

39
24



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

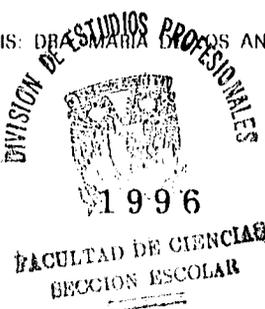
CRISTALIZACION DE WIGNER EN DOS DIMENSIONES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE F I S I C A PRESENTA : MARIA ESTHER RODRIGUEZ VITE



DIRECTOR DE TESIS: DR. MARIA ROSA ANGELES ORTIZ FLORES



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

TESIS CON FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: "CRISTALIZACION DE WIGNER
EN DOS DIMENSIONES"

realizado por MARIA ESTHER RODRIGUEZ VITE

con número de cuenta 7532265-8 , pasante de la carrera de FISICA

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

DRA. MARIA DE LOS ANGELES ORTIZ FLORES *M. de los Angeles Ortiz Flores*

Propietario

DR. EUGENIO LEY KOO *E. Ley Koo*

Propietario

DR. GUILLERMO AGUILAR SAHAGUN *Guillermo Aguilar Sahagun*

Suplente

M. EN C. SUSANA OROZCO SEGOVIA *Susana Orozco Segovia*

Suplente

M. EN C. HECTOR PERALES VALDIVIA *Hector Perales Valdivia*

Consejo Departamental de Física

DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORGA *Roberto Alejandro Ruelas Mayorga*

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA
DIRECCIÓN GENERAL DE INSTITUCIONES EDUCATIVAS TECNOLÓGICAS Y PROFESIONALES
SECRETARÍA DE FÍSICA

A mis hijos:

Carlos Alberto

Luis Ernesto

A mi esposo

A mis padres

A mis hermanos

A todos mis amigos

AGRADECIMIENTOS

A la Dra. Maria de los Angeles Ortíz Flores, Directora de tesis, a quien agradezco todo el apoyo, disposición y, sobre todo, la enorme paciencia siempre presentes en el desarrollo de ésta tesis.

A los sinodales: Dr. Eugenio Ley Koo, Dr Guillermo Aguilar Sahagún, M. en C. Susana Orozco Segovia y M. en C. Héctor Perales Valdivia, por las valiosas sugerencias aportadas durante la revisión de éste trabajo.

A los físicos José Luis Villarreal Aguirre y Andrés Porta Contreras por su valiosa ayuda, comentarios y sugerencias.

A los encargados de la sala de computo del departamento de Física, por el apoyo brindado durante el desarrollo del presente trabajo.

Finalmente, a todos mis maestros que de una u otra manera contribuyeron a mi formación académica.

CRISTALIZACIÓN DE WIGNER EN DOS DIMENSIONES

INDICE

	Página
INTRODUCCIÓN.	1
CAPÍTULO I .- ESTUDIO DE LOS SÓLIDOS	
1) Introducción.	5
2) Sólidos amorfos.	5
3) Sólidos cristalinos.	6
4) Enlaces.	8
Enlace iónico.	8
Enlace covalente.	15
Enlace de Van Der Waals.	16
Enlace metálico.	20
5) Simetrías.	23
Redes Cristalinas.	23
Celdas unitarias en tres dimensiones.	24
Celdas unitarias en dos dimensiones.	29

	Página
CAPITULO II CRISTALIZACION DE WIGNER	
1) Introducción.	30
2) Hipótesis de Wigner.	33
3) Justificación de la hipótesis de Wigner.	35
4) Propuestas en busca del cristal de Wigner.	37
Experimentos en dos dimensiones.	37
Experimentos en tres dimensiones.	40
CAPITULO III.- CALCULO DEL POTENCIAL ELECTRICO DEBIDO A UNA CARGA PUNTUAL EN UN MEDIO DIELECTRICO	
1) Introducción.	41
2) Potencial eléctrico debido a una carga puntual.	42
3) Ecuaciones de Maxwell.	42
4) Condiciones a la frontera.	43
5) Cálculo de Φ .	51
Cálculo de Φ en la región $z > 0$.	52
Cálculo de Φ en la región $z < 0$.	54

	página
CAPITULO IV.- EXPERIMENTO DE GRANDALL Y WILLIAMS	
1) Introducción.	61
2) Descripción del experimento de Crandall y Williams.	62
Condiciones.	62
Diseño experimental.	64
3) Experimento de Grimes y Adams.	69
CONCLUSION	72
APENDICES	
Apéndice A.- GAS IDEAL	75
Apéndice B.- DIFRACCION DE BRAGG	77
Apéndice C.- PROPIEDADES DEL HELIO	79
Apéndice D.- METODO DE IMAGENES	80
REFERENCIAS	83

INTRODUCCION

La mayoría de los sólidos como la madera o el papel contienen mezclas de diversos componentes, otros como el diamante o el cloruro de sodio son sustancias casi puras. Algunas sustancias son sólidos cristalinos y tienen un ordenamiento regular en sus átomos, otros son amorfos y no presentan ese ordenamiento.

De forma muy general los sólidos se pueden dividir en metales y no metales, los metales son dúctiles, se funden a elevadas temperaturas, son buenos conductores del calor y de la electricidad, son opacos a la luz, reflejando la mayor parte de ella y se dilatan cuando existe un incremento en su temperatura. Mientras que los no metales presentan propiedades diferentes, se funden fácilmente, son aislantes eléctricos y térmicos, dejan pasar la luz y no se dilatan con facilidad.

En los metales existen electrones casi libres por lo que un campo eléctrico puede moverlos fácilmente, esto es lo que caracteriza a un buen conductor eléctrico. Otra propiedad característica de los metales es que cuando incide un rayo de luz sobre el metal, los campos electromagnéticos que lo forman hacen oscilar a los electrones libres que generan al acelerarse una radiación reflejada, por lo que son buenos reflectores. Existen diferentes modelos teóricos propuestos

para entender mejor el comportamiento de los metales, tales como el gas de electrones libres y la teoría de bandas.

Para describir a estos sistemas, así como para cualquier otro sistema físico se toman como base modelos teóricos, que generalmente se sugieren a partir de observaciones experimentales. Los modelos elaborados con el apoyo de una teoría consistente predicen el comportamiento del sistema en estudio, para que este modelo pueda ser aprobado es necesario que se verifiquen experimentalmente sus predicciones.

En el presente trabajo se describe un ejemplo de una hipótesis teórica, la cual ha sido comprobada en diferentes experimentos. A partir de la hipótesis formulada por Wigner³ en los años 30 para la descripción de los metales, se han realizado en los últimos años varios experimentos con los que se ha podido comprobar dicha hipótesis y de esta forma darle validez. En el desarrollo del trabajo se mencionan las dificultades con las que se encontraron los experimentadores, y como pudieron afrontarlas.

En el capítulo I se hace un breve resumen sobre el estudio de los sólidos, cómo se clasifican macroscópicamente y microscópicamente, se describe también el tipo de enlaces que une a los átomos en la formación de un cristal. Se calcula la energía de cohesión para un cristal iónico y se determina el orden de magnitud de la fuerza de van der Waals.

En el capítulo II se introduce la hipótesis de Wigner, quien basándose en los trabajos previos sobre el estudio de los metales como el modelo de electrones libres y la teoría de bandas trato de analizar los efectos de interacción electrónica en los niveles de energía electrónicos de los metales considerando la hipótesis propuesta por Drude en 1900.

El modelo propuesto por Wigner describe a los metales en situaciones extremas de densidad. Finalmente se mencionan escuetamente algunos experimentos en los que se ha verificado la hipótesis de Wigner, construyendo una reproducción del cristal de Wigner, haciendo referencia a los problemas a los que se han enfrentado los investigadores para llegar a la evidencia experimental de la propuesta de Wigner.

En el capítulo III se realiza el cálculo de la energía potencial eléctrica producida por una carga puntual en la interfase entre dos medios dieléctricos diferentes, con el propósito de poder determinar el tipo de líquido capaz de mantener a los electrones en su superficie. Los resultados de este cálculo dieron solución a uno de los problemas a los que se enfrentaron los experimentales en la búsqueda del cristal de Wigner en dos dimensiones. Para llevar a cabo este cálculo se parte de las ecuaciones de Maxwell, se introducen las condiciones en la frontera entre dos medios dieléctrico, y se emplea el método de imágenes.

En el capítulo IV se describen con más detalle los dos experimentos en los que se logró obtener el cristal de Wigner en dos dimensiones. En particular el experimento realizado por Crandall y Williams en 1971, por aportar la primera evidencia experimental de la estructura cristalina electrónica en dos dimensiones. El otro experimento que se describe en este capítulo es el que realizaron Grimes y Adams.

Finalmente se concluye que la hipótesis de Wigner fue comprobada en algunos experimentos como son los realizados por Crandall y Williams y, Grimes y Adams. En ambos experimentos se logró la formación del cristal de Wigner en dos dimensiones, sobre la superficie de helio líquido.

CAPITULO I. ESTUDIO DE LOS SOLIDOS

Introducción.

Desde el punto de vista macroscópico los sólidos son cuerpos que tienen forma y volumen propios y que resisten a los agentes que tienden a cambiar su forma o su volumen. Un sólido tiene un comportamiento elástico cuando se le somete a fuerzas de tensión y cortantes.

Considerando el punto de vista microscópico, los átomos son los constituyentes de la materia, estos a su vez están formados por protones, neutrones y electrones. Los dos primeros forman el núcleo del átomo, mientras que los electrones están alrededor del núcleo en diferentes niveles de energía. Los electrones de los últimos niveles de energía son los principales responsables de las interacciones entre átomos. Los átomos se unen para formar moléculas y sólidos por medio de interacciones electromagnéticas.

Sólidos amorfos.

Los sólidos se pueden clasificar en amorfos y cristalinos. En los sólidos amorfos los átomos o moléculas están fuertemente unidos, y poseen poca o ninguna regularidad o periodicidad geométrica en la forma en que están colocados en el espacio, estas sustancias presentan ordenamiento de corto alcance en su

estructura. Algunos autores llaman a los sólidos amorfos líquidos sobreenfriados, como el vidrio y los plásticos. Cuando los sólidos amorfos se calientan van ablandándose paulatinamente hasta convertirse en líquidos, sin que pueda determinarse con exactitud cuando se realiza el cambio. Es decir no existe un punto de fusión determinado como en el caso de los sólidos cristalinos. La mayoría de los sólidos son amorfos.

Sólidos cristalinos.

Los sólidos cristalinos se caracterizan por tener un ordenamiento casi perfecto en su estructura atómica, en ellos se repiten patrones regulares tridimensionales entre sus átomos o moléculas. La presencia de ordenamiento de largo alcance es la responsable de las propiedades de un cristal, esta regularidad en su estructura facilita la comprensión y cálculo de sus propiedades físicas. Por ésta razón se pueden estudiar con mayor facilidad las propiedades físicas de los sólidos cristalinos que las de los sólidos amorfos.

Es importante mencionar que los sólidos cristalinos tales como metales, cerámicas, sales iónicas, etc., no siempre se componen de un solo cristal sino que a menudo están formados de pequeñas unidades, cada una con diferente orientación, separadas entre sí por "fronteras"

La estructura que toma un sólido cristalino depende de varios factores, uno de los principales es el tamaño de los átomos y otro las fuerzas que actúan entre ellos.

En la figura (1.1) se muestra en forma esquemática la estructura de: A) sólido cristalino y B) sólido amorfo. Aquí se puede observar que en el sólido cristalino existe un orden en su estructura, en tanto que en el sólido amorfo tal orden no existe.

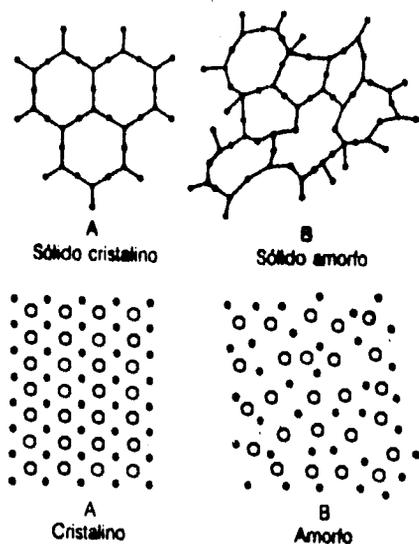


Figura 1.1.⁽¹⁾

⁽¹⁾ LA FÍSICA CONTEMPORÁNEA. Las Ciencias en el siglo XX, Guillermo Aguilar (compilador), UNAM, 1983, pag 104.

Enlaces.

Los sólidos se forman como resultado de las fuerzas electromagnéticas entre los átomos que lo constituyen. La estructura electrónica de estos determina diferentes formas de interacción, a los que se acostumbra llamar enlaces. Estos se clasifican en iónico, covalente, de van der Waals y metálico. La importancia de cada uno de ellos en un sistema determina las propiedades y características del mismo. A continuación se describen brevemente cada uno de los enlaces mencionados.

Enlace iónico.

