14
2Ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

RESULTADOS DE INTERPOLACION DE OPERADORES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

MARIA MERCEDES JORDAN SANTANA

DIRECTOR DE TESIS: DR. SALVADOR PEREZ ESTEVA

1996

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

Resultados de interpolación de operadores

realizado por María Mercedes Jordán Santana

con número de cuenta 8657199-7 **, pasante de la carrera de** Matemáticas.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario Dr. Salvador Pérez Esteva

Propietario Dra. María de la Luz De Teresa De Oteyza

Propietario Dra. Martha Dolores Guzmán Partida

Suplente M. en C. Jorge Rivera Noriega

Suplente Lic. Maribel Loaiza Leyva Maribel Loaiza Leyva.

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE

Resultados de interpolación de operadores

María Mercedes Jordán Santana

Director de tesis
Dr. Salvador Pérez Esteva

Esta aventura, por fin concluida, sólo pudo llevarse a cabo gracias al apoyo incondicional de mis padres, **Magdalena Santana y Heliodoro Jordán**, de quienes he recibido todo el amor, comprensión y paciencia, aun en los momentos más difíciles. No son suficientes las palabras que a ellos debo, para agradecerles todo lo que hoy he logrado. Gracias por estar conmigo.

A mi abuela: Doña Mercedes Torres vda. De Santana,
por el inmenso cariño que compartimos

A mis hermanos: Helio, Irma y Carlos,
por que somos amigos de toda la vida

A mi tía Blanca, por su confianza y complicidad

Contenido

INTRODUCCIÓN

Dentro del análisis matemático es importante ver el comportamiento de los operadores con los que se está trabajando. Para el caso de un operador definido sobre un espacio vectorial normado, muchas veces resulta difícil demostrar que éste es acotado. Sin embargo,es común conocer otras normas, sobre el mismo espacio, para las cuales el operador sí resulta acotado.

El objetivo de los teoremas de interpolación es, como su nombre lo indica, obtener un rango de normas para las cuales el operador dado sea acotado.

Dentro de esta tesis mencionaré sólo dos teoremas de interpolación, que son los más usados en análisis armónico. En el caso del teorema de Marcinkiewicz es común encontrar demostraciones utilizando distribuciones, aquí lo demostraremos utilizando rearreglos de funciones. Creemos que para aquellos que están interesados en conocer una demostración sin utilizar distribuciones, esta tesis les puede ser útil, ya que es difícil encontrar libros donde se desarrolle todo el material.

Además, tratamos de mostrar la utilidad de interpolar un operador. En el capítulo 3 veremos un ejemplo de cómo utilizar el teorema de Marcinkiewicz a la teoría de integrales singulares. También mencionaremos cómo se relacionan los resultados obtenidos con la transformada de Hilbert.

Finalmente, esperamos que este trabajo sea de utilidad para aquellos que se interesan por los temas que hemos logrado abarcar.

María Mercedes Jordán Santana.

Capítulo 1

TEOREMA DE RIESZ-THORIN

Los teoremas de interpolación más utilizados en análisis de Fourier son los teoremas de Riesz-Thorin y de Marcinkiewicz. Probaremos el teorema de Riesz-Thorin por el método de interpolación compleja y como una aplicación demostraremos el teorema de Hausdorff-Young al final de este capítulo.

1.1 Normas Consistentes

Para la demostración de este teorema empezaremos por definir algunos términos importantes dado un espacio vectorial normado.

Definición 1 *Sea B espacio vectorial normado, y sea $F : \Omega \to B$, donde Ω está contenida en el plano complejo, decimos que F es* Holomorfa *si dada μ funcional lineal continua sobre B se tiene que*

$$h(z) = \langle F(z), \mu \rangle = \mu \circ F \tag{1.1}$$

es holomorfa en Ω.

Notemos que una forma equivalente de definir una función holomorfa es:

Sean B espacio vectorial normado y $F : \Omega \to B$ con Ω contenida en el plano complejo. Decimos que F es *Holomorfa*, si dada μ una funcional lineal y continua sobre B existe $F'(z)$ tal que

$$\mu \circ F'(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{\mu \circ F(z) - \mu \circ F(z_0)}{z - z_0}. \tag{1.2}$$

Es decir, si el límite (1.2) existe.

Sea B un espacio vectorial normado con $\| \|_0$ y $\| \|_1$ y sea $\Omega = \{z \mid 0 \leq Re(z) \leq 1\}$. Tomemos el conjunto $\beta = \{F : \Omega \to B \mid F$ holomorfa y acotada con respecto a $\| \|_0$ y $\| \|_1\}$. Resulta que β también es un espacio vectorial, al cual se le puede dar la siguiente norma: Para $F \in \beta$ definimos

$$\|F\| = \sup_y \{\|F(iy)\|_0 , \|F(1+iy)\|_1\}.$$

Definición 2 *Dado* $0 < \alpha < 1$, *sea* $\beta_\alpha = \{F \in \beta \mid F(\alpha) = 0\}$, *decimos que* $\| \|_0$ *y* $\| \|_1$ *son* consistentes *si* β_α *es cerrado en* β.

Observemos que β_α es subespacio de β al cual no le hemos asignado norma alguna. Un criterio para saber si dos normas son consistentes lo podemos obtener con el siguiente lema.

Lema 3 *Supongamos que para toda* f *en* $B, f \neq 0$, *existe funcional* $\mu = \mu_f$ *continua con respecto a* $\| \|_0$ *y* $\| \|_1$ *y que satisface que* $\langle f, \mu \rangle \neq 0$. *Entonces* $\| \|_0$ *y* $\| \|_1$ *son consistentes.*

Prueba. Sea $0 < \alpha < 1$. Tomemos una sucesión $F_n \in \beta_\alpha$ tal que $F_n \to F$ en β, entonces lo que hay que demostrar es que $F(\alpha) = 0$.

Procederemos por reducción al absurdo. Supongamos que $F(\alpha) \neq 0$. Las hipótesis del lema (3) aseguran la existencia de $\mu = \mu_{F(\alpha)}$ tal que

$$\langle F(\alpha), \mu \rangle \neq 0.$$

Como $F \in \beta$ y μ es una transformación lineal continua se tiene que $\mu \circ F$ es acotada en Ω^o y además $\mu \circ F$ es holomorfa en Ω. De igual forma resulta que $\mu \circ F_n$ es holomorfa y acotada en Ω^o para toda n.

Veamos que $\mu \circ F_n$ converge a $\mu \circ F$ uniformemente en iy y en $1 + iy$.

Sea $\varepsilon > 0$ y $k = \max\{\|\mu\|_0 , \|\mu\|_1\}$.

Como $F_n \to F$, para toda $\varepsilon_o = \frac{\varepsilon}{k} > 0 \; \exists \; n_o$ tal que $\|F - F_n\| \leq \varepsilon_o$ para toda $n \geq n_o$ pero:

$$\|F(iy) - F_n(iy)\|_0 \leq \|F - F_n\|;$$

$$\|F(1+iy) - F_n(1+iy)\|_1 \leq \|F - F_n\|;$$

con lo anterior vemos que:

$$\begin{aligned} |\, \mu \circ F(iy) - \mu \circ F_n(iy) \,| &= |\, \mu(F(iy) - F_n(iy)) \,| \\ &\leq \|\mu\|_0 \, \|F(iy) - F_n(iy)\|_0 \\ &\leq \|\mu\|_0 \, \|F - F_n\| \, , \end{aligned}$$

de donde

$$|\, \mu \circ F(iy) - \mu \circ F_n(iy) \,| \leq \varepsilon \quad \text{para toda } n \geq n_o; \tag{1.3}$$

y

$$\begin{aligned} |\, \mu \circ F(1+iy) - \mu \circ F_n(1+iy) \,| &= |\, \mu(F(1+iy) - F_n(1+iy)) \,| \\ &\leq \|\mu\|_1 \, \|F(1+iy) - F_n(1+iy)\| \\ &\leq \|\mu\|_1 \, \|F - F_n\| \, . \end{aligned}$$

de donde

$$|\, \mu \circ F(1+iy) - \mu \circ F_n(1+iy) \,| \leq \varepsilon \quad \text{para toda } n \geq n_o \tag{1.4}$$

por tanto se da la convergencia uniforme en iy y en $1+iy$.

Utilizaremos el método de Phragmen-Lindelöf para acotar la diferencia de $\mu \circ F$ y $\mu \circ F_n$ para todo z. Recordemos que este método nos dice que si tenemos una función holomorfa y acotada en Ω^o además de continua en $\overline{\Omega}$, el máximo se alcanza en la frontera de la banda Ω [p.256, Rudin].

Sabiendo que el máximo se alcanza en la frontera y de 1.3 y 1.4 tenemos que:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \quad \text{tal que } \forall n \geq n_0 \qquad |\, \mu \circ F(z) - \mu \circ F_n(z) \,| \leq \varepsilon$$

por lo que la convergencia de $\mu \circ F_n \to \mu \circ F$ es uniforme en toda la banda Ω. En particular esa convergencia se da en α , es decir,

$$\mu \circ F(\alpha) = \lim_{n \to \infty} \mu \circ F_n(\alpha) = \lim_{n \to \infty} \mu(0) = 0.$$

Lo que es una contradicción, por tanto

$$F(\alpha) = 0$$

y por tanto $\| \, \|_0$ y $\| \, \|_1$ son consistentes. ∎

Hacemos notar que si la hipótesis del lema se satisface para $\| \, \|_2 \leq \{\| \, \|_0 , \| \, \|_1\}$ entonces la hipótesis se cumple para estas últimas, dado que $|\, \mu(f) \,| \leq k \| \, f \, \|_2 \leq k \| \, f \, \|_j$, $j = 1, 2.$; con lo que μ es continua con respecto de $\| \, \|_0$ y $\| \, \|_1$.

Como un ejemplo de normas consistentes tenemos la siguiente proposición.

Proposición 4 *Sea $(X, d\mu)$ espacio de medida y $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$. Si $B = L_{p_0} \cap L_{p_1}$ entonces $\| \ \|_{L_{p_0}}$ y $\| \ \|_{L_{p_1}}$ son consistentes.*

Prueba. Utilizaremos el lema 3 para mostrar la consistencia de las normas.

Sea $f \in B$ tal que $f \neq 0$ y sea $\mu(h) = \int h\overline{g}\,dx$, con g definida de la siguiente manera:

$$g = \min\{1, |f|^{p_0}\}\, e^{i\varphi} \quad \text{donde} \quad f = |f|\, e^{i\varphi}$$

Claramente μ es lineal por la forma en que se definió. Además observemos que $g \in L_\infty$, pues está acotada por 1.

Por otro lado como $f \in L_{p_0}$, se tiene que $|f|^{p_0} \in L_1$ y por lo tanto $g \in L_1$.

De lo anterior tenemos que $g \in L_1 \cap L_\infty$, por lo que g pertenece a todos los L_p que están entre L_1 y L_∞, es decir,

$$g \in L_p \quad \text{para toda} \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Sea $h \in B$, podemos aplicar μ a h de tal forma que a $\langle h, \mu\rangle = \int h\overline{g}\,dx$ le podemos acotar utilizando la desigualdad de Hölder. Se tiene que

$$|\mu(h)| \leq \| h \|_{L_{p_0}} \| g \|_{L_{q_0}} \qquad \text{y} \qquad |\mu(h)| \leq \| h \|_{L_{p_1}} \| g \|_{L_{q_1}},$$

donde $\frac{1}{p_0} + \frac{1}{q_0} = 1$ y $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = 1$.
En consecuencia el operador μ es continuo con respecto a las dos normas.

Falta demostrar que para la f dada se tiene que $\langle f, \mu\rangle \neq 0$. Para esto basta probar que:

$$f\overline{g} > 0.$$

Calculemos $f\overline{g}$

$$f\overline{g} = |f|\,|g|\, e^{i\varphi} e^{-i\varphi} = |f|\,|g|.$$

Tenemos dos casos:

$$f\overline{g} = \begin{cases} |f| & \text{si } |f|^{p_0} > 1, \\ |f|^{p_0+1} & \text{si } |f|^{p_0} \leq 1. \end{cases}$$

Como $f \neq 0$, $f\overline{g} > 0$. En consecuencia

$$\langle f, \mu\rangle \neq 0. \qquad \blacksquare$$

1.2 Norma de Interpolación

Daremos una nueva norma al espacio vectorial B a la cual llamaremos *norma de interpolación* y que denotaremos por $\| \, \|_\alpha$. Sea α tal que $0 < \alpha < 1$, consideremos el espacio cociente β/β_α , es decir,

$$\beta/\beta_\alpha = \{F + \beta_\alpha \mid F \in \beta\}$$

con β y β_α como se definieron en la sección anterior.

Este espacio cociente es un espacio vectorial isomorfo a B. Para ver este isomorfismo analizemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \beta \arrow[r, "T"] \arrow[d, "G"'] & B \\ \beta/\beta_\alpha \arrow[ur, "\overline{T}"'] & \end{tikzcd}$$

donde

$$\begin{aligned} &T(F) = F(\alpha), \\ &\overline{T}(F + \beta_\alpha) = F(\alpha), \\ &G(F) = F + \beta_\alpha. \end{aligned}$$

Notemos que $\overline{T}$ es una transformación lineal. Probaremos que es un isomorfismo, es decir, veremos que es suprayectiva y uno-uno.

Sea $x \in B$ definimos la función $F(z) = x$, como es una función constante resulta holomorfa y acotada, por tanto $F \in \beta$. Aplicando $\overline{T}$ a la clase $F + \beta_\alpha$ obtenemos:

$$\overline{T}(F + \beta_\alpha) = x$$

por lo que $\overline{T}$ es suprayectiva.

Tomemos ahora dos clases del espacio cociente distintas, es decir,

$$F_1 + \beta_\alpha \neq F_2 + \beta_\alpha.$$

En particular se tiene que

$$F_1 - F_2 \notin \beta_\alpha.$$

Esto,por la definición de β_α, significa que

$$(F_1 - F_2)(\alpha) \neq 0$$

por tanto

$$F_1(\alpha) \neq F_2(\alpha)$$

y en consecuencia

$$\overline{T}(F_1 + \beta_\alpha) \neq \overline{T}(F_2 + \beta_\alpha).$$

Por lo que $\overline{T}$ es inyectiva.

Con lo anterior tenemos que $\beta/\beta_\alpha \simeq B$. Si las normas son consistentes, es decir β_α es cerrado en β, podemos definir la norma canónica cociente en β/β_α de la siguiente manera:

$$\|F + \beta_\alpha\| = \inf \{\|F + g\| ; g \in \beta_\alpha\}.$$

En general se tiene que:

Si E es normado y G es un subespacio cerrado de E entonces E/G es normado con la norma

$$\|G + x\| = \inf_{g \in G} \|g + x\|_E.$$

Probaremos que $\| \ \|$ definida de esta manera es en efecto una norma.

a) Sea $x + G = [0] \Longrightarrow x \in G$, pero $-x \in G$ por ser espacio vectorial, por lo tanto:

$$\|x - x\|_E = 0$$

por lo tanto

$$\|G + x\| = 0$$

Sea $x+G$ tal que $\|x + G\| = 0$. Por la definición de *ínfimo* para toda $n \in N$ existe $g_n \in G$ tal que $\|x + g_n\| < \frac{1}{n}$, por lo que se puede construir una sucesión con la propiedad

$$\|\{x + g_n\}\|_E \longrightarrow 0 \qquad \text{cuando } n \to \infty.$$

Como $\| \ \|_E$ es una norma tenemos que

$$\{x + g_n\}_{n \to \infty} \longrightarrow 0.$$

Por tanto

$$g_n \to -x.$$

Ahora bien, cada una de las g_n pertenece a G , que es en subespacio cerrado, de donde:

$$-x \in G$$

y por tanto

$$x + G = 0.$$

b) Sea $\lambda \in C$, entonces

$$\begin{aligned} \|\lambda(x+G)\| &= \inf\{\|\lambda(x+g)\|_E \mid g \in G\} \\ &= \inf\{|\lambda|\,\|(x+g)\|_E \mid g \in G\} \\ &= |\lambda| \inf\{\|(x+g)\|_E \mid g \in G\} \\ &= |\lambda|\,\|(x+G)\|. \end{aligned}$$

c) Sean $x_1, x_2 \in E$

Sea $\varepsilon > 0$, por la definición de *ínfimo* existen $g_1, g_2 \in G$ tales que:

$$\|x_1 + g_1\|_E < \|x_1 + G\| + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\|x_2 + g_2\|_E < \|x_2 + G\| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Calculemos la norma de la clase de $x_1 + x_2$:

$$\begin{aligned} \|x_1 + x_2 + G\| &\leq \|x_1 + x_2 + g_1 + g_2\|_E \\ &\leq \|x_1 + g_1\|_E + \|x_2 + g_2\|_E \\ &\leq \|x_1 + G\| + \|x_2 + G\| + \varepsilon \end{aligned}$$

por lo que $\|x + G\|$ resulta ser una norma.

Una vez definida la norma canónica en β/β_α podemos transferirla a B mediante el isomorfismo dado. Esta nueva norma definida en B es la *norma de interpolación* $\| \ \|_\alpha$.

1.3 Interpolación de Operadores Lineales

La interpolación de normas de operadores lineales es de gran utilidad en el proceso de extensión de éstos. En esta sección estudiaremos esta interpolación para el caso en que las normas sean consistentes, como se observa en el siguiente teorema.

