21
2Ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DESARROLLO Y APLICACION DE ANUALIDADES Y LA AMORTIZACION

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I A

P R E S E N T A :

LETICIA DANIEL ORANA

DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES

DIRECTOR DE TESIS: ACT. AURORA VALDEZ MICHEL

1996

FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVPNºMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: DESARROLLO Y APLICACION DE ANUALIDADES Y LA AMORTIZACION

realizado por C. DANIEL ORANA LETICIA

con número de cuenta 7508404-4 **, pasante de la carrera de** ACTUARIA

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	ACT. AURORA VALDES MICHEL	
Propietario	M. en C. ROBERTO CANOVAS THERIDT	
Propietario	ACT. CARLOS FLAVIO ESPINOSA LOPEZ	F. Espinosa L.
Suplente	ACT. HORTENSIA CANO GRANADOS	
Suplente	ACT. MARIA TOMASA LUZ TLAHUEL TLAHUEL	

Claudia Carrillo G.
Consejo Departamental de Matemáticas

Doy gracias a Dios por iluminar en todo momento mi camino y poder realizar una de mis metas más anheladas...

Con cariño y amor a mis padres Martín Daniel Flores y Dolores Orana Molina por haberme dado la vida y ayudarme a llegar al lugar donde estoy...

Con profunda gratitud a mis sinodales y amigos :
Act. Aurora Valdés Michel

M. en C. Roberto Cánovas Theriot

Act. Carlos Flavio Espinosa López

Act. Hortensia Cano Granados ...

A mis profesores por compartir sus conocimientos y lograr hacer de mi, una profesionista...

A Rosario Pérez Rosales y a Martín Escobedo Pérez por su apoyo para la culminación de este trabajo

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En las Matemáticas Financieras es parte fundamental el conocimiento y manejo de las **Anualidades Ciertas.**

Gran parte de los instrumentos de inversión, de amortización y de capitalización involucran el uso de anualidadas ciertas.

Por tal razón es necesario conocer tanto las bases teóricas como la aplicación de los diferentes tipos de anualidades.

Durante mi practica docente, he detectado ciertas necesidades especificas en los alumnos de Actuaría en las materias de Matemáticas Financieras, por tal motivo, este trabajo de tesis estudia tanto la parte teórica como la practica de las anualidades en casos específicos.

Este trabajo se divide en V capitulos, los cuales se detallan a continuación:

El Capitulo I trata de las anualidades ciertas, su definición, su clasificación y aspectos generales de ellas y como primer caso, las anualidades vencidas.

El Capítulo II trata los casos de las anualidades enticipadas, anualidades diferidas y perpetuidades

El Capitulo III cubre la parte de casos generales de anualidades, es decir las pagaderas p- veces al año con tasas efectivas y con tasas nominales.

En el Capítulo IV se examina el caso de las Anualidades Crecientes y Decrecientes en progresión aritmética

También se analizen les anualidades crecientes en progresión geométrica.

En el Capítulo V se aplican las anualidades al caso de la tabla de amortización.

Se agrego un anexo con el estudio de las fórmulas de progresiones aritméticas y geométricas, las cuales son de uso común cuando se trata de obtener una fórmula de anualidades. Ese anexo se pone con el fin de aclarar dudas acerca de el manejo de ciertas ecuaciones que se obtienen en este trabajo.

En todos los capítulos se parte de la definición de cada caso de las anualidades que se están estudiando y a partir de esto, se plantean las ecuaciones necesarias para obtención de la fórmula.

Posteriormente, se aplica la fórmula para dar solución a problemas especificos.

En todos los casos se trato de dar como ejemplo al menos dos problemas.

Además se agregaron gráficas para el mejor entendimiento del comportamiento de las variables o para apreciar la solución del problema.

Cuando el caso lo amerite, se presenta la línea de tiempo, para que este diagrama auxilie en el entendimiento tanto del planteamiento del problema, como de su solución.

El propósito general de este trabajo es dar las herramientas necesarias para que quienes consulten este trabajo, puedan entender y resolver los problemas que se analizan en cada capitulo de esta tesis.

Concepto

Se denomina como anualidad a una serie de pagos generalmente iguales, que se efectúan periódicamente, durante un cierto tiempo. Algunos ejemplos de anualidades son :

- Los pagos mensuales por concepto de renta
- El cobro quincenal o semanal de sueldo
- Los pagos de primas de pólizas de seguros

TIPOS DE ANUALIDADES

La variación de los elementos que intervienen en las anualidades hacen que existan diferentes tipos de ellas. Conviene clasificarlas de acuerdo con diversos criterios.

En las anualidades ciertas los plazos se fijan y se estipulan de antemano. Por ejemplo al realizar una compra a crédito se fija tanto la fecha en que se debe hacer el primer pago, como la fecha para efectuar el último pago.

CRITERIOS	TIPOS DE ANUALIDADES
Pagos	Vencidas, Anticipadas, Diferidas
Tiempo	Ciertas, Contingentes
Interés	Simples, Generales

De acuerdo con los pagos

- Anualidades Ordinarias o Vencidas. Se trata de casos en los que los pagos se efectúan a su vencimiento es decir , al final de cada periodo.
- Anualidades Anticipadas. Son aquellas en las que los pagos se realizan al principio de cada periodo.
- Anualidades Diferidas. Son aquellas en la que se pospone la realización de los pagos o depósitos; por ejemplo si se adquiere hoy un articulo a crédito , para pagar con abonos mensuales; el primer pago habrá de efectuarse x meses después de adquirida la mercancía .

De acuerdo con el tiempo

Este criterio de clasificación se refiere a las fechas de iniciación y de terminación de las anualidades.

- Anualidades Ciertas. Sus fechas son fijas y se estipulan de antemano.
- Anualidades Contingentes. La fecha del primer pago, la fecha del ultimo pago, o ambas , no se fijan de antemano; depende de algún hecho que se sabe que ocurrirá, pero no se sabe cuando.

De acuerdo con los intereses

- **Anualidades Simples.** Cuando el periodo de pago coincide con el periodo de capitalización de los intereses.
- **Anualidades Generales.** El periodo de pago no coincide con el periodo de capitalización.

<u>Los elementos que intervienen en este tipo de anualidades son</u>:

R La renta o pago por periodo

A El valor actual en el momento presente

S El monto o el valor en el momento de su vencimiento, es el valor de todos los pagos, al final de la operación.

n El número de periodos

i La tasa de interés

Valor presente

A continuación se calculara el valor presente o actual de una anualidad vencida de un peso pagadero anualmente durante " n " años, con una tasa de interés " i " anual efectiva.

Como se va a calcular el valor presente se tomara como punto de valuación el año cero y se traerán a este punto todos los pagos periódicos de los "n" años.

Se designara como el valor presente de una anualidad al siguiente símbolo $a_{\overline{n}|}$

Gráficamente tenemos

$$a_{\overline{n}|} = (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \ldots\ldots + (1+i)^{-(n-2)} + (1+i)^{-(n-1)} + (1+i)^{-n}$$

$$a_{\overline{n}|} = V + V^2 + V^3 + \ldots\ldots + V^{n-2} + V^{n-1} + V^n$$

$$a_{\overline{n}|} = V(1 + V + V^2 + \ldots\ldots + V^{n-3} + V^{n-2} + V^{n-1})$$

Como se observa se tiene una progresión geométrica de razón V.

Aplicando la fórmula para la suma de dicha progresión tenemos que :

$$a_{\overline{n|}} = \frac{V(1-V^n)}{(1-V)}$$

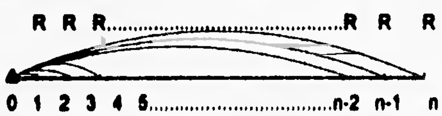
ahora multiplicando y dividiendo por (1 + i) obtenemos:

$$a_{\overline{n|}} = \frac{V(1-V^n)(1+i)}{(1-V)(1+i)} = \frac{1-V^n}{1+i-1} = \frac{1-V^n}{i}$$

$$a_{\overline{n|}} = \frac{1-V^n}{i}$$

El hecho de que se haya calculado con pagos unitarios no es ningún problema , ya que basta con multiplicar la anualidad por la renta (R) de la que se trate, quedando de la siguiente forma, donde el valor presente de la anualidad se denotara por " A ".

Gráficamente tenemos



$$A = RV + RV^2 + RV^3 + \dots + RV^{n-1} + RV^n$$

$$A = R(V + V^2 + V^3 + \dots + V^{n-1} + V^n)$$

$$A = R\, a_{\overline{n|}}$$

Monto de una anualidad

El monto de una anualidad se calcula tomando como punto de valuación el punto "n" donde los pagos son unitarios , con una tasa de interés "i" anual efectiva y "n" el número de años de la anualidad.

Se designara como monto de una anualidad al siguiente símbolo $S_{\overline{n}|i}$

Gráficamente tenemos

$$S_{\overline{n}|i} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + \ldots\ldots + (1+i) + 1$$

$$= 1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \ldots\ldots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}$$

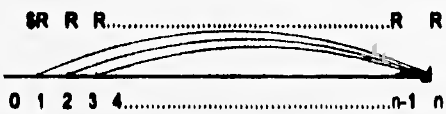
como se observa se tiene una progresión geométrica de razón (1+ i), aplicando la fórmula para la suma de dicha progresión tenemos :

$$S_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$ multiplicando el numerador y denominador por (- 1)

$$S_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

De la misma manera que en el valor presente, si los pagos no son unitarios, solo se multiplica el monto obtenido anteriormente por la renta (R) de la que se trate, quedando de la siguiente forma; donde el monto de una anualidad se denotara por " S ".

Gráficamente tenemos



$$S = R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-3} + \ldots\ldots + R(1+i) + R$$

$$S = R\left[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + \ldots\ldots + (1+i) + 1\right]$$

$$S = R\, S_{\overline{n}|i}$$

Anualidades fuera de los limites de tablas financieras

A continuación se darán las fórmulas y desarrollo del valor presente y monto de las anualidades fuera del limite de tablas financieras.

Es necesario saber estas fórmulas ya que en ocasiones se utilizan anualidades que no se encuentran en las tablas financieras.

Para el cálculo de estas solamente se aplican directamente las fórmulas indicadas.

Valor Presente de una Anualidad.

$$a_{\overline{h+k}|i} = \frac{1 - v^{h+k}}{i} \qquad \text{donde } h + k > 100$$

$$= \frac{1 - v^{h} + v^{h} - v^{h+k}}{i} \qquad \text{restando y sumando } V^{h}$$

$$= \frac{1 - v^{h}}{i} + \frac{v^{h}\,(1 - v^{k})}{i}$$

$$a_{\overline{h+k}|i} = a_{\overline{h}|i} + v^{h} a_{\overline{k}|i}$$

Monto de una Anualidad

$$s_{\overline{h+k}|i} = \frac{(1+i)^{h+k} - 1}{i}$$

$$= \frac{(1+i)^{h+k} - (1+i)^{h} + (1+i)^{h} - 1}{i} \qquad \text{restando y sumando } (1+i)^{h}$$

$$= \frac{(1+i)^{h}\,\left((1+i)^{k} - 1\right)}{i} + \frac{(1+i)^{h} - 1}{i}$$

$$= (1+i)^{h} s_{\overline{k}|i} + s_{\overline{h}|i}$$

RENTA

Se conoce como renta al pago periódico que se realiza con intervalos iguales de tiempo.

Para encontrar la renta por periodo solo basta despejar en la formula de la anualidad ya sea el valor presente o el monto.

Para el valor presente tenemos que;

$A = R\,a_{\overline{n}|i}$ despejando la renta

$R = A\,/\,a_{\overline{n}|i}$

Para el monto tenemos que;

$S = R\,s_{\overline{n}|i}$ despejando la renta

$R = S\,/\,s_{\overline{n}|i}$

Como se observa para encontrar la renta por periodo solo basta despejar con simples pasos algebraicos, de las fórmulas vistas anteriormente.

También se puede decir que la renta no es anual, puede ser , semestral , trimestral. bimestral, mensual....

PLAZO

El plazo o tiempo de una anualidad se calcula por medio del número de periodos de pago " n "

Para encontrar el número de pagos de la anualidad con la que se esta trabajando , se pueda utilizar dos métodos, uno es por logaritmos y el otro utilizando las tablas financieras de monto o valor presente y una ecuación de valor.

A continuación utilizaremos el método de logaritmos para encontrar el tiempo " n ".

Tenemos que el valor presente de una anualidad cierta es:

$A = R\,a_{\overline{n}|i}$

$$A = R\frac{(1 - V^n)}{i}$$

$$i\left(\frac{A}{R}\right) - 1 = -V^n \qquad \text{multiplicando por } -1$$

$$1 - i\left(\frac{A}{R}\right) = V^n \qquad \text{aplicando logaritmos}$$

$$\text{Log}\left[1 - i\left(\frac{A}{R}\right)\right] = n \text{ Log}(V) \qquad \text{despejando el valor de " n "}$$

$$\frac{\text{Log}\left[1 - i\left(\frac{A}{R}\right)\right]}{\text{Log}(V)} = n \qquad \text{sustituyendo el valor de } V = (1 + i)^{-1}$$

$$\frac{\text{Log}\left[1 - i\left(\frac{A}{R}\right)\right]}{\text{Log}(1 + i)^{-1}} = n$$

Donde los valores de i , A , y R son conocidos para poder obtener los logaritmos.

Cuando el tiempo obtenido es fraccionario, nos estará indicando que existe un pago extra generalmente efectuado un periodo después.

El otro método para encontrar el número de pagos, que es utilizar las tablas financieras, consiste, en despejar la anualidad .

$$A = R\, a_{\overline{n}|i}$$

$$A / R = a_{\overline{n}|i}$$

Sea $\frac{A}{R} = A'$

Donde A' es un valor conocido por que conocemos el valor de A y de R.

Como el valor de A' es conocido, entonces buscamos en tablas financieras, en la columna, correspondiente a $a_{\overline{n}|i}$, con una tasa de interés " i " conocida, tal que el valor de $a_{\overline{n}|i}$ sea igual o cercano al valor de "A'"

a) Si el valor en tablas es igual a A' entonces, en el mismo renglón en la columna donde se encuentra el número de periodos " n ", vemos a que valor corresponde y ese será el valor buscado.

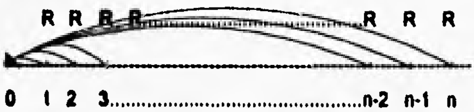
b) En el caso de que el valor en tablas financieras no coincida con el valor de A' , entonces se escoge el valor menor más cercano a A' que lo llamaremos n1 y plantearemos una ecuación de valor como sigue:

$$A = R\,a_{\overline{n1}|i} + X\,(1+i)^{n1+1} \qquad \text{despejamos el valor de X.}$$

$$\frac{A - R\,a_{\overline{n1}|i}}{(1+i)^{n1+1}} = X$$

Donde X representa el pago incompleto , menor que los pagos completos, efectuado generalmente un periodo después.

Gráficamente tenemos



Por notación :

número de pago	periodo
n1 -1	n-2
n1	n-1
n1+1	n

$$A = R\,a_{\overline{n-1}|i} + X(1+i)^{n}$$

Como se observa se van a efectuar n1 pagos completos y un pago extra incompleto de X cantidad, menor, efectuado un periodo después.

Calculo del número de pagos " n " , ahora utilizando el monto de una anualidad cierta, aplicando el método de logaritmos.

Tenemos que el monto de una anualidad cierta es:

$$S = R\,s_{\overline{n}|i}$$

$$= R\,\frac{(1+i)^{n} - 1}{i}$$

$$i\left(\frac{S}{R}\right)+1=(1+i)^n \quad \text{aplicando Logaritmos}$$

$$\operatorname{Log}\left[\,i\left(\frac{S}{R}\right)+1\,\right]=n\operatorname{Log}(1+i) \quad \text{despejando el valor de " n "}$$

$$\frac{\operatorname{Log}\left[\,i\left(\frac{S}{R}\right)+1\,\right]}{\operatorname{Log}(1+i)}=n$$

Donde el valor de i , S y de R , son conocidos, para poder obtener los logaritmos.

Cuando el tiempo obtenido es fraccionario, nos indica que existe un pago extra menor que los pagos completos, afectuado generalmente un periodo después.

El otro método para encontrar el número de pagos, que es utilizar las tablas financieras, consiste, en despejar la anualidad de la formula de monto de una anualidad.

$$S=R\,s_{\overline{n}|i}$$

$$S/R=s_{\overline{n}|i}$$

Sea $S/R=S'$

Donde S' es un valor conocido, por que conocemos el valor de S y de R.

Como el valor de S' es conocido, entonces buscamos en tablas financieras, en la columna, correspondiente a $s_{\overline{n}|i}$, con una tasa de interés " i " conocida, tal que el valor de $s_{\overline{n}|i}$ sea igual o cercano al valor de S' .

a) Si el valor en tablas es igual a S' entonces, en el mismo renglon en la columna donde se ancuentra el número de periodos " n " vemos a que valor corresponde y ese será el valor buscado.

b) En el caso de que el valor en tablas financieras no coincida con el valor de S' , entonces se escoge el valor menor más cercano a S' que lo llamaremos n1 y planteamos una ecuación de valor como sigue:

$$S=R\,s_{\overline{n1}|i}\,(1+i)+X \quad \text{despejamos el valor de X}$$

$$S-R\,s_{\overline{n1}|i}\,(1+i)=X$$

Donde X representa el pago incompleto ,menor que los pagos completos,efectuado un periodo después .

Gráficamente tenemos

Por notación:

número de pago	periodo
n1 -1	n-2
n1	n-1
n1 +1	n

$S = R\, s_{\overline{n-1}|i}\,(1+i) + X$

Como se observa se van a efectuar n-1 pagos completos y un pago incompleto de X cantidad menor, efectuado un periodo después.

INTERÉS

Uno de los métodos para calcular la tasa de interés " i " es el método de interpolación lineal que a continuación se explica:

Tenemos que el valor presente de una anualidad cierta es :

$A = R\, a_{\overline{n}|i}$ despejamos $a_{\overline{n}|i}$

$A / R = a_{\overline{n}|i}$

Sea $A / R = X'$

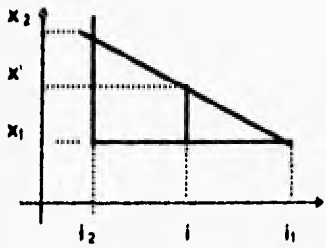
Donde X' es conocida por que A y R son conocidas.

Ahora en las tablas financieras, buscamos, el valor correspondiente a $a_{\overline{n}|i}$, que sea igual o cercano al valor de " X ", donde " n " es conocida.

a) En el caso de que el valor encontrado de $a_{\overline{n}|i}$ sea igual al valor de X', entonces nos fijamos cual es la tasa de interés correspondiente.

b) En caso de que el valor de $a_{\overline{n}|i}$ no coincida con el valor de X' , entonces se toman dos valores lo mas cercanos a X', un valor cercano inferior y el otro valor cercano superiores y realizamos la interpolación de la siguiente manera.

c)



donde $i_2 < i < i_1$

X_1 el valor de $a_{\overline{n}|i_2}$

X' el valor de $a_{\overline{n}|i}$

X_2 el valor de $a_{\overline{n}|i_1}$

Como se observa se forman dos triángulos semejantes ,entonces tenemos que;

$$\frac{X_1 - X_2}{X' - X_2} \qquad \frac{i_2 - i_1}{i - i_1}$$

$$(X_1 - X_2)(i - i_1) = (X' - X_2)(i_2 - i_1)$$

despejando el valor de " i ".

$$i = \frac{(X' - X_2)(i_2 - i_1)}{(X_1 - X_2)} + i_1$$

o bien

$$i = i_1 + \frac{(X' - X_2)(i_2 - i_1)}{(X_1 - X_2)}$$

Calculo de la tasa de interés " i " pero ahora utilizando el monto de una anualidad .

$S = R\, S_{\overline{n}|i}$ despejamos $S_{\overline{n}|i}$

$S \,/\, R = S_{\overline{n}|i}$

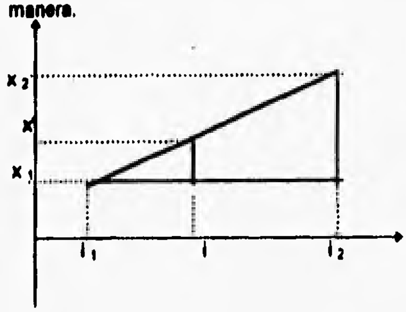
Sea $S \,/\, R = X'$

Donde X' es conocida, por que , A y R son conocidas.

Ahora en las tablas financieras, buscamos , el valor correspondiente a $S_{\overline{n}|i}$, que sea igual o cercano al valor de X', dado que " n " es conocida.

a) En el caso de que el valor encontrado de $S_{\overline{n}|i}$ sea igual al valor de X', entonces nos fijamos cual es la tasa de interés correspondiente.

b) En el caso de que el valor de $S_{\overline{n}|i}$ no coincida con el valor de X', entonces se toman dos valores lo mas cercanos a X', un valor cercano inferior y el otro valor cercano superior y realizamos la interpolación de la siguiente manera.



Donde : $i_1 < i < i_2$

X_1 el valor de $S_{\overline{n}|i_1}$

X' el valor de $S_{\overline{n}|i}$

X_2 el valor de $S_{\overline{n}|i_2}$

Como se observa se forman dos triángulos semejantes, entonces tenemos que:

$$\frac{X_2 - X_1}{X' - X_1} \qquad \frac{i_2 - i_1}{i - i_1}$$

$$(X_2 - X_1)(i - i_1) = (X' - X_1)(i_2 - i_1)$$

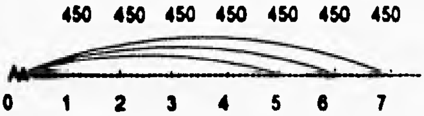
despejamos el valor de " i ".

$$i = \frac{(X' - X_1)(i_2 - i_1)}{(X_2 - X_1)} + i_1$$

EJEMPLOS

1.- ¿ Cual es el valor actual de una renta bimestral de \$450 , depositados al final de cada bimestre durante 14 meses, si la tasa de interés es del 9% bimestral ?