Los enlaces iónicos se presentan cuando los átomos tienen baja energía de ionización por lo que pierden electrones con facilidad al entrar en contacto con otros átomos que aceptan electrones para completar su capa externa, de modo que los primeros se convierten en iones positivos y los segundos en iones negativos. La fuerza de atracción entre iones de distinto signo genera una configuración de equilibrio. Por ejemplo, un átomo de algún elemento del grupo I tiene un único electrón "s" fuera de una capa cerrada, por lo que los metales alcalinos forman fácilmente iones positivos, ya que ceden con facilidad el electrón de su última capa. Cuanto mayor es el número atómico del elemento que cede el electrón, más alejado se encuentra el electrón exterior del núcleo y por tanto, la fuerza electrostática que actúa sobre él es más débil, por esto se dice que la energía de ionización es más débil al aumentar el número atómico en cualquier

grupo. En la tabla periódica en el extremo opuesto a los metales alcalinos encontramos a los halógenos quienes tienden a completar sus subcapas externas "p", capturando un electrón.

Se define la afinidad electrónica de un elemento como la energía liberada cuando un electrón se incorpora a un átomo, mientras mayor sea la afinidad electrónica mayor es la firmeza de enlace del electrón incorporado. En general sabemos que la afinidad electrónica disminuye cuando se desciende de un elemento a otro en un mismo grupo en la tabla periódica y aumenta de izquierda a derecha en un mismo periodo. La afinidad electrónica es muy difícil de medir experimentalmente por lo que sólo se conoce con precisión en algunos elementos.

En general, los enlaces iónicos se forman entre los elementos de la primera o segunda columna y la sexta o séptima columna de la tabla periódica. Tenemos un ejemplo de este enlace en el cristal iónico de cloruro de sodio, este cristal está formada por una distribución de iones positivos (Na^+) de la primera columna y negativos (Cl^-) de la séptima columna, alternando en una distribución tridimensional. La interacción responsable de este enlace es la fuerza electrostática coulombiana entre los iones de sodio y cloro.

La condición para que el cristal formado por el enlace iónico sea estable es, simplemente, que la energía total del sistema de un par de iones sea menor que

la energía total del sistema de los dos átomos neutros de los mismos elementos. Este enlace se origina porque los átomos de sodio tienen energía de ionización baja (de 5.14 eV), mientras que el cloro tiene afinidad electrónica elevada (de 3.61 eV). En general, en un cristal iónico cada ion está rodeado por tantos iones del signo opuesto como se requiere para completar su configuración. Esto conduce a un máximo de estabilidad.

Los sólidos iónicos presentan un elevado punto de fusión y, debido a la intensidad de los enlaces entre sus iones constituyentes, la mayoría de los sólidos iónicos son duros y quebradizos. Muchos cristales iónicos pueden ser disueltos por líquidos polares (sustancias con momento dipolar eléctrico permanente) como por ejemplo el agua. Esto ocurre por que las moléculas polares se autoorientan con respecto a la superficie del cristal. La fuerza de atracción entre las moléculas de agua y los iones superficiales del cristal es lo suficientemente fuerte como para causar que los iones abandonen sus posiciones fijas en el cristal y que se muevan a posiciones entre las moléculas de agua.

En un cristal la energía que se libera en su formación a partir de los átomos neutros individuales, se le da el nombre de energía de cohesión, la cual se expresa generalmente en: eV/átomo, eV/molécula, o Kcal/mol. Existen diferentes contribuciones a la energía de cohesión en un cristal, estas contribuciones son:

- La primera es la energía potencial electrostática de los iones.
- La segunda es la energía potencial de las fuerzas de repulsión debidas a la acción del principio de exclusión de Pauli.

- La tercera es la energía de transferencia de los electrones de un átomo a otro cuando se forman los iones.

Como ejemplo, calculemos la energía de cohesión para el cristal de cloruro de sodio (NaCl). En la figura (1.2) se muestra un esquema del cristal de NaCl. En este cristal los iones de ambos tipos se encuentran en los vértices y en los centros de las caras de un conjunto de cubos, intercalándose los conjuntos de Na^+ y Cl^- . De esta manera, cada ion tiene seis vecinos próximos del otro elemento. Este tipo de estructura recibe el nombre de cúbica centrada en las caras.

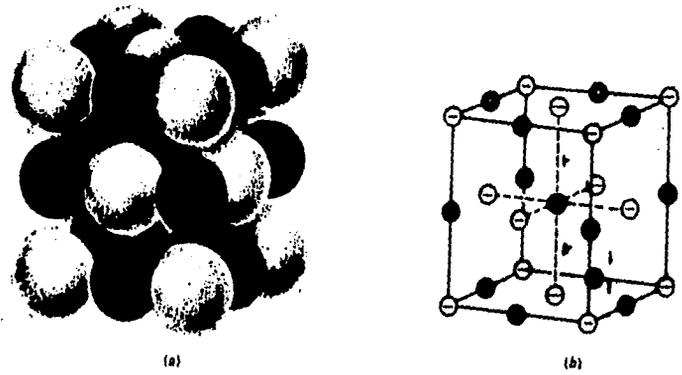


Figura 1.2.⁽²⁾

⁽²⁾ Berkeley physics course, volumen 2, editorial reverté, 1969, pag. 14.

La energía potencial coulombiana de un ion Cl en el NaCl es la suma de las energías potenciales debido a su interacción con cada uno de los iones que conforman el cristal, la cual es

$$U_1(r) = -\frac{e^2}{r} \left[6 - \frac{12}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{3}} - \frac{6}{\sqrt{4}} + \frac{24}{\sqrt{5}} \dots \right]$$

donde los números +6, -12, +8, -6, +24, etc. aparecen porque a la distancia r el ion Cl está rodeado de 6 iones Na^+ ; a la distancia $\sqrt{2}r$ por doce iones Cl^- ; el grupo siguiente está formado por ocho iones de Na^+ a la distancia de $\sqrt{3}r$; etc. (ver figura 1.2b).

La serie entre corchetes converge al valor 1.748, al cual se le denota por A y recibe el nombre de constante de Madelung. Esta constante tiene el mismo valor para todos los cristales con la misma estructura.

La energía potencial coulombiana es:

$$U_1(r) = -\frac{Ae^2}{r}$$

Esta energía no es la única que interviene, también se tiene una energía potencial de repulsión debida a que los electrones cumplen el principio de exclusión de Pauli, que corresponde a una fuerza de corto alcance, y que se puede expresar con una buena aproximación como

$$U_2(r) = \frac{B}{r^n} \quad (3)$$

⁽³⁾ Conceptos de física moderna, Arthur Beiser, pag. 326.

donde B es una constante, que se calculara posteriormente y n es un número entero que se puede determinar a partir de la compresibilidad observada en el cristal iónico

La energía potencial del cristal es por lo tanto

$$U(r) = -\frac{Ae^2}{r} + \frac{B}{r^n} \quad (1.1)$$

Suponiendo que los iones en el cristal están en sus posiciones de equilibrio, entonces, si $U(r_0)$ es un mínimo, r_0 es la separación de equilibrio, por lo tanto

$$\left(\frac{dU(r)}{dr}\right)_{r_0} = 0$$

derivando $U(r)$ de la ecuación (1.1) y evaluando en r_0

$$\left(\frac{dU(r)}{dr}\right)_{r_0} = \frac{e^2 A}{r_0^2} - \frac{nB}{r_0^{n+1}}$$

de aquí se tiene

$$\frac{e^2 A}{r_0^2} - \frac{nB}{r_0^{n+1}} = 0$$

$$\frac{nB}{r_0^{n+1}} = \frac{e^2 A}{r_0^2}$$

despejando B de esta última expresión

$$B = \frac{e^2 A r_0^{n+1}}{n r_0^2} = \frac{e^2 A}{n} r_0^{n-1}$$

por lo tanto

$$B = \frac{e^2 A}{n} r_0^{n-1} \quad (1.2)$$

sustituyendo la ecuación (1.2) en la (1.1) y evaluando en r_0

$$U(r_0) = -\frac{Ae^2}{r_0} \left[1 - \frac{1}{n} \right] \quad (1.3)$$

el exponente n se determina experimentalmente para cada cristal, en el caso del cristal de NaCl tiene un valor de $n=9$.

La posición de equilibrio entre los iones del cristal de NaCl es de 2.81 \AA ⁽⁴⁾ Al sustituir los datos correspondientes en la ecuación (1.3), se obtiene la energía potencial para este cristal.

$$U(2.81 \text{ \AA}) = -\frac{1.748(4.803 \times 10^{-10} \text{ ues})^2 \left(1 - \frac{1}{9} \right)}{2.81 \text{ \AA}} = -1.2756 \times 10^{-11} \text{ erg} = -7.96 \text{ eV}$$

$$1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-12} \text{ erg.}$$

Para determinar la energía de cohesión de los iones del cristal de NaCl falta sumar a la energía potencial del sistema la energía de transferencia del electrón del átomo de Na al átomo de Cl, la cual se obtiene sumando las energías de ionización del Na y la afinidad electrónica del Cl, esta energía es $(+5.14 \text{ eV} - 3.61 \text{ eV}) = 1.53 \text{ eV}$. Por lo tanto, la energía de cohesión, E_c , es

$$E_c = U(2.81 \text{ \AA}) + 1.53 \text{ eV} = -7.96 \text{ eV} + 1.53 \text{ eV} = -6.43 \text{ eV}$$

⁽⁴⁾ Conceptos de física moderna, Arthur Beiser, pag. 327.

Esta es la energía de cohesión del sistema y puede pensarse que cada ion contribuye con -3.22 eV. La energía de cohesión para el cristal de NaCl se ha medido experimentalmente, dando como resultado una energía de -3.18 eV/átomo, lo cual concuerda con el resultado teórico (en esta aproximación).

Enlace covalente.

En el enlace covalente varios átomos comparten los electrones de la última capa, en lugar de transferir electrones como ocurre en el caso del enlace iónico, de esta forma no se tiene carga neta asociada a ningún átomo del cristal. Los elementos de los grupos III, IV y V de la tabla periódica forman cristales covalentes. Un ejemplo de enlace covalente, se presenta en el diamante, debido a estos enlaces es que cada átomo de carbono comparte sus cuatro electrones de valencia con sus cuatro vecinos más próximos. Los electrones compartidos por el cristal, son el resultado del enlace que une a los átomos entre sí. Para que el enlace formado sea más estable es necesario que el par de electrones compartidos tengan espines antiparalelos. Dos átomos no metálicos, ambos con tendencia a ganar electrones, pueden combinarse entre sí compartiendo uno o más pares de electrones.

Por lo general los cristales covalentes son materiales duros, frágiles y la energía de enlace es muy grande, también presentan puntos de fusión muy elevados. Los cristales covalentes no son buenos conductores ni del calor ni de la electricidad, por lo que se pueden usar como aislantes. La energía de cohesión en los cristales

covalentes es aproximadamente de 6 a 12 eV por átomo la cual es mayor que en los cristales iónicos.

Los cristales formados únicamente por enlaces covalentes son relativamente raros. Un cristal puede tener naturaleza tanto covalente como iónica y sus electrones de valencia en parte se transfieren y parcialmente se comparten, existe un rango continuo entre los enlaces iónico y covalente. Un enlace es 100 % covalente cuando un par de electrones es compartido igualmente por dos átomos. Este caso solamente se puede ver cuando el cristal se forma por átomos iguales, como por ejemplo el germanio.

Enlace de Van Der Waals.

Muchas moléculas tienen momento dipolar eléctrico permanente, un ejemplo claro lo podemos ver en la molécula de agua, en donde la concentración electrónica del átomo de oxígeno hace que este extremo de la molécula sea más negativo que el ocupado por los átomos de hidrógeno. Por lo que las moléculas tienden a alinearse unas con otras de tal forma que los extremos de signo opuesto de cada una de las moléculas quedan adyacentes, razón por la que se atraen. Por otro lado, una molécula que no tiene momento dipolar permanente puede ser atraída por una molécula polar, ya que el campo eléctrico de la molécula polar produce una separación de cargas en la otra molécula, de tal forma que se crea

un momento inducido, lo que da como resultado una fuerza de atracción entre ellas.

Por otra parte, los electrones en una molécula no polar están en constante movimiento aún cuando su distribución es simétrica en promedio, en un momento dado, en una u otra parte de la molécula puede existir una mayor densidad de carga. Cuando dos moléculas no polares se encuentran lo suficientemente cerca, su distribución de carga fluctuante tiende a cambiar simultáneamente. Se puede presentar una gran fuerza de atracción cuando sus extremos adyacentes presentan signos opuestos. A esta fuerza se le da el nombre de fuerza de van der Waals, dicha fuerza es mucho menor que la fuerza encontrada en los enlaces iónicos o covalentes, por lo que los cristales formados por medio de una fuerza de van der Waals presentan bajos puntos de fusión, y su resistencia mecánica es pequeña.

Debido a las fuerzas de van der Waals, aún átomos de gases inertes, como el helio y el argón, presentan atracciones débiles a pesar de que no existen otros enlaces. Estas fuerzas son responsables de la condensación de los gases para transformarse en líquidos; o bien la congelación de los líquidos para convertirse en sólidos, en ausencia de otros enlaces. La tensión superficial, la fricción, la adhesión y la viscosidad son también consecuencia de las fuerzas de van der Waals.