Teorema 5 *Sea B (respectivamente B') un espacio vectorial con $\| \; \|_0$ y $\| \; \|_1$ normas consistentes. Supongamos que $\| \; \|_\alpha$ es la norma de interpolación (respectivamente $\| \; \|'_\alpha$), para $0 < \alpha < 1$, y que $S : B \to B'$ lineal y acotada en el siguiente sentido:*

$$(B, \| \; \|_j) \xrightarrow{S} (B', \| \; \|'_j), \qquad j = 0, 1.$$

Entonces S es acotado en el siguiente sentido:

$$(B, \| \; \|_\alpha) \xrightarrow{S} (B', \| \; \|'_\alpha)$$

además

$$\| S \|_\alpha \leq \| S \|_0^{1-\alpha} \| S \|_1^\alpha .$$

Prueba. Sea $f \in B$ tal que $\| f \|_\alpha = 1$, para probar la continuidad con la norma de interpolación hay que exhibir k con la propiedad $\| S(f) \|'_\alpha \leq k$.

Haremos dos observaciones que utilizaremos más adelante.

Observación 1 *Dado $\varepsilon > 0$, existe $F \in \beta$ tal que $F(\alpha) = f$ y $\| F \| < 1 + \varepsilon$.*

Como $\beta/\beta_\alpha \simeq B$ existe $F_0 \in \beta$ tal que $\overline{T}(F_0 + \beta_\alpha) = f$. Tomando la norma de la clase como se definió:

$$\|F_0 + \beta_\alpha\|_\alpha = \inf \{\|F_0 + g\| \, ; g \in \beta_\alpha\} = 1.$$

Por tanto dada $\varepsilon > 0$;existe $g \in \beta_\alpha$ tal que $\|F_0 + g\| < 1 + \varepsilon$.

Tomemos $F = F_0 + g$. Puesto que F_0 y $g \in \beta$ resulta que $F \in \beta$. Además

$$(F_0 + g)(\alpha) = F_0(\alpha) + g(\alpha) = \overline{T}(F_0 + \beta_\alpha) + g(\alpha) = f + 0 = f,$$

con lo que se demuestra la observación 1.

Observación 2 *El mapeo S puede ser extendido como $S : \beta \to \beta'$.*

Sea $F \in \beta$, tomemos la función SF definida como $SF(z) = S(F(z))$, esta nueva función tiene su dominio en Ω y los elementos de la imagen están en B'. Para ver que $SF \in \beta'$ hay que ver que es holomorfa y acotada. Puesto que F es una función acotada en B y S es una transformación lineal continua, la composición es acotada con respecto a ambas normas, de hecho:

Si $F(z) \in B \Longrightarrow \| F(z)\|_0 \leq k$, aplicando S tenemos:

$$\| S(F(z))\|_0' \leq M \| F(z)\|_0 \leq kM$$

y de la misma forma para $\| \; \|_1$.

Para ver que SF es holomorfa aplicamos μ, funcional lineal continua con respecto a $\| \; \|_0'$ y $\| \; \|_1'$, a SF de modo que:

$$\langle SF(z), \mu\rangle = \mu(SF(z)) = \mu(S(F(z)) = \mu \circ S(F(z)),$$

pero $F(z) \in \beta$ y $\mu \circ S$ es funcional lineal continua con respecto a $\| \; \|_0$ y $\| \; \|_1$, por lo que $\mu \circ S(F(z))$ es holomorfa, con lo que se demuestra la observación 2.

Nuestro objetivo es acotar a $\| S(f)\|_\alpha'$ y para ésto demostraremos que existe k tal que

$$\| S(f)\|_\alpha' \leq (1+\varepsilon)k \quad \text{para toda } \varepsilon > 0.$$

Sea $\varepsilon > 0$, de la observación 1, existe $F(\alpha) = f$ con $\| F \| < 1 + \varepsilon$.

Por otro lado para calcular la norma de $S(f)$ necesitamos una función en β' tal que al evaluarla en α obtengamos $S(f)$. Proponemos dicha función como SF , ya que

$$SF(\alpha) = S(F(\alpha)) = S(f)$$

y de la observación 2 tenemos que $SF \in \beta'$. Haciendo cálculos:

$$\begin{aligned}
\| S(f)\|_\alpha' &\leq \| SF \|' = \sup_y \left\{\| SF(iy)\|_0', \| SF(1+iy)\|_1'\right\} \\
&\leq \sup_y \{\| S \|_0 \| F(iy)\|_0, \| S \|_1 \| F(1+iy)\|_1\} \\
&\leq \max \{\| S \|_0, \| S \|_1\} \sup_y \{\| F(iy)\|_0, \| F(1+iy)\|_0\} \\
&\leq (1+\varepsilon) \max \{\| S \|_0, \| S \|_1\}.
\end{aligned}$$

Por lo anterior la primera afirmación del teorema queda demostrada. Sin embargo podemos obtener una mejor aproximación. Consideremos la función $e^{a(z-\alpha)}F(z) \in \beta$, donde $e^a = \| S \|_0 \| S \|_1^{-1}$. Esta función tiene la propiedad de que al evaluarla en α se obtiene f, es decir,

$$e^{a(z-\alpha)}F(\alpha) = f.$$

Además que por la observación 2 tenemos

$$\begin{aligned}
\| S(f) \|'_\alpha &\leq \left\| S(e^{a(z-\alpha)}F(z)) \right\|' \\
&= \sup_t \left\{ \left\| S(e^{a(it-\alpha)}F(it)) \right\|'_0, \left\| S(e^{a(1+it-\alpha)}F(1+it)) \right\|'_1 \right\} \\
&= \sup_t \left\{ \left\| e^{a(it-\alpha)}S(F(it)) \right\|'_0, \left\| e^{a(1+it-\alpha)}S(F(1+it)) \right\|'_1 \right\} \\
&\leq \sup_t \left\{ e^{a\alpha} \| S \|_0 \|F(it)\|_0 \ , \ e^{a(1+\alpha)} \| S \|_1 \|F(1+it)\|_1 \right\} \\
&\leq \max \left\{ e^{a\alpha} \| S \|_0 \ , \ e^{a(1-\alpha)} \| S \|_1 \right\} \| F \| \\
&\leq \max \left\{ \| S \|_0^{-\alpha} \| S \|_1^{\alpha} \ \| S \|_0 \ , \ \| S \|_0^{1-\alpha} \| S \|_1^{-(1-\alpha)} \ \| S \|_1 \right\} (1+\varepsilon) \\
&\leq \max \left\{ \| S \|_0^{1-\alpha} \| S \|_1^{\alpha} \ , \ \| S \|_0^{1-\alpha} \| S \|_1^{\alpha} \right\} (1+\varepsilon).
\end{aligned}$$

Hemos visto que

si $\| f \|_\alpha = 1$, entonces $\| S(f) \|'_\alpha \leq \| S \|_0^{1-\alpha} \| S \|_1^{\alpha} (1+\varepsilon)$, $\forall \varepsilon > 0$. Pasando al límite cuando $\varepsilon \to 0$, obtenemos

$$\| S \|_\alpha \leq \| S \|_0^{1-\alpha} \| S \|_1^{\alpha}. \qquad \blacksquare$$

La norma de interpolación se puede, también, calcular para el espacio de funciones $L_{p_0} \cap L_{p_1}$ puesto que $\| \ \|_{L_{p_0}}$ y $\| \ \|_{L_{p_1}}$ son consistentes (proposición 4). Veremos que dicha norma coincide con la norma L_{p_α}, donde p_α quedará definida en función de p_0 y p_1 , de forma tal que los resultados que se obtengan para la norma de interpolación $\| \ \|_\alpha$ en $L_{p_0} \cap L_{p_1}$ se podrán manejar con su correspondiente $\| \ \|_{L_{p_\alpha}}$. Antes demostraremos dos lemas que nos servirán el teorema 8, que es el que nos da la relación ya mencionada.

Lema 6 *Sea B espacio vectorial normado con $\| \ \|_0$ y $\| \ \|_1$. Si $\| \ \|_\alpha$ es la norma de interpolación y $f \in B$, entonces*

$$\|f\|_\alpha \leq \max\{\|f\|_0, \|f\|_1\}.$$

Prueba. Sea $f \in B$. Definimos $F : \Omega \to B$ como la constante f, es decir

$$F(z) = f,$$

que claramente es holomorfa y acotada con respecto a $\| \ \|_0$ y $\| \ \|_1$. Por lo tanto $F \in \beta$. En particular

$$F(\alpha) = f,$$

por tanto $F \in \beta_\alpha$ y obtenemos

$$\begin{aligned} \|f\|_\alpha &\leq \|F\| = \sup\{\|F(iy)\|_0, \|F(1+iy)\|_1\} \\ &= \max\{\|f\|_0, \|f\|_1\}. \end{aligned}$$

Con lo que se demuestra el lema.

Lema 7 *Sea $(X, d\mu)$ un espacio de medida, $B = L_{p_0} \cap L_{p_1}$ con $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$. Sea $f \in B$. Si definimos*

$$A_n = \left\{x \mid \frac{1}{n} < |f(x)| \leq n\right\},$$

entonces

$$\chi_{A_n} f \longrightarrow f \qquad \text{con la norma } \| \ \|_\alpha.$$

Sean $f \in B$ y $A_n = \left\{x \mid \frac{1}{n} < |f(x)| \leq n\right\}$. Lo que hay que mostrar es que:

Para toda $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que para toda $n \geq n_0$, sucede que

$$\|f - f_n\|_\alpha < \varepsilon,$$

donde $f_n = \chi_{A_n} f$.

Primero mostraremos que $\|f - f_n\|_{L_{p_0}}^{p_0} = \|f\|_{L_{p_0}}^{p_0} - \|f_n\|_{L_{p_0}}^{p_0}$. Calculémoslo.

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_{p_0}}^{p_0} &= \int_{A_n} |f|^{p_0} \, d\mu + \int_{X \setminus A_n} |f|^{p_0} \, d\mu \\ &= \int |f_n|^{p_0} \, d\mu + \int |f - f_n|^{p_0} \, d\mu \\ &= \|f_n\|_{L_{p_0}}^{p_0} + \|f - f_n\|_{L_{p_0}}^{p_0}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|f - f_n\|_{L_{p_0}}^{p_0} = \|f\|_{L_{p_0}}^{p_0} - \|f_n\|_{L_{p_0}}^{p_0}. \tag{1.5}$$

Por otro lado tenemos que la sucesión de funciones $|f_n|^{p_0}$ es una sucesión de funciones crecientes no negativas. Utilizando el teorema de convergencia monotona tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n|^{p_0}\, dx = \int |f|^{p_0}\, d\mu.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como $f \in L_{p_0}$ y por lo anterior tenemos que existe n_1, tal que para toda $n \geq n_1$

$$\|f\|_{L_{p_0}}^{p_0} - \|f_n\|_{L_{p_0}}^{p_0} < \varepsilon.$$

Utilizando (1.5) obtenemos

$$\|f - f_n\|_{L_{p_0}}^{p_0} < \varepsilon.$$

En el caso en que $p_1 < \infty$ podemos seguir el procedimientoanterior y obtenemos que:

Si $\varepsilon > 0$, entonces existe n_2 tal que para toda $n \geq n_2$, se tiene

$$\|f - f_n\|_{L_{p_1}}^{p_1} < \varepsilon.$$

Ahora usaremos el lema 6 para probar la convergencia en el caso en que $p_1 < \infty$.

Sea $\varepsilon > 0$. Tomamos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Por el lema 6 obtenemos

$$\|f - f_n\|_a \leq \max\left\{\|f - f_n\|_{L_{p_0}}, \|f - f_n\|_{L_{p_1}}\right\} < 2\varepsilon,$$

Por tanto la convergencia sí se da.

Para el caso $p_1 = \infty$, tambien hay que mostrar que:

Si $\varepsilon > 0$, entonces existe n_2 tal que para toda $n \geq n_2$, se tiene

$$\|f - f_n\|_{L_\infty} < \varepsilon. \tag{1.6}$$

Si $\varepsilon > 0$. Por un lado como $f \in L_\infty$, entonces existe M tal que $|f(x)| \leq M$, para todo $x \in X$. Por lo tanto para $n > M$, se tiene que

$$\begin{aligned} A_n &= \left\{x \mid \tfrac{1}{n} < |f(x)| \leq n\right\} \\ &= \left\{x \mid \tfrac{1}{n} < |f(x)|\right\}. \end{aligned}$$

Por otro lado, sabemos que existe n' tal que para toda $n > n'$ se tiene que

$$\frac{1}{n} < \varepsilon. \tag{1.7}$$

Sea $n_2 \in N$ tal que $n_2 > M$ y $n_2 > n'$. Si $n > n_2$, entonces

$$A_n = \left\{x \mid \frac{1}{n} < |f(x)|\right\},$$

por tanto

$$X \backslash A_n = \left\{x \mid |f(x)| \leq \frac{1}{n}\right\},$$

de donde

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{n}.$$

Pero de (1.7) obtenemos

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon,$$

con lo que se demuestra (1.6).

Para mostrar la convergencia de $f_n \to f$ con la norma de interpolación para el caso $p_1 = \infty$, nuevamente utilizamos el lema 6.

Sea $\varepsilon > 0$. Tomamos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Por el lema 6 obtenemos

$$\|f - f_n\|_a \leq \max\left\{\|f - f_n\|_{L_{p_0}}, \|f - f_n\|_{L_\infty}\right\} < 2\varepsilon,$$

Por tanto la convergencia sí se da.

Con lo anterior queda demostrado el lema. ■

Observemos que el lema 7 nos dice que las funciones en B tales que están acotadas y que tienen soporte de medida finita es un conjunto denso en B con la norma de interpolación. Es decir, Si $C = \{f \in B \ \ f \in L_\infty$ con soporte de medida finita$\}$, entonces C es denso en B con $\| \ \|_a$.

Para ver lo anterior solo falta mostrar que las f_n definidas en el lema tienen soporte de medida finita. Supongamos que $\mu(A_n) = \infty$, por la forma en que f_n fue definida, tenemos que si x no está en el soporte de f_n, entonces

$$|f_n(x)| > \frac{1}{n}.$$

Por lo tanto, si calculamos la norma L_{p_0} obtenemos

$$\begin{aligned} \int |f_n(x)|^{p_0}\, dx &= \int_{A_n} |f_n(x)|^{p_0}\, dx \\ &> \int_{A_n} \left(\tfrac{1}{n}\right)^{p_0} dx = \infty, \end{aligned}$$

lo que es una contradicción, pues $f_n \in L_{p_0}$.

Ahora mostraremos el teorema que nos relaciona las normas L_p con la norma de interpolación.

Teorema 8 *Sea (X, dx) un espacio de medida, $B = L_{p_0} \cap L_{p_1}$ con $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ y normas $\| \ \|_{L_{p_0}}$ y $\| \ \|_{L_{p_1}}$. Sea $\| \ \|_\alpha$ la norma de interpolación. Entonces*

$$\| \ \|_\alpha = \| \ \|_{L_{p_\alpha}}$$

donde

$$p_\alpha = \begin{cases} \frac{p_0 p_1}{p_0\alpha + p_1(1-\alpha)} & si \ p_1 < \infty \\ \\ \frac{p_0}{1-\alpha} & si \ p_1 = \infty. \end{cases}$$

Durante la demostración utilizaremos $\| \ \|_{p_\alpha}$ como $\| \ \|_{L_{p_\alpha}}$ para facilitar los cálculos.

Prueba. Sea $f \in B$ tal que $\| f \|_{L_{p_\alpha}} \leq 1$ hay que demostrar que $\| f \|_\alpha \leq 1$.

Mostraremos que para toda $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$\| f \|_\alpha < 1 + \varepsilon.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Por el lema 7 sabemos que existe n tal que

$$\|f - f_n\|_\alpha < \varepsilon,$$

donde f_n tiene soporte de medida finita.

Si $f_n = | f_n | e^{i\varphi}$ podemos definir $F(z) = | f_n |^{a(z-\alpha)+1} e^{i\varphi}$ donde:

$$a = \begin{cases} \frac{p_0 - p_1}{p_0\alpha + p_1(1-\alpha)} & \text{si } p_1 < \infty \\ \\ \frac{-1}{1-\alpha} & \text{si } p_1 = \infty. \end{cases}$$

Hay que mostrar que la función F es una función cuya imagen esta contenida en B, holomorfa y acotada con respecto a $\| \ \|_{L_{p_0}}$ y $\| \ \|_{L_{p_1}}$, es decir $F \in \mathcal{F}$.

F satisface las siguientes propiedades:

i)Existe A de medida finita y tal que soporte de $F(z)$ está contenido en A, para toda $z \in \Omega$.

ii)Existe C tal que $|F(z)| \leq C$, independientemente de x y para toda $z \in \Omega$.

Para ver que se cumple i) simplemente observamos que, por la forma en que $F(z)$ fué definida, se tiene que el soporte de $F(z)$ está contenido en el soporte de f_n, para toda $z \in \Omega$.

Probaremos ii)

$$\begin{aligned} |F(z)| &= \left|| f_n |^{a(z-\alpha)+1} e^{i\varphi}\right| \\ &\leq \left|e^{(a(z-\alpha)+1)\log|f_n|}\right| \\ &\leq \left|e^{(a(\operatorname{Re} z-\alpha)+1)\log|f_n|}\right|, \end{aligned}$$

pero $\log | f_n | \leq C'$ y $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$. Por lo tanto $|F(z)| \leq C$, para toda $z \in \Omega$.

Utilizando i) y ii) se tiene que existe M tal que $\|F(z)\|_{L_p} \leq M$ para toda $1 \leq p < \infty$ y para toda $z \in \Omega$. Por lo anterior tenemos que $F \in \beta$.

Otra propiedad de F es que

$$F(\alpha) = | f_n |^{a(0)+1} e^{i\varphi} = f_n,$$

por lo que $\| f_n\|_\alpha \leq \| F \|$.

