

00382 6
2eJ



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

METODOS DE LIE EN OPTICA

T E S I S

Que para obtener el Grado Académico de
DOCTORA EN CIENCIAS (FISICA)
p r e s e n t a

ANA LEONOR RIVERA LOPEZ

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Kurt Bernardo Wolf Bogner

CODIRECTOR:

Dr. Serguei Michailovich Chumakov Nadejenski



México, D.F.

1996

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS

COMPLETA

TITULO DE LA TESIS:

METODOS DE LIE EN OPTICA

GRADO Y NOMBRE DEL ASESOR O DIRECTOR DE TESIS:

ASESOR: DR. KURT BERNARDO WOLF BOGNER

COASESOR: DR. SERGUEI MICHAILOVICH CHOUMAKOV

NADEJNSKI

INSTITUCION DE ADSCRIPCION DEL ASESOR O DIRECTOR DE TESIS:

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMATICAS APLICADAS Y EN SISTEMAS UNAM

RESUMEN DE LA TESIS: (Favor de escribir el resumen de su tesis a máquina en 25 renglones a un espacio como máximo, sin salir del extensión de este cuadro.

Construimos el formalismo hamiltoniano para describir la propagación de rayos en medios ópticos anisotrópicos y consideramos las transformaciones canónicas correspondientes a estos medios en el espacio fase óptico.

Para estudiar la evolución en espacios fase ópticos y cuánticos, consideramos la diferencia entre la descripción de la óptica ondulatoria y geométrica para transformaciones generadas por hamiltonianos polinomiales. El mismo tratamiento matemático es importante para la mecánica y óptica cuánticas.

Analizamos la paradoja de Zenón cuántica (supresión de las transiciones entre niveles como resultado de mediciones sucesivas frecuentes) en sistemas de tres niveles resolviendo numéricamente las ecuaciones de Bloch ópticas que describen este sistema. Mostramos la correspondencia entre este mecanismo de captura de radiación con el de captura coherente.

LOS DATOS ASENTADOS EN ESTE DOCUMENTO CONCUERDAN FIELMENTE CON LOS REALES Y QUEDO ENTERADO QUE EN CASO DE CUALQUIER DISCREPANCIA QUEDARA SUSPENDIDO EL TRAMITE DEL EXAMEN.

FECHA DE SOLICITUD 3 de Junio de 1996.

Acompaño los siguientes documentos:

- Nominación del jurado del examen de grado
- Aprobación del trabajo escrito por cada miembro del jurado.
- Copia de la última revisión de estudios


FIRMA DEL ALUMNO

We developed the hamiltonian formulation to describe the ray propagation in anisotropic optical media considering canonical transforms in optical phase space.

To study the evolution in optical and quantum phase spaces we consider the difference between the wave and geometrical optics by transforms generated by hamiltonian polinomials.

We analyze the quantum Zeno paradox (inhibition of transitions between levels as a result of frequent measurements) in three level systems solving numerically the optical Bloch equations. We compare this radiation trapping mechanism with the usual coherent trapping.

Con todo mi amor

y respeto

a mis padres

Antonio y Emilia

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mis asesores Kurt Bernardo Wolf y Serguei M. Chumakov por sus valiosas enseñanzas, su enorme paciencia y sobretodo porque me introdujeron al maravilloso mundo de la investigación. Por supuesto la realización de esta tesis no habría sido posible sin la enorme colaboración de mis sinodales Luis Mochan Backal, Ricardo Alberto Weder Zaninovich, Alejandro Frank Hoeslich, Francois A. Leyvraz Waltz, y Gaston García Calderón quienes revisaron y dieron interesantes sugerencias para mejorar este manuscrito. Cualquier error o omisión es total responsabilidad mía. Durante la preparación de este trabajo tuve la fortuna de tener discusiones fructíferas con Natig Atakishiyev, Victor V. Dodonov, Andrey B. Klimov, Valery Karassiov, Javier Sanchez Mondragón, E.C.G. Sudarshan, Darryl D. Holm y Octavio Castaños a los cuales les agradezco sus comentarios.

No puedo dejar de mencionar al amable grupo de investigadores y técnicos que conforman el grupo de IIMAS - Cuernavaca quienes siempre me prestaron su apoyo y ayuda, en particular a Guillermo Krötzsch.

Sin familiares y amigos un ser humano no es completo, así que parte de este trabajo se los agradezco por los momentos felices que compartir y por los tiempos difíciles donde nunca me falto su apoyo.

Por ultimo quiero agradecer a la Dirección General de Asuntos del Personal Académico de la Universidad Nacional Autónoma de México por el apoyo económico que me brindo durante mis estudios de doctorado.

Contenido

1	Introducción.	1
2	Formulación Hamiltoniana de la óptica anisotrópica.	5
2.1	Introducción.	5
2.2	Las ecuaciones de Maxwell y el límite de la óptica geométrica.	6
2.2.1	Las ecuaciones de Maxwell.	6
2.2.2	Óptica geométrica en medios isotrópicos.	10
2.2.3	Óptica geométrica de medios anisotrópicos.	14
2.3	Formulación Hamiltoniana en óptica isotrópica.	17
2.3.1	El principio de Fermat.	17
2.3.2	Ecuaciones de Euler-Lagrange.	18
2.3.3	Ecuaciones de Hamilton.	19
2.3.4	Ecuación de rayo.	21
2.3.5	Refracción.	22
2.4	El formalismo Hamiltoniano para medios anisotrópicos.	23
2.4.1	El principio de Fermat.	23
2.4.2	Ecuaciones de Euler-Lagrange.	24
2.4.3	Ecuaciones de Hamilton.	25
2.4.4	Ejemplos de dependencia angular del índice de refracción.	26
2.4.5	Propagación libre en un medio uniaxial homogéneo.	28
2.4.6	Ley de refracción para la interfase entre dos medios anisotrópicos.	30
2.4.7	La transformación raíz.	31
2.5	Aproximaciones de la óptica geométrica.	33
2.5.1	Medio Isotrópico.	33

2.5.2	Medio Anisotrópico.	36
2.6	Conclusiones.	38
3	Haces Gaussianos.	39
3.1	Introducción.	39
3.2	Haces Gaussianos simples.	40
3.2.1	Transformada de Fourier.	41
3.2.2	Relaciones de Incertidumbre.	41
3.2.3	Evolución libre en óptica ondulatoria paraxial.	41
3.3	Haces Gaussianos complejos.	45
3.3.1	Transformada de Fourier.	46
3.3.2	Relaciones de Incertidumbre.	47
3.4	Transformaciones canónicas lineales.	47
3.4.1	Acción del operador \hat{x}^2	48
3.4.2	Acción del operador $\{\hat{x}\hat{p}\}$ (compresión).	50
3.4.3	Acción del operador \hat{p}^2 (evolución libre).	52
3.5	Aberraciones de segundo orden.	55
3.5.1	Pocus \hat{x}^3	55
3.5.2	Distorsión $\{\hat{x}^2\hat{p}\}$	56
3.5.3	Coma $\{\hat{x}\hat{p}^2\}$	59
3.5.4	Aberración esférica \hat{p}^3	64
3.6	Aberraciones de tercer orden.	64
3.6.1	Pocus \hat{x}^4	65
3.6.2	Distorsión $\{\hat{x}^3\hat{p}\}$	66
3.6.3	Astigmatismo $\{\hat{x}^2\hat{p}^2\}_w$	68
3.6.4	Coma $\{\hat{x}\hat{p}^3\}$	70
3.6.5	Aberración esférica \hat{p}^4	73
3.7	Conclusiones.	76
4	Evolución bajo Hamiltonianos polinomiales.	77
4.1	Introducción.	77
4.2	¿Cuál es la diferencia entre la dinámica clásica y cuántica en el espacio fase?	78
4.3	Funciones de Wigner.	80

CONTENIDO

iii

4.4	Transformaciones canónicas lineales.	83
4.4.1	Acción del operador X^2	84
4.4.2	Acción del operador $\{XP\}$	86
4.4.3	Acción del operador P^2	87
4.4.4	Acción del operador $P^2/2 + X^2/2$	87
4.5	Transformaciones no lineales.	88
4.6	Aberraciones ópticas.	93
4.6.1	Aberración esférica P^4	93
4.6.2	Coma $\{XP^3\}$	95
4.6.3	Astigmatismo $\{X^2P^2\}_W$	97
4.6.4	Distorsión $\{X^3P\}$	97
4.6.5	Pocus X^4	101
4.7	Medio de Kerr no lineal.	101
4.8	Conclusiones.	106
5	La paradoja de Zenón cuántica.	107
5.1	Introducción.	107
5.2	El postulado de von Neumann sobre la reducción de estados.	108
5.3	La paradoja de Zenón cuántica.	109
5.4	Poblaciones para un sistema de dos niveles.	113
5.5	Dinámica disipativa en sistemas de tres niveles.	115
5.6	Captura coherente.	117
5.7	Mediciones continuas.	119
5.8	Mediciones sucesivas.	120
5.9	Conclusiones.	123
6	Conclusiones.	125
A	Medios anisotrópicos.	127
B	Transformada de Fourier rápida.	139
C	Astigmatismo.	141
D	Evolución no lineal en el espacio fase.	145

E Evolución bajo Hamiltonianos polinomiales en espacios fase.	157
F Funciones de Wigner.	167
G Función de Wigner para un Hamiltoniano tipo Kerr.	173
H La paradoja de Zenón para mediciones continuas.	177
I La paradoja de Zenón para mediciones sucesivas.	185

Capítulo 1

Introducción.

El estudio de la propagación de la luz puede basarse en tres modelos válidos en distintas regiones:

- **óptica geométrica:** teoría clásica de los rayos de luz descritos por el principio de Fermat,
- **óptica ondulatoria:** teoría electromagnética clásica de la luz basada en las ecuaciones de Maxwell, su límite cuando la longitud de onda es despreciable lleva a la óptica geométrica,
- **óptica cuántica:** teoría cuántica de la luz basada en las ecuaciones del campo electromagnético cuántico, su límite cuando la constante de Planck tiende a cero lleva a la óptica ondulatoria.

El objetivo general de este trabajo es entender la conexión de estos modelos en algunos fenómenos específicos.

En el capítulo 2 vemos la estrecha conexión que existe entre la óptica geométrica y la óptica ondulatoria al analizar medios ópticos isotrópicos y anisotrópicos. Para ello mostramos en la sección 2.2 que la ecuación básica de la óptica geométrica (la ecuación eikonal) se puede obtener formalmente tomando el límite cuando la longitud de onda se hace despreciable en las ecuaciones de Maxwell para ondas monocromáticas. Analizamos este límite tanto en el caso de medios isotrópicos como en el de medios anisotrópicos. Pero la óptica geométrica no es sólo un caso particular de la óptica ondulatoria sino que en sí misma es una teoría fenomenológica completa basada en un principio extremal. Para ver esto, en la sección 2.3 construimos la óptica geométrica de medios isotrópicos a partir del principio de Fermat, mientras que en la sección 2.4 hacemos el tratamiento para medios anisotrópicos. Por supuesto si se considera la óptica geométrica como una teoría independiente

o como un caso límite de la óptica física, se llega a la misma ecuación eikonal con los mismos resultados físicos. Este tratamiento no toma en cuenta ni la polarización de la luz ni su intensidad. Un tratamiento más completo que considere estos parámetros tendrá que considerar aproximaciones de orden mayor en la longitud de onda, no sólo la aproximación de orden cero que da la óptica geométrica tradicional, las cuales llevan naturalmente a la ecuación de transporte. Presentamos estas aproximaciones en la sección 2.5. Los resultados han sido publicados en *J. Opt. Soc. Am. A*, **12**, 1380 (1995), que reproducimos en el apéndice A.

Con el fin de entender cuándo la óptica geométrica es una buena aproximación de la teoría ondulatoria comparamos la dinámica clásica y cuántica generada por los Hamiltonianos no lineales más simples. Este problema es importante tanto del punto de vista fundamental como por sus aplicaciones. De hecho, cuando diseñamos y construimos un instrumento óptico concreto debemos saber cuándo podemos usar la aproximación de la óptica geométrica o necesitamos tomar en cuenta las correcciones ondulatorias.

Teniendo esta meta estudiamos en el capítulo 3 la propagación de paquetes de onda semiclásicos gobernados por la ecuación de onda bajo la aproximación paraxial, la cual corresponde a la ecuación de Schrödinger de la mecánica cuántica. Los paquetes de onda semiclásicos descritos por funciones Gaussianas son muy importantes tanto en óptica ondulatoria como en óptica cuántica. En las secciones 3.2 y 3.3 analizamos las funciones Gaussianas. En la sección 3.4 revisamos las propiedades de las funciones Gaussianas bajo dinámica lineal (transformaciones de rayos de luz por sistemas ópticos paraxiales). Consideramos el ejemplo de dinámica no lineal que corresponde a aberraciones ópticas de segundo (sección 3.5) y tercer orden (sección 3.6) debido a su importancia en la construcción de instrumentos ópticos. En el capítulo 3 trabajamos con funciones de onda definidas en el espacio físico usual. Para el caso bidimensional (que consideramos en el trabajo actual) denotamos la distancia a lo largo del eje óptico por t dado que juega el mismo papel que el tiempo en mecánica cuántica. La coordenada en la dirección perpendicular al eje óptico se denota como x ; describe la posición del punto en la pantalla óptica que cruza el eje óptico en el punto t . El momento canónico conjugado p determina la dirección del rayo que intersecta esta pantalla en el punto (x, t) .

Otra representación muy importante para entender la conexión entre la óptica geométrica y ondulatoria (dinámica clásica y cuántica), describe el estado de un sistema óptico por una distribución de todos los rayos posibles que intersectan la pantalla óptica para un valor dado de t . Esta distribución depende de x y p . Así, tenemos una función del espacio fase del sistema dinámico clásico correspondiente que determina la intensidad de la luz. Desde el punto de vista de la óptica geométrica (mecánica clásica) el campo de luz puede describirse por cualquier función norma-

lizada no negativa ni singular $W(x, p)$. Sin embargo, la óptica ondulatoria (y la mecánica cuántica) restringen la forma posible de la función $W(x, p)$ para respetar las relaciones de incertidumbre entre las variables x, p . Más aún, las condiciones de "no singularidad" y "positividad" no son siempre consistentes con la ley dinámica cuántica. Por lo tanto, en óptica ondulatoria, $W(x, p)$ no tiene el significado preciso de distribución de intensidades (como tampoco el sentido de una distribución de probabilidad verdadera en la mecánica cuántica). Entre todos los candidatos de distribuciones de cuasiprobabilidad que se han propuesto en la mecánica cuántica, elegimos la distribución cuya correspondencia es la más cercana entre la dinámica clásica y cuántica: la conocida función de Wigner. Como vemos en el capítulo 4, la función de Wigner evoluciona de la misma forma en las dos mecánicas para todas las transformaciones lineales. Las transformaciones no lineales conducen a una diferencia esencial entre la evolución clásica y cuántica.

Iniciamos el capítulo 4 definiendo y enunciando las propiedades principales de la función de Wigner (sección 4.3). En la sección 4.4 señalamos las características de las transformaciones lineales. En particular mostramos que la función de Wigner "clásica" y la cuántica coinciden bajo dinámica lineal. La sección 4.5 contiene una discusión de las transformaciones canónicas no lineales e introduce los momentos de la función de Wigner (i.e., las integrales de las potencias de la función de Wigner sobre el plano fase) para cuantificar su diferencia. En la sección 4.6 estudiamos la evolución de las funciones de Wigner bajo todas las transformaciones debidas a Hamiltonianos polinomiales de cuarto grado previamente consideradas en el capítulo 3. En la sección 4.7 incluimos un ejemplo adicional que es importante para la óptica cuántica, el medio óptico de Kerr. Este pertenece esencialmente a la misma clase matemática de transformaciones. Estos resultados han sido publicados en el artículo que aparece en "On the phase space description of the quantum nonlinear dynamics", aceptado por *Phys. Lett. A*, (1996) y que reproducimos en el apéndice D y en otro artículo sometido a *Physical Review A* (apéndice E).

La analogía entre la óptica ondulatoria y la mecánica cuántica es bien conocida y ha sido muy fructífera. En este marco, la expansión de la óptica geométrica corresponde a la aproximación semiclásica. Similarmente, la polarización en la óptica física puede tratarse en correspondencia con un sistema de espín $1/2$ en mecánica cuántica. Así, una rotación cuántica del espín corresponderá a una rotación del plano de polarización en óptica. También el movimiento de espín puede describirse en términos semiclásicos. La paradoja de Zenón cuántica, que es la inhibición de transiciones entre estados cuánticos debida a mediciones frecuentes, es un ejemplo de un sistema que puede describirse introduciendo disipación en la dinámica cuántica y cuyo movimiento es esencialmente semiclásico. La contraparte óptica de este sistema incluye la rotación de la polarización en presencia de ruido de polarización, y es un ejemplo de un sistema donde la aproximación

de la óptica geométrica dá una buena descripción. Esta correspondencia motivó nuestra investigación sobre la paradoja de Zenón cuántica que presentamos en el capítulo 5. Aquí, consideramos la paradoja de Zenón cuántica para el caso del espín de energía, es decir, para un sistema de dos niveles. Este fenómeno tiene importancia práctica porque ha sido observado experimentalmente y como sistema óptico-cuántico porque sugiere nuevas posibilidades de captura de radiación.

Para entender mejor el tratamiento tradicional de la teoría de mediciones cuánticas, en la sección 5.2 revisamos que es el postulado de reducción de estados de von Neumann. Dentro de este marco resolvemos la paradoja de Zenón cuántica en la sección 5.3. Sin embargo no se necesita este enfoque *ad hoc* para resolver el problema, es factible tratarlo desde el punto de vista de la mecánica cuántica con disipación. Para entender cómo trabaja este planteamiento, en la sección 5.4 resolvemos las ecuaciones de Bloch ópticas para un sistema de dos niveles. En el caso de un sistema de tres niveles planteamos dichas ecuaciones en la sección 5.5. En la sección 5.6 resolvemos este sistema de ecuaciones cuando no hay mediciones, lo cual corresponde al fenómeno de captura coherente. Los resultados numéricos para el caso de medición continua se presentan en la sección 5.7, mientras que en la sección 5.8 analizamos pulsos ópticos sucesivos. Estos resultados han sido publicados en los artículos que aparecen en *J. Mod. Opt.* **41**, 839 (1994) y en *Phys. Lett. A*, **197**, 73 (1995), los cuales reproducimos en los apéndices H e I, respectivamente.

Por último queremos señalar que los métodos algebraicos de Lie son muy útiles para la óptica cuántica, ondulatoria y geométrica, así como para entender las interconexiones entre estos modelos. Tanto la óptica geométrica como la ondulatoria en la aproximación paraxial son descritas esencialmente por transformaciones del grupo $SL(2, \mathbb{R})$. Las aberraciones se describen por Hamiltonianos polinomiales del álgebra de cobertura $sl(2, \mathbb{R})$. Más aún, la transición entre la óptica geométrica y ondulatoria, así como entre la mecánica clásica y cuántica, se describe más naturalmente por funciones de Wigner, las cuales tienen su origen en la teoría de grupos. La función de Wigner esta conectada con el grupo de Heisenberg-Weyle. Finalmente, la óptica cuántica por su origen se formula naturalmente en el lenguaje de matrices, dado que los sistemas atómicos con un número finito de niveles resonantes se describen por matrices finitas. Sin embargo, la evolución óptico-cuántica frecuentemente es no unitaria, por lo que se encuentra más allá de la representación de grupos estándar y requiere de nuevas herramientas matemáticas. Como el interés global de esta tesis es analizar la interconexión entre los diferentes modelos que describen el comportamiento de la luz, la titulamos "Métodos de Lie en óptica" para englobar las distintas técnicas que utilizamos para comparar estos modelos en fenómenos específicos.

Capítulo 2

Formulación Hamiltoniana de la óptica anisotrópica.

2.1 Introducción.

El principio de Fermat se presenta como el axioma fundamental de la óptica geométrica [1], pero la mayoría de los autores sólo hacen la formulación para medios isotrópicos [2]. Un medio es isotrópico si sus propiedades físicas en cada punto son independientes de la dirección. Cualquier material no cristalino tal como el vidrio, y los cristales con simetría cúbica son ópticamente isotrópicos y sus características ópticas se describen completamente por un sólo número: el índice de refracción [3]. Todas las otras clases de cristales son ópticamente anisotrópicos; en ellos el índice de refracción depende de la dirección de propagación de la luz relativa a los ejes del cristal. Actualmente se han puesto de moda los materiales ópticos anisotrópicos para el manejo eficiente de información (principalmente por la popularidad de los materiales fotorrefractivos [4]). La mayoría de los autores [5, 6] analizan los medios anisotrópicos a través de las ecuaciones de Maxwell, poniendo especial atención en fenómenos de birrefringencia. McClain y colaboradores [7] estudian el problema del trazado de rayos para superficies refractantes entre medios anisotrópicos homogéneos. Kravtsov y Orlov [8] son los únicos que presentan un tratamiento completo de los medios anisotrópicos, demostrando los resultados fundamentales de la óptica geométrica tratándola como un método aproximado de la teoría ondulatoria. Para analizar sistemas compuestos de elementos ópticos es muy conveniente utilizar la teoría de grupos correspondiente, como lo hace la óptica de Lie; en ella la formulación de la evolución Hamiltoniana es la más apropiada [9]. Esto motivó que en este capítulo siguiéramos un enfoque distinto, haciendo énfasis en la construcción de las ecuaciones de Hamilton a partir del principio de Fermat [10] (ver apéndice A).

Tradicionalmente los medios ópticos isotrópicos y anisotrópicos se analizan con la teoría ondulatoria de la luz, basada en las ecuaciones de Maxwell. Dentro de este marco, en la sección 2.2 consideramos el caso límite de la óptica geométrica. Sin embargo, la misma teoría se puede construir a partir del principio de Fermat, deduciendo las ecuaciones de Euler-Lagrange y mediante una transformación de Legendre construir las ecuaciones de Hamilton. Siguiendo este enfoque analizamos los medios isotrópicos en la sección 2.3, y en la sección 2.4 hacemos la formulación Hamiltoniana para medios anisotrópicos. Esta formulación se basa en el principio de Fermat para los casos en que el parámetro de evolución es la longitud de arco a lo largo del rayo, o bien la distancia a lo largo de un eje óptico [11]. Torres del Castillo [12] ha analizado el problema utilizando como parámetro de evolución el tiempo. Para obtener la información completa del campo electromagnético, incluyendo polarizaciones e intensidades, necesitamos trabajar con la ecuación de transporte y las diversas aproximaciones de la óptica geométrica [13]. Debido a la importancia de estas aproximaciones, en particular de las aproximaciones de orden cero y primero de la óptica geométrica, en la sección 2.5 bosquejamos su uso en el análisis de medios isotrópicos y anisotrópicos. Presentamos las conclusiones de este capítulo en la sección 2.6.

2.2 Las ecuaciones de Maxwell y el límite de la óptica geométrica.

La luz es una perturbación electromagnética caracterizada por su oscilación rápida en tiempo y espacio. Su propagación se rige por las *ecuaciones de Maxwell*. Sin embargo, como las longitudes de onda λ con las que se trabaja son muy pequeñas (del orden de 10^{-5} cm) es una buena aproximación ignorar λ . La rama de la óptica que estudia el caso límite $\lambda \rightarrow 0$ se conoce como *óptica geométrica* dado que en esta aproximación las leyes ópticas pueden formularse en el lenguaje de la geometría. Por supuesto, en este límite no se explican los fenómenos de interferencia y difracción. La importancia de la óptica geométrica estriba en ser una teoría simple e intuitiva que trabaja bien mientras la longitud de onda sea pequeña comparada con las dimensiones características del problema a tratar.

2.2.1 Las ecuaciones de Maxwell.

Las ecuaciones de Maxwell para los campos eléctrico \vec{E} y magnético \vec{H} son [14]:

$$\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (2.4)$$

donde ρ es la densidad de carga, \vec{J} es la densidad de corriente, c es la velocidad de la luz en el vacío [15]. Los campos de desplazamiento eléctrico \vec{D} y de inducción magnética \vec{B} obedecen las siguientes relaciones materiales:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon \vec{E}, \\ \vec{B} &= \mu \vec{H}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde ϵ es la permeabilidad eléctrica y μ es la permeabilidad magnética, funciones que dependen localmente del medio. Para *medios isotrópicos* (en los cuales cada punto del espacio tiene propiedades que son independientes de la dirección), ϵ es una función escalar, mientras que en el caso *anisotrópico*, ϵ es un tensor de 2º orden; en ambos casos μ es una función escalar. Las Ecs. (2.1 - 2.5) están escritas en el sistema de unidades gaussiano (cgs) en el cual las cantidades eléctricas (\vec{E} , \vec{D} , \vec{J} y ρ) son medidas en unidades electrostáticas y las cantidades magnéticas (\vec{H} y \vec{B}) en unidades electromagnéticas. Este es el sistema de unidades que usaremos en este trabajo (ver [14] donde se describen éste y otros sistemas y los factores de conversión respectivos).

La ecuación de continuidad.

Al tomar la divergencia de la Ec. (2.3), usar que $\nabla \cdot (\nabla \times) = 0$, y la Ec. (2.1) obtenemos

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (2.6)$$

la cual, por una analogía con la hidrodinámica, se conoce como *ecuación de continuidad*. Esta ecuación expresa el hecho de que la carga se conserva en la vecindad de cada punto.

La fuerza de Lorentz.

La fuerza ejercida por un campo electromagnético sobre una carga eléctrica e que se mueve con velocidad \vec{v} está dada por la conocida *ley de Lorentz*,

$$\vec{F} = e \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right). \quad (2.7)$$

La ley de energía y el vector de Poynting.

Si multiplicamos escalarmente la Ec. (2.3) por (\vec{E}) , la Ec. (2.4) por $(-\vec{H})$ y sumamos las ecuaciones resultantes llegamos a

$$\frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \frac{1}{4\pi} \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) + \vec{E} \cdot \vec{J} = 0. \quad (2.8)$$

Las relaciones materiales Ecs. (2.5) nos llevan a que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi} \vec{E} \cdot \frac{\partial(\epsilon \vec{E})}{\partial t} = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D}) \equiv \frac{\partial \omega_c}{\partial t}, \\ \frac{1}{4\pi} \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi} \vec{H} \cdot \frac{\partial(\mu \vec{H})}{\partial t} = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H} \cdot \vec{B}) \equiv \frac{\partial \omega_m}{\partial t}, \end{aligned}$$

donde definimos

$$\begin{aligned} \omega_c &\equiv \frac{1}{8\pi} (\vec{E} \cdot \vec{D}), \\ \omega_m &\equiv \frac{1}{8\pi} (\vec{H} \cdot \vec{B}). \end{aligned}$$

Se puede probar [5] que $W = \omega_c + \omega_m$ representa la densidad de energía total del campo. Además, si definimos el vector de Poynting como

$$\vec{S} \equiv \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H}), \quad (2.9)$$

podemos reescribir la Ec. (2.8) como

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} + \vec{E} \cdot \vec{J} = 0. \quad (2.10)$$

Esta ecuación representa la ley de energía en un campo electromagnético. Aquí el término $\vec{E} \cdot \vec{J}$ representa la disipación de energía resistiva en un conductor (conocida como "calor de Joule"); mientras el vector de Poynting \vec{S} representa la cantidad de energía que cruza por segundo una unidad de área normal a las direcciones de \vec{E} y \vec{H} , es decir, \vec{S} es el vector del flujo de energía. En un medio donde $\vec{J} = 0$, la Ec. (2.10) toma la forma de una ecuación de continuidad (como la Ec. 2.6) para la energía.

La intensidad de la luz se define como la norma del vector de Poynting.

La ecuación de onda.

En regiones libres de corrientes y de cargas (llamadas de "campo estático"),

$$\vec{J} = \rho = 0,$$

las ecuaciones de Maxwell (2.1-2.4), incorporando las relaciones materiales Ecs. (2.5), toman la forma:

$$\nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) = 0, \quad (2.11)$$

$$\nabla \cdot (\mu \vec{H}) = 0, \quad (2.12)$$

$$\nabla \times \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \vec{E}) = 0, \quad (2.13)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mu \vec{H}) = 0. \quad (2.14)$$

Diferenciando la Ec. (2.13) con respecto al tiempo y sustituyendo en la ecuación que se obtiene al tomar el rotacional de la Ec. (2.14), usando identidades vectoriales y la Ec. (2.11) llegamos a la ecuación de onda:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + (\nabla \log \mu) \times (\nabla \times \vec{E}) + \nabla(\vec{E} \cdot \nabla \log \epsilon) = 0. \quad (2.15)$$

En particular, si el medio es homogéneo,

$$\nabla \log \epsilon = \nabla \log \mu = 0,$$

la ecuación de onda (2.15) se reduce a

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0; \quad (2.16)$$

análogamente

$$\nabla^2 \vec{H} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0.$$

Estas son las ecuaciones estándar de movimiento ondulatorio y sugieren la existencia de ondas electromagnéticas que se propagan con la velocidad

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} \equiv \frac{c}{n}, \quad (2.17)$$

donde n es el índice de refracción del medio.

Para obtener las leyes de la óptica geométrica consideraremos el caso límite de las ecuaciones de Maxwell cuando $\lambda \rightarrow 0$. En la sección (2.2.2) analizaremos este caso para medios isotrópicos y en la sección (2.2.3) para medios anisotrópicos.

La ecuación de Helmholtz.

Si consideramos campos que son armónicos en el tiempo (monocromáticos):

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t},$$

donde \vec{E} denota una función vectorial compleja de la posición que satisface las ecuaciones de Maxwell en su forma independiente del tiempo. Sustituyendo este campo en la ecuación de onda (2.16) llegamos a la conocida ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 \vec{E} + \kappa^2 \vec{E} = 0, \quad (2.18)$$

donde $\kappa = \omega n/c$. En electrodinámica, la Ec. (2.18) describe el comportamiento de ondas electromagnéticas, excluyendo polarización en cualquier medio isotrópico. También es la ecuación que gobierna las ondas acústicas si tomamos $\kappa = \omega/\bar{c}$ siendo \bar{c} la velocidad local de la onda sonora en el espacio bajo consideración. Para la ecuación de onda estacionaria de Schrödinger, definiendo la función de onda de una partícula de masa m y energía E en el campo del potencial V , $\kappa^2 = 2m(E - V)/\hbar^2$ con $\hbar = h/(2\pi)$ la constante de Planck.

2.2.2 Óptica geométrica en medios isotrópicos.

Propongamos una solución a las Ecs. (2.11-2.14) de la forma [5]:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{e}(\vec{r}) \exp[i(\kappa S(\vec{r}) - \omega t)], \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= \vec{h}(\vec{r}) \exp[i(\kappa S(\vec{r}) - \omega t)], \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde S es una función escalar real de la posición que en óptica se conoce como la *eikonal*¹ y en mecánica su análogo es la *acción*, $\kappa \equiv 2\pi/\lambda = \omega/c$, es el número de onda, ω es la frecuencia angular, una constante real, y $\vec{e}(\vec{r})$, $\vec{h}(\vec{r})$ son funciones vectoriales de la posición que en general pueden ser complejas.

Al sustituir las Ecs. (2.19) en las ecuaciones de Maxwell y considerar valores grandes de κ , es decir, en el límite de la óptica geométrica, cuando $\lambda \rightarrow 0^2$:

$$\vec{e} \cdot \vec{p} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{p}, \quad (2.20)$$

$$\vec{h} \cdot \vec{p} = 0 \Rightarrow \vec{H} \perp \vec{p}, \quad (2.21)$$

$$\vec{h} \times \vec{p} - \epsilon \vec{e} = 0 \Rightarrow \epsilon \vec{e} = \vec{h} \times \vec{p}, \quad (2.22)$$

$$\vec{e} \times \vec{p} + \mu \vec{h} = 0 \Rightarrow \mu \vec{h} = \vec{p} \times \vec{e}, \quad (2.23)$$

¹del griego $\epsilon\iota\kappa\omega\nu$ =imagen.

²Físicamente esto implica que ϵ y μ no varían de manera apreciable en distancias $\approx \lambda$

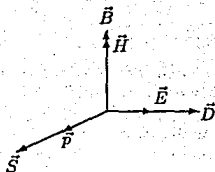


Figura 2.1: Los vectores electromagnéticos en un medio isotrópico. Los frentes de onda son transversales a la dirección del momento \vec{p} que en este medio coincide con la de propagación de la energía \vec{S} .

donde definimos

$$\vec{p} \equiv \nabla S. \quad (2.24)$$

Las relaciones materiales Ecs. (2.5) para un medio isotrópico implican

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \Rightarrow \vec{E} \parallel \vec{D}, \quad (2.25)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \Rightarrow \vec{H} \parallel \vec{B}. \quad (2.26)$$

En la Fig. 2.1 mostramos las relaciones geométricas de las Ecs. (2.20–2.26).

La ecuación eikonal.

Sustituyendo la Ec. (2.23) en la Ec. (2.22):

$$\frac{1}{\mu} [(\vec{e} \cdot \vec{p})\vec{p} - \vec{e}(\vec{p} \cdot \vec{p})] + \epsilon \vec{e} = 0,$$

el primer término de esta expresión se anula de acuerdo a la Ec. (2.20) y como \vec{e} no se anula en todas partes llegamos a la llamada *ecuación eikonal*:

$$(\vec{p})^2 = n^2, \quad (2.27)$$

en la cual definimos el *índice de refracción* como

$$n \equiv \sqrt{\epsilon\mu}. \quad (2.28)$$

Esta es la ecuación básica de la óptica geométrica.

La ecuación de rayo.

Definimos el *rayo de luz* como el camino que recorre la energía, por lo que en todo punto su dirección será la del vector de Poynting promedio. Las superficies donde S es constante se llaman los *frentes de onda geométricos*. De las Ecs. (2.20, 2.21) se concluye que en un medio isotrópico, las trayectorias ortogonales a los frentes de onda geométricos coinciden con la de los rayos de luz.

Si $\vec{r}(s)$ denota el vector de posición de un punto P en un rayo considerado como una función de la longitud de arco s del rayo, entonces:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} \parallel \nabla S,$$

por la definición (2.24) la dirección del rayo de luz es la de \vec{p} y por la ecuación eikonal (2.27) su magnitud es n , entonces la ecuación del rayo puede escribirse como:

$$n \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{p}. \quad (2.29)$$

De las Ecs. (2.20) y (2.21) se concluye que los vectores eléctrico y magnético son en cada punto ortogonales al rayo.

La Ec. (2.29) especifica los rayos mediante la función \vec{p} , pero uno puede derivar de ésta una ecuación diferencial que especifique los rayos directamente en términos del índice de refracción [5], para ello diferenciamos la Ec. (2.29) con respecto a s y usamos la ecuación eikonal (2.27):

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \nabla n. \quad (2.30)$$

Como veremos en la sección (2.3), esta ecuación corresponde a la ecuación de Euler-Lagrange si se identifica el Lagrangiano con

$$\mathcal{L} = n \sqrt{\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2} + 1.$$

Medio homogéneo.

Un medio homogéneo es invariante bajo traslaciones, en particular, en dicho medio $n = \text{constante}$ y la ecuación de rayo (2.30) toma la forma:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} = 0,$$

cuya solución es:

$$\vec{r} = s\vec{v}_0 + \vec{r}_0,$$

con \vec{v}_0 y \vec{r}_0 vectores constantes. Por lo tanto, en un medio homogéneo, los rayos de luz siguen trayectorias rectas. Además, en este medio, la Ec. (2.29) implica que $\vec{p} = n\vec{v}_0$ es un vector constante.

El vector de Poynting.

El promedio temporal del vector de Poynting, Ec. (2.9), se encuentra usando las ecuaciones (2.20) y (2.23)

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{c}{n^2} \langle W \rangle \vec{p},$$

donde $\langle W \rangle$ es la densidad de energía promedio. El vector de Poynting promedio está en la dirección de la normal al frente de onda geométrico y la densidad de energía promedio se propaga con la velocidad de las ondas $v = c/n$ (Ec. 2.17), esto sólo ocurre para medios isotrópicos.

Como la magnitud del vector de Poynting es una medida de la intensidad de la luz, entonces I es proporcional a la densidad de energía promedio.

Reflexión de ondas electromagnéticas por interfaces.

Cuando una onda electromagnética incide en una superficie que separa dos medios con diferentes índices de refracción n_1 y n_2 , si el campo incidente es

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp},$$

donde \vec{E}_{\parallel} denota la componente del campo eléctrico paralela a la superficie, y \vec{E}_{\perp} es la componente normal; la onda reflejada será [16]:

$$\vec{E}_r = \Gamma_{\parallel} \vec{E}_{\parallel} + \Gamma_{\perp} \vec{E}_{\perp},$$

donde

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta}, \quad \Gamma_{\perp} = \frac{n_1 \cos \theta - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta + n_2 \cos \theta_t},$$

y la onda transmitida

$$\vec{E}_t = T_{\parallel} \vec{E}_{\parallel} + T_{\perp} \vec{E}_{\perp},$$

con

$$T_{\parallel} = \frac{2n_1 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta}, \quad T_{\perp} = \frac{2n_1 \cos \theta}{n_1 \cos \theta + n_2 \cos \theta_t}.$$

El ángulo que la onda reflejada hace con la normal a la superficie es igual al ángulo de incidencia θ y el de refracción θ_t obedece la ley de Snell:

$$n_1 \sin \theta = n_2 \sin \theta_t.$$

2.2.3 Óptica geométrica de medios anisotrópicos.

En el caso *anisotrópico* ϵ es un tensor de 2º orden. Se puede probar [3] que la conservación de la energía implica que ϵ es una matrix simétrica que tiene seis parámetros independientes los cuales caracterizan al medio.

Densidad de energía eléctrica.

La densidad de energía eléctrica está dada por [5]

$$8\pi\omega\epsilon = \vec{E} \cdot \vec{D} = \epsilon_{xx}E_x^2 + \epsilon_{yy}E_y^2 + \epsilon_{zz}E_z^2 + 2\epsilon_{xy}E_xE_y + 2\epsilon_{yz}E_yE_z + 2\epsilon_{zx}E_zE_x, \quad (2.31)$$

que es la ecuación cuadrática de un elipsoide que representa las propiedades del tensor ϵ . Mediante una rotación en el espacio podemos llevar la cuadrática a ejes de coordenadas donde ϵ tenga una forma diagonal con la misma traza.

Usando la representación del desplazamiento eléctrico \vec{D} , la Ec. (2.31) se reescribe como

$$\frac{D_x^2}{8\pi\omega\epsilon_x} + \frac{D_y^2}{8\pi\omega\epsilon_y} + \frac{D_z^2}{8\pi\omega\epsilon_z} = 1,$$

la cual es la ecuación de un elipsoide cuyos semiejes son proporcionales a $\sqrt{\epsilon_x}$, $\sqrt{\epsilon_y}$, $\sqrt{\epsilon_z}$; es decir, a los índices de refracción en cada dirección. Este elipsoide se conoce como el *indicatriz óptico* [3].

Si en la Ec. (2.31) se usa la representación del campo eléctrico \vec{E} entonces

$$\frac{E_x^2}{8\pi\omega\epsilon/\epsilon_x} + \frac{E_y^2}{8\pi\omega\epsilon/\epsilon_y} + \frac{E_z^2}{8\pi\omega\epsilon/\epsilon_z} = 1,$$

la cual es la ecuación de un elipsoide conocido como el *elipsoide de Fresnel* o de rayos [6]. El elipsoide de Fresnel tiene semiejes que son proporcionales a las velocidades de los rayos \vec{v} .

Consecuencias de las ecuaciones de Maxwell.

Analizaremos los medios anisotrópicos proponiendo como en la sección (2.2.2) una solución a las ecuaciones de Maxwell Ecs. (2.11-2.14) de la forma de las Ecs. (2.19) y definiendo $\vec{p} \equiv \nabla S$. En el límite de la óptica geométrica llegamos a [5]

$$\vec{p} \cdot \vec{D} = 0 \Rightarrow \vec{p} \perp \vec{D}, \quad (2.32)$$

$$\vec{p} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{p} \perp \vec{B}, \quad (2.33)$$

$$\nabla \times \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \epsilon \vec{e} = \vec{h} \times \vec{p}, \quad (2.34)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \mu \vec{h} = \vec{p} \times \vec{e}, \quad (2.35)$$

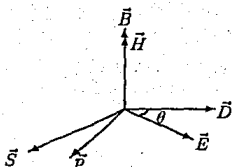


Figura 2.2: Los vectores electromagnéticos en un medio anisotrópico. Los frentes de onda son transversales a la dirección del momento \vec{p} , la cual en general no coincide con la de propagación de la energía \vec{S} .

y las relaciones materiales llevan a

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \Rightarrow \vec{D} \parallel \vec{E}, \quad (2.36)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \Rightarrow \vec{B} \parallel \vec{H}. \quad (2.37)$$

En la Fig. 2.2 presentamos las relaciones geométricas de las Ecs. (2.32-2.37).

Si definimos el rayo como el camino que recorre la energía, el vector de Poynting \vec{S} definirá el rayo de igual manera que lo hace en un medio isotrópico, Ec. (2.9), siendo \vec{S} ortogonal a \vec{E} y a \vec{H} . No obstante, para un medio anisotrópico, en general, la velocidad de propagación de la energía ya no tiene ni la misma magnitud ni la misma dirección que la de la onda (ver Fig. 2.2).

La ecuación eikonal.

De las Ecs. (2.34) y (2.35) se sigue la ecuación:

$$(\vec{e} \cdot \vec{p}) \vec{p} = (\vec{p})^2 \vec{e} - \mu \epsilon \vec{e}, \quad (2.38)$$

que generaliza la ecuación eikonal (2.27).

Multiplicando escalarmente la Ec. (2.38) por $(\vec{h} \times \vec{p})$ encontramos

$$(\vec{e} \cdot \vec{p}) (\vec{h} \times \vec{p}) \cdot \vec{p} = (\vec{p})^2 (\vec{h} \times \vec{p}) \cdot \vec{e} - \mu (\vec{h} \times \vec{p}) \cdot \epsilon \vec{e},$$

el lado izquierdo de esta relación se anula, con lo que el ángulo entre los vectores \vec{D} y \vec{E} está dado por

$$\cos \theta = \frac{\mu}{(\vec{p})^2} \frac{|\epsilon \vec{e}|}{c}. \quad (2.39)$$

Esta ecuación da el límite correcto en el caso isotrópico $\theta = 0$.

La ecuación de Fresnel.

Consideremos un sistema de coordenadas tal que ϵ sea diagonal. Tomando componentes de la Ec. (2.38), multiplicando por p_j y sumando las tres ecuaciones resultantes para $j = x, y, z$ obtenemos:

$$\sum_{j=x,y,z} \frac{p_j^2}{p^2 - \mu \epsilon_j} = 1, \quad p^2 \equiv |\vec{p}|^2, \quad (2.40)$$

que es llamada la *ecuación de Fresnel* [6]. Haciendo el cambio de variables:

$$\alpha_j = \frac{p_j^2}{p^2}, \quad \beta_j = \mu \epsilon_j, \quad \chi = p^{-2},$$

la ecuación de Fresnel (2.40) toma la forma:

$$\sum_{j=x,y,z} \frac{\alpha_j}{1 - \beta_j \chi} = 1,$$

la cual es una ecuación cuadrática en χ que tiene como soluciones:

$$\chi_{\pm} = \sum_{j=x,y,z} \frac{1 - \alpha_j}{2\beta_j} \pm \sqrt{\left(\sum_{j=x,y,z} \frac{1 - \alpha_j}{2\beta_j} \right)^2 - \frac{\sum_{j=x,y,z} \alpha_j \beta_j}{\beta_x \beta_y \beta_z}}.$$

Definiendo $n^2 \equiv \chi^{-1}$, la última ecuación tiene dos soluciones n_+ y n_- , las cuales corresponden a dos ramas del índice de refracción. Si denotamos por $\hat{p} = \vec{p}/p$, el vector unitario en la dirección de \vec{p} podemos escribir estas dos soluciones en una forma invariante como:

$$n_{\pm} = [C \pm \sqrt{C^2 - D}]^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.41)$$

donde

$$C = \frac{1}{2} (\text{tr}(\mu\epsilon)^{-1} - \hat{p} \cdot (\mu\epsilon)^{-1} \cdot \hat{p}),$$

$$D = \frac{\hat{p} \cdot (\mu\epsilon) \cdot \hat{p}}{\det(\mu\epsilon)},$$

o en coordenadas esféricas como:

$$C = \frac{1}{2\mu\epsilon_x\epsilon_y\epsilon_z} (\epsilon_x\epsilon_y + \epsilon_y\epsilon_z + \epsilon_x\epsilon_z - \epsilon_y\epsilon_z \sin^2 \theta \cos^2 \phi - \epsilon_x\epsilon_z \sin^2 \theta \sin^2 \phi - \epsilon_x\epsilon_y \cos^2 \theta),$$

$$D = \frac{1}{\mu^2\epsilon_x\epsilon_y\epsilon_z} (\epsilon_x \sin^2 \theta \cos^2 \phi + \epsilon_y \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \epsilon_z \cos^2 \theta).$$

Para obtener el límite isotrópico consideramos $\epsilon = \epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z$ y usamos la Ec. (2.41); con lo cual, el índice de refracción es

$$n_+ = n_- = n = \sqrt{\mu \epsilon}, \quad \beta_j = n^2$$

que coincide con la definición dada en la Ec. (2.28).

Resumiendo, como en un medio anisotrópico $\vec{e} \cdot \vec{p} \neq 0$, la ecuación eikonal lleva a la ecuación de Fresnel que predice dos índices de refracción, los cuales podemos considerar asociados con dos valores del campo eléctrico \vec{E}_+ y \vec{E}_- , es decir, con \vec{D}_+ y \vec{D}_- , vectores que especifican las polarizaciones de ondas luminosas que se propagan a dos velocidades diferentes dadas por n_+ y n_- . Se puede probar que [3]

$$\vec{D}_+ \cdot \vec{D}_- = 0.$$

2.3 Formulación Hamiltoniana en óptica isotrópica.

Como veremos en esta sección, la ecuación eikonal (2.27) también puede verse como la ecuación de Hamilton-Jacobi que resuelve el principio variacional de Fermat de manera análoga a como se derivan las ecuaciones de la mecánica clásica a partir del principio de Maupertuis [17]. Inclusive puede estudiarse toda la óptica geométrica en completa analogía con la mecánica clásica (como lo hizo Hamilton).

2.3.1 El principio de Fermat.

El *principio de Fermat* establece que la trayectoria que sigue un rayo de luz desde un punto arbitrario P_1 hasta otro punto arbitrario P_2 es tal que el tiempo de propagación sea estacionario. Este principio se formula a través de la ecuación variacional [18]:

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} dt = 0. \quad (2.42)$$

En la literatura [2] frecuentemente se menciona este principio como un principio de mínima acción, pero es importante señalar que si consideramos reflexión, la trayectoria no necesita ser un mínimo³.

Si ds es el elemento de *longitud* a lo largo del rayo y n es el *índice de refracción* del medio, la velocidad clásica de este "punto de luz" Newtoniano será $ds/dt = c/n$. El índice de refracción caracteriza el medio óptico, n constante indica que el medio es *homógeno* (invariante bajo traslaciones) e *isotrópico* (invariante bajo

³Ver por ejemplo, Lunenburg [19], donde se muestra que para un espejo esférico la trayectoria de un rayo reflejado es un máximo.

rotaciones); en *medios anisotrópicos*, el índice de refracción también puede ser función de la dirección del rayo.

Si denotamos los puntos en un rayo por la línea continua y diferenciable $\vec{r}(s)$, $s \in \mathbb{R}$, la dirección del rayo será $\dot{\vec{r}}(s) = d\vec{r}(s)/ds$; como $|d\vec{r}| = ds$, éste es un vector de norma uno, es decir, sujeto a la restricción $|\dot{\vec{r}}| = 1$, y por lo tanto se encuentra sobre la superficie bidimensional de la esfera S_2 . En óptica isotrópica inhomógena, el principio de Fermat Ec. (2.42) toma la forma:

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} ds n(\vec{r}(s)) = 0. \quad (2.43)$$

2.3.2 Ecuaciones de Euler-Lagrange.

En la formulación Lagrangiana de la mecánica [20], el principio variacional Ec. (2.43) conduce como veremos en esta sección a las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Por simplicidad sea

$$\mathcal{L}(x', y', x, y, z) = n(x, y, z) \sqrt{x'^2 + y'^2 + 1}, \quad (2.44)$$

\mathcal{L} es una función con derivadas parciales continuas hasta segundo orden en las cinco variables (aquí $x' = dx/dz$, $y' = dy/dz$), llamada función Lagrangiana [17]. Además sea \mathcal{C} la curva $x = x(z)$, $y = y(z)$ entre dos puntos dados P_1 y P_2 para la cual la integral:

$$I = \int_{z_1}^{z_2} dz \mathcal{L}(x', y', x, y, z), \quad (2.45)$$

es un extremo, es decir, $\delta I = 0$.

Para encontrar \mathcal{C} elegimos una función $\xi(z)$ con una derivada continua de primer orden, la cual se anula en los puntos extremos y formamos la curva "variada" \mathcal{C}' reemplazando la coordenada x de I por $x + c\xi$ donde c es un parámetro pequeño e integramos por partes

$$(\delta I)_x = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'} \xi \right]_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} dz \xi \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'} \right) \right] + \int_{z_1}^{z_2} dz \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \xi,$$

al evaluar el primer término de esta ecuación se anula por la condición a la frontera y como ξ se elige arbitrariamente en el intervalo $z_1 \leq z \leq z_2$, la condición necesaria para que sea un extremo es que $(\delta I)_x = 0$, la cual puede expresarse como:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dz} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'} = 0. \quad (2.46)$$

Análogamente, reemplazando y por $y + c\eta$ y considerando que $(\delta I)_y = 0$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dz} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = 0. \quad (2.47)$$

Estas dos ecuaciones diferenciales (2.46) y (2.47) son conocidas como las *ecuaciones de Euler-Lagrange* [17, 20]. Para el caso de medios isotrópicos, usando la Ec. (2.44) tenemos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + 1} \frac{\partial n}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'} = \frac{nx'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + 1}},$$

con lo cual la ecuación de Euler-Lagrange (2.46) toma la forma:

$$\sqrt{x'^2 + y'^2 + 1} \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{d}{dz} \frac{nx'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + 1}}.$$

Estas ecuaciones toman una forma más compacta si usamos el parámetro s en lugar de z . Dado que:

$$ds = dz \sqrt{x'^2 + y'^2 + 1},$$

tenemos:

$$\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{d}{ds} \left(n \frac{dx}{ds} \right). \quad (2.48)$$

Este formalismo Hamiltoniano se ha desarrollado considerando x y y como coordenadas y z como parámetro de evolución.

También podemos escribir las ecuaciones de evolución en tres dimensiones:

$$\nabla n = \frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right). \quad (2.49)$$

2.3.3 Ecuaciones de Hamilton.

Para pasar de la formulación Lagrangiana del sistema (en las variables de posición \vec{r} y velocidad $\dot{\vec{r}}$) a la descripción Hamiltoniana (en las variables de posición \vec{r} y momento \vec{p}) utilizaremos la transformación de Legendre [21]. Para ello definimos el *momento* como el gradiente respecto a la velocidad de la función Lagrangiana:

$$p_j \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}^j}, \quad j = x, y.$$

En el caso isotrópico, la componente x del momento es:

$$p_x = n \frac{dx}{ds} = \frac{nx'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + 1}},$$

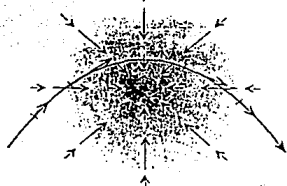


Figura 2.3: En un medio inhomógeno, el gradiente espacial del índice de refracción dobla los rayos de luz. Agradecemos esta figura a G. Kröttsch.

y en tres dimensiones:

$$\vec{p} = n \frac{d\vec{r}}{ds}. \quad (2.50)$$

Con ello la Ec. (2.49) se reescribe como

$$\nabla n = \frac{d\vec{p}}{ds},$$

ver Fig. 2.3. Esta ecuación nos recuerda la de una fuerza que actúa a lo largo del gradiente de un potencial [17], en este caso, el análogo del tiempo es la longitud de arco s y el del potencial mecánico es el índice de refracción n .

Se define el Hamiltoniano del sistema como [21]:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\equiv x' p_x + y' p_y - \mathcal{L} \\ &= \frac{nx'^2}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + 1}} + \frac{ny'^2}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + 1}} - n\sqrt{x'^2 + y'^2 + 1} \\ &= -\frac{n}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + 1}} = -p_z = -\sqrt{n^2 - p_x^2 - p_y^2}, \end{aligned}$$

por lo que las ecuaciones de Hamilton [17] para la variable x son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = x' &= \frac{p_x}{\sqrt{n^2 - p_x^2 - p_y^2}}, \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -\frac{\partial p_x}{\partial z} &= -\frac{n}{\sqrt{n^2 - p_x^2 - p_y^2}} \frac{\partial n}{\partial x}, \end{aligned}$$

y en tres dimensiones:

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \frac{\vec{p}}{\sqrt{n^2 - p_x^2 - p_y^2}}, \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} &= \frac{n \nabla n}{\sqrt{n^2 - p_x^2 - p_y^2}}. \end{aligned}$$

Aquí las ecuaciones para las componentes x y y coinciden con las ecuaciones de Hamilton anteriores y la ecuación para la componente z se satisface automáticamente.

De la Ec. 2.50 se sigue que el vector \vec{p} se mueve sobre una esfera:

$$|\vec{p}| = n(r), \quad (2.51)$$

la llamada *esfera de Descartes*, cuyo radio cambia en respuesta al índice de refracción local del medio. Es importante remarcar que esta ecuación no es más que la ecuación eikonal (2.27) que obtuvimos a partir del formalismo Maxwelliano. Notemos que en el caso de la óptica, el Hamiltoniano \mathcal{H} no tiene el significado de energía como en la mecánica.

2.3.4 Ecuación de rayo.

Distintas elecciones del parámetro de evolución nos llevan a formalismos Hamiltonianos con diferentes funciones Hamiltonianas.

Por ejemplo, podemos usar el Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} [n^2 - p^2], \quad (2.52)$$

denotando el parámetro de evolución correspondiente como τ [19]:

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}}, \quad \frac{d\vec{p}}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{r}}.$$

Las ecuaciones de rayo en esta forma del formalismo Hamiltoniano son

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \vec{p}, \quad (2.53)$$

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{\nabla n^2}{2}. \quad (2.54)$$

De la Ec. (2.53) se deduce que el vector tangente al rayo es paralelo al momento, i.e., en un medio isotrópico, los rayos son normales a las superficies de eikonal constante, esto es, a los frentes de onda.

Podemos combinar las Ecs. (2.53, 2.54) en la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2 \vec{r}}{d\tau^2} = \frac{\nabla n^2}{2}.$$

Esta ecuación es similar a la de Newton de movimiento de una masa unitaria en el campo de fuerza $U(\vec{r}) = \nabla n^2 / 2$ [20].

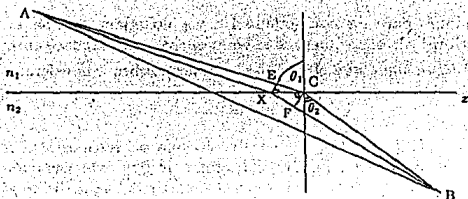


Figura 2.4: Ley de Snell para la refracción entre dos medios isotrópicos.

Notemos que el Hamiltoniano es siempre constante a lo largo de las trayectorias de los rayos, más aún, este Hamiltoniano (2.52) se anula a lo largo de las trayectorias de acuerdo a la condición $p^2 = n^2$.

El parámetro τ que varía a lo largo del rayo puede relacionarse con la longitud de arco s usando

$$d\tau = \frac{ds}{|\partial\mathcal{H}/\partial\vec{p}|} = \frac{ds}{|\vec{p}|} = \frac{ds}{n}$$

con lo que llegamos a la misma forma de las ecuaciones de rayo (2.29 y 2.30).

2.3.5 Refracción.

El fenómeno de refracción ocurre cuando un rayo de luz llega a una discontinuidad finita del índice de refracción. Consideremos primero el caso cuando la superficie de discontinuidad es el plano $z = 0$, y el rayo cruza esta interfase plana entre dos medios isotrópicos diferentes de índices de refracción n_1 y n_2 , respectivamente. Probaremos que en este caso, el principio de Fermat conduce a la conocida ley de Snell⁴ [23]. El principio de Fermat establece que la luz tiene que seguir la trayectoria que implique que el tiempo de propagación sea un extremo, en este caso el mínimo. En la Fig. 2.4, dicha trayectoria corresponde a ACB. Tomemos un punto vecino X y calculemos el tiempo que tardaría la luz en ir por las dos trayectorias ACB y AXB. Si trazamos la perpendicular XE, el camino AX es más corto que AC por la cantidad EC, mientras que trazando la perpendicular CF, vemos que el camino XB es más largo que CB por la cantidad XF, es decir, en tiempo, la luz gana el tiempo que le lleva recorrer la distancia EC pero pierde el tiempo que tarda en recorrer XF. Como X es un punto muy cercano a C, estos tiempos deben ser iguales

$$\begin{aligned} n_1(EC) &= n_2(XF), \\ n_1(XC) \sin(\angle EXC) &= n_2(XC) \sin(\angle XCF), \end{aligned}$$

⁴El primero en plantear la ley de refracción fue Ibn Sahl [22]

como el ángulo EXC no es más que el ángulo que forma el rayo que viaja en el medio 1 con la superficie de discontinuidad, θ_1 y el ángulo XCF es θ_2 ,

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2,$$

es decir, la proyección del momento en el plano de la pantalla *se conserva*:

$$p = p'.$$

2.4 El formalismo Hamiltoniano para medios anisotrópicos.

2.4.1 El principio de Fermat.

Para medios anisotrópicos podemos escribir el principio de Fermat como [10]

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} ds n(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = 0. \quad (2.55)$$

Trabajemos en un sistema de coordenadas cartesiano donde privilegiaremos un eje como parámetro de evolución, el llamado *eje óptico* z . Las otras dos coordenadas x, y pertenecen a la conocida *pantalla plana*, colocada en un punto z y donde se miden las posiciones de los rayos r ($r = (x, y)$). En este sistema, el vector de posición es

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ z \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

y el vector tangencial es

$$\dot{\vec{r}} \equiv \frac{d\vec{r}}{ds} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \sqrt{1 - \dot{r}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.57)$$

La última expresión da el vector de dirección en coordenadas esféricas (θ, ϕ) , donde $0 \leq \theta \leq \pi$ y $0 \leq \phi < 2\pi$.

El principio de Fermat (2.55) se puede reescribir en términos de z mediante la relación entre los elementos de los parámetros

$$ds = \frac{dz}{\sqrt{1 - \dot{r}^2}} = dz \sqrt{1 + v^2},$$

donde usamos el vector de dos componentes

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dz} = \left(\frac{dx/dz}{dy/dz} \right) = \left(\frac{\tan \theta \cos \phi}{\tan \theta \sin \phi} \right) = \frac{\mathbf{r}}{\sqrt{1 - r^2}}$$

como

$$\delta \int_{z_1}^{z_2} dz \mathcal{L}(\mathbf{r}(z), z; \mathbf{v}(z)) = 0, \quad (2.58)$$

donde la función Lagrangiana \mathcal{L} es

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}(z), z; \mathbf{v}(z)) = n(\mathbf{r}, z; \mathbf{v}) \sqrt{1 + v^2}.$$

A diferencia del caso isotrópico, aquí la función Lagrangiana depende de la posición en la pantalla en el punto z y de la dirección del rayo.

2.4.2 Ecuaciones de Euler-Lagrange.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.46) y (2.47) que siguen del principio variacional Ec. (2.58) son:

$$\frac{d}{dz} \mathbf{p} = \sqrt{1 + v^2} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}}, \quad (2.59)$$

siendo el momento:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = \frac{n\mathbf{v}}{\sqrt{1 + v^2}} + \sqrt{1 + v^2} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{v}} \\ &= n\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{A}(\mathbf{r}, z; \mathbf{v}), \end{aligned} \quad (2.60)$$

y donde definimos el *vector de anisotropía* como:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, z; \mathbf{v}) \equiv \sqrt{1 + v^2} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{v}} = (1 - \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}^T) \frac{\partial n}{\partial \hat{\mathbf{r}}}. \quad (2.61)$$

El vector de anisotropía es análogo al potencial vectorial de sistemas mecánicos dependientes de la velocidad. En coordenadas esféricas

$$\vec{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \frac{\partial n}{\partial \theta} - \csc \theta \sin \phi \frac{\partial n}{\partial \phi} \\ \cos \theta \sin \phi \frac{\partial n}{\partial \theta} + \csc \theta \cos \phi \frac{\partial n}{\partial \phi} \\ -\sin \theta \frac{\partial n}{\partial \theta} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{A}_\theta \\ \mathbf{A}_\phi \\ \mathbf{A}_r \end{pmatrix}.$$

De la Ec. (2.61) se ve que \mathbf{A} es tangente a la esfera unitaria y satisface

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{r}} \perp \mathbf{A}.$$

Podemos elevar los vectores $\hat{\mathbf{r}}$, \mathbf{p} y \mathbf{A} a tres dimensiones notando que

$$n\dot{z} = n\sqrt{1 - r^2} = \sqrt{n^2 - |\mathbf{p} - \mathbf{A}|^2},$$

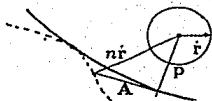


Figura 2.5: En un medio anisotrópico, mientras el vector \hat{r} está sobre la esfera unitaria, $n\hat{r}$ dibuja la superficie del rayo (línea punteada) y el vector de momento p se mueve sobre el ovoide de Descartes (línea continua).

y definiendo

$$p_x = -H = \sqrt{n^2 - |\mathbf{p} - \mathbf{A}|^2} + A_x,$$

$$A_x = -\frac{n\hat{r} \cdot \mathbf{A}}{\sqrt{1 - \hat{r}^2}} = -\frac{(\mathbf{p} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A}}{\sqrt{n^2 - |\mathbf{p} - \mathbf{A}|^2}}.$$

En tres dimensiones la Ec. (2.59) toma la forma:

$$\nabla n = \frac{d}{ds} (n\vec{v} + \vec{A}), \quad (2.62)$$

y el momento es

$$\vec{p} = n\vec{r} + \vec{A}(\vec{r}, \hat{r}). \quad (2.63)$$

Para medios isotrópicos $n(\mathbf{r})$, el vector de anisotropía \mathbf{A} es cero, de manera que p es paralelo a \hat{r} y recuperamos el caso límite estudiado en la sección 2.3.

