análisis de orden de magnitud, en este caso las variaciones transversales de temperatura dentro de la placa son muy pequeñas, y pueden ser ignoradas, entonces $\theta_\omega = \theta_\omega(\chi)$. La temperatura en la placa no depende de la coordenada transversal. Dadas estas circunstancias, la ecuación de balance de la energía en la placa (3.22), después de una integración sobre la coordenada transversal z se transforma en

$$\frac{d^2\theta_\omega}{d\chi^2} + \frac{1}{\epsilon^2} \left[\frac{\partial\theta_\omega}{\partial z} \Big|_{\frac{1}{2}} - \frac{\partial\theta_\omega}{\partial z} \Big|_{-\frac{1}{2}} \right] = 0. \quad (4.1)$$

Aún más, si se utilizan las condiciones de frontera en la placa para $z = 1/2$ y $z = -1/2$ dadas por (3.24), la ecuación (4.1) se transforma en

$$\alpha \frac{d^2 \theta_\omega}{d\chi^2} = \frac{1}{\chi^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{\partial \theta_1}{\partial \eta_1} \Big|_{\eta_1=0} - \frac{1}{\beta} \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta_2} \Big|_{\eta_2=0} \right]. \quad (4.2)$$

Esta ecuación puede ser resuelta, junto con las ecuaciones para los fluidos, mediante la utilización de técnicas asintóticas de perturbación. El parámetro de expansión para la perturbación se elige como $1/\alpha$. La elección anterior es debida primeramente a que con $\alpha \gg 1$ se obtiene el límite de pared térmicamente delgada, ya que se cumple $\alpha(1 + \beta^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}/\epsilon^2 \gg 1$, recordando que α es el parámetro que puede variar en un rango más amplio. Por último, se tiene que β y ϵ no aparecen en el término de expansión, ya que β se considera de orden uno en este trabajo, y ϵ es siempre mucho menor que la unidad. El espacio paramétrico que barren β y ϵ no juega un papel importante en la condición para pared térmicamente delgada. La expansión toma la forma

$$\theta_\omega = \theta_{\omega 0} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^j} \theta_{\omega j}(\chi) \quad (4.3)$$

$$\theta_i = \theta_{i0} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^j} \theta_{ij}(\chi). \quad (4.4)$$

Integrando la ecuación (4.2) a lo largo de la coordenada longitudinal y usando las condiciones adiabáticas de la placa en el resultado, se obtiene

$$\int_0^1 \frac{d\chi}{\chi^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{\partial \theta_1}{\partial \eta_1} \Big|_{\eta_1=0} - \frac{1}{\beta} \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta_2} \Big|_{\eta_2=0} \right] = 0. \quad (4.5)$$

Para que esta integral sea cero, los términos dentro de los corchetes deberán ser tales que para cada χ se cumpla que

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \eta_1} \Big|_{\eta_1=0} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta_2} \Big|_{\eta_2=0}. \quad (4.6)$$

Con (4.6), (4.2) y las condiciones de frontera adiabáticas resulta que θ_ω es constante. Comparando términos en la expansión (4.3) se llega a: $\theta_\omega = \theta_{\omega 0}$ y $\theta_{\omega j} = 0$ para todo $j \geq 1$. Aún más, con las condiciones de frontera $\theta_2 = \theta_\omega$ y $\theta_1 = 1 - \theta_\omega$ en $\eta_2 = 0$ y $\eta_1 = 0$, respectivamente, se obtiene $\theta_{ij} = 0$, para todo $j \geq 1$, y $\theta_1 = 1 - \theta_2$.

La relación (4.6) significa que el flujo de calor del fluido *I* hacia la pared es exactamente el mismo que el de la pared al fluido *II*. Esto es posible únicamente para una pared con una temperatura uniforme cuyas ecuaciones, independientes de la coordenada longitudinal, tienen la forma

$$\frac{d^2\theta_i}{d\eta_i^2} + 3f_i \frac{d\theta_i}{d\eta_i} = 0,$$

$$\frac{d\phi_i}{d\eta_i} = \theta_i \quad (4.7)$$

y

$$\frac{d^3 f_i}{d\eta_i^3} + \frac{2}{5}\eta_i \frac{d\phi_i}{d\eta_i} - \frac{2}{5}\phi_i = \frac{1}{Pr_i} \left[\left(\frac{df_i}{d\eta_i} \right)^2 - 3f_i \frac{d^2 f_i}{d\eta_i^2} \right],$$

con las condiciones de frontera

$$f_i = \frac{df_i}{d\eta_i} = 0, \quad \theta_1 = 1 - \theta_\omega, \quad \theta_2 = \theta_\omega \quad \text{en } \eta_i = 0, \quad (4.8)$$

$$\frac{df_i}{d\eta_i} = \theta_i = \phi_i = 0 \quad \text{para } \eta_i \rightarrow \infty, \quad (i = 1, 2). \quad (4.9)$$

Usando el grupo de transformaciones que dejan invariantes a las ecuaciones de la capa límite (4.7),

$$\theta_i \Rightarrow B_i \theta_i, \quad \eta_i \Rightarrow B_i^{-\frac{1}{2}} \eta_i, \quad \phi_i \Rightarrow B_i^{\frac{1}{2}} \phi_i, \quad f_i \Rightarrow B_i^{\frac{1}{2}} f_i, \quad (4.10)$$

se pueden normalizar. En este caso $B_1 = 1 - \theta_\omega$ y $B_2 = \theta_\omega$. El sistema se reduce, entonces, al problema clásico de transferencia de calor con una temperatura adimensional superficial de valor unidad para ambos fluidos. De lo anterior obtenemos

$$\left. \frac{d\theta_1}{d\eta_1} \right|_{\eta_1=0} = -G(Pr_1)(1 - \theta_\omega)^{\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad \left. \frac{d\theta_2}{d\eta_2} \right|_{\eta_2=0} = -G(Pr_2)\theta_\omega^{\frac{1}{2}}, \quad (4.11)$$

donde G es el gradiente adimensional de temperaturas en la pared para el caso normalizado dado por $G(Pr_i) = 0.394 Pr_i^{\frac{1}{2}}$ ([19], también se dedujo numéricamente) para números de Prandtl cercanos a la unidad. Utilizando las ecuaciones (4.11) y (4.6) se obtiene la temperatura adimensional en la placa

$$\theta_\omega = \frac{\left(\frac{\beta G(\text{Pr}_1)}{G(\text{Pr}_2)}\right)^{\frac{1}{2}}}{1 + \left(\frac{\beta G(\text{Pr}_1)}{G(\text{Pr}_2)}\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.12)$$

Si se define el número de Nusselt reducido promedio como

$$\overline{Nu^*} = - \int_0^1 \frac{d\chi}{\chi^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta_1} \Big|_{\eta_1=0}, \quad (4.13)$$

entonces, la conducción de calor promedio, después de utilizar la ecuación (4.11) e integrar en χ , queda como

$$\overline{Nu^*} = \frac{5G(\text{Pr}_1)(1 - \theta_\omega)^{\frac{1}{2}}}{3}. \quad (4.14)$$

En este límite, debido a la ausencia de gradientes de temperatura en dirección longitudinal, la conducción de calor en esta dirección no juega un papel relevante.

4.1.2 Pared Térmicamente Gruesa

Este caso se presenta cuando la resistencia térmica de la pared es mucho más grande que la de cualquier capa límite, o de acuerdo con el análisis de órdenes de magnitud del Capítulo 2, $\alpha/\varepsilon^2 \ll 1$, esto es, $\alpha \ll \varepsilon^2 \ll 1$. Si lo anterior se satisface, la caída más grande de temperatura ocurre en la dirección transversal de la placa, esto debido a que en la dirección longitudinal, los fluidos uniformizan rápidamente la temperatura sobre las superficies conductoras de la placa. Tal hecho tiene como consecuencia que los flujos más importantes de calor se producen en la dirección transversal.

A primera aproximación se supone un incremento de la temperatura lineal dentro de la placa que tiene la forma $\theta_\omega = z + 1/2$, es decir, desde cero en la superficie superior hasta uno en la inferior. Las condiciones de frontera en las interfaces, son:

$$q_w = q_1 = q_2. \quad (4.15)$$

La ley de Fourier en la placa tiene la forma $q_w = \theta_\omega(1/2) - \theta_\omega(-1/2)$, esto, junto a las definiciones de las q_i , transforman a la condición (4.15) en

$$1 - \theta_1(\chi, 0) - \theta_2(\chi, 0) = - \frac{\varepsilon^2}{\alpha \chi^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta_1} \Big|_{\eta_1=0} = - \frac{\varepsilon^2}{\alpha \beta \chi^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta_2} \Big|_{\eta_2=0}. \quad (4.16)$$

Las condiciones iniciales son:

$$\theta_1 (\chi = 0, \eta_1 = 0) = \theta_2 (\chi = 0, \eta_2 = 0) = 0. \quad (4.17)$$

Para este problema se supone una solución de la forma:

$$\theta_i = B_i \chi^n \bar{\theta}_i(\bar{\eta}_i), \text{ con } \bar{\eta}_i = (B_i \chi^n)^{\frac{1}{3}} \eta_i. \quad (4.18)$$

En donde $\bar{\theta}_i$ es una función que vale uno en $\chi = 0$, y las B_i s son constantes a determinar. Si se aplica la solución anterior en la ecuación (4.16) se obtiene

$$1 - (B_1 + B_2) \chi^n \sim \frac{\epsilon^2}{\alpha} B_1^{\frac{5}{3}} \chi^{\frac{5n-2}{3}} G_{n1} \sim \frac{\epsilon^2}{\alpha \beta} B_2^{\frac{5}{3}} \chi^{\frac{5n-2}{3}} G_{n2}; \quad (4.19)$$

esta aproximación es válida para valores pequeños de χ , o de α/ϵ^2 . En esta relación $G_{ni}(\text{Pr}_i) = -d\bar{\theta}_i/d\bar{\eta}_i$ para valores dados de n . El valor de n se puede obtener al analizar los órdenes de magnitud de la relación (4.19), esto es, los términos de la derecha deben de mantener el balance con la unidad del lado izquierdo para $\chi \rightarrow 0$, ya que los flujos de calor deben ser siempre del mismo orden. Por todo esto, el único valor permitido es $n = 1/3$, justo el que hace $\chi^{\frac{5n-2}{3}} = 1$.

La relación (4.19) debe de ser cierta en $\chi = 0$. Habiendo substituido el valor adecuado para n se obtiene

$$B_1 = \left(\frac{\alpha}{\epsilon^2 G_{1/3}(\text{Pr}_1)} \right)^{\frac{3}{5}} \quad \text{y} \quad B_2 = \left(\frac{\alpha \beta}{\epsilon^2 G_{1/3}(\text{Pr}_2)} \right)^{\frac{3}{5}}. \quad (4.20)$$

Aquí $G_{1/3}(\text{Pr}_i) \simeq 0.501 \text{Pr}_i^{1/20}$ ([19], también se dedujo numéricamente), que es válido para valores del número de Prandtl cercanos a la unidad ($Pr \sim 1$). Usando las condiciones de frontera, la temperatura adimensional en la placa es:

$$\theta_w = z + \frac{1}{2} - B_1 \chi^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1 - \tilde{\beta}}{2} + (1 + \tilde{\beta}) z \right), \text{ para } \frac{\alpha}{\epsilon^2} \ll 1, \quad (4.21)$$

donde

$$\tilde{\beta} = \frac{B_2}{B_1} = \left[\frac{\beta G_{1/3}(\text{Pr}_1)}{G_{1/3}(\text{Pr}_2)} \right]^{\frac{3}{5}}. \quad (4.22)$$

Existe una línea en la cual la temperatura se mantiene uniforme, independiente de χ . Tal plano está localizado en

$$z_{inv} = \frac{\bar{\beta} - 1}{2(\bar{\beta} + 1)} \quad (4.23)$$

y la temperatura en esta superficie es

$$\theta_w = z_{inv} + \frac{1}{2} = \frac{\bar{\beta}}{\bar{\beta} + 1}. \quad (4.24)$$

Esta temperatura es exactamente la obtenida para el caso de pared térmicamente delgada, por lo que la temperatura en este plano es invariante ante cualquier cambio del parámetro α .

