



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

8.  
25j

FACULTAD DE CIENCIAS

TITULO DE TESIS

NUMEROS HETEROCROMATICOS DE LOS SOLIDOS PLATONICOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE MATEMATICO

PRESENTA :

LARISA ENRIQUEZ VAZQUEZ



FACULTAD DE CIENCIAS U.N.A.M.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN TESIS CON FALLA DE ORIGEN

FALLA DE ORIGEN





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule  
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

Números Heterocronáticos de los Sólidos Platónicos

realizado por

Larisa Enríquez Vázquez  
con número de cuenta 9052484-4 , pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis   
Propietario

Propietario

Propietario

Suplente

Suplente

Prof. Víctor Neumann-Lara

Dr. Jorge Arocha Pérez

Dr. Javier Bracho Carpizo

Dra. Isabel Puga Espinosa

M. en C. Juan José Montellano Ballesteros

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

A mis padres.

Quiero agradecer profundamente al Prof. Victor Neumann-Lara, no sólo por sus enseñanzas y consejos, sino también por su gran apoyo y su enorme paciencia.

A la Dra. Isabel Puga Espinosa, por sus sugerencias y comentarios.

A mis sinodales.

A mis papás y a mis hermanos, por su cariño y confianza.

A Ernesto, por su constante ayuda y su incomparable presencia.

A mis amigas, por hacer más ligero el trabajo.



# Índice General

Introducción	7
<b>1 Definiciones y resultados preliminares</b>	<b>9</b>
<b>2 La gráfica de Petersen</b>	<b>15</b>
2.1 Número heterocromático con respecto a caras . . . . .	15
2.2 Número heterocromático con respecto a vecindades . . . . .	16
<b>3 Números heterocromáticos con respecto a las caras de los sólidos platónicos</b>	<b>23</b>
3.1 Tetraedro . . . . .	23
3.2 Cubo . . . . .	24
3.3 Octaedro . . . . .	26
3.4 Dodecaedro . . . . .	29
3.5 Icosaedro . . . . .	32
<b>4 Números heterocromáticos con respecto a vecindades de los sólidos platónicos</b>	<b>41</b>
4.1 El Tetraedro . . . . .	41
4.2 El Cubo . . . . .	41
4.3 El Octaedro . . . . .	43
4.4 El dodecaedro . . . . .	44
4.5 El icosaedro . . . . .	55
<b>5 Otros Resultados en el Icosaedro y en el Dodecaedro</b>	<b>61</b>
5.1 Otros Resultados en el Icosaedro. . . . .	61
5.1.1 Número Heterocromático de $Y$ con respecto a dos triángulos ajenos. . . . .	61

3.1.2	Número Heterocromático de $Y$ con respecto a triángulos adyacentes. . . . .	64
5.2	Otros Resultados en el Dodecaedro. . . . .	68
<b>6</b>	<b>Cálculo de las distintas <math>\mu_i</math></b>	<b>71</b>
6.0.1	Dodecaedro . . . . .	71
6.0.2	Icosaedro . . . . .	80

# Introducción

Desde hace más de un siglo se ha venido haciendo el estudio de distintos tipos de coloraciones de las gráficas, ya sea con respecto a los vértices o con respecto a las aristas de las mismas. El ejemplo más notable es el Teorema de los cuatro colores, el cual se refiere a coloraciones en gráficas planas, y específicamente al número cromático de dichas gráficas.

En México se ha introducido y estudiado el número dicromático y la inconexión acíclica de digráficas y la tensión de hipergráficas, que son invariantes bajo ciertos tipos interesantes de coloraciones en vértices de gráficas e hipergráficas.

El número heterocromático es un concepto que surgió naturalmente al introducir el de tensión.

El trabajo que presento consiste esencialmente en calcular el número heterocromático de los sólidos platónicos (tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro) con respecto a subgráficas de los mismos.

Los cinco sólidos platónicos, así como también la gráfica de Petersen, son gráficas que tienen ciertas propiedades, las cuales hacen que se pueda crear una técnica que facilite el cálculo de los distintos números heterocromáticos de cada una de ellas, como también de algunas subgráficas de las mismas.

En este trabajo se explica dicha técnica para después aplicarla y poder exponer los resultados.



# Capítulo 1

## Definiciones y resultados preliminares

En este capítulo se darán las definiciones de los conceptos que se utilizarán a lo largo del trabajo, así como algunos resultados que ayudarán constantemente al cálculo de los números heterocromáticos de las gráficas a analizar.

**Definición 1.0.1** Una **hipergráfica** es una pareja  $H = (V(H), E(H))$  de conjuntos donde  $V(H)$  es el conjunto de vértices y  $E(H) \subset 2^{V(H)}$  es el conjunto de hiperaristas.

Si ocurre que para toda  $\alpha \in E(H)$ ,  $|\alpha| = r$ , diremos que  $H$  es una  $r$ -gráfica. En particular una gráfica  $G$  (sin lazos) es una hipergráfica en la que  $|\alpha| = 2 \forall \alpha \in E(H)$ .

**Ejemplo 1.0.1** La hipergráfica  $K_5^{(3)}$ , es la gráfica que tiene cinco vértices cuyas hiperaristas son las distintas ternas que se forman en ella;  $K_5^{(3)}$  es la 3-gráfica completa con 5 vértices.

En general denotaremos por  $K_n^{(r)}$  a la  $r$ -gráfica completa con  $n$  vértices.

**Definición 1.0.2** El **orden** de  $H$ ,  $o(H)$ , es el número de vértices de  $H$ .

**Definición 1.0.3** Una **coloración** (en vértices) de  $H$  es una función  $f: V(H) \rightarrow C$  donde  $C$  es un conjunto cuyos elementos podemos pensarlos como colores.

Si  $f$  es suprayectiva diremos que la coloración es *efectiva*.

Si  $|C| = k$  diremos que  $f$  es una  $k$ -coloración.

**Definición 1.0.4** El número heterocromático,  $hc_o(H)$  de  $H$  es el mínimo número  $m$  de colores tal que toda  $m$ -coloración efectiva de  $V(H)$  deja al menos una hiperarista  $\alpha \in E$  heterocromática (i.e., tal que todos sus vértices reciben colores distintos).

**Ejemplo 1.0.2** Notemos que toda 3-coloración efectiva de  $K_5^{(3)}$  deja al menos un triángulo heterocromático. Como obviamente  $hc_o(K_5^{(3)}) > 2$ , se sigue que  $hc_o(K_5^{(3)}) = 3$ .

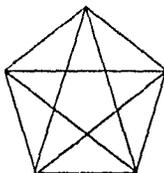


Figura 1.1:  $K_5^3$

**Definición 1.0.5** Decimos que una gráfica  $G$  es **regular de grado  $p$** , si el número de aristas que inciden en  $x = p \forall x \in V(G)$ .

**Definición 1.0.6** Un conjunto de vértices  $B$ , **2-bloquea** a una colección de hiperaristas  $A \subseteq E(H)$  (o es un 2-bloqueador de  $A$ ), si  $\forall \alpha \in A$ , se tiene que  $|\alpha \cap B| \geq 2$ .

Denotaremos por  $B_i$  a un conjunto 2-bloqueador que consta de  $i$  elementos, y  $\mu_i$  denotará a la máxima cantidad de hiperaristas que se pueden 2-bloquear con  $i$  vértices.

Sean  $H$  una hipergráfca regular de grado  $r$ ,  $B \subseteq V(H)$  un conjunto y  $E_B \subseteq E(H)$ .

Consideremos la gráfica bipartita,  $\beta(B)$ , donde  $V(\beta(B)) = B \cup E$ . Diremos que  $x \in B$  es adyacente a  $\alpha \in E$ , si  $x \in \alpha$  en  $H$ . Notemos que cada  $\alpha \in E_B$  es adyacente al menos a 2 elementos de  $B$ . (Véase la Figura 1.2)

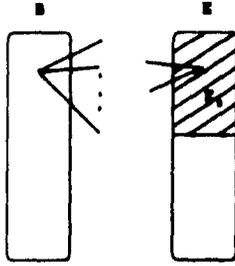


Figura 1.2:

De esta manera hemos obtenido la siguiente desigualdad:

$$r \cdot |B| \geq 2 \cdot |E_B|$$

y de ahí se sigue que:

$$|E_B| \leq \frac{r \cdot |B|}{2} \quad (1.1)$$

**Observación 1.0.1**  $\mu_i = \max |E_B| \leq \frac{r \cdot i}{2}$ .

**Definición 1.0.7** Una **2-transversal** de  $H$  es un subconjunto  $S$  de  $V(H)$  tal que para cada  $\alpha \in E$ ,  $|\alpha \cap S| \geq 2$ .

El orden mínimo de una 2-transversal de  $H$  se denota por  $\tau_2(H)$ .

**Observación 1.0.2** De (1.1) se obtiene:

$$\frac{2 \cdot |E|}{r} \leq \min |B| = \tau_2(H) \quad (1.2)$$

donde  $B$  es una 2-transversal de  $H$ .

**Definición 1.0.8** Una **2-transversal segmentada** de  $H$  es una colección  $S$  de subconjuntos mutuamente ajenos de  $V(H)$ , cada uno de cardinalidad al menos 2, tal que para cada  $\alpha \in E$  existe  $S \in S$  que satisface  $|\alpha \cap S| \geq 2$ .

Definimos

$$ct_2(H) = \min \left\{ \sum_{S \in \mathcal{S}} |S| - |\mathcal{S}| \text{ donde } \mathcal{S} \text{ es una } 2\text{-transversal} \right. \\ \left. \text{segmentada de } H \right\}$$

En este trabajo estaremos considerando hipergráficas definidas de la siguiente manera: Sea  $G$  una gráfica y  $F$  una familia de subgráficas de  $G$ . La hipergráfica  $H(G, F)$  tiene por vértices a los vértices de  $G$  y por conjunto de aristas a  $\{V(F) : F \in F\}$ .

**Ejemplo 1.0.3** *Considérese la trayectoria  $P_{13}$  (Figura 1.3). El conjunto de vértices marcados con un cuadrado es una 2-transversal de  $P_{13}$  con respecto a  $P_4$ , (i.e., 2-bloquea a todas las trayectorias de orden 4 que se encuentran en  $P_{13}$ ).*



Figura 1.3: Los cuadrados forman la 2-transversal.

Se puede ver que esta 2-transversal está formada por 4 copias de  $P_2$  que forman una 2-transversal segmentada de  $P_{13}$  con respecto a  $P_4$ .



Figura 1.4: Las distintas parejas de figuras representan los distintos conjuntos.

**Teorema 1.0.1** [1]  $hc_o(H) = o(H) - ct_2(H) + 1$

**Demostración:**

Sea  $H$  una hipergráfica y, supongamos que tenemos una  $k$ -coloración efectiva de  $H$  con  $k$  máximo, tal que no existe  $\alpha \in E$  heterocromática.

Sea  $S$  la colección de clases cromáticas no singulares (i.e., constituídas por al menos 2 vértices); claramente  $S$  es una 2-transversal segmentada de  $H$ . Como  $k = o(H) - \sum |S| + |S|$ , se tiene que  $k \geq o(H) - ct_2(H)$ .

De hecho,  $S$  es de tal forma, que  $\sum |S| + |S| = ct_2(H)$ . Supongamos lo contrario, es decir, que existe una 2-transversal segmentada  $S^*$  tal que  $\sum |S| - |S| > \sum |S| - |S^*|$ , pero entonces  $o(H) - (\sum |S| - |S^*|) > o(H) - (\sum |S| + |S|) = k$ ; de tal manera que si otorgamos distintas clases cromáticas a los diferentes conjuntos  $S \in S^*$  así como también a los conjuntos singulares, hemos obtenido una  $k'$  coloración que no deja hiperaristas heterocromáticas, y con  $k' > k$ , contradiciendo que  $k$  era máxima.

Por lo tanto  $k = o(H) - ct_2(H)$  y basta con aumentar un color más para asegurar la existencia de una hiperarista heterocromática, es decir,  $hc_o(H) = o(H) - ct_2(H) + 1$ .

**Corolario 1.0.1** [2]  $hc_o(H) \geq o(H) - \tau_2(H) + 2$

**Demostración:**

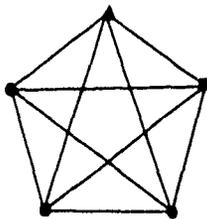
Sea  $S$  una 2-transversal de  $H$  cuyo orden es mínimo. Notemos que si  $|S| > \sum |S'| - |S|$ , donde  $S$  es una 2-transversal segmentada, entonces  $|S| - 1 \geq \sum |S'| - |S|$ , lo que implica que  $o(H) - |S| + 1 \leq o(H) - \sum |S'| + |S|$  y de lo que se sigue que  $o(H) - |S| + 2 \leq o(H) - \sum |S'| + |S| + 1 = hc_o(H)$ ; con lo cual habríamos terminado.

Ahora veamos que no puede ocurrir que  $|S| \leq \sum |S'| - |S|$ , ya que de lo contrario, se seguiría que  $|S| - 1 < \sum |S'| - |S|$ , lo cual es una contradicción, porque podemos considerar a  $S$  como una 2-transversal segmentada formada por un único conjunto de cardinalidad mayor o igual a dos, que a su vez cumple que  $|S| - 1 < ct_2(H)$ .

Por lo tanto  $hc_o(H) \geq o(H) - \tau_2(H) + 2$ .

**Definición 1.0.9** Una  $r$ -coloración tiene tipo  $(i_1, j_1, \dots, k_s)$  si los cardinales de las clases cromáticas no singulares dispuestas en orden creciente forman la sucesión:  $i, i, \dots, i$  ( $m$  veces),  $j, \dots, j$  ( $n$  veces),  $\dots, k, k, \dots, k$  ( $s$  veces).

**Ejemplo 1.0.4** En la Figura 1.5 se muestra una 3-coloración efectiva del tipo  $2_2$ .



*Figura 1.5:*

## Capítulo 2

### La gráfica de Petersen

En este capítulo calcularemos el número heterocromático de la gráfica de Petersen,  $P$ , respecto a ciclos de longitud cinco, así como también respecto a las vecindades de los vértices de la misma.

#### 2.1 Número heterocromático con respecto a caras

$P$  es una gráfica 3-regular cuyo orden es 10, además la mínima longitud que tienen los ciclos es cinco; es decir, tiene cuello 5. Es posible encontrar 12 cuellos distintos en  $P$ , de modo que si consideramos que las hiperaristas de  $P$  están formadas éstos, tenemos 12 hiperaristas diferentes en la hipergráfica.

¿Cuánto valdrá  $hc_0(P, C_5)$ ?

Primero calcularemos  $\tau_2(P, C_5)$  para que después, utilizando el Corolario 1.0.1 poder obtener que una cota inferior para  $hc_0(P, C_5)$  es 4.

**Teorema 2.1.1**  $\tau_2(P, C_5) = 4$ .

**Demostración:**

Existen en  $P$  dos ciclos ajenos (por ejemplo, la estrella interior  $C_5^1$  y el pentágono exterior  $C_5^2$ , son ajenos) de modo que si deseamos obtener una 2-transversal de la gráfica necesitamos, al menos, tomar dos vértices en cada pentágono. Pero además son suficientes estos cuatro vértices para 2-bloquear a todos los cuellos de  $P$ . (Véase la Figura 2.1).

Aplicando directamente el Corolario 1.0.1 podemos concluir que  $hc_0(P, C_5) \geq 8$ .

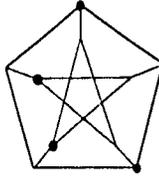


Figura 2.1: Los vértices marcados forman la 2-transversal.

El paso siguiente es mostrar que para toda 8-coloración efectiva, siempre se puede encontrar, al menos, un cuello heterocromático en  $P$ .

**Teorema 2.1.2**  $hc_o(P, C_5) = 8$

**Demostración:**

Sólo existen dos tipos de 8-coloraciones efectivas distintas en  $P$ , que son las siguientes:

- i)  $3_1$  (con una única clase cromática con tres elementos y las demás clases cromáticas singulares)
- ii)  $2_2$  (dos clases cromáticas con dos elementos y las demás de cardinalidad uno).

En el caso i) es claro que no se bloquean doblemente todos los  $C_5$ , ya que  $r_2(P, C_5) = 4$ .

Para analizar el caso ii) primero veamos cuántas hiperaristas se pueden 2-bloquear con dos vértices; es decir, calculemos  $\mu_2$ .