2.4.3 Ecuaciones de Hamilton.

Usando la transformación de Legendre [21] obtenemos la función Hamiltoniana:

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{z}; \mathbf{v}) = -p_x = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - n \sqrt{1 + \mathbf{v}^2}$$

$$= -\sqrt{n^2 - |\mathbf{p} - \mathbf{A}|^2} + \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A}}{\sqrt{n^2 - |\mathbf{p} - \mathbf{A}|^2}},$$

y de aquí, las ecuaciones de Hamilton:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dz} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\vec{p} - \vec{A}}{p_x - A_x}, \quad (2.64)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dz} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{n}{p_x - A_x} \frac{\partial n}{\partial \vec{r}}. \quad (2.65)$$

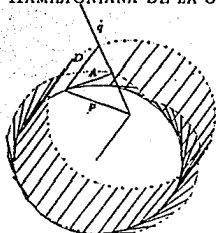


Figura 2.6: En un medio anisotrópico dipolar, mientras el vector \hat{r} está sobre la esfera unitaria, A dibuja una superficie tipo cardioide (línea punteada) y el vector de momento \vec{p} se mueve sobre una esfera con centro en D (línea continua).

La conservación del Hamiltoniano que lleva en el caso isotrópico a la restricción de que \vec{p} se encuentre en la esfera de Descartes, Ec. (2.51), en el caso anisotrópico restringe \vec{p} a moverse en el que llamaremos "ovoide de Descartes" (ver Fig. 2.5):

$$|\vec{p} - \vec{A}| = n(\vec{r}, \hat{r}).$$

2.4.4 Ejemplos de dependencia angular del índice de refracción.

Dependencia de tipo dipolar.

Consideremos el caso en el que el índice de refracción depende linealmente de la dirección del rayo ⁵:

$$n(\vec{r}, \hat{r}) = n^0(\vec{r}) + D(\vec{r}, \hat{r}), \quad (2.66)$$

$$D(\vec{r}, \hat{r}) = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} D_{\alpha\beta\gamma}(\vec{r}) \hat{r}^\alpha \hat{r}^\beta \hat{r}^\gamma = \vec{D}(\vec{r})^T \cdot \hat{r}. \quad (2.67)$$

Llamaremos a n^0 la parte *monopol* del medio y a \vec{D} su *vector dipolar*. Para calcular el vector de anisotropía del medio dipolar usamos que:

$$\left. \frac{\partial n}{\partial \vec{r}} \right|_{|\hat{r}|=1} = \vec{D},$$

con lo que el vector de anisotropía dipolar es:

$$\vec{A}^{(1)} = (1 - \hat{r} \hat{r}^T) \vec{D} = \vec{D} - \vec{D}^T(\hat{r}) \hat{r} = (\hat{r} \times \vec{D}) \times \hat{r}. \quad (2.68)$$

⁵En la naturaleza no hay ejemplos de dependencia dipolar la incluimos sólo por completéz.

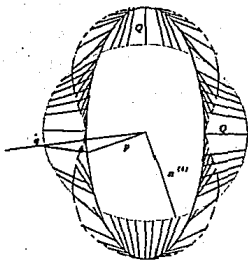


Figura 2.7: En un medio anisotrópico cuadrupolar, mientras el vector $n^0 \vec{r}$ está sobre la esfera de radio n^0 , $n \hat{r}$ está sobre la superficie de forma de cacahuete y el momento p dibuja un ovoide.

Este vector está en el plano de \vec{r} y \vec{D} y es ortogonal a la dirección del rayo \vec{r} . La relación entre la dirección del rayo y el momento óptico es:

$$\vec{p} = n^0 \vec{r} + \vec{D}. \quad (2.69)$$

Entonces, mientras $\vec{r} \in S_2$, el ovoide de Descartes es una esfera de radio $n^0(\vec{r})$ con centro en \vec{D} (ver Fig. 2.6).

Dependencia de tipo cuadrupolar.

Consideremos ahora el caso en el que el índice de refracción depende cuadráticamente de la dirección del rayo:

$$n(\vec{r}, \hat{r}) = n^0(\vec{r}) + Q(\vec{r}, \hat{r}), \quad (2.70)$$

$$Q(\vec{r}, \hat{r}) = \sum_{x,y,z} Q_{j,k} \hat{r}_j \hat{r}_k = \hat{r}^T \hat{Q} \hat{r}. \quad (2.71)$$

La matriz \hat{Q} debe ser simétrica y de traza nula. Es común restringirse a la matriz en el sistema de referencia de ejes principales de forma que

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} Q_x & 0 & 0 \\ 0 & Q_y & 0 \\ 0 & 0 & Q_z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q_x + Q_y + Q_z = 0.$$

Usamos

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial \hat{r}} \right|_{|\hat{r}|=1} = 2\hat{Q}\hat{r},$$

para calcular los vectores de anisotropía y momento:

$$\vec{A}^{(2)} = 2(1 - \hat{r}\hat{r}^T) \hat{Q} \hat{r} = 2 [\hat{Q} \hat{r} - Q \hat{r}] \quad (2.72)$$

$$\vec{p} = [n + 2(1 - \hat{r}\hat{r}^T) \hat{Q}] \hat{r} = (n^0 + 2Q - \hat{r}^T \hat{Q} \hat{r}) \hat{r} \quad (2.73)$$

Cuando \hat{r} se mueve sobre la esfera de direcciones, \vec{p} dibuja el ovoide de Descartes del medio cuadrupolar (ver Fig. 2.7).

Dependencia de tipo multipolar.

Funciones suaves sobre la esfera se pueden desarrollar en multipolos [24];

$$n(\vec{r}, \hat{r}) = \sum_{m \geq 0} N^{(m)}(\vec{r}, \hat{r}), \quad (2.74)$$

donde cada sumando es homogéneo de grado m en las componentes de \hat{r} ,

$$N^{(m)}(\vec{r}, \hat{r}) = \sum_i N_{i_1, i_2, \dots, i_m}^{(m)} \hat{r}_{i_1} \hat{r}_{i_2} \dots \hat{r}_{i_m} = \hat{r} \cdot \vec{N}^{(m)}.$$

Los coeficientes $N_{i_1, i_2, \dots, i_m}^{(m)}$ forman un tensor de rango m que es simétrico ante el intercambio de cualquier pareja de índices y de traza nula, contiene $2m + 1$ coeficientes independientes. Calculamos:

$$\left. \frac{\partial N^{(m)}}{\partial \hat{r}} \right|_{|\hat{r}|=1} = m \vec{N}^{(m)},$$

con lo que encontramos que el vector de anisotropía es

$$\vec{A}^{(m)} = m(1 - \hat{r}\hat{r}^T) \vec{N}^{(m)} = m[\vec{N}^{(m)} - N^{(m)} \hat{r}]$$

y el vector momento:

$$\vec{p} = n\vec{r} + \sum_{m \geq 1} \vec{A}^{(m)} = [n^0 - \sum_{m \geq 2} (m-1)N^{(m)}] \hat{r} + \sum_{m \geq 1} m \vec{N}^{(m)}.$$

2.4.5 Propagación libre en un medio uniaxial homogéneo.

Si siguiéramos un formalismo Maxwelliano, en un cristal uniaxial $\epsilon = \epsilon_x = \epsilon_y, \epsilon \neq \epsilon_z$. El rayo ordinario no siente la anisotropía y su rama del índice de refracción es una constante dada por (Ec. 2.41)

$$n_o = n_- = \sqrt{\epsilon \mu}, \quad (2.75)$$

mientras que el rayo extraordinario tiene

$$n_e = n_+ = \frac{n_o}{\sqrt{1 + \frac{\epsilon - \epsilon_x}{\epsilon_x} \sin^2 \theta}}, \quad (2.76)$$

donde θ es el ángulo entre el vector de dirección del rayo \vec{r} y un eje principal del cristal (el elegido como el eje óptico).

Con la solución (2.76) en la Ec. (2.61) producimos el vector de anisotropía para el medio uniaxial:

$$\vec{A}_+ = n_o \frac{\epsilon - \epsilon_x}{\epsilon_x} \sin \theta \cos \theta \left[1 + \frac{\epsilon - \epsilon_x}{\epsilon_x} \sin^2 \theta \right]^{-3/2} \begin{pmatrix} -\cos \theta \cos \phi \\ -\cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad (2.77)$$

y el vector de momento:

$$\vec{p}_+ = n_o \frac{\epsilon - \epsilon_x}{\epsilon_x} \left[\epsilon + 2(\epsilon - \epsilon_x) \sin^2 \theta \right] \left[1 + \frac{\epsilon - \epsilon_x}{\epsilon_x} \sin^2 \theta \right]^{-3/2} \vec{r}. \quad (2.78)$$

Para un medio cuadrupolar uniaxial podemos escribir su índice de refracción como:

$$\begin{aligned} n(\vec{r}) &= n^0 + (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \begin{pmatrix} \nu & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & -2\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \\ &= n^0 + \nu(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - 2\nu\dot{z}^2 = (n^0 - 2\nu) + 3\nu\dot{r}^2 \\ &= n^0 - 2\nu + 3\nu \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (2.79)$$

donde n^0 es la parte monopolar y ν es el coeficiente de anisotropía cuadrupolar.

Poniendo \dot{r} en términos de v podemos escribir las componentes del momento Ec. (2.60) como:

$$\mathbf{p} = (n^0 + 4\nu)\dot{r} - 3\nu\dot{r}^2\hat{r} = (1 + v^2)^{-3/2} \left[(n^0 + 4\nu) + (n^0 + \nu)v^2 \right] \mathbf{v}.$$

Para propagación libre, las ecuaciones de Hamilton Ecs. (2.64), (2.65) y sus soluciones son:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dz} = v &\Rightarrow r(z) = r(0) + zv, \\ \frac{dp}{dz} = 0 &\Rightarrow \mathbf{p}(z) = \mathbf{p}(0). \end{aligned}$$

Aunque aparentemente las soluciones no dependen de la anisotropía del medio (son líneas rectas en el espacio), la anisotropía interviene mediante la relación entre el momento \mathbf{p} y la dirección del rayo \mathbf{v} .

Comparemos ambos tratamientos (de Maxwell y de Hamilton) para el análisis del medio cuadrupolar uniaxial. La normal al frente de onda corresponde al momento normalizado \vec{p} y el vector de Poynting a la dirección del rayo \vec{r} . Las componentes del tensor dieléctrico ϵ están relacionadas con nuestros coeficientes n^0 y ν mediante:

$$\begin{aligned}\sqrt{\mu \epsilon_x} &= n^0 + \nu, \\ \sqrt{\mu \epsilon} &= n^0 - 2\nu.\end{aligned}$$

Entonces, para una anisotropía pequeña ($|n_o - n_e| \ll 1$), el índice extraordinario (2.76) puede desarrollarse como:

$$n_e \approx (n^0 - 2\nu) \left(1 + \frac{3\nu}{n^0} \sin^2 \theta \right) \approx n^0 - 2\nu + 3\nu \sin^2 \theta, \quad (2.80)$$

que es directamente la Ec. (2.79). Como un ejemplo numérico tomemos cuarzo a una $\lambda = 404.7$ nm [25], donde los valores son $n_o = 1.55716$ y $n_e = 1.56671$, entonces $n^0 = 1.56353$ y $\nu = 0.00318$. La última aproximación desarrolla n_e en potencias de $\nu/n^0 \approx 2 \times 10^{-3}$, despreciando términos de $\mathcal{O}(10^{-4})$.

2.4.6 Ley de refracción para la interfase entre dos medios anisotrópicos.

De la Ec. (2.65) se sigue la ley de refracción de Snell para la interfase entre dos medios anisotrópicos:

$$d\vec{p} \times \frac{\partial n}{\partial \vec{r}} = \vec{0}. \quad (2.81)$$

La Ec. (2.81) es válida para medios anisotrópicos en general, donde los rayos y momentos no son colineales y establece que la proyección del vector de momento en la superficie refractante se conserva ($\vec{p} = \vec{p}'$). Si los vectores de anisotropía de los dos medios no son coplanares con la normal a la superficie de discontinuidad del índice de refracción, los rayos refractado e incidente no serán coplanares tampoco.

Como ejemplo consideremos el caso cuando los rayos cruzan la interfase plana $z = 0$ entre dos medios anisotrópicos uniaxiales cuadrupolares alineados diferentes. Sean sus índices de refracción $n(\vec{r})$ y $n'(\vec{r})$ con parámetros monopoles n^0 y n'^0 y coeficientes de anisotropía cuadrupolar ν y ν' respectivamente. En el caso uniaxial ambos índices de refracción son axialmente simétricos (bajo rotaciones alrededor del eje z) y los dos vectores anisotrópicos son coplanares con la normal a la superficie, por lo que la refracción en este caso es en un plano. En la Fig. 2.8 construimos el diagrama de Snell uniendo dos 'mitades de diagramas de Descartes' y trazando la trayectoria del rayo como aquella que conserva la proyección del momento sobre la normal a la superficie.

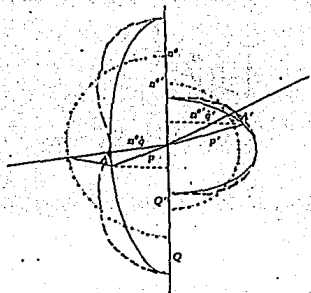


Figura 2.8: Diagrama de Descartes para construir el ángulo de refracción en la interfase de dos medios anisotrópicos cuadrupolares.

2.4.7 La transformación raíz.

Aquí analizaremos la transformación del rayo debida a la refracción por una superficie suave

$$\Xi(\vec{r}) = \xi(r) - z = 0$$

que separa dos medios anisotrópicos homogéneos $n(\vec{r})$ y $n'(\vec{r})$. Los rayos en estos medios están dados por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} r(z) &= r + z\nu, & p(z) &= p, & z < \bar{z}, \\ r'(z) &= r' + z\nu', & p'(z) &= p', & z > \bar{z}, \end{aligned}$$

donde hemos indicado el punto de impacto en la superficie refractante por $\vec{r} = (\bar{r}, \bar{z} = \xi(\vec{r}))$. Formalmente podemos considerar la segunda pareja de ecuaciones a la izquierda de la superficie refractante $z < \bar{z}$, lo cual permite parametrizar los rayos atrás de la superficie por la coordenada r' y el momento p' en la misma pantalla. Entonces el punto de coordenadas de impacto se puede escribir de dos maneras:

$$r(\bar{z}) = r + \xi(\vec{r})\nu\bar{r} = r' + \xi(\vec{r})\nu' = \vec{r}'(z). \quad (2.82)$$

Esta es la primera ecuación de la transformación raíz [26]; es una ecuación implícita para \vec{r} .

La segunda ecuación de la transformación raíz [26] se sigue de la conservación de la componente tangencial del momento e implica la ley de refracción. Si denotamos la normal a la superficie Ξ por

$$\nabla\Xi(\vec{r}) = (\xi_x, \xi_y, -1) \equiv (\Sigma(r), -1),$$

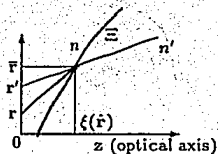


Figura 2.9: Transformación raíz para una superficie refractante Ξ entre dos medios anisotrópicos homogéneos.

tenemos la ley de Snell:

$$(\bar{p} - \bar{p}') \times \nabla \Xi(\bar{r}) = 0.$$

Como sabemos el vector de momento tiene componentes

$$\bar{p} = (\mathbf{p}, -\mathcal{H}),$$

la ley de Snell en términos de Hamiltonianos es:

$$\mathbf{p} - \mathcal{H}(\mathbf{p})\Sigma(\bar{r}) = \bar{p} = \mathbf{p}' - \mathcal{H}'(\mathbf{p}')\Sigma(\bar{r}). \quad (2.83)$$

Esta es la segunda ecuación de la transformación raíz que nos permite determinar explícitamente $\bar{\mathbf{p}}$ una vez que hemos encontrado $\bar{\mathbf{r}}$.

Así hemos determinado la transformación raíz que en el espacio fase es:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{n,\xi} : \mathbf{r} &\mapsto \bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \mathbf{v}(\mathbf{p})\xi(\bar{\mathbf{r}}), \\ \mathcal{R}_{n,\xi} : \mathbf{p} &\mapsto \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p} - \mathcal{H}(\mathbf{p})\Sigma(\bar{\mathbf{r}}), \end{aligned} \quad (2.84)$$

donde \mathbf{v} y \mathcal{H} contienen a la función $n(\bar{\mathbf{r}})$. Esta transformación se ilustra en la Fig. 2.9. De nuestra construcción se sigue que la transformación debida a la superficie refractante se factoriza en el producto de la transformación raíz en el primer medio y la transformación raíz inversa en el segundo medio,

$$\Xi_{n,n';\xi} = \mathcal{R}_{n,\xi}(\mathcal{R}_{n';\xi})^{-1} : \begin{Bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \mathbf{r}' \\ \mathbf{p}' \end{Bmatrix}.$$

Como en el caso isotrópico, cada factor raíz solo depende de uno de los medios y la forma de la superficie común. Cuando la superficie Ξ es un plano de z constante, la transformación raíz no es más que un simple vuelo libre.

Se puede probar que la transformación raíz $(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \leftrightarrow (\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{p}})$, dada en la Ec. (2.84) y su inversa, son transformaciones canónicas [10].

2.5 Aproximaciones de la óptica geométrica.

2.5.1 Medio Isotrópico.

En la sección 2.2.2 se derivó la ecuación eikonal utilizando las ecuaciones de Maxwell a primer orden, pero también se pueden deducir de ecuaciones ondulatorias de segundo orden para los campos eléctricos y magnéticos. Para mostrar esto sustituimos la Ec. (2.19) en la ecuación de onda (2.15), sin hacer ninguna aproximación encontramos que

$$\vec{K}(\vec{e}, \mathcal{S}, n) + \frac{1}{i\kappa_0} \vec{L}(\vec{e}, \mathcal{S}, n, \mu) + \frac{1}{(i\kappa_0)^2} \vec{M}(\vec{e}, \epsilon, \mu) = 0, \quad (2.85)$$

donde

$$\begin{aligned} \vec{K}(\vec{e}, \mathcal{S}, n) &= [n^2 - p^2]\vec{e}, \\ \vec{L}(\vec{e}, \mathcal{S}, n, \mu) &= [\vec{p} \cdot \nabla \cdot \log \mu - p^2]\vec{e} - 2[\vec{e} \cdot \nabla \cdot \log n]\vec{p} - 2[\vec{p} \cdot \nabla \cdot]\vec{e}, \\ \vec{M}(\vec{e}, \epsilon, \mu) &= \nabla \times \vec{e} \times \nabla \cdot \log \mu - \nabla^2 \vec{e} - \nabla \cdot (\vec{e} \cdot \nabla \cdot \log \epsilon). \end{aligned}$$

Para κ_0 suficientemente grande, el segundo y tercer término de la Ec. (2.85) (llamada en la literatura ecuación de transporte [5]) pueden despreciarse, y la ecuación $\vec{K} = 0$ nos da la ecuación eikonal (2.27).

Las ecuaciones eikonal y de transporte también pueden derivarse formalmente desarrollando el campo en potencias inversas del número de onda κ_0 ,

$$\vec{e}(\vec{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\vec{A}_m(\vec{r})}{(i\kappa_0)^m} e^{i\kappa_0 \mathcal{S}(\vec{r})}. \quad (2.86)$$

Este tipo de series de rayos se conoce como la "expansión de Debye" [13]. La serie (2.86) es usualmente una serie asintótica. La diferencia entre la solución exacta y la suma truncada

$$\vec{e}_M(\vec{r}) = \sum_{m=0}^M \frac{\vec{A}_m(\vec{r})}{(i\kappa_0)^m} e^{i\kappa_0 \mathcal{S}},$$

se anula cuando $\kappa_0 \rightarrow \infty$ como κ_0^{-M-1} , es decir, tiene un comportamiento asintótico a altas frecuencias. Para κ_0 finita la serie diverge.

Campos Escalares.

Si consideramos campos escalares, sustituimos la Ec. (2.86) en la ecuación de Helmholtz (2.18) e igualamos los coeficientes con las mismas potencias de κ_0 [8]:

$$(\nabla \mathcal{S})^2 = n^2, \quad (2.87)$$

$$2(\nabla A_0 \nabla S) + A_0 \nabla^2 S = 0, \quad (2.88)$$

$$2(\nabla A_1 \nabla S) + A_1 \nabla^2 S = -\nabla^2 A_0,$$

$$\vdots$$

$$2(\nabla A_m \nabla S) + A_m \nabla^2 S = -\nabla^2 A_{m-1}, \quad (2.89)$$

La Ec. (2.87) no es más que la ecuación eikonal. Las ecuaciones para las amplitudes A_0, A_1, \dots, A_m se conocen como las aproximaciones de orden cero, primero, etc. para la ecuación de transporte.

La aproximación de orden cero.

En la mayoría de las aplicaciones físicas se obtienen resultados satisfactorios con la aproximación de orden cero, es decir, tomando

$$e(\vec{r}) = A_0 e^{i\kappa_0 S}.$$

Las aproximaciones a la ecuación de transporte contienen derivadas parciales, pero con la ayuda de las ecuaciones de rayo pueden reducirse a ecuaciones diferenciales ordinarias. La aproximación de orden cero Ec. (2.88) se puede llevar a la forma [8]

$$2 \frac{dA_0}{d\tau} + A_0 \nabla^2 S = 0,$$

que al integrarse lleva a

$$A_0(\tau) = A_0(\tau_0) \left(\exp - \int_{\tau_0}^{\tau} \nabla \cdot \vec{p} d\tau \right)^{1/2},$$

cuya solución es

$$A_0(\tau) = A_0(\tau_0) \left(\frac{\mathcal{D}(\tau_0)}{\mathcal{D}(\tau)} \right)^{1/2},$$

donde \mathcal{D} es el jacobiano de la transformación de las coordenadas cartesianas x, y, z a las coordenadas de rayo ζ, η, τ . La cantidad entre paréntesis se conoce como la divergencia del rayo. Esta fórmula sugiere que la amplitud del campo disminuye a lo largo del rayo si la divergencia aumenta y crece cuando los rayos convergen.

Se puede mostrar que en esta aproximación [8]

$$I \approx p A_0^2.$$

Combinando las expresiones para la eikonal y la amplitud de la aproximación de orden cero se puede escribir el campo a lo largo de un rayo dado como:

$$e(\tau) = A_0(\zeta_0, \eta_0) \exp [i\kappa_0 S(\zeta_0, \eta_0)] \left(\frac{\mathcal{D}(\tau_0)}{\mathcal{D}(\tau)} \right)^{1/2} \exp \left[i\kappa_0 \int_{\tau_0}^{\tau} n^2 d\tau \right]. \quad (2.90)$$

Esta expresión muestra que en un medio isotrópico, el campo en un rayo sólo depende del campo inicial en el punto $\vec{r}(\zeta_0, \eta_0)$, lo cual indica la naturaleza local de la transferencia de la perturbación ondulatoria.

Las amplitudes del campo para aproximaciones de orden mayor.

La aproximación de orden m para la ecuación de transporte (Ec. 2.89) tiene como solución [27]:

$$A_m = A_m(\tau_0) \left(\frac{\mathcal{D}(\tau_0)}{\mathcal{D}(\tau)} \right)^{1/2} - \frac{1}{2\mathcal{D}(\tau)} \int_{\tau_0}^{\tau} \nabla^2 A_{m-1}(\tau') \sqrt{\mathcal{D}(\tau')} d\tau',$$

Como vemos, la naturaleza local ya no es válida en las aproximaciones de orden mayor de la óptica geométrica, ya que el Laplaciano $\nabla^2 A_{m-1}$ depende no sólo de los valores de A_{m-1} en el punto $\vec{r}(\zeta_0, \eta_0)$, sino también de los valores en la vecindad. Por este motivo, las amplitudes A_m describirán efectos de difracción. Un análisis detallado de estos efectos en medios homogéneos se encuentra en [27].

Campos Vectoriales.

Para campos vectoriales en la aproximación de orden cero tenemos [8]:

$$\vec{p} \times \vec{H}_0 + c\vec{E}_0 = 0, \quad \vec{p} \times \vec{E}_0 - \vec{H}_0 = 0. \quad (2.91)$$

El producto punto de la Ec. (2.91) por el vector unitario tangente al rayo es nulo, por lo que, \vec{E} y \vec{H} son perpendiculares al rayo; i.e., en la aproximación de orden cero el campo tiene una estructura transversal. Esto implica que dos de las tres componentes de \vec{E} se pueden elegir arbitrariamente:

$$\vec{E} = \Phi_\nu \vec{v} + \Phi_\eta \vec{\eta}$$

donde \vec{v} es la normal al rayo y $\vec{\eta}$ es un vector unitario perpendicular tanto al rayo como a su normal. Valores reales de Φ_ν y Φ_η corresponden a ondas polarizadas linealmente. En general, Φ_ν y Φ_η son complejos y la onda electromagnética esta polarizada elípticamente. Entonces, las ecuaciones de la aproximación de orden cero no especifican completamente la polarización del campo, tampoco determinan la orientación de los vectores de campo en el plano transversal al rayo.

La aproximación de primer orden.

En esta aproximación tenemos [8]:

$$\vec{p} \times (\vec{p} \times \vec{E}_1) + \vec{E}_1 = -\nabla \times \vec{H} - \vec{p} \times \nabla \times \vec{E} \equiv \vec{Z}. \quad (2.92)$$

Para $p^2 = \epsilon$, el determinante del lado izquierdo junto con todos sus menores de segundo orden es cero. De acuerdo con el teorema de Fredholm [21] para que la ecuación inhomogénea (2.92) sea consistente, el vector \vec{Z} debe ser ortogonal a todas las soluciones \vec{E}_j del sistema homogéneo de ecuaciones, entonces:

$$\vec{v} \cdot \vec{Z} = 0, \quad \vec{\eta} \cdot \vec{Z} = 0.$$

Sustituyendo en estas ecuaciones los campos de la aproximación de orden cero, usando que

$$\nabla \times (\vec{a}\phi) = \nabla\phi \times \vec{a} + \phi \nabla \times \vec{a} \quad \text{y} \quad \nabla \cdot \vec{p} = \nabla \cdot (\vec{v} \times \vec{\eta}),$$

llegamos a

$$\vec{p} \left(2\sqrt{\epsilon} \nabla \Phi_v + \Phi_v \nabla \sqrt{\epsilon} \right) + \Phi_v \sqrt{\epsilon} \nabla \cdot \vec{p} + 2\sqrt{\epsilon} \kappa \Phi_\eta = 0, \quad (2.93)$$

$$\vec{p} \left(2\sqrt{\epsilon} \nabla \Phi_\eta + \Phi_\eta \nabla \sqrt{\epsilon} \right) + \Phi_\eta \sqrt{\epsilon} \nabla \cdot \vec{p} - 2\sqrt{\epsilon} \kappa \Phi_v = 0. \quad (2.94)$$

Estas ecuaciones nos permiten encontrar las amplitudes complejas Φ_v y Φ_η , por lo que *definen completamente* el estado de polarización del campo.

Sumando las ecs. que resultan de multiplicar la Ec. (2.93) por Φ_v^* y la Ec. (2.94) por Φ_η^* ,

$$\nabla \cdot (\vec{p} |\vec{E}_0|^2) = 0,$$

que reconocemos como la ecuación de conservación de la energía al identificar el vector de Poynting como

$$\vec{S} = \frac{c}{8\pi} \vec{p} |\vec{E}_0|^2.$$

2.5.2 Medio Anisotrópico.

Las ecuaciones para medios anisotrópicos difieren de las que acabamos de estudiar en que en lugar de un escalar ϵ , contienen el tensor de permitividad, el cual es hermiteano.

La aproximación de orden cero fue la que estudiamos detalladamente en las secciones 2.2 y 2.4. Uno de los resultados más importantes que encontramos es que en un medio anisotrópico se propagan dos ondas electromagnéticas normales. Para estudiar ambas ondas modificaremos la expansión de la óptica geométrica representando el campo \vec{E} como la suma de dos series:

$$\vec{E} = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{\vec{E}_{m1}}{(i\kappa_0)^m} e^{i\kappa_0 S_1} + \frac{\vec{E}_{m2}}{(i\kappa_0)^m} e^{i\kappa_0 S_2} \right]. \quad (2.95)$$

Sustituyendo la Ec. (2.95) en las ecuaciones de Maxwell (2.11-2.14) tenemos que igualar a cero no solo los coeficientes de las potencias de κ_0 sino también las funciones rápidamente oscilantes $\exp(i\kappa_0 S_1)$ y $\exp(i\kappa_0 S_1)$ (es decir, se necesita suponer que los modos normales son independientes).

Considerando un tipo de onda tenemos

$$\vec{E} = \Phi \vec{f},$$

donde Φ es la amplitud del campo complejo y \vec{f} es el vector de polarización.

Las componentes del vector de polarización \vec{f} , así como las componentes de la aproximación de orden cero al campo mismo \vec{E} , satisfacen el sistema de ecuaciones homogéneas

$$p^2 \delta_{\alpha\beta} - p_\alpha p_\beta - \epsilon_{\alpha\beta} f_\beta = 0,$$

de las cuales se determinan no solo los cocientes $f_1 : f_2 : f_3$, sino también las magnitudes de f_β . Aquí persiste la incertidumbre al elegir el factor de fase $\exp(i\gamma)$ que define la posición de \vec{f} en la elipse de polarización, sin embargo esto no tiene efecto en la magnitud del campo \vec{E} .

Para la aproximación de primer orden, la ecuación para el campo es

$$\vec{p} \times (\vec{p} \times \vec{E}_1) + \epsilon \vec{E}_1 = -\nabla \times \vec{H} - \vec{p} \times \nabla \times \vec{E} \equiv \vec{Z},$$

la cual es similar a la del medio isotrópico, Ec. (2.92), difiere sólo porque en este caso el determinante no tiene raíces múltiples, lo cual implica que la polarización se determina de manera única a partir de la condición de consistencia (teorema de Fredholm)

$$\vec{E}^* \cdot \vec{Z} = 0,$$

la cual se puede reescribir como:

$$\vec{E}^* \cdot \nabla \times \vec{H} - \vec{H}^* \cdot \nabla \times \vec{E} = 0.$$

Esta ecuación compleja nos permite determinar tanto el módulo como el argumento del factor $\Phi = |\phi| \exp(i\delta)$. Además puede reescribirse en forma de una ley de conservación del flujo de energía [28]:

$$\nabla \cdot (\sigma |\Phi|^2) = 0,$$

donde $\sigma = 16\pi \vec{S}/c|\Phi|^2$ es el vector paralelo al vector de Poynting.

2.6 Conclusiones.

Como vimos en este capítulo, la isotropía tiene la importante consecuencia de que la dirección del flujo de energía es la dirección de la normal al frente de onda electromagnético por lo que podemos analizar este medio estudiando las trayectorias de los rayos de luz, es decir, en el límite de la óptica geométrica. Para medios isotrópicos, el transporte de energía puede representarse mediante un modelo hidrodinámico simple descrito completamente en términos de la función escalar real S , siendo esta función una solución de la ecuación eikonal (2.27). Los rayos de luz, que tienen la dirección de propagación de la energía, serán transversales a los frentes de onda.

En este capítulo construimos las ecuaciones de Hamilton para un medio anisotrópico inhomógeno general a partir de un principio variacional (el de Fermat) a través de una formulación Lagrangiana y su transformación de Legendre. El vector de momento \vec{p} es la suma del vector de longitud n tangente al rayo más un vector de anisotropía \vec{A} ortogonal.

Nuestra discusión Hamiltoniana de la óptica anisotrópica involucra menos condiciones físicas que el tratamiento a la Maxwell. El tratamiento adecuado de Maxwell predice correctamente que luz no polarizada en un medio uniaxial se divide generalmente en dos ondas: un rayo ordinario (que se comporta como si se moviese en un medio isotrópico) y un rayo extraordinario, que siente la anisotropía. Estas dos ondas tienen dos polarizaciones lineales diferentes y dos velocidades de propagación distintas. Las dos direcciones de \vec{D} correspondientes a una dirección de propagación \vec{S} dada, son perpendiculares entre sí. A la Maxwell se pueden analizar ambos rayos y predecir sus respectivas polarizaciones e intensidades, mientras que el tratamiento Hamiltoniano solo permite analizar uno u otro rayo.

Mostramos que la aproximación de orden cero de la óptica geométrica no contiene información completa sobre los campos electromagnéticos ya que la orientación de los vectores de campo en el plano transversal al rayo no está especificada. De aquí la importancia de aproximaciones de orden mayor. En particular encontramos que la aproximación de primer orden nos permite determinar la polarización y las intensidades de los dos campos.

Capítulo 3

Haces Gaussianos.

3.1 Introducción.

El objetivo de este capítulo es entender las propiedades fundamentales de las funciones Gaussianas y la acción que sobre ellas tienen diversos operadores de tipo polinomial. Una parte fundamental en este estudio es el adquirir una imagen clara de como una función Gaussiana modifica su forma ante transformaciones lineales y no lineales (aberraciones). Las funciones Gaussianas son importantes en la física porque describen el estado básico en multitud de sistemas. En particular en óptica cuántica, el haz de salida de un rayo láser tiene un perfil de intensidades de forma Gaussiana [29]. Además describen los estados coherentes generalizados cuya importancia será más clara en el próximo capítulo.

En la sección 3.2 analizamos haces Gaussianos centrados en el origen, que describen estados coherentes vacíos, planteamos sus propiedades principales y la manera en que evolucionan libremente. La evolución en la sección 3.2 se considera desde el punto de vista de la propagación paraxial de ondas ópticas monocromáticas en dos dimensiones. En la sección 3.3 analizamos funciones Gaussianas con centro arbitrario y ancho complejo (estados coherentes generalizados). Mostramos que, a diferencia de los estados coherentes vacíos, estos estados no minimizan la relación de incertidumbre de Heisenberg, pero sí la de Schrödinger-Robertson. A partir de la sección 3.3 aceptamos la notación mecánico cuántica (todas las fórmulas para Gaussianas en mecánica cuántica y óptica ondulatoria son equivalentes). En la sección 3.4 estudiamos las transformaciones canónicas lineales generadas por polinomios de segundo orden en la coordenada \hat{x} y el momento \hat{p} . Estas transformaciones tienen la propiedad de transformar estados coherentes generalizados en otros estados del mismo tipo preservando la relación de incertidumbre de Schrödinger-Robertson. En la sección 3.5 encontramos la acción de los operadores de tipo polinomial de tercer orden en \hat{x} y \hat{p} , mientras que en la sección 3.6 lo hacemos para operadores

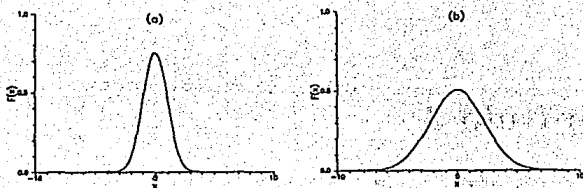


Figura 3.1: La Gaussiana $\Gamma(x) = (\pi w)^{-1/4} \exp(-x^2/2w)$ como función de la posición x para (a) $w_0 = 1 \text{ cm}^2$ y (b) $w_0 = 5 \text{ cm}^2$.

polinomiales de cuarto orden. La importancia de estos operadores es que en óptica son la base de las aberraciones de segundo y tercer orden en los diferentes instrumentos ópticos. Finalmente en la sección 3.7 presentamos las conclusiones de este capítulo.

3.2 Haces Gaussianos simples.

Empezaremos nuestro análisis con los haces Gaussianos más simples, centrados en el origen, definidos por:

$$\Gamma(x) = \left(\frac{1}{\pi w_0}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{x^2}{2w_0}\right], \quad (3.1)$$

donde w_0 es el ancho el cual consideraremos para empezar como real. La dimensión de w_0 es cm^2 . En este caso, el *ancho medio del haz* [29], es decir, la distancia del pico de la distribución a la cual la función disminuye un factor de e^{-1} de su máximo valor $(\pi w_0)^{-1/4}$ es $\sqrt{2w_0}$. Esta Gaussiana satisface la condición de normalización:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(x)|^2 dx = 1, \quad (3.2)$$

y su dispersión es:

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(x)|^2 x^2 dx = \frac{w_0}{2}. \quad (3.3)$$

En la Fig. 3.1 graficamos la Gaussiana de la Ec. (3.1) como función de la posición x para $w_0 = 1 \text{ cm}^2$ y 5 cm^2 . Esta curva con forma de campana está centrada en el origen y no tiene oscilaciones.

3.2.1 Transformada de Fourier.

La transformada de Fourier de una función arbitraria $F(x)$ se define como [30]:

$$\tilde{F}(p) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-ipx} dx \quad (3.4)$$

Cuando $F(x)$ es una función de onda cuántica en la representación de coordenadas, $\tilde{F}(p)$ es la función de onda en la representación de momento. Cuando se hacen cálculos numéricos la mejor forma de encontrar la transformada de Fourier de una función arbitraria de la posición es a través de la técnica de transformada de Fourier rápida (FFT) que describimos en el apéndice B [31].

La transformada de Fourier inversa es

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(p) e^{ipx} dp \quad (3.5)$$

Para la Gaussiana dada en la Ec. (3.1), la transformada de Fourier es

$$\tilde{\Gamma}(p) = \left(\frac{w_0}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{w_0 p^2}{2}\right], \quad (3.6)$$

la cual es otra Gaussiana centrada en el origen y con dispersión $\frac{1}{2w_0}$.

Una Gaussiana con ancho $w_0 = 1 \text{ cm}^2$ tiene la propiedad de que su representación en coordenadas y en momento es la misma función; corresponde a lo que en la literatura se conoce como un estado coherente vacío [32].

3.2.2 Relaciones de Incertidumbre.

El principio de incertidumbre de Heisenberg establece que el producto de la dispersión de una función y de la dispersión de su transformada de Fourier tienen un valor límite inferior de $\frac{1}{4}$ [30]. Para la Gaussiana de la Ec. (3.1),

$$\sigma_x^2 \sigma_p^2 = \frac{w_0}{2} \frac{1}{2w_0} = \frac{1}{4},$$

de manera que el haz Gaussiano dado por la Ec. (3.1) representa *el paquete de onda de incertidumbre mínima*.

3.2.3 Evolución libre en óptica ondulatoria paraxial.

Una manera de analizar la evolución paraxial de un haz Gaussiano es resolver la ecuación de Helmholtz (2.18):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial l^2} + k^2\right) \Psi = 0, \quad k = \frac{\omega}{c},$$

donde denotamos la distancia a lo largo del eje óptico por t ; el cual sirve como parámetro de evolución; y x es la coordenada transversal. Utilizamos como solución de prueba [5]:

$$\Psi = u(x, t)e^{-ikt},$$

bajo la suposición de que la dependencia en t de la función u es lenta comparada con la variación rápida del factor exponencial, de forma que podemos despreciar el término $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, con lo que la ecuación diferencial que u satisface es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2ik \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (3.7)$$

que es la conocida *ecuación de onda paraxial*. Esta ecuación es análoga a la de Schrödinger. Bajo la condición inicial de la Ec. (3.1), conduce a la solución

$$\Gamma(x, t) = \left(\frac{1}{\pi w_0}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{ikw_0}{t + ikw_0}} \exp[-ikt] \exp\left[-i\frac{ktx^2}{2[t^2 + (kw_0)^2]}\right] \\ \times \exp\left[-\frac{k^2 w_0 x^2}{2[t^2 + (kw_0)^2]}\right]. \quad (3.8)$$

Recordemos que t es el parámetro de evolución. En el caso de la mecánica corresponde al tiempo y en el de la óptica a la distancia sobre el eje óptico (donde se denota por z). Como veremos, el primer factor exponencial describe la fase de una onda plana, el segundo es responsable de la curvatura del frente de onda y el último determina la intensidad del campo en la dirección transversal. En la Fig. 3.2a graficamos la evolución libre de la Gaussiana dada en la Ec. (3.8) como función de la posición x y del parámetro de evolución t considerando como condición inicial la Gaussiana dada por la Ec. (3.1) con $w_0 = 1 \text{ cm}^2$. La Fig. 3.2b muestra las curvas de nivel de $|\Gamma|$ mientras que en la Fig. 3.2c aparecen las curvas de nivel de la fase. Las regiones donde se acumulan dichas curvas corresponden a los frentes de onda geométricos.

Analizando la Ec. (3.8) vemos que la evolución paraxial de una Gaussiana centrada en el origen es otra Gaussiana con ancho complejo

$$w(t) = w_0 + i\frac{t}{k},$$

entonces el ancho real del haz es

$$|w(t)| = |w_0| \sqrt{1 + \left(\frac{t}{kw_0}\right)^2}. \quad (3.9)$$

Conforme t se incrementa de $-\infty$ a 0, el ancho del haz Gaussiano disminuye tomando su mínimo valor en $t = 0$, luego, conforme t aumenta, el ancho de la

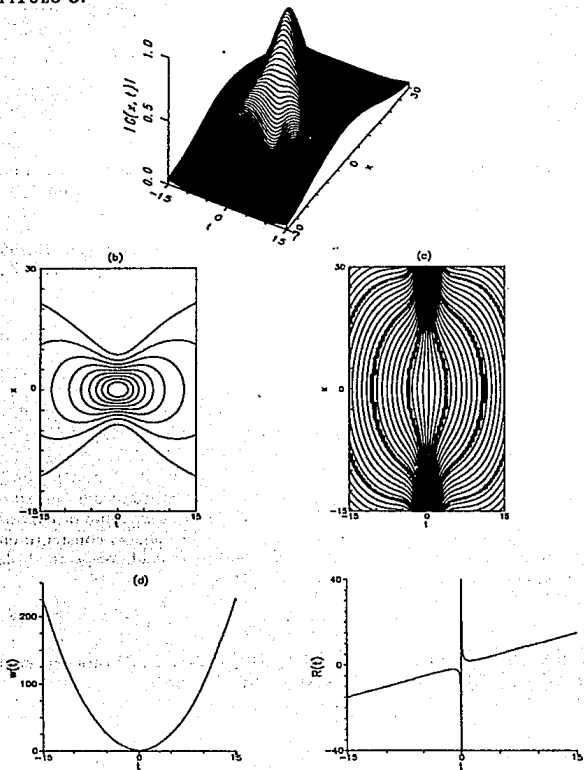


Figura 3.2: Evolución libre de la Gaussiana con ancho inicial $w_0 = 1 \text{ cm}^2$, (a) $|\Gamma|$ como función de la posición x y del parámetro de evolución t , (b) curva de nivel de $|\Gamma|$, (c) curva de nivel de la fase de Γ , (d) ancho w como función de t y (e) radio de curvatura R como función de t .

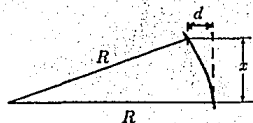


Figura 3.3: Determinación del radio de curvatura del haz Gaussiano. Si comparamos el frente de onda esférico con una onda plana, la diferencia de fase por la distancia d entre los dos frentes de onda será kd .

Gaussiana crece sin cota; w es una función simétrica respecto al origen. El punto $t = 0$, en el cual el haz Gaussiano tiene un frente de onda plano, es también el punto más angosto, con $w = w_0$ (ver Fig. 3.2d).

El máximo ángulo de dispersión de este haz es:

$$\theta = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{w(t)}}{t} = \frac{1}{k\sqrt{w_0}},$$

así, un haz Gaussiano inicialmente angosto, se abrirá más que otro más ancho.

La intensidad (altura) del haz también varía, pero de manera opuesta al ancho, de forma que la norma de la Gaussiana permanece constante.

Un haz Gaussiano en un punto dado del espacio no está determinado completamente por su ancho. Para describir el haz totalmente necesitamos un parámetro más, por ejemplo, el radio de curvatura de su frente de onda. El radio de curvatura se puede obtener con ayuda de la Fig. 3.3. La fase de la onda es constante en la superficie esférica. El corrimiento de fase de la superficie curvada respecto al plano que toca esta superficie en $x = 0$ está dado por [29]:

$$kd = \frac{ktz^2}{2[t^2 + (kw_0)^2]}, \quad (3.10)$$

donde la distancia d se define en la Fig. 3.3 y el lado derecho de esta ecuación se obtiene de la Ec. (3.8). En la aproximación paraxial tenemos

$$x^2 + R^2 = (R + d)^2,$$

de donde

$$R = \frac{x^2}{2d},$$

sustituyendo en esta expresión la Ec. (3.10),

$$R(t) = t + \frac{(kw_0)^2}{t} = \frac{k^2|w|^2}{t}. \quad (3.11)$$

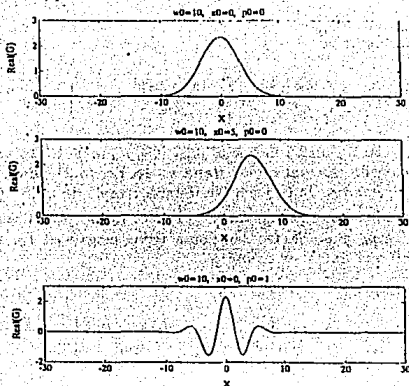


Figura 3.4: Gaussiana compleja como función de la posición x para (a) $w = 10$, $x_0 = 0$, $p_0 = 0$; (b) $w = 10$, $x_0 = 5$, $p_0 = 0$ y (c) $w = 10$, $x_0 = 0$, $p_0 = 1$. Se muestra el valor absoluto de la función.

El cambio de signo de $R(t)$ que ocurre cuando t cambia de signo indica la inversión de la curvatura del frente de onda cuando cruzamos $t = 0$. En este punto y su vecindad, $R = \infty$, de manera que la fase del campo es igual a la de una onda plana. Cuando aumenta el valor de t , la fase de la onda se aleja de la de una onda plana, sin embargo, en el límite de campo lejano, $R(t)$ corresponde a una onda esférica de radio t y en $t \rightarrow \infty$, la curvatura del frente de onda es de nuevo $R = \infty$ (ver Fig. 3.2c).

Podemos reescribir la expresión para el haz Gaussiano Ec. (3.8) en términos de w y R como [33]:

$$\Gamma(x, t) = \left[\frac{w_0}{\pi w^2} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left[-i \left(kt + \frac{kx^2}{2R} \right) \right] \exp \left[-\frac{x^2 w_0}{|w|^2} \right]. \quad (3.12)$$

3.3 Haces Gaussianos complejos.

Hemos visto que la evolución óptica paraxial deforma la Gaussiana inicial con parámetros reales a complejos. Por lo cual es conveniente considerar una función

Gaussiana arbitraria dada por:

$$\Gamma(x) = \left(\frac{w_1}{\pi w^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2w} + ip_0x\right], \quad (3.13)$$

donde $w = w_1 + iw_2$, con w_1 un número real positivo, w_2 real. El factor $(w_1/\pi w^2)^{1/4}$ garantiza la condición de normalización dada en la Ec. (3.2). En el caso en que $x_0 = p_0 = w_2 = 0$, obtenemos la función Gaussiana simple de la Ec. (3.1).

En la Fig. 3.4 graficamos la Gaussiana de la Ec. (3.13) para diferentes valores de los parámetros x_0, p_0 y w . Esta Gaussiana tiene centro en x_0 , ancho $\sqrt{2w}$ y oscila cuando $p_0 \neq 0$ o el ancho es complejo.

En este caso la distribución de probabilidad es

$$|\Gamma(x)|^2 = \sqrt{\frac{w_1}{\pi|w|^2}} \exp\left[-\frac{w_1(x-x_0)^2}{|w|^2}\right], \quad (3.14)$$

y sus valores medios son

$$\begin{aligned} \langle \Gamma | \Gamma \rangle &= 1, \\ \langle \hat{x} \rangle &= \langle \Gamma | \hat{x} | \Gamma \rangle = x_0, \\ \langle \hat{p} \rangle &= \langle \Gamma | \hat{p} | \Gamma \rangle = p_0, \quad \text{con } \hat{p} \equiv -i\partial_x, \\ \langle \hat{x}^2 \rangle &= \langle \Gamma | \hat{x}^2 | \Gamma \rangle = \frac{|w|^2}{2w_1} + x_0^2, \\ \langle \hat{p}^2 \rangle &= \langle \Gamma | \hat{p}^2 | \Gamma \rangle = \frac{1}{2w_1} + p_0^2, \\ \langle \{\hat{x}\hat{p}\} \rangle &= \langle \Gamma | \frac{\hat{p}\hat{x} + \hat{x}\hat{p}}{2} | \Gamma \rangle = \frac{w_2}{2w_1} + x_0p_0. \end{aligned}$$

3.3.1. Transformada de Fourier.

La función de onda en la representación de momento, i.e. la transformada de Fourier de $\Gamma(x)$ esta dada por

$$\hat{\Gamma}(p) = \left(\frac{w_1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{w(p-p_0)^2}{2} - ix_0(p-p_0)\right]. \quad (3.15)$$

Es una Gaussiana con centro en p_0 , ancho $\sqrt{2/w}$, y oscila cuando $x_0 \neq 0$ o w es complejo.

3.3.2 Relaciones de Incertidumbre.

Para la Gaussiana compleja de la Ec. (3.13), las varianzas son

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^0 &= \langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2 = \frac{|w|^2}{2w_1}, \\ \sigma_{pp}^0 &= \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2 = \frac{1}{2w_1}, \\ \sigma_{xp}^0 &= \langle \{\hat{x}\hat{p}\} \rangle - \langle \hat{x} \rangle \langle \hat{p} \rangle = \frac{w_2}{2w_1},\end{aligned}\quad (3.16)$$

Para una Gaussiana arbitraria la relación de incertidumbre de Heisenberg no es necesariamente mínima,

$$(\Delta x \Delta p)^2 = \sigma_{xx}^0 \sigma_{pp}^0 = \frac{|w|^2}{4w_1^2} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{w_2^2}{w_1^2} \right) \geq \frac{1}{4}.$$

Para que una Gaussiana tenga incertidumbre mínima necesita un ancho real. Sin embargo, para una Gaussiana arbitraria la relación de incertidumbre de Schrödinger-Robertson [34], siempre toma su mínimo valor

$$\sigma_{xx}^0 \sigma_{pp}^0 - (\sigma_{xp}^0)^2 = \frac{1}{4}.$$

Los parámetros involucrados en una Gaussiana compleja arbitraria se pueden elegir como los valores medios de la coordenada x_0 y del momento p_0 , la varianza de la coordenada σ_{xx}^0 , la varianza del momento σ_{pp}^0 y el coeficiente de correlación σ_{xp}^0 . La relación de incertidumbre de Schrödinger-Robertson reduce el número de parámetros independientes a cuatro, los cuales se pueden tomar como w_1 , w_2 , x_0 , p_0 , que es precisamente la selección que hemos hecho.

3.4 Transformaciones canónicas lineales.

Es conveniente describir las transformaciones unitarias en la mecánica cuántica usando para ellas una forma exponencial

$$\hat{U} = e^{-it\hat{H}},$$

donde \hat{H} tiene el significado del Hamiltoniano que genera la transformación y t es el parámetro de la transformación. Las transformaciones lineales se generan por Hamiltonianos que son polinomios de segundo orden en los operadores [35] x y p , es decir, son combinaciones lineales de los operadores

$$\hat{x}^2/2, \quad \{\hat{x}\hat{p}\} \equiv (\hat{p}\hat{x} + \hat{x}\hat{p})/2, \quad \hat{p}^2/2.$$

Estos operadores tienen relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} \left[\frac{\hat{x}^2}{2}, \frac{\hat{p}^2}{2} \right] &= \frac{\hat{p}\hat{x} + \hat{x}\hat{p}}{2}, \\ \left[\frac{\hat{p}\hat{x} + \hat{x}\hat{p}}{2}, \frac{\hat{x}^2}{2} \right] &= -\hat{x}^2, \\ \left[\frac{\hat{p}\hat{x} + \hat{x}\hat{p}}{2}, \frac{\hat{p}^2}{2} \right] &= \hat{p}^2, \end{aligned}$$

y generan la representación del grupo SU(1,1) [35].

Como veremos en esta sección, estos operadores tienen la propiedad de transformar una Gaussiana en otra Gaussiana y preservar la relación de incertidumbre de Schrödinger-Robertson.

Para encontrar la función transformada necesitamos resolver la ecuación diferencial

$$i\partial_t \Gamma(x, t) = \hat{H} \Gamma(x, t).$$

3.4.1 Acción del operador \hat{x}^2 .

La acción del operador $\hat{x}^2/2$ en la representación de coordenadas sobre una función arbitraria de la posición es trivial ya que solo agrega el factor de fase $\exp[-itx^2/2]$,

$$F(x, t) = e^{-itx^2/2} F(x, 0).$$

Para la Gaussiana compleja dada en la Ec. (3.13), la evolución bajo \hat{x}^2 es

$$\Gamma(x, t) = \left(\frac{w_1}{\pi w^2} \right)^{1/4} \exp \left\{ -\frac{(x - x_0)^2}{2w} + ip_0 x - \frac{itx^2}{2} \right\}, \quad (3.17)$$

esta es la ecuación de una nueva Gaussiana de altura $\left(\frac{w_1}{\pi w^2} \right)^{1/4}$, cuyos valores promedio son

$$\begin{aligned} \langle \hat{x} \rangle &= x_0, \\ \langle \hat{p} \rangle &= p_0 - x_0 t, \end{aligned}$$

y tiene como varianzas

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{xx}^0, \\ \sigma_{pp} &= \sigma_{pp}^0 - 2\sigma_{xp}^0 t + \sigma_{xx}^0 t^2, \\ \sigma_{xp} &= \sigma_{xp}^0 - \sigma_{xx}^0 t, \end{aligned}$$

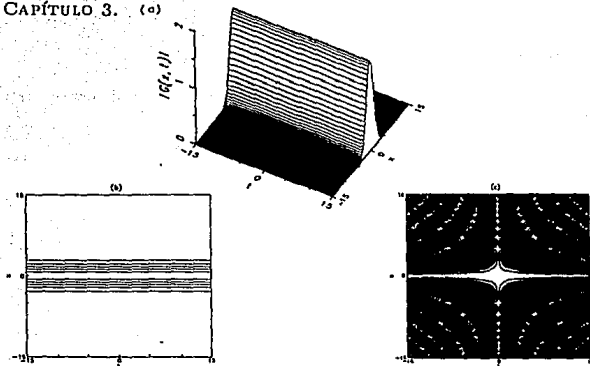


Figura 3.5: Evolución bajo el operador \hat{x}^2 de una función Gaussiana compleja para $\omega = 1 \text{ cm}^2$, $x_0 = 0$, $p_0 = 0$. Se muestra (a) el valor absoluto de la función, (b) la curva de nivel de $|\Gamma|$, (c) la curva de nivel de la fase.

donde σ_{xx}^0 , σ_{pp}^0 , σ_{xp}^0 , son las varianzas de la Gaussiana inicial, Ecs. (3.16). En la Fig. 3.5 mostramos la acción de este operador sobre una Gaussiana inicial coherente ($\omega = 1 \text{ cm}^2$). Como vemos, el valor absoluto de $\Gamma(x, t)$ no cambia al aumentar t (Figs. 3.5a-3.5b) pero la fase muestra una gran estructura (Fig. 3.5c).

Este operador es muy importante ya que corresponde a la acción de un lente delgado ideal. Por lo tanto, si un haz Gaussiano cuyo eje coincide con el de un lente delgado ideal incide perpendicularmente sobre la superficie del lente y pasa a través de la misma, simplemente sufrirá un cambio en su fase, sin cambiar su ancho, de forma que el campo inmediatamente después del lente es también un haz Gaussiano con un radio de curvatura diferente

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{f},$$

donde f es la longitud focal del lente y R_2, R_1 son los radios de curvatura de la Gaussiana inmediatamente después y antes del lente, respectivamente [36].

3.4.2 Acción del operador $\{\hat{x}\hat{p}\}$ (compresión).

La acción del operador $\{\hat{x}\hat{p}\}$ sobre funciones iniciales arbitrarias se puede encontrar usando que las potencias de x son eigenfunciones del generador

$$\{\hat{x}\hat{p}\} \equiv \frac{\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}}{2} = -i \left(x\partial_x + \frac{1}{2} \right) \equiv -i (\hat{n} + 1/2),$$

donde

$$\hat{n} x^n = n x^n.$$

Si expandemos en serie de Taylor la función inicial

$$F(x) = \sum_n C_n x^n,$$

entonces evolucionará como

$$F(x, t) = e^{-it\{\hat{x}\hat{p}\}} F(x, 0) = \sum_n C_n x^n e^{-in-t/2} = e^{-t/2} F(xe^{-t}).$$

El factor $e^{-t/2}$ mantiene la normalización. El operador $\hat{n} = x\partial_x$ en la literatura se conoce como el "operador de dilatación" [37].

La Gaussiana inicial de la Ec. (3.13) bajo $\{\hat{x}\hat{p}\}$ se transforma como

$$\begin{aligned} \Gamma(x, t) &= e^{-t/2} \Gamma(xe^{-t}) \\ &= \left(\frac{w_1 e^{-2t}}{\pi w^2} \right)^{1/4} \exp \left[-\frac{(x - x_0 e^{-t})^2}{2w e^{2t}} + ip_0 e^{-t} x \right], \end{aligned} \quad (3.18)$$

la cual es otra Gaussiana de altura $\left(\frac{w_1 e^{-2t}}{\pi w^2} \right)^{1/4}$, cuyos valores promedio son

$$\begin{aligned} \langle \hat{x} \rangle &= \langle \hat{x}_0 \rangle e^{-t}, \\ \langle \hat{p} \rangle &= \langle \hat{p}_0 \rangle e^{-t}, \end{aligned}$$

y tiene como varianzas

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{xx}^0 e^{2t}, \\ \sigma_{pp} &= \sigma_{pp}^0 e^{-2t}, \\ \sigma_{xp} &= \sigma_{xp}^0. \end{aligned}$$

siendo σ_{xx}^0 , σ_{pp}^0 , σ_{xp}^0 , las varianzas de la Gaussiana inicial, Ecs. (3.16). Aquí la relación de incertidumbre de Schrödinger-Robertson se mantiene constante todo el tiempo (mínima). Como vemos, este operador comprime una de las varianzas y expande la otra, esta es la razón de que se conozca en la óptica cuántica como el operador de compresión [37] (en inglés, *squeezing operator*).

En la Fig. 3.6 se muestra la función dada en la Ec. (3.18). Al evolucionar bajo $\{\hat{x}\hat{p}\}$ la fase inicial de la Gaussiana no sufre ningún cambio y su valor absoluto se comprime.

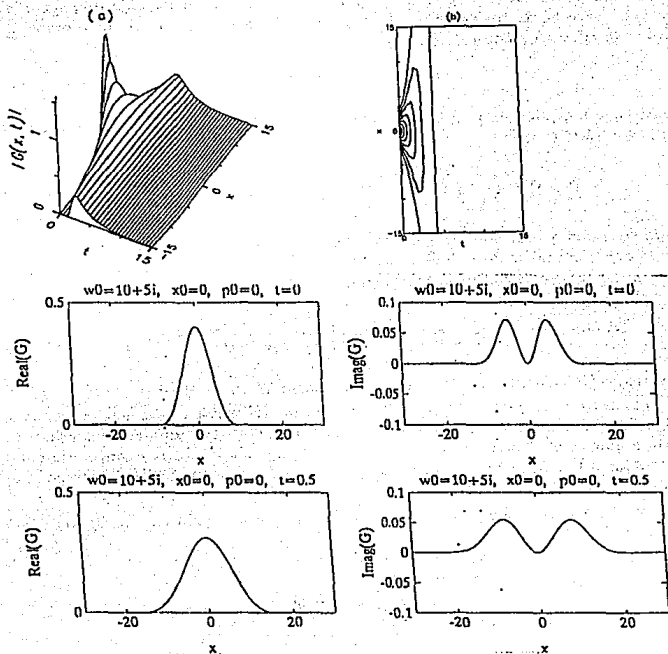


Figura 3.6: Evolución bajo el operador de compresión $\{\hat{x}\hat{p}\}$ de una función Gaussiana compleja para $w = 1$, $x_0 = 0$, $p_0 = 0$. Se muestra (a) el valor absoluto de la función, (b) la curva de nivel de $|\Gamma|$, (c) parte real y parte imaginaria de Γ como función de x para diferentes valores de t y de los parámetros.

3.4.3 Acción del operador \hat{p}^2 (evolución libre).

La acción del operador $\hat{p}^2/2$ es la evolución de la función inicial bajo propagación paraxial libre en un medio óptico homogéneo. En la representación de momento, $\hat{p}^2/2$ sólo agrega el factor de fase $\exp(-itp^2/2)$,

$$\tilde{F}(p, t) = e^{-itp^2/2} \tilde{F}(p, 0),$$

por lo que la acción de \hat{p}^2 sobre la transformada de Fourier de la Gaussiana dada en la Ec. (3.15) es

$$\tilde{\Gamma}(p, t) = \left(\frac{w_1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{w[p-p_0]^2}{2} - ix_0(p-p_0) - \frac{itp^2}{2}\right].$$

Para determinar la acción del operador \hat{p}^2 sobre un haz Gaussiano inicial arbitrario en la representación de coordenadas basta calcular la transformada de Fourier inversa de la función anterior, con lo cual,

$$\Gamma(x, t) = \left(\frac{w_1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{w+it}} e^{-itp_0^2/2} \exp\left[-\frac{(x-x_0-p_0t)^2}{2(w+it)} + ip_0x\right], \quad (3.19)$$

que es otra Gaussiana con centro en x_0+p_0t y ancho $\sqrt{2(w+it)}$. Aquí, $\exp(-itp_0^2/2)$ es un factor de fase global dependiente del tiempo. El factor $1/\sqrt{w+it}$ es responsable de la disminución de la amplitud con el tiempo, pero además da un factor de fase adicional. Notemos que la evolución dada en la Ec. (3.19) concuerda con la evolución Ec. (3.8) bajo la ecuación paraxial de Helmholtz (3.7) si hacemos la sustitución $t \mapsto -t/k$.

