



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

76
217

FACULTAD DE INGENIERÍA

ESTUDIO DE UN SISTEMA
DE CONTROL PARA
ÓPTICA ADAPTATIVA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

INGENIERO MECÁNICO ELECTRICISTA

P R E S E N T A :

FERNANDO GARFIAS MACEDO

DIRECTORES DE TESIS

DR. SALVADOR CUEVAS CARDONA

ING. FRANCISCO RODRÍGUEZ RAMÍREZ

MÉXICO, D.F.

1996

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS

COMPLETA

*...,but even the darkened portion of the disk was
endlessly fascinating. It was sprinkled with
shining cities; sometimes they burned with a steady
light, sometimes they twinkled like fireflies as
atmospheric tremors passed over them...*

ARTHUR C. CLARKE.

AGRADECIMIENTOS

Si bien, es como si siempre lo hubiera sabido, no se cuándo me di cuenta de que las estrellas titilaban, o si alguna noche alguien me lo mostró, de cualquier forma, de niño me gustaba verlas así, eso significaba que les latía el corazón, ahora se que no necesitan tener corazón para estar vivas, aunque quizás lo tengan.

Cuando era estudiante de secundaria mi padre me contó que alguien le dijo que uno mismo se podía construir un telescopio; la idea me encantó. Algunos días después volví a casa con un tejo de vidrio, dispuesto a empezar la tarea a la cual me invitó y después me dejó concluir. Gracias al sr. Franco Pérez por las primeras clases de óptica de taller.

Durante la preparatoria tuve un excelente profesor de física que creó un ambiente orientado a la ciencia excelente, Mario Cruz T., a él y a mis amigos de entonces con los que tenía excelentes discusiones y sueños compartidos, entre ellos Marta y Rubén.

En la facultad el excelente ambiente de estudio se lo debo especialmente a la compañía de Demián, Pablo, Toño, por su tenaz entrega al trabajo, y a Theo, por su amistad constante, felicidad y apoyo. Al Ing. Francisco Rodríguez, por su interesante curso de control digital y su asesoría en el desarrollo de este trabajo.

Quizás no sólo a mi me pase, pero la sensación en el estómago que tenía de niño cuando me ponía a jugar con mi juego o juguete favorito, la sigo teniendo en el Instituto de astronomía y mucho se debe a la excelente compañía de trabajo que he tenido. Una mención especial para la Dra. Gloria Koenigsberger, la Dra. Irene Cruz y al M. C. Rafael Costero por su apoyo institucional y al Dr. Alian Chelli por su excelente seminario de procesamiento de señales y alta resolución espacial. Gracias a Alberto y Beatriz por sus sugerencias durante la edición de esta tesis. Un agradecimiento al equipo PUMA con los que aprendí mucho en distintos sentidos, pero principalmente viví el desarrollo de un proyecto de principio a fin; a Margarita por su apoyo y encomio, Rosalia y Abel su sincera amistad y a mis cuates Pacoco, Carlos y Silvio. A mis hermanos académicos, Diana, Remy y Pablo a los que siempre siento cerca y con los que he pasado horas interesantísimas de trabajo y aprendizaje, y por supuesto a Salvador quien no sólo ha sido un compañero y maestro sino también un gran amigo.

Un amigo de siempre me dijo alguna vez que yo era su amigo de siempre a Jose Manuel, Luis y Laura e Ivette. Mis amigos de velocidad subacuática; Paty, Ines, Gastón, Sergio y Marta, y Rocío quien con mucha dedicación y cariño leyó varias veces el manuscrito haciendo útiles sugerencias y correcciones.

Finalmente en mi familia, a Fernando por hacer que le tenga amor a la universidad y también por que junto con Yolanda han hecho que me la pase tan bien todos estos años; los amo. Uno ejemplo de valor y dedicación lo he tenido cerca la mayor parte de mi vida gracias Fabiola. Dámáris tu frescura y tranquilidad siempre me llenan de paz. Tania creciste con nosotros y siempre te he visto de frente o desde abajo; te admiro. Ramón

cuando nos volvamos a encontrar te contaré lo que estaba haciendo cuando nos conocimos.
A mis cuñados Ramón y Gerardo.