Utilizando la desigualdad (1.1) del Corolario 1.0.1 obtenemos que  $\mu_2 \leq 3$ .

Y con este resultado es suficiente, ya que si las dos clases cromáticas dobles que tenemos, 2-bloquean cada una a tres hiperaristas distintas, en el mejor de los casos, habremos 2-bloqueado a seis hiperaristas.

Por lo tanto  $hc_2(P, C_5) = 8$ .

## 2.2 Número heterocromático con respecto a vecindades

Nuestro siguiente problema es considerar a las hiperaristas de  $P$  como las vecindades abiertas de cada vértice; donde la vecindad abierta de  $x \in V(P)$

es el conjunto de vértices adyacentes a  $x$  y distintos del mismo. Existen en  $P$  diez hiperaristas distintas (una por cada vértice de la gráfica).

Primero calcularemos  $\tau_2(P, \text{vec}(x))$ .

Por la desigualdad (1.2) sabemos que  $\tau_2(P, \text{vec}(x)) \geq \frac{10}{3} \cdot 2$ , pero como  $\tau_2(P, \text{vec}(x))$  debe ser un número entero podemos decir que  $\tau_2(P, \text{vec}(x)) \geq 7$ .

$\mu_2 = 1$
$\mu_3 = 3$
$\mu_4 \leq 6$
$\mu_5 \leq 7$
$\mu_6 \leq 9$

Tabla 2.1:

**Teorema 2.2.1**  $\tau_2(P, \text{vec}(x)) = 7$ .

**Demostración:**

Basta con mostrar una 2-transversal de  $P$  que conste de 7 vértices (Véase la Figura 2.2)

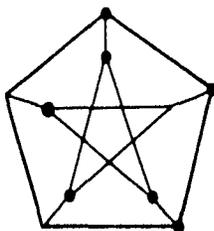


Figura 2.2: Los vértices marcados forman la 2-transversal.

A continuación, veamos la Tabla 2.1, la cual contiene las cotas superiores de las distintas  $\mu_i$  ( $2 \leq i \leq 6$ ) las cuales nos servirán para calcular  $hc_o(P, \text{vec}(x))$ . La demostración de la igualdad, tanto para  $\mu_2$  como para  $\mu_3$  se dará más adelante.

**Teorema 2.2.2**  $hc_o(P, \text{vec}(x)) = 5$ .

**Demostración:**

Cualquier 5-coloración efectiva de  $P$  debe ser de alguno de los siguientes tipos:

$2_5$
$2_3 \cdot 3_1$
$2_2 \cdot 4_1$
$2_1 \cdot 3_2$
$2_1 \cdot 5_1$
$3_1 \cdot 4_1$
$6_1$

Tabla 2.2:

Utilizando los resultados de las Tablas 2.1 y 2.2, obtenemos las relaciones que se muestran en la Tabla 2.3.

De esta manera podemos concluir que con ninguna 5-coloración efectiva se pueden bloquear doblemente a todas las hiperaristas de  $P$ .

Por lo tanto  $hc_o(P, vec(x)) = 5$ .

**Lema 2.2.1**  $\mu_2 = 1$ , y  $\mu_3 = 3$ .

**Demostración:**

i)  $\mu_2 = 1$

Tipo de Coloración	Máximo Número de Hiperaristas 2-bloqueadas
$2_5$	5
$2_3 \cdot 3_1$	6
$2_2 \cdot 4_1$	8
$2_1 \cdot 3_2$	7
$2_1 \cdot 5_1$	8
$3_1 \cdot 4_1$	9
$6_1$	9

Tabla 2.3:

$P$  es una gráfica que no contiene cuadrados, por lo que no existen  $x, y \in V(P)$  tales que  $|vec(x) \cap vec(y)| \geq 2$ . Sin embargo, si ocurre que  $\forall x \in V(P)$   $\exists y \in V(P)$  tal que  $|vec(x) \cap vec(y)| = 1$ .

Por lo tanto  $\mu_2 = 1$ .

ii)  $\mu_3 = 3$ .

Es posible encontrar un hexágono en  $P$ , de modo que, si tomamos alternadamente tres vértices, se pueden 2-bloquear tres vecindades distintas.

Para mostrar que no es posible 2-bloquear más vecindades supongamos lo contrario, es decir, que existe un conjunto  $B_3$  que bloquea doblemente a más de tres hiperaristas de  $P$

Sean  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in V(P)$  tales que  $|vec(x_i) \cap B_3| \geq 2$  para  $1 \leq i \leq 4$ .

Por el inciso anterior, sabemos que no existen  $i, j$  tales que  $|vec(x_i) \cap vec(x_j)| \geq 2$  (para  $1 \leq i, j \leq 4$ ).

Sean  $u, v, w \in B_3$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $u$  y  $v \in vec(x_1)$  y que  $v$  y  $w \in vec(x_2)$  de esta manera, sólo queda que  $w$  y  $u \in vec(x_3)$ ; pero para el vértice  $x_4$ , no importa cuales sean los vértices 2-bloqueadores que se encuentren en su vecindad, siempre formará un cuadrado en  $P$ .

Por lo tanto  $\mu_3 = 3$ .

Algo que vale la pena hacer notar, es que si no existieran los casos en los que se pueden bloquear doblemente nueve hiperaristas distintas, (las coloraciones  $3_1 \cdot 4_1$  y  $6_1$ ) habríamos encontrado el número heterocromático de una 2-vecindad; es decir, podríamos asegurar que para cualquier 5-coloración efectiva de  $P$ , existen al menos dos vértices cuyas vecindades son heterocromáticas.

A continuación demostraremos que sí es posible bloquear doblemente nueve vecindades distintas en  $P$ , y para ello demostraremos que  $\mu_4 = 6$  y  $\mu_6 = 9$ .

**Lema 2.2.2**  $\mu_4 = 6$  y  $\mu_6 = 9$ .

**Demostración:**

i)  $\mu_4 = 6$ .

Supongamos que existe un conjunto  $B_4 \subset V(P)$  que bloquea doblemente a seis vecindades distintas de  $P$ . Sea  $E_6 = \{a, b, c, d, e, f\} \subset V(P)$  el conjunto de vértices cuyas vecindades han sido 2-bloqueadas. Consideremos una gráfica  $P^*$  de la siguiente manera:

1.-  $V(P^*) = B_4 \cap E_6$ .

- 2.- El grado de  $x = 3 \forall x \in B_4$ .
- 3.-  $\forall x \in E_6 \exists y, z \in B_4$  tales que las aristas  $(x, y)$  y  $(x, z) \in A(P^*)$ .

Podemos pensar a  $P^*$  como la gráfica  $K_4$  con una subdivisión por cada arista que tiene, donde los vértices obtenidos de la subdivisión son los elementos de  $E_6$  y los cuatro vértices restantes son los elementos de  $B_4$ . Además aumentaremos las aristas  $(a, c)$ ,  $(b, d)$  y  $(e, f)$  para lograr que  $P^*$  sea regular de grado 3. (Véase la Figura 2.3)

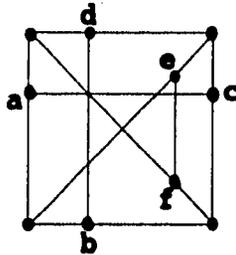


Figura 2.3: Los vértices son aquellos cuyas vecindades han sido doblemente bloqueadas

Observemos que las vecindades de  $a, b, c, d, e, f$  han sido doblemente bloqueadas por los cuatro elementos de  $B_4$ . Además notemos que  $P^*$  tiene cuello 5, es de orden 10 y, como dijimos anteriormente, es regular de orden 3; es decir,  $P^*$  es homomorfa a  $P$ .

Por lo tanto es posible bloquear doblemente seis vecindades con cuatro vértices, y se sigue que la coloración del tipo  $3_1 \cdot 4_1$  bloquea doblemente nueve vecindades distintas en  $P$ .

ii)  $\mu_6 = 9$ .

Supongamos nuevamente que existe un conjunto  $B_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \subset V(P)$  que bloquea doblemente nueve vecindades distintas en  $P$ , y sea  $E_4 = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\} \subset V(P)$  el conjunto de vértices cuyas vecindades han sido doblemente bloqueadas. Consideremos a la gráfica  $P^*$  de la siguiente manera:

- 1.-  $V(P^*) = B_6 \cup E_4$ .

- 2.- El grado de  $x = 3 \forall x \in B_6$ .  
 3.-  $\forall x \in E_4 \exists y, z \in B_6$  tales que las aristas  $(x, y)$  y  $(x, z) \in A(P^*)$ .

Podemos pensar a  $P^*$  como la gráfica  $(K_3, K_3)$  (dividiendo cada arista en dos aristas), donde  $E_4$  es el conjunto formado por los vértices añadidos después de dividir cada arista, y  $B_6$  está formado por los 6 vértices restantes. Como se puede ver,  $o(P^*) = 15$ .

Ahora mostraremos que, si consideramos que 5 vértices se encuentran representados dos veces, es posible encontrar un homomorfismo de  $P^*$  en  $P$  y habremos terminado.

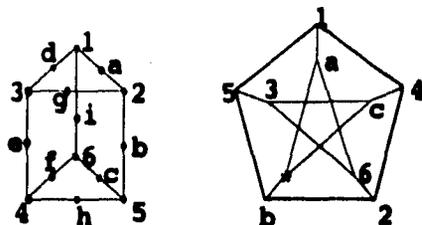


Figura 2.4: Aquí se muestra como se identifica cada vértice de  $K_{3,3}$  con los vértices de  $P$ .

El vértice 1 no puede ser el mismo vértice que  $b, c, e, f$  ó  $g$ , ya que entonces existirían ciclos de longitud tres. Claramente no puede ser  $a, d$  ni  $i$  porque entonces estos vértices no estarían doblemente bloqueados. Tampoco puede ser 4 ni 5 por que aparecerían ciclos de longitud cuatro, y si fuera 2, 3 ó 6 se formarían lazos en la gráfica. Por lo tanto 1 sólo puede estar identificado con el vértice representado por  $h$ .

Para el vértice 6, por simetría, está obligado a ser  $g$ .

El vértice 2 claramente no puede ser  $a, b$  ni  $g$ , porque entonces no estaría doblemente bloqueado, si fuera el mismo que el vértice  $c, d, e, h$  ó  $i$ , habría un ciclo de longitud tres; y no puede ser 3 ni 5 porque se formarían lazos. Por lo tanto 2 tiene que ser el mismo vértice que  $f$ .

Por simetría, el vértice 3 es el mismo que  $c$ , 4 es el mismo que  $a$  y 5 es el mismo que  $d$ ; siendo  $b, e$  y  $i$  los vértices cuyas vecindades están bloqueadas sin ellos pertenecer al conjunto 2-bloqueador, y que de hecho tienen grado dos lo que los obliga a ser adyacentes al vértice  $y$  que no aparece en  $(K_{3,3})$  (de

hecho son la vecindad de  $y$ ); de esta manera se tendría una gráfica 3-regular de cuello cinco con diez vértices, y por lo tanto es homomorfa a la gráfica de Petersen.

Así pues, es posible con seis vértices bloquear nueve vecindades.

## Capítulo 3

# Números heterocromáticos con respecto a las caras de los sólidos platónicos

Los sólidos platónicos son: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro. Es bien sabido que se pueden representar en el plano de manera que sus aristas no se intersecten entre sí en cualquier parte distinta de un vértice, es decir, son gráficas planas.

En este capítulo calcularemos los números heterocromáticos de los cinco sólidos platónicos con respecto a sus caras.

Como las hipergráficas con las que trabajaremos son regulares, nos ayudaremos de la desigualdad (1.1) para calcular las distintas  $\tau_2$  así como las diferentes  $\mu_i$  para cada caso.

### 3.1 Tetraedro

El tetraedro es una gráfica 3-regular, con cuatro vértices y sus caras son triángulos; la denotaremos por  $T$ .

**Teorema 3.1.1**  $\tau_2(T, C_3) = 3$ .

#### Demostración

$|E(T)| = 6$  y ocurre que  $\forall \alpha, \beta \in E(T), |\alpha \cap \beta| = 2$ , de este modo tenemos que con dos vértices, es posible 2-bloquear a 2 triángulos distintos, y además es el mayor número de triángulos que podemos bloquear doblemente, ya que

de lo contrario pasaría que  $o(T) \geq 5$ . Pero si consideramos un conjunto 2-bloqueador,  $B_T$ , con tres elementos, es posible bloquear doblemente las cuatro caras de  $T$ .

De esta manera tenemos que  $\tau_2(T) = 3$ .

Ahora podemos utilizar el Corolario 1.0.1 para obtener una cota inferior de  $h_{co}(T, C_3)$ .

**Teorema 3.1.2**  $h_{co}(T, C_3) = 3$ .

#### **Demostración**

El tetraedro es una gráfica completa, de hecho es  $K_4$  así es que  $h_{co}(T, C_3) = h_{co}(K_4^3) = 3$ . (Ver Ejemplo 1.0.2)

## **3.2 Cubo**

El cubo es una gráfica 3-regular, de orden 8 y las caras forman cuadrados. Lo denotaremos por  $T$ .

Utilizando la desigualdad (1.1) se pudieron obtener cotas superiores para las distintas  $\mu_i$  ( $2 \leq i \leq 4$ ) y después se calcularon las igualdades estrictas.

**Teorema 3.2.1**  $\mu_2 = 2$ ,  $\mu_3 = 3$ ,  $\mu_4 = 6$

#### **Demostración**

i)  $\mu_2 = 2$

Dados dos vértices,  $x, y$ , puede ocurrir que sean adyacentes o que no lo sean. Cuando no son adyacentes, a lo más existe una cara  $C$  tal que  $\{x, y\} \subset C$ , por lo que, en el mejor de los casos, se puede bloquear doblemente una cara. En el caso en que  $x, y$  son adyacentes, la arista que tienen en común pertenece a dos  $C_4$  distintos, por lo que se pueden bloquear doblemente ambas caras y, como en el cubo no hay aristas múltiples, no puede ocurrir que dos vértices adyacentes bloqueen doblemente a más  $C_4 \in Q$ .

Por lo tanto  $\mu_2 = 2$ .

ii)  $\mu_3 = 3$

Supongamos que con tres vértices es posible bloquear doblemente a cuatro caras de  $Q$ .

Pensemos en la gráfica bipartita  $\beta$  que relaciona al conjunto  $E_B$  de caras doblemente bloqueadas, con el conjunto 2-bloqueador  $B_3$ . Diremos que  $V(\beta) = E_B \cup B_3$ . Notemos que cada elemento  $x \in E_B$  es adyacente, al menos, a dos elementos de  $B_3$ ; es decir, existen mínimo ocho aristas incidentes en los tres elementos de  $B_3$ . Pues entonces debe pasar que al menos dos vértices  $y, z \in B_3$  tiene grado tres, lo que quiere decir que en  $Q$ ,  $y, z$  ayudan a bloquear doblemente a las tres caras a las que pertenecen.

Pero para que un vértice pueda contribuir a bloquear doblemente a las tres distintas hiperaristas en las que se encuentra, se necesitan tres vértices más, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto  $\mu_3 = 3$ .

iii)  $\mu_4 = 6$

En  $T$  podemos encontrar dos  $C_4$  ajenos ( $C_4^1, C_4^2$ ).

Sean  $x, y \in C_4^1$  y  $u, w \in C_4^2$  de modo que ninguno de estos vértices sean adyacentes entre sí. La única posibilidad que tenemos de acomodarlos con esta condición es la que se muestra en la Figura 3.1.

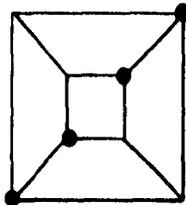


Figura 3.1: Los vértices marcados forman la 2-transversal.

Pero con eso hemos obtenido una 2-transversal de  $Q$ .

Por lo tanto  $\mu_4 = 6$ .

**Corolario 3.2.1**  $\tau_2(Q, C_4) = 4$ .

#### **Demostración**

Se sigue inmediatamente del Teorema 3.2.1.

Ahora podemos calcular  $h_{co}(Q, C_4)$  y tendremos presentes los resultados anteriores en la siguiente Tabla:

$\mu_2 = 2$
$\mu_3 = 3$
$\mu_4 = 6$

Tabla 3.1:

**Teorema 3.2.2**  $h_{co}(Q, C_4) = 6$ .

**Demostración**

Consideremos los distintos tipos de coloraciones que podemos tener con seis colores :

$3_1$

$2_2$

**1er. Caso:** Ayudándonos de la Tabla 3.1 podemos ver que dada una coloración con una clase cromática que conste de tres elementos no se pueden bloquear las seis caras del cubo ya que  $\mu_3 = 3$ .