Para calcular $\| F \|$ veremos como están acotados los valores de F en la frontera de la banda Ω. Veamos primero el caso $p_1 < \infty$.

a) $F(iy)$

$$| F(iy) | = \left|{f_n}^{aiy} {f_n}^{1-a\alpha} e^{i\varphi}\right|,$$

pero

$$|| f_n |^{aiy}| = | e^{aiy \log | f_n|} | = 1,$$

por lo que

$$| F(iy) | = | f_n |^{1-a\alpha}.$$

Además, como $p_1 < \infty$,

$$\begin{aligned} 1 - a\alpha &= \frac{p_0\alpha + p_1(1-\alpha) - \alpha(p_0 - p_1)}{p_0\,\alpha + p_1(1-\alpha)} \\ &= \frac{p_1}{p_0\,\alpha + p_1(1-\alpha)} = \frac{p_a}{p_0}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$| F(iy) | = | f_n |^{\frac{p_a}{p_0}}$$

y como $| f_n | \leq | f |$, entonces

$$\|F(iy)\|_{p_0} = \left(\int | f_n |^{p_\alpha} \, dx\right)^{\frac{1}{p_0}} \leq \left(\int | f |^{p_\alpha} \, dx\right)^{\frac{1}{p_0}} \leq 1.$$

b) $F(1+iy)$

$$| F(1+iy) | = \left| f_n^{aiy} f_n^{1+a(1-\alpha)} e^{i\varphi} \right|$$

$$| F(1+iy) | = |f_n|^{1+a(1-\alpha)},$$

pero, como $p_1 < \infty$,

$$\begin{aligned} 1 + a(1-\alpha) &= 1 + \frac{p_0 - p_1}{p_0\,\alpha + \,p_1\,(1-\alpha)}(1-\alpha) \\ &= \frac{p_0\alpha + \,p_1\,(1-\alpha) + p_0 - p_1 - \alpha(p_0 - p_1)}{p_0\,\alpha + \,p_1\,(1-\alpha)} \\ &= \frac{p_0}{p_0\,\alpha + \,p_1\,(1-\alpha)} = \frac{p_\alpha}{p_1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$| F(1+iy) | = |f_n|^{\frac{p_\alpha}{p_1}}$$

y como $| f_n | \leq | f |$, entonces

$$\|F(1+iy)\|_{p_1} = \left(\int | f_n |^{p_\alpha} \, dx\right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \left(\int | f |^{p_\alpha} \, dx\right)^{\frac{1}{p_1}} \leq 1.$$

Por lo tanto

$$\|F\| \leq 1,$$

de donde

$$\|f_n\|_\alpha \leq 1.$$

Para el caso $p_1 = \infty$ se calculará directamente, con p_α y a como se definieron al principio del teorema y de la demostración, respectivamente, es decir

$$a = \frac{-1}{1-\alpha} \qquad\qquad p_\alpha = \frac{p_0}{1-\alpha}.$$

Nuevamente acotaremos el valor de F en la frontera de la banda Ω.

a) $F(iy)$

$$| F(iy) | = | f_n |^{1-a\alpha} = | f_n |^{1+\frac{\alpha}{1-\alpha}} = | f_n |^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

por lo tanto

$$\|F(iy)\|_{p_0} = \left(\int | f_n |^{p_\alpha} dx\right)^{\frac{1}{p_0}} \leq 1.$$

b)$F(1+iy)$

$$| F(1+iy) | = | f_n |^{1+\alpha(1-\alpha)} = | f_n |^{1-1} = 1,$$

por lo tanto

$$\|F(1+iy)\|_{\infty} = 1,$$

Utilizando la cotas obtenidas podemos ver que la norma de F es acotada por 1, y dada la forma en que ésta se definió, tenemos

$$\| F \| = \sup_y \left\{ \|F(iy)\|_{p_0}, \|F(1+iy)\|_{p_1} \right\} \leq 1,$$

de donde

$$\|f_n\|_\alpha \leq 1.$$

En conclusión, tenemos que para toda $\varepsilon > 0$ existe f_n tal que

$$\|f - f_n\|_\alpha < \varepsilon \qquad \text{y} \qquad \|f_n\|_\alpha \leq 1.$$

Utilizando esto y la desigualdad del triángulo, obtenemos

$$\|f\|_\alpha \leq \|f - f_n\|_\alpha + \|f_n\|_\alpha \leq 1 + \varepsilon.$$

Concluimos que

$$\|f\|_\alpha \leq 1, \qquad si \qquad \|f\|_{L_{p_\alpha}} \leq 1.$$

De esta última afirmación se desprende que

$$\| \; \|_\alpha \leq \| \; \|_{L_{p_\alpha}}.$$

Nótese que hemos demostrado que dada f_n acotada y con soporte finito tal que $\| f_n \|_{p_\alpha} \leq 1$ existe $F \in \beta$ con las propiedades de que $F(\alpha) = f_n$ y $\| F \| \leq 1$.

Para probar la desigualdad inversa usaremos los exponentes conjugados de p_0 y p_1, que denotaremos por q_0 y q_1 respectivamente. Notemos que el exponente conjugado de p_α coincide con:

$$q_\alpha = \begin{cases} \dfrac{q_0 q_1}{q_0\alpha + q_1(1-\alpha)} & \text{si} \quad q_0 < \infty \\[2ex] \dfrac{q_1}{\alpha} & \text{si} \quad q_0 = \infty. \end{cases}$$

Probaremos lo anterior para $q_0 < \infty$.

$$q_\alpha = \frac{p_\alpha}{p_\alpha - 1} = \frac{\frac{p_0\, p_1}{p_0\alpha + p_1(1-\alpha)}}{\frac{p_0\, p_1}{p_0\alpha + p_1(1-\alpha)} - 1}$$

$$= \frac{p_0 p_1}{p_0 p_1 - (p_0\alpha + p_1(1-\alpha))}. \tag{1.8}$$

Reescribiendo (1.8) en términos de q_0 y q_1, obtenemos

$$q_\alpha = \frac{\frac{q_0\, q_1}{(q_0-1)(q_1-1)}}{\frac{q_0\, q_1}{(q_0-1)(q_1-1)} - \frac{q_0}{(q_0-1)}\alpha - \frac{q_1}{(q_1-1)}(1-\alpha)}$$

$$= \frac{q_0 q_1}{q_0 q_1 - q_0(q_1-1)\alpha - q_1(q_0-1)(1-\alpha)}$$

$$= \frac{q_0 q_1}{q_0\alpha + \ q_1 - \alpha q_1}.$$

Falta demostrar el caso de $q_0 = \infty$, este caso se da cuando $p_0 = 1$. Sustituyendo p_0 en la expresión (1.8) tenemos

$$q_\alpha = \frac{p_1}{p_1 - (\alpha + p_1(1-\alpha))} = \frac{p_1}{-(\alpha - \alpha p_1)}$$

$$q_\alpha = \frac{p_1}{\alpha(p_1 - 1)} = \frac{q_1}{\alpha}.$$

Ahora tomemos $B' = L_{q_0} \cap L_{q_1}$ y denotemos, como antes, β' al espacio de funciones holomorfas acotadas *B' − valuadas.*

Sea $f \in B$ tal que $\| f \|_{L_{p_\alpha}} > 1$. Lo que hay que mostrar es que $\| f \|_\alpha \geq 1$.

Como $B' = L_{q_0} \cap L_{q_1}$ se tiene que $B' \subset L_{q_\alpha}$ si $q_0 \leq q_\alpha \leq q_1$. Demostraremos que q_α satisface estas desigualdades. Ya que

$$\frac{1}{q_\alpha} = \frac{q_0\alpha + \ q_1(1-\alpha)}{q_0\, q_1} = \frac{\alpha}{q_1} + \frac{1-\alpha}{q_0} \qquad \text{con } 0 < \alpha < 1,$$

se tiene que

$$q_0 \leq q_\alpha \leq q_1.$$

Por la isometría que hay entre L_{q_α} y $L^*_{q_\alpha}$ se tiene que

$$\| f \|_{L_{p_\alpha}} = \| f \|_{L^*_{q_\alpha}} = \sup_{\|k\|_{L_{q_\alpha}} \leq 1} \int fk > 1.$$

En particular como $B' \subset L_{q_\alpha}$ se tiene que existe $k \in B'$ tal que

$$\| k \|_{L_{q_\alpha}} \leq 1 \qquad y \qquad \int fkdx > 1.$$

Utilizando el hecho de que las funciones acotadas con soporte de medida finita son densas en los espacios L_p, para toda $1 \leq p < \infty$, se puede aproximar k por $g \in B'$ acotada y con soporte de medida finita, tal que

$$\| g \|_{L_{q_\alpha}} \leq 1 \tag{1.9}$$

y

$$\int fgdx > 1. \tag{1.10}$$

Como g cumple 1.9 y es acotada con soporte finito, podemos proceder como en la primera parte de la demostración del teorema. Es decir, sabemos que existe $G \in \beta'$ tal que $G(\alpha) = g \quad$ y $\quad \| G \|' \leq 1$.

Tomemos $F \in \beta$ tal que $F(\alpha) = f$ y definamos una nueva función:

$$h(z) = \int F(z)G(z)\, dx$$

Afirmamos que esta función es holomorfa y acotada en Ω. Demostremos, en primer lugar, que es acotada.

Sea $z \in \Omega$

$$|h(z)| \leq \int |F(z)G(z)|\, dx$$

como $F(z) \in L_{p_\alpha}$ y $G(z) \in L_{q_\alpha}$, por la desigualdad de Hölder se tiene que

$$\int |F(z)G(z)|\, dx \quad \leq \quad \|F(z)\|_{p_\alpha} \|G(z)\|_{q_\alpha}$$

$$\sup_{\omega \in \Omega} \|F(\omega)\|_{p_\alpha} \|G(\omega)\|_{q_\alpha} < \infty,$$

por lo tanto $h(z)$ es acotada.

Mostraremos ahora que $h(z)$ es una función holomorfa. Observemos que dada la definición (1.2) de funciones holomorfas, podemos utilizar el teorema de Morera que nos dice que una función $F(z)$ es holomorfa si y sólo si:

$$\int_\zeta F(z) = 0, \qquad \text{para toda } \zeta \text{ curva cerrada.}$$

En particular como $B' \subset L_{q_\alpha}$ se tiene que existe $k \in B'$ tal que

$$\| k \|_{L_{q_\alpha}} \leq 1 \qquad y \qquad \int fk dx > 1.$$

Utilizando el hecho de que las funciones acotadas con soporte de medida finita son densas en los espacios L_p, para toda $1 \leq p < \infty$, se puede aproximar k por $g \in B'$ acotada y con soporte de medida finita, tal que

$$\| g \|_{L_{q_\alpha}} \leq 1 \tag{1.9}$$

y

$$\int fg dx > 1. \tag{1.10}$$

Como g cumple 1.9 y es acotada con soporte finito, podemos proceder como en la primera parte de la demostración del teorema. Es decir, sabemos que existe $G \in \beta'$ tal que $G(\alpha) = g$ y $\| G \|' \leq 1$.

Tomemos $F \in \beta$ tal que $F(\alpha) = f$ y definamos una nueva función:

$$h(z) = \int F(z)G(z)\, dx$$

Afirmamos que esta función es holomorfa y acotada en Ω. Demostremos, en primer lugar, que es acotada.

Sea $z \in \Omega$

$$|h(z)| \leq \int |F(z)G(z)|\, dx$$

como $F(z) \in L_{p_\alpha}$ y $G(z) \in L_{q_\alpha}$, por la desigualdad de Hölder se tiene que

$$\begin{aligned} \int |F(z)G(z)|\, dx &\leq \|F(z)\|_{p_\alpha} \|G(z)\|_{q_\alpha} \\ & \sup_{\omega \in \Omega} \|F(\omega)\|_{p_\alpha} \|G(\omega)\|_{q_\alpha} < \infty, \end{aligned}$$

por lo tanto $h(z)$ es acotada.

Mostraremos ahora que $h(z)$ es una función holomorfa. Observemos que dada la definición (1.2) de funciones holomorfas, podemos utilizar el teorema de Morera que nos dice que una función $F(z)$ es holomorfa si y sólo si:

$$\int_\zeta F(z) = 0, \qquad \text{para toda } \zeta \text{ curva cerrada.}$$

Por otro lado tenemos que

$$h(z)=\int_X F(z,x)G(z,x)\,dx,$$

y tomando ζ una curva cerrada obtenemos

$$\begin{aligned}\int_\zeta h(z)dz &= \int_\zeta \int_X F(z,x)G(z,x)\,dxdz \\ &= \int_X \int_\zeta F(z,x)G(z,x)dz\,dx.\end{aligned}$$

Pero G y F están en β' , por lo tanto

$$\int_\zeta F(z,x)G(z,x)dz=0,$$

con lo que se demuestra que $h(z)$ es holomorfa.

Una vez que hemos demostrado que $h(z)$ es holomorfa y acotada en Ω , podemos utilizar el método de Phragmèn-Lindelöf, resultando que $h(z)$ alcanza su máximo en la frontera de Ω. Por lo que:

$$|h(z)|\leq \sup\{|h(iy)|,|h(1+iy)|\} \qquad \forall z\in\Omega$$

Por otro lado si evaluamos la función $h(z)$ en α obtenemos que $h(\alpha)=\int fg\,dx$, pero de 1.10 tenemos que:

$$|h(\alpha)|>1$$

y por tanto

$$1<\sup\{|h(iy)|,|h(1+iy)|\}. \tag{1.11}$$

Calculemos las cotas para $|h(iy)|$ y $|h(1+iy)|$

$$\begin{aligned}|h(iy)| &= |\textstyle\int F(iy)G(iy)\,dx| \\ &\leq \textstyle\int |F(iy)||G(iy)|\,dx \\ &\leq \parallel F(iy)\parallel_{p_0}\parallel G(iy)\parallel_{q_0},\end{aligned}$$

y para la segunda cota

$$\begin{aligned}|h(1+iy)| &= |\textstyle\int F(1+iy)G(1+iy)\,dx| \\ &\leq \textstyle\int |F(1+iy)|\,|G(1+iy)|\,dx \\ &\leq \parallel F(1+iy)\parallel_{p_1}\parallel G(1+iy)\parallel_{q_1},\end{aligned}$$

sustituyendo las cotas anteriores en 1.11, tenemos

$$\begin{aligned}
1 &< \sup\left\{\| F(iy) \|_{p_0} \| G(iy) \|_{q_0}, \| F(1+iy) \|_{p_1} \| G(1+iy) \|_{q_1}\right\} \\
&\leq \max\left\{\sup \| F(iy) \|_{p_0} \| G(iy) \|_{q_0}, \sup \| F(1+iy) \|_{p_1} \| G(1+iy) \|_{q_1}\right\} \\
&\leq \max\left\{\sup \| F(iy) \|_{p_0} \sup \| G(iy) \|_{q_0}, \sup \| F(1+iy) \|_{p_1} \sup \| G(1+iy) \|_{q_1}\right\} \\
&\leq \left(\max\left\{\sup \| F(iy) \|_{p_0}, \sup \| F(1+iy) \|_{p_1}\right\}\right)\left(\max\left\{\sup \| G(iy) \|_{q_0}, \sup \| G(1+iy) \|_{q_1}\right\}\right) \\
&\leq \| F \| \ \| G \|'.
\end{aligned}$$

Con esta última desigualdad y dado que $\| G \|' \leq 1$ obtenemos

$$1 < \| F \| \ \| G \|' \leq \| F \|.$$

Recordemos que se tomó cualquier F que cumpliese con $F \in \beta$ y $F(\alpha) = f$, además hemos llegado a que su norma es siempre mayor que 1 , por tanto la norma de interpolación cumple que:

$$\| f \|_\alpha \geq 1, \qquad si \quad \| f \|_{L_{p_\alpha}} > 1$$

y con esto se demuestra que

$$\| \ \|_{L_{p_\alpha}} \leq \| \ \|_\alpha ,$$

que prueba la igualdad entre las normas. ■

Ahora estamos en condiciones de probar el teorema que es la base de este capítulo:

Teorema 9 (RIESZ-THORIN) *Sean $(\mu, d\mu)$ y (v, dv) dos espacios de medida. Sea S una transformación lineal continua en el sentido*

$$S : L_{p_0}(d\mu) \longrightarrow L_{p'_0}(d\nu)$$

y

$$S : L_{p_1}(d\mu) \longrightarrow L_{p'_1}(d\nu)$$

entonces S es continua en el sentido

$$S : L_{p_\alpha}(d\mu) \longrightarrow L_{p'_\alpha}(d\nu)$$

con norma

$$\| S \|_\alpha \leq \| S \|_0^{1-\alpha} \| S \|_1^\alpha$$

donde

$$\frac{1}{p_\alpha} = \frac{\alpha}{p_1} + \frac{1-\alpha}{p_0} \qquad ; \qquad 0 < \alpha < 1$$

de igual forma para p'_α.

Prueba. Sea $B = L_{p_0} \cap L_{p_1}(d\mu)$ y $B' = L_{p'_0} \cap L_{p'_1}(d\nu)$.

Por la proposición 4 $\| \; \|_{L_{p_0}}$ y $\| \; \|_{L_{p_1}}$ son normas consistentes, análogamente $\| \; \|_{L_{p'_0}}$ y $\| \; \|_{L_{p'_1}}$ son consistentes, como el operador S es continuo en los dos espacios podemos aplicar el teorema 5, y obtenemos que

$$S : (B, L_{p_\alpha}(d\mu)) \longrightarrow (B', L_{p'_\alpha}(d\nu))$$

continuamente, con norma

$$\| S \|_\alpha \leq \| S \|_0^{1-\alpha} \| S \|_1^\alpha .$$

donde $\| S \|_\alpha$ es la norma de interpolación, pero del teorema 8 dicha norma equivale a

$$\| \; \|_\alpha = \| \; \|_{L_{p_\alpha}} \qquad \text{con} \quad p_\alpha = \frac{p_0 p_1}{p_0 \alpha + p_1(1-\alpha)}$$

con lo que se demuestra el teorema para $f \in (L_{p_0} \cap L_{p_1}) \subset L_{p_\alpha}$. Extenderemos S a L_{p_α}, utilizando el hecho de que $L_{p_0} \cap L_{p_1}$ es denso en L_{p_α}.

