12
2Ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MAYORIZACION DE LA MULTIPLICIDAD LOCAL DE INTERSECCION EN SISTEMAS DINAMICOS HOLOMORFOS.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

MANUEL HERNANDEZ ROSALES

MEXICO, D. F. 1996

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

UNIVERSIDAD NACIONAL AVPNOMA DE MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

Mayorización de la multiplicidad local de intersección en sistemas dinámicos holomorfos.

realizado por Manuel Hernández Rosales

con número de cuenta 8600222-8 , pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Ernesto Rosales González	Ernesto Rosales González
Propietario	Dr. Xavier Gómez-Mont Avalos	
Propietario	Dra. Laura Ortiz Bobadilla	Laura Ortiz B.
Suplente	Dr. José Omegar Calvo Andrade	Omegar Calvo
Suplente	Dr. Jesús Ruperto Muciño Raymundo	

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

Dedico esta tesis a mis padres.

Deseo expresar toda mi gratitud:

A mis padres y hermanas, por su confianza, ayuda y gran empuje.

A Silvia, por haber compartido tanto conmigo.

A Laura y Ernesto, porque no solo han sido unos grandes maestros sino también unos grandes amigos.

A Xavier Gomez-Mont, por el gran animo que me ha infundido en las Matemáticas.

A Viginia Abrín, por ser una gran amiga que me ha ayudado tanto.

A Helio, Amadeo, Guerrero y Ezequiel, por ser mis amigos de toda la vida.

Gracias de todo corazón.

Mayorización de la multiplicidad local de intersección en sistemas dinámicos holomorfos

Manuel Hernández Rosales

Indice

Introducción

En esta tesis, partiendo de la definición de los conceptos de grado y multiplicidad, daremos un extenso panorama de sus aplicaciones en Topología Diferencial y en Sistemas Dinámicos. En particular el desarrollo de estos conceptos nos servirá para abordar el artículo de V. I. Arnold: "Mayorización de los números de intersección de Milnor en sistemas dinámicos holomorfos", que hace referencia al comportamiento de las multiplicidades de una sucesión de gérmenes de transformación holomorfa.

El Capítulo 1 aborda varios conceptos y resultados que son útiles para la comprensión de lo que es el grado y la multiplicidad asi como para la comprensión de los resultados obtenidos a partir de estos conceptos. Algunos de ellos son particiones de la unidad, aproximación de funciones continuas por funciones diferenciables, el teorema de la función inversa, el teorema de inmersión, el teorema de surmersión, imagen inversa de valores regulares para transformaciones de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^n$ y el teorema de Sard.

El Capítulo 2 trata acerca de las transformaciones definidas desde la cerradura de abiertos en $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. Probamos algunas propiedades, entre ellas la invariancia bajo homotopías, invariancia local del grado, invariancia bajo escisión.

El Capítulo 3 aborda la cuestión de extender el concepto de grado a transformaciones entre variedades diferenciables orientadas y cerradas. Probamos en este capítulo varias propiedades, entre ellas la independencia del valor regular y la invariancia bajo homotopías. También probamos en el caso de una transformación entre variedades con frontera que manda la frontera de la variedad dominio en la frontera de la variedad imagen que el grado de la función restringida a la frontera es lo mismo que el grado de la transformación. Ademas con la ayuda del concepto de grado probamos el teorema de Gauss y el hecho de que para transformaciones holomorfas el grado mide el número de preimagenes inversas de un valor regular. Asimismo abordamos la relación entre la integral de una forma de volumen y de su pullback. Despues obtenemos una expresión de *grado f* para el caso de la función de Gauss definida sobre una hipersuperficie.

En el Capítulo 4 definimos el concepto de algebra local y de multiplicidad de un germen de transformación holomorfa en un punto. También hemos definido el concepto de índice de una transformación en un punto. Después de esto nos hemos concentrado en lo que es el objetivo primordial de este capítulo que es el demostrar que para transformaciones holomorfas el índice en un punto es igual a la dimensión de su algebra local. Para ello ha sido necesario probar varios lemas referentes al comportamiento del índice y la multiplicidad bajo pequeñas perturbaciones de una transformación holomorfa, y bajo una relación llamada $\mathcal{A}$-equivalencia. Importante consecuencia de los lemas es el de presentar el resultado principal de este capítulo en los siguientes términos: La multiplicidad de un germen de transformación holomorfa en un punto a es igual al número de preimagenes inversas de un punto genérico en la vecindad de a.

En el Capítulo 5 demostramos el teorema que es el objetivo principal de la tesis. Dice lo siguiente:

Si $A : (\mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ es un biholomorfismo local. $a : (\mathbb{C}^k, 0) \to (\mathbb{C}^m, 0)$ es un encaje sobre una subvariedad suave X^k y si $b : (\mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C}^k, 0)$ es una proyección a lo largo de una subvariedad suave Y^{m-k}. Entonces las multiplicidades en el origen de las transformaciones $f_n : (\mathbb{C}^k, 0) \to (\mathbb{C}^k, 0)$ definidas por:

$$f_n = b \circ A^n \circ a : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^k$$

estan acotadas si cada multiplicidad es finita.

1 Conceptos preliminares

En este capítulo introduciremos algunos conceptos y mencionaremos algunos resultados que nos seran útiles para la definición y desarrollo del concepto de grado. Las pruebas pueden encontrarse en [AD].

1.1 Definiciones básicas

Definición 1.1.1 *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado y $V \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto que contiene a A. Una función pastel de A en V es una función suave ($= C^\infty$), $h : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ que en A es constante igual a 1 y fuera de V es constante igual a 0 y tal que 0 y 1 son sus únicos valores críticos.*

Definición 1.1.2 *Sea Ξ un sistema arbitrario de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$, y $X = \cup_{V \in \Xi} V$ la unión de todos estos conjuntos. Una partición de la unidad subordinada a Ξ es una familia de funciones suaves tal que $\pi_V : X \to [0,1]$ con las siguientes propiedades:*

(i) La función π_V se anula en $X - V$ y $\pi_V^{-1}(0,1] \subset V$.

(ii)$\{\pi_V\}_{V \in \Xi}$ es localmente finita, i. e., cada punto x de X tiene una vecindad donde solo un número finito de las funciones toman valores positivos.

(iii) $\sum_{V \in \Xi} \pi_V(x) = 1$.

Enunciemos sin prueba el siguiente:

Teorema 1.1.3 *Para cada sistema Ξ de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$, existe una partición de la unidad subordinada a él.*

Del teorema anterior como consecuencia el siguiente:

Corolario 1.1.4 *Cada conjunto cerrado $A \subset \mathbb{R}^n$ posee una función pastel en cada vecindad abierta U.*

1.2 Teoremas de aproximación

Las particiones de la unidad se pueden utilizar para aproximar funciones. En este caso mencionaremos varios teoremas de aproximación de funciones continuas f por funciones diferenciables g.

1 Conceptos preliminares

En este capítulo introduciremos algunos conceptos y mencionaremos algunos resultados que nos seran útiles para la definición y desarrollo del concepto de grado. Las pruebas pueden encontrarse en [AD].

1.1 Definiciones básicas

Definición 1.1.1 *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado y $V \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto que contiene a A. Una función pastel de A en V es una función suave ($= C^\infty$), $h : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ que en A es constante igual a 1 y fuera de V es constante igual a 0 y tal que 0 y 1 son sus únicos valores críticos.*

Definición 1.1.2 *Sea Ξ un sistema arbitrario de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$, y $X = \cup_{V \in \Xi} V$ la unión de todos estos conjuntos. Una partición de la unidad subordinada a Ξ es una familia de funciones suaves tal que $\pi_V : X \to [0,1]$ con las siguientes propiedades:*

(i) La función π_V se anula en $X - V$ y $\pi_V^{-1}(0,1] \subset V$.

(ii)$\{\pi_V\}_{V \in \Xi}$ es localmente finita, i. e., cada punto x de X tiene una vecindad donde solo un número finito de las funciones toman valores positivos.

(iii) $\sum_{V \in \Xi} \pi_V(x) = 1$.

Enunciemos sin prueba el siguiente:

Teorema 1.1.3 *Para cada sistema Ξ de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$, existe una partición de la unidad subordinada a él.*

Del teorema anterior como consecuencia el siguiente:

Corolario 1.1.4 *Cada conjunto cerrado $A \subset \mathbb{R}^n$ posee una función pastel en cada vecindad abierta U.*

1.2 Teoremas de aproximación

Las particiones de la unidad se pueden utilizar para aproximar funciones. En este caso mencionaremos varios teoremas de aproximación de funciones continuas f por funciones diferenciables g.

Teorema 1.2.1 *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacio, $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua y $\epsilon > 0$. Entonces hay una función diferenciable $g : X \to \mathbb{R}$ tal que $\|f(x) - g(x)\| \leq \epsilon$ para toda $x \epsilon X$.*

Teorema 1.2.2 *Sean $X \subset \mathbb{R}^n$ y $f : X \to \mathbb{R}$ como en 1.2.1 y sea $\epsilon : X \to \mathbb{R}$ una función continua positiva ($\epsilon(x) > 0$ para $x \epsilon X$). Entonces existe una función diferenciable $g : X \to \mathbb{R}$ tal que $\|f(x) - g(x)\| \leq \epsilon(x)$ para toda $x \epsilon X$.*

Teorema 1.2.3 *Sean $X \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}$, $\epsilon : X \to (0, \infty)$ como en el teorema (1.2.2) Sea también $A \subset \mathbb{R}^n$ cerrado tal que f es diferenciable en una vecindad de $A \cap X$. Entonces existe una función diferenciable $g : X \to \mathbb{R}^n$ que coincide con f en $A \cap X$ ($g|_{A \cap X} = f|_{A \cap X}$) y es tal que $\|f(x) - g(x)\| \leq \epsilon(x)$ para toda $x \in X$.*

Teorema 1.2.4 *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $A \subset \mathbb{R}^n$ cerrado y Y un conjunto tal que $X \subset Y \subset \mathbb{R}^n$. Sea $f : Y \to \mathbb{R}$ una función continua, que es lisa en una vecindad de $A \cap X$. Finalmente, sea $\epsilon : Y \to [0, \infty)$ una función continua que es positiva exactamente en X, es decir que $X = \epsilon^{-1}(0, +\infty)$. Entonces existe una función continua $g : Y \to \mathbb{R}$ que es diferenciable en X y es tal que $\|f(y) - g(y)\| \leq \epsilon(y)$ para toda $y \in Y$ y que $g(a) = f(a)$ para toda $a \in Y \cap A$.*

1.3 Transformaciones diferenciables de rango máximo

En esta sección consideraremos transformaciones diferenciables $f : X \to \mathbb{R}^n$ donde $X \subset \mathbb{R}^m$.

Definición 1.3.1 *Sean X y X' subconjuntos de $\mathbb{R}^m$. Una transformación diferenciable $\varphi : X \to X'$ se llama difeomorfismo, si existe una transformación diferenciable $\psi : X' \to X$ tal que $\psi \circ \varphi = 1_X$ y $\varphi \circ \psi = 1_{X'}$, donde 1_X y $1_{X'}$ son las transformaciones identidad en X y en X' respectivamente.*

Definición 1.3.2 *Sea $\varphi : X \to \mathbb{R}^n$ una transformación diferenciable ($X \subset \mathbb{R}^n$ abierto) y $a \epsilon X$. Decimos que φ es un difeomorfismo local en a si aplica a una vecindad abierta (suficientemente pequeña) de a, $U \subset X$ difeomorfamente en $\varphi(U)$.*

Uno de los teoremas más utiles e importantes es el *Teorema de la Transformación Inversa* el cual afirma:

Teorema 1.3.3 *Sea $\varphi : X \to \mathbb{R}^n$ una transformación diferenciable ($X \subset \mathbb{R}^n$abierto). Entonces φ es un difeomorfismo local en $a \in X$ si y solo si $det(D\varphi(a)) \neq 0$, o sea si y solo si $D\varphi(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es invertible.*

Consecuencia de este teorema son los importantes teoremas de inmersion y surmersión que enunciaremos enseguida:

Teorema 1.3.4 *(Teorema de inmersión)*

Sean $f : X \to \mathbb{R}^n$ una transformación diferenciable ($X \subset \mathbb{R}^m$ abierto) y $a \epsilon X$ un punto en el cual $Df(a)$ tiene rango m. Si $m \leq n$ entonces hay un difeomorfismo φ que aplica una vecindad $V \subset \mathbb{R}^n$ del punto $f(a)$ de tal forma que $\varphi(0) = f(a)$ y

$$f(x + a) = \varphi(x_1, ..., x_m, 0, ..., 0)$$

para toda $x \epsilon \mathbb{R}^m$ para la cual $(x, 0) \epsilon V$.

Teorema 1.3.5 *(Teorema de submersión)*

Sea $f : X \to \mathbb{R}^n$ una transformación diferenciable ($X \subset \mathbb{R}^m$ abierto), y $a \epsilon X$ un punto en el cual $Df(a)$ tiene rango n. Si $m \geq n$, entonces hay un difeomorfismo φ que aplica a una vecindad $U \subset \mathbb{R}^m$ del origen sobre una vecindad $\varphi(U) \subset X$ del punto a, de forma que $\varphi(0) = a$ y

$$f\varphi(x_1, ..., x_m) - f(a) = (x_1, ..., x_m)$$

para $x \epsilon U$.

En el caso de que $rango Df(x) = r$ en una vecindad del punto a tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1.3.6 *Sean $f : X \to \mathbb{R}^n$ una transformación diferenciable ($X \subset \mathbb{R}^m$ abierto) y $a \epsilon X$ un punto tal que el rango de la derivada $Df(x)$ sea constante en una vecindad de a. Entonces hay difeomorfismos φ y ψ, que estan definidos en vecindades $U \subset \mathbb{R}^m$ y $V \subset \mathbb{R}^n$ del origen de tal manera que*

$$\varphi(0) = a, \psi(0) = f(a)$$

$$f\varphi(x) = \psi(x_1, ..., x_r, 0, ..., 0)$$

para toda $x = (x_1, ..., x_m) \epsilon \mathbb{R}^m$ suficientemente cercana a 0.

1.4 n ecuaciones en n variables

En esta sección consideraremos una transformación diferenciable $f : X \to \mathbb{R}^n$ donde $X \subset \mathbb{R}^n$ es abierto. Nos interesara que estructura tienen las imagenes inversas de puntos en el contradominio.