Gráficamente



$A = ?$ $\qquad\qquad$ $A = R\, a_{\overline{n}|i}$

$R = 450$ $\qquad\qquad$ $= 450\, a_{\overline{7}|.09}$

$n = 7$ bimestres $\qquad\qquad$ $= 450\, \dfrac{1-V^7}{.09}$

$i = .09$ bimestral

$= 450\ (5.03295)$

$= 2264.8$

2.- ¿Qué es más conveniente para comprar un automóvil ;

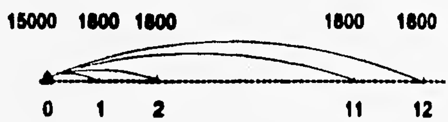
a) pagar \$35000 de contado , o

b) dar \$15000 de enganche y \$1800 al final de cada uno de los 12 meses siguientes , si el interés se calcula a razón del 90% convertible mensualmente ?

Gráficamente

a) 35000

b)



$A = ?$ $\qquad\qquad$ $A = 15000 + R\, a_{\overline{n}|i}$

R = 1800 $\qquad$ $= 15000 + 1800\, a_{\overline{12}|.075}$

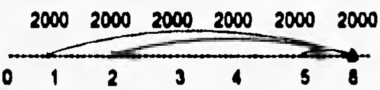
i' = .075 mensual $\qquad$ $= 15000 + 1800\ \dfrac{1-V^{12}}{.075}$

$= 15000 + 1800\,(7.73528)$

$= 28923.5$

3.- ¿ Qué cantidad se acumulara en 6 semestres, si se depositan $2000 al final de cada semestre en una cuenta de invarsiones que rinde el 25% anual convertible semestralmente?

Gráficamente



S = ? $\qquad$ $S = R\, S_{\overline{n}|i}$

R = 2000 $\qquad$ $= 2000\, S_{\overline{6}|.125}$

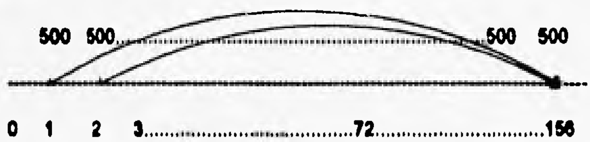
n = 6 semestres $\qquad$ $= 2000 \left(\dfrac{(1+.125)^{6} - 1}{.125} \right)$

i' = .125 semestral $\qquad$ $= 2000\,(8.21829)$

$= 16436.58$

4.- El señor González deposita $500 al mes de haber nacido su hijo. Continua haciendo depósitos mensuales por esa misma cantidad hasta que su hijo cumple 13 años de edad, si durante los primeros seis años de vida del hijo , la cuenta pago el 36% anual convertible mensualmente y durante los siete años restantes pago el 2% mensual. ¿ Cuanto recibió el hijo a los 13 años ?

Gráficamente



S = ? $\qquad$ $S = R\, S_{\overline{n}|i}$

R = 500 $\qquad$ $= 500 \left[S_{\overline{72}|.03}\,(1.02)^{84} + 500\, S_{\overline{84}|.02} \right]$

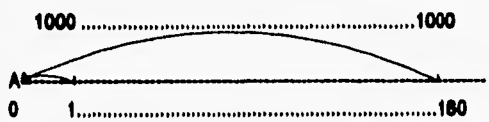
n = 156 meses $\qquad = 500\,[\,(246.66)\,(5.2773) + 500(213.866)\,]$

i' = .03 mensual $\qquad = 757782.7124$

i = .02 mensual

5.- ¿Cual es el valor en efectivo de una serie de pagos de $1000 mensuales durante 15 años, suponiendo un interés del 6.5% mensual?

Gráficamente



A = ? $\qquad A = R\,a_{\overline{n}|i}$

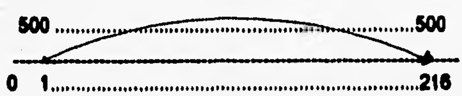
R = 1000 $\qquad = 1000\,(a_{\overline{100}|.065} + V^{100}\,a_{\overline{80}|.065})$

n = 180 meses $\qquad = 1000\,[\,(15.35629) + (.001841)(15.28482)\,]$

i = .065 mensual $\qquad = 15384.43$

6.- Si se realizan depósitos mensuales de $500 durante 18 años a una tasa de interés del 2.5% mensual. ¿Qué cantidad se tendrá al termino de los 15 años ?

Gráficamente



S = ? $\qquad S = R\,S_{\overline{n}|i}$

R = 500 $\qquad = 500\,S_{\overline{216}|.025}$

n = 15 años = 216 meses $\qquad = 500\,[\,S_{\overline{100}|.025}\,(1.025)^{116} + S_{\overline{100}|.025}\,(1.025)^{16} +$

i = .025 mensual $\qquad S_{\overline{16}|.025}\,]$

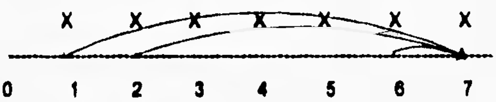
$= 500\,(7585.8228 + 642.120 + 19.38022)$

$= 500\,(8247.323)$

$= 4123661.5$

7.- ¿Qué cantidad debemos invertir al final de cada mes durante los próximos siete años en un fondo , que paga el 63% anual convertible mensualmente, con el objeto de acumular $80000 al realizar el último deposito?

Gráficamente



S = 80000 $\qquad$ $S = R\,s_{\overline{n}|i}$

R = ? $\qquad$ $80000 = R\,s_{\overline{84}|.0525}$

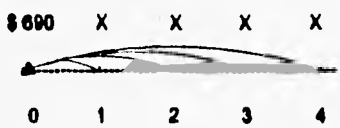
n = 84 meses $\qquad$ $\dfrac{80000}{s_{\overline{84}|.0525}} = R$

i' = .0525 mensual

R = 57.88

8.- Una persona adquiere hoy a crédito una maquina de escribir, la maquina cuesta $690 y conviene pagarla con cuatro mensualidades. ¿Cuanto tendrá que pagar cada mes si le cobran el 7.5 % mensual de interés?

Gráficamente



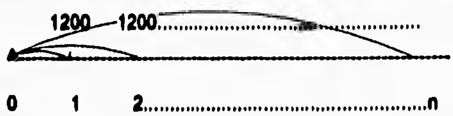
A = 690 $\qquad$ $A = R\,a_{\overline{n}|i}$

R = ? $\qquad$ $\dfrac{690}{a_{\overline{4}|.075}} = R$

n = 4 meses

i = .075 mensual $\qquad$ R = 206.01

9.- ¿En cuánto tiempo se liquidara una deuda de \$15000, si se efectuan pagos trimestrales de \$1200 y la tasa de interés que se paga es del 14% anual convertible trimestral?



A = 15000 $\qquad A = R\,a_{\overline{n}|i}$

R = 1200 $\qquad 15000 = 1200\,a_{\overline{n}|.035}$

n = ? trimestres $\qquad \dfrac{15000}{1200} = a_{\overline{n}|.035}$

i' = .035 trimestral

$$12.5 = \frac{1 - (1.035)^{-n}}{.035}$$

$$.035\,(12.5)\ -1 = -(1{,}035)^{-n}$$

$$.5625 = (1.035)^{-n} \qquad \text{multiplicamos por -1}$$

$$\text{Log}\,(.5625) = -n\,\text{Log}\,(1.035) \qquad \text{aplicando logaritmo}$$

$$\frac{\text{Log}\,(.5625)}{\text{Log}\,(1.035)} = -n$$

$$\frac{-.24987747}{.014940349} = -n$$

$$16.7250089 = n$$

n = 16 trimestres, 2 meses, 5 días

10.- ¿Cuántos pagos mensuales de $93 se realizan para liquidar una compra de una lavadora que cuesta $1350, si da el 20% de enganche y acuerda pagar el 66% capitalizable mensualmente de interés?

270 93 93 93..

0 1 2 3..

$A = 1350 - 270 = 1080$ $\qquad A = R\, a_{\overline{n}|i}$

$R = 93$ $\qquad 1080 = 93\, a_{\overline{n}|.055}$

$n = ?$ $\qquad \dfrac{1080}{93} = a_{\overline{n}|.055}$

$i' = .055$ mensual

$11.6129 = a_{\overline{n}|.055}$

buscamos en tablas financieras el valor de $a_{\overline{n}|.055}$, a la tasa de interés del 5.5%, tal que sea igual o muy cercano a 11.6129. y encontramos que $a_{\overline{19}|.055} = 11.6076$, esto quiere decir que se realizarán 19 pagos completos de $93 .

$1350 = 270 + 93\, a_{\overline{19}|.055}$

$1080 - 93\, a_{\overline{19}|.055} = 1079.511$

11.- ¿ En cuánto tiempo se liquidara una deuda de $15000, si se efectúan pagos trimestrales de $1200 , y la tasa de interés que se paga es del 14% convertible trimestralmente?

1200 1200..

0 1 2..

$A = 15000$ $\qquad A = R\, a_{\overline{n}|i}$

R = 1200 $\qquad$ $15000 = 1200\, a_{\overline{n}|.035}$

n = ? trimestres $\qquad$ $\dfrac{15000}{1200} = a_{\overline{n}|.035}$

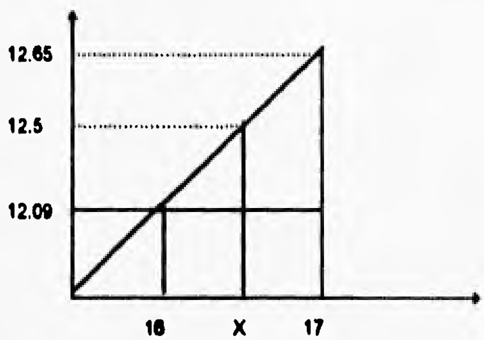
i' = .035 trimestral

$12.5 = a_{\overline{n}|.035}$

Buscamos en tablas financieras el valor de " n ", tal que $a_{\overline{n}|.035}$ sea igual o muy cercano a 12.5, dado que la tasa de interés es del 3.5% ;encontramos lo siguiente.

$a_{\overline{16}|i} = 12.09412 \qquad a_{\overline{n}|i} = 12.5 \qquad a_{\overline{17}|i} = 12.65132$

con estos datos podemos encontrar el valor de " n ", aplicando una interpolación de la siguiente manera



$$\frac{12.65 - 12.09}{12.5 - 12.09} = \frac{17 - 16}{X - 16}$$ despejamos el valor de X

X = 16.7321

esto nos indica que son 16 trimestres, 2 meses , 5 días

Para sacar el equivalente de la fracción de trimestres, realizamos una regla de tres.

1 trimestre------------------3 meses $\qquad$ X = 2.1963
.7321 de trimestre---------X meses

1 mes----------------------30 días $\qquad$ X = 5.889
.1963 de mes-------------X días

12.- ¿ Cuántos pagos mensuales de $ 93 se realizan para liquidar una compra de $1350 si se da el 20% de enganche y se acuerda pagar el 66% capitalizable mensualmente ?

270 93 93 93...

0 1 2...

A = 1350 - 270 = 1080 $\qquad\qquad$ $A = R\ a_{\overline{n}|}$

R = 93 $\qquad\qquad$ $1080 = 93\ a_{\overline{n}|.055}$

n = ? meses $\qquad\qquad$ $\dfrac{1080}{93} = a_{\overline{n}|.055}$

i = .055 mensual

$$11.6129 = a_{\overline{n}|.055}$$

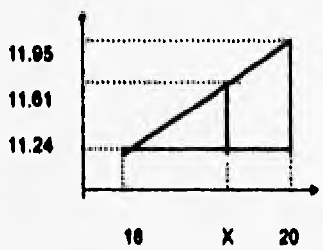
buscando en tablas financieras el valor de $a_{\overline{n}|.055}$, tal que sea igual a 11.6129 , tenemos ;

$a_{\overline{18}|.055} = 11.246$

$a_{\overline{n}|.055} = 11.6129$

$a_{\overline{20}|.055} = 11.9503$

Para encontrar el tiempo , realizaremos interpolación de la siguiente forma.



$$\frac{11.9503 - 11.246}{11.6129 - 11.246} = \frac{20 - 18}{X - 18}$$

$$X = 19.04188$$

esto nos indica que son 19 pagos mensuales .

13.- ¿ Cuántos pagos bimestrales de $3000, se tendrán que hacer para saldar una deuda, de $18000 si el interés es del 11% bimestral ?

3000 3000...

0 1 2..

$A = 18000$	$A = R\, a_{\overline{n}\rvert i}$
$R = 3000$	$18000 = 3000\, a_{\overline{n}\rvert .11}$
$n = ?$ bimestres	$\frac{18000}{3000} = a_{\overline{n}\rvert .11}$
$i = .11$ bimestral	

$$6 = \frac{1 - V^{n}}{.11}$$

$$-(.11)6 + 1 = V^{n}$$ **multiplicando por -1**

$$\text{Log}(.34) = -n \text{ Log}(1.11)$$ **aplicando logaritmo**

$$\frac{\text{Log}(.34)}{-\text{Log}(1.11)} = n$$

$$n = 10.337385$$

Esto nos indica que se realizan 10 pagos completos de $3000 y además existe un pago extra menor que el pago incompleto, afectuado un periodo después de los pagos completos.

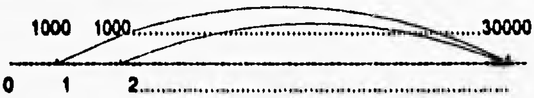
para encontrar el pago incompleto realizamos una ecuación de valor de la siguiente forma;

$$1800 = 3000\, a_{\overline{10}\rvert .11} + X V^{11}$$ **despejando el valor de X**

$$\frac{18000 - 3000\, a_{\overline{10|}.11}}{V^{11}} = X$$

X = 1047 Es el pago ,efectuado, un periodo después de los pagos completos.

14.- Una persona desea acumular $30000. Para reunir esa cantidad decide hacer depósitos trimestrales de $1000 en un fondo de inversión. Si la tasa de interés es del 62% capitalizable trimestralmente. ¿Dentro de cuanto tiempo habrá acumulado, la cantidad que desea ?



S = 30000 $S = R\, s_{\overline{n|}i}$

R = 1000 $30000 = 1000\, s_{\overline{n|}.155}$

n = ? trimestres $\frac{30000}{1000} = s_{\overline{n|}.155}$
i' = .155 trimestral

$$30 = \frac{(1.155)^n - 1}{.155}$$

$$.155\,(30) + 1 = (1.155)^n$$

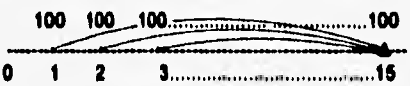
$\text{Log}\,(5.65) = n\, \text{Log}\,(1.155)$ aplicamos logaritmo

$$\frac{\text{Log}\,(5.65)}{\text{Log}\,(1.155)} = n$$

$$n = 12.0166$$

Esto nos indica que se deben realizar 12 pagos trimestrales de $1000 , para poder acumular la cantidad deseada.

15.- ¿ A que tasa efectiva trimestral, se acumulan $5000 , en el momento de realizar el último de los 15 pagos de $100 trimestrales ?



S = 5000 $S = R\, s_{\overline{n|}i}$

$R = 100$ $\qquad\qquad 5000 = 100\, s_{\overline{15}|i}$

$n = 15$ trimestres $\qquad \dfrac{5000}{100} = s_{\overline{15}|i}$

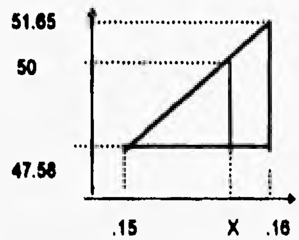
$i = ?$ trimestral

$$50 = s_{\overline{15}|i}$$

ahora buscamos en tablas financieras, el valor de $s_{\overline{15}|i} = 50$ .Encontrando los siguientes valores.

$s_{\overline{15}|.15} = 47.58041$ Y $s_{\overline{15}|.16} = 51.65951$

Con estos valores encontrados podemos realizar una interpolación , de la siguiente forma ;



$$\frac{51.65 - 47.58}{50 - 47.58} = \frac{.16 - .15}{X - .15}$$

$$X = .005946$$

A este valor encontrado , le sumamos la tasa de interés mas chica , y así podemos decir que la tasa que se aplica es de 15.59 % trimestral .

16.- ¿ A que tasa de interés efectiva semestral se deben hacer depósitos semestrales de \$450, para acumular \$6000 en tres años y medio ?

450 450 450.....................................450

0 1 2 3.......................................7

$S = 6000$ $\qquad\qquad S = R\, s_{\overline{n}|i}$

$R = 450$ $\qquad\qquad 6000 = 450\, s_{\overline{7}|i}$

$n = 7$ semestres $\qquad \dfrac{6000}{450} = s_{\overline{7}|i}$

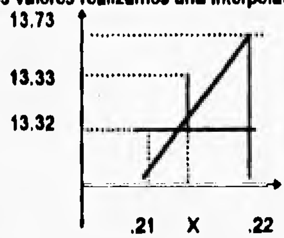
$i = ?$ semestral

$$13.33 = S_{\overline{7}|i}$$

buscamos en tablas financieras el valor de $S_{\overline{7}|i} = 13.33$, y encontramos los siguientes valores.

$S_{\overline{7}|.21} = 13.32142$ Y $S_{\overline{7}|.22} = 13.73959$

Ahora con estos valores realizamos una interpolación de la siguiente forma.

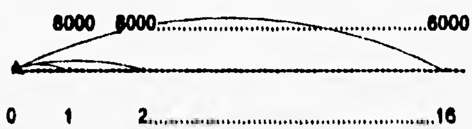


$$\frac{13.73 - 13.32}{13.33 - 13.32} = \frac{.22 - .21}{X - .21}$$

X = .00024

a este valor encontrado, le sumamos la tasa menor y nos queda que , la tasa de interés a la que se invirtió es 21.02 % semestral.

17.- Un automóvil cuesta $60000. Si se liquida mediante 16 pagos mensuales de $8000 . ¿Que tasa de interés efectiva mensual se cobra ?



A = 60000 $\quad A = R\, a_{\overline{n}|i}$

R = 8000 $\quad 60000 = 8000\, a_{\overline{16}|i}$

n = 16 meses $\quad \dfrac{60000}{8000} = a_{\overline{16}|i}$

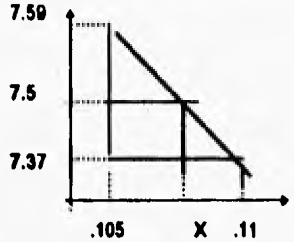
i = ? mensual

$$7.5 = a_{\overline{16}|i}$$

buscamos en tablas financieras el valor de $a_{\overline{16}|i} = 7.5$, y encontramos los siguientes valores.

$a_{\overline{16|}.105} = 7.59622$ y $a_{\overline{16|}.11} = 7.37916$

con estos valores podemos realizar una interpolación de la siguiente forma.



$$\frac{7.59 - 7.37}{7.5 - 7.37} = \frac{.11 - .105}{X - .105}$$

$$X = .00295$$

A este valor que encontramos le sumamos la tasa de interés menor, entonces tenemos que la tasa de interés que encontramos es de 10.795% efectiva mensual.

ANUALIDADES ANTICIPADAS

Son aquellas en las que los pagos se realizan al principio de cada periodo.

Así, en este capitulo se hablara de las anualidades anticipadas, que serán vistas en su caso simple (cuando el periodo de pago coincide con el periodo de capitalización), además se conocen con certeza las fechas de los periodos de los pagos.

Resulta útil comparar mediante diagramas las anualidades vencidas y las anualidades anticipadas para comprender mejor la diferencia.

Gráficamente tenemos

```
      $1   1   1.........................................1    1    1
   ------|----|----|---------------------------------------|----|---
   0     1    2    3    4...................................n-2  n-1  n
              Anualidad  Vencida

   $1    1    1    1.........................................1    1
   |-----|----|----|---------------------------------------|----|-------
   0     1    2    3    4...................................n-2  n-1  n
              Anualidad  Anticipada
```

El símbolo utilizado para designar el valor presente de una anualidad unitaria anticipada pagadera durante " n " años es $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$, el punto de valuación es el origen y su valor será :

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + V + V^2 + V^3 + \dots + V^{n-2} + V^{n-1}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + V(1 + V + V^2 + \dots + V^{n-3} + V^{n-2})$$

Progresión geométrica de razón V

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{1 + V(1 - V^{n-1})}{(1 - V)}$$

Aplicando la fórmula para la suma de dicha progresión

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + \frac{V(1 - V^{n-1})}{(1 - V)} \frac{(1+i)}{(1+i)}$$

multiplicamos y dividimos por (1 + i)

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + \frac{(1 - V^{n-1})}{(1+i) - 1}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + \frac{(1 - V^{n-1})}{i}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + a_{\overline{n-1}|i}$$

o bien comparando las anualidades vencidas y anticipadas, tenemos que :

$$a_{\overline{n}|i} = V + V^2 + V^3 + V^4 + \ldots\ldots\ldots + V^{n-2} + V^{n-1} + V^n$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + V + V^2 + V^3 + \ldots\ldots\ldots + V^{n-2} + V^{n-1}$$

Si multiplicamos por V la segunda igualdad (anualidad anticipada) tenemos:

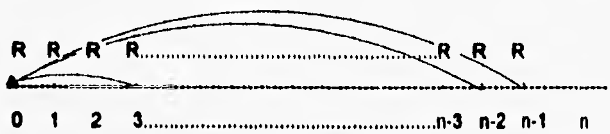
$$V\,\ddot{a}_{\overline{n}|i} = V + V^2 + V^3 + \ldots\ldots\ldots + V^{n-1} + V^n$$

$$V\ddot{a}_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i)\,a_{\overline{n}|i}$$

Que es otra expresión del valor presente de una anualidad anticipada. Ahora si la renta no es unitaria, multiplicamos la anualidad anterior por la renta (R) de la que se trate, quedando de la siguiente forma, donde el valor presente de la anualidad anticipada se denotara por " A ".

Gráficamente tenemos



$$A = R\ddot{a}_{\overline{n}|i}$$

Monto de una Anualidad Anticipada

El monto de una anualidad anticipada se calcula tomando como punto de valuación el año " n ", donde los pagos son unitarios con una tasa " i " anual efectiva .