Índice

Introducción	1
I Óptica Adaptativa	3
1.1 Introducción	3
1.2 Tipos de turbulencia	3
1.3 La turbulencia atmosférica y los telescopios astronómicos	4
1.4 Óptica Adaptativa	6
1.5 Óptica Activa y Óptica Adaptativa	7
1.6 Corrección Parcial con Óptica Adaptativa	8
1.7 Principales deformaciones en un frente de onda atmosférico	10
1.8 Corrección de tilt en un telescopio de 2m	11
II El telescopio como un sistema lineal	15
2.1 Introducción	15
2.2 El telescopio como un sistema lineal e invariante	15
2.2.1 La transformada de Fourier en dos dimensiones	16
2.2.2 La integral de superposición y linealidad en un sistema óptico	16
2.2.3 Sistemas ópticos lineales e invariantes	17
2.3 La función de transferencia espacial instantanea del telescopio	18
2.3.1 La relación entre el objeto y su imagen	20
2.4 Función de transferencia a largos tiempos de exposición	20
2.4.1 La relación entre el objeto y su imagen a largos tiempos de exposición	22
III Características de la atmósfera	25
3.1 Introducción	25
3.2 Polinomios de Zernike	26
3.3 La Atmósfera	27
3.3.1 Turbulencia atmosférica	28
3.3.2 Las fluctuaciones de temperatura	28

3.3.3	Las fluctuaciones de índice de refracción	29
3.3.4	La función estructura de fase	30
3.3.5	El Parámetro de Fried	31
3.4	El frente de onda atmosférico	31
3.4.1	Grados de corrección	31
3.4.2	Modelo del frente de onda atmosférico	33
3.5	La función de transferencia espacial del telescopio con corrección adaptiva	35
3.5.1	Comportamiento de la imagen	37
3.6	Función de transferencia espacial para largos tiempos	38
3.7	La función de transferencia temporal del sistema de OA para corregir tip-tilt	40
3.7.1	Modelo teórico de la función de transferencia temporal del sistema	40
3.7.2	Medición aproximada de la velocidad del viento de la atmósfera en SPM	44
IV	El sistema de control	45
4.1	Introducción	45
4.2	Sistema de control	45
4.3	Sensor de frente de onda	46
4.4	Espejo de corrección	47
4.4.1	Análisis estático, determinación de isosticidad	47
4.4.2	Función de transferencia del espejo de corrección	48
4.4.3	Análisis Experimental del espejo de corrección	48
4.4.4	Descripción de la prueba	49
4.4.5	Método de identificación	50
4.4.6	Modelos Autoregresivos	50
4.4.7	Descripción de sistemas	51
4.4.8	Identificación del espejo de corrección	53
4.4.9	Obtención de las Funciones de Transferencia	54
4.5	Electrónica de amplificación y acondicionamiento de señales	56
4.6	El compensador del espejo de corrección	57
4.6.1	Métodos de sintonización	58
4.6.2	Método de oscilaciones amortiguadas	58
4.6.3	Método de la curva de reacción Ziegler-Nichols	59
4.6.4	Método de la curva de reacción Cohen-Coon	60

4.6.5	Métodos de sintonización basados en criterios de desempeño	61
4.6.6	Reajuste final de parámetros	62
4.7	Sistema Completo	68
4.8	Conclusión	70
	Conclusiones	73
	Apéndice I	75
	Apéndice II	77
	Apéndice III	79
	Apéndice IV	83
	Referencias	87

INTRODUCCIÓN

Con el paso del tiempo, la mejoría en la calidad en la óptica de los telescopios ha ido en aumento debido, especialmente, a que las pruebas ópticas actualmente desarrolladas permiten medir con mayor fineza las superficies de las lentes y los espejos usados en ellos. Esto ha propiciado el desarrollo de nuevas disciplinas afines a la óptica que estudian cómo mejorar la mala calidad de las imágenes astronómicas cuando esta no depende ya, propiamente de la óptica de los telescopios. Estas nuevas disciplinas son la Óptica Activa y la Óptica Adaptativa, las cuales, además de su evidente correspondencia con la física, tienen una estrecha relación para su funcionamiento con distintas áreas de la Ingeniería como la ingeniería de control.

Ya que en la actualidad es difícil concebir la idea de un telescopio moderno sin la presencia de sistemas de Óptica Activa y Óptica Adaptativa, en este trabajo se presenta el estudio de un sistema de Óptica Adaptativa para el telescopio de 2 m en el Observatorio Astronómico Nacional en San Pedro Mártir Baja California, México.