4.2 Análisis Transitorio

4.2.1 Pared Térmicamente Delgada

Cuando se tienen valores grandes de α/ε^2 , las variaciones de la temperatura en la dirección transversal pueden ser despreciadas. En este límite, la ecuación de la energía de la pared (3.22) puede ser integrada a lo largo de la coordenada transversal para obtener

$$\alpha \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \chi^2} - \frac{\partial \theta_w}{\partial \tau} = \frac{\partial \theta_w}{\partial x} \Big|_{x=1/2} - \frac{\partial \theta_w}{\partial x} \Big|_{x=-1/2}. \quad (4.25)$$

Después de sustituir las condiciones de frontera en la ecuación anterior, se tiene

$$\alpha \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \chi^2} - \frac{\partial \theta_w}{\partial \tau} = \frac{1}{\chi^{2/5}} \left[\frac{\partial \theta_1}{\partial \eta_1} \Big|_{\eta_1=0} - \frac{1}{\beta} \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta_2} \Big|_{\eta_2=0} \right]. \quad (4.26)$$

Esta ecuación deberá resolverse con la condición inicial $\theta_w(\chi, z, \tau = 0) = \theta_{w,0}$ y las condiciones adiabáticas dadas por las ecuaciones (3.25).

Límite Asintótico $\alpha \gg \varepsilon^2$

Este límite es muy importante y se aplica en la mayoría de los casos prácticos de placas metálicas. Si los valores del parámetro α son muy grandes, la temperatura adimensional de la placa cambia muy poco con χ . Dos escalas de tiempo aparecen en este

problema, una lenta de orden $O(\tau)$, que controla la respuesta global transitoria de la placa y una rápida de orden α^{-1} , que actúa al inicio del proceso.

La escala rápida se debe a las condiciones iniciales uniformes de temperatura en la placa. En la frontera fluido-sólido inferior, el flujo de calor decrece hacia el centro de la placa porque la capa límite es más gruesa. Por esta razón, se generan gradientes longitudinales de temperatura dentro de la placa. El calor es conducido en la placa en un tiempo muy corto, del orden α^{-1} , alcanzando las condiciones para una evolución de las temperaturas de la placa más lenta, a partir de la cual la influencia temporal pertenece a la escala de tiempo lenta.

Por lo anterior, el problema de transferencia conjugada de calor para una placa térmicamente delgada, en el límite asintótico para $\alpha \rightarrow \infty$, se puede estudiar utilizando un análisis de escalas múltiples. Se define a las dos escalas de tiempo por

$$s = \tau \quad \text{y} \quad \sigma = \alpha\tau, \quad (4.27)$$

donde s es la escala de tiempo lenta y σ la rápida. La técnica de escalas múltiples redefine el efecto temporal sobre las variables dependientes del tiempo. Si una variable es función del tiempo, ahora lo será de dos variables temporales independientes que representan a la escala corta y a la larga, es decir, $\theta_\omega(\chi, \tau) \rightarrow \theta_\omega(\chi, s, \sigma)$.

Las expansiones para el análisis asintótico son del tipo:

$$\theta_\omega = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^j} \theta_{\omega j}(\chi, s, \sigma), \quad \Omega_i = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^j} \Omega_{ij}(\chi, \eta_i; s), \quad (4.28)$$

con Ω_i correspondiendo a cualquier variable que intervenga en el fluido i , como θ_i , f_i ó ϕ_i . La notación utilizada para las Ω_i significa que en las ecuaciones para los fluidos el tiempo sólo interviene implícitamente. Introduciendo las expansiones anteriores y la definición de escalas en el tiempo en la ecuación (4.26), se obtienen para términos de hasta orden α^{-2} las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial^2 \theta_{\omega 0}}{\partial \chi^2} - \frac{\partial \theta_{\omega 0}}{\partial \sigma} = 0, \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_{\omega 1}}{\partial \chi^2} - \frac{\partial \theta_{\omega 1}}{\partial \sigma} = \frac{1}{\chi^{2/5}} \left[\frac{\partial \theta_{10}}{\partial \eta_1} \Big|_{\eta_1=0} - \frac{1}{\beta} \frac{\partial \theta_{20}}{\partial \eta_2} \Big|_{\eta_2=0} \right] + \frac{\partial \theta_{\omega 0}}{\partial s}, \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_{\omega 2}}{\partial \chi^2} - \frac{\partial \theta_{\omega 2}}{\partial \sigma} = \frac{1}{\chi^{2/5}} \left[\frac{\partial \theta_{11}}{\partial \eta_1} \Big|_{\eta_1=0} - \frac{1}{\beta} \frac{\partial \theta_{21}}{\partial \eta_2} \Big|_{\eta_2=0} \right] + \frac{\partial \theta_{\omega 1}}{\partial s}, \quad (4.31)$$

etc., con las condiciones iniciales y de frontera

$$\theta_{\omega j}(\chi, 0, 0) \quad \text{en } \chi = 0, 1 \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots$$

$$\frac{\partial \theta_{\omega j}}{\partial \chi} = 0 \quad \text{en } \chi = 0, 1 \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots \quad (4.32)$$

Después de integrar la ecuación (4.29) de $\chi = 0$ a $\chi = 1$, se aplican las condiciones de frontera en las orillas adiabáticas, obteniendo finalmente

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \int_0^1 \theta_{\omega 0} d\chi = 0. \quad (4.33)$$

De esta ecuación se deduce que $\theta_{\omega 0}$ no es una función de la escala corta de tiempo σ ni de la coordenada longitudinal χ , sino, sólo función de la escala larga de tiempo, $\theta_{\omega 0} = \theta_{\omega 0}(s)$. Esta función se obtiene al analizar los órdenes superiores en la expansión.

Se toma ahora la ecuación (4.30) y se le aplica un tratamiento similar al anterior, pero con las condiciones de frontera correspondientes, para obtener la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \int_0^1 \theta_{\omega 1} d\chi = -\frac{5}{3} \left[\frac{\partial \theta_{10}}{\partial \eta_1} \Big|_{\eta_1=0} - \frac{1}{\beta} \frac{\partial \theta_{20}}{\partial \eta_2} \Big|_{\eta_2=0} \right] - \frac{d\theta_{\omega 0}}{ds}. \quad (4.34)$$

El lado derecho de la ecuación (4.34) tiene que ser cero para evitar tener términos seculares en $\theta_{\omega 1}$ (de otra forma $\theta_{\omega 1}$ crecería infinitamente con el tiempo), y es justamente de esta circunstancia que se obtiene la ecuación diferencial para $\theta_{\omega 0}$.

$$\frac{d\theta_{\omega 0}}{ds} = -\frac{5}{3} \left[\frac{\partial \theta_{10}}{\partial \eta_1} \Big|_{\eta_1=0} - \frac{1}{\beta} \frac{\partial \theta_{20}}{\partial \eta_2} \Big|_{\eta_2=0} \right]. \quad (4.35)$$

Las condiciones de frontera de la parte derecha de la ecuación anterior, se obtienen de las ecuaciones de capa límite de ambos fluidos.

Si se aplican las expansiones (4.28) en las ecuaciones de los fluidos (3.19-3.21) obtenemos, a orden cero en α

$$\frac{\partial^2 \theta_{i0}}{\partial \eta_i^2} + 3f_{i0} \frac{\partial \theta_{i0}}{\partial \eta_i} = 0, \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial \phi_{i0}}{\partial \eta_i} = \theta_{i0} \quad (4.37)$$

y

$$\frac{\partial^2 f_{i0}}{\partial \eta_i^2} + \frac{2}{5} \eta_i \frac{\partial \phi_{i0}}{\partial \eta_i} - \frac{2}{5} \phi_{i0} = \frac{1}{Pr_i} \left[\left(\frac{\partial f_{i0}}{\partial \eta_i} \right)^2 - 3 f_{i0} \frac{\partial^2 f_{i0}}{\partial \eta_i^2} \right]. \quad (4.38)$$

Con las condiciones de frontera

$$f_{i0} = \frac{\partial f_{i0}}{\partial \eta_i} = 0, \quad \theta_{10} = 1 - \theta_{\omega 0}, \quad \theta_{20} = \theta_{\omega 0} \quad \text{en } \eta_i = 0$$

y

$$\frac{\partial f_{i0}}{\partial \eta_i} = \theta_{i0} = \phi_{i0} = 0 \quad \text{para } \eta_i \rightarrow \infty, \quad (i = 1, 2). \quad (4.39)$$

Estas ecuaciones son invariantes ante el grupo de transformaciones

$$\theta_i \Rightarrow B_i \theta_i, \quad \eta_i \Rightarrow B_i^{-1/5} \eta_i, \quad \phi_i \Rightarrow B_i^{4/5} \phi_i, \quad f_i \Rightarrow B_i^{1/5} f_i. \quad (4.40)$$

Si B_i es tal que $B_1 = (1 - \theta_{\omega 0})$ y $B_2 = \theta_{\omega 0}$, el problema se reduce al problema clásico de transferencia de calor con una temperatura adimensional superficial uniforme de valor uno en ambos fluidos. En este caso, la solución de las ecuaciones (4.36-4.38), bajo las transformaciones (4.40), para el gradiente de temperatura es $G_{0i}(Pr_i) = 0.394 Pr_i^{1/20}$ ([19] y numéricamente) en la vecindad de números de Prandtl cercanos a la unidad. Por lo tanto los gradientes de temperatura para las variables originales tienen la forma:

$$\left. \frac{\partial \theta_{10}}{\partial \eta_1} \right|_{\eta_1=0} = -G_{01} (1 - \theta_{\omega 0})^{6/5} \quad \text{y} \quad \left. \frac{\partial \theta_{20}}{\partial \eta_2} \right|_{\eta_2=0} = -G_{02} \theta_{\omega 0}^{6/5}. \quad (4.41)$$

Si ahora se sustituyen estos gradientes en la ecuación (4.35) se obtiene la ecuación a resolver para $\theta_{\omega 0}$

$$\frac{d\theta_{\omega 0}}{ds} = \frac{5G_{01}}{3} \left[(1 - \theta_{\omega 0})^{6/5} - Z \theta_{\omega 0}^{6/5} \right], \quad (4.42)$$

con la condición inicial $\theta_{\omega 0}(0) = 0$. En esta ecuación $Z = G_{02}/(\beta G_{01})$, que es de orden uno para valores de $\beta \sim 1$. La solución estacionaria de la ecuación (4.42) (cuando $s \rightarrow \infty$) se obtiene fácilmente, pues su variación temporal debe ser cero, quedando $\theta_{\omega 0}(\infty) = 1/(1 + Z^{5/6})$.

Introduciendo los resultados para θ_{ω_0} en la ecuación (4.30) se obtiene la ecuación para θ_{ω_1}

$$\frac{\partial^2 \theta_{\omega_1}}{\partial \chi^2} - \frac{\partial \theta_{\omega_1}}{\partial \sigma} = \frac{d\theta_{\omega_0}}{ds} \left[1 - \frac{3}{5\chi^{2/5}} \right] \chi, \quad (4.43)$$

con las condiciones de frontera e iniciales dadas por (4.32). Esta ecuación puede ser simplificada introduciendo la función $g(\chi, s, \sigma)$ definida por

$$\theta_{\omega_1} = \frac{d\theta_{\omega_0}}{ds} \left[\frac{1}{2}\chi^2 - \frac{5}{8}\chi^{8/5} + g(\chi, s, \sigma) \right], \quad (4.44)$$

de tal manera que la ecuación (4.43) toma la forma

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \chi^2} - \frac{\partial g}{\partial \sigma} = 0 \quad (4.45)$$

Las condiciones iniciales y de frontera para esta ecuación

$$g(\chi, 0, 0) = F(\chi) \quad \text{y} \quad \frac{\partial g}{\partial \chi} = 0 \quad \text{en} \quad \chi = 0, 1, \quad (4.46)$$

donde $F(\chi)$ esta dado por

$$F(\chi) = -\frac{1}{2}\chi^2 + \frac{5}{8}\chi^{8/5}. \quad (4.47)$$

La ecuación (4.45) puede ser integrada utilizando la transformada de Fourier. La solución que se obtiene es

$$g(\chi, s, \sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n(s) \cos n\pi\chi] \exp[-n^2\pi^2\sigma], \quad (4.48)$$

donde los coeficientes A_0 y A_n están dados por

$$A_0(0) = \int_0^1 F(\chi) d\chi \quad \text{y} \quad A_n(0) = 2 \int_0^1 F(\chi) \cos n\pi\chi d\chi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.49)$$

Finalmente, haciendo la sustitución inversa, se obtiene la solución a la ecuación (4.43) dada por

$$\theta_{\omega_1} = \frac{d\theta_{\omega_0}}{ds} \left[\frac{1}{2}\chi^2 - \frac{5}{8}\chi^{8/5} + A_0(s) + \sum_{n=0}^{\infty} [A_n(s) \cos n\pi\chi] \exp[-n^2\pi^2\sigma] \right]. \quad (4.50)$$

Esta relación es la condición de frontera para las ecuaciones de capa límite en orden α^{-1} en los fluidos.