El símbolo utilizado para designar el monto de una anualidad unitaria anticipada pagadera durante " n " años es $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$, su valor será:

Gráficamente tenemos

$1 1 1 1 .... 1 1 1

0 1 2 3 -- n-3 n-2 n-1 n

Anualidad Anticipada

$1 1 1 .... 1 1 1 1

0 1 2 3 .... n-3 n-2 n-1 n

Anualidad Vencida

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots\dots + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n$$

$$= (1+i)\,[\,1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots\dots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}]$$

Progresión geométrica de razón $(1+i)$

$$= \frac{(1+i)\,(1-(1+i)^n)}{(1-(1+i))}$$

$$= \frac{(1+i)\,(1-(1+i)^n)}{-i}$$

$$= \frac{(1+i)\,((1+i)^n - 1)}{i}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i)\; s_{\overline{n}|i}$$

o bien comparando los montos de las anualidades vencidas y anticipadas tenemos que :

$$s_{\overline{n}|i} = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 \dots\dots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots\dots + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n$$

S i sumamos una unidad an ambos lados de la segunda igualdad (monto de la anualidad anticipada) tenemos:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} + 1 = 1 + (1+i) + (1\ i)^2 + (1+i)^3 + \dots\dots + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n$$

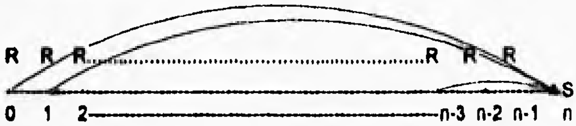
Representa un monto de n+1 años

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} + 1 = s_{\overline{n+1}|i}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n+1}|i} - 1$$

Que es otra expresión del monto de una anualidad anticipada. Ahora si la renta no es unitaria, multiplicamos el monto anterior por la renta (R), de la que se trate. Quedando de la siguiente forma, donde el monto de una anualidad anticipada se denotara por " S ".

Gráficamente tenemos



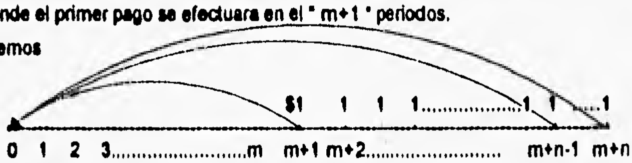
$$S = R\,\ddot{s}_{\overline{n}|i}$$

ANUALIDADES DIFERIDAS

Las Anualidades Diferidas : Son aquellas en las que el inicio de los depósitos o pagos se posponen unos periodos al de la formalización de la operación.

Calcularemos el valor de una anualidad unitaria pagadera en " n " años , con una tasa de interés " i " anual efectiva, donde el primer pago se efectuara en el " m+1 " periodos.

Gráficamente tenemos



El símbolo utilizado para designar el valor presente de una anualidad unitaria diferida es:

$m/a_{\overline{n}|i}$ el punto de valuación es el origen y su valor será:

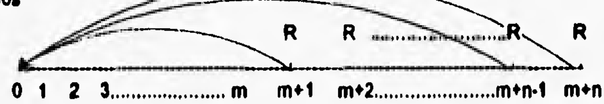
$$m/a_{\overline{n}|i} = V^{m+1} + V^{m+2} + \ldots + V^{m+n-1} + V^{m+n}$$

$$= V^{m}\,(V + V^{2} + V^{3} + \ldots + V^{n-1} + V^{n})$$

$$= V^{m}\,a_{\overline{n}|i}$$

Ahora si la renta no es unitaria basta con multiplicar la anualidad anterior por la renta (R) de la que se trate, donde el valor presente de una anualidad diferida se denotara por " A ".

Gráficamente tenemos



$$A = R\; m/a_{\overline{n}|i}$$

Otra forma de ver este tipo de anualidades seria, suponer que se dan anualidades durante los " m+n " periodos y se resta la anualidad de " m " periodos, los cuales son los que no se efectúan.

$$m/a_{\overline{n|}i} = v + v^2 + v^3 + \dots\dots + v^{m-1} + v^m + v^{m+1} + \dots\dots$$

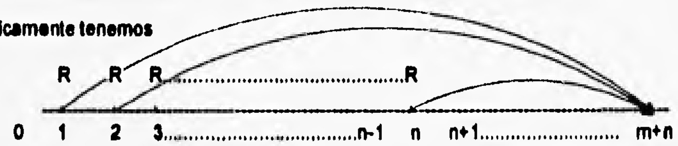
$$+ \dots\dots v^{m+n} - (v + v^2 + v^3 + \dots\dots + v^{m-1} + v^m)$$

$$m/a_{\overline{n|}i} = a_{\overline{m+n|}i} - a_{\overline{m|}i}$$

Monto de una Anualidad Diferida

El monto diferido se utiliza cuando se hacen durante cierto tiempo, pagos periódicos o que se tenga alguna cantidad de dinero y se deja que gane un interés " i " durante " m "años y si se quiere saber que cantidad se tendrá al final de esos " m+n " años, se utilizara el monto diferido.

Gráficamente tenemos



El símbolo utilizado para designar el monto de una anualidad diferida es $S_{\overline{n|}i}$, el punto de valuación es el periodo " m+n " y su valor será :

$$S_{\overline{n|}i} = [R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + \dots\dots + R(1+i) + R](1+i)^m$$

$$= R[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots\dots + (1+i) + 1](1+i)^m$$

$$= R[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots\dots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}](1+i)^m$$

Aplicando la formula de una progresión geométrica de razón (1 + i) tenemos que :

$$S_{\overline{n|}i} = R\frac{[1-(1+i)^n]}{1-(1+i)}(1+i)^m$$

$$S_{\overline{n|}i} = R\, s_{\overline{n|}i}\,(1+i)^m$$

Si el diferimiento es al principio, es decir durante " m " periodos no se realizan pagos y a partir del periodo " m+1 ", hasta el periodo " m+n " se efectúan los pagos, se observa que esto no tiene sentido. Por que el diferimiento al principio no nos afecta en nada ya que no se acumulan intereses, por lo cual este tipo de diferimiento es igual a calcular un monto que empieza en el periodo " m+1 " y termina en el periodo " m+n".

Gráficamente tenemos

$1 1.................................1

0 1 2...............................m m+1...........................m+n

$$S = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + \ldots\ldots + (1+i)^2 + (1+i) + 1$$

$$= 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots\ldots + (1+i)^{n-3} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}$$

$$S = s_{\overline{n}|i}$$

ANUALIDADES PERPETUAS

Una anualidad perpetua es una serie de pagos que se realizan por tiempo indefinido y la designaremos como $a_{\overline{\infty}|i}$, con una tasa de interés " i " anual efectiva.

Para encontrar el valor presente, partiremos de una anualidad ordinaria.

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1 - V^n}{i}$$

pero la expresión $V^n = 1/(1+i)^n$, como el tiempo " n " es indefinido, entonces conforme " n " sea cada vez más grande el denominador tiende a ∞ y la expresión nos indicaría que $V^n = 1/\infty$ Esta expresión se va haciendo cada vez más pequeña, hasta llegar el momento de anularse, entonces;

$$\text{Lim } a_{\overline{n}|i} = (1 - V^n)/i$$

cuando $n \to \infty$ nos queda que:

$$a_{\overline{n}|i} = 1/i$$ expresión para el caso de que la renta sea unitaria.

Si la renta no es unitaria , solo basta con multiplicar la expresión anterior por la renta (R) que se trate. Quedando de la siguiente forma.

$a_{\overline{n}|i} = R / i$

así que el valor presente de la renta anual perpetua es :

$$A = \frac{Re}{i}$$

Gráficamente

R R R.......................................

0 1 2 3.......................................

en otras palabras esto quiere decir que el valor presente de la renta perpetua es aquella cantidad " A "que, en un periodo, produce como interés la suma " R ", o sea :

$R = A\,i$ de donde $A = R / i$

<u>El valor presente de las rentas perpetuas simples anticipadas</u>.

Cuando el pago de la renta perpetua es de inmediato, se observa que el valor actual es equivalente al de una renta perpetua vencida, aumentada en el primer pago que debe efectuarse de inmediato.

Gráficamente

R R R R...

0 1 2 3...

Se deduce que el valor actual de la renta perpetua anticipada es aquella cantidad " A " que, disminuida en la primera cuota " R ", produce como interés la suma " R ", o sea :

$(A - R)\, i = R$ de donde

$$A = R + \frac{R}{i}$$

Si el pago que debe efectuarse de inmediato es distinto de las rentas perpetuas, obtenemos que el valor presente será :

$$A = W + \frac{R}{i}$$

donde W es el pago que se efectúa de inmediato.

Valor actual de las rentas perpetuas a pagar al final de cada cierto número de periodos de capitalización:

cuando los pagos de las rentas perpetuas deben efectuarse transcurrido cierto número de periodos de capitalización y , así , sucesivamente por siempre, tal es el caso de los gastos que deben efectuarse para la reparación de algunos activos. por ejemplo, los puentes, los equipos industriales, etc. puesto que estos activos deben ser remplazados periódicamente e indefinidamente por otros nuevos, el costo de las sustituciones constituyen una renta perpetua.

Gráficamente

W W W

R R R..........................R R..........................R............................R

0 1 2 3..........................K K+1..

Donde W representa el costo de remplazo.

El valor W de cada pago puede considerarse como el monto de K pagos de valor R , efectuados al final de cada periodo de capitalización.

$$W = R\, s_{\overline{k}|i}$$

de donde

$$R = \frac{W}{s_{\overline{k}|i}}$$

E l valor actual de la renta perpetua la obtenemos, de la siguiente forma :

$$A = R\,\frac{1}{i}$$

$$A = \frac{W}{s_{\overline{k}|i}}\;\frac{1}{i} \qquad \text{sustituyendo el valor de R.}$$

$$A = \frac{W}{i}\;\frac{1}{s_{\overline{k}|i}}$$

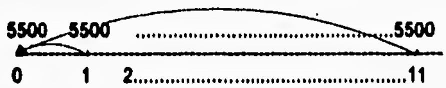
$$A = \frac{W}{i}\;\frac{1}{\dfrac{(1+i)^{k}-1}{i}} \qquad \text{sustituyendo el valor de } s_{\overline{k}|i}$$

$$A = \frac{W}{i}\;\frac{i}{(1+i)^{k}-1}$$

$$A = \frac{W}{(1+i)^{k}-1}$$

EJEMPLOS

1.- El alquiler de un almacén por mes anticipado es de $5500, pero le proponen al propietario, pagarle el alquiler , al principio de cada año, si la tasa de interés es del 60 % anual convertible mensualmente. ¿Hallar el valor del alquiler anual ?



A= ?

R = 5500

i' = .05 mensual

n = 12 meses

$$A = R\,\ddot{a}_{\overline{n}|i}$$

$$= 5500\,(a_{\overline{n-1}|.05} + 1)$$

$$= 5500\,(a_{\overline{11}|.05} + 1)$$

$$= 5500\,(8.3064 + 1)$$

$$= 51165.2$$

o bien

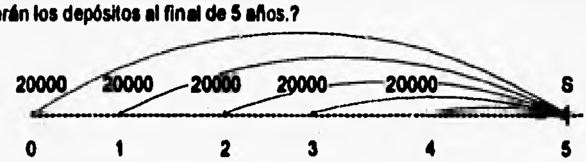
$$A = 5500\,(a_{\overline{n}|i}\,(1 + i))$$

$$A = 5500\,(a_{\overline{12}|.05}\,(1.05))$$

$$A = 5500\,((8.8632)\,(1.05))$$

$$A = 51165$$

2.- Una compañía deposita al principio de cada año $20000 en una cuenta de ahorro que abona el 15 % anual . ¿A cuanto ascenderán los depósitos al final de 5 años.?



S = ?

R = 20000

$$S = R\,\ddot{s}_{\overline{n}|i}$$

$$= 20000\,\ddot{s}_{\overline{5}|.15}$$

i = .15 anual $\qquad = 20000\,(\,(1.15)\, s_{\overline{5}|.15})$

n = 5 años $\qquad = 20000\,(\,(1.15)\,(6.74238)\,)$

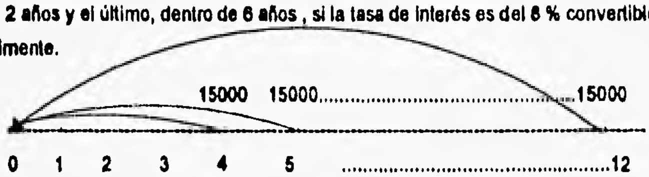
$= 155074.8$

o bien

$$S = 20000\,(s_{\overline{n+1}|} - 1)$$

$$= 20000\,(s_{\overline{6}|.15} - 1)$$
$$= 20000\,(8.75374 - 1)$$
$$= 155074.8$$

3.- Calcular el valor actual de una renta de $15000 semestrales, si el primer pago debe realizarse dentro de 2 años y el último, dentro de 6 años , si la tasa de interés es del 8 % convertible semestralmente.



A = ? $\qquad A = R\ {}_{m/}a_{\overline{n}|i}$

R = 15000 $\qquad = 15000\ v^3 a_{\overline{9}|.04}$

m = 3 semestres $\qquad = 15000\,(\,(0.888996)\,(7.43533))$

n = 9 pagos semestrales $\qquad = 99149.68$

i' = .04

o bien

$$A = R\ {}_{m/}a_{\overline{n}|i}$$

$$= 15000\,(a_{\overline{m+n}|i} - a_{\overline{m}|i})$$

$$= 15000\,(a_{\overline{12}|.04} - a_{\overline{3}|.04})$$

$$= 15000\,(9.38507 - 2.77509)$$

$$= 99149.7$$

4.- Encontrar el valor de contado de un departamento , que se va a pagar a 10 años, en la siguiente forma: se da un enganche de $40000, 3 pagos anuales de $5000, además mensualidades de $1800 los primeros 5 años y mensualidades anticipadas de $2500 los siguientes 5 años .Si el interés que se aplica es del 60 % anual convertible mensualmente.

5000 5000 5000 2500..

40000 1800.......1800....... 1800........ 1800...........1800

0 1 2 3...............5 10

A = ?

$$A = 40000 + 5000\, a_{\overline{3}|.7958} + 1800\, a_{\overline{60}|.05} + 2500\, \ddot{a}_{\overline{60}|.05}\, V^{60}$$

$$= 40000 + 5000\,(1.03961) + 1800\,(18.9292) + 2500\,(18.9292)\,(1.05)\,(0.0535)$$

$$= 81929.14$$

R1 = 1800
R 2 = 2500
n = 10 años (120 meses)
i '= .05 mensual

i'' = .7958 anual

5.- Una persona va a crear un fondo de la siguiente manera:

efectuará depósitos trimestrales anticipados durante dos años y medio; adicionalmente hará dos depósitos anuales de $10000 cada uno al final del primero y del segundo año. Con el propósito de poder percibir una renta perpetua de $5000 semestrales, la primera de ellas se recibirás al final del tercer año. la tasa de interés que gana la inversión es del 32 % anual convertible trimestral.

Determinar el deposito trimestral requerido. Tomando como fecha focal el punto que corresponde a dos años y medio.

10000 10000

x x ....x.......x.......x......x................x......... x.................5000 5000 5000..

0 3 ....12...............................24...........30............36............42................

F.F.

i' = .08 trimestral
i'' = .1664 semestral
i''' = .36 anual

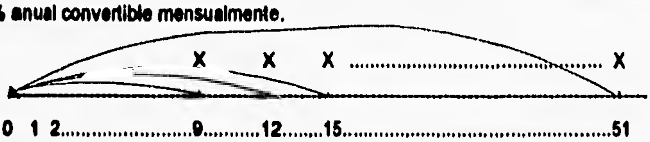
$$X\, \ddot{s}_{\overline{10}|.08} + 10000\, s_{\overline{2}|.36}\,(1.08)^{2} = \frac{5000}{.1664}$$

$$X\,s_{\overline{10}|.08} = \frac{5000}{.1664} - 10000\,s_{\overline{2}|.36}\,(1.08)^2$$

$$X\,(15.6454) = 2521.03$$

$$X = 161.13$$

6.- Se tiene una deuda de $22500 la cual se va a liquidar mediante pagos trimestrales durante tres años y medio. El primero de ellos se efectuara dentro de nueve meses. La tasa de Interés que se utiliza es del 30% anual convertible mensualmente.

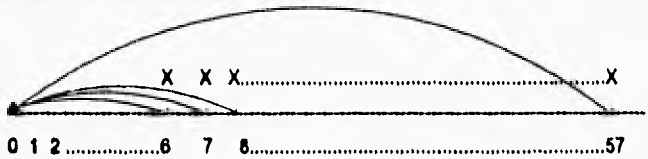


$A = 22500$	$A = R\,V^m\,a_{\overline{n}|i}$
$R = X$	$22500 = X\,V^2\,a_{\overline{14}|.07689}$
$n = 14$ trimestres $i' = .07689$ trimestral	$\dfrac{22500}{V^2\,(8.3952)} = X$
$m = 2$ trimestres	$X = 3108.09$

o bien

$A = 22500$	$A = R\,V^m\,a_{\overline{n}|i}$
$R = X$	$22500 = X\,V^8_{.025}\,a_{\overline{14}|.07689}$
$n = 14$ trimestres $i' = .07689$ trimestral	$\dfrac{22500}{V^8\,(8.3952)} = X$
$i'' = .025$ mensual	$X = 3269.33$

7. Se tiene una deuda de $42000 la cual se va a liquidar mediante pagos mensuales efectuados durante cuatro años , tres meses ; El primero de ellos se efectuara dentro de seis meses. La tasa de interés que se utiliza es del 24% anual convertible cada mes y medio.



A = 42000

R = X

i' = 0.0199 mensual

n = 51 meses

m = 5 meses

$$A = R\,V^{m}\,a_{\overline{51}|.0199}$$

$$42000 = R\,V^{5}\,a_{\overline{51}|.0199}$$

$$\frac{42000}{V^{5}\,(31.855)} = R$$

$$R = 1454.96$$

8.- Se va a crear un fondo mediante depósitos trimestrales de $750 cada uno efectuado en forma anticipada durante tres años ; con el propósito de poder efectuar cinco retiros anuales de $1000 cada uno, el primero de ellos al final del cuarto año y posteriormente llevar a cabo retiros semestrales por tiempo indefinido , el primero de ellos al final del noveno año, la tasa de interés que se utiliza es del 24% anual efectivo.

Determinar el monto de cada retiro semestral tomando como fecha focal el final del tercer año.

750 750 750......750 1000 1000 1000 1000 1000 X X X.......

0 3 6..................33.....36........48.... 60......72.....84........96 ......108 ....

F.F.

$$750\,\ddot{s}_{\overline{12}|.055} = 1000\,a_{\overline{5}|.24} + \frac{X\,V^{5}_{.24}}{.1135}$$

i = .24 anual

i' = .055 trimestral

i'' = .1135 semestral

$$\frac{12965.09 - 2745.38}{3.0053} = X$$

$$X = 3400.56$$

9- ¿Cuál será el costo de la construcción de un puente , tomando en cuenta que cada 5 años se deberá renovar y cuyo costo será de **$ 40,000.00?** Hallar el valor de los depósitos anuales que se deberán **hacer para lograr este objetivo, si la tasa de interés es del 35% anual.**

```
                          40000                  40000 ..................................
..........X    X    X    X    X...............................................................
0         1    2    3    4    5    6.............................................................
```

$$40000 = X\, s_{\overline{5}|.35}$$

$$\frac{40000}{9.95438} = X$$

$X = 4018$ que es el valor del pago anual

a hora encontraremos el valor presente de las perpetuidad.

$$A = \frac{W}{i}\;\frac{1}{s_{\overline{k}|i}}$$

$$A = \frac{40000}{.35}\;\frac{1}{9.95438}$$

$$A = 11480.95$$

o bien

$$A = R\,/\,i$$

$$= \frac{4018.33}{.35}$$

$$= 11480.95$$

10.- ¿ Que cantidad es necesaria para patrocinar una serie de conferencias , que se efectuaran al principio de cada año e indefinidamente, el valor de estas es de **$2500** , suponiendo un rendimiento del **5%** convertible trimestralmente .

```
2500          2500          2500...................................................
|-------------|-------------|------------------------------------------------------
0             1             2 .................................................
```

$w = 2500$
$i' = .0125$
$k = 4$

$$A = w + \frac{w}{i}\;\frac{1}{s_{\overline{n}|i}}$$

$$A = 2500 + \frac{2500}{.0125}\,\frac{1}{s_{\overline{4|}.0125}}$$

$$= 2500 + 49072.5292$$
$$= 51572.53$$

o bien

$$2500 = R\, a_{\overline{4|}.0125}$$

$$\frac{2500}{a_{\overline{4|}.0125}} = R$$

$$R = 644.65$$

$$A = R \,/\, i$$

$$= 644.65 \,/\, .0125$$

$$= 5157$$

III. ANUALIDADES PAGADERAS P-VECES AL AÑO

Se analizara una anualidad en la que la tasa de interés es anual efectiva y el pago unitario pagadero p - veces al año , en donde cada p - ésimo de año se dará una renta de 1/p. La notacion para el valor presente de este tipo de anualidades será $a^{p}_{\overline{n}|\, i}$.