Esta tesis, presenta la descripción de la Óptica Adaptativa y los efectos de la turbulencia atmosférica en los telescopios, en el capítulo I. A partir de técnicas de análisis en frecuencia, en el capítulo II, se estudia la función de transferencia óptica de un telescopio para determinar cómo se ve afectada su respuesta en frecuencia en presencia de turbulencia atmosférica. A fin de evaluar la mejoría que puede representar la aplicación de un sistema de Óptica Adaptativa en un telescopio de 2 m, en el capítulo III, se modela un frente de onda atmosférico, se calculan sus efectos en la imagen y en la función de transferencia óptica o espacial de un telescopio de 2 m, y se comparan con los efectos esperados cuando el sistema de óptica adaptativa opere. Finalmente en el capítulo IV, se presenta el estudio del sistema de control partiendo de los dispositivos que se usarán en el sistema y se encuentra el modelo matemático del sistema completo con el que se hace un análisis de sus respuestas temporales y en frecuencia.

CAPÍTULO I

Óptica Adaptativa

1.1 Introducción.

Los efectos que son producidos por la atmósfera en las observaciones astronómicas eran bien conocidos por los primeros astrónomos que hicieron sus observaciones con telescopios relativamente grandes (más de 15 *cm* de diámetro), como Newton, notando que la imagen era prácticamente la misma, aunque más luminosa, al ir incrementando el diámetro. En este capítulo se hace una descripción de los principales tipos de turbulencia que son fuentes de error en la óptica de los telescopios, profundizando en la turbulencia atmosférica de altas capas y se plantea la posibilidad de corregir sus efectos nocivos con la óptica adaptativa en un telescopio de 2 *m*. Asimismo, se aclara la diferencia entre "óptica activa" y "óptica adaptativa", y se describen las principales fuentes de aberraciones en un telescopio.

1.2 Tipos de turbulencia.

Existen al menos tres tipos de turbulencia que afectan la imagen dada por un telescopio: la turbulencia en el instrumento, la turbulencia local y la turbulencia de altura (Texereau, 1963). Aunque este trabajo enfoca su atención al último tipo, es útil al menos mencionar los otros dos tipos y su fuente para poder diferenciarlos, ya que sus efectos pueden ser peores que los de la turbulencia atmosférica de las altas capas. Afortunadamente, se han encontrado soluciones definitivas en la reducción de sus efectos, la mayoría de las veces, sin la necesidad de tener que recurrir a sistemas complejos.

La turbulencia en el instrumento es principalmente debida a las corrientes de convección, producidas por las diferencias de temperatura entre las distintas componentes del telescopio, como la montura o el espejo primario mismo. Este tipo de perturbaciones son amplias y varían lentamente afectando grandes porciones del frente de onda.

La turbulencia local es provocada por puntos cercanos al instrumento o hasta algunos cientos de metros de éste, como la turbulencia en la cúpula debida a los diversos gradientes de temperatura, a la capa superficial entre 10 y 15 metros del suelo y a la capa de inversión atmosférica que tiene un valor variable entre la capa superficial y 1 *km* (Rodier *et.al.*, 1986). Este tipo de perturbaciones aumentan cuando se hacen observaciones cerca del horizonte debido a que la luz atraviesa un espesor de aire mayor y disminuyen en observaciones altas sobre el horizonte. Las condiciones atmosféricas locales pueden ser a veces peores que si se observara a través de una ventana. Este tipo de turbulencia podría deberse en especial a la topografía del terreno alrededor del observatorio o a la forma y altura del edificio que alberga el telescopio.

Los dos tipos de turbulencia anteriores aunque no pueden ser completamente evitados sí pueden ser reducidos con bastante éxito a partir del diseño y construcción del telescopio y la elección del sitio adecuado para el observatorio. En general, en los observatorios actuales se tienen resueltos en buena medida los efectos debidos a los dos tipos de turbulencia anteriores, sin embargo, la imagen sigue distorsionada por la turbulencia de altura, a la cual no se tiene acceso directamente y que a pesar del sitio y de un buen diseño y construcción del instrumento sigue presente.