La fuerza de van der Waals se presenta tanto entre dos moléculas polares como entre una molécula polar y una no polar. A manera de ejemplo calculemos el orden de magnitud de la fuerza de van der Waals para este último caso.

El campo eléctrico en un punto A producido por un dipolo eléctrico, está dado por la expresión

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{p}}{r^3} - \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r} \quad (1.4)$$

donde \mathbf{p} es el momento dipolar y \mathbf{r} el vector de posición del punto A, como se muestra en la figura (1.3).

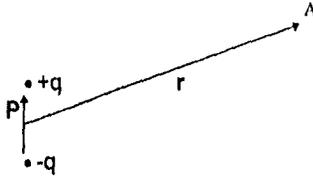


Figura 1.3.

El campo eléctrico \mathbf{E} induce, sobre una molécula no polar, un momento dipolar \mathbf{p}' que es proporcional a \mathbf{E} , esto es

$$\mathbf{p}' = \alpha \mathbf{E} \quad (1.5)$$

donde α es una constante característica de cada átomo, llamada constante de polarizabilidad atómica.

La energía potencial del dipolo inducida por el campo eléctrico \mathbf{E} es

$$U = -\mathbf{p}' \cdot \mathbf{E} \quad (1.6)$$

sustituyendo (1.5) en (1.6):

$$U = -\alpha \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$$

ahora sustituyendo la ecuación (1.4) en esta última expresión

$$U = -\alpha \left(\frac{\mathbf{p}}{r^3} - \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r} \right) \cdot \left(\frac{\mathbf{p}}{r^3} - \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r} \right)$$

realizando el producto escalar

$$U = -\alpha \left[\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}}{r^6} - \frac{6(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^8} + \frac{9(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})^2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{r^{10}} \right]$$

como $\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = pr \cos \theta$, donde θ es el ángulo entre \mathbf{p} y \mathbf{r} , entonces

$$\begin{aligned} U &= -\alpha \left[\frac{p^2}{r^6} - \frac{6p^2 r^2 \cos^2 \theta}{r^8} + \frac{9p^2 r^2 \cos^2 \theta}{r^{10}} r^2 \right] \\ &= -\alpha \left[\frac{p^2}{r^6} - \frac{6p^2 \cos^2 \theta}{r^6} + \frac{9p^2 \cos^2 \theta}{r^6} \right] \\ &= -\alpha \left[\frac{p^2}{r^6} + 3 \frac{p^2 \cos^2 \theta}{r^6} \right] \\ &= -\alpha \left[1 + 3 \cos^2 \theta \right] \frac{p^2}{r^6} \end{aligned}$$

Por lo tanto la energía potencial del sistema es proporcional a r^{-6} .

La fuerza entre las moléculas se obtiene de la expresión $F = -\frac{dU}{dr}$

$$\begin{aligned} \text{entonces, } F &= -\frac{d}{dr} \left\{ -\alpha \left[1 + 3 \cos^2 \theta \right] \frac{\rho^2}{r^6} \right\} \\ &= -6\alpha \left[1 + 3 \cos^2 \theta \right] \frac{\rho^2}{r^7} \end{aligned}$$

De esta última expresión se deduce que el orden de magnitud de la fuerza de atracción de van der Waals es proporcional a r^{-7} , por lo cual es significativa solamente cuando las moléculas se encuentran muy próximas entre sí.

Enlace metálico.

Los sólidos más simples son aquellos que se forman por un sólo tipo de átomos, por ejemplo los metales. La teoría de los metales se basa en el hecho de que los electrones de valencia de los átomos que forman el metal pueden ser comunes al agregado atómico global, de tal forma que una especie de gas de electrones libres lo llena todo. La fuerza de cohesión se debe a la interacción entre el gas electrónico y los iones positivos del metal, la presencia de estos electrones explica claramente la alta conductividad eléctrica en los metales, así como otras características propias de estos como son: el brillo en su superficie, la conductividad térmica, etc.

Una característica de los enlaces no saturados en un metal es la capacidad que tienen los electrones de valencia de moverse libremente de átomo en átomo. Esto lo podemos entender mejor si imaginamos que cada electrón de valencia se mueve constantemente de enlace en enlace. Por ejemplo, en el litio cada electrón

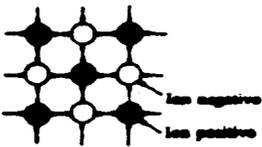
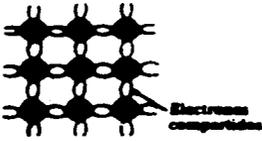
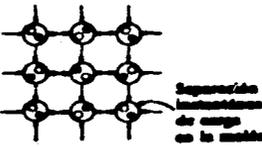
participa en ocho enlaces de modo que emplea poco tiempo entre dos pares de iones. Podemos decir que el electrón no recuerda a cual ion pertenece. En consecuencia los electrones de valencia de un metal se comportan como las moléculas de un gas.

Como en el caso de cualquier otro sólido los átomos de los metales se adhieren debido a que su energía colectiva es más baja cuando están enlazados que cuando se presentan como átomos separados. Esto se puede entender ya que la proximidad de los iones permite que los electrones de valencia estén más cerca de algún núcleo de lo que estarían si pertenecieran a un sólo átomo; lo que trae como consecuencia que la energía potencial del electrón sea menor en el cristal que en el átomo aislado y esta disminución es lo que ocasiona el enlace metálico.

Un resumen de los diferentes tipos enlaces se presenta en la tabla 1⁽⁵⁾

⁽⁵⁾ LA FISICA CONTEMPORANEA, Las Ciencias en el siglo XX, Guillermo Aguilar (compilador), UNAM, 1983, pag. 106.

Tabla 1.

Cristal	Enlace	Tipo	Características	Ejemplo	Principales propiedades
 <p>iones negativo iones positivo</p>	Atracción electrostática	Iónicos u homopolar	Transferencia de electrones de valencia de un átomo a otro. Cristal formado por iones positivos y negativos.	NaCl MgO	Aislantes eléctricos transparentes en el visible. Alta energía de amarre → alta temperatura de fusión.
 <p>Electrones compartidos</p>	Electrones compartidos	Covaleantes o heteropolar	Intercambio de electrones entre átomos vecinos. (No hay carga asociada con cualquier átomo del cristal.)	SiC, C, Ge	Semiconductores transparentes a λ larga. Alta energía de amarre → alta temperatura de fusión.
 <p>iones metálicos Gas de electrones</p>	Gas de electrones	Metálico	Electrones libres (gas) interaccionando con una red de iones positivos.	Cu, Au, Ag	Alta conductividad, alta reflectividad óptica. Energía de amarre menor que en los casos anteriores.
 <p>Separación instantánea de carga en la molécula</p>	Fuerzas de Van der Waals	Van der Waals	Interacción dipolar. (Debido a momento dipolar fluctuante.)	A, gases inertes	Malos conductores eléctricos y térmicos. Amarre muy débil → bajo punto de fusión.

SIMETRÍAS.

Los diferentes enlaces participan en la formación de los sólidos, generando diferentes estructuras. Las simetrías presentes en cada estructura ayudan en el estudio de los sólidos cristalinos. Los átomos en un sólido están distribuidos de la forma más eficiente posible, con respecto a su energía. A continuación se presenta una breve descripción de las redes cristalinas.

Redes Cristalinas.

Una característica de los sólidos cristalinos es el arreglo regular de los átomos, patrón periódico recurrente llamado red cristalina, si el sistema está en tres dimensiones, en el caso de dos dimensiones hablamos de una malla cristalina. Los puntos de la red son aquellos cuya posición se repite periódicamente y que tienen los mismos alrededores o vecindades. Los puntos de la red forman una estructura básica que al repetirse genera todo el cristal. A esta estructura básica se le denomina celda elemental.

Uno de los objetivos de la cristalografía moderna es la determinación de las características geométricas de estas celdas elementales que definen la estructura de un material cristalino, para esto se requiere determinar la disposición que guardan los átomos moléculas o iones dentro de cada celda elemental.

Celdas unitarias en tres dimensiones

Una celda unitaria en tres dimensiones es una región del espacio, representada por tres vectores linealmente independientes a , b y c , que al trasladarse por medio de cualquier múltiplo entero de dichos vectores reproducen una región del cristal. A los vectores linealmente independientes que definen una red cristalina se le da el nombre de vectores base.

Para determinar celdas unitarias y vectores base en redes cristalinas tridimensionales, a cada punto de una red cristalina tridimensional se le asocia un vector de la forma

$$r = ha + kb + lc$$

en donde h, k y l son números enteros.

Existen 14 formas de acomodar los puntos en las redes cristalinas, de tal manera que todos los puntos de esa red tengan el mismo medio circundante, un observador ve exactamente el mismo arreglo sin importar el punto que haya seleccionado para observar. Estas 14 redes se pueden agrupar en 7 sistemas cristalinos, cada uno de los cuales presentan elementos de simetría característicos. Los siete sistemas cristalinos son: Triclinico, monoclinico, ortorrómbico, tetragonal, cúbico, hexagonal y trigonal.

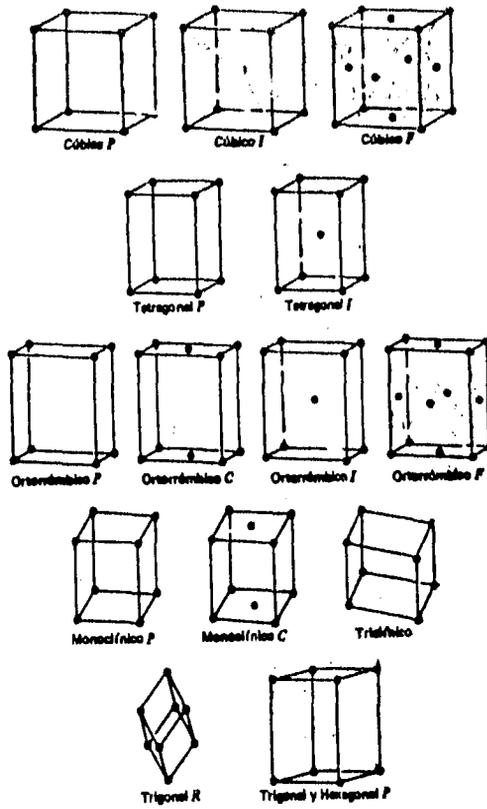


Figura 1.4.⁽⁶⁾

Los puntos de la red de una estructura reticular no representan a un solo átomo, sino a un conjunto de ellos. Las 14 redes se agrupan en los sistemas cristalinos (ver figura 1.4) de la siguiente manera:

⁽⁶⁾ Introducción a la física del estado sólido. Charles Kittel, editorial Reverté, segunda edición, 1981, pag. 21.

- 1.- En el sistema cúbico hay tres redes: la red cúbica simple (P), la centrada en el cuerpo (I) y la centrada en las caras (F).
- 2.- En el sistema tetragonal la unidad más sencilla es un prisma recto de base cuadrada. Se trata de una celda primitiva (P) que está asociada con una red espacial tetragonal. Un segundo tipo de red tetragonal es centrada en el cuerpo (I).
- 3.- En el sistema ortorrómbico existen cuatro tipos de redes: una red tiene una celda primitiva (P), otra red es centrada en la base (C), otra lo es centrada en el cuerpo (I) y una más centrada en las caras (F).
- 4.- En el sistema monoclinico existen dos tipos de red, una con una celda unidad primitiva (P) y otra con una celda convencional no primitiva, que puede ser centrada en la base (C).
- 5.- En el sistema triclinico, el único tipo de red tiene una celda unidad primitiva (P) con tres ejes de diferentes longitudes y ángulos desiguales.
- 6.- En el sistema trigonal se toma generalmente un romboedro como celda primitiva. La red es primitiva.
- 7.- En el sistema hexagonal se toma una celda convencional un prisma recto de base romboédrica con ángulo de 60° . La red es primitiva.

En la tabla (2)⁽⁷⁾ se resumen las redes cristalinas en tres dimensiones y su clasificación en sistemas cristalinios.

⁽⁷⁾ Introducción a la física del estado sólido, Charles Kittel, editorial Reverté, segunda edición, 1981, pag. 20.

Tabla 2 Los catorce tipos de redes en tres dimensiones

Sistema	Número de redes en el sistema	Símbolos de la red	Restricciones en los ejes y ángulos de las redes convencionales
Triclinico	1	<i>P</i>	$a \neq b \neq c$ $\alpha \neq \beta \neq \gamma$
Monoclinico	2	<i>P, C</i>	$a \neq b \neq c$ $\alpha = \gamma = 90^\circ \neq \beta$
Ortorrombico	4	<i>P, C, I, F</i>	$a \neq b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
Tetragonal	2	<i>P, I</i>	$a = b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
Cúbico	3	<i>P o sc</i> <i>I o bcc</i> <i>F o fcc</i>	$a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
Trigonal	1	<i>R</i>	$a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma < 120^\circ, \neq 90^\circ$
Hexagonal	1	<i>P</i>	$a = b \neq c$ $\alpha = \beta = 90^\circ$ $\gamma = 120^\circ$

Describiremos brevemente las redes cúbicas por estar directamente relacionadas con el tema de este trabajo.