**2o. Caso:** Si tenemos dos clases cromáticas, cada una con dos elementos, a lo más se pueden bloquear cuatro caras distintas (porque  $\mu_2 = 2$ ), lo cual no es suficiente.

Por lo tanto  $h_{co}(C_4, Q) = 6$ .

### 3.3 Octaedro

El octaedro es una gráfica 4-regular, con seis vértices y tiene ocho caras, las cuales forman triángulos; la denotaremos por  $O$ .

Para calcular  $h_{co}(O, C_3)$  utilizaremos el siguiente teorema:

**Teorema 3.3.1**  $\mu_2 = 2, \mu_3 = 4, \mu_4 = 8$ .

**Demostración**

i)  $\mu_2 = 2$

En el caso en el que tenemos un conjunto 2-bloqueador con dos elementos, estos pueden ser adyacentes o no serlo. En el caso en que lo sean, como hay cuadrados en  $O$ , se podrían bloquear doblemente dos caras distintas. En el caso en que no sean adyacentes, los vértices deben ser antípodos, pero de esta manera no pueden bloquear doblemente a ningún triángulo en  $O$ .

Por lo tanto  $\mu_2 = 2$ .

ii)  $\mu_3 = 4$

$O$  es una gráfica 4-regular de orden seis, de modo que si tomamos tres vértices  $u, v, w \in O$  debe de ocurrir una de dos cosas; que los tres sean adyacentes entre sí dos a dos, o que dos sean adyacentes y el tercero sea antípoda de alguno de los otros dos.

**1er. Caso.** Sean  $u, v, w \in B_O$  y  $x, y, z \in V(O)$  tales que  $x, y, z \notin B_O$ . Veamos que  $x, y, z$  también son adyacentes entre sí, dos a dos; de hecho, lo que pasa para  $u, v, w$  es análogo para  $x, y, z$ . Existen cuatro triángulos distintos que tienen a una pareja de vértices en el conjunto  $u, v, w$ , es decir, están doblemente bloqueados. Por otro lado tenemos que el triángulo  $x, y, z$  no es 2-bloqueado como tampoco ninguna de las hiperaristas que tenga una pareja de vértices en  $x, y, z$ . Por lo tanto sólo existen cuatro triángulos heterocromáticos.

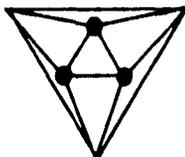


Figura 3.2:

**2o. Caso.** Podemos ver que los vértices  $u, v, w$ , se encuentran en un mismo  $C_4$ , de la siguiente manera: hay dos parejas de antípodas en el mismo ciclo, una formada por dos elementos, digamos  $u, w \in B_O$  y la otra pareja  $x, v$ , la cual sólo tiene a un elemento del conjunto  $B_O$ .

Pero entonces los otros dos vértices de  $O$ ,  $y$  y  $z$  son ambos adyacentes a  $u$  y  $w$ , de modo que hemos obtenido cuatro caras heterocromáticas en  $O$ .

Por lo tanto  $\mu_3 = 4$

iii)  $\mu_4 = 8$ .

Utilizando la desigualdad (1.1) sabemos que  $8 \geq \mu_4$  y efectivamente, es posible encontrar una 2-transversal con cuatro vértices:

Por lo tanto  $\mu_4 = 8$ .

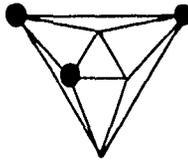


Figura 3.3:

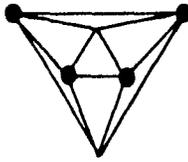


Figura 3.4:

**Corolario 3.3.1**  $\tau_2(O, C_3) = 4$ .

**Demostración**

Aplicamos directamente el resultado anterior.

En la Tabla 3.2 se muestran los resultados del Teorema 3.3.1.

**Teorema 3.3.2**  $h_{co}(O, C_3) = 4$ .

**Demostración**

Nuevamente consideremos los posibles tipos de coloraciones que tenemos en  $O$  si utilizamos 4 colores:

$3_1$

$2_2$

$\mu_2 = 2$
$\mu_3 = 4$
$\mu_4 = 8$

Tabla 3.2:

Aplicamos los resultados de la Tabla 3.2 para comprobar que no será posible bloquear doblemente a las seis caras de  $O$ .

Este hecho lo mostramos en la Tabla 3.3

Tipo de Coloración	Máximo Número de Hiperaristas 2-bloqueadas
$3_1$	5
$2_2$	4

Tabla 3.3:

### 3.4 Dodecaedro

El dodecaedro es una gráfica 3-regular, de orden 20. Sus caras están formadas por pentágonos que en total suman doce. La denotaremos por  $D$ .

La Tabla 3.4 muestra algunas cotas superiores para las distintas  $\mu_i$  y enseguida se probará la igualdad para el caso de  $\mu_2$ .

$\mu_2 = 2$
$\mu_3 \leq 4$
$\mu_4 \leq 6$
$\mu_5 \leq 7$
$\mu_6 \leq 9$

Tabla 3.4:

#### **Teorema 3.4.1** $\mu_2 = 2$

##### **Demostración**

Dado un conjunto 2-bloqueador,  $B_2 \subset V(D)$  con dos elementos, estos pueden o no estar en el mismo pentágono. En el caso en que no se encuentren en un mismo pentágono, no bloquean doblemente ninguna cara de  $D$ .

En el caso en el que ambos vértices se encuentren en una misma cara, pueden o no ser adyacentes entre sí. Si no son adyacentes únicamente bloquearán doblemente a la cara que tienen en común. Si ambos vértices son

adyacentes, la arista que los une pertenece a dos pentágonos, por lo que bloquean doblemente a los mismos.

De esta manera se puede concluir que  $\mu_2 = 2$ .

**Teorema 3.4.2**  $\tau_2(D, C_5) = 8$

**Demostración**

Sabemos que  $\tau_2(D, C_5) \geq 8$  y en la Figura 3.5 se muestra una 2-transversal de  $D$  que efectivamente tiene 8 vértices.

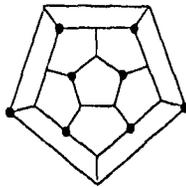


Figura 3.5:

Una vez obtenida  $\tau_2(D, C_5)$ , tenemos el siguiente resultado:

$$h_{co}(D, C_5) \geq 14$$

Pero la Figura 3.6 es un ejemplo de una 14-coloración efectiva que no deja ningún  $C_5$  heterocromático:

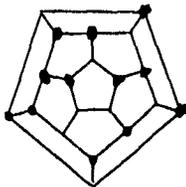


Figura 3.6: Cada figura representa un color distinto.

**Teorema 3.4.3**  $h_{co}(D, C_5) = 15$ .

### Demostración

Analizaremos los distintos tipos de coloraciones que se tienen de  $D$  utilizando 15 colores para mostrar que efectivamente no se pueden bloquear doblemente a todas las caras de  $D$ .

Los distintos tipos de coloraciones de  $D$  se muestran en la Tabla 3.5.

$2_5$
$2_3 \cdot 3_1$
$2_2 \cdot 4_1$
$2_1 \cdot 3_2$
$2_1 \cdot 5_1$
$3_1 \cdot 4_1$
$6_1$

Tabla 3.5:

Calculamos el máximo número de caras bloqueadas doblemente, usando los resultados de la Tabla 3.4 y obtenemos las relaciones que se muestran en la Tabla 3.6, donde se puede ver que cualquier 15-coloración efectiva garantiza la existencia de una cara heterocromática; es decir,  $h_{co}(D, C_5) = 15$ .

**Observación 3.4.1** *De hecho, cabe hacer notar que con cualquier 15-coloración efectiva de  $D$ , obtenemos siempre, al menos 2 caras heterocromáticas, ya que para todos los tipos de coloraciones que se tienen, no se bloquean doblemente más de 10 caras.*

Tipo de Coloración	Máximo Número de Hiperaristas 2-bloqueadas
$2_5$	10
$2_3 \cdot 3_1$	10
$2_2 \cdot 4_1$	10
$2_1 \cdot 3_2$	10
$2_1 \cdot 5_1$	9
$3_1 \cdot 4_1$	10
$6_1$	9

Tabla 3.6:

### 3.5 Icosaedro

El icosaedro,  $Y$ , es una gráfica 5-regular, de orden doce, con veinte caras representadas por medio de triángulos.

Antes de continuar, notemos que  $\forall x \in Y \exists! y$  tal que  $d(x, y) = 3$ , la cual es la máxima distancia que hay entre cualesquiera dos elementos de  $V(Y)$ . En este caso, decimos que  $y$  es antípoda de  $x$ .

Utilizando la desigualdad (1.1), sabemos que  $\tau_2(Y, C_3) \geq 8$ . Mostraremos que no es posible encontrar una 2-transversal de  $Y$  que tenga 8 elementos.

**Teorema 3.5.1**  $\tau_2(Y, C_3) > 8$ .

**Demostración:**

Supongamos que existe una 2-transversal de  $Y$  con 8 vértices y veamos que con los 4 vértices restantes es posible encontrar una cara que no ha sido 2-bloqueada.

Sean  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  dichos vértices.

**1er. Caso.** Supongamos que dos de ellos son antípodas, sin pérdida de generalidad digamos que  $x_1$  y  $x_2$ . Pero entonces  $x_3$  y  $x_4$  se encuentran a distancia 1 ó 2 de  $x_1$ . Supongamos que  $d(x_1, x_3) = d(x_1, x_4) = 1$ , entonces hemos encontrado un triángulo formado por alguna de las parejas  $x_1$  y  $x_3$  ó  $x_1$  y  $x_4$ , el cual no intersecta al conjunto 2-bloqueador.

Si ambos se encuentran a distancia 2 de  $x_1$  entonces se encuentran a distancia 1 de  $x_2$  y ocurre lo mismo que se mencionó anteriormente.

Si sólo uno de ellos,  $x_3$ , se encuentra a distancia 1 de  $x_1$ , hemos encontrado un triángulo que tiene como vértices a  $x_1$  y  $x_3$ , y por lo cual su intersección con el conjunto 2-bloqueador es 1, lo cual no es suficiente.

**2o. Caso.** Supongamos que no hay pareja de antípodas entre los vértices  $x_1, x_2, x_3, x_4$  entonces para evitar que aparezcan caras que no han sido 2-bloqueadas, es necesario que los cuatro vértices se encuentren a distancia 2 entre ellos.

En el icosaedro podemos encontrar dos ruedas  $W_5$  ajenas que contienen a los doce vértices de  $Y$ . Llamémoslas  $W_{5_1}$  y  $W_{5_2}$ .

Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $x_1$  es el centro de la rueda  $W_{5_1}$ , con lo que  $x_2, x_3$  y  $x_4$  deben encontrarse en  $W_{5_2}$ .

Ninguno de ellos puede ser el centro de la rueda, ya que no hay parejas de antípodas. Pero por otro lado, no es posible tener en un ciclo de longitud 5, tres vértices a distancia 2.

Por lo tanto no es posible encontrar una 2-transversal de  $Y$  con 8 vértices.

**Observación 3.5.1** Como el icosaedro es el dual del dodecaedro, este resultado implica que no es posible encontrar cuatro caras ajenas en el dodecaedro.

**Corolario 3.5.1**  $r_2(Y, C_3) = 9$ .

**Demostración:**

Basta con mostrar un conjunto de 9 vértices en  $Y$  que efectivamente bloquea doblemente a las 20 caras.

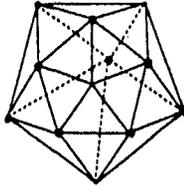


Figura 3.7: Los vértices marcados forman la 2-transversal.

**Teorema 3.5.2** Los resultados de la Tabla 3.7 son ciertos.

$\mu_2 = 2$
$\mu_3 = 4$
$\mu_4 = 6$
$\mu_5 = 10$
$\mu_6 = 12$
$\mu_7 = 14$
$\mu_8 = 18$

Tabla 3.7:

**Demostración:**

i)  $\mu_2 = 2$

Supongamos que tenemos un conjunto 2-bloqueador  $B_2$ ; estos dos elementos,  $x$  y  $y$  pueden ser adyacentes o no serlo.

En el caso en que no sean adyacentes, como las caras del icosaedro son triángulos, no se podría 2-bloquear ni siquiera una cara. En el caso en el que  $a = (x, y) \in A(Y)$ , entonces  $a$  se encuentra en dos triángulos distintos.

Por lo tanto  $\mu_2 = 2$ .

ii)  $\mu_3 = 4$

Con tres vértices en  $Y$  es posible 2-bloquear 4 caras. La Figura 3.8 es un ejemplo:

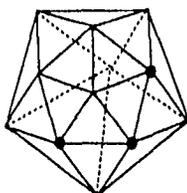


Figura 3.8:

Ahora mostraremos que no es posible 2-bloquear un mayor número de caras.

Supongamos lo contrario, es decir, que con tres vértices,  $x, y, z$  es posible 2-bloquear cinco caras distintas en  $Y$ . Representemos nuestro problema por medio de una gráfica bipartita de la siguiente manera:

Una partición  $R_1$  representa al conjunto de vértices del conjunto 2-bloqueador; mientras que en la partición  $R_2$  se encuentran representadas las hiperaristas que han sido doblemente bloqueadas.

Denotaremos por  $V_i$  al número de vértices 2-bloqueadores, que son adyacentes a  $i$  elementos de  $R_2$ .

Como  $Y$  es 5-regular, ocurre que cada vértice que se encuentra en  $R_1$  puede tener a lo más cinco aristas, y cada elemento en  $R_2$  es adyacente al menos a dos elementos de  $R_1$ ; por lo que se debe de cumplir la siguiente desigualdad:

$$1V_1 + 2V_2 + 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 \geq 2\mu_3$$

Como estamos suponiendo que  $\mu_3 = 5$ , tenemos que

$$1V_1 + 2V_2 + 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 \geq 10.$$

Por otro lado tenemos que  $V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 = 3$ .

Ahora podemos ver que las posibles soluciones que tenemos son:

$$\begin{aligned}
 &V_2 = 1, V_3 = 1 \text{ y } V_5 = 1 \\
 &V_2 = 1 \text{ y } V_4 = 2 \\
 &V_1 = 1, V_4 = 1 \text{ y } V_5 = 1 \\
 &V_3 = 2 \text{ y } V_4 = 1
 \end{aligned}$$

De esta manera podemos ver que al menos uno de los vértices de  $R_1$  bloquea doblemente a 4 de los 5 triángulos a los que pertenece. Sin pérdida de generalidad, digamos que es  $x$  dicho vértice.

Para 2-bloquear 4 triángulos es necesario que los tres vértices formen un ciclo  $C_3$ . (Véase la Figura 3.9).

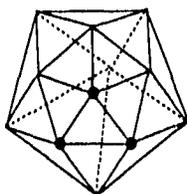


Figura 3.9:

Pero de esta manera  $x, y$  y  $z$  2-bloquean a tres triángulos cada uno, dejando la siguiente relación:

$$V_3 = 3$$

la cual no es una solución para  $1V_1 + 2V_2 + 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 \geq 10$ .

Por lo tanto  $\mu_3 = 4$ .

iii)  $\mu_4 = 6$

Con cuatro vértices  $u, v, x, y$  en  $Y$  es posible 2-bloquear seis caras distintas:

Ahora veremos que no es posible 2-bloquear una mayor cantidad de caras con el mismo número de vértices.

Supongamos que sí se pueden 2-bloquear siete caras distintas en  $Y$ , nuevamente fijándonos en la relación que guardan los vértices 2-bloqueadores con las caras 2-bloqueadas, podremos notar que al menos deben de existir 14 aristas 2-bloqueadas; i.e.,  $1V_1 + 2V_2 + 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 \geq 14$  mientras que  $V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 = 4$ .

Las posibles soluciones son las siguientes:

$$V_1 = 1, V_4 = 2 \text{ y } V_5 = 1$$

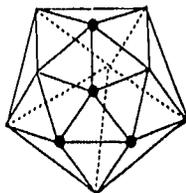


Figura 3.10: Los vértices marcados forman la 2-transversal.

$$\begin{aligned}
 &V_1 = 1, V_3 = 1 \text{ y } V_5 = 2 \\
 &V_2 = 2 \text{ y } V_5 = 2 \\
 &V_2 = 1, V_3 = 1, V_4 = 1 \text{ y } V_5 = 1 \\
 &V_3 = 2 \text{ y } V_4 = 2 \\
 &V_3 = 3 \text{ y } V_5 = 1
 \end{aligned}$$

Como se puede ver, existen cinco casos en los que hay un vértice  $x$  que ayuda a bloquear doblemente cinco caras distintas. Para que esto ocurra deben estar acomodados igual que en la Figura 3.10, pero es claro que así sólo se logran bloquear doblemente 6 caras distintas.