Definición 1.4.1 *Sea $y \epsilon \mathbb{R}^n$ tal que rango$Df(x) = n$ para toda $x \epsilon f^{-1}(y)$. Al valor y lo llamamos valor regular de f. Un punto $x \in X$ se la llama punto crítico si rango $Df(x) < n$. Y un valor no regular $y \in \mathbb{R}^n$ se designa como valor crítico de f*

Para la introducción del concepto de grado necesitamos que el número de preimagenes de un valor regular sea finito. El siguiente teorema nos da una condicion para que esto se cumpla y asegura que el número de preimagenes es constante en una vecindad de un valor regular:

Teorema 1.4.2 *Si $f : X \to \mathbb{R}^n$ es una transformación diferenciable ($X \subset \mathbb{R}^n$ abierto), $Y \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto que contiene a $f(X)$, y si $f : X \to Y$ es cerrada, entonces cada valor regular $y \epsilon Y$ tiene una vecindad abierta $W \subset \mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}(W)$ se descompone en un número finito de conjuntos abiertos ajenos $U_1, ..., U_n$, de los cuales cada uno es aplicado difeomorfamente por f sobre W. Cada valor regular $y \epsilon Y$ tiene solo un número finito de preimagenes; el número de puntos en $f^{-1}(y)$ es localmente constante como función del valor regular $y \epsilon Y$.*

1.5 n ecuaciones lisas en $n+1$ variables

Aqui, consideraremos una transformación diferenciable $f : X \to \mathbb{R}^n$ con $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Nos interesara preguntarnos como es la imagen inversa $f^{-1}(y)$ de un valor regular y en el contradominio. El teorema que enunciaremos da la respuesta a esta cuestion. Antes comencemos con una definición:

Definición 1.5.1 *Sea $f : X \to \mathbb{R}^n$ una transformacion diferenciable con $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ Si rango $Df(x) = n$ para toda $x \epsilon f^{-1}(y)$ denominamos a y como valor regular de la transformación f.*

Teorema 1.5.2 *Sea y una valor regular de la transformación f y K una componente conexa de $f^{-1}(y)$. Entonces existe una aplicación lisa $\alpha : \mathbb{R} \to$*

X de rango constante igual a 1 que aplica $\mathbb{R}$ sobre K (o sea $\alpha(\mathbb{R}) = K$) y tal que satisface lo siguiente:

(i) Si K no es compacto, α es un homeomorfismo.

(ii) Si K es compacto, α tienc periodo 1, es decir $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ si y solo si $t_1 - t_2$ es un entero.

Por ultimo mencionaremos otro resultado importante:

Teorema 1.5.3 *Si $f : X \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación lisa ($X \subset \mathbb{R}^{n+1}$, abierto) y si $f : X \to f(X)$ es cerrada entonces los valores regulares de f en $\mathbb{R}^n$ forman un conjunto abierto. La imagen inversa $f^{-1}(y)$ de cada valor regular y es compacta, consiste de este modo de un número finito de curvas cerradas simples. El número de estas curvas es localmente constante como función del valor regular y.*

1.6 El Teorema de Sard

En esta sección haremos mención de un teorema de máxima importancia en lo que precede: El llamado Teorema de Sard.

Definición 1.6.1 *Sea $f : X \to \mathbb{R}^n$ una trnasformación diferenciable, donde $X \subset \mathbb{R}^m$ es abierto. Un punto $x \epsilon X$ tal que rango$Df(x) < n$ es llamado un punto crítico de la transformación f.*

Lo que afirma el teorema de Sard es lo siguiente:

Teorema 1.6.2 *(Teorema de Sard) Sea $f : X \to \mathbb{R}^n$ una transformacion diferenciable ($X \subset \mathbb{R}^m$ abierto) y sea $Sf = \{x \epsilon X \mid \text{rango } Df(x) < n\}$ el conjunto de los puntos críticos de f, entonces su imagen $f(Sf) \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto de medida de Lebesgue cero.*

Definición 1.6.3 *Similarmente a lo antes definido se llama a $y \epsilon \mathbb{R}^n$ un valor regular de la transformación $f : X \to \mathbb{R}^n$ ($X \subset \mathbb{R}^m$ abierto), si cumple con que rango $Df(x) = n$ para todo $x \epsilon f^{-1}(y)$.*

Entonces consecuencia del teorema de Sard tenemos el siguiente:

Corolario 1.6.4 *Para cada transformacion diferenciable $f : X \to \mathbb{R}^n$ ($X \subset \mathbb{R}^m$ abierto), el conjunto de los valores regulares es denso en $\mathbb{R}^n$.*

2 Grado de una transformación

2.1 Introducción

En este capítulo consideraremos transformaciones continuas $f : U \to \mathbb{R}^n$, donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto. En el caso de que f sea diferenciable, cerrada y tenemos que y_0 es un valor regular entonces $f^{-1}(y_0)$ es finito y podemos distinguir entre puntos $x \epsilon f^{-1}(y_0)$ de acuerdo a si el signo del determinante jacobiano $det(Df(x))$ es positivo o negativo. A lo largo del capítulo veremos que para funciones continuas en general podemos asociar a cada punto $y_0 \epsilon \mathbb{R}^n$ cuya imagen inversa sea compacta, un número entero que coincida con el conteo que haremos en el caso de funciones diferenciables. Antes de empezar propiamente mencionemos el siguiente teorema que sera importante en lo que sigue:

Teorema 2.1.1 *Si $f : Z \to \mathbb{R}^n$ es continua donde Z es un espacio compacto entonces f es una transformación cerrada. Mas aun, para todo subconjunto $Y \subset \mathbb{R}^n$ la transformación restringida*

$$f_Y = f|_{f^{-1}(Y)} \to Y$$

es cerrada.

2.2 Definiciones básicas

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto acotado y $f : \bar{U} \to \mathbb{R}^n$ una transformación continua, cuya restriccion $f|_U$ es diferenciable. Considere el conjunto abierto $Y = \mathbb{R}^n - f(\bar{U} - U)$. Entonces $f^{-1}(Y)$ es un subconjunto abierto de U y por lo tanto de $\mathbb{R}^n$. La transformación $f_Y = f|_{f^{-1}(Y)} : f^{-1}(Y) \to Y$ es diferenciable y cerrada. Si $y_0 \epsilon Y$ es un valor regular de f_Y entonces $f^{-1}(y_0)$ es finito, digamos $f^{-1}(y_0) = \{x^1, ..., x^m\}$. En cada uno de los puntos x^j el determinante $det(Df(x^j)) \neq 0$, asi pues, es negativo o positivo. Denotemos como $(f, y_0, +)$ al número de puntos $x^j \epsilon f^{-1}(y_0)$ en los cuales $det(D_{x^j} f) > 0$, y $(f, y_0, -)$ al número donde $det(D_{x^j} f) < 0$. Definimos entonces:

Definición 2.2.1 *El grado de f en y_0 es el número entero*

$$grado(f, y_0) = (f, y_0, +) - (f, y_0, +)$$

2.3 Propiedades

Una de las propiedades del grado esta explícita en el siguiente lema:

Lema 2.3.1 *Cada valor regular* $y_0 \epsilon (\mathbb{R}^n - f(\bar{U} - U))$ *de* $f|_U$ *tiene una vecindad abierta* $V \subset (\mathbb{R}^n - f(\bar{U} - U))$ *tal que toda* $y \in V$ *es tambien valor regular de* $f|_U$) *y*

$$grado(f, y) = grado(f, y_0)$$

Demostración: Puesto que la transformación $f|_{f^{-1}(Y)} \to Y$ es cerrada por (1.1.1). Cada valor regular tiene una vecindad abierta V que podemos suponer contenida en Y y conexa tal que $f_Y^{-1}(V)$ se descompone en un número finito de conjuntos abiertos ajenos $W_1, ..., W_r$ cada uno de los cuales es aplicado por f difeomorfamente sobre V. Como V es conexa tambien lo es cada W_j. Pero entonces $detDf(x)$ no puede cambiar de signo en W_j. Así cada punto $z \epsilon V$ no solo tiene el mismo número de preimagenes, sino que tambien los números $(f, z, +)$ y $(f, z, -)$ son los mismos para toda $z \epsilon V$. □

Invariancia bajo homotopías

Sean $f : \bar{W} \to \mathbb{R}^n$ y $g : \bar{W} \to \mathbb{R}^n$ dos transformaciones continuas (W abierto acotado de $\mathbb{R}^n$).

Definición 2.3.2 *Una homotopia entre* f *y* g *es una transformación continua*

$$F : \bar{W} \times I \to \mathbb{R}^n$$

donde I *es el intervalo cerrado* $[0, 1]$ *de* $\mathbb{R}^n$, *tal que* $F(x, 0) = f(x)$ *y* $F(x, 1) = g(x)$ *con* $x \epsilon \bar{W}$.

Para cada $t \epsilon I$ definamos

$$F_t : \bar{W} \to \mathbb{R}^n, F_t(x) = F(x, t).$$

Formulemos ahora el teorema de invariancia bajo homotopías:

Teorema 2.3.3 *Sea* $F : \bar{W} \times I \to \mathbb{R}^n$ *una homotopía entre dos transformaciones* $f : \bar{W} \to \mathbb{R}^n$ *y* $g : \bar{W} \to \mathbb{R}^n$ *(*W *abierto acotado), y sea* $y_0 \epsilon \mathbb{R}^n$ *un punto con las siguientes propiedades:*

(i) y_0 *no es elemento de* $F_t(\partial W)$ *para toda* $t \epsilon I$.

(ii) $F_0|_W$ y $F_1|_W$ son ambas diferenciables y y_0 es valor regular para ambas.

Entonces

$$grado(F_0; y_0) = grado(F_1; y_0).$$

Demostración. Para demostrar este teorema, comencemos por hacer algunas hipotesis adicionales:

(a) $F|_{W\times(0,1)}$ es diferenciable y y_0 es valor regular de $F|_{W\times(0,1)}$.

(b) Existe ϵ suficientemante pequeño tal que $F(x,t) = F(x,0)$ y $F(x, 1-t) = F(x,1)$ para toda $t\epsilon[0,\epsilon]$ y toda $x\epsilon\bar{W}$.

Entonces bajo estas hipotesis tenemos lo siguiente:

$F_0^{-1}(y_0) = F_t^{-1}(y_0)$ es finito para $0 \leq t \leq \epsilon$ pues y_0 es valor regular de F_0 que no es elemento de $F_0(\bar{W} - W)$; digamos que $F^{-1}(y_0) = \{a_1, ..., a_p\} \subset W$. Ya que esto vale para $F_t^{-1}(y_0)$ $(0 \leq t \leq \epsilon)$, tenemos que $F^{-1}(y_0) \cap (\bar{W} \times [0,\epsilon])$ consiste de segmentos $\{a_i \times [0,\epsilon]\}_{i=1,2,...,p}$. Analogamente, tenemos que $F_1^{-1}(y_0) \subset W$ consiste de un número finito de puntos $\{b_1, ..., b_q\}$ y $F^{-1}(y_0) \cap (\bar{W} \times [1-\epsilon, 1])$ consiste de q segmentos $\{b_j \times [1-\epsilon, 1]\})_{j=1,...,q}$.

Ademas $F^{-1}(y_0)$ es compacto; y como

$$F^{-1}(y_0) \cap (W \times [\epsilon, 1-\epsilon]) = F^{-1}(y_0) \cap (\bar{W} \times [\epsilon, 1-\epsilon])$$

entonces $F^{-1}(y_0) \cap (W \times [\epsilon, 1-\epsilon])$ es compacto. $F^{-1}(y_0) \cap (W \times (0,1))$ consiste de un sistema finito de curvas $\{K_\mu\}$ de las cuales cada una, o es homeomorfa a la recta real o al círculo. Las K_μ no compactas contienen exactamente dos segmentos, del tipo $a_i \times (0,\epsilon]$ y del tipo $b_i \times [1-\epsilon, 1)$.

Dependiendo si $det(DF_0(a_i))$ es mayor ó menor que 0 cada a_i contribuye con +1 o -1 al $grado(F_0, y_0)$. Consideremos a lo largo del segmento $a_i \times (0,\epsilon)$ vectores $\{\bar{\nu}_k = (\nu_k, 0)\}_{k=1,...,n}$ de $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ tales que $DF_0(a_i)\nu_k = e_k$, con $\{e_k\}_{k=1,...,n}$ vectores canonicos de $\mathbb{R}^n$. Sea tambien $\bar{\tau} = (\bar{0}, \tau)$ un vector tangente al segmento $a_i \times (0,\epsilon)$ con τ tal que da una orientación positiva a la base $\{\bar{\nu}_1, ..., \bar{\nu}_n, \bar{\tau}\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$. Por lo tanto se tiene que

$$det(\bar{\nu}_1, ..., \bar{\nu}_n, \bar{\tau}) = \tau det(DF_0(a_i))^{-1};$$

observemos que $DF_t(a_i) = DF_0(a_i)$ para $t\epsilon(0,\epsilon)$, y $DF_t(a_i)(\nu_k) = e_k\epsilon\mathbb{R}^n$. Entonces ya que el segmento $a_i \times (0,\epsilon)$ yace en una de las curvas no compactas K_μ la cual contiene otro segmento del tipo $a_{i'} \times (0,\epsilon)$ ó $b_{i'} \times (1-\epsilon, 1)$. En el primer caso el vector tangente del segmento $a_{i'} \times (0,\epsilon)$ tiene la dirección opuesta a la del vector tangente a $a_i \times (0, \epsilon)$. Las contribuciones de a_i y $a_{i'}$ al grado de $F_0(y_0)$ se cancelan. En el segundo caso el vector tangente del segmento $b_j \times (1-\epsilon, 1)$ tiene la misma direccion del vector tangente del segmento $a_i \times (0, \epsilon)$. Las contribuciones de a_i al $grado(F_0, y_0)$ y de b_i al $grado(F_1, y_0)$ son las mismas. Entonces

$$grado(F_0, y_0) = grado(F_1, y_0).$$

Ahora veamos la forma de probar el enunciado sin utilizar las hipótesis adicionales:

Prescindamos de la hipótesis (a) y conservemos la hipótesis (b) Por la hipótesis (ii), F es diferenciable en $W \times (0, \epsilon)$ y $W \times (1-\epsilon, 1)$. Elijamos ϵ' con $0 < \epsilon' < \epsilon$ y aplicamos el teorema de aproximación (1.2.4) a $F : \bar{W} \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ con $Y = \bar{W} \times [0,1]$, $X = W \times (0,1)$, $A = \bar{W} \times [0, \epsilon'] \cup \bar{W} \times [1-\epsilon', 1]$; así $W \times (0, \epsilon) \cup W \times (1-\epsilon, 1)$ es una vecindad abierta de $A \cap X$, en la cual F es diferenciable. Por lo tanto hay una aplicación continua $F' : \bar{W} \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ que es diferenciable en $W \times (0,1)$ y es tal que

$$\|F'(x,t) - F(x,t)\| \leq distancia((x,t), Y - X)$$

para toda $(x,t) \epsilon Y = \bar{W} \times [0,1]$, $F'(x,t) = F(x,t)$ para toda $(x,t) \epsilon A$. En particular, $F'(x,t) = F(x,t)$ si $x \epsilon \bar{W} - W$ o $t \epsilon [0, \epsilon'] \cup [1-\epsilon', 1]$, así $F'_t((W - W) = F_t(\bar{W} - W)$ y

$$F'_t = F_t = F_0 = F'_0, F'_{1-t} = F_{1-t} = F_1 = F'_1$$

para toda $t \epsilon [0, \epsilon']$. Por lo tanto la transformación F satisface también las hipotesis del teorema y la hipótesis adicional (ii). También es diferenciable pero no satisface la hipótesis (i). Por otro lado el teorema anterior afirma que y_0 tiene una vecindad $V \subset \mathbb{R}^n$ tal que $z \epsilon V$ es regular para F_0 y F_1 y

$$grado(F_0; z) = grado(F_0, y), grado(F_1; z) = grado(F_1; y)$$

Elijamos a V suficientemente pequeño para que

$$V \subset \mathbb{R}^n - F'_t(\bar{W} - W) \;\; para \;\; toda \;\; t$$

Escojamos ahora un valor regular y' de $F'|_{W \times (0,1)}$ en V.