Como ya se dijo existen tres tipos de redes cúbicas: la cúbica simple, la cúbica centrada en el cuerpo y la cúbica centrada en las caras. La red cúbica simple contiene un átomo por celda, se representa colocando un átomo en cada vértice del cubo, el que es compartido a su vez con otras ocho celdas unitarias por lo que podemos decir que tiene ocho átomos en las esquinas pero que solamente le corresponde 1/8 de cada uno de ellos a esta celda. La celda que corresponde a la estructura cúbica centrada en las caras, al igual que en las cúbica simple tiene un átomo en cada uno de los ocho vértices compartidos con otras ocho celdas, pero

además contiene seis átomos centrados en las caras, cada uno de los cuáles es compartido con dos celdas, lo cual da un total de 4, $\{ 8(1/8) + 6(1/2) \}$. La celda cúbica centrada en el cuerpo al igual que en las anteriores contiene ocho átomos compartidos en los vértices y en este caso presenta un átomo centrado en el cubo que corresponde únicamente a esta celda lo que da un total de 2, $\{ 8(1/8) + 1 \}$ átomos dentro de la celda.

En la estructura cúbica centrada en el cuerpo, cualquier átomo, excepto los de la superficie, tienen 8 átomos vecinos; mientras que en la estructura cúbica centrada en las caras el número de átomos vecinos es 12. Los elementos como el sodio, potasio, hierro y el tungsteno, cristalizan en el sistema centrado en el cuerpo; otros metales como el oro, la plata, el cobre, el aluminio, etc. forman redes centradas en la cara.

En 1960, Rosemary A. Coldwell and A. A. Maradudin¹ realizaron el cálculo de la energía potencial de interacción para cada una de las tres estructuras cúbicas; la cúbica simple (sc), la cúbica centrada en las caras (fcc) y la cúbica centrada en el cuerpo (bcc). El valor que obtuvieron en cada caso es:

$$U_{sc} = -2 (1.7601188) (1/r_s) ry,$$

$$U_{fcc} = -2 (1.791753) (1/r_s) ry,$$

$$U_{bcc} = -2 (1.791860) (1/r_s) ry.$$

Aquí se puede ver que la energía más baja se obtiene para el cristal cúbico centrado en el cuerpo.

Celdas unitarias en dos dimensiones

Desde luego esto que se presenta en tres dimensiones también se puede representar en dos dimensiones. Una celda unitaria en dos dimensiones es una región del cristal definida por los vectores a y b que al trasladarse por medio de cualquier múltiplo entero de dichos vectores reproduce una región similar del cristal bidimensional. Cada punto de la red del cristal se puede describir por medio de un vector r tal que

$$r = ha + kb$$

en donde h y k son enteros, y a y b son los vectores base.

En dos dimensiones las redes pueden tener estructuras cristalinas cuadradas, triangulares o hexagonales.

El estudio realizado en el presente capítulo, tuvo como fin describir los diferentes tipos de enlace que intervienen en la formación de un sólido, así como las propiedades a que da lugar cada uno de ellos. También se describe de forma general lo que es una estructura cristalina y las diferentes formas en que esta se presenta. Los conceptos aquí vertidos son fundamentales para el entendimiento de los capítulos posteriores.

CAPITULO II. CRISTALIZACION DE WIGNER

Introducción.

De los más de cien elementos que se conocen actualmente, aproximadamente tres cuartas partes son metales. No obstante que estos elementos presentan una gran diversidad de propiedades tienen algunas en común, que los hacen diferentes de los no metales.

Entre las propiedades físicas que presentan los metales están: densidades relativamente altas, alta conductividad eléctrica, así como alta conductividad térmica, se dilatan con pequeños cambios de temperatura y son opacos a la luz reflejando bien la radiación.

En los comienzos de este siglo, con posterioridad al descubrimiento del electrón, fueron numerosos los investigadores que trataron de explicar la conductividad de los metales basándose en el movimiento de unos electrones de conducción más o menos libres. En 1900, Drude² fue el primero en formular la hipótesis de que la conductividad eléctrica y térmica de las sustancias metálicas podría explicarse debido a la presencia de grandes concentraciones de electrones libres móviles en estos materiales. Más tarde, Lorentz investigó exhaustivamente las implicaciones de esta idea. Drude y Lorentz supusieron que los electrones libres en un metal podían considerarse como un gas ideal de partículas libres, el

cual obedece a la estadística de Maxwell-Boltzmann cuando se encuentra en equilibrio térmico.

Posteriormente, cuando se conoció la estructura electrónica de los átomos, fue posible explicar las propiedades eléctricas y térmicas de los metales.

Una propiedad que presentan en general los metales es la tendencia a ceder los electrones de las subcapas externas en las reacciones químicas, por lo que los iones metálicos son positivos; esto está relacionado con la energía de ionización de los átomos y con el número de electrones de valencia que presentan los átomos metálicos, los cuales generalmente son menos de cuatro.

En un sólido cristalino el mayor número de electrones está ligado al núcleo atómico muy cercanos a los sitios de la red, pero cuando se trata de un conductor metálico, los electrones de las subcapas exteriores se encuentran relativamente libres, de tal manera que estos electrones se pueden mover por todo el sólido. Estos son los electrones de conducción. Por otro lado, como la repulsión mutua se cancela, en promedio, por la atracción de los núcleos atómicos, los electrones de conducción se pueden considerar como partículas libres y por lo tanto pueden ser tratados como un gas ideal de electrones. El interior de un metal es una región de potencial aproximadamente constante para estos electrones, por esta razón la frontera del metal se comporta como una pared de potencial alto.

Los electrones de valencia forman un conjunto de electrones común a todo el metal, este conjunto cumple con el principio de exclusión de Pauli. Como consecuencia los estados de energía de las capas externas de los átomos se

encuentran alteradas por la interacción entre ellos. Por esta razón todo el cristal posee una banda de energía compuesta por los niveles de energía individuales que se encuentran muy próximos unos a otros. El comportamiento de un sólido así como la influencia en algunas de sus propiedades se debe a la presencia de bandas de energía y a los saltos que puedan existir entre ellas.

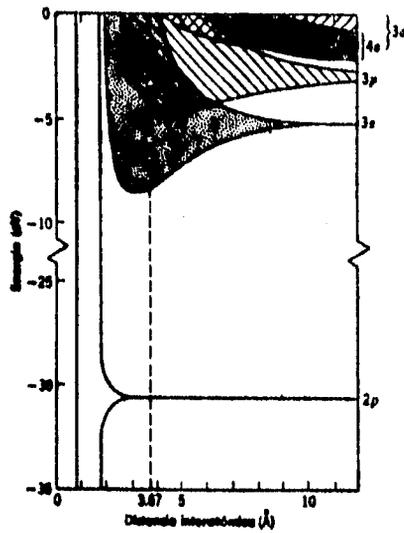


Figura 2.1.⁽⁶⁾

En la figura (2.1) se muestra la formación de bandas de energía a partir de los niveles de energía de átomos de sodio aislados.

⁽⁶⁾ CONCEPTOS DE FISICA MODERNA, Arthur Beiser, McGraw-Hill, pag. 337.

En algunos sólidos las bandas de energía se pueden traslapar, mientras que en otros no. En el primer caso los electrones presentan una distribución continua de energía permitida, en el segundo caso los electrones no pueden poseer la energía que se presenta entre los intervalos de las bandas, estos intervalos se les conoce como bandas prohibidas. Por lo que en un sólido cristalino su comportamiento eléctrico depende de la estructura de sus bandas de energía y de cómo se distribuyan los electrones en ellas. Al analizar el movimiento de los electrones en la banda de conducción, se considera a estos electrones como partículas libres y con movimientos independientes unos de otros.

Hipótesis de Wigner

En los años 30 Wigner^{3,4} inició la publicación de varios trabajos en los que analiza los efectos de la interacción electrónica en los niveles de energía electrónicos de los metales. Desde esta época se contaba con una explicación aproximada sobre las propiedades metálicas basada en la teoría de bandas, en la que la presencia de los iones se aproxima por medio de un potencial periódico. En dos de sus artículos publicados, Wigner fue más allá de la simple teoría de bandas: él estudió la correlación entre los electrones debido a la repulsión coulombiana entre ellos. La teoría de bandas no considera tales correlaciones, ya que solo describe partículas independientes.

El investigó las consecuencias de las correlaciones para propiedades metálicas, lo que lo llevó a proponer un comportamiento interesante del gas homogéneo de electrones. Un gas homogéneo de electrones es un conjunto de electrones que neutraliza a la carga positiva del fondo y que se distribuye uniformemente a través de todo el espacio.

Wigner resaltó la importancia que tienen cada una de las contribuciones a la energía en función de la distancia promedio entre partículas y propuso un modelo para describir a los metales en situaciones extremas de densidad. En la región de altas densidades, la energía que domina es la energía cinética de los electrones. Por esta razón en las regiones de altas densidades se proponen orbitales de partícula libre como solución al gas de electrones. Para una densidad del sistema muy baja la distancia promedio entre partículas es grande y, debido al largo alcance de la interacción coulombiana, la energía potencial de las partículas es dominante en el cálculo de la energía del estado base. Apoyándose únicamente en un análisis teórico, Wigner propuso una fase cristalina para el gas de electrones a muy bajas densidades.

Recibe el nombre de cristal de Wigner la estructura que adoptan los electrones de un sistema homogéneo de electrones a bajas densidades, sometidos a la fuerza de un fondo homogéneo cargado positivamente y las fuerzas electrostáticas entre los mismos electrones.

Justificación de la hipótesis de Wigner.

El comportamiento del gas de electrones como una función de la densidad de partículas es muy diferente al de un gas de partículas clásicas (en el apéndice A se describe el gas de partículas clásicas). De acuerdo con las propiedades de los gases, mientras menor es la densidad de partículas, es decir, cuando la distancia entre ellas es grande, las interacciones entre dichas partículas no se consideran importantes. Por este motivo los gases de partículas a densidades muy bajas se pueden describir como un gas ideal, un gas de partículas que no interactúan. En contraste, un gas de electrones a densidades altas, se comporta casi como un gas ideal de fermiones. Conforme la densidad del sistema disminuye la competencia entre el término de energía cinética y potencial se va incrementando hasta que finalmente es dominante la energía potencial ocasionando que los electrones queden más o menos fijos en una posición determinada, formando una red, sumergida en un fondo homogéneo.

Wigner argumentó que para algunas densidades menores de cierto valor crítico, la energía cinética es mínima comparada con la energía potencial y por lo tanto la conducta del gas de electrones está determinada por la configuración electrónica que minimiza la energía potencial debida a la repulsión coulombiana. Como la energía potencial de un conjunto de electrones distribuido al azar es mayor que la de un conjunto de electrones ordenados, concluyó que a partir de cierto valor crítico de la densidad, el gas de electrones puede formar un cristal.

Wigner consideró sistemas en tres dimensiones, donde la energía potencial más baja se obtiene para un cristal cúbico centrado en el cuerpo¹. Se acostumbra que la densidad de electrones se mida en términos del parámetro r_s , el cual es el radio de una esfera cuyo volumen es el volumen promedio por partícula (medido en unidades de radios de Bohr). Para el gas de electrones, el parámetro r_s es una función decreciente de la densidad de partículas. Wigner propuso que un gas de electrones con r_s mayor de 10, debe cristalizar, esto no se pudo verificar fácilmente ya que en la naturaleza no existen sistemas con esta densidad. Los sistemas que se conocían entonces tenían valores de r_s menores de 10. Por lo tanto, hasta la fecha en que se publicaron los artículos mencionados, no existía un ejemplo que justificara su modelo físico, ningún sistema entonces conocido cumplía con los requisitos para que se realizara la cristalización.

Las teorías que describían a los metales no podían explicar el comportamiento de sistemas a densidades bajas, ya que los electrones de los últimos niveles de energía en los metales, forman un gas de electrones con r_s menor que 10. Por ejemplo, los metales alcalinos tienen r_s entre 4 y 6, por lo que sus electrones no cristalizan, sino que los electrones de su última capa se comportan más o menos como partículas libres, como se había mencionado. Esto explica su alta conductividad eléctrica.

La hipótesis de Wigner dio pauta a varias investigaciones tanto teóricas como experimentales. A pesar de que el punto de partida para este estudio fueron los metales, la verificación de la proposición de Wigner resulta imposible en estos

materiales por dos razones, la primera ya la mencionamos, es que los metales existen en la naturaleza a densidades muy grandes comparadas con la que se mencionan en la teoría de cristalización; y la segunda es que el cristal de Wigner no es conductor. Por lo tanto para demostrar la existencia del cristal de Wigner fue necesario crear las condiciones en el laboratorio.

Propuestas en busca del Cristal de Wigner.

Establecidas las condiciones de cristalización se trató de encontrar en el laboratorio este cristal. Son varios los intentos que se han realizado en sistemas tanto en dos como en tres dimensiones, sin embargo en los primeros experimentos en los que se logró el objetivo se obtuvo el cristal de Wigner en dos dimensiones. A continuación mencionamos brevemente algunos de estos experimentos.

Experimentos en dos dimensiones.