Los valores promedio de la función Gaussiana evolucionada Ec. (3.19) son

$$\begin{aligned} \langle \hat{x} \rangle &= x_0 + p_0t, \\ \langle \hat{p} \rangle &= p_0, \\ \langle \{\hat{x}\hat{p}\} \rangle &= \langle \{\hat{x}_0\hat{p}_0\} \rangle + 2\langle \hat{p}_0^2 \rangle t, \\ \langle \hat{x}^2 \rangle &= \langle \hat{x}_0^2 \rangle + \langle \{\hat{x}_0, \hat{p}_0\} \rangle t + \langle \hat{p}_0^2 \rangle t^2, \\ \langle \hat{p}^2 \rangle &= \langle \hat{p}_0^2 \rangle, \end{aligned}$$

y las varianzas,

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{xx}^0 + 2\sigma_{xp}^0 t + \sigma_{pp}^0 t^2, \\ \sigma_{xp} &= \sigma_{xp}^0 + \sigma_{pp}^0 t, \\ \sigma_{pp} &= \sigma_{pp}^0, \end{aligned} \quad (3.20)$$

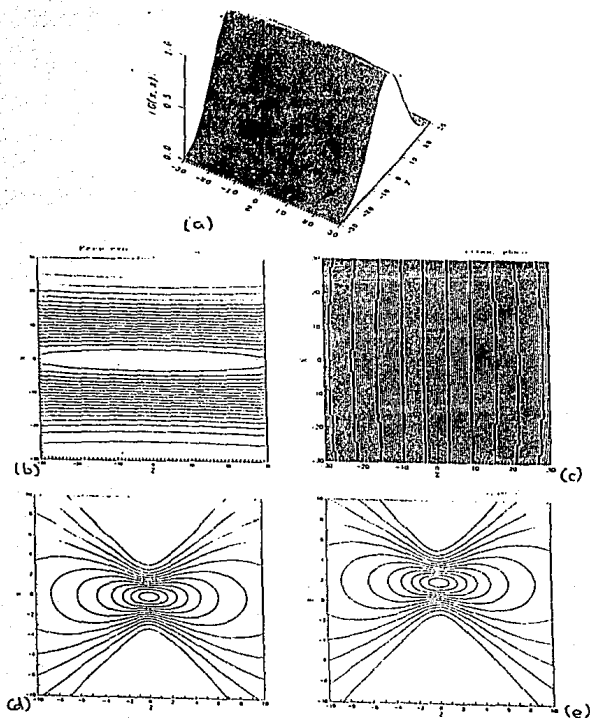
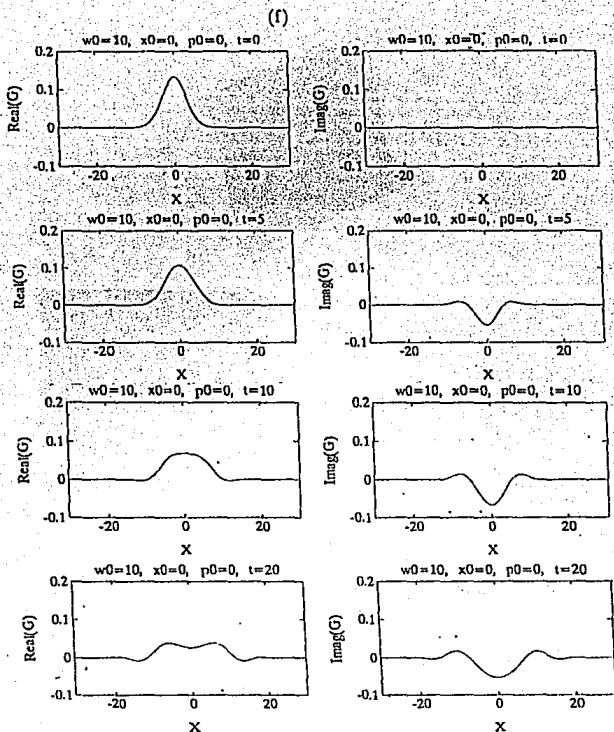


Figura 3.7: Evolución libre de una función Gaussiana compleja para $w = 1$, $x_0 = 0$, $p_0 = 0$. Se muestra (a) el valor absoluto de la función, (b) la curva de nivel de $|G|$, (c) la curva de nivel de la fase. Curvas de nivel del valor absoluto de la evolución libre de una función Gaussiana compleja para (d) $w = 2$, $x_0 = 0$, $p_0 = 0$, (e) $w = 2$, $x_0 = 2$, $p_0 = 0$, (f) Parte real y parte imaginaria de G como función de x para distintos valores de t y de los parámetros.



donde σ_{xx}^0 , σ_{pp}^0 , σ_{xp}^0 , son las varianzas de la Gaussiana inicial, Ecs. (3.16). En este caso también la relación de incertidumbre de Schrödinger-Robertson es mínima todo el tiempo.

En la Fig. 3.7 graficamos la evolución libre de la Gaussiana, Ec. (3.19) para distintos valores de los parámetros.

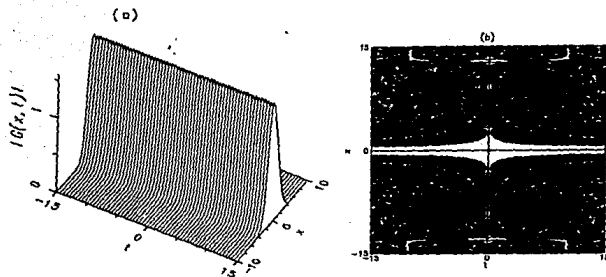


Figura 3.8: Evolución de una función Gaussiana compleja bajo el operador “pocus” \hat{x}^3 para $w = 2 \text{ cm}^2$, $x_0 = 0$, $p_0 = 0$. Se muestra (a) el valor absoluto de la función, (b) la curva de nivel de la fase.

3.5 Aberraciones de segundo orden.

Las aberraciones de segundo orden son generadas por los polinomios de tercer orden en \hat{p} y \hat{x} ,

$$\hat{x}^3/3, \quad \{\hat{x}^2\hat{p}\}, \quad \{\hat{p}^2\hat{x}\}, \quad \hat{p}^3/3.$$

3.5.1 Pocus \hat{x}^3 .

La acción del operador $\hat{x}^3/3$ en la representación de coordenadas es trivial ya que solo agrega el factor de fase $\exp(-itx^3/3)$, por lo que la Gaussiana evolucionará como

$$\begin{aligned} \Gamma(x,t) &= e^{-itx^3/3}\Gamma(x) \\ &= \left(\frac{w_1}{\pi w^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left\{-\frac{(x-x_0)^2}{2w_0} + ip_0x - \frac{itx^3}{3}\right\}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

En la Fig. 3.8 mostramos la acción de este operador sobre una Gaussiana inicial con $w = 2 \text{ cm}^2$.

3.5.2 Distorsión $\{\hat{x}^2\hat{p}\}$.

Consideremos como Hamiltoniano el operador

$$\hat{H} = \{\hat{x}^2\hat{p}\} = (\hat{x}^2\hat{p} + \hat{x}\hat{p}\hat{x} + \hat{p}\hat{x}^2)/3 = (\hat{x}^2\hat{p} + \hat{p}\hat{x}^2)/2 = \hat{x}^2\hat{p} - i\hat{x};$$

en la representación de coordenadas este operador toma la forma

$$-i [x^2\partial_x + x],$$

por lo que, la función inicial evoluciona como

$$F(x, t) = e^{-i\hat{H}t}F(x, 0),$$

es decir, satisface la siguiente ecuación diferencial

$$(\partial_t + x^2\partial_x + x)F = 0. \quad (3.22)$$

Para encontrar la solución, primero resolveremos la ecuación más general,

$$[\partial_t + a(x)\partial_x - b(x)]F = 0. \quad (3.23)$$

donde $a(x)$ y $b(x)$ son funciones arbitrarias. Introduciendo la nueva variable

$$y = \int^x \frac{dx'}{a(x')} \equiv \phi(x), \quad a(x)\partial_x = \partial_y, \quad x = \phi^{-1}(y), \quad (3.24)$$

transformamos la Ec. (3.23) en

$$[\partial_t + \partial_y - b(y)]F = 0,$$

la cual tiene como solución general [38]

$$F(y, t) = f(y-t)g(y), \quad g(y) = \exp \int^y b(y')dy',$$

donde $f(y-t)$ es una función arbitraria de su argumento. Tomando como condición inicial $F_0(x) = F_0(\phi^{-1}(y)) = F_0(y)$, la solución a la Ec. (3.23) será

$$F(y, t) = F_0(y-t) \frac{g(y)}{g(y-t)}, \quad y = \phi(x),$$

la cual puede reescribirse como

$$F(x, t) = F_0(\phi^{-1}(\phi(x) - t)) \frac{g(\phi(x))}{g(\phi(x) - t)}. \quad (3.25)$$

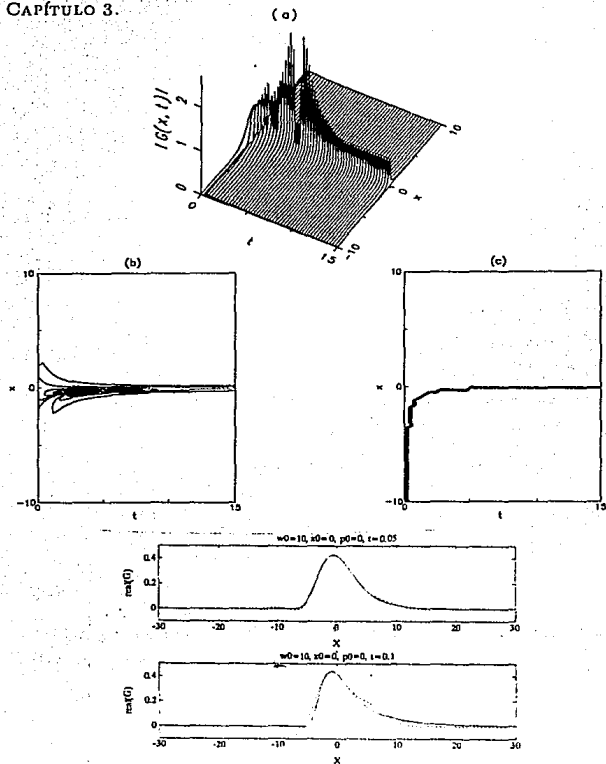


Figura 3.9: Evolución de una función Gaussiana compleja bajo el operador de distorsión $\{\hat{z}^2\hat{p}\}$ para $w = 2 \text{ cm}^2$, $x_0 = 0$, $p_0 = 0$. Se muestra (a) el valor absoluto de la función, (b) la curva de nivel de $|\Gamma|$, (c) la curva de nivel de la fase, (d) la comparación de la parte real y la parte imaginaria de Γ calculada exactamente, línea continua y por su aproximación en serie de Taylor para t pequeño, línea punteada, para diferentes valores de t y los parámetros.

Para el caso particular de distorsión Ec. (3.22), tenemos

$$\begin{aligned} a &= x^2, & b &= -x = 1/y, \\ y &= \phi(x) = -1/x, & x &= -1/y, \\ g(y) &= y, & \frac{g(\phi(x))}{g(\phi(x)-t)} &= \frac{1}{1+xt}, \\ \phi^{-1}(\phi(x)-t) &= \frac{x}{1+xt}. \end{aligned}$$

con lo que la distorsión de una función inicial arbitraria $F_0(x)$ (la solución de la Ec. (3.23)) es

$$F(x, t) = \frac{1}{1+xt} F_0\left(\frac{x}{1+xt}\right). \quad (3.26)$$

Tomando la función inicial como una Gaussiana, tenemos

$$\Gamma(x, t) = \left(\frac{w_1}{\pi w^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+xt} \exp\left[-\frac{1}{2w_0}\left(\frac{x}{1+xt} - x_0\right)^2 + \frac{ip_0x}{1+xt}\right]. \quad (3.27)$$

Es fácil checar que la condición de normalización se sigue satisfaciendo.

Podemos expandir Γ en potencias de t por:

$$\begin{aligned} \Gamma(x, t) &\approx \Gamma(x, 0) \left\{ 1 - itx [\xi x - i] \right. \\ &\quad \left. - \frac{t^2 x^2}{2} \left[x^2 \left(\xi^2 + \frac{1}{w} \right) - 2 - 4i\xi x \right] + \dots \right\} \end{aligned} \quad (3.28)$$

donde $\Gamma(x, 0)$ es la Gaussiana inicial dada en la Ec. (3.13) y

$$\xi = p_0 + i \frac{x - x_0}{w} \quad (3.29)$$

Esta aproximación sólo es adecuada para $t \ll 1$ y en la vecindad del origen $|x| < 1$.

En la Fig. 3.9 mostramos la acción del operador de distorsión sobre una Gaussiana inicial con $w = 2 \text{ cm}^2$ (Ec. 3.27).

3.5.3 Coma $\{\hat{x}\hat{p}^2\}$.

Consideremos como Hamiltoniano el operador

$$\hat{H} = \{\hat{x}\hat{p}^2\} = (\hat{p}^2\hat{x} + \hat{p}\hat{x}\hat{p} + \hat{x}\hat{p}^2)/3 = (\hat{p}^2\hat{x} + \hat{x}\hat{p}^2)/2 = \hat{p}^2\hat{x} + i\hat{p}.$$

Los operadores de coordenadas y momento en la representación de momento tienen la forma $\hat{p} = p$ y $\hat{x} = i\partial_p$, por lo que el operador $\{\hat{x}\hat{p}^2\}$ se reduce al operador diferencial $i(p^2\partial_p + p)$ el cual difiere solo en el signo de la acción del operador de distorsión $\{\hat{x}^2\hat{p}\}$ en la representación de coordenadas. Por analogía con la Ec. (3.26) podemos escribir la acción de $\{\hat{x}\hat{p}^2\}$ sobre una función inicial arbitraria en la representación de momento $\tilde{F}_0(p)$ como

$$\tilde{F}(p, t) = e^{-i\hat{H}t}\tilde{F}_0(p) = \frac{1}{1-pt}\tilde{F}_0\left(\frac{p}{1-pt}\right), \quad (3.30)$$

o, en la representación de coordenadas, para el caso particular de una Gaussiana,

$$\Gamma(x, t) = \left(\frac{w_1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{e^{ipx}}{1-pt} \times \exp\left[-\frac{w}{2}\left(\frac{p}{1-pt} - p_0\right)^2 - ix_0\left(\frac{p}{1-pt} - p_0\right)\right]. \quad (3.31)$$

Esta integral puede calcularse numéricamente. La expansión en serie de Taylor para t pequeña es

$$\Gamma(x, t) \approx \Gamma(x, 0) \left\{ 1 - it \left[x \left(\xi^2 + \frac{1}{w} \right) - i\xi \right] - \frac{t^2}{w} \left[x^2 \xi^4 - 4ix\xi^3 + \left(\frac{6x^2}{w} - 2 \right) \xi^2 - \frac{12ix}{w} \xi + \frac{3x^2}{w^2} - \frac{2}{w} \right] + \dots \right\} \quad (3.32)$$

donde ξ se definió en la Ec. (3.29), y $\Gamma(x, 0)$ es la Gaussiana inicial dada en la Ec. (3.13). Esta aproximación sólo trabaja en la vecindad del origen $x < 1$ y para $t \ll 1$.

En la Fig. 3.10 mostramos la acción del operador de coma sobre una Gaussiana inicial con $w = 2 \text{ cm}^2$ calculado numéricamente de la Ec. (3.31).

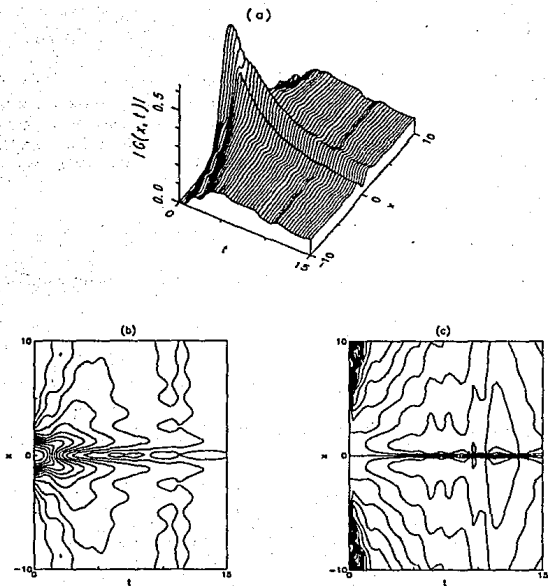
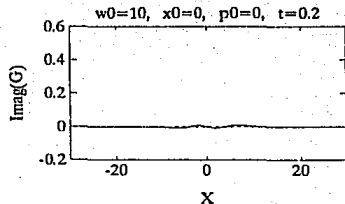
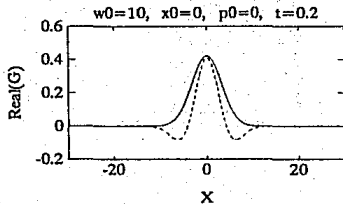
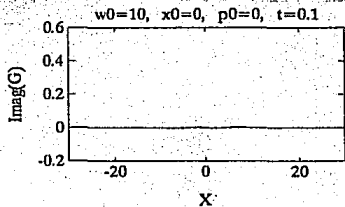
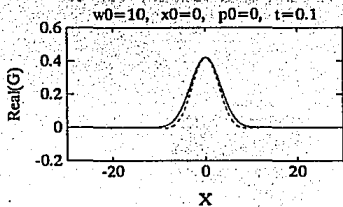
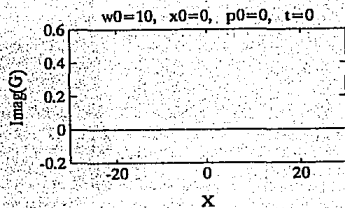
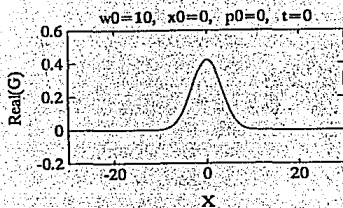


Figura 3.10: Evolución de una función Gaussiana compleja bajo el operador de coma $\{\hat{x}\hat{p}^2\}$ para $w = 2 \text{ cm}^2$, $x_0 = 0$, $p_0 = 0$. Se muestra (a) el valor absoluto de la función, (b) la curva de nivel de $\text{Re}\{\Gamma\}$, (c) la curva de nivel de la fase, (d) la comparación de la parte real y la parte imaginaria de Γ calculada exactamente, línea continua y por su aproximación en serie de Taylor para t pequeño, línea punteada, para diferentes valores de t y los parámetros.

(d)



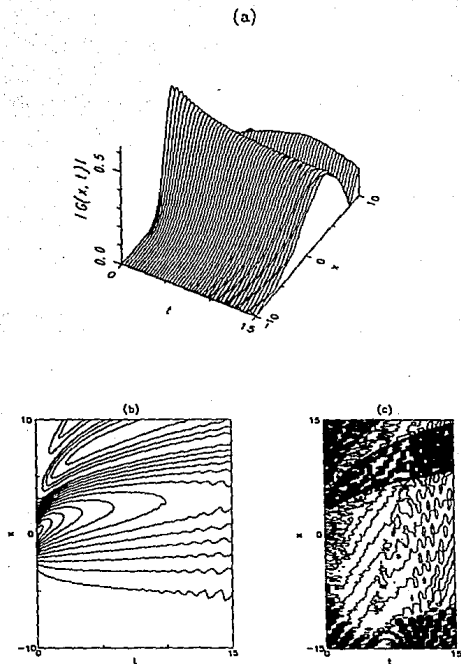
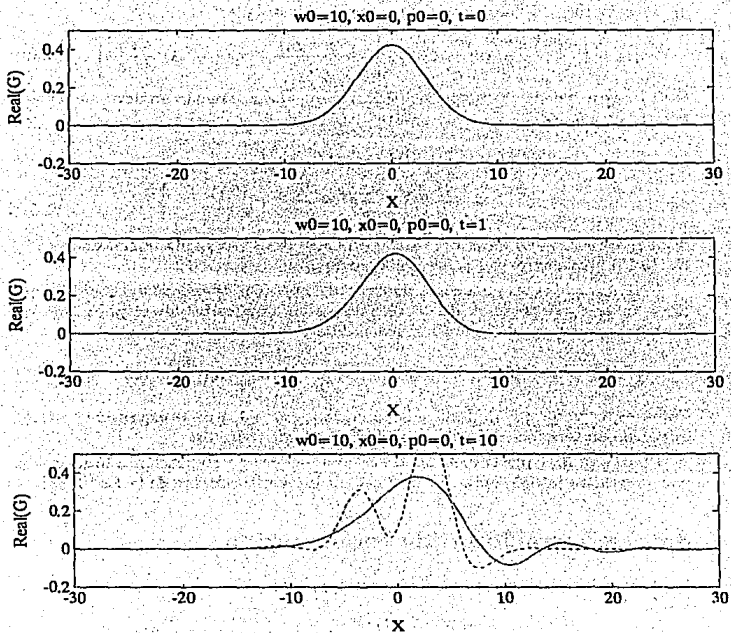


Figura 3.11: Evolución de una función Gaussiana compleja bajo el operador de aberración esférica \hat{p}^3 para $w = 2 \text{ cm}^2$, $x_0 = 0$, $p_0 = 0$ calculado numéricamente, se muestra (a) el valor absoluto de la función, (b) la curva de nivel de $|\Gamma|$, (c) la curva de nivel de la fase, (d) la comparación de la parte real y la parte imaginaria de Γ calculada numéricamente, línea continua y por su aproximación en serie de Taylor para t pequeño, línea punteada, para diferentes valores de t y los parámetros.

(d)



3.5.4 Aberración esférica \hat{p}^3 .

En la representación de momento, la acción del operador $\hat{p}^3/3$ no es más que multiplicación por el factor $\exp(-it\hat{p}^3/3)$. Por lo tanto, en la representación de coordenadas, la función Gaussiana se transforma como sigue

$$\Gamma(x, t) = \left(\frac{w_1}{\pi}\right)^{1/4} \frac{e^{i\alpha_0 p_0}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \exp\left[-\frac{w(p-p_0)^2}{2} + ip(x-x_0) - \frac{itp^3}{3}\right] \quad (3.33)$$

Esta integral puede calcularse numéricamente. La expansión en serie de Taylor para t pequeña es

$$\Gamma(x, t) \approx \Gamma(x, 0) \left\{ 1 - it \left(\xi^3 + \frac{3}{w} \xi \right) - \frac{t^2}{2} \left(\xi^6 + \frac{15}{w} \xi^4 + \frac{45}{w^2} \xi^2 + \frac{15}{w^3} \right) + \dots \right\} \quad (3.34)$$

dónde ξ esta definido en la Ec. (3.29), y $\Gamma(x, 0)$ es la Gaussiana inicial dada en la Ec. (3.13). Esta aproximación es válida cuando $t < 1$ y $x < 1$.

Notemos que la acción de una potencia del operador de momento en una Gaussiana en la representación de coordenadas es multiplicarla por el polinomio de Hermite, como se ve de la función generadora para estos polinomios,

$$\hat{p}^n \Gamma(x) = \mathcal{P}_n(\xi) \Gamma(x), \quad \mathcal{P}_n(\xi) = \left(\frac{i}{\sqrt{2w}}\right)^n H_n\left(-i\xi\sqrt{\frac{w}{2}}\right) \Gamma(x). \quad (3.35)$$

Entonces, el factor que multiplica la potencia n -ésima de t en la expansión anterior esta dado en términos del polinomio de Hermite de orden $3n$.

En la Fig. 3.11 mostramos la acción del operador de aberración esférica sobre una Gaussiana inicial con $w = 2 \text{ cm}^2$ calculado numéricamente de la Ec. (3.33).

3.6 Aberraciones de tercer orden.

Las aberraciones de tercer orden se generan por los polinomios de cuarto orden en \hat{p} y \hat{x} ,

$$\hat{x}^4/4, \quad \{\hat{x}^3\hat{p}\}, \quad \{\hat{x}^2\hat{p}^2\}_w, \quad \{\hat{x}\hat{p}^3\}, \quad \hat{p}^4/4.$$

donde denotamos con $\{\}_w$ el ordenamiento de Weyl de los operadores dentro de los paréntesis [39]. En astigmatismo tomamos su ordenamiento de Weyl porque así se transforma en correspondencia con los operadores clásicos bajo transformaciones lineales. Estas aberraciones son las más importantes en óptica ya que describen las primeras correcciones al régimen paraxial de la evolución del rayo de luz en sistemas ópticos axialmente simétricos [6].

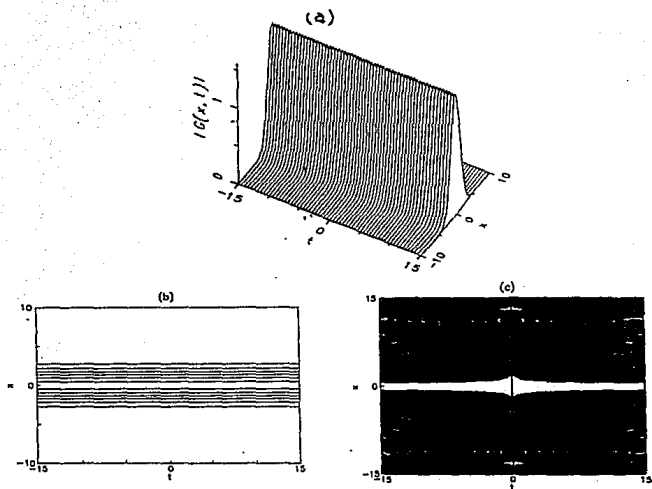


Figura 3.12: Evolución de una función Gaussiana compleja bajo el operador de pocus \hat{x}^4 para $w = 2 \text{ cm}^2$, $x_0 = 0$, $p_0 = 0$, se muestra (a) el valor absoluto de la función, (b) la curva de nivel de $|\Gamma|$, (c) la curva de nivel de la fase.

3.6.1 Pocus \hat{x}^4 .

La acción del operador $\hat{x}^4/4$ en la representación de coordenadas es trivial ya que solo agrega el factor de fase $\exp(-itx^4/4)$,

$$F(x, t) = e^{-itx^4/4} F(x, 0),$$

por lo que la Gaussiana inicial dada en la Ec. (3.13) evolucionará como

$$\Gamma(x, t) = \left(\frac{w_1}{\pi w^2}\right)^{1/4} \exp\left\{-\frac{(x-x_0)^2}{2w_0} + ip_0x - \frac{itx^4}{4}\right\}. \quad (3.36)$$

En la Fig. 3.12 mostramos la acción del operador de pocus sobre una Gaussiana inicial con $w = 2 \text{ cm}^2$.

3.6.2 Distorsión $\{\hat{x}^3\hat{p}\}$.

Consideremos como Hamiltoniano el operador

$$\hat{H} = \{\hat{x}^3\hat{p}\} = (\hat{x}^3\hat{p} + \hat{x}^2\hat{p}\hat{x} + \hat{x}\hat{p}\hat{x}^2 + \hat{p}\hat{x}^3)/4 = \hat{x}^3\hat{p} - \frac{3}{2}i\hat{x}^2.$$

Este operador en la representación de coordenadas toma la forma

$$\hat{H} = -i \left[x^3 \partial_x + \frac{3}{2} x^2 \right].$$

La distorsión de tercer orden actúa en un estado inicial arbitrario como

$$F(x, t) = e^{-it\hat{H}} F(x, 0),$$

lo cual lleva a la ecuación diferencial

$$\left[\partial_t + x^3 \partial_x + \frac{3}{2} x^2 \right] F = 0. \quad (3.37)$$

Esta ecuación es de la forma de la Ec. (3.23) con

$$a = x^3, \quad b = -\frac{3}{2} x^2$$

por lo que podemos aplicar las fórmulas (3.24)-(3.25)

$$\begin{aligned} y &= \phi(x) = -\frac{1}{2x^2}, & x &= \sqrt{-\frac{1}{2y}}, \\ g &= y^{3/4}, & \frac{g(y-t)}{g(y-t)} &= \left(\frac{1}{1+2x^2t} \right)^{3/4}, \\ \phi^{-1}(\phi(x) - t) &= \frac{x}{\sqrt{1+2x^2t}}, \end{aligned}$$

así, una función inicial arbitraria $F(x)$ se transforma como

$$F(x, t) = \frac{1}{(1+2x^2t)^{3/4}} F_0 \left(\frac{x}{\sqrt{1+2x^2t}} \right), \quad (3.38)$$

donde el primer factor da la normalización.

Elijiendo la función inicial como una Gaussiana tenemos

$$\Gamma(x, t) = \left(\frac{w_1}{\pi w^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1+2x^2t)^{3/4}} \exp \left[-\frac{1}{2w} \left(\frac{x}{\sqrt{1+2x^2t}} - x_0 \right)^2 + \frac{ip_0 x}{\sqrt{1+2x^2t}} \right]. \quad (3.39)$$

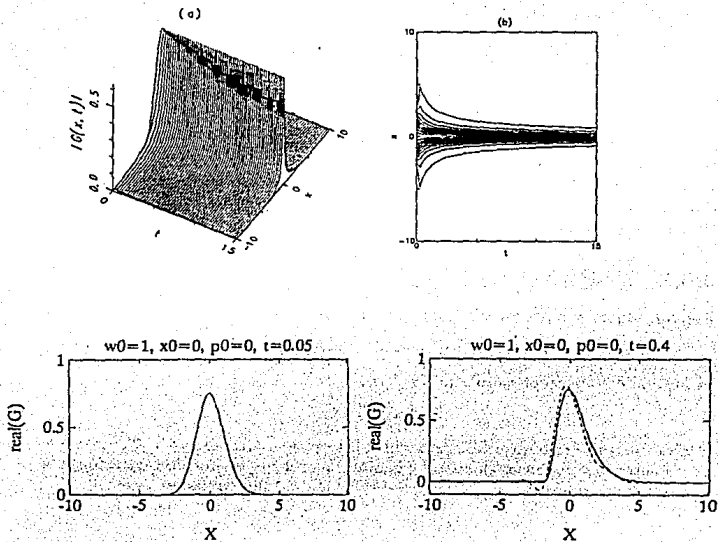


Figura 3.13: Evolución de una función Gaussiana compleja bajo el operador de distorsión $\{\hat{x}^3\hat{p}\}$ para $w = 1 \text{ cm}^2$, $x_0 = 0$, $p_0 = 0$. Se muestra (a) el valor absoluto de la función, (b) la curva de nivel de $|G|$, (c) la comparación de la parte real y la parte imaginaria de G calculada exactamente, línea continua y por su aproximación en serie de Taylor para t pequeño, línea punteada, para diferentes valores de t y los parámetros.

La expansión en serie de Taylor para tiempos pequeños es:

$$\Gamma(x, t) \approx \Gamma(x, 0) \left\{ 1 + it \left[i\frac{3}{2}x^2 - x^3\xi \right] + \frac{t^2x^4}{2} \left[\frac{21}{4} + 6ix\xi - x^2(\xi^2 + 1/w) \right] + \dots \right\} \quad (3.40)$$

donde $\Gamma(x, 0)$ es la Gaussiana inicial dada en la Ec. (3.13) y ξ esta definido en la Ec. (3.29).

En la Fig. 3.13 mostramos la acción del operador de distorsión sobre una Gaussiana inicial con $w = 2 \text{ cm}^2$ Ec. (3.39) línea continua y la aproximación anterior (Ec. 3.40), línea punteada.

3.6.3 Astigmatismo $\{\hat{x}^2\hat{p}^2\}_{IV}$.

Astigmatismo es la aberración generada por el operador

$$\{\hat{x}^2\hat{p}^2\}_{IV} = (\hat{x}\hat{p})^2 - i\hat{x}\hat{p} - 3/2, \quad (3.41)$$

es función del operador de dilatación $f(\hat{n})$,

$$\hat{n} \equiv x\partial_x = i\hat{x}\hat{p},$$

esto nos permite encontrar una solución exacta en una forma simple. Como discutimos antes, las potencias de x son eigenfunciones del operador de dilatación, por lo que seran eigenfunciones de cualquier función de dicho operador,

$$\exp[-itf(\hat{n})]x^n = \exp[-itf(n)]x^n.$$

Es fácil encontrar la evolución de cualquier función inicial presentada en la forma de series de Taylor,

$$\begin{aligned} \Psi(x, 0) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n, \\ \Psi(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-itf(n)} x^n, \end{aligned}$$

tomando la función inicial como una Gaussiana arbitraria (3.13) encontramos los coeficientes de la expansión en series de Taylor,

$$\begin{aligned} \Gamma(x, 0) &= \mathcal{A} \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n, \quad C_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{-1}{\sqrt{2w}} \right)^n H_n(\alpha), \\ \mathcal{A} &= \left(\frac{w_1}{\pi w^2} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-x_0^2/2w_0}, \quad \alpha \equiv \frac{x_0}{\sqrt{2w_0}} + ip_0 \sqrt{\frac{w}{2}}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

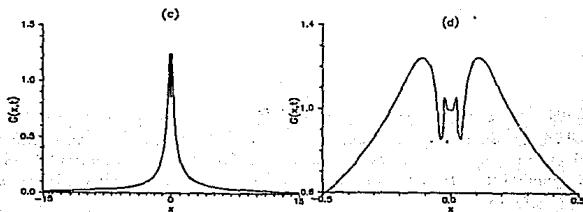
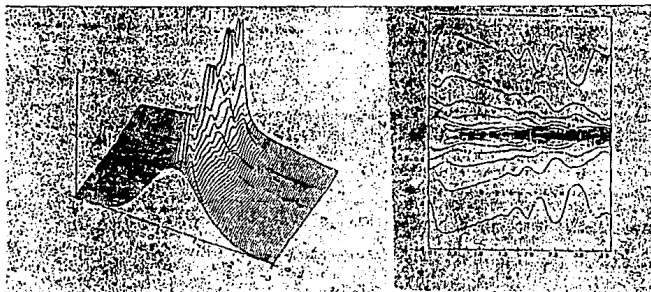


Figura 3.14: Evolución de una función Gaussiana compleja bajo el operador de astigmatismo $\{\hat{x}^2\hat{p}^2\}$ calculado numéricamente para $w = 1 \text{ cm}^2$, $x_0 = 0$, $p_0 = 0$. Se muestra (a) el valor absoluto de la función, (b) la curva de nivel de $|\Gamma|$, (c) $|\Gamma|$ para $t = 0.5$ y (d) una ampliación de la estructura compleja de $|\Gamma|$ en la vecindad del origen.

Aquí, usamos nuevamente la función generadora para los polinomios de Hermite. La función correspondiente al tiempo t es la siguiente

$$\Psi(x, t) = \mathcal{A} e^{ix^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-it(n^2+n)} x^n. \quad (3.43)$$

En muchos casos importantes, los coeficientes (3.42) son esencialmente distintos de cero solo para n 's cercanas al valor medio \bar{n} , lo cual hace que la fórmula anterior sea conveniente para simulaciones por computadora.

Los primeros términos de la expansión directa en t son

$$\Gamma(x, t) \approx \Gamma(x, 0) \left\{ 1 - it \left[x^2 (\xi + 1/\omega_0) - 2ix\xi - 3/2 \right] + \dots \right\}. \quad (3.44)$$

Sin embargo ni la Ec. 3.43, ni la Ec. 3.44 dan una buena aproximación del comportamiento de $\Gamma(x, t)$ sobre todo en la vecindad del origen. Esto nos llevó a resolver numéricamente la ecuación diferencial generada por este operador mediante la técnica de diferencias finitas [40, 41]. El programa que utilizamos para calcular $\Gamma(x, t)$ lo presentamos en el apéndice C.

En las Figs. 3.14 mostramos la acción del operador de astigmatismo sobre una Gaussiana inicial con $w = 1 \text{ cm}^2$. Como vemos en las Figs. 3.14a y b este operador modifica bruscamente la estructura de la Gaussiana en la vecindad del origen, lo cual se nota en la amplificación de su comportamiento para $t = 0.5$ (ver Fig. 3.14d).

3.6.4 Coma $\{\hat{x}\hat{p}^3\}$.

El operador

$$\{\hat{x}\hat{p}^3\} = \hat{p}^3 \hat{x} + \frac{3}{2} i \hat{p}^2$$

en la representación de momento tiene la forma diferencial $i \left[p^3 \partial_p + \frac{3}{2} p^2 \right]$ que es similar a la forma diferencial del operador de distorsión $-\{\hat{x}\hat{p}\}$ en la representación de coordenadas, por lo que la evolución de una función en la representación de momento puede escribirse en analogía con la Ec. (3.37) para la distorsión (con el cambio $t \rightarrow -t$), así,

$$\hat{F}(p, t) = \frac{1}{(1 - 2p^2 t)^{3/4}} \hat{F}_0 \left(\frac{p}{\sqrt{1 - 2p^2 t}} \right), \quad (3.45)$$

sustituyendo la Gaussiana inicial y regresando a la representación de coordenadas tenemos

$$\Gamma(x, t) = \left(\frac{w_1}{\pi} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ipx}}{(1 - 2p^2 t)^{3/4}} \times \exp \left[-\frac{w}{2} \left(\frac{p}{\sqrt{1 - 2p^2 t}} - p_0 \right)^2 - ix_0 \left(\frac{p}{\sqrt{1 - 2p^2 t}} - p_0 \right) \right] dp. \quad (3.46)$$

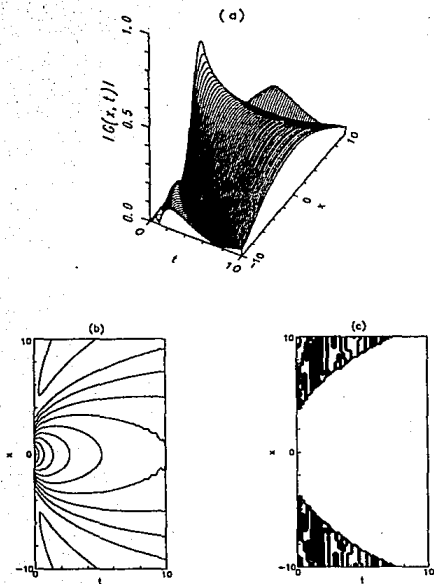
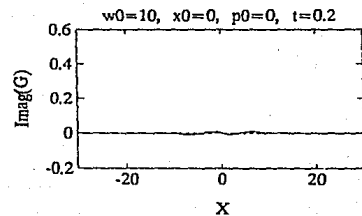
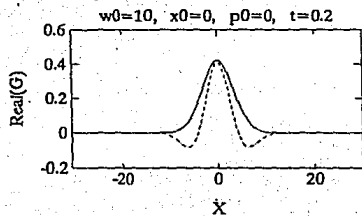
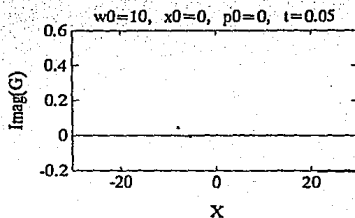
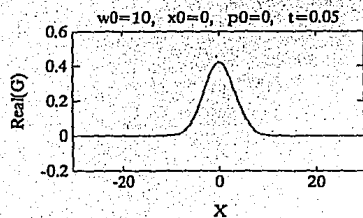
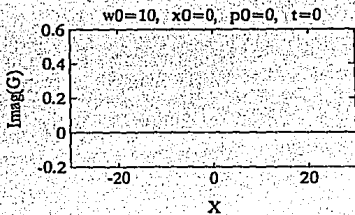
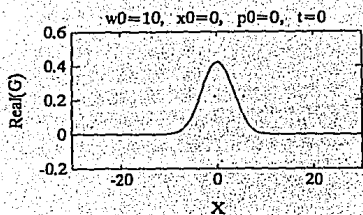


Figura 3.15: Evolución de una función Gaussiana compleja bajo el operador de coma $\{\hat{x}\hat{p}^3\}$ calculado numéricamente para $w = 2 \text{ cm}^2$, $x_0 = 0$, $p_0 = 0$. Se muestra (a) el valor absoluto de la función, (b) la curva de nivel de $|G|$, (c) la curva de nivel de la fase, (d) la comparación de la parte real y la parte imaginaria de Γ calculada exactamente, línea continua y por su aproximación en serie de Taylor para t pequeño, línea punteada, para diferentes valores de t y los parámetros.

(d)



Los primeros términos de la expansión en serie de Taylor son

$$\begin{aligned} \Gamma(x, t) \approx & \Gamma(x, 0) \left\{ 1 - it \left(x \left[\xi^3 + \frac{3\xi}{w} \right] - \frac{3}{2} i \left[\xi^2 + \frac{1}{w} \right] \right) \right. \\ & - \frac{t^2}{2} \left(x^2 \left[\xi^6 + 15 \frac{\xi^4}{w} + 45 \frac{\xi^2}{w^2} + \frac{15}{w^3} \right] - \left[\frac{21}{4} \xi^4 + \frac{63 \xi^2}{2 w} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{63}{4 w_0^2} \right] - ix \left[6 \xi^5 + 60 \frac{\xi^3}{w} + 90 \frac{\xi}{w^2} \right] \right) + \dots \left. \right\}. \quad (3.47) \end{aligned}$$

En la Fig. 3.15 mostramos la acción del operador de coma sobre una Gaussiana inicial con $w = 2 \text{ cm}^2$ Ec. (3.46).

3.6.5 Aberración esférica \hat{p}^4 .

La acción del operador de aberración esférica \hat{p}^4 en la representación de momento es trivial ya que solo agrega el factor de fase $\exp(-ip^4/4)$, por lo que la función Gaussiana inicial en la representación de coordenadas se transforma como

$$\Gamma(x, t) = \left(\frac{w_1}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{ix_0 p_0}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \exp \left[-\frac{itp^4}{4} - \frac{w(p-p_0)^2}{2} + ip(x-x_0) \right]. \quad (3.48)$$

Esta integral puede ser evaluada numéricamente o se puede hacer la aproximación en series,

$$\begin{aligned} \Gamma(x, t) \approx & \Gamma(x, 0) \left\{ 1 - i\tau \left(\xi^4 + \frac{6}{w} \xi^2 + \frac{3}{w^2} \right) \right. \\ & \left. - \frac{\tau^2}{2} \left(\xi^8 + \frac{28}{w} \xi^6 + \frac{210}{w^2} \xi^4 + \frac{420}{w^3} \xi^2 + \frac{105}{w^4} \right) + \dots \right\} \quad (3.49) \end{aligned}$$

donde ξ esta definido en la Ec. (3.29). Los coeficientes de esta aproximación son los polinomios de Hermite Ec. (3.35).

Si se satisface la condición $p_0 \sqrt{w} \gg 1$, la integral (3.48) puede estimarse por la técnica de steepest descent [21]. Esta integral tiene una forma $\int dp \exp[F(p)]$. Encontrando el punto crítico de la fase a partir de la condición $F'(p_c) = 0$ y tomando en cuenta solo la solución a esta ecuación cúbica que tiende a p_0 cuando $\tau \rightarrow 0$ encontramos que para τ no muy grande,

$$p_c(x, \tau) \approx \xi + \frac{-i4\tau\xi^3}{w + i12\tau\xi^2}, \quad P(p) \approx F(\xi) - \frac{\kappa}{2}(p-\xi)^2,$$

entonces la integral se aproxima por

$$\Psi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{w_1}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{F(\xi)} \int dp e^{-\kappa(p-p_c)^2/2} = \Gamma(x, t=0) e^{-i\tau p_c^4} \sqrt{\frac{w}{\kappa}}, \quad (3.50)$$

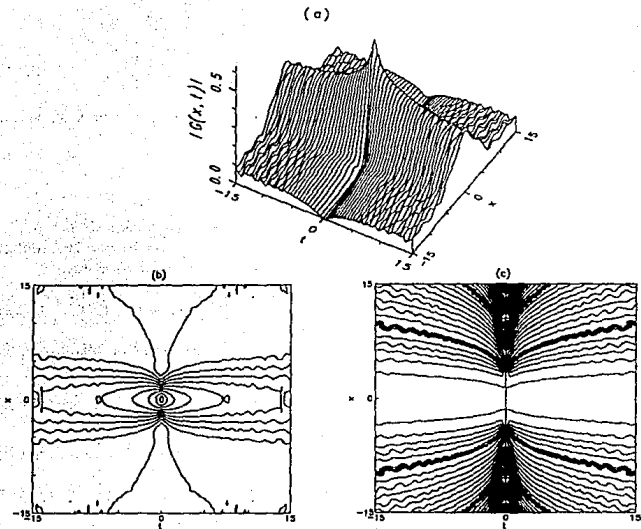
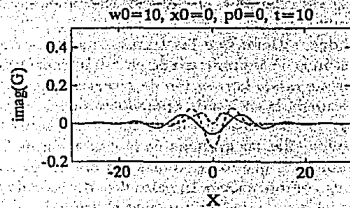
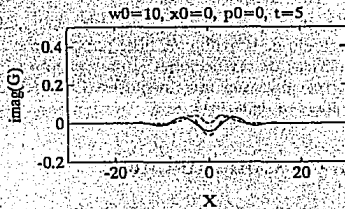
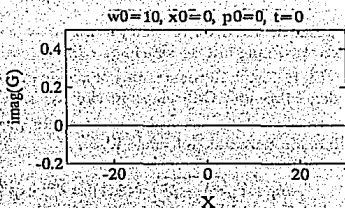
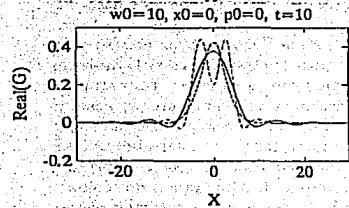
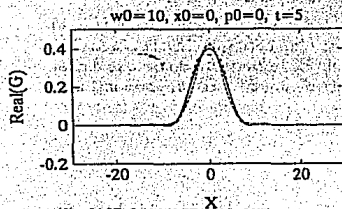
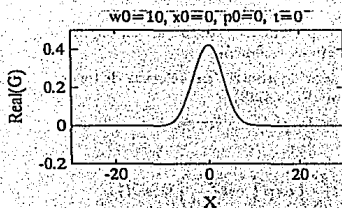


Figura 3.16: Evolución de una función Gaussiana compleja bajo el operador de aberración esférica \hat{p}^4 calculado numéricamente para $w = 1 \text{ cm}^2$, $x_0 = 0$, $p_0 = 0$. Se muestra (a) el valor absoluto de la función, (b) la curva de nivel de $|\Gamma|$, (c) la curva de nivel de la fase, (c) la comparación de la parte real y la parte imaginaria de Γ calculada numéricamente, línea continua, por su aproximación es serie de Taylor para t pequeño, línea punteada, y la aproximación de steepest descent línea con guiones; para diferentes valores de t y los parámetros.

(d)



donde

$$\kappa(x, \tau) = - \left. \frac{d^2 F}{dp^2} \right|_{p=p_0} = w + i\tau 12p_0^2.$$

A pesar de que la expansión polinomial y la de steepest descent trabajan en regiones distintas, ninguna de estas aproximaciones analíticas es buena.

En la Fig. 3.16 mostramos la acción del operador de aberración esférica de tercer orden sobre una Gaussiana inicial con $w = 1 \text{ cm}^2$ Ec. (3.48).

Esta aberración es muy importante ya que es la primera corrección a la aproximación paraxial del vuelo libre,

$$\exp\left(it\sqrt{n^2 - \hat{p}^2}\right) \Psi(x, t) \approx e^{int} \exp\left(-it \frac{\hat{p}^2}{2n}\right) \exp\left(-it \frac{\hat{p}^4}{8n^3}\right) \Psi(x, t).$$

En esta expansión, el primer término produce oscilaciones globales de la fase, el segundo da la evolución libre paraxial y el tercero (que corresponde a la aberración esférica) da correcciones al movimiento paraxial. Es importante notar que dichas correcciones son muy pequeñas (del orden de $1/n^3$, donde n es proporcional a la velocidad de la luz).

3.7 Conclusiones.

En este capítulo analizamos las funciones Gaussianas que describen los haces luminosos bajo la aproximación paraxial y sus aberraciones de segundo y tercer orden. Vimos que las transformaciones canónicas lineales generadas por los polinomios de segundo grado en x y p transforman funciones Gaussianas en Gaussianas preservando la relación de incertidumbre de Schrödinger-Robertson. Encontramos también la acción de operadores de tercer (aberraciones de segundo orden) y cuarto grado (aberraciones de tercer orden) sobre funciones Gaussianas y mostramos para todas ellas las gráficas de la evolución de Γ . La importancia de estas aberraciones radica en que los sistemas ópticos en esta aproximación son en general generados por combinaciones lineales de esta base de operadores. Los programas de cómputo existentes permiten integrar al grupo la evolución generada por tales combinaciones lineales. La propagación libre gobernada por la ecuación de Helmholtz es diferente del vuelo libre paraxial gobernado por una ecuación de tipo Schrödinger, y las correcciones a esta propagación están dadas en términos de aberraciones de tercer orden.

Capítulo 4

Evolución bajo Hamiltonianos polinomiales.

4.1 Introducción.

El propósito de este capítulo es comparar la dinámica clásica y cuántica de los procesos cuya evolución es generada por los Hamiltonianos no lineales más simples. Para ello calculamos la historia temporal de las funciones de Wigner de estos sistemas en sus estados gaussianos bajo Hamiltonianos no lineales que son polinomios de cuarto grado en la coordenada x y el momento p .

Esta clase de Hamiltonianos son importantes en óptica ondulatoria y cuántica. En óptica ondulatoria describen las aberraciones de la imagen a tercer orden como demostramos en el capítulo anterior. En mecánica y óptica cuánticas, los ejemplos más importantes de Hamiltonianos polinomiales de cuarto grado son el oscilador anarmónico y el medio óptico de Kerr [42, 43].

Usaremos la distribución de cuasiprobabilidad de Wigner para dar una imagen visual de la dinámica cuántica. Como veremos, la función de Wigner nos da la descripción común más parecida de la dinámica cuántica y clásica en el plano fase con x y p ¹ [44].

Mostraremos que los momentos de la función de Wigner (i.e., las integrales de las potencias de la función de Wigner sobre el plano fase) contienen información importante sobre el estado de un sistema y que pueden usarse para distinguir entre la evolución cuántica y semiclassical [45, 46]. La contraparte clásica de estos momentos es invariante bajo cualquier transformación canónica debido a la conservación del volumen en el espacio fase. En la dinámica cuántica estos momentos se preservan

¹Utilizaremos la definición estándar de la función de Wigner la cual está conectada con el grupo dinámico de Heisenberg-Weyl.

bajo cualquier transformación canónica lineal pero varían bajo transformaciones no lineales.

Los momentos de todos los estados semiclásicos que se describen por funciones de onda Gaussianas son iguales a la unidad. La diferencia con la unidad puede servir como una medida nueva de la "no clasicidad" del estado. El cambio en el valor de estos momentos durante evolución no lineal refleja un aumento extra de las fluctuaciones cuánticas sobre el nivel clásico correspondiente. Esto nos da información cuantitativa sobre la precisión de la aproximación semiclásica.

Veremos que los momentos de la función de Wigner pueden usarse para detectar y cuantificar las superposiciones cuánticas de estados macroscópicamente distinguibles, i.e., los llamados *estados de gato de Schrödinger*.

Como en el capítulo anterior, nos restringiremos al caso del espacio fase bidimensional, donde es posible graficar y entender más claramente el comportamiento de las distribuciones de cuasiprobabilidad. Sólo consideraremos estados cuánticos puros, es decir, estados descritos por funciones de onda.

Iniciamos este capítulo planteando en la sección 4.2 la diferencia que hay entre la dinámica clásica y cuántica en el espacio fase, enunciando la definición y presentando las propiedades principales de la función de Wigner en la sección 4.3. En la sección 4.4 señalamos las características de las transformaciones no lineales. La sección 4.5 contiene una discusión de las transformaciones canónicas no lineales. En ella revisamos algunas definiciones previas del elemento de volumen del espacio fase para estados cuánticos, poniendo énfasis en la utilidad de los momentos de la función de Wigner. Presentamos una fórmula alternativa para estos momentos en términos de la función de onda. La parte central de este capítulo está contenida en las secciones 4.6 y 4.7, donde se presentan los resultados del cálculo numérico de la función de Wigner para aberraciones ópticas y para el medio de Kerr óptico, respectivamente. Los comentarios finales se presentan en la sección 4.8 de conclusiones.

Los resultados de este capítulo aparecen en el artículo [45] que reproducimos en el apéndice D y en el artículo [46] enviado a Physical Review A que reproducimos en el apéndice E.

4.2 ¿Cuál es la diferencia entre la dinámica clásica y cuántica en el espacio fase?

Desde la creación de la mecánica cuántica se han hecho innumerables esfuerzos para comprender mejor la correspondencia entre la dinámica cuántica y la evolución clásica [47]. Esta meta se ha alcanzado parcialmente usando la representación de

espacio fase en la cual el estado de un sistema cuántico puede representarse por la distribución de cuasiprobabilidad en el espacio fase del sistema clásico correspondiente [48, 49]. Descrita de esta manera, la dinámica cuántica es similar a la mecánica estadística. Es claro que esta analogía es incompleta debido a que [50]:

1. las distribuciones de cuasiprobabilidad pueden tomar valores negativos (a diferencia de las distribuciones probabilísticas verdaderas),
2. la distribución clásica puede localizarse en un punto en el espacio fase, mientras la distribución cuántica siempre debe extenderse en un volumen finito de espacio fase satisfaciendo las relaciones de incertidumbre.

Tomemos una distribución inicial consistente con las relaciones de incertidumbre que describa una partícula real. La pregunta que nos planteamos es: *¿cuál es la diferencia entre la dinámica clásica y cuántica en el espacio fase?*

La dinámica clásica implica que cada elemento del espacio fase se mueve a lo largo de su trayectoria clásica preservando su volumen. Si al tiempo $t = 0$ la probabilidad de encontrar una partícula en una unidad de volumen en el punto x_0, p_0 es $W_{cl}(x_0, p_0)$, entonces al tiempo t la distribución de probabilidad es

$$W_{cl}(x, p; t) = W_{cl}(x_0(x, p, t), p_0(x, p, t)) , \quad (4.1)$$

donde $x(t), p(t)$ es la trayectoria clásica que pasa por el punto x_0, p_0 al tiempo $t = 0$. ¿Nos ayuda esta imagen a entender la dinámica cuántica? Si lo hace, entonces ¿donde se puede usar eficientemente la aproximación semiclásica para describir un sistema cuántico? Esta pregunta es importante en varias ramas de la física que tienen la misma estructura matemática: mecánica cuántica de partículas, óptica cuántica y óptica ondulatoria.

Estas preguntas se formulan de manera más natural en el bien conocido lenguaje de la mecánica cuántica de partículas. También surgen en óptica cuántica cuando un solo modo del campo electromagnético es descrito por los operadores de coordenadas y momento del oscilador armónico; este oscilador del campo interactúa con un sistema atómico o con otros modos del campo en el caso de un proceso óptico no lineal. La óptica cuántica moderna utiliza ampliamente las distribuciones de cuasiprobabilidad [48, 49], distintas versiones de la aproximación semiclásica [51] y otras herramientas de la mecánica cuántica.

En este capítulo estamos interesados en las aplicaciones en la óptica ondulatoria. Como vimos en el capítulo 2, en la aproximación paraxial, la ecuación de Helmholtz óptica se reduce a la ecuación de Schrödinger. La distancia a lo largo del eje óptico juega el papel del tiempo t en la mecánica y en el medio óptico bidimensional denotaremos la coordenada sobre la pantalla en la dirección perpendicular al eje óptico, por x . El momento canónicamente conjugado p describe la dirección del

ESTA COPIA NO DEBE
SER DE LA BIBLIOTECA

rayo en el punto x, t . El límite clásico corresponde a la óptica geométrica [5]. La teoría en la aproximación paraxial describe la propagación de rayos de luz generados por operadores Hamiltonianos que son polinomios de segundo orden en x y p . Estos generan transformaciones canónicas lineales en el espacio fase. Los Hamiltonianos polinomiales de mayor grado describen las aberraciones al régimen paraxial, produciendo las deformaciones visuales y el desenfocamiento de imágenes en instrumentos ópticos [52]. En óptica ondulatoria la pregunta de anterior puede formularse como: ¿cuándo puede el instrumento óptico ser bien descrito por la óptica geométrica y cuándo se necesita usar una descripción óptico ondulatoria?

La evolución temporal en la mecánica clásica es una transformación canónica generada por la función Hamiltoniana $h(p, x)$ [17, 20],

$$\dot{x} = \{x, h\}, \quad \dot{p} = \{p, h\}, \quad (4.2)$$

donde

$$\{f, h\} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial h}{\partial x}$$

es el paréntesis de Poisson y \dot{f} indica la derivada total respecto al tiempo. La evolución mecánica cuántica se describe por la transformación unitaria generada por el operador Hamiltoniano auto-adjunto H a través de [53],

$$i\dot{X} = [X, H], \quad i\dot{P} = [P, H], \quad (4.3)$$

donde $[A, B] = AB - BA$ es el conmutador². La transformación unitaria generada puede escribirse, tanto en la mecánica clásica como en la mecánica cuántica, en la forma exponencial $U(t) = \exp(-itH)$, donde t es el parámetro de la transformación³.

4.3 Funciones de Wigner.

Así como la función de onda es central para el tratamiento a la Schrödinger de la mecánica cuántica, así la función de Wigner [54] juega un papel clave en la representación de espacio-fase de la mecánica cuántica. La importancia de la función de Wigner radica en que es una función tanto de las variables de posición como de momento y ha probado ser muy útil para estudiar el paso de la mecánica cuántica a la clásica y establecer correcciones cuánticas a los resultados clásicos [55].

²Denotaremos los operadores por mayúsculas y las variables clásicas por minúsculas.

³En este caso corresponde al tiempo, pero en óptica geométrica y ondulatoria se identifica con la distancia sobre el eje óptico.

Una manera útil de definir la función de Wigner para estados puros descritos por una función de onda arbitraria $\Psi(x; t)$ es [54]

$$W(x, p; t) \equiv 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{2ipr} \Psi^*(x+r; t) \Psi(x-r; t) dr, \quad (4.4)$$

o en la representación de momentos,

$$W(x, p; t) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2ixr} \tilde{\Psi}^*(p+r; t) \tilde{\Psi}(p-r; t) dr,$$

donde $\hbar = 1$. Es decir, comparando con la Ec. (3.5), la función de Wigner no es más que la transformada de Fourier inversa de la función de densidad

$$G(x, r; t) = \Psi^*(x+r; t) \Psi(x-r; t).$$

Notemos que $\Psi(x; t)$ y $\tilde{\Psi}(p; t)$ son soluciones de la ecuación de Schrödinger en las representaciones de coordenadas y momento, respectivamente.

Frecuentemente se utiliza otra normalización [50] que difiere de la Ec. (4.4) por el factor $1/2\pi$. Nosotros incluimos este factor en la definición del elemento de volumen del espacio fase, $dp dx/2\pi$.

Para estados mezclados, la función de Wigner es

$$W(x, p; t) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2ipr} \rho(x+r, x-r) dr,$$

donde ρ es la función de densidad del estado mezclado.

La integral de la función de Wigner Ec. (4.4) sobre p , nos da la distribución de probabilidad en x [50],

$$|\Psi(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W(x, p)}{2\pi} dp,$$

mientras que la integral sobre x de la Ec. (4.4) nos da la probabilidad de que las coordenadas de momento tomen el valor p ,

$$|\tilde{\Psi}(p)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W(x, p)}{2\pi} dx,$$

además, se cumple la condición de normalización

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(x, p) \frac{dx dp}{2\pi} = 1.$$

Moyal [56] utiliza una definición alternativa de la función de Wigner la cual es más útil para determinar algunas de sus propiedades⁴:

$$W(x, p) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dr e^{-i(kx+rp)} \langle \Psi | e^{i(kX+rp)} | \Psi \rangle, \quad (4.5)$$

donde X y P son los operadores de posición y momento que satisfacen $[X, P] = i$.

Royer [57] interpreta a la función de Wigner como el valor esperado del operador de paridad alrededor del punto x, p en el espacio fase. Esto equivale a afirmar que la función de Wigner es proporcional al traslape de Ψ con su imagen especular alrededor de x, p , lo cual es una medida de que tanto Ψ esta "centrada" respecto a x, p .

Usando la propiedad anterior, es claro que la función de Wigner es satisfice

$$\langle \Psi | \phi \rangle^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\Psi}(x, p; t) W_{\phi}(x, p; t) \frac{dx dp}{2\pi},$$

de donde se concluye que la función de Wigner puede tomar valores negativos, por lo cual no es una distribución de probabilidad en el sentido usual. De hecho corresponde a lo que en la literatura se conoce como distribución de cuasiprobabilidad.

Además es fácil probar que esta acotada [57]

$$-2 \leq W(x, p) \leq 2.$$

Otra propiedad de esta función es

$$\langle \{P^n X^m\}_W \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p^n x^m W(x, p; t) \frac{dx dp}{2\pi},$$

donde:

$$\{P^n X^m\}_W = i^{n-m} \left. \frac{\partial^{m+n}}{\partial^n v \partial^m u} \exp[-i(vp - ux)] \right|_{u=v=0}$$

es el ordenamiento de Weyl [39].

En el apéndice F reproducimos el programa que usamos para calcular la función de Wigner de un arreglo arbitrario de datos $(x, \Psi(x))$. Con este programa se produjeron todas las figuras de este capítulo.

En particular, para estados coherentes generalizados descritos por funciones Gaussianas como la Ec. (3.1), la función de Wigner es:

$$W(x, p) = 2 \exp \left\{ -\frac{(x - \bar{x})^2}{w_1} - \frac{|w|^2}{w_1} (p - \bar{p})^2 + \frac{2w_2}{w_1} (x - \bar{x})(p - \bar{p}) \right\}, \quad (4.6)$$

⁴Esta definición es equivalente a la dada en la Ec. (4.4).

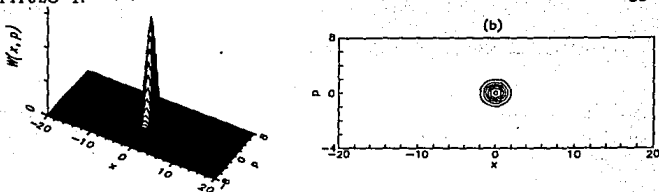


Figura 4.1: (a) Función de Wigner $W(x,p)$ de una Gaussiana coherente ($w = 1 \text{ cm}^2$) como función de la posición x y del momento p , (b) Curvas de nivel de $W(x,p)$ en el espacio fase.

es una función Gaussiana tridimensional, con centro en \bar{x} y ancho $\sqrt{w_1}$ en las coordenadas, y en momentos tiene centro en \bar{p} y ancho $|w|/\sqrt{w_1}$, su inclinación es $\arctan(2w_2/w_1)$ y alcanza su valor máximo 2 en el origen ($x = 0, p = 0$).