Las ecuaciones a orden α^{-1} en los fluidos son lineales, lo que permite estudiar por separado cada término de la condición de frontera dada por la ecuación (4.50). Los elementos de esta condición son del tipo χ^m por lo que se estudian las ecuaciones de capa límite con un perfil en la frontera justamente de este tipo, en donde $m = 0, 8/5$ y 2 . Después de cambios del tipo $\Omega_i \Rightarrow \chi^m \Omega_i$, donde Ω_i representa a cualquier variable en las ecuaciones de capa límite, las ecuaciones en los fluidos a orden α^{-1} son:

$$\frac{d^2 \theta_{i1}}{d\eta_i^2} + 3f_{i0} \frac{d\theta_{i1}}{d\eta_i} + 3f_{i1} \frac{d\theta_{i0}}{d\eta_i} = 5m \left[\theta_{i1} \frac{df_{i0}}{d\eta_i} - f_{i1} \frac{d\theta_{i0}}{d\eta_i} \right], \quad (4.51)$$

$$\frac{d\phi_{i1}}{d\eta_i} = \theta_{i1} \quad (4.52)$$

y

$$\begin{aligned} & \frac{d^3 f_{i1}}{d\eta_i^3} + \frac{2}{5} \eta_i \frac{d\phi_{i1}}{d\eta_i} - \left(\frac{2}{5} + m \right) \phi_{i1} \\ & = \frac{1}{Pr_i} \left[(2 + 5m) \frac{df_{i0}}{d\eta_i} \frac{df_{i1}}{d\eta_i} - 3f_{i0} \frac{d^2 f_{i1}}{d\eta_i^2} - (3 + 5m) f_{i1} \frac{d^2 f_{i0}}{d\eta_i^2} \right], \end{aligned} \quad (4.53)$$

con las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} f_{i1} &= \frac{df_{i1}}{d\eta_i} = 0, \quad \theta_{i1} = 1 \quad \text{en } \eta = 0 \\ \phi_{i1} &= \frac{d\phi_{i1}}{d\eta_i} = \theta_{i1} = 0 \quad \text{en } \eta \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.54)$$

La solución para el gradiente de temperatura es $G_1(Pr_i, m)$ o simplemente $G_{i1}(m)$. Sumando los flujos de calor que cada término en la condición de frontera general aporta y en términos de las antiguas variables se obtiene

$$\left. \frac{\partial \theta_{i1}}{\partial \eta_i} \right|_{\eta_i=0} = \frac{d\theta_{i0}}{ds} (1 - \theta_{i0})^{1/5} \left(\frac{1}{2} G_{11}(2) \chi^2 - \frac{5}{8} G_{11}(8/5) \chi^{8/5} + A_0(s) G_{11}(0) + D_1 \right) \quad (4.55)$$

y

$$\left. \frac{\partial \theta_{21}}{\partial \eta_2} \right|_{\eta_2=0} = \frac{d\theta_{\omega 0}}{ds} \theta_{\omega 0}^{1/5} \left(\frac{1}{2} G_{12}(2) \chi^2 - \frac{5}{8} G_{12}(8/5) \chi^{8/5} + A_0(s) G_{12}(0) + D_2 \right), \quad (4.56)$$

donde las D_i contienen los términos rápidamente decrecientes del tipo $\exp[-n^2 \pi^2 \sigma]$.

Repetiendo nuevamente el procedimiento en las ecuaciones de energía para los órdenes cero y uno en la ecuación para el segundo orden se obtiene

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial \sigma} \int_0^1 \theta_{\omega 2} d\chi - cdt = \frac{d\theta_{\omega 0}}{ds} \left[\left(\frac{5G_{11}(2)}{26} - \frac{25G_{11}(8/5)}{88} + \frac{5A_0(s)G_{11}(0)}{3} \right) (1 - \theta_{\omega 0})^{1/5} \right. \\ \left. + \left(\frac{5G_{12}(2)}{26} - \frac{25G_{12}(8/5)}{88} + \frac{5A_0(s)G_{12}(0)}{3} \right) \frac{\theta_{\omega 0}^{1/5}}{\beta} \right. \\ \left. - G_{01} \left((1 - \theta_{\omega 0})^{1/5} + Z\theta_{\omega 0}^{1/5} \right) \left(-\frac{13}{186} + 2A_0(s) \right) + \frac{dA_0}{ds} \right], \quad (4.57) \end{aligned}$$

en esta ecuación el término cdt contiene a las cantidades que decaen exponencialmente en el tiempo. Nuevamente el lado derecho de la ecuación (4.57) se debe anular para evitar tener términos seculares en la escala corta de tiempo σ . Este hecho permite encontrar la ecuación diferencial para $A_0(s)$, con la condición de frontera $A_0(0) = \int_0^1 F(\chi) d\chi$. En el caso particular $\beta = 1$, cuando ambos fluidos son idénticos, la solución es

$$A_0(s) = A_0(0) + K(\text{Pr}) \ln \left(\frac{3}{5G_0} \frac{d\theta_{\omega 0}}{ds} \right), \quad (4.58)$$

donde

$$K(\text{Pr}) = \frac{1}{2G_0} \left(\frac{13}{186} G_0 + \frac{5}{26} G_1(2) - \frac{25}{88} G_1(8/5) \right), \quad (4.59)$$

sustituyendo este valor en la ecuación (4.50), se obtiene el valor para $\theta_{\omega 1}$. Para el caso de número de Prandtl igual a la unidad, se obtuvo $K(1) \simeq -0.10844$.

Obtenidas las correcciones a la temperatura en la placa hasta orden α^{-1} , se puede escribir la temperatura adimensional como

$$\theta_{\omega}(\chi, s) = \theta_{\omega 0} + \frac{1}{\alpha} \frac{d\theta_{\omega 0}}{ds} \left[\frac{1}{2} \chi^2 - \frac{5}{8} \chi^{8/5} + \frac{23}{312} + K(\text{Pr}) \ln \left(\frac{3}{5G_0} \frac{d\theta_{\omega 0}}{ds} \right) \right] + O(\alpha^{-2}), \quad (4.60)$$

donde los términos decrecientes en el tiempo dentro de la escala corta de tiempo han sido despreciados, $\sigma \gg 1$. Por último, en la placa la energía térmica adimensional promedio definida por $\bar{\theta}_{\omega} = \int_0^1 \theta_{\omega} d\chi$, queda como

$$\bar{\theta}_\omega = \theta_{\omega 0} + \frac{K(\text{Pr})}{\alpha} \frac{d\theta_{\omega 0}}{ds} \ln \left(\frac{3}{5G_0} \frac{d\theta_{\omega 0}}{ds} \right) + O(\alpha^{-2}). \quad (4.61)$$

La evolución del tiempo adimensional transitorio necesaria para alcanzar el 90% de la energía térmica promedio, (s_{90}), puede ser aproximada utilizando un desarrollo en serie. El resultado que se obtiene es

$$s_{90} \simeq s_{90}^* - \frac{K(\text{Pr})}{\alpha} \ln \left(\frac{3}{5G_0} \frac{d\theta_{\omega 0}}{ds} \right), \quad (4.62)$$

donde s_{90}^* corresponde al valor para $\alpha \rightarrow \infty$. Para el caso particular $\beta = 1$ y $\text{Pr} = 1$, se obtiene

$$s_{90} \simeq 1.2359 - 0.0244983/\alpha. \quad (4.63)$$

Debido al hecho de que el argumento en el término logarítmico es siempre menor que la unidad y $K(\text{Pr})$ es siempre negativo, el proceso transitorio es más rápido para valores decrecientes de α .

4.2.2 Pared Térmicamente Gruesa

En este límite se tienen las mismas circunstancias que en el caso estacionario, es decir, las variaciones transversales de temperatura no pueden ser ignoradas. En este caso el tiempo característico en los fluidos es muy grande comparado con el de conducción en la placa, lo que uniformiza la temperatura en las superficies conductoras de la misma. Para valores de α/ε^2 de orden unidad y $\varepsilon \rightarrow 0$, la conducción longitudinal de calor es muy pequeña y puede ser despreciada excepto en regiones cercanas a las orillas de la placa. Únicamente la solución sin conducción de calor en la dirección longitudinal se analiza en este límite. Bajo estas circunstancias, la ecuación de balance de energía en la placa se reduce a

$$\frac{\partial^2 \theta_\omega}{\partial z^2} = \frac{\partial \theta_\omega}{\partial \xi}, \quad (4.64)$$

donde $\xi = \alpha\tau/\varepsilon^2$ es la variable adimensional temporal adecuada para el régimen de pared térmicamente gruesa. Las condiciones iniciales y de frontera para la ecuación (4.64) son

$$\theta_\omega(\chi, z, 0) = 0,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta_\omega}{\partial z} &= -\frac{\varepsilon^2}{\alpha \chi^{2/5}} \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta_1} \text{ en } \eta_1 = z - \frac{1}{2} = 0, \\ \frac{\partial \theta_\omega}{\partial z} &= -\frac{\varepsilon^2}{\alpha \beta \chi^{2/5}} \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta_2} \text{ en } \eta_2 = z + \frac{1}{2} = 0.\end{aligned}\quad (4.65)$$

Para estudiar el límite asintótico de $\alpha/\varepsilon^2 \rightarrow 0$, se introduce la siguiente expansión de perturbación regular para la temperatura adimensional de la placa, dada por:

$$\theta_\omega(\chi, z, \xi) = \theta_{\omega 0}(\chi, z, \xi) + \frac{\alpha}{\varepsilon^2} \theta_{\omega 1}(\chi, z, \xi) + O\left[\left(\frac{\alpha}{\varepsilon^2}\right)^2\right], \quad (4.66)$$

y para cualquier variable que intervenga en el fluido i como θ_i, f_i ó ϕ_i se tiene

$$\Omega_i(\chi, \eta_i : \xi) = \Omega_{i0}(\chi, \eta_i : \xi) + \frac{\alpha}{\varepsilon^2} \Omega_{i1}(\chi, \eta_i : \xi) + O\left[\left(\frac{\alpha}{\varepsilon^2}\right)^2\right]. \quad (4.67)$$

Con este tipo de expansiones se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones para la energía, correspondiente a cada orden en el parámetro α/ε^2 :

$$\frac{\partial^2 \theta_{\omega i}}{\partial z^2} = \frac{\partial \theta_{\omega i}}{\partial \xi}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (4.68)$$

y sus respectivas condiciones de frontera

$$\theta_{\omega i}(\chi, z, 0) = 0 \text{ para } i \geq 0, \quad \frac{\partial \theta_{\omega 0}}{\partial \eta_k} \Big|_{\eta_k=0} = 0, \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\chi^{2/5}} \frac{\partial \theta_{1j}}{\partial \eta_1} \Big|_{\eta_1=0} &= -\frac{\partial \theta_{\omega(j-1)}}{\partial z} \Big|_{z=1/2}, \\ \frac{1}{\chi^{2/5}} \frac{\partial \theta_{2j}}{\partial \eta_2} \Big|_{\eta_2=0} &= -\frac{\partial \theta_{\omega(j-1)}}{\partial z} \Big|_{z=-1/2}.\end{aligned}\quad (4.70)$$

Igualmente para las ecuaciones de los fluidos utilizando estas expansiones se obtienen ecuaciones similares a las relaciones (4.48) que con las condiciones de frontera (4.69) dan por resultado la solución trivial $\theta_{i0} = 0$. La solución de la ecuación (4.68) con $\theta_{\omega 0}$ se puede escribir como

$$\theta_{\omega 0}(\chi, z, \xi) = \frac{1}{2} + z + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \sin n\pi \left(\frac{1}{2} + z \right) \right] \exp(-n^2 \pi^2 \xi), \quad (4.71)$$

donde $c_n = 2(-1)^n / (n\pi)$.