La primera idea que se presentó para construir un cristal de Wigner en dos dimensiones fue el experimento de Crandall y Williams⁵, el cual se menciona a continuación y será descrito con detalle en otro capítulo.

Hasta el año de 1971 no se había observado experimentalmente la cristalización ni en dos ni en tres dimensiones, en este año Crandall y Williams diseñaron un experimento en el que encontraron el cristal de Wigner en dos

dimensiones y concluyeron que el gas de electrones efectivamente puede cristalizar en el límite de baja densidad.

Este experimento consistió en depositar una pequeña cantidad de electrones sobre una capa de helio líquido (helio a una temperatura de 4 .3 K y a una presión de 1 atmósfera). Debido a la baja afinidad electrónica del helio (apéndice C), éste se comporta como una barrera para los electrones de tal manera que no penetran en él, quedando atrapados en la superficie exterior. Los electrones atrapados de esta forma no permanecen en la superficie del líquido por mucho tiempo ya que se evaporan debido a que el potencial imagen que se forma es débil como para mantener a los electrones en un estado superficial. Se pensó en poner bajo la capa de helio una placa metálica cargada positivamente y de esta manera al ser depositados los electrones, estos son atraídos hacia la placa, pero como ya se dijo no penetran en el líquido, quedando así atrapados en su superficie.

Por otro lado, como también existen las fuerzas de repulsión coulombiana entre los electrones, estos se mantienen a una cierta distancia fija, dando lugar a que se forme una estructura cristalina, la cual trata de reproducir el cristal de Wigner.

Crandall y Williams encontraron que las condiciones para que se forme un cristal de Wigner son: una densidad de los electrones entre 10^7 y 10^9 cm^{-2} , y un potencial suficiente para mantener a los electrones sobre la capa de helio. Para verificar la formación del cristal de Wigner es necesario tomar en cuenta los siguientes argumentos.

En una fase cristalina las distancias entre partículas son constantes, en consecuencia todo el cristal se comporta como si se tratara de una unidad. Un cristal de electrones que está fijo en un material no se mueve mientras que no exista un campo eléctrico que exceda de un cierto valor crítico, no obstante cuando el cristal no está formado, todos los electrones se deslizan más o menos libremente por el material. En consecuencia, cuando se forma un cristal de Wigner, al aplicar exteriormente un campo eléctrico paralelo a la superficie en donde se encuentra el cristal, un electrón no puede moverse en forma independiente de los otros, por lo tanto, se requiere un diseño experimental con el que se pueda medir el movimiento de los electrones en forma paralela a la superficie a fin de verificar la presencia del cristal. Este tipo de medidas permitieron confirmar a Crandall y Williams la formación de un cristal de Wigner en dos dimensiones en 1971.

En el año de 1979, Grimes y Adams, empleando un dispositivo experimental diferente al de Crandall y Williams, también encontraron evidencias de la formación de un cristal de Wigner en dos dimensiones⁶. El sistema que ellos estudiaron consistió, al igual que en el experimento de Crandall y Williams, de una monocapa de electrones atrapados sobre una superficie de helio líquido.

Experimento en tres dimensiones.

Dentro de los experimentos en tres dimensiones se encuentra el que realizaron en 1974 Crandall y Williams⁷ con otros colaboradores. Ellos diseñaron un experimento en el que pudieron obtener la estructura cristalina de esferas de poliestireno en suspensión acuosa, este cristal lo observaron por difracción de Bragg (apéndice B) de un haz láser. Esta estructura cristalina resultó ser cúbica centrada en el cuerpo con una combinación de cúbica centrada en las caras. El orden cristalino se debe a la repulsión coulombiana entre las esferas de poliestireno, como en el cristal de Wigner. Las esferas de poliestireno tienen una carga eléctrica negativa del orden de 10^3 electrones por esfera, esto se debe a los grupos de SO_3H incorporados en la cadena del polímero original. En agua ésta solución ioniza originando grupos SO_3^- y su correspondiente carga positiva, iones H^+ libres en el líquido. El orden cristalino aparece cuando todos los otros iones ajenos a la solución son removidos por medio de una resina.

Por otro lado, encontraron que si se cambia la distancia promedio entre partículas, también cambia la constante de la red, pero sin que esto ocasione cambios en la estructura de la misma.

La estructura cristalina propuesta por Wigner ha sido verificada experimentalmente tanto en dos como en tres dimensiones, formada por electrones sobre la superficie de helio líquido; así como también se han encontrado estructuras cristalinas similares empleado otras partículas como esferas de poliestireno.

CAPITULO III. CALCULO DE UN POTENCIAL ELECTRICO DEBIDO A UNA CARGA PUNTUAL EN UN MEDIO DIELECTRICO.

Introducción.

La idea de que los electrones pueden formar un estado superficial exterior sobre algún líquido fue propuesta inicialmente en 1969 por Cole y Cohen⁸, ellos consideraron diferentes líquidos: He, H₂, D₂, y Ne, y de manera independiente Shikin propuso en 1970 un estado superficial de electrones sobre Helio líquido. Una condición necesaria para que se presenten estos estados superficiales es que el líquido tenga afinidad electrónica negativa para que los electrones depositados no sean absorbidos por el líquido.

Cole y Cohen estudiarón las condiciones para formar una monocapa de electrones sobre una superficie líquida, el cálculo se realizó con diferentes sustancias de afinidad electrónica negativa.

Para entender mejor el dispositivo para la formación de la monocapa electrónica sobre una superficie líquida, inicialmente calcularemos el potencial imagen para un electrón depositado sobre la superficie de un material con constante dieléctrica ϵ_1 . El electrón se mueve libremente en el plano paralelo a la superficie y no interactúa con el gas que se encuentra arriba de la superficie, solamente es necesario tomar en cuenta la fuerza en la dirección normal, en esta dirección el electrón experimenta una fuerza imagen atractiva.

Potencial eléctrico debido a una carga puntual.

Consideremos dos medios semiinfinitos distintos con constantes dieléctricas ϵ_1 y ϵ_2 como se muestra en la figura 3.1. Si en el primer medio ponemos una carga q , en una posición fija ¿cuál es el campo eléctrico producido por ésta carga?

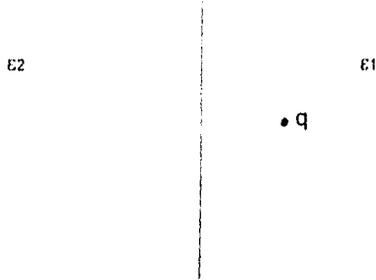


Figura 3.1

Para poder calcular el campo eléctrico producido por la carga, primero recordemos las ecuaciones de Maxwell en medios materiales:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{4\pi\mathbf{j}}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde: $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, y $\mathbf{H} = \mu \mathbf{B}$

Puesto que la carga puntual q no está en movimiento, entonces este problema es de tipo electrostático, esto significa que el campo eléctrico no depende del tiempo $\mathbf{E} \neq \mathbf{E}(t)$, el desplazamiento eléctrico tampoco depende del tiempo $\mathbf{D} \neq \mathbf{D}(t)$, y los campos magnéticos $\mathbf{H} = \mathbf{0}$, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, y como no hay densidad de corriente $\mathbf{J} = \mathbf{0}$. Por lo que las ecuaciones de Maxwell para este caso se reducen a las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho & (a) \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0 & (b) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Para la determinación del campo eléctrico en ambos medios dieléctricos es necesario resolver las ecuaciones del sistema (3.2), considerando las condiciones en la frontera que se deben cumplir en la interfase entre ambos medios dieléctricos. Es conveniente escribir las ecuaciones en su forma integral para determinar las condiciones en la frontera.

Condiciones en la frontera.

Las ecuaciones de Maxwell en el caso electrostático son las del sistema (3.2). Estas ecuaciones diferenciales se pueden transformar a su forma integral por medio del teorema de la divergencia y el teorema de Stokes.

Integramos la ecuación (3.2a) sobre un volumen V .

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV = \int_V 4\pi\rho dV \tag{3.3}$$

Ahora aplicando el teorema de la divergencia

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV = \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.4)$$

donde S es la superficie cerrada que envuelve al volumen V.

Sustituyendo la ecuación (3.4) en (3.3)

$$\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi \int_V \rho dV$$

esto es equivalente a

$$\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi q \quad (3.5)$$

donde q es la carga encerrada en el volumen V. Esta última expresión es la ley de Gauss para medios materiales.

Por otro lado si ahora integramos la ecuación (3.2b) sobre una superficie S.

$$\begin{aligned} \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \int_S \mathbf{0} \cdot d\mathbf{S} \\ \Rightarrow \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Aplicando el teorema de Stokes:

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (3.7)$$

donde c es la curva que encierra a la superficie S.

Sustituyendo en la ecuación (3.6) la ecuación (3.7)

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (3.8)$$

Por lo tanto, la versión integral de las ecuaciones de Maxwell para el caso electrostático son las ecuaciones (3.5) y (3.8), esto es:

$$\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi q \quad (3.5)$$

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (3.8)$$

Ahora consideremos nuevamente dos medios dieléctricos de constantes ϵ_1 y ϵ_2 , como se muestra en la figura (3.2)

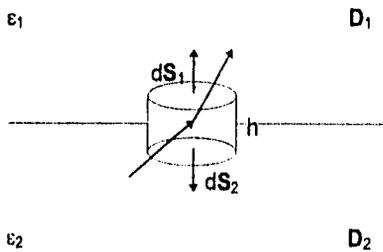


Figura 3.2.

En el medio dieléctrico 1 se tiene el desplazamiento eléctrico D_1 , en tanto que en el medio dieléctrico 2 el desplazamiento eléctrico que se tiene es D_2 , se aplicará la ley de Gauss a una superficie cilíndrica de radio r y altura h , (ver figura 3.2). Cuando h es muy pequeño el flujo sobre la cara lateral es despreciable, y si h

tiende a cero entonces el flujo tiende a cero, por lo tanto el flujo a través de toda la superficie se reduce a:

$$\int_S (\mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 + \mathbf{D}_2 \cdot d\mathbf{S}_2) = 4\pi \int_V \rho dV$$

entre $d\mathbf{S}_1$ y $d\mathbf{S}_2$ se tiene la relación $d\mathbf{S}_1 = -d\mathbf{S}_2$, si definimos a $d\mathbf{S}_1 = d\mathbf{S}$ entonces $d\mathbf{S}_2 = -d\mathbf{S}$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_S (\mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{S} - \mathbf{D}_2 \cdot d\mathbf{S}) &= 4\pi \int_V \rho dV \\ \Rightarrow \int_S (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot d\mathbf{S} &= 4\pi \int_V \rho dV \end{aligned} \quad (3.9)$$

En el caso que nos interesa no existe densidad superficial de carga en la interfase entre los dos medios, entonces

$$\int_S (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

si $d\mathbf{S} = dS \mathbf{n}$, donde \mathbf{n} es un vector unitario normal a la interface de los dos medios dieléctricos, se tiene

$$\int_S (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

Si la superficie S es lo suficientemente pequeña podemos suponer que la cantidad $(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{n}$ es constante, por lo cual

$$(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{n} \int_S dS = 0$$

de aquí se obtiene

$$(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{n} = 0$$

por lo tanto

$$(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{n} = 0$$

Esta ecuación se puede escribir como:

$$D_{1n} = D_{2n} \quad (3.10)$$

Esta expresión indica que en ausencia de densidad de carga superficial las componentes normales de los vectores de desplazamiento eléctrico son iguales entre sí en la frontera de los medios dieléctricos.

Ahora determinaremos las condiciones en la frontera para las componentes tangenciales, apliquemos la ecuación (3.8) a la trayectoria mostrada en la figura (3.3)

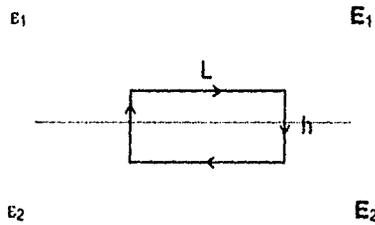


Figura (3.3).

Esta trayectoria es un rectángulo de base L y altura h recorrido en el sentido de las manecillas del reloj, los lados de la base los suponemos paralelos a la interfase de los medios dieléctricos, mientras que los lados restantes los consideramos perpendiculares a la interfase.