Este último tipo de turbulencia es el que hace que en una observación a simple vista las estrellas aparezcan titilantes, debido a que el ojo solamente detecta la variación en la intensidad de la luz provocada por ella. Cuando la observación es a través de un telescopio, teniendo presente que la capa turbulenta está a varios kilómetros del suelo, un pequeño cambio en la dirección del frente de onda resulta en una variación en la forma y la posición de la estrella. Debido a estos efectos, que la atmósfera produce en la óptica de un telescopio astronómico terrestre, en la actualidad es difícil concebir un telescopio moderno sin sistemas que compensen estos errores, ya que la calidad en la imagen dada por un telescopio está completamente limitada por la atmósfera. En la figura 1.1 se puede ver como una imagen estelar es afectada por la turbulencia atmosférica.

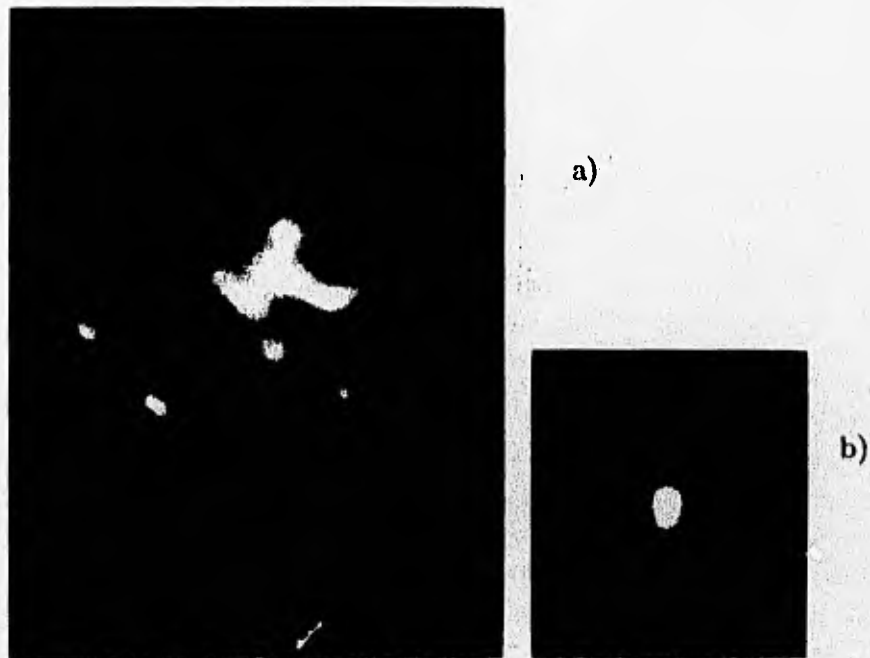


Figura 1.1. Imagen estelar con (a) y sin turbulencia atmosférica (b).

1.3 La turbulencia atmosférica y los telescopios astronómicos.

“La teoría de la fabricación de telescopios está más allá de lo que puede ser llevado a la práctica, debido a que el aire a través del cual son observadas las estrellas está en un

perpetuo temblor, el cual puede ser visto como el movimiento tembloroso en las sombras que pueden proyectar las construcciones altas y por el centelleo de las estrellas fijas. Sin embargo, estas estrellas no centellean al ser vistas con un telescopio de gran apertura, pero sí centellea cada rayo de luz que pasa a través de las diversas partes de la apertura del telescopio, cayendo cada rayo al mismo tiempo en distintas partes del ojo, con movimientos tan rápidos y confusos para ser distinguidos con precisión. Todos esos puntos iluminados forman un punto luminoso extendido, compuesto de todos esos puntos vibrantes confusa e insensiblemente mezclados unos con otros por movimientos muy cortos y rápidos, siendo esta la causa de que la estrella aparezca mucho más extendida de como realmente es (Newton, 1704)". Cuando Newton escribió su *TREATISE OF THE REFLEXIONS, REFRACTIONS, and COLOURS OF LIGHT, OPTICKS*, tenía completamente identificada la causa de las malas imágenes astronómicas dadas por los telescopios y dio como único remedio el ir a la cumbre de las altas montañas arriba de las nubes más gruesas donde puede encontrarse el aire más quieto y sereno. Newton tenía razón, la calidad de la imagen observada se mejora buscando un sitio alto, sin embargo, las imágenes dadas por los telescopios siguen siendo afectadas por la turbulencia atmosférica de altas capas.