El sexto caso es aquel en el que existen dos vértices,  $x, y$  ayudan, cada uno, a bloquear doblemente cuatro caras distintas. Dado  $x$ , la manera en que puede bloquear doblemente a cuatro caras es aquella en la que forma una trayectoria  $P_3$  donde  $x$  es el vértice de grado 2 y  $u$  y  $v$  son los extremos de la trayectoria. El mismo razonamiento se aplica para  $y$ , pero entonces las únicas configuraciones que se pueden obtener son, en la que  $x, u, y, v$  forman un cuadrado, bloqueando doblemente a seis caras, o la que se muestra en la Figura 3.10, que también bloquea doblemente a seis caras.

Por lo tanto  $\mu_4 = 6$ .

iv)  $\mu_5 = 10$ .

Supongamos que se pueden bloquear doblemente 11 caras. Existen 22 aristas que inciden en los vértices  $x, y, u, v, w$  que forman el conjunto  $B_5$ .

Las distintas soluciones son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 &V_2 = 1 \text{ y } V_5 = 4 \\
 &V_3 = 1, V_4 = 1 \text{ y } V_5 = 3 \\
 &V_4 = 2 \text{ y } V_5 = 2
 \end{aligned}$$

Estas soluciones obligan a dos ruedas,  $W_5$ , y  $W_3$ , a tener todas sus caras

doblemente bloqueadas. En el caso en el que ambas ruedas sean ajenas necesitamos 4 vértices por rueda (lo sabemos por el inciso anterior), de modo que necesitaríamos que el conjunto 2-bloqueador tuviera al menos 8 vértices.

Analicemos el caso en el que no son ajenas  $W_{3_1}$  y  $W_{3_2}$ .

Por la configuración que debe de tener el vértice,  $y$ , para tener 2-bloqueadas a las cinco hiperaristas a las que pertenece, sabemos que hemos utilizado tres vértices más,  $u, v$  y  $w$ . (Ver Figura 3.10).

El quinto vértice que falta agregar puede pertenecer al pentágono en el que se encuentran  $u, v$  y  $w$ . Si es así, sólo contribuirá 2-bloquear 2 hiperaristas más; en caso contrario, sólo 2-bloqueará una hiperarista más.

Por lo tanto no es posible 2-bloquear 11 caras en  $Y$  con cinco vértices.

La Figura 3.11 es un ejemplo en el que se consiguen bloquear doblemente 10 caras con 5 vértices.

v)  $\mu_6 = 12$

Con seis vértices es posible bloquear doblemente a doce caras distintas en  $Y$ :

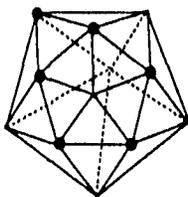


Figura 3.11:  $\mu_6 = 12$ .

Supongamos que se pueden 2-bloquear a trece caras. Entonces existen al menos 26 aristas que inciden en el conjunto  $B_6$ . Las posibles soluciones son las siguientes:

$$V_1 = 1 \text{ y } V_5 = 5$$

$$V_2 = 1, V_4 = 1 \text{ y } V_5 = 4$$

$$V_3 = 2 \text{ y } V_5 = 4$$

$$V_3 = 1, V_4 = 2 \text{ y } V_5 = 3$$

$$V_4 = 4 \text{ y } V_5 = 2$$

Como se puede ver, en todas nuestras posibilidades aparecen al menos dos vértices (llamémosles  $x, y$ ) que bloquean doblemente, cada uno, a cinco

caras distintas.

Existen dos configuraciones distintas en las que se pueden bloquear doblemente a cinco caras.

**1er. Caso** Supongamos que  $x$  es el centro de una rueda  $W_5$  y que hay tres vértices  $u, v, w$  en el ciclo de  $W_5$  tales que  $u, v$  son adyacentes. De este modo se han bloqueado doblemente las cinco caras en las que se encuentra  $x$ . Para poder obtener otro vértice que también bloquee doblemente a cinco caras, es necesario que  $u, v, w, y$  ó  $z$  sea el centro de una rueda  $W_5$ , cuyos triángulos se han 2-bloqueado. De esta manera tenemos tres casos.

**1.1.** Si  $y$  y  $z$  son ambos adyacentes a  $w$  se obtienen 10 caras doblemente bloqueadas.

**1.2** Si  $y$  y  $z$  son ambos adyacentes a  $u$  (ocurre lo mismo si se escogiera  $v$ ) se bloquean doblemente 11 caras distintas.

**1.3** Si  $y$  es adyacente a  $u$  y  $v$  y además  $z$  es adyacente a  $y$  se 2-bloquean únicamente 10 caras distintas.

**2o. Caso** Supongamos que  $x$  es el centro de una rueda  $W_5$  y que hay cuatro vértices  $u, v, w, y$  en el ciclo de  $W_5$ . Pero entonces, si queremos obtener otro vértice  $z$  con sus cinco caras bloqueadas doblemente, es necesario que  $z$  sea adyacente a  $v$  ó  $w$ , pero de esta manera sólo quedan 2-bloqueadas 10 caras distintas.

Por lo tanto  $\mu_8 = 12$ .

vi)  $\mu_7 = 14$ .

En este caso pensemos el problema inverso, ¿cuál es el mínimo número de caras que se pueden bloquear doblemente con cinco vértices?

Por el Teorema 3.5.1, sabemos que no es posible tener cuatro vértices  $(u, v, w, z)$ , que se encuentran a distancia 2 entre ellos, en  $Y$ ; de modo que tenemos que analizar cuál es el quinto vértice  $x$  que se puede escoger, de tal modo que se bloqueen el mínimo número de caras posible.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $u$  y  $v$  son adyacentes entre sí.

Si  $x$  forma un triángulo con  $u$  y  $v$  se bloquean doblemente seis caras distintas.

Si  $x$  es adyacente únicamente a un vértice, se bloquean también seis caras distintas.

Por lo tanto  $\mu_7 = 14$ .

vii)  $\mu_8 = 18$ .

Del mismo modo que en el inciso anterior, pensemos en el mínimo número de caras que se pueden bloquear doblemente con cuatro vértices.

Sabemos que no existen cuatro vértices ajenos en  $Y$ , pero sí es posible tomar tres vértices a distancia dos y un cuarto vértice adyacente únicamente a uno de ellos. De esta manera se bloquean doblemente a dos caras distintas en  $Y$ .

Por lo tanto  $\mu_8 = 18$ .

**Teorema 3.5.3**  $hc_o(Y, C_3) = 5$

**Demostración:**

Los distintos tipos de 5-coloraciones efectivas de  $Y$  son los que se muestran en la Tabla 3.8

$2_3 \cdot 3_2$
$2_4 \cdot 4_1$
$2_1 \cdot 3_3$
$2_2 \cdot 3_1 \cdot 4_1$
$2_3 \cdot 5_1$
$3_2 \cdot 4_1$
$2_2 \cdot 6_1$
$2_1 \cdot 3_1 \cdot 5_1$
$2_1 \cdot 4_2$
$2_1 \cdot 7_1$
$3_1 \cdot 6_1$
$4_1 \cdot 5_1$
$8_1$

Tabla 3.8:

y dado el Teorema 3.5.2 se obtienen las relaciones que aparecen en la Tabla 3.9, de donde se puede concluir que  $hc_o(Y, C_3) = 5$ .

**Observación 3.5.2** Podemos notar que en realidad se están obteniendo, con todos los tipos de coloraciones, al menos dos caras heterocromáticas.

Tipo de Coloración	Máximo Número de Hiperaristas 2-bloqueadas
$2_3 \cdot 3_2$	14
$2_4 \cdot 4_1$	14
$2_1 \cdot 3_3$	14
$2_2 \cdot 3_1 \cdot 4_1$	14
$2_3 \cdot 5_1$	16
$3_2 \cdot 4_1$	14
$2_2 \cdot 6_1$	16
$2_1 \cdot 3_1 \cdot 5_1$	16
$2_1 \cdot 4_2$	14
$2_1 \cdot 7_1$	16
$3_1 \cdot 6_1$	16
$4_1 \cdot 5_1$	16
$8_1$	18

Tabla 3.9:

## Capítulo 4

# Números heterocromáticos con respecto a vecindades de los sólidos platónicos

En este capítulo calcularemos los números heterocromáticos de los cinco sólidos platónicos, ahora las hiperaristas serán las distintas vecindades abiertas que se encuentran en cada sólido.

### 4.1 El Tetraedro

Existen cuatro distintas vecindades abiertas en  $T$ , cada una con tres elementos.

Para calcular  $h_{\infty}(T, \text{vec}(x))$  es fácil observar que se necesitan al menos tres colores porque la valencia de cada vértice en  $T$  es 3, pero como  $T = K_4$ , dados tres vértices, éstos son vecinos del cuarto.

Por lo tanto  $h_{\infty}(\text{vec}(x), T) = 3$ .

### 4.2 El Cubo

$Q$  tiene 8 vecindades distintas cada una con tres elementos.

Utilizamos la desigualdad (1.1) para encontrar las cotas superiores de las distintas  $\mu_i$  ( $2 \leq i \leq 6$ ) que aparecen en la Tabla 4.1

$\mu_2 = 2$
$\mu_3 \leq 4$
$\mu_4 \leq 6$
$\mu_5 \leq 7$
$\mu_6 \leq 9$

Tabla 4.1:

**Corolario 4.2.1**  $\tau_2(Q, \text{vec}(x)) = 6$ .

**Demostración:**

En la Tabla 4.1 hemos obtenido una cota superior para  $\mu_6$  y de hecho podemos encontrar una 2-transversal de  $Q$  con seis vértices.

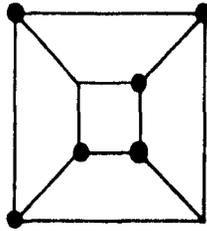


Figura 4.1:

De esto se sigue que  $h_{co}(\text{vec}(x), Q) \geq 4$ , pero la Figura 4.2 muestra una 4-coloración efectiva que no deja una vecindad heterocromática.

Antes de mostrar que  $h_{co}(Q, \text{vec}(x)) = 5$ , veremos que efectivamente  $\mu_1 = 2$ .

**Proposición 4.2.1**  $\mu_2 = 2$ .

**Demostración:**

En  $Q$  existen seis cuadrados distintos, de modo que se pueden elegir 2 vértices en un mismo cuadrado de tal manera que bloqueen doblemente 2 vecindades distintas ( eligiendo dos vértices que no sean adyacentes). Si quisieramos bloquear doblemente 3 vecindades distintas con dos vértices, debería de existir en  $Q$  un cuadrado con una diagonal, y un vértice en ésta; pero no es posible encontrar en  $Q$  una subgráfica de este tipo.

Por lo tanto  $\mu_2 = 2$ .

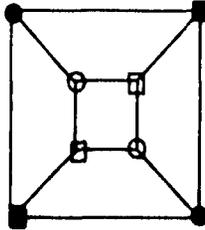


Figura 4.2:

**Teorema 4.2.1**  $h_{co}(Q, vec(x)) = 5$

**Demostración**

Veamos las posibles coloraciones que tenemos con este número de clases cromáticas.

- $2_3$
- $2_1 3_1$
- $4_1$

Aplicando los resultados de la Tabla 4.1 es posible ver que para cualquier 5-coloración efectiva de  $Q$ , en el mejor de los casos se bloquean doblemente siete vecindades distintas, lo cual no es suficiente.

Por lo tanto  $h_{co}(vec(x), Q) = 5$ .

Tipo de Coloración	Máximo Número de Hiperaristas 2-Bloqueadas
$2_3$	6
$2_1 3_1$	7
$4_1$	6

Tabla 4.2:

### 4.3 El Octaedro

El octaedro es una gráfica 4-regular, con seis vértices, de modo que tiene seis vecindades distintas, cada una con cuatro elementos.

**Teorema 4.3.1**  $\tau_2(O, \text{vec}(x)) = 3$

**Demostración**

Una vez más utilizamos la desigualdad (1.1) para ver que  $\tau_2(O, \text{vec}(x)) \geq 3$ . A continuación mostramos una 2-transversal de  $O$  que efectivamente consta de tres vértices.

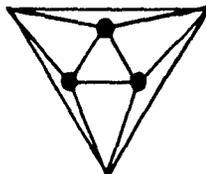


Figura 4.3:

**Teorema 4.3.2**  $h_{co}(O, \text{vec}(x)) = 5$ .

**Demostración**

Sólo hay una posible 5-coloración efectiva, y es aquella en la que hay una única clase cromática con dos vértices, y las demás tienen un sólo elemento. Pero como  $\tau_2(O, \text{vec}(x)) = 3$ , no es posible bloquear doblemente a todas las vecindades de  $O$  con dos vértices.

Por lo tanto  $h_{co}(\text{vec}(x), O) = 5$ .

## 4.4 El dodecaedro

El dodecaedro es una gráfica con 20 vecindades y cada vértice pertenece a 3 vecindades distintas.

La Tabla 4.3 muestra los valores máximos que pueden alcanzar las distintas  $\mu_i$  ( $2 \leq i \leq 13$ ). Para fijar ideas en el cálculo de  $h_{co}(D, \text{vec}(x))$ , los casos en los que se muestra la igualdad estricta se probarán en el Teorema 4.4.1.

Por las Tablas 4.4, 4.5, 4.6 y 4.7 vemos que es posible encontrar una 2-transversal de  $D$  que conste de 14 elementos.

En la Figura 4.4 mostramos un ejemplo.

$\mu_2 = 1$
$\mu_3 = 2$
$\mu_4 = 4$
$\mu_5 = 5$
$\mu_6 = 7$
$\mu_7 = 9$
$\mu_8 \leq 12$
$\mu_9 \leq 13$
$\mu_{10} \leq 15$
$\mu_{11} \leq 16$
$\mu_{12} \leq 18$
$\mu_{13} \leq 19$
$\mu_{14} \leq 21$

Tabla 4.3:

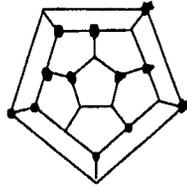


Figura 4.4:

**Proposición 4.4.1**  $h_{co}(G, \text{vec}(x)) = 8$

**Demostración:**

En las Tablas 4.4, 4.5, 4.6 y 4.7 se muestran, por un lado, los distintos tipos de 8-coloraciones efectivas que hay en  $D$ ; y por otro lado, utilizando los resultados de la Tabla 4.3, el máximo número de hiperaristas que se pueden 2-bloquear con estas distintas coloraciones.

Como podemos ver, efectivamente con 8 colores en  $D$  siempre se obtiene al menos una vecindad heterocromática.

Por lo tanto  $h_{co}(D, \text{vec}(x)) = 8$ .

Ahora si demostraremos las igualdades que se dieron en la Tabla 4.3

**Teorema 4.4.1**  $\mu_2 = 1, \mu_3 = 2, \mu_4 = 4, \mu_5 = 5, \mu_6 = 7, \mu_7 = 9$ .

Tipo de Coloración	Máximo Número de Hiperaristas 2-bloqueadas
$2_7 \cdot 6_1$	14
$2_8 \cdot 3_1 \cdot 5_1$	13
$2_6 \cdot 4_2$	14
$2_5 \cdot 3_2 \cdot 4_1$	13
$2_4 \cdot 3_4$	12
$2_6 \cdot 7_1$	15
$2_5 \cdot 3_1 \cdot 6_1$	14
$2_5 \cdot 4_1 \cdot 5_1$	13
$2_4 \cdot 3_2 \cdot 5_1$	13
$2_4 \cdot 3_1 \cdot 4_2$	14
$2_3 \cdot 3_3 \cdot 4_1$	13
$2_2 \cdot 3_5$	12
$2_3 \cdot 8_1$	17
$2_4 \cdot 3_1 \cdot 7_1$	15
$2_4 \cdot 4_1 \cdot 6_1$	15
$2_3 \cdot 3_2 \cdot 6_1$	14
$2_3 \cdot 3_1 \cdot 4_1 \cdot 5_1$	14
$2_2 \cdot 3_3 \cdot 5_1$	13
$2_4 \cdot 9_1$	17

Tabla 4.4:

### Demostración

i)  $\mu_2 = 1$

Para mostrar que con dos vértices, a lo más se puede bloquear doblemente una hiperarista supongamos lo contrario, es decir, que hay dos vértices  $x, y$  tales que  $|vec(x) \cap vec(y)| \geq 2$ . Sean  $w, z \in vec(x) \cap vec(y)$ . Pues entonces en  $D$  podemos encontrar un cuadrado,  $x, w, y, z, x$ , lo cual es una contradicción.