Asociamos un sistema de coordenadas a esta trayectoria, digamos como el mostrado en la figura (3.4)

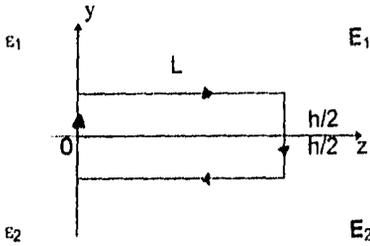


Figura (3.4)

Ahora calculemos la integral de línea de la ecuación (3.8):

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^L \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{z} + \int_{h/2}^0 \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{y} + \int_0^{-h/2} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{y} + \int_L^0 \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{z} + \int_0^{-h/2} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{y} + \int_0^{h/2} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{y}$$

Como nuestro interés es conocer el comportamiento del campo eléctrico sobre la interfase entre los dos medios dieléctricos, podemos suponer que h tiende a cero, entonces las integrales que dependen de dy tienden a cero, por lo que la última expresión se reduce a:

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= \int_0^L \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{z} + \int_L^0 \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{z} \\ &= \int_0^L \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{z} - \int_0^L \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{z} \\ &= \int_0^L (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot d\mathbf{z} \end{aligned}$$

Si $d\mathbf{z} = dz \mathbf{k}$, donde \mathbf{k} es un vector unitario en la dirección del eje z , es decir, \mathbf{k} es tangente a la interfase entre los dos medios dieléctricos, entonces:

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^L (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{k} dz$$

Si la longitud L es suficientemente pequeña, podemos suponer que la cantidad $(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{k}$ es constante en este intervalo, por lo tanto

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{k} \int_0^L dz = (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{k} L$$

De acuerdo a la ecuación (3.8)

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Por lo consiguiente

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{k} L = 0$$

$$\Rightarrow (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{k} = 0$$

Esta expresión se puede escribir como:

$$E_{1t} = E_{2t}. \quad (3.11)$$

Esta expresión indica que las componentes tangenciales de los campos eléctricos de ambos medios dieléctricos son iguales sobre la frontera entre éstos.

Concluimos que las condiciones en la frontera son las ecuaciones (3.10) y (3.11), por lo que una vez determinadas estas y las ecuaciones de Maxwell continuamos con el cálculo del potencial.

Recordemos que nuestro punto de partida es una carga puntual q que está inmersa en el dieléctrico seminfinito de constante dieléctrica ϵ_1 . Ahora supongamos que se encuentra a una distancia d de la interfase entre los dos medios dieléctricos, la cual podemos considerar, por simplicidad en $z = 0$. Con esto, el medio dieléctrico de constante ϵ_1 está en el espacio $z > 0$ mientras que el segundo medio dieléctrico con constante ϵ_2 está en $z < 0$, como se muestra en la figura 3.5.

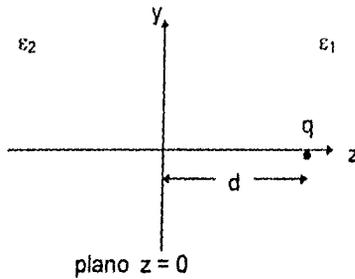


Figura 3.5

Para determinar \mathbf{E} , recordemos que $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$, entonces \mathbf{E} es un campo irrotacional y por lo consiguiente, se puede escribir como el gradiente de un potencial eléctrico Φ :

$$\mathbf{E} = \nabla \Phi,$$

Al sustituir esta expresión en la primera ecuación del sistema de ecuaciones (3.2), y empleando el hecho de que $\mathbf{E} = \epsilon \mathbf{D}$, se tiene

$$\epsilon \nabla \cdot \nabla \Phi = 4 \pi \rho$$

esta expresión también se puede escribir como $\epsilon \nabla^2 \Phi = 4\pi\rho$ que es la ecuación de Poisson.

Cálculo de Φ .

En el medio 1 se encuentra la carga q , por lo cual el potencial Φ satisface la ecuación de Poisson. En el medio 2, puesto que no existe carga, el potencial eléctrico satisface la ecuación $\nabla^2 \Phi = 0$, que es la ecuación de Laplace.

De esta forma el problema de calcular el campo eléctrico se transforma en la determinación del potencial eléctrico Φ , que satisface las ecuaciones anteriores.

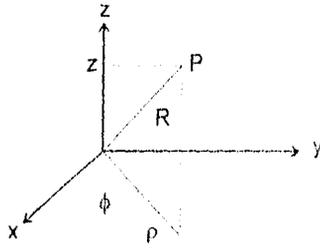
El potencial eléctrico producido por una carga puntual q en el origen es:

$$\Phi = \frac{q}{R} \quad \text{en el vacío}$$

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon R} \quad \text{en un medio material}$$

donde R es la distancia de la carga al punto donde se va a calcular el potencial.

Tomando en cuenta la simetría del sistema trabajaremos en coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) . Por lo tanto R en coordenadas cilíndricas es $R = \sqrt{\rho^2 + z^2}$, de acuerdo con la figura (3.6), como el sistema tiene simetría "axil" no depende de ϕ .



$$x = \rho \cos \phi$$

$$y = \rho \operatorname{sen} \phi$$

$$z = z$$

Figura 3.6.

Cálculo de Φ en la región $z > 0$.

Para determinar Φ es conveniente emplear el método de imágenes, (ver apéndice D) por lo tanto debemos colocar una carga q' en el medio 2, simétrica a q como se muestra en la figura 3.7.

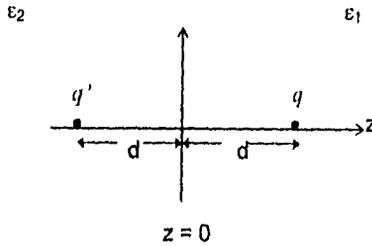


Figura 3.7

Consideremos un punto arbitrario P en el medio 1 como se muestra en la figura 3.8.

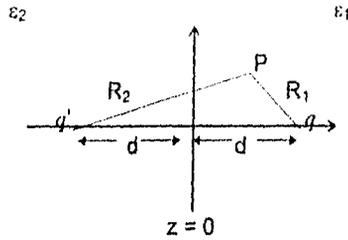


Figura 3.8.

entonces de la figura anterior tenemos:

$$R_1 = \sqrt{\rho^2 + (d-z)^2}$$

$$R_2 = \sqrt{\rho^2 + (d+z)^2}$$

El potencial en el medio 1, es decir para el semiplano z mayor que cero es:

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_1} \left[\frac{q}{R_1} + \frac{q'}{R_2} \right]$$

al sustituir el valor de R_1 y R_2 en esta ecuación

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_1} \left[\frac{q}{\sqrt{\rho^2 + (d-z)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{\rho^2 + (d+z)^2}} \right]$$

Cálculo del potencial en la región $z < 0$

El potencial para el semiplano z menor que cero se obtiene al resolver la ecuación de Laplace en esa región, ya que no hay carga en ella, entonces:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4 \pi \rho \quad \text{como } \rho = 0$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$

pero como $\mathbf{D} = \epsilon_2 \mathbf{E}$ en la región 2

$$\Rightarrow \nabla \cdot \epsilon_2 \mathbf{E} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

por otro lado se encontró que $\mathbf{E} = \nabla \Phi$ entonces

$$\nabla \cdot \nabla \Phi = 0$$

$$\therefore \nabla^2 \Phi = 0 \quad \text{que es la ecuación de Laplace.}$$

Entonces para determinar el potencial. En la posición de q se colocada una carga q'' , diferente de q como se muestra en la figura (3.9), suponemos que, el potencial producido por la carga q es equivalente al que produce la carga q'' .

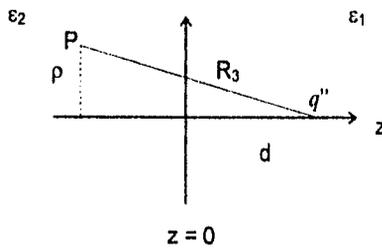


Figura 3.9

por lo tanto, se propone el potencial en el punto P como:

$$\Phi = \frac{q''}{\epsilon_2 R_3}$$

En resumen

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_1} \left[\frac{q}{R_1} + \frac{q'}{R_2} \right] \quad z > 0$$

$$\Phi = \frac{q''}{\epsilon_2 R_3} \quad z < 0$$

Finalmente para obtener Φ es necesario determinar los valores de q' y q'' . Por tanto el problema se ha reducido a determinar las cargas q' y q'' de acuerdo con las condiciones en la frontera.

En $z = 0$ se deben cumplir la condiciones en la frontera dadas por las ecuaciones (3.10) y (3.11), es decir

$$D_{1n} = D_{2n} \quad \text{y} \quad E_{1t} = E_{2t}$$

El campo eléctrico en la dirección normal depende de las constantes ϵ_1 y ϵ_2 .

$$\epsilon_2 E_{2z} = \epsilon_1 E_{1z} \quad (3.12)$$

Y en la dirección tangencial el campo siempre es el mismo

$$\Rightarrow E_{2p} = E_{1p} \quad (3.13)$$

En resumen:

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \epsilon_1 E_{1z} = \lim_{z \rightarrow 0^-} \epsilon_2 E_{2z} \quad (3.14)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} E_{1\rho} = \lim_{z \rightarrow 0^+} E_{2\rho}. \quad (3.15)$$

Calculemos E para z mayor que cero, $E = \nabla\Phi$, el cual en coordenadas cilíndricas es

$$\begin{aligned} \nabla\Phi &= \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\Phi}{\partial\phi} \mathbf{e}_\phi + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \mathbf{e}_z \\ E_{1z} &= \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\epsilon_1} \left[\frac{q}{R_1} + \frac{q'}{R_2} \right] = \frac{1}{\epsilon_1} \left[q \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R_1} + q' \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R_2} \right] \\ &= \frac{1}{\epsilon_1} \left[q \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{[\rho^2 + (d-z)^2]^{1/2}} + q' \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{[\rho^2 + (d+z)^2]^{1/2}} \right] \\ &= \frac{1}{\epsilon_1} \left[q \frac{-2(d-z)(-1)}{2[\rho^2 + (d-z)^2]^{3/2}} + q' \frac{-2(d+z)}{2[\rho^2 + (d+z)^2]^{3/2}} \right] \\ &= \frac{1}{\epsilon_1} \left[\frac{(d-z)q}{[\rho^2 + (d-z)^2]^{3/2}} - \frac{(d+z)q'}{[\rho^2 + (d+z)^2]^{3/2}} \right] \end{aligned}$$

Calculemos E_z para z menor que cero.

$$E_{2z} = \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\epsilon_2} \frac{q''}{R_3} = \frac{q''}{\epsilon_2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (d-z)^2}}$$

$$= \frac{q''}{\varepsilon_2} \left[\frac{-2(d+z)(-1)}{2[\rho^2 + (d-z)^2]^{\frac{3}{2}}} \right] = \frac{(d-z)q''}{\varepsilon_2 [\rho^2 + (d-z)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Sustituyendo E_{1z} y E_{2z} en la ecuación (3.14), tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0^+} \varepsilon_1 \frac{1}{\varepsilon_1} \left[\frac{(d-z)q}{[\rho^2 + (d-z)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{(d+z)q'}{[\rho^2 + (d+z)^2]^{\frac{3}{2}}} \right] \\ = \lim_{z \rightarrow 0^+} \varepsilon_2 \frac{(d-z)q''}{\varepsilon_2 [\rho^2 + (d-z)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ \Rightarrow \frac{dq}{[\rho^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{dq'}{[\rho^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{dq''}{[\rho^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}} \\ q - q' = q'' \end{aligned} \tag{3.16}$$

Calculemos E_p para z mayor que cero

$$\begin{aligned} E_{1p} = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\varepsilon_1} \left[\frac{q}{R_1} + \frac{q'}{R_2} \right] = \frac{1}{\varepsilon_1} \left[q \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{R_1} + q' \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{R_2} \right] \\ = \frac{1}{\varepsilon_1} \left[q \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{[\rho^2 + (d-z)^2]^{\frac{3}{2}}} + q' \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{[\rho^2 + (d+z)^2]^{\frac{3}{2}}} \right] \\ = \frac{1}{\varepsilon_1} \left[q \frac{-2\rho}{2[\rho^2 + (d-z)^2]^{\frac{3}{2}}} + q' \frac{-2\rho}{2[\rho^2 + (d+z)^2]^{\frac{3}{2}}} \right] \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon_1} \left[\frac{q\rho}{[\rho^2 + (d-z)^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{q'\rho}{[\rho^2 + (d+z)^2]^{\frac{3}{2}}} \right]$$

Ep para z menor que cero

$$\begin{aligned} E_{2\rho} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{q'}{R_1} = \frac{q''}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (d-z)^2}} \\ &= \frac{q''}{\varepsilon_2} \left[\frac{-2\rho}{2[\rho^2 + (d-z)^2]^{\frac{3}{2}}} \right] = \frac{-\rho q''}{\varepsilon_2 [\rho^2 + (d-z)^2]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Sustituyendo $E_{1\rho}$ y $E_{2\rho}$ en la ecuación (3.15), tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0^+} &= -\frac{1}{\varepsilon_1} \left[\frac{q\rho}{[\rho^2 + (d-z)^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{q'\rho}{[\rho^2 + (d+z)^2]^{\frac{3}{2}}} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{-\rho q''}{\varepsilon_2 [\rho^2 + (d-z)^2]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{\varepsilon_1} \left[\frac{dq}{[\rho^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{dq'}{[\rho^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}} \right] = \frac{-1}{\varepsilon_2} \frac{dq''}{[\rho^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_2 q + \varepsilon_2 q' = \varepsilon_1 q'' \quad (3.17)$$

Para determinar q' y q'' se resuelven las ecuaciones (3.16) y (3.17)

$$\begin{aligned} q - q' &= q'' \\ \varepsilon_2 q + \varepsilon_2 q' &= \varepsilon_1 q'' \end{aligned}$$

cuya solución es

$$q' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q \quad \text{y} \quad q'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q$$

Una vez conocidas q' y q'' podemos calcular la fuerza entre q y la frontera de los medios dieléctricos, ya que ésta es la fuerza entre q y q' , la cual se obtiene por la ley de Coulomb es decir:

$$F = \frac{qq'}{(2d)^2} = \frac{q}{4d^2} \left[\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right] q = \frac{q^2}{4d^2} \left[\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right]$$

Como ejemplo calcularemos la fuerza eléctrica, para algunas sustancias líquidas como son el He, H₂ y el D₂.