Los telescopios astronómicos son dispositivos que colectan la mayor cantidad de radiación posible proveniente de los objetos estelares para formar una imagen tan pequeña y exacta como sea posible. Para la astronomía, éste es el principal interés en un telescopio, la resolución angular, la que está dada por la siguiente ecuación:

$$\rho_{ang} = 1.22\lambda/D, \quad (1.1)$$

donde ρ_{ang} es el diámetro angular (FWHM, "Full Width at Half Maximum") en radianes de la imagen de un objeto puntual dada por el telescopio, λ representa la longitud de onda observada y D el diámetro o apertura del telescopio. Idealmente, la resolución angular mejoraría con el aumento del diámetro del telescopio, sin embargo, la turbulencia atmosférica la reduce drásticamente.

Se introduce aquí de manera simple el parámetro de Fried r_0 como el diámetro de un telescopio pequeño cuya imagen no se ve perturbada por la turbulencia, siendo éste la longitud de coherencia en la fase del frente de onda, el cual limita la resolución angular del telescopio. Entonces, el diámetro angular ρ de la imagen de una fuente puntual en un telescopio en relación con r_0 varía como λ/r_0 para r_0 menores al diámetro D del telescopio, y λ/D como en (1.1), para valores de r_0 mayores a D . Los valores de r_0 están en el orden de las decenas de centímetros para el espectro visible y el cercano infrarrojo y en función de la longitud de onda de la luz y de la distancia al cenit. La tabla 1.3 lista una serie de valores de r_0 para algunas de las bandas espectrales, considerando el diámetro de una imagen de una fuente puntual o de una estrella, igual a un segundo de arco en el visible ($0.5 \mu m$).

El diámetro de la imagen de una estrella, también llamado el disco de "seeing", varía aproximadamente de 0.3 a 10 segundos de arco y a veces más. Un diámetro típico de la imagen es de 2 segundos de arco, lo que corresponde a un telescopio con una apertura límite de 6 cm en el espectro visible (Babeock, 1953). La tabla 1.1 muestra distintos tamaños del disco de "seeing" a diferentes tiempos de integración junto con el tamaño teórico de

la imagen limitada por difracción, datos reportados por Babcock (1953) para el telescopio Hale de 5 m, comparados con la misma información pero para el telescopio de 2 m en San Pedro Mártir Baja California, México.

La palabra inglesa "seeing", usada en este trabajo, es aplicada ampliamente en la descripción de los efectos de la turbulencia atmosférica en la óptica de los telescopios astronómicos. Los astrónomos conocen como "seeing" a los efectos producidos por la turbulencia atmosférica en la calidad de la imagen dada por un telescopio, aunque la gente que trabaja con la óptica de los telescopios se refiere al "seeing" indistintamente como a las perturbaciones causadas por la turbulencia atmosférica ya sea en la imagen o en el frente de onda que llega a la pupila del telescopio.

	Telescopio Hale 5 m. (Segundos de arco)	Telescopio SPM 2 m. (Segundos de arco)
Límite de difracción	1/40	1/15
Intervalos entre 5 y 10 seg.	1/3	1/3
Tamaño promedio	5 a 10	1/3 a 2

Tabla 1.1. Tamaños de la imagen al límite de difracción y de los discos de "seeing" de los telescopios Hale y SPM.

1.4 La Óptica Adaptativa.

La óptica adaptativa (OA) es una técnica para compensar en tiempo real los errores de fase producidos por la atmósfera terrestre por medio de componentes ópticos. Estos componentes introducen un error inverso al que produce la atmósfera en el frente de onda siguiendo las deformaciones temporal y espacialmente. El error en el frente de onda es medido por un sensor de frente de onda y el dispositivo de corrección que puede ser un espejo deformable que compense los adelantos y retrasos en la fase. Los errores en la amplitud o intensidad del frente de onda en la apertura del telescopio degradan mucho menos la imagen que las variaciones de fase; el error con el que contribuyen en la degradación de la imagen es de alrededor de un 15 % en longitudes de onda en el espectro visible ($0.5 \mu\text{m}$) y decrece rápidamente conforme la longitud de onda crece, siendo de un 3 % en el cercano infrarrojo ($2.2 \mu\text{m}$) (Roddir *et. al.*, 1986). Por lo anterior, los errores en la amplitud son generalmente ignorados en los sistemas de óptica adaptativa.