Gráficamente

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & 1/p & 1/p & 1/p \ldots\ldots\ldots\ldots & 1/p & 1/p & 1/p \\
\hline
0 & 1/p & 2/p & 3/p \ldots\ldots\ldots\ldots & & & np/p
\end{array}
$$

$$a^{p}_{\overline{n}|\, i} = 1/p\, V^{1/P} + 1/p\, V^{2/P} + \ldots\ldots + 1/p\, V + 1/p\, V^{1+1/P} + \ldots\ldots + 1/p\, V^{n-1/P} + 1/p V^{n}$$

$$= 1/p\, V^{1/p} \underbrace{(1 + V^{1/p} + \ldots\ldots + V^{1-1/p} + V + \ldots\ldots + V^{n-1/p})}_{\text{progresión geométrica de razón } V^{1/p}}$$

$$= 1/p\, V^{1/p} \frac{(1 - (V^{1/p})^{np}}{(1 - V^{1/p})}$$

$$= 1/p\, V^{1/p} \frac{(1 - V^{n})}{(1 - V^{1/p})} \frac{(1 + i)^{1/p}}{(1 + i)^{1/p}}$$

multiplicamos y dividimos por $(1 + i)^{1/p}$

$$= \frac{1/p\ (1 - V^{n})}{(1 + i)^{1/p} - 1}$$

$$= \frac{1}{p} \frac{(1 - V^{n})}{((1 + i)^{1/p} - 1)}$$

sabemos que ; $i^{(m)} = m\,[\,(1 + i)^{1/m} - 1]$

$$= \frac{(1 - V^{n})}{i^{(p)}} \frac{(i)}{(i)}$$

multiplicamos y dividimos por i

$$= \frac{i}{i^{(p)}} \frac{(1 - V^{n})}{i}$$

$$= \frac{i}{i^{(p)}} a_{\overline{n}|\, i}$$

Si en lugar de una renta unitaria anual se tiene una renta cualquiera (Ra) tenemos;

$$A = Ra\ \frac{i}{i^{(p)}}\, a_{\overline{n}|i}$$

Otra forma de considerar este tipo de problemas, consiste en obtener el valor equivalente de los pagos que se afectúan p - veces al año.

$$\begin{array}{cccccc} & 1/p & 1/p & 1/p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 1/p\quad 1/p & 1/p \\ \hline 0 & 1/p & 2/p & 3/p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & p/p \end{array} \; X$$

$$X = 1/p + 1/p\,(1+i)^{1/p} + 1/p\,(1+i)^{2/p} + \ldots\ldots\ldots\ldots + 1/p\,(1+i)^{1-2/p} + 1/p\,(1+i)^{1-1/p}$$

$$= 1/p\,\left(1 + (1+i)^{1/p} + (1+i)^{2/p} + \ldots\ldots\ldots\ldots + (1+i)^{1-2/p} + (1+i)^{1-1/p}\right)$$

progresión geométrica de razón $(1+i)^{1/p}$

$$= 1/p\ \frac{\left(1-(1+i)^{1/p}\right)^{p}}{\left(1-(1+i)^{1/p}\right)}$$

$$= 1/p\ \frac{(1+i)-1}{(1+i)^{1/p}-1}$$

$$= \frac{1}{p\left((1+i)^{1/p}-1\right)}\, i$$

sabemos que ; $i^{(m)} = m\left[(1+i)^{1/m} - 1\right]$

$$X = \frac{i}{i^{(p)}}$$

donde X representa el pago equivalente anual , obteniendo que ;

$$a^{p}_{\overline{n}|i} = \frac{i}{i^{(p)}}\, a_{\overline{n}|i}$$

Monto de una anualidad pagadera p - veces al año.

Se analizara una anualidad en la que la tasa de interés es anual efectiva y el pago unitario , pagadero p - veces al año , en donde cada p - ésimo de año se dará una renta de 1/p . La notacion para el monto de este tipo de anualidades será : $s^{p}_{\overline{n|}i}$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & 1/p & 1/p & 1/p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1/p & 1/p & 1/p \\
\hline
0 & 1/p & 2/p & 3/p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & np/p
\end{array}
$$

$$s^{p}_{\overline{n|}i} = 1/p + 1/p\,(1+i)^{1/p} + 1/p\,(1+i)^{2/p} + \ldots\ldots\ldots + 1/p\,(1+i)^{n-1/p}$$

$$= 1/p\,\left(1 + (1+i)^{1/p} + (1+i)^{2/p} + \ldots\ldots\ldots + (1+i)^{n-1/p}\right)$$

progresión geométrica de razón $(1+i)^{1/p}$

$$= 1/p\,\left(\frac{1-((1+i)^{1/p}(1+i)^{n-1/p})}{1-(1+i)^{1/p}}\right)$$

$$= \frac{1}{p}\,\frac{((1+i)^{n}-1)}{((1+i)^{1/p}-1)}$$ multiplicando numerador y denominador por (- 1)

sabemos que : $i^{(m)} = m\left[\,(1+i)^{1/m} - 1\,\right]$

$$= \frac{((1+i)^{n}-1)}{i^{(p)}}\,\frac{(i)}{(i)}$$ multiplicamos y dividimos por " i "

$$= \frac{i}{i^{(p)}}\,\frac{((1+i)^{n}-1)}{i}$$

$$= \frac{i}{i^{(p)}}\,s_{\overline{n|}i}$$

Si en lugar de una renta anual unitaria se tiene una renta cualquiera (Ra) obtenemos :

$$S = Ra\,\frac{i}{i^{(p)}}\,s_{\overline{n|}i}$$

<u>**ANUALIDADES PAGADERAS P - VECES AL AÑO VALUADAS CON UNA TASA NOMINAL DE INTERÉS**</u>

Existen varios casos, los cuales se analizaran cada uno con una renta unitaria .

a) caso, cuando $m = p$

Este caso es cuando coincide la convertibilidad de la tasa con el periodo de los pagos .

Para obtener el valor presente y como $m = p$, se tendrán " mn " periodos, donde " n " es el número de años de la anualidad y " m " es el número de veces que se convierte la rasa de interés en un año . El pago será unitario anual y por cada periodo el pago será de 1/p .

1/p 1/p 1/p...1/p 1/p 1/p

0 1/p 2/p 3/p...nmp/p

$$a^{p}_{\overline{n}|\,i} = 1/p\,V^{1/p} + 1/p\,V^{2/p} + 1/p\,V^{3/p} + \dots + 1/p\,V^{nm}$$

$$= 1/p\,V^{1/P}\left(1 + V^{1/p} + V^{2/p} + V^{3/P} + \dots + V^{nm-1/p}\right)$$

progresión geométrica de razón $(1+i)^{1/p}$

$$= 1/p\,V^{1/p}\left(\frac{1-(V^{1/p})^{nmp}}{1-V^{1/p}}\right)$$

$$= 1/p\,V^{1/p}\,\frac{(1-V^{nm})}{(1-V^{1/p})}\,\frac{(1+i)^{1/p}}{(1+i)^{1/p}}$$

multiplicamos y dividimos por $(1+i)^{1/p}$

$$= \frac{1}{p}\,\frac{(1-V^{nm})}{((1+i)^{1/p}-1)}$$

aplicamos que : $i^{(m)} = m((1+i)^{1/m}-1)$

$$= \frac{1}{i^{(p)}}\,(1-V^{nm})$$

$$= \frac{1}{i^{(p)}}\,\frac{(1-V^{nm})}{(m)/(m)}$$

multiplicamos y dividimos por (m) el denominador .

$$= \frac{1}{m}\,\frac{(1-V^{nm})}{\left(\frac{i^{(p)}}{m}\right)}$$

como $m = p$

$$= \frac{1}{m}\,\frac{(1-V^{nm})}{(i^{(p)}/p)}$$

$$= \frac{1}{m}\,\frac{(1-V^{nm})}{i'}$$ aplicando que : $\frac{i^{(m)}}{m} = i'$

$$= \frac{1}{m}\,a_{\overline{nm|}\,i'}$$

Si en lugar de una renta anual unitaria se tiene una renta cualquiera (Ra) , sólo se multiplica esta por la expresión antes encontrada .

$$A = \frac{Ra}{m}\,a_{\overline{nm|}\,i'}$$

<u>Calculo del monto de una anualidad pagadera p - veces al año valuada con una tasa nominal de interés , para el caso m = p .</u>

1/p 1/p 1/p 1/p 1/p 1/p

0 1/p 2/p 3/p..nmp/p

$$s^{(p)}_{\overline{n|}\,i} = 1/p + 1/p\,(1+i)^{1/p} + 1/p\,(1+i)^{2/p} + \dots\dots + 1/p\,(1+i)^{nm-1/p}$$

$$= 1/p\,\left(1 + (1+i)^{1/p} + (1+i)^{2/p} + \dots\dots + (1+i)^{nm-1/p}\right)$$

progresión geométrica de razón $(1+i)^{1/p}$

$$= 1/p\,\frac{(1-((1+i)^{1/p})^{nmp})}{(1-(1+i)^{1/p})}$$

$$= 1/p\,\frac{(1-(1+i)^{nm})}{(1-(1+i)^{1/p})}$$

$$= \frac{1\,((1+i)^{nm}-1)}{p\,((1+i)^{1/p}-1)}$$ aplicando que : $i^{(m)} = m\,((1+i)^{1/m}-1)$

$$= \frac{1\ ((1+i)^{nm}-1)}{i^{(p)}}$$

$$= \frac{1\ ((1+i)^{nm}-1)}{i^{(p)}\ (m)/(m)}$$ multiplicamos y dividimos por (m) el denominador

$$= \frac{1\ ((1+i)^{nm}-1)}{m\ \frac{i^{(p)}}{m}}$$ como m = p

$$= \frac{1\ ((1+i)^{nm}-1)}{m\ \frac{i^{(m)}}{m}}$$ aplicando que : $i' = i^{(m)} / m$

$$= \frac{1}{m}\ \frac{((1+i)^{nm}-1)}{i'}$$

$$= \frac{1}{m}\ s_{\overline{nm}|i'} = \frac{1}{p}\ s_{\overline{nm}|i'}$$

Si la renta anual no es unitaria , si no cualquier renta (Ra) , sólo se multiplica esta por la expresión antes encontrada.

$$S = \frac{Ra}{p}\ s_{\overline{nm}|i'}$$

b) caso, cuando m < p

En este caso el número de pagos es mayor que la convertibilidad de la tasa de interés , en otras palabras en cada periodo de convertibilidad de la tasa existen k- pagos.

Para obtener el valor presente de este tipo de anualidades, primero se calculara el pago X tal que sea equivalente a los k -pagos , que se hacen en cada periodo de convertibilidad.

A continuación se hará un desarrollo para encontrar el valor presente de una anualidad , cuando m < p , en la cual se utilizara una tasa de interés " i' " .

$$
\begin{array}{cccccc}
 & 1/p & 1/p & 1/p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1/p & 1/p & 1/p \\
\hline
0 & 1/k & 2/k & 3/k \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & k/k \ X
\end{array}
$$

$$X = 1/p + 1/p\,(1+i')^{1/k} + 1/p\,(1+i')^{2/k} + \ldots\ldots\ldots\ldots + 1/p\,(1+i')^{k}$$

$$= 1/p\,\left(1 + (1+i')^{1/k} + (1+i')^{2/k} + \ldots\ldots\ldots\ldots + (1+i')^{k}\right)$$

progresión geométrica de razón $(1+i')^{1/k}$

$$= 1/p\,\left(\frac{1-\left((1+i')^{1/k}\right)^{k}}{1-(1+i')^{1/k}}\right)$$

$$= 1/p\,\frac{(-i')}{\left(1-(1+i')^{1/k}\right)}$$

$$= 1/p\,\frac{(i')}{(1+i')^{1/k}-1}$$

$$= \frac{1}{p}\,\frac{(i')}{\left((1+i')^{1/k}-1\right)}$$

tenemos que : $p/m = k$ de donde $p = km$

$$= \frac{1}{km}\,\frac{(i')}{\left((1+i')^{1/k}-1\right)}$$

aplicando que : $i^{(m)} = m\left((1+i)^{1/m}-1\right)$

$$= \frac{1}{m}\,\frac{i'}{k\left((1+i')^{1/k}-1\right)}$$

$$X = \frac{1}{m}\,\frac{i'}{i'^{(k)}}$$

Como X es el pago que coincide con la convertibilidad de la tasa , es decir $m = p$, a hora tenemos una anualidad como sigue :

$$a^{p}_{\overline{n}|i} = XV + XV^2 + XV^3 + \ldots\ldots\ldots + XV^{nm}$$

$$= XV(1 + V + V^2 + V^3 + \ldots\ldots\ldots + V^{nm-1})$$

progresión geométrica de razón V

$$= \frac{XV(1 - V^{nm})}{(1 - V)}$$

$$= XV \frac{(1 - V^{nm})}{(1 - V)} \frac{(1 + i')}{(1 + i')}$$ multiplicando y dividiendo por (1 + i ')

$$= X \frac{(1 - V^{nm})}{(1 + i') - 1}$$

$$= X \frac{(1 - V^{nm})}{i'}$$

$$= X a_{\overline{nm}|i'}$$

Si sustituimos el valor que encontramos , anterior de X , tenemos que :

$$A = \frac{1}{m} \frac{i' a_{\overline{nm}|i'}}{i'^{(k)}}$$

Ahora como " X " es el pago que coincide con la convertibilidad de la tasa de interés , entonces se llega al caso en el que m = p , y solo bastara multiplicar el pago " X " por la anualidad donde " n " es el número de pagos , que va a ser igual al número de años multiplicado por el número de veces de la convertibilidad de la tasa de interés en un año .

$$a^{p}_{\overline{n}|i} = \frac{1}{m} \frac{i' a_{\overline{nm}|i'}}{i'^{(k)}} \qquad \text{donde } i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

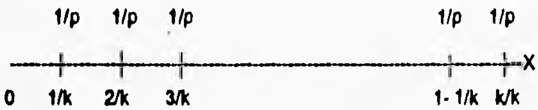
Si en lugar de una renta unitaria anual se tiene una renta cualquiera (Ra) , sólo se multiplica esta por la anualidad anterior .

$$A = \frac{Ra}{m} \frac{1}{i'^{(k)}} i' a_{\overline{nm}|i'}$$

Monto de una anualidad pagadera p - veces cuando m < p

Suponemos que : $p/m = k$ (entero) , por lo cual $p = mk$.

Se encontrara un pago " X " que sea igual a los pagos que se hacen en cada convertibilidad de la tasa de interés .



$$X = 1/p + 1/p(1+i')^{1/k} + 1/p(1+i')^{2/k} + \dots + 1/p(1+i')^{1-1/}$$

$$= 1/p\left(1 + (1+i')^{1/k} + (1+i')^{2/k} + \dots + (1+i')^{1-1/k}\right)$$

progresión geométrica de razón $(1+i')^{1/k}$

$$= 1/p\,\frac{(1-((1+i')^{1/k})^{k})}{(1-(1+i')^{1/k})}$$

$$= \frac{1}{p}\,\frac{(1-(1+i'))}{(1-(1+i')^{1/k})}$$

$$= \frac{1}{p}\,\frac{(-i')}{(1-(1+i')^{1/k})}$$ pero como $p = mk$

$$= \frac{1}{mk}\,\frac{i'}{((1+i')^{1/k}-1)}$$ aplicando que : $i^{(m)} = m((1+i)^{1/m}-1)$

$$X = \frac{1}{m}\,\frac{i'}{i'^{(k)}}$$

El pago " X " que se encontró es el que se realiza cada periodo de convertibilidad de la tasa de interés y en un año " m " veces se convierte la tasa, esto durante " n " años , entonces el número de pagos totales es de " mn ", por lo que se tiene entonces :

$$s^{p}_{\overline{n|}i'} = \frac{1}{m}\,\frac{i'}{i'^{(k)}}\, s_{\overline{mn|}i'}$$

A continuación se hará el desarrollo para encontrar el monto de " mn " pagos , pero ahora cuando el pago " X " coincide con la convertibilidad de la tasa de interés .

```
         x     x    x.......................................x    x     x  x
      ---+-----+--------------------------------------------------+--
    0   1/m   2/m ................................................mn/m
```

$$s^{(p)}_{\overline{n}|i} = X + X(1+i)^{1/m} + X(1+i)^{2/m} + \ldots + X(1+i)^{mn-1/m}$$

$$= X\left(1 + (1+i)^{1/m} + (1+i)^{2/m} + \ldots + (1+i)^{mn-1/m}\right)$$

progresión geométrica de razón $(1+i)^{1/m}$

$$= X\,\frac{1-(1+i)^{mn}}{1-(1+i)^{1/m}}$$

$$= X\,\frac{(1+i)^{mn}-1}{\dfrac{m\left((1+i)^{1/m}-1\right)}{m}}$$

multiplicamos y dividimos por (m) el denominador
aplicamos que : $i^{(m)} = m\left((1+i)^{1/m}-1\right)$

$$= X\,\frac{(1+i)^{mn}-1}{i^{(m)}/m}$$

aplicamos que : $i' = i^{(m)}/m$

$$= X\,\frac{(1+i)^{mn}-1}{i'}$$

$$= X\, s_{\overline{mn}|i'}$$

Sustituyendo el valor de " X " encontrado tenemos.

$$s^{(p)}_{\overline{n}|i} = \frac{1}{m}\,\frac{i'}{i'(k)}\, s_{\overline{mn}|i'}$$

Ahora si la renta no es unitaria , si se tiene cualquier renta (Ra) tenemos entonces.

$$S = \frac{Ra}{m}\,\frac{i'\, s_{\overline{mn}|i'}}{i'^{(k)}}$$

c) caso, cuando m > p

En este caso el número de pagos es menor que la convertibilidad de la tasa de interés , en otras palabras entre cada pago hay más convertibilidad de la tasa de interés. Entonces se buscará un pago " X " tal que coincida con la convertibilidad de la tasa de interés.

suponemos que : m/p = k (entero)

1/p 1/p 1/p

0 1 2 ....k

$$1/p = X + X(1+i') + X(1+i')^2 + X(1+i')^3 + \ldots\ldots + X(1+i')^{k-1}$$

$$1/p = X\left(1 + (1+i') + (1+i')^2 + (1+i')^3 + \ldots\ldots + (1+i')^{k-1}\right)$$

progresión geométrica de razón (1 + i ')

$$1/p = X\,\frac{\left(1-(1+i')^{k}\right)}{\left(1-(1+i')\right)}$$ Aplicando la fórmula de la suma de dicha progresión

$$1/p = X\,\frac{\left((1+i')^{k}-1\right)}{(1+i')-1}$$ multiplicando por (- 1)

$$1/p = X\,\frac{\left((1+i')^{k}-1\right)}{i'}$$

$$1/p = X\, s_{\overline{k}|i'}$$

$$X = 1/p \,/\, s_{\overline{k}|i'}$$

$$X = \frac{1}{p}\;\frac{1}{s_{\overline{k}|i'}}$$

Este pago " X " es el que se efectuará en cada convertibilidad de la tasa de interés.

Si obtenemos el valor presente de los pagos que se hacen en cada convertibilidad de la tasa de interés tenemos.

$$
\begin{array}{cccc}
 & X & X & \ldots\ldots\ldots\ldots X \\
\hline
0 & 1/m & 2/m & \ldots\ldots\ldots\ldots mn/m
\end{array}
$$

$$a^{p}_{\overline{n}|i} = XV^{1/m} + XV^{2/m} + XV^{3/m} + \ldots\ldots\ldots\ldots + XV^{mn}$$

$$= XV^{1/m}(1 + V^{1/m} + V^{2/m} + \ldots\ldots\ldots\ldots + V^{mn-1/m})$$

progresión geométrica de razón $V^{1/m}$

$$= XV^{1/m}\frac{(1-V^{mn})}{(1-V^{1/m})}$$

$$= XV^{1/m}\frac{(1-V^{mn})}{(1-V^{1/m})}\frac{(1+i')^{1/m}}{(1+i')^{1/m}}$$ multiplicando y dividiendo por $(1+i')^{1/m}$

$$= X\frac{(1-V^{mn})}{(1+i')^{1/m}-1}$$

$$= X\frac{(1-V^{mn})}{\left(m\left(\frac{1+i'}{m}\right)^{1/m}-1\right)}$$ multiplicando y dividiendo por (m) el denominador

$$= X\frac{(1-V^{mn})}{\frac{i^{(m)}}{m}}$$ aplicando que : $i^{(m)} = m((1+i)^{1/m}-1)$

$$= X\frac{(1-V^{mn})}{i'}$$ aplicando que : $i' = i^{(m)}/m$

$$= X a_{\overline{mn}|i'}$$

Sustituyendo el valor del pago " X " antes encontrado tenemos:

$$a^{(p)}_{\overline{n}|i} = \frac{1}{p}\,\frac{1}{s_{\overline{k}|i'}}\,a_{\overline{mn}|i'}$$

Si no se trata de una renta anual unitaria ,entonces para cualquier renta (Ra) tenemos :

$$A = \frac{Ra}{p}\,\frac{1}{s_{\overline{k}|i'}}\,a_{\overline{mn}|i'}$$

<u>Monto de una anualidad pagadera p - veces al año , caso m > p</u>

Suponemos $m/p = k$ (entero)

En este caso encontraremos un pago " X " el cual se podrá efectuar coincidiendo con la convertibilidad de la tasa de interés.

```
                    1/p
-----X---X--------------------------------------X------
     0   1   2...........................................k.
```

$$1/p = X + X(1+i') + X(1+i')^2 + X(1+i')^3 + \ldots\ldots + X(1+i')^k$$

$$= X(1 + (1+i') + (1+i')^2 + (1+i')^3 + \ldots\ldots + (1+i')^k)$$

progresión geométrica de razón (1 + i')

$$= X\,\frac{(1-(1+i')^k)}{(1-(1+i'))}$$

$$= X\,\frac{((1+i')^k - 1)}{i'}$$

$$1/p = X\,s_{\overline{k}|i'}$$

$$X = \frac{1}{p}\,\frac{1}{s_{\overline{k}|i'}}$$

El pago " X " encontrado, coincide con la convertibilidad de la tasa de interés , durante " mn " periodos .

A continuación se encontrará el monto de los " mn " periodos .

van a ser " mn " pagos , por que " m " veces se convierte la tasa de interés en un año y como son " n " años , entonces el monto va a ser de " mn " pagos.

$$
\begin{array}{ccccccc}
X & X & X & \ldots\ldots\ldots\ldots & X & X & X \\
\hline
0 & 1/m & 2/m & 3/m \ldots\ldots\ldots\ldots & & & mn/m
\end{array}
$$

$$S^{p}_{\overline{n}|i} = X + X(1+i)^{1/m} + X(1+i)^{2/m} + \ldots\ldots\ldots + X(1+i)^{mn-1/m}$$

$$= X\left(1 + (1+i)^{1/m} + (1+i)^{2/m} + \ldots\ldots\ldots + (1+i)^{mn-1/m}\right)$$

progresión geométrica de razón $(1+i)^{1/m}$

$$= X\,\frac{\left(1-(1+i)^{mn}\right)}{1-(1+i)^{1/m}}$$

$$= X\,\frac{\left((1+i)^{mn}-1\right)}{(1+i)^{1/m}-1}$$

$$= X\,\frac{\left((1+i)^{mn}-1\right)}{\left(\frac{m\left((1+i)^{1/m}-1\right)}{m}\right)}$$ multiplicamos y dividimos por " m " el denominador

$$= X\,\frac{\left((1+i)^{mn}-1\right)}{\frac{i^{(m)}}{m}}$$ aplicando que : $i^{(m)} = m\left((1+i)^{1/m}-1\right)$

$$= X\,\frac{\left((1+i)^{mn}-1\right)}{i'}$$ aplicando que : $i' = i^{(m)}/m$

$$= X\, s_{\overline{mn}|i'}$$

Sustituyendo el valor de "X " encontrado obtenemos :

$$s^{p}_{\overline{n}|i} = \frac{1}{p}\,\frac{1}{s_{\overline{k}|i'}}\, s_{\overline{mn}|i'}$$

Si la renta anual no es unitaria , entonces para cualquier renta (R a) tenemos:

$$S = \frac{Ra}{p}\,\frac{1}{s_{\overline{k}|i'}}\, s_{\overline{mn}|i'}$$

d) caso, cuando $m/p \neq k$ (k es entero)

Valor presente de una anualidad en donde no coincide la frecuencia de los pagos con la convertibilidad de la tasa de interés.