Sea $g \in (L_{p_\alpha} \setminus B)$ existe $g_n \in B$ tal que

$$g_n \longrightarrow g \quad , \quad \text{en la norma } \| \ \|_{L_{p_\alpha}}$$

definimos $S(g)$ de la siguiente manera:

$$S(g) = \lim_{n \to \infty} S(g_n).$$

Para ver que este límite existe, basta probar que $S(g_n)$ forma una sucesión de Cauchy, lo cual es cierto pues las g_n forman una sucesión de Cauchy, y

$$\|S(g_n) - S(g_m)\| = \|S(g_n - g_m)\| \leq \|S\|_\alpha \|g_n - g_m\|_{L_{p_\alpha}}$$

Por otro lado el límite resultante es independiente de la sucesión que se tomó, pues si tomamos otra sucesión $f_n \in B$ que converge a g, entonces

$$\text{Si } \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \text{ tal que } \quad \forall n > n_0 \quad \|g_n - f_n\|_{L_{P_\alpha}} \leq \epsilon$$

de donde

$$\|S(g_n) - S(f_n)\|_{p_\alpha} \leq \epsilon \quad ; \forall n > n_0$$

y el límite es independiente de la sucesión.

Por la forma en que se extendió y sabiendo que la función norma es continua, tenemos que S es lineal y acotada, con lo que queda demostrado el teorema. ■

Como una aplicación del teorema de Riesz-Thorin demostraremos la desigualdad de Hausdorff-Young, que se expresa en el siguiente teorema:

Teorema 10 *Si* $1 \leq p \leq 2$ *entonces*

$$\| \Im f \|_{L_q} \leq \| f \|_{L_p}$$

donde $\Im f$ *es la transformada de Fourier de* f *y* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Prueba. Consideremos $dx = \frac{1}{2\pi} d\mu$, donde $d\mu$ es la medida de Lebesgue, y $\Im f$ la transformada de Fourier definida por

$$(\Im f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int f(x) e^{(-i\langle x,\xi \rangle)} dx$$

donde $\langle x,\xi\rangle = x_1\xi_1 + ... + x_n\xi_n$.

Si $f \in L_1$ podemos acotar $|\Im f|$ de la siguiente manera:

$$|\Im f| = \left|\int f(x)e^{(-i\langle x,\xi\rangle)}dx\right| \leq \int |f(x)e^{(-i\langle x,\xi\rangle)}|\,dx \leq \| f \|_{L_1}$$

por lo que

$$\Im : L_1 \to L_\infty$$

con norma

$$\| \Im \|_1 \leq 1.$$

Si $f \in L_2$, podemos aplicar el teorema de Plancherel que nos dice que la transformada de Fourier de la función resulta una isometría en L_2, es decir,

$$\int |\Im f|^2 d\xi = \int |f(x)|^2\,dx$$

por lo que

$$\Im : L_2 \to L_2$$

con norma

$$\| \Im \|_0 = 1.$$

Por el teorema de Riesz-Thorin se concluye que

$$\Im : L_p \to L_q \tag{1.12}$$

con norma

$$\| \Im \|_\alpha \leq \| \Im \|_0^{1-\alpha} \| \Im \|_1^\alpha \leq 1 \tag{1.13}$$

donde

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\alpha}{1} + \frac{\alpha}{2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\alpha}{\infty} + \frac{\alpha}{2} \qquad ,0 < \alpha < 1.$$

Sumando estos términos resulta que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \qquad \text{para toda } \alpha,$$

de las expresiones (1.12) y (1.13), se tiene:

$$\| \Im f \|_{L_q} \leq \| f \|_{L_p}.$$

Con lo que se demuestra la desigualdad. ■

Capítulo 2

TEOREMA DE MARCINKIEWICZ

En este capítulo estudiaremos otro de los teoremas de interpolación, de gran importancia, y aunque nos recuerda el teorema de Riez-Thorin, existen notables diferencias entre sus hipótesis; de ahí el hecho de que sea común utilizar el teorema de Marcinkiewicz cuando falla el teorema de Riez-Thorin.

2.1 Funciones de Distribución

Para poder entender el teorema de Marcienkiewicz es necesario recordar algunos conceptos. Comenzaremos por definir las funciones de distribución.

Definición 11 *Sea (U,μ) un espacio de medida y sea f una función $\mu-$medible, definiremos la* función de distribución de $m(\sigma, f)$ *como*

$$m(\sigma, f) = \mu(\{x \mid \ |f(x)| > \sigma\}).$$

Observemos que $m(\sigma, f)$ es una función que puede tomar como valor al 0, al ∞ o algún valor en los reales. Otras propiedades se mencionan en las siguientes proposiciones.
Observación *Sea σ_0 tal que $\sigma_0 < \sigma$, entonces se tiene:*

$$m(\sigma_0, f) - m(\sigma, f) = \mu\{x \mid \sigma \geq |f(x)| > \sigma_0\} \tag{2.1}$$

siempre que $m(\sigma_0, f) < \infty$.

Prueba. Para facilitar la demostración de lo anterior utilizaremos la siguiente notación:

$$A = \{x \mid |f(x)| > \sigma_0\}$$

y

$$B = \{x \mid |f(x)| > \sigma\}.$$

Como ya se había observado, puesto que $\sigma_0 < \sigma$, se tiene que

$$A \supseteq B,$$

por tanto

$$\mu(A - B) = \mu(A) - \mu(B),$$

pero

$$A - B = \{x \mid \sigma \geq |f(x)| > \sigma_0\}.$$

Por otro lado,

$$\mu(A) = m(\sigma_0, f) \qquad \text{y} \qquad \mu(B) = m(\sigma, f).$$

Por lo tanto

$$\mu\{x \mid \sigma \geq |f(x)| > \sigma_0\} = m(\sigma_0, f) - m(\sigma, f),$$

con lo que queda demostrada la observación.

Proposición 12 *La función $m(\sigma, f)$ es no creciente y continua por la derecha.*

Prueba. Primero demostraremos que $m(\sigma, f)$ es una función no-creciente.

Sea $t > 0$, lo que hay que probar es

$$m(\sigma, f) \geq m(\sigma + t,\ f),$$

para ello basta ver que

$$\{x \mid |f(x)| > \sigma\} \supseteq \{x \mid |f(x)| > \sigma + t\}.$$

Sea x_0 tal que $|f(x_0)| > \sigma + t$, como $\sigma + t > \sigma$ se tiene que $|f(x_0)| > \sigma$ y con esto se tiene la inclusión requerida para demostrar que la función es no-creciente.

Demostremos ahora que $m(\sigma, f)$ es continua por la derecha. Probaremos que

$$\lim_{\delta \to 0^+} m(\sigma_0 + \delta, f) = m(\sigma_0, f).$$

Calcular el límite anterior es lo mismo que calcular el siguiente límite:

$$\lim_{k\to\infty}\mu\left\{x \mid |f(x)| > \sigma_0 + \frac{1}{k}\right\}.$$

Debido a que $m(\sigma, f)$ es no creciente cuando $k \to \infty$ se tiene una sucesión de conjuntos crecientes y para este tipo de sucesiones tenemos que la medida de la unión es el límite de las medidas, por tanto

$$\lim_{\delta\to 0^+}\mu\{x \mid |f(x)| > \sigma_0 + \delta\} = \mu\bigcup_k\left\{x \mid |f(x)| > \sigma_0 + \frac{1}{k}\right\}.$$

Por otro lado tenemos que

$$\bigcup_k\left\{x \mid |f(x)| > \sigma_0 + \frac{1}{k}\right\} = \{x \mid |f(x)| > \sigma_0\},$$

de donde

$$\lim_{\delta\to 0^+}\mu\{x \mid |f(x)| > \sigma_0 + \delta\} = m(\sigma_0, f).$$

Con lo anterior se demuesta que $m(\sigma, f)$ es continua por la derecha. ∎

Proposición 13 *Sea $f \in L_p(d\mu)$ con $1 \le p \le \infty$, entonces*

$$\| f \|_{L_p} = \left(p\int_0^\infty \sigma^p m(\sigma, f)\, d\sigma/\sigma\right)^{\frac{1}{p}} \qquad si \qquad 1 \le p < \infty$$

y

$$\| f \|_{L_\infty} = \inf\{\sigma \mid m(\sigma, f) = 0\}.$$

Prueba. Primero demostraremos la igualdad si $f \in L_\infty$. Recordemos que:

$$\| f \|_{L_\infty} = \inf\{c \mid |f(x)| \le c, \text{ casi donde quiera}\},$$

por lo tanto basta ver que:

$$\{c \mid |f(x)| \le c, \text{ casi donde quiera}\} = \{\sigma \mid m(\sigma, f) = 0\}.$$

Sea c tal que $f(x) \le c$ casi donde quiera, o sea que

$$\mu\{x \mid |f(x)| > c\} = 0,$$

lo que implica que

$$m(c, f) = 0,$$

por lo tanto

$$\{c \mid |f(x)| \leq c, \text{ casi donde quiera}\} \subseteq \{\sigma \mid m(\sigma, f) = 0\}.$$

La segunda contención se demuestra de la misma manera.

Ahora demostraremos la igualdad si $f \in L_p$, con $1 \leq p < \infty$. Para mostrar esta igualdad primero lo haremos para funciones simples positivas.

Sea $g \geq 0$ función simple integrable, es decir

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i X_{E_i},$$

con las c_i crecientes.

Por definición de integral se tiene que

$$\int g(x)\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E_i), \tag{2.2}$$

donde

$$E_i = \{x \mid g(x) = c_i\}.$$

Como las c_i son crecientes, se tiene que

$$E_i = \{x \mid c_i \geq g(x) > c_{i-1}\},$$

utilizando la observación (2.1), resulta

$$\mu(E_i) = m(c_{i-1}, g) - m(c_i, g).$$

Para calcular la integral sustituimos lo anterior en (2.2), obteniendo

$$\begin{aligned}
\int g(x)\, d\mu &= \sum_{i=1}^{n} c_i \left(m(c_{i-1}, g) - m(c_i, g)\right) \\
&= c_1 \left(m(c_0, g) - m(c_1, g)\right) + c_2 \left(m(c_1, g) + m(c_2, g)\right) + \ldots \\
&= c_1 m(c_0, g) + (c_2 - c_1) m(c_1, g) + (c_3 - c_2) m(c_2, g) + \ldots - c_n m(c_n, g).
\end{aligned}$$

Pero

$$m(c_n, g) = \mu\{x \mid |g(x)| > c_n\} = 0,$$

por tanto

$$\begin{aligned}
\int g(x)\, d\mu &= \sum_{i=1}^{n} (c_{i+1} - c_i) m(c_i, g) \\
&= \int_{c_0}^{c_n} m(c, g)\, dc
\end{aligned}$$

y concluimos que:

$$\int g(x)\, d\mu = \int m(\sigma, g)\, d\sigma. \tag{2.3}$$

Hasta aquí sólo se ha demostrado la igualdad para $p = 1$. Hay que demostrarla para $1 < p < \infty$, primero observemos que

$$|g(x)|^p > \sigma \quad \text{si y sólo si} \quad |g(x)| > \sigma^{\frac{1}{p}}$$

lo cual implica que

$$\{x \mid |g(x)|^p > \sigma\} = \left\{x \mid |g(x)| > \sigma^{\frac{1}{p}}\right\},$$

de donde se concluye que

$$m(\sigma, g^p) = m(\sigma^{\frac{1}{p}}, g).$$

Al sustituir lo anterior en (2.3), obtenemos

$$\int |g(x)|^p\, d\mu = \int m(\sigma, g^p)\, d\sigma = \int m(\sigma^{\frac{1}{p}}, g)\, d\sigma.$$

Haciendo el cambio de variable $x = \sigma^{\frac{1}{p}}$, obtenemos

$$\int |g(x)|^p\, d\mu = \int m(x, g)(px^{p-1})\, dx$$

y por lo tanto

$$\int |g(x)|^p\, d\mu = p \int m(\sigma, g)\sigma^p\, d\sigma/\sigma.$$

Con lo anterior queda demostrada la proposición 13 para funciones simples positivas. Por densidad, se tiene el resultado para funciones positivas en L_p. Como cualquier función en L_p se puede ver como la diferencia de dos funciones positivas, se obtiene el resultado esperado. ∎

2.2 Espacios $\mathbf{L}_p$-débiles

Utilizando la función $m(\sigma, f)$ definiremos los espacios $L_p -$ *débiles*, denotados por L_p^*, de la siguiente manera:

Definición 14 *Sea f medible en un espacio $(U, d\mu)$, decimos que f es $L_p -$ débil ($f \in L_p^*$) si*

$$\| f \|_{L_p^*} = \sup_\sigma \sigma m(\sigma, f)^{\frac{1}{p}} < \infty \qquad \text{para} \quad 1 \leq p < \infty$$

y

$$\| f \|_{L_\infty^*} = \| f \|_{L_\infty} \qquad \text{para} \quad p = \infty.$$

El espacio L_p – *débil* consiste en todas las funciones tales que $f \in L_p^*$.

Un espacio *quasinormado* es aquel donde se cumple que $\| f+g\| \leq k(\| f \| + \| g \|)$, con $k \geq 1$; donde $\| \ \|$ satisface las propiedades para ser norma excepto por la desigualdad del triángulo. Veremos que los espacios L_p^* cumplen con ser *quasinormados*.

Proposición 15 *Sean $f, g \in L_p^*$, con $1 \leq p < \infty$, entonces*

$$\|f+g\|_{L_p^*} \leq 2\left(\| f \|_{L_p^*} + \| g \|_{L_p^*}\right).$$

Antes de demostrar esta proposición observemos que:

$$m(\sigma, f+g) \leq m(\sigma/2, f) + m(\sigma/2, g).$$

Para ver que lo anterior es cierto, primero probaremos que se tiene la siguiente contención:

$$\{x \mid |(f+g)(x)| > \sigma\} \subseteq \{x \mid |f(x)| > \sigma/2\} \cup \{x \mid |g(x)| > \sigma/2\}.$$

Sea x tal que $|f(x)+g(x)| > \sigma$, por desigualdad del triángulo se tiene:

$$|f(x)| + |g(x)| > \sigma,$$

lo que implica

$$|f(x)| > \sigma/2 \qquad \text{ó} \qquad |g(x)| > \sigma/2,$$

así se obtiene la contención deseada.

Por otro lado, si un conjunto está contenido en otro, la medida de éste es menor que la del segundo, por lo que

$$\mu\{x \mid |(f+g)(x)| > \sigma\} \leq \mu(\{x \mid |f(x)| > \sigma/2\} \cup \{x \mid |g(x)| > \sigma/2\}),$$

y como la medida de la unión es menor o igual a la suma de las medidas, obtenemos

$$m(\sigma, f+g) \leq m(\sigma/2, f) + m(\sigma/2, g) \tag{2.4}$$

que es lo que queríamos.

Ahora sí estamos en posibilidades de demostrar la proposición (15).

Prueba. Sean $f, g \in L_p^*$, con $1 \leq p < \infty$, consideremos

$$\|f+g\|_{L_p^*} = \sup_\sigma \sigma m(\sigma, f+g)^{\frac{1}{p}}$$

utilizando la desigualdad $(a+b)^{\frac{1}{p}} \leq a^{\frac{1}{p}} + b^{\frac{1}{p}}$ y la desigualdad (2.4) se tiene

$$m(\sigma, f+g)^{\frac{1}{p}} \leq m(\sigma/2, f)^{\frac{1}{p}} + m(\sigma/2, g)^{\frac{1}{p}}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{L_p^*} &\leq \sup_\sigma \sigma \left(m(\sigma/2, f)^{\frac{1}{p}} + m(\sigma/2, g)^{\frac{1}{p}} \right) \\
&\leq 2\sup_\sigma (\sigma/2) m(\sigma/2, f)^{\frac{1}{p}} + 2\sup_\sigma (\sigma/2) m(\sigma/2, g)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq 2\left(\| f \|_{L_p^*} + \| g \|_{L_p^*} \right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto L_p^* es un espacio *quasinormado.* ■

Definiremos otra función que nos servirá en la demostración del teorema de Marcinkiewicz.

Definición 16 *Sea f una función medible en un espacio $(U, d\mu)$, definimos a f^* como el* rearreglo decreciente de f *de la siguiente manera:*

$$f^*(t) = \inf \{\sigma \mid m(\sigma, f) \leq t\}$$

con $t \in (0, \infty)$.

Esta nueva función toma valores reales y además tiene las siguientes propiedades.

Proposición 17 *Sea f una función medible en un espacio $(U, d\mu)$, entonces f^* es no-creciente y continua por la derecha.*

Prueba. Mostraremos primero que f^* es no creciente. Sea $t_0 < t$, entonces

$$\{\sigma \mid m(\sigma, f) \leq t_0\} \subseteq \{\sigma \mid m(\sigma, f) \leq t\}.$$

ya que si σ es tal que $m(\sigma, f) \leq t_0$, entonces $m(\sigma, f) \leq t$. En consecuencia

$$\inf \{\sigma \mid m(\sigma, f) \leq t_0\} \geq \inf \{\sigma \mid m(\sigma, f) \leq t\},$$

por lo que la función es no creciente.