Sustituyendo la solución para la ecuación (4.68) en las condiciones de frontera (4.70) las ecuaciones a primer orden tienen la forma

$$\frac{\partial^2 \theta_{\omega 1}}{\partial z^2} = \frac{\partial \theta_{\omega 1}}{\partial \xi}, \quad (4.72)$$

con las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \theta_{\omega 1}(\chi, z, 0) &= 0, \quad \frac{1}{\chi^{2/5}} \frac{\partial \theta_{i1}}{\partial \eta_i} \Big|_{\eta_i=0} = -H_i(\xi) \text{ con} \\ \theta_{\omega 1}(\chi, 1/2, \xi) &= \theta_{11}(\chi, 0) \text{ y } \theta_{\omega 1}(\chi, -1/2, \xi) = \theta_{21}(\chi, 0). \end{aligned} \quad (4.73)$$

Aquí las funciones $H_i(\xi)$ están dadas por

$$H_1(\xi) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2 \pi^2 \xi) \text{ y } H_2(\xi) = \beta \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp(-n^2 \pi^2 \xi) \right]. \quad (4.74)$$

A primer orden las ecuaciones de balance de los fluidos tienen que ser resueltas para las condiciones de frontera dadas por (3.23-3.26). Las ecuaciones resultantes se reducen al problema clásico con un flujo de calor dado. La solución puede ser obtenida mediante el uso de las transformaciones

$$\theta_{i1} = B_i \chi^{1/3} \varphi_i, \quad f_i = B_i^{1/5} \chi^{1/15} \bar{f}_i, \quad \phi_i = B_i^{4/5} \chi^{4/15} \bar{\phi}_i$$

y

$$\eta_i = B_i^{-1/5} \chi^{-1/15} \bar{\eta}_i, \quad (4.75)$$

con

$$B_i = \left(\frac{H_i(\xi)}{G_{1/3}(\text{Pr}_i)} \right)^{5/6}.$$

Aquí $G_{1/3}(\text{Pr}_i)$ es el gradiente de temperatura adimensional en $\eta_i = 0$, para el problema reducido normalizado con $\varphi_i(0) = 0$. Entonces tenemos $G_{1/3}(\text{Pr}_i) = -d\varphi_i/d\eta_i \simeq 0.69124 \text{Pr}_i^{1/20}$, para valores del número de Prandtl de orden unidad ([19] y numérico). Si ahora se define $\theta_{\omega 1}(\chi, z, \xi) = \chi^{1/3} \varphi_{\omega 1}(z, \xi)$, la corrección a primer orden para la temperatura adimensional en la pared es:

$$\varphi_{\omega 1}(1/2, \xi) = - \left(\frac{H_1(\xi)}{G_{1/3}(\text{Pr}_1)} \right)^{5/6}$$

y

$$\varphi_{\omega 1}(-1/2, \xi) = - \left(\frac{H_2(\xi)}{G_{1/3}(\text{Pr}_2)} \right)^{5/6} \quad (4.76)$$

Las ecuaciones (4.76) son necesarias para resolver la ecuación de primer orden (4.72). Obtenida esta solución, la energía térmica adimensional promedio definida por

$$\bar{\theta}_\omega = \int_0^1 \int_0^1 \theta_\omega dx dz,$$

para términos hasta de primer orden, toma la forma

$$\bar{\theta}_\omega \approx \frac{1}{2} - \sum \left(\frac{2}{n^2 \pi^2} \right) (1 - (-1)^n) \exp(-n^2 \pi^2 \xi) + \frac{3\alpha}{4\varepsilon^2} \int_0^1 \varphi_{\omega 1} dz. \quad (4.77)$$

El tiempo de evolución necesario para alcanzar el 90% de la energía térmica promedio es, utilizando expansión de Taylor alrededor de ξ_{90}^* ,

$$\xi_{90} \approx \xi_{90}^* - \frac{3\alpha \bar{\theta}_{\omega 1}(\xi_{90}^*)}{4\varepsilon^2 \left. \frac{d\bar{\theta}_{\omega 0}}{d\xi} \right|_{\xi_{90}^*}}, \quad (4.78)$$

Donde ξ_{90}^* corresponde al valor obtenido con el orden anterior ($\alpha = 0$), $\xi_{90}^* \doteq 0.21202\dots$ la derivada $\left. \frac{d\bar{\theta}_{\omega 0}}{d\xi} \right|_{\xi_{90}^*}$ es también evaluada en este punto, $\left. \frac{d\bar{\theta}_{\omega 0}}{d\xi} \right|_{\xi_{90}^*} \doteq .493487\dots$. Para números de Prandtl de orden unidad y $\beta = 1$, se obtuvo hasta primer orden

$$\xi_{90} \approx \xi_{90}^* + \frac{.877\alpha}{\varepsilon^2} + \dots$$

$$\text{que es } \tau_{90} \approx \frac{.21202\varepsilon^2}{\alpha} + 0.877. \quad (4.79)$$

Esta es una función que decrece conforme α aumenta, es decir, para la pared térmicamente gruesa conforme la placa se haga más conductora de calor, el tiempo para alcanzar el promedio de energía requerido disminuye.

Capítulo 5

Análisis Numérico

En este capítulo se utilizan el método de diferencias finitas centradas (o método de la caja) y el método iterativo de Newton para resolver el sistema de ecuaciones no lineales en ambos fluidos, así como la ecuación lineal para el sólido.

El programa principal, escrito en lenguaje FORTRAN, consta de dos subrutinas principales; una que resuelve las ecuaciones de energía y cantidad de movimiento para ambos fluidos y otra que resuelve la ecuación de la energía en la placa. La subrutina para los fluidos tiene iteración interna, producto de la no-linealidad del sistema. Esta subrutina utiliza como condición de frontera el perfil de temperaturas sobre la superficie de la placa y como salida entrega los perfiles de velocidades y del flujo de calor en la superficie en la placa. La subrutina para la placa no contiene ninguna iteración dada la linealidad de la ecuación de energía, y es en ella donde el tiempo se incrementa. Esta subrutina utiliza como condición de frontera el perfil del flujo de calor en la interfaz calculado por la subrutina de los fluidos y su salida consta de los perfiles de temperatura en la placa.

El modo de interaccionar de estas dos subrutinas, es como sigue:

- a) Dadas las condiciones de frontera, la subrutina para los fluidos calcula los perfiles para velocidades, presiones, temperaturas y flujos de calor.
- b) Después la subrutina para la placa incrementa el tiempo y utiliza los flujos de calor sobre las superficies, anteriormente calculados, para obtener las temperaturas en cualquier punto de la placa.
- c) Finalmente el perfil de temperaturas se utiliza nuevamente para resolver las ecuaciones en los fluidos, que a su vez proveen el nuevo flujo de calor para resolver la subrutina de la placa. De esta forma se avanza en el tiempo hasta que este llegue al valor

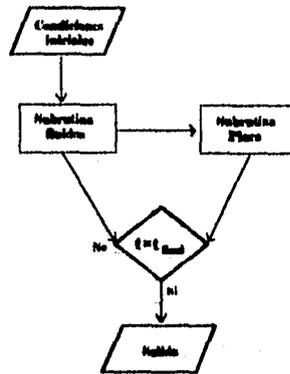


Figura 5.1: Diagrama de flujo del programa principal

que se requiera.

En las siguientes secciones se analizan más detenidamente cada una de estas subrutinas. Un diagrama de flujo con el proceso anterior se muestra en la figura 5.1.

5.1 Ecuación de Energía en la Placa

Como se dijo anteriormente, la ecuación de la energía es lineal y por ende es la más fácil de resolver. La ecuación tiene la forma

$$\alpha \frac{\partial^2 \theta_\omega}{\partial \chi^2} + \frac{\alpha}{\epsilon^2} \frac{\partial^2 \theta_\omega}{\partial z^2} = \frac{\partial \theta_\omega}{\partial \tau}, \quad (5.1)$$

con las condiciones de frontera, en sus caras hacia los fluidos,

$$\frac{\partial \theta_\omega}{\partial z} = -\frac{\epsilon^2}{\alpha \chi^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta_1}, \quad \text{en } z - \frac{1}{2} = 0, \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \theta_\omega}{\partial z} = -\frac{\epsilon^2}{\alpha \beta \chi^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta_2}, \quad \text{en } z + \frac{1}{2} = 0, \quad (5.3)$$

y por sus lados más angostos,

$$\frac{\partial \theta_\omega}{\partial \chi} = 0 \quad \text{para } \chi = 0 \quad \text{y} \quad \chi = 1, \quad (5.4)$$

así como la condición inicial

$$\theta_{\omega}(\tau = 0, \chi, z) = \theta_{inicial}(\chi, z). \quad (5.5)$$

El método numérico requiere primeramente que la placa se proyecte a un espacio discreto formado por una red que la cubre totalmente. El arreglo de la red es tal que su celda unitaria es un rectángulo de lados $\Delta\chi$ y Δz . El número de puntos en la dirección χ es n y en z es m . n y m son tales que $\Delta\chi = 1/(n-1)$ y $\Delta z = 1/(m-1)$. Para etiquetar a cada nodo en la red utilizamos a las variables discretas enteras i en dirección χ y j en dirección z . Los valores de estas variables son tales que $i \in [1, n]$ y $j \in [1, m]$. Debido a que la ecuación depende del tiempo, para definir completamente a la variable θ_{ω} es necesario un índice entero más, k . Se discretiza a la variable temporal en l intervalos distanciados por $\Delta\tau$. Estos intervalos son tales que $\Delta\tau = \tau_0/(l-1)$, en donde τ_0 es el tiempo al que se quiere llegar. Utilizando técnicas de diferencias finitas centradas o promediadas [23] para el caso del espacio y diferencias simples en el caso del tiempo, el mapeo desde el espacio y tiempo continuos de la ecuación de energía (5.1), a el espacio y tiempo discretos tiene la forma

$$\alpha \frac{\theta_{\omega i+1,j}^k - 2\theta_{\omega i,j}^k + \theta_{\omega i-1,j}^k}{\Delta\chi^2} + \frac{\alpha}{\varepsilon^2} \frac{\theta_{\omega i,j+1}^k - 2\theta_{\omega i,j}^k + \theta_{\omega i,j-1}^k}{\Delta z^2} = \frac{\theta_{\omega i,j}^k - \theta_{\omega i,j}^{k-1}}{\Delta\tau}, \quad (5.6)$$

y es válida en los rangos

$$i = 2 \rightarrow n-1 \quad \text{y} \quad j = 2 \rightarrow m-1.$$

El superíndice k en $\theta_{\omega i,j}^k$ por comodidad será obviado en lo que sigue.