Por lo tanto,  $\mu_2 = 1$ .

ii)  $\mu_3 = 2$ .

Nuevamente, supongamos que  $\mu_3 = 3$

Sea  $B_3 = \{x, y, z\}$  el conjunto 2-bloqueador. Entonces debe existir, al menos, una vecindad 2-bloqueada por parejas entre los mismos  $x, y, z$ .

Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $x$  y  $y \in vec(u)$ , y que  $x$  y  $z \in vec(w)$ . En la tercera vecindad  $v$  que está bloqueada doblemente, debe

Tipo de Coloración	Máximo Número de Hiperaristas 2-bloqueadas
$2_3 \cdot 3_1 \cdot 8_1$	17
$2_3 \cdot 4_1 \cdot 7_1$	16
$2_2 \cdot 3_2 \cdot 7_1$	15
$2_2 \cdot 3_1 \cdot 4_1 \cdot 6_1$	15
$2_1 \cdot 3_3 \cdot 6_1$	14
$2_2 \cdot 3_1 \cdot 5_2$	14
$2_2 \cdot 4_2 \cdot 5_1$	15
$3_4 \cdot 5_1$	10
$2_1 \cdot 3_2 \cdot 4_1 \cdot 5_1$	14
$3_3 \cdot 4_2$	14
$2_3 \cdot 10_1$	13
$2_2 \cdot 3_1 \cdot 9_1$	17
$2_2 \cdot 4_1 \cdot 8_1$	18
$2_1 \cdot 3_2 \cdot 8_1$	17
$2_2 \cdot 5_1 \cdot 7_1$	16
$2_1 \cdot 3_1 \cdot 4_1 \cdot 7_1$	16
$2_2 \cdot 6_2$	16
$2_1 \cdot 3_1 \cdot 5_1 \cdot 6_1$	15
$2_1 \cdot 4_2 \cdot 6_1$	16

Tabla 4.5:

de ocurrir que cualquier pareja formada por  $x, y$  ó  $z$  esté en  $vec(v)$ .

**1er. Caso.** Supongamos que la pareja es una que contiene a  $x$ , sin pérdida de generalidad digamos que es la pareja  $x, y$ . Entonces tenemos un cuadrado formado por  $x, u, y, v, x$ , lo cual es una contradicción.

Para el caso en el que la pareja fuera la formada por  $x, w$  ocurriría exactamente lo mismo.

**2o. Caso.** Supongamos que la pareja es la formada por  $y, z$ . Entonces tenemos un hexágono formado por  $x, u, y, v, z, w, x$ ; lo que nos lleva a una contradicción.

Por lo tanto no se pueden bloquear doblemente tres vecindades con tres vértices, pero sí es posible bloquear dos vecindades. (Véase la Figura 4.5).

Tipo de Coloración	Máximo Número de Hiperaristas 2-bloqueadas
$3_2 \cdot 4_1 \cdot 6_1$	15
$3_3 \cdot 7_1$	16
$2_1 \cdot 4_1 \cdot 5_2$	15
$3_2 \cdot 5_2$	14
$3_1 \cdot 4_2 \cdot 5_1$	15
$4_4$	16
$2_2 \cdot 11_1$	18
$2_1 \cdot 3_1 \cdot 10_1$	18
$2_1 \cdot 4_1 \cdot 9_1$	18
$3_2 \cdot 9_1$	17
$2_1 \cdot 5_1 \cdot 8_1$	18
$3_1 \cdot 4_1 \cdot 8_1$	18
$2_1 \cdot 6_1 \cdot 7_1$	17
$3_1 \cdot 5_1 \cdot 7_1$	16
$4_2 \cdot 7_1$	17
$3_1 \cdot 6_2$	16
$4_1 \cdot 5_1 \cdot 6_1$	16
$5_3$	15

Tabla 4.6:

iii)  $\mu_4 = 4$ .

Nuevamente vamos a suponer que  $\mu_4 = 5$ . Entonces, utilizando la gráfica bipartita  $\beta$  que relaciona las vecindades 2-bloqueadas con los vértices

2-bloqueadores, se tiene que debe de existir un vértice  $x \in B_4$  tal que  $\forall u \in \text{vec}(x)$ , la vecindad de  $u$  ha sido bloqueada doblemente. Para que esto sea posible, es necesario utilizar tres vértices 1, 2, 3 que se encuentren a distancia dos de  $x$ .

Llamemos  $K_1, K_2$  y  $K_3$  a los distintos conjuntos de vértices que se encuentran a distancia 2 de  $x$  y que contienen a 1, 2, 3 respectivamente.

Notemos que  $d(K_i, K_j) \neq 2 \forall i, j \in 1, 2, 3$ . Esto quiere decir que cuando bloqueamos doblemente las vecindades de todos los vecinos  $x$ , sólo se bloquean doblemente estas tres vecindades y a ninguna otra vecindad.

Por lo tanto  $\mu_4 < 5$ .

Un ejemplo en el que se logran 2-bloquear cuatro vecindades distintas en  $D$  es un octágono en el que se van tomando a los elementos del conjunto

Tipo de Coloración	Máximo Número de Hiperaristas 2-bloqueadas
$2_1 \cdot 12_1$	19
$3_1 \cdot 11_1$	18
$4_1 \cdot 10_1$	19
$5_1 \cdot 9_1$	18
$6_1 \cdot 8_1$	19
$7_2$	18
$13_1$	19

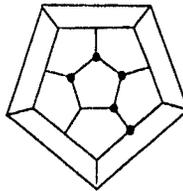


Figura 4.5:

2-bloqueador de manera alternada.

Antes de mostrar que  $\mu_5 = 5$ , mencionaremos un ejemplo de un conjunto de 5 vértices que efectivamente bloquea doblemente 5 vecindades.

Sea el conjunto 2-bloqueador el formado por los cinco vértices que se encuentran en un pentágono. Claramente han sido bloqueadas doblemente las cinco vecindades de cada uno de ellos.

iv) Para demostrar que  $\mu_5 < 6$  seguiremos un procedimiento análogo al que se utilizó en el caso anterior.

Supongamos que se pueden bloquear doblemente más de cinco vecindades, entonces debe de existir un vértice  $u$  con las vecindades de sus tres vecinos bloqueadas doblemente; pero por la demostración anterior, para que ocurra esto deben de utilizarse tres vértices más de  $B_5$ . Con esto, sólo nos faltaría por acomodar un vértice  $x$ .

Notemos que  $x$  debe de aprovechar a los restantes elementos de  $B_5$  que se han utilizado, es decir, que  $x$  se debe colocar en un lugar que se encuentre a longitud dos de un número máximo de elementos de  $B_5$ .

Nuevamente fijémonos en los conjuntos  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$  de posibles elementos de  $B_3$  que bloquean doblemente a las vecindades de  $u$ . Entre estos conjuntos no existe un vértice que se encuentre a distancia dos de los tres conjuntos pero si encontramos vértices que se encuentran a distancia dos de dos conjuntos, por lo que podemos bloquear doblemente, únicamente dos vecindades más al agregar  $x$ .

Por lo tanto  $\mu_3 = 5$ .

v)  $\mu_6 = 7$ .

La Figura 4.6 muestra un ejemplo en el que efectivamente se bloquean doblemente siete vecindades con seis vértices.

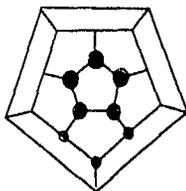


Figura 4.6:

Ahora, si suponemos que se pueden bloquear ocho vecindades y llegaremos a una contradicción.

Nuevamente pensemos en la gráfica bipartita que nos representa al conjunto de vértices que pertenecen al conjunto 2-bloqueador y a los vértices cuyas vecindades han sido bloqueadas doblemente.

En el caso del dodecaedro ocurre que cada vértice que se encuentra en el conjunto 2-bloqueador puede tener a lo más tres aristas y cada vértice cuya vecindad ha sido bloqueada doblemente tiene al menos dos aristas, de ahí se sigue que:  $1V_1 + 2V_2 + 3V_3 \geq 2\mu_6$

Como  $\mu_6 = 8$ , entonces nuestra desigualdad dice lo siguiente:

$$1V_1 + 2V_2 + 3V_3 \geq 16.$$

Por otro lado sabemos que  $V_1 + V_2 + V_3 = 6$ . Despejando  $V_2$  de esta igualdad y sustituyendo su valor en la desigualdad anterior, tenemos que  $V_3 - V_1 \geq 4$  por lo que  $V_3 \geq 4 + V_1$ .

Ahora podemos ver que el único caso en el que se puede cumplir nuestra desigualdad, de modo que sólo se empleen los seis vértices que nos interesan,

son los que a continuación mostramos:

$$V_1 = 1 \text{ y } V_3 = 5$$

$$V_2 = 2 \text{ y } V_3 = 4$$

$$V_2 = 1 \text{ y } V_3 = 5$$

$$V_3 = 6$$

Para analizar estos casos recurriremos a nuestra representación del dodecaedro.

Sabemos que deben existir al menos dos vértices  $x, y$  tales que sus vecindades completas han sido bloqueadas doblemente. Pero la manera en que podemos escoger a  $x, y$  nos lleva a tres casos distintos.

**1er. Caso.** Supongamos que  $vec(x) \cap vec(y) = \{\emptyset\}$  y además que  $x$  y  $y$  no son adyacentes.

Sabemos que para bloquear doblemente las vecindades de los tres vecinos de un vértice  $u$ , necesitamos tres elementos del conjunto 2-bloqueador, por lo que necesitamos que al menos dos vértices que bloqueen doblemente a vecinos de  $x$  también bloqueen a vecinos de  $y$ , es decir, que  $d(vec(x), vec(y)) \leq 5$ .

Llamemos 1, 2, 3 a los vecinos de  $x$  y sean 4, 5, 6 los vecinos de  $y$ . Ahora llamemos  $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5$  y  $K_6$  a los conjuntos de posibles vértices que se necesitan para bloquear doblemente a 1, 2, 3, 4, 5 y 6 respectivamente.

Ahora mostraremos una gráfica que indica que son estos conjuntos y sus intersecciones.

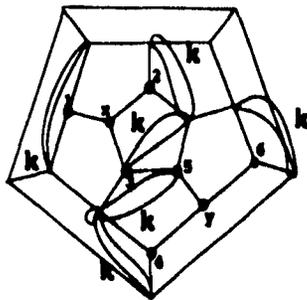


Figura 4.7:

Veamos que nos interesan los vértices en los que se den las intersecciones, ya que de esta manera con menos vértices bloqueamos doblemente el mismo

número de vecindades.

Ahora tenemos una gráfica en la cual se encuentran fijos cuatro elementos de  $B_6$ , y nuevamente nos fijamos en los posibles conjuntos bloqueadores y notemos que al elegir los dos vértices que nos faltan por escoger, sólo podemos bloquear tres vecindades más, y de esta manera tenemos que  $\mu_6 = 7$ .

**2o. Caso.** Supongamos que  $vec(x) \cap vec(y) = \{\emptyset\}$  y además que  $x$  y  $y$  son adyacentes.

En realidad el procedimiento es exactamente igual al anterior y resulta que no hay diferencia entre haber tomado los vértices adyacentes o no, ya que la adyacencia no nos ayuda para aumentar nuestros bloqueos, porque estos se dan con vértices que se encuentran a longitud dos.

**3er. Caso.** Supongamos que  $vec(x) \cap vec(y) \neq \emptyset$ .

Sea  $\{z\} = vec(x) \cap vec(y)$ , de modo que cuando nos fijamos en los conjuntos  $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5$  y  $K_6$  de vértices que bloquean a los vecinos tanto de  $x$  como de  $y$ , resulta que dos conjuntos deben de coincidir.

Nos ayudaremos a visualizar el problema con la Figura 4.8.

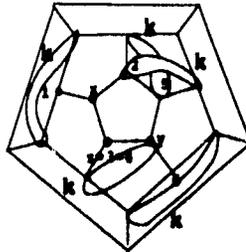


Figura 4.8:

Ahora podemos observar que para bloquear doblemente todas las vecindades de los vecinos de  $x$  y  $y$ , es necesario agregar cuatro bloqueadores más, pero esto nos da un total de 7 vértices en  $B_6$  lo cual es una contradicción.

Por lo tanto  $\mu_6 = 7$ .

vi)  $\mu_7 = 9$

Sabemos que con siete vértices sí se pueden bloquear nueve vecindades, y la Figura 4.9 es un ejemplo:

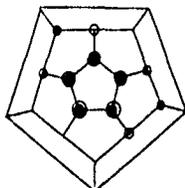


Figura 4.9:

Para ver que no se pueden bloquear más de nueve vecindades pensemos de la misma manera en que se resolvió el problema para  $\mu_6$ .

Supongamos que  $\mu_7 = 10$ , entonces se debe de cumplir la siguiente desigualdad:

$$1V_1 + 2V_2 + 3V_3 \geq 20$$

Y como además sabemos que debe de cumplirse que  $V_1 + V_2 + V_3 = 7$ , sustituimos esta igualdad en la desigualdad y obtenemos que  $V_3 \geq 6 \cdot V_1$  y los únicos casos que cumplen con esta restricción son:

$$V_2 = 1 \text{ y } V_3 = 6$$

$$V_3 = 7$$

Ahora analicemos porque estos casos no se pueden dar:

Como podemos ver en el primer caso, para casi todos los elementos de  $B_7$  ocurre que las vecindades de sus tres vecinos han sido bloqueadas doblemente.

Fijémonos en un vértice  $x$  de este tipo y fijémonos nuevamente en los conjuntos  $K_1, K_2, K_3$ .

Para poder bloquear doblemente a todas las vecindades de  $x$  es necesario que al menos un vértice de cada conjunto  $K_i$  se encuentre en  $B_7$ .

Sin pérdida de generalidad, digamos que  $a \in K_1$  también está en  $B_7$  y supongamos que  $a$  es del tipo  $V_2$ .

Ahora fijémonos en  $K_4, K_5$  y  $K_6$  los conjuntos bloqueadores de los vecinos de  $a$ .

Como debe de ocurrir que  $|K_i \cap B_7| \geq 1, \forall i = 1..6$ , se asegura que al menos se han utilizado seis de los siete vértices que hay en  $B_7$ .

Veamos la Figura 4.10 para fijar ideas:

Si del conjunto  $K_2$  ocurriera que  $d \in B_7$ , sería necesario agregar un vértice  $z$  para asegurar que se bloquean doblemente todas las vecindades de  $d$ .

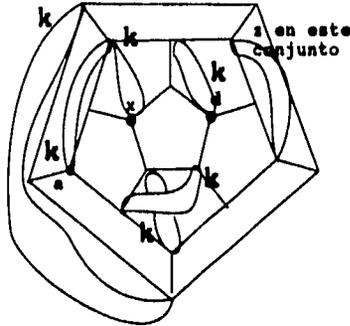


Figura 4.10:

Pero resulta que para  $K_6$ , no importa cual vértice nos tomemos, es tipo  $V_2$ , lo cual es una contradicción.

Entonces supongamos que del conjunto  $K_2$   $c \in B_7$ , pero resulta que ocurre lo mismo, también debemos agregar un vértice  $z$  para obligar a  $c$  a ser del  $V_3$ . Y seguimos teniendo el mismo problema con los vértices del conjunto  $K_6$ .

Por lo tanto no puede ocurrir que exista una coloración del tipo  $V_2 = 1$  y  $V_3 = 6$ .

Después de esta demostración es fácil ver que no va a ser posible el caso en el que nuestros siete vértices son del tipo  $V_3$ .

Fijándonos nuevamente en nuestros conjuntos  $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5$  y  $K_6$  dados dos vértices  $x$  y  $a$ , podemos ver que existen tres conjuntos (en este caso  $K_2, K_3$  y  $K_4$ ) con sus respectivos elementos del tipo  $V_2$ , de modo que aún agregando un séptimo vértice, no podemos lograr que los siete sean del tipo  $V_3$ .

Y este problema no depende de como se escogieron  $a$  y  $x$ .