El concepto de óptica adaptativa como una técnica para compensar las aberraciones debidas a la atmósfera en las observaciones astronómicas fue primeramente propuesto por Horace W. Babcock (1953), y aunque a partir de los años sesenta la óptica adaptativa tuvo un mayor desarrollo en aplicaciones militares también existió un desarrollo paralelo en la astronomía. En los últimos años la capacidad y disponibilidad de computadoras y dispositivos electrónicos a ido en aumento, esto a permitido un mayor desarrollo de la óptica adaptativa y que su aplicación sea más amplia en la astronomía y en otras áreas

como en el de las comunicaciones, láseres de potencia, médicas y algunas más (Beckers, 1993), cabe añadir que la óptica adaptativa es un campo más de aplicación de la ingeniería de control.

Origen	Frecuencias temporales (Hz)	Error PV (λ)	Ancho de la imagen (Segundos de arco)
Turbulencia atmosférica	$10^{-2} - 10^3$	3 - 9	0.25 - 3
Efectos térmicos de la cúpula	$10^{-3} - 10^2$	1 - 6	0.1 - 0.5
Diseño óptico	0	0	0
Fabricación óptica	0	1	0.2
Soporte mecánico de los espejos	$0 - 10^{-3}$	1	0.1
Flexiones en la estructura:			
Desenfoque	10^{-3}	0.5 - 3	0.1 - 0.6
Coma constante	10^{-3}	0.3 - 0.9	0.2 - 0.6
Errores de colimación:			
Coma constante	10^{-7}	0.9 - 1.5	0.6 - 1
Errores de guiado	$10^{-7} - 10^2$	2 - 100	0.1 - 5

Tabla 1.2. Aberraciones típicas de un telescopio (Cuevas, 1993).

1.5 Óptica Activa y Óptica Adaptativa.

Existen muchos factores que afectan la calidad de la óptica de los telescopios que tienen que ser necesariamente corregidos en tiempo real. La "óptica activa" es un término comúnmente usado para describir las técnicas que corrigen las aberraciones ópticas de un telescopio, principalmente debidas a los efectos mecánicos, ópticos y térmicos en el telescopio mismo. Para aclarar más la distinción de los términos "óptica activa" y "óptica adaptativa", la figura 1.2 muestra una definición de las bandas de frecuencia de operación desde el punto de vista de las capacidades de corrección (Wilson y Noethe, 1989). La banda normal para óptica activa fué definida desde 0 Hz (C.D.) hasta 1/30 Hz. Bajo condiciones

excelentes de "seeing" 30 s son suficientes para obtener una integración libre de la turbulencia atmosférica. La banda adaptativa empieza un poco atrás del límite superior de la banda activa en $1/50$ Hz hasta 10^3 Hz o más. En la tabla 1.2 (Cuevas, 1993) se aclaran con más precisión las aberraciones típicas de un telescopio, sus frecuencias temporales y su intervalo de error esperado en longitudes de onda.

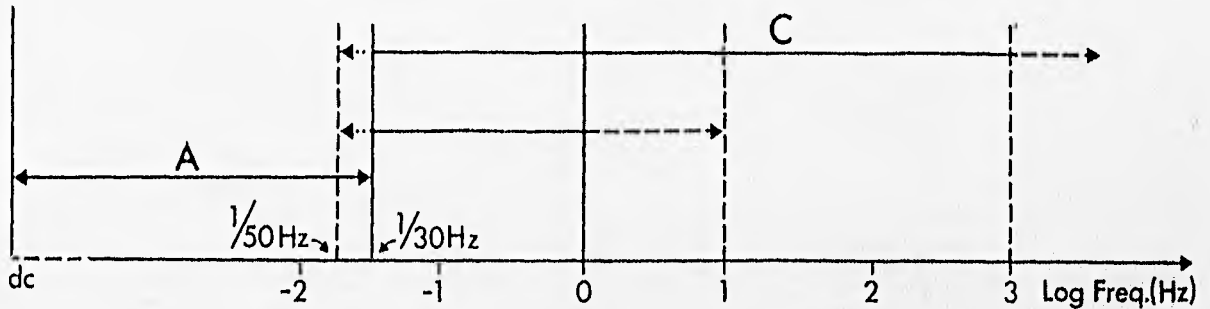


Figura 1.2. Bandas temporales de corrección para óptica activa (A) y óptica adaptativa (C).