Asi pues, ya que para F' y y' se satisfacen las dos hipótesis (a) y (b), obtenemos $grado(F'_0; y') = grado(F'_1; y')$ lo cual implica que $grado(F_0; y') =$

$grado(F_1; y')$ que junto con el teorema (1.2.3) nos dice que $grado(F_0; y_0) = grado(F_1; y_0)$

Finalmente pasemos a la demostración sin ninguna hipótesis adicional. Sabemos que F_0 y F_1 son diferenciables con valor regular $y_0 \epsilon (\mathbb{R}^n - F((\bar{W} - W) \times [0,1]))$. Definimos una nueva homotopía como:

$$\Psi(x,t) = \begin{cases} F_0(x) = F(x,0) & \text{para } 0 \leq t \leq 1/3 \\ F(x, 3t-1) & \text{para } 1/3 \leq t \leq 2/3 \\ F_1(x) = F(x,1) & \text{para } 2/3 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Esta homotopía satisface tambien las hipótesis del teorema, ademas de que satisface la hipótesis adicional (b). Podemos entonces aplicar el argumento anterior y obtener $grado(\Psi_0; y_0) = grado(\Psi_1; y_0)$, lo cual prueba el teorema ya que lo anterior dice que $grado(F_0; y_0) = grado(F_1, y_0)$. □

Otras propiedades del grado

Con el teorema anterior estamos listos para probar otras propiedades del grado.

Teorema 2.3.4 *Sea $g : \bar{W} \to \mathbb{R}^n$ una transformación continua, diferenciable en el abierto acotado $W \subset \mathbb{R}^n$. Cada punto $y \epsilon \mathbb{R}^n - f(\bar{W} - W)$ tiene una vecindad abierta $V \subset \mathbb{R}^n - g(\bar{W} - W)$ tal que $grado(g; z)$ tiene el mismo valor para $z \epsilon V$ regular.*

Demostración. Sea $y \epsilon (\mathbb{R}^n - g(\bar{W} - W))$ y dos valores regulares z y z' cercanos a y. Elijamos z y z' tal que $\|z - y\| \leq \|g(x) - y\|$ y $\|z' - y\| \leq \|g(x) - y\|$. Demostremos que $grado(g; z) = grado(g, z')$ y para esto aplicaremos el teorema (2.3.3). Consideremos la homotopía $F : \bar{W} \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$, definida como:

$$F(x,t) = g(x) + t(z' - z)$$

Debemos verificar las hipótesis del teorema con z en ves de y. Para (a) debemos verificar que $z \neq F(x,t)$ para $x \epsilon (\bar{W} - W)$ y toda t. Pero:

$$z - F(x,t) = [(1-t)(z-y) + t(z'-y)] + (y - g(x))$$

y

$$\|(1-t)(z-y)+t(z'-y)\| \leq (1-t)\|z-y\|+t\|z'-y\|$$
$$< (1-t)\|g(x)-y\|+t\|g(x)-y\| = \|g(x)-y\|$$

de lo cual entonces $z - F(x,t) \neq 0$. La hipótesis (b) se satisface puesto que $F_0 = g$ y $F_1 - z = g - z'$ o sea que $DF_1 = Dg$. Esto último también prueba que $grado(F_1; z) = grado(g; z')$. Entonces el teorema (2.3.3) nos dice que $grado(F_0; z) = grado(F_1; z)$, es decir $grado(g; z) = grado(g; z')$. Lo cual, es la afirmación del teorema. □

Teorema 2.3.5 *Sean $g_0, g_1 : \bar{W} \to \mathbb{R}^n$ dos aplicaciones continuas diferenciables en el abierto acotado W que coinciden en ∂W, entonces*

$$grado(g_0; y) = grado(g_1; y)$$

para todo valor $y \in (\mathbb{R}^n - g_0(\bar{W} - W)) = (\mathbb{R}^n - g_1(\bar{W} - W))$ que es regular para $g_0|_W$ y para $g_1|_W$.

Demostración. Consideremos la homotopía $F : \bar{W} \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ definida como $F(x,t) = (1-t)g_0(x) + tg_1(x)$. Satisface la hipótesis (a) del teorema (1.3.3) ya que $g_0(x) = g_1(x)$ para $x \in \bar{W} - W$, así $F_t(x) = g_0(x) = g_1(x)$ para $x \in (\bar{W} - W)$ y toda t. Por lo cual $y \notin F_t(\bar{W} - W) = g_0(\bar{W} - W)$. Asimismo satisface la hipótesis (b) puesto que $F_0 = g_0$ y $F_1 = g_1$. Entonces por el teorema (2.3.3) $grado(g_0; y) = grado(g_1; y)$. □

Definición general del grado de una transformación continua arbitraria

Sea $f : \bar{W} \to \mathbb{R}^n$ una transformación continua y sea $y \in \mathbb{R}^n - f(\bar{W} - W)$. donde W es un abierto acotado en $\mathbb{R}^n$. Para definirlo escojamos un alisamiento g de f, es decir, una aplicación continua $g : \bar{W} \to \mathbb{R}^n$ que coincide con f en ∂W, que es diferenciable en W y tal que $g(x)$ sea $\epsilon(x)$ cercano a $f(x)$ con ϵ suave y $\epsilon(x) << 1$. (Esto se puede hacer en virtud del teorema 1.2.4).

Si y es un valor regular de $g|_W$ entonces definimos

$$grado(f; y) = grado(g; y)$$

Si y resultará no ser valor regular, sabemos por el teorema de Sard que los valores regulares de $g|_W$ yacen densamente y en cada vecindad V de y

hay valores regulares z de $f|_W$. Si hacemos a V suficientemente pequeño, entonces $grado(g;z)$ es independiente de $z \epsilon V$. Definimos el grado de f en y:

$$grado(f;y) = grado(g;z)$$

donde z es un valor arbitrario de $g|W$.

La definición asídada no depende de la elección del alisamiento como se puede deducir facilmente a partir del teorema 2.3.5. Con esta definición en mano probaremos otras propiedades del grado que nos seran útiles en adelante:

Invariancia bajo escisión

Teorema 2.3.6 *Si $f : \bar{W} \to \mathbb{R}^n$ es una transformación continua con W abierto acotado, $y \epsilon \mathbb{R}^n - (\bar{W} - W)$ y $V \subset W$ abierto que contiene a $f^{-1}(y)$ entonces:*

$$grado(f;y) = grado(f|_{\bar{V}};y).$$

Demostración. Sea $\gamma : \bar{V} \to \mathbb{R}^n$ un alisamiento de $f|_{\bar{V}}$. Definimos $f_1 : \bar{W} \to \mathbb{R}^n$ por $f_1 :|_{\bar{W}-V} = f|_{\bar{W}-V}$ y $f_1|_{\bar{V}} = \gamma$. En particular $f_1^{-1}(y) \subset V$.

Tomemos un conjunto abierto U tal que

$$f^{-1}(y) \subset U \text{ y } \bar{U} \subset V.$$

Por el teorema 1.2.4 podemos alisar f_1 sin variarla en $\bar{U}$. De modo que encontramos una aplicación $g : \bar{W} \to \mathbb{R}^n$ tal que $g|_W$ es diferenciable y $g|_{\bar{U}} = \gamma|_{\bar{U}}$ $g|_{\bar{W}-W} = f_1|_{\bar{W}-W} = f|_{\bar{W}-W}$. Por el teorema 1.2.4 podemos escoger a g de modo que

$$|g(x) - f_1(x)| < dist(y, f_1(\bar{W} - U)).$$

Entonces la aplicación g no toma el valor y en $\bar{W} - U$. Y tampoco toma ningun valor z que difiera de y en menos que $dist(y, g(\bar{W} - U))$. Tomemos un valor regular z de $g|_W$ con $|z - y| < |g(x) - y|$ para toda $x \epsilon \bar{W} - U$. Entonces $grado(f;y) = grado(g;z)$. Pero $g^{-1}(z) = \gamma^{-1}(z) \subset U$ y como $g|_U = \gamma|_U$ tenemos que $grado(g;z) = grado(\gamma;z)$. Y $grado(\gamma;z) = grado(f|_{\bar{W}};y)$. □

3 Grado de una transformación entre variedades diferenciables

3.1 Introducción

En este capítulo todas las variedades de las que hablemos seran orientadas, cerradas y conexas; igualmente las transformaciones entre variedades seran suaves a menos que se haga otra indicación. Ademas, en este capítulo cada vez que nos refiramos a una transformación f entre variedades denotaremos tambien como f a la transformación vista en las cartas coordenadas de la variedad dominio y la variedad imagen.

3.2 Definiciones básicas

Definición 3.2.1 *El grado de una transformación suave $f : M \to N$ entre dos variedades diferenciables M y N, con respecto a un valor regular y_0 es el número*

$$grado_{y_0} f = \sum_{x \epsilon f^{-1}(y_0)} sgndet(D_x f).$$

Observaciones:

1) La suma es finita ya que si y_0 es valor regular entonces $f^{-1}(y_0)$ es discreto y por tanto finito.

2) En el caso que $f^{-1}(y_0) = \emptyset$ definimos $grado_{y_0} f = 0$.

3.3 Propiedades

Independencia del valor regular

Teorema 3.3.1 *El grado de una transformación f entre dos variedades diferenciables M y N es independiente de la elección del valor regular y_0.*

Demostración. Sean y_0, y_1 dos valores regulares de f. Unamoslos por una curva regular simple $\gamma : [0,1] \to N$, con $\gamma(0) = y_0$, $\gamma(1) = y_1$. La curva γ puede ser escogida de tal modo que f sea transversal a γ.[1] Esto implica que la imagen inversa $f^{-1}(\gamma)$, es una variedad diferenciable 1-dimensional en

[1] Vease el teorema 10.3.2 en [D-F-N]

M con frontera la cual consiste en la unión de los conjuntos $f^{-1}(y_0)$ y $f^{-1}(y_1)$.

Afirmación 1.
Si dos puntos x_0 y x_1 de $f^{-1}(y_0)$ (o de $f^{-1}(y_1)$) son los puntos extremos de una componente de $f^{-1}(\gamma)$ entonces los determinantes jacobianos valuados en estos puntos deben tener signos opuestos.

Prueba: Sea $\alpha : [0,1] \to M$ una parametrización regular de la componente conexa que une a estos dos puntos, con $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = x_1$. Sea $(w_1(t), ..., w_{n-1}(t))$ una familia de campos continuos sobre γ tales que para cada $t\epsilon[0,1]$:

$$(w_1(t), ..., w_{n-1}(t), \gamma'(t))$$

es una base positivamente orientada de $T_{\gamma(t)}N$. Entonces las bases de vectores:

$$(w_1(0), ..., w_{n-1}(0), D_{x_0}\alpha'(0))$$

y

$$(w_1(0), ..., w_{n-1}(0), D_{x_1}\alpha'(1))$$

de $T_{y_0}N$ tienen orientaciones opuestas, de lo cual se sigue que

$$sgndet(D_{x_0}f) \neq sgndet(D_{x_1}f).$$

Afirmacion 2.
Si una componente conexa de $f^{-1}(\gamma)$ une a un punto x_0 de $f^{-1}(y_0)$ con otro punto x_1 de $f^{-1}(y_1)$ entonces el signo del determinante jacobiano de f en estos dos puntos es el mismo.

Prueba: Sea $\alpha : [0,1] \to M$ una parametrización regular de esta componente conexa de $f^{-1}(\gamma)$, con $\alpha(0) = x_0$ y $\alpha(1) = x_1$. Considere una familia de campos continuos $(w_1(t), ..., w_{n-1}(t))$ tales que para $t\epsilon[0,1]$:

$$(w_1(t), ..., w_{n-1}(t), \gamma'(t))$$

generan el tangente en cada punto de la curva $\gamma(t)$. Entonces los vectores:

$$(w_1(0), ..., w_{n-1}(0), D_{x_0}\alpha'(0))$$

y

$$(w_1(1), ..., w_{n-1}(1), D_{x_1}\alpha'(1))$$

son dos bases para el espacio tangente en y_0 y en y_1 ambas positivamente o negativamente orientadas, de lo cual:

$$sgndet(D_{x_0}f) = sgndet(D_{x_1}f).$$

De las dos afirmaciones anteriores tenemos pues el resultado del teorema. □

Nota:

En vista de lo anterior, de ahora en adelante omitiremos el valor regular en la notación, *i.e.*

$$grado f = grado_{y_0} f$$

para cualquier valor regular y_0.