En este nuevo espacio, las condiciones de frontera tienen respectivamente para (5.2) y (5.3) la forma

$$\frac{\theta_{\omega i,2} - \theta_{\omega i,1}}{\Delta z} = -\frac{\varepsilon^2}{\alpha\chi^2} \left(\frac{\partial\theta_1}{\partial\eta_1} \right)_i \quad \text{para } i = 2, n-1 \quad (5.7)$$

$$\frac{\theta_{\omega i,m} - \theta_{\omega i,m-1}}{\Delta z} = -\frac{\varepsilon^2}{\alpha\beta\chi^2} \left(\frac{\partial\theta_2}{\partial\eta_2} \right)_i \quad \text{para } i = 2, n-1 \quad (5.8)$$

y para la ecuación (5.4)

$$\theta_{\omega 1,j} = \theta_{\omega 2,j} \quad \text{y} \quad \theta_{\omega n-1,j} = \theta_{\omega n,j} \quad \text{para } j = 1, m. \quad (5.9)$$

Finalmente, la condición inicial se toma, en el caso en que la temperatura del fluido superior y la placa son iguales, (se puede cambiar sin problema esta condición a cualquier función del tipo $\theta_\omega(\chi, z, \tau = 0)$), como:

$$\theta_{\omega i, j}^1 = 0. \quad (5.10)$$

El conjunto anterior de ecuaciones forma un sistema lineal completo con $n \times m$ ecuaciones y $n \times m$ variables. Para resolverlo se define al vector

$$\vec{\theta}_{(i-1)m+j} \equiv \theta_{\omega i, j} \quad \text{para } i = 1, n \text{ y } j = 1, m. \quad (5.11)$$

De esta manera el sistema de ecuaciones para cada tiempo, queda del tipo

$$A \vec{\theta} = \vec{B} \quad (5.12)$$

en donde la matriz A , de dimensión $n \times m$ y el vector \vec{B} se forman de los coeficientes de las ecuaciones y sus condiciones de frontera. La matriz A resulta ser de banda, por lo que para resolver este sistema se utiliza una subrutina en FORTRAN del tipo descomposición $LU = A$ para matrices de banda (en donde L es una matriz diagonal superior y U es diagonal inferior).

Obviamente, la discretización del espacio provoca error. Estos errores para el caso de diferencias finitas centradas son del orden $O(\Delta\chi^2)$ en la dirección χ y $O(\Delta z^2)$ en la dirección z , mientras que para el caso de diferencias finitas simples, como es el caso para el tiempo, el error es del orden $O(\Delta\tau)$. En los cálculos numéricos realizados se toma $\Delta\chi^2 = \Delta z^2 = 0.0001$ y para el caso en el incremento en el tiempo $\Delta\tau \sim .001$, a .0001 dependiendo del valor de los parámetros.

5.2 Ecuaciones de Capa Límite

Para resolver numéricamente este problema se considera primeramente al sistema de ecuaciones para el fluido i - ésimo deducidas anteriormente. Las ecuaciones tienen la forma

$$\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial \eta_i^2} + 3f_i \frac{\partial \theta_i}{\partial \eta_i} = 5\chi \left(\frac{\partial f_i}{\partial \eta_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial \chi} - \frac{\partial f_i}{\partial \chi} \frac{\partial \theta_i}{\partial \eta_i} \right), \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_i} = \theta_i, \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial^3 f_i}{\partial \eta_i^3} + \frac{2}{5} \eta_i \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_i} - \frac{2}{5} \phi_i - \chi \frac{\partial \phi_i}{\partial \chi} =$$

$$\frac{1}{Pr_i} \left[\left(\frac{\partial f_i}{\partial \eta_i} \right)^2 - 3 f_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial \eta_i^2} + 5 \chi \left(\frac{\partial f_i}{\partial \eta_i} \frac{\partial^2 f_i}{\partial \chi \partial \eta_i} - \frac{\partial f_i}{\partial \chi} \frac{\partial^2 f_i}{\partial \eta_i^2} \right) \right] \quad (5.15)$$

con las condiciones de frontera

$$f_1 = \frac{\partial f_1}{\partial \eta_1} = 0, \quad \theta_1 = 1 - \theta_\omega \quad \text{en } \eta_1 = 0, \quad (5.16)$$

$$f_2 = \frac{\partial f_2}{\partial \eta_2} = 0, \quad \theta_2 = \theta_\omega, \quad \text{en } \eta_2 = 0, \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial \eta_i} = \theta_i = \phi_i = 0 \quad \text{para } \eta_i \rightarrow \infty. \quad (5.18)$$

Con el fin de poder aplicar el método de la caja o diferencias finitas centradas se convierte a éstas tres ecuaciones en seis ecuaciones no lineales de primer orden

$$u_i = \frac{\partial \theta_i}{\partial \eta_i}, \quad (5.19)$$

$$v_i = \frac{\partial f_i}{\partial \eta_i}, \quad (5.20)$$

$$w_i = \frac{\partial v_i}{\partial \eta_i}, \quad (5.21)$$

$$\theta_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_i}, \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial \eta_i} + 3 f_i u_i = 5 \chi \left[v_i \frac{\partial \theta_i}{\partial \chi} - u_i \frac{\partial f_i}{\partial \chi} \right] \quad (5.23)$$

y

$$\frac{\partial w_i}{\partial \eta_i} + \frac{2}{5} \eta_i \theta_i - \frac{2}{5} \phi_i - \chi \frac{\partial \phi_i}{\partial \chi}$$

$$= \frac{1}{Pr_i} \left[v_i^2 - 3f_i w_i + 5\chi \left(v_i \frac{\partial v_i}{\partial \chi} - w_i \frac{\partial f_i}{\partial \chi} \right) \right], \quad (5.24)$$

las condiciones de frontera

$$f_i = v_i = 0, \quad \theta_1 = 1 - \theta_\omega, \quad \theta_2 = \theta_\omega \quad \text{en } \eta_i = 0,$$

$$v_i = \theta_i = 0 \quad \text{para } \eta_i \rightarrow \infty, \quad (5.25)$$

con $i = 1, 2$ denotando al tipo de fluido.

5.2.1 Método de Diferencias Finitas

El sistema de ecuaciones anterior se lleva de un espacio continuo a uno discreto, utilizando para ello un arreglo en red. La red tiene dimensiones $n \times m$ y sus nodos forman por celda primaria un rectángulo de lados $\Delta\chi$ y $\Delta\eta$. n y m son tales que $\Delta\chi = 1/(n-1)$ y $\Delta\eta = \eta_0/(m-1)$. Para localizar a cada nodo en el espacio discreto se define a las variables enteras i y j las cuales son colocadas como subíndices y superíndices respectivamente sobre cualquier variable. La forma de aplicar el método de diferencias finitas centradas es como sigue: en la dirección χ se promedia la variable y se define su derivada en el punto $(\chi^{j+1} + \chi^j)/2$, esto es la variable a vale $(a^{j+1} + a^j)/2$ y su derivada $(a^{j+1} - a^j)/\Delta\chi$, mientras que en la dirección η se centra en el punto $(\eta_{i+1} + \eta_i)/2$. Esto es, la variable a vale $(a_{i+1} + a_i)/2$ y su derivada $(a_{i+1} - a_i)/\Delta\chi$. Debido a que el espacio real abarca desde $\eta = 0$ a ∞ , la red que se utilice para representarlo discretamente debe ser también infinita, es decir $\eta_0 \rightarrow \infty$ y $m \rightarrow \infty$. Sin embargo, si se toma en cuenta que los efectos de la capa límite sólo tienen influencia en lugares cercanos a la placa se puede aproximar η_0 a 10. Este valor se propuso después de analizar experimentos numéricos, específicamente el comportamiento de las variables y sus variaciones a lo largo de la coordenada transversal.

Aplicando este método a las seis ecuaciones en el espacio discreto, eliminando la etiqueta para el tipo de fluido y denotando con superíndice la posición longitudinal y subíndice la transversal, se obtiene

$$\phi_{i+1}^{j+1} - \phi_i^{j+1} = \Delta\eta \bar{\theta}_i^{j+1}, \quad (5.26)$$

$$\theta_{i+1}^{j+1} - \theta_i^{j+1} = \Delta\eta \bar{u}_i^{j+1}, \quad (5.27)$$

$$f_{i+1}^{j+1} - f_i^{j+1} = \Delta\eta \bar{v}_i^{j+1}, \quad (5.28)$$

$$v_{i+1}^{j+1} - v_i^{j+1} = \Delta\eta \bar{w}_i^{j+1}, \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{\Delta\eta} + \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1}}{\Delta\eta} + \frac{3}{2} (\bar{f}_i^{j+1} + \bar{f}_i^j) (\bar{v}_i^{j+1} + \bar{v}_i^j) = \\ & \frac{5\bar{\chi}^{j+1}}{\Delta\chi} \left[(\bar{v}_i^j + \bar{v}_i^{j+1}) (\bar{\theta}_i^{j+1} - \bar{\theta}_i^j) - (\bar{w}_i^j + \bar{w}_i^{j+1}) (\bar{f}_i^{j+1} - \bar{f}_i^j) \right] \end{aligned} \quad (5.30)$$

y

$$\begin{aligned} & \frac{w_{i+1}^{j+1} - w_i^{j+1}}{\Delta\eta} + \frac{w_{i+1}^j - w_i^j}{\Delta\eta} + \frac{2}{5} \bar{\eta}_i (\bar{\theta}_i^{j+1} + \bar{\theta}_i^j) \\ & - \frac{2}{5} (\bar{\phi}_i^{j+1} + \bar{\phi}_i^j) - \frac{2\bar{\chi}^j}{\Delta\chi} (\bar{\phi}_i^{j+1} - \bar{\phi}_i^j) = \\ & \frac{1}{\text{Pr}} \left[\frac{(\bar{v}_i^j + \bar{v}_i^{j+1})^2}{2} - \frac{3}{2} (\bar{f}_i^{j+1} + \bar{f}_i^j) (\bar{w}_i^{j+1} + \bar{w}_i^j) \right] + \\ & \frac{5\bar{\chi}^j}{\Delta\chi \text{Pr}} \left[(\bar{v}_i^j + \bar{v}_i^{j+1}) (\bar{v}_i^{j+1} - \bar{v}_i^j) - (\bar{w}_i^{j+1} + \bar{w}_i^j) (\bar{f}_i^{j+1} - \bar{f}_i^j) \right] \end{aligned} \quad (5.31)$$

Para $i \in [2, n-1]$ y $j \in [2, m]$. Aquí, $\bar{a}_i^j \equiv (a_{i+1}^j + a_i^j)/2$, $\bar{\chi}^j = (\chi^{j+1} + \chi^j)/2$ y $\bar{\eta}_i = (\eta_{i+1} + \eta_i)/2$.

Las condiciones de frontera en el espacio discreto

$$f_i^j = v_i^j = 0 \quad \text{para todo } j, \quad (5.32)$$

$$v_n^j = \theta_n^j = \phi_n^j = 0 \quad \text{para todo } j, \quad (5.33)$$

$$f_i^1 = v_i^1 = 0 \quad \text{para todo } i, \quad (5.34)$$

$$v_i^1 = \theta_i^1 = \phi_i^1 = 0 \quad \text{para todo } i, \quad (5.35)$$

en ambos fluidos, y

$$\begin{aligned}\theta_1^j &= (1 - \theta_\omega)^j_{\text{abajo}} \quad \text{para el fluido 1,} \\ \theta_1^j &= (\theta_\omega)^j_{\text{arriba}} \quad \text{para el fluido 2.}\end{aligned}\quad (5.36)$$

El conjunto de ecuaciones anterior es un sistema cerrado donde las variables a encontrar son las del tipo a^{j+1} , mientras que las a^j son conocidas. Sin embargo el sistema es no lineal por lo que no se puede resolver por técnicas convencionales como lo serían métodos matriciales no iterativos.

5.2.2 Método de Newton

Para atacar el problema de la no linealidad de las ecuaciones se propone el método de Newton. Este método es muy frecuentemente utilizado para este tipo de ecuaciones, más no por ello es fácil de aplicar. La principal dificultad que presenta es que su estabilidad no está asegurada, aunque una vez obtenida da muy buenos resultados en lo que a convergencia se refiere.