La carga del electrón es $q = 4.803 \times 10^{-10}$ ues. Consideremos la distancia promedio entre el electrón y la superficie como 0.1 cm y supongamos $\epsilon_1 = 1$.

Para el helio: en estado líquido $\epsilon_2 = 2.0182$, al sustituir tenemos:

$$F = \frac{q^2}{4d^2} \left[\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right] = \frac{(4.803 \times 10^{-10} \text{ ues})^2}{4(10^{-1} \text{ cm})^2} \left[\frac{1 - 2.0182}{1 + 2.0182} \right] = -1.94 \times 10^{-18} \text{ dinas}$$

Para el H₂: en estado líquido $\epsilon_2 = 1.22$, al sustituir tenemos

$$F = \frac{q^2}{4d^2} \left[\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right] = \frac{(4.803 \times 10^{-10} \text{ ues})^2}{4(10^{-1} \text{ cm})^2} \left[\frac{1 - 1.8829}{1 + 1.8829} \right] = -1.76 \times 10^{-18} \text{ dinas}$$

Para el D₂: en estado líquido $\epsilon_2 = 1.27$, al sustituir tenemos

$$F = \frac{q^2}{4d^2} \left[\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right] = \frac{(4.803 \times 10^{-10} \text{ ues})^2}{4(10^{-1} \text{ cm})^2} \left[\frac{1 - 1.277}{1 + 1.277} \right] = -0.701 \times 10^{-18} \text{ dinas}$$

Por lo tanto podemos ver que la mayor fuerza entre el electrón y la frontera con los medios dieléctricos se obtiene para el helio.

CAPITULO IV. EXPERIMENTO DE CRANDALL Y WILLIAMS

Introducción.

Crandall y Williams partieron del trabajo que realizaron Cole y Cohen en 1969 y encontraron que los electrones atrapados en la superficie de helio líquido permanecían en ella por un corto tiempo, porque la fuerza imagen $F(d)$ que se produce no es suficiente para mantenerlos por mucho tiempo atrapados. Esto los llevó a buscar un dispositivo capaz de producir una fuerza apropiada que mantuviera a los electrones fijos en la superficie del líquido por más tiempo.

Para incrementar la fuerza sobre los electrones añadieron al dispositivo experimental una placa metálica cargada positivamente abajo de la capa de helio líquido, de esta forma al depositar electrones sobre la superficie del líquido, los electrones son atraídos hacia la placa, pero no penetran en el helio, como ya se dijo por su afinidad electrónica negativa. También se determinó experimentalmente que el número de electrones depositado debe ser un número menor de 10^9 electrones por cm^2 , para evitar que se comporten como electrones libres.

Al depositar un electrón sobre la placa metálica cubierta por la capa de helio líquido, este es atraído por la placa pero no llega a ella ya que se encuentra con el helio, quedando atrapado únicamente en él en su superficie exterior, además de que se concentra una carga imagen positiva exactamente enfrente del electrón

depositado, de tal manera que el electrón queda fijo en forma vertical, aunque puede moverse paralelamente a la superficie del helio. Si en lugar de un electrón se depositan dos, éstos también son atraídos a la placa y de la misma forma son atrapados en la superficie exterior del líquido, pero ahora además de la fuerza de atracción que experimentan cada uno de ellos hacia la placa, existe también entre ellos una fuerza de repulsión coulombiana.

En el caso de tres electrones depositados sobre la capa de helio, el comportamiento es semejante, con la diferencia de que la fuerza neta que actúa sobre un electrón es la superposición de las fuerzas de repulsión debidas a los electrones restantes y a la placa positiva. En este caso los electrones adoptan una configuración geométrica regular (en forma de triángulo) en la cual su energía potencial es mínima.

Si el número de electrones es un número mayor de tres su comportamiento es similar, sólo que ahora la estructura geométrica es diferente, y de esta manera, si se continúa depositando electrones en principio se forma un arreglo cristalino.

Descripción del experimento de Crandall y Williams

Condiciones.

Para la realización de este experimento se consideró que el número de electrones que se depositan sobre la superficie de helio líquido deben ser tal que la distancia promedio entre ellos pueda ser de 10 o más radios de Bohr, con la

intención de cumplir con la hipótesis de Wigner. De acuerdo con esta hipótesis si la distancia es menor a la anterior estos se moverán libremente con un comportamiento similar al de los electrones en los metales. Cuando los electrones están ligados a su carga imagen por un potencial débil producido únicamente por la constante dieléctrica del helio, se evaporan con facilidad. Para evitar que esto suceda, se puso abajo del líquido un fondo homogéneo, cargado positivamente (placa metálica).

Si al depositar los electrones, únicamente se contara con la placa positiva estos serían absorbidos por ella, pero al existir sobre la placa la capa de helio líquido, esta sustancia sirve como barrera a los electrones, por lo que quedan atrapados en la superficie exterior del líquido.

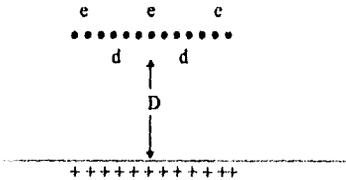


Figura 4.1.- En esta figura $D \gg d$, e es la carga del electrón.

En un primer artículo Grandall y Williams⁵ reportaron que obtuvieron el cristal de Wigner en dos dimensiones sobre una capa de helio líquido, y con una densidad de electrones entre 10^7 y 10^9 cm^{-2} (por lo que el espacio promedio entre los

electrones fue del orden de 10^{-4} cm). Como la separación a la placa cargada positivamente fue mucho más grande que la distancia promedio entre los electrones (como se muestra en la figura 4.1), no hubo variaciones laterales significativas excepto cerca de los bordes de la placa, por lo tanto las condiciones de un gas de electrones diluido en un fondo homogéneo de carga positiva se cumplieron.

En el mismo año (1971) Crandall y Williams publicaron un segundo artículo⁹ en el que describen el mismo experimento pero de forma detallada, poniendo énfasis en el dispositivo experimental empleado para obtener el cristal de Wigner en dos dimensiones y no solo informando los resultados obtenidos como en el primer artículo. Este dispositivo experimental se describirá a continuación

Diseño experimental.

Reproduciremos a continuación las partes mas importantes del diseño experimental que realizaron Crandall y Williams para obtener el cristal de Wigner.

El dispositivo experimental consta de un vaso de Dewar (V) de forma cilíndrica cuyas dimensiones aproximadas son 10 cm de alto y 6 cm de diámetro;(como se muestra en la figura 4.2), la parte inferior del vaso esta conectada a una fuente de poder (p).

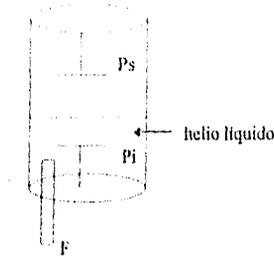


Figura 4.2.

Dentro del vaso se tienen dos placas de latón de aproximadamente 3 cm de diámetro montadas paralelamente; la placa inferior (P_i) está fija, mientras que la placa superior (P_s) esta montada en un tubo de acero inoxidable, como ya se dijo se mueve verticalmente con una frecuencia de un ciclo por segundo (1 cps), debido a este movimiento la separación entre las placas no es constante, sino que varía durante el ciclo de 1.5 a 2 cm.

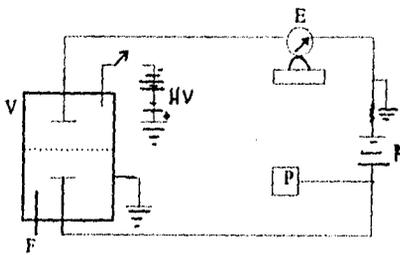


Figura 4.3.

Se puso helio líquido dentro del vaso de Dewar, hasta un nivel de aproximadamente un centímetro arriba de la placa inferior. La placa superior está conectada a un electrómetro Keithley (E, figura 4.3) esta placa es utilizada para medir el potencial superficial del líquido en presencia de electrones.

Los electrones son depositados sobre la superficie del helio desde arriba, para lograr esto la placa inferior está a un potencial de + 200 volts y la placa superior está conectada a tierra. Después se aplican varios kilovolts a la corona de descarga negativa que se encuentra del lado derecho en la parte superior del vaso. Los electrones producidos por la descarga son transportados a través del gas como electrones libres y son conducidos a la placa inferior, pero se detienen en la superficie exterior del líquido, donde son confinados por el potencial electrostático, quedando distribuidos sobre la superficie de helio.

El campo eléctrico sobre la superficie, causado por la placa cargada, decrece entre la superficie y la placa de arriba y se incrementa entre la superficie y la placa de abajo hasta que el potencial de la superficie es igual al de la placa de arriba, por lo que se conduce a los electrones fuera de la superficie del líquido y hacia el gas, bajo las condiciones anteriores, se encontró que los electrones abandonan la superficie en un tiempo no mayor de 100 μ seg. Si la corona de descarga se desconecta antes de continuar con el experimento entonces los electrones permanecen en la superficie tanto tiempo como el voltaje positivo se mantenga en la placa inferior.

Por otro lado, para medir la velocidad con que los electrones escapan de la superficie del helio, se aplica a la placa inferior un pulso de voltaje negativo, de tal forma que los electrones experimenten una fuerza que los impulsa del líquido hacia el gas. Aunque el pulso es de mayor duración que el tiempo en que los electrones cruzan por el gas, no es suficiente para desprender a todos los electrones de la superficie, este tiempo se determina por el decrecimiento del ancho de pulso. Después de que se deja de aplicar el pulso en la placa inferior, ésta sigue siendo positiva. La amplitud registrada en el electrómetro indica el número de electrones que han dejado la superficie. Por lo tanto la cantidad de carga Δq que abandonó la superficie en un intervalo de tiempo Δt puede ser medida.

Otra forma de depositar electrones en la superficie de helio, es desde abajo por medio de un pequeño filamento (F) de torio-tungsteno de aproximadamente 0.003 pulgadas de longitud inmerso en el líquido contenido en el vaso de Dewar, esta también es una fuente eficaz de electrones. Se aplicó un voltaje entre las placas, pero esta vez la placa superior fue cargada positivamente, por lo que los electrones son llevados a la superficie del líquido y permanecen en ella hasta que el potencial de la superficie es igual al de la placa inferior, y en ese momento se cierra la corriente del filamento (F).

Como resultado del experimento se encontró que la carga permanece en la interfase entre el helio y el gas, con una densidad inicial de $1.25 \times 10^8 \text{ cm}^{-2}$. Esto se pudo obtener al aplicar pulsos negativos a la placa inferior o también al conectar las dos placas entre ellas mismas.

El cristal de Wigner se forma por la existencia de dos fuerzas; una es la fuerza de atracción que sienten los electrones hacia la placa (cargada positivamente) al ser depositados sobre la superficie de helio líquido. La otra fuerza que se presenta es la fuerza de repulsión electrostática entre los electrones, la cual contribuye a que éstos formen una red regular estable, dando como resultado un cristal tal como se requería.

El efecto que produce la fuerza de repulsión lateral coulombiana entre los electrones, permite que se forme una malla hexagonal cerrada, en la que cada electrón en la malla tiene un mínimo de energía potencial. Crandall y Williams señalaron que si un electrón experimenta un pequeño desplazamiento r en el plano de la malla, el potencial que sentirá será de la forma $V(r) = Br^2$. En donde B es una constante que se calcula tomando en cuenta a todos los electrones que se encuentran fijos en la malla hexagonal, y r es la distancia que se desplazó el electrón de su posición de equilibrio. Al calcular B , Crandall y Williams³ obtuvieron un valor de $2.7 e^2 / a^3$ en donde a es la constante de malla. En el estado base el desplazamiento promedio de los electrones es de $3 \times 10^{-6} \text{ cm}$. lo que representa únicamente el 7 % de la distancia promedio entre los electrones. Por lo tanto, para una buena aproximación, se supone que los electrones son localizados en su sitio

de la red lo que representa un pequeño porcentaje de la distancia entre un electrón y otro, por lo que su estado de mínima energía corresponde a un arreglo en el cual se tiene un orden cristalino.

Experimento de Grimes y Adams.

Estos experimentos no son los únicos que se han realizado y en los que se observa el cristal de Wigner, ya que en el año de 1979 Charles Grimes y Gregory Adams⁶ obtuvieron evidencias de las características del cristal de un gas de electrones en dos dimensiones, formado también sobre una superficie de helio líquido.

El dispositivo experimental empleado por Grimes y Adams para obtener el cristal de Wigner se muestra esquemáticamente en la figura 4.4.

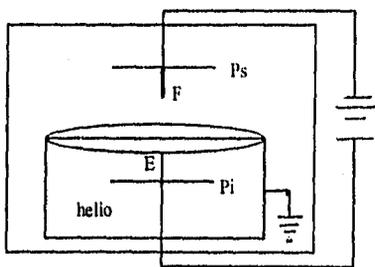


Figura 4.4.