Invariancia bajo homotopías

Teorema 3.3.2 *El grado de una transformación f es invariante bajo homotopías.*

Demostración. Sea $F : M \times I \to N$ una homotopía suave entre $f(x) = F(x,0)$ y $g(x) = F(x,1)$. Podemos suponer que y_0 es valor regular de $F|_{M\times(0,1)}$ de lo cual tendremos que $F^{-1}(y_0)$ es una subvariedad suave 1-dimensional de $M \times [0,1]$. $F^{-1}(y_0)$ tiene como frontera la unión disjunta de los dos conjuntos $f^{-1}(y_0)$ y $g^{-1}(y_0)$.

Afirmación 1.
Si dos puntos x_0 y x_1 en $f^{-1}(y_0)$ (o en $g^{-1}(y_0)$) estan en la misma componente conexa de $F^{-1}(y_0)$ entonces los signos del determinante de $D_{x_1}f$ y de $D_{x_2}f$ (respectivamente de $D_{x_1}g$ y de $D_{x_2}g$) son los mismos.

Prueba: Sea $\alpha : [0,1] \to M$ una parametrización regular de la componente conexa que une a x_0 con x_1, de modo que $\alpha(0) = x_0$ y $\alpha(1) = x_1$, y sea $(w_1, ..., w_n)$ una base del tangente a N en y_0. Ya que las bases

$$(D_{x_0}F_0^{-1}(w_1), ..., D_{x_0}F_0^{-1}(w_n), \alpha'(0))$$

y

$$(D_{x_1}F_1^{-1}(w_1), ..., D_{x_1}F_1^{-1}(w_n), \alpha'(1))$$

estan ambas positivamente o negativamente orientadas y puesto que $\alpha'(0)$ y $\alpha'(1)$ tienen proyección en I con sentido opuesto los signos de los determinantes de $D_{x_0}f$ y de $D_{x_1}f$ son distintos.

Afirmacion 2

Si dos puntos $x_0 \epsilon f^{-1}(y_0)$ y $x_1 \epsilon g^{-1}(y_0)$ estan en la misma componente conexa de $F^{-1}(y_0)$ entonces los signos de los determinantes de $D_{x_0}f$ y de $D_{x_1}g$ son los mismos.

Prueba: Simliarmente a la prueba de la afirmación anterior, sea $\alpha(t)$ una parametrización regular de esta componente conexa con $\alpha(0) = x_0$ y $\alpha(1) = x_1$. Sea también $(w_1, ..., w_n)$ una base del tangente a N en y_0. Puesto que

$$(D_{x_0}F_0^{-1}(w_1), ..., D_{x_0}F_0^{-1}(w_n), \alpha'(0))$$

y

$$(D_{x_1}F_1^{-1}(w_1), ..., D_{x_1}F_1^{-1}(w_n), \alpha'(1))$$

son ambas positivamente orientadas o ambas negativamente orientadas y el sentido de las proyecciones de $\alpha'(0)$ y de $\alpha'(1)$ sobre I es el mismo entonces concluimos que los signos de los determinantes de $D_{x_0}f$ y $D_{x_1}g$ son iguales.

Con las afirmaciones anteriores probadas tenemos pues el resultado.□

El grado de una transformación entre dos variedades M y N con frontera

Sea $f : M \to N$ una transformación continua y diferenciable en el interior de M tal que $f|_{\partial M} : \partial M \to \partial N$ es diferenciable. Definimos el grado de la transformación f como en la Definición 3.1.1, donde y_0 es un valor regular en el interior de N. Con esta definición es posible probar que el grado es independiente del valor regular e invariante bajo homotopías. Si las fronteras ∂M y ∂N de M y N son variedades (n-1)-dimensionales cerradas y orientadas (con las orientaciones inducidas de M y N). Y si también las suponemos conexas obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.3.3 *El grado de la transformación restringida a la frontera $f|_{\partial M}$: $\partial M \to \partial N$, es el mismo que el grado de f; i.e. grado$(f|_{\partial M}) =$ grado$f$.*

Para la prueba necesitaremos del siguiente lema:

Lema 3.3.4 *Existe una homotopía que lleva la transformación $f : M \to N$ a una transformación $g : M \to N$ la cual no envia puntos interiores de M a la frontera de N.*

Demostración. Sea U_ϵ una ϵ-vecindad de la frontera ∂N (donde la métrica está definida en términos de alguna métrica Riemmanana) y sea $n(y)$ un campo unitario sobre U_ϵ consistente de vectores tangentes a N y tal que en ∂N apuntan hacia el interior de la variedad N. Sea $\varphi(y) \geq 0$ una función real suave sobre U_ϵ tomando el valor de ϵ en los puntos de ∂N, siendo cero sobre $(\partial U_\epsilon - \partial N)$ y decreciendo monotonamente con la distancia desde ∂N. Extendamos φ a toda la variedad N definiendola cero fuera de U_ϵ. Sea $V_\epsilon = f^{-1}(U_\epsilon) \subset M$ y la función φ^* sobre M definida para toda $x \epsilon M$ por $\varphi^*(x) = \varphi(f(x))$. Claramente desaparece fuera de V_ϵ y alcanza su valor máximo ϵ en los puntos de la imagen inversa de ∂N. Sea ψ una función C^∞ sobre M que se anula en la frontera ∂M y que toma el valor 1 fuera de una δ-vecindad de ∂M e incrementadose monotonamente con la distancia a ∂M. Definamos la homotopía como sigue: Sea la imagen de cada punto $x \epsilon N$ movida en N una distancia $\psi(x)\varphi(f(x))$ a lo largo de la trayectoria del campo vectorial $n(y)$. Claramente los puntos de la imagen de ∂M no se mueven y tampoco lo hacen los puntos fuera de V_ϵ.
El resultado de esta deformación de f es una transformación g que coincide con con f sobre ∂M y que manda a todo punto interior de M al interior de N. □

Demostración del teorema 3.3.3 Sea y_0 un valor regular de la transformacion $f|_{\partial M}$. Aplicando el lema anterior podemos suponer que la imagen inversa $f^{-1}(y_0)$ esta contenida en ∂M. Movamos este punto regular a lo largo de una trayectoria suave en el interior de N una pequeña distancia. Ya que el número de preimagenes y sus signos pueden cambiar solo al pasar por un valor crítico, tenemos que el grado de f y de su restricción a la frontera coinciden. □

3.4 Aplicaciones

Algunos ejemplos simples

(a) Consideremos transformaciones $f : S^1 \to S^1$. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ define una transformación de S^1 a S^1 si tiene la propiedad de que $\forall x$, $f(x + 2\pi) = f(x) + 2\pi k$ para algun entero fijo k. El *grado* en este caso sera k y puede ser expresado en términos de una integral

$$k = grado f = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\frac{df}{dx})dx$$

Toda transformación $f : S^1 \to S^1$ de *grado* k es homotópica a la restricción de la transformación holomorfa $f(z) = z^k$ restringida a $| z |= 1$.

(b) Un polinomio complejo $f(z)$ de grado n, determina una transformación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ del plano complejo, o si adjuntamos un punto al infinito de la esfera de Riemann S^2 a si misma. Mostraremos a continuación que *el grado de f como transformacion es el mismo que el grado de f como polinomio.* Esto es claro cuando el polinomio es un monomio a_0z^n, con $a_0 \neq 0$ (Ya que la imagen inversa de 1, valor regular de esta transformacion consta de n preimagenes). En el caso de un polinomio $a_0z^n + a_1z^{n-1} + ... + a_n$ se sigue que el *grado* es n del hecho de que existe una homotopía entre este polinomio y a_0z^n definida como:

$$F(z,t) = a_0z^n + (1-t)(a_1z^{n-1} + ... + a_n)$$

con $t\epsilon[0,1]$.

Como corolario de la igualdad de los dos tipos de grado de un polinomio complejo tenemos el "Teorema Fundamental del Algebra":

Teorema 3.4.1 *(Gauss) Un polinomio complejo de grado $n > 0$ tiene al menos una raíz.*

Demostración Si $f(z) = 0$ no tiene soluciones entonces la imagen inversa $f^{-1}(0)$ es vacia, de lo cual f tiene *grado* 0 como transformación y de aqui como polinomio. □

Ahora probemos un resultado con transformaciones holomorfas $f : M \to N$ entre variedades complejas cerradas M y N.

Teorema 3.4.2 *Si el grado de f es q, entonces $q \geq 0$ y cada valor regular $y_0\epsilon N$ de f tiene exactamente q imágenes inversas.*

Demostración. El determinante de la realificación de una transformación lineal compleja A nunca es negativo:

$$det_{\mathbb{R}}A = | det_{C}A |^2 \geq 0$$

Por lo cual en las preimagenes del valor regular y_0 todos los jacobianos son positivos y entonces el *grado* de f será igual al numero de preimágenes inversas de y_0. □

La relación entre el grado y la integral
En esta sección abordaremos la relación entre la integral de una forma diferencial de rango n, definida sobre la variedad imagen N y la integral sobre M del pullback (via la transformaclón $f : M \to N$) de la forma a M.

Sea la transformación diferenciable $f : M \to N$ de *grado* q y sea $\omega = \varphi(y)\, dy^1 \wedge ... \wedge dy^n$ una forma diferencial sobre N de rango $n = dimM = dimN$. Por definición de la operacion de pullback:

$$f^*\omega = \varphi(f(x))det(D_x f)dx^1 \wedge ... \wedge dx^n. \qquad (1)$$

Teorema 3.4.3 *Si tenemos $f : M \to N$, y ω como definimos arriba, entonces:*

$$\int_M f^*\omega = (grado f) \int_N \omega. \qquad (2)$$

Demostración. Para cada valor regular $y_0 \epsilon N$ de la transformación f hay una vecindad U de y_0 que solo contiene valores regulares de f. Si $x_1, ..., x_m$ son preimagenes distintas de y_0 bajo f, entonces para U suficientemente pequeña su imagen inversa $f^{-1}(U)$ tendra la forma:

$$f^{-1}(U) = U_1 \cup ... \cup U_m, x_j \epsilon U_j$$

donde la union es disjunta.

Para cada U_j se tiene que:

$$\int_{U_j} \varphi(f(x))det(D_{x_j} f)dx_j^1 \wedge ... \wedge dx_j^n = sgndet(D_{x_j} f) \int_U \varphi(y)dy^1 \wedge ... \wedge dy^n. \qquad (3)$$

Y en virtud de (1) y de la aditividad de integrales sobre regiones disjuntas:

$$\int_{f^{-1}(U)} f^*\omega = \sum_j sgndet(D_{x_j} f)) \int_U \omega = (grado f) \int_U \omega. \qquad (4)$$

Ya que por el Lema de Sard el conjunto de valores criticos de f tiene medida cero en N la integral de ω en estos valores es cero. Por otro lado en los puntos críticos de f la forma $f^*\omega$ desaparece ya que el jacobiano en (3) es cero. De aqui que la contribución de los puntos críticos a $\int_M f^*\omega$ es también cero. De lo cual, el teorema se sigue de (4) y de la propiedad de aditividad de integrales. □

El grado de un campo vectorial sobre una hipersuperficie
Sea $v(x)$ un campo vectorial diferenciable definido en una region U de $\mathbb{R}^n$ con coordenadas euclidianas $x^1, ..., x^n$ y tal que $v(x) \neq 0$ en U. Podemos definir un campo vectorial unitario $n(x) = \frac{v(x)}{|v(x)|}$ sobre U que da origen a *la transformación de Gauss* $f : U \to S^n$ donde $f(x) = n(x)$.

Sea Q una hipersuperficie contenida en U el *grado* de $f|_Q : Q \to S^{n-1}$ es llamado el *grado del campo vectorial v sobre la hipersuperficie Q*.

Consideremos la siguiente $n-1$ forma cerrada w sobre S^{n-1}

$$\omega = (\frac{1}{\gamma_n}) \frac{\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} x^i dx^1 \wedge ... \wedge dx^n}{((x^1)^2 + ... + (x^n)^2)^{n/2}} \tag{5}$$

donde γ_n es la constante normalizadora tal que

$$\int_{S^{n-1}} \omega = 1.$$

Del teorema 1.4.3.1 tenemos los sigientes corolarios:

Corolario 3.4.4 *El grado de un campo vectorial no nulo sobre una hipersuperficie cerrada Q en el espacio n-euclidiano es igual a la integral $\int_Q f^*\omega$ donde $f : Q \to S^{n-1}$ es la transformación de Gauss determinada por el campo vectorial y ω es la n-1 forma sobre S^{n-1} definida èn (5).*

Demostración. Del teorema 3.4.3 tenemos que

$$grado f = (grado f) \int_{S^{n-1}} \omega = \int_Q f^* \omega.$$

□

El grado de un campo vectorial sobre una hipersuperficie
Sea $v(x)$ un campo vectorial diferenciable definido en una region U de $\mathbb{R}^n$ con coordenadas euclidianas $x^1, ..., x^n$ y tal que $v(x) \neq 0$ en U. Podemos definir un campo vectorial unitario $n(x) = \frac{v(x)}{|v(x)|}$ sobre U que da origen a *la transformación de Gauss* $f : U \to S^n$ donde $f(x) = n(x)$.

Sea Q una hipersuperficie contenida en U el *grado* de $f|_Q : Q \to S^{n-1}$ es llamado el *grado del campo vectorial* v *sobre la hipersuperficie* Q.

Consideremos la siguiente $n-1$ forma cerrada w sobre S^{n-1}

$$\omega = (\frac{1}{\gamma_n})\frac{\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1}x^i dx^1 \wedge ... \wedge dx^n}{((x^1)^2 + ... + (x^n)^2)^{n/2}} \tag{5}$$

donde γ_n es la constante normalizadora tal que

$$\int_{S^{n-1}} \omega = 1.$$

Del teorema 1.4.3.1 tenemos los sigientes corolarios:

Corolario 3.4.4 *El grado de un campo vectorial no nulo sobre una hipersuperficie cerrada Q en el espacio n-euclidiano es igual a la integral $\int_Q f^*\omega$ donde $f : Q \to S^{n-1}$ es la transformación de Gauss determinada por el campo vectorial y ω es la n-1 forma sobre S^{n-1} definida en (5).*

Demostración. Del teorema 3.4.3 tenemos que

$$grado f = (grado f)\int_{S^{n-1}} \omega = \int_Q f^*\omega.$$

□

4 El grado local topológico de una transformación holomorfa y la multiplicidad local en un punto fijo

4.1 Algebra local de una transformación holomorfa en un punto fijo a

Sea $f : (\mathbb{C}^n, a) \to \mathbb{C}^n$, $f = (f_1, ..., f_n)$ un germen de transformación holomorfa. Consideremos el anillo local $\mathbb{C}\{z\}_a$ de todos los germenes de funciones holomorfas en el punto a. Sea, por otra parte $I_{f,a}$ el ideal de $\mathbb{C}\{z\}_a$ generado por las funciones $f_1, ..., f_n$.