Suponemos $m/p = k$ (entero)

```
         1/p    1/p      1/p.......................................   1/p      1/p

----|--------|------------------------------------------------------------|-----
0   1        2 .........................................................np /p
```

Se obtendrá el valor presente de esta anualidad , como en el caso de una anualidad con pagos p - veces al año y una tasa anual efectiva , después se hará el cambio de la tasa efectiva por una nominal convertible " m " veces al año , utilizando la triple igualdad.

$$a^{p}_{\overline{n}|\,i} = 1/p\, V^{1/p} + 1/p\, V^{2/p} + 1/p\, V^{3/p} + \dots\dots + 1/p\, V^{n}$$

$$= 1/p\, V^{1/p}\,[\,1 + V^{1/p} + V^{2/p} + \dots\dots + V^{n-1/p}\,]$$

progresión geométrica de razón $V^{1/p}$

$$= 1/p\, V^{1/p}\,\frac{(1 - V^{n})}{(1 - V^{1/p})}$$

$$= 1/p\, V^{1/p}\,\frac{[\,1 - V^{n}\,]\,(1+i)^{1/p}}{[\,1 - V^{1/p}\,]\,(1+i)^{1/p}}$$ multiplicamos y dividimos por $(1+i)^{1/p}$

$$= 1/p\,\frac{[\,1 - V^{n}\,]}{(1+i)^{1/p} - 1}$$

por la triple igualdad sabemos que : $(1+i) = (1 + i^{m}/m)^{m}$, entonces

$$a^{p}_{\overline{n}|\,i} = \frac{1\,[1 - (1 + i^{m}/m)^{-mn}]}{p\,[\,(1 + i^{m}/m)^{m/p} - 1\,]}$$

Monto de una anualidad pagadera p - veces , donde no coincide la frecuencia de los pagos, con la convertibilidad de la tasa de interés.

suponemos $m/p \neq k$ (es entero)

$$
\begin{array}{cccccc}
 & 1/p & 1/p & 1/p & 1/p \ldots\ldots & 1/p \\
\text{------} & | & | & \text{--------------------------------} & & | \text{----} \\
0 & 1 & 2 & \ldots\ldots & & np/p
\end{array}
$$

$$s^{p}_{\overline{n}|i} = 1/p + 1/p(1+i)^{1/p} + 1/p(1+i)^{2/p} + \ldots\ldots 1/p(1+i)^{n-1/p}$$

$$= 1/p[1 + (1+i)^{1/p} + (1+i)^{2/p} + \ldots\ldots + (1+i)^{n-1/p}]$$

progresión geométrica de razón $(1+i)^{1/p}$

$$= 1/p \frac{[1-(1+i)^{n}]}{[1-(1+i)^{1/p}]}$$

$$= 1/p \frac{[(1+i)^{n}-1]}{[(1+i)^{1/p}-1]}$$

por la triple igualdad sabemos que : $(1+i) = (1+i^{m}/m)^{m}$, entonces tenemos;

$$s^{p}_{\overline{n}|i} = \frac{1}{p} \frac{[(1+i^{m}/m)^{mn}-1]}{[(1+i^{m}/m)^{m/p}-1]}$$

EJEMPLOS.

1.- Determinar el valor presente de las siguientes anualidades , bajo las siguientes condiciones ;

$10000 al final de cada semestre , durante 5 años ,con una tasa de interés.

a) del 8% anual convertible semestralmente.

b) del 12% anual pagadera 3 veces al año.

c) del 18% anual convertible bimestralmente.

a)

Ra = 20000

n = 5 años

p = 2

m = 2

i' = .04 semestral

m = p

$$A = \frac{Ra}{p}\, a_{\overline{n\,m}|i'}$$

$$= \frac{20000}{2}\, a_{\overline{10}|.04}$$

$$= 10000\ (8.11090)$$

$$= 81109$$

b)

Ra = 20000

n = 5 años

m = 3

p = 2

I' = .04 tres veces al año

m > p

k = m/p = 3/2 = 1.5

$$A = \frac{Ra}{p}\ \frac{(1-(1+i')^{-mn})}{((1+i')^{m/p}-1)}$$

$$= \frac{20000}{2}\ \frac{(1-(1.04)^{-15})}{((1.04)^{3/2}-1)}$$

$$A = 10000\ (7.339347)$$

$$= 73393.47$$

c)

Ra = 20000

n = 5

m = 6

p = 2

i' = .03 bimestral

m > p

K = m/p = 3

$$A = \frac{Ra}{p}\ \frac{a_{\overline{n\,m}|i'}}{s_{\overline{k}|i'}}$$

$$= \frac{20000}{2}\ \frac{a_{\overline{30}|.03}}{s_{\overline{3}|.03}}$$

$$= 10000\ (6.3413374$$

$$= 63413.37$$

2.- Determinar el valor presente de las siguientes anualidades , bajo las siguientes condiciones : $2000 al final de cada trimestre durante 10 años, con una tasa de interés del .

a) 8% anual convertible semestralmente.

b) 12% anual pagadero 3 veces al año.

c)18 % anual convertible bimestralmente.

a)

$Ra = 8000$

$n = 10$ años

$m = 2$

$p = 4$

$i' = .04$

$m < p$

$k = p/m = 2$

$i'^{(k)} = 2 [(1.04)^{½} - 1]$

$= 0.039607805$

$$A = \frac{Ra}{m} \frac{i' a_{\overline{nm}|i'}}{i'^{(k)}}$$

$$= \frac{8000}{2} \frac{(.04) a_{\overline{20}|.04}}{(0.03960)}$$

$$= 4000 (1.009901) (13.59033)$$

$$= 54899.60$$

b)

$Ra = 8000$

$n = 10$

$m = 3$

$p = 4$

$i' = .04$ tres veces al año

$m < p$

$k = p/m = 1.33$

$$A = \frac{Ra}{p} \frac{[1 - (1 + i')^{-mn}]}{[(1 + i')^{m/p} - 1]}$$

$$= \frac{8000}{4} \frac{[1 - (1.04)^{-30}]}{[(1.04)^{3/4} - 1]}$$

$$= 2000 \frac{(0.691681332)}{(0.029852445)}$$

$$= 46340$$

c)

$Ra = 8000$

$n = 10$

$m = 6$

$p = 4$

$i' = .03$ bimestral

$m > p$

$k = m/p = 1.5$

$$A = \frac{Ra}{p} \frac{[1 - (1 + i')^{-mn}]}{[(1 + i')^{m/p} - 1]}$$

$$= \frac{8000}{4} \frac{[1 - (1.03)^{-60}]}{[(1.03)^{6/4} - 1]}$$

$$= 2000 (18.31370225)$$

$$= 36627.40$$

3.- Determinar el valor presente de las siguientes anualidades, bajo las siguientes condiciones: $50000 al año pagaderos mensualmente , durante 20 años, con una tasa de interés del .

a) 8% anual convertible semestralmente.

b) 12% pagadera 3 veces al año

c) 18 % anual convertible bimestralmente.

a)

$Ra = 50000$

$n = 20$
$m = 2$

$p = 12$

$i' = .04$
$m < p$

$k = p/m = 6$

$i'^{(k)} = k[(1 + i')^{1/k} - 1]$

$= 6[(1.04)^{1/6} - 1]$
$= 0.0393491$

$$A = \frac{Ra}{m}\,\frac{i'}{i'^{(k)}}\,a_{\overline{nm}|\,i'}$$

$$= \frac{50000}{2}\,\frac{(.04)}{(0.0393491)}\,a_{\overline{40}|.04}$$

$= 25000\ (1.0165395)\ (19.79277)$

$= 503003.35$

b)

$Ra = 50000$

$n = 20$
$m = 3$

$p = 12$

$i' = .04$ tres veces al año
$m < p$

$k = p/m = 4$

$i'^{(k)} = k[(1 + i')^{1/k} - 1]$

$= 4[(1.04)^{1/4} - 1]$
$= 0.0394136$

$$A = \frac{Ra}{m}\,\frac{i'}{i'^{(k)}}\,a_{\overline{nm}|\,i'}$$

$$= \frac{50000}{3}\,\frac{(.04)}{(0.0394136)}\,a_{\overline{60}|.04}$$

$= 16666.66667\ (1.014877444)\ (22.62349)$

$= 382667.82$

c)

$Ra = 50000$

$n = 20$
$m = 6$

$p = 12$

$i' = .03$ bimestral
$m < p$

$$A = \frac{Ra}{m}\,\frac{i'}{i'^{(k)}}\,a_{\overline{nm}|\,i'}$$

$$= \frac{50000}{6}\,\frac{(.03)}{(0.0297783)}\,a_{\overline{120}|.03}$$

$k = p/m = 2$

$i'^{(k)} = k\,[\,(1 + i')^{1/k} - 1\,]$

$= 2\,[\,(1.03)^{1/2} - 1\,]$

$= 0.0297783$

$= 8333.33\,(1.0074450)\,(32.372945)$

$= 271782.90$

$$a_{\overline{h+k}|i'} = a_{\overline{h}|i'} + a_{\overline{k}|i'}\,(1 + i')^{-h}$$

$$= a_{\overline{60}|.03} + a_{\overline{60}|.03}\,(1.03)^{-60}$$

$$= (27.6755) + (27.6755)\,(0.169733)$$

$$= 32.372945$$

4.- Determinar el monto de las siguientes anualidades , bajo las siguientes condiciones:

$10000 al final de cada semestre durante 5 años , con una tasa de interés.

a) 8% anual convertible semestralmente.

b) 12% anual pagadero 3 veces al año.

c) 16% anual convertible semestralmente.

a)

$Ra = 20000$
$n = 5$
$m = 2$

$p = 2$
$i' = .04$ semestral
$m = p$

$$S = \frac{Ra}{p}\, s_{\overline{nm}|i'}$$

$$= \frac{20000}{2}\, s_{\overline{10}|.04}$$

$$= 10000\,(12.00611)$$

$$= 120061.1$$

b)

$Ra = 20000$
$n = 5$
$m = 3$
$p = 2$
$i' = .04$ tres veces al año
$m > p$
$k = m/p = 1.5$

$$S = \frac{Ra\,[\,(1 + i')^{nm} - 1\,]}{p\,[\,(1 + i')^{m/p} - 1\,]}$$

$$= \frac{20000\,[\,(1.04)^{15} - 1\,]}{2\,[\,(1.04)^{3/2} - 1\,]}$$

$$= 10000\,(13.21774933)$$

$$= 132177.49$$

c)

$Ra = 20000$
$n = 5$
$m = 6$

$$S = \frac{Ra}{p}\,\frac{s_{\overline{nm}|i'}}{s_{\overline{k}|i'}}$$

$p = 2$

$i' = .03$ bimestral

$m > p$

$k = m/p = 3$

$$= \frac{20000}{2} \frac{S_{\overline{30}|.03}}{S_{\overline{3}|.03}}$$

$$= 10000 \frac{(47.57542)}{(3.09090)}$$

$$= 10000 (15.39209292)$$

$$= 153920.92$$

5.- Determinar el monto de la siguiente anualidad , bajo las siguientes condiciones:

$ 2000 al final de cada trimestre , durante 10 años , con una tasa de interés del 8% convertible semestralmente.

$Ra = 8000$

$n = 10$

$m = 2$

$p = 4$

$i' = .04$ semestral

$m < p$

$k = p/m = 2$

$$S = \frac{Ra}{m} \frac{i'}{i'^{(k)}} S_{\overline{nm}|i'}$$

$$= \frac{8000}{2} \frac{(.04)}{(.0396078)} S_{\overline{20}|.04}$$

$$= 4000 (1.0099019) (29.77808)$$

$$= 120291.76$$

$$i'^{(k)} = k [(1 + i')^{1/k} - 1]$$

$$= 2 [(1.04)^{½} - 1]$$

$$= 0.0396078$$

6.- Determinar el monto de las siguientes anualidades , bajo las siguientes condiciones:

$5000 al año pagaderos mensualmente, durante 20 años , con una tasa de interés del .

a) 8 % anual convertible semestralmente.

b) 12 % pagadero tres veces al año.

c) 18 % anual convertible bimestralmente.

a)

$Ra = 5000$

$n = 20$

$m = 2$

$p = 12$

$i' = .04$

$m < p$

$k = p/m = 6$

$$S = \frac{Ra}{m} \frac{i'}{i'^{(k)}} S_{\overline{mn}|i'}$$

$$= \frac{5000}{2} \frac{(.04)}{(0.03934918)} S_{\overline{40}|.04}$$

$$= 2500 (1.01653958) (95.02552)$$

$i'^{(k)} = k[(1+i')^{1/k} - 1]$ $= 241493$

$= 6[(1.04)^{1/6} - 1]$
$= 0.03934918$

b)

Ra = 5000
n = 20
m = 3
p = 12
i' = .04 tres veces al año
m < p
k = p/m = 4

$$S = \frac{Ra}{m}\frac{i'}{i'^{(k)}} S_{\overline{mn}|i'}$$

$$= \frac{5000}{3}\frac{(.04)}{(.03941362)} S_{\overline{60}|.04}$$

$= 1666.66\ (1.01487744)(237.99069)$

$= 402552.14$

$i'^{(k)} = k[(1+i')^{1/k} - 1]$

$= 4[(1.04)^{1/4} - 1]$
$= 0.03941362$

c)

Ra = 5000
n = 20
m = 6
p = 12
i' = .03 bimestral
m < p
k = p/m = 2

$$S = \frac{Ra}{m}\frac{i'}{i'^{(k)}} S_{\overline{nm}|i'}$$

$$= \frac{5000}{6}\frac{(.03)}{(0.029778313)} S_{\overline{120}|.03}$$

$= 833.33\ (1.007444579)(1123.6995)$

$i'^{(k)} = k[(1+i')^{1/k} - 1]$

$= 2[(1.03)^{1/2} - 1]$ $= 943387.55$

$= 0.0297783$

$$S_{\overline{h+k}|i'} = S_{\overline{h}|i'}(1+i')^k + S_{\overline{k}|i'}$$

$$= S_{\overline{60}|.03}\ (1.03)^{60} + S_{\overline{60}|.03}$$

$= (163.05344)(5.891603) + 163.05344$

$= 1123.699593$

7.- Determinar el valor presente de las anualidades bajo las siguientes condiciones :

a) Una renta bimestral de \$850 pagaderos durante tres años nueve meses si la tasa de interés es del 24% anual convertible trimestralmente.

b) Una renta anual anticipada de \$6800 pagadera cada dos años , durante seis años y medio si la tasa de interés es del 32% anual convertible cinco veces al año.

a)

$Ra = 5100$

$n = 3.75$ de años

$m = 4$

$p = 6$

$i' = .06$ trimestral

$m < p$

$k = p/m = 1.5$

$i'^{(k)} = k [(1 + i')^{1/k} - 1]$

$= 1.5 [(1.06)^{1/1.5} - 1]$

$= 0.0594154$

$$A = \frac{Ra}{m} \frac{i'}{i'^{(k)}} a_{\overline{nm}|i'}$$

$$= \frac{5100}{4} \frac{(.06)\, a_{\overline{15}|.06}}{(.0594154)}$$

$$= 1275 \; (1.0098392) \; (9.71225)$$

$$= 12504.94$$

b)

$Ra = 6800$

$n = 6.5$ de año

$m = 5$

$p = ½$

$i' = .064$ cinco veces al año

$m > p$

$k = m/p = 10$

$$A = \frac{Ra}{p} \frac{[\, 1 - (1 + i')^{-mn} \,]\; [\, 1 + i' \,]^{1/k}}{[\, (1 + i')^{m/p} - 1 \,]}$$

$$= \frac{6800}{½} \frac{[\, 1 - (1.064)^{-32.5} \,]\; [\, 1.064 \,]^{1/10}}{[\, (1.064)^{10} - 1 \,]}$$

$$= 13600 \; \frac{(0.866832)\; (1.006222821)}{(0.859586)}$$

$$= 13799.98$$

o bien

$$A = \frac{Ra}{p} a_{\overline{nm}|i'} \frac{1}{s_{\overline{k}|i'}} (1 + i')^{1/k}$$

$$= \frac{6800}{½} a_{\overline{32.5}|.064} \frac{1}{s_{\overline{10}|.064}} (1.064)^{1/10}$$

$$= 13600 \; (13.5442633) \; (.074454442) \; (1.00622282)$$

$$= 13799.99$$

8.- Se tiene una deuda de $22500 la cual se va a liquidar mediante pagos trimestrales durante tres años y medio . El primero de ellos se efectuara dentro de nueve meses. La tasa de interés que se utiliza es del 30% anual convertible mensualmente. Determinar el pago trimestral.

$A = 22500$

$n = 3.5$

$m = 12$

$p = 4$

$m' = 9$ meses (diferimiento)

$i' = .025$ mensual

$m > p$

$k = m/p = 3$

$$A = \frac{Ra}{p} \frac{[1 - (1 + i')^{-mn}]}{[(1 + i')^{m/p} - 1]} [1 + i']^{m'}$$

$$22500 = \frac{Ra}{4} \frac{[1 - (1.025)^{-42}]}{[(1.025)^{3} - 1]} [1.025]^{-8}$$

$$Ra = 22500 \frac{[4((1.025)^{3} - 1)]}{[1 - (1.025)^{-42}][1.025]^{-8}}$$

$$= \frac{6920.156241}{.529804362}$$

$Ra = 13061.72$

$$Rt = \frac{13061.72}{4}$$

$Rt = 3265.43$

[illegible]

En ocasiones existen anualidades en las cuales los pagos no son iguales y van variando crecientemente , llevando una cierta relación , a estas anualidades se les llama crecientes.

A continuación encontraremos el valor presente de estas anualidades , donde al primer termino le llamaremos " P " y la relación o razón que existe entre cada pago será " Q " , esto durante " n " años.

$$\begin{array}{ccccccc} & P & P+Q & P+2Q & \cdots & P+(n-2)Q & P+(n-1)Q \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{array}$$

Sea X el valor presente de estos pagos, entonces:

$$X = PV + (P+Q)V^2 + (P+2Q)V^3 + \cdots + [P+(n-2)Q]V^{n-1} + [P+(n-1)Q]V^n$$

Si multiplicamos por (1 + i) esta ecuación obtenemos ;

$$(1+i)X = P + (P+Q)V + (P+2Q)V^2 + \cdots + [P+(n-2)Q]V^{n-2} + [p+(n-1)Q]V^{n-1}$$

Ahora a la segunda ecuación le restamos la primera ecuación .

$$(1+i)X - X = P - PV + (P+Q)V - (P+Q)V^2 + (P+2Q)V^2 - (P+2Q)V^3 + \cdots$$

$$\cdots + (P+(n-1)Q)V^{n-1} - (P+(n-1)Q)V^n$$

Si eliminamos paréntesis y cancelamos términos obtenemos;

$$iX = P + QV - QV^2 + 2QV^2 - 2QV^3 + \cdots + (n-1)QV^{n-1} - PV^n - (n-1)QV^n$$

$$iX = P + QV + QV^2 + QV^3 + \cdots + QV^{n-1} - [V^n(P+(n-1)Q]$$

$$= P + Q[V + V^2 + V^3 + \cdots + V^{n-1}] - V^nP - V^nnQ + V^nQ$$

$$= P + Q[V + V^2 + V^3 + \cdots + V^{n-1} + V^n] - V^nP - V^nnQ$$

$$= P(1-V^n) + Q[V + V^2 + V^3 + \cdots + V^{n-1} + V^n] - V^nnQ$$

$$\frac{iX}{i} = \frac{P(1-V^n)}{i} + \frac{Q a_{\overline{n}|i}}{i} - \frac{V^n\, nQ}{i}$$ dividiendo entre (i) toda la ecuación

$$X = \frac{P(1-V^n)}{i} + \frac{Q a_{\overline{n}|i} - nQV^n}{i}$$

$$X = P a_{\overline{n}|i} + Q \left[\frac{a_{\overline{n}|i} - nV^n}{i}\right]$$

Expresión para el valor presente de una anualidad creciente en progresión aritmética.

En particular cuando P = Q = 1 , tenemos una anualidad creciente ordinaria cuyo valor será ;

$$(I a)_{\overline{n}|i} = \frac{a_{\overline{n}|i} + a_{\overline{n}|i} - nV^n}{i}$$

$$= \frac{i a_{\overline{n}|i} + a_{\overline{n}|i} - nV^n}{i}$$

$$= i\,\frac{(1-V^n)/i}{i} + \frac{a_{\overline{n}|i} - nV^n}{i}$$

$$= \frac{1 - V^n + a_{\overline{n}|i} - nV^n}{i}$$

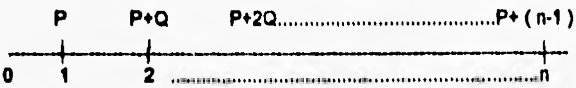
$$= \frac{1 - V^n + (V + V^2 + V^3 + \ldots\ldots + V^n) - nV^n}{i}$$

$$= \frac{1 + (V + V^2 + V^3 + \ldots\ldots + V^{n-1}) - nV^n}{i}$$

$$= \frac{1 + a_{\overline{n-1}|i} - nV^n}{i}$$

$$= \frac{a_{\overline{n-1}|i} + 1 - nV^n}{i}$$

Monto de una anualidad creciente en progresión aritmética.



Sea " Y " el monto de estos pagos;

$$\text{I- } Y = P(1+i)^{n-1} + (P+Q)(1+i)^{n-2} + \ldots\ldots + [P + (n-1)Q]$$

Si multiplicamos la ecuación por (1 + i) tenemos ;

$$\text{II - } (1+i)\,Y = P(1+i)^{n} + (P+Q)(1+i)^{n-1} + \ldots\ldots + [P + (n-1)Q](1+i)$$

A la ecuación II le restamos la ecuación I tenemos ;

$$(1+i) - Y = P(1+i)^{n} - P(1+i)^{n-1} + (P+Q)(1+i)^{n-1} - (P+Q)(1+i)^{n-2} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots - \ldots\ldots + (P + (n-1)Q)(1+i) - [p + (n-2)Q](1+i)$$

Eliminando paréntesis y cancelando términos obtenemos ;

$$iY = P(1+i)^{n} + Q(1+i)^{n-1} + \ldots\ldots + Q(1+i) - (P + (n-1)Q)$$

$$= P(1+i)^{n} + Q[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots\ldots + (1+i)] - P - nQ + Q$$

$$= P[(1+i)^{n-1}] + Q[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots\ldots + (1+i) + 1] - nQ$$

$$= P[(1+i)^{n-1}] + Q\ s_{\overline{n}|} - nQ$$

$$= P[(1+i)^{n-1}] + Q[\ s_{\overline{n}|} - n]$$

$$\frac{iY}{i} = \frac{P[(1+i)-1]}{i} + Q[\ s_{\overline{n}|} - n] \quad \text{dividimos toda la ecuación por (i)}$$

$$Y = P\ s_{\overline{n}|} + \frac{Q(\ s_{\overline{n}|} - n)}{i}$$

Valor presente de una anualidad decreciente en progresión aritmética.