Ahora probaremos que la función es continua por la derecha. Sea $t_1 \in (0, \infty)$. Puesto que f^* es no creciente, para mostrar la continuidad en t_1 basta ver que:

Para toda a tal que $f^*(t_1) \in (a, \infty]$ existe $d > t_1$ que cumple

$$[t_1, d) \subset f^{*-1}(a, \infty]. \tag{2.5}$$

Sea $a \in (0.\infty)$, escojemos $t_0 = \inf\{t \mid f^*(t) \le a\}$, por la definición de ínfimo si $t < t_0$ entonces $f^*(t) > a$, por tanto

$$[0, t_0) \subset f^{*-1}(a, \infty].$$

Probaremos que $t_1 \in [0, t_0)$. Supongamos que $t_1 \notin [0, t_0)$. Por la forma en que t_0 está definida y como $t_0 < t_1$, existe t_2 con $t_0 \le t_2 \le t_1$ tal que

$$f^*(t_2) \le a.$$

Esto y el hecho de que $f^*(t)$ es no creciente implica que

$$f^*(t_1) \le a,$$

lo que es una contradicción, por tanto $t_1 \in [0, t_0)$. Con esto se demuestra (2.5) tomando $d = t_0$.

Mostraremos que con lo anterior $f^*(t)$ es continua por la derecha en t_1.

Sea $\varepsilon > 0$. tomemos $a = f^*(t_1) - \varepsilon$ y sea $\delta = d - t_1$, con d como antes. Entonces si $t \in [t_1, t_1 + \delta)$ se tiene que

$$f^*(t) \in (a, \infty),$$

y como $t < \delta$, por ser no creciente $f^*(t) \le f^*(t_1)$, por tanto

$$a < f^*(t) \le f^*(t_1).$$

Con lo anterior se tiene que

$$f^*(t_1) - f^*(t) < f^*(t_1) - a = \varepsilon,$$

con lo que se muestra que $f^*(t)$ es continua por la derecha en t_1. ■

Proposición 18 *Sea f una función medible en un espacio $(U, d\mu)$, entonces:*

$$m(\rho, f^*) = m(\rho, f), \qquad \rho \ge 0.$$

Prueba. Sea $\rho \geq 0$, definimos t_0 como

$$t_0 = \inf\{t \mid f^*(t) \leq \rho\}$$

Afirmación $t_0 = m(\rho, f^*)$.

Probaremos que

$$[0, t_0) = \{t \mid f^*(t) > \rho\}$$

y que

$$[t_0, \infty) = \{t \mid f^*(t) \leq \rho\}.$$

Por la definición de ínfimo si $t < t_0$ entonces $f^*(t) > \rho$, con lo que se tiene que

$$[0, t_0) \subseteq \{t \mid f^*(t) > \rho\}. \tag{2.6}$$

Ahora veremos que $f^*(t_0) \leq \rho$. Por ser continua a la derecha se tiene

$$\lim_{t \to t_0^+} f^*(t) = f^*(t_0),$$

pero si $t > t_0$ entonces existe t_1 tal que $t > t_1 > t_0$, con

$$f^*(t_1) \leq \rho.$$

Como f es no-creciente

$$f^*(t) \leq \rho,$$

de donde

$$\lim_{t \to t_0^+} f^*(t) \leq \rho,$$

por tanto

$$f^*(t_0) \leq \rho, \tag{2.7}$$

y además se obtiene que

$$f^*(t) \leq \rho \qquad \text{si } t < t_0.$$

De lo anterior y de (2.6) se tiene

$$[t_0, \infty) = \{t \mid f^*(t) \leq \rho\}, \tag{2.8}$$

tomando medidas

$$\mu[0, t_0) = \mu\{t \mid f^*(t) > \rho\},$$

de donde

$$t_0 = m(\rho, f^*), \tag{2.9}$$

y que queda demostrada la afirmación.

Nótese que probar $f^*(t_0) \leq \rho$ no es necesario, sin embargo este resultado nos será útil más adelante.

Ahora veremos que $m(\rho, f^*) = m(\rho, f)$. Observemos que $f^*(m(\rho, f)) \leq \rho$, pues por definición:

$$f^*(m(\rho, f)) = \inf \{\sigma \mid m(\sigma, f) \leq m(\rho, f)\}.$$

En particular

$$\rho \in \{\sigma \mid m(\sigma, f) \leq m(\rho, f)\},$$

y por tanto

$$f^*(m(\rho, f)) \leq \rho,$$

de ahí el hecho de que $m(\rho, f)$ pertenezca al conjunto dado por (2.8), resultando:

$$m(\rho, f) \geq t_0;$$

y de (2.9)

$$m(\rho, f) \geq m(\rho, f^*).$$

Como t_0 pertenece al conjunto (2.8), entonces $f^*(t_0) \leq \rho$, es decir

$$\inf \{\sigma \mid m(\sigma, f) \leq t_0\} \leq \rho.$$

Por otro lado como $m(\sigma, f)$ es no-creciente, se tiene que si $\sigma > \rho$, entonces:

$$m(\rho, f) \leq m(\sigma, f).$$

Además como $m(\sigma, f)$ es continua por la derecha se tiene que

$$\lim_{\sigma \to \rho^+} m(\sigma, f) = m(\rho, f),$$

y al sustituir en el límite obtenemos

$$m(\rho, f) \leq t_0,$$

por tanto

$$m(\rho, f) \leq m(\sigma, f^*).$$

Con lo que se demuestra la igualdad. ■

Proposición 10 *Supongamos que $f^*(t)$ es continua en t. Si $t = m(\sigma, f)$, entonces:*

$$\sigma = f^*(t)$$

además si $m(\sigma, f)$ es continua en σ y $\sigma = f^*(t)$, entonces

$$t = m(\sigma, f).$$

Prueba. Sea $m(\rho, f)$ continua en ρ . Supongamos que $f^*(t_0) = \rho$, por definición

$$\inf\{\sigma \mid m(\sigma, f) \leq t_0\} = \rho,$$

si $\sigma = \rho + \varepsilon$, donde $\varepsilon > 0$, entonces existe σ_0 tal que $\rho < \sigma_0 < \sigma$ con la propiedad

$$m(\sigma, f) \leq m(\sigma_0, f) \leq t_0, \tag{2.10}$$

por otro lado si $\sigma = \rho - \varepsilon$, donde $\varepsilon > 0$, por la definición de ínfimo

$$m(\sigma, f) > t_0. \tag{2.11}$$

Calcularemos $m(\rho, f)$. Teniendo en cuenta (2.10) y que $m(\sigma, f)$ es continua por la derecha, obtenemos que

$$m(\rho, f) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} m(\rho + \varepsilon, f) \leq t_0.$$

Por otro lado, la función es continua por la izquierda, por tanto

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} m(\rho - \varepsilon, f) = m(\rho, f),$$

pero de (2.11) tenemos que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} m(\rho - \varepsilon, f) \geq t_0,$$

y por tanto

$$m(\rho, f) \geq t_0.$$

De los cálculos anteriores concluimos que

$$m(\rho, f) = t_0.$$

Con lo que se demuestra la segunda afirmación de la proposición. Probemos ahora, la primera afirmación.

Supongamos $f^*(t)$ continua en t_0. Sea $m(\rho, f) = t_0$. Como

$$f^*(t) = \inf\{\sigma \mid m(\sigma, f) \leq t\}$$

se tiene que $\rho \in \{\sigma \mid m(\sigma, f) \leq t_0\}$, por tanto

$$f^*(t_0) \leq \rho.$$

Supongamos que $f^*(t_0) < \rho$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$f^*(t_0) + \delta < \rho.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Si σ es tal que

$$m(\sigma, f) \leq t_0 - \varepsilon = m(\rho, f) - \varepsilon.$$

Como $m(\sigma, f)$ es no creciente se tiene que $\sigma > \rho$. En particular

$$\rho \leq \inf\{\sigma \mid m(\sigma, f) \leq t_0 - \varepsilon\}$$

y por tanto

$$\delta + f^*(t_0) < f^*(t_0 - \varepsilon) \qquad \text{para todo } \varepsilon > 0.$$

Lo que implica que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} f^*(t_0 - \varepsilon) > f^*(t_0),$$

lo que es una contradicción pues $f^*(t)$ es continua por la izquierda.

Con lo que queda demostrada la proposición. ■

Enunciaremos ahora una propiedad que será de gran utilidad cuando calculemos la norma $\| \ \|_{L_p}$ o la norma $\| \ \|_{L_p^*}$ de una función en términos de su rearreglo decreciente.

Lema 20 *Sea $f \in L_p(d\mu)$, entoces*

$$\| f \|_{L_p} = \left(\int_0^\infty (f^*(t))^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

y si $f \in L_p^*(d\mu)$, entonces

$$\| f \|_{L_p^*} = \sup_t (t^{\frac{1}{p}} f^*(t)).$$

Prueba. Demostraremos primero la igualdad si $f \in L_p(d\mu)$. De la proposición 13, se tiene

$$\| f \|_{L_p} = \left(p \int_0^\infty \sigma^p m(\sigma, f)\, d\sigma/\sigma \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por otro lado por la proposición 18 tenemos que $m(\sigma, f) = m(\sigma, f^*)$ y por tanto

$$\| f \|_{L_p} = \left(p \int_0^\infty \sigma^p m(\sigma, f^*)\, d\sigma/\sigma \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Aplicando el resultado de la proposición 13 a f^* obtenemos

$$\begin{aligned} \| f \|_{L_p} &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (f^*(t))^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_0^{+\infty} (f^*(t))^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Con lo que se demuestra la primera igualdad.

Mostraremos ahora la igualdad si $f \in L_p^*(d\mu)$. Como f^* es una función no creciente, entonces el conjunto de discontinuidades es numerable y por tanto de medida 0. Llamemos E a dicho conjunto , es decir

$$E = \{t \mid t \in [0,1) \text{ y } f^* \text{ discontinua en } t\}.$$

Entonces por ser E numerable,

$$\sup_t t^{\frac{1}{p}} f^*(t) = \sup_{t \in R \setminus E} t^{\frac{1}{p}} f^*(t).$$

Por la proposición (19) se tiene

$$\sup_{t \in R \setminus E} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) = \sup_{t \in R \setminus E} (m(\sigma, f))^{\frac{1}{p}} \sigma,$$

pero en $R \setminus E$ se tiene $t = m(\sigma, f)$,por tanto

$$\sup_t t^{\frac{1}{p}} f^*(t) = \sup_\sigma \sigma\, (m(\sigma, f))^{\frac{1}{p}}.$$

Con lo anterior queda demostrado el lema. ∎

2.3 Demostración del teorema de Marcinkiewickz

Ahora que conocemos los espacios L_p^* y algunas de sus propiedades, enunciaremos el teorema de Marcinkiewics para interpolación de operadores. Pero antes demostraremos una desigualdad que nos servirá para dicha demostración.

Lema 21 *Sea $\varphi^* \geq 0$ función no creciente. Entonces*

$$\int_0^\infty \left(t^{-1}\int_t^\infty \varphi^*(s)ds\right)^\theta dt \leq C\int_0^\infty (\varphi^*(s))^\theta ds \qquad con\ 0<\theta<1.$$

Prueba. Sea $a_\mu = \varphi^*(2^\mu)$, probaremos que

$$\int_0^\infty \left(t^{-1}\int_t^\infty \varphi^*(s)ds\right)^\theta dt \leq \sum_{v=-\infty}^{v=\infty}\left(2^{-v}\sum_{\mu\geq v} a_\mu 2^\mu\right)^\theta 2^v.$$

Puesto que φ^* es una función no-creciente, se tiene que

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} a_{\mu+1}2^\mu \leq \int_0^\infty \varphi^*(s)ds \leq \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} a_\mu 2^\mu. \tag{2.12}$$

En particular

$$\frac{1}{2}\sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} a_\mu 2^\mu \leq \int_0^\infty \varphi^*(s)ds. \tag{2.13}$$

Definiremos a $G(t)$ como $G(t) = t^{-1}\int_t^\infty \varphi^*(s)ds$. Esta función es decreciente y por tanto tambien $(G(t))^\theta$ es decreciente. Razonando como en (2.12) es tenemos que

$$\int_0^\infty (G(t))^\theta dt \leq \sum_{v=-\infty}^{v=+\infty} (G(2^v))^\theta 2^v.$$

Acotaremos a $G(2^v)$, para ello observemos que

$$G(2^v) = 2^{-v}\int_{2^v}^\infty \varphi^*(s)ds \leq 2^{-v}\sum_{\mu\geq v} a_\mu 2^\mu,$$

por tanto

$$\int_0^\infty (G(t))^\theta dt \leq \sum_{v=-\infty}^{v=+\infty}\left(2^{-v}\sum_{\mu\geq v} a_\mu 2^\mu\right)^\theta 2^v \tag{2.14}$$

que es la desigualdad que se mencionó al principio. Pero esta cota se puede mejorar pues $0<\theta<1$. Tenemos $(x+y)^\theta \leq x^\theta + y^\theta$, por lo que en la última sumatoria se tiene:

$$\begin{aligned}
\sum_{v=-\infty}^{v=+\infty}\left(2^{-v}\sum_{\mu\geq v} a_\mu 2^\mu\right)^\theta 2^v &\leq \sum_{v=-\infty}^{v=+\infty} 2^{v(1-\theta)}\sum_{\mu\geq v} a_\mu^\theta 2^{\mu\theta}\\
&= \sum_{v=-\infty}^{v=+\infty}\sum_{\mu\geq v} 2^{v(1-\theta)} a_\mu^\theta 2^{\mu\theta}\\
&= \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty}\sum_{v\leq\mu} 2^{v(1-\theta)} a_\mu^\theta 2^{\mu\theta}\\
&= \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} a_\mu^\theta 2^{\mu\theta}\sum_{v\leq\mu} 2^{v(1-\theta)}
\end{aligned}$$

Al sustituir lo anterior en (2.14) obtenemos

$$\int_0^{\infty} (G(t))^{\theta}\, dt \leq \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} a_{\mu}^{\theta} 2^{\mu\theta} \sum_{v\leq\mu} 2^{v(1-\theta)}. \tag{2.15}$$

Por otro lado probaremos que existe C tal que

$$\sum_{v\leq\mu} 2^{v(1-\theta)} = C 2^{\mu(1-\theta)}.$$

Haciendo cálculos se tiene:

$$\begin{aligned} \sum\nolimits_{v\leq\mu} 2^{v(1-\theta)} &= \sum\nolimits_{v\leq\mu} 2^{(v-\mu)(1-\theta)} 2^{\mu(1-\theta)} \\ &= 2^{\mu(1-\theta)} \sum\nolimits_{v\leq\mu} 2^{(v-\mu)(1-\theta)}, \end{aligned}$$

haciendo el cambio $i = v - \mu$, se obtiene

$$\sum_{v\leq\mu} 2^{v(1-\theta)} = 2^{\mu(1-\theta)} \sum_{i\leq 0} 2^{i(1-\theta)}.$$

Pero $\sum_{i\leq 0} 2^{i(1-\theta)}$ es una serie convergente y por tanto

$$\sum_{v\leq\mu} 2^{v(1-\theta)} = C 2^{\mu(1-\theta)}.$$

Al sustituir lo anterior en (2.15) se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} (G(t))^{\theta}\, dt &\leq C \sum\nolimits_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} a_{\mu}^{\theta} 2^{\mu\theta} 2^{\mu(1-\theta)} \\ &= C \sum\nolimits_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} a_{\mu}^{\theta} 2^{\mu}. \end{aligned}$$

Por otro lado de igual forma que se obtuvó (2.13), se tiene que

$$\frac{1}{2} \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} a_{\mu}^{\theta} 2^{\mu} \leq \int_0^{\infty} (\varphi^*(s))^{\theta}\, ds.$$

Al sustituir el valor de $G(t)$ obtenemos

$$\int_0^{\infty} \left(t^{-1} \int_t^{\infty} \varphi^*(s) ds \right)^{\theta} dt \leq C \int_0^{\infty} (\varphi^*(s))^{\theta}\, ds,$$

con lo que concluimos la demostración. ∎

En el teorema de Marcinkiewlckz utilizaremos operadores T definidos sobre espacios L_p, que tomarán valores en espacios L_p^*. En estos mapeos el ínfimo de todos los números C tales que $\|Tf\|_{L_{q\alpha}^*} \leq C \|f\|_{L_{p\alpha}}$ es llamado la norma de T.

Teorema 22 (Marcinkiewicz) *Sean p_0, p_1 tales que $p_0 \neq p_1$, y un T operador lineal tal que:*

$$T : L_{p_0}(U, d\mu) \longrightarrow L^*_{q_0}(V, d\nu) \qquad \text{con norma } M_0^*$$

y

$$T : L_{p_1}(U, d\mu) \longrightarrow L^*_{q_1}(V, d\nu) \qquad \text{con norma } M_1^*.$$

Sean

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

y asumiendo que $p \leq q$, entonces

$$T : L_p(U, d\mu) \longrightarrow L_q(V, d\nu)$$

con norma M que satisface

$$M \leq C_\theta M_0^{*(1-\theta)} M_1^{*\theta}.$$

Ahora vemos el por qué de la importancia de conocer este teorema en caso de que falle el teorema de Riesz-Thorin, pues habrá casos donde los operadores no tengan como imagen un espacio L_p, pero si un espacio L_p^*. Sólo se demostrará el teorema en el caso en que μ sea una medida no atómica con $p_0 = q_0$, $p_1 = q_1$ y $1 \leq p_0 < p_1 < \infty$, además con una estimación de la cota M resultante de

$$M \leq C \max(M_0^{*1}, M_1^*).$$

Para una demostración del teorema completo se puede consultar Bergh [*Cap.* 5].

Prueba. Para probar la última desigualdad, será suficiente suponer que $M_0^* \leq 1$ y $M_1^* \leq 1$.

Sea $f \in L_{p_0} \cap L_{p_1}$. Lo que queremos probar es que $\|T(f)\|_{L_p} \leq C\,\|f\|_{L_p}$. Utilizaremos el lema 20, es decir,

$$\|Tf\|_{L_p} = \left(\int_0^\infty ((Tf)^*(t))^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por un lado, sabemos que el conjunto de discontinuidades de f^* es de medida 0, por tanto

$$\|Tf\|_{L_p} = \left(\int_0^\infty ((Tf)^*(t))^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{R\setminus A} ((Tf)^*(t))^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad (2.16)$$

donde $A = \{t \mid f^* \text{ no es continua en } t\}$.