Definición 4.1.1 *El algebra local de f en el punto a es el cociente*

$$Q_{f,a} = \frac{\mathbb{C}\{z\}_a}{I_{f,a}}$$

Verificar que $Q_{f,a} = \{g + I_{f,a}, \quad g \epsilon \mathbb{C}\{z\}_a\}$ es efectivamente un algebra local es sencillo y solo nótece que $Q_{f,a}$ tiene por ideal maximal al conjunto $A = \{g + I_{f,a}, \quad g \epsilon \mathbb{C}\{z\}_a \quad con \quad g(0) = 0\}$.

Ejemplos:
A continuación describimos el algebra local y damos el valor de su dimensión compleja en algunos ejemplos sencillos:

(a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = c$ donde $c = constante$
$I_{f,a} = \mathbb{C}\{z\}_a$ y $Q_{f,a} = \{0 + \mathbb{C}\{z\}_a\}$. $dim Q_{f,a}$ como espacio vectorial es 0.

(b) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z$.
$I_{f,a} = z\mathbb{C}\{z\}_a$, $Q_{f,a} = \{a_0 + z\mathbb{C}\{z\}_a \quad : \quad a_0 \epsilon \mathbb{C}\}$ y $dim Q_{f,a} = 1$

(c) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$.
$I_{f,a} = z^2\mathbb{C}\{z\}_a$, $Q_{f,a} = \{a_0 + a_1 z + z^2\mathbb{C}\{z\}_a \quad : \quad a_0, a_1 \epsilon \mathbb{C}\}$. $dim Q_{f,a} = 2$.

(d) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$
$I_{f,a} = z^n\mathbb{C}\{z\}_a$,
$Q_{f,a} = \{a_0 + a_1 z + ... + a_{n-1} z^{n-1} + z^n\mathbb{C}\{z\}_a \quad : \quad a_0, ..., a_{n-1} \epsilon \mathbb{C}\}$.
$dim Q_{f,a} = n$.

(e) $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $f(z) = (z)$, $z = (z_1, ..., z_n)$.
$I_{f,a} = z_1\mathbb{C}\{z\}_a + ... + z_n\mathbb{C}\{z\}_a$,
$Q_{f,a} = \{a_0 + z_1\mathbb{C}\{z\}_a + ... + z_n\mathbb{C}\{z\}_a \quad : \quad a_0 \epsilon \mathbb{C}\}$.

$dimQ_{f,a} = 1.$

(f) $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $f(z_1, ..., z_n) = (z_1^{m_1}, ..., z_n^{m_n})$.

$I_{f,a} = z_1^{m_1}\mathbb{C}\{z\}_a + ... + z_n^{m_n}\mathbb{C}\{z\}_a, \quad z = (z_1, ..., z_n)$

$Q_{f,a} = \{\sum_{i_1<m_1,...,i_n<m_n} a_{i_1,...,i_n} z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n} + I_{f,a} \quad : \quad a_{i_1,...,i_n} \epsilon \mathbb{C}\}$

$dimQ_{f,a} = m_1 \cdot ... \cdot m_n.$

4.2 La multiplicidad de una transformación en un punto

Sea $f : (\mathbb{C}^n, a) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ un germen de transformación holomorfa en el punto a. Sea ademas $\mathbb{C}\{x\}_a$ el algebra de todos los germenes de función holomorfa en el punto a. Los germenes de las componentes de f generan el ideal $I_{f,a}$ en esta algebra.

Definición 4.2.1 *La multiplicidad $\mu_a[f]$ del germen de transformación f en el punto a es la dimensión compleja de su algebra local en el punto a.*

$$\mu_a[f] = dim_{\mathbb{C}} Q_{f,a}$$

Así, en los ejemplos anteriores hemos dado el valor de la multiplicidad de cada transformación en el punto a.

El principal objetivo de este capítulo será probar el siguiente teorema:

Teorema 4.2.2 *El número de preimagenes de la transformación f de un punto genérico en una vecindad del origen es igual a la multiplicidad $\mu_a[f]$.*

4.3 El índice de una transformación en un punto

Definición y ejemplos simples

Sea $f : (\mathbb{R}^n, a) \to \mathbb{R}^n$ un germen de transformación diferenciable en el punto a, tal que a es un cero aislado de f, (i.e. existe $0 < \epsilon << 1$ tal que a es el único cero de f en la bola $B_\epsilon(a)$ con centro en a y radio ϵ).

Definición 4.3.1 *Definimos el índice $I_a[f]$ de la transformación f en el punto a como el entero*

$$I_a[f] = grado(\hat{f} = \frac{f}{||f||} : S_\epsilon^{n-1} \to S_1^{n-1})$$

Como ejemplos tenemos el índice en el origen de las siguientes transformaciones (estamos considerrando $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$).

(a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = c$, con $c = constante$, $I_0[f] = 0$

(b) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z$, $I_0[f] = 1$

(c) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$, $I_0[f] = 2$

(d) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$, $I_0[f] = n$

(e) $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $f(z_1, ..., z_n) = (z_1, ..., z_n)$, $I_0[f] = 1$

(f) $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $f(z_1, ..., z_n) = (z_1^{m_1}, ..., z_n^{m_n})$, $I_0[f] = m_1 \times \cdots \times m_n$.

Todo lo anterior ha sido calculado utilizando el teorema 4.6.1.

El hecho de que el indice y la multiplicidad en un punto coincidan en el caso de funciones analíticas no es simple casualidad y de hecho el objetivo primordial de este capítulo será probar el siguiente teorema:

Teorema 4.3.2 (El índice es igual a la multiplicidad)
Si a es un cero aislado para el germen de transformación holomorfa f de multiplicidad finita, entonces el índice en el punto a es igual a su multiplicidad,.

La formulación del teorema 4.3.2 es equivalente a la del teorema 4.2.2 debido a que el índice del germen f es igual al número de preimagenes inversas de un valor regular en una vecindad suficientemente pequeña del origen, afirmación que probaremos en 4.6.1.

4.4 Demostracion del teorema "El índice es igual a la multiplicidad"

Antes de probar el resultado mencionaremos 7 proposiciones que nos seran útiles para su demostración. Las mencionaremos sin prueba y utilizandolas probaremos el teorema 4.3.2 al final de esta sección.

Definición 4.4.1 *La transformación $\Phi^m : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ donde $m = (m_1, ..., m_n)$ definida por:*

$$\Phi^m(z_1, ..., z_n) = (z_1^{m_1}, ..., z_n^{m_n})$$

es llamada la transformación de Pham.

Definición 4.4.2 *Dos germenes de transformación f y g en el punto a son llamados algebraicamente equivalentes, o A-equivalentes si hay un germen de una familia holomorfa de transformaciones lineales, $A(x)\epsilon GL(n, \mathbb{C})$ tal que $f(x) = A(x)g(x)$.*

Proposición 1. *Sea $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to \mathbb{C}^n$ un germen de transformación de multiplicidad finita. Entonces existe una transformación de Pham Φ^m tal que el germen de transformación holomorfa f en 0 es A-equivalente al germen de transformación $\Phi^m_\epsilon = \Phi^m + \epsilon f$ para $\epsilon \neq 0$ arbitraria.*

Proposición 2. *El índice y la multiplicidad en 0 del mapeo de Pham coinciden.*

Proposición 3. *Los indices de dos germenes de transformación holomorfa A-equivalentes son iguales.*

Proposición 4. *Las multiplicidades de dos germenes de transformación holomorfa A-equivalentes son iguales.*

Proposición 5. Aditividad del índice. *Sea un sistema de n ecuaciones holomorfas en $\mathbb{C}^n$ que dependen holomorficamente de un parametro. Entonces la suma de los indices de las raices formadas por la descomposición de una raiz multiple del sistema, es igual al índice de esta raiz multiple.*

Proposición 6. Subaditividad de la multiplicidad. *La suma de las multiplicidades de las raices formadas por la descomposición de una raíz multiple del sistema, no excede a la multiplicidad de esta raiz.*

Proposición 7 *La multiplicidad de una raiz no es menor que su índice.*

Prueba del teorema 4.3.2. Sea $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ un germen de transformación holomorfa de multiplicidad finita. Sea Φ una transformación de Pham tal que los germenes f y $\Phi_\epsilon = \Phi + \epsilon f$ en cero son *A – equivalentes* para $\epsilon \neq 0$. Escoja una vecindad U suficientemente pequeña de 0 y tambien escojase una $\epsilon << 1$ tal que el número de raíces de Φ_ϵ en la vecindad U contada con sus multiplicidades no exceda a la multiplicidad de Φ. (Esto es posible en vista de la proposición 6). Considere la transformación de Pham

$\Psi = \Phi_\epsilon$. Sean a_i las raices del sistema $\Psi = 0$, en la vecindad U. Obtenemos entonces las relaciones:

De la proposición 6:

$$\mu_0[\Phi] \geq \sum \mu_{a_i}[\Psi].$$

De la proposición 7 tenemos:

$$\mu_{a_i}[\Psi] \geq ind_{a_i}[\Psi].$$

De la proposción 5:

$$\sum ind_{a_i}[\Psi] = ind_0[\Phi].$$

Y de la proposición 2:

$$ind_0[\Phi] = \mu_0[\Phi].$$

Así, notamos que las desigualdades son igualdades.
Ya que $f(0) = 0$ entre las raices a_i de Ψ esta el 0. Entonces

$$\mu_0[\Psi] = ind_0[\Psi].$$

Pero ya que los germenes f y Ψ son A-equivalentes, tenemos de las proposiciones 3 y 4 que

$$\mu_0[f] = \mu_0[\Phi].$$

$$ind_0[f] = ind_0[\Phi].$$

Entonces si $f(0) = 0$ el teorema 4.3.2 ha sido probado. Por otra parte si $f(0) \neq 0$ entonces

$$\mu_0[f] = ind[f] = 0.$$

□

Con el teorema ya probado lo que resta es probar las proposiciones, lo cual será el trabajo del resto del capítulo.

$\Psi = \Phi_\epsilon$. Sean a_i las raices del sistema $\Psi = 0$, en la vecindad U. Obtenemos entonces las relaciones:

De la proposición 6:

$$\mu_0[\Phi] \geq \sum \mu_{a_i}[\Psi].$$

De la proposición 7 tenemos:

$$\mu_{a_i}[\Psi] \geq ind_{a_i}[\Psi].$$

De la proposción 5:

$$\sum ind_{a_i}[\Psi] = ind_0[\Phi].$$

Y de la proposición 2:

$$ind_0[\Phi] = \mu_0[\Phi].$$

Así, notamos que las desigualdades son igualdades.
Ya que $f(0) = 0$ entre las raices a_i de Ψ esta el 0. Entonces

$$\mu_0[\Psi] = ind_0[\Psi].$$

Pero ya que los germenes f y Ψ son A-equivalentes, tenemos de las proposiciones 3 y 4 que

$$\mu_0[f] = \mu_0[\Phi].$$

$$ind_0[f] = ind_0[\Phi].$$

Entonces si $f(0) = 0$ el teorema 4.3.2 ha sido probado. Por otra parte si $f(0) \neq 0$ entonces

$$\mu_0[f] = ind[f] = 0.$$

□

Con el teorema ya probado lo que resta es probar las proposiciones, lo cual será el trabajo del resto del capítulo.

4.5 El índice de un germen real

Supongamos que en una bola cerrada $B \subset \mathbb{R}^n$ no hay ceros de la transformación $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}^n$ excepto posiblemente 0 y sea f_ϵ una deformación pequeñã de f.

Teorema 4.5.1 *Para ϵ suficientemente pequeña la suma de los índices de los ceros de la transformación perturbada f_ϵ en B es igual al indice de 0 de la transformación original f, suponiendo que el número de estos ceros es finito.*

Demostración. Las transformaciones $\phi_\epsilon = \frac{f_\epsilon}{|f_\epsilon|} : \partial B \to S_1^{n-1}$ para suficientemente pequeño ϵ son homotópicas y por otro lado el grado de la transformación ϕ_ϵ es igual a la suma de los índices de los ceros de la transformación f_ϵ en la bola B. □

Corolario 4.5.2 *El índice del punto 0 de la transformación f es igual al número de preimagenes en B de una valor regular arbitrario suficientemente pequeño $\epsilon \in \mathbb{R}^n$, contado con el signo del jacobiano en cada punto de la imagen inversa $f^{-1}(\epsilon)$.*

Demostración Sea la deformación $f_\epsilon = f - \epsilon$. Por el teorema anterior tenemos que la suma de los índices de los ceros de la deformación es igual al índice de la transformación f. Pero ya que en este caso los ceros no son degenerados el índice alrededor de un cero es igual al signo del determinante jacobiano valuado en estos puntos. □

Definición 4.5.3 *Dos germenes $f, g : (\mathbb{R}^n, a) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ son llamados A-equivalentes reales si hay un germen de una familia diferenciable de transformaciones lineales $A(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tales que $detA(0) > 0$.*

Teorema 4.5.4 *Los índices de dos germenes reales A-equivalentes reales son iguales.*

Demostracion. Ya que $detA(0) > 0$, es posible juntar A con I por medio de una curva continua $A_t : [0, 1] \to GL(\mathbb{R}, n)$, con $detA_t(x) > 0$. La homotopía $g_t = A_t f$ es tal que $g_0 = g$ y $g_1 = f$ y no tiene ceros en una esfera pequeña. □

4.6 El índice de un germen de transformación holomorfa

Proposición 3.
Germenes de transformación holomorfa A-equivalentes tienen el mismo índice.

Demostración La forma real de germenes holomorfos A-equivalentes son A-equivalentes reales. Si $g = Af$ entonces las formas reales $\hat{f}$ y $\hat{g}$ cumplen que $\hat{g} = \hat{A}\hat{g}$ con $det\hat{A}(0) > 0$. □

Teorema 4.6.1 *Sea B una bola cerrada con centro en el punto $a \epsilon \mathbb{C}^n$. Supongamos que la transformación holomorfa f no es cero en ningun lugar de $B - a$. El índice del germen de f es igual al número de preimagenes en B de un valor regular suficientemente pequeño ϵ*

Demostración El índice es igual al número de preimagenes de ϵ contada con signos del jacobiano de f en esos puntos. Pero este signo siempre es positivo. □

Teorema 4.6.2 *Supongamos que una transformación no tiene ceros sobre la frontera de un dominio acotado $U \subset \mathbb{C}^n$ y el grado de la transformación $g/|g|$ de la frontera de U a la esfera de radio 1 en $\mathbb{C}^n$ es igual a k. Entonces el sistema $g = 0$ tiene un número finito de raices en U y la suma de sus índices es igual a k.*

El teorema anterior se sigue del siguiente lema:

Lema 4.6.3 *Bajo las mismas condiciones que en el teorema anterior el número de soluciones geométricas distintas del sistema $g = 0$ en U no excede a k.*

Demostración Supongamos que el sistema tiene $k+1$ raices $a_1, ..., a_{k+1}$.