El método consiste en suponer que se conoce una solución aproximada S_0^{j+1} para los términos del tipo a^{j+1} . Después, en las ecuaciones de diferencias finitas se hace una sustitución del tipo $S^{j+1} \rightarrow S_0^{j+1} + \delta S$. Se linealiza el sistema en las δS , es decir, los términos de orden δS^2 o mayores se consideran muy pequeños y se eliminan. Como resultado se obtiene un sistema lineal de ecuaciones a resolver para los δS . Finalmente la solución de este sistema de ecuaciones es utilizada para ser sumada como factor de corrección a la solución propuesta aproximada S_0^{j+1} , obteniéndose nuevamente un sistema de ecuaciones a resolver para los δS . El procedimiento se repite hasta que se cumple que los $\delta S < \epsilon$, donde ϵ representa el grado de convergencia a que se quiere llegar. En el programa se pidió una convergencia de $\epsilon = 1 \times 10^{-12}$.

Con la finalidad de utilizar el método de Newton, dentro de las ecuaciones en el espacio discreto (5.26-5.36) se sustituyen las relaciones

$$\begin{aligned}f_i^{j+1} &\rightarrow f_i^{j+1} + \delta f_i, & \theta_i^{j+1} &\rightarrow \theta_i^{j+1} + \delta \theta_i, & v_i^{j+1} &\rightarrow v_i^{j+1} + \delta v_i, \\ \phi_i^{j+1} &\rightarrow \phi_i^{j+1} + \delta \phi_i, & w_i^{j+1} &\rightarrow w_i^{j+1} + \delta w_i, & u_i^{j+1} &\rightarrow u_i^{j+1} + \delta u_i.\end{aligned}\quad (5.37)$$

El conjunto de ecuaciones para las variables tipo δS que resulta, queda como

$$\delta\phi_{i+1} - \delta\phi_i - \frac{\Delta\eta}{2} (\delta\theta_{i+1} - \delta\theta_i) = \phi_i^{j+1} - \phi_{i+1}^{j+1} + \Delta\eta\bar{\theta}_i^{j+1}, \quad (5.38)$$

$$\delta\theta_{i+1} - \delta\theta_i - \frac{\Delta\eta}{2} (\delta u_{i+1} - \delta u_i) = \theta_i^{j+1} - \theta_{i+1}^{j+1} + \Delta\eta\bar{u}_i^{j+1}, \quad (5.39)$$

$$\delta f_{i+1} - \delta f_i - \frac{\Delta\eta}{2} (\delta v_{i+1} - \delta v_i) = f_i^{j+1} - f_{i+1}^{j+1} + \Delta\eta\bar{v}_i^{j+1}, \quad (5.40)$$

$$\delta v_{i+1} - \delta v_i - \frac{\Delta\eta}{2} (\delta w_{i+1} - \delta w_i) = v_i^{j+1} - v_{i+1}^{j+1} + \Delta\eta\bar{w}_i^{j+1}, \quad (5.41)$$

$$\{\delta u_{i+1} + \delta u_i\} \left[\frac{1}{\Delta\eta} + \frac{3}{4} (\mathcal{J}_i^{j+1} + \bar{\mathcal{J}}_i^j) + \frac{5\bar{\chi}^j}{2\Delta\chi} (\mathcal{J}_i^{j+1} - \bar{\mathcal{J}}_i^j) \right] - \frac{2\delta u_i}{\Delta\eta} +$$

$$\{\delta\theta_{i+1} - \delta\theta_i\} \frac{5\bar{\chi}^j}{2\Delta\chi} (\bar{v}_i^{j+1} + \bar{v}_i^j) + \{\delta v_{i+1} + \delta v_i\} \frac{5\bar{\chi}^j}{2\Delta\chi} (\bar{\theta}_i^{j+1} + \bar{\theta}_i^j) +$$

$$\{\delta f_{i+1} + \delta f_i\} \left(\frac{3}{4} + \frac{5\bar{\chi}^j}{2\Delta\chi} \right) (\bar{w}_i^{j+1} + \bar{w}_i^j) =$$

$$\frac{5\bar{\chi}^j}{\Delta\chi} [(\bar{v}_i^{j+1} + \bar{v}_i^j) (\bar{\theta}_i^{j+1} - \bar{\theta}_i^j) - (\bar{w}_i^{j+1} + \bar{w}_i^j) (\mathcal{J}_i^{j+1} - \bar{\mathcal{J}}_i^j)] -$$

$$\frac{3}{2} (\mathcal{J}_i^{j+1} + \bar{\mathcal{J}}_i^j) (\bar{w}_i^{j+1} + \bar{w}_i^j) - \frac{1}{\Delta\eta} (u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1} + u_{i+1}^j - u_i^j) \quad (5.42)$$

y

$$\{\delta w_{i+1} + \delta w_i\} \left(\frac{\text{Pr}}{\Delta\eta} + \left[\frac{3}{4} (\mathcal{J}_i^{j+1} + \bar{\mathcal{J}}_i^j) + \frac{5\bar{\chi}^j}{2\Delta\chi} (\mathcal{J}_i^{j+1} - \bar{\mathcal{J}}_i^j) \right] \right) -$$

$$\{\delta v_{i+1} + \delta v_i\} \left[\frac{\bar{v}_i^{j+1} + \bar{v}_i^j}{2} + \frac{5\bar{\chi}^j \bar{v}_i^{j+1}}{\Delta\chi} \right] - \frac{2\text{Pr} \delta w_i}{\Delta\eta} -$$

$$\{\delta\phi_{i+1} + \delta\phi_i\} \text{Pr} \left(\frac{1}{5} + \frac{\bar{\chi}^j}{\Delta\chi} \right) + \{\delta\theta_{i+1} + \delta\theta_i\} \frac{\text{Pr}}{5} \bar{\eta}_i +$$

$$\begin{aligned}
& (\delta f_{i+1} + \delta f_i) \left(\frac{3}{4} + \frac{5\bar{X}^j}{2\Delta X} \right) (\bar{v}_i^{j+1} + \bar{v}_i^j) \\
&= -\text{Pr} \left[\frac{w_{i+1}^{j+1} - w_i^{j+1} + w_{i+1}^j - w_i^j}{\Delta \eta} \right] + \frac{1}{2} (\bar{v}_i^{j+1} + \bar{v}_i^j)^2 - \\
& \frac{3}{2} (\bar{J}_i^{j+1} + \bar{J}_i^j) (\bar{w}_i^{j+1} + \bar{w}_i^j) - \frac{2\text{Pr}}{5} [\bar{\eta}_i (\bar{\theta}_i^{j+1} + \bar{\theta}_i^j) - (\bar{\phi}_i^{j+1} + \bar{\phi}_i^j)] \\
& + \frac{5\bar{X}^j}{\Delta X} \left[(\bar{v}_i^{j+1})^2 - (\bar{v}_i^j)^2 - (\bar{J}_i^{j+1} - \bar{J}_i^j) (\bar{w}_i^{j+1} + \bar{w}_i^j) \right. \\
& \left. - \frac{2\text{Pr}}{5} (\bar{\phi}_i^{j+1} + \bar{\phi}_i^j) \right]. \tag{5.43}
\end{aligned}$$

Las condiciones de frontera son

$$\delta \theta_n = 0, \quad \delta \phi_n = 0, \quad \delta v_n = 0,$$

$$\delta \theta_1 = 0, \quad \delta f_1 = 0, \quad \delta v_1 = 0. \tag{5.44}$$

El sistema de ecuaciones lineales anterior es del tipo

$$\mathbf{A} \delta \bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{b}}. \tag{5.45}$$

En donde el vector $\delta \bar{\mathbf{S}}$ está definido por $(\delta f_1, \delta \theta_1, \delta v_1, \delta \phi_1, \delta w_1, \delta u_1, \dots, \delta f_n, \delta \theta_n, \delta v_n, \delta \phi_n, \delta w_n, \delta u_n)$. La matriz \mathbf{A} resulta ser del tipo bandeda y por lo tanto se utiliza una subrutina del tipo LU . Una vez obtenido el vector $\delta \bar{\mathbf{S}}$ se procede a corregir la solución propuesta originalmente sumando estos factores de corrección para definir una nueva solución $\mathbf{S}_0^{j+1} = \mathbf{S}_0^j + \delta \mathbf{S}$. Este procedimiento se repite hasta que cada uno de los elementos del vector $\delta \bar{\mathbf{S}}$ satisfaga las condición de convergencia, esto es $\delta S_i < \epsilon$.

El diagrama de flujo de la figura 5.2 muestra un esquema representativo de la subrutina de los fluidos.

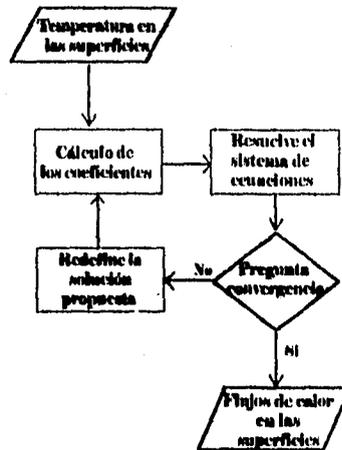


Figura 5.2: Diagrama de flujo de la subrutina para los fluidos

Cálculo de la Solución Aproximada

Como requisito para emplear el método de Newton se debe calcular una solución aproximada, misma que es utilizada al inicio de la iteración. La importancia de esta solución es crucial para la convergencia de método. Si la solución real es muy diferente a la propuesta, el método empieza a oscilar o definitivamente a diverger. Para calcular la solución aproximada, primero se toma el límite para $Pr \rightarrow \infty$ en las ecuaciones (5.19-5.24), con $\chi = 0$, luego se propone un perfil de temperaturas de tipo lineal. Utilizando este perfil y las condiciones de frontera (5.25), después de integrar, se encuentran las ecuaciones para las funciones aproximadas:

$$\theta = 1 - \frac{1}{\eta_0} \eta, \quad (5.46)$$

$$u = -\frac{1}{\eta_0}, \quad (5.47)$$

$$\phi = \eta - \frac{1}{2\eta_0} \eta^2 - \frac{\eta_0}{2}, \quad (5.48)$$

$$w = \frac{1}{15\eta_0} \eta^3 - \frac{\eta_0}{5} \eta + \frac{5\eta_0^2}{60}, \quad (5.49)$$

$$v = \frac{1}{60\eta_0} \eta^4 - \frac{1}{10} \eta_m \eta^2 + \frac{5\eta_0^2}{60} \eta \quad (5.50)$$

y

$$f = \frac{1}{300\eta_0} \eta^5 - \frac{\eta_0}{30} \eta^3 + \frac{5\eta_0^2}{120} \eta^2. \quad (5.51)$$

5.2.3 Estimación del Error

La medida del error producido por discretizar el espacio es nuevamente del orden, $(\Delta\eta)^2$ en dirección transversal y $(\Delta\chi)^2$ en dirección longitudinal. Sin embargo, en este caso esto no tiene relevancia dada la no linealidad de las ecuaciones. Aquí la convergencia de la solución discreta a la solución continua dependerá en gran medida del método utilizado y dependerá del grado de convergencia que se exija en las iteraciones. Sin embargo, la convergencia estará siempre acotada inferiormente por los valores $(\Delta\chi)^2$ y $(\Delta\eta)^2$. Para este problema $(\Delta\chi)^2 \sim (\Delta\eta)^2 \sim .0001$.

Capítulo 6

Resultados y Conclusiones

En este Capítulo se presentan los resultados y las conclusiones en los casos estacionario y transitorio. Debido a que en la aproximación $\delta/L \sim Ra^{-1/5} \ll 1$ se supuso que el efecto de las plumas sería despreciable, los resultados en las vecindades de estas columnas de flotación ($\chi = 1$) tendrán cierto grado de error. Sin embargo, comparaciones entre experimentos y este tipo de aproximaciones, pero en el caso de perfiles de temperatura conocido, muestran discrepancias tan solo del 4% sobre el flujo total de calor [19] y [11]. También se ha estudiado el efecto de las plumas y se encontró que juegan una papel importante sólo en órdenes superiores en teoría de capa límite [26].

6.1 Caso Estacionario

En esta sección se analizan los resultados más importantes para el caso estacionario, ello partiendo del estudio de las gráficas obtenidas tanto por el método numérico como por el asintótico.