En la Fig. 4.1 mostramos la función de Wigner dada en la Ec. (4.6) como función de la posición x y del momento p , así como las curvas de nivel en el espacio fase con intervalos de altura de 0.2, para una Gaussiana coherente ($w = 1 \text{ cm}^2$). En la figura vemos que las curvas de nivel no son más que círculos en el espacio fase.

4.4 Transformaciones canónicas lineales.

Los operadores X y P generan translaciones rígidas del espacio fase. Las transformaciones canónicas lineales [35] son generadas por Hamiltonianos polinomiales de segundo grado en X y P , es decir, por combinaciones lineales de los operadores

$$P^2, (PX + XP)/2, X^2. \quad (4.7)$$

Estos operadores son importantes en óptica ondulatoria porque describen sistemas paraxiales y en óptica cuántica, divisores de haz, interferómetros, amplificadores lineales, etc.

Los Hamiltonianos de las Ecs. (4.7) conducen a ecuaciones de movimiento lineal que son idénticas en la mecánica clásica y cuántica.

Entre las distintas distribuciones de cuasiprobabilidad propuestas en la literatura [58, 59], sólo hay una para la cual la evolución cuántica lineal coincide con la evolución clásica (dada por la Ec. (4.1)) [60], esta es la función de Wigner, Ec. (4.4). De hecho, el requisito de *covarianza* entre las transformaciones canónicas cuánticas y clásicas lineales puede servir como una definición alternativa de la función de Wigner [61].

Por ejemplo, la función Q [62], definida como

$$Q(x, p) = |\langle \alpha | \Psi \rangle|^2$$

donde $|\alpha\rangle$ es un estado coherente con el parámetro $\alpha = (x + ip)/\sqrt{2}$, se comporta como una distribución clásica (Ec. 4.1) bajo traslaciones y rotaciones del espacio fase, pero tiene una ley de transformación diferente bajo la acción del operador de compresión, ver, e.g., [63].

Bajo dinámica lineal, la solución clásica determina completamente la cuántica, de manera que uno puede reducir el problema de resolver la ecuación de onda a la solución de las ecuaciones de Hamilton clásicas correspondientes. De hecho, uno puede tomar la función de Wigner describiendo el estado inicial, encontrar su solución de la Ec. (4.1) y si es necesario reconstruir la distribución marginal. Nos referiremos a la distribución de probabilidad clásica Ec. (4.1) que evoluciona de las condiciones iniciales $W(p_0, x_0; t=0)$ como la función de Wigner "clásica". Debido a que las funciones de Wigner clásica y cuántica evolucionan de manera idéntica bajo dinámica lineal, entendemos que la función de Wigner da la descripción común más cercana de la dinámica clásica y cuántica.

4.4.1 Acción del operador X^2 .

Como vimos en el capítulo anterior $X^2/2$ corresponde a la acción de un lente delgado.

Clásicamente, el operador X^2 transforma linealmente el espacio como

$$\begin{aligned}x &= x_0, \\p &= p_0 - x t,\end{aligned}$$

por lo que la función de Wigner clásica asociada a esta transformación es

$$W_{X^2}(x, p, t) = W(x, p + xt),$$

en particular para un haz Gaussiano,

$$W_{X^2}(x, p, t) = 2 \exp \left[-\frac{(x - \bar{x})^2 + |w|^2(p - \bar{p} + xt)^2}{w_1} + \frac{2w_2(x - \bar{x})(p - \bar{p} + xt)}{w_1} \right], \quad (4.8)$$

En la Fig. 4.2 se muestra la función de Wigner para una Gaussiana coherente centrada en el origen para diferentes valores del parámetro de evolución. En este caso las curvas de nivel son elipses que se alargan en p conforme t aumenta conservando el área dentro de la curva de nivel $W(x, t) = \text{constante}$.

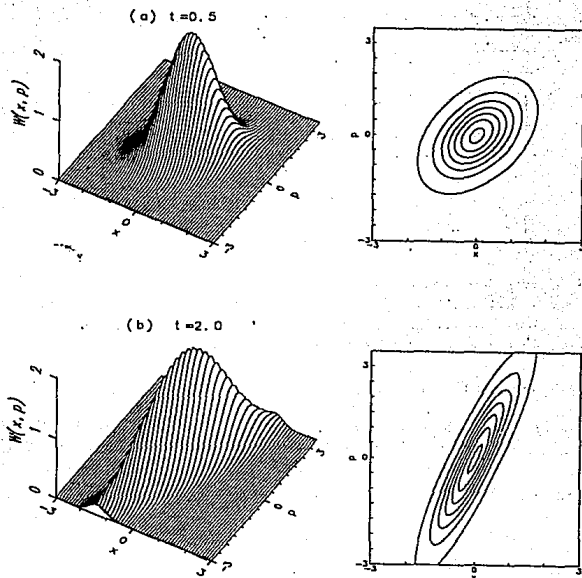


Figura 4.2: Función de Wigner asociada a una Gaussiana bajo la acción del operador X^2 para (a) $t=0.5$, (b) $t=2.0$. La Gaussiana inicial (en $t=0$) está centrada en el origen y tiene un ancho $w = 1$. Se muestra la gráfica tridimensional de la función de Wigner y las curvas de nivel en el espacio fase para intervalos de altura de 0.1 a 1.9 espaciados 0.3.

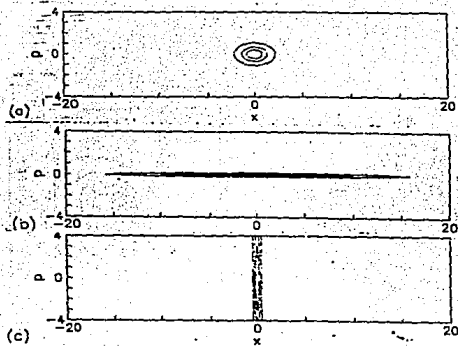


Figura 4.3: Curvas de nivel en el espacio fase de la función de Wigner asociada a una Gaussiana bajo la acción del operador $\{XP\}$ para (a) $t = 0.5$, (b) $t = 2.0$ y (c) $t = -2.0$. La Gaussiana inicial está centrada en el origen y tiene un ancho $w = 1$. Los intervalos de altura van de 0.1 a 1.9 separados 0.3.

4.4.2 Acción del operador $\{XP\}$.

Como vimos en el capítulo anterior $(PX + XP)/2$ comprime el espacio fase a lo largo de una coordenada y lo alarga en la otra; transforma un oscilador armónico en otro con frecuencia diferente.

Clásicamente, $\{XP\}$ transforma el espacio como

$$\begin{aligned}x &= x_0 e^t, \\p &= p_0 e^{-t},\end{aligned}$$

por lo que la función de Wigner clásica asociada a esta transformación es

$$W_{\{XP\}}(x, p, t) = W(xe^{-t}, pe^t),$$

en particular para un haz Gaussiano,

$$W_{\{XP\}}(x, p, t) = 2 \exp \left[-\frac{(x - \bar{x}e^t)^2}{w_1 e^{2t}} - \frac{|w|^2 (p - \bar{p}e^{-t})^2}{w_1 e^{-2t}} + \frac{2w_2 (x - \bar{x}e^t)(p - \bar{p}e^{-t})}{w_1} \right]. \quad (4.9)$$

En la Fig. 4.3 se muestra la función de Wigner para una Gaussiana coherente centrada en el origen para diferentes valores del parámetro de evolución t . Como vemos, conforme t aumenta, la función de Wigner se comprime en el eje p alargándose en x de forma que se conserva el área dentro de la curva de nivel $W(x, p) = cte$. Para $-t$ el comportamiento es el mismo que si rotáramos $\pi/2$ la gráfica para t .

4.4.3 Acción del operador $P^2/2$.

En óptica ondulatoria paraxial $P^2/2$ genera la propagación libre de rayos de luz en un medio homogéneo.

Clásicamente, $P^2/2$ transforma el espacio linealmente mediante

$$\begin{aligned}x &= x_0 + p_0 t, \\p &= p_0,\end{aligned}$$

por lo que la función de Wigner asociada a esta transformación es

$$W_{P^2}(x, p, t) = W(x - pt, p),$$

en particular para un haz Gaussiano,

$$W_{P^2}(x, p, t) = 2 \exp \left[-\frac{(x - \bar{x} - \bar{p}t)^2 + |w + it|^2(p - \bar{p})^2}{w_1} + \frac{2(x - \bar{x} - \bar{p}t)(p - \bar{p})(w_2 + t)}{w_1} \right]. \quad (4.10)$$

En la Fig. 4.4 se muestra la función de Wigner para una Gaussiana coherente centrada en el origen para diferentes valores del parámetro de evolución t . Como vemos, en este caso las curvas de nivel de la función de Wigner son elipses que, conforme t aumenta, se alargan en x conservando el área dentro de la curva de nivel $W(x, p) = cte$. El centro de las elipses es (\bar{x}, \bar{p}) y su inclinación depende de w . Estas gráficas son las mismas de W_X (Fig. 4.2) si intercambiamos t por $-t$ y p por x .

4.4.4 Acción del operador $P^2/2 + X^2/2$.

Este operador corresponde al Hamiltoniano de oscilador armónico, $P^2/2 + \omega^2 X^2/2$, el cual genera rotaciones rígidas del espacio fase alrededor del origen. La rotación por un ángulo de $\pi/2$ es justamente la transformación de Fourier. Para librarnos de ω necesitamos hacer el cambio de variables $X \mapsto X/\sqrt{\omega}$, $P \mapsto \sqrt{\omega}P$ y $t \mapsto t/\omega$.

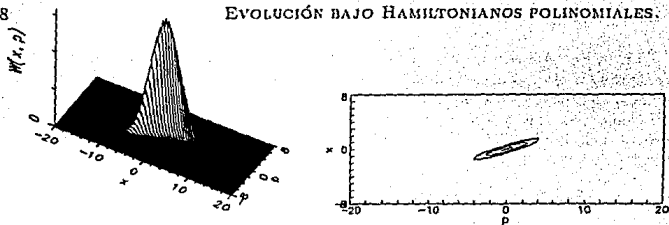


Figura 4.4: Función de Wigner asociada a una Gaussiana bajo la acción del operador P^2 para $t=0.5$. Se muestra la gráfica tridimensional de la función de Wigner y las curvas de nivel para intervalos de altura de 0.1 a 1.9 con intervalos de 0.3. La Gaussiana inicial está centrada en el origen y tiene un ancho $w = 1$.

Clásicamente este operador transforma el espacio como

$$x = x_0 \cos t + p_0 \sin t, \quad p = -x_0 \sin t + p_0 \cos t,$$

por lo que la función de Wigner será

$$W_{(p^2+x^2)/2}(x, p; t) = W(x \cos t - p \sin t, x \sin t + p \cos t).$$

4.5 Transformaciones no lineales.

Ahora consideraremos las transformaciones canónicas no lineales generadas por los polinomios de cuarto grado en X y P . Tales Hamiltonianos son combinaciones lineales de los operadores

$$P^4, \{XP^3\}, \{X^2P^2\}_W, \{X^3P\}, X^4. \quad (4.11)$$

Un ejemplo particularmente importante de Hamiltonianos polinomiales de cuarto grado en óptica cuántica es

$$H = \frac{1}{2}(P^2 + \omega^2 X^2) + (\chi/4\omega^2)(P^2 + \omega^2 X^2)^2,$$

el cual describe el medio de Kerr óptico en las variables X y P de un solo modo del campo electromagnético.

En el caso no lineal, la solución clásica no determina la dinámica cuántica dado que los productos de P 's y X 's entran en las ecuaciones de movimiento de

Heisenberg. El valor medio de estos productos (e.g., $\langle\{PX\}(t)\rangle$) son variables adicionales que están ausentes en las ecuaciones clásicas. Por lo tanto, las funciones de Wigner clásica y cuántica evolucionarán de distinta manera.

Supondremos que el estado inicial del sistema está dado por una función de onda Gaussiana en la representación de coordenadas, Ec. (3.13). Como hemos visto, la función de onda en la representación de momentos y también la función de Wigner son Gaussianas. Bajo evolución lineal las Gaussianas continúan siendo Gaussianas tal vez de parámetros distintos. Dado que la evolución lineal es la misma en los casos cuántico y clásico, debemos concluir que los estados coherentes generalizados (ECG) son estados semiclásicos⁵. Se sabe que los únicos estados que tienen funciones de Wigner positivas en todo el plano son los ECG [48]. Bajo evolución cuántica *no lineal*, la Gaussiana inicial pierde su forma y su función de Wigner tomará valores negativos en algunas regiones del espacio fase. Es de esperar que las fluctuaciones cuánticas expandan el estado inicial coherente.

Podemos resumir la imagen general como sigue: La función de Wigner Gaussiana inicial es una "montaña" en el espacio fase. Bajo evolución lineal, tanto clásica como cuántica, se mueve, rota y comprime preservando el área dentro de una curva de nivel dada. La evolución no lineal clásica también puede deformar la apariencia de la montaña manteniendo el área constante. Pero la evolución no lineal cuántica, aunque mueve la cima de la montaña de acuerdo con la imagen clásica muestra un nuevo fenómeno: la aparición de "oscilaciones cuánticas" en la región cóncava de las curvas de nivel de la montaña. Este es un fenómeno puramente cuántico y, como veremos, no tiene contraparte clásica. Bajo evolución no lineal es de esperar que el área ya no se conserve, pero en este caso ya no es claro como definir el elemento de volumen en el espacio fase. Por supuesto la contraparte cuántica del concepto de conservación del volumen fase clásico sería muy útil. Esto nos lleva a plantear en óptica cuántica la pregunta *¿cuál es la manera más natural de describir fluctuaciones cuánticas?*

Mientras consideremos transformaciones lineales se conoce la respuesta: uno puede usar el lado izquierdo de la relación de incertidumbre de Schrödinger-Robertson [64],

$$\delta = \sigma_{xx}\sigma_{pp} - \sigma_{xp}^2 \geq \frac{1}{4}, \quad (4.12)$$

la cual vimos en el capítulo anterior. La igualdad en la Ec. (4.12) se da para estados Gaussianos puros. Dodonov y Man'ko notaron que el valor δ en la Ec. (4.12) es invariante bajo transformaciones canónicas lineales tanto en mecánica

⁵Notemos que los ECG incluyen estados comprimidos a pesar de que la compresión usualmente se considera como un atributo no clásico. Consideramos a los ECG como estados semiclásicos porque estamos interesados en el comportamiento dinámico, i.e., en las propiedades de transformación de los estados y todos los ECG se transforman entre sí por transformaciones lineales que son esencialmente semiclásicas.

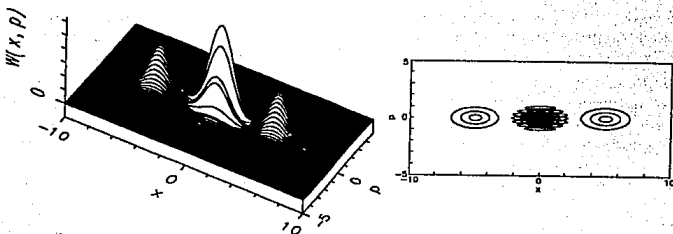


Figura 4.5: Función de Wigner para un estado de gato de Schrödinger. Se muestra la gráfica tridimensional de la función de Wigner y las curvas de nivel para intervalos de altura de 0.1 a 1.9 con intervalos de 0.3.

clásica como cuántica [34]. La dinámica lineal no conduce a ningún crecimiento extra de las fluctuaciones cuánticas sobre las clásicas.

Sin embargo, bajo transformaciones no lineales, δ no es un invariante aún en la mecánica clásica, por lo que δ no puede describir en general un elemento de volumen en el espacio fase ya que este se conservaría bajo cualquier transformación canónica clásica, lineal o no lineal. Entonces, el parámetro de Dodonov-Man'ko δ puede utilizarse mejor para caracterizar el "grado de no linealidad" del sistema, en lugar de su "grado de no clasicidad" como se menciona en la Ref. [65]. De hecho este parámetro es muy útil para describir el comportamiento no lineal a tiempos cortos, aún cuando no sienten efectos globales (tales como los estados de gato de Schrödinger) que aparecen a tiempos largos.

Este es el mejor momento para mencionar algunas propiedades de los estados de gato de Schrödinger. La distribución de cuasiprobabilidad para un estado coherente es una Gaussiana centrada en el punto (\bar{x}, \bar{p}) del plano fase. La superposición cuántica de dos estados coherentes con coordenadas y momentos macroscópicamente distinguibles (\bar{x}_1, \bar{p}_1) , (\bar{x}_2, \bar{p}_2) es un ejemplo de un estado de gato de Schrödinger [66]. Cualquier distribución de cuasiprobabilidad es diferente de cero en la vecindad de los puntos (\bar{x}_1, \bar{p}_1) y (\bar{x}_2, \bar{p}_2) . Más aún, la función de Wigner también muestra oscilaciones rápidas en el punto medio $(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)/2$, $(\bar{p}_1 + \bar{p}_2)/2$, que revelan la superposición coherente de los estados (ver Fig. 4.5). En una mezcla estadística de los mismos estados, no hay oscilaciones. Las incertidumbres en coordenadas y momentos para el estado de gato tienen valores del orden de $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$ y $|\bar{p}_1 - \bar{p}_2|$. El parámetro δ en la Ec. (4.12) no toma en cuenta que la partícula sólo puede estar en la vecindad de los puntos (\bar{x}_1, \bar{p}_1) , (\bar{x}_2, \bar{p}_2) , y nunca entre ellos.

La dificultad para describir fluctuaciones cuánticas para estados de gato de

Schrödinger puede salvarse usando la *entropía* como una medida de fluctuación [67]. Dado que no hay una distribución verdadera en el espacio fase cuántico, Wehrl [68] propuso calcular la entropía utilizando la función Q que es positiva siempre,

$$S_Q = - \int Q \log Q \frac{dp dx}{2\pi}. \quad (4.13)$$

La entropía de Wehrl tiene información más precisa sobre el volumen de espacio fase ocupado por el estado cuántico; por lo que es especialmente conveniente para la descripción de los estados de gato de Schrödinger [69]. En particular, si el estado de gato consiste de M componentes bien separados, entonces

$$S_Q = S_0 + \log M,$$

donde S_0 es la entropía de un solo componente. Por lo tanto, la entropía de Wehrl es un buen candidato para describir el volumen de espacio fase ocupado por el estado cuántico. Desafortunadamente, S_Q no es invariante bajo transformaciones de compresión⁶ [70], la entropía de Wehrl sobreestima las fluctuaciones cuánticas de estados comprimidos.

Buscamos una cantidad que pueda servir para separar entre la dinámica clásica y cuántica y, desde el punto de vista de aplicaciones, que determine si la aproximación semiclassical es buena o no. Recordando que las transformaciones lineales cambian la función de Wigner covariantemente en dinámica cuántica y clásica, podemos concluir que los aspectos específicamente cuánticos de un sistema son debidos a la parte no lineal de la dinámica, la cual transforma un estado semiclassical inicial en uno "altamente cuántico". Entonces, el parámetro que distingue entre la dinámica clásica y la cuántica también debe separar entre estados semiclassicals y "altamente cuánticos" [71].

Tendríamos una medida de la clasicidad de los estados que tenga todas las propiedades deseadas si pudiéramos calcular la entropía usando la función de Wigner como una distribución de probabilidad. Sin embargo esto es imposible dado que la función de Wigner puede tomar valores negativos⁷. Más aún, estos valores negativos son una manifestación importante de la no clasicidad del estado. Podemos considerar otras funciones monotónicas en lugar del logaritmo estudiando el comportamiento de integrales del tipo [46]

$$I = \int f(W) \frac{dp dx}{2\pi}, \quad (4.14)$$

⁶Esto es debido al "real" comportamiento de la función Q bajo compresión

⁷La entropía está determinada como el valor medio del logaritmo de la distribución, el cual no está definido para valores negativos.

donde $f(W)$ es cualquier función monotónica de la función de Wigner⁸. Es importante notar que esta integral es invariante en el caso clásico bajo cualquier transformación canónica, lineal o no lineal. Para verificar esto cambiamos las variables $x, p \mapsto x_0(x, p, t), p_0(x, p, t)$, donde x_0, p_0 es el punto inicial de la trayectoria clásica que pasa por el punto $x(t), p(t)$ al tiempo t . La invarianza de la integral (4.14) se sigue de la conservación del volumen de espacio fase bajo transformaciones canónicas⁹. En el caso cuántico, las integrales (4.14) son invariantes bajo transformaciones lineales.

Las funciones monotónicas más simples son las potencias W^k , en cuyo caso, las integrales (4.14) son los momentos de la función de Wigner:

$$I_k(t) = \frac{k}{2^{k-1}} \int W^k(p, x; t) \frac{dp dx}{2\pi}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.15)$$

Las cantidades correspondientes para distribuciones de probabilidad verdaderas se conocen como "entropías α " [72]. Estas obedecen algunas desigualdades que reflejan las relaciones de incertidumbre [73] (cf. Ref. [74]).

De la condición de normalización se sigue que $I_1 = 1$. Además, para cualquier estado puro, $I_2 = 1$. Para estados mezclados descritos por la matriz de densidad ρ , el segundo momento da la pureza del estado $I_2 = \text{trace}(\rho^2)$ [48, 75]. Por lo anterior, sólo los momentos $I_k, k \geq 3$ contienen información no trivial. Es fácil checar que nuestra normalización implica que para cualquier estado Gaussiano puro $I_k = 1$. La evolución lineal cuántica preserva los valores iniciales de los momentos. Sin embargo, la evolución cuántica no lineal del estado Gaussiano inicial puede disminuir los valores de los momentos I_k para $k \geq 3$.

Se pueden escribir los momentos (4.15) directamente en términos de las funciones de onda en la representación de coordenadas o momentos (sin usar la función de Wigner). De hecho, sustituyendo la Ec. (4.4) en la Ec. (4.15) e integrando sobre p tenemos,

$$I_k(t) = k \int dx dr_1 \dots dr_{k-1} \prod_{j=1}^{k-1} \Psi^*(x+r_j) \Psi(x-r_j) \\ \Psi^*(x-r_1 - \dots - r_{k-1}) \Psi(x+r_1 + \dots + r_{k-1}).$$

Esta ecuación (y otra similar en términos de la función de onda en la representación

⁸La definición de entropía usa la función logaritmo para tener una cantidad aditiva para sistemas que consten de subsistemas no interactuantes. Como trabajamos con un solo grado de libertad que no pueden separarse en subsistemas, podemos librarnos de la necesidad de una propiedad aditiva.

⁹No podemos introducir en el integrando de (4.14) ninguna dependencia adicional de x y p distinta de la contenida en la función de Wigner ya que esto destruiría la invarianza bajo transformaciones canónicas clásicas.

de momentos) pueden ser útiles en el estudio de las propiedades analíticas de los momentos.

En lo que resta de este capítulo calcularemos numéricamente los momentos I_k para $k = 3, 4, 5, 6$ para distintos ejemplos de dinámica no lineal gobernada por Hamiltonianos del tipo (4.11) y mostraremos que de hecho estos momentos tienen información importante que se puede usar para distinguir la dinámica semiclásica de la dinámica cuántica, y los estados semiclásicos de los cuánticos. Más aún, se pueden usar para detectar gatos de Schrödinger.

4.6 Aberraciones ópticas.

En esta sección utilizaremos la terminología de la óptica ondulatoria. La teoría de Lie de aberraciones de imágenes geométricas [52] identifica los operadores (4.11) con las aberraciones de tercer orden en un medio óptico bidimensional. La distribución marginal $|\Psi(x)|^2$ en la Ec. (6) es la intensidad de la luz en una pantalla unidimensional de coordenada x . La designación usual de z para la coordenada sobre el eje óptico es reemplazada por el parámetro de evolución t . Investigaremos la acción de aberraciones sobre un estado inicial coherente vacío i.e., una Gaussiana de ancho 1 centrada en el origen del espacio fase.

4.6.1 Aberración esférica P^4 .

En óptica ondulatoria corresponde a la primera corrección a la propagación libre paraxial (aberración esférica). También describe la primera corrección relativista a la ecuación de Schrödinger.

En las Figs. 4.6 mostramos la evolución clásica y cuántica de un estado coherente vacío inicial para $t = 0.5$ y $t = 2.0$. Los estados resultantes ya no son Gaussianos, pero se representa por una montaña que se expande rápidamente en x . La diferencia entre el caso clásico y el cuántico se nota en las oscilaciones adicionales que aparecen en la función de Wigner cuántica, las cuales se ven en las Figs. 4.6a-d y están ausentes en las Figs. 4.6e,f. En las curvas de nivel se observan como pequeñas islas que se forman en la parte cóncava de la montaña principal; su área es considerablemente menor que el área del estado vacío. A este fenómeno le llamaremos "oscilaciones cuánticas" [45]. La presencia de estas "oscilaciones cuánticas" en el espacio fase claramente indican el carácter cuántico de la evolución. Tenemos un estado "más cuántico" cuando las oscilaciones son más intensas.

El comportamiento de los momentos, mostrado en la Fig. 4.7 es bastante plano. Hay un decrecimiento en todos los momentos mayores al segundo. La constancia de I_2 es una prueba numérica de la confiabilidad de los cálculos. La figura indica

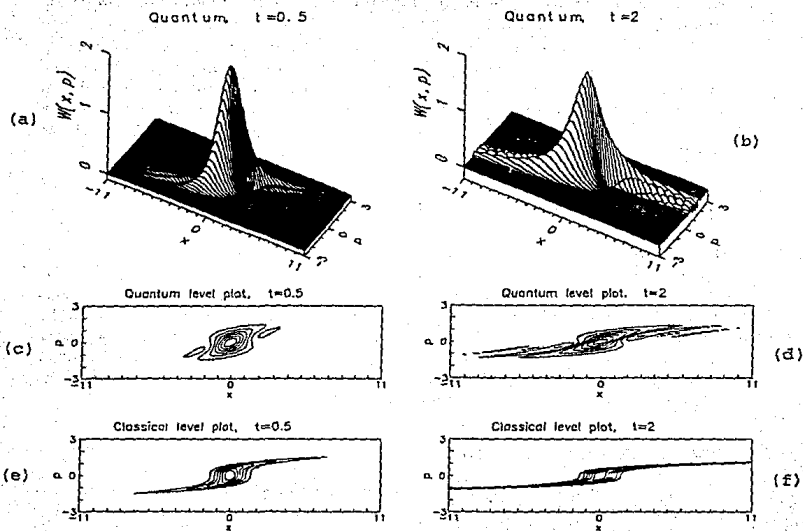


Figura 4.6: Evolución de las funciones de Wigner clásicas y cuánticas para el Hamiltoniano P^4 (aberración esférica). (a,b) Gráficas tridimensionales de las funciones de Wigner cuántica para $t = 0.5$ y $t = 2.0$; (c,d) curvas de nivel de las mismas funciones de Wigner; (e,f) curvas de nivel de las funciones de Wigner clásicas para los mismos instantes de tiempo.

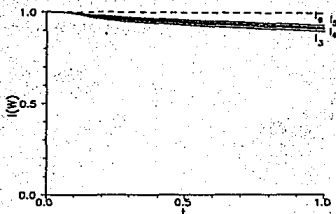


Figura 4.7: Evolución temporal de los momentos de las funciones de Wigner cuánticas para el Hamiltoniano P^4 . I_2 (línea punteada) se muestra como una prueba de nuestro cálculo numérico. La disminución de los momentos I_k para $k \geq 3$ revela la diferencia entre la dinámica clásica y cuántica.

que los estados semiclásicos continúan siendo una buena aproximación a los estados cuánticos.

4.6.2 Coma $\{XP^3\}$.

El generador de esta transformación es

$$H = \{XP^3\} = P^3 X + i \frac{3}{2} P^2.$$

En óptica este Hamiltoniano corresponde a la aberración llamada *coma*. También es la primera aproximación al fenómeno de coma relativista [76].

La ecuación de Schrödinger en la representación de momentos es la ecuación diferencial de primer orden

$$i\partial_t \tilde{\Psi}(p, t) = i(p^3 \partial_p + \frac{3}{2} p^2) \tilde{\Psi}(p, t).$$

cuya solución exacta la encontramos en el capítulo anterior,

$$\tilde{\Psi}(p, t) = \frac{1}{(1 - 2p^2 t)^{3/4}} \tilde{\Psi} \left(\frac{p}{\sqrt{1 - 2p^2 t}}, 0 \right),$$

siendo $\tilde{\Psi}(p, 0) = \pi^{-1/4} \exp[-p^2/2]$ la condición inicial. La función de Wigner puede calcularse numéricamente de la Ec. (4.4) para producir las Figs. 4.8a-f. Se observa un corrimiento simétrico de la montaña y compresión en momento. En el caso cuántico nuevamente tenemos "oscilaciones cuánticas" en la parte cóncava de la montaña principal.

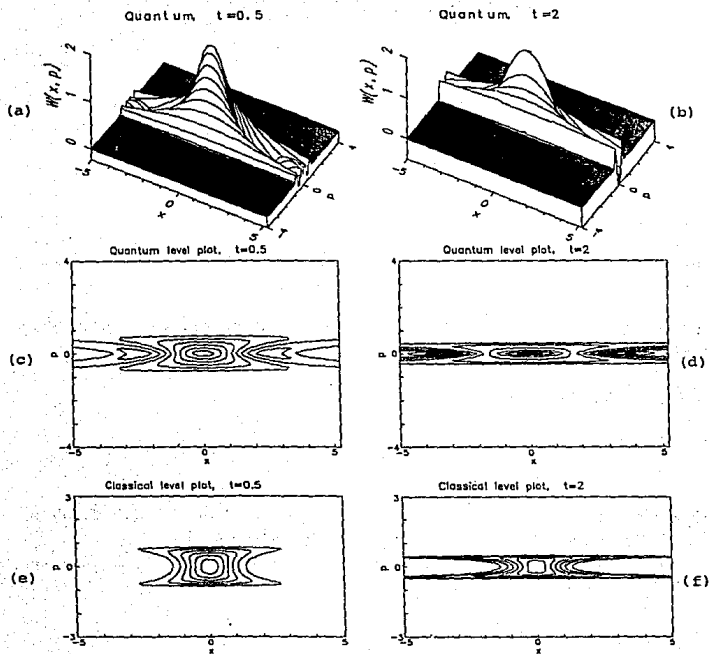


Figura 4.8: Igual que en la Fig. 3.6 para el Hamiltoniano $\{X^2 P^3\}$ (coma).

Las soluciones a las ecuaciones de movimiento clásicas son

$$x_0 = x(1 - 2p^2 t)^{3/2}, \quad p_0 = \frac{p}{\sqrt{1 - 2p^2 t}},$$

donde la trayectoria $x = x(t)$, $p = p(t)$ empieza en el punto x_0, p_0 . Notemos que todo el rango de momento inicial $-\infty < p_0 < \infty$ se mapea en el intervalo $\{|p(t)| < 1/\sqrt{2t}\}$; no hay puntos más allá de este intervalo. En el nivel cuántico, la función de Wigner al tiempo t es cero fuera de la banda $|p| < 1/\sqrt{2t}$ y la condición de normalización involucra la integración únicamente sobre esta banda. Esta compresión en la variable de momento corresponde a la compresión hacia el frente de las direcciones de los rayos bajo coma relativista en la pantalla en óptica geométrica [76].

4.6.3 Astigmatismo $\{X^2 P^2\}_W$.

El astigmatismo puede caracterizarse clásicamente como una *rotación* hiperbólica diferencial del espacio fase.

Como vimos en el capítulo anterior, el Hamiltoniano en la representación de coordenadas tiene la forma

$$H = \{X^2 P^2\}_W = -x^2 \partial_x^2 - 2x \partial_x - \frac{1}{2}.$$

Se puede encontrar exactamente la función de Green para este Hamiltoniano; sin embargo, es más conveniente resolver numéricamente la ecuación diferencial para la función de onda (ver apéndice C) y entonces encontrar la función de Wigner por integración (ver apéndice F).

En las Figs. 4.9a,b vemos una montaña simétrica que se desarrolla de nuestro estado coherente vacío inicial para $t = 0.1$ y $t = 0.5$. En el caso cuántico tenemos "oscilaciones cuánticas" mucho más intensas en la parte cóncava de la montaña principal. En las Figs. 4.9c,d vemos entre otras las curvas de nivel cero, las cuales, debido a la forma de las oscilaciones cuánticas aparecen como si fueran hipérbolas. Los valores de los momentos que se muestran en la Fig. 4.10, decaen proporcionalmente más rápido que en el caso de aberración esférica y coma. (Notemos que estas figuras también están calculadas para tiempos más cortos que los de las otras aberraciones).

4.6.4 Distorsión $\{X^3 P\}$.

Este operador en la representación de coordenadas toma la forma

$$\hat{H} = -i \left[x^3 \partial_x + \frac{3}{2} x^2 \right].$$

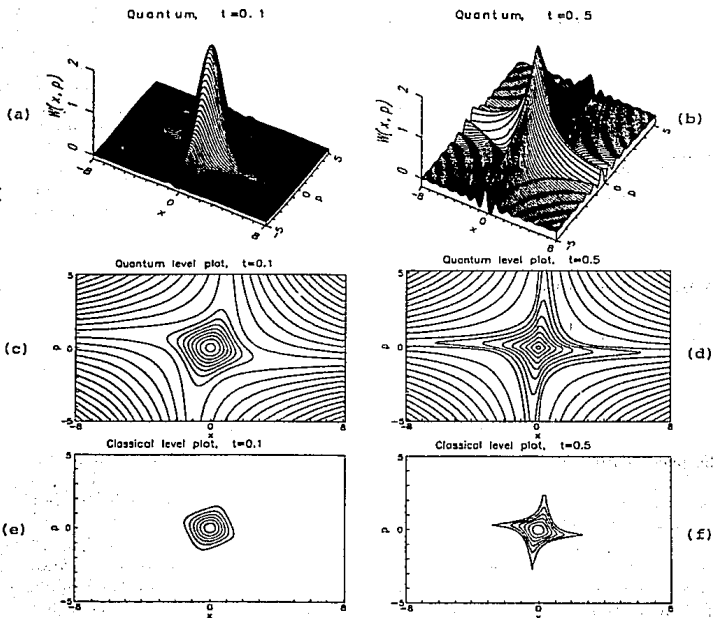


Figura 4.9: Evolución de las funciones de Wigner clásica y cuántica para el Hamiltoniano $\{X^2 P^2\}_W$ (astigmatismo). (a,b) Gráficas 3-dimensionales de las funciones de Wigner cuántica para $t = 0.1$ and $t = 0.5$; (c,d) curvas de nivel de las mismas funciones de Wigner cuánticas; (e,f) curvas de nivel de las funciones de Wigner clásicas para los mismos instantes de tiempo.

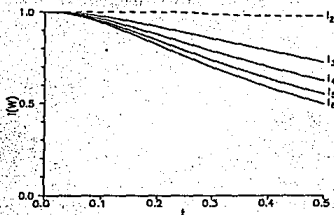


Figura 4.10: Lo mismo que en la Fig. 3.6 para el Hamiltoniano $\{X^2 P^2\}_W$ (astigmatismo).

La ecuación diferencial para distorsión en la representación de coordenadas tiene la misma forma que la ecuación para coma en la representación de momento si cambiamos t por $-t$. Coma y distorsión son conjugados de Fourier uno del otro [77] por lo que la evolución bajo distorsión corresponde a dinámica comática en reversa,

$$F(x, t) = \frac{1}{(1 + 2x^2 t)^{3/4}} F_0 \left(\frac{x}{\sqrt{1 + 2x^2 t}} \right).$$

Las funciones de Wigner clásica y cuántica se muestran en las Figs. 4.11a-f. Como vimos antes, coma comprime el espacio fase a lo largo del eje de momento, correspondientemente, la distorsión lo expandirá a lo largo del eje de coordenadas, como se ve de las trayectorias clásicas,

$$x = \frac{x_0}{\sqrt{1 - 2x_0^2 t}}, \quad p = p(1 - 2x_0^2 t)^{3/2}.$$

Estas trayectorias alcanzan infinito en un tiempo finito: en t , los puntos que inicialmente tienen coordenadas $|x_0| < 1/\sqrt{2t}$ continuarán en el plano finito, mientras que los puntos $x_0 = \pm 1/\sqrt{2t}$ se mapearán en infinito. Los puntos $|x_0| > 1/\sqrt{2t}$ desaparecerán del espacio fase clásico por lo que no contribuirán a la solución cuántica. Por lo tanto, no se conserva la normalización de la función de onda. Esta propiedad poco grata del Hamiltoniano de distorsión fue notada por Klauder [78]. Correspondientemente, los momentos I_1 e I_2 no son constantes en este caso. En la Fig. 4.12 mostramos los momentos para distorsión donde se observa claramente esta inconveniente propiedad.

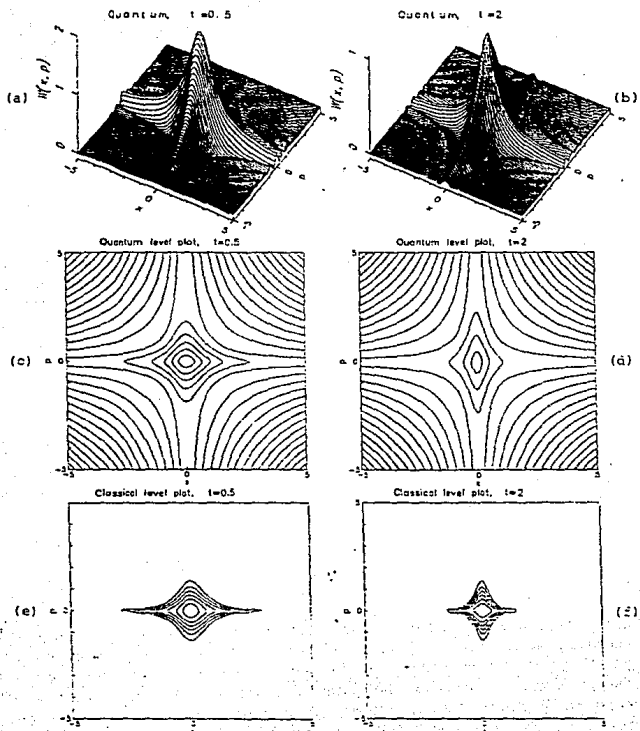


Figura 4.11: Lo mismo que la Fig. 3.6 para el Hamiltoniano $\{X^3P\}$ (distorsión).

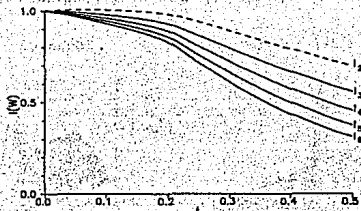


Figura 4.12: Lo mismo que en la Fig. 3.6 para el Hamiltoniano $\{X^3 P\}$ (distorsión).

4.6.5 Pocus X^4 .

Pocus es la transformada de Fourier de la aberración esférica: amplía el haz de rayos en momento y deja la coordenada de posición invariante, por lo cual no afecta la calidad de la imagen geométrica y no se incluye en la clasificación de Seidel tradicional [79]. Su único efecto es multiplicar la función de onda por una fase e^{itx^4} .

La evolución de la función de Wigner se puede encontrar de la aberración esférica por rotación de Fourier del plano fase o inversión del tiempo. Se muestra en las Figs. 4.13a-f para $t = 0.5$ y $t = 2$. Los momentos I_k son invariantes bajo esta transformación por lo que coinciden con los de la Fig. 4.7.

4.7 Medio de Kerr no lineal.

Un modelo exitoso de medios ópticos activos en los que la auto-interacción del campo tiene lugar es el medio de Kerr [42, 43, 80, 81, 82]. Su Hamiltoniano es un oscilador armónico que describe un solo modo cuantizado del campo electromagnético de frecuencia ω más un término de auto-interacción con una constante de acoplamiento χ [43]. Tiene la forma

$$H = \frac{1}{2}(P^2 + \omega^2 X^2) + \frac{1}{\omega^2} \chi (P^2 + \omega^2 X^2)^2. \quad (4.16)$$

En electrodinámica cuántica, el Hamiltoniano se escribe usualmente en términos del operador de número de fotones $\hat{n} = a^\dagger a$ como $H = \omega \hat{n} + \chi \hat{n}^2$ (donde ω es el corrimiento relacionado con la Ec. (4.16)). Es claro que el Hamiltoniano de oscilador armónico y el Hamiltoniano Kerr total tienen los mismos eigenvectores. El número de fotones se conserva pero hay una evolución no trivial del campo fase.

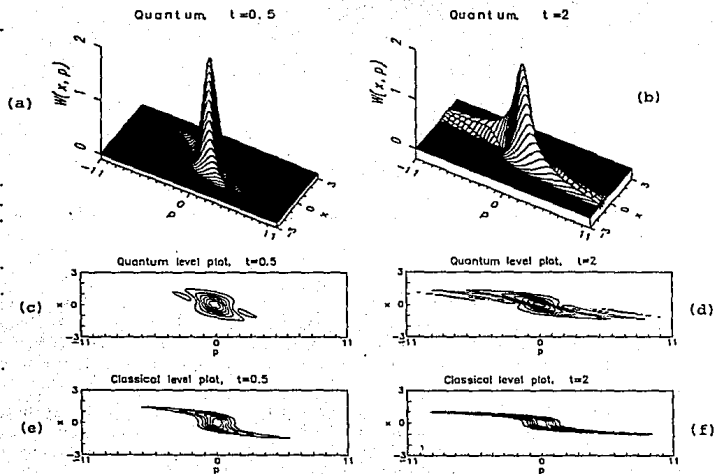


Figura 4.13: Igual que en la Fig. 3.6 para el Hamiltoniano X^4 (pocas).

En el apéndice G se reproduce el programa con el cual se calcularon los datos de las Figs. 4.14a-f donde se muestra la evolución temporal de la función de Wigner bajo el Hamiltoniano Kerr. La evolución correspondiente de los momentos está en la Fig. 4.15. En estas figuras tomamos $\chi = 1$. El primer término en el Hamiltoniano (4.16) produce una rotación rápida de las gráficas con frecuencia angular ω que no es importante, por esto trabajamos en la imagen de interacción que subtrae esta rotación.

Al principio del proceso, para t pequeña, $t = 0.02$, la función de Wigner Gaussiana inicial centrada en el punto $\bar{x} = \sqrt{2\bar{n}} \simeq 5.7$, $\bar{p} = 0$ ¹⁰, es estirada y rota en el plano fase (ver Fig. 4.14b); todos los momentos mostrados en las Fig. 4.15 están muy cerca de la unidad y el estado es aún casi semiclásico. Sin embargo, esta comprimido en una dirección definida en el plano fase.

Conforme el tiempo avanza (ver Fig. 4.14c), el estado del campo se estira, no a lo largo de una línea recta pero a lo largo de un círculo, extendiéndose en fase. Esto produce la forma de "luna creciente" de la distribución de cuasiprobabilidad. La deformación de la cima de la montaña continua siendo semiclásica. Sin embargo, la forma de la montaña esta lo suficientemente curvada para que aparezcan "oscilaciones cuánticas". Cuando los momentos I_k todavía no son muy pequeños, $I_k \sim 1$ (Fig. 4.15), estas ondas son débiles por lo que su contribución al volumen del espacio fase es pequeña. El área de la montaña aumenta lentamente mientras la dispersión angular crece rápidamente, de manera que esperamos una compresión de la amplitud radial. Esto ocurre un poco lejos de la dirección radial, pero puede transformarse en compresión de la amplitud si desplazamos el origen del plano fase de forma que lo tengamos en el centro de curvatura de la luna creciente. Físicamente esto se puede lograr colocando el medio Kerr no lineal dentro de uno de los brazos de un interferómetro Mach-Zehnder, como lo propusieron Kitagawa y Yamamoto [43]. De esta manera se puede alcanzar una fuerte compresión en las fluctuaciones del número de fotones¹¹. La compresión de amplitud de Kerr puede realizarse eligiendo como estado inicial un estado ya comprimido [82].

Cuando t avanza más (Fig. 4.14d), la amplitud angular se vuelve comparable con 2π y las "oscilaciones cuánticas" se hacen muy intensas volviéndose comparables a lo que resta de la luna creciente original (la montaña clásica) y ocupando todo el interior. Es claro, que la razón de estas oscilaciones es la auto-interferencia en el espacio fase. Podemos decir que distintas partes de la distribución de cuasiprobabilidad crean franjas de interferencia cuando se reúnen entre sí.

En algunos instantes de tiempo la auto-interferencia produce *ondas estacio-*

¹⁰Esta no es la Gaussiana para el estado vacío sino que corresponde al estado coherente de Glauber con el número de fotones $\bar{n} = 16$

¹¹Notemos que las oscilaciones cuánticas son invisibles en las gráficas de la función Q usadas en la Ref. [43].

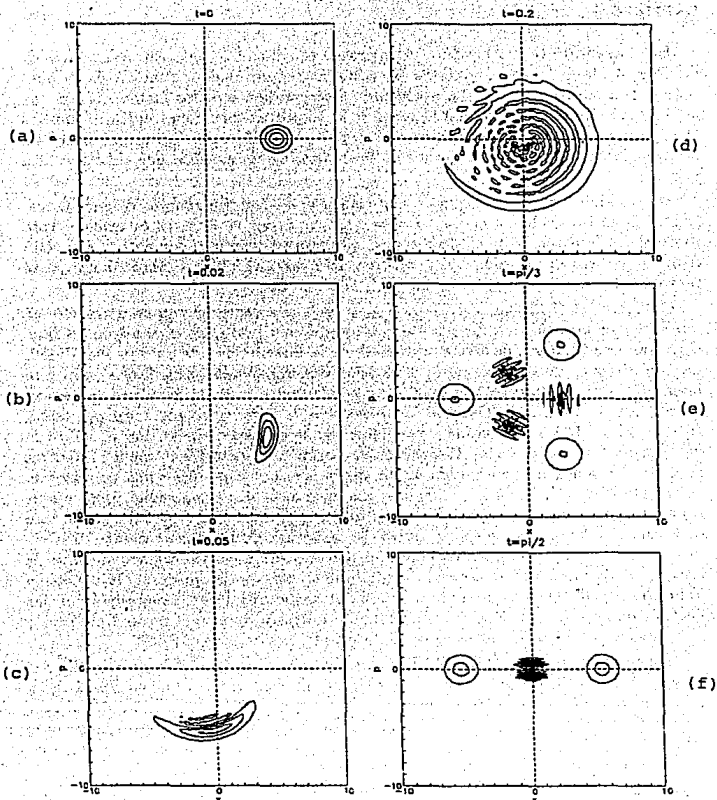


Figura 4.14: Evolución de la función de Wigner para el Hamiltoniano $\chi(P^2/\omega + X^2\omega)^2$ (medio de Kerr). El estado inicial es uno coherente descrito por una distribución de Poisson con $\bar{n} = 16$. (a) $t = 0$; (b) $t = 0.02$; (c) $t = 0.05$; (d) $t = 0.2$; (e) $t = \pi/3$; (f) $t = \pi/2$; vemos los gatos de Schrödinger para $t = \pi/3$ y $t = \pi/2$.

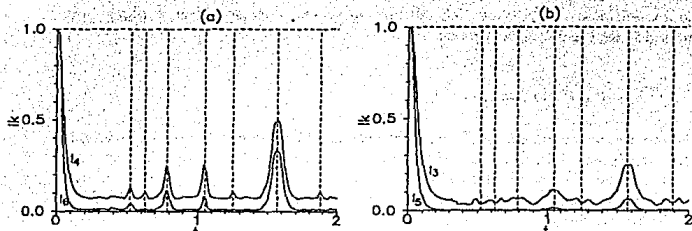


Figura 4.15: Evolución temporal de los momentos de las funciones de Wigner cuánticas para el Hamiltoniano de Kerr. (a) Momentos pares I_2 (línea punteada), I_4 e I_6 . (b) Momentos impares I_1 (línea punteada), I_3 e I_5 . Las líneas verticales punteadas corresponden a los instantes de tiempo $\pi/6, \pi/5, \pi/4, \pi/3, 2\pi/5, \pi/2$ y $3\pi/5$, cuando aparecen los gatos de Schrödinger.

narias a lo largo del círculo. Estas ondas se forman en el medio Kerr a $\chi t = l\pi/m$, siendo l, m enteros mutuamente primos, $l < m < \sqrt{\bar{n}}$. Estos corresponden a los gatos de Schrödinger [66]; ver Figs. 4.14e,f. El estado de gato al tiempo $\chi t = l\pi/m$ tiene m componentes, que son bien notorios en el medio Kerr. Esto es una consecuencia de un espectro entero del Hamiltoniano de interacción Kerr \bar{n}^2 . El fenómeno de auto-interferencia también aparece en el modelo de Jaynes-Cummings [83] y en el de Dicke [84]. Se ha mostrado que el campo en ambos modelos, para condiciones iniciales especiales puede describirse por el Hamiltoniano efectivo $H_{\text{Dicke}} \sim \sqrt{\bar{n} + 1/2}$ [84], i.e., la raíz cuadrada del Hamiltoniano de oscilador armónico. Entonces, el Hamiltoniano de Dicke genera una evolución que en cierto sentido es similar a la del Kerr (cf., [85]); sin embargo, el Hamiltoniano efectivo no tiene un espectro entero y los gatos de Schrödinger no son muy notorios. Es importante remarcar que las bandas de interferencia bruscas entre las componentes del gato en las Figs. 4.14e,f no existirían si el estado fuese una mezcla estadística de los mismos componentes. La función Q no muestra ninguna estructura entre los estados por lo que no permite distinguir entre la superposición coherente y la mezcla estadística de los componentes.

La mayor parte de la información contenida en las gráficas de la función de Wigner puede restaurarse de la gráfica de los momentos I_{3-6} (Fig. 4.15). Los instantes de tiempo cuando esperamos compresión de la amplitud son aquellos donde el pico inicial aún conserva su identidad y los momentos están cerca de 1. Cuando la función de Wigner muestra complicadas franjas de interferencia

(oscilaciones cuánticas), los momentos toman sus valores más bajos. Los tiempos cuando los estados de gato de Schrödinger aparecen corresponden a picos bien pronunciados de los momentos pares.

4.8 Conclusiones.

La diferencia entre la dinámica clásica y cuántica está relacionada con el fenómeno de auto-interferencia en el espacio fase. Para un movimiento cuasiperiódico, conduce a los estados de gato de Schrödinger. Tales estados pueden producirse cuando el campo electromagnético cuantizado se propaga dentro de un medio de Kerr óptico. Es un fenómeno global dado que el estado cuántico se expande en todo el volumen fase permitido por las leyes de conservación y usualmente ocurre a tiempos mayores que el período de oscilaciones rápidas del sistema.

En este capítulo adquirimos la imagen general siguiente. La función de Wigner Gaussiana inicial describe una montaña en el espacio fase. La evolución lineal, tanto clásica como cuántica, mueve, rota y comprime esta montaña conservando su área. La evolución no lineal clásica también puede curvar la forma de la montaña, pero aún se mantiene el área constante. La evolución cuántica no lineal mueve la cima de la montaña de forma que recuerda la evolución clásica. Sin embargo, aparecen "oscilaciones cuánticas" en las concavidades de la montaña. El área ya no se conserva.

Mostramos que la dinámica cuántica no lineal también difiere de su contraparte clásica para tiempos cortos, cuando el estado aún está bien localizado en el espacio fase. La no clasicidad se manifiesta por las oscilaciones cuánticas. Los momentos altos de la función de Wigner pueden usarse como características numéricas de esta diferencia, dado que cambian en el caso cuántico pero son constantes en la imagen clásica.

Capítulo 5

La paradoja de Zenón cuántica.

5.1 Introducción.

El efecto de Zenón cuántico es la inhibición de transiciones entre estados cuánticos provocada por mediciones frecuentes. El cambio en la dinámica de un sistema cuántico bajo observación frecuente o continua, generalmente se deriva de la hipótesis de reducción o colapso de la función de onda, que es el postulado central de la teoría de mediciones cuánticas¹ [88]. El único experimento en el cual se ha demostrado claramente el efecto de Zenón cuántico [89], no concluye la necesidad o validez del postulado de reducción, ya que puede explicarse no sólo en base a este postulado [90] sino resolviendo el problema mecánico-cuántico con disipación [91, 92]. En este capítulo utilizamos el último punto de vista para analizar el efecto de Zenón cuántico en un sistema de tres niveles y su habilidad para realzar la captura de radiación comparado con el mecanismo de captura coherente [93, 94].

Un problema que ha sido objeto de discusión permanente desde la creación de la mecánica cuántica es el de mediciones cuánticas [47], en particular, el colapso del paquete de onda en una medición cuántica (postulado de reducción de estados de von Neumann [95]) fue considerado una hipótesis preliminar y una adición artificial a la teoría cuántica. En la sección 5.2 revisaremos en qué consiste este problema y qué es el postulado de reducción de estados de von Neumann. En este marco enfocaremos nuestra atención a la paradoja de Zenón cuántica (sección 5.3). Desde el punto de vista de la mecánica cuántica con disipación, la interacción de un sistema cuántico pequeño con un aparato de medición macroscópico inevitablemente introduce una disipación en la dinámica del microsistema, la cual provoca un colapso de los elementos no diagonales de la matriz de densidad, los cuales

¹La primera vez que aparece en la literatura la paradoja de Zenón fue en el trabajo de Khalfin [86] y después Yourgrav se refirió a ella como la *paradoja de Turing* [87].

conducen al efecto de Zenón cuántico. Bajo este enfoque, en la sección 5.4 resolvemos las ecuaciones de Bloch ópticas para un sistema de dos niveles. Para el caso de un sistema de tres niveles planteamos dichas ecuaciones en la sección 5.5. En la sección 5.6 resolvemos este sistema de ecuaciones cuando no hay mediciones, lo cual corresponde al fenómeno de captura coherente. Los resultados numéricos para el caso de medición continua se presentan en la sección 5.7, mientras que en la sección 5.8 analizamos pulsos ópticos sucesivos. En la sección 5.9 aparecen las conclusiones de este capítulo.

Los resultados que presentamos aquí aparecieron en los artículos [93] (que reproducimos en el apéndice II) y [94] (ver el apéndice I).

5.2 El postulado de von Neumann sobre la reducción de estados.

El estado de un sistema físico en un instante de tiempo dado t se determina por el operador de densidad $\rho(t)$. Una *medición* determina los valores de algún observable físico Ω . Supongamos por simplicidad que esta variable tiene un espectro discreto ω_n con eigenfunciones $|n\rangle$. Si el estado de un sistema se representa por:

$$\rho(t) = \sum_{n,m} |n\rangle \rho_{n,m}(t) \langle m|, \quad (5.1)$$

después de la medición, los elementos de la matriz de densidad no diagonales colapsaran a ceros y la matriz de densidad tomará una forma diagonal, i.e., el estado del sistema se *reducirá* a:

$$\rho(t) = \sum_n |m\rangle \rho_{m,m}(t) \langle m|. \quad (5.2)$$

Por lo tanto, después de la medición, el estado del sistema es una mezcla estadística de eigenestados y desaparece toda la coherencia del sistema. Generalmente se supone que es necesario agregar como un postulado extra este cambio discontinuo en el estado del sistema y la reducción se introduce "a mano" siempre que se realiza una medición. Esto es lo que se conoce en la literatura como el *postulado de reducción de estados de von Neumann* [95]. Por otro lado, para hacer una medición se requiere permitir la interacción de un sistema físico con un aparato de medición macroscópico, lo cual puede describirse completamente por la ecuación de Schrödinger para el sistema y el aparato. En este sentido, el postulado de reducción de estados es una consecuencia de la teoría en lugar de ser un postulado adicional [96]. Para el fenómeno que describimos en este capítulo, la interacción del sistema con el aparato de medición puede describirse completamente usando dinámica cuántica irreversible [97].

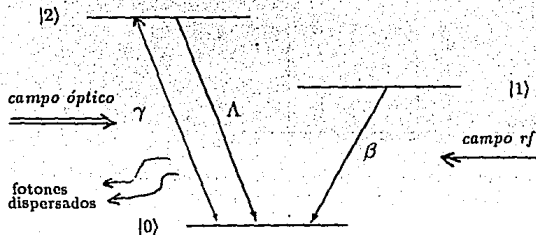


Figura 5.1: El sistema de tres-niveles con una configuración "V". A representa la frecuencia de Rabi de la transición intensa, γ es el ancho natural de línea de la transición óptica y β es la frecuencia de Rabi de la transición débil.

Como un ejemplo de una medición cuántica podemos considerar un sistema cerrado de dos niveles. Mientras no se mide, este sistema evoluciona de acuerdo con la ecuación de Schrödinger de manera que en ausencia de "mediciones" el sistema presenta transiciones entre los niveles. Misra y Sudarshan [88] probaron que cuando se aplica el postulado de reducción de estados de von Neumann a un sistema de dos niveles se produce lo que se conoce como *la paradoja de Zenón cuántica*: mediciones frecuentes inhiben la evolución temporal unitaria de un eigenestado del sistema deteniendo la evolución en el límite de infinitas mediciones frecuentes. Su prueba se basa en una sucesión de evolución temporal unitaria y una reducción *ad hoc* de la función de onda considerando el proceso de observación continua como el límite de mediciones instantáneas sucesivas cuando el intervalo entre mediciones tiende a cero. Este efecto está relacionado con desviaciones de la ley exponencial a tiempos muy pequeños [98]. Sin embargo [98, 99], en el espacio vacío la paradoja de Zenón no es un fenómeno importante porque una medición es un proceso físico que dura cierto tiempo y este intervalo de tiempo generalmente es mayor que el tiempo para la manifestación de la paradoja de Zenón. García Calderón *et. al.* han considerado las desviaciones de la ley exponencial a tiempos grandes [?]

5.3 La paradoja de Zenón cuántica.

Cook [90] propuso usar una transición manejada por resonancia en un ión capturado como una verificación experimental del efecto de Zenón cuántico (ver Fig. 5.1), donde el estado base se denota por $|0\rangle$ y el excitado como $|1\rangle$. Nuestro objeto es un átomo de dos niveles que consiste de los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$. La dinámica libre

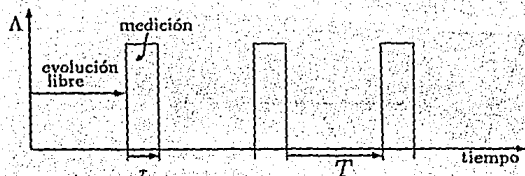


Figura 5.2: Secuencia de pulsos en el experimento de Itano *et. al.* [89]. τ representa la longitud del pulso y T la longitud del intervalo entre pulsos.

de nuestro objeto (en ausencia de mediciones) consiste de oscilaciones de Rabi con la frecuencia β . Para provocarlas, se aplica un campo de radio frecuencia en resonancia con la transición $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$. La frecuencia de Rabi β es proporcional a la amplitud de este campo, *i.e.*, a la raíz cuadrada de la intensidad del campo y al elemento de matriz del momento dipolar correspondiente a la transición $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$. Es importante que la emisión espontánea del nivel $|1\rangle$ al $|0\rangle$ sea muy pequeña, de forma que pueda despreciarse durante el experimento. Para eliminar transiciones espontáneas a otros modos del sistema se coloca en una buena cavidad que soporta únicamente el modo de radio frecuencia (rf) en resonancia con la transición $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$. Para observar la población de los niveles, este sistema se considera como parte de una configuración de tres-niveles tipo "V" donde la resonancia se acopla mediante una transición dipolar óptica intensa con el nivel adicional $|2\rangle$.

Para probar que mediciones frecuentes inhiben las transiciones entre los niveles $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$, que ocurren con frecuencia de Rabi β , es necesario aplicar pulsos de medición cortos equidistantes con una frecuencia de Rabi Λ de la transición $|2\rangle \rightarrow |0\rangle$ (ver Fig. 5.2). Se toma la duración del pulso de medición mucho menor que el tiempo entre pulsos.

Si al inicio del pulso, el electrón está en el nivel base $|0\rangle$, entonces empieza a oscilar entre los niveles $|0\rangle$ y $|2\rangle$ con la frecuencia de Rabi óptica Λ , la cual es proporcional a la raíz cuadrada de la intensidad del pulso óptico de medición. Se supone que las transiciones $|2\rangle \rightarrow |0\rangle$ también ocurren con la emisión de fotones en otros modos. En principio se pueden observar estos fotones dispersados en otros modos ópticos. Mientras el pulso este encendido este ciclo de oscilaciones entre los niveles $|2\rangle$ y $|0\rangle$ continúa (con una frecuencia Λ). Por lo tanto, si hay fluorescencia el átomo se encuentra en $|0\rangle$. Por otro lado, si al inicio del pulso el electrón se encuentra en el nivel excitado $|1\rangle$, entonces el electrón no siente el pulso y no puede seguir el ciclo $|0\rangle \rightarrow |2\rangle$ por lo que no hay fluorescencia (ver Fig. 5.3).

Si una medición encuentra el ión en el nivel $|2\rangle$, el ión regresa al nivel $|0\rangle$ después de la medición, durante un tiempo aproximadamente igual al tiempo de vida del

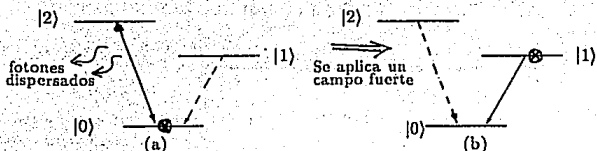


Figura 5.3: Determinación del estado del átomo a partir de la medición de fluorescencia. (a) Si el átomo está inicialmente en $|0\rangle$ entonces oscila entre $|2\rangle$ y $|0\rangle$ con frecuencia Λ . Se miden los fotones dispersados. (b) Si el átomo está en $|1\rangle$ no siente el pulso por lo que no hay fluorescencia.

nivel $|2\rangle$. Si una medición encuentra el ión en el nivel $|1\rangle$, el ión nunca deja el nivel durante la medición. Si la medición es seguida inmediatamente por una segunda medición, el resultado será casi el mismo. Entonces, el pulso óptico hace mediciones casi ideales, no destructivas. Sin embargo, como se necesita un tiempo finito para hacer una medición, la función de onda puede evolucionar entre mediciones, por lo que es posible que el resultado de la segunda medición difiera del de la primera. Supongamos que el sistema se encuentra inicialmente preparado en el estado $|1\rangle$ y que evoluciona libremente durante el tiempo t de forma que la función de onda al tiempo t (inmediatamente antes del pulso de medición) es:

$$|\Psi\rangle = \cos(\beta t)|1\rangle + \sin(\beta t)|0\rangle.$$

Después del pulso, la función de onda se colapsa y el átomo se encuentra en el estado $|1\rangle$ o $|0\rangle$ con probabilidades

$$p_1 = \cos^2(\beta t), \quad p_0 = \sin^2(\beta t),$$

y no en una superposición coherente de ellas (este es el postulado de reducción de estados de von Neumann).