(1) Existe una transformación polinomial $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ para el cual los puntos $a_1, ..., a_{k+1}$ son raices no degeneradas. Si a_i lo escribimos como $a_i = (a_i^1, ..., a_i^n)$, $a_i^j \epsilon \mathbb{C}$ Consideremos el polinomio:

$$P = (\Pi_{i=1}^{k}[z^1 - a_i^1], ..., \Pi_{i=1}^{k}[z^n - a_i^n]).$$

Se cumple que $\det(DP|a_i) \neq 0$.

(2) La transformación $g_\epsilon = g + \epsilon P$ tiene raices no degeneradas en los puntos $a_1, ..., a_{k-1}$ para casi todos los valores de ϵ. En efecto, para que a_i sea raiz degenerada debemos tener que:

$$det(Dg_\epsilon|_{a_i}) = det(Dg|_{a_i} + \epsilon\ DP|_{a_i}) = 0$$

y ya que el polinomio es no degenerado en los puntos a_i:

$$det[(DP|_{a_i})^{-1}(Dg_\epsilon|_{a_i}) + \epsilon I] = 0$$

lo cual significa que ϵ solo tiene un número finito de valores para el cual la derivada de g_ϵ es no degenerada.

(3) Para $|\epsilon|$ pequeño el índice de la transformación

$$g_\epsilon/|g_\epsilon|$$

de la frontera de U es igual a k.

(4) Escojase un ϵ pequeño para el cual las raices a_i de la transformación g son no degeneradas. Rodeese a_i por esferas pequeñas B_i que no contengan otros ceros de la transformación g_ϵ. El grado de la transformación $g_\epsilon/|g_\epsilon|$ de la esfera $\partial B_i \to S^{2n+1}$ es igual a 1 y por tanto el grado de la transformación

$$g_\epsilon/|g_\epsilon| : \cup\partial B_i \to S_1^{2n+1}$$

es $k+1$.

Considere el dominio $U' = U - \cup B_i$. El grado de la transformación de la frontera de esta región es no negativa puesto que el grado es igual al número de preimagenes. Pero por otro lado es $k - (k+1) = -1$. Lo cual es una contradicción. □

Corolario 4.6.4 *El índice de una raíz es estrictamente positivo*

Demostración. Si el índice de una raiz a de la transformación g fuera cero, entonces para ϵ suf. pequeño la bola $B_\epsilon(a)$ no contiene raíces del sistema $g = 0$. Lo cual es una contradicción. □

Demostración del teorema 4.6.2. Por el lema, el número de ceros es finito entonces la suma de sus índices sera igual al grado de la transformación $g/|g|$ restringida a la frontera de U. □

Proposición 5. Aditividad del índice
En la descomposición de una raíz aislada a de $g = 0$ con índice finito un número finito de raices son formadas y la suma de sus índices es igual al índice de la raíz descompuesta.
Demostración. Sea g_ϵ una deformación pequeña de g y B una bola cerrada centrada en a conteniendo solo este cero. Ya que $g/|g|$ y $g_\epsilon/|g_\epsilon|$ restringidos a la frontera de B son homotópicos para ϵ suf. pequeño entonces sus grados son iguales. Pero esto implica por el lema anterior que el número de soluciones de $g_\epsilon = 0$ en B es finito y que la suma de sus índices es igual al índice de a por el teorema 4.6.2. □

4.7 Multiplicidad y A-equivalencia

Proposición 4
Las multiplicidades de germenes A-equivalentes son iguales.
Demostración Ya que $f(x) = A(x)g(x)$, esto significa que $f_i \epsilon I_g$ para toda $i = 1, ..., n$. De lo cual $I_f \subset I_g$. Y como $detA(0) > 0$ entonces en una vecindad $A^{-1}(x)$ está bien definida y $g(x) = A^{-1}(x)f(x)$. Lo cual implica que $I_g \subset I_f$. Y por tanto $I_f = I_g$. De lo cual las multiplicidades son las mismas. □

Lema 4.7.1 *Sea un germen f de multiplicidad μ. Entonces el producto de μ germenes de función, cada una tomando el valor 0 en 0, esta contenido en el ideal I_f.*

Demostración Sean $\varphi_1, ..., \varphi_\mu$, los μ germenes de función tomando el valor cero en cero, entonces los $\mu + 1$ germenes de función

$$1, \varphi_1, \varphi_1\varphi_2 ..., \varphi_1\varphi_2 \cdots \varphi_\mu$$

son linealmente dependientes en el anillo Q_f. Existen combinaciones lineales no triviales tales que

$$c_0 + c_1\varphi_1 + ... + c_\mu\varphi_1 \cdots \varphi_\mu \epsilon I_f.$$

Sea c_r el primer coeficiente distinto de cero; entonces:

$$\varphi_1 \cdots \varphi_r(c_r + c_{r+1}\varphi_{r+1} + ... + c_\mu\varphi_{r+1} \cdots \varphi\mu) \ \epsilon \ I_f.$$

Ya que $c_r \neq 0$ lo que esta entre parentesis es invertible en el anillo $\mathbb{C}\{z\}$. Por lo tanto $\varphi_1 \cdot ... \cdot \varphi_r$ esta en el ideal I_f. De lo cual tambien esta $\varphi_1 \cdot ... \cdot \varphi_\mu$.□

Teorema 4.7.2 *Supongamos que un germen de transformación f tiene multiplicidad μ y que el germen g difiera del germen f, por términos de orden $\mu+1$. Entonces los germenes f y g son A-equivalentes.*

Demostración Sea $\varphi_j = g_j - f_j$ la j-esima componente de $\varphi = g - f$. Por ser un germen de función de orden $\mu+1$ lo podemos expresar como producto de μ germenes de función tomando el valor cero en cero. Y segun el lema anterior $\varphi_j = \sum_{i=1}^{n} h_{ji} f_i$ donde $h_{ji}(0) = 0$. De modo que tenemos que $\varphi = Hf$ con $H(0) = 0$. Y entonces concluimos que:

$$g = (I + H)f$$

lo cual es la afirmación de que f y g son A-equivalentes. □

Corolario 4.7.3 *Supongamos que la matriz jacobiana del germen de transformación f en 0 es no degenerada. Entonces su multiplicidad es igual a 1.*

Demostracion Ya que $g(x) = Df(0)x$ tiene multiplicidad 1 y difiere de f por términos de orden 2 entonces segun el teorema anterior los germenes son A-equivalentes y entonces por la proposición 4 tienen la misma multiplicidad. □

Teorema 4.7.4 *Una raíz de multiplicidad finita de un sistema de ecuaciones holomorfas es aislada*

Demostración Supongamos que el germen de transformación tenga multiplicidad μ en 0. Del lema 4.7.1 tenemos que z_j^μ puede ser puesta en la forma:

$$z_j^\mu = \sum h_{ji} f_i$$

en una vecindad del origen. Pero entonces ya que z_j^μ solo se anula en 0 no es posible que f se anule en otro punto distinto de 0. (Esto, precisamente en una vecindad de 0). □

4.8 Propiedades de la transformación de Pham.

Sea f un germen de transformación de multiplicidad μ en 0. Considere la transformación de Pham Φ^m con $m = (\mu+1, ..., \mu+1)$ y su deformación $\Phi^m_\epsilon = \Phi^m + \epsilon f$.

Proposición 1
El germen f es A-equivalente en 0 al germen Φ^m_ϵ para toda $\epsilon \neq 0$.

Demostración Tenemos que f es A-equivalente a ϵf en 0 y ademas que Φ^m_ϵ difiere de ϵf por términos de orden $\mu+1$. Entonces de acuerdo al teorema 4.7.2 Φ^m_ϵ es A-equivalente a ϵf y por tanto a f. □

Proposición 2
El índice y la multiplicidad de la transformación de Pham en 0 son iguales.

Demostración El índice es igual al número de soluciones del sistema $z_1^{m_1} = \epsilon_1, ..., z_n^{m_n} = \epsilon_n$. De lo cual $ind_0[\Phi^m] = m_1 \cdots m_n$.

Por otra parte el algebra local $Q_{\Phi^m,0}$ es generada por los monomios de la forma $z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}$ donde $0 \leq k_i < m_i$. La dimensión $\mu_0[\Phi^m]$ de esta algebra es $m_1 \cdots m_n$.

4.9 La subaditividad de la multiplicidad

Sea $\{f_\epsilon\}$ una deformación arbitraria del germen de transformación f de multiplicidad μ en cero.

Proposición 6
Hay una vecindad de cero U en el dominio tal que para $|\epsilon|$ suficientemente pequeño el número de raices del sistema $f_\epsilon = 0$ en U contada con sus multiplicidades no excede a μ
La demostración de esta proposición depende de los dos teoremas que siguen en esta sección. Por lo pronto como corolario de esta proposicion tenemos:

Proposición 7
El índice de un germen de multiplicidad finita no es mayor que su multiplicidad.

Demostración. Consideremos la deformación $f_\epsilon = f - \epsilon$ del germen de transformación holomorfa f. El teorema anterior nos dice que:

$$\sum_{x \epsilon f_\epsilon^{-1}(0)} \mu_x[f_\epsilon] \leq \mu_0[f].$$

Pero debido al teorema 4.7.2

$$Ind_0 f = \# f_\epsilon^{-1}(0) \leq \sum_{x \epsilon f_\epsilon^{-1}(0)} \mu_x[f_\epsilon].$$

De lo cual se sigue la afirmación de la proposición. □

Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un conjunto abierto, $A(U)$ el algebra de funciones holomorfas, definidas sobre el conjunto U y $I_g(U)$ el ideal de esta algebra, generado por las funciones $g_1, ..., g_n$. El algebra cociente $Q_g(U) = A(U)/I_g(U)$ es llamada el algebra de la transformación g en el dominio U. La subalgebra polinomial $Q_g[U]$ de la transformación g en el dominio U la definimos como la imagen del algebra de polinomios $Q_g(U)$ bajo el homomorfismo que factoriza $I_g(U)$.

Teorema 4.9.1 *Para toda deformación $\{f_\epsilon\}$ del germen de transformación f de multiplicidad μ en 0 hay una vecindad U de cero en el dominio tal que para $|\epsilon|$ suficientemente pequeño la $\mathbb{C}$-dimensión de la subalgebra de polinomios de f_ϵ en U no excede a μ.*

Teorema 4.9.2 *El número de soluciones en U del sistema de ecuaciones holomorfas $g = 0$, tomando las multiplicidades en cuenta, no excede la $\mathbb{C}$-dimensión de la subalgebra de polinomios de g en U.*

Demostración de la proposición 6. Por el teorema 4.9.2 el número de raices del sistema $f_\epsilon = 0$ en U (U es la vecindad del teorema 4.9.1), tomando en cuenta las multiplicidades no excede la $\mathbb{C}$-dimensión de la subalgebra polinomial de f_ϵ en U. Y de acuerdo al teorema 4.9.1 esta dimensión no excede a μ. □

En lo que resta de la sección probaremos el teorema 4.9.1 y despues probaremos el teorema 4.9.2.

Sea un germen de transformación holomorfa f de multiplicidad finita y sean $e_1, ..., e_\mu$ funciones que son base de su algebra local. El teorema de preparación de Weierstrass [2] afirma que para cada germen de transformación holomorfa existe una descomposición:

$$\phi(x) = \sum e_i(x)\phi_i(f(x))$$

donde las ϕ_i son funciones de $\mathbb{C}^n$

Lema 4.9.3 *Existen vecindades de cero U_1 y U_2 en el dominio y en el contradominio de f sobre las cuales las funciones que aparecen en la descomposición de Weierstrass de todos los polinomios estan definidas simultaneamente.*

Demostración Para U_2 tomemos el dominio para el cual uno pueda continuar holomorfamente las funciones ϕ_i que participan en la descomposición del siguiente conjunto finito de funciones:

$$1, x_j e_k \quad (1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq \mu).$$

Para el dominio U_1, tomemos el subdominio del dominio $f^{-1}(U_1)$ sobre el cual las funciones e_k pueden ser continuadas holomorfamente. Procedemos por inducción para demostrar que estas vecindades sirven para todos los polinomios. Todo polinomio de grado p puede ser puesto en la forma:

$$P = \sum x_j Q_j + c, \quad \textit{donde grado } Q_j < p.$$

Así, en las vecindades es valida la descomposición de Weierstrass para x_j y Q_j y de aqui para P.□

Consideremos la deformación $\{f_\epsilon\}$ $(\epsilon \in \mathbb{C}^k)$, del germen de transformación $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to \mathbb{C}^n$. Definamos el germen de transformación $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k, 0) \to \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k$ por la fórmula

$$F(x, \epsilon) = (f_\epsilon(x), \epsilon).$$

Lema 4.9.4 *Las algebras locales de los germenes f y F son isomorfas. Si las funciones $e_1, ..., e_\mu$ forman una base para el algebra del germen f también forman una base para el algebra del germen F.*

[2] Como referencia cosultese [A-G-V], [A1]

Demostración. El ideal generado por las componentes $F_1, ..., F_n, \epsilon_1, ..., \epsilon_k$ de la transformación F en el algebra de germenes de transformación holomorfa en $0 \epsilon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k$ coincide con el ideal generado por las funciones $f_1, ..., f_n, \epsilon_1, ..., \epsilon_k$ □

Sean ahora $e_1, ..., e_n$ funciones cuyos germenes en cero forman una base para el algebra local del germen de transformación holomorfa f y sea f_ϵ una deformación de este germen.