Por lo tanto no es posible tener siete vértices del tipo  $V_3$ , de lo que se sigue que no es posible que  $\mu_7 \geq 10$  y de esta manera podemos concluir que  $\mu_7 = 9$ .

**Observación:** Vale la pena hacer notar que con cuatro vértices, sólo se pueden bloquear doblemente cuatro vecindades cuando se toman los ele-

mentos de manera alternada en el octágono, y a continuación daremos la prueba.

**Proposición 4.4.2** *La única manera de bloquear doblemente cuatro vecindades es por medio de un octágono.*

### **Demostración**

Cuando se tiene un octágono en el que los vértices que pertenecen a  $B_4$  se toman alternadamente logramos bloquear doblemente cuatro vecindades, ya que para cada vértice  $x \in B_4$  ocurre que  $|\{x\} \cap \text{vec}(y, \text{oct})| = 2$ .

Ya vimos que con cuatro vértices no es posible tener un vértice  $x$  con tres vecinos cuyas vecindades hayan sido bloqueadas doblemente por lo que, si queremos bloquear doblemente cuatro vecindades distintas, cada vértice debe de bloquear doblemente a dos vecindades distintas.

Sean  $w, x, y, z \in B_4$ . Como dijimos que cada vértice debe de bloquear doblemente a dos vecindades, sin pérdida de generalidad supongamos que  $x$  y  $y \in \text{vec}(1)$ , y que  $x$  y  $w \in \text{vec}(2)$ , entonces  $w$  y  $y$  no pueden bloquear doblemente a una vecindad en común, ya que entonces habría un cuadrado en el dodecaedro, y por la misma razón no pueden bloquear doblemente a otro vecino de  $x$ . Entonces sólo resta que  $w, y$  bloqueen ambos a un vecino de  $z$ , pero lo que hemos formado es un octágono en el que los vértices  $w, x, y$  y  $z$  aparecen alternadamente.

Por lo tanto, la única forma de bloquear doblemente cuatro vecindades distintas con cuatro vértices es a través de un octágono.

## **4.5 El icosaedro**

El icosaedro es una gráfica con doce vecindades y cada vecindad consta de 5 elementos.

Ya hemos analizado el número heterocromático con respecto a vecindades en el dodecaedro, ahora calcularemos  $h_\infty(Y, \text{vec}(Y))$ .

**Teorema 4.5.1**  $\mu_2 = 2$ .

**Demostración:**

En  $Y$  existen ciclos de longitud cuatro pero  $K_4$  no es subgráfica de  $Y$ , por lo que se pueden bloquear doblemente a lo más dos vecindades de  $Y$ . Por lo tanto  $\mu_2 = 2$ .

Utilizando la desigualdad (1.1) y el resultado anterior, obtenemos la Tabla 4.7.

$\mu_2 = 2$
$\mu_3 \leq 6$
$\mu_4 \leq 10$
$\mu_5 \leq 12$

Tabla 4.7:

**Proposición 4.5.1**  $\tau_2(Y, \text{vec}(x)) = 6$

**Demostración:**

En la Figura 4.11 aparece un ejemplo en el que con seis vértices es posible bloquear doblemente a las doce vecindades de  $Y$ .

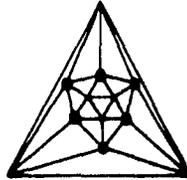


Figura 4.11:

Por lo tanto, si ahora logramos probar que con cinco vértices no vamos a poder bloquear doblemente a todas las vecindades del icosaedro, podremos concluir que  $\tau_2(Y, \text{vec}(x)) = 6$ .

La demostración consiste en tratar de bloquear doblemente a las 12 vecindades con cinco vértices y ver que esto no es posible.

Supongamos que  $B \gamma$  tiene cinco elementos.

Veamos la representación que tenemos de  $Y$  en la Figura 4.11 y notemos que existen dos vértices, 0 y 11 que tienen vecindades ajenas, ya que su distancia en  $Y$  es 3, de modo que tenemos dos subgráficas inducidas ( $G_0, G_{11}$  respectivamente) las cuales están formadas cada una por seis vértices; es decir, contienen a todos los vértices de  $Y$ .

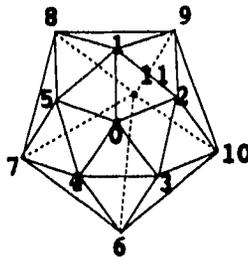


Figura 4.12:

Para bloquear doblemente las vecindades de 0 y 11 es necesario que dos vecinos de cada uno de ellos se encuentren en  $B \gamma$ .

Sean  $\{x_1, x_2\} \subset \text{vec}(0)$  y  $\{y_1, y_2\} \subset \text{vec}(11)$  estos vecinos, de modo que se han empleado ya cuatro de los cinco vértices que se encuentran en  $B \gamma$ .

El quinto vértice  $z$  que falta agregar, tiene que encontrarse en  $G_0$  o en  $G_{11}$ , ya que éstas cubren a  $V(Y)$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el quinto vértice se encuentra en  $G_0$ .

Para fijar ideas nos ayudaremos de la representación que dimos del icosaedro.

**1er. Caso.** Cuando  $0 \in B \gamma$ .

Este caso tiene dos subcasos por analizar ya que  $x_1$  y  $x_2$  pueden ser adyacentes entre sí o no serlo.

**1.1**  $x_1$  y  $x_2$  son adyacentes.

Sin pérdida de generalidad, digamos que  $x_1 = 3$  y  $x_2 = 4$  son como se muestran en la Figura anterior. De esta manera tenemos que en  $G_0$  sólo falta por bloquear doblemente a la vecindad del vértice 1, que de hecho no

es adyacente a  $x_1$  ni a  $x_2$ . Para poder bloquear doblemente a esta vecindad, va a ser necesario que  $y_1, y_2 \in \text{vec}(1)$ , con esto hemos obligado a que los vértices 8 y 9 sean  $y_1$  y  $y_2$ .

Pero al presentarse esta situación tenemos que  $\text{vec}(y_1)$  y  $\text{vec}(y_2)$  no van a poder bloquearse doblemente.

Por lo tanto no puede ocurrir que  $x_1$  y  $x_2$  sean adyacentes entre sí.

**1.2  $x_1$  y  $x_2$  no son adyacentes.**

Digamos que  $x_1 = 2$  y  $x_2 = 4$ . Al elegirlos de esta forma, ocurre que  $\forall v \in V(G_0), |\text{vec}(v, G_0) \cap \{x_1, x_2\}| \geq 1$ . Entonces lo que haremos será analizar las vecindades de los vértices en  $G_{11}$  y podremos ver que 8 no es adyacente a ningún elemento que se encuentre en  $B$  y, por lo que nuevamente  $y_1$  y  $y_2$  deben de ser 7, 9 ó 12; pero entonces  $\text{vec}(x_1)$  y  $\text{vec}(x_2)$  no se han sido bloqueadas doblemente.

Por lo tanto no puede ocurrir que  $x_1$  y  $x_2$  no sean adyacentes, y así no puede ocurrir que  $0 \in B$ .

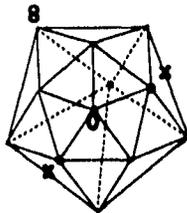


Figura 4.13:

**2o. Caso.  $0 \notin B$ .**

Nuevamente nuestro problema se va a dividir en dos subcasos, el primero es aquel en el que los tres vértices  $x_1, x_2$  y  $z$  son consecutivos y el segundo es el caso contrario.

**2.1  $x_1, x_2$  y  $z$  son consecutivos.**

Sin pérdida de generalidad digamos que nuestros tres elementos de  $B$  son  $x_1 = 2, x_2 = 3$  y  $z = 4$ . Si observamos nuestro pentágono exterior veremos que el vértice 8 no es adyacente a 2, 3 ni 4, por lo que  $y_1$  y  $y_2 \in \text{vec}(8, G_4)$ ,

y de hecho deben de ser 7, 9 ó 12, pero en ninguno de estos casos se pueden bloquear doblemente las vecindades de 3 ni de 4.

Por lo tanto los  $x_1, x_2$  y  $z$  no pueden ser consecutivos.

**2.2  $x_1, x_2$  y  $z$  no son consecutivos.**

Como estamos considerando el caso en el que los tres elementos de  $B$  y pertenecen al pentágono de  $G_1$  y no son consecutivos, forzosamente debe ocurrir que dos de ellos son adyacentes.

Sin pérdida de generalidad, digamos que son  $x_1 = 1, x_2 = 3$  y  $z = 4$ . Pero como ni 3 ni 4 son vecinos de 1, debe de ocurrir que  $7$  y  $8 \in B$  y para poder bloquear doblemente  $vec(1)$ . Pero entonces quedan sin bloquearse doblemente las vecindades de 3 y de 4.

Por lo tanto no puede ocurrir que  $x_1, x_2$  y  $z$  no sean consecutivos.

Así pues  $\tau_2(Y, vec(x)) > 3$  y por el ejemplo de la Figura 4.11 podemos concluir que  $\tau_2(Y, vec(x)) = 6$

Ahora que ya sabemos que  $\tau_2(Y, vec(x)) = 6$  tenemos que  $h_{co}(Y, vec(Y)) \geq 8$ .

En la Figura 4.13 mostramos una coloración con ocho colores que no deja ninguna vecindad heterocromática.

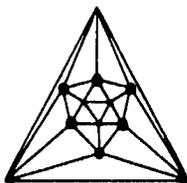


Figura 4.14:

A continuación probaremos que  $h_{co}(Y, vec(Y)) = 9$ .

**Teorema 4.5.2**  $h_{co}(Y, vec(x)) = 9$ .

**Demostración:**

Supongamos que tenemos nueve clases cromáticas, como  $o(Y) = 12$  tenemos los siguientes tipos de coloraciones:

2<sub>3</sub>

$2_1 \cdot 3_1$

$4_1$

Nuevamente nos ayudaremos de los resultados presentados en la Tabla 4.7 para obtener el máximo número de vecindades que se pueden bloquear doblemente en cada coloración.

Estos resultados se muestran en la Tabla 4.8.

Tipo de Coloración	Máximo Número de Hiperaristas 2-bloqueadas
$2_3$	6
$2_1 \cdot 3_1$	11
$4_1$	10

Tabla 4.8:

Y con esto podemos concluir que  $h_{co}(Y, vec(Y)) = 9$ .

## Capítulo 5

# Otros Resultados en el Icosaedro y en el Dodecaedro

En este capítulo vamos a estudiar el número heterocromático del icosaedro y del dodecaedro con respecto a distintas subgráficas de cada una de ellas.

Nos ayudaremos de resultados anteriores, y el procedimiento en algunos casos será similar al antes empleado.

### 5.1 Otros Resultados en el Icosaedro.

#### 5.1.1 Número Heterocromático de $Y$ con respecto a dos triángulos ajenos.

Dada una 5-coloración efectiva de  $Y$ , hemos visto que siempre se pueden encontrar dos triángulos heterocromáticos. (Veánse los distintos tipos de coloraciones en la Tabla 3.9) Ahora calcularemos el mínimo número de colores que se necesitan para garantizar que los dos triángulos heterocromáticos sean ajenos en  $Y$ .

Con una coloración del tipo  $\delta_1$ , es posible obtener dos triángulos heterocromáticos que comparten una arista, de modo que no son ajenos y por lo tanto cinco colores no son suficientes para tener 2 triángulos heterocromáticos y ajenos.

Los distintos tipos de 6-coloraciones efectivas de  $Y$ , junto con el máximo número de hiperaristas que se pueden 2-bloquear con cada una de ellas aparecen en la Tabla 5.1.

Tipo de Coloración	Máx. Núm. de Hiperaristas que se pueden 2-bloquear
$2_6$	12
$2_4 \cdot 3_1$	12
$2_3 \cdot 4_1$	12
$2_2 \cdot 3_2$	12
$3_3$	12
$2_2 \cdot 5_1$	14
$2_1 \cdot 3_1 \cdot 4_1$	12
$4_2$	12
$3_1 \cdot 5_1$	14
$2_1 \cdot 6_1$	14
$7_1$	14

Tabla 5.1:

Como se puede ver, siempre existen, al menos, seis caras heterocromáticas, lo cual es suficiente para garantizar la existencia de dos triángulos heterocromáticos, ajenos en la subgráfica inducida y a continuación lo mostraremos.

**Teorema 5.1.1** *Dada una 6-coloración en  $Y$  siempre es posible encontrar  $G' \subset Y$  donde  $G' = \{C_1 \cup C_2\}$ :  $C_1, C_2$  son caras en  $Y$ .*

**Demostración:**

Supongamos lo contrario, entonces todos los triángulos heterocromáticos que aparecen en  $Y$  deben de tener un vértice en común o una arista. Pero en realidad ninguno de los dos casos es posible, ya que, por un lado tenemos que  $Y$  es cinco regular, lo que nos indica que a lo más pueden haber cinco triángulos con un vértice en común. Por el otro lado tenemos que deberían de compartir los seis una misma arista, lo cual tampoco es posible en  $Y$ .

Por lo tanto  $hc_0(Y, G) = 6$ .

¿Cuál sería  $hc_0(Y, G)$  si además pedimos que los triángulos sean ajenos en la subgráfica inducida?

**Definición 5.1.1** *Los triángulos  $A$  y  $C \subset Y$  son ajenos en la subgráfica inducida si la distancia de  $A$  a  $C$  es mayor o igual que dos.*

**Proposición 5.1.1** *Los triángulos  $A$  y  $C$ , en  $Y$ , se encuentran a distancia mayor o igual que dos si y sólo si son antipodas.*

**Demostración:**

Dos caras antípodas en  $Y$  están a distancia dos, probaremos que son las únicas.

Dado un triángulo  $A \subset Y$ ,  $\forall x \in V(A)$ ,  $x$  pertenece a cuatro triángulos distintos de  $A$  y  $x$  se encuentra a distancia uno de cinco triángulos diferentes. Además,  $\forall x, y \in V(A)$ ,  $(x, y)$  pertenecen a un triángulo diferente de  $A$  y ambos vértices se encuentran a distancia uno de dos mismos triángulos. De tal modo que existen 9 triángulos a distancia cero de  $A$  y 9 a distancia uno, es decir, que existen 18 triángulos en  $Y$  a distancia menor que dos con respecto a  $A$ . Pero como  $Y$  tiene 20 caras distintas, sólo existe un triángulo con distancia mayor o igual a dos, el cual es el antípoda a  $A$ .

De esta manera, el problema se reduce a encontrar el número heterocromático de dos caras antípodas en  $Y$

Un ejemplo de una 6-coloración que no deja caras antípodas heterocromáticas es considerar una rueda en el icosaedro cuyos vértices tengan distinto color entre sí, y el resto de los vértices el mismo color del centro de la rueda.

Un ejemplo de una 7-coloración que tampoco tiene caras antípodas heterocromáticas se obtiene cambiando de color el centro de la rueda ajena a la primera que habíamos tomado.

**Teorema 5.1.2**  $hc_0(Y, G') = 8$  donde  $G' = \{C_1 \cup C_2 : C_1, C_2 \text{ son caras de } Y \text{ y } d(C_1, C_2) \geq 2\}$ .

**Demostración:**

En  $Y$  existen 10 parejas distintas de caras antípodas. La Tabla 5.2 muestra las distintas 8-coloraciones que podemos obtener en la gráfica, así como el máximo número de caras que podemos 2-bloquear:

Tipos de Coloraciones	Máx. Núm. de Hiperaristas 2-Bloqueadas
$2_4$	8
$2_2 \cdot 3_1$	8
$2_1 \cdot 4_1$	8
$3_2$	8

Tabla 5.2:

El máximo número de aristas dos bloqueadas es 8, lo cual nos garantiza que siempre aparece, al menos un par de caras antípoda heterocromáticas. Por lo tanto  $hc_o(Y, G') = 8$ .

### 5.1.2 Número Heterocromático de $Y$ con respecto a triángulos adyacentes.

Ahora consideremos a  $G'$  como dos triángulos heterocromáticos unidos por un vértice. ¿Cuánto valdrá  $hc_o(Y, G')$ ?

Anteriormente habíamos visto que con toda 5-coloración efectiva de  $Y$  se obtienen al menos 2 triángulos heterocromáticos y también habíamos visto que no eran ajenos, pero esto aún no es suficiente para garantizar la existencia de  $G'$  en cualquier 5-coloración, ya que podría ocurrir que los triángulos se encontraran unidos por una arista. De hecho en la Figura 5.1 se muestra una 5-coloración de  $Y$  que no contiene a  $G'$ .