Repetiendo n veces la secuencia de evolución libre durante el tiempo $T = T_0/n$ y medición durante el tiempo τ , tenemos que cuando $n \rightarrow \infty$:

$$p_1(t) = (\cos(T_0\Lambda/n))^{2n} \approx \left(1 - \frac{T_0^2\Lambda^2}{2n^2}\right)^{2n} \rightarrow 1,$$

por lo que las mediciones sucesivas del estado del objeto evitan el decaimiento del nivel $|1\rangle$.

Itano *et al.* [89] realizaron el experimento propuesto por Cook [90]. En el experimento usan un solo ión atómico (aproximadamente 5000 iones de Berilio ${}^9\text{Be}^+$) en una trampa cilíndrica de Penning a una presión de 10^{-8} Pa, y bombean

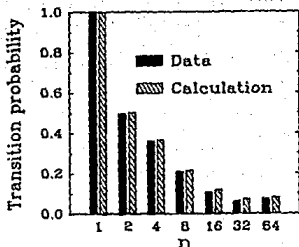


Figura 5.4: Gráfica de las probabilidades de transición $|0\rangle \rightarrow |2\rangle$ en el caso del experimento de Itano *et. al.* [90] como función del número de pulsos n . La disminución de la probabilidad conforme aumenta n demuestra el efecto de Zenón cuántico.

ópticamente usando un laser que genera radiación a 313 nm, la cual es la frecuencia de la transición $|2\rangle \rightarrow |0\rangle$; miden la intensidad fluorescente de la transición óptica $|0\rangle \rightarrow |2\rangle$ al final del pulso t_f para diferentes números n de pulsos ópticos. En la Fig. 5.4 se grafican los valores experimentales encontrados por Itano *et. al.* para las probabilidades de transición $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ y $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$ como función del número de pulsos de medición n . La disminución de las probabilidades de transición conforme aumenta n demuestra el efecto de Zenón cuántico.

Block y Berman [92] ofrecen una interpretación alternativa del experimento de Itano *et. al.*, haciendo un análisis de la dinámica del sistema completo de tres niveles sin necesidad de suponer explícitamente que la función de onda se colapsa o que se ha realizado una medición ideal. Para ello, resuelven las ecuaciones de Bloch ópticas para un sistema de tres niveles bajo la aproximación de onda rotante (RWA) utilizando un procedimiento de eliminación adiabática [100] y encuentran que al final del período de evolución libre los elementos de la matriz de densidad son:

$$\begin{aligned}
 \rho_{00} &= \frac{1}{2} [1 + \cos(\pi/n)] , \\
 \rho_{22} &= \frac{1}{2} [1 - \cos(\pi/n)] , \\
 \rho_{02} &= -\frac{i}{2} \sin(\pi/n) ,
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

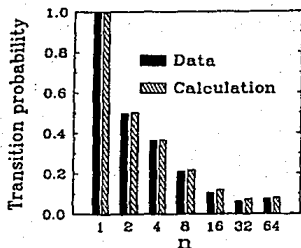


Figura 5.4: Gráfica de las probabilidades de transición $|0\rangle \rightarrow |2\rangle$ en el caso del experimento de Itano *et. al.* [90] como función del número de pulsos n . La disminución de la probabilidad conforme aumenta n demuestra el efecto de Zenón cuántico.

ópticamente usando un laser que genera radiación a 313 nm, la cual es la frecuencia de la transición $|2\rangle \rightarrow |0\rangle$; miden la intensidad fluorescente de la transición óptica $|0\rangle \rightarrow |2\rangle$ al final del pulso t_f para diferentes números n de pulsos ópticos. En la Fig. 5.4 se grafican los valores experimentales encontrados por Itano *et. al.* para las probabilidades de transición $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ y $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$ como función del número de pulsos de medición n . La disminución de las probabilidades de transición conforme aumenta n demuestra el efecto de Zenón cuántico.

Block y Berman [92] ofrecen una interpretación alternativa del experimento de Itano *et. al.*, haciendo un análisis de la dinámica del sistema completo de tres niveles sin necesidad de suponer explícitamente que la función de onda se colapsa o que se ha realizado una medición ideal. Para ello, resuelven las ecuaciones de Bloch ópticas para un sistema de tres niveles bajo la aproximación de onda rotante (RWA) utilizando un procedimiento de eliminación adiabática [100] y encuentran que al final del período de evolución libre los elementos de la matriz de densidad son:

$$\begin{aligned}
 \rho_{00} &= \frac{1}{2} [1 + \cos(\pi/n)] , \\
 \rho_{22} &= \frac{1}{2} [1 - \cos(\pi/n)] , \\
 \rho_{02} &= -\frac{i}{2} \sin(\pi/n) ,
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

por lo que después de n pulsos:

$$\frac{1}{2} [1 - \cos^n(\pi/n)] + \dots,$$

la cual, a primer orden es la solución derivada por Itano *et. al.* [89]. En lugar de un colapso de la función de onda, es el decaimiento rápido de la coherencia ρ_{02} causado por cada pulso intenso, el que provoca una reducción drástica en la población del nivel |2> siguiendo el pulso rf. Claramente, el "efecto de Zenón cuántico" sólo se manifiesta si las interrupciones ocurren durante tiempos mucho menores que el tiempo que toma al campo de señal inducir una inversión completa.

En este capítulo seguiremos el enfoque de Frerichs y Schenzle [97], los cuales analizan el efecto de Zenón cuántico desde un punto de vista análogo al de Block y Berman [92] calculando en detalle el resultado del experimento de Itano *et. al.* [89] basándose en las ecuaciones de Bloch ópticas para un sistema de tres niveles bajo la aproximación de onda rotante.

5.4 Poblaciones para un sistema de dos niveles.

Para entender que podemos esperar de un sistema de tres niveles con disipación, consideraremos primero la dinámica disipativa en un sistema de dos niveles |1> y |0>. En este caso, si la matriz de densidad atómica inicial es diagonal, entonces al tiempo t tiene la forma

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_{11} & i\rho_{10} \\ -i\rho_{10} & \rho_{00} \end{bmatrix},$$

con

$$\rho_{00} + \rho_{11} = 1,$$

la cual se determina de las ecuaciones de Bloch ópticas [101]:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{11} &= -\gamma\rho_{11} + 2\Lambda\rho_{10}, \\ \dot{\rho}_{10} &= -2\Lambda\rho_{11} - \frac{\gamma}{2}\rho_{10} + \Lambda, \end{aligned}$$

entonces, nuestro problema se reduce a resolver:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\rho}_{11} \\ \dot{\rho}_{10} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\gamma & 2\Lambda \\ -2\Lambda & -\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{11} \\ \rho_{10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Lambda \end{bmatrix}, \\ \vec{\rho} &= \mathcal{A}\vec{\rho} + \vec{B}, \end{aligned} \tag{5.4}$$

Para resolver la Ec. (5.4) calculamos su transformada de Laplace [21] (denotamos por $\tilde{\Phi}$ la transformada de Laplace de $\vec{\rho}$):

$$z\tilde{\Phi} - \vec{\rho}^0 = \mathcal{A}\tilde{\Phi} + \frac{\vec{B}}{z},$$

cuya solución es:

$$\vec{\phi} = \frac{1}{zD} \begin{pmatrix} \rho_{11}^0 z^2 + \left[\frac{\gamma}{2} \rho_{11}^0 + 2\Lambda \rho_{10}^0 \right] z + 2\Lambda^2 \\ \rho_{10}^0 z^2 + [\gamma \rho_{10}^0 - 2\Lambda \rho_{11}^0 + \Lambda] z + \Lambda \gamma \end{pmatrix},$$

donde

$$D = (z - w_+)(z - w_-),$$

$$w_{\pm} = -\frac{3}{4}\gamma \pm \frac{1}{4}\sqrt{\gamma^2 - 64\Lambda^2}, \quad (5.5)$$

entonces, para el caso bidimensional, la evolución está dada por:

$$\begin{aligned} \rho_{11}(t) &= \frac{2\Lambda^2}{w_+w_-} + \left(\frac{(\gamma/2 + w_+)w_+\rho_{11}^0 + 2\Lambda w_+\rho_{10}^0 + 2\Lambda^2}{w_+(w_+ - w_-)} \right) e^{w_+t} \\ &\quad - \left(\frac{(\gamma/2 + w_-)w_-\rho_{11}^0 + 2\Lambda w_-\rho_{10}^0 + 2\Lambda^2}{w_-(w_+ - w_-)} \right) e^{w_-t}, \\ \rho_{10}(t) &= \frac{\Lambda\gamma}{w_+w_-} - \left(\frac{2\Lambda w_+\rho_{11}^0 - (\gamma + w_+)(w_+\rho_{10}^0 + \Lambda)}{w_+(w_+ - w_-)} \right) e^{w_+t} \\ &\quad + \left(\frac{2\Lambda w_-\rho_{11}^0 - (\gamma + w_-)(w_-\rho_{10}^0 + \Lambda)}{w_-(w_+ - w_-)} \right) e^{w_-t}, \\ \rho_{00}(t) &= 1 - \rho_{11}(t), \end{aligned} \quad (5.6)$$

Si consideramos que inicialmente el sistema se encuentra en el estado excitado $|1\rangle$, es decir, que

$$\vec{\rho}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

entonces al tiempo t :

$$\begin{aligned} \rho_{11}(t) &= \frac{2\Lambda^2}{w_+w_-} + \left(\frac{(\frac{\gamma}{2} + w_+)w_+ + 2\Lambda^2}{w_+(w_+ - w_-)} \right) e^{w_+t} - \left(\frac{(\frac{\gamma}{2} + w_-)w_- + 2\Lambda^2}{w_-(w_+ - w_-)} \right) e^{w_-t}, \\ \rho_{10}(t) &= \frac{\Lambda\gamma}{w_+w_-} - \left(\frac{2\Lambda(w_+ - \gamma)}{w_+(w_+ - w_-)} \right) e^{w_+t} + \left(\frac{\Lambda(w_- - \gamma)}{w_-(w_+ - w_-)} \right) e^{w_-t}, \end{aligned}$$

para el caso en que $\gamma = 0$,

$$\begin{aligned} \rho_{11}(t) &= \frac{1}{2} [1 + \cos(2\Lambda t)], \\ \rho_{10}(t) &= -\frac{1}{2} \sin(2\Lambda t), \\ \rho_{00}(t) &= \frac{1}{2} [1 - \cos(2\Lambda t)], \end{aligned}$$

lo cual coincide con la solución de Block y Berman [92], Ecs. (5.3). Si $\Lambda < \gamma/8$ tenemos un decaimiento exponencial mientras que en el caso contrario observamos oscilaciones amortiguadas.

Si consideramos que inicialmente el sistema se encuentra en el estado base $|0\rangle$, es decir, que

$$\bar{\rho}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

entonces al tiempo t :

$$\begin{aligned} \rho_{11}(t) &= \frac{2\Lambda^2}{w_+w_-} + \frac{2\Lambda^2}{w_+ - w_-} \left(\frac{e^{w_+t}}{w_+} - \frac{e^{w_-t}}{w_-} \right), \\ \rho_{10}(t) &= \frac{\Lambda\gamma}{w_+w_-} + \frac{\Lambda}{w_+ - w_-} \left(\frac{(\gamma + w_+)e^{w_+t}}{w_+} - \frac{(\gamma + w_-)e^{w_-t}}{w_-} \right), \end{aligned}$$

para el caso de que $\gamma = 0$,

$$\begin{aligned} \rho_{11}(t) &= \frac{1}{2} [1 - \cos(2\Lambda t)], \\ \rho_{10}(t) &= \frac{1}{2} \sin(2\Lambda t), \\ \rho_{00}(t) &= \frac{1}{2} [1 + \cos(2\Lambda t)], \end{aligned}$$

si $\Lambda > \gamma/8$ tenemos un decaimiento exponencial mientras que en el caso contrario observamos oscilaciones amortiguadas.

5.5 Dinámica disipativa en sistemas de tres niveles.

Para describir el sistema de tres niveles introduzcamos la matriz de densidad atómica,

$$\rho = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{10} \\ u_{12}^* & u_{22} & u_{20} \\ u_{10}^* & u_{20}^* & u_{00} \end{bmatrix},$$

con

$$u_{00} + u_{11} + u_{22} = 1.$$

Podemos escribir las ecuaciones de Bloch ópticas bajo la aproximación de onda rotante (RWA) [101]:

$$\begin{aligned} \dot{u}_{11} &= -\gamma u_{11} - i\Lambda(u_{10} - u_{10}^*), \\ \dot{u}_{22} &= -i\beta(u_{20} - u_{20}^*), \end{aligned}$$

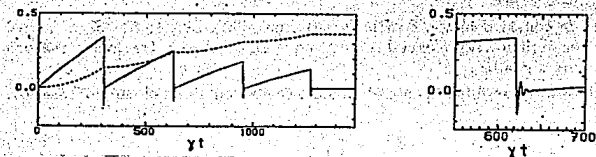


Figura 5.5: Resultado teórico de Frerichs y Schenzle.

$$\begin{aligned}\dot{u}_{12} &= -\frac{\gamma}{2}u_{12} - i\beta u_{10} + i\Lambda u_{20}^*, \\ \dot{u}_{10} &= i\Lambda(u_{00} - u_{11}) - i\beta u_{12} - \gamma u_{10}, \\ \dot{u}_{20} &= i\beta(u_{00} - u_{22}) - i\Lambda u_{12}^*, \\ \dot{u}_{00} &= -(u_{11} + u_{22}).\end{aligned}$$

Las ecuaciones de Bloch ópticas pueden derivarse de la interacción de un átomo multinivel con el campo electromagnético cuantizado tomando en cuenta explícitamente todos los modos del campo en los que la emisión espontánea ocurre (que tienen temperatura cero, i.e., que no tienen fotones); el gran número de grados de libertad del multimodo vacío producen un proceso dinámico irreversible

Si la matriz de densidad atómica inicial es diagonal, entonces al tiempo t tiene la forma

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & i\rho_{10} \\ \rho_{12} & \rho_{22} & i\rho_{20} \\ -i\rho_{10} & -i\rho_{20} & \rho_{00} \end{bmatrix},$$

con

$$\rho_{00} + \rho_{11} + \rho_{22} = 1,$$

y todas las ρ 's son números reales.

Para analizar el efecto de Zenón cuántico, la tasa de decaimiento espontáneo del nivel [1] debe ser despreciable, con lo cual las ocho ecuaciones resultantes se desacoplan, siendo las cinco ecuaciones restantes:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{11} &= -\gamma\rho_{11} + 2\Lambda\rho_{10}, \\ \dot{\rho}_{22} &= 2\beta\rho_{20}, \\ \dot{\rho}_{12} &= -\gamma/2\rho_{12} + \beta\rho_{10} + \Lambda\rho_{20}, \\ \dot{\rho}_{10} &= -2\Lambda\rho_{11} - \Lambda\rho_{22} - \beta\rho_{12} - \gamma/2\rho_{10} + \Lambda, \\ \dot{\rho}_{20} &= -\beta\rho_{11} - 2\beta\rho_{22} - \Lambda\rho_{12} + \beta.\end{aligned}\tag{5.8}$$

Frerichs y Schenzle [97] resuelven numéricamente el sistema anterior tomando como duración del pulso $T = 20/\gamma$, siendo $1/\gamma$ el tiempo de vida de la transición

óptica y la intensidad del campo óptico tal que produzca una frecuencia de Rabi de $\Lambda = \gamma$, es decir, saturación. Mientras se aplica el pulso rf, se envían $n = 64$ pulsos ópticos de medición cortos cuya duración es $3/5$ de la duración del pulso rf, de acuerdo con las condiciones en el experimento de Itano *et. al.* [89]. Si no se aplican pulsos ópticos (ver Fig. 5.5a), el nivel de población y la coherencia evolucionan libremente como en un sistema cerrado de dos niveles, mientras que la evolución temporal detallada para 32 pulsos se muestra en la Fig. 5.5b. El momento atómico dipolar correspondiente a la coherencia ρ_{10} se destruye rápidamente, pero no instantáneamente durante cada pulso óptico, llevando a que la población ρ_{11} crezca cuadráticamente con el tiempo nuevamente después del pulso, es importante señalar que ρ_{10} decae naturalmente con la tasa de relajación γ , característica del decaimiento espontáneo de la transición óptica y que no se apaga repentinamente debido a la presencia de cualquier observador. Así se reproducen los resultados del experimento de Itano *et. al.* [89] sin que se necesite ninguna hipótesis de medición cuántica.

5.6 Captura coherente.

La dinámica del sistema bajo estudio está determinada por la ecuación de Schrödinger con el Hamiltoniano [102]:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda & 0 \\ \Lambda & 0 & \beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix},$$

donde los estados del sistema son

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El operador de evolución para un intervalo de tiempo en el cual Λ es constante es

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\Lambda^2}{\Omega^2} \cos(\Omega t) + \frac{\beta^2}{\Omega^2} & -\frac{\Lambda}{\Omega} i \sin(\Omega t) & \frac{\Lambda\beta}{\Omega^2} [\cos(\Omega t) - 1] \\ -\frac{\Lambda}{\Omega} i \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) & -\frac{\beta}{\Omega} i \sin(\Omega t) \\ \frac{\Lambda\beta}{\Omega^2} [\cos(\Omega t) - 1] & -\frac{\beta}{\Omega} i \sin(\Omega t) & \frac{\beta^2}{\Omega^2} \cos(\Omega t) + \frac{\Lambda^2}{\Omega^2} \end{pmatrix},$$

$$\Omega^2 \equiv \Lambda^2 + \beta^2.$$

Aquí, la amplitud de que el átomo se encuentre en el estado base $U_{21}(t)$ y el elemento de matriz de densidad no-diagonal $\rho_{10}(t)$ son proporcionales a $\beta/\Lambda \ll 1$, y el sistema exhibe lo que se conoce como captura coherente [103].

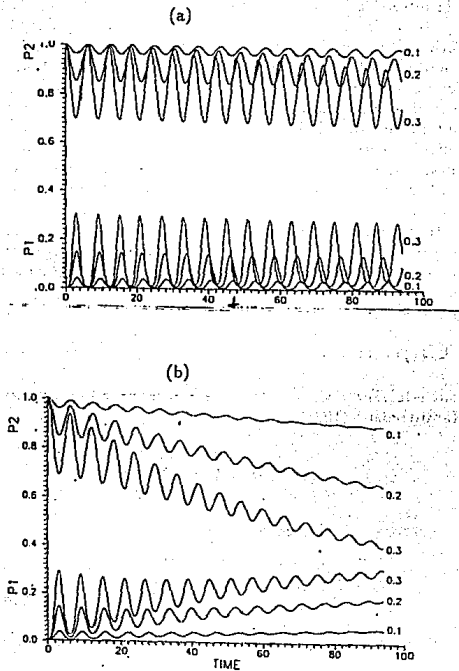


Figura 5.6: $P_1(t)$ y $P_2(t)$ para $\Lambda = 1$, y diversos valores de β (0.1, 0.2, 0.3). (a) $\gamma = 0.01$, la disipación es muy débil y se observa la captura coherente. (b) $\gamma = 0.1$, esta es la región del efecto Zenón. La probabilidad de encontrar un átomo en el estado inicial $|1\rangle$ decrece lentamente.

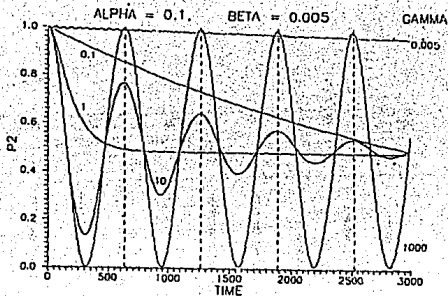


Figura 5.7: $P_1(t)$ para $\Lambda = 0.1$, $\beta = 0.005$ y valores distintos de γ (0.1, 0.2 y 0.3). La región de Zenón para $\gamma = 0.005$ es seguida por un régimen disipativo cuando $\gamma = 0.1, 1.0$. Para valores muy grandes $\gamma = 10, 1000$ aparece un nuevo régimen de oscilaciones con frecuencia $\approx \beta$.

5.7 Mediciones continuas.

El mecanismo de Zenón para el caso de mediciones continuas lo investigamos en el artículo [93], donde se resuelven numéricamente las ecuaciones de Bloch ópticas para valores distintos de Λ , β , γ . La captura de Zenón ocurre en este caso cuando $\beta \ll \Lambda$, $\gamma < \Lambda$. Sin embargo, si la captura estaba presente para valores dados de Λ , β y γ ., entonces siempre se vuelve más intensa cuando disminuye γ y la mejor captura ocurre cuando $\gamma = 0$ (ver Figs. 5.6-5.7).

En ausencia del nivel $|2\rangle$ la inversión atómica seguirá oscilaciones de Rabi no amortiguadas con frecuencia β . Es importante señalar que en presencia del campo de medición ω_{20} , el decaimiento (espontáneo o estimulado) del nivel $|1\rangle$ esta determinado esencialmente por los parámetros Λ y γ de la transición $|2\rangle \rightarrow |0\rangle$.

En la Fig. 5.7 observamos "el efecto de Zenón" cuando $\gamma \ll \Lambda$. Conforme γ crece, la captura desaparece y cambiamos al régimen de disipación.

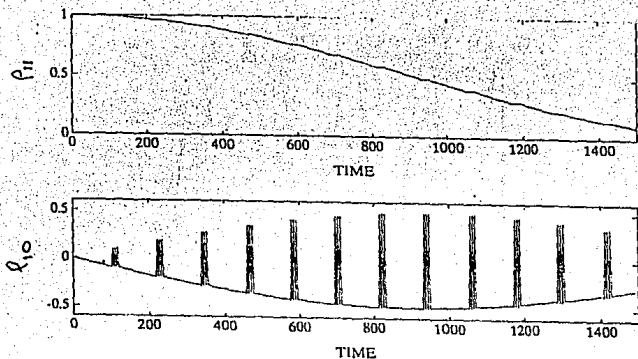


Figura 5.8: Comportamiento temporal de ρ_{11} y ρ_{10} cuando $\tau = 6\pi$, $T = 100$, $\Lambda = 1$, $\beta = 0.001$ y $\gamma = 0$.

5.8 Mediciones sucesivas.

El mecanismo de medición propuesto por Cook [90] trabaja sólo si γ es lo suficientemente grande. Cuando γ es pequeña casi no hay fotones dispersados y la eficiencia de las mediciones se hace muy baja. Por supuesto si $\gamma = 0$ no podemos hablar de una "medición" (al menos no en el sentido que propuso Cook). Mostraremos que la sucesión de pulsos ópticos intensos aplicados en la segunda transición $|0\rangle \rightarrow |2\rangle$ suprimen la dinámica del "objeto" (es decir, las transiciones entre los niveles $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$ aún cuando $\gamma = 0$). En este caso la emisión se suprime debido exclusivamente a la dinámica unitaria. La razón es que los pulsos ópticos frecuentes introducen cierta clase de defasamiento en la dinámica del objeto y los elementos de la matriz de densidad fuera de la diagonal se mantienen pequeños. Aunque no es tan impresionante, este mecanismo unitario para captura de radiación frecuentemente trabaja más eficientemente que la relajación de fase debida a la evolución no unitaria y se muestra que la captura coherente casi siempre es más intensa que la captura debida al relajamiento de fase, cuando $\gamma > 0$. Como vemos en las figuras, la dinámica es sensible a la longitud de los pulsos ópticos (τ). Aquí tomamos intervalos de tiempo iguales (T) entre pulsos.

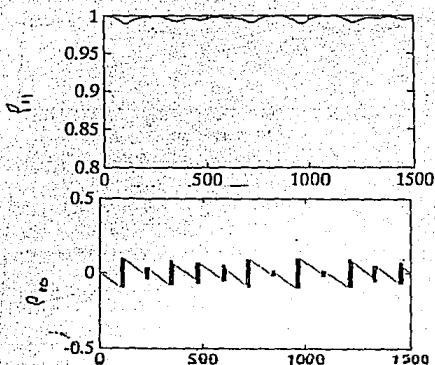


Figura 5.9: Comportamiento temporal de ρ_{11} y ρ_{10} cuando $\tau = 7\pi$, $T = 100$, $\Lambda = 1$, $\beta = 0.001$ y $\gamma = 0$.

1. Pulsos 2π : La longitud del pulso es un número entero de períodos de las oscilaciones rápidas Λ , $\tau = 2k\pi$. Aquí el sistema después el pulso se encuentra en el mismo estado que antes de él y las oscilaciones lentas β casi no son afectadas (ver Fig. 5.8).
2. Pulsos π : La longitud del pulso es un número impar de medios períodos de las oscilaciones rápidas Λ , $\tau = (2k+1)\pi$. Aquí si el elemento de matriz ρ_{11} estaba decayendo después de pasar por un valor máximo, el pulso lo hace *evolucionar* de regreso al estado inicial. En consecuencia, el nivel $|1\rangle$ se congela (ver Fig. 5.9).
3. La frecuencia Λ no es un múltiplo de la longitud del pulso (aquí, $\tau = 20$). También en este caso la población del nivel $|1\rangle$ no puede diferir mucho de la que existía al tiempo $t=0$. La mostramos en la Fig. 5.10 junto con la curva correspondiente para $\gamma = 0.5$ (que se obtiene al resolver numéricamente las ecuaciones de Bloch). Se ve que la captura empeora para γ finita.
4. La Fig. 5.11 muestra el caso cuando la duración del pulso varía aleatoriamente entre 5π y 7π .

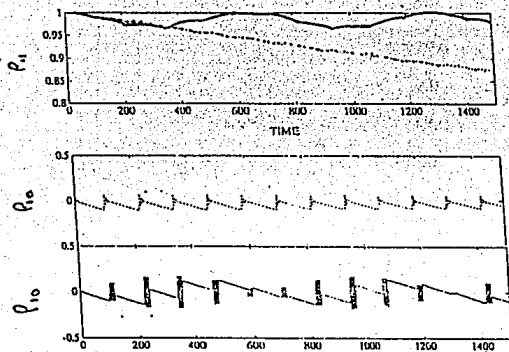


Figura 5.10: Comportamiento temporal de ρ_{11} y ρ_{10} cuando $\tau = 20$, $T = 100$, $\Lambda = 1$, $\beta = 0.001$ y $\gamma = 0$ (línea continua) y $\gamma = 0.5$ (línea punteada).

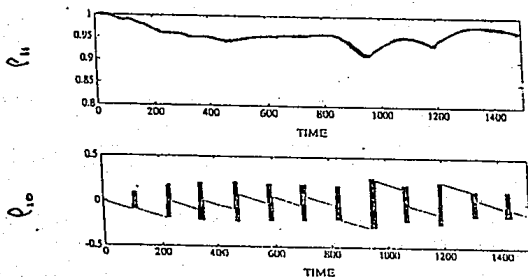


Figura 5.11: Comportamiento temporal de ρ_{11} y ρ_{10} cuando $T = 100$, $\Lambda = 1$, $\beta = 0.001$ y $\gamma = 0$ cuando la dirección del pulso varía aleatoriamente entre 5 y 7π .

Así, excluyendo el caso excepcional 1, el sistema siempre muestra captura de radiación, aún en ausencia de disipación y relajación de fase siempre y cuando $\Lambda \gg \beta$ y $\tau < \pi/\beta$.

5.9 Conclusiones.

En este capítulo analizamos la cuestión de si es posible encontrar un nuevo régimen de captura de radiación debido al mecanismo de Zenón, es decir, por disipación, y si este efecto es diferente de la captura coherente usual.

La respuesta que encontramos para el caso de mediciones continuas fue negativa. Cuando se aplica continuamente el campo fuerte, la solución numérica de las ecuaciones de Bloch muestra que para valores dados de Λ, β , el aumento del coeficiente de amortiguamiento γ siempre empeora la calidad de la captura coherente en otra transición que estaba presente para $\gamma = 0$. En el caso de observación continua, el mecanismo unitario de captura coherente evita las transiciones en el objeto.

La respuesta para el caso de mediciones sucesivas también es negativa. Nuestros resultados numéricos muestran que la captura es más intensa justo en el caso unitario $\gamma = 0$. Aquí, el defasamiento debido a pulsos frecuentes que aparecen en la descripción unitaria suprime las transiciones.

Nuestra conclusión es que *los mecanismos unitarios para captura de radiación trabajan más eficientemente.*

Capítulo 6

Conclusiones.

En este trabajo estudiamos diferentes fenómenos físicos con el fin de entender mejor la conexión entre los distintos modelos de la óptica (geométrica, ondulatoria y cuántica).

En el capítulo 2 estudiamos la conexión entre la óptica geométrica y la óptica ondulatoria analizando la propagación de rayos de luz en medios ópticos isotrópicos y anisotrópicos. Mostramos que la ecuación básica de la óptica geométrica (la ecuación eikonal) se puede obtener como el límite cuando la longitud de onda se hace despreciable en las ecuaciones de Maxwell para ondas monocromáticas. Pero, la óptica geométrica también es una teoría fenomenológica completa que puede deducirse del principio de Fermat. Bajo este enfoque, un medio isotrópico se describe completamente por un modelo hidrodinámico simple basado en la ecuación eikonal. A partir del principio de Fermat construimos las ecuaciones de Hamilton para un medio anisotrópico inhomógeno. Nuestra discusión Hamiltoniana de la óptica anisotrópica involucra menos condiciones físicas que el tratamiento a la Maxwell. El tratamiento adecuado de Maxwell predice correctamente que luz no polarizada en un medio uniaxial se divide generalmente en dos ondas: un rayo ordinario (que se comporta como si se moviese en un medio isotrópico) y un rayo extraordinario, que siente la anisotropía. Estas dos ondas tienen dos polarizaciones lineales diferentes y dos velocidades de propagación distintas. Las dos direcciones de \vec{D} correspondientes a una dirección de propagación \vec{S} dada, son perpendiculares entre sí. La aproximación de orden cero de la óptica geométrica sólo puede analizar uno u otro rayo. Para tener una descripción que incluya polarizaciones se necesitan las otras aproximaciones de la óptica.

En el capítulo 3 analizamos la propagación de paquetes de onda semiclásicos descritos por funciones Gaussianas y gobernados por la ecuación de onda bajo la aproximación paraxial. Vimos que las transformaciones canónicas lineales generadas por los polinomios de segundo grado en x y p transforman funciones Gaus-

sianas en Gaussianas preservando la relación de incertidumbre de Schrödinger-Robertson. Encontramos también la acción de operadores de tercer (aberraciones de segundo orden) y cuarto grado (aberraciones de tercer orden) sobre funciones Gaussianas y mostramos para todas ellas las gráficas de la evolución de Γ .

Otra representación muy importante para entender la conexión entre la óptica geométrica y ondulatoria (dinámica clásica y cuántica), describe el estado de un sistema óptico por una distribución de cuasiprobabilidad. Elegimos la distribución cuya correspondencia es la más cercana entre la dinámica clásica y cuántica: la conocida función de Wigner. Como vemos en el capítulo 4, la función de Wigner evoluciona de la misma forma en las dos mecánicas para todas las transformaciones lineales. Las transformaciones no lineales conducen a una diferencia esencial entre la evolución clásica y cuántica. En el capítulo 4, adquirimos la imagen general siguiente. La función de Wigner Gaussianas inicial describe una montaña en el espacio fase. La evolución lineal, tanto clásica como cuántica, mueve, rota y comprime esta montaña conservando su área. La evolución no lineal clásica también puede curvar la forma de la montaña, pero aún se mantiene el área constante. La evolución cuántica no lineal mueve la cima de la montaña de forma que recuerda la evolución clásica. Sin embargo, aparecen "oscilaciones cuánticas" en las concavidades de la montaña. El área ya no se conserva. Los momentos altos de la función de Wigner pueden usarse como características numéricas de esta diferencia, dado que cambian en el caso cuántico pero son constantes en la imagen clásica.

De hecho, la lógica de la paradoja de Zenón cuántica sugiere que hay un mecanicismo no unitario que evita la emisión de fotones de algunas transiciones atómicas en cavidades resonantes. Este efecto se ha confirmado experimentalmente. Por otro lado, para los mismos sistemas hay otro mecanismo *coherente* de captura de radiación (también confirmado experimentalmente). Hasta ahora la conexión entre estos dos mecanismos de captura de radiación no es clara. En el capítulo 5 investigamos la correspondencia entre ellos y analizamos la cuestión de si es posible encontrar un nuevo régimen de captura de radiación debido al mecanismo de Zenón, es decir, por disipación, y si este efecto es diferente de la captura coherente usual. La respuesta que encontramos para el caso de mediciones continuas fue negativa. Cuando se aplica continuamente el campo fuerte, la solución numérica de las ecuaciones de Bloch muestra que para valores dados de Λ, β , el aumento del coeficiente de amortiguamiento γ siempre empeora la calidad de la captura coherente en otra transición que estaba presente para $\gamma = 0$. En el caso de observación continua, el mecanicismo unitario de captura coherente evita las transiciones en el objeto.

La respuesta para el caso de mediciones sucesivas también es negativa. Nuestros resultados numéricos muestran que la captura es más intensa justo en el caso unitario $\gamma = 0$. Aquí, el defasamiento debido a pulsos frecuentes que aparecen en la descripción unitaria suprime las transiciones.

Apéndice A

Medios anisotrópicos.

En el artículo que reproducimos [10] presentamos la formulación Hamiltoniana de la óptica geométrica en medios anisotrópicos basados en el principio de Fermat. Los resultados se aplicaron a la caracterización de sistemas ópticos compuestos de superficies refractantes entre elementos anisotrópicos. Particularmente interesante es la introducción de un *vector de anisotropía*, el cual recuerda el vector potencial en la teoría del magnetismo.

Hamiltonian foundation of geometrical anisotropic optics

Ana Leonor Rivers, Sergey M. Chumakov, and Kurt Bernardo Wolf

Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas-Cuernavaca,
Universidad Nacional Autónoma de México, Apartado Postal 139-D, 62191 Cuernavaca, Morelos, México

Received March 2, 1994; revised manuscript received November 28, 1994; accepted December 16, 1994

From the minimal-action principle follow the Hamilton equations of evolution for geometrical-optics rays in anisotropic media. In such media the direction of the ray and the canonical momentum are not generally parallel but differ by an anisotropy vector. The refractive index of this version of geometrical optics may have, in principle, any dependence on ray direction. The tangential component of momentum is conserved at surfaces of index discontinuity. It is shown that the factorization theorem of refraction holds for interfaces between two anisotropic media. We find the Lie-Schiff coefficients for axisymmetric interfaces between homogeneous aligned uniaxial anisotropic media to third aberration order.

ACS numbers: 03.60.De, 42.15.Ga.

1. INTRODUCTION: FERMAT'S PRINCIPLE

There has been recent interest in the use of anisotropic optical materials for elements of systems that can image information efficiently. Geometrical-optics ray tracing for refracting surfaces between homogeneous anisotropic media has been studied in Ref. 1 and references therein.

Our first task in this paper is to extend Lie-Hamilton optics to anisotropic media, providing a Hamiltonian foundation. We base our construction on the Fermat extremal principle and are led to Hamilton's equations: a pair of geometrically conjugate coordinates. This model of optical phase space idealizes light rays as lines in space; the refractive index can have any angular dependence. Regarding refraction versus reflection, geometrical Lie optics follows either the ordinary ray or the extraordinary ray.

Although many authors present Fermat's principle as the fundamental axiom of geometrical optics,² most arrive at its Hamiltonian formulation for isotropic media only.³ Birefringence phenomena are commonly presented through the Maxwell equations,^{4,5} with the aim of explaining the behavior of rays at plane interfaces between two homogeneous anisotropic media. These authors concentrate on imaging devices and use the cross-variable Hamiltonian generating function. It has been stressed⁶ that, to compose optical elements by multiplying the corresponding group parameters, as Lie optics does, the Hamiltonian evolution formulation is most appropriate, embodied in the two Hamilton equations for optical phase space. This paper derives and analyzes general anisotropic and inhomogeneous optical media.

The minimum-time principle of geometrical optics, associated with the name of Fermat, states that the ray joining two points takes the path that employs the least time $T_{\text{min}}^{\text{F}} = \int_{\gamma} dt$. This principle is formulated through the classic variational equation⁷

$$\delta \int_{\gamma} dt = 0, \quad (1.1)$$

(Strictly speaking, the time $T_{\text{min}}^{\text{F}}$ should be an extremal if we consider reflection, in which case it can be a maximum.⁸) To obtain more information from the Fermat principle, we need some physical input. If we denote by ds the length element along the ray, by c the velocity of light in vacuum, and by n the refractive index of the medium, the classical velocity of this Newtonian light point is $ds/dt = c/n$.

The refractive index characterizes the optical medium. Constant n indicates that the medium is homogeneous (invariant under translations) and isotropic (invariant under rotations). In anisotropic media the refractive index may also depend on the direction of the ray.

If we denote points on a generic ray by the continuous, differentiable line $q(s)$, $s \in \mathbb{R}$, the ray direction will be $\dot{q}(s) = dq(s)/ds$; since $|dq| = ds$, this is a vector of unit norm, i.e., subject to the constraint $|\dot{q}| = 1$, and thus is on the two-dimensional surface of the sphere S^2 . In inhomogeneous, anisotropic optics, Fermat's principle (1.1) is

$$\delta \int_{\gamma} n(q(s), \dot{q}(s)) ds = 0. \quad (1.2)$$

The Lagrangian formalism identifies $n = n(q, \dot{q})$ with the Lagrangian function of the system; its velocity gradient is the canonical momentum $m = \partial n(q, \dot{q})/\partial \dot{q}$. The problem with this formulation is that $|m| = 0$ when n is independent of direction; so the common isotropic-medium case will not be a particular case or an easy limit in such a formalism.

To circumvent the inadequacy of Eq. (1.2) for the description of the isotropic limit, in Section 2 below we introduce standard Cartesian eueren coordinates, thus reducing the six-dimensional space (q, \dot{q}) with restrictions to a four-dimensional manifold. Here the canonical momentum vector is two dimensional, and the corresponding Hamiltonian is found. Section 3 defines an anisotropy vector that is reminiscent of the vector potential of velocity-dependent mechanical systems. This permits us to lift the Hamilton equations to three-dimensional form and display the geometrical simplicity of our construction, particularly in the isotropic limit. In Section 4

we specialize for quadrupolar and multipolar refractive index anisotropy. Section 5 links the dielectric tensor elements to the quadrupole coefficients. The spherical aberration coefficients of free propagation in homogeneous uniaxial media are found in Section 6, and the refraction sine law for flat interfaces is given in Section 7. Section 8 finds the factorization of refraction by an arbitrary surface into two canonical root transformations, and in Section 9 their Lie-Seidel aberration coefficients are found to third order. Some concluding remarks are gathered in Section 10.

2. SCREEN COORDINATES

In the Lagrangian formulation of mechanics^{9,10} variational principle (1.2) leads to the Euler-Lagrange equations. The canonical momentum of the system is then the three-dimensional velocity gradient of the Lagrangian function.

We use one of the Cartesian coordinates of a real three-dimensional space as the evolution parameter to describe the evolution of the ray. The common convention in optics is to follow the ray along the z axis by a plane screen. In Cartesian coordinates the generic position vector is

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (2.1a)$$

and the generic tangent vector is

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{d\mathbf{q}}{ds} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ 0 \\ \sigma\sqrt{1-q^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\phi \\ \sin\theta \sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}. \quad (2.1b)$$

Equation (2.1b) puts the direction vector in spherical coordinates $(\theta, \phi) \in S_2$, where $0 = \theta = \pi$ and $0 \leq \phi < 2\pi$, and writes the sign σ of \dot{z} . In what follows we shall consider rays in the forward direction $\sigma = +$ and point out when this restriction is unnecessary.

From the last component of Eq. (2.1b), and defining

$$v = \frac{dq}{dz} = \begin{pmatrix} \tan\theta \cos\phi \\ \tan\theta \sin\phi \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

we use

$$ds = \frac{dz}{\sqrt{1-q^2}} = dz\sqrt{1+v^2} = dz \sec\theta \quad (2.3)$$

to write Fermat's principle (1.1) in the form

$$\delta \int_{z_0}^{z_1} dz L(q, z; v(z)) = 0, \quad (2.4a)$$

with the Lagrangian function

$$L(q, z; v) = \sqrt{1+v^2} n(q, z; v). \quad (2.4b)$$

The Lagrangian depends on the position $q(z)$ on the screen at z and on the ray direction through v . We must be careful when the Cartesian components of v are used so that the straight solutions give rays that do not bend over in the z direction, because then θ passes through $\pi/2$ and $d\dot{z}/ds$ passes through zero, where $|\dot{z}| = \omega$.

The Euler-Lagrange equations^{9,10} that follow from variational integral (2.4a) are now of the proper form:

$$\frac{d}{dz} p = \frac{\partial L}{\partial q}, \quad (2.6)$$

where the canonical momentum is

$$p = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{nv}{\sqrt{1+v^2}} + \sqrt{1+v^2} \frac{\partial n}{\partial v}. \quad (2.6)$$

For isotropic media the second summand is zero, and p is well defined.

Finally, through the Legendre transformation,⁹ the Hamilton evolution equations are obtained in their general form

$$\frac{dq}{dz} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dz} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad (2.7a)$$

with the Hamiltonian function

$$H(q, z; p) = p \cdot v - \sqrt{1+v^2} n(q, z; v). \quad (2.7b)$$

Phase space is a connected four-dimensional coordinate patch (q, p) . As is well known,⁹ there exists a smooth map called the Poisson bracket from two functions f and g of phase space to a third function:

$$h = [f, g] = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q}, \quad (2.8)$$

with many useful properties that derive from the underlying Heisenberg-Weyl Lie algebra $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$, $\{q_i, q_j\} = 0$, and $\{p_i, p_j\} = 0$, where the Lie bracket is the Poisson bracket. The definition of the Poisson brackets permits us to rewrite the Hamilton equations in the form of a z translation generated by the Hamilton function:

$$dq = -(H, p) dz, \quad dp = -(H, q) dz. \quad (2.9)$$

The formal solution can be written for the four-vector $w = (q, p)^T$ as

$$dw = -(H, w) dz = \tau \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \left[1 - \frac{\tau}{N} (H(w, z_n), w) \right] w(0), \quad (2.10)$$

where τ is an ordering operator of factors, each infinitesimally close to unity, from right at $z_1 = 0$ to left at $z_N = z$, ordered by points z_n in each successive subinterval z/N , and we use the Lie operator notation $[f, \cdot]g = [f, g]$. There is a standard proof⁹ that Poisson bracket (2.8) with respect to the coordinates $q(z)$ and $p(z)$ is independent of z when these evolve through canonical (or symplectic) transformations. This is the case when the transformation is generated by an analytic function f through the formal limit operator $\exp[f, \cdot]$, in particular Eqs. (2.7)-(2.10) for $f = -zH$. When the generally anisotropic Hamiltonian $H(q, p)$ is independent of z (i.e., as in a homogeneous space or an optical fiber along that axis), the evolution is

$$w(z) = \exp(-z[H, \cdot])w \\ = w - z[H, w] + \frac{1}{2}z^2[H, [H, w]] + \dots \quad (2.11)$$

for $w = w(0)$. If H depends only on p (as in homogeneous media), the series terminates after the term linear in z ,

since

$$\left\{ \begin{aligned} H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \cdot \left(H(\mathbf{p}), \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right) = 0, \\ H(\mathbf{p}), \mathbf{p} &= 0. \end{aligned} \right. \quad (2.12)$$

3. RAY DIRECTION AND MOMENTUM VECTORS

To obtain concrete evolution equations for phase space out of Hamilton equations (2.7), in principle we must solve for \mathbf{v} in terms of \mathbf{p} and \mathbf{q} through Eq. (2.6) and then replace Eq. (2.7b) in Eqs. (2.7a). But θ and ϕ , the spherical coordinates of the ray-direction vector $\hat{\mathbf{q}}$, are the physically significant quantities and the natural parameters to describe anisotropy. In this section we sort out the most convenient form of the equations.

Between the \mathbf{x} and \mathbf{s} derivatives of \mathbf{q} we have

$$\mathbf{v} = \frac{\hat{\mathbf{q}}}{\sqrt{1 - \hat{\mathbf{q}}^2}}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 + \mathbf{v}^2}}. \quad (3.1)$$

Derivatives with respect to \mathbf{v} and $\dot{\mathbf{q}}$ are related by

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} &= \left(\frac{\partial}{\partial v_x}, \frac{\partial}{\partial v_y}, \frac{\partial}{\partial v_z} \right) = \left(\begin{aligned} \cos^2 \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \cos^2 \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned} \right) \\ &= \sqrt{1 - \hat{\mathbf{q}}^2} \left[\begin{aligned} 1 - \hat{x}^2 & \quad -\hat{x}\hat{y} \\ -\hat{x}\hat{y} & \quad 1 - \hat{y}^2 \end{aligned} \right] \left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}}, \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \right) \\ &= \sqrt{1 - \hat{\mathbf{q}}^2} (1 - \hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{q}}^T) \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{q}}}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

where $\hat{\mathbf{q}}^T$ is the transpose of $\hat{\mathbf{q}}$, so $\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{q}}^T$ is a dyadic projection operator (sometimes written $\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{q}}$) that acts as a 2×2 matrix on the components of $\partial/\partial \hat{\mathbf{q}}$.

We write the canonical momentum (2.6) as

$$\mathbf{p} = n\hat{\mathbf{q}} + \mathbf{A}(\mathbf{q}, z, \hat{\mathbf{q}}), \quad (3.3a)$$

thus defining the anisotropy vector

$$\mathbf{A} = \sqrt{1 + \mathbf{v}^2} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{v}} = (1 - \hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{q}}^T) \frac{\partial n(\mathbf{q}, z, \hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{\mathbf{q}}}. \quad (3.3b)$$

The Hamiltonian (2.7) can be written correspondingly as

$$\begin{aligned} H(\mathbf{q}, z; \mathbf{p}) &= \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{q}} - n(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{q}})}{\sqrt{1 - \hat{\mathbf{q}}^2}} \\ &= -(n^2 - |\mathbf{p} - \mathbf{A}|^2)^{1/2} + \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A}}{(n^2 - |\mathbf{p} - \mathbf{A}|^2)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

In isotropic media anisotropy vector (3.3b) is zero, so \mathbf{p} is parallel to $\hat{\mathbf{q}}$. In such media the Hamiltonian $H_{\text{iso}} = n^2 - |\mathbf{p}|^2$ is identified with the x component $p_x = -H_{\text{iso}}$ of a three-vector \mathbf{p} of size n ,¹¹ because $|\mathbf{p}|^2 = |\mathbf{p}|^2 + H_{\text{iso}}^2 = n^2$. In isotropic media the three-vector \mathbf{p} ranges over the Descartes sphere, whose radius changes in response to the local refractive index of the medium (see Fig. 1).

For anisotropic media we can also fill the vectors $\hat{\mathbf{q}}$, \mathbf{p} ,

and \mathbf{A} to three dimensions through noting that

$$n\hat{\mathbf{z}} = n\sqrt{1 - \hat{\mathbf{q}}^2} = (n^2 - |\mathbf{p} - \mathbf{A}|^2)^{1/2} \quad (3.5a)$$

and thus defining

$$\mathbf{p}_z = -H = (n^2 - |\mathbf{p} - \mathbf{A}|^2)^{1/2} + \mathbf{A}_z, \quad (3.5b)$$

$$\mathbf{A}_z = -\frac{n\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{A}}{\sqrt{1 - \hat{\mathbf{q}}^2}} = -\frac{(\mathbf{p} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A}}{(n^2 - |\mathbf{p} - \mathbf{A}|^2)^{1/2}}. \quad (3.5c)$$

The three-vectors of direction $\hat{\mathbf{q}}$, momentum \mathbf{p} , and anisotropy \mathbf{A} are thus characterized by

$$\mathbf{p} = n\hat{\mathbf{q}} + \mathbf{A}(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{q}}), \quad \mathbf{p}_z = -H, \quad (3.6a)$$

$$|\hat{\mathbf{q}}| = 1, \quad \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (3.6b)$$

$$|\mathbf{p} - \mathbf{A}| = n(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{q}}); \quad (3.6c)$$

i.e., we have the orthogonal decomposition of momentum into the direction vector and the anisotropy three-vector:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\partial n}{\partial \hat{\mathbf{q}}} \Big|_{|\hat{\mathbf{q}}|=1} = (1 - \hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{q}}^T) \frac{\partial n}{\partial \hat{\mathbf{q}}} \Big|_{|\hat{\mathbf{q}}|=1} \\ &= \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{\partial n}{\partial \theta} + \frac{\hat{\mathbf{e}}_\phi}{\sin \theta} \frac{\partial n}{\partial \phi}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

The anisotropy vector \mathbf{A} is orthogonal to the direction of ray propagation $\hat{\mathbf{q}}$.

Whereas $\hat{\mathbf{q}}$ sweeps over the ray-direction sphere S_2 , the vector $\mathbf{p} - \mathbf{A}$ draws out a closed surface [Eq. (3.6c)]—the ray surface at the space point \mathbf{q} —and the three-vector \mathbf{p} ranges correspondingly over another closed surface that we call the Descartes ovoid of the anisotropic medium at \mathbf{q} (see Fig. 2).

Hamilton equations (2.7) are thus written in manifestly Euclidean-covariant form as

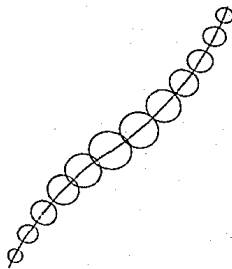


Fig. 1. In isotropic but inhomogeneous media the Descartes sphere guides the ray by changing its radius in response to the local refractive index. The component of \mathbf{p} normal to the gradient of the refractive index is conserved.

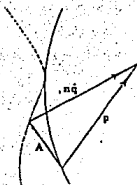


Fig. 2. In anisotropic media the unit ray-direction vector \hat{q} is multiplied by $n(\mathbf{q}, \hat{q})$ and summed to the anisotropy vector $\mathbf{A}(\mathbf{q}, \hat{q})$ to yield the optical momentum three-vector \mathbf{p} . While \hat{q} ranges over the unit sphere, $n\hat{q}$ draws out the ray surface (dotted curve) and \mathbf{p} sweeps over the Descartes ovoid (solid curve).

$$\frac{d\mathbf{q}}{dz} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p} - \mathbf{A}}{p_x - A_x} \quad (3.8a)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dz} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = \frac{n}{p_x - A_x} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{q}} \quad (3.8b)$$

The third component of Eq. (3.8a) is identically unity. From Eq. (3.8b) it follows that changes (increments) of \mathbf{p} are parallel to the spatial gradient of the refractive index:

$$d\mathbf{p} \times \frac{\partial n}{\partial \mathbf{q}} = 0. \quad (3.9)$$

As in the purely isotropic case, Hamilton's second equation thus leads to the Ibn Sahl-Snell¹² law of refraction between two anisotropic media.³

4. MULTIPOLE ANISOTROPIC MEDIA

This Hamiltonian treatment in terms of an anisotropy vector [Eq. (3.7)] is valid for arbitrary (differentiable) dependence of the refractive index on the sphere of ray directions $\hat{q} \in S_2$. We shall next consider the particular case of quadrupoles (which is physically realized in weak, linear birefringent media).

In this case the refractive index n has an isotropic value n^0 plus a quadrupole term:

$$n(\mathbf{q}, \hat{q}) = n^0(\mathbf{q}) + Q(\mathbf{q}, \hat{q}), \quad (4.1a)$$

where

$$Q(\mathbf{q}, \hat{q}) = \sum_{j,k,l,m} Q_{jklm} \hat{q}_j \hat{q}_k \hat{q}_l \hat{q}_m = \hat{q}^T \hat{Q} \hat{q}. \quad (4.1b)$$

If the trace of \hat{Q} is $T = \sum_i Q_{iiii}$, we can subtract $1/3 T(\hat{q}_i^2 + \hat{q}_j^2 + \hat{q}_k^2)$ and include this constant to the monopole part of the medium. Therefore the optical quadrupole matrix \hat{Q} is symmetric and traceless. There are five independent quadrupole coefficients. It is common to restrict consideration to principal axes; in that frame of reference, $\hat{Q} = \text{diag}(Q_x, Q_y, Q_z)$ and $Q_x + Q_y + Q_z = 0$.

We find the anisotropy vector from Eq. (3.7):

$$\mathbf{A}^{(m)} = 2(1 - \hat{q}_i \hat{q}_i^T) \hat{Q} \hat{q}_i = 2[\hat{Q} \hat{q}_i - Q(\mathbf{q}, \hat{q}) \hat{q}_i]. \quad (4.2)$$

This has first- and third-order degree terms in the components of the direction vector \hat{q}_i .

The momentum three-vector of a quadrupole medium can now be obtained in terms of the direction vector as

$$\mathbf{p} = [n(\mathbf{q}, \hat{q}) + 2(1 - \hat{q}_i \hat{q}_i^T) \hat{Q}] \hat{q}_i = (n^0 + 2\hat{Q} - \hat{q}^T \hat{Q} \hat{q}) \hat{q}_i. \quad (4.3)$$

This is shown in (the two-dimensional) Fig. 3 for principal axes.

Smooth functions over a sphere may be subject to the multipole expansion¹³

$$n(\mathbf{q}, \hat{q}) = \sum_{m=0}^{\infty} N^{(m)}(\mathbf{q}, \hat{q}), \quad (4.4a)$$

where each summand is homogeneous of degree m in the components of \hat{q}_i , i.e.,

$$N^{(m)}(\mathbf{q}, \hat{q}) = \sum_i N_{i_1 i_2 \dots i_m} \hat{q}_{i_1} \hat{q}_{i_2} \dots \hat{q}_{i_m} = \hat{q}^T \cdot N^{(m)}. \quad (4.4b)$$

The coefficients $N_{i_1 i_2 \dots i_m}^{(m)}$, with $i_k = x, y, z$, form a tensor of rank m that is symmetric under exchange of any pair of indices and traceless ($\sum_i N_{i_1 \dots i_m i i_m}^{(m)} = 0$); it contains $2m + 1$ independent coefficients. Equation (4.4b) introduces the $(m - 1)$ -linear three-vector $N^{(m)}$.

We find the anisotropy three-vector for each rank m as

$$\mathbf{A}^{(m)} = m(1 - \hat{q}_i \hat{q}_i^T) N^{(m)} = m[N^{(m)} - N^{(m)}(\mathbf{q}, \hat{q}) \hat{q}_i]. \quad (4.5)$$

From this we find the momentum vector as a sum over the multiple components (4.4):

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= n \hat{q}_i + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{A}^{(m)} \\ &= \left[n^0 - \sum_{m=2}^{\infty} (m-1) N^{(m)} \right] \hat{q}_i + \sum_{m=1}^{\infty} m N^{(m)}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

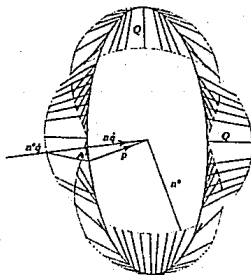


Fig. 3. Quadrupole medium: $n^0 \hat{q}_i$ ranges over the sphere (circle in the two dimensions of the figure) of radius n^0 . $n \hat{q}_i$ ranges over the peanut-shaped surface, and the momentum (two-) vector \mathbf{p} sweeps a Descartes ovoid (ovoid in two dimensions). The lines joining points on the circle to those on the oval relate the direction of the ray with the corresponding direction of the momentum vector. In the two dimensions of the figure the quadrupole matrix is $\hat{Q} = \text{diag}(Q_x, -Q_x)$.

5. COMPARISON WITH MAXWELLIAN ANISOTROPY

Birefringence phenomena in anisotropic optical media are of interest to physical optics. Crystals with one or two distinguished axes (uniaxial or biaxial crystals) interact asymmetrically with the electric (and, to a lesser extent, with the magnetic) fields in light, whose polarization properties are essential to understanding the interaction. Here we shall relate this case to the standard treatments of birefringence.^{4,5}

Electromagnetic fields obey the Maxwell equations. In media that are homogeneous on the scale of the wavelength the electric and magnetic vector fields \mathbf{E} and \mathbf{H} are orthogonal at every point of space and time; their cross product is the Poynting vector $\mathbf{S} = c\mathbf{E} \times \mathbf{H}/4\pi$, pointing in the direction of energy propagation. In geometrical optics, obtained when the wavelength λ vanishes, the Poynting vector gives the direction of ray propagation: $\hat{\mathbf{q}} \parallel \mathbf{S}$. The displacement vector field is given by the first material equation, $\mathbf{D} = \hat{\epsilon}\mathbf{E}$, where $\hat{\epsilon}$ is the dielectric tensor represented in Cartesian coordinates by a 3×3 matrix with elements ϵ_{jk} , $j, k = x, y, z$. The induction vector field is given by the second material equation, $\mathbf{H} = \mu\mathbf{H}$, where μ is the magnetic permeability. To good approximation, it is a constant of the medium.

Energy conservation implies that $\hat{\epsilon}$ is a symmetric matrix⁶ having six independent parameters to characterize a general anisotropic medium with axes in a general orientation. The set of independent parameters in ϵ_{jk} contains one linear combination, the trace, $\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} \text{tr}(\hat{\epsilon}) = \frac{1}{2}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz})$, which is the average dielectric constant. It is invariant under rotation; i.e., it is a scalar. (The three eigenvalues of $\hat{\epsilon}$ are rotation invariants, but only $\bar{\epsilon}$ is linear in ϵ_{jk} .) By means of a three-parameter rotation, $\hat{\epsilon}$ may be brought to the diagonal form $\text{diag}(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z)$ with the same trace and two remaining physical anisotropy parameters. Under rotations the five parameters transform linearly among themselves and are a basis for the spin-2 irreducible representation of the rotation group. The average dielectric constant $\bar{\epsilon}$ is a spin-0 singlet. The multipole refractive indices $N^{lm}(\hat{\mathbf{q}})$ of Section 4 above have $2m+1$ independent parameters and form bases for spin- m irreducible representations of the same group. Coincidence thus implies that there must exist a relation between the five independent quadrupole coefficients Q_{jk} in Eqs. (4.4) and the quintuplet in Eq. 13.

Monochromatic solutions to the Maxwell equations of angular frequency ω are of the general form $\mathbf{X}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{q}) \exp[i(k_0\Phi(\mathbf{q}) - \omega t)]$, where $k_0 = 2\pi/\lambda_0 = \omega/c$ is the vacuum wave number and the surfaces $\Phi(\mathbf{q}) = \text{constant}$ are the wave fronts. We recognize the wave-front normals to be parallel to the geometrical-optics momentum: $\mathbf{p} \parallel \nabla\Phi(\mathbf{q})$ (see Fig. 4). Our refractive index, the length of $\mathbf{p} \parallel \mathbf{A}$, is to be found through the Fresnel formula [this is the phase refractive index of Eq. (115.24) of Ref. 6]. This equation is quadratic in n^2 and has two solutions in terms of the components of $\hat{\epsilon}$; any of them may be taken as the refractive index in our formulation.

For uniaxial crystals, $\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}_z + \epsilon_x$ and $\hat{\epsilon} \neq \hat{\epsilon}_x$. The ordinary ray for this case does not feel the anisotropy, and

MEDIOS ANISOTROPICOS.

Rivera et al.

its branch of the refractive index is a constant given by

$$n_o = \sqrt{\mu\bar{\epsilon}}, \quad (5.1a)$$

and the extraordinary ray is found from Eq. (115.33) of Ref. 6 to be

$$n_e = \sqrt{\mu\bar{\epsilon}} \left/ \left(1 + \frac{\epsilon_x - \bar{\epsilon}_z}{\bar{\epsilon}_z} \sin^2 \theta \right) \right|^{1/2}, \quad (5.1b)$$

where θ is the angle between the ray-direction vector $\hat{\mathbf{q}}$ and a principal axis of the crystal (the chosen optical axis), where the two rays coincide.

The refractive index of our model of quadrupolar anisotropy is given in Eqs. (4.1). For uniaxial media with optical monopole coefficient n^0 we can write the quadrupole matrix as $\hat{Q} = \text{diag}(Q_x, Q_y, Q_z) = \text{diag}(\nu, \nu, -2\nu)$. Then

$$\begin{aligned} n(\hat{\mathbf{q}}) &= n^0 + (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \begin{bmatrix} \nu & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & -2\nu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} \\ &= n^0 + \nu(\hat{x}^2 + \hat{y}^2) - 2\nu\hat{z}^2 \\ &= (n^0 - 2\nu) + 3\nu\hat{q}^2 \\ &= n^0 - 2\nu + 3\nu \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (5.2)$$

When we relate the coefficients n^0 and ν to the physical quantities in Eqs. (5.1),

$$\sqrt{\mu\bar{\epsilon}} = n^0 + \nu, \quad n_e = \sqrt{\mu\bar{\epsilon}} - n^0 - 2\nu, \quad (5.3)$$

then, for weak anisotropy ($|n_e - n_o| \ll 1$), the extraordinary index [Eq. (5.1b)] can be expanded as

$$n_e = (n^0 - 2\nu) \left(1 + \frac{3\nu}{n^0} \sin^2 \theta \right) = n^0 - 2\nu + 3\nu \sin^2 \theta \quad (5.4)$$

and directly compared with Eq. (5.2). As a numerical example, consider quartz at 454.7 nm,¹³ where the values are $n_o = 1.56716$ and $n_e = 1.56671$, and therefore $n^0 = 1.56353$ and $\nu = 0.00318$. The approximation in Eqs. (5.3) and relation (5.4) then expands in powers of $\nu/n^0 = 2 \times 10^{-3}$.

The Fermat-Hamilton foundation of anisotropic optics

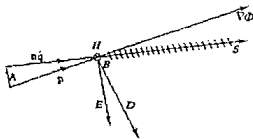


Fig. 4. Maxwell electromagnetic vectors in an anisotropic medium, where $\mathbf{H} = \mu\mathbf{H}$ points into the page. The electric and displacement vectors, \mathbf{E} and \mathbf{D} , are not parallel. The Poynting vector $\mathbf{S} \parallel \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ is the direction of flow of energy and corresponds to the direction of propagation of the ray $\hat{\mathbf{q}}$ in geometrical optics. The wave-front normal $\hat{\mathbf{p}}$ is parallel to the optical momentum \mathbf{p} and orthogonal to the displacement vector \mathbf{D} .

seems to give more mathematical freedom than the Maxwell equations. One can follow either the ordinary ray or the extraordinary ray, but not both, for essentially the same reason that geometrical optics follows either the refracted ray or the reflected one when a space surface of index discontinuity is met. The proper Maxwell treatment includes both rays and predicts their respective polarizations and intensities. These quantities do not belong to the classical list of observables of geometrical optics.