1.6 Corrección parcial con Óptica Adaptativa.

Con la óptica adaptativa no se pretende corregir completamente el frente de onda que llega a la pupila del telescopio, dejando un frente de onda totalmente plano, ya que esto es literalmente imposible debido al número finito de grados de libertad en el sistema de corrección. Para conocer el grado de corrección de un sistema de OA es conveniente la descripción de frentes de onda de apertura circular con un desarrollo en series de funciones ortogonales, como los polinomios o modos de Zernike (capítulo III y apéndice I). A partir de estos polinomios se puede demostrar matemáticamente la efectividad del sistema de óptica adaptativa con n grados de libertad en la corrección en el frente de onda de los primeros n modos de Zernike. Así, el sistema de óptica adaptativa puede ser caracterizado por el número de modos compensados, lo que también es a menudo llamado el orden de compensación del sistema (Roddiér, 1991).

De manera análoga a la caracterización temporal de los sistemas electrónicos, los sistemas ópticos se caracterizan espacialmente, siendo la respuesta a impulso espacial una manera de evaluar su funcionamiento (capítulo II). Un criterio ya establecido para la evaluación de sistemas ópticos es la razón de Strehl, que es una forma normalizada de la respuesta a impulso en frecuencias espaciales. Está dada por el cociente de la intensidad máxima de la respuesta a impulso del sistema y la intensidad máxima de la respuesta a impulso de un sistema óptico perfecto equivalente. La calidad de un sistema perfecto está limitada por la difracción.

Se podría esperar que un sistema de OA acercara el valor de la razón de Strehl del telescopio a 1, sin embargo, esto depende de la aplicación y de la capacidad del sistema (Beckers, 1993). El ancho total a media altura (FWHM, "Full Width at Half Maximum") del pico central de la imagen de una fuente puntual es una medida usada junto con la

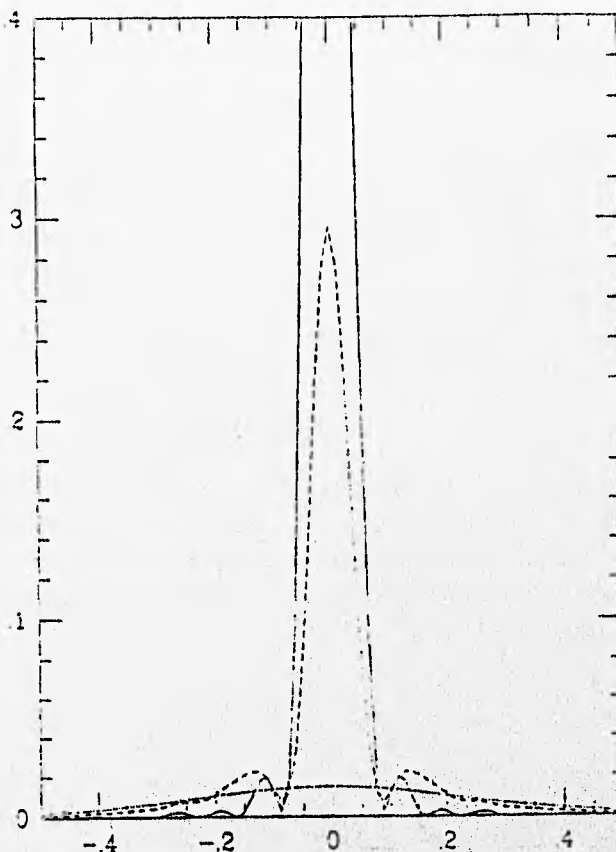


Figura 1.3. Gráficas teóricas de una imagen de una fuente puntual.

razón de Strehl para la evaluación de los sistemas de OA (Roddir, 1991). La figura 1.3 ejemplifica este criterio mostrando tres imágenes: la línea punteada representa una imagen sin compensación; la de línea cortada representa la imagen compensada; y la línea continua una imagen limitada por difracción. Esta figura presentada por Roddir (1991) corresponde a la gráfica teórica de una imagen de una fuente puntual para un sistema con 9 modos de compensación con una relación de $D/r_o = 8$ de un telescopio de $D = 3.6 \text{ m.}$, a $1.2 \mu\text{m.}$ de longitud de onda de la luz, y $r_o = 0.45 \text{ m.}$ La escala horizontal está dada en segundos de arco y la escala vertical es el valor de la razón de Strehl. Para la imagen compensada, a pesar de que su razón de Strehl es solamente 0.3, el ancho total a media altura es bastante cercano al ancho total a media altura de la imagen a límite de difracción. Aplicando el criterio anterior se puede corregir sustancialmente la imagen sin compensar o intentar compensar completamente el frente de onda.