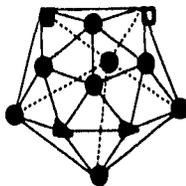


Figura 5.1:

**Teorema 5.1.3**  $hc_o(Y, G') = 6$

**Demostración:**

La demostración es por contradicción. Supongamos que existe una 6-coloración efectiva de  $Y$  en la cual no aparece  $G'$  como subgráfica. Existen al menos 6 triángulos heterocromáticos en  $Y$ .

Entonces debe de ocurrir lo siguiente:

i) No pueden existir tres triángulos tricromáticos que coincidan en un mismo vértice.

ii) Si tenemos dos triángulos  $A$  y  $B$  heterocromáticos y con un vértice en común entonces coinciden dos vértices (es decir, comparten una arista).

Como la gráfica dual de  $Y$  es  $D$ , trabajaremos con la segunda gráfica., considerando al conjunto de vértices de  $D$  como las caras de  $Y$ .

Entonces el problema se traduce a lo siguiente:

Escoger un conjunto  $C \subset V(D)$ , con seis vértices, de tal manera que cualesquiera tres de ellos no sean consecutivos y además, las parejas de vértices que pertenezcan a un mismo pentágono, son adyacentes.

Esto es lo mismo que pedir :

i)  $\forall x \in C$ , no existe  $y \in C$  tal que  $d(x, y) = 2$ .

ii)  $\forall x \in C$ , existe a lo más un vértice  $y \in C$  tal que  $(x, y) \in A(D)$ .

Sin pérdida de generalidad, fijemos a uno de los vértices, y llamémosle  $x$ . Existen dos casos por analizar, cuando existe  $y \in C$  tal que  $(x, y) \in A(D)$  y el caso contrario.

### 1er. Caso

Hasta este momento sabemos que los cuatro vértices restantes no los podemos escoger entre los que se encuentran a distancia dos de  $x$ , los que se encuentran a distancia dos de  $y$  ni los que se encuentran a distancia uno de  $x$ ; es decir, hemos descartado 10 posibilidades.

Afirmamos que existe  $z \in C$  tal que  $d(x, z) = 3$  ya que de ser lo contrario, descartaríamos seis nuevas posibilidades, y los vértices restantes no serían suficientes porque en el mejor de los casos, sólo dos de ellos podrían pertenecer a  $C$ .

El próximo vértice por elegir,  $u$ , puede ser de dos maneras, estar a distancia uno de  $z$  o no estarlo.

1.1  $d(z, u) = 1$ .

Al elegir  $u$ , notamos que los únicos dos vértices disponibles no causan ninguna contradicción. Aparentemente podemos tener seis triángulos heterocromáticos en  $Y$ , dispuestos por parejas, y de manera que comparten una arista cada una de las parejas; pero veamos la Figura 5.2, en ella, los vértices marcados son los del conjunto  $C$  y las letras representan los colores que estamos empleando (recordemos que las caras de  $D$  son los vértices de  $Y$ , de modo que  $x$ , que está rodeado por los pentágonos 1, 2, 3 es el triángulo cuyos vértices tienen los colores 1, 2 y 3.

1.2  $d(z, u) \neq 1$ .

Con esta hipótesis, me restan por escoger tres vértices pero también una única posibilidad, que sean los tres restantes, lo cual me lleva a una contradicción ya que son consecutivos.

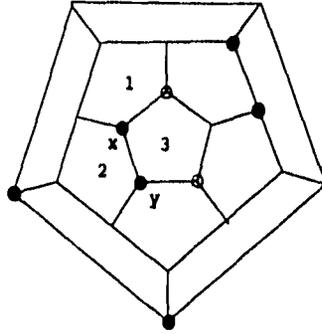


Figura 5.2:

Por lo tanto  $d(x, y) \neq 1$ .

### 2o. Caso

En este caso al, elegir  $y$  de tal manera que  $d(x, y) = 3$ , los vértices restantes no cumplen con las condiciones que le pedimos ya que al menos una pareja de vértices se encuentra a distancia 2.

Por lo tanto no podemos elegir  $y$  tal que  $d(x, y) = 3$ .

Por lo tanto en cualquier 6-coloración de  $D$  podemos encontrar  $G'$ .

Finalmente, calcularemos  $hc_0(Y, G')$ , donde  $G'$  es la gráfica que consta de dos triángulos heterocromáticos que comparten una arista.

Sabemos que dada una 3-coloración de  $Y$  es posible encontrar dos triángulos heterocromáticos que no comparten un mismo vértice; además la Figura 5.3 muestra una 6-coloración que no contiene a ninguna  $G'$ .

**Teorema 5.1.4**  $hc_0(Y, G') = 7$  donde  $G' = \{C_1 \cup C_2 : C_1, C_2 \text{ son caras de } Y \text{ y } |C_1 \cap C_2| = 2\}$ .

### Demostración:

En la Tabla 5.3 se muestran los diferentes tipos de 7-coloraciones así como el máximo número de caras que bloquean doblemente estas coloraciones:

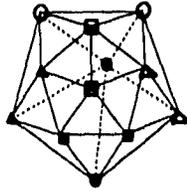


Figura 5.3:

Tipos de 7-Coloraciones	Máx. Núm. de Hiperaristas 2-Bloqueadas
$2_5$	10
$2_3 \cdot 3_1$	10
$2_2 \cdot 4_1$	10
$2_1 \cdot 3_2$	10
$2_1 \cdot 5_1$	10
$3_1 \cdot 4_1$	10
$6_1$	10

Tabla 5.3:

Como se puede observar, en cualquiera de los tipos de 7-coloraciones, obtenemos 10 triángulos heterocromáticos.

Supongamos que existe una 7-coloración en la cual no aparece  $G'$ . Entonces los triángulos tricromáticos deben de cumplir con las siguientes propiedades:

- i) No hay triángulos heterocromáticos que tengan una arista en común.
- ii) No hay tres triángulos heterocromáticos rodeando a un mismo triángulo, ya que éste último también sería heterocromático, y entonces existirían cuatro  $G'$  distintas.

Nuevamente pensemos en la gráfica  $D$ , dual de  $Y$ .

Nuestro problema se reduce a poder encontrar un conjunto  $C \subset V(D)$  con diez vértices, todos ellos a distancia dos y además, dados  $x, y, z \in C$ , estos tres vértices no rodean a otro vértice  $w$ .

Dejemos fijo en  $D$  a un vértice y a partir de él, vamos construyendo una sucesión de vértices que se encuentren a distancia dos, y que además no vayan rodeando a ningún otro vértice. La Figura 5.4 muestra como queda esta elección de vértices, donde por un lado se encuentran los vértices que

representan a las caras heterocromáticas de  $Y$ , y por otro lado los vértice que no se pueden elegir.

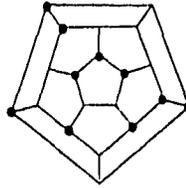


Figura 5.4:

De esta manera hemos mostrado que sólo podemos obtener ocho triángulos heterocromáticos, contradiciendo que teníamos diez.

Por lo tanto  $hc_o(Y, G') = 7$ .

## 5.2 Otros Resultados en el Dodecaedro.

Las caras de  $D$  son pentágonos, y hemos visto en el Capítulo 4 que en toda 15-coloración efectiva se obtienen al menos 2 caras heterocromáticas. Nuevamente podemos preguntarnos si estas caras son ajenas o no.

Notemos que para todo  $A = C_5$  en  $D$  existen 5 caras adyacentes a  $A$  (una por cada arista). De este modo, es fácil pensar que necesitamos muchos  $C_5$  heterocromáticos para garantizar que dos de ellos sean ajenos.

En la Figura 5.5 mostraremos una 15-coloración y una 16-coloración en  $D$ , que no tienen caras heterocromáticas ajenas.

**Proposición 5.2.1**  $hc_o(D, G') = 17$ , donde  $G'$  denota a dos  $C_5$  ajenos.

### Demostración:

En la Tabla 5.4 aparecen las relaciones que existen entre los posibles tipos de coloraciones de  $D$  y el número de caras heterocromáticas que se obtienen con cada una de ellas.

Lo que se puede observar en la Tabla, es que siempre se obtienen 6  $C_5$  heterocromáticos, lo cual es suficiente para garantizar que dos de ellos son ajenos (de hecho son al menos tres parejas de caras ajenas).

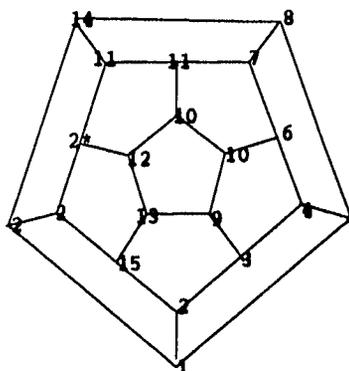


Figura 5.5: Añadiendo un nuevo color a un elemento de la clase cromática 2 se obtiene la 16-coloración.

Tipos de Coloraciones	Máx. Núm. de Hiperaristas 2-Bloqueadas
$4_1$	5
$3_1 \cdot 2_1$	5
$2_3$	6

Tabla 5.4:

Por lo tanto  $hc_o(D, G') = 17$ .

Para el caso en el que deseamos que los pentágonos sean ajenos en la subgráfica inducida  $G' \subset D$ , ocurre lo mismo que en el caso de  $Y$ , es decir, estos dos pentágonos tienen que ser antípodas en  $D$ , ya que, dado un pentágono, sólo la cara antípoda se encuentra a distancia dos de él.

La Figura 5.6 muestra una 17-coloración que no contiene una  $G'$ .

**Corolario 5.2.1**  $hc_o(D, G') = 18$ .

**Demostración:**

Los distintos tipos de 18-coloraciones con sus respectivas caras 2-bloqueadas aparecen en la Tabla 5.5.

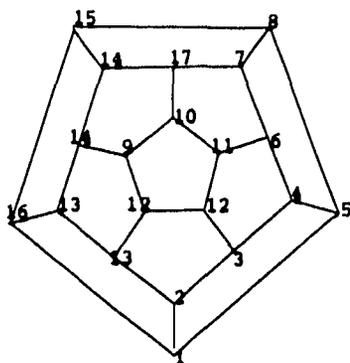


Figura 5.6:

Tipos de Coloraciones	Máx. Núm. de Hiperaristas 2-Bloqueadas
$2_2$	4
$3_1$	3

Tabla 5.5:

Pero podemos observar que esto nos garantiza la aparición de al menos 2 parejas de antipodas.

Por lo tanto  $hc_0(D, G') = 18$ .

## Capítulo 6

### Cálculo de las distintas $\mu_i$

A continuación se presentan las demostraciones de los cálculos de las distintas  $\mu_i$  para los casos del icosaedro y del dodecaedro. El resto de los casos se presentaron anteriormente en los Capítulos 4 y 5.

#### 6.0.1 Dodecaedro

Primero consideraremos el caso en el que las hiperaristas están formadas por las distintas caras de  $D$ .

En el Capítulo 5 se demostró  $\mu_2 = 2$  y  $\mu_8 = 12$ . A continuación mostraremos los resultados que se presentan en la Tabla 6.1.

$\mu_3 = 3$
$\mu_4 = 5$
$\mu_5 = 6$
$\mu_6 = 8$
$\mu_7 = 10$

Tabla 6.1:

1)  $\mu_3 = 3$ .

Anteriormente habíamos dicho que  $\mu_3 \leq 4$ . Veremos que esto no es posible y al mismo tiempo mostraremos que efectivamente se 2-bloquean tres caras distintas en  $D$  con tres vértices.

Supongamos lo contrario, es decir, que es posible 2-bloquear 4 caras con tres vértices. Cada cara tiene contiene al menos dos vértices del conjunto 2-bloqueador  $\mathcal{B}_3$ , lo cual implica que existen dos vértices  $x, y$  en  $\mathcal{B}_3$  cuyas

tres caras a las que pertenecen, han sido 2-bloqueadas. Pero como en  $D$  existen tres caras distintas con dos vértices en común, es necesario que, dado un vértice  $x$ , utilizar (al menos) dos elementos,  $y$  y  $z$  en  $\mathcal{B}_3$ , para bloquear doblemente tres caras; ya que si  $x$  y  $y$  2-bloquean dos caras distintas, como la gráfica es 3-regular, si  $x$  y  $z$  bloquean doblemente dos caras distintas, una de ellas también ha sido 2-bloqueada por  $x, y$ . Por lo tanto  $\mu_3 = 3$ .

ii)  $\mu_4 = 5$ .

Nuevamente supongamos que  $\mu_4 = 6$ , de tal modo que cada uno de los elementos de  $\mathcal{B}_4$  2-bloquea las tres caras a las que pertenece. Por i) sabemos que, dado  $x \in \mathcal{B}_4$  son necesarios al menos dos elementos más,  $y$  y  $z$ , para que sean bloqueadas doblemente las tres caras que contienen a  $x$ . Veamos los diferentes casos:

**1er. Caso.** Dos caras, tanto de  $y$  como de  $z$ , han sido bloqueadas doblemente.

Este caso se presenta cuando  $y, x, z$  forman una trayectoria y, en este caso, la tercera cara de  $y$  que no se ha 2-bloqueado, se encuentra a distancia 1 de la cara de  $z$  que tampoco se ha bloqueado doblemente. Pero entonces son necesarios dos vértices más para que las tres caras, tanto de  $y$  como de  $z$  sean bloqueadas doblemente, lo cual es una contradicción ya que el conjunto 2-bloqueador consta de cuatro elementos.

**2o. Caso.** Dos caras de  $y$  han sido bloqueadas doblemente, mientras que de  $z$  solamente una.

Este caso ocurre cuando la distancia entre  $y$  y  $z$  es igual a 3, pero en realidad pasa lo mismo que en el caso anterior, son necesarios dos vértices más para bloquear doblemente a las tres caras, y ya vimos que esto no es posible.

**3er. Caso.** Una cara, tanto de  $y$  como de  $z$ , han sido bloqueadas doblemente.

El caso en el que solamente han sido 2-bloqueadas una cara, tanto de  $y$  como de  $z$ , indica que en realidad falta todavía bloquear doblemente la tercera cara de  $x$ , y para poder evitar esto, es necesario emplear el cuarto elemento de  $\mathcal{B}_4$ .

Por lo tanto  $\mu_4 < 6$ .

La Figura 6.1 muestra un ejemplo en el que con cuatro vértices se pueden bloquear doblemente 5 caras distintas en  $\mathcal{D}$ .

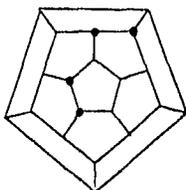


Figura 6.1:

iii)  $\mu_5 = 6$ .

Una vez más supondremos que  $\mu_5 = 7$ , lo cual querría decir que al menos para cuatro vértices,  $x, y, z, v$  en  $\mathcal{B}_5$ , han sido bloqueadas doblemente las tres caras a las que pertenecen cada uno de ellos.

Pero por ii) sabemos que para lograr que tres vértices tengan bloqueadas doblemente las tres caras de las que forma parte, son necesarios al menos cinco vértices.

En ambos casos, si los vértices  $v$  y  $w$  que añadimos, se encuentran a distancia menor o igual a dos, se habrán bloqueado doblemente seis caras en total; y en caso contrario únicamente cinco.

En el tercer caso no se logran ni siquiera bloquear las tres caras de cada uno de los elementos de  $\mathcal{B}_5$ .

Por lo tanto  $\mu_5 = 6$ .

iv)  $\mu_6 = 9$ .

En el Capítulo 3 mostramos que  $\mu_6 \leq 9$  y  $\mu_7 \leq 10$ . En la Figura 6.2 se muestran dos ejemplos en el que efectivamente se logran 2-bloquear nueve caras de  $\mathcal{D}$  y diez caras de  $\mathcal{D}$  utilizando seis y siete vértices respectivamente.

Ahora demostraremos los valores de las distintas  $\mu_i$  ( $2 \leq i \leq 14$ ) de  $\mathcal{D}$  que se presentan en la Tabla 6.2, considerando a las hiperaristas como las vecindades de los distintos vértices.