En la figura 6.1 se muestra la distribución de la temperatura en ambas interfaces como función de χ para valores de $\beta = 0.5$, y $Pr_1 = Pr_2 = 1$, y para diferentes valores de α/ε^2 . Las curvas de igual tipo de línea corresponden a un mismo valor de α/ε^2 siendo las de arriba pertenecientes a la interfaz de cara al fluido con mayor temperatura y las de abajo a la interfaz más fría. Para valores grandes de α/ε^2 , la temperatura adimensional de la placa tiende a una temperatura uniforme en toda la placa. Por otro lado, cuando α/ε^2 decrece, las temperaturas en ambas superficies divergen entre sí, tendiendo cada una a la temperatura del fluido vecino. De aquí se concluye que en general para el caso estacionario

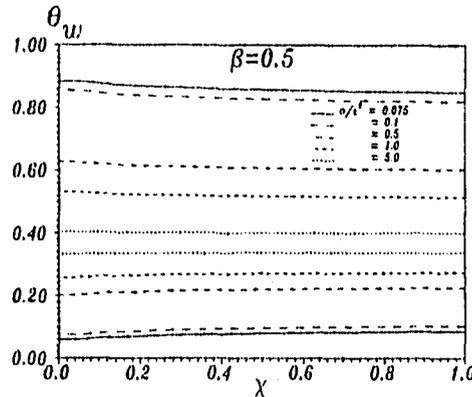


Figura 6.1: Temperatura adimensional en las superficies conductoras de la placa, para diferentes valores de α/ϵ^2 y con $\beta = 0.5$, como función de χ . Las líneas de igual tipo corresponden a un valor de α/ϵ^2 , siendo la de arriba correspondiente a la superficie inferior.

y en el régimen de pared térmicamente delgada la conducción de calor longitudinal no es importante. Sin embargo para el régimen de pared térmicamente gruesa, la conducción de calor longitudinal es necesaria solo cerca de las orillas de la placa en función de satisfacer las condiciones adiabáticas de la frontera.

El comportamiento en los fluidos para el caso estacionario se muestra en la figura 6.2, en esta figura se grafican para el fluido I: la velocidad en la dirección χ , la temperatura adimensional θ_1 y los flujos de calor $\partial\theta_1/\partial\eta_1$ como función de η_1 . Los parámetros toman los valores: $Pr_1 = 1.0$, $\beta = 1$, $\alpha = 0.1$ y $\epsilon = 0.1$. Las líneas sin símbolos indican que los perfiles están en $\chi = 0.2$, mientras que las que tienen símbolos corresponden a un valor de $\chi = 0.8$. Se observa en la figura que las capas límite viscosa y térmica son del mismo orden si $Pr \sim 1$. Las variaciones en los perfiles de las variables graficadas para ambas posiciones en χ son mínimas, esto debido a que en el caso estacionario no se tienen gradientes longitudinales importantes en la temperatura y el problema se reduce una placa de temperatura uniforme, cuya solución es de semejanza.

La figura 6.3 muestra el promedio del número de Nusselt reducido, \overline{Nu}^* , como una función del parámetro adimensional α/ϵ^2 . Para ello se tomaron dos valores de β , 1.0

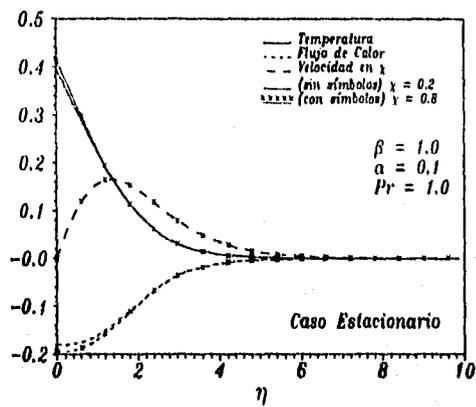


Figura 6.2: Perfiles de temperatura, (θ_1) , velocidad en χ , $(\theta f_1 / \partial \chi)$ y flujo de calor, $(\partial \theta_1 / \partial \eta_1)$ adimensionales como función de η_1 para el fluido I, en el caso estacionario y para dos posiciones en χ . Las líneas sin símbolo corresponden a $\chi = 0.2$, las que tienen, a $\chi = 0.8$.

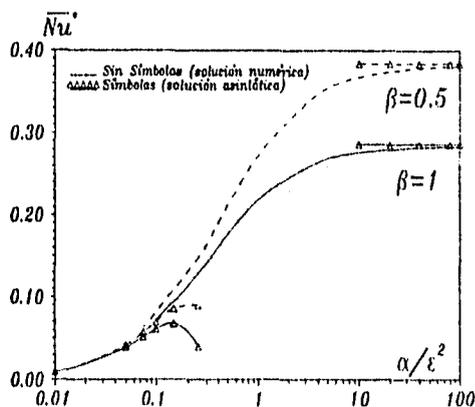


Figura 6.3: Promedio del número de Nusselt (estacionario) reducido como una función de α/ϵ^2 , para diferentes valores de β . Las líneas con símbolos son los resultados asintóticos, las que no tienen, los numéricos.

y 0.5. Se grafican tanto la solución numérica como la analítica. De esta gráfica se observa que para valores pequeños del parámetro α/ϵ^2 , \overline{Nu}^* se incrementa monótonicamente con el valor de α/ϵ^2 , además de que la dependencia en β puede ser despreciada en este rango. Por otro lado cuando el parámetro es grande, $\alpha/\epsilon^2 \rightarrow \infty$, \overline{Nu}^* alcanza asintóticamente el máximo dado por:

$$\overline{Nu}^* = \frac{5G(Pr_1)(1-\theta_w)^{6/5}}{3}. \quad (6.1)$$

En particular para $\beta = 1.0$ y 0.5 se obtuvo $\overline{Nu}^* = 0.286$ y 0.384 , respectivamente. Para el caso estacionario la dependencia del \overline{Nu}^* pasa de ser relevantemente en el parámetro α/ϵ^2 , para pequeños valores de este, a una dependencia principal en β , en el límite $\alpha/\epsilon^2 \rightarrow \infty$.

6.2 Caso Transitorio

En seguida se presentan los resultados y las conclusiones para el caso transitorio. La mayoría de los cálculos, tanto en el caso numérico como en el asintótico, fueron realizados para $\beta = 1$, $Pr_1 = Pr_2 = 1$. La condición inicial para la placa temperatura adimensional

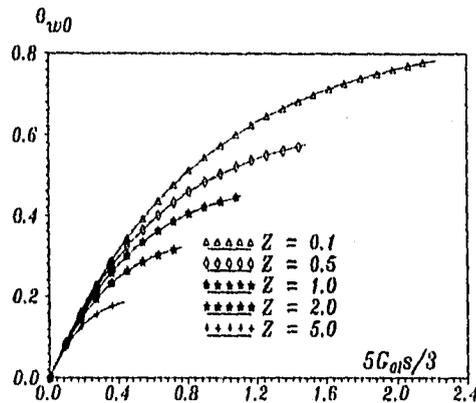


Figura 6.4: Temperatura $\theta_{\omega 0}$ como una función del tiempo adimensional, $5/3G_{01}(\text{Pr}) s$, para diferentes valores del parámetro Z definido en el capítulo 4.

uniforme se tomó cero, $\theta_{\omega} = 0$.

En la figura 6.4 se tiene la gráfica de la primera aproximación de la temperatura $\theta_{\omega 0}$ como una función del tiempo adimensional, $5G_{01}s/3$, para diferentes valores del parámetro $Z = G_{02}/(\beta G_{01})$. Aquí Z representa la relación entre los gradientes en ambas caras de la placa. Cuando este cociente es grande, significa que se extrae calor de la placa con más facilidad de lo que se le pueda agregar, teniendo como consecuencia un incremento lento en la temperatura y una temperatura final baja. En el otro caso, cuando Z es pequeño ocurre lo contrario, la placa eleva más fácilmente su temperatura en el tiempo hasta llegar a una temperatura estacionaria alta. Si bien en este resultado falta tener en cuenta los términos asintóticos del desarrollo para la temperatura a otros órdenes, el comportamiento antes descrito es válido, ya que para tiempos largos, el término que domina es $\theta_{\omega 0}$.

En el cálculo de la energía térmica adimensional promedio, la corrección a primer orden queda en función del promedio de la temperatura $\varphi_{\omega 1}$. La figura 6.5 muestra los resultados de una integración numérica para obtener $\varphi_{\omega 1}$ con para valores de β en un rango de .1 a 10. Ésta se realiza numéricamente dada la dificultad de hacerlo analíticamente. Cuando β es pequeño el promedio de la energía es pequeño y conforme β aumenta el valor promedio de la energía aumenta.

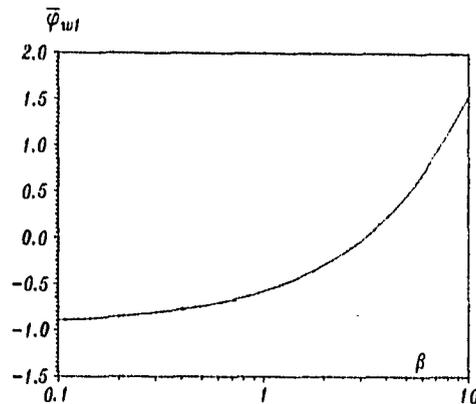


Figura 6.5: Corrección a primer orden de la temperatura adimensional $\bar{\varphi}_{w1}$, definida en el capítulo 4, como función de β para $Pr_1 = 1$.

El comportamiento en los fluidos para el caso transitorio se muestra en la figura 6.6, se grafican para el fluido I al tiempo $\tau = 0.1$: la velocidad en la dirección χ , la temperatura adimensional θ_1 y los flujos de calor $\partial\theta_1/\partial\eta_1$. Los parámetros toman los valores: $Pr_1 = 1.0$, $\beta = 1$, $\alpha = 0.1$ y $\varepsilon = 0.1$. Las líneas sin símbolo indican que estos perfiles están en $\chi = 0.2$, mientras que las que tienen símbolos corresponden a un valor de $\chi = 0.8$. Se observa en la figura que las capas límite viscosa y térmica son del mismo orden si $Pr \sim 1$. Los perfiles de cada variable son diferentes entre sí para las dos posiciones en χ , ello debe a que existen considerables gradientes longitudinales de temperatura en la placa.

En las siguientes figuras se muestran las comparaciones más importantes entre el cálculo numérico y el asintótico. En la figura 6.7 y 6.8 se muestra la distribución de la temperatura como una función de la variable adimensional χ , para diferentes valores del tiempo adimensional. En la figura 6.7 se obtiene una gran concordancia entre los resultados numéricos y los asintóticos, esto habla del intervalo de validez de nuestro análisis teórico para pared térmicamente delgada, obteniéndose excelentes resultados aún para $\alpha = 5$. En la gráfica 6.8 el valor de α es de orden unidad, lo que provoca que la aproximación se salga fuera de la vecindad de validez, sin embargo para tiempos grandes la aproximación sigue aún siendo válida.

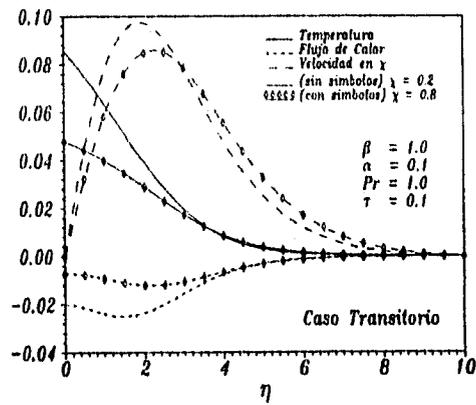


Figura 6.6: Perfis de temperatura, (θ_1) , velocidade em x , $(\partial f_1/\partial \chi)$ y flujo de calor, $(\partial \theta_1/\partial \eta_1)$ adimensionales como función de η_1 para el fluido I, en el tiempo $\tau = 0.1$ y para dos posiciones en χ . Las líneas sin símbolo corresponden a $\chi = 0.2$, las que tienen, a $\chi = 0.8$.