También existen anualidades en las cuales los pagos son diferentes entre si , en forma decreciente , pero existe una relación aritmética entre ellos.

A continuación se encontrara el valor presente de una anualidad decreciente en progresión aritmética , en donde el primer termino es " P " y la razón " Q ", esto durante " n " años.

$$\begin{array}{cccccc} & P & P-Q & P-2Q \ldots\ldots & P-(n-2)Q & P-(n-1)Q \\ 0 & 1 & 2 & 3 \ldots\ldots & n-1 & n \end{array}$$

Sea X el valor presente de estos pagos ;

$$\text{I- } X = PV + (P-Q)V^2 + (P-2Q)V^3 + \ldots\ldots + (P-(n-2)Q)V^{n-1} + (P-(n-1)Q)V^n$$

Si multiplicamos esta ecuación por (1 + i)

$$\text{II- } (1+i)X = P + (P-Q)V + (P-2Q)V^2 + \ldots\ldots + (P-(n-2)Q)V^{n-2} + (P-(n-1)Q)V^{n-1}$$

Si restamos la ecuación I a la ecuación II obtenemos ;

$$(1+i)X - X = P - PV + (P-Q)V - (P-Q)V^2 + (P-2Q)V^2 - (P-2Q)V^3 + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + (P-(n-1)Q)V^{n-1} - (P-(n-1)Q)V^n$$

Eliminando paréntesis y cancelando términos

$$iX = P - QV - QV^2 - QV^3 - QV^4 - \ldots\ldots - QV^{n-1} - PV^n + nQV^n - QV^n$$

$$= P - Q[V + V^2 + V^3 + \ldots\ldots + V^{n-1} + V^n] - PV^n + nQV^n$$

$$= P(1-V^n) - Q a_{\overline{n}|i} + nQV^n$$

Dividiendo entre i tenemos :

$$\frac{iX}{i} = \frac{P(1-V^n)}{i} - \frac{Q a_{\overline{n}|i} + nQV^n}{i}$$

$$X = P\,a_{\overline{n}|} - \frac{Q\,a_{\overline{n}|} + n\,Q\,V^{n}}{i}$$

$$X = P\,a_{\overline{n}|} - Q\,\frac{\left[a_{\overline{n}|} - n\,V^{n}\right]}{i}$$

La fórmula encontrada es el valor presente de una anualidad decreciente en progresión aritmética , un caso particular es cuando la anualidad tiene que , $P = n$ y $Q = -1$, entonces se trata de una anualidad decreciente , quedando la formula como sigue:

Sea X el valor presenta de estos pagos :

$$X = nV + (n-1)V^{2} + (n-2)V^{3} + \ldots\ldots + 3V^{n-2} + 2V^{n-1} + V^{n}$$

multiplicando la ecuación por (1 + i) tenemos :

$$(1+i)X = n + (n-1)V + (n-2)V^{2} + \ldots\ldots + 3V^{n-3} + 2V^{n-2} + V^{n-1}$$

Restando la primera ecuación a la segunda ecuación

$$(1+i)X - X = n - nV + (n-1)V - (n-1)V^{2} + (n-2)V^{2} - (n-2)V^{3} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + 3V^{n-3} - 3V^{n-2} + 2V^{n-2} - 2V^{n-1} + V^{n-1} - V^{n}$$

Eliminando paréntesis y cancelando términos

$$iX = n - V - V^{2} - V^{3} - V^{4} - \ldots\ldots - V^{n-2} - V^{n-1} - V^{n}$$

$$= n - (V + V^{2} + V^{3} + V^{4} + \ldots\ldots + V^{n-2} + V^{n-1} + V^{n})$$

$$= n - a_{\overline{n}|}$$

$$X = \frac{n - a_{\overline{n}|}}{i}$$

$$(D\,a)_{\overline{n}|} = \frac{n - a_{\overline{n}|}}{i}$$

La fórmula encontrada es el valor presente de una anualidad decreciente en progresión aritmética. También se podría haber obtenido este valor , sustituyendo en la fórmula de una anualidad creciente , los valores de $P = n$ y $Q = -1$ como sigue :

La fórmula de una anualidad creciente en progresión aritmética es ;

$$X = P\,a_{\overline{n}|} + Q\,\frac{(a_{\overline{n}|} - nV^{n})}{i}$$

Sustituyendo el valor de $P = n$ y $Q = -1$

$$X = n\,a_{\overline{n}|} + \frac{(-1)(a_{\overline{n}|} - nV^{n})}{i}$$

$$= \frac{i\,n\,a_{\overline{n}|} - a_{\overline{n}|} + nV^{n}}{i}$$

$$= \frac{i\,n(1 - V^{n})/i}{i} - \frac{a_{\overline{n}|} + nV^{n}}{i}$$

$$= \frac{n - nV^{n} - a_{\overline{n}|} + nV^{n}}{i}$$

$$X = \frac{n - a_{\overline{n}|}}{i} = (Da)_{\overline{n}|}$$

Monto de una anualidad decreciente en progresión aritmética.

P   P - Q   P - 2Q   P - 3Q ....P - (n - 2)Q   P - (n - 1)Q

0   1   2   3   4.. n - 1   n

Sea Y el monto de estos pagos :

$$Y = P(1+i)^{n-1} + (P-Q)(1+i)^{n-2} + \ldots\ldots + [P-(n-2)Q](1+i) + [P-(n-1)]Q$$

Multiplicando la ecuación por (1 + i)

$$(1+i)Y = P(1+i)^{n} + (P-Q)(1+i)^{n-1} \ldots\ldots + [P-(n-2)Q](1+i)^{2} +$$

$$[P-(n-1)Q](1+i)$$

restando la primera ecuación a la segunda ecuación

$$iY = P(1+i)^{n} - Q(1+i)^{n-1} - Q(1+i)^{n-2} - \ldots\ldots - Q(1+i)^{2} - Q(1+i) - P + nQ - Q$$

$$= P[(1+i)^{n} - 1] - Q[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots\ldots + (1+i)^{2} + (1+i) + 1] + nQ$$

$$= P((1+i)^{n} - 1) - Q\, s_{n|i} + nQ$$

Dividiendo entre (i)

$$iY = P\frac{[(1+i)^{n} - 1]}{i} - \frac{Q[s_{\overline{n}|i} - n]}{i}$$

$$Y = P\, s_{\overline{n}|i} - Q\frac{s_{\overline{n}|i} - n}{i}$$

ANUALIDADES CRECIENTES EN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

Veremos el caso en el que la anualidad varia en progresión geométrica .

Se encontrara el valor presente de una anualidad creciente en progresión geométrica.

	1	$(1+k)$	$(1+k)^2$	$(1+k)^3$	$(1+k)^{n-1}$
0	1	2	3		n

Sea **X** el valor presente de estos pagos :

$$X = V + (1+k)V^2 + (1+k)^2 V^3 + \ldots\ldots + (1+k)^{n-1} V^n$$

$$= V[1 + (1+k)V + (1+k)^2 V^2 + \ldots\ldots + (1+k)^{n-1} V^{n-1}]$$

progresión geométrica de razón $(1+k)V$

$$= V\left[\frac{1-(1+k)^n V^n}{[1-(1+k)V]}\right]$$

$$= \frac{\frac{1}{(1+i)}\left[1-\frac{(1+k)^n}{(1+i)^n}\right]}{1-\frac{(1+k)}{(1+i)}}$$ sustituyendo el valor de $V^n = 1/(1+i)^{n}$

$$= \frac{1-\left[\frac{(1+k)}{(1+i)}\right]^n}{(1+i) - \frac{(1+i)(1+k)}{(1+i)}}$$

$$= \frac{1-\left[\frac{(1+k)}{(1+i)}\right]^n}{(1+i)-(1+k)}$$

$$= \frac{1-\left[\frac{(1+k)}{(1+i)}\right]^n}{i-k}$$

Monto de una anualidad creciente en progresión geométrica .

Se obtendrá el monto de una anualidad creciente en donde existe una relación geométrica , entre los pagos. Sea el primer pago la unidad y la relación entre los pagos de (1 + k) .

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & (1+k) & (1+k)^2 & (1+k)^3 & \ldots\ldots & (1+k)^{n-1} \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 & & \ldots\ldots & n \end{array}$$

Sea Y el monto de los pagos :

$$Y = (1+i)^{n-1} + (1+k)(1+i)^{n-2} + \ldots\ldots + (1+k)^{n-1}$$

$$= (1+i)^{n-1}\left[1 + (1+k)(1+i)^{-1} + (1+k)^2(1+i)^{-2} + \ldots\ldots + (1+k)^{n-1}(1+i)^{-n+1}\right]$$

progresión geométrica de razón $(1+k)(1+i)^{-1}$

$$= (1+i)^{n-1}\left[\frac{1-(1+k)^n)(1+i)^{-n}}{1-(1+k)(1+i)^{-1}}\right]$$

$$= (1+i)^{n-1}\left[\frac{1-(1+k)^n(1+i)^{-n}}{1-\frac{(1+k)}{(1+i)}}\right]$$

$$= (1+i)^{n-1}\left[\frac{1-(1+k)^n(1+i)^{-n}}{\frac{(1+i)-(1+k)}{(1+i)}}\right]$$

$$= (1+i)^{n-1}\left[\frac{1-(1+k)^n(1+i)^{-n}}{\frac{i-k}{1+i}}\right]$$

$$= (1+i)(1+i)^{n-1}\left[\frac{1-(1+k)^n(1+i)^{-n}}{i-k}\right]$$

$$= (1+i)^n\left[\frac{1-(1+k)^n(1+i)^{-n}}{i-k}\right]$$

$$= \frac{(1+i)^n-(1+k)^n}{i-k}$$

EJEMPLOS

1.- Encontrar el valor presente de los siguientes pagos : 20, 40 , 60 ....

efectuados al final de cada semestre durante cinco años , si la tasa de interés es del 20% convertible semestralmente.

P = 20

Q = 20

n = 10 semestres

i' = .10 semestral

$$X = P\, a_{\overline{n}|i} + Q\, \frac{a_{\overline{n}|i} - n V^n}{i}$$

$$= 20\, a_{\overline{10}|.10} + 20\, \frac{[a_{\overline{10}|.10} - 10 V^{10}]}{.10}$$

$$= 20\,(6.14457) + \frac{20\,[6.14457 - 10(0.385543)]}{.10}$$

$$= 580.72$$

2.-, Un padre invierte en el primer cumpleaños de su hijo $1000 , en el segundo año $20000 , y así sucesivamente hasta que su hijo cumple 10 años. ¿ Cuanto recibirá el hijo en ese momento si la tasa de interés es del 15% anual ?

P = 1000

Q = 1000

n = 10 años

i = .15 anual

$$Y = P\, s_{\overline{n}|i} + \frac{Q\,(s_{\overline{n}|i} - n)}{i}$$

$$= 1000\, s_{\overline{10}|.15} + \frac{1000\,(s_{\overline{10}|.15} - 10\,)}{.15}$$

$$= 1000\,(20.30372) + \frac{1000\,[20.30372 - 10]}{.15}$$

$$= 88995.18$$

V AMORTIZACIÓN

Una de las aplicaciones más importantes de las anualidades en las operaciones de los negocios está representada por el pago de deudas que devengan intereses . Poder llegar a comprender como se amortizan las deudas y la forma de determinar los costos involucrados podrá ahorrar a una persona mucho dinero , por una parte seleccionando la fuente de financiamiento más apropiada , y el mejor plan de pago de la deuda .

Amortizar significa extinguir una deuda poco a poco , regularmente los financiamientos se pagan a plazos, por medio de pagos periódicos que se llevan a cabo durante un tiempo determinado . En estos pagos periódicos estará considerado el pago de intereses que fueron acordados en el financiamiento , y también la parte que corresponde al pago de capital , esto para cada uno de los periodos de amortización

Existen diferentes formas de pagar , liquidar o extinguir , una deuda dependiendo de las condiciones financieras y la forma de pago que se hayan contratado en el financiamiento .

A continuación se mencionan algunas de ellas.

- **Pagos iguales durante todo el plazo.**
- **Pagos iguales de capital con tasa revisable cada periodo.**
- **Método de amortización de valor presente.**
- **Método de amortización canadiense.**
- **Esquema de autofinanciamiento.**

En estos métodos de amortización se hace necesario contar con un documento analítico que permita observar como se extingue una deuda , periodo a periodo y , durante la vigencia del crédito . A este documento se le denomina tabla de amortización

El seguimiento de la situación de un crédito permite planear y buscar nuevas alternativas de pago durante la vigencia del mismo , principalmente si las condiciones económicas y financieras varían durante este tiempo .

Una tabla de amortización esta compuesta por cuatro columnas básicamente , que describen el comportamiento de los principales conceptos , pueden variar de un esquema de amortización a otro , estos conceptos se describen de la siguiente manera ;

- Número de periodos (N)
- Saldo insoluto (S .I.)
- Interés contenido en el pago (I . C . P.)
- Capital contenido en el pago (C . C . P.)

En la columna de número de periodos , se enumera en forma secuencial los periodos de pago , comprendidos durante la vigencia del financiamiento .

El saldo insoluto es la cantidad de dinero que se adeuda al principio de cada periodo , después de haber efectuado el pago periódico correspondiente.
El saldo insoluto , en el primer renglón de la tabla es el valor de la deuda .

El interés contenido en el pago , es la cantidad de dinero que corresponde al pago de interéses del periodo

El capital contenido en el pago , es la cantidad de dinero que corresponde al pago de capital del periodo

En algunos métodos de amortización , en el cálculo de la renta se determina a través de la fórmula de valor presenta de una anualidad y en otros es necesario calcular el interés y el capital contenido en el pago en forma independiente y después sumarlos para determinar el valor de la renta .

$A = R\, a_{\overline{n|}i}$ $\qquad$ $R = I.C.P. + C.C.P.$

PAGOS IGUALES DURANTE TODO EL PLAZO

Cuando una deuda se amortiza efectuando pagos iguales a intervalos iguales de tiempo la deuda en si estará representada por el valor presente de una anualidad.

Calculamos el importe del pago utilizando los métodos para obtener la renta periódica dentro del modelo matemático del valor presente de una anualidad .

Se requiere liquidar una deuda de $ 40000 mediante 18 pagos mensuales iguales , se ha pactado una tasa de interés de 24 % convertible mensualmente , determinar el monto del pago que se requiere para saldar la deuda y construir la tabla de amortización .

Para construir la tabla de amortización se requiere :

Determinar al pago periódico que se efectuara durante 18 meses .

$A = 40000$ $\qquad A = R\, a_{\overline{n}|i}$

$n = 18$ meses $\qquad R = A \,/\, a_{\overline{n}|i}$

$i' = .02$ mensual $\qquad R = 40000 \,/\, a_{\overline{18}|.02}$

$R = 2668.08$

Determinar que parte de la renta corresponde al interés contenido en al pago .

$I.C.P. = (S.I.)(i)$ (es la deuda que tenemos por la tasa de interés)

$= 40000\,(.02) = 800$

Determinar el capital contenido en el pago .

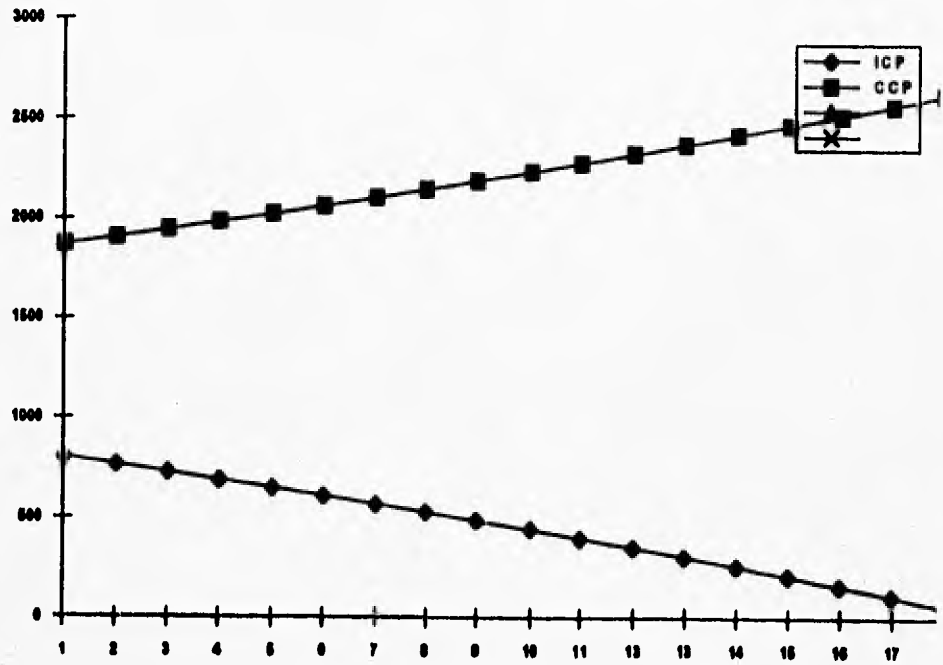
$R = I.C.P. + C.C.P.$

$C.C.P. = R - I.C.P.$

$= 2668.08 - 800 = 1868.08$

[illegible] DURANTE [illegible]				
N	R	S.I.	I.C.P.	C.C.P.
1	266.08	40000.00	800.00	1868.08
2	266.08	38131.92	762.63	1905.45
3	266.08	36226.47	724.52	1943.56
4	266.08	34282.91	685.65	1982.43
5	266.08	32300.48	646.00	2022.07
6	266.08	30278.41	605.56	2062.52
7	266.08	28215.89	564.31	2103.76
8	266.08	26112.13	522.24	2145.84
9	266.08	23966.24	479.32	2188.76
10	266.08	21777.53	435.55	2232.53
11	266.08	19545.00	390.90	2277.18
12	266.08	17267.82	345.35	2322.73
13	266.08	14945.09	298.90	2369.18
14	266.08	12575.91	251.51	2416.57
15	266.08	10159.34	230.18	2464.90
16	266.08	7694.40	153.88	2514.19
17	266.08	5180.11	103.60	2564.48
18	266.08	2616.04	52.32	2615.76

PAGOS IGUALES DURANTE TODO EL PLAZO



ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

PAGOS IGUALES DE CAPITAL CON TASA REVISABLE CADA PERIODO

En este método de amortización el capital contenido en el pago es el mismo en todo el plazo de financiamiento , y se obtiene de dividir el saldo insoluto entre el número de periodos .

La tasa que se maneja en cada periodo , es la tasa del mercado , por lo que el interés contenido en el pago , es igual al saldo insoluto , por la tasa de interés del periodo . Por lo consiguiente , la renta es la suma del capital contenido en el pago y el interés contenido en el pago .

En este método el valor presente de la deuda es el saldo insoluto .

Una deuda de $40000 se va a liquidar bajo el esquema de pagos iguales y tasa revisable por periodo ; con pagos mensuales que se efectuarán durante año y medio . Determinar el monto de dichos pagos ,el interés que corresponde a cada periodo , y construir la tabla de amortización correspondiente . Las tasa de interés se van a suponer ; 2.3 % , 2.5 % , 2.6% , 2.7 % , 2.5 % , 2.4 % , 2.4 % , 2.5 % , 2.7 % , 2.6 % 2.3 % , 2.5 % , 2.6 % , 2.7 % , 2.5 % , 2.4 % , 2.4 % , 2.5 % .