En varios casos, estaremos trabajando en la gráfica dual de  $\mathcal{D}$ , la cual es  $\mathcal{Y}$ . El problema traducido a esta última gráfica es el siguiente: dos vértices  $x$  y  $y$  en  $\mathcal{D}$  bloquean doblemente a la vecindad de un vértice  $z$  si y sólo para las

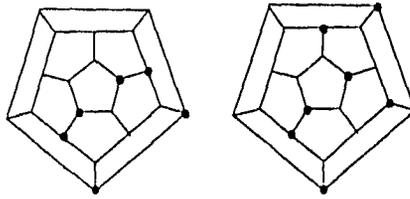


Figura 6.2:

caras  $X, Y$  en  $Y$  existe una cara  $Z$  en  $Y$  tal que  $|A(X \cup Y) \cap A(Z)| = 2$ , o dicho de otro modo, si y sólo si  $X, Y$ , y  $Z$  coinciden en un mismo vértice.

$\mu_2 = 1$
$\mu_3 = 2$
$\mu_4 = 4$
$\mu_5 = 5$
$\mu_6 = 7$
$\mu_7 = 9$
$\mu_8 = 12$
$\mu_9 = 13$
$\mu_{10} = 14$
$\mu_{11} = 15$
$\mu_{12} = 16$
$\mu_{13} = 18$
$\mu_{14} = 20$

Tabla 6.2:

i)  $\mu_2 = 1$ .

Para ver que este resultado es cierto, pensemos en dos triángulos  $X, Y$  en el icosaedro, si  $X$  y  $Y$  tienen únicamente un vértice  $x$  en común, existe una única cara  $Z$  tal que  $x \in V(Z)$ . Esto es fácil de ver ya que en  $Y$  los triángulos que coinciden en un mismo vértice, forman una rueda  $W_3$ .

Por lo tanto  $\mu_2 = 1$ .

ii)  $\mu_3 = 2$

Supongamos que  $\mu_3 = 3$ , es decir, cada vértice en  $B_3$  bloquea doblemente dos vecindades distintas.

Nuevamente pensemos en tres caras  $X, Y, Z$  en  $Y$ , entonces es necesario que para cada par de ellas, la intersección de sus vértices sea igual a uno; lo cual sólo deja una posible configuración, que es aquella en la que  $X, Y$  y  $Z$  rodean a una mismo triángulo, bloqueando de esta manera una única vecindad.

Para ver un ejemplo en el que sí es posible bloquear doblemente dos vecindades con tres vértices, consideremos los tres elementos de  $B_3$  de manera alternada en una trayectoria de longitud 4 en  $D$ .

iii)  $\mu_4 = 4$ .

Supongamos que  $\mu_4 = 5$ . Entonces existen al menos dos elementos  $x, y$  de  $B_4$  que bloquean doblemente tres vecindades, pero para que un vértice  $x$  en  $D$  pueda bloquear doblemente tres vecindades distintas, se necesitan de tres vértices más,  $y, z, u$ , (uno por cada vecindad ya que las caras son pentágonos); y de esta manera no se logran conseguir dos vértices que bloqueen doblemente tres vecindades, porque la distancia entre  $y, z$  y  $u$ , o bien es 1, o bien es tres; pero en ambos casos no bloquean doblemente a ninguna vecindad diferente de las que bloquea  $x$ .

Por lo tanto  $\mu_4 < 5$ .

Un ejemplo en el que efectivamente se puede ver que  $\mu_4 = 4$ , es tomando cuatro vértices 2-bloqueadores de manera alternada en un ciclo de longitud 8.

iv)  $\mu_5 = 5$ .

En el Capítulo 5 mencionamos que  $\mu_5 \leq 7$ . Ahora mostraremos que no se pueden bloquear doblemente seis vecindades con cinco vértices, seguido de un ejemplo en el que se logran 2-bloquear cinco vecindades distintas.

Nuestra demostración consiste una vez más, en suponer que  $\mu_5 = 6$ , para lo cual es necesario que al menos dos elementos de  $B_5$  bloqueen doblemente a tres vecindades. Por el caso anterior, sabemos que dado un vértice  $x$ , son necesarios tres vértices más para lograr que  $x$  bloquee doblemente tres vecindades, es más, también sabemos que estos tres elementos del conjunto 2-bloqueador bloquean doblemente a una vecindad, de tal modo que al agregar el quinto elemento de  $B_5$  no se pueden lograr bloquear dos vecindades distintas de un mismo vértice, ya que en  $D$  no existen cuadrados; de tal forma

que aunque sí se puedan aumentar el número de vecindades 2-bloqueadas, en dos, estas corresponden a distintos elementos de  $B_5$ .

Por lo tanto no se pueden obtener dos vértices que bloqueen doblemente a tres vecindades.

Por lo tanto  $\mu_5 < 6$ .

Un ejemplo de un conjunto  $B_5$  que logra 2-bloquear cinco vecindades es el siguiente: tomemos los cinco vértices que se encuentran en un mismo pentágono de  $\mathcal{D}$ , claramente han sido bloqueadas doblemente las vecindades de cada uno de ellos. Por lo tanto  $\mu_5 = 5$ .

v)  $\mu_6 = 7$ .

Sabemos que  $\mu_6 \leq 9$ . A continuación mostraremos que no es posible 2-bloquear ocho vecindades diferentes con seis vértices, y también veremos un ejemplo en el que se bloquean doblemente siete vecindades cuando el conjunto 2-bloqueador consta de seis elementos.

Notemos que para que se puedan bloquear doblemente nueve vecindades, es necesario que al menos cuatro elementos de  $B_6, u, v, w, x$  bloqueen doblemente cada uno a tres vecindades.

En el inciso iv) vimos que con cinco vértices, en el mejor de los casos se logran obtener, un vértice que bloquea doblemente a tres vecindades, tres vértices que bloquean doblemente dos vecindades, y un último vértice que 2-bloquea sólo a una vecindad. Ese caso se ilustra en la Figura 6.3. Como se puede observar, al agregar el elemento  $x$  a nuestro conjunto 2-bloqueador se obtienen 2 nuevas vecindades bloqueadas doblemente; es decir, se logran 2-bloquear en total siete vecindades.

En cualquier otro caso, habíamos visto que no se tenían vértices que incidieran en más de dos vecindades, de modo que no se pueden aumentar en dos sus incidencias al agregar únicamente un vértice.

Por lo tanto  $\mu_6 < 8$  y por la Figura 6.3 tenemos que  $\mu_6 = 7$ .

vi)  $\mu_7 = 9$ .

Habíamos visto anteriormente que para 2-bloquear todas las vecindades de un vértice  $x$ , se necesitan tres vértices más; pero con esto sólo se podían bloquear doblemente tres vecindades, 1, 2, 3. Analizando a los conjuntos  $K_1, K_2$  y  $K_3$  que contienen a los vértices que pueden 2-bloquear las distintas vecindades de 1, 2 y 3, se puede ver que cada conjunto ayuda a bloquear doblemente 2 vecindades distintas, que aún así, en total se 2-bloquean 9

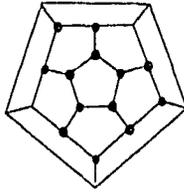


Figura 6.3:

vecindades distintas, las tres que bloquean doblemente 1, 2 y 3, y las seis que 2-bloquean los conjuntos  $K_1, K_2$  y  $K_3$ .

Por lo tanto  $\mu_7 = 9$ .

vii)  $\mu_8 = 12$ .

Con la ayuda de la desigualdad [2] sabemos que  $\mu_8 \leq 12$ , en la Figura 6.4 se da un ejemplo en el que efectivamente se pueden bloquear doblemente doce vecindades distintas con ocho vértices.

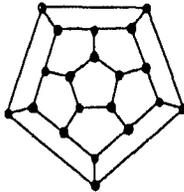


Figura 6.4:

viii)  $\mu_9 = 13$ .

Nuevamente tenemos como un resultado anterior que  $\mu_9 \leq 13$ , y nuevamente mostraremos un ejemplo (ver la Figura 6.5) en el que efectivamente se pueden bloquear doblemente trece vecindades con nueve vértices.

En los siguientes incisos pensaremos en nuestro problema de una manera contraria a la que se utilizó anteriormente, ahora analizaremos cual es el mínimo número de vecindades que podemos bloquear doblemente con la cantidad complementaria a la que nos interesa; es decir, para el caso del conjunto 2-bloqueador  $B$ ; buscaremos la mínima cantidad de vecindades que podemos 2-bloquear con  $\alpha(\mathcal{D}) - i$  vértices, de tal manera que los vértices que sobran bloquean doblemente a las vecindades que no han sido 2-bloqueadas.

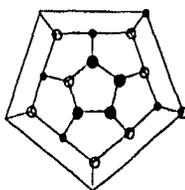


Figura 6.5:

También empezaremos a analizar al conjunto 2-bloqueador de máxima cardinalidad para facilitar el resto de los casos.

ix)  $\mu_{14} = 20$

Este resultado se deduce de que  $\tau_2(\mathcal{D}, \text{vec}(x)) = 14$ . Sin embargo se puede mostrar fácilmente que es cierto tomando tres parejas de vértices, que se encuentren a distancia mayor o igual que tres entre ellas; es decir, el mínimo número de vecindades que se pueden bloquear doblemente con seis vértices, es cero.

Por lo tanto  $\mu_{14} = 20$ .

x)  $\mu_{13} = 18$ .

Para ver que es cierto este resultado, consideremos el ejemplo anterior, en el que con catorce vértices se logran bloquear doblemente todas las vecindades en  $\mathcal{D}$ . Como esta es la mejor cota que podemos obtener, basta con que veamos cual es la mejor cota que se obtiene al considerar trece vértices en lugar de catorce. Notemos que si logramos reducir el número de vecindades 2-bloqueadas en una unidad, o en dos, nuestra cota sigue siendo la mejor que podemos obtener, ya que estamos partiendo de la mejor máxima cota para  $\mu_{14}$ .

Pero en el ejemplo que tenemos, las tres parejas de vértices se encuentran a distancia tres entre sí, de modo que al agregar un vértice más, siempre aumentan el número de vecindades 2-bloqueadas, al menos en dos; es decir, el mínimo número de vecindades bloqueadas doblemente con siete vértices es 2.

Por lo tanto  $\mu_{13} = 18$ .

xi)  $\mu_{12} = 16$ .

Nuevamente la demostración se basa en el ejemplo que hemos construido anteriormente, y nuevamente el argumento es el mismo, si logramos que el número de vecindades 2-bloqueadas aumente a lo más en dos, al agregar un vértice, la cota que hemos obtenido sigue siendo buena, es decir, sigue siendo la mínima que se puede alcanzar.

Consideremos que los siete vértices se encuentran como lo muestra la Figura 6.6, como los conjuntos de vértices se encuentran a distancia dos y distancia tres entre sí, y además no hay elementos de  $D$  que se encuentren a distancia cuatro de estos conjuntos, en el mejor de los casos se puede aumentar en dos el número de vecindades 2-bloqueadas al agregar un nuevo vértice.

Por lo tanto el mínimo número de vecindades doblemente bloqueadas con ocho vértices es 4.

Por lo tanto  $\mu_{12} = 16$ .

xii)  $\mu_{11} = 15$ .

Ahora, para probar este resultado, veamos un ejemplo en el que se muestran ocho vértices bloqueando doblemente a cuatro vecindades. (Ver la Figura 6.7) Claramente no es necesario que el ejemplo sea el mismo que el señalado anteriormente, éste sólo nos sirvió para encontrar la cota inferior.

Notemos que si añadimos el vértice  $x$  a nuestro conjunto, sólo hemos aumentado una vecindad doblemente bloqueada. Por lo tanto el mínimo número de vecindades 2-bloqueadas con nueve vértices es 5.

Por lo tanto  $\mu_{11} = 15$ .

xiii)  $\mu_{10} = 14$ .

Finalmente para este último caso el procedimiento es exactamente el mismo. Fijémonos en el ejemplo que construimos en el inciso xii) y que se encuentra en la Figura 6.7, si agregamos el vértice  $y$  a nuestro conjunto, aumenta en una unidad el número de vecindades 2-bloqueadas; es decir, hemos obtenido que con diez vértices, la mínima cantidad de vecindades doblemente bloqueadas es 6.

Por lo tanto  $\mu_{10} = 14$ .

## 6.0.2 Icosaedro

En esta sección sólo analizaremos los valores de las distintas  $\mu_i$  del icosaedro con respecto a vecindades, ya que en el capítulo 4 se analizaron todos los distintos valores de  $\mu$  con respecto a caras en  $\mathcal{Y}$ .

En la Tabla 6.3 aparecen los resultados que inmediatamente se probarán, pero antes notemos que para que dos vértices  $x, y \in \mathcal{V}$  bloqueen doblemente a una vecindad, es necesario que ambos vértices pertenezcan a un mismo triángulo o que la distancia entre ellos sea 2.

$\mu_2 = 2$
$\mu_3 = 5$
$\mu_4 = 8$
$\mu_5 = 11$

Tabla 6.3:

i)  $\mu_2 = 2$ .

Dados  $x, y \in B_2$ , tenemos las siguientes posibilidades:

1.- Si ambos pertenecen a un mismo triángulo, en realidad pertenecen a dos triángulos, ya que ambos triángulos comparten la arista formada por  $x, y$ , y de esta manera bloquean doblemente dos vecindades distintas (porque la arista  $x, y$  es la diagonal de un cuadrado).

2.- Si  $x, y$  se encuentran a distancia 2, entonces bloquean doblemente una única vecindad, la del vértice que se encuentra entre  $x$  y  $y$ .

3.- En cualquier otro caso no se bloquea doblemente ninguna vecindad.

Por lo tanto  $\mu_2 = 2$ .

ii)  $\mu_3 = 5$ .

Analicemos las distintas configuraciones que tenemos en  $\mathcal{Y}$ , tomando tres vértices.

1.- Si los tres vértices  $x, y, z$  se encuentran formando una trayectoria de longitud 2, se pueden bloquear doblemente cuatro vecindades distintas (dos vecindades por cada pareja de vértices formada por un extremo de la trayectoria y el vértice de valencia dos, pero una vecindad se bloquea doblemente dos veces) y la vecindad del elemento intermedio.

2.- Si  $x, y$  son adyacentes y  $z$  se encuentra a distancia dos de ambos, también se bloquean doblemente cuatro vecindades distintas, ya que  $x, y$  forman

la diagonal de un cuadrado, por lo que bloquean doblemente dos vecindades, podemos decir que la de  $u$  y  $v$ ; mientras que, tanto  $x, z$  como  $y, z$  son vértices opuestos de dos cuadrados que tienen (sin pérdida de generalidad) a  $u$  como elemento del mismo. Por lo tanto son cuatro las vecindades distintas que se han 2-bloqueado.

3.- En el caso en que  $x, y$  son adyacentes y  $z$  se encuentra a distancia dos de uno de ellos, digamos de  $x$ , se bloquean doblemente cuatro vecindades porque  $x, y$  se encuentran en la diagonal de un cuadrado, mientras que  $x, z$  son los vértices opuestos de otro cuadrado.

4.- En el caso en que los tres vértices se encuentran de manera alternada en una trayectoria; es decir, se encuentran a distancia dos todos, se pueden bloquear cinco vecindades distintas.

Por lo tanto  $\mu_3 = 5$ .

iii)  $\mu_4 = 8$ .

Una manera de obtener cuatro vecindades doblemente bloqueadas, es tomando los elementos de manera alternada en un octaedro.

Ahora supongamos que podemos 2-bloquear 9 vecindades distintas en  $Y$  con cuatro vértices, entonces deben existir al menos dos vértices,  $x, y$  que bloquean doblemente a cinco vecindades.

Pero dado  $x$ , como es el centro de una  $W_5$ , se necesitan al menos tres vértices más para bloquear todas las vecindades que forman el pentágono; con ello hemos utilizado los cuatro elementos de los que disponemos, pero sólo  $x$  ayuda a bloquear doblemente a cinco vecindades.

Por lo tanto  $\mu_4 = 8$ .

iv)  $\mu_5 = 11$ .

En la Figura 6.6 se muestra un ejemplo en el que efectivamente se bloquean doblemente 11 vecindades distintas en  $Y$  utilizando únicamente cinco elementos.

Además, en el Capítulo 5, mostramos que no era posible bloquear doblemente las doce vecindades que existen en  $Y$  utilizando únicamente cinco vértices.

Por lo tanto  $\mu_5 = 11$ .



# Bibliografía

[1] Neumann-Lara, Victor. Números Heterocromáticos en Gráficas.

[2] Beineke W., Lowell and J. Wilson, Robin. Selected Topics in Graph Theory 2, Academic Press, London, 1983.

[3] Holton, D.A and Sheenan, J. The Petersen Graph, Cambridge University Press, Great Britain, 1993.