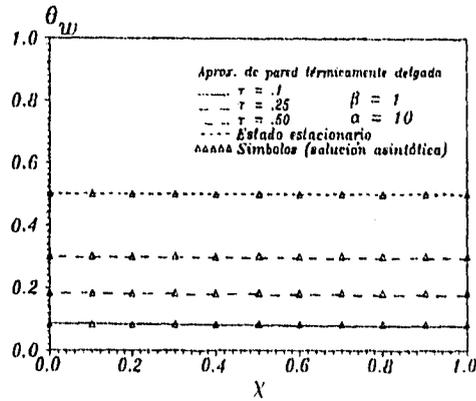


Figura 6.7: Perfiles de temperatura adimensional en la placa como una función de χ , a diferentes tiempos, con $\alpha = 10$ (pared térmicamente delgada) y $\beta = 1$. Los símbolos son la aproximación asintótica, las líneas el resultado numérico.

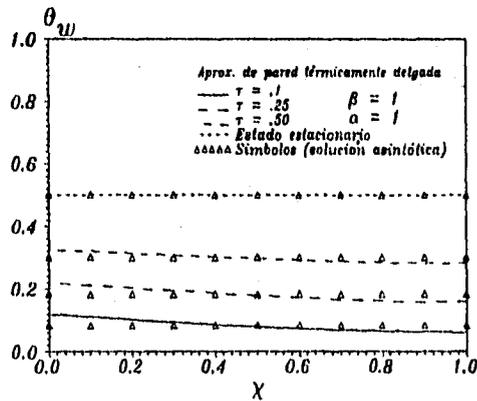


Figura 6.8: Perfiles de temperatura adimensional en la placa como una función de χ , a diferentes tiempos, con $\alpha = 1$ (pared térmicamente delgada) y $\beta = 1$. Los símbolos son la aproximación asintótica, las líneas el resultado numérico.

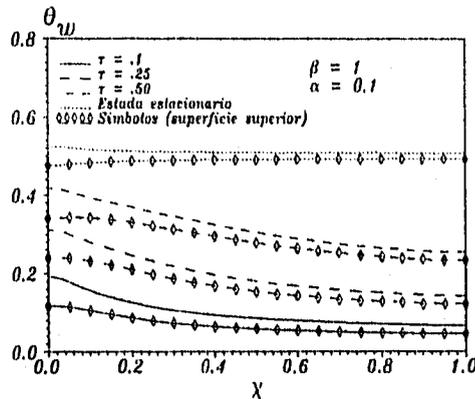


Figura 6.9: Perfiles de temperatura adimensional en las superficies conductoras de la placa como función de χ ; a diferentes tiempos, con $\alpha = 0.1$ y $\beta = 1$. Las líneas con símbolos representan a las superficies superiores.

Cuando se trata de pared térmicamente gruesa los gradientes de temperatura en la dirección longitudinal ya no pueden ser despreciados, así lo muestra la figura 6.9. En ella se graficó la solución numérica de la temperatura adimensional de la placa como función de χ para diferentes tiempos. Los parámetros en esta ocasión tienen el valor $\beta = 1.0$, $\alpha = 0.1$ y $\varepsilon = 0.1$.

La figura 6.10 muestra el tiempo transitorio adimensional (τ_{90}) necesario para alcanzar el valor de la energía térmica global, $\bar{\theta} = 0.9\bar{\theta}_s$, donde $\bar{\theta}_s$ corresponde a la solución final estacionaria (en nuestro caso 0.5), como una función de α para diferentes valores de ε . El tiempo es normalizado con $\tau_{\alpha\infty}$, que es el tiempo adimensional requerido para alcanzar la misma energía térmica global para el caso $\alpha \rightarrow \infty$, $\tau_{\alpha\infty} \simeq 1.2340\dots$. La solución para el caso térmicamente delgado también es graficada, mostrando que el tiempo de evolución se reduce cada vez que α disminuye. Sin embargo, alcanza un mínimo para valores finitos de α , tal mínimo siempre es alcanzado para α 's tales que $\varepsilon^2 \ll \alpha \ll 1$.

Nuevamente se grafica la evolución del tiempo transitorio adimensional τ_{90} pero ahora en función de α/ε^2 (figura 6.11). La solución para el límite térmicamente grueso muestra un decremento en el tiempo adimensional transitorio cuando se incrementa α/ε^2 .

ESTA TESIS NO DEBE
VALER DE LA BIBLIOTECA

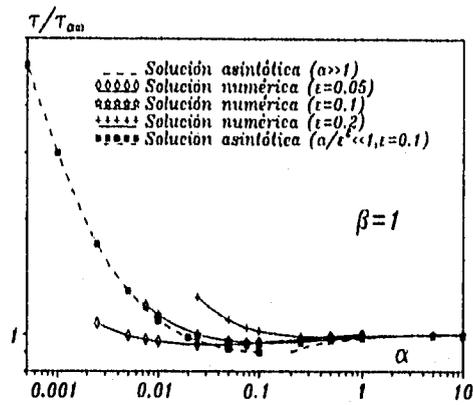


Figura 6.10: Tiempo adimensional normalizado necesario para alcanzar el 90% de la energía promedio del caso estacionario, como una función de α , para tres diferentes valores de ϵ y $\beta = 1$. Los resultados asintóticos para $\alpha \rightarrow \infty$ y $\alpha/\epsilon^2 \ll 1$, así como los numéricos, son graficados.

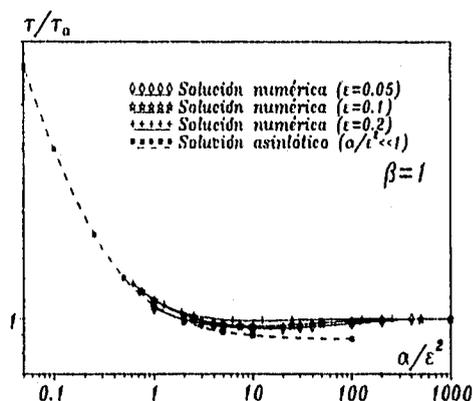


Figura 6.11: Tiempo adimensional normalizado necesario para alcanzar el 90% de la energía promedio del caso estacionario, como una función de α/ϵ^2 , para tres diferentes valores de ϵ y con $\beta = 1$. Los resultados asintóticos para $\alpha/\epsilon^2 \rightarrow \infty$ y $\alpha/\epsilon^2 \ll 1$, así como los numéricos, son graficados.

También se dibuja la transición al límite térmicamente delgado. Se puede observar que el parámetro α/ϵ^2 resulta ser universal. Si $\alpha/\epsilon^2 \rightarrow 0$, el mecanismo relevante es la conducción transversal de calor a través de la pared, mientras que para $\alpha/\epsilon^2 \rightarrow \infty$, la conducción de calor longitudinal en el sólido es extremadamente importante.

En resumen, es importante la influencia de la conducción de calor longitudinal en el sólido sobre el proceso transitorio, contrariamente a lo obtenido para el estacionario. La evolución en el tiempo adimensional muestra un mínimo para valores finitos del parámetro α . Este mínimo aparece en el régimen de pared térmicamente delgada, y decrece su valor cuando lo hace ϵ . El proceso transitorio es entonces más rápido para el régimen de pared térmicamente delgada sin el efecto de la conducción de calor longitudinal.

Referencias

- [1] M. Kelleher and K-T. Yang, *A steady conjugate heat transfer problem with conduction and free convection*, Al. Sci. Res. 17, pp. 249-269 (1967).
- [2] G.S.H. Lock and J.C. Gunn, *Laminar free convection from a downward-projecting fin*, J. Heat Transfer 90 No. 1, pp. 63-70 (1968).
- [3] G.S.H. Lock and R.S. Ko, *Coupling through a wall between two free convection systems*, Int. J. Heat Mass transfer 16, pp. 2087-2096, (1973).
- [4] R. Anderson and A. Bejan, *Natural convection on both sides of a vertical wall separating fluids at different temperatures*, J. Heat Transfer 102, pp. 630-635, (1980).
- [5] R. Anderson and A. Bejan, *Heat transfer through single and double vertical walls in natural convection: theory and experiment*, Int. J. Heat Mass Transfer 24, pp.1611-1620, (1981).
- [6] R. Viskanta and D.W. Lankford, *Coupling of heat transfer between two natural convection systems separated by a vertical wall*, Int. J. Heat Mass Transfer 24, pp. 1171-1177, (1981).
- [7] S.W. Churchill and H. Ozoe, *A correlation for laminar free convection from a vertical plate*, J. Heat Transfer 95, pp. 540-541 (1973).
- [8] M. Sakakibara, H. Amaya, S. Mori and A. Tanimoto, *Conjugate heat transfer between two natural convections separated by a vertical plate*, Int. J. Heat Mass Transfer 35, pp. 2289-2297 (1992).
- [9] C. Treviño, F. Méndez and F.J. Higuera, *Heat transfer across a vertical wall separating two fluids at different temperatures*, Int. J. Heat Mass Transfer, in press, (1995).

- [10] J. Cordova and C. Treviño, *Effects of longitudinal heat conduction of a vertical thin plate in a natural convective cooling process*, *Wärme-und-Stoffübertragung* **29**, pp. 195-204 (1994).
- [11] K. Stewartson, *On the free convection from a horizontal plate*, *Z. A. M. P.*, **9a**, pp. 276-282 (1958).
- [12] W. N. Gill, D.W. Zeh and E. del Casal, *Free convection on a horizontal plate*, *Z. A. M. P.*, **16**, pp. 539-541 (1965).
- [13] Z. Rotem, *Free convection boundary layer flow over horizontal disks and plates I: similar solutions near plate*, *Proc. 1st. Canadian National Congress on Applied Mechanics*, **2b**, pp. 309-310 (1967).
- [14] Z. Rotem and L. Claassen, *Natural convection above unconfined horizontal surfaces*, *Journal Fluid Mechanics*, **38**, pp. 173-192 (1969).
- [15] A. K. Chellappa and P. Singh, *Possible similarity formulations for laminar free convection on a semi-infinite horizontal plate*, *International Journal Engng. Sci.*, **27**, No. 2, pp. 161-167 (1989).
- [16] T. Aihara, Y. Yamada and S. Endo, *Free convection along the downward-facing surface of a heated horizontal plate*, *International Journal heat Mass Transfer*, **15**, pp. 2535-2549 (1972).
- [17] T. Schulenberg, *Natural convection heat transfer below downward facing horizontal surfaces*, *International Journal heat Mass Transfer*, **28**, pp. 467-477 (1985).
- [18] F. J. Higuera, *Natural convection below a downward facing horizontal plate*, *European Journal of Mechanics : B/Fluids*, **12**, No 3, pp. 289-312 (1993).
- [19] B. Gebhart, Y. Jaluria, R. L. Mahajan and B. Sarminakia, *Bouyancy-induced flow and transport*. Hemisphere, NY. (1988).
- [20] L. Pera and B. Gebhart, *Intl. J. Heat Mass Transfer* **16**, 1131 (1973).
- [21] E. Luna, C. Treviño and F. Higuera, *Conjugate natural convection heat transfer between two fluids separated by an horizontal wall: steady-state analysis*, in press *Heat and Mass Transfer* (1996).

- [22] Cebeci, T. and Bradshaw, P., *Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer*, Springer, Berlin (1984).
- [23] Sod, A. Gary, *Numerical Methods in Fluid Dynamics: Initial and initial boundary-value problems*, Cambridge University Press, USA, (1985).
- [24] Adrian Bejan, *Convection Heat Transfer*, John Wiley & Sons, Inc., 1995.
- [25] M. Al-Arabi & M. K. El-Riedy, *Natural Convection Heat Transfer form Isothermal Horizontal Plates of Diferent Shape*, Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 19, 1399, (1976).
- [26] J.A.D. Ackroyd, *Laminar natural convection boundary layer on near-horizontal plates*, Proc. R. Soc. Lond. A., Vol. 352, 249, (1976).
- [27] Md. Zakerullah y A. Ackoryd, *Laminar natural convection boundary layer on horizontal circular discs*, Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP), Vol. 30, 427, (1979).
- [28] Husar, R. B. & Sparrow, E.M., *Patterns of free convection flow adjacent to horizontal heated surfaces*, Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 11, 1206, (1968)