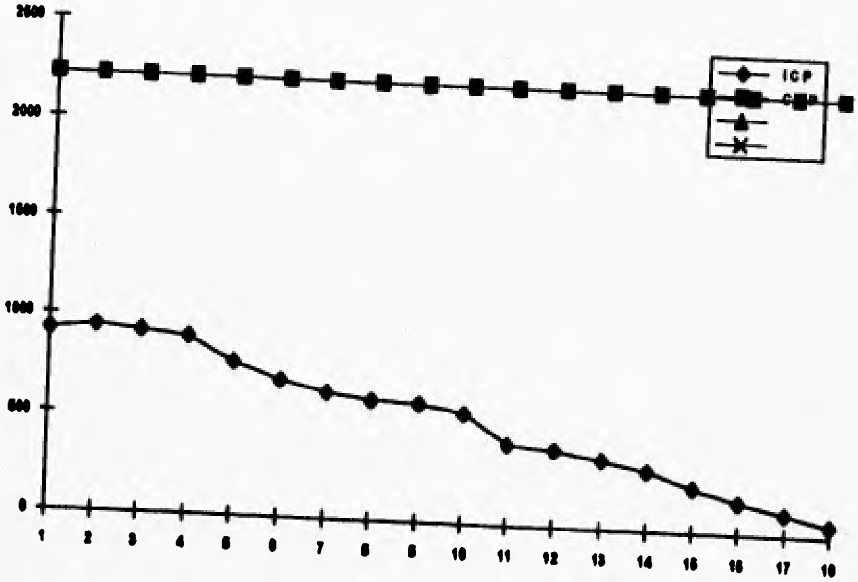
$A = S.I. = 40000$ $\qquad$ $C.C.P. = \frac{S.I.}{n}$ $\qquad$ $R = I.C.P. + C.C.P.$

$n = 18$ meses $\qquad$ $= \frac{40000}{18}$

$= 2222.22$

N	R	I	S.I.	I.C.P.	C.C.P.
1	3142.22	.023	40000	920	2222.22
2	3166.66	.025	37777.78	944.45	2222.22
3	3146.66	.026	35555.56	924.44	2222.22
4	3122.22	.027	33333.34	900.00	2222.22
5	2999.98	.025	31111.12	777.77	2222.22
6	2915.55	.024	28888.9	693.33	2222.22
7	2862.22	.024	26666.68	640.00	2222.22
8	2833.33	.025	24444.46	611.11	2222.22
9	2822.22	.027	22222.24	600.00	2222.22
10	2782.22	.028	20000.02	560.00	2222.22
11	2631.10	.023	17777.8	408.88	2222.22
12	2611.10	.025	15555.58	388.88	2222.22
13	2566.66	.026	13333.36	346.66	2222.22
14	2522.22	.027	11111.14	300.00	2222.22
15	2444.04	.025	8888.92	222.22	2222.22
16	2382.22	.024	6666.7	160.00	2222.22
17	2328.88	.024	4444.48	106.66	2222.22
18	2277.77	.025	2222.26	55.55	2222.22

PAGOS IGUALES DE CAPITAL CON TASA REVISABLE CADA PERIODO



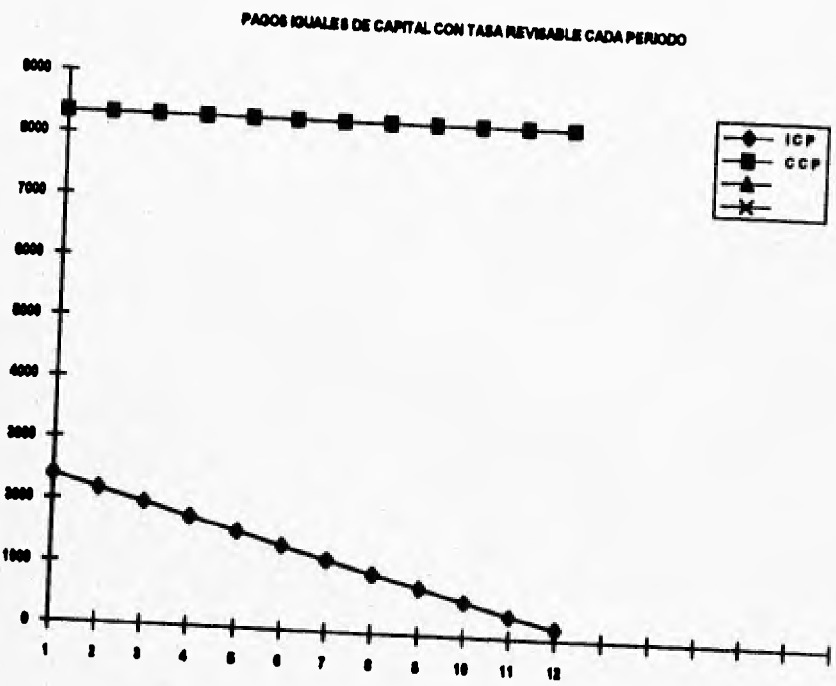
Se va a liquidar una deuda de $100000 , mediante 12 pagos anuales , teniéndose que pagar intereses de: 2.4 % , 2.39 % , 2.38 % , 2.37 % , 2.36 % , 2.35 % , 2.34 % , 2.33 % , 2.32 % , 2.31 % , 2.30 %, 2.29 % .

A = S . I . = 100000
n = 12 años

$$C.C.P. = \frac{100000}{12} = 8333.33$$

[redacted]

N	R	I	S.I.	I.C.P.	C.C.P.
1	10733.33	.024	100000	2400	8333.33
2	10524.16	.0239	91666.66	2190.83	8333.33
3	10316.66	.0238	83333.32	1983.33	8333.33
4	10110.80	.0237	74999.99	1777.47	8333.33
5	9906.66	.0236	66666.66	1573.33	8333.33
6	9705.73	.0235	58333.32	1372.40	8333.33
7	9503.89	.0234	49999.99	1170.50	8333.33
8	93.04.16	.0233	41666.66	970.83	8333.33
9	9106.66	.0232	33333.33	773.33	8333.33
10	8910.83	.0231	24999.94	577.50	8333.33
11	8701.33	.0230	16666.64	368.00	8333.33
12	8524.16	.0229	8333.33	190.83	8333.33


PAGOS IGUALES DE CAPITAL CON TASA REVISABLE CADA PERIODO
7000
4000
1000
0
ICP
CCP

MÉTODO DE AMORTIZACIÓN DE VALOR PRESENTE

Este método de amortización es una variante del método de pagos iguales de capital con tasa revisable cada periodo .

Es utilizado cuando se requiere asegurar que el valor del capital contenido en el pago (C . C . P .) de cada periodo es igual en términos reales durante el tiempo del financiamiento ; es decir , que no obstante que varié la cantidad de dinero y aparentemente los pagos se incrementan , el poder adquisitivo de este dinero se mantiene .

La renta se determina calculando el capital y el interés contenido en el pago en forma independiente .

En la práctica existen dos versiones de este método , la primera supone una tasa de interés constante durante todo el periodo de financiamiento y la segunda supone que en cada periodo del financiamiento la tasa de interés puede ser revisada y actualizada según se cotice en los mercados financieros .

Para el primer caso la renta se determina dividiendo el valor presente del crédito (S . I .) entre el número de periodos (n) que se hayan considerado , este valor de la renta (R) se va actualizando con el factor

$(1 + i)^n$, en el que el tiempo (n) toma el valor del periodo correspondiente . Para obtener el valor de la renta (R) para el primer periodo se tiene que ; $R_1 = R (1 + i)^1$

para el segundo periodo tenemos que ;$R_2 = R (1 + i)^2$

para el tercer periodo tenemos que ; $R_3 = R (1 + i)^3$

.

.

.

para el n -ésimo termino tenemos que ; $R_n = R (1 + i)^n$

Para calcular el interés contenido en el pago se multiplica el saldo insoluto de cada periodo por la tasa de interés .

Para calcular el capital contenido en el pago tenemos que ; **R = C . C. P . + I . C . P .**

de donde **C . C . P . = R - I . C . P .**

Una deuda de $40000 se va a liquidar mediante pagos mensuales que se efectuaran durante año y medio, considerando una tasa de interés 24 % convertible mensualmente .Determinar el monto de los pagos , los intereses que corresponden a cada periodo y construir la tabla de amortización correspondiente .

S . I . = 40000 $\qquad R = \dfrac{S.I.}{n} = \dfrac{40000}{18} = 2222.22$

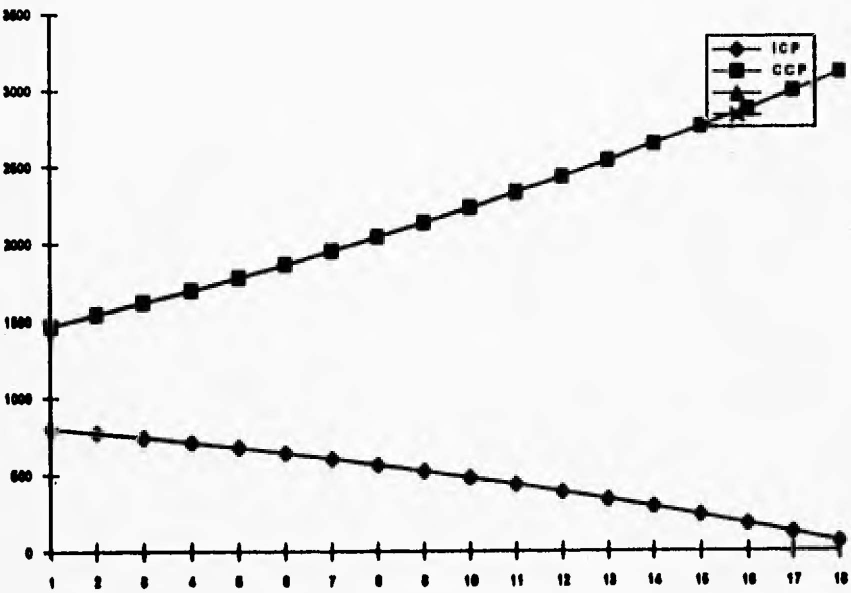
n = 18 meses

i ' = .02 mensual

N	S . I .	I . C . P .	R	$(1+i)^n$	R . A .	C .C . P .
1	40000	800	2222.22	1.02	2266.66	1466.66
2	38533.34	770.66	2222.22	1.0404	2311.99	1541.34
3	36992	739.84	2222.22	1.0612	2358.22	1616.38
4	35373.62	707.47	2222.22	1.0824	2405.33	1697.86
5	33675.76	673.51	2222.22	1.1040	2453.33	1779.62
6	31895.94	637.92	2222.22	1.1261	2502.44	1864.52
7	30031.42	600.63	2222.22	1.1486	2552.44	1951.81
8	28079.60	561.59	2222.22	1.1716	2603.55	2041.96
9	26037.63	520.75	2222.22	1.1951	2655.77	2135.02
10	23902.60	478.05	2222.22	1.2190	2708.88	2230.84
11	21671.76	433.43	2222.22	1.2434	2763.11	2329.68
12	1934.08	386.84	2222.22	1.2682	2818.22	2431.38
13	16910.70	338.21	2222.22	1.2936	2874.68	2536.47
14	14374.23	287.48	2222.22	1.3195	2932.17	2644.70
15	11729.54	234.60	2222.22	1.3459	2990.81	2756.21
16	8973.32	179.46	2222.22	1.3728	3050.63	2871.17
17	6102.15	122.04	2222.22	1.4002	3111.64	2989.60
18	3112.54	62.25	2222.22	1.4282	3173.88	3111.63

donde R . A . es la renta actualizada por el factor $(1+i)^n$

TABLA DE AMORTIZACIÓN METODO DE VALOR PRESENTE



Se va a liquidar una deuda de $100000 , mediante 12 pagos mensuales , teniéndose que pagar intereses del 2.4 % . Determinar el monto de los pagos , los intereses que corresponden a cada periodo y

construir la tabla de amortización correspondiente .

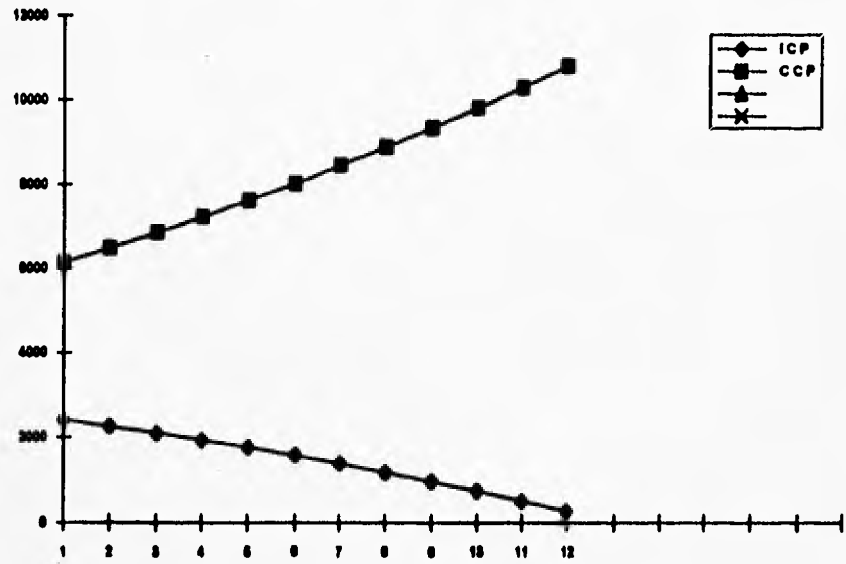
S . I. = 100000
n = 12 años
i' = .024

$$R = \frac{100000}{12}$$

$$= 8333.33$$

N	S. I.	I. C. P.	R	$(1+i)^n$	R. A.	C. C. P.
1	100000	2400	8333.33	1.024	8533.33	6133.33
2	93866.67	2252.80	8333.33	1.0485	8738.13	6485.33
3	87381.34	2097.15	8333.33	1.0737	8947.84	6850.89
4	80530.85	1932.74	8333.33	1.0995	9162.59	7229.85
5	73300.80	1759.22	8333.33	1.1259	9382.49	7623.27
6	65677.53	1576.26	8333.33	1.1529	9607.87	8031.41
7	57646.12	1383.50	8333.33	1.1806	9838.26	8454.76
8	49191.36	1180.59	8333.33	1.2089	10074.37	8893.78
9	40297.58	967.14	8333.33	1.2379	10316.16	9349.02
10	30948.56	742.76	8333.33	1. 2676	10563.75	9820.99
11	21127.57	507.06	8333.33	1.2980	10817.28	10310.22
12	10817.35	259.61	8333.33	1.3292	11076.69	10817.28

METODO DE AMORTIZACIÓN DE VALOR PRESENTE .



MÉTODO DE AMORTIZACIÓN DE VALOR PRESENTE CON TASA REVISABLE CADA PERIODO .

Este método es utilizado cuando el entorno económico se vuelve más inestable y las tasas de interés tienden a aumentar su cotización en los mercados financieros , por lo que la tasa de interés debe ser revisada en base a su cotización en los mercados financieros.

Para calcular la renta (R) dividimos el saldo insoluto entre el número de periodos que se hayan considerado , este valor de la renta se ajusta con el facto $(1 + i_n)$ con respecto a su valor anterior, donde (i_n) toma el valor de cotización asociada al periodo .

Para obtener la renta en el primer periodo tendríamos : $R_1 = R (1 + i_1)$

para el segundo periodo tendríamos : $R_2 = R (1 + i_1) (1 + i_2)$

para el tercer periodo tendríamos : $R_3 = R (1 + i_1) (1 + i_2) (1 + i_3)$

.

para el n - ésimo periodo tendríamos : $R_n = R (1 + i_1) (1 + i_2) (1 + i_3) \ldots\ldots (1 + i_n)$

El calculo del interés contenido en el pago se obtiene multiplicando el saldo insoluto de cada periodo por la tasa de interés del periodo correspondiente según su cotización es decir :

$$I.C.P._n = S.I._n (i_n)$$

para calcular el capital contenido en el pago tenemos que :

$$R_n = C.C.P._n + I.C.P._n$$

$$C.C.P._n = R_n - I.C.P._n$$

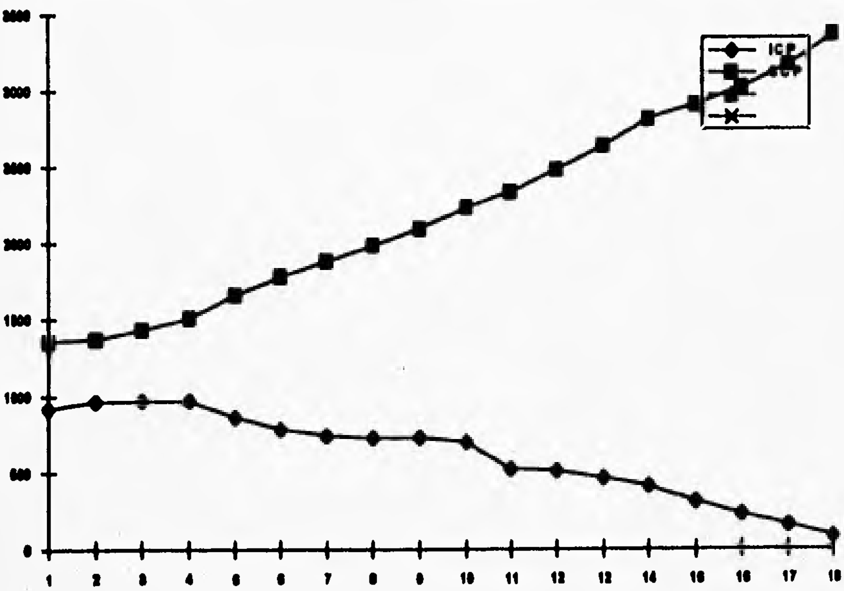
Una deuda de $40000 se va a liquidar mediante pagos mensuales durante año y medio . Determinar el interés y el capital contenido en el pago , construir la tabla de amortización correspondiente si la tasa de interés por periodo , se supone que sean las siguientes; 2.3 % , 2.5 %, 2.6 % , 2.7 % , 2.5 % , 2.4 % , 2.4 % , 2.5 % , 2.7 % , 2.6% , 2.3 % , 2.5 % , 2.6 % , 2.7 % , 2.5 % , 2.4 % , 2.4 % , 2.5 % .

S . I . = 40000
n = 18 meses

$$R = \frac{40000}{18} = 2222.22$$

N	S.I.	I.C.P.	R	TASA	R_n	C.C.P.	$(1+i_n)$
1	40000	920.00	2222.22	.023	2273.33	1353.33	1.023000
2	38646.67	966.17	2222.22	.025	2334.72	1368.56	1.050825
3	37278.11	969.23	2222.22	.026	2400.10	1430.87	1.080046
4	35847.24	967.88	2222.22	.027	2472.12	1504.24	1.112453
5	34343.00	858.57	2222.22	.025	2514.24	1655.67	1.131408
6	32687.33	784.50	2222.22	.024	2562.05	1777.55	1.152922
7	30909.78	741.83	2222.22	.024	2623.54	1881.70	1.180592
8	29028.08	725.70	2222.22	.025	2707.56	1981.86	1.218403
9	27046.22	730.25	2222.22	.027	2824.37	2094.12	1.270968
10	24952.10	698.66	2222.22	.028	2929.00	2230.34	1.318048
11	22721.76	522.60	2222.22	.023	2853.77	2331.17	1.284198
12	20390.59	509.76	2222.22	.025	2988.64	2478.88	1.34889
13	17911.71	465.70	2222.22	.026	3102.44	2636.73	1.396097
14	15274.98	412.42	2222.22	.027	3226.81	2814.39	1.452066
15	12460.59	311.51	2222.22	.025	3218.44	2906.93	1.4482.98
16	9553.66	229.29	2222.22	.024	3247.78	3018.49	1.461502
17	6535.17	156.84	2222.22	.024	3325.73	3168.88	1.496578
18	3366.29	84.18	2222.22	.025	3450.44	3366.29	1.559659

TABLA DE AMORTIZACIÓN : METODO DE VALOR PRESENTE CON TASA REVISABLE CADA PERIODO .

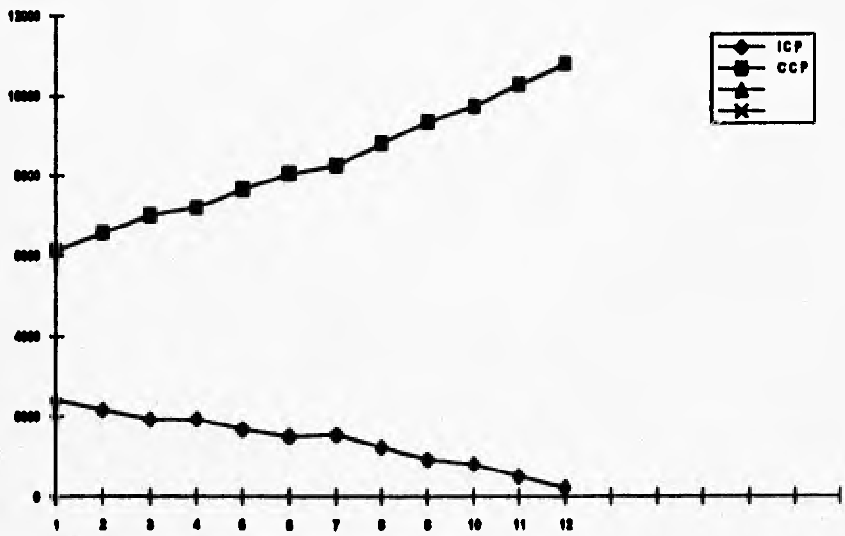


Se va a liquidar una deuda de $100000 mediante doce pagos , si suponemos las siguientes tasas ; 2.4% , 2.3 % , 2.2 % , 2.4 % , 2.3 % , 2.3 % , 2.7 % , 2.5 %, 2.3 % , 2.6 % , 2.4 % , 2.1 % . Construir la tabla de amortización correspondiente .

[redacted]

N	S.I.	I.C.P.	R	TASA	R_n	C.C.P.	$(1+I_n)$
1	100000	2400	8333.33	.024	8533.33	6133.33	1.024
2	93866.67	2156.93	8333.33	.023	8729.59	6570.66	1.047552
3	87296.01	1920.51	8333.33	.022	8921.64	7001.13	1.070598
4	80294.88	1927.07	8333.33	.024	9135.76	7208.69	1.096292
5	73086.19	1680.98	8333.33	.023	9345.88	7664.90	1.121507
6	65421.29	1504.69	8333.33	.023	9560.83	8056.14	1.147301
7	57365.15	1548.86	8333.33	.027	9816.98	8270.12	1.176279
8	49095.03	1227.37	8333.33	.025	10064.46	8837.09	1.207736
9	40257.94	925.93	8333.33	.023	10295.93	9370.00	1.235513
10	30887.94	803.08	8333.33	.026	10563.63	9760.55	1.267637
11	21127.39	507.05	8333.33	.024	10817.16	10310.11	1.298060
12	10817.28	227.16	8333.33	.021	11044.32	10817.16	1.325319

TABLA DE AMORTIZACIÓN : METODO DE AMORTIZACION DE VALOR PRESENTE CON TASA REVISABLE CADA PERIODO .



MÉTODO DE AMORTIZACIÓN CANADIENSE

Este método de amortización es utilizado principalmente en créditos hipotecarios y consiste en aplicar la amortización semestralmente , sin embargo , dichos pagos semestrales se acumulan mediante pagos mensuales ; la tasa de interés que se aplica , para calcular las mensualidades es una tasa mensual equivalente a una tasa semestral , de tal manera que los seis pagos mensuales equivalen al pago semastral.

La ventaja de este método es para el que financia , ya que el deudor le paga mensualmente y el dinero de estos pagos se utiliza temporalmente durante los periodos restantes hasta que se efectué el sexto pago y hasta entonces se lleva a cabo el registro del pago semestral en la tabla de amortización .

Con los pagos mensuales se obtienen productos financieros , mientras se aplica la amortización correspondiente . Por otro lado , una desventaja consiste en que si el crédito se pacto a una tasa de interés fija y la expectativa de la tasa de interés es a la alza , entonces el financiamiento puede ir perdiendo rentabilidad en el tiempo y en consecuencia se preferirá liquidar lo antes posible .

Otra modalidad de este esquema de crédito es que puede existir la posibilidad de revisar la tasa según su cotización en los mercados financieros , pero en este caso está revisión debe hacerse semestralmente dado que es el momento en que se aplica el pago en la tabla de amortización y además el momento de recalcar la nueva renta semestral y por consiguiente la nueva serie de pagos mensuales que constituirá la renta .