Lema 4.9.5 *Existe una vecindad de cero $U \subset \mathbb{C}^n$ tal que para $|\epsilon|$ suficientemente pequeño, la envolvente lineal de las imagenes de las funciones $e_1, ..., e_\mu$ en el algebra $Q_{f_\epsilon}(U)$ contiene a la subalgebra polinomial $Q_{f_\epsilon}[U]$*

Demostración. Por el lema anterior las funciones $e_1, ..., e_\mu$ forman una base para el algebra local de la transformación F. Entonces aplicando el lema 4.9.4 a la tranformación F tenemos que existe una vecindad de cero $U \times V \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k$ y una bola en el contradominio $\mathbb{C}^{n+k}$ tal que:

(1) $F(U \times V) \subset B$

(2) En el dominio $U \times V$ todo polinomio se puede representar modulo el ideal que depende holomorficamente del parámetro ϵ en la forma:

$$P(z) = \sum \Phi_i(y, \epsilon) e_i(z), \ y = f_\epsilon(z) \quad (6)$$

Por el lema de Hadamard las funciones Φ_i en B se pueden representar de la siguiente manera:

$$\Phi_i(y, \epsilon) = c_i(\epsilon) + \sum y_l \Phi i, l(y, \epsilon)$$

Si sustituimos esta formula en (1) tendremos para cada polinomio en $U \times V$ una representación de la siguiente forma:

$$P(z) = \sum c_i(\epsilon) e_i(z) + \sum h_j(z, \epsilon) y_j, y_j = f_{\epsilon,j}(z) \quad (7)$$

donde h_j es holomorfa en $U \times V$.

Ya que la segunda suma pertenece al ideal $I_{f_\epsilon}(U)$ el lema ha sido probado.
□

Demostración del teorema 4.9.1 Puesto que por el lema anterior la envolvente lineal de las imagenes de la base del algebra local de f en $Q_{f_\epsilon}(U)$

contienen a la subalgebra polinomial $Q_{f,}[U]$ entonces la $\mathbb{C}$-dimensión de la subalgebra local no es mayor que μ.□

Ahora nos proponemos probar el teorema 4.10.4 para lo cual probaremos tres lemas:

Lema 4.9.6 *Supongamos que la $\mathbb{C}$-dimensión de la subalgebra polinomial de la transformación g en U es finita. Entonces todo cero de la transformación g es de multiplicidad finita.*

Demostración. Supongamos que a es cero de la transformación g. Sean ϕ_i funciones lineales tomando el valor cero en a. Si la dimensión de la subalgebra polinomial es igual a μ entonces las imagenes en ella de los $\mu+1$ polinomios $1, \phi_1, ..., \phi_1 \cdots \phi_\mu$ son linealmente dependientes. Esto implica que existen coeficientes complejos c_i no todos cero tal que $c_0+c_1\phi_1+...+c_\mu\phi_1\cdots\phi_\mu \epsilon I_g(U)$. Si c_r el primer coeficiente distinto de cero, sea $\rho = c_r+c_{r+1}\phi_{r+1}...+c_\mu\phi_{r+1}\cdots\phi_\mu$. Entonces $\rho(a) \neq 0$ y $\rho\phi_1\cdots\phi_\mu \epsilon I_g(U)$. Ahora bien, invirtiendo ρ en el algebra de germenes de funciones holomorfas en a tenemos que $\phi_1\cdots\phi_m \epsilon I_{g,a}0$. Por lo que todo cero de g tiene multiplicidad finita. □

Lema 4.9.7 *El número de raíces distintas del sistema $g = 0$ en U no es mayor que la $\mathbb{C}$-dimensión μ de la subalgebra de polinomios de la transformacion g en U*

Demostración Supongamos que existen $\mu+1$ raíces $a_1, ..., a_{\mu+1}$. Puesto que existen polinomios P_i igual a 1 en a_i e igual a cero en las μ raíces restantes. Las imagenes de los $\mu+1$ polinomios en la subalgebra polinomial son linealmente independientes. Pero esto es una contradicción. □

Denotemos por $a_1, ..., a_\nu$ todos los ceros de la transformación g en el dominio U.

Definición 4.9.8 *El algebra multilocal del sistema $g = 0$ en U es la suma directa de las algebras locales de los gérmenes de g en los puntos a_i.*

Notación: $\Lambda_g(U) = \sum_{i=1}^{\nu} Q_{g,a_i}$

Asociemos a toda función $A(U)$ el conjunto de sus germenes en los puntos a_i. Esta asociación induce un homomorfismo de la $\mathbb{C}$-algebra $A(U)$ a $\Lambda_g(U)$ la cual denotaremos por π.

Lema 4.9.9 *Supongamos que la $\mathbb{C}$ dimensión de la subalgebra polinomial de la transformación g en U es finita. Entonces la imagen del algebra de polinomios bajo el homomorfismo π coincide con el algebra multilocal $\Lambda_g(U)$.*

Demostración Sean $a_1, ...a_\nu$ las raices de la transformación g en el dominio U. (Hay un número finito por el lema 4.10.9). Cada raíz a_i tiene multiplicidad finita μ_i de acuerdo al lema 4.10.8. Entonces funciones cuyos jets de orden μ_i en a_i coinciden determinan los mismos elementos en el algebra local Q_{g,a_i}. Existe un polinomio con los jets dados de orden μ_i en el conjunto de puntos $a_1, ..., a_\nu$. □

Demostración del teorema 4.9.2 Ya que $I_g(U)$ es aplicada por π al cero de $\Lambda_g(U)$ entonces

$$dim(Q_g[U]) = dim(Q_g(U)) = dim(A(U)/I_g(U)) \leq dim(A(U)/ker\pi)$$

Pero ya que π es un homomorfismo suprayectivo entonces tenemos que $A(U)/ker\pi$ es isomorfo a $\Lambda_g(U)$ y por tanto tienen la misma dimensión como espacio vectorial por lo que

$$dim(Q_g[U]) \leq dim(\Lambda_g(U))$$

□

5 Mayorización de los números de intersección de Milnor en sistemas dinámicos holomorfos

5.1 Números de Milnor

Sea $A : (\mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C}^m, 0)$ un germen de transformación holomorfa y $a : (\mathbb{C}^k, 0) \to (\mathbb{C}^m, 0)$ un encaje sobre una subvariedad suave X^k. Supongamos que el rango de la diferencial da en el origen es k. Sea ademas $b : (\mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C}^k, 0)$ una proyección a lo largo de una subvariedad suave $Y^{m-k} = b^{-1}(0)$ de dimensión $m - k$.

Definición 5.1.1 *El número de Milnor algebraico $\mu(n) = \mu(A^n X, Y)$ está definido como la multiplicidad en el origen de la transformación compuesta*

$$f_n = b \circ A^n \circ a : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^k.$$

Dicho de otro modo $\mu(n)$ es la dimensión sobre $\mathbb{C}$ del algebra local

$$Q(n) = \mathbb{C}[z_1, ..., z_k]/(f_n)$$

donde el denominador denota el ideal generado por las componentes de f_n.

5.2 Los números de Milnor y el Teorema de Skolem

El objetivo principal de este capítulo será probar el siguiente teorema:

Teorema 5.2.1 *Los números de Milnor algebraicos*

$$\mu(n) = ind_0 f_n$$

estan acotados si cada uno de ellos es finito.

Mencionaremos 6 lemas útiles para su prueba y a continuación probaremos el teorema. Despues en lo que resta del capítulo daremos la prueba de 4 de ellos.

Lema 5.2.2 *El conjunto de los germenes de transformación $f : (\mathbb{C}^k, 0) \to (\mathbb{C}^k, 0)$ cuyos números de Milnor son mayores o iguales que $c \geq 0$:*

$$\{f : \mu(f) \geq c\}$$

son los ceros de un número finito de polinomios dependiendo de un número finito de coeficientes de Taylor de f en el origen).

Para la prueba de este lema vease [A-G-V]

Definición 5.2.3 *Un cuasipolinomio g con espectro $S \subset \mathbb{C} - 0$ es una función de la forma*

$$g(n) = \sum p_i(n) z_i^n, \; n \epsilon Z, \; z_i \in S \tag{8}$$

donde la suma es finita y donde los p_i son polinomios con coeficientes complejos.

Definición 5.2.4 *Un cuasipolinomio g es llamado admisible si cada punto de su espectro es producto de los valores propios de la parte lineal en el origen del difeomorfismo $A : (\mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C}^m, 0)$.*

Lema 5.2.5 *Cada coeficiente de la serie de Taylor de la transformación en el origen $f(n) = b \circ A^n \circ a : (\mathbb{C}^k, 0) \to (\mathbb{C}^k, 0)$ es un cuasipolinomio admisible.*

Lema 5.2.6 (Teorema de Skolem). *El conjunto de enteros para el cual un dado cuasipolinomio desaparece, es una unión de un conjunto finito y de una unión finita de progresiones aritméticas.*

La prueba de este lema se puede encontrar en [L].

Definición 5.2.7 *Un conjunto de enteros es un conjunto q-Skolem si es unión de un conjunto finito y de una unión finita de progresiones aritméticas de paso q.*

Enunciaremos en el siguiente lema algunas propiedades de los conjuntos *q-Skolem*:

Lema 5.2.8 *Una unión finita de conjuntos q-Skolem es un conjunto q-Skolem. Una intersección de conjuntos q-Skolem es un conjunto q-Skolem si el número de elementos de la intersección es infinito. La intersección de una sucesión decreciente de conjuntos q-Skolem es un conjunto q-Skolem. Un conjunto q-Skolem es un conjunto q-Skolem para todo entero s.*

Lema 5.2.9 *Supongamos que un cuasipolinomio (8) desaparece para una sucesión infinita de valores n. Entonces el conjunto de los enteros n para los cuales desaparece es un conjunto q-Skolem, donde q es el mínimo común multiplo de los ordenes de las raíces de la unidad de la forma z_i/z_j.*

El siguiente lema es corolario del teorema de Skolem:

Lema 5.2.10 *Para un número finito de números complejos $(w_1, ..., w_m)$ existe un entero $q(w)$ tal que para todo cuasipolinomio cuyos puntos del espectro z_i son productos de los números w_j, el conjunto de ceros $n \epsilon Z$ es un conjunto q-Skolem si el conjunto de ceros es infinito.*

Antes de demostrar el teorema 5.2.1 definamos el *subgrupo de relaciones* $R = \{d \epsilon Z^r : w^d = 1\}$ (donde $w^d = w_1^{d_1} \cdots w_r^{d_r}$). El subespacio lineal $\Re^s$, generado por R en $\Re^r$, intersecta a Z^r a lo largo de la retícula $Z^s = \Re^s \cap Z^r$.

El número q es el índice del subgrupo de relaciones R en esta retícula, $q = [Z^s : R]$.

Demostración del teorema 5.2.1 Supongamos que la sucesión $\mu(n)$ no esta acotada. Entonces el conjunto $\{n \epsilon Z : \mu(n) \geq c\}$ es infinito para toda $c \in Z$.

De acuerdo al lema 5.2.2 la condición $\mu(n) \geq c$ es equivalente a que un número finito de polinomios en los coeficientes de Taylor de la transformación $f(n)$ se anulan. Cada uno de estos polinomios es un cuasipolinomio admisible, de acuerdo al lema 5.2.5. Los polinomios entonces, evaluados en $f(n)$ son cuasipolinomios admisibles.

Del lema 5.2.10 sabemos que el conjunto de enteros n, para el cual $\mu(n) \geq c$, es un conjunto *q-Skolem* para toda c (donde q depende solo de los valores propios de la derivada del difeomorfismo A en el origen).

Los conjuntos $\{n : \mu(n) \geq c\}$ decrecen cuando c crece. Entonces la interseccion de todos estos conjuntos contiene por el lema 5.2.8 una progresión aritmetica. Si n fuera un punto de esta progresión entonces $\mu(n)$ sería infinito, lo cual contradice la suposición del teorema. □

5.3 Coeficientes de Taylor de Iteraciones

Las serie de Taylor de una transformación $G : \mathbb{C}^a \to \mathbb{C}^b$ es posible escribirla en el origen como: $G(t) = G_1(t) + G_2(t,t) + ...$ donde G_r es una forma r-lineal simétrica. Llamemos a G_r el coeficiente r-esimo de la serie. Entonces tenemos el siguiente lema:

Lema 5.3.1 *Cada coeficiente de Taylor de la composición $w = H(G(t))$ tiene la forma*

$$(H \circ G)_r = H_1 G_r + F_r[G_1, ..., G_{r-1}]$$

donde la forma r-polilineal simétrica F_r depende de $(G_1, ..., G_{r-1})$ como un cuasipolinomio de peso r. Los coeficientes del polimonio cuasihomogeneo dependen linealmente de $(H_2, ..., H_r)$.

Demostración Tenemos las siguientes identidades:

$$H \circ G(t) = H_1(G_1(t) + G_2(t,t) + G_3(t,t,t) + ...) +$$

$$H_2(G_1(t) + G_2(t,t) + ..., G_1(t) + G_2(t,t) + ...) + ... =$$

$$H_1 G_1(t) + H_1 G_2(t,t) + H_1 G_3(t,t,t) + ...$$

$$+ H_2(G_1(t), G_1(t)) + 2H_2(G_1(t), G_2(t,t)) + ...$$

$$+ H_3(G_1(t), G_1(t), G_1(t)) + ...$$

Entonces para dar quien es F_r simetrizamos:

$$F_1 = 0,$$

$$F_2[G_1](t_1, t_2) = H_2(G_1(t_1), G_1(t_2)),$$

$$F_3[G_1](t_1, t_2, t_3) = H_3(G_1(t_1), G_1(t_2), G_1(t_3)) + \frac{1}{3}\sum H_2(G_1(t_i), G_2(t_j, t_k)).$$

La cuasihomogeneidad la tenemos de que $(H \circ G)_i(ct)) = c^i (H \circ G)_i(t)$ □

Del lema anterior tenemos como consecuencia inmediata:

Lema 5.3.2 *Los coeficientes A_r^n de la serie de Taylor $A^n z = A_1^n z + A_2^n(z,z) + ...$ de la n-esima iteración de $z \to A_1 z + A_2(z,z) + ...$ satisfacen la ecuación*

$$A_r^{n+1} = A_1 A_r^n + F_r[A_1^n, ..., A_{r-1}^n]$$

donde el vector polinomial cuasihomogeneo F_r es independiente de n

Demostración Apliquemos el lema 5.3.1 a $G = A^n$, $H = A$ para $n = 1, 2, ...$ Tendremos $A_r^{n+1} = A_1 A_r^n + F_r[A_1^n, ..., A_{r-1}^n]$. □

Lema 5.3.3 *Una solución $u(n)$ de una ecuación lineal no homogenea*

$$u(n+1) = A_1 u(n) + f(n),$$

donde f(n) es un vector cuyas entradas son cuasipolinomios y A es un operador lineal no degenerado, es un vector cuyas componentes son cuasipolinomios. El espectro de la solución esta contenido en la unión del espectro de f y del conjunto de valores propios del operador A.