Por otro lado para todo $t \in (0,\infty)$ tal que f^* es continua en t, podemos definir E_t como

$$E_t = \{x \mid |f(x)| > f^*(t)\}.$$

Además, puesto que f^* es continua en t, se tiene que $\mu(E_t) = t$.

Definimos las siguientes funciones con base en E_t:

$$f_0(t,x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in E_t, \\ \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

y

$$f_1(t,x) = f(x) - f_0(t,x).$$

Por la definición tenemos que $f(x) = f_1(x,t) + f_0(x,t)$.

Escribiremos tres propiedades, que demostraremos al final. Estas nos servirán para acotar a $\|Tf\|_{L_p}$:

a) *Sea* $t \in (0,\infty)$, $f_0(t,x)$ *y* $f_1(t,x)$ *como se definireron. Entonces*

$$(Tf(\cdot))^*(t) \leq (Tf_0(t,\cdot))^*(t/2) + (Tf_1(t,\cdot))^*(t/2)).$$

b) *Sea* $t \in (0,\infty)$. *Entonces*

$$(Tf_i(t,\cdot))^*(t/2) \leq Ct^{-\frac{1}{p_i}} \| f_i(t,\cdot)\|_{L_{p_i}}, \qquad con \quad i = 0,1.$$

c) *Sea* $t \in (0,\infty)$ *tal que* f^* *es continua en* t. *Entonces*

$$\|f_0(t,\cdot)\|_{L_{p_0}}^{p_0} = \int_0^t (f^*(s))^{p_0}\, ds$$

y

$$\|f_1(t,\cdot)\|_{L_{p_1}}^{p_1} = \int_t^\infty (f^*(s))^{p_1}\, ds.$$

Acotaremos $(Tf)^*(t)$. Simplificamos la notación escribiendo $f_1(t,x)$ por $f_1(x)$ y $f_0(t,x)$ por $f_0(x)$. Sustituyendo el inciso b) en el inciso a), se tiene

$$((Tf)^*(t))^p \leq C\left(t^{-\frac{1}{p_0}} \|f_0\|_{L_{p_0}} + t^{-\frac{1}{p_1}} \|f_1\|_{L_{p_1}}\right)^p,$$

pero $|f+h|^p \leq |2\max\{|f|,|h|\}|^p$. Por tanto

$$((Tf)^*(t))^p \leq 2C\left(t^{-\frac{p}{p_0}}\|f_0\|^p_{L_{p_0}} + t^{-\frac{p}{p_1}}\|f_1\|^p_{L_{p_1}}\right),$$

y al sustituir lo anterior en (2.16) tenemos

$$\|Tf\|^p_{L_p} \leq C\int_{R\setminus A}\left(t^{-\frac{p}{p_0}}\|f_0\|^p_{L_{p_0}} + t^{-\frac{p}{p_1}}\|f_1\|^p_{L_{p_1}}\right)dt. \tag{2.17}$$

Pero $\mu(A)=0$, por lo tanto

$$\|Tf\|^p_{L_p} \leq C\int_0^\infty\left(t^{-\frac{p}{p_0}}\|f_0\|^p_{L_{p_0}} + t^{-\frac{p}{p_1}}\|f_1\|^p_{L_{p_1}}\right)dt.$$

Al sustituir el inciso c en la desigualdad anterior, se tiene

$$\|Tf\|_{L_p} \leq C\,(I_0+I_1),$$

donde

$$I_0=\left(\int_0^\infty t^{-\frac{p}{p_0}}\left(\int_0^t (f^*(s))^{p_0}\,ds\right)^{\frac{p}{p_0}}dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

y

$$I_1=\left(\int_0^\infty t^{-\frac{p}{p_1}}\left(\int_t^\infty (f^*(s))^{p_1}\,ds\right)^{\frac{p}{p_1}}dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pero por un lado podemos hacer el cambio de variable y aplicar la desigualdad de Minkowski en I_0, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} I_0^p &= \int_0^\infty\left(\int_0^1 (f^*(t\sigma))^{p_0}\,d\sigma\right)^{\frac{p}{p_0}}dt \\ &\leq \left(\int_0^1\left(\int_0^\infty (f^*(t\sigma))^{p}\,dt\right)^{\frac{p_0}{p}}d\sigma\right)^{\frac{p}{p_0}} \\ &\leq C\|f\|^p_{L_p}. \end{aligned}$$

Y por otro lado podemos utilizar el lema 21 en I_1, que es válido para cualquier función no creciente y no negativa. Sustituyendo $\theta = p/p_1$ se obtiene

$$\begin{aligned} I_1^p &= \int_0^\infty (t^{-1} \int_t^\infty (f^*(s))^{p_1}\, ds)^{\frac{p}{p_1}}\, dt \\ &= \int_0^\infty \left(t^{-1} \int_t^\infty (f^*(s))^{\frac{p}{\theta}}\, ds\right)^{\theta} dt \\ &\leq C \int_0^\infty (f^*(s))^p\, ds \\ &\leq C \|f\|_{L_p}^p , \end{aligned}$$

por tanto

$$\|Tf\|_{L_p} \leq C \|f\|_{L_p}^p .$$

Con lo que se demuestra el teorema de Marcinkiewicz.

Ahora mostraremos los incisos a), b) y c)

a) *Sea $t \in (0,\infty)$, $f_0(t,x)$ y $f_1(t,x)$ como se definireron. Entonces*

$$(Tf(\cdot))^*(t) \leq (Tf_0(t,\cdot))^*(t/2) + (Tf_1(t,\cdot))^*(t/2)).$$

Prueba a) Sea $t \in (0,\infty)$. Consideramos $f_1(t,x)$ y $f_0(t,x)$ como se definieron anteriormente. Aplicando la linealidad de T se tiene:

$$T(f(\cdot)) = T(f_1(t,\cdot) + f_0(t,\cdot)) = T(f_1(t,\cdot)) + T(f_0(t,\cdot)).$$

De aquí que

$$(Tf(\cdot))^*(t) = \inf \{\sigma \mid m(\sigma, Tf_1(t,\cdot) + Tf_0(t,\cdot)) \leq t\} .$$

Por otro lado tomemos el conjunto

$$A = \{\sigma \mid m(\sigma/2, Tf_1) \leq t/2 \quad y \quad m(\sigma/2, Tf_0) \leq t/2\} .$$

Sea $\sigma \in A$, por la propiedad (2.4) se tiene

$$m(\sigma, Tf_1 + Tf_2) \leq m(\sigma/2, Tf_1) + m(\sigma/2, Tf_0) \leq t,$$

por tanto $\sigma \in \{\sigma \mid m(\sigma, Tf_1 + Tf_0) \leq t\}$. De lo anterior

$$A \subset \{\sigma \mid m(\sigma, Tf_1 + Tf_0) \leq t\} .$$

Tomando ínfimos se tiene

$$(Tf)^*(t) \leq \inf \{\sigma \mid m(\sigma/2, Tf_0) \leq t/2\} \cap \{\sigma \mid m(\sigma/2, Tf_1) \leq t/2\},$$

por lo que

$$(Tf)^*(t) \leq (Tf_0)^*(t/2) + (Tf_1)^*(t/2)). \tag{2.18}$$

Por lo tanto, para toda $t \in (0, \infty)$ se tiene el resultado esperado.

b*) Sea* $t \in (0, \infty)$, *entonces*

$$(Tf_i(t, \cdot))^*(t/2) \leq Ct^{-\frac{1}{p_i}} \| f_i(t, \cdot)\|_{L_{p_i}}, \qquad \text{con} \quad i = 0, 1.$$

Prueba b) Sea $t \in (0, \infty)$ y sean f_0 y f_1 como se definieron.

Se demostrará para f_0 , pues para f_1 la demostración es similar. Como supusimos que $M_0^* \leq 1$ y que $p_0 = q_0$, se tiene

$$\| f_0\|_{L_{p_0}} \geq \|(Tf_0)\|_{L^*_{p_0}}. \tag{2.19}$$

Utilizando el lema 20 y la hipótesis de que $p_0 = q_0$ tenemos que

$$\|(Tf_0)\|_{L^*_{p_0}} = \sup_{r/2} (r/2)^{\frac{1}{p_0}} (Tf_0)^*(r/2)$$

y de la definición de supremo tenemos

$$(1/2)^{\frac{1}{p_0}} r^{\frac{1}{p_0}} (Tf_0)^*(r/2) \leq \|(Tf_0)\|_{L^*_{p_0}}, \qquad \text{para toda } r \geq 0.$$

Si $C = \max((1/2)^{-\frac{1}{p_0}}, (1/2)^{-\frac{1}{p_1}})$, entonces

$$(Tf_0)^*(r/2) \leq Cr^{-\frac{1}{p_0}} \|(Tf_0)\|_{L^*_{p_0}}, \qquad \text{para toda } r \geq 0.$$

Utilizando (2.19), se obtiene

$$(Tf_0)^*(r/2) \leq Cr^{-\frac{1}{p_0}} \| f_0\|_{L_{p_0}}, \qquad \text{para toda } r \geq 0.$$

En particular para $r = t$ se tiene

$$(Tf_0)^*(t/2) \leq Ct^{-\frac{1}{p_0}} \| f_0\|_{L_{p_0}},$$

con lo que se demuestra el inciso b).

c)*Sea $t \in (0,\infty)$ tal que f^* es continua en t, entonces*

$$\|f_0(t,\cdot)\|_{L_{p_0}}^{p_0} = \int_0^t (f^*(s))^{p_0}\, ds \tag{2.20}$$

y

$$\|f_1(t,\cdot)\|_{L_{p_1}}^{p_1} = \int_t^\infty (f^*(s))^{p_1}\, ds. \tag{2.21}$$

Prueba c) Antes de comenzar la demostración observemos que

$$m(\sigma, f_0) + m(\sigma, f_1) = m(\sigma, f), \tag{2.22}$$

puesto que tenemos

$$f(x) = \begin{cases} f_0(t,x) & si \quad x \in E_t \\ \\ f_1(t,x) & si \quad x \notin E_t. \end{cases}$$

Además tenemos que

$$\{x \mid |f(x)| > \sigma\} = \{x \in E_t \mid |f_0(x)| > \sigma\} \cup \{x \notin E_t \mid |f_1(x)| > \sigma\},$$

lo que implica que

$$\mu\{x \mid |f(x)| > \sigma\} = \mu\{x \mid |f_0(x)| > \sigma\} + \mu\{x \mid |f_1(x)| > \sigma\},$$

con lo que se tiene la igualdad (2.22).

Para demostrar (2.20) basta ver que $f_0^*(s) = f^*(s)\chi_{(0,t)}$.

Comenzaremos por demostrar que $f_0^*(s) \leq f^*(s)$. Observemos que $f_0(s) \leq f(s)$, lo que implica que

$$\{x \mid |f_0(x)| > \sigma\} \subseteq \{x \mid |f(x)| > \sigma\}$$

y por lo tanto

$$m(\sigma, f_0) \leq m(\sigma, f).$$

Pero la desigualdad anterior implica que

$$\{\sigma \mid m(\sigma, f_0) \leq t\} \supseteq \{\sigma \mid m(\sigma, f) \leq t\},$$

de donde

$$f_0^*(s) \leq f^*(s).$$

El siguiente paso será mostrar que

$$f_0^*(s) = 0 \qquad si \quad s \geq t.$$

Supongamos $s \geq t$, por ser f_0^* no creciente se tiene

$$f_0^*(s) \leq f_0^*(t).$$

Observemos cual es el valor de $m(0, f_0)$.

$$m(0, f_0) = \mu\{x \mid |f_0(x)| > 0\},$$

pero

$$\{x \mid |f_0(x)| > 0\} \subset \{x \mid |f(x)| > f^*(t)\},$$

por lo que

$$m(0, f_0) \leq t.$$

En particular $0 \in \{\sigma \mid m(\sigma, f) \leq 0\}$,de manera que

$$f_0^*(t) = \inf\{\sigma \mid m(\sigma, f) \leq 0\} = 0.$$

Por tanto hemos mostrado que $f_0^*(s) = 0$ si $s \geq t$.

El último paso para mostrar que $f_0^*(s) = f^*(s)\chi_{(0,t)}$ será ver que

$$f^*(s) \leq f_0^*(s) \qquad si \quad 0 < s < t.$$

Para ello mostraremos que

$$\{\sigma \mid m(\sigma, f_0) \leq s\} \subseteq \{\sigma \mid m(\sigma, f) \leq s\} \qquad si \quad 0 < s < t. \tag{2.23}$$

Sea $0 < s < t$ y σ tal que $m(\sigma, f_0) \leq s$. Hay que probar que $m(\sigma, f) \leq s$, pero de (2.22) tenemos

$$m(\sigma, f_0) = m(\sigma, f) - m(\sigma, f_1),$$

por tanto para mostrar la contención (2.23) basta ver que

$$m(\sigma, f_1) = 0 \qquad si \quad 0 < s < t.$$

Por otro lado por la forma en que fue escogido E_t tenemos que si $m(\sigma, f_0) < t$ entonces $\sigma > f^*(t)$. Al sustituir en $m(\sigma, f_1)$ obtenemos

$$m(\sigma, f_1) = \mu\{x \mid |f_1(x)| > \sigma \geq f^*(t)\},$$

pero $|f_1(x)| < f^*(t)$ siempre, por tanto

$$m(\sigma, f_1) = 0 \qquad si \quad 0 < s < t.$$

Con esto queda demostrado que $f_0^*(s) = f^*(s)\chi_{(0,t)}$ y por tanto (2.20).

Falta mostrar (2.21). Lo haremos directamente.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f_1^*(s)ds &= \int_{X\setminus E_t} |f(x)|\,dx \\ &= \int_X |f(x)|\,dx - \int_{E_t} |f(x)|\,dx, \end{aligned}$$

pero $\int_{E_t} |f(x)|\,dx = \|f_0\|_{L_1} = \int_0^\infty f_0^*(s)ds$, por tanto

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f_1^*(s)ds &= \int_0^\infty f^*(s)ds - \int_0^t f^*(s)ds \\ &= \int_t^\infty f^*(s)ds, \end{aligned}$$

con lo que se demuestra el inciso c).

Como ya hemos probado a), b) y c), se han cubierto los pasos que faltaban para complementar la demostración del teorema de Marcinkiewicz. ■

Hemos probado un teorema de interpolación de gran importancia, en el siguiente capítulo veremos una aplicación de éste a la teoría de integrales singulares.

Capítulo 3

INTEGRALES SINGULARES

En este capítulo estudiaremos operadores definidos mediante la convolución de funciones con un nucleo muy especial, dentro de estas se escuentra la transformada de Hilbert. Estudiaremos la continuidad de estos operadores en los espacios L_p, si $1 < p < \infty$. Comenzaremos por enunciar un lema importante que utilizaremos más adelante.

Lema 23 *(Calderón Zygmund) Sea f una función integrable no negativa, y sea α una constante positiva. Entonces existe una descomposicón de R^n tal que:*
a)$R^n = F \cup \Omega$, $\quad F \cap \Omega = \emptyset$.
b)$f(x) \leq \alpha$ casi donde quiera en F.
c)$\Omega = \cup_i Q_i$ cubos con interiores disjuntos y tales que

$$\alpha < \frac{1}{\mu(Q_i)} \int_{Q_i} f(x)dx \leq 2^n \alpha.$$

Prueba.

Descomponemos a R^n en una malla de cubos Q_i' iguales, tales que

$$\frac{1}{\mu(Q_i')} \int_{Q_i'} f(x)dx \leq \alpha, \qquad \text{para toda } i.$$

Dado un cubo Q_i' dividimos a la mitad cada uno de los lados con lo que obtenemos 2^n cubos iguales, que denotaremos por Q_i''. Observemos que cada cubo Q_j'' obtenido de esta manera satisface una de las siguientes desigualdades:

$$\frac{1}{\mu(Q_i'')} \int_{Q_i''} f(x)dx \leq \alpha$$

Capítulo 3

INTEGRALES SINGULARES

En este capítulo estudiaremos operadores definidos mediante la convolución de funciones con un nucleo muy especial, dentro de estas se escuentra la transformada de Hilbert. Estudiaremos la continuidad de estos operadores en los espacios L_p, si $1 < p < \infty$. Comenzaremos por enunciar un lema importante que utilizaremos más adelante.

Lema 23 *(Calderón Zygmund) Sea f una función integrable no negativa, y sea α una constante positiva. Entonces existe una descomposicón de R^n tal que:*
a)$R^n = F \cup \Omega$, $\quad F \cap \Omega = \emptyset$.
b)$f(x) \leq \alpha$ casi donde quiera en F.
c)$\Omega = \cup_i Q_i$ cubos con interiores disjuntos y tales que

$$\alpha < \frac{1}{\mu(Q_i)} \int_{Q_i} f(x)dx \leq 2^n \alpha.$$

Prueba.

Descomponemos a R^n en una malla de cubos Q_i' iguales, tales que

$$\frac{1}{\mu(Q_i')} \int_{Q_i'} f(x)dx \leq \alpha, \qquad \text{para toda } i.$$

Dado un cubo Q_i' dividimos a la mitad cada uno de los lados con lo que obtenemos 2^n cubos iguales, que denotaremos por Q_i''. Observemos que cada cubo Q_j'' obtenido de esta manera satisface una de las siguientes desigualdades:

$$\frac{1}{\mu(Q_i'')} \int_{Q_i''} f(x)dx \leq \alpha$$

ó

$$\frac{1}{\mu(Q_i'')}\int_{Q_i''} f(x)dx > \alpha. \tag{3.1}$$

Los cubos que satisfacen la segunda desigualdad verifican

$$\begin{aligned} \alpha &< \tfrac{1}{\mu(Q_i'')}\textstyle\int_{Q_i''} f(x)dx \\ &\leq \tfrac{1}{2^{-n}\mu(Q_i')}\textstyle\int_{Q_i'} f(x)dx \\ &\leq 2^n\alpha. \end{aligned}$$

Continuamos así, subdividiendo cada uno de los cubos resultantes que no verifican la desigualdad (3.1). Sea $\Omega = \cup Q_j$, donde los cubos Q_j son los cubos Q_j'' que acabamos de construir y que verifican (3.1). Es claro que Ω verifica c).