6. FREE PROPAGATION IN HOMOGENEOUS UNIAXIAL MEDIA

Uniaxial anisotropic media are quite ubiquitous: stretched plastic, quartz lenses, etc. When the axis of anisotropy is also the optical z axis, our model is mathematically simple. Here we analyze free propagation as a transformation of phase space (q, p) and are interested in the power-series expansion of the nonlinear part, i.e., the aberration expansion of the uniaxial quadrupole case.

At the end of Section 2 above, we remarked that the Hamilton equations on the standard $z = 0$ screen yield ray positions $q(z)$ on the screen and their canonically conjugate momenta $p(z)$. Instead of p , we have worked mostly with v [see Eq. (2.2)] and q for simplicity and covariance. For the quadrupole uniaxial refractive index in Eq. (5.2), putting q in terms of v through Eqs. (3.1), we can write out the components of momentum [Eq. (4.6)] as

$$\begin{aligned} p &= (n^0 + 4\nu)q - 3\nu q^2 \dot{q} \\ &= (1 + \nu^2)^{-2} [(n^0 + 4\nu) + (n^0 + \nu)v^2] \nu \\ &= [(n^0 + 4\nu) \sin \theta - 3\nu \sin^3 \theta] \left(\frac{\cos \phi}{\sin \phi} \right). \end{aligned} \quad (6.1)$$

When the medium is isotropic, this equation reduces to

$$p = n^0 \frac{v}{\sqrt{1+v^2}}, \quad |p| = n^0 \sin \theta \quad (\nu = 0). \quad (6.2)$$

Free propagation in an anisotropic, homogeneous medium is described by the refractive index n independent of q . Hamilton equations (2.7) and their solutions are

$$\frac{dq}{dz} = v - q(z) = q(0) + z\nu, \quad (6.3)$$

$$\frac{dp}{dz} = 0 - p(z) = p(0). \quad (6.4)$$

Although the solutions are formally independent of the anisotropy of the medium (they are lines in space), the anisotropy enters through relation (6.1) between the ray momentum p and the ray direction v . In the isotropic case, $p = nq$ and we can easily invert Eqs. (6.2) to

$$\nu = \frac{p}{\sqrt{(n^0)^2 - p^2}} \approx \frac{p}{p_0}, \quad |v| = n^0 \tan \theta \quad (\nu = 0). \quad (6.5)$$

In the uniaxial anisotropic case a simple closed inversion of Eq. (6.1) is difficult to find. However, if we expand Eq. (6.1) with a Taylor series in $(v^2)^k$ for $k = 0, 1, 2, \dots$ and propose a similar expansion of v in powers of $(p^2)^k$, then, equating the series, we can find the

expansion coefficients of $v(p)$:

$$\begin{aligned} v(p) &= \frac{1}{n^0 + 4\nu} p + \frac{1/2n^0 + 5\nu}{(n^0 + 4\nu)^2} p^3 \\ &+ \frac{3/2(n^0)^2 + 13/2n^0\nu + 51\nu^2}{(n^0 + 4\nu)^3} (p^2)^2 p + \dots \end{aligned} \quad (6.6)$$

Thus, whereas the second Hamilton equation [Eq. (6.4)] stands as in the isotropic case, $q(z) = q(0) + z\nu(p)$ exhibits a series of terms of degrees 1, 3, 5, ... in $|p|$. In this way the phase-space transformation can be approximated to first, third, etc., aberration orders.¹⁵

Expansion (6.6) is to be substituted into Eq. (6.3) for $q(z)$. The linear term in $z p$ is the paraxial approximation, and we can see that $\nu^2 = n^0 + 4\nu$ plays the role of an effective paraxial refractive index. The nonlinear terms, in $z^2 (p^2)^k p$, are generically called spherical aberrations. In Fig. 5 we plot the coefficients of $(p^2)^k p$ in Eq. (6.6) for $k = 0, 1, 2, 3$ versus the anisotropy parameter ν . Note that, for values of $\nu/n^0 \geq 0.1$ corresponding to oblate index ellipsoids, i.e., prolate ray surfaces such as quartz, the coefficient of the linear term drops to approximately 70% of its isotropic value, and the coefficients of third and higher terms drop even lower, to approximately 50% of isotropic free-flight aberrations. For crystals such as feldspar, which exhibit $\nu < 0$, the coefficients of aberration orders 1 (linear) and 5 grow monotonically, but those of orders 3, 7, etc., reach a maximum and then change sign. Optical elements that contribute with negative spherical aberration can be of some interest in optical design because such elements are difficult to produce with refracting surfaces.

We can now find the evolution Hamiltonian [Eq. (2.7b)], which in homogeneous media is a function of only p , explicitly by substituting $v(p)$ from Eq. (6.6) into Eq. (6.3) for the uniaxial quadrupole medium (6.1) or by partial integration of $[H, q] = -v(p)$ in Eq. (6.6). We find that

$$\begin{aligned} H(p) &= p \cdot v - (n^0 - 2\nu) \sqrt{1 + v^2} - 3\nu \frac{v^3}{\sqrt{1 + v^2}} \\ &= -(n^0 - 2\nu) + \frac{1}{2n^0} p^2 + \frac{n^0 + 10\nu}{8(n^0)^4} (p^2)^2 \\ &+ \frac{3(n^0)^2 + 60n^0\nu + 408\nu^2}{16(n^0)^3} (p^2)^3 + \dots \end{aligned} \quad (6.7)$$

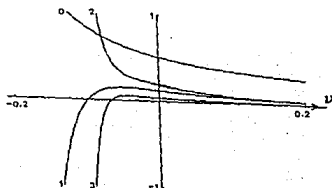


Fig. 5. Behavior of spherical aberration coefficients of free propagation $[p_k(p)]$ for $k = 0, 1, 2, 3$ as a function of the anisotropy parameter ν in an uniaxial crystal.

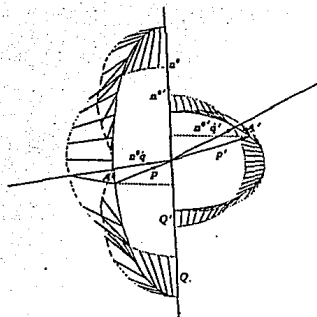


Fig. 6. Descartes diagram for construction of refraction angles between two anisotropic media n and n' . (1) Draw two circles and the corresponding Descartes ovoids for the two media n and n' , joined at a line parallel to the refracting interface at the point of incidence. (2) Draw the direction q of the incoming ray and the corresponding momentum vector p . (3) Project the momentum on the interface; this quantity is conserved. (4) Draw the conserved segment for the second ovoid and its corresponding p' . (5) The associated q' yields the direction of the refracted ray.

In the isotropic case, when $\nu = 0$, this is the expansion of $-\sqrt{n^2 - p^2}$, the well-known optical Hamiltonian¹⁶ for these media.

7. FINITE REFRACTION

The phenomenon of refraction—breaking of rays—occurs at finite discontinuities of the refractive index. Consider first the elementary case in which the surface of index discontinuity is the $z = 0$ plane and there is a ray that crosses this flat interface between the two different anisotropic media. Let the individual refractive indices be $n(q, q)$ and $n'(q, q)$ in the half-spaces. Equation (3.9) restricts the momentum difference $p' - p$ between the two media to lie along the z axis. Hence the projection on the screen will be conserved:

$$p = p'. \quad (7.1)$$

These statements hold for general anisotropic media, where ray tangents and momenta are not collinear. If the anisotropy vectors (3.7) of the two media are not coplanar with the surface normal, the incident and refracted ray tangents are generically not coplanar with the surface normal. Following the analysis of free propagation in homogeneous uniaxial media in Section 6 above, we now particularize our considerations to refraction between two such aligned uniaxial media. Let their refractive indices be $n(q)$ and $n'(q)$ as in Eq. (5.2), with isotropic parameters n^0 and n'^0 and quadrupole anisotropy coefficients ν and ν' , respectively. In the aligned uniaxial case the two refractive indices are axially symmetric independent

of the polar angle ϕ , so the two anisotropy vectors [Eq. (3.7)] are along the same meridian and thus are coplanar with the surface normal (the z axis and line of poles). Refraction between aligned uniaxial media is thus coplanar.

In Fig. 6 we construct (using ruler, compass, and plotter on a plane figure) the Descartes diagram for the point at the interface joining two half Descartes diagrams and matching the length of the momentum vectors p and p' on the interface. To find the angle of refraction θ' in terms of the angle of incidence θ , we construct $q'(q, n^0, \nu; n^0, \nu')$ [cf. Eq. (2.1b)] expanded in series. Through Eqs. (3.1), (6.1), (6.5), and (6.6), with the effective refractive indices $n^* = n^2 + 4\nu$ and $n'^* = n'^2 + 4\nu'$, we find the Ibn Sahl—Snell law of sines for uniaxial anisotropic media:

$$\begin{aligned} \sin \theta' = & \frac{n^*}{n'^*} \sin \theta + \frac{3}{n'^*} \left[\left(\frac{n^*}{n'^*} \right)^3 \nu' - \nu \right] \sin^3 \theta \\ & + \frac{27}{(n'^*)^2} \left(\frac{n^*}{n'^*} \right)^3 \nu' \left[\left(\frac{n^*}{n'^*} \right)^3 \nu' - \nu \right] \sin^5 \theta + \dots \end{aligned} \quad (7.2)$$

The first summand is the usual form of the Ibn Sahl—Snell law; it is here also the paraxial approximation with the ratio of effective refractive coefficients. The succeeding terms are corrections of orders ν^4 and $\sin^{2k+1} \theta$ that are due to anisotropy.

8. ROOTS OF REFRACTION

One of the results of Lie optics is that the finite phase-space transformation that is due to refraction by an interface between two media can be factorized into a product of two root transformations.¹⁷ Each root transformation is a canonical transformation of phase space, i.e., Poisson brackets are preserved, and the volume element $dq \wedge dp$ is invariant.⁸ The free propagation [Eqs. (6.3) and (6.4)] are evidently canonical, and its series expansion approximates the limit by transformations that are canonical. Furthermore, using symbolic computation, we can algorithmically calculate the aberration expansion associated with a refracting surface as an optical element *per se*.¹¹ Finally, truncating this aberration expansion at some order consistently keeps the canonicity of the total transformation to that order.

In Fig. 7 we picture the ray transformation that is due to refraction at a smooth surface $S(q) = \zeta(q) - z = 0$

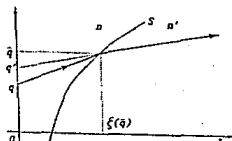


Fig. 7. Refraction at a surface is a map between phase-space points (q, p) and (q', p') . This transformation visibly factors into transformations back and forth from the point of impact Q on the surface $z = \zeta(q)$.

between two general anisotropic, homogeneous media $n(\hat{q})$ and $n'(\hat{q})$. This figure shows the equality between free propagation in the first medium from q at the $z = 0$ screen to the point of impact (indicated by overbars) at $\hat{q} = (\hat{q}, \hat{z})^T = [\hat{q}, \zeta(\hat{q})]^T$ and free propagation in the second medium from q' at the same $z = 0$ screen to the same point of impact. If v and v' are the two ray directions [Eq. (2.2)] on the screen, then the point-of-impact coordinates can be written in two ways:

$$q(\hat{z}) = q + \zeta(\hat{q})v = \hat{q} = q' + \zeta(\hat{q}')v' = q'(\hat{z}). \quad (8.1)$$

This is the first root equation of refraction; it is an implicit equation for \hat{q} .

The vector normal to the surface is $\nabla S(q) = [\zeta_x(q), \zeta_z(q), -1]^T = [\Sigma(q), -1]^T$. If p and p' are the three-vector momenta of the rays on both sides of the surface S , then the incremental limit of Eq. (3.9) restricts $p' - p$ to be parallel to ∇S at $[\hat{q}, \zeta(\hat{q})]$. This we write as the equality of vector products

$$p \times \nabla S(\hat{q}) = \hat{p} \times \hat{k} = p' \times \nabla S(\hat{q}). \quad (8.2)$$

In this equality we have inserted a vector $\hat{p} = (p, p_z)^T$ in the cross product with the unit vector \hat{k} along the z axis (the z component p_z is thus arbitrary). The two three-momenta are decomposed with the use of $p = (p_x, p_y, p_z)^T = (p, H)^T$, where H is the Hamiltonian function, to be indicated as H and H' for each of the media (6.3)–(6.7). From Eq. (8.2) the two-vector \hat{p} is

$$p - H(p)\Sigma(\hat{q}) = \hat{p} - p' - H'(p')\Sigma(\hat{q}). \quad (8.3)$$

This is the second root equation; it is an explicit equation for \hat{p} once \hat{q} has been determined.

We have thus determined the root transformation for generic surfaces $S = \zeta(q) - z = 0$ in isotropic, anisotropic media $n(\hat{q})$. In optical phase space it is

$$\mathcal{R}_{n \rightarrow n'}: q \rightarrow \hat{q} = q + \zeta(\hat{q})v(p), \quad (8.4a)$$

$$\mathcal{R}_{n' \rightarrow n}: p \rightarrow \hat{p} = p - H(p)\Sigma(\hat{q}), \quad (8.4b)$$

where $v(p)$ and $H(p)$ contain the refractive-index function $n(\hat{q})$. From our construction it follows that the refracting surface transformation

$$S_{n \rightarrow n'}: \begin{cases} q \rightarrow q' \\ p \rightarrow p' \end{cases} \quad (8.6a)$$

thus factorizes into the product of the root transformation in the first medium and the inverse root transformation in the second medium:

$$S_{n \rightarrow n'} = \mathcal{R}_{n \rightarrow n'} \mathcal{R}_{n' \rightarrow n}^{-1}. \quad (8.5b)$$

As in the isotropic cases studied above, each root factor depends on only one of the media and the shape of the common surface. When the surface S is in a $z = \text{constant}$ plane, the root transformations (8.4) are a simple free flight by a generic z .

We shall now prove that the root transformation $(q, p) \rightarrow (\hat{q}, \hat{p})$ given by relations (8.4) and its inverse,

$$\mathcal{R}_{n' \rightarrow n}: \hat{q} \rightarrow q = \hat{q} - \zeta(\hat{q})v(p), \quad (8.6a)$$

$$\mathcal{R}_{n \rightarrow n'}: \hat{p} \rightarrow p = \hat{p} + H(p)\Sigma(\hat{q}), \quad (8.6b)$$

are canonical transformations. The simplest derivation of this result uses the Delgado function¹⁸ in the context of canonical transformations defined through a cross-variable Hamiltonian function $F(\hat{q}, p)$ that depends on final position and initial momentum (F_2 in Goldstein's notation¹⁹). This function determines a canonical transformation $(q, p) \rightarrow (\hat{q}, \hat{p})$ through

$$q(\hat{q}, p) = \frac{\partial F(\hat{q}, p)}{\partial p}, \quad \hat{p}(\hat{q}, p) = \frac{\partial F(\hat{q}, p)}{\partial \hat{q}}. \quad (8.7)$$

The function $F = \hat{q} \cdot p$ produces the identity transformation $q = \hat{q}$ and $p = \hat{p}$. Delgado noted that the six-dimensional identity transformation function, restricted to the four-dimensional optical phase space at the surface ζ , leads to the cross-variable Hamiltonian function

$$R(\hat{q}, p) = \hat{q} \cdot p|_{H, \zeta} = \hat{q} \cdot p + \beta p_x = \hat{q} \cdot p - \zeta(\hat{q})H(p), \quad (8.8)$$

which indeed yields through Eqs. (8.7) the root transformations (8.4a) and (8.6b). The factorization theorem is thus extended for refraction between any two anisotropic (uniaxial, biaxial, or general multipolar) homogeneous media.

9. REFRACTING SURFACE TRANSFORMATION

Here we give the explicit root and refracting surface transformations for uniaxial quadrupolar media to third aberration order. We use Eq. (6.6) for $v(p)$ and Eq. (6.7) for $H(p)$ and consider surfaces with rotational symmetry around the axis of the medium,

$$\zeta(q) = \zeta_2 q^2 + \zeta_4 (q^2)^2 + \dots \quad (9.1a)$$

whose normal (two-vector on the screen) is

$$\Sigma(q) = 2\zeta_2 q + 4\zeta_4 q^2 q + \dots \quad (9.1b)$$

Such surfaces touch the optical center $q = 0$ of the $z = 0$ screen. Surfaces $\zeta_0 + \zeta(q)$ that are displaced by ζ_0 will have a root transformation given by $\mathcal{R}_{n \rightarrow n'} \mathcal{R}_{\zeta_0}$, where \mathcal{R}_{ζ_0} is the free propagation by ζ_0 of the optical center of the surface. This factorization is evident from Eq. (6.7), relations (8.4), and their concatenation.

To solve the implicit root equation (8.4a), we find the first-order approximant $\hat{q}^{(1)} = q$ and place it back into the equation. The next iteration takes us to the third-order approximant $\hat{q}^{(3)}$, from which we drop the superindex to write

$$q = q + \frac{\zeta_2}{H^2 + 4\zeta_4} q^2 p. \quad (9.2a)$$

where $n^0 + 4\nu = n^*$ is the effective (paraxial) refractive index of the medium. We substitute this result into relation (8.4b) to obtain the third-order approximant to the momentum transformation:

$$\begin{aligned} \beta &= p + 2\zeta_1(n^0 - 2\nu)q - \zeta_2 \frac{1}{n^0 + 4\nu} p^2 q \\ &+ 2\zeta_3 \frac{n^0 - 2\nu}{n^0 + 4\nu} q^2 p + 4\zeta_4(n^0 - 2\nu)q^2 q. \end{aligned} \quad (9.2b)$$

The paraxial part is recognizable that of a quadratic surface. To third order, for $\nu = 0$ we recover the formulas for isotropic media given in Eqs. (6.4) and (6.6) of Ref. 11.

The root transformation $\mathcal{R}_{n^0, \nu}$ is canonical, as we saw above. We may approximate $\mathcal{R}_{n^0, \nu}$ to third aberration order by the formal operator series

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{n^0, \nu}^{(3)} &= \exp[-\zeta_1/2n^0 p^2 q^2 + \zeta_4(n^0 - 2\nu)(q^2)^2, \circ] \\ &\times \exp[-\zeta_2(n^0 - 2\nu)q^2, \circ]. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Although this operator generates the transformations (Eqs. 9.2) up to terms of third order in q and p , the approximation is canonical.

The inverse root transformation follows a similar algorithm, finding first the first-order approximant to the momentum transformation $p^{(1)} = \beta - 2\zeta_2(n^0 - 2\nu)q$, to relation (8.6b) and then its third-order approximant; substitution into relation (8.6a) yields the position transformations. These are

$$q = \tilde{q} - \zeta_1 \frac{1}{n^0 + 4\nu} \tilde{q}^2 \tilde{p} + 2\zeta_2 \frac{n^0 - 2\nu}{n^0 + 4\nu} \tilde{q}^2 \tilde{q}, \quad (9.4a)$$

$$\begin{aligned} p &= \tilde{p} - 2\zeta_1(n^0 - 2\nu)\tilde{q} + \zeta_2 \frac{1}{n^0 + 4\nu} \tilde{p}^2 \tilde{q} \\ &- 4\zeta_3 \frac{n^0 - 2\nu}{n^0 + 4\nu} \tilde{p} \cdot \tilde{q} \tilde{q} \\ &+ 4 \left[\zeta_4 \frac{(n^0 - 2\nu)^2}{n^0 + 4\nu} - \zeta_4(n^0 - 2\nu) \right] \tilde{q}^2 \tilde{q}. \end{aligned} \quad (9.4b)$$

We obtain the refracting surface transformation [Eq. (8.5)] by substituting Eqs. (9.2) into Eqs. (9.4) and distinguishing by primes. The results are

$$\begin{aligned} q' &= q - \zeta_1 \left(\frac{1}{n^0 + 4\nu'} - \frac{1}{n^0 + 4\nu} \right) q^2 p \\ &+ 2\zeta_2 \frac{(n^0 - 2\nu)' - (n^0 - 2\nu)}{n^0 + 4\nu} q^2 q, \end{aligned} \quad (9.5a)$$

$$\begin{aligned} p' &= p - 2\zeta_1[(n^0 - 2\nu)' - (n^0 - 2\nu)]q \\ &+ \zeta_2 \left(\frac{1}{n^0 + 4\nu'} - \frac{1}{n^0 + 4\nu} \right) p^2 q \\ &- 4\zeta_3 \frac{(n^0 - 2\nu)' - (n^0 - 2\nu)}{n^0 + 4\nu} p \cdot q q \\ &- 2\zeta_4 \frac{(n^0 - 2\nu)' - (n^0 - 2\nu)}{n^0 + 4\nu} q^2 p \\ &+ 4 \left[\zeta_4 \frac{(n^0 - 2\nu)' - (n^0 - 2\nu)^2}{n^0 + 4\nu} \right. \\ &\left. - \zeta_4[(n^0 - 2\nu)' - (n^0 - 2\nu)] \right] q^2 q. \end{aligned} \quad (9.5b)$$

Again, for isotropic media $\nu, \nu' = 0$, we reproduce the results of Eq. (6.8) of Ref. 11.

The refracting surface transformation can be approximated to third order by the operator of the general form

$$\begin{aligned} S_{n^0, \nu}^{(3)} &= \exp[A(p^2)^2 + Bp^2 p \cdot q + C(p \cdot q)^2 \\ &+ Dp^2 q^2 + Ep \cdot qq^2 + F(q^2)^2, \circ] \\ &\times \exp[-\zeta_2(n^0 - 2\nu) - (n^0 - 2\nu)q^2, \circ], \end{aligned} \quad (9.6)$$

where the coefficients A, \dots, E are evaluated and identified with the monomial Lie-Seidel, third-order aberrations¹² in the following way:

$$\text{Spherical aberration: } A = 0, \quad (9.7a)$$

$$\text{Coma: } B = 0, \quad (9.7b)$$

$$\text{Curvature of field: } C = \frac{\zeta_2}{2} \left(\frac{1}{n^0 + 4\nu'} - \frac{1}{n^0 + 4\nu} \right), \quad (9.7c)$$

$$\text{Astigmatism: } D = 0, \quad (9.7d)$$

$$\begin{aligned} \text{Distortion: } E &= -2\zeta_3^2 \\ &\times \frac{(n^0 - 2\nu)' - (n^0 - 2\nu)}{n^0 + 4\nu'}, \end{aligned} \quad (9.7e)$$

$$\begin{aligned} \text{Focus (defocus): } F &= 2\zeta_2^3 \\ &\times \frac{[(n^0 - 2\nu)' - (n^0 - 2\nu)]^2}{n^0 + 4\nu'} \\ &- \zeta_4[(n^0 - 2\nu)' - (n^0 - 2\nu)]. \end{aligned} \quad (9.7f)$$

These coefficients can be found from the explicit transformation (9.6) or through composition of the coefficients contained in Eqs. (9.4) for $\mathcal{R}_{n^0, \nu}$ and $[\mathcal{R}_{n^0, \nu}^{(3)}]^{-1}$ by means of existing tables.¹³

Axisymmetric anisotropic optical systems composed of homogeneous elements separated by refracting interfaces transform optical phase space through concatenation of Eq. (6.6) for free propagation and Eqs. (9.5) and (9.6) for refraction. The operation of concatenation is actually simpler when it is performed between the set of aberration coefficients, as detailed in the literature.¹⁴ Computer algorithms and tables exist for aberration order 7,¹⁵ but their presentation and analysis for realistic systems lies beyond the purpose of this paper.

10. CONCLUDING REMARKS

We derived the Hamilton equations for geometrical-optics rays (lines) in anisotropic optical media from the Fermat principle. The optical momentum vector p is written as the sum of the vector with the length- n tangent to the ray plus an orthogonal anisotropy vector A . Free propagation corresponds to the symplectic maps of the phase space on the standard screen. The refracting surface transformations and the root transformations are given to third aberration order for aligned uniaxial optical systems. Although they are less formal than the full display of their Lie-Seidel aberration coefficients, we regard these examples as illustrative of the interest of anisotropic media in the foundations of geometrical optics in phase space.

Given the homogeneous isotropic Hamiltonian $H_{H_0} = \sqrt{n^2 - p^2}$, where n is a constant, it is easy to infer that homogeneous (isotropic) media will have the Hamiltonian $H_{H_1} = -n(q, z)^2/p^2$. But it is not at all clear how to generalize H_{H_1} to the general anisotropic case. If we were simply to replace $n(q, z)$ in the square root, the first Hamilton equation would not actually tell us of the relation between p and q . The inhomogeneous isotropic Hamiltonian H_{H_0} , given in Eq. (3.4) generalizes H_{H_1} nontrivially and leads to an attractive three-dimensional anisotropy vector [Eq. (3.7)].

The third- aberration-order results displayed here show that, even for the uniaxial realistic case, anisotropy results in a nontrivial lengthening of the coefficients; but also that they can still be handled analytically and incorporated into existing computation algorithms for optical design.

The Fermat principle is less restrictive than the Maxwell equations in providing models for anisotropic geometrical optics. On the other hand, geometrical optics rays can either refract or reflect and follow either the ordinary or the extraordinary ray but not both. Let us recall that the full information about the field can be derived from the geometrical-optics expansion,²¹ that is,

$$E = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{E_m}{(ik_0)^m} \exp(ik_0\psi)$$

for the electric-field vector; a similar result holds for the magnetic-field vector. Here $k_0 = 2\pi/\lambda$ is the wave number, and $\psi(q)$ is an eikonal function ($p = \partial\psi/\partial q$). The rays considered in this paper are the characteristics of the eikonal equations. The polarization, the intensity, and the optical activity will appear through the zero- and higher-order amplitudes E_m in the geometrical-optics expansion. We hope to discuss these problems elsewhere.

We may note finally that, in spite of the great capacity of modern computers to solve complex wave equations numerically, the geometrical-optics approach leads to analytic solutions and to better understanding of image formation in a design process. Furthermore, the use of the geometrical-optics expansion rather than the numerical solution of the wave equations may often increase the accuracy and simplify the calculations.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank François Leyvraz, Alejandro Frank, Luis Muchán, Valery Karnisov, Darryl D. Holm, and Thomas H. Seligman for discussions. We acknowledge the help of Quím. Guillermo Kröttsch with the figures. This research was supported under Project Universidad Nacional Autónoma de México UNAM-DGAPA IN 104293 by the Universidad Nacional Autónoma de México-Dirección General de Asuntos del Personal Académico.

Ana Leonor Rivera is also with the Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, under scholarship from the Universidad Nacional Autónoma de México-Dirección General de Asuntos del Personal Académico.

REFERENCES

1. S. C. McClain, L. W. Hillman, and R. A. Chipman, "Polarization ray tracing in anisotropic optically active media. I. Algorithms," *J. Opt. Soc. Am. A* **10**, 2371-2382 (1993); "Polarization ray tracing in anisotropic optically active media. II. Theory and physics," *J. Opt. Soc. Am. A* **10**, 2383-2393 (1993).
2. R. P. Feynman, R. D. Leighton, and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics* (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1963).
3. M. Herzberger, *Modern Geometrical Optics* (Interscience, New York, 1958); R. J. Regis, "The modern development of Hamiltonian optics," in *Progress in Optics*, E. Wolf, ed. (North-Holland, Amsterdam, 1965), Vol. 1, pp. 1-29; J. A. Arnaud, "Hamiltonian theory of beam mode propagation," in *Progress in Optics*, E. Wolf, ed. (North-Holland, Amsterdam, 1973), Vol. XI, pp. 247-304; R. D. Guenther, *Modern Optics* (Wiley, New York, 1990); E. Hecht and A. Zajac, *Optics* (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1972); K. D. Miller, *Optics* (University Science, Mill Valley, Calif., 1988); C. S. Hastings, *New Methods in Geometrical Optics* (Macmillan, New York, 1927); J. W. Blaker, *Geometric Optics* (Dekker, New York, 1971).
4. M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, 6th ed. (Pergamon, Oxford, 1984).
5. H. A. Buchdahl, *An Introduction to Hamiltonian Optics* (Cambridge U. Press, Cambridge, 1970).
6. F. W. Hawkes, "Lie methods in optics: an assessment," in *Lie Methods in Optics*, K. B. Wolf, ed., Vol. 352 of Lecture Notes in Physics (Springer-Verlag, Heidelberg, 1989), pp. 1-17.
7. A. Brueker, *Variational Principles of Physics* (Dover, New York, 1963), p. 222.
8. R. K. Luneburg, *Mathematical Theory of Optics* (U. California Press, Los Angeles, 1944).
9. H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 2nd ed. (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1980).
10. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Field Theory* (Nauka, Moscow, 1972).
11. A. J. Dragt, E. Forest, and K. B. Wolf, "Foundations of a Lie algebraic theory of geometrical optics," in *Lie Methods in Optics*, K. B. Wolf, ed., Vol. 250 of Lecture Notes in Physics (Springer-Verlag, Heidelberg, 1986), Chap. 4, pp. 105-158.
12. R. Raehed, "A pioneer in anastigmatism—Ibn Sahl on burning mirrors and lenses," *Isis* **81**, 464-491 (1990); *Geometrie et Dioptrique au X^e siècle: Ibn Sahl, al-Qahī, et Ibn al-Haytham*, Collection Sciences et Philosophie Arabes, Textes et Études (Les Belles Lettres, Paris, 1993).
13. R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications* (Wiley, New York, 1974).
14. F. A. Jenkins and H. E. White, *Fundamentals of Optics* (McGraw-Hill, New York, 1976).
15. K. B. Wolf, "Symmetry-adapted classification of aberrations," *J. Opt. Soc. Am. A* **6**, 1220-1232 (1989).
16. A. J. Dragt, "Lie-algebraic theory of geometrical optics and optical aberrations," *J. Opt. Soc. Am.* **72**, 372-379 (1982).
17. M. Navarro-Sand and K. B. Wolf, "Factorization of the phase-space transformation produced by an arbitrary refracting surface," *J. Opt. Soc. Am. A* **3**, 340-346 (1986).
18. J. Delgado, Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana, Iztapalapa, Mexico (personal communication, 1994).
19. K. B. Wolf, "Nonlinearity in aberration optics," in *Symplectic and Nonlinear Phenomena*, D. Levi and P. Winternitz, eds., Proceedings of the International School on Applied Mathematics, Centro Internacional de Física (CIF), Paipa, Colombia, February 22-26, 1988, Vol. 9 of CIF Series (World Scientific, Singapore, 1989), pp. 376-429.
20. K. B. Wolf and G. Kröttsch, "Group-classified polynomials of phase space in higher-order aberration expansions," *J. Symb. Comput.* **12**, 673-685 (1991).
21. P. Debye, *Polar Molecules* (Chemical Catalog, New York, 1929).

Apéndice C

Astigmatismo.

El programa que incluimos en este apéndice utiliza el esquema de Crank-Nickolson [41] para resolver la ecuación diferencial:

$$i \frac{dA}{dz} = -\frac{d^2 A}{dx^2} + \left(\frac{x^2}{2} + \epsilon x^4 \right) A,$$

con la condición inicial

$$A(z=0, x) = \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2}\right)$$

la cual resulta de la evolución bajo el operador de astigmatismo $X^2 P^2$.

El programa está escrito en Fortran 77 y lo corrimos en la computadora Hewlett Packard (ce).

PROGRAM X2P2

program using the Crank-Nickolson scheme solves the problem:
 $i \cdot dA/dz = \{ -d^2A/dx^2 + (x^2/2 + ax^4) A \}$
 with initial conditions $A(z = 0, x) = \exp(-(x-x_0)**2/2)$

implicit none

complex A(18384),
 1 IM, RE, ULEFT, URIGHT, ZERO

real x, dx, dz, alfa, z, x0

integer nx, nz, ix, iz, ileft, iright, ierr, nd2

common/cmplx/re,IM,zero

common/step1/ileft,uleft,iright,uright,alfa

PARAMETER (NX=18384, ND2=NX/2, X0=5.e0)

OPEN (10, FILE='ba.dat', STATUS='NEW', IOSTAT=IERR)

OPEN (9, FILE='b5.dat', STATUS='NEW', IOSTAT=IERR)

DX=1.e-2

RE=cmplx(1.e0,0.e0)
 IM=cmplx(0.e0,1.e0)
 ZERO=cmplx(0.e0,0.e0)

uleft=zero
 uright=zero
 iright=1
 ileft=1
 nz=10000
 dz=2.e-5

alfa = dx**2/dz

do ix=1,nx
 X=(IX-ND2)*dx-x0
 a(ix) = exp(-(X*X)/2.e0)*RE
end do

z = 0.e0

do iz = 1, nz
 call step (a, nx, z, a, dz, dx)
 write (*,*) z
end do

do ix=1,nx
 X=(IX-ND2)*dx
 alfa=real(a(ix))*real(a(ix))+imag(a(ix))*imag(a(ix))
 write(9,*) x, alfa, real(a(ix)), imag(a(ix))
 write(10,*) real(a(ix))
 write(10,*) imag(a(ix))

```

c      PROGRAM X2P2
c
c      program using the Crank-Nickolson scheme solves the problem:
c      i*dA/dz = { -d2A/dx2 + (x2/2+ex4) A}
c      with initial conditions A(z = 0,x) = exp(-(x-x0)**2/2)

      implicit none

      complex A(18384),
      1 IM, RE, ULEFT, URIGHT, ZERO

      real x, dx, dz, alfa, z, x0

      integer nx, nz, ix, iz, ileft,  iright, ierr, nd2

      common/cmplx/re,IM,zero
      common/step1/ileft,uleft,iright,uright,alfa
      PARAMETER (NX=18384, ND2=NX/2, X0=5.e0)

      OPEN (10, FILE='ba.dat', STATUS='NEW', IOSTAT=IERR)
      OPEN (9, FILE='b5.dat', STATUS='NEW', IOSTAT=IERR)

      DX=1.e-2
      RE=cmplx(1.e0,0.e0)
      IM=cmplx(0.e0,1.e0)
      ZERO=cmplx(0.e0,0.e0)

      uleft=zero
      uright=zero
      iright=1
      ileft=1
      nz=10000
      dz=2.e-5

      alfa = dx**2/dz

      do ix=1,nx
         X=(IX-ND2)*dx-x0
         a(ix) = exp(-(X*X)/2.e0)*RE
      end do

      z = 0.e0

      do iz = 1, nz
         call step (a, nx, z, a, dz, dx)
         write (*,*) z
      end do

      do ix=1,nx
         X=(IX-ND2)*dx
         alfa=real(a(ix))*real(a(ix))+imag(a(ix))*imag(a(ix))
         write(9,*) x, alfa, real(a(ix)), imag(a(ix))
         write(10,*) real(a(ix))
         write(10,*) imag(a(ix))
      end do

```



```

Close (10)
Close (9)

write(*,*) 'FIN'
stop

END

subroutine step (a, nx, z, adz, dz, dx)

c calculates solution on next layer
c a(nx) is function on layer z (input of sbroutine)
c adz(nx) is solution on layer z+dz (output of subroutine)
c z is changed by z+dz at output

implicit none

integer ix, nx, ileft,  iright
complex a(nx), adz(nx), uleft,  uright, E1, E2,
1 IM, RE, ZERO, a1(18384),b1(18384),c1(18384),f(18384)
real dx, dz, d, alfa, z, x2, d1, eps
common/cmplx/re,IM,zero
common/step1/ileft,uleft,iright,uright,alfa

eps=0.1
E1=1/DZ*IM
D1=1/DX/DX
DO 10 ix = 1, nx
  D1 = (IX -NX/2)*DX
  x2 = d1*d1
  E2 = x2/2.e0*(0.5+eps*x2)
  A1(ix) = D*RE
  B1(ix) = (2.e0*D+E2)*RE-E1
  C1(ix) = A1(ix)
  F(ix) = -D*A(ix+1)+(E1+(2.e0*D+E2)*RE)*A(ix)-D*A(ix-1)
10 CONTINUE

call SOLVE(F,Nx,A1,B1,C1,uLEFT,ILEFT,uRIGHT,IRIGHT,dx)
CALL EQUAL(adz,F,nx)
z = z+dz
return
end

SUBROUTINE EQUAL(A,B,N)
complex A(N),B(N)

```

```

DO 1 I=1,N
1  A(I)=B(I)
   RETURN
   END

SUBROUTINE SOLVE(F, IDIM,A,B,C, BLEFT, ILEFT, BRIGHT, IRIGHT,H)

C  U(N+1)*A(N)-U(N)*B(N)+U(N-1)*C(N)=F(N)
C  H - MESH SPACING
C  IF (ILEFT.EQ.1) U(1)=BLEFT
C  IF (ILEFT.EQ.2) DU(1)/DX=BLEFT
C  IF (IRIGHT.EQ.1) U(IDIM)=BRIGHT
C  IF (IRIGHT.EQ.2) DU(IDIM)/DX=BRIGHT
C  IF (IRIGHT.EQ.3) DU(IDIM)/DX=BRIGHT*U(IDIM)
C  ON EXIT U(I) - IN F(I)

complex UN,F(idim),A(idim),B(idim),C(idim),
1      ALFA(18384),BETA(18384),BLEFT,BRIGHT,DEN
real h
UN=cplx(1.e0,0.e0)
IF (ILEFT.EQ.1) THEN

ALFA(2)=cplx(0.e0,0.e0)
BETA(2)=BLEFT

ELSE IF (ILEFT.EQ.2) THEN

ALFA(2)=(A(1)+C(1))/B(1)
BETA(2)=-F(1)/B(1)

ELSE
RETURN
END IF

DO 1 I=2, IDIM
DEN=UN/(B(I)-ALFA(I)*C(I))
ALFA(I+1)=A(I)*DEN
1  BETA(I+1)=(BETA(I)*C(I)-F(I))*DEN
   IF (IRIGHT.EQ.1) F(IDIM)=BRIGHT
   IF (IRIGHT.EQ.2)
2   F(IDIM)=(ALFA(IDIM+1)*(2*H*BRIGHT+BETA(IDIM))+BETA(IDIM+1))/
3   (UN-ALFA(IDIM)*ALFA(IDIM+1))
   IF (IRIGHT.EQ.3)
1   F(IDIM)=BETA(IDIM)*(UN+.5e0*H*BRIGHT)/
2   (UN-.5e0*H*BRIGHT-(UN+.5e0*H*BRIGHT)*ALFA(IDIM))
DO 2 I=1, IDIM-1
K=IDIM-I
2  F(K)=ALFA(K+1)*F(K+1)+BETA(K+1)
   RETURN
   END

```

Apéndice D

Evolución no lineal en el espacio fase.

En el artículo que reproducimos [45] analizamos la diferencia entre la dinámica clásica y cuántica calculando la historia temporal de las funciones de Wigner para el Hamiltoniano p^4 y el medio de Kerr óptico.

Mar 06 10:46 1996 /tmp/print.20405 Page 1

Return-Path: <F.KOP@elsevier.nl>
X400-Received: by /PRMD=surf/ADMD=400net/C=nl/; Relayed;
Wed, 6 Mar 1996 13:09:40 +0100
X400-Received: by mta relay.surfnet.nl in /PRMD=surf/ADMD=400net/C=nl/;
Relayed; Wed, 6 Mar 1996 13:09:40 +0100
X400-Received: by /PRMD=SURF/ADMD=400NET/C=NL/; converted (ia5-text); Relayed;
Wed, 6 Mar 1996 12:08:58 +0100
Date: Wed, 6 Mar 1996 12:08:58 +0100
X400-Originator: F.KOP@elsevier.nl
X400-Recipients: non-disclosure;;
X400-Mts-Identifier: [/PRMD=SURF/ADMD=400NET/C=NL/;G0000161B06MAR199613085270]
X400-Content-Type: P2-1984 (2)
Content-Identifier: HO1007
Alternate-Recipient: Allowed
To: rivera@ce.ifisicam.unam.mx
Subject: HO1007

Dear Dr. Rivera

Your article entitled

On the phase space ...

has been accepted for publication in Physics Letters A and sent to us by the editor.

We can considerably speed up publication if you send us

a (La)TeX or RevTeX file before 13 March.

If you do so please use the same subject line for your message as above.

Thank you very much.

Yours sincerely,

D. de Jonge,

Editorial assistant

Email : nhpdesked@elsevier.nl

ON THE PHASE SPACE DESCRIPTION OF THE QUANTUM NONLINEAR DYNAMICS

N.M. Atakishiyev, S.M. Chumakov, A.L. Rivera and K.B. Wolf

*IMAS-Universidad Nacional Autónoma de México,
Apartado Postal 48-3, 62551 Cuernavaca, Mor., México*

Abstract

We analyze the difference between classical dynamics (geometric optics) and quantum dynamics (wave optics) by calculating the time history of the Wigner function for the simplest nonlinear Hamiltonians which are fourth-degree polynomials in p and q . It is shown that the moments of the Wigner function carry important information about the state of a system and can be used to distinguish between quasiclassical and quantum evolution.

1 INTRODUCTION

The standard formulation of quantum mechanics either in the Schrödinger or in Heisenberg pictures may create an impression that quantum and classical dynamics are completely different. However, there are representations [0] in which quantum dynamics seems to resemble classical statistical mechanics, and where the state of a quantum system may be represented by the quasiprobability distribution in phase space of the corresponding classical system. Of course, there are at least two important differences. Firstly, quasiprobability distributions may take negative values (unlike the true probability distributions). Secondly, the classical distribution can be localized at a point in phase space, whereas the quantum distribution must always be spread in a finite phase volume, in agreement with uncertainty relations. Let us take an initial distribution which is consistent with the uncertainty relations and describes a real quantum particle. Then, *what is the difference between classical and quantum dynamics in phase space?*

The classical dynamical law is very simple. Every element of phase space moves along the classical trajectory while preserving its volume. If at time $t=0$ the probability to find a particle in a unit volume at the point q_0, p_0 was

$W_d(q_0, p_0)$, then at time t the probability distribution is

$$W_d(q, p; t) = W_{cl}(q_0(q, p, t), p_0(q, p, t)) \quad (1)$$

where $q(t), p(t)$ is the classical trajectory passing through the point q_0, p_0 at time $t = 0$. How much can this image help us to understand quantum dynamics? This question is important also for optical applications, since the optical Helmholtz equation in the paraxial approximation is reduced to the Schrödinger one. Then the distance along the optical axis plays the role of the time t in mechanics. For simplicity, we consider here the two-dimensional case and denote a coordinate perpendicular to the optical axis by q . Then the canonically conjugate momentum p describes the direction of the ray at the point q, t . The classical limit corresponds to geometric optics.

2 LINEAR TRANSFORMATIONS

Linear homogeneous canonical transformations [0] are generated by Hamiltonians which are second-degree polynomials in p and q . They lead to linear equations of motion which are identical in classical and quantum mechanics. Therefore the solutions to the quantum equations (the Heisenberg operators) have a form similar to the classical trajectories $p(t), q(t)$. In optics, linear transformations describe Gaussian systems.

Among the various quasiprobability distributions, there is only one for which the linear quantum evolution law coincides with the classical one in Eq. (1) [0]. This is the Wigner function,

$$W(q, p; t) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} dr e^{2i\pi r} \Psi^*(q+r; t) \Psi(q-r; t). \quad (2)$$

Here, the wave function $\Psi(q; t)$ is a solution of the Schrödinger equation in the coordinate representation.

We shall refer to the classical probability distribution (1) evolving from the initial conditions $W(p_0, q_0; t = 0)$ as the 'classical Wigner function'. Therefore, the classical and quantum Wigner functions evolve identically in linear dynamics. The Wigner function provides the closest possible description of quantum and classical dynamics.

3 NONLINEAR DYNAMICS

We consider here two examples of nonlinear dynamics generated by the simplest nonlinear Hamiltonians which are the fourth-degree polynomials in p and q . Such operators describe in wave optics the third-order approximation to the paraxial regime; *i.e.*, they lead to the aberrations of images in optical devices [0]. In the nonlinear case, the classical solution does not determine the quantum dynamics, since higher moments of p and q enter into the Heisenberg equations of motion. The mean values of these products (*e.g.*, $\langle\{pq\}(t)\rangle$) become additional variables which are absent in the classical case.

We start with the Hamiltonian

$$H = p^4$$

which corresponds in wave optics to the first correction to paraxial free propagation (spherical aberration); it also describes the first relativistic correction to the Schrödinger equation.

We show in Fig. 1 the classical and quantum evolution of the Wigner function for the Hamiltonian p^4 when the initial state is a vacuum coherent state (a Gaussian centered at the origin of the phase plane). After p^4 evolution, the resulting state is no longer a Gaussian, but is represented by a hill that rapidly spreads in q . The difference between the classical (Fig. 1c) and quantum (Fig. 1a,b) cases lies in the oscillations of the Wigner function which appear in the latter. They are seen in the level plots as small islands forming in the concave part of the main hill; their area is considerably smaller than the area of the vacuum state. The presence of these 'quantum oscillations' in phase space clearly indicates the quantum character of the evolution (in a comparison with the quasiclassical evolution discussed in Section 2). The stronger are the oscillations, the 'more quantum' state we have. These oscillations are absent for generalized coherent described by Gaussian Wigner functions (which, therefore, are quasiclassical states).

However, it is inconvenient to plot many graphs of the Wigner function for different time instants, to conclude how nonclassical (or how quasiclassical) is the evolution. We would like to have a numeric parameter which would allow us to distinguish between classical and quantum dynamics. There are, at least, two candidates to play this role. Firstly, it is the left-hand side of the Schrödinger-Robertson uncertainty relation [0],

$$\delta = \sigma_{qq}\sigma_{pp} - \sigma_{qp}^2 \geq \frac{1}{4} \quad (3)$$

where \bar{q} and \bar{p} are the mean values of the coordinate and momentum; $\sigma_{qq} =$

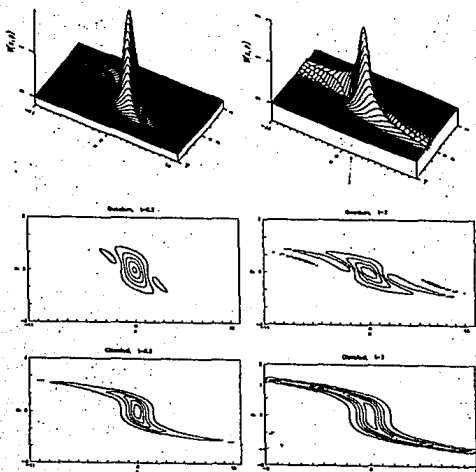


Fig. 1. Evolution of the quantum and classical Wigner functions for the Hamiltonian p^4 . (a) 3-dimensional plots of the quantum Wigner functions for times $t = 0.5$ and $t = 2.0$; (b) level plots of the same quantum Wigner functions; (c) level plots of the classical Wigner functions for the same time instants.

$(\Delta q)^2$ and $\sigma_{pp} = (\Delta p)^2$ are the variances; $\sigma_{qp} = (qp + pq)/2 - \bar{q}\bar{p}$ describes correlations between coordinate and momentum fluctuations. Here the brackets $\langle \dots \rangle$ denote the average over a given quantum state. The equality in Eq. (3) holds for pure Gaussian states. Dodonov and Man'ko noticed that the value δ in Eq. (3) is invariant under linear canonical transformations both in quantum and classical mechanics [0]. For nonclassical states δ describes the growth of quantum fluctuations. Under nonlinear transformations, however, δ is not an invariant even in classical mechanics. The Dodonov-Man'ko parameter δ can

be thus used to characterize the degree of nonlinearity of the system, rather than the degree of nonclassical behavior of the system, as was noted in Ref. [0]. This parameter is in fact very useful to describe the short time nonlinear behavior even if it does not feel global effects, such as Schrödinger cat states, which appear for longer times.

The difficulty in describing quantum fluctuations for Schrödinger cat states can be overcome by taking advantage of entropy as a measure of fluctuations. Since we have no true distribution in phase space, Wehrl [0] proposed to calculate the entropy using the nonnegative Q-function $Q(q, p)$,

$$S_Q = - \int Q \log Q \frac{dpdq}{2\pi}, \quad (4)$$

instead of a real distribution. The Wehrl entropy carries more precise information about the phase volume occupied by the quantum state and is especially convenient for the description of the Schrödinger cat states [0]. Unfortunately, S_Q is not invariant under the squeezing transformation. The reason is that the Q-function behaves nonclassically under squeezing transformation, generated by the quadratic generator $pq + qp$, see e.g., [0].

We would have an appropriate measure of the quantum nature of the state if we could calculate the entropy using the Wigner function as a probability distribution. Unfortunately, this is impossible, since the Wigner function can have negative values. (Moreover, these negative values are known to be an important manifestation of the nonclassicality of the state.) However, we note that the moments of the Wigner function,

$$I_k(t) = \frac{k}{2\pi} \int W^k(p, q; t) \frac{dpdq}{2\pi}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

have the desirable properties. The classical counterparts of these moments are invariant under any canonical transformations, as follows directly from the phase volume conservation. In the quantum dynamics, these moments are preserved by any linear canonical transformations but are changed by nonlinear transformations. For all the quasiclassical states described by Gaussian wave functions, these moments (in our normalization) are equal to unity. The difference from unity may serve as a measure of the nonclassical nature of the state. On the other hand, the change in these moments in the course of nonlinear evolution reflects an extra growth of the quantum fluctuations in comparison with the corresponding classical dynamics; it also provides an information of how closely the process can be described by the quasiclassical approximation.

We show in Fig. 2 the time evolution of the moments of the Wigner function

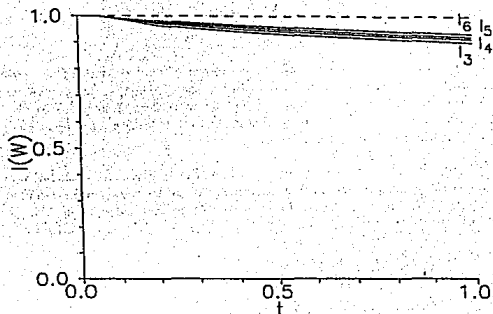


Fig. 2. Time evolution of the moments of the quantum Wigner function for the Hamiltonian p^4 .

under the Hamiltonian p^4 . It is clear that the normalization condition always implies $I_1 = 1$. Furthermore, $I_2 = 1$ for any pure state. (For mixed states described by the density matrix ρ , the second moment is equal to the purity of the state, $I_2 = \text{trace}(\rho^2)$ [0].) I_2 is shown in Fig. 2 to test the quality of our numerical calculations. The decrease of the moments I_k for $k \geq 3$ reveals the difference between classical and quantum dynamics. We note that the behavior of the moments for the Hamiltonian p^4 is quite flat. This indicates that quasiclassical states remain a good approximation to quantum states.

4 KERR MEDIUM

A successful model of active optical media in which self-interaction of the field takes place is the Kerr medium. Its Hamiltonian is a harmonic oscillator which describes a single quantized mode of the electromagnetic field of a frequency ω , plus a self-interaction term with a coupling constant χ [0,0,0]. In quantum electrodynamics, the Hamiltonian is usually written in terms of the photon number operator $\hat{n} = a^\dagger a = p^2/2\omega + \omega q^2/2$ as

$$H = \omega \hat{n} + \chi \hat{n}^2, \quad (6)$$

here, $\hbar = 1$. It is clear that the harmonic oscillator Hamiltonian and the total Kerr Hamiltonian have common eigenvectors. The photon number is conserved, but there is a nontrivial evolution of the phase of the field.

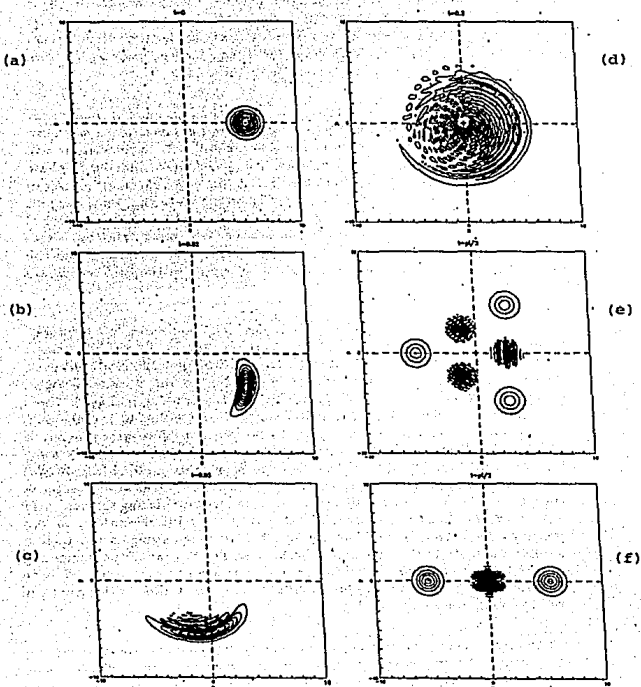


Fig. 3. Evolution of the quantum Wigner function for the Kerr medium with an initial coherent state described by a Poisson distribution with $\bar{n} = 30$. We see Schrödinger cats for times $t = \pi/3$ and $t = \pi/2$.

The time evolution of the Wigner function under the Kerr Hamiltonian (6) is shown in Fig. 3. The corresponding evolution of the moments is shown in Fig. 4. In these figures we choose $\chi = 1$. The first term in the Kerr Hamiltonian leads to the 'fast' rotation of the graphs with angular frequency ω ; we work in the interaction picture, which subtracts this rotation.

The initial Gaussian Wigner function is shown in Fig. 3a. For small time $t = 0.02$, the Gaussian is stretched and rotated in the phase plane as shown in Fig. 3b; the moments —shown in Fig. 4— are still ~ 1 , so the state is still close to the semiclassical one. It is now squeezed in a definite direction in phase plane. This squeezing can be seen clearly in Fig. 3b. Note that in the graphs of the Q -function it is more difficult to visually notice squeezing, since the hills are 'fatter'. The Q -function overestimates the fluctuations in the squeezed states. Evolution by free propagation in a linear medium rotates the phase plane of the field by the bare harmonic oscillator Hamiltonian. One can use this additional rotation to achieve the best squeezing in the field coordinate or momentum [9].

As time advances —see Fig. 3c— it becomes clear that the hill is stretched along a circle (not along a straight line). As the phase spreads, the hill forms a crescent. The deformation of the top of the hill is still quasiclassical. However, the shape of the hill is already sufficiently bent for the 'quantum oscillations' to appear. When the moments I_k are still of the order 1 in Fig. 4, these oscillations are weak and their contribution to the state volume is still small. The area of the hill increases slowly while the spread in phase grows faster, so we may expect an amplitude squeezing. This squeezing occurs slightly away from the radial direction, but it can be transformed into a radial (amplitude) squeezing if we shift the origin of phase plane, so as to put it at the center of curvature of crescent. Physically, this can be realized by placing the nonlinear Kerr medium inside of one arm of a Mach-Zehnder interferometer, as was proposed by Kitagawa and Yamamoto [9]. Strong squeezing in the photon number fluctuations can be achieved in this way. The Kerr amplitude squeezing can be further enhanced by taking as initial state an already squeezed state [9]. Note finally that the quantum oscillations are not visible in the graphs of the Q -function used in Ref. [9].

As time evolves further, Fig. 3d, the phase spread reaches 2π and the 'quantum oscillations' become really strong. It also becomes clear that the reason for these oscillations is the self-interference in the phase space. One can say that different parts of the quasiprobability distribution create interference fringes when meeting each other. At some time instants the self-interference leads to standing waves along the circle. These waves are formed in the Kerr medium at times $\chi t = l\pi/m$, where l, m are integer numbers, $l < m \approx \sqrt{n}$. These are just the Schrödinger cats [9]; see Figs. 3e, f.

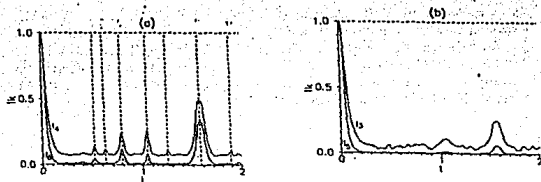


Fig. 4. Time evolution of the moments of the quantum Wigner functions for the Kerr Hamiltonian. (a) Even moments I_2 (dotted line), I_4 and I_6 . (b) Odd moments I_1 (dotted line), I_3 and I_5 . Dashed vertical lines correspond to time instants $\pi/6$, $\pi/5$, $\pi/4$, $\pi/3$, $2\pi/5$, $\pi/2$ and $3\pi/5$, when Schrödinger cats appear.

Most of the information contained in the Wigner function plots can be restored from the graphs of the moments I_{1-6} , Fig. 4. The time instants when we can expect squeezing or amplitude squeezing belong to the initial peak, when the moments are still close to unity. When the Wigner function shows complicated interference fringes, moments are kept in their lowest steady values. The 'Schrödinger cat' times correspond to the well pronounced peaks of the moments. One can easily estimate the maximum values of the moments in these peaks for small numbers of the cat components.

5 CONCLUSIONS

The well-known difference between classical and quantum dynamics is connected with the phenomenon of self-interference in phase space for a quasi-periodic motion, which leads to the Schrödinger cat states $[0,0]$. It is a 'global phenomenon' since the quantum state spreads over all the phase volume allowed by the conservation laws. It reveals itself usually at times longer than the fundamental period of the oscillation of the system.

We have shown here that quantum nonlinear dynamics also differs from its classical counterpart for short times, when the state is still well localized in phase space. The higher moments of the Wigner function can be used as numerical measure of this difference, since the moments change in the quantum case but are constants in the classical picture.

Acknowledgments

We want to thank V. V. Dodonov, A. Frank, A.B. Klimov, V.I. Man'ko, A. Orłowski and R. Tanaś for encouraging discussions. A. L. Rivera is also in Facultad de Ciencias, under scholarship from DGAPA, Universidad Nacional Autónoma de México and K. B. Wolf is on sabbatical leave at Centro Internacional de Ciencias A.C. This work was supported by the Project DGAPA-UNAM IN-106595 "Óptica Matemática".

References

- [1] M. Hillery, R.F.O'Connell, M.O.Scully and E.P.Wigner, *Phys. Rep.*, **106** (1984) 121.
- [2] M.Moshinsky and C.Quesne, *J. Math. Phys.*, **12** (1971) 1772.
- [3] Hui Li, *Phys. Lett. A*, **188** (1994) 107.
- [4] A.J. Dragt, E. Forest and K.B. Wolf, in *Lie Methods in Optics*, Ed. by J. J. Sánchez-Mondragón and K.B. Wolf, Lecture Notes in Physics, Vol. 250 (Springer-Verlag, Heidelberg, 1986), p. 104.
- [5] V.V. Dodonov, E.V. Kurmyshev and V.I. Man'ko, *Phys. Lett. A*, **70** (1980) 150.
- [6] V.V. Dodonov and V.I. Man'ko, in *Group Theoretical Methods in Physics*, Proc. of the International Seminar, Ed. M.A. Markov, (Harwood Acad. Publ., New York, 1985) Vol. 1, p. 591; V.V. Dodonov and V.I. Man'ko, in *Group Theoretical Methods in Physics*, Proc. of the 3-rd Seminar, Ed. M.A. Markov, (Nauka, Moscú, 1986) Vol. 2, p. 432.
- [7] A.J. Dragt, F. Neri and C. Rangarajan, *Phys. Rev. A*, **45** (1992) 2572.
- [8] A. Wehrl, *Rev. Mod. Phys.*, **50** (1978) 221.
- [9] I. Jex and A. Orłowski, *J. Mod. Opt.*, **41** (1994) 2301; A. Orłowski, H. Paul and G. Kastelewiecz, *Phys. Rev. A*, **52** (1995) 1621.
- [10] M. Hillery, M. Freyberger and W. Schleich, *Phys. Rev. A*, **51** (1995) 1792.
- [11] M. Kitagawa and Y. Yamamoto, *Phys. Rev. A*, **34** (1986) 3974.
- [12] R. Tanaś, in: *Coherence and Quantum Optics V*, eds. L. Mandel and E. Wolf (New York: Plenum, 1984), p. 645.
- [13] G.S. Milburn, *Phys. Rev. A*, **33** (1986) 674.
- [14] K. Sundar, *Phys. Rev. Lett.*, **75** (1995) 2116.
- [15] Z. Białynicka-Birula, *Phys. Rev.* **173** (1968) 1207; V.V. Dodonov, L.A. Malkin and V.I. Man'ko, *Physica* **72** (1974) 597; B. Yurke and D. Stoler, *Phys. Rev. Lett.* **57** (1986) 1055.

Apéndice E

Evolución bajo Hamiltonianos polinomiales en espacios fase.

En el artículo que reproducimos (enviado a Physical Review A), analizamos la diferencia entre la dinámica clásica y cuántica calculando la historia temporal de las funciones de Wigner para Hamiltonianos polinomiales de cuarto grado en las coordenadas y momentos. Se pone atención especial en el análogo cuántico de la conservación del elemento de volumen en el espacio fase clásico. óptico.

EVOLUTION UNDER POLYNOMIAL HAMILTONIANS IN QUANTUM AND OPTICAL PHASE SPACES

A. L. Rivera,
Facultad de Ciencias,
 N. M. Atakishiyev,
Instituto de Matemáticas,
 S. M. Chumakov, and K. B. Wolf,
Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas,
Universidad Nacional Autónoma de México,
Apartado Postal 48-3, 62251 Cuernavaca, Mor., México
 (June 7, 1995)

We analyze the difference between classical and quantum nonlinear dynamics by computing the time evolution of the Wigner functions for the simplest polynomial Hamiltonians of fourth degree in coordinate and momentum. This class of Hamiltonians contains examples which are important in wave and quantum optics. The Hamiltonians under study describe the third-order aberrations to the paraxial approximation and the nonlinear Kerr medium. Special attention is given to the quantum analog of the conservation of the volume element in classical phase space.

I. INTRODUCTION: CLASSICAL AND QUANTUM DYNAMICS

Since the creation of quantum mechanics, efforts have been made to visualize the quantum dynamical image and to put it in better correspondence with the classical evolution. This goal can be partially achieved by using the phase space picture in which the state of a quantum system may be represented by the quasiprobability distribution in the phase space of the corresponding classical system [1,2]. Described in this way, quantum dynamics resembles classical statistical mechanics. Clearly, this analogy is incomplete for at least two reasons: first, quasiprobability distributions may take negative values (unlike a true probability distribution), and second, the classical distribution can be localized at a point in phase space, whereas the quantum distribution must always be spread in a finite phase space volume, in agreement with uncertainty relations. Let us consider an initial distribution which is consistent with the uncertainty relations and describes a real quantum particle. Thus we can ask: *what is the difference between classical and quantum dynamics in phase space?*

The classical dynamical law is very simple. Every element of phase space moves along the classical trajectory while preserving its volume. If at time $t=0$ the probability to find a particle in a unit volume at the point x_0, p_0 is $W_{cl}(x_0, p_0)$, then at time t the probability distribution is

$$W_{cl}(x, p; t) = W_{cl}(x_0(x, p, t), p_0(x, p, t)), \quad (1)$$

where $x(t), p(t)$ is the classical trajectory passing through the point x_0, p_0 at time $t=0$. Does this picture help us to understand quantum dynamics? And if so, when can

the quasiclassical approximation be efficiently used to describe a quantum system? This question is important in several branches of physics: particle quantum mechanics, quantum optics, and wave optics, because they share a common mathematical structure.