Demostración Primero consideremos el caso de una sola componente:

$$u(n+1) = \lambda u(n) + f(n), \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

La solución de la ecuación anterior será la solución general de la ecuación homogenea más una solución particular de la no homogenea.
La ecuación homogenea

$$u(n+1) = \lambda u(n)$$

tiene como solución $u(n) = c\lambda^n$.
Para resolver la ecuación no homogenea hagamos las siguientes observaciones:

(a) Si $u_1(n)$ es solucion de la ecuación $u_1(n+1) = \lambda u_1(n) + f_1(n)$ y $u_2(n)$ es solución de la ecuación $u_2(n+1) = \lambda u_2(n) + f_2(n)$ entonces $u_1(n) + u_2(n)$ será solución de la ecuación $u(n+1) = \lambda u(n) + f_1(n) + f_2(n)$. Basta entonces resolver la ecuación $u(n+1) = \lambda u(n) + z^n p(n)$ para cada z^n en el espectro de f y $p(n)$ un polinomio.

(b) Si para la ecuación $u(n+1) = \lambda u(n) + z^n p(n)$ proponemos que la solucion sea $u(n) = q(n)z^n$ donde $q(n)$ es un polinomio, tenemos que $q(n+1) = \frac{\lambda}{z}q(n) + \frac{p(n)}{z}$.

Así, entonces para que la ecuación no homogenea tenga solución cuasipolinomial la ecuación

$$q(n+1) = kq(n) + q_1(n)$$

debe tener solución con $q(n)$ y $q_1(n)$ polinomios.

Pero lo anterior es precisamente el caso. Si $k \neq 1$ es fácil mostrar que si $q_1(n) = b_0 + b_1 n + ... + b_k n^k$, $b_i \in \mathbb{C}$ la solución de la ecuación será de la forma $q(n) = a_0 + a_1 n + ... + a_k n^k$, $a_i \in \mathbb{C}$. Y si $k = 1$ la solución será de la forma $q(n) = a_1 n + ... + a_{k+1} n^{k+1}$, $a_i \in \mathbb{C}$.

Entonces concluimos que la solución de la ecuación no homogenea en una componente, es un cuasipolinomio cuyo espectro es la union del espectro de f y de λ.

Ahora bien para el caso vectorial podemos transformar la ecuación a una base donde A_1 tenga su forma canónica de Jordan.

Sean $u_1(n), ..., u_m(n)$ las componentes de $u(n)$ y sean $\lambda_1, ..., \lambda_m$ los valores propios de la matriz A_1. Observese que si en la matriz A_1 no hay un 1 a la izquierda del eigenvector λ_i, la solución de u_i se reducira al caso considerado anteriormente. Si hay por lo contrario un 1 tenemos que resolver la ecuación

$$u_i(n+1) = \lambda_i u_i(n) + u_{i-1}(n) + f_i(n)$$

y entonces la solución para $u_i(n)$ será cuasipolinomial si $u_{i-1}(n)$ es un cuasipolinomio. Similarmente, si hay un 1 a la izquierda de $u_{i-1}(n)$ será cuasipolinomio si u_{i-2} es un cuasipolinomio. Puesto que al menos λ_1 no tiene un 1 a la izquierda este proceso termina y tendremos que $u_i(n)$ es un cuasipolinomio con espectro de f y de los eigenvalores de A_1, de lo cual concluimos la afirmación. □

Lema 5.3.4 *Sea A_1 no degenerada. Entonces cada uno de los coeficientes A_r^n considerado como función de n es un cuasipolinomio admisible.*

Demostración Para $r = 1$ tenemos

$$A_1^{n+1} = (A_1)^{n+1}.$$

De lo anterior se sigue que A_1^{n+1} es un cuasipolinomio admisible. Supongamos inductivamente que para $r < R$, A_r^n es un cuasipolinomio admisible. Entonces A_R satisface la ecuación lineal recurrente inhomogenea:

$$A_R^{n+1} = A_1 A_R^n + f_R(n) \text{ donde } f_R(n) = F_R[A_1^n, ..., A_{R-1}^n]$$

La inhomogeneidad f_R es un cuasipolinomio admisible por hipotesis de inducción y entonces la afirmacion del teorema se sigue del lema 5.3.3. □

Ahora consecuencia de los lemas de esta sección:

Demostracion del lema 5.2.5. Apliquemos el lema 5.3.1 a $H = A^n$ y $G = a$. Entonces $(A^n \circ a)_r = A_1^n a_r + F_r[a_1, ..., a_{r-1}]$ donde cada coeficiente depende linealmente de un conjunto finito de coeficientes de A_n y entonces por el lema 5.3.4 es un cuasipolinomio admisible. Ahora bien, aplicando el lema 5.3.1 a $H = b$ y $G = A^n a$ tendremos ahora que cada coeficiente de la composición es un polinomio en los coeficientes de $A^n a$, y entonces es un cuasipolinomio admisible.

Entonces concluimos que la solución de la ecuación no homogenea en una componente, es un cuasipolinomio cuyo espectro es la union del espectro de f y de λ.

Ahora bien para el caso vectorial podemos transformar la ecuación a una base donde A_1 tenga su forma canónica de Jordan.

Sean $u_1(n), ..., u_m(n)$ las componentes de $u(n)$ y sean $\lambda_1, ..., \lambda_m$ los valores propios de la matriz A_1. Observese que si en la matriz A_1 no hay un 1 a la izquierda del eigenvector λ_i, la solución de u_i se reducira al caso considerado anteriormente. Si hay por lo contrario un 1 tenemos que resolver la ecuación

$$u_i(n+1) = \lambda_i u_i(n) + u_{i-1}(n) + f_i(n)$$

y entonces la solución para $u_i(n)$ será cuasipolinomial si $u_{i-1}(n)$ es un cuasipolinomio. Similarmente, si hay un 1 a la izquierda de $u_{i-1}(n)$ será cuasipolinomio si u_{i-2} es un cuasipolinomio. Puesto que al menos λ_1 no tiene un 1 a la izquierda este proceso termina y tendremos que $u_i(n)$ es un cuasipolinomio con espectro de f y de los eigenvalores de A_1, de lo cual concluimos la afirmación. □

Lema 5.3.4 *Sea A_1 no degenerada. Entonces cada uno de los coeficientes A_r^n considerado como función de n es un cuasipolinomio admisible.*

Demostración Para $r = 1$ tenemos

$$A_1^{n+1} = (A_1)^{n+1}.$$

De lo anterior se sigue que A_1^{n+1} es un cuasipolinomio admisible. Supongamos inductivamente que para $r < R$, A_r^n es un cuasipolinomio admisible. Entonces A_R satisface la ecuación lineal recurrente inhomogenea:

$$A_R^{n+1} = A_1 A_R^n + f_R(n) \textit{ donde } f_R(n) = F_R[A_1^n, ..., A_{R-1}^n]$$

La inhomogeneidad f_R es un cuasipolinomio admisible por hipotesis de inducción y entonces la afirmacion del teorema se sigue del lema 5.3.3. □

Ahora consecuencia de los lemas de esta sección:

Demostracion del lema 5.2.5. Apliquemos el lema 5.3.1 a $H = A^n$ y $G = a$. Entonces $(A^n \circ a)_r = A_1^n a_r + F_r[a_1, ..., a_{r-1}]$ donde cada coeficiente depende linealmente de un conjunto finito de coeficientes de A_n y entonces por el lema 5.3.4 es un cuasipolinomio admisible. Ahora bien, aplicando el lema 5.3.1 a $H = b$ y $G = A^n a$ tendremos ahora que cada coeficiente de la composición es un polinomio en los coeficientes de $A^n a$, y entonces es un cuasipolinomio admisible.

5.4 Conjuntos q-Skolem

En esta sección probaremos las propiedades de los conjuntos q-Skolem, mencionadas en el lema 5.2.8.

Union finita de conjuntos q-Skolem es un conjunto q-Skolem.

Esto es cierto ya que la unión finita de conjuntos finitos es finita y la unión finita de uniones finitas de progresiones aritméticas sigue siendo una unión finita de progresiones aritméticas.

La intersección de una sucesión decreciente de conjuntos q-Skolem es un conjunto q-Skolem.

Sea $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ la suceción. Entonces existe un elemento A_m con el mínimo de progresiones aritméticas de paso q. Y tambien existe un A_n con el mínimo de elementos del conjunto finito de cada A_j para $j \geq m$. Entonces

$$\cap_{j=1}^{\infty} A_j = \cap_{j=1}^{m} A_j = A_m$$

pero ya que A_m es un conjunto q-Skolem tenemos la afirmación.

La intersección finita de conjuntos q-Skolem es un conjunto q-Skolem si el número de elementos de la intersección es infinita.

Basta probarlo para dos conjuntos q-Skolem. Sean $A_1 = A_{11} \cup A_{12}$ y $A_2 = A_{21} \cup A_{22}$, donde A_{11} y A_{21} denotan la parte finita de estos conjuntos y A_{12} y A_{22} denotan las uniones finitas de progresiones aritméticas. La intersección será:

$$A_1 \cap A_2 = (A_{11} \cap A_{21}) \cup (A_{11} \cap A_{22}) \cup (A_{12} \cap A_{21}) \cup (A_{12} \cap A_{22})$$

Los tres primeros terminos tienen un número finito de elementos, por lo tanto el último no puede ser vacio, pero si no es vacio entonces solo pude intersectarse en una union de progresiones aritméticas de paso q. De lo cual concluimos la afirmación.

La interseccion de un conjunto infinito numerable de conjuntos q-Skolem es q-Skolem si el número de elementos de la intersección es infinito.

Sea $\cap_{j=1}^{\infty} A_j$ esta intersección. Entonces la intersección finita $B_n = \cap_{j=1}^{n} A_j$ tiene un número infinito de elementos y por tanto es un conjunto q-Skolem por la afirmación anterior. Pero el conjunto de las B_n forman una sucesión decreciente de conjuntos q-Skolem y

$$\cap_{n=1}^{\infty} B_n = \cap_{n=1}^{\infty} \cap_{j=1}^{n} A_j = \cap_{j=1}^{\infty} A_j$$

es un conjunto q-Skolem.

Un conjunto q-Skolem es un conjunto qs-Skolem para todo entero s distinto de cero.

Esto es debido al hecho de que

$$\cup_{N=1}^{\infty}\{qN+r\} = \cup_{n=0}^{s-1} \cup N = 1^{\infty}\{qsN + r + nq\}.$$

5.5 Ceros de cuasipolinomios

Prueba del lema 5.2.9 Por el teorema de Skolem tenemos que el cuasipolinomio $g(n) = \sum p_i(n)z_i^n$ desaparece a lo largo de una progresión aritmética, $n = pN + r$.

A lo largo de esta progresión $g(n)$ puede ser considerado un cuasipolinomio con espectro $Z_j = z_i^p$ donde las j numeran valores de z_i^p distintos:

$$g(pN+r) = \sum P_j(N)Z_j^N,\ P_j(N) = \sum z_i^r p_i(pN+r)$$

(donde la ultima sumatoria es sobre las i tales que $z_i^p = Z_j$).

Si $g(pN+r) = 0$ para todo entero N entonces todos los coeficientes $P_j(N)$ desaparecen identicamente (ya que $Z_i \neq Z_j$ si $i \neq j$).

Demostraremos que entonces $g(pN + r + q) = 0$ si q es un multiplo de todos los ordenes de las raices de la unidad de la forma z_i/z_k.

Sea $z_i^p = z_k^p \neq 0$. Entonces z_i/z_j es una raiz de la unidad y por ende $(z_i/z_k)^q = 1$. De modo que $z_i^q = C_j$ para toda i con $z_i^p = Z_j$. De aqui que podemos escribir el valor del cuasipolinomio como:

$$g(pN+r+q) = \sum P_j(N+q/p)Z_j^{N+q/p} = \sum C_jP_j(N+q/p)Z_j^N =$$

$$\sum C_jZ_j^N \sum z_i^r p_i(pN+q+r) = \sum Z_j^N \sum z_i^r z_i^q p_i(pN+r+q) =$$

$$\sum Z_j^N P_j(N)$$

Ya que $P_j(N) \equiv 0$ entonces $g(pN+r+q) = 0$ para todo N entero. Entonces, toda progresion aritmética de ceros del cuasipolinomio g es cubierta por la unión de un número finito de progresiones aritméticas de paso q también ceros del cuasipolinomio. □

Prueba del lema 5.2.10 Sea $(z_i/z_k)^p = 1$ donde $z_j = w^{d_j}$. Entonces $p(d_i - d_k)$ pertenece al subgrupo de relaciones de $R \subset Z^r$. De esto tenemos que el orden de la raíz z_i/z_k es el orden del subgrupo ciclico del grupo cociente Z^s/R. El orden q de este grupo es divisible por los ordenes de sus subgrupos. Y entonces q es divisible por todos los ordenes de las raices de la unidad de la forma z_i/z_k y entonces el lema 5.2.10 se sigue del lema 5.2.9. □

Bibliografía

[AD] Albrecht Dold. *Teoria de punto fijo*, Tomo 1 y 2, Monografías del Instituto de Matemáticas, U.N.A.M., México, 1984.

[JM] John W. Milnor. *Topología desde el punto de vista diferencial*, Vínculos Matemáticos No. 68, Departamento de Matemáticas, U.N.A.M., México, 1979.

[D-F-N] B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S.P Novikov. *Modern Geometry - Methods and Applications*, Part II, Springer-Verlag, New York, 1985.

[A-G-V] V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade, A. N. Varchenko. *Singularities of Diferentiable Maps*, Birkhäuser, Boston, 1985.

[A1] V. I. Arnold. *A remark on the Weierstrass preparation theorem*. Functional Analysis and its Applications 1:3, 1-9.

[A2] V. I. Arnold. Majoration of Milnor numbers of intersections in holomorphic dynamical systems, *Topological methods in modern mathematics*, Editor L. Goldberg, A. Phillips, (Publish or Perish 1993), pp. 379-390.

[A3] V. I. Arnold. *Ordinary Differential Equations*, Springer Verlag, New York, 1992.

[L] Ch. Lech. *A note on recurring series*. Arkiv för mathematik, Band 2 No.22.