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

La celda experimental está formada de un capacitor de placas paralelas de forma circular de 5 cm de diámetro (como se muestra en la figura 4.4), entre las cuales se encuentra una capa de helio líquido. La placa superior se localiza 0.2 cm arriba de la capa de helio y tiene en su centro un pequeño filamento, la otra placa está colocada abajo de la capa de helio a una distancia de aproximadamente 0.1 cm. Esta placa tiene un elemento de radiofrecuencia en su centro rodeado por un anillo que lo resguarda, además de otro anillo de metal que limita a la superficie de helio completa la celda experimental, este anillo guardián se mantiene a un potencial base o a tierra para evitar los efectos de borde. La celda experimental se encuentra dentro de una caja de cobre cerrada herméticamente y al vacío. Se aplicaron potenciales apropiados entre el filamento, de la placa superior y el anillo confinador, lo que dio lugar a que el filamento se calentara brevemente por lo que depositó electrones en la superficie de helio.

Grims y Adams, concluyeron que habían encontrado que una capa de electrones cristaliza clásicamente en dos dimensiones en una malla triangular. Experimentalmente encontraron que el arreglo cristalino se formó con una densidad areal (N_s) que aproximadamente se encuentra dentro del rango de 10^5 a 10^9 cm^{-2} .

Con este experimento lograron obtener el cristal de electrones. Para determinar que el cristal se ha formado, aplicaron un campo eléctrico variable, perpendicular a la superficie del líquido, encontrando que un conjunto de electrones se mueve de arriba hacia abajo como una unidad. Concluyeron que este conjunto de electrones debe ser el cristal de Wigner.

CONCLUSION

En este trabajo se ha descrito el proceso por medio del cual partiendo de una hipótesis netamente teórica, se buscó su verificación experimental. Esta hipótesis teórica fue propuesta desde los años 30 por Wigner, como se mencionó en el capítulo II. Es impresionante la cantidad de trabajos tanto teóricos como experimentales que se han desarrollado en base a dicha hipótesis, sin embargo a lo largo de casi 40 años no se pudo verificar experimentalmente, fue hasta 1971 cuando Crandall y Williams obtienen el primer resultado experimental en el que se comprueba la hipótesis de Wigner.

Es importante mencionar que la hipótesis para el comportamiento de los electrones formulada por Wigner es de naturaleza cuántica, sin embargo, en el experimento realizado por Crandall y Williams calcularon las fuerzas electrostáticas que actúan sobre los electrones considerando a los electrones como cargas puntuales.

Durante el proceso de verificación experimental se tuvieron que resolver muchos problemas a los que se enfrentaron los experimentales, como por ejemplo determinar la densidad electrónica apropiada. Como consecuencia, inicialmente

no se pudo obtener el dispositivo experimental apropiado ni en dos ni en tres dimensiones. En 1971, Crandall y Williams obtuvieron la primera verificación experimental en dos dimensiones. Ellos llegaron a la conclusión de que el cristal de Wigner se forma cuando la densidad de electrones se encuentra en el intervalo de 10^7 a 10^9 cm^{-2} .

En este trabajo se describió un experimento en el que se realizó el estudio de una monocapa de electrones sobre una superficie de helio líquido, atrapados por su propio potencial imagen y de las propiedades físicas de este sistema, lo que puede servir como base para estudiar otros sistemas de electrones en dos dimensiones, como por ejemplo, en las capas confinadas en las uniones entre aislantes y semiconductores , y entre capas de diferentes semiconductores.

Una vez comprobada la hipótesis de Wigner se conoce el comportamiento de estos sistemas a densidades muy bajas y a densidades muy altas, con esto se podrá verificar el comportamiento de sistemas a densidades intermedias, por ejemplo, en densidades de los metales, que fue el objetivo de Wigner al formular su hipótesis.

El estudio del cristal de Wigner es de gran interés en la física del estado sólido porque a través de él podemos estudiar las propiedades de los metales. También propició el desarrollo de técnicas adecuadas para la construcción de monocapas electrónicas, lo que ha resultado muy útil. Los sistemas en dos dimensiones son un campo activo e interesante dentro de las investigaciones en materia condensada en la actualidad.

APENDICE A

GAS IDEAL

Un gas ideal desde el punto de vista microscópico se define haciendo las siguientes suposiciones:

1.- un gas está formado de partículas llamadas moléculas. Estas moléculas podrán estar formadas de un átomo o más dependiendo si el gas es un elemento o un compuesto respectivamente.

2.- Las moléculas se mueven al azar y obedecen a las leyes Newton del movimiento. Esto significa que las moléculas son libres de moverse tanto en dirección como en velocidad, pero que a su movimiento se le aplican las leyes de Newton.

3.- El número total de moléculas es grande. Debido al número tan grande de moléculas se supone que después de los choques que sufren dichas moléculas se conserva la distribución global de las velocidades y el movimiento al azar.

4.- El volumen ocupado por las moléculas es una fracción pequeña comparada con el volumen que ocupa el gas. Si se condensa el gas encontramos que el volumen ocupado por el líquido es mucho más pequeño que el ocupado por el gas, porque éstas son sumamente pequeñas.

5.- No existen fuerzas apreciables sobre las moléculas salvo durante un choque. Se considera que una molécula se mueve con velocidad constante entre choque y choque ya que el espacio entre una molécula y otra es grande

comparado con el tamaño de estas. Por consiguiente se supone que el alcance de las fuerzas moleculares es comparable al tamaño de las moléculas.

6.- Los choques son elásticos y su tiempo de duración es despreciable. Suponemos que los choques entre las partículas y las paredes del recipiente conservan la cantidad de movimiento y la energía cinética. Como el tiempo que dura el choque es muy pequeño comparado con el tiempo que tarda en ocurrir un choque entre partículas, puede considerarse despreciable ya que la energía cinética que lleva la partícula al chocar se convierte en energía potencial durante el choque pero ésta nuevamente es cinética en cuanto se termina el efecto del choque, por lo tanto se puede pasar por alto ese intercambio.

APENDICE B

DIFRACCION DE BRAGG

Un cristal está formado por una distribución regular de partículas, cada una de las cuales es capaz de dispersar cualquier onda electromagnética que incide sobre él. Como los rayos x son ondas electromagnéticas, un haz monocromático de rayos x que llegue a un cristal se dispersará en todas direcciones dentro de él, pero debido a la distribución regular de las partículas, las ondas dispersadas en ciertas direcciones interfieren constructivamente, mientras que en otras direcciones interfieren destructivamente. Por otro lado se considera que las partículas de un cristal forman grupos, los cuales definen familias de planos paralelos con una separación característica d entre cada plano, a estos planos se les conoce con el nombre de planos de Bragg.

Para que exista interferencia constructiva se debe tener un diagrama, como el que se muestra en la figura (1)

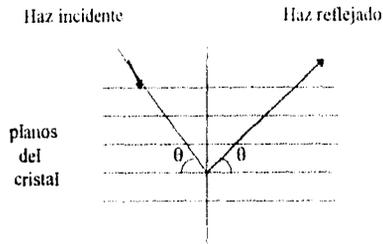


figura (1)

Un haz de rayos x de longitud λ incide formando un ángulo θ con la superficie de un cristal que contiene una familia de planos de Bragg. El haz llega a la partícula A en el primer plano, y a la partícula B en el segundo plano, cada una de ellas dispersa parte del haz en todas direcciones del espacio.

Se presenta interferencia constructiva únicamente entre los rayos dispersos que son paralelos y cuyos recorridos difieren exactamente en λ , 2λ , 3λ , etc., es decir para múltiplos de λ donde la diferencia de recorrido es $n\lambda$, con $n =$ número entero; las condiciones que se deben cumplir para que exista difracción de Bragg son: primero que el ángulo de dispersión θ sea igual al de incidencia θ del haz original, y la segunda condición es que: $2 d \text{ sen } \theta = n \lambda$, con $n = 1, 2, 3, \dots$

APENDICE C

PROPIEDADES DEL HELIO

El helio es un gas noble, este elemento es líquido a temperaturas menores de 4 ° C, el helio tiene el punto de fusión y ebullición más bajo de todos los elementos. Sus propiedades físicas son:

Punto de fusión -272.2 °C a 26 atm. de presión

Punto de ebullición -268.9 °C

Densidad 0.178 g/l

Energía de ionización 24.6 eV.

Radio atómico 0.5 A

Electronegatividad 2.7

El helio se usa mucho en experimentos a bajas temperaturas. Con helio líquido como enfriador, se han logrado obtener temperaturas tan bajas como de unos cuantos microgrados Kelvin. El helio es el elemento menos denso de todos los elementos con excepción el hidrógeno.

APENDICE D

METODO DE IMAGENES ,

Una gran variedad de problemas en los que se quiere calcular campo eléctrico producido por un conjunto de cargas se pueden resolver de manera simple, empleando un método muy ingenioso llamado Método de Imágenes.

Este método consiste en emplear una distribución de carga apropiada que genere una superficie equipotencial de la misma geometría que el conductor; la distribución de carga recibe el nombre de carga imagen. El fundamento teórico del método de imágenes es el Teorema de Unicidad que señala que la ecuación de Poisson tiene una solución única para densidad de carga y condiciones en la frontera dadas.

Placa conductora infinita inmersa en el campo eléctrico de una carga puntual.

Como ejemplo de la aplicación del método de imágenes se analizará el problema de una carga puntual y una placa conductora infinita.

Considérese una carga puntual positiva q a una distancia d de una placa conductora infinita, por simplicidad, conectada a tierra como se muestra en la figura (a).

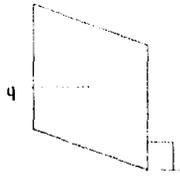


figura a

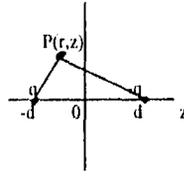


figura b

En este problema, la carga imagen es una carga puntual negativa situada a la derecha de la placa a una distancia d . De la figura 1(b) se observa que en el plano $z=0$, el potencial es cero porque cada punto de él es equidistante de las cargas q y $-q$.

El potencial en el punto $P(r, z)$ es ,

$$\Phi(r, z) = \frac{q}{\sqrt{r^2 + (z - d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{r^2 + (d + z)^2}}$$

Como era de esperarse, se cumple que $\Phi(r, 0) = 0$. El campo eléctrico en la placa conductora es

$$E_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\frac{2qd}{(r^2 + d^2)^{3/2}}$$

y la componente $E_r = 0$, puesto que para una placa conductora el campo eléctrico siempre es perpendicular a ésta. ,

Se sabe que para una placa conductora infinita de densidad superficial σ de carga, distribuida en una sola cara es ,

$$E_z = 4 \pi \sigma$$

por lo cual ,

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} E_z$$

sustituyendo el valor encontrado para E_z , se tiene ,

$$\sigma = -\frac{1}{2\pi} \frac{qd}{(r^2 + d^2)^{3/2}}$$

ésta es la densidad de carga inducida sobre la cara izquierda de la placa conductora.

La fuerza entre el conductor y la carga puntual q es la misma que entre ésta carga y su carga imagen, ya que la carga q "no puede distinguir" si está en presencia de una carga puntual o una placa conductora conectada a tierra, por lo tanto la fuerza sobre la carga puntual q es ,

$$F = \frac{q^2}{4d^2}$$

REFERENCIAS

- 1.- Rosemary A. Coldwell and Alex A. Maradudin, Journal of Mathematical Phys. Vol 1 No.5, (1960).
- 2.- Jonh P, Mckevey, Física del estado Sólido y Semiconductores, Editorial limusa-Noriega (1976). Capítulos 1 y 7
- 3.- E. P. Wigner, Trans. Faraday Soc. **34**, 678 (1938)
- 4.- Anil Kurana, Physics Today, **17** (1990)
- 5.- R. S. Crandall and R. Williams, Phys. Letters, **34A**, 404 (1971)
- 6.- C. C. Grimes and G. Adams, Phys. Rev. Letters **42** (1979) 12.
- 7.- R. Williams and R. S. Crandall, Physics Letters. **48A**, 3 (1974) 225
- 8.- D. A. Weitz, W.D. Dozier and P.M. Chaikin, Journal de Phys, **C 3**, 46 (1985) 257
- 9.- M. W. Cole and M. H. Cohen, Phys. Rev. Letters **23** (1969) 1238
- 10.- R. S. Crandall and R. Williams, Phys. Rev. A., **5**, 2183 (1971)
- 11.- Arnold J. and W. F. Vinen, Physics Today (february) 1987 **43**
- 12.- Robert Eisemberg- Robert Resnick, Física Cuántica. Editorial Limusa, (1979). Capítulos 9 y 13
- 13.- J. D. Jackson, Clasical Electrodinamics, Second Edition, Editorial Jonh Wiley & Sons, (1974). Capítulos 1 y 4
- 14.- P. V. Pavilov and A. F. Jojlov, Física del estado sólido, Editorial Mir Moscú, (1987)

15.-Beiser Arthur, Conceptos de Física Moderna, segunda edición. Editorial Mc.
Graw-Gil (1977). Capítulos 8 y 10