En ambos se tiene la desventaja de que si la tasa de interés tiende a elevarse durante el periodo en que se efectúan los primeros pagos mensuales , entonces este método no responde rápidamente a tener una revisión de tasa en el momento en que esto ocurra y peor aun si se fija la tasa durante todo el tiempo del financiamiento , entonces poco a poco se hará menos rentable .

Por el contrario si la tasa de interés tiende a bajar entonces se tiene asegurada una tasa de interés fija y convaniente duranta un semestre o si es el caso de que se fijo una tasa de interés durante todo el periodo de financiamiento entonces el negocio será cada vez más rentable , mientras la tasa siga bajando o se mantenga en niveles más bajos con respecto a la tasa con que se pacto el crédito .

Una hipoteca a 10 años se va a amortizar , si el precio del inmueble es de $75000 , se considera una tasa de interés del 8% capitalizable semestralmente . Determinar la renta semestral y elaborar la tabla de amortización correspondiente .

S . I. = 75000

$75000 = R_s \, a_{\overline{20|}.04}$

$75000 = R_m \, a_{\overline{120|}.006555}$

n = 10 años

$R_s = \dfrac{75000}{a_{\overline{20|}.04}}$

$R_m = \dfrac{75000}{a_{\overline{120|}.006555}}$

i' = .04 semestral

i'' = .0065555

$R_s = 5518.63$

[illegible]

N	R	I.C.P.	C.C.P.
1	5518.63	3000	2518.63
2	5518.63	2899.25	2619.37
3	5518.63	2794.48	2724.15
4	5518.63	2685.51	2833.11
5	5518.63	2572.19	2946.44
6	5518.63	2454.33	3064.30
7	5518.63	2331.76	3186.87
8	5518.63	2204.28	3314.34
9	5518.63	2071.71	3446.91
10	5518.63	1933.83	3584.79
11	5518.63	1790.44	3728.18
12	5518.63	1641.31	3877.31
13	5518.63	1486.22	4032.40
14	5518.63	1324.92	4193.70
15	5518.63	1157.17	4361.45
16	5518.63	982.71	4535.91
17	5518.63	801.28	4717.35
18	5518.63	612.59	4906.04
19	5518.63	416.35	5102.28
20	5518.63	212.26	5306.37

TABLA DE AMORTIZACIÓN : METODO DE AMORTIZACIÓN CANADIENSE .

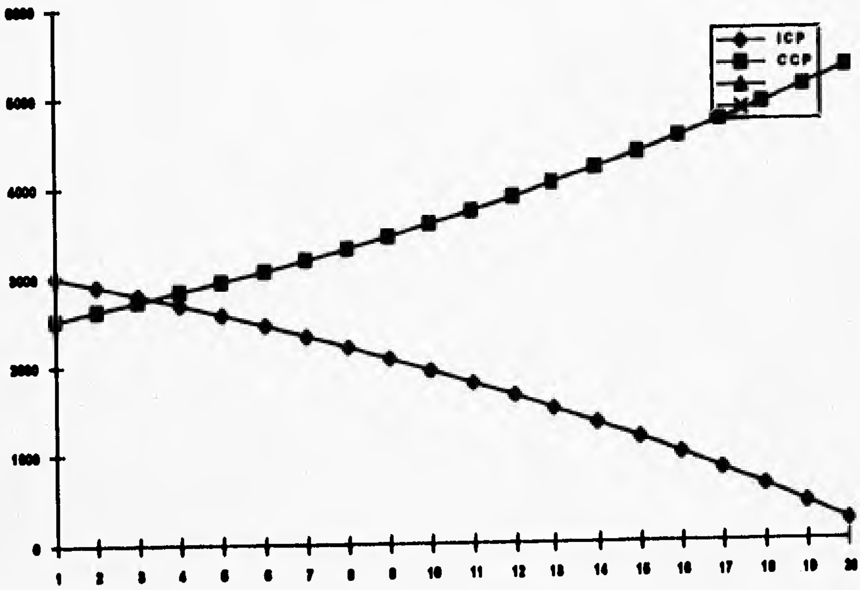
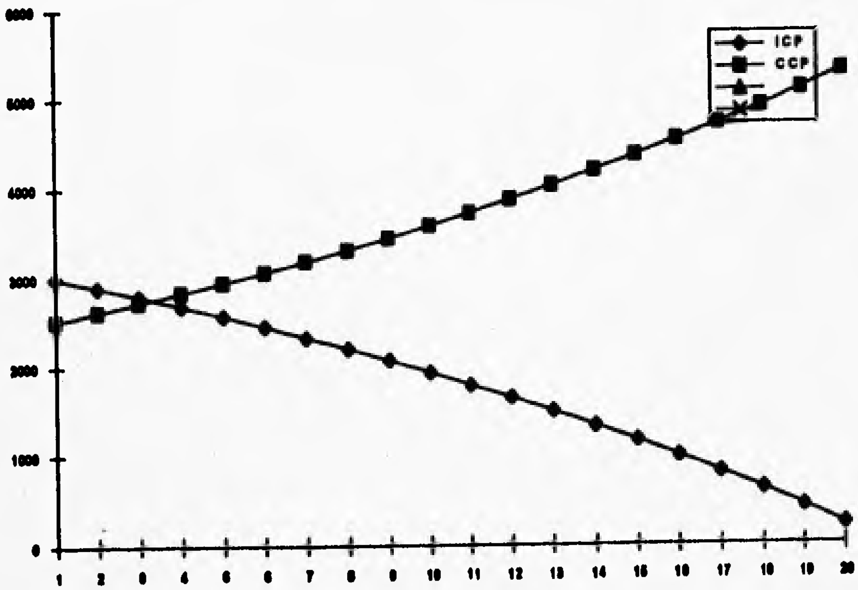


TABLA DE AMORTIZACIÓN : METODO DE AMORTIZACIÓN CANADIENSE .



Una hipoteca a 12 años se va a amortizar , el precio del inmueble es de $100000 , se considera una tasa de interés del 14% anual convertible semestralmente .

S . I . = 100000

n = 12 años

i' = .07 semestral
i'' = .01134026 mensua

$$100000 = R_s\, a_{\overline{24|}.07}$$

$$\frac{100000}{a_{\overline{24|}.07}} = R_s$$

$$R_s = 8718.90$$

$$100000 = R_m\, a_{\overline{144|}.01134026}$$

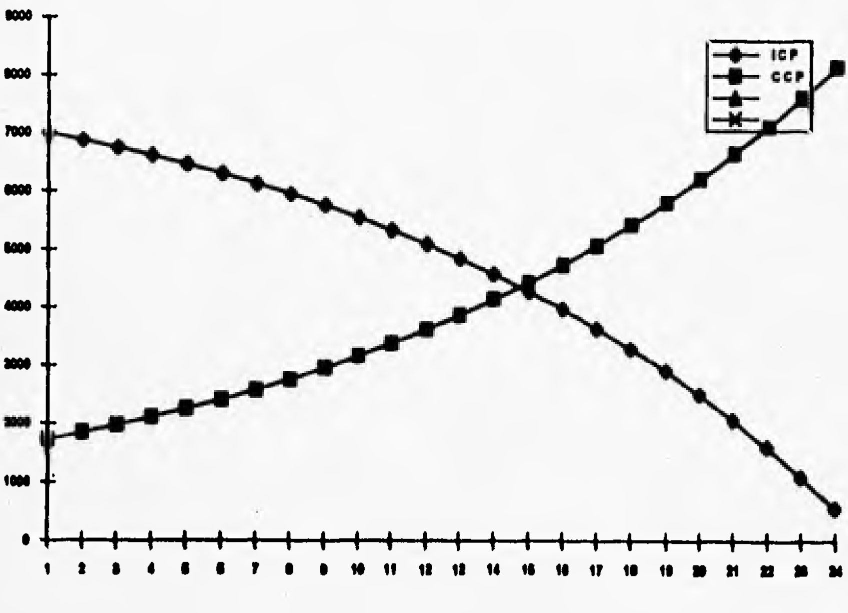
$$\frac{100000}{a_{\overline{144|}.01134026}} = R_m$$

$$R_m = 1412.49$$

N	S.I.	I.C.P.	C.C.P.	Rs
1	100000	7000	1718.90	8718.90
2	98281.10	6879.67	1839.23	8718.90
3	96441.87	6750.93	1967.97	8718.90
4	94473.90	6613.17	2105.73	8718.90
5	92368.17	6465.77	2253.13	8718.90
6	90115.04	6308.05	2410.85	8718.90
7	87704.19	6139.29	2579.61	8718.90
8	85124.58	5958.72	2760.18	8718.90
9	82364.40	5765.50	2953.40	8718.90
10	79411.00	5558.77	3160.13	8718.90
11	76250.87	5337.56	3381.34	8718.90

12	72869.53	5100.86	3618.04	8718.90
13	69251.49	4847.60	3871.30	8718.90
14	65380.19	4576.61	4142.29	8718.90
15	61237.90	4286.65	4432.25	8718.90
16	56805.65	3976.39	4742.51	8718.90
17	52063.14	2644.41	5074.49	8718.90
18	46988.85	3289.20	5429.70	8718.90
19	41558.95	2909.12	5809.78	8718.90
20	35749.17	2502.44	6216.46	8718.90
21	29532.71	2067.29	6651.61	8718.90
22	22881.10	1601.67	7117.23	8718.90
23	15763.87	1103.47	7615.43	8718.90
24	8148.44	570.39	8148.51	8718.90

TABLA DE AMORTIZACIÓN : METODO DE AMORTIZACIÓN CANADIENSE .



[illegible]

El autofinanciamiento trabaja para adquirir un bien .

En este caso es ver como se va liquidando la compra de un automóvil a crédito .

Finauto trabaja de la siguiente manera : seleccionamos el auto , en este caso es un TSURU cuatro puertas standard , 94 , su precio al contado es de \$39801.69 y se paga mediante 50 mensualidades cada una de \$886.09 . A la primera mensualidad se le debe aumentar \$201.56 que es el precio de la inscripción .

Si se desea que el coche sea entregado durante el primer mes se debe cubrir el 30% de las mensualidades que en este caso seria \$12925.50 . Si el valor del coche sube , las mensualidades se incrementan en \$20 por cada \$1000 que suba el auto .

A = 39801.60

R = 886.09

n = 50 meses

i = .0044934157

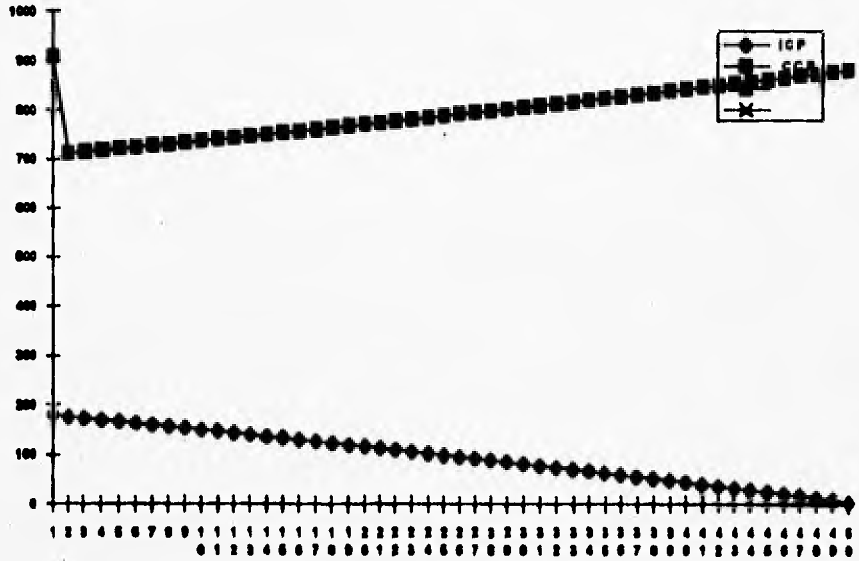
[illegible]

N	R	S.I.	I.C.P.	C.C.P.
1	1087.65	39801.6	178.84	908.80
2	886.09	38892.8	174.76	711.32
3	886.09	38181.47	171.56	714.52
4	886.09	37466.94	168.35	717.73
5	886.09	36749.21	165.13	720.96
6	886.09	36028.25	161.89	724.20

7	886.09	35304.05	158.63	727.45
8	886.09	34576.59	155.36	730.72
9	886.09	33845.87	152.08	734.00
10	886.09	33111.66	148.78	737.30
11	886.09	32374.56	145.47	740.61
12	886.09	31633.94	142.14	743.94
13	886.09	30889.99	138.80	747.28
14	886.09	30142.71	135.44	750.64
15	886.09	29392.06	132.07	754.01
16	886.09	28638.04	128.68	757.40
17	886.09	27880.63	125.28	760.81
18	886.09	27119.82	121.86	764.22
19	886.09	26355.59	118.42	767.66
20	886.09	25587.93	114.97	771.11
21	886.09	24816.82	111.51	774.57
22	886.09	24042.24	108.03	778.05
23	886.09	23264.18	104.53	781.55
24	886.09	22482.63	101.02	785.06
25	886.09	21697.56	97.49	788.59
26	886.09	20908.97	93.95	792.13
27	886.09	20116.83	90.39	795.69
28	886.09	19321.13	86.81	799.27
29	886.09	18521.86	83.22	802.86
30	886.09	17719.00	79.61	806.47
31	886.09	16912.53	75.99	810.09
32	886.09	16102.43	72.35	813.73

33	886.09	15288.70	68.69	817.39
34	886.09	14471.30	65.02	821.06
35	886.09	13650.24	61.33	824.75
36	886.09	12825.49	57.63	828.45
37	886.09	11997.03	53.90	832.18
38	886.09	11164.84	50.16	835.92
39	886.09	10328.92	46.41	839.67
40	886.09	9489.24	42.63	843.45
41	886.09	8645.79	38.84	847.24
42	886.09	7798.55	35.04	851.04
43	886.09	6947.50	31.21	854.87
44	886.09	6092.63	27.37	858.71
45	886.09	5233.91	23.51	862.57
46	886.09	4371.34	19.64	866.44
47	886.09	3504.89	15.74	870.34
48	886.09	2634.55	11.83	874.25
49	886.09	1760.30	7.90	878.18
50	886.09	882.12	3.96	882.12

ESQUEMA AUTOFINANCIAMIENTO.



ANEXO

PROGRESIÓN ARITMÉTICA

Una progresión aritmética es una sucesión de números llamados términos, tal que uno de los términos posteriores al primero, se obtiene añadiendo al término anterior un número fijo llamado la diferencia (d) de la progresión.

ejemplos de progreso aritmética son :

1 , 4 , 7 , 10 .... donde la diferencia común es 3

30 , 25 , 20 , 15 .... donde la diferencia común es -5

- 1 , - 3 , - 5 , - 7 .... donde la diferencia común es -2

2.50 , 2.65 , 2.80 .... donde la diferencia común es .15

De acuerdo a la definición de progresión aritmética, los términos se pueden escribir de la siguiente forma.

$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d + \ldots\ldots + a_1 + (n-1)d$

donde " a_1 " es el primer término de la progresión y " d " la diferencia fija.

podemos observar que el n - ésimo término de la progresión lo podemos calcular fácilmente como:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Sea " S_n " la suma de los " n " primeros términos, de una progresión aritmética, entonces :

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + \ldots\ldots + (a_1 + (n-1)d)$$

o bien

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + \ldots\ldots + a_n$$

Si cambiamos el orden de los factores, y como sabemos cada término difiere de otro término solo por la diferencia fija (d), entonces ;

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + (a_n - 3d) + \ldots\ldots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1$$

sumando estas dos ecuaciones obtenemos ;

$2S_n = a_1 + a_n + a_1 + a_n + a_1 + a_n + \ldots\ldots + a_1 + a_n + a_1 + a_n + a_1 + a_n$

sabemos que son " n " términos

$2S_n = n(a_1 + a_n)$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Si sustituimos el valor del n - ésimo termino ;

$$S_n = \frac{n[a_1 + a_1 + (n-1)d]}{2}$$

$$S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$$

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

Una progresión geométrica es una sucesión de números tal que , cualquier término posterior al primero se obtiene multiplicando el término anterior por un número , no nulo , llamado razón (r) de la progresión.

ejemplos de progresión geométrica son :

3 , 6 , 12n , 24 , 48 .... donde la razón común es 2

- 2 , 8 , - 32 , 128 .... donde la razón común es - 4

9 , - 3 , 1 , - 1/3 , 1/9 .... donde la razón común es - 1/3

t, tr, tr^2, tr^3 .... donde la razón común es r

De acuerdo a la definición de progresión geométrica , los términos se pueden escribir de la siguiente forma .

$$a_1, a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3, a_1 r^4 \ldots\ldots a_1 r^{(n-1)}$$

Donde " a_1 " es el primer término de la progresión , y " r " es la razón común .

De donde observamos que el n - ésimo termino lo podemos calcular fácilmente como :

$a_n = a_1 r^{(n-1)}$

Sea " S_n " la suma de los n primeros términos de la progresión entonces ;

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \dots\dots\dots + a_1 r^{(n-1)}$$

si multiplicamos esta ecuación por la razón (r) obtenemos

$$r S_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + a_1 r^4 + \dots\dots\dots + a_1 r^n$$

si restamos las dos ecuaciones

$$S_n - r S_n = a_1 - a_1 r + a_1 r - a_1 r^2 + a_1 r^2 - a_1 r^3 + \dots\dots\dots + a_1 r^{(n-1)} - a_1 r^n$$

$$S_n [1 - r] = a_1 - a_1 r^n$$

$$S_n = \frac{[a_1 - a_1 r^n]}{[1 - r]}$$

$$S_n = \frac{a_1 (1 - r^n)}{(1 - r)}$$

Es conveniente utilizar la fórmula anterior , cuando $r < 1$ y la siguiente expresión

$$S_n = \frac{a_1 (r^n - 1)}{(r - 1)} \qquad \text{si } r > 1$$

Una progresión geométrica , será creciente si la razón común (r) es mayor que 1 .

EJEMPLOS

Hallar el n - ésimo término y la suma de los " n " primeros términos de las siguientes progresiones .

3 , 5 , 7 , 9 .... **diferencia fija es 2 y si n = 12**

$a_n = a_1 + (n-1)d$ $\qquad\qquad$ $S_n = n/2\,(a_1 + a_n)$

$= 3 + (11)\,2 = 25$ $\qquad\qquad$ $= 12/2\,(3 + 25) = 168$

4 , 7 , 10 , 13 .... **diferencia fija es 3 y si n = 16**

$a_{16} = 4 + (15)\,3 = 49$

$S_{16} = 16/2\,(4 + 49) = 424$

2.50 , 2.65 , 2.80 .... **diferencia fija es .15 y si n = 15**

$a_{15} = 2.50 + (14)\,.15 = 4.6$

$S_{15} = 15/2\,(2.50 + 4.6) = 53.25$

4 , 7 , 10 .... **diferencia fija es 3 y si n = 26**

$a_{26} = 4 + (25)\,3 = 79$

$S_{26} = 26/2\,(4 + 79) = 1074$

4 , - 12 , 36 .... **razón común es - 3 y si n = 7**

$r < 1$

$a_n = a_1 r^{(n-1)}$ $\qquad\qquad$ $S_n = a_1 \dfrac{[1 - r^n]}{[1 - r]} = \dfrac{4\,(1 - (-3)^7)}{(1 - (-3))} = 2188$

$a_7 = 4\,(-3)^6 = 2916$

1 , 2 , 4 ....razón común es 2 y si n = 8

$a_8 = 1(2)^7 = 128$

$r > 1$

$S_8 = \dfrac{1((2)^8 - 1)}{(2-1)} = 255$

De la progresión 5 , 14 , 23 .... si $a_n = 239$, la diferencia fija es 9 , n = ?

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$239 = 5 + (n-1)9$

$n = 27$

Cuantos términos tenemos que tomar para que $S_n = 155$, si $a_1 = 2$ y la diferencia fija es 3 .

$S_n = n/2[2a + (n-1)d]$

$155 = n/2[(2)(2) + (n-1)3]$

$310 = n[4 + 3n - 3]$

$= n[3n + 1]$

$3n^2 + n - 310 = 0$

solución para n = 10

CONCLUSIONES

Como se mencionaba al principio de este trabajo, considero muy importante que quienes utilizan las matemáticas financieras, deben tener muy claros los conceptos y la forma de aplicar correctamente las Anualidades Ciertas.

Este trabajo trató de cumplir con el punto anterior de acuerdo a mi experiencia docente.

Del estudio que se realizó, se obtienen los siguientes puntos:

- Es muy importante establecer y comprender las diferencias entre las anualidades Contingentes y las anualidades Ciertas, así como su aplicación correcta.
- Al comprender la teoría, es más fácil entender la manera en que la aplicación de las fórmulas, nos pueden resolver problemas financieros.
- La variedad de anualidades ciertas que se utilizan en las matemáticas financieras (vencidas, anticipadas, diferidas, perpetuidades, etc.) nos permiten aplicar sus fórmulas como un medio para encontrar la solución de problemas tan sencillos o tan complicados como se desee.
- Un ejemplo de lo anterior, se presentó en el Capítulo V con la aplicación de las anualidades en la tabla de amortización en cinco diferentes casos, los cuales pudieron ser resueltos con la aplicación de las fórmulas de anualidades.

Es importante destacar que existe poca bibliografía en español que trate todos los temas de anualidades, por lo que también se presenta una bibliografía básica de apoyo a los temas, al final de este trabajo.

Este trabajo trata de apoyar a los alumnos de la carrera de Actuaría, para aclarar sus dudas en un tema tan importante dentro de las Matemáticas Financieras.

Trata de aportar tanto la deducción de las fórmulas, como las demostraciones que les pueden servir como guía, para que ellos puedan realizar otras. Además se presentan ejemplos que les permitirán comprender su aplicación, tanto en forma general como en temas específicos..

BIBLIOGRAFÍA

1. AYRES, FRANK JR.

   MATEMÁTICAS FINANCIERAS

   MC GRAW-HILL

2. DE LA CUEVA, BENJAMÍN

   MATEMÁTICAS FINANCIERAS

   EDITORIAL PORRÙA S.A.

3. DELFÍN ZERMAN, HÉCTOR

   FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS FINANCIERAS

   E.C.A.S.A.

4. DÍAZ MATA, ALFREDO

   MATEMÁTICAS FINANCIERAS

   MC GRAW- HILL

5. PORTUS GOVIDEN, LINCOYAN

   MATEMÁTICAS FINANCIERAS

   MC GRAW-HILL

6. APUNTES DE CLASE

   MATEMÁTICAS FINANCIERAS