Veamos que si $F = \Omega^c$, entonces $f(x) \leq \alpha$ para casi toda $x \in F$. Como $f \in L_1$, tenemos, por el teorema de diferenciación de Lebesgue [Stein, St], que

$$f(x) = \lim_{Q} \frac{1}{\mu(Q_i)}\int_{Q_i} f(s)ds \qquad \text{para casi toda } x \in R^n,$$

donde el límite se toma sobre los cubos Q que contienen a x y cuyo diametro tiende a 0. En particular para $x \in F$, se tiene que todos los cubos que la contienen, tienen un promedio menor o igual a α, por lo que el límite tambien está acotado. Entonces $f(x) \leq \alpha$ para casi toda $x \in F$. Con lo anterior queda probado el lema. ∎

La demostración del siguiente teorema la haremos en tres pasos.

Teorema 24 *Sea $K \in L_2(R^n)$. Supongamos:*

a)La transformada de Fourier de K es acotada, es decir

$$\left|\widehat{K}\right| \leq B.$$

b)K cumple que

$$\int_{|x| \geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)|\, dx \leq B.$$

Para $f \in L_1 \cap L_p$ definimos

$$T(f) = \int_{R^n} K(x-y) f(y) dy.$$

Entonces existe una constante A_p, tal que

$$\|T(f)\|_{L_p} \leq A_p \| f \|_{L_p} \qquad 1 < p < \infty.$$

Prueba (Primer paso) $T : L_2 \to L_2$, y en particular $T : L_2 \to L_2^*$.

Tomemos la transformada de Fourier de $T(f)$, entonces

$$(\widehat{Tf})(y) = \widehat{K}(y)\, \widehat{f}\,(y).$$

De la hipótesis a) y Parseval tenemos que

$$\begin{aligned} \| Tf \|_2 &= \left\| \widehat{K}\widehat{f} \right\|_2 \\ &\leq B \left\| \widehat{f} \right\|_2 \\ &\leq B \| f \|_2 \end{aligned}$$

además como $\| Tf \|_{L_2} \geq \| Tf \|_{L_2^*}$, obtenemos

$$\| Tf \|_{L_2^*} \leq B \| f \|_2 .$$

)**Segundo paso**) $T : L_1 \to L_1^*$.

Sea $f \in L_1$, probaremos que existe C tal que

$$\mu \{x \mid Tf(x) > \alpha\} \leq \frac{C}{\alpha} \int_{R^n} |f(x)|\, dx. \tag{3.2}$$

Sea α fija, utilizando el lema de Calderón Zygmund para $|f(x)|$, podemos construir F y Ω tales que

$$\begin{aligned} R^n = F \cup \Omega, \quad F \cap \Omega = \emptyset \\ |f(x)| \leq \alpha, \quad x \in F, \end{aligned} \tag{3.3}$$

donde $\Omega = \cup_j Q_j$ cubos con interiores mutuamente disjuntos y que satisfacen

$$\alpha < \frac{1}{\mu(Q_i)} \int_{Q_i} |f(x)dx| \leq 2^n \alpha, \qquad \text{para todo } Q_i.$$

Por tanto

$$\mu(\Omega) \leq \frac{C}{\alpha} \int_{R^n} |f(x)|\, dx \tag{3.4}$$

y

$$\frac{1}{\mu(Q_j)} \int_{Q_j} |f(x)|\, dx \leq C\alpha. \tag{3.5}$$

Ahora definimos la siguiente función:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & si \quad x \in F \\ \frac{1}{\mu(Q_j)} \int_{Q_j} f(x)dx, & si \quad x \in Q_j^o. \end{cases}$$

Esta función está definida casi donde quiera. Además definimos

$$b(x) = f(x) - g(x),$$

que satisface

$$b(x) = 0, \quad si \quad x \in F$$

y

$$\int_{Q_j} b(x)dx = 0 \quad \text{para todo } Q_j.$$

Una vez que hemos definido estas funciones se tiene que $Tf = Tg + Tb$. De esta descomposición y por las propiedades de las funciones de distribución se sigue que:

$$\mu\{x \mid Tf(x) > \alpha\} \leq \mu\left\{x \mid Tg(x) > \frac{\alpha}{2}\right\} + \mu\left\{x \mid Tb(x) > \frac{\alpha}{2}\right\}. \tag{3.6}$$

Para demostrar la desigualdad (3.2) acotaremos los términos de la derecha de (3.6). La primera estimación la haremos para Tg.

Mostraremos que $g \in L_2$. Acotemos $\| g \|_2^2$ utilizando (3.3) y (3.5):

$$\begin{aligned}
\int_{R^n} |g(x)|^2\,dx &= \int_F |g(x)|^2\,dx + \int_\Omega |g(x)|^2\,dx \\
&\leq \int_F |f(x)|^2\,dx + \int_\Omega |C\alpha|^2\,dx \\
&\leq \int_F \alpha\,|f(x)|\,dx + C^2\alpha^2\mu(\Omega) \\
&\leq \alpha \| f \|_1 + C^2\alpha^2(\tfrac{C}{\alpha} \| f \|_1) \\
&\leq C\alpha \| f \|_1 .
\end{aligned}$$

Como $g \in L_2$, podemos aplicar el resultado obtenido en el primer paso de la demostración, obteniendo que $Tg \in L_2^*$, es decir,

$$\sup_\sigma \sigma\,(\mu\{x \mid Tg(x) > \sigma\})^{\frac{1}{2}} \leq \| Tg \|_2 \leq C \| g \|_2 .$$

En particular tenemos:

$$\left(\mu\left\{x \mid Tg(x) > \frac{\alpha}{2}\right\}\right)^{\frac{1}{2}} \leq (C \| g \|_2)^{\frac{1}{2}} \leq C\frac{2}{\alpha}\,(\alpha \| f \|_1)^{\frac{1}{2}},$$

de donde

$$\mu\left\{x \mid Tg(x) > \frac{\alpha}{2}\right\} \leq \frac{C}{\alpha} \| f \|_1 ,$$

con lo que se tiene la estimación para Tg.

Ahora veremos que en el caso de Tb se puede obtener una cota similar, para ello definiremos una partición de R^n de la siguiente manera:

Sea y^i el centro de cada cubo Q_i. Consideremos los cubos Q_i^* obtenidos al expander $2\sqrt{n}$ veces al cubo Q_i con el mismo centro y^i, es decir, duplicamos cada uno de los lados de los cubos manteniendo el centro fijo.

Si $\Omega^* = \cup Q_i^*$ y $F^* = (\Omega^*)^c$, entonces se tiene:

I)$Q_i \subset Q_i^*$, y $\Omega \subset \Omega^*$, además $\mu(\Omega^*) \leq (2\sqrt{n})^n\mu(\Omega)$.

II)Si $x \notin Q_i^*$ entonces $|x - y^i| \geq 2\,|y - y^i|$ para toda $y \in Q_i$.

Claramente $Q_i \subset Q_i^*$, puesto que se duplicó el tamaño de los lados de cada cubo y por tanto $\Omega \subset \Omega^*$. Por otro lado como $\mu(\Omega^*) = 2^n\mu(\Omega)$ y como $n \geq 1$, se tiene entonces que

$$\mu(\Omega^*) \leq (2\sqrt{n})^n\mu(\Omega).$$

Además el inciso b) es cierto, puesto que al duplicar los lados de un cubo Q_i la distancia entre los puntos de éste y el centro y^i aumentan por lo menos al doble.

Una vez que hemos definido F^*, mostraremos que

$$\mu\left\{x \in F^* \mid Tb(x) > \frac{\alpha}{2}\right\} \leq \frac{2C}{\alpha} \| f \|_1 .$$

Para esto basta demostrar que

$$\int_{F^*} |Tb(x)|\, dx \leq C \| f \|_1 .$$

Comenzemos por escribir a $b(x) = \sum_i b_i(x)$, donde:

$$b_i(x) = \begin{cases} b(x) & si \quad x \in Q_i \\ 0 & si \quad x \notin Q_i. \end{cases}$$

Con la definición anterior tenemos que $(Tb)(x) = \sum_i (Tb_i)(x)$ y para cada i

$$Tb_i(x) = \int_{Q_i} K(x-y) b_i(y) dy.$$

Reescribiremos estas integrales otra forma. Sea y^i el centro del cubo Q_i, como $\int_{Q_i} b(x)dx = 0$ entonces se tiene que

$$Tb_i(x) = \int_{Q_i} \left[K(x-y) - K(x-y^i)\right] b_i(y) dy.$$

Integrando $|Tb|$ sobre F^* tenemos que

$$\int_{F^*} |Tb(x)|\, dx = \int_{F^*} \mid \sum_i \int_{Q_i} \left[K(x-y) - K(x-y^i)\right] b_i(y) dy \mid dx.$$

Por lo tanto

$$\int_{F^*} |Tb(x)|\, dx \leq \int_{F^*} \left(\sum_i \int_{Q_i} \left|K(x-y) - K(x-y^i)\right| |b_i(y)|\, dy \right) dx.$$

Pero, para cada x fija, la integral con respecto de y siempre es positiva, por lo que

$$\int_{F^*} |Tb(x)|\, dx \leq \sum_i \int_{x \notin Q_i^*} \left(\int_{Q_i} \left|K(x-y) - K(x-y^i)\right| |b_i(y)|\, dy \right) dx. \tag{3.7}$$

Por otro lado se tiene que la siguiente integral está acotada,

$$\int_{x \notin Q_i^*} \left|K(x-y) - K(x-y^i)\right| dx \leq B. \tag{3.8}$$

Para demostrar (3.8) haremos el cambio de variable $x' = x - y^i$, $y' = y - y^i$. Como estamos integrando sobre el conjunto$\{x \mid x \notin Q_i^*\}$, podemos utilizar la propiedad enunciada en II) y la hipótesis b) del teorema, es decir,

$$\int_{x \notin Q_i^*} \left|K(x-y) - K(x-y^i)\right| dx \leq \int_{|x'| \geq 2|y'|} |K(x'-y') - K(x')| \, dx \leq B.$$

Con lo anterior y por (3.8) y(3.7), se obtiene que

$$\int_{F^*} |Tb(x)| \, dx \leq \sum_i B \int_{Q_i} |b_i(y)| \, dy \leq C \| f \|_1 .$$

En particular se tiene que

$$\mu\left\{x \in F^* \mid Tb(x) > \frac{\alpha}{2}\right\} \leq \frac{2C}{\alpha} \| f \|_1 .$$

Sólo nos falta ver que

$$\mu\left\{x \in \Omega^* \mid Tb(x) > \frac{\alpha}{2}\right\} \leq \frac{2C}{\alpha} \| f \|_1 .$$

Para ello recordemos que en (3.4) se tenía que $\mu(\Omega) \leq \frac{2C}{\alpha} \| f \|_1$, y de las propiedades de Ω^* se tiene que $\mu(\Omega^*) \leq (2\sqrt{n})^n \mu(\Omega)$, por tanto

$$\mu(\Omega^*) \leq \mu\left\{x \in \Omega^* \mid Tb(x) > \frac{\alpha}{2}\right\} \leq \frac{2C}{\alpha} \| f \|_1 .$$

Así es como se obtiene la estimación para Tb. Al sustituir ésta y la obtenida para Tg en (3.6), se obtiene

$$\mu\{x \mid Tf(x) > \alpha\} \leq \frac{C}{\alpha} \| f \|_1$$

y de aquí que $T : L_1 \to L_1^*$.

(Tercer paso) $T : L_p \to L_p$ *si* $1 < p < \infty$.

Si $1 < p < 2$ podemos utilizar el teorema de Marcinkiewics ya que T es lineal y ya que por el paso 2 tenemos que $T : L_1 \to L_1^*$ y por el paso 1 tenemos que $T : L_2 \to L_2^*$. Por lo tanto $T : L_p \to L_p$ si $1 < p < 2$, es decir

$$\| T(f) \|_p \leq A \| f \|_p \qquad si \quad 1 < p < 2.$$

La desigualdad para $p = 2$ se sigue directamente del paso 1.

Para $2 < p < \infty$, no podemos concluir el resultado. Sin embargo, podemos utilizar espacios duales.

Sea q tal que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ y φ una función continua con soporte compacto tal que $\| \varphi \|_q \leq 1$. Como $f \in L_1 \cap L_p$ y $K \in L_2$ se tiene que

$$\int_{R^n}\int_{R^n} |K(x-y)f(y)\varphi(x)|\, dxdy < \infty,$$

y

$$\int_{R^n} (Tf(x))\varphi(x)dx = \int_{R^n} f(y)(T\varphi(-y))dy.$$

Pero recordemos que el teorema es válido para $1 < q < 2$, por lo que

$$\begin{aligned} \| T(\varphi) \|_q &= \|\textstyle\int_{R^n} K(x-y)\varphi(x)dx\|_q \\ &\leq A_q \| \varphi \|_q \\ &\leq A_q \end{aligned}$$

y por la desigualdad de Hölder se tiene

$$\int_{R^n} (Tf(x))\varphi(x)dx \leq A_q \| f \|_p .$$

Ahora utilizemos la dualidad entre L_p y L_q. Como el supremo de la integral anterior sobre todas las φ continuas con soporte compacto tales que $\| \varphi \|_q \leq 1$ está acotado, entonces

$$\| T(f) \|_p \leq A_q \| f \|_p .$$

Con lo que hemos obtenido el resultado para $2 < p < \infty$, quedando así demostrado el teorema. ∎

En el siguiente teorema veremos que es posible eliminar la hipótesis de que $K \in L_2$ haciendo modificaciones en el resto de las hipótesis. En particular el resultado así obtenido cubre los casos de las integrales singulares, que son las que nos interesan.

Teorema 25 *Supongamos que $K(x)$ satisface lo siguiente:*

$$|K(x)| \leq B|x|^{-n},$$

$$\int_{|x|\geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)|\,dx \leq B$$

y

$$\int_{R_1<|x|<R_2} K(x)dx = 0, \qquad para \quad 0 < R_1 < R_2 < \infty. \tag{3.9}$$

Si $f \in L_p, 1 < p < \infty$, para $\varepsilon > 0$ definimos

$$T_\varepsilon(f) = \int_{|y|\geq\varepsilon} f(x-y)K(y)dy,$$

entonces

$$\|T_\varepsilon(f)\|_{L_p} \leq A_p \| f \|_{L_p},$$

donde A_p es independiente de ε.

Antes de demostrarlo probaremos el siguiente lema.

Lema 26 *Supongamos que $K(x)$ satisface las condiciones del teorema anterior. Sea*

$$K_\varepsilon(x) = \begin{cases} K(x) & si \quad |x| \geq \varepsilon \\ 0 & si \quad |x| < \varepsilon. \end{cases}$$

Entonces $K_\varepsilon \in L_2$, además su transformada de Fourier se acota

$$\sup_y \left|\widehat{K_\varepsilon}(y)\right| \leq CB,$$

donde C depende sólo de n.

Prueba. Por la primera hipótesis es claro que $K_\varepsilon \in L_2$ para toda $\varepsilon > 0$. Veamos que su transformada de Fourier está acotada. Haremos la demostración en dos casos. El primer caso será para $\varepsilon = 1$ y el segundo caso será para $\varepsilon > 0$.

Primer caso: $\varepsilon = 1$.

Partiremos la integral que nos define su transformada de Fourier de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\widehat{K_1}(y) &= \lim_{R\to\infty}\int_{|x|\leq R} e^{2\pi i x\cdot y}K_1(x)dx \\ &= \int\limits_{|x|\leq 1/|y|} e^{2\pi i x\cdot y}K_1(x)dx + \lim_{R\to\infty}\int\limits_{1/|y|\leq|x|\leq R} e^{2\pi i x\cdot y}K_1(x)dx \\ &= I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Veamos que I_1 esta acotado, para ello utilizaremos la siguiente afirmación.

Afirmación *Existe $C \in R$ tal que*

$$\left|e^{2\pi i a} - 1\right| \leq Ca, \qquad \text{para toda } 0 \leq a \leq 1.$$

Para ver que es cierto utilizamos identidades trigonométricas y tenemos que:

$$\begin{aligned}\left|e^{2\pi i a} - 1\right| &= |\cos(2\pi a) + i sen(2\pi a) - 1| \\ &= 4\left|sen^2(2\pi a)\right|.\end{aligned}$$

Pero dado que $\lim_{\theta\to 0}\left|\frac{sen(2\pi\theta)}{\theta}\right|$ existe, se tiene que existe C tal que

$$\frac{|sen^2(2\pi a)|}{a} \leq C, \qquad \text{para toda } 0 \leq a \leq 1,$$

con lo que se demuestra la afirmación.

Ahora sí, veamos como se acota I_1. Por la definición de K_1 y como K cumple con (3.9), se tiene

$$\begin{aligned}I_1 &= \int\limits_{|x|\leq 1/|y|} e^{2\pi i x\cdot y}K_1(x)dx \\ &= \int\limits_{1\leq|x|\leq 1/|y|} \left[e^{2\pi i x\cdot y} - 1\right] K(x)dx,\end{aligned}$$

y utilizando la afirmación resulta

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{|x|\leq 1/|y|} e^{2\pi i x\cdot y} K_1(x)dx \\
&\leq C \int_{1\leq |x|\leq 1/|y|} |y|\,|x|\,|K(x)|\,dx \\
&\leq CB|y| \int_{1\leq |x|\leq 1/|y|} \frac{dx}{|x|^{n-1}} \\
&\leq CB|y| \int_{1\leq |x|\leq 1/|y|} dx \\
&\leq CB|y| \frac{1}{|y|} \\
&\leq BC,
\end{aligned}
$$

con lo que se demuestra que I_1 está acotada.