These questions are formulated naturally in the well-known language of particle quantum mechanics. They also appear in quantum optics, where a single mode of the electromagnetic field is described by the coordinate and momentum operators of the harmonic oscillator; this field oscillator interacts with an atomic system or with other field modes in the case of a nonlinear optical process. Modern quantum optics uses extensively the quasiprobability distributions [1,2], various versions of the quasiclassical approximation [3] and other quantum mechanical tools.

Here we stress applications in wave optics. Indeed, it is well-known that in the paraxial approximation, the optical Helmholtz equation reduces to the Schrödinger equation. The distance along the optical axis plays the role of the time t in mechanics and, in a two-dimensional optical medium, we denote the screen coordinate (perpendicular to the optical axis) by x . The canonically conjugate momentum p describes the direction of the ray at the point x, t . The classical limit is geometric optics. The theory of optical devices in the paraxial approximation describes the propagation of light beams as generated by Hamiltonian operators which are second-degree polynomials in x and p ; they generate linear canonical transformations of phase space. Polynomial Hamiltonians of higher degree describe the aberrations to the paraxial regime, leading to the visual deformations and unfocusing of images in optical devices [4]. In wave optics the above question can be formulated as follows: when can the optical device be well described by geometric optics, and when is it

necessary to use a specifically wave optical description?

The purpose of the present paper is to compare the classical and quantum dynamics generated by the simplest nonlinear Hamiltonians. We consider Hamiltonians which are fourth-degree polynomials in the coordinate x and momentum p . It is convenient to classify these Hamiltonians using the wave optics picture, where they describe third-order aberrations. In quantum mechanics and quantum optics, the polynomial Hamiltonians of the fourth-degree include such important examples as the anharmonic oscillator and the optical Kerr medium [5,6]. We use the Wigner quasiprobability distribution to provide a visual image of the quantum dynamics. As we shall see, it yields the closest possible common description of classical and quantum dynamics in the phase plane with the standard coordinates x and p [7].

In order to find parameters which can be used to determine the similarity or difference between the classical and quantum dynamics, we examine the quantum analogs of the conservation of the volume element of the classical phase plane. We do not expect the corresponding invariants to hold for arbitrary quantum processes, though we shall see that they do exist in the case of linear quantum dynamics (i.e. described by linear transformations of the Heisenberg operators). We show that the moments of the Wigner function (i.e., the integrals of the powers of $W(x, p)$ over the phase plane) have the desired properties [8]. The classical counterparts of these moments are invariant under any canonical transformation, as follows directly from the phase volume conservation. In quantum dynamics, these moments are preserved by linear canonical transformations but are changed by nonlinear transformations. For all the semiclassical states (described by Gaussian wave functions) these moments (in a natural normalization) are equal to unity. Their difference from unity may serve as a measure of the 'nonclassicality' of the state. The change of these moments in the course of nonlinear quantum evolution reflects an extra growth of the quantum fluctuations over the corresponding classical level, providing information on how closely the process can be described by the quasiclassical approximation. In particular, the moments of the Wigner function can be used to detect and quantify the quantum superpositions of macroscopically distinguishable states, i.e. the so-called Schrödinger cat states. We restrict ourselves to the case of two-dimensional phase space, where it is easy to plot and understand the graphs of the quasiprobability distributions. Only pure quantum states (i.e., those described by wave functions) will be considered here.

The paper is organized as follows. In Section 2 we recall the properties of linear canonical transformations. Section 3 contains a discussion of nonlinear canonical transformations. We review some of the previous definitions of phase volume elements for quantum states and stress the usefulness of the moments of the Wigner function. For these moments we also present an alternative formula in terms of the wave function. Sections 4 and 5 are the central parts of the paper; they contain the re-

sults of numerical computation of the Wigner function for single optical aberrations and the optical Kerr medium. Final comments are given in the concluding Section 6.

II. LINEAR TRANSFORMATIONS

Time evolution in classical mechanics is a canonical transformation generated by the Hamiltonian function $h(p, x)$,

$$\dot{x} = \{x, h\}, \quad \dot{p} = \{p, h\}, \quad (2)$$

where $\{f, h\} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial h}{\partial x}$ is the Poisson bracket and the overdot indicates total time derivative. The quantum mechanical evolution is described by the unitary transformation generated by the self-adjoint Hamilton operator H through,

$$i\dot{X} = [X, H], \quad i\dot{P} = [P, H], \quad (3)$$

where $[A, B] = AB - BA$ is the commutator. We denote the operators by capitals and the classical variables by small letters. The resulting unitary transformation can be written (both in classical and in quantum mechanics) in the exponential form $U(t) = \exp(-iHt)$, where time enters as a transformation parameter. Different Hamiltonians lead to different canonical transformations.

The operators P and X generate rigid translations of phase space. Linear homogeneous canonical transformations [9] are generated by polynomial Hamiltonians of second degree in P and X , i.e., linear combinations of the operators

$$P^2, (PX + XP)/2, X^2, \quad (4)$$

The harmonic oscillator Hamiltonian $P^2/2 + \omega^2 X^2/2$ generates rigid rotations of phase space around the origin. The rotation by the angle $\pi/2$ is just the Fourier transformation. The generator $(PX + XP)/2$ is called the squeezing operator because it compresses phase space along one coordinate and expands it along the other; it transforms one harmonic oscillator into another with different frequency. In paraxial wave optics, $P^2/2$ generates free propagation of light rays in a homogeneous medium and $X^2/2$ corresponds to the action of a thin lens.

The Hamiltonians (4) lead to linear equations of motion that are identical in classical and quantum mechanics. In other words, the Heisenberg operator solutions to the quantum equations have the same form as the classical trajectories $p(t)$, $x(t)$. In wave optics, linear transformations describe paraxial systems; in quantum optics, they describe beam splitters, interferometers, linear amplifiers, etc.

Among the various quasiprobability distributions proposed in the literature [10,11], there is only one for which every linear quantum evolution coincides with classical evolution (given by Eq. (1)) [12]. This is the Wigner function,

$$\begin{aligned} W(x, p; t) &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} dr \Psi^*(x+r; t) e^{2ir} \Psi(x-r; t) \\ &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} dr \tilde{\Psi}^*(p+r; t) e^{-2ir} \tilde{\Psi}(p-r; t), \quad (5) \end{aligned}$$

where $\Psi(x; t)$ and $\tilde{\Psi}(p; t)$ are solutions of the Schrödinger equation in the coordinate and momentum representations respectively, and $\hbar = 1$. Note that another normalization is often used, which differs from Eq. (5) by the factor $1/2\pi$. We include this factor into the phase volume element $dp dx/2\pi$, so that the marginal distributions are

$$|\Psi(x)|^2 = \int W(x, p) \frac{dp}{2\pi}, \quad |\tilde{\Psi}(p)|^2 = \int W(x, p) \frac{dx}{2\pi}, \quad (6)$$

and the normalization condition is $\int W dp dx/2\pi = 1$. In fact, the covariance requirement between the linear classical and quantum canonical transformations can serve to define the Wigner function [16]. For instance, the Q -function $Q(x, p) = [(\alpha|\Psi\rangle)^2]^{-1}$, where $|\alpha\rangle$ is a coherent state with the parameter $\alpha = (x + ip)/\sqrt{2}$. This behaves as a classical distribution (1) under shifts and rotations of phase space, but has a different transformation law under the action of the squeezing operator; see, e.g., [15].

In linear dynamics, the classical solution completely determines the quantum one, so one can reduce the solution of the wave equation to the solution of the corresponding classical Hamilton equations. Indeed, one may take the Wigner function describing the initial state, find its evolution from Eq. (1) and (if necessary) reconstruct the marginal distribution using Eq. (6). We shall refer to the classical probability distribution (1) evolving from the initial conditions $W(p_0, x_0; t=0)$ as the 'classical' Wigner function. Because the classical and quantum Wigner functions evolve identically under linear dynamics, we understand that the Wigner function provides the closest common description of classical and quantum dynamics.

III. NONLINEAR TRANSFORMATIONS

We consider now the nonlinear canonical transformations generated by the fourth-degree polynomials in P and X . Such Hamiltonians are linear combinations of the operators

$$P^4, \{P^3X\}, \{P^2X^2\}, \{PX^3\}, X^4, \quad (7)$$

where {...} stands for the Weyl ordering of the operators [16]. One particularly important example of polynomial Hamiltonian of fourth degree in quantum optics is $H = \frac{1}{2}(P^2 + \omega^2 X^2) + (X/4\omega^2)(P^2 + \omega^2 X^2)^2$, which describes the optical Kerr medium in the variables P and X of a single mode of the electromagnetic field.

In the nonlinear case, the classical solution does not determine the quantum dynamics, since products of P 's and X 's enter the Heisenberg equations of motion. The mean

values of these products (e.g., $\langle\{P^3X\}(t)\rangle$) become additional variables which are absent in classical equations. Therefore, the classical and quantum Wigner functions will evolve differently.

We assume that the initial state of the system is given by a Gaussian wave function in the coordinate representation. Then the wave function in momentum representation, and also the Wigner function, are Gaussians. These states are also called *generalized coherent states* (GCS's). Under linear evolution Gaussians remain Gaussians of possibly different parameters. Since linear evolution is the same in the classical and quantum cases, we may conclude that the GCS's are quasiclassical states [17]. It is known that the only states which have an everywhere positive Wigner function are the Gaussian states [1]. Under quantum *nonlinear* evolution, the initial Gaussian loses its shape and its Wigner function must therefore take negative values in some regions of phase space. We may also expect that the quantum fluctuations spread the initial coherent state. In the next Section we consider several examples which show how these dynamical features are realized in particular nonlinear transformations.

The general picture can be summarized as follows: The initial Gaussian Wigner function is a 'hill' in phase space. Linear evolution, both classical and quantum, moves, rotates and squeezes this hill preserving the area inside any given level curve. Classical nonlinear evolution can also deform the shape of the hill (with the area still kept constant). But quantum nonlinear evolution, although it moves the top of the hill in agreement with the classical picture, exhibits a new phenomenon: 'quantum oscillations' appear at the concavities of the level curves of the hill. This is a purely quantum phenomenon and, as will be seen, is absent in the classical case. Under nonlinear evolution we may expect that the 'area' of the hill is no longer preserved; however, it is not clear how to define this area (or phase space volume element). As we stated in the introduction, it would be useful to formulate a quantum counterpart to the concept of classical phase volume conservation. The connected question in quantum optics can be posed as follows: *what is the most natural way to describe quantum fluctuations?*

As long as we work with linear transformations the answer is known: one may use the left-hand side of the Schrödinger-Robertson uncertainty relation (see e.g. [18]),

$$\delta = \sigma_{xx}\sigma_{pp} - \sigma_{xp}^2 \geq \frac{1}{4}, \quad (8)$$

where

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \langle(\Delta x)^2\rangle = \langle(x - \bar{x})^2\rangle, \\ \sigma_{pp} &= \langle(\Delta p)^2\rangle = \langle(p - \bar{p})^2\rangle, \\ \sigma_{xp} &= \frac{1}{2}\langle(XP + PX)\rangle - \bar{X}\bar{p}. \end{aligned}$$

The brackets {...} denote the average over a given quantum state, σ_{xp} describes correlations between coordinate

and momentum fluctuations, and \bar{x} , \bar{p} are the mean values of the coordinate and momentum. The equality in Eq. (8) holds for pure Gaussian states. Dodonov and Man'ko noticed that the value δ in Eq. (8) is invariant under linear canonical transformations both in classical and quantum mechanics [19]. Hence, linear dynamics do not lead to any extra growth of quantum fluctuations over the classical ones.

Under nonlinear transformations however, δ is not invariant even in classical mechanics; hence δ cannot in general describe an element of phase space volume because the latter must be conserved by any classical canonical transformation, linear or nonlinear. The Dodonov-Man'ko parameter δ can thus be used better to characterize the 'degree of nonlinearity' of the system, rather than its 'degree of nonclassicality', as was noted in Ref. [20]. This parameter is in fact very useful to describe the short-time nonlinear behavior, even if it does not feel global effects (such as those of Schrödinger cat states) which appear for longer times.

Let us recall some properties of Schrödinger cat states. The quasiprobability distribution for a coherent state is a Gaussian centered at the point (x_0, p_0) of the phase plane. The quantum superposition of two coherent states with macroscopically distinguishable coordinates and momenta (x_1, p_1) , (x_2, p_2) is an example of a state [21]. Any quasiprobability distribution is different then from zero in the neighborhoods of the points (x_1, p_1) and (x_2, p_2) ; moreover, the Wigner function also shows fast oscillations at the midpoint $(x_1 + x_2)/2$, $(p_1 + p_2)/2$, which can be called the *smile* of the Schrödinger cat and reveals the coherent superposition of the states. In a statistical mixture of the same states, the oscillations are absent. The uncertainties in coordinate and momenta for the cat state have values of the order of $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$ and $|\bar{p}_1 - \bar{p}_2|$. The parameter δ in Eq. (8) does not take into account that the particle can only occur at the neighborhood of the points (x_1, p_1) , (x_2, p_2) , and never in between.

The difficulty in describing quantum fluctuations for Schrödinger cat states can be overcome through taking advantage of entropy as a measure of fluctuations [22]. Since there is no true distribution in quantum phase space, Wehrl [23] proposed to calculate the entropy using the nonnegative Q -function instead of the probability distribution,

$$S_Q = - \int Q \log Q \frac{dp dx}{2\pi}. \quad (9)$$

The Wehrl entropy carries more precise information about the phase space volume occupied by the quantum state; it is especially convenient for the description of the Schrödinger cat states [24]. In particular, if the cat state consists of M well-separated components, then $S_Q = S_0 + \log M$, where S_0 is the entropy of a single component. The Wehrl entropy is thus a good candidate to describe the phase space volume occupied by the quantum state. Unfortunately, S_Q is not invariant under

the squeezing transformation [25]. (This follows directly from the 'bad' behavior of the Q -function under squeezing mentioned above; the Wehrl entropy overestimates quantum fluctuations in squeezed states.)

We search for a quantity that can serve to separate between classical and quantum dynamics and, from the point of view of applications, to determine if the semiclassical approximation is good or not. Recalling that linear transformations change the Wigner function covariantly in classical and quantum dynamics, we conclude that the specifically quantum features of a system are due to the nonlinear part of the dynamics, which transform an initial semiclassical state to a 'highly quantum' one. Therefore, the parameter which distinguishes between classical and quantum dynamics has also to separate between the semiclassical and the 'highly quantum' states [26].

We would have a measure of the classicality of the state possessing all the desirable properties if we could calculate the entropy using the Wigner function as a probability distribution. This is impossible however, since the Wigner function can take negative values (except for Gaussians). Moreover, these negative values are known to be an important manifestation of the nonclassicality of the state. (The entropy is determined as the mean value of the logarithm of the distribution, which is not well-defined for negative values.) We can consider other monotonic functions beside the logarithm studying the behavior of integrals of the type

$$I = \int f(W) \frac{dp dx}{2\pi}, \quad (10)$$

where $f(W)$ is any monotonic function of the Wigner function [27]. It is important to note that this integral is invariant in the classical case under any canonical transformation, linear or nonlinear. To verify this, we change variables $x, p \rightarrow x_0(x, p, t), p_0(x, p, t)$, where x_0, p_0 is the initial point of the classical trajectory which passes through the point $x(t), p(t)$ at time t . Then the invariance of the integral (10) follows from the conservation of the phase space volume under the canonical transformation [28]. In the quantum case the integrals (10) are invariant under linear transformations.

The simplest monotonic functions are the powers W^k . Then the integrals (10) are the moments of the Wigner function:

$$I_k(t) = \frac{k}{2\pi^{k+1}} \int W^k(p, x; t) \frac{dp dx}{2\pi}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Corresponding quantities for true probability distributions are known as 'o-entropies' [29]. They obey some inequalities which reflect the uncertainty relations [30] (cf. Ref. [31]). We use here the moments of the Wigner function to characterize the spread of the Wigner function in phase space and the 'classicality' of the corresponding quantum state.

From the normalization condition it follows that $I_1 = 1$. In turn, $I_2 = 1$ holds for any pure state. (For mixed states described by the density matrix ρ , the second moment gives the purity of the state, $I_2 = \text{trace}(\rho^2)$ [1,32].) Therefore, only the moments I_k , $k \geq 3$ contain nontrivial information. It is easy to check that our normalization implies $I_k = 1$ for any pure Gaussian state. Quantum linear evolution preserves the initial values of the moments. However, quantum nonlinear evolution of the initial Gaussian state may lower the values of the moments I_k , for $k \geq 3$.

The moments (11) can also be written directly in terms of the wave functions in coordinate or momentum representation (without use of the Wigner function). Indeed substituting Eq. (5) into Eq. (11) and integrating over p we have,

$$I_k(t) = k \int dx dr_1 \dots dr_{k-1} \prod_{j=1}^{k-1} \Psi^*(x+r_j) \Psi(x-r_j) \\ \Psi^*(x-r_1 - \dots - r_{k-1}) \Psi(x+r_1 + \dots + r_{k-1}).$$

This equation (and a similar one in terms of the wave function in the momentum representation) may be useful to study the analytic properties of the moments.

In the next Sections we shall calculate numerically the moments $k = 3, 4, 5, 6$ for several examples of nonlinear dynamics governed by Hamiltonians of the type (7) and show that these moments indeed carry important information about the quantum state. Hence they can be used to distinguish quasiclassical dynamics from quantum dynamics, and semiclassical states from quantum states. Moreover, they can be used to detect Schrödinger cats.

IV. NUMERICAL RESULTS FOR MONOMIAL HAMILTONIANS (OPTICAL ABERRATIONS)

In this Section we use the wave optical terminology. The Lie theory of geometrical image aberrations [4] identifies the operators (7) with the third-order aberrations in two-dimensional optical media. In geometric optics, momentum is $p = n \sin \theta$, where n denotes the refractive index and θ is the angle between the ray and the optical axis. The analysis of the aberration generators as separate Hamiltonians is warranted because they represent the first nonlinear correction to some interesting physical phenomena briefly indicated below. The marginal distribution $|\Psi(x)|^2$ in Eq. (6) is the light intensity on the one-dimensional screen of coordinate $x \in \mathbb{R}$. (The common designation of x for the optical axis coordinate is replaced here by t , as if it were time.) We now investigate the action of aberrations on the initial vacuum coherent state i.e., a Gaussian of minimum width centered at the origin of phase space. The three-dimensional figures and the corresponding level plots of the Wigner function that evolves under the quantum mechanical Hamiltonians are presented for two different time instants. The level plots

of the classical Wigner functions are also shown for those times.

A. Spherical aberration $H = P^4$

The first metaxial correction to paraxial free propagation is called spherical aberration. The same Hamiltonian also describes the first relativistic correction to the Schrödinger equation for a particle of non-zero mass. In Figures 1a-f we show the classical and quantum evolution of an initial vacuum coherent state for the time instants $t = 0.5$ and $t = 2.0$. The resulting states are no longer Gaussians, but are represented by hills that rapidly spread in x . The difference between the classical and quantum cases can be seen in the additional oscillations of the quantum Wigner function, which appear in Figs. 1a-d and are absent in Figs. 1e,f. They are seen in the level plots as small islands forming in the concave part of the main hill; their area is considerably smaller than the area of the vacuum state. We are therefore led to call this phenomenon 'quantum oscillation'.

The behavior of the moments, shown in Figure 2, is quite flat. There is a proportional drop in all moments before the second. The constancy of I_2 provides a reliable numerical check on the computation. The figure indicates that semiclassical states remain a good approximation to quantum states.

B. Coma $H = P^3 X$

The generator of this transformation is

$$H = (P^3 X) = P^3 X + i \frac{3}{2} P^2.$$

(The form is valid for any self-adjoint ordering rule.) This Hamiltonian is also the first approximation to the relativistic coma phenomenon after squeezing [33]. The corresponding Schrödinger equation in momentum representation is the first order differential equation

$$i \partial_t \tilde{\Psi}(p, t) = i(p^2 \partial_p + \frac{3}{2} p^2) \tilde{\Psi}(p, t).$$

The exact solution to this equation reads

$$\tilde{\Psi}(p, t) = \frac{1}{(1 - 2p^2 t)^{3/4}} \tilde{\Psi} \left(\frac{p}{\sqrt{1 - 2p^2 t}}, 0 \right),$$

where $\tilde{\Psi}(p, 0) = \pi^{-1/4} \exp[-p^2/2]$ is the initial condition. The Wigner function has been calculated numerically from Eq. (5) to produce Figures 3a-f. Acting in coordinate representation, i.e. on the optical screen, coma produces image caustics (which are comet-shaped only in two-dimensional optical images). The signature of an image caustic in phase space is that $x_0 = \text{constant lines}$

cross the level plots at four points. This is seen in the wings of Figures 3c-f. In the quantum case, 'quantum oscillations' again occur in the concavities of the main hill. The values of the moments, drop proportionately more than in the previous aberration.

The solutions of the classical equations of motion are

$$x_0 = x(1 - 2p^2 t)^{3/2}, \quad p_0 = \frac{p}{\sqrt{1 - 2p^2 t}},$$

where the trajectory $x = x(t)$, $p = p(t)$ begins at the point x_0, p_0 . We notice that the whole initial momentum range $-\infty < p_0 < \infty$ is mapped into the interval $|p(t)| < 1/\sqrt{2t}$; no points map beyond this interval. At the quantum level, the Wigner function at time t is zero outside the strip $|p| < 1/\sqrt{2t}$ and the normalization condition involves the integration only over this strip. This squeezing in the momentum variable corresponds to the forward compression of ray directions under relativistic boost of the screen in geometric optics [33].

C. Astigmatism $H = P^2 X^2$

Astigmatism can be characterized classically as a hyperbolic torsion of phase space stemming from a radius-dependent differential hyperbolic rotation. (For two-dimensional images there is also the curvature of field aberration; in our one-dimensional case it coalesces with astigmatism.)

The Weyl-ordered Hamiltonian in the coordinate representation has the form

$$H = \{P^2 X^2\} = -x^2 \partial_x^2 - 2x \partial_x - \frac{1}{2}.$$

(Other quantization schemes will differ only in the additive constant.) The Green function for this Hamiltonian can be found exactly, both in coordinate or momentum representation. However, it is more convenient to solve numerically the differential equation for the wave function and then to find the Wigner function by integration.

In Figures 4a-f we see a cross-symmetric hill developing out of the initial vacuum coherent state for times $t = 0.1$ and $t = 0.5$. The quantum case again shows 'quantum oscillations' that are much stronger now. In Figures 4c and 4d we show among others the zero-level curves which, due to the shape of the 'quantum oscillations', appear as if they were hyperbolas. The behavior of the moments is shown in Figure 5; they decrease much faster than in the other aberrations. (Note also that these figures are computed for shorter times than those of the other aberrations.)

D. Distortion $H = P X^3$

The Hamiltonian in the coordinate representation is

$$H = \{P X^3\} = X^3 P - i \frac{3}{2} X^2 = -i(x^3 \partial_x + \frac{3}{2} x^2).$$

The differential equation for distortion in the coordinate representation has the same form as that for coma in the momentum representation, with a change in the sign of time $t \rightarrow -t$. Distortion and coma are Fourier conjugate of each other [35] and thus the evolution under distortion corresponds to backward comatic dynamics.

The classical and quantum Wigner functions are shown in Figures 6a-f. As we saw above, coma compresses phase space along the momentum axis. Correspondingly, distortion will expand phase space along the coordinate axis, as can be seen from the classical trajectories,

$$x = \frac{x_0}{\sqrt{1 - 2x_0^2 t}}, \quad p = p(1 - 2x_0^2 t)^{3/2}.$$

These trajectories reach infinity in finite time: at time t , the points which initially have coordinates $|x_0| < 1/\sqrt{2t}$ will still be in the finite plane, while the points $x_0 = \pm 1/\sqrt{2t}$ map to infinity. The points $|x_0| > 1/\sqrt{2t}$ will disappear from the classical phase space and so do not contribute to the quantum solution. As a result, the normalization of the wave function is not preserved. This unpleasant property of the distortion Hamiltonian has been pointed out by Klauder [34]. Correspondingly, the moments I_1 and I_2 are not constant in this case as we see in Fig. 7.

E. Pocus $H = X^4$

This aberration has received its playful name [35] because of its p -unfocusing effect. It is the Fourier transform of spherical aberration: it spreads rays in momentum and leaves the position coordinate invariant (so it does not affect the geometric image quality and is not included in the traditional Seidel classification [30]), but multiplies the wave function by a phase $e^{i\pi x^2}$.

The evolution of the Wigner function can be found from spherical aberration by the Fourier rotation of the phase plane plus time inversion. It is shown in Figures 8a-f for the time instants $t = 0.5$ and $t = 2$. The moments I_k are invariant under this transformation and are the same as in Fig. 2. The effect of pocus on classical phase space and on the quantum Wigner function is on par with all other nonlinear transformations.

V. OPTICAL KERR MEDIUM

A successful model of active optical media in which self-interaction of the field takes place is the Kerr medium [5,6,37-39]. Its Hamiltonian is a harmonic oscillator describing a single quantized mode of the electromagnetic field of frequency ω , plus a self-interaction term with a coupling constant χ , [6]. It has the form

$$H = \frac{1}{2}(P^2 + \omega^2 X^2) + \frac{1}{\omega^2} \chi (P^2 + \omega^2 X^2)^2. \quad (12)$$

in units where $\hbar = 1$. In quantum electrodynamics, the Hamiltonian is usually written in terms of the photon number operator $\hat{n} = a^\dagger a$ as $H = \omega \hat{n} + \chi \hat{n}^2$ (here ω is shifted related to Eq. (12)). It is clear that the harmonic oscillator Hamiltonian and the total Kerr Hamiltonian (12) have the same eigenvectors. The photon number is conserved but there is a nontrivial evolution of the field phase.

The time evolution of the Wigner function under the Kerr Hamiltonian is shown in Figures 9a-f and the corresponding evolution of the moments is shown in Figures 10. In these figures we choose $\chi = 1$. The first term in the Hamiltonian (12) leads to the 'fast' rotation of the graphs with angular frequency ω ; we work in the interaction picture, which subtracts this rotation.

The Wigner function of the initial Gaussian state is shown in Figure 9a. It is centered at the point $\bar{z} = \sqrt{2\bar{n}}$ ≈ 5.7 , indicated by the radial distance to the origin and $\bar{p} = 0$ (it is thus *not* the vacuum state) corresponding the Glauber coherent state of photon number $\bar{n} = 16$. For small time $t = 0.02$, the Gaussian is first stretched and rotated in the phase plane as shown in Figure 9b; all the moments, shown in Figures 10, are still close to unity and so the state is still nearly semiclassical. It is squeezed in a definite direction in phase plane, however. This squeezing can be seen clearly in Figure 9b. (Note that in the graphs of the Q -function it would be more difficult to visually notice squeezing since the hills would be 'fatter'.) We can use the propagation in a linear medium by the bare harmonic oscillator Hamiltonian to achieve the best squeezing in the field coordinate or momentum [38].

As time advances, Figure 9c shows that the hill is stretched along a circle (not along a straight line); the angular range of the hill spreads and we see a crescent. The deformation of the top of the hill is still semiclassical. However, the shape of the hill is already sufficiently bent for the 'quantum oscillations' to appear. As long as the moments I_k are still ~ 1 in Figures 10, these 'quantum oscillations' are weak and their contribution to the phase space volume is small. The area of the hill increases slowly while the angular spread grows faster, so we may expect a radial (amplitude) squeezing. It actually occurs slightly away from the radial direction, but can be transformed into amplitude squeezing if we shift the origin of phase plane, so as to put it at the center of curvature of the crescent. Physically, this can be realized by placing the nonlinear Kerr medium inside one arm of a Mach-Zehnder interferometer, as was proposed by Kitagawa and Yamamoto [6]. In this way strong squeezing in the photon number fluctuations can be achieved. The Kerr amplitude squeezing can be further enhanced by electing as initial state an already squeezed state [39]. (Note that the 'quantum oscillations' are invisible in the graphs of the Q -function used in Ref. [6].)

As time evolves further (see Figure 9d) the angular spread reaches 2π and the 'quantum oscillations' become comparable to what remains of the original crescent (the

classical hill) and occupy the whole interior. It becomes clear that these 'quantum oscillations' are due to self-interference in phase space: different parts of the hill create interference fringes when meeting each other.

At some definite time instants, the self-interference leads to standing waves along the circle. These waves are formed in the Kerr medium at times $\chi t = L\pi/M$, where L, M are mutually prime integers, $L < M < \sqrt{\bar{n}}$. These are the Schrödinger cuts [21]; see Figures 9e,f. The cat state in the Kerr medium at time $\chi t = L\pi/M$ has M very well pronounced components. This is a consequence of the integer spectrum of the Kerr interaction Hamiltonian \hat{n}^2 . The self-interference phenomenon appears also in the Jaynes-Cummings [40] and Dicke models [41]. It has been shown that the field in both models, for special initial conditions, can be described by the effective Hamiltonian $H_{\text{Dicke}} \sim \sqrt{\hat{n} + 1/2}$ [41], i.e., the square root of the harmonic oscillator Hamiltonian. The Dicke Hamiltonian thus generates evolution which is in a sense similar to the Kerr one (cf., [42]); however, the effective Hamiltonian does not have an integer spectrum and Schrödinger cats are not so well pronounced. We emphasize that the sharp interference fringes in the smiles between the cat components of Figures 9e,f would be absent if the state were a statistical mixture of the same components. The Q -function does not show any structure between the states and hence will not distinguish between coherent superposition and statistical mixture of components.

Most of the information contained in the Wigner function plots can be restored from the graphs of the moments I_2 to I_6 shown in Figures 10. The time instants at which we can expect amplitude squeezing are those where the initial peak still conserves its identity and the moments are still close to unity. When the Wigner function shows complicated 'quantum oscillations', moments are kept in their lowest, steady values. The times when Schrödinger cats appear correspond to the well-pronounced peaks of the moments. One can estimate the maximum values of the moments at these peaks for well-separated cat components.

When a cat state consists of two separate components centered at points z_1, p_1 and z_2, p_2 , so that the wave function in the coordinate representation has the form

$$\Psi(z) = \alpha \Psi_1(z) + \beta \Psi_2(z),$$

where α and β are the amplitudes of the components and $\bar{z} = \{\alpha\beta\}e^{-i\phi}$, then the Wigner function has the form

$$W = |\alpha|^2 W^{(1)} + |\beta|^2 W^{(2)} + \alpha\beta W^{(12)}, \quad (13)$$

where $W^{(1)}$ and $W^{(2)}$ are the Wigner functions of the separate components and $W^{(12)}$ is the contribution of the 'smile' region. Let us suppose for simplicity that the cat components are Glauber coherent states and that $p_1 = p_2 = 0$. Then we have

$$W^{(12)} = 4 \exp[-(z - z_2)^2 - p^2] \cos[p(z_1 - z_2) + \phi]$$

with $x_z = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$. The Wigner function (13) is exponentially small everywhere except for the neighborhoods of the points $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$, and the midpoint x_z . When these neighborhoods do not significantly overlap, the integrals I_k will consist of the contributions for these three points, and we have

$$I_k = |\alpha|^{2k} I_k^{(1)} + |\beta|^{2k} I_k^{(2)} + |\alpha\beta|^k I_k^{(12)},$$

where $I_k^{(1)}$ and $I_k^{(2)}$ are the moments corresponding to the first and the second components and

$$I_k^{(12)} \approx C_{k/2}^2 + O(\exp[-(x_1 - x_2)^2/4]), \quad k, \text{ even}$$

$$I_k^{(12)} \approx O(\exp[-(x_1 - x_2)^2/16]), \quad k, \text{ odd}.$$

The binomial coefficient $C_{k/2}^2 = k! / [(k/2)!]^2$ can be approximated by $C_{k/2}^2 \sim 2^k (2/\pi k)^{1/2}$ for large k . Neglecting the exponentially small terms and taking into account that for a single coherent state I_k is unity, we have

$$I_k \approx |\alpha|^{2k} + |\beta|^{2k} + |\alpha\beta|^k C_{k/2}^2, \quad k, \text{ even},$$

$$I_k \approx |\alpha|^{2k} + |\beta|^{2k}, \quad k, \text{ odd}. \quad (14)$$

If the cat state has M well-separated components and all the $M(M-1)/2$ 'smile' regions are also well-separated from each other and from the components, then the sums in the above equations have M terms corresponding to the components and the even- k moments will have $M(M-1)/2$ additional terms. In Figures 9, only two- and three-component cat states can be considered to be well separated. Correspondingly, Eqs. (14) give the correct numerical values of the moments I_k at the peaks for times $\pi/2$ and $\pi/3$; see Figures 10.

VI. CONCLUSIONS.

The difference between classical and quantum dynamics is connected with the phenomenon of self-interference in phase space. For quasi-periodic motion the latter leads to the Schrödinger cat states. Such states can be produced when the quantized electromagnetic field propagates inside the optical Kerr medium [5,21]. It is a 'global phenomenon' since the quantum state spreads over all the phase volume allowed by conservation laws, and occurs usually at times longer than the period of fast oscillation of the system.

We have shown here that quantum nonlinear dynamics also differs from its classical counterpart for shorter times, i.e., when the state is still well localized in phase space. The nonclassicality is manifest in the 'quantum oscillations'. The higher moments of the Wigner function can be used as numerical parameters to measure this difference.

ACKNOWLEDGMENTS

We want to thank V.V. Dodonov, A. Frank, K.-E. Hellwig, A.B. Klimov, F. Leyvraz, V.I. Man'ko, A. Orłowski and R. Tanas for interesting discussions. A. L. Rivera is under scholarship from DGAPA, Universidad Nacional Autónoma de México and K. B. Wolf is on sabbatical leave at Centro Internacional de Ciencias AC. This work was supported by the project DGAPA-UNAM IN106595 "Optica Matemática".

- [1] M. Hillery, R.F.O'Connell, M.O.Scully and E.P.Wigner, *Phys. Rep.* **106**, 121 (1984).
- [2] V. Tatarski, *Usp. Fiz. Nauk*, **130**, 587 (1983); Hai-Woong Lee, *Phys. Rep.* **259**, 147 (1995).
- [3] See, for example, S. M. Chumakov, A. B. Klimov and J. J. Sánchez-Mondragón, *Phys. Rev. A* **49**, 4972 (1994).
- [4] A. J. Dragt, E. Forest and K. B. Wolf, in: *Lie Methods in Optics*, Ed. by J. J. Sánchez-Mondragón and K. B. Wolf, *Lecture Notes in Physics*, Vol. 250 (Springer-Verlag, Heidelberg, 1986), p. 104.
- [5] G. S. Milburn, *Phys. Rev. A* **33**, 674 (1986).
- [6] M. Kitagawa and Y. Yamamoto, *Phys. Rev. A* **34**, 3974 (1986).
- [7] We use here the standard definition of the Wigner function which is connected with the Heisenberg-Weyl dynamical group. If the photon number and the phase are chosen as the coordinates in phase space, it naturally leads to the new definition of the Wigner function; see J. P. Bizarro, *Phys. Rev. A* **40**, 3255 (1994). J. A. Vaccaro, *Opt. Commun.* **113**, 421 (1995).
- [8] N. M. Atakishiyev, S. M. Chumakov, K. B. Wolf and A. L. Rivera, in: *Proceedings of the IV Wigner Symposium*, Ed. by N. M. Atakishiyev, T. H. Seligman and K. B. Wolf (World Scientific Publishing, Singapore, 1996).
- [9] M. Hoshinsky and C. Quesne, *J. Math. Phys.* **12**, 1772 (1971).
- [10] R. Graham, F. Haake, H. Haken and W. Weidlich, *Z. Phys.* **213**, 21 (1968).
- [11] K. E. Cahill and R. J. Glauber, *Phys. Rev.* **177**, 1857 (1969); **177**, 1882 (1969).
- [12] G. García-Calderón and M. Hoshinsky, *J. Phys. A* **13**, L185 (1980).
- [13] Hui Li, *Phys. Lett. A* **188**, 107 (1994).
- [14] K. Iusimi, *Proc. Phys. Math. Soc. Japan*, **22**, 264 (1940).
- [15] M. Hillery, M. Freyberger and W. Schleich, *Phys. Rev. A* **61**, 1792 (1995).
- [16] The Weyl ordering is naturally associated with the Wigner function. Any self-adjoint ordering scheme gives the same result for fourth-degree monomials, except for $p^2 q^2$, which only exhibits different additive constants (of units \hbar^2). It turns out therefore that the Wigner function, being sequeilinear in the wave functions, will be insensitive to the ordering scheme. For higher-degree monomi-

- als, we recall that $\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} p^2 x^2 = \overline{(P^2 X^2)}$.
- [17] Note that the set of GCS's includes the squeezed states. Squeezing is usually considered a nonclassical attribute of a state. However, we are interested in the dynamical behavior, i.e., in the transformation properties of the states. All GCS's can be transformed among themselves by linear transformations which are essentially semiclassical. That is why we consider GCS's as semiclassical states.
- [18] V. V. Dodonov, E. V. Karmyshev and V. I. Man'ko, *Phys. Lett. A*, **70**, 150 (1980).
- [19] V. V. Dodonov and V. I. Man'ko, in: *Group Theoretical Methods in Physics*, New York, Harwood Acad. Publ. 1985, Vol. 1, p. 591; V. V. Dodonov and O. V. Man'ko, in: *Group Theoretical Methods in Physics*, Proc. of the 3-nd Seminar, M. A. Markov (ed.), Moscow, Nauka, 1986, vol. 2, p. 432.
- [20] A. J. Dragt, F. Neri and G. Itangerajan, *Phys. Rev. A* **45**, 2572 (1992).
- [21] Z. Bialynicka-Birula, *Phys. Rev.* **173**, 1207 (1968); B. Yurke and D. Stoler, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1055 (1986).
- [22] V. V. Dodonov and V. I. Man'ko, in: *Invariants and Evolution of Nonstationary Quantum Systems*, Proceedings of Lebedev Physics Institute 183, edited by M. A. Markov (Nova Science, Commack, N.Y., 1989).
- [23] A. Wehrl, *Rev. Mod. Phys.* **50**, 221 (1978).
- [24] I. Jex and A. Orłowski, *J. Mod. Opt.* **41**, 2301 (1994); A. Orłowski, H. Paul and G. Kastelewiecz, *Phys. Rev. A* **52**, 1621 (1995).
- [25] C. H. Keitel and K. Wódkiewicz, in: *Proc. of the 2-nd International Workshop on Squeezed States and Uncertainty Relations*, Moscow, May 22-29, 1992; D. Han, Y. S. Kim and V. I. Man'ko (eds.) NASA Conference Publication, 1993, p. 259.
- [26] A measure of 'nonclassicality' of a state (different from the one proposed here) was introduced in the following articles: C.-T. Lee, *Phys. Rev. A* **52**, 3374 (1995); N. Lütkenhaus and S. M. Barnett, *Phys. Rev. A* **61**, 3340 (1995).
- [27] The definition of entropy uses the logarithm function to have an additive quantity for systems consisting of non-interacting subsystems. However, we work with a single degree of freedom which cannot be further separated into 'subsystems'. Thus, the additive property of the logarithm seems to be dispensable for our goals.
- [28] Note that we cannot introduce under the sign of integral (10) any additional dependence on p and x , different from the one contained in the Wigner function, because it will destroy the invariance under classical canonical transformations.
- [29] A. Wehrl, *Rep. Math. Phys.* **10**, 159 (1976).
- [30] H. Maassen and J. B. M. Uffink, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1103 (1988);
- [31] B. Dacubler, Ch. Miller, H. Riesen and L. Schoendorf, *Phys. Scr.* **T48** 119 (1993); I. Bialynicki-Birula, M. Firyberger and W. Schleich, *Phys. Scr.* **T48** 113 (1993).
- [32] V. Balzer, C. H. Keitel and P. L. Knight, *Phys. Rev. A*, **51**, 2575 (1995).
- [33] K. B. Wolf, *J. Opt. Soc. Am. A*, **10**, 1925 (1993).
- [34] J. R. Klauder, in: *Lie Methods in Optics*, Ed. by J. J. Sánchez-Mondragón and K. B. Wolf, Lecture Notes in

- Physics, Vol. 250 (Springer-Verlag, Heidelberg, 1980), p. 183.
- [35] K. B. Wolf, *J. Opt. Soc. Am. A*, **5**, 1236 (1988).
- [36] H. Buchdahl, *Optical Aberration Coefficients* (Dover, New York, 1968).
- [37] C. G. Milburn and C. A. Holmes, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 2237 (1986); E. A. Akhundova and M. A. Mukhtarov, *J. Phys. A*, **28**, 5287 (1995).
- [38] R. Fano, in: *Coherence and Quantum Optics V*, ed. L. Mandl and E. Wolf (New York: Plenum, 1984), p. 645.
- [39] K. Sundar, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2116 (1995).
- [40] I. Sh. Averbukh, *Phys. Rev. A*, **46**, R2205 (1992).
- [41] S. M. Chumakov, A. B. Klimov and J. J. Sanchez-Mondragón, *Opt. Commun.* **118**, 529 (1995).
- [42] S. M. Chumakov, A. B. Klimov and C. Saavedra, *Phys. Rev. A*, **62**, 3153 (1995).

FIGURE CAPTIONS

Figure 1. Evolution of the quantum and classical Wigner functions for the Hamiltonian $P^2 X^2$ (spherical aberrations). (a,b) 3-dimensional plots of the quantum Wigner functions for times $t = 0.5$ and $t = 2.0$; (c,d) level plots of the same quantum Wigner functions; (e,f) level plots of the classical Wigner functions for the same time instants.

Figure 2. Time evolution of the moments of the quantum Wigner functions for the Hamiltonian $P^2 X^2$. J_k (dotted line) is shown as a quality test of our numerical computation. The decrease of the moments J_k for $k \geq 3$ reveals the difference between classical and quantum dynamics.

Figure 3. The same as in Fig. 1 for the Hamiltonian $P^2 X$ (coma).

Figure 4. Evolution of the quantum and classical Wigner functions for the Hamiltonian $P^2 X^2$ (astigmatism). (a,b) 3-dimensional plots of the quantum Wigner functions for times $t = 0.1$ and $t = 0.5$; (c,d) level plots of the same quantum Wigner functions; (e,f) level plots of the classical Wigner functions for the same time instants.

Figure 5. The same as in Fig. 2 for the Hamiltonian $P^2 X^2$ (astigmatism).

Figure 6. The same as in Fig. 1 for the Hamiltonian PX^3 (distortion).

Figure 7. The same as in Fig. 2 for the Hamiltonian PX^3 (distortion).

Figure 8. The same as in Fig. 1 for the Hamiltonian X^4 (oculus).

Figure 9. Evolution of the quantum Wigner function for the Hamiltonian $\chi(P^2/\omega + X^2\omega)^2$ (Kerr media). The initial state is a coherent one described by a Poisson distribution with $\bar{n} = 16$. (a) $t = 0$; (b) $t = 0.02$; (c) $t = 0.05$; (d) $t = 0.2$; (e) $t = \pi/3$; (f) $t = \pi/2$; we see Schrödinger cats for times $t = \pi/3$ and $t = \pi/2$.

Apéndice F

Funciones de Wigner.

En este apéndice reproducimos los programas que utilizamos para calcular la función de Wigner y sus momentos de un arreglo de datos (x,y).

```
C          PROGRAM WIGNER MOMENTS
C***VARIABLE DECLARATION
REAL  DX, DP, EPS, NSQ, Z, G1, G2, INT, DPX
REAL  ww, w2w, INTW1, INTW2, INTW3, INTW4, INTW5, INTW6
INTEGER NX, NX2, ND2, KX, L, LL, LX, LR, IERR
COMPLEX  i
C***CONSTANT DECLARATION
PARAMETER (NX=16384, NX2=2*NX, ND2=NX/2, MX=500, NXM=ND2-MX)
PARAMETER (DX=2.e-2, Nmax=16384, NSQ=2.e0*DX, i=(0.E0,1.E0))
PARAMETER (DP=6.283185/(Nmax*DX), EPS=1.E-6, DPX=DP*DX/6.283185)
C***ARRAY DECLARATION
REAL*8  X(NX)
DIMENSION G(NX2), Y(NX2)
C***FIRST EXECUTABLE STATEMENT WIGNER
OPEN (10, FILE='ba6.dat', STATUS='OLD', IOSTAT=IERR)
DO 100 KX=1,NX
  X(KX)=(KX-ND2)*DX
100 CONTINUE
Z=0.1e0
DO 120 L=1,NX2
  READ (10,*) G(L)
120 CONTINUE
CLOSE(10)
INT=0.0
ww=0.0
w2w=0.0
INTW1=0.0
INTW2=0.0
INTW3=0.0
INTW4=0.0
INTW5=0.0
INTW6=0.0
```

```

DO 130 LX=(NXM), (NXM+2*MX+20)
  IERR=1-NXM

  DO 140 LR=IERR, (-IERR)
    L=L+1
    LL=L+L
    KX=LX+LX+LR+LR
    G1=G(KX-1)
    G2=G(KX)
    KX=LX+LX-LR-LR
    Y(LL-1)=G1*G(KX-1)+G2*G(KX)
    Y(LL)=G1*G(KX)-G2*G(KX-1)
140  CONTINUE
    DO 150 LR=L,Nmax
      LL=LR+LR
      Y(LL-1)=0.0D0
      Y(LL)=0.0D0
150  CONTINUE
    CALL FFT(Y,Nmax,-1)
    DO 230 KX=1,Nmax
      IF (Y(KX+KX-1).GT.EPS) THEN
        TEMR=Y(KX+KX-1)*NSQ
        G1=TEMR*TEMR
        INT=DPX*TEMR/(1+G1)
        ww=ww+INT
        w2w=w2w+INT*TEMR
        INTW1=INTW1+DPX*TEMR
        G2=DPX*G1*G1
        G1=DPX*G1
        INTW2=INTW2+G1
        INTW3=INTW3+G1*TEMR
        INTW4=INTW4+G2
        INTW5=INTW5+G2*TEMR
        INTW6=INTW6+G1*G2*Nmax
      ENDIF
230  CONTINUE
    WRITE(*,*) LX, INTW1
130  CONTINUE
    WRITE(*,*) Z, ww, w2w
    WRITE(*,*) INTW1, INTW2, INTW3, INTW4, INTW5, INTW6
  END
C
C
C*****
C
C      SUBROUTINE FFT(Y,NN,ISIGN)
C***BEGIN PROLOGUE FFT
C***PURPOSE Compute the fast fourier transform of a complex,
C            periodic sequence.
C***TYPE    COMPLEX
C***DESCRIPTION
C

```

```

C   If ISIGN=1, this subroutine replaces the vector Y by
C   its discrete fourier transform.
C
C   If ISIGN=-1, this subroutine replaces the vector Y by
C   NN times its inverse discrete fourier transform.
C
C   Input Parameters
C
C   NN      number of data.  NN MUST be an integer power of 2.
C
C   Y       is a complex array of length NN or, equivalently,
C           a real array of length 2*NN.
C
C   Output Parameters
C
C   Y       vector of discrete fourier transform
C           Y(K)*EXP(-I*J*K*2*PI/N)
C
C***REFERENCES  W.H.Press, B.P.Flannery, S.A.Teukolsly,
C               W.T.Vetterling, Numerical Recipes,
C               Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
C               Chapter 12: Fourier transform spectral methods.
C
C***ROUTINES CALLED (NONE)
C   950829  DATE WRITTEN
C***END PROLOGUE FFT
C
C       SUBROUTINE FFT(Y,NN,ISIGN)
C       REAL*8 WR,WI,WPR,WPI,WTEMP,THETA
C       DIMENSION Y(*)
C***FIRST EXECUTABLE STATEMENT FFT
C       N=2*NN
C       J=1
C***This is the bit reversal section of the routine
C       DO 11 I=1,N,2
C         IF(J.GT.I)THEN
C           TEMPR=Y(J)
C           TEMPI=Y(J+1)
C           Y(J)=Y(I)
C           Y(J+1)=Y(I+1)
C           Y(I)=TEMPR
C           Y(I+1)=TEMPI
C         ENDIF
C       M=N/2
C 1      IF ((M.GE.2).AND.(J.GT.M)) THEN
C         J=J-M
C         M=M/2
C       GO TO 1
C     ENDIF
C     J=J+M

```

```

C   If ISIGN=1, this subroutine replaces the vector Y by
C   its discrete fourier transform.
C
C   If ISIGN=-1, this subroutine replaces the vector Y by
C   NN times its inverse discrete fourier transform.
C
C   Input Parameters
C
C   NN      number of data.  NN MUST be an integer power of 2.
C
C   Y       is a complex array of length NN or, equivalently,
C           a real array of length 2*NN.
C
C   Output Parameters
C
C   Y       vector of discrete fourier transform
C           Y(K)*EXP(-I*J*K*2*PI/N)
C
C***REFERENCES  W.H.Press, B.P.Flannery, S.A.Teukolsly,
C               W.T.Vetterling, Numerical Recipes,
C               Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
C               Chapter 12: Fourier transform spectral methods.
C
C***ROUTINES CALLED (NONE)
C   950829  DATE WRITTEN
C***END PROLOGUE  FFT
C
C       SUBROUTINE FFT(Y,NN,ISIGN)
C       REAL*8  WR,WI,WPR,WPI,WTEMP,THETA
C       DIMENSION Y(*)
C***FIRST EXECUTABLE STATEMENT  FFT
C       N=2*NN
C       J=1
C***This is the bit reversal section of the routine
C       DO 11 I=1,N,2
C         IF(J.GT.I)THEN
C           TEMPR=Y(J)
C           TEMPI=Y(J+1)
C           Y(J)=Y(I)
C           Y(J+1)=Y(I+1)
C           Y(I)=TEMPR
C           Y(I+1)=TEMPI
C         ENDIF
C       M=N/2
C       IF ((M.GE.2).AND.(J.GT.M)) THEN
C         J=J-M
C         M=M/2
C       GO TO 1
C       ENDIF
C       J=J+M

```

```

11 CONTINUE
C***Here begins the Danielson-Lanczos section of the routine
MMAX=2
C****Outer loop executed log2 NN times
2 IF (N.GT.MMAX) THEN
    ISTEP=2*MMAX
    THETA=6.28318530717959D0/(ISIGN*MMAX)
C*****Initialize for the trigonometric recurrence
WPR=-2.D0*DSIN(0.5D0*THETA)**2
WPI=DSIN(THETA)
WR=1.D0
WI=0.D0
C*****Here are the two nested inner loops
DO 13 M=1,MMAX,2
DO 12 I=M,N,ISTEP
    J=I+MMAX
C*****This is the Danielson-Lanczos formula
    TEMPR=SNGL(WR)*Y(J)-SNGL(WI)*Y(J+1)
    TEMPI=SNGL(WR)*Y(J+1)+SNGL(WI)*Y(J)
    Y(J)=Y(I)-TEMPR
    Y(J+1)=Y(I+1)-TEMPI
    Y(I)=Y(I)+TEMPR
    Y(I+1)=Y(I+1)+TEMPI
12 CONTINUE
C*****Trigonometric recurrence
    WTEMP=WR
    WR=WR*WPR-WI*WPI+WR
    WI=WI*WPR+WTEMP*WPI+WI
13 CONTINUE
    MMAX=ISTEP
GO TO 2
ENDIF
RETURN
END
C
C*****

```

Apéndice G

Función de Wigner para un Hamiltoniano tipo Kerr.

En este apéndice reproducimos el programa que nos permite calcular los momentos de la función de Wigner para un Hamiltoniano tipo Kerr.

179
PROGRAM WK

FUNCIONES DE WIGNER.

C*****VARIABLE DECLARATION
IMPLICIT NONE

INTEGER N, NO, N1, J, K, M, CO, C1, TAM, F, NPFI, DD, R1, NR, R
CHARACTER FN*12
REAL*8 T, TOM, TCHI, NAV, DELTA, RM, TEM, PI, LO, L1, Y, UNO
REAL*8 DR, RR, PHI, DPFI, AREA, RAREA, B, SS, AMP, TO, R2
PARAMETER (TAM=200, FN='wk25_0.dat', PI=3.141592654, UNO=1.00)
REAL*8 Q(TAM), W(TAM, TAM), WW(TAM, TAM), TEM1
REAL*8 I1, I2, I3, I4, I5, I6

C*****CONSTANT DECLARATION

PARAMETER (NAV=16.DO, DELTA=7.DO)
PARAMETER (T=PI/4.DO, TOM=T*G.DO, TCHI=T*1.DO)

RM=SQRT(NAV)

C*****INTERVAL FOR N (NO<N<N1)

NO=INT(NAV-DELTA*RM)
IF (NO .LT. 0) THEN
NO=0
ENDIF
N1=INT(NAV+DELTA*RM)

C*****NUMBER OF POINTS IN UNIT INTERVAL

DR=0.12DO
DD=INT(1/DR)

C*****NUMBER OF POINTS IN EVERY CIRCLE

NPFI=INT(6.283185307*RM*DD)
DPFI=6.283185307/NPFI

C*****NUMBER OF POINTS ON THE RADIUS

R1=INT(RM+DELTA)
NR=R1*DD

AREA=DR*DR/NPFI

C*****OPENING OF FILE FOR SAVING DATA

C OPEN (9, FILE=FN, STATUS='NEW', IOSTAT=CO)
C IF (CO .GT. 0) THEN
C WRITE (*,*) 'Opening of file ', FN, ' unsuccessfull.'
C STOP
C ENDF

C*****CLEANING UP VARIABLES

DO 10 N=1, NR
DO 15 M=1, NPFI
W(N, M)=0. DO
CONTINUE
15 CONTINUE
10 DO 20 N=1, (N1-NO)
DO 25 M=1, (N1-NO)

```

                WW(N,M)=0.DD
25      CONTINUE
20      CONTINUE

C*****COHERENT STATE AMPLITUDES
AMP=EXP(-NAV/2)/RM
TEM=RM
DO 30 N=2,NO
    TEM=TEM*RM/SQRT(REAL(N))
30      CONTINUE
DO 40 N=1,(N1-NO)
    Q(N)=AMP*TEM
    TEM=TEM*RM/SQRT(REAL(N))
40      CONTINUE

CO=4*(-1)**NO
C*****THE POINT IN THE CENTER, Rr=0
C1=CO/2
DO 50 M=NO,(N1-1)
    WW(M+1,1)=C1*Q(M-NO+1)*Q(M-NO+1)
    C1=-C1
50      CONTINUE
DO 55 F=1,NPHI
    SS=0
    DO 56 M=NO,(N1-1)
        SS=SS+WW(M+1,1)
56      CONTINUE
    W(1,F)=SS
55      CONTINUE
SS=W(1,1)
TEM=PI/4*DR*DR
I1=SS*TEM
I2=SS*I1
I3=SS*I2
I4=SS*I3
I5=SS*I4
I6=SS*I5

C*****THE CYCLE OVER R AND PHI
DO 60 R=2,NR
    C1=C0
    RAREA=(R-1)*AREA
    RR=(R-1)*DR
    R2=2*RR*RR
    AMP=EXP(-RR*RR)

DO 70 M=NO,(N1-1)
    B=1-R2
    LO=UNO
    L1=B

```



```

DO 70 M=NO, (N1-1)
  B=1-R2
  LO=UNO
  L1=B
  IF (M .EQ. 0) THEN
    Y=LO
  ELSE
    IF (M .EQ. 1) THEN
      Y=L1
    ELSE
      DO 80 J=1, (M-1)
        Y=((2.DO*J+B)*L1-J*LO)/(REAL(J+1))
        LO=L1
        L1=Y
      80 CONTINUE
    ENDIF
  ENDIF
  WW(M+1,1)=AMP*C1/2*Y*(Q(M-NO+1)**2)
  DO 90 K=1, (N1-M-1)
    TO=1.DO
    DO 95 J=2, K
      TO=TO*J
    95 CONTINUE
    TO=SQRT(TO)
    B=K*UNO+UNO-R2
    LO=UNO/TO
    TEM=UNO*(K+1)
    L1=B*LO/(SQRT(TEM))
    IF (M .EQ. 0) THEN
      Y=LO
    ELSE
      IF (M .EQ. 1) THEN
        Y=L1
      ELSE
        DO 100 J=1, (M-1)
          TEM=(J+1)*(J+K+1)*UNO
          TEM1=J*(J+K)*UNO
          Y=((2.DO*J+B)*L1-SQRT(TEM1)*LO)/SQRT(TEM)
          LO=L1
          L1=Y
        100 CONTINUE
      ENDIF
    ENDIF
    TEM=UNO*K
    TEM=(TEM/2)*DLOG(R2)
    WW(M+1, K+1)=C1*DEXP(TEM-R2/2)*Y*Q(M-NO+1)*Q(M+K-NO+1)
  90 CONTINUE
  C1=-C1
  70 CONTINUE

```

```

TOM=T*0.DO
TCHI=T*1.DO
C1=UNO
DO 110 F=1,NPHI
  PHI=F*DPHI-PI
  SS=0.DO
  DO 120 M=(N0+1),(N1-1)
    DO 130 K=0,(N1-M-1)
      SS=SS+WW(M+1,K+1)*COS(K*(TOM+PHI+TCHI*(K+2*M)))
130    CONTINUE
120  CONTINUE
    W(R,F)=SS

    TEM=SS*RAREA
    I1=I1+TEM
    I2=I2+SS*TEM
    TEM=SS*SS*TEM
    I3=I3+TEM
    I4=I4+SS*TEM
    TEM=SS*SS*TEM
    I5=I5+TEM
    I6=I6+SS*TEM
    C1=-C1
110  CONTINUE
60  CONTINUE

TI=REAL(T)
II1=REAL(I1)
II2=REAL(I2)
II3=I3/1.333333
II4=I4/2.E0
II5=I5/3.20
II6=I6/5.333333
WRITE (9,*) TI, II1, II2, II3, II4, II5, II6
WRITE (*,*) TI, II1, II2, II3, II4, II5, II6

1000 CONTINUE

CLOSE(9)

END

```

Apéndice H

La paradoja de Zenón para mediciones continuas.

En el artículo que reproducimos [93] discutimos la paradoja de Zenón cuántica en un sistema de tres niveles bajo medición continua.

Letter

**Zeno paradox and radiation trapping
in three-level systems**

A. L. RIVERA† and S. M. CHUMAKOV‡

I.I.M.A.S.-Cuernavaca Universidad Nacional Autónoma de México,
Apartado Postal 139-B, 62191, Cuernavaca, Mor., México

(Received 8 September 1993; revision received 14 January 1994)

Abstract. We discuss the quantum Zeno paradox in a three-level system. We are interested in its ability to enhance radiation trapping. This system provides an example of the situation when the spontaneous emission process in one transition is essentially determined by the pump and damping parameters of another transition.

1. Introduction

Since the creation of quantum mechanics the problem of quantum measurements has been a source of ongoing discussions. The two-level system may give the simplest and clearest example of this problem. It is described by a 2×2 density matrix. After the measurement, the non-diagonal density matrix elements collapse to zeros and the density matrix acquires a diagonal form: $P_1 = \rho_{11}$ and $P_2 = \rho_{22}$ are the probabilities of finding the system in states 1 and 2. Therefore, after the measurement the system state is entirely a statistical mixture of the states 1 and 2, and all the coherence in the system disappears. This is called 'von Neumann's state reduction postulate'. The question usually discussed is: what is the physical origin of this state reduction?

The quantum Zeno effect (or paradox) is the inhibition of transitions between quantum states by frequent measurements [1, 2]. It was proposed to realize this effect in optical experiments with three-level atoms [3], and it has been experimentally performed in [4] where the quantum Zeno effect was observed.

We are interested here in the physical situation similar to the experimental set-up of [4]. Let us consider a three-level system with V configuration of the levels, see figure 1. Suppose, that this atom is placed inside the ideal cavity and the cavity field mode of frequency ω_{20} is on exact resonance with the transition $2 \rightarrow 0$. We denote by β the coupling constant with the cavity field (the vacuum Rabi frequency of the transition $2 \rightarrow 0$) and we neglect the spontaneous emission from level 2 into other modes.

Suppose also, that we are able to apply a strong classical (optical) field of frequency ω_{10} that is on resonance with the transition $1 \rightarrow 0$. We denote by α the Rabi frequency of the transition $1 \rightarrow 0$ which is equal to the corresponding coupling

†Fac. de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México; under scholarship from DGAPA, UNAM.

‡On leave from: Central Bureau of Unique Device Designing, Russian Academy of Sciences.

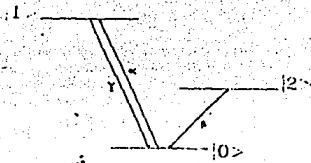


Figure 1. The three-level system with V configuration of the levels.

constant multiplied by the square root of the intensity of the mode ω_{10} . The atom can also perform the transition $1 \rightarrow 0$ emitting photons into other field modes. We describe this leakage of photons by introducing a damping coefficient γ .

In the present paper we follow the point of view that a measurement process, which is the interaction of a small quantum system with a macroscopic measuring device, inevitably introduces a dissipation into the system dynamics. This dissipation results just in a collapse of the non-diagonal density matrix elements. Therefore, the measurement can be described in the frame of usual quantum mechanics with dissipation. Such a treatment of the Zeno effect was proposed in [5]. Suppose, an atom was initially prepared in its excited state 2. Then the pure result of the quantum Zeno effect will be a frozen emission from this state into the cavity mode ω_{20} if the strong optical field is applied on resonance with another transition $1 \rightarrow 0$ and the damping coefficient γ of the transition $1 \rightarrow 0$ has an appropriate value. On the other hand, if the dissipation is absent, $\gamma = 0$, the same system exhibits the coherent trapping provided that $\alpha \gg \beta$.

The questions arise, what is the correspondence between the Zeno effect and the coherent trapping and is it possible to get an additional trapping because of the Zeno effect (i.e. due to an additional dissipation in the system)? The answer that we will justify below is that for the example under study, the introduction of a dissipation always decreases the degree of trapping in spite of the fact that it is possible to determine regimes, $\beta \ll \gamma$, α , where the Zeno effect is present.