Para hacer la estimación de I_2 primero veamos que la siguiente observación es cierta.

Observación *Sea* $z = \frac{1}{2}\frac{y}{|y|^2}$ *, entonces tenemos que:*

$$\int_{R^n} K_1(x)e^{2\pi i x\cdot y}dx = -\int_{R^n} K_1(x-z)e^{2\pi i x\cdot y}dx.$$

Por un lado por la forma en que z fue elegida se tiene que

$$e^{2\pi i y\cdot z} = -1.$$

Para encontrar el valor de $\int_{R^n} K_1(x)e^{2\pi i x\cdot y}dx$ haremos el cambio de variable $x = x' - z$, resultando

$$
\begin{aligned}
\int_{R^n} K_1(x)e^{2\pi i x\cdot y}dx &= -\int_{R^n} K_1(x'-z)e^{2\pi i(x'-z)\cdot y}(-1)dx' \\
&= -\int_{R^n} K_1(x'-z)e^{2\pi i(x'-z)\cdot y}(e^{2\pi i y\cdot z})dx' \\
&= -\int_{R^n} K_1(x-z)e^{2\pi i x\cdot y}dx.
\end{aligned}
$$

Con lo que queda demostrada la observación.

Continuemos con nuestro trabajo de acotar I_2. De la observación anterior tenemos que

$$\int_{R^n} K_1(x)e^{2\pi i x\cdot y}dx = \frac{1}{2}\int_{R^n}\left[K_1(x) - K_1(x-z)\right]e^{2\pi i x\cdot y}dx, \tag{3.10}$$

pero esta última integral la podemos expresar como la suma de las integrales sobre regiones complementarias de la misma función, es decir:

$$\int_{R^n} K_1(x)e^{2\pi i x\cdot y}dx = J_0 + J_1 \tag{3.11}$$

donde:

$$J_0 = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{1/|y|\le|x|\le R}\left[K_1(x) - K_1(x-z)\right]e^{2\pi i x\cdot y}dx.$$

y

$$J_1 = \frac{1}{2}\int_{|x|\le 1/|y|}\left[K_1(x) - K_1(x-z)\right]e^{2\pi i x\cdot y}dx.$$

Por otro lado

$$\int_{R^n} e^{2\pi i x\cdot y}K_1(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_{1/|y|\le|x|\le R} K_1(x)e^{2\pi i x\cdot y}dx + \int_{|x|\le 1/|y|} K_1(x)e^{2\pi i x\cdot y}dx.$$

De esto último, de (3.10) y de (3.11), se obtiene que

$$\begin{aligned} I_2 &= \lim_{R\to\infty}\int_{1/|y|\le|x|\le R} e^{2\pi i x\cdot y}K_1(x)dx \\ &= J_0 + \left[J_1 - \int_{|x|<1/|y|} e^{2\pi i x\cdot y}K_1(x)dx\right] \qquad (3.12) \\ &= J_0 - \tfrac{1}{2}\int_{|x|\le 1/|y|} K_1(x)e^{2\pi i x\cdot y}dx - \tfrac{1}{2}\int_{|x|\le 1/|y|} K_1(x-z)e^{2\pi i x\cdot y}dx, \end{aligned}$$

que es la integral que queremos acotar.

Por otro observemos que haciendo el cambio de variable $x' = x - z$, obtenemos

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\int_{|x|<1/|y|} K_1(x-z)e^{2\pi i x\cdot y}dx &= \tfrac{1}{2}\int_{|x'+z|<1/|y|} K_1(x')e^{2\pi i x'\cdot y}e^{2\pi i y\cdot z}dx' \\ &= -\tfrac{1}{2}\int_{|x'+z|<1/|y|} K_1(x)e^{2\pi i x\cdot y}dx. \end{aligned}$$

Al sustituir lo anterior en (3.12), obtenemos

$$I_2 = J_0 - \frac{1}{2}\int\limits_{|z|\leq 1/|y|} K_1(x)e^{2\pi i x\cdot y}dx + \frac{1}{2}\int_{|x'+z|<1/|y|} K_1(x)e^{2\pi i x\cdot y}dx.$$

Por lo anterior tenemos que

$$I_2 = J_0 - \frac{1}{2}\int\limits_{\substack{|z|\leq 1/|y| \\ |x+z|\geq 1/|y|}} K_1(x-z)e^{2\pi i x\cdot y}dx. \tag{3.13}$$

Tratamos, pues, de acotar a I_2 y para ello veamos que sucede con J_0.

Como $2|z| = \frac{1}{|y|}$, se tiene que

$$|J_0| \leq \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int\limits_{2|z|\leq|x|\leq R} |K_1(x) - K_1(x-z)|\left|e^{2\pi i x\cdot y}\right| dx,$$

que por hipótesis es acotado, por lo que J_0 es acotado.

Para la última integral de (3.13) observamos que

$$\{x \in R^n \mid |x| \leq 1/|y|, |x+z| \geq 1/|y|\} \subset \left\{x \in R^n \mid \frac{1}{2}|y| \leq |x| \leq 1/|y|\right\},$$

por tanto

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\substack{|z|\leq 1/|y| \\ |x+z|\geq 1/|y|}} \left|K_1(x)e^{2\pi i x\cdot y}\right| dx &\leq \int\limits_{\frac{1}{2}|y|\leq|x|\leq 1/|y|} |K_1(x)|\, dx \\
&\leq \int\limits_{\frac{1}{2}|y|\leq|x|\leq 1/|y|} B\,|x|^{-n}\, dx \\
&\leq CB,
\end{aligned}$$

de donde tambien la esta integral está acotada.

Ahora, sólo combinamos las dos cotas que acabamos de obtener y sustituyendo en (3.13) y obtenemos

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{1/|y|\leq|x|\leq R} e^{2\pi i x\cdot y}K_1(x)dx \leq CB,$$

por tanto

$$\left|\widehat{K}_1(y)\right| \leq CB,$$

con lo que se demuestra para el caso $\varepsilon = 1$.

Segundo caso: $\varepsilon > 0$.

Definimos
$$K'(x) = \varepsilon^n K(\varepsilon x).$$

Mostraremos que este nuevo nucleo $K'(x)$ cumple con las hipótesis del teorema 25.

a)$K'(x)$ satisface que $K'(x) \leq |x|^{-n}$ porque
$$K'(x) = \varepsilon^n K(\varepsilon x) \leq \frac{\varepsilon^n}{|\varepsilon^n x|^n} = \frac{1}{|x|^n}.$$

b)$K'(x)$ satisface $\int_{|x|\geq 2|y|} |K'(x-y) - K'(x)|\,dx \leq B$ porque

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\geq 2|y|} |K'(x-y) - K'(x)|\,dx &= \int_{|x|\geq 2|y|} \varepsilon^n\, |K(\varepsilon(x-y)) - K(\varepsilon x)|\,dx \\
&= \int_{|u|\geq 2|\varepsilon y|} |K(u-\varepsilon y) - K(u)|\,du \\
&\leq B.
\end{aligned}$$

c)$K'(x)$ satisface $\int\limits_{R_1<|x|<R_2} K'(x)dx = 0$ porque

$$\begin{aligned}
\int\limits_{R_1<|x|<R_2} K'(x)dx &= \int\limits_{R_1<|x|<R_2} \varepsilon^n K(\varepsilon x)dx \\
&= \int\limits_{\varepsilon R_1<|u|<\varepsilon R_2} K(u)du \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Puesto que $K'(x)$ satisface las hipótesis del lema
$$K_1'(x) = \begin{cases} K'(x) & si \quad |x| \geq 1 \\ 0 & si \quad |x| < 1 \end{cases}$$

verifica
$$\left|\widehat{K_1'}(y)\right| \leq CB.$$

Por otro lado veremos que $K_\varepsilon(x) = \varepsilon^n K_1'(\varepsilon^{-1}x)$. Para ello observemos que:
$$K_1'(\varepsilon^{-1}x) = \begin{cases} K'(\varepsilon^{-1}x) & si \quad |\varepsilon^{-1}x| \geq 1 \\ 0 & si \quad |\varepsilon^{-1}x| < 1 \end{cases},$$

Definimos

$$K'(x) = \varepsilon^n K(\varepsilon x).$$

Mostraremos que este nuevo nucleo $K'(x)$ cumple con las hipótesis del teorema 25.

a)$K'(x)$ satisface que $K'(x) \leq |x|^{-n}$ porque

$$K'(x) = \varepsilon^n K(\varepsilon x) \leq \frac{\varepsilon^n}{|\varepsilon^n x|^n} = \frac{1}{|x|^n}.$$

b)$K'(x)$ satisface $\int_{|x| \geq 2|y|} |K'(x-y) - K'(x)|\, dx \leq B$ porque

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\geq 2|y|} |K'(x-y) - K'(x)|\, dx &= \int_{|x|\geq 2|y|} \varepsilon^n \left|K(\varepsilon(x-y)) - K(\varepsilon x)\right| dx \\
&= \int_{|u|\geq 2|\varepsilon y|} |K(u-\varepsilon y) - K(u)|\, du \\
&\leq B.
\end{aligned}$$

c)$K'(x)$ satisface $\displaystyle\int_{R_1<|x|<R_2} K'(x)dx = 0$ porque

$$\begin{aligned}
\int_{R_1<|x|<R_2} K'(x)dx &= \int_{R_1<|x|<R_2} \varepsilon^n K(\varepsilon x)dx \\
&= \int_{\varepsilon R_1<|u|<\varepsilon R_2} K(u)du \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Puesto que $K'(x)$ satisface las hipótesis del lema

$$K_1'(x) = \begin{cases} K'(x) & si \quad |x| \geq 1 \\ 0 & si \quad |x| < 1 \end{cases}$$

verifica

$$\left|\widehat{K_1'}(y)\right| \leq CB.$$

Por otro lado veremos que $K_\varepsilon(x) = \varepsilon^n K_1'(\varepsilon^{-1}x)$. Para ello observemos que:

$$K_1'(\varepsilon^{-1}x) = \begin{cases} K'(\varepsilon^{-1}x) & si \quad |\varepsilon^{-1}x| \geq 1 \\ 0 & si \quad |\varepsilon^{-1}x| < 1 \end{cases},$$

pero

$$K'(\varepsilon^{-1}x) = \varepsilon^n K(\varepsilon(\varepsilon^{-1}x))$$

y por lo tanto se demuestra la igualdad.

Para la transformada de Fourier se tiene que $\widehat{K_1'}(\varepsilon y) = \varepsilon^n \widehat{K_1'}(\varepsilon x) = \widehat{K_\varepsilon(x)}$ y combinando lo anterior se obtiene

$$\left|\widehat{K_\varepsilon(x)}(y)\right| \leq CB,$$

con lo que queda demostrado el lema. ■

En la última parte de la demostración del lema podemos ver que la cota que se obtiene es independiente del valor de ε, dicha cota solo depende de la dimensión n. Ahora, con la ayuda de este lema será fácil demostrar el teorema 25.

Prueba. (teorema 25) Sea $f \in L_p$ y $K(x)$ que cumple las hipótesis. Por un lado tenemos que

$$\begin{aligned} T_\varepsilon(f) &= \int_{|y|\geq\varepsilon} f(x-y)K(y)dy \\ &= \int_{R^n} f(x-y)K_\varepsilon(y)dy \\ &= \int_{R^n} K_\varepsilon(x-y)f(y)dy, \end{aligned}$$

por lo que para probar que $T_\varepsilon(f)$ está acotado tenemos que probar que K_ε cumple las hipótesis del teorema (24). El hecho de que $K_\varepsilon \in L_2$ lo obtenemos directamente del lema anterior, así como el hecho de que $\left|\widehat{K_\varepsilon}(y)\right| \leq C$; con esta simple observación se demuestra el teorema. Tambien enfatizamos el hecho de que la cota obtenida no depende de ε. ■

Una observación importante es que para R, con el operador T_ε se puede definir un operador T tomando el límite de $T_\varepsilon(f)$ en norma $L_p(R)$, es decir,

$$T(f) = \lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon(f),$$

que además, como esta convergencia se da en $L_p(R)$, tambien cumplirá con la cota

$$\|T(f)\|_{L_p} \leq A_p \| f \|_{L_p}.$$

Para probar que la convergencia en $L_p(R)$ sí se da, utilizamos el hecho de que si $f \in L_p(R)$, entonces f puede ser aproximada por una función f_1 continua de soporte compacto y derivada continua, probaremos, pues, que $T_\varepsilon(f_1)$ converge en norma L_p, cuando $\varepsilon \to 0$.

Dado que $K(y)$ cumple con $\int_{1<|y|<\varepsilon} K(y)dy = 0$, podemos escribir $T_\varepsilon(f_1)(x)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} T_\varepsilon(f_1)(x) &= \int_{|y|\geq\varepsilon} f_1(x-y)K(y)dy \\ &= \int_{|y|\geq 1} f_1(x-y)K(y)dy + \int_{1\geq|y|\geq\varepsilon} [f_1(x-y) - f_1(x)]\, K(y)dy. \end{aligned}$$

La primera integral representa la convolución de f_1 con el nucleo K. Por un lado tenemos que $f_1 \in L_1$, y por otro lado tenemos que $K(y) \in L_p$ pues $|K(y)| \leq B|y|^{-1}$ con $|y| \geq 1$. Con lo anterior se tiene que la convolución de estas dos funciones está en L_p, dicho de otra forma la primera integral está en L_p.

La segunda integral define una función con soporte compacto en x, veremos que está acotada. Por ser f_1 diferenciable y de soporte compacto, se tiene que existe A tal que:

$$|f_1(x-y) - f_1(x)| \leq A|y|,$$

por tanto

$$\begin{aligned} \left| \int_{1\geq|y|\geq\varepsilon} [f_1(x-y) - f_1(x)]\, K(y)dy \right| &\leq \int_{1\geq|y|\geq\varepsilon} A|y|\,|K(y)|\,dy \\ &\leq \int_{1\geq|y|\geq\varepsilon} ABdy, \end{aligned}$$

de donde es acotada, y por tener soporte compacto está en L_p.

Con las dos cotas obtenidas anteriormente concluimos que $T_\varepsilon(f_1)$ converge en norma L_p, cuando $\varepsilon \to 0$.

Para el caso de $K(x) = \dfrac{1}{\pi x}$, $x \in R$, veremos que cumple las hipótesis del teorema. Por la forma en que está definida

$$|K(x)| \leq B|x|^{-1},$$

por ser función impar se tiene que

$$\int_{R_1<|x|<R_2} K(x)dx = 0 \qquad para \quad 0 < R_1 < R_2 < \infty$$

y sólo faltaría ver que

$$\int\limits_{|x|\geq 2|y|} |K(x-y)-K(x)|\,dx \leq B,$$

pero es cierto puesto que

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|x|\geq 2|y|} \left|\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x}\right| dx \leq A.$$

De lo anterior tenemos que a $K(x)=\dfrac{1}{\pi x}$ le podemos aplicar el teorema (25); y por la observación que se hizó acerca del límite concluimos que: si $f \in L_p$, $1 < p < \infty$, entonces

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{|y|\geq\epsilon} \frac{f(x-y)}{\pi y}\,dy$$

existe en la norma L_p, además resulta un operador acotado en L_p.Es así como se prueba que la Transformada de Hilbert existe.

La teoría de Integrales singulares tiene una amplia gama de aplicaciones. Por ejemplo para la solución del problema de Dirichlet que dice: Dada una f función en L_p, encontrar una F función armónica en el semiplano superior cuyo valor en la frontera del semiplano sea f.

Este problema puede ser resuelto por medio de la integral de Poisson, que precisamente es la convolución de f con el nucleo de Poisson ($\frac{1}{1+x^2}$, para el semiplano).

En forma explicita sea f tal que $f \in L_p, 1 < p < \infty$. Sea $P_t(x)=\frac{t}{t^2+x^2}$, definimos

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}f * P_t(x).$$

Se puede mostrar que la función $u\,(x,t)$ es armónica en el semiplano superior, además

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{\pi}f * P_t(x)=f(x),$$

lo que resuelve el problema de Dirichlet.

Además, si definimos

$$v\,(x,t)=Hu\,(\cdot,t)\,(x),$$

donde H es la transformada de Hilbert.

Se puede mostrar que $v\,(x,t)$ es conjugada armónica de $u\,(x,t)$, es decir que la función F definida como

$$F\,(x,t)=u\,(x,t)+iv\,(x,t)$$

es holomorfa en R^2_+. Además

$$Hf = \lim_{t \to 0} v(x,t).$$

Para una demostración de esto se puede consultar Stein & Weiss [St2] o García-Cuerva [G-C].

BIBLIOGRAFÍA

[Bergh] Bergh, J. and Löfströn, J.: Interpolation Spaces, An Introduction. Spring-Verlag (1976).

[Brud] Brudnyí, Yu. A., Kugljak, N. Ya. Interpolation Functors and Interpolation Spaces. Noth-Holland (1991).

[G-C] García-Cuerva, J., and J.L. Rubio de Francia: Weighted Norm Inequalities and Related Topics. North-Holland (1985).

[Katz] Katznelson, Y.:Harmonic Analysis. John Wiley & Sons, Inc.(1968)

[Rudin] Rudin, W.:Real and Complex Analysis. McGraw-Hill (1966).

[Stein] Stein, E. M.: Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton Univ. Press (1970).

[St] Stein, E. M.: Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals. Princeton Univ. Press (1993).

[St2] Stein, E. M., and G. Weiss: Introduction to Fourier Analysis on Euclidian Spaces. Princeton Univ. Press (1971).