2. The quantum Zeno paradox

If the two-level atom with the levels 2 and 0 is placed inside the ideal cavity with the resonant frequency ω_{20} it will continuously exchange its energy with the cavity field mode, exhibiting quantum Rabi oscillations. Suppose that the atom was initially in its excited state 2. Then the probability of finding the atom in the same state after time t has passed is $\rho_2 = \cos^2(\alpha t)$ and the probability that a photon has been emitted is $\rho_0 = \sin^2(\alpha t)$.

It was proposed in [3] to investigate the quantum dynamics of the transition $2 \rightarrow 0$ using the strong field applied to the second transition $1 \rightarrow 0$ as a 'measuring device'. Let us apply to the atom a strong optical pulse ω_{10} during the short time $\delta t \ll t$. If the atom has not emitted a photon ω_{20} then it does not feel the 'measuring field'. If the atom has passed to the state 0 before the 'measurement', then it begins to oscillate between the levels 1 and 0, producing scattering photons, which in principle can be detected. Therefore, we can get information whether the atom was in the state 2 or 0 before the measuring pulse. Correspondingly, after the 'measuring optical pulse'

Zeno paradox and radiation trapping

841

the atomic wavefunction is collapsed: it can be in the state 2 with a probability p_2 or in the state 0 with a probability p_0 but not in a coherent superposition of these states. Repeating this sequence for n times (free evolution during the time $t = T/n$ and the 'measurement' during the time $\delta t \ll t$), if n goes to ∞ we have:

$$p_2(t) = \left[\cos^2 \left(\frac{T}{n} \alpha \right) \right]^n = \left(1 - \frac{T^2 \alpha^2}{2n^2} \right)^{2n} \rightarrow 1.$$

Therefore, the subsequent 'measurements' of the system state prevent the decay of level 2.

In the present work we will describe the 'measurements' by introducing the damping coefficient, γ , following [5]. We investigate here the case of 'continuous measurement', when the strong field ω_{10} is continuously applied to the atom. We are interested in to what degree the damping in the transition $1 \rightarrow 0$ can prevent the emission from level 2.

3. Coherent trapping

Note that if $\gamma = 0$ (without any 'measurement'), when the system is described by the wavefunction, the emission from the state 2 is suppressed provided that $\beta/\alpha \ll 1$:

$$p_0(t) = \frac{\beta^2}{\alpha^2} [1 - \cos(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} t] \sim 0.$$

This result can be easily obtained by solving the Schrödinger equation, see, e.g. [6]. The close situation for three- and two-level atoms is known as coherent trapping [7]. Another explanation of this trapping is that in the case $\beta \ll \alpha$ the initial state 2 is close to the eigenstate of the Hamiltonian and therefore is not transformed strongly by the evolution.

4. The solution of optical Bloch equations

We investigate how spontaneous emission from level 2 is modified by the 'continuous measurement' i.e. by the presence of the strong field ω_{10} . The atom is described by the density matrix:

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & i\rho_{10} \\ \rho_{12} & \rho_{22} & i\rho_{20} \\ -i\rho_{10} & -i\rho_{20} & \rho_{00} \end{bmatrix}.$$

(Note, that if the non-diagonal density matrix elements are initially zeros, then there are connections $\dot{\rho}_{12} = \rho_{21}$, $\dot{\rho}_{10} = -\rho_{01}$, $\dot{\rho}_{20} = -\rho_{02}$, ns has been taken into account in our definition of the density matrix, see e.g. [5].)

The density matrix is determined from the optical Bloch equations (see [5, 8]):

$$\left. \begin{aligned} \dot{\rho}_{11} &= -\gamma\rho_{11} + 2\alpha\rho_{10}, \\ \dot{\rho}_{22} &= 2\beta\rho_{20}, \\ \dot{\rho}_{12} &= -\gamma/2\rho_{12} + \beta\rho_{10} + \alpha\rho_{20}, \\ \dot{\rho}_{10} &= -2\alpha\rho_{11} - \alpha\rho_{22} - \beta\rho_{12} - \gamma/2\rho_{10} + \alpha, \\ \dot{\rho}_{20} &= -\beta\rho_{11} - 2\beta\rho_{22} - \alpha\rho_{12} + \beta. \end{aligned} \right\}$$

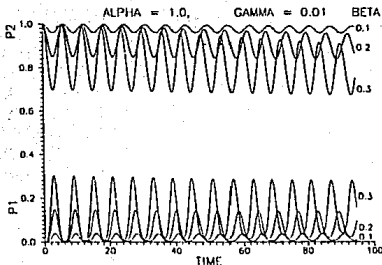


Figure 2. Probabilities P_1 and P_2 as functions of time for a fixed value of α and γ and three different values of β ($\gamma \ll \alpha, \beta$). We observe coherent trapping with a small dissipation.

We have numerically solved this equation for different values of the parameters α , β , γ .

We show in figures (2, 3) the level populations $p_2(t) = \rho_{22}(t)$ and $p_1(t) = \rho_{11}(t)$ (remember that $\rho_0(t) = 1 - p_1 - p_2$).

In figure 2 we show the case of $\gamma \ll \alpha, \beta$ and we observe coherent trapping (fast oscillations with a small amplitude close to the initial value). As β grows, the amplitude of Rabi oscillations increases and its period $[(\alpha^2 + \beta^2)^{-1/2}]$ decreases. Here the dissipation is weak. When γ grows the dissipation increases (see figure 3).

Note, that if $\gamma = 0$ than the steady state $d\rho/dt = 0$ is never achieved. However, for arbitrary small but finite γ , the steady state [9]:

$$\rho_{11}(\infty) = \frac{\alpha^2}{2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2/4)}, \quad \rho_{22}(\infty) = \frac{\beta^2 + \gamma^2/4}{2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2/4)},$$

is finally achieved. The Zeno effect occurs if, in the presence of a strong field $\alpha \gg \beta$, the population p_{22} approaches the steady value $\rho_{22}(\infty)$ very slowly, in comparison with the period of Rabi oscillations β^{-1} in the absence of a measurement ($\alpha = 0$).

In figure 4 we consider the case of constant α and β and we are interested in the effect of changing values of γ . We observe the 'Zeno effect' while $\gamma \ll \alpha$. As γ grows, becoming similar to α , the trapping disappears and we change to the regime of dissipation (without oscillations). In the case of $\gamma \gg \alpha$ damped oscillations appear (with the oscillation frequency $\sim \beta$). The limit $\gamma \rightarrow \infty$ has similar behaviour to $\alpha \rightarrow 0$.

In figure 5 we show the effect of changing the value of α (keeping constant values of γ and β). While $\alpha \ll \gamma$ we observe damped oscillations of period $\sim \beta^{-1}$. As α grows the dissipation becomes stronger until the oscillations disappear (when $\alpha = \gamma/10$). For $\alpha > \gamma$ we observe Zeno trapping.

Therefore, our figures 2-5 show that the two phenomena, coherent trapping and Zeno effect, are not well-separated in the space of different values of parameters α , β and γ . We can think of coherent trapping with dissipation as 'Zeno trapping'; this occurs for the values $\alpha \gg \beta$, $\alpha > \gamma$ (the upper curves in figures 2-5). For larger values of γ fast dissipation appears, which in turn is changed for another regime of slow oscillations with frequency β for very large γ .

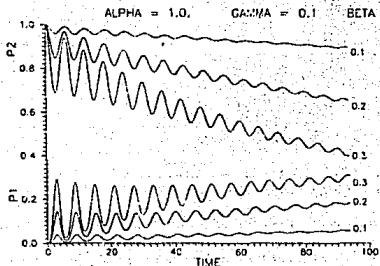


Figure 3. The same as figure 2. In this case ($\gamma \sim \beta < \alpha$) the dissipation is stronger.

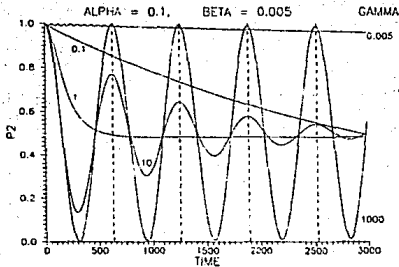


Figure 4. Probability P_2 as function of time for a fixed value of α and β and different values of γ . The vertical lines represent the period of Rabi oscillations β^{-1} in the absence of a measurement, i.e. if $\alpha = 0$. While $\gamma \ll \alpha$ we observe the 'Zeno effect'. As γ grows, becoming similar to α , we change to the regime of dissipation (without oscillations). In the case of $\gamma \gg \alpha$ damped oscillations appear of period $\sim \beta^{-1}$ and for $\gamma = 10000\alpha$ we have a behaviour similar to the one if $\alpha \rightarrow 0$.

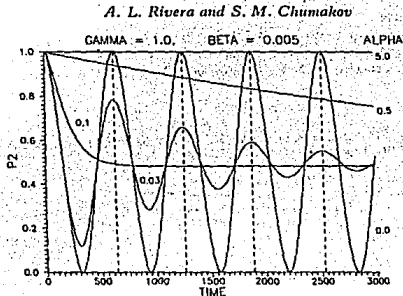


Figure 5. Probability P_2 as function of time for a fixed value of γ and β and different values of α . The vertical lines represent the period of Rabi oscillations β^{-1} in the absence of a measurement, i.e. if $\alpha=0$. While $\alpha < \gamma$ we observe damped oscillations of period $\sim \beta^{-1}$. As α grows the dissipation becomes stronger until the oscillations disappear (when $\alpha = \gamma/10$). For $\alpha > \gamma$ we observe Zeno trapping.

5. Conclusions

We have investigated the decay of an atom into the cavity field mode. In the absence of other levels the atomic inversion would undergo the undamped vacuum Rabi oscillations with the frequency β , see, e.g. [10]. This behaviour is modified by the presence of a strong field in resonance with the damped transition $1 \rightarrow 0$ connecting the same ground state 0 with another excited state 1. In this case, the spontaneous decay from level 2 is essentially determined by the parameters α and γ of the transition $1 \rightarrow 0$. This situation is analogous to that in cavity quantum electrodynamics [10], when the spontaneous decay of an atom placed into the bad cavity is determined by the dissipation of photons into the cavity walls, leading to enhanced spontaneous emission [11]. Here, the cavity supporting mode ω_{20} is assumed to be lossless, however, the presence of another transition strongly modifies the decay.

We were especially interested in the regimes of the radiation trapping from level 2. The coherent trapping occurring in the three-level system without dissipation is preserved also for the case of small damping in the transition $1 \rightarrow 0$, at the expense of the increase of intensity of the strong field α (see figures 4 and 5).

The last phenomenon is identical with the Zeno paradox, discussed in the literature [4, 5] in connection with quantum measurements and the conceptual principles of quantum mechanics, and the question arises as to whether it is possible to use the Zeno effect as an additional mechanism of radiation trapping. Our answer, at least for continuous measurement in the system under study, seems to be negative, i.e. the damping in the transition is not able to improve the quality of trapping in another transition. In other words, the 'measurement' cannot improve the quality of coherent trapping, which had already existed in the system without any 'measurement'.

Acknowledgments

S. M. Ch. wishes to thank the Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, Tonantzintla, Mexico and especially Dr J. J. Sanchez-Mondragon for hospitality. We are grateful to Dr K. B. Wolf and Dr A. B. Klimov for interesting discussions.

References

- [1] KHALFIN, L. A., 1957, *Zh. Ekip. teor. Fiz.*, **33**, 1371; 1958, *Soviet Phys. JETP*, **6**, 1053.
- [2] MISRA, B., and SUDARSHAN, E. C. G., 1977, *J. Math. Phys.*, **18**, 756.
- [3] COOK, R., 1988, *Physica scripta*, **T21**, 49.
- [4] ITANO, W. M., *et al.*, 1990, *Phys. Rev. A*, **41**, 2295.
- [5] FRIEDRICH, V., and SCHENZLE, A., 1991, *Phys. Rev. A*, **44**, 1962.
- [6] RETAMAL, J. C., ROA, L., and SAAVEDRA, C., 1992, *Phys. Rev. A*, **45**, 1876.
- [7] KOCHAROVSKAYA, O., and MANDEL, P., 1990, *Phys. Rev. A*, **42**, 523.
- [8] KIMBLE, H. J., COOK, R. J., and WELLS, A. L., 1986, *Phys. Rev. A*, **34**, 3190.
- [9] PEGG, D. T., LOUDON, R., and KNIGHT, P. L., 1986, *Phys. Rev. A*, **33**, 4085.
- [10] HAROCHE, S., and KLEPPNER, D., 1989, *Phys. Today*, **24**.
- [11] PURCELL, E. M., 1946, *Phys. Rev.*, **69**, 681.

Apéndice I

La paradoja de Zenón para mediciones sucesivas.

En el artículo que reproducimos [94] discutimos la paradoja de Zenón cuántica en un sistema de tres niveles bajo mediciones sucesivas.

16 January 1995

PHYSICS LETTERS A



Physics Letters A 197 (1995) 73-82

Quantum Zeno effect in unitary quantum mechanics

S.M. Chumakov ^a, K.-E. Hellwig ^b, A.L. Rivera ^a

^a Institut für Theoretische Physik, Technische Universität Berlin, Hardenbergstrasse 36, Sekr. PN 7-1, D-10623 Berlin, Germany

^b Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas, Universidad Nacional Autónoma de México, Apdo. Postal 139-B, 62191 Cuernavaca, Mor., México

Received 17 October 1994; accepted for publication 9 November 1994

Communicated by P.R. Holland

Abstract

We discuss the possibility to observe the quantum Zeno effect in unitary models of quantum measurements, when the measuring apparatus is supposed to have a few degrees of freedom although containing a large amount of energy. For the example of the Zeno effect in optical three-level systems we compare the unitary mechanism for radiation trapping with the one based on dissipative dynamics.

1. Introduction

Since the advent of quantum mechanics the problem of quantum measurements has been a source of permanent discussions. Two-level systems give the simplest and the most transparent examples of this problem. Consider the density matrix of such a system in the basis of eigenvectors of the observable to be measured. It may represent a pure or a mixed state before the measurement. After the measurement, the density matrix will represent the mixed state which is derived from the initial one replacing by zeros the off-diagonal matrix elements, "coherences". The remaining diagonal matrix elements $\rho_{11} = \rho_{11}$ and $\rho_{00} = \rho_{00}$ are just the statistical probabilities to find the system in the states 1 or 0.

Since quantum dynamics for closed systems is always given by a unitary one-parameter group, the loss of coherence and the increase of informational entropy can not be described without taking into account the interaction with another system, the apparatus. In some extreme sense, von Neumann [1] treated the measurement as a process of an open system acted upon by the consciousness of the observer, causing the loss of coherence, i.e. the "reduction of state". Another possibility is to include statistical principles leading to irreversible dynamics of many-body systems.

A closely related problem is the quantum Zeno effect (or paradox), which is an inhibition of the transitions between quantum states caused by frequent measurements [2,3]. Cook [4] proposed to realize this effect in optical experiments with three-level atoms (see also Ref. [5]) and it was experimentally observed by Itano et al. [6]. The Zeno effect essentially involves a non-exponential decay, as it happens with the atomic emission in a resonant cavity. Then it directly follows from the state reduction (see below).

Recently this problem has been analyzed in the framework of quantum mechanics with dissipation [7-9]. According to this point of view, the interaction of a small quantum system with a macroscopic measuring ap-

paratus inevitably introduces a dissipation into the microsystem dynamics. This just results in a collapse of non-diagonal density matrix elements which, in turn, leads to the quantum Zeno effect.

Let us consider in more details the physical situation similar to the experimental setup of Ref. [6]. The system involves a double-resonance scheme (see Fig. 1) where two excited atomic states 1 and 2 are connected to a common lower level 0 via a strong optical and weak rf transition, respectively. We denote by A and β the Rabi frequencies of these transitions and neglect the spontaneous emission from level 1 into other modes. The photons scattered by strong transition are observed. However, an excitation of a weak transition where the electron is temporarily kept in the metastable level 2 will cause the strong transition to be turned off. It is, therefore, possible to determine the microscopic quantum state of the atom via the macroscopic signal provided by the fluorescence of the strong transition (described introducing a damping coefficient γ).

Let an optical pulse be applied to the atom during the short time $\tau_p \ll \beta^{-1}$. After the "measuring pulse" the atomic wave function is collapsed: the atom can be in the state 1 or 0 with probabilities p_1 or p_0 but not in a coherent superposition of these states. Repeating this sequence for n times (free evolution during the time $T = T_0/n$ and "measurement" during the time $\tau_p \ll T$), we have for large n

$$p_1(T_0) = \left[\cos^2 \left(\frac{T_0}{n} A \right) \right]^n \approx \left(1 - \frac{T_0^2 A^2}{2n^2} \right)^n \rightarrow 1.$$

Therefore, the subsequent "measurements" of the object state prevent the decay of level 1. This is a standard logic of the quantum Zeno effect [2-7].

If the damping coefficient γ is too small, one can hardly see scattered photons and the measurement cannot be performed. Then there is no state reduction and one cannot multiply the probabilities (since different Feynman paths contribute to the probability amplitude [10]). The Zeno effect has to disappear. On the other hand, if the dissipation is absent, $\gamma=0$, the same system exhibits coherent trapping provided that $A \gg \beta$. The question arises, whether it is possible to find a new regime of trapping due to the Zeno mechanism, i.e., through dissipation, and whether it is different from the usual coherent trapping. The answer for the case of continuous measurement is given in Ref. [11] and it is negative. The increasing damping coefficient γ always spoils the quality of coherent trapping in another transition (which already exists for $\gamma=0$ provided that $A \gg \beta$).

Nevertheless, for the case of many subsequent measurements the arguments of Refs. [7,9] seem to work and the radiation trapping seems to follow from the phase relaxation introduced by the measuring device. However, we shall show below, in Section 3, that there is also a unitary trapping mechanism for subsequent pulses. The radiation trapping in level 1 almost always appears if the sequence of strong pulses is applied to the 2-0 transition of a three-level atom even if $\gamma=0$, i.e., if the dissipation is negligibly small. Moreover, our numerical tests show that trapping is often stronger just in the unitary case $\gamma=0$.

The measurement mechanism proposed by Cook [4] and supposed to be realized in experiments [6] evi-

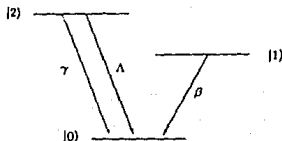


Fig. 1. The three-level system with "V" configuration of the levels. A represents the Rabi frequency of the strong transition, γ is the natural line width of the optical transition and β is the Rabi frequency of the weak transition.

ently fails if $\gamma=0$. This means that either Zeno trapping is not necessarily connected with measurements, or that we need to modify the notion of a measurement.

If we analyze the second point of view then the following question arises. Must the measuring device have very many degrees of freedom or is it enough to have a few or even one, in which, however, a large amount of energy is contained? In the first case the interaction with a measuring device leads to an irreversible dynamics of the object and it can be described by quantum mechanical equations with dissipation (such as Bloch equations, see Section 2). As it is shown for a three-level example in Refs. [7,9], and by a different approach in Ref. [12], the interaction with a large device indeed leads to the phase relaxation and destroys the off-diagonal density matrix elements of the microsystem, thus explaining the von Neumann state reduction. In the second case of a "small measuring apparatus" the dynamics is reversible. However, if a large amount of energy is contained in a single degree of freedom of the device, it is enough to provide the Zeno effect of radiation trapping in a microsystem. Moreover, the off-diagonal density matrix elements of a microsystem are kept small by this condition.

In Section 4 we discuss another example of a "small apparatus". It is an exactly soluble model of a measurement proposed by Kraus [13], which also leads to radiation trapping in the frame of unitary dynamics. Kraus called it "the Watchdog effect" in order to separate this phenomenon from the quantum Zeno paradox resulting from a state reduction. If the small measuring apparatuses are acceptable, the difference between the Zeno and Watchdog effects disappears.

2. Zeno effect in a three-level system: dissipative dynamics

The Zeno effect in the three-level atom described above can be investigated in terms of optical Bloch equations [7-9]. The measurement is described introducing the damping coefficient γ which represents photons scattered by the atomic transition $2 \rightarrow 0$. If the initial atomic density matrix is diagonal then at time t it depends on five real parameters,

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{22} & \rho_{21} & i\rho_{20} \\ \rho_{21} & \rho_{11} & i\rho_{10} \\ -i\rho_{20} & -i\rho_{10} & \rho_{00} \end{pmatrix}, \quad \rho_{00} + \rho_{11} + \rho_{22} = 1,$$

which are determined by the Bloch equations

$$\dot{\rho}_{22} = -\gamma\rho_{22} + 2A\rho_{20}, \quad \dot{\rho}_{11} = 2\beta\rho_{10}, \quad \dot{\rho}_{21} = -\gamma/2\rho_{21} + \beta\rho_{20} + A\rho_{10},$$

$$\dot{\rho}_{20} = -2A\rho_{22} - A\rho_{11} - \beta\rho_{21} - \gamma/2\rho_{20} + A, \quad \dot{\rho}_{10} = -\beta\rho_{22} - 2\beta\rho_{11} - A\rho_{21} + \beta.$$

During the measuring pulse [7], the off-diagonal matrix element ρ_{10} performs damped oscillations quickly reaching the steady state value 0, provided that $\beta \ll A$, γ (see, e.g., Fig. 4). This explains von Neumann's state reduction in this model. Frequent measuring pulses decrease the decay rate from level 1, in comparison with the evolution in the case $A=0$.

Therefore, it seems that the logic of the Zeno paradox implies the possibility to suppress the emission from the level 1 due to the damping in the transition $2 \rightarrow 0$. This question was further investigated in Ref. [11], where the same Bloch equations were solved for the case of "continuous measurement", i.e. for $\beta \ll A = \text{const}$. Different ranges of values of the parameters A , β and γ were considered. Zeno trapping occurs in this case provided that $\beta \ll A$, $\gamma \ll A$. However, if the trapping is present for given values of β , A and γ , then it always becomes stronger with decreasing γ , and the best trapping occurs when $\gamma=0$. The last case already cannot be qualified as a measurement (at least in the sense described above). Then the evolution is governed by the Schrödinger equation (see the next section) and Ref. [14]). This trapping has the same origin as the usual coherent trapping in a three-level system (see, e.g., Ref. [15]) where it was proposed to use the coherent trapping for lasing without

inversion). Another explanation of this trapping is that the initial state of the system is close to the Hamiltonian eigenstate (cf. Ref. [16]). Just this is the case for the initial state 1 and the Hamiltonian given in the next section.

3. Schrödinger dynamics

It is clear that the measurement mechanism proposed by Cook [4] essentially involves a large enough damping coefficient γ . What will happen when the sequence of strong pulses is applied in resonance with the transition $1 \rightarrow 0$, but γ is too small to provide an effective measurement? We shall show in this section that the radiation trapping almost always occurs in such a system even if $\gamma=0$. This means either that this trapping is not connected with measurements or that the concept of measurement used in the previous section has to be modified.

The key point is that the steady state value for the non-diagonal density matrix element ρ_{10} is equal to 0, as it can be seen from the second Bloch equation. Hence, for arbitrary small γ the element ρ_{10} oscillates around zero level and, in some sense, the mean value of the time derivative $\dot{\rho}_{11}$ vanishes. On the other hand, the amplitude of the oscillations of ρ_{10} is small if $A \gg \beta$. Eventually, the dynamics is sensitive to the length of the optical pulses. (In this paper we restrict ourselves to the case of equal time intervals between pulses).

The dynamics can now be described in the Hilbert space of the three-level system, \mathcal{Q}^3 , by the Schrödinger equation with the Hamiltonian

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & \beta \\ A & \beta & 0 \end{pmatrix}, \quad |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

where atomic states in \mathcal{Q}^3 are denoted by $|j\rangle$.

For a time interval in which A is constant, the Schrödinger equation can be easily integrated. The evolution operator is

$$U = \begin{pmatrix} (A^2/\Omega^2) \cos(\Omega t) + \beta^2/\Omega^2 & (A\beta/\Omega^2) [\cos(\Omega t) - 1] & -(A/\Omega) i \sin(\Omega t) \\ (A\beta/\Omega^2) [\cos(\Omega t) - 1] & (\beta^2/\Omega^2) \cos(\Omega t) + A^2/\Omega^2 & -(\beta/\Omega) i \sin(\Omega t) \\ -(A/\Omega) i \sin(\Omega t) & -(\beta/\Omega) i \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) \end{pmatrix}, \quad \Omega^2 = A^2 + \beta^2.$$

Given the initial state $|1\rangle$ and the constant A , the amplitude for the atom to be in the ground state $U_{01}(t)$ and the corresponding off-diagonal density matrix element $\rho_{10}(t) = U_{11}U_{01}$ are proportional to the ratio $\beta/A \ll 1$. This corresponds to the coherent trapping.

The solution for subsequent pulses can be easily deduced from the evolution operator given above. The time behavior of ρ_{10} and of ρ_{11} is demonstrated in Figs. 2-5 for four different cases:

(1) 2π pulses. The pulse length contains an integer number of periods of the fast A -oscillations, $\tau_p = 2k\pi$. Then the system after the pulse is in the same state as before it and the slow β -oscillations are almost unaffected (Fig. 2).

(2) π pulses. The pulse length contains an odd number of half-periods of A -oscillations, $\tau_p = (2k+1)\pi$. Then, if the matrix element ρ_{11} was decaying after passing a maximal value, the pulse causes it to evolve back to the initial state. In consequence, level 1 becomes frozen (Fig. 3).

(3) A -frequency is not a multiple of the pulse length (here, $\tau_p = 20$). Also in this case the population of level 1 cannot differ too much from that at time $t=0$. We show this in Fig. 4 together with the corresponding curve for $\gamma=0.5$ (obtained by solving numerically the Bloch equations, cf. Refs. [7,11]). It is seen that the trapping becomes worse for finite γ .

(4) Fig. 5 shows the case when the pulse duration value is randomly distributed between 5π and 7π .

Hence, excluding the exceptional case (1), the system always shows radiation trapping, even in the absence

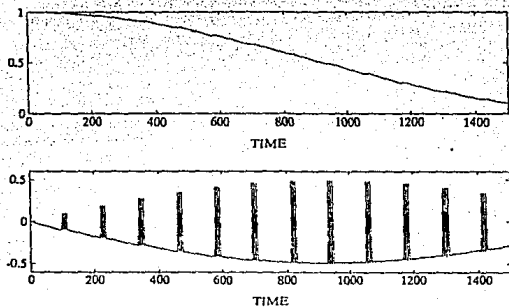


Fig. 2. Time behavior of ρ_{10} and ρ_{11} , where the pulse length contains an integer number of periods of the fast A -oscillations. In this case $\tau_p = 6\pi$, the period between the measurements $T = 100$, $\lambda = 1$, $\beta = 0.001$ and $\gamma = 0$.

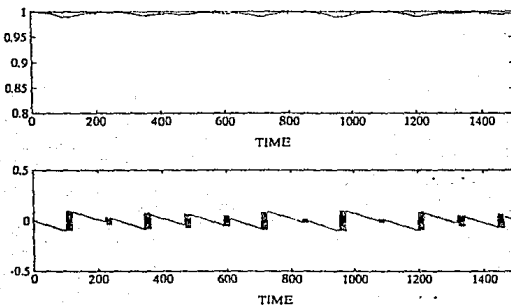


Fig. 3. The same as in Fig. 2 but the pulse length contains an odd number of half-periods of the fast A -oscillations ($\tau_p = 7\pi$).

of dissipation and phase relaxation provided that $A \gg \beta$ and $T < \pi/\beta$. The description of the measurement proposed by Cook [4] fails to explain this fact. However, one may think that some information is transferred from the object to its surrounding, but not irreversibly. The measuring device here is "rather small": it consists of one single degree of freedom although it contains a large energy. This small device cannot react onto the microsystem

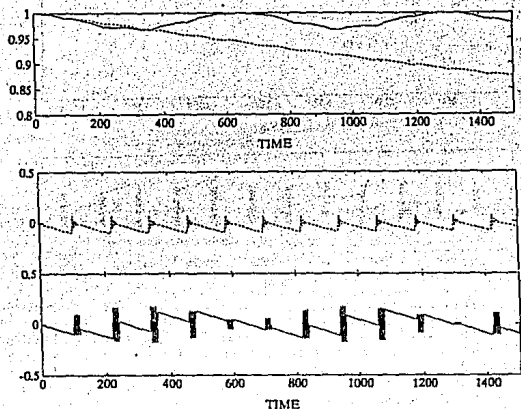


Fig. 4. Time behavior of ρ_{10} and ρ_{11} , where the pulse length is non-commensurate with the periods of the fast A -oscillations, $\tau_p = 20$. The continuous line is for $\gamma = 0$ and the dotted one for $\gamma = 0.5$. $A = 1.0$, $\beta = 0.001$.

irreversibly. Nevertheless, in the course of subsequent "measurements" it introduces a kind of dephasing into the object and the off-diagonal density matrix elements are kept small. Though not so impressive, this unitary mechanism for radiation trapping often works more efficiently than the phase relaxation due to the non-unitary evolution, as can be concluded from Fig. 4 for subsequent pulses and from Ref. [11] for a continuous pulse. (However, the phase relaxation mechanism restores the trapping in the case of 2π -pulses; then the trapping for the unitary case $\gamma = 0$ is absent, but it appears when $\gamma > 0$).

4. Another model of continuous observation

Now we shall discuss another exactly soluble model of a measurement, which also seems to work by the usual reversible quantum mechanics. Features of irreversible dynamics, which we use only for simplicity, do not seem to determine the main part of the mechanism. The model was proposed by Kraus [13].

Again the object will be a two-level system in an external field. Its free dynamics is described by

$$i|\dot{\psi}\rangle = \beta\hat{\sigma}_1|\psi\rangle.$$

Here, $\hat{\sigma}_{1,2,3}$ are Pauli matrices and we put hats over operators acting in the Hilbert space \mathcal{H}^2 of the object.

Let now an ensemble of such systems be prepared in the upper-state $|1\rangle$, $\hat{\sigma}_3|1\rangle = |1\rangle$, and exposed to contin-

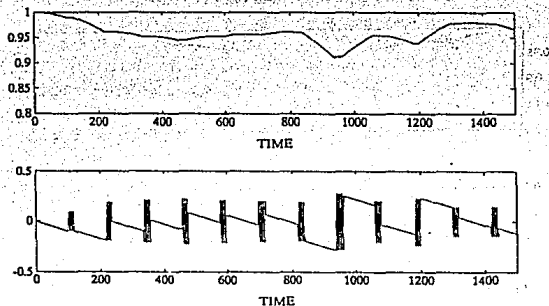


Fig. 5. Time behavior of ρ_{10} and ρ_{11} , where the pulse duration is randomly distributed between 5π and 7π . $A=1.0, \beta=0.001, \gamma=0$.

uous observation by an apparatus indicating the decay of the system. The apparatus now will be different from the one of Section 2. The interaction with the object will be coupled only with its ground-state $|0\rangle, \delta_3|0\rangle = -|0\rangle$. This coupling should switch on a process in the apparatus resulting in a quick indication of the decay. Let the apparatus be described in some Hilbert space \mathcal{X} and let H be a selfadjoint operator on \mathcal{X} generating this process. Then, an appropriate interaction Hamiltonian in $\mathcal{S} \otimes \mathcal{X}$ is $P_0 \otimes H$, where $P_{0,1} = \frac{1}{2}(1 \mp \delta_3)$ are the projection operators onto the object states. For simplicity the free Hamiltonian of the apparatus will be zero (i.e., its state is not changed while the object is in the upper-state).

The full Hamiltonian for the system consisting of the object under continuous observation by the apparatus has the form

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \otimes 1_{\mathcal{X}} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes H.$$

Thus, in contrast to the three-level model, the interaction here couples the apparatus with a diagonal object operator.

Let E_i be the spectral resolution of H in \mathcal{X} . Since $[H, \hat{1} \otimes H] = 0$, we can write

$$H = \int \tilde{h}_i dE_i, \quad \tilde{h}_i = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta & \epsilon \end{pmatrix}.$$

That is, the full Hamiltonian is a direct integral of two-dimensional blocks corresponding to different eigenvalues of the apparatus Hamiltonian. The one parameter family of Schrödinger equations can be easily solved to give

$$\exp(-i\hat{H}_t) = \exp(-\frac{1}{2}i\epsilon t) \begin{pmatrix} \cos \Omega(\epsilon)t + \frac{i\epsilon}{2\Omega(\epsilon)} \sin \Omega(\epsilon)t & -\frac{i\beta}{\Omega(\epsilon)} \sin \Omega(\epsilon)t \\ -\frac{i\beta}{\Omega(\epsilon)} \sin \Omega(\epsilon)t & \cos \Omega(\epsilon)t - \frac{i\epsilon}{2\Omega(\epsilon)} \sin \Omega(\epsilon)t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a(\epsilon, t) & -\bar{b}(\epsilon, t) \\ b(\epsilon, t) & a(\epsilon, t) \end{pmatrix},$$

$$\Omega(\epsilon) = \sqrt{\frac{1}{4}\epsilon^2 + \beta^2}.$$

and the solution of the Schrödinger equation is given by

$$\exp(-iHt) = \int_{\mathcal{O}} \exp(-i\hat{H}_t) dE_t.$$

In order to investigate the influence of continuous observation on the object we need some assumptions about the apparatus Hamiltonian H which generates the indication process. Simple models arise when we assume the spectrum of H to be the whole real axis and nondegenerated. (The latter means that the apparatus may have a single degree of freedom; for instance, it can be a particle on a line.) Assume the apparatus to be initially in a pure state $|g\rangle$ described by a wave function in the energy representation $\langle \epsilon | g \rangle = g(\epsilon)$. The corresponding one-dimensional subspace of \mathcal{X} just represents the proposition that the apparatus does not indicate the decay. In turn, its orthogonal complement represents the decay indication. Then the indication process is described by the decrease of the probability $|\mathcal{A}(t)|^2$ for the apparatus to be in the state $|g\rangle$, where

$$\mathcal{A}(t) = \langle g | e^{-iHt} | g \rangle = \int |g(\epsilon)|^2 e^{-i\epsilon t} d\epsilon.$$

If the object is taken initially in its upper-state then the full wave function is a superposition of ingredients oscillating with different Rabi frequencies (of the combined system object+apparatus)

$$|\Psi(t)\rangle = \int d\epsilon g(\epsilon) \exp(-i\hat{H}_t) |1\rangle \otimes |g\rangle = \int d\epsilon g(\epsilon) \begin{pmatrix} a(\epsilon, t) \\ b(\epsilon, t) \end{pmatrix} \otimes |g\rangle.$$

In contrast to the probability $p_u(t) = \cos^2 \beta t$ to find the free instable object at time t in the upper-state $|1\rangle$, the probability for the object to survive in the upper-state under the continuous measurement (irrespective of whether it has been indicated or not, that corresponds to the trace over the apparatus variable ϵ) is

$$w_u(t) = \langle \Psi(t) | P_u \otimes 1_{\mathcal{X}} | \Psi(t) \rangle = \int d\epsilon |g(\epsilon) a(\epsilon, t)|^2 = 1 - \beta^2 \int d\epsilon |g(\epsilon)|^2 \frac{\sin^2 \Omega(\epsilon)t}{\Omega^2(\epsilon)}.$$

It is easy also to calculate the probability that the apparatus has not indicated the decay up to time t [13]

$$W(t) = \langle \Psi(t) | 1 \otimes P_g | \Psi(t) \rangle = \left| \int d\epsilon |g(\epsilon)|^2 a(\epsilon, t) \right|^2 + \left| \int d\epsilon |g(\epsilon)|^2 b(\epsilon, t) \right|^2,$$

where $P_g = |g\rangle \langle g|$ and the functions $a(\epsilon, t)$ and $b(\epsilon, t)$ are defined above as the matrix elements of the evolution operator block marked by a given value of ϵ .

As we have seen, all the properties of the model are determined by the "indication function" $\mathcal{A}(t)$, which may be any rapidly collapsing function. We now assume it to be a Gaussian, $\mathcal{A}(t) = \exp(-\frac{1}{2}At^2)$. Hence, the initial apparatus wave function in the energy representation is a Gaussian wave packet,

$$|g(\epsilon)|^2 = \frac{1}{A\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{2A}\right).$$

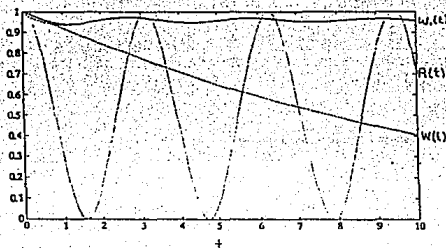


Fig. 6. The free decay law $p_1(t)$, the measured decay law $w_1(t)$ (the dashed curve is our estimation for it) and the probability that the decay has not been indicated by the device $W(t)$ (dashed decaying curve) for the model of continuous measurement of Section 4.

If the indication process is fast in comparison with the time scale of the object, $A \gg \beta$, then the function $|\alpha(\epsilon, t)|^2$ varies much faster than $|g(\epsilon)|^2$. Inspection shows that one can write

$$|\alpha(\epsilon, t)|^2 = \frac{\sin^2(t\sqrt{\frac{1}{4}\epsilon^2 + \beta^2})}{\frac{1}{4}\epsilon^2 + \beta^2} \approx \frac{\pi}{2\beta} \left(1 - \frac{\cos(2\beta t + \frac{1}{2}\pi)}{\sqrt{\pi\beta t + \frac{1}{2}}}\right) \delta(\epsilon).$$

Then the probability for the object to be in its upper-state is estimated as

$$w_1(t) \approx 1 - \frac{\beta}{A} \sqrt{\frac{1}{\pi}} \left(1 - \frac{\cos(2\beta t + \frac{1}{2}\pi)}{\sqrt{\pi\beta t + \frac{1}{2}}}\right).$$

For $\beta t \gg 1$ we have $w_1(t) \rightarrow 1 - \sqrt{\frac{1}{\pi}}(\beta/A)$.

This resembles strongly the results for the optical three-level model presented in the preceding section. The ratio of the Rabi frequency (of free oscillations of the object) and the characteristic energy of the measuring device, β/A , appears to determine the part of the energy under measurement, the system can radiate. If the indication is fast in comparison with free evolution in the measured system then $\beta/A \ll 1$ and the Zeno effect appears.

We show the results of explicit numerical calculations in Fig. 6, choosing the frequency of the free evolution of the object $\beta = 1.0$ and the apparatus parameter $A = 30$. The free decay law $p_1(t)$, the measured decay law $w_1(t)$ (the dashed curve is our estimation for it) and the probability that the decay has not been indicated by the device $W(t)$ are plotted. One observes the Zeno (or Watchdog) effect to occur in that $w_1(t)$ does not differ much from 1. The probability that the decay has not been indicated, however, decreases with time.

We may stress once again that the measuring device in this model can be thought as a one-dimensional system. The evolution is unitary and any nonunitary mechanism for the von Neumann state reduction is absent.

5. Conclusion

We have shown for two quite different examples, that the "quantum Zeno paradox", or "the Watchdog effect" can occur independent of any irreversible dynamics and phase relaxation. In the case of continuous observation the unitary mechanism of coherent trapping prevents the transitions in the object. In the case of subsequent

measurements the dephasing due to frequent pulses appearing in the unitary description also can suppress transitions. Moreover, both for continuous and subsequent measurements, the examples show that the trapping is often stronger for the purely unitary case than in the presence of additional dissipation. Hence, the unitary mechanisms for trapping seem to work more efficiently than the one due to the non-unitary phase relaxation [7].

In this sense, the Zeno (or Watchdog) effect is not necessarily connected directly with the von Neumann state reduction postulate. Though, in the course of interaction with the measuring device (whose energy is much higher than the system energy) the off-diagonal density matrix elements are kept small, which can be provided by a purely unitary evolution in the frame of the Schrödinger equation. It would be interesting to find more examples (as the 2π -pulses from Section 3) where trapping is absent in the unitary limit and appears when a dissipative mechanism for the state reduction is turned on.

Acknowledgement

We want to thank Professors M. Mensky, E.C.G. Sudarshan, V.V. Dodonov and K.B. Wolf for encouraging discussions and, in memoriam, Professor Yu. A. Gelfand who directed our attention to the present problem four years ago. One of us, S.Ch. is grateful to the Institut für Theoretische Physik, Technische Universität Berlin, for hospitality during the preparation of this work. A.L.R. is under scholarship of DGAPA-UNAM.

References

- [1] J. Von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantentheorie* (Springer, Berlin, 1931).
- [2] L.A. Khalifa, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 33 (1957) 1371 [*Sov. Phys. JETP* 6 (1958) 1053].
- [3] B. Misra and E.C.G. Sudarshan, *J. Math. Phys.* 18 (1977) 756.
- [4] R. Cook, *Phys. Scr.* T 21 (1988) 49.
- [5] H.J. Kimble, R.J. Cook and A.L. Wells, *Phys. Rev. A* 34 (1986) 3190; P. Zoller, M. Marte and D.F. Walls, *Phys. Rev. A* 35 (1987) 198.
- [6] W.M. Itano, D.J. Heinzen, J.J. Bollinger and D.J. Wineland, *Phys. Rev. A* 41 (1990) 2295.
- [7] V. Freericks and A. Schenzle, *Phys. Rev. A* 44 (1991) 1962.
- [8] E. Block and P.R. Berman, *Phys. Rev. A* 44 (1991) 1466.
- [9] T.P. Altenmüller and A. Schenzle, *Phys. Rev. A* 48 (1993) 70.
- [10] M.B. Mensky, *Continuous quantum measurements and path integrals*, Institute of Physics Pub., Bristol (1993).
- [11] A.L. Rivers and S.M. Chumakov, *J. Mod. Opt.* 41 (1994) 839.
- [12] T. Petrosky, S. Tasaki and I. Prigogine, *Phys. Lett. A* 151 (1990) 109; T. Petrosky, S. Tasaki and I. Prigogine, *Physica A* 170 (1991) 306.
- [13] K. Kraus, *Found. Phys.* 11 (1981) 547.
- [14] A. Peres, *Am. J. Phys.* 48 (1980) 931.
- [15] O. Kocharovskaya and P. Mandel, *Phys. Rev. A* 42 (1990) 523.
- [16] S.M. Chumakov, A.B. Klimov and J.J. Sanchez-Mondragon, *Phys. Rev. A* 49 (1994) 4972.

Bibliografía

- [1] R. P. Feynman, R. B. Leighton & M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1963; vol. I, cap. 26).
- [2] E. Hecht & A. Zajac, *Optics*, (Addison Wesley, Reading, Mass., 1979);
R. D. Guenther, *Modern Optics*, (John Wiley & Sons, New York, 1990);
K. D. Möller, *Optics*, (University Science Books, California, 1988);
J. W. Blaker, *Geometric Optics*, (Marcel Dekker Inc., New York, 1971);
M. V. Klein, *Optics*, (John Wiley & Sons, New York, 1970);
M. Herzberger, *Modern Geometrical Optics*, (Interscience, New York, 1958);
C. S. Hastings, *New Methods in Geometrical Optics*, (Macmillan, New York, 1927).
- [3] R. W. Ditchburn, *Optica*, (3ª Ed., Reverté, Barcelona, 1982; pp. 617-673).
- [4] S.I. Stepanov, "Applications of photorefractive crystals" *Rep. Prog. Phys.*, Vol. 57, pp. 39-116 (1994).
- [5] M. Born & E. Wolf, *Principles of Optics*, (6ª Ed., Pergamon Pres, Oxford, 1984).
- [6] H. A. Buchdahl, *An introduction to Hamiltonian Optics*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1970).
- [7] S. C. McClain, L. W. Hillman & R. A. Chipman, "Polarization ray tracing in anisotropic optically active media. I. Algorithms". *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 10, pp. 2371-2382 (1993);
ibid., "Polarization ray tracing in anisotropic optically active media. II. Theory and physics". *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 10, pp. 2383-2393 (1993).
- [8] Yu. A. Kravtsov & Yu. I. Orlov, *Geometrical Optics of Inhomogeneous media*, (Springer-Verlag, Berlin, 1990).
- [9] P. W. Hawkes, "Lie methods in optics: an assessment" en *Lie Methods in Optics II*, Ed. por K. B. Wolf, Lecture Notes in Physics, Vol. 352, pp. 1-17. (Springer Verlag, Heidelberg, 1989).

- [10] A. L. Rivera, S. M. Chumakov & K. B. Wolf, "Hamiltonian foundation of geometrical anisotropic optics". *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 12, pp. 1380-1389 (1995).
- [11] A. L. Rivera, S. M. Chumakov & K. B. Wolf, "Postulates of Hamiltonian geometrical optics in isotropic and anisotropic media". *Proceedings of the II International Symposium on Hamiltonian Systems and Celestial Mechanics*, Eds. J. LLibre & E.A. Lacomba, Cocoyoc, México (1994).
- [12] G. Torres del Castillo, "Lagrangian and Hamiltonian formulations of geometrical anisotropic optics", *Rev. Mex. Fís.*, Vol. 41, pp. 229-234 (1995).
- [13] P. Debye, *Polar Molecules*, (Chemical Catalog Co., New York, 1929; reimpresso por Dover, New York, 1974).
- [14] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, (2ª Ed., John Wiley & Sons, New York, 1975).
- [15] Se toma como referencia el valor exacto de $c = 299792458$ m/s, *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, (75ª Ed., Ed. David R. Lide, CRC Press, Boca Ratón, Florida, 1995; p. 1).
- [16] L. D. Landau & E. M. Lifshits, *Electrodinámica de los medios continuos*, (Reverté, Barcelona, 1981).
- [17] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, (2ª Ed. Addison Wesley, Reading, Mas., 1980).
- [18] A. Mercier, *Variational Principles of Physics*, (Dover, New York, 1963; pp. 222-224).
- [19] R. K. Luneburg, *Mathematical Theory of Optics*, (California Press, Los Angeles, 1944; pp. 96-97).
- [20] L. D. Landau & E. M. Lifshitz, *Mechanics*, (3ª Ed., Pergamon, Oxford, 1976).
- [21] R. Courant & D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. II, (John Wiley & Sons, New York, 1962).
- [22] R. Rashed, "A Pioneer in Anaclastics - Ibn Sahl on Burning Mirrors and Lenses", *ISIS*, Vol. 81, pp. 464-491 (1990);
R. Rashed, *Géométrie et dioptrique au X^e siècle: Ibn Sahl, al-Quhi, et Ibn al-Hayatham*, Collection Sciences et Philosophie Arabes, Textes et Etudes (Les Belles Lettres, Paris, 1993).

- [23] J. W. Blaker, *Geometric Optics*, (Marcel Dekker, New York, 1971).
- [24] R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras and some of their applications*, (John Wiley & Sons, New York, 1974).
- [25] F. A. Jenkins & H. E. White, *Fundamentals of Optics*, (4th Ed., McGraw-Hill, New York, 1976).
- [26] M. Navarro-Saad & K. B. Wolf, "Factorization of the phase-space transformation produced by an arbitrary refracting surface". *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 3, pp. 340-346 (1986).
- [27] V. A. Borovikov & B. E. Kinber, *Geometricheskaya Teoriya Difraksii*, (la teoría geométrica de la difracción), (Radio i Svyaz, Moscú, 1978).
- [28] R. Courant, *Partial differential equations*, (Interscience, New York, 1962).
- [29] D. Marcuse, *Light transmission optics*, (Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1972; pp. 230-262).
- [30] K.B. Wolf, *Integral Transforms in Science and Engineering*, (Plenum Press, New York, 1979).
- [31] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky & W.T. Vetterling, *Numerical Recipes*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1986); R.I. Burden, J.D. Faires, *Análisis Numérico*, (Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1985).
- [32] W. Lauterborn, T. Kurz & M. Wiesenfeldt, *Coherent Optics*, (Springer-Verlag, Berlin, 1993).
- [33] H. Kogelnik, "On the propagation of gaussian beams of light through lenslike media including those with loss or gain variation" *Appl. Opt.* Vol. 4, pp. 1562-1569 (1965).
- [34] V.V. Dodonov & V.I. Man'ko, en: *Group Theoretical Methods in Physics*, New York, Harwood Acad. Publ. 1985, Vol. 1, p. 591; V.V. Dodonov & O.V. Man'ko, en: *Group Theoretical Methods in Physics*, Proc. of the 3-rd Seminar, M.A. Markov (ed.), Moscow, Nauka, 1986, vol. 2, p. 432.
- [35] M. Moshinsky & C. Quesne, "Linear canonical transformations and their unitary representation", *J. Math. Phys.* 12, pp. 1772-1780 (1971).
- [36] H. Kogelnik & T. Li, "Laser beams and resonators", *Appl. Opt.* Vol. 5, pp. 1550-1567 (1966).

- [37] Operador de dilatación
- [38] Ross, *Differential equations*,
- [39] M. García-Bullé, W. Lassner & K.B. Wolf "The metaplectic group in the Heisenberg-Weyl ring", *J. Math. Phys.*, Vol. 27, pp. 29-36 (1986); K.B. Wolf "The Heisenberg-Weyl ring in Quantum Mechanics" en *Group Theory and its applications*, Vol. III, Ed. E.M. Loeb (Academic Press, New York, 1975).
- [40] M.B. Allen III, I. Herrera & G.F. Pinder, *Numerical Modeling in Science and Engineering*, (John Wiley & Sons, New York, 1988).
- [41] W.F. Ames, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, (2^a Ed., Academic Press, San Diego, 1977; pp. 1-39).
- [42] G. S. Milburn, *Phys. Rev. A* 33, 674 (1986).
- [43] M. Kitagawa y Y. Yamamoto, *Phys. Rev. A* 34, 3974 (1986).
- [44] J. P. Bizarro, *Phys. Rev. A* 49, 3255 (1994); J. A. Vaccaro, *Opt. Commun.* 113, 421 (1995).
- [45] N. M. Atakishiyev, S. M. Chumakov, K. B. Wolf y A. L. Rivera, in: *Proceedings of the IV Wigner Symposium*. Ed. por N. M. Atakishiyev, T. H. Seligman y K. B. Wolf (World Scientific Publishing, Singapore, 1996); "On the phase space description of the quantum nonlinear dynamics", aceptado por *Phys. Lett. A*, (1996).
- [46] A.L. Rivera, N.M. Atakishiyev, S.M. Chumakov, & K.B. Wolf, "Evolution under polynomial hamiltonians in quantum and optical phase spaces", Enviado a *Phys. Rev. A*, mayo 1996.
- [47] M. Jammer, *The Philosophy of Quantum Mechanics*, (Wiley, New York, 1974).
- [48] M. Hillery, R.F. O'Connell, M.O. Scully & E.P. Wigner, *Phys. Rep.* 106, 121 (1984).
- [49] V. Tatarski, *Usp. Fiz. Nauk*, 139, 587 (1983); Hai-Woong Lee, *Phys. Rep.* 259, 147 (1995).
- [50] Y.S. Kim & M.E. Noz, *Phase space picture of Quantum Mechanics*, (World Scientific, Singapore, 1991, pp. 37-55).

- [51] S.M. Chumakov, A.B. Klimov & J.J. Sánchez-Mondragón, "General properties of quantum optical systems in a strong field limit", *Phys. Rev. A* Vol. **49**, pp. 4972-4978 (1994).
- [52] A.J. Dragt, E. Forest & K.B. Wolf, en: *Lie Methods in Optics*, Ed. por J. Sánchez-Mondragón and K.B. Wolf, Lecture Notes in Physics, Vol. 250 (Springer-Verlag, Heidelberg, 1986), p. 104.
- [53] P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, (4^a Ed., Clarendon Press, Oxford, 1958); E. Merzbacher, *Quantum Mechanics*, (2^a Ed., John Wiley & Sons, New York, 1970).
- [54] E.P. Wigner, "On the Quantum Correction for Thermodynamic equilibrium", *Phys. Rev.* **40**, pp. 749-759 (1932).
- [55] R. Balescu, *Equilibrium and Non-Equilibrium Statistical Mechanics* (Wiley, New York, 1975); S.R. de Groot & L.G. Suttrop, *Foundations of Electrodynamics* (North Holland, Amsterdam, 1972)
- [56] J.E. Moyal, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **45**, 99 (1949).
- [57] A. Royer, "Wigner function as the expectation value of a parity operator", *Phys. Rev. A* **15**, pp. 449-450 (1977).
- [58] R. Graham, F. Haake, H. Haken & W. Weidlich, *Z. Phys.* **213**, 21 (1968).
- [59] K.E. Cahill & R.J. Glauber, *Phys. Rev.* **177**, 1857 (1969); *ibid.*, **177**, 1882 (1969).
- [60] G. García-Calderón & M. Moshinsky, *J. Phys. A* **13**, L185 (1980).
- [61] Hui Li, *Phys. Lett. A* **188**, 107 (1994).
- [62] K. Husimi, *Proc. Phys. Math. Soc. Japan*, **22**, 264 (1940).
- [63] M. Hillery, M. Freyberger & W. Schleich, *Phys. Rev. A* **51**, 1792 (1995).
- [64] V.V. Dodonov, E.V. Kurmyshev & V.I. Man'ko, *Phys. Lett. A*, **79**, 150 (1980)
- [65] A.J. Dragt, F. Neri & G. Rangarajan, *Phys. Rev. A* **45**, 2572 (1992).
- [66] Z. Bialynicka-Birula, *Phys. Rev.* **173**, 1207 (1968); B. Yurke & D. Stoler, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1055 (1986).

- [67] V. V. Dodonov and V. I. Man'ko, in *Invariants and Evolution of Nonstationary Quantum Systems*, Proceedings of Levedev Physics Institute 183, edited by M. A. Markov (Nova Science, Commack, N.Y., 1989).
- [68] A. Wehrl, *Rev. Mod. Phys.* **50**, 221 (1978).
- [69] I. Jex & A. Orłowski, *J. Mod. Opt.* **41**, 2301 (1994);
A. Orłowski, H. Paul & G. Kastelewicz, *Phys. Rev. A* **52**, 1621 (1995).
- [70] C. H. Keitel & K. Wódkiewicz, en: Proc. of the 2-nd International Workshop on Squeezed States and Uncertainty Relations, Moscow, May 22-29, 1992; D. Ham, Y. S. Kim and V. I. Man'ko (eds.) NASA Conference Publication, 1993, p. 259.
- [71] Una medida de la no-clasicalidad de un estado (distinta de la que proponemos aquí fue introducida en los siguientes artículos:
C.-T. Lee, *Phys. Rev. A* **52**, 3374 (1995);
N. Lütkenhaus & S. M. Barnett, *Phys. Rev. A* **51**, 3340 (1995).
- [72] A. Wehrl, *Rep. Math. Phys.* **10**, 159 (1976).
- [73] H. Maassen & J.B.M. Uffink, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1103 (1988);
- [74] B. Dacubler, Ch. Miller, H. Risken & L. Schoendorff, *Phys. Scr.* **T48** 119 (1993);
I. Białynicki-Birula, M. Freyberger & W. Schleich, *Phys. Scr.* **T48** 113 (1993).
- [75] V. Bužec, C.H. Keitel & P.L. Knight, *Phys. Rev. A*, **51**, 2575 (1995).
- [76] K.B. Wolf, *J. Opt. Soc. Am. A*, **10**, 1925 (1993).
- [77] K.B. Wolf, *J. Opt. Soc. Am. A*, **5**, 1226 (1988).
- [78] J. R. Klauder, in: *Lie Methods in Optics*, Ed. by J. J. Sánchez-Mondragón and K.B. Wolf, Lecture Notes in Physics, Vol. 250 (Springer-Verlag, Heidelberg, 1986), p. 183.
- [79] H. Buchdahl. *Optical Aberration Coefficients* (Dover, New York, 1968).
- [80] G. G. Milburn and C. A. Holmes, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 2237 (1986);
E. A. Akhundova and M. A. Mukhtarov, *J. Phys. A*, **28**, 5287 (1995).
- [81] R. Tanas, in: *Coherence and Quantum Optics V*, eds. L. Mandel and E. Wolf (New York: Plenum, 1984), p. 645.
- [82] K. Sundar, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2116 (1995).

- [83] I. Sh. Averbukh, *Phys. Rev. A*, **46**, R2205 (1992).
- [84] S. M. Chumakov, A. B. Klimov & J. J. Sanchez-Mondragon, *Opt. Commun.* **118**, 529 (1995).
- [85] S. M. Chumakov, A. B. Klimov & C. Saavedra, *Phys. Rev. A*, **52**, 3153 (1995).
- [86] L.A. Khalifin, *Zh. Eksp. Theor. Fiz.* **33**, 1371 (1957) [*Sov. Phys.-JETP* **6**, 1053 (1958)].
- [87] W. Yourgrav in "Problems in the Philosophy of Science" ed. by I. Lakatos & A. Musgrave, North Holland, Amsterdam, 191-192 (1968).
- [88] B. Misra & E.C.G. Sudarshan, "The Zeno's paradox in quantum theory", *J. Math. Phys.* **18**, 756-763 (1977).
- [89] W.M. Itano, D.J. Heinzen, J.J. Bollinger & D.J. Wineland, "Quantum Zeno effect", *Phys. Rev. A* **41**, 2295-2300 (1990).
- [90] R. Cook, "What are quantum jumps?", *Phys. Scr.* **T21**, 49-51 (1988).
- [91] V. Frerichs & A. Schenzle, "Quantum Zeno effect without collapse of the wave packet", *Phys. Rev. A* **44**, 1962-1968 (1991).
- [92] E. Block & P.R. Berman, "Quantum Zeno effect and quantum Zeno paradox in atomic physics", *Phys. Rev. A* **44**, 1466-1472 (1991).
- [93] A.L. Rivera & S.M. Chumakov, "Zeno Paradox and radiation trapping in three-level systems" *J. Mod. Opt.* **41**, 839-845 (1994).
- [94] S.M. Chumakov, K.E. Hellwig & A.L. Rivera "Quantum Zeno effect in unitary quantum mechanics", *Phys. Let. A*, **197**, 73-82 (1995).
- [95] J. Von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantentheorie*, (Springer-Berlag, Berlin, 1931).
- [96] N.G. Van Kampen, "Ten Theorems about Quantum Mechanical Measurements", *Physica A* **153**, 97-113 (1988).
- [97] A. Schenzle, R.G. DeVoe & R.G. Brewer, "Possibility of Quantum Jumps", *Phys. Rev. A* **33**, 2127-2130 (1986).
- [98] C.B. Chiu, E.C.G. Sudarshan & B. Misra. "Time evolution of unstable quantum states and a resolution of Zeno's paradox", *Phys. Rev. D* **16**, 5220-529 (1977).

- [99] A. Peres, *Found. Phys.* **14**, 1131 (1984);
A. Peres, "Zeno's paradox in quantum theory", *Am. J. Phys.* **48**, 931-932 (1980);
G.C. Ghirardi, C. Omero, T. Weber & A. Rimini, "Small-time behavior of quantum nondecay probability and Zeno's paradox in quantum mechanics", *Nuovo Cimento* **52A**, 421-441 (1979);
D. Home & M.A.B. Whitaker, "Reflections on the quantum Zeno paradox", *J. Phys. A: Math. Gen.* **19**, 1847-1854 (1986).
- [100] G. García-Calderón, J.L. Mateos & M. Moshinsky, "Resonant spectra and the time evolution of the survival and nonescape probabilities", *Phys. Rev. Lett.*, **74** pp. 337-340 (1995).
- [101] H.J. Kimble, R.J. Cook & A.L. Wells, "Intermittent atomic fluorescence", *Phys. Rev. A* **34**, 3190-3195 (1986).
- [102] L. Allen & J.H. Eberly, *Optical Resonance and Two-level Atoms*, Wiley, New York, 1975.
- [103] D.T. Pegg, R. Loudon & P.L. Knight, "Correlations in light emitted by three level atoms", *Phys. Rev. A* **33**, 4085-4091 (1986).
- [104] O. Kocharovskaya & P. Mandel, *Phys. Rev. A* **42**, 523 (1990).
- [105] J. Bell, *Phys. World* **3**, 33 (1990).
- [106] D. Home & M.A.B. Whitaker, "A unified framework for quantum Zeno processes", *Phys. Lett. A* **173**, 327-331 (1993).
- [107] L.E. Ballentine, "Comment on Quantum Zeno effect", *Phys. Rev. A* **43**, 5165-5167 (1991).
- [108] W.M. Itano, D.J. Heinzen, J.J. Bollinger & D.J. Wineland, "Reply to Comment on Quantum Zeno effect", *Phys. Rev. A* **43**, 5168-5169 (1991).
- [109] K. Kraus, "Measuring Processes in Quantum Mechanics I. Continuous Observation and the Watchdog Effect", *Found. Phys.* **11**, 547-576 (1981).
- [110] E. Joos, "Continuous measurement: Watchdog effect versus golden rule", *Phys. Rev. D* **29**, 1626-1633 (1984).
- [111] R.J. Cook & H.J. Kimble, "Possibility of Direct Observation of Quantum Jumps", *Phys. Rev. Lett.* **54**, 1023-1026 (1985).
- [112] A. Schenzle & R.G. Brewer, "Macroscopic Quantum Jumps in a single atom", *Phys. Rev. A* **34**, 3127-3142 (1986).

- [113] T. Petrosky, S. Tasaki & I. Prigogine, "Quantum Zeno effect", *Physica A* **170**, 306-325 (1991).
- [114] T. Petrosky, S. Tasaki & I. Prigogine, "Quantum Zeno effect", *Phys. Lett. A* **151**, 109-113 (1990).
- [115] E.M. Purcell, *Phys. Rev.* **69**, 681 (1946).
- [116] R.J. Cook, "Photon number statistics in resonance fluorescence", *Phys. Rev. A* **23**, 1243-1250 (1981).
- [117] J.C. Bergquist, R.G. Hulet, W.M. Itano & D.J. Wineland, "Observation of quantum jumps in a single atom", *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1699-1702 (1986).
- [118] P. Zoller, M. Marte & D.F. Walls, "Quantum jumps in atomic systems", *Phys. Rev. A* **35**, 198-207 (1987).
- [119] J. Javanainen, "Possibility of quantum jumps in a three-level system", *Phys. Rev. A* **33**, 2121-2123 (1986).
- [120] T. P. Altenmuller & A. Schenzle, "Dynamics by measurement: Aharonov's inverse quantum Zeno effect", *Phys. Rev. A* **48**, 70-79 (1993).
- [121] A. Perez & A. Ron "Incomplete collapse and partial quantum Zeno effect", *Phys. Rev. A* **42**, 5720-5722 (1990).