1.7 Principales deformaciones en un frente de onda atmosférico.

Gracias a la descripción modal de un frente de onda que puede hacerse con los polinomios de Zernike, se puede conocer el valor de la deformación total debida al "seeing", así como, del error residual en la fase del frente de onda cuando solamente son corregidos algunos de los modos. La variación total rms de fase del frente de onda sobre una apertura circular

de diámetro d queda determinada por (Rodier *et. al.*, 1986):

$$\delta\theta = 0.1617(d/r_0)^{5/6} \quad [\lambda], \quad (1.2)$$

donde r_0 es el parámetro de Fried, el cual varía con respecto a la longitud de onda como $\lambda^{6/5}$. Se conoce generalmente por *tilt* a la inclinación total en el frente de onda, aunque específicamente se llama *tip* a la inclinación en x , y *tilt* la inclinación en y del plano sobre el que se extiende imaginariamente el frente de onda, siendo estos los dos primeros modos en la expansión de los polinomios de Zernike (capítulo III y apéndice I). Es importante hacer notar que la mayor parte de la deformación en el frente de onda atmosférico es debida al *tilt*. Si se elimina el *tilt* la deformación rms queda,

$$\delta\theta = 0.0584(d/r_0)^{5/6} \quad [\lambda]. \quad (1.3)$$

Aunque esta aberración no produce una deformación en la imagen, introduce rápidos desplazamientos, lo que afecta mucho las imágenes que son obtenidas a largos tiempos de exposición. Esto es debido a que la imagen de una estrella se moverá aleatoriamente en un espacio mayor a su tamaño en intervalos de tiempo mucho menores al intervalo de tiempo de integración (figura 1.4).

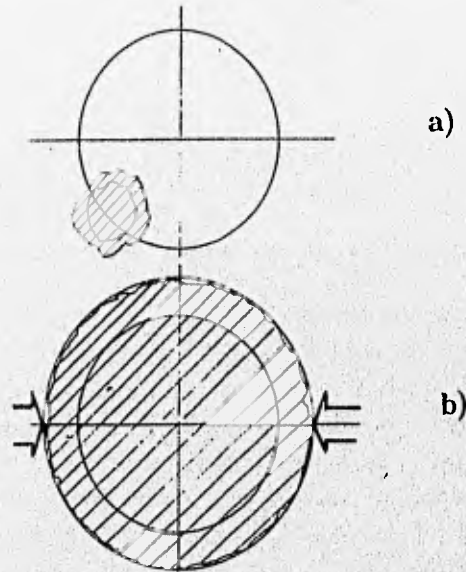


Figura 1.4. Movimiento de la imagen de una estrella debido al *tip* y al *tilt*. a) imagen en un instante con un máximo desplazamiento del centro del detector y b) imagen con un tiempo de integración largo.

El movimiento aleatorio rms está determinado por:

$$\delta\alpha = (0.6)^{1/6}(\lambda/r_0)^{5/6} \quad [rad]. \quad (1.4)$$

Con la velocidad del viento en el estrato atmosférico responsable del "seeing", se puede conocer la constante típica de tiempo $\delta\tau$ asociada con las variaciones de estructura de la imagen,

$$\delta\tau = r_0/V \quad [seg], \quad (1.5)$$

debido a que la velocidad V del viento varía con la altura en magnitud y dirección y depende también del lugar, suponiendo que la velocidad del viento es de $10m/seg$. Esta velocidad es muy cercana al promedio típico de velocidades del viento en el estrato responsable de la mayor parte del "seeing" en SPM B.C.N., Mex. (capítulo III).

Otro parámetro importante es el diámetro del campo de isoplanetismo $\delta\omega$ debido a la turbulencia atmosférica. Los campos de isoplanetismo son las pequeñas regiones en las que se puede dividir el campo del telescopio y en los cuales las aberraciones permanecen prácticamente sin variación (capítulo II), y está dado por:

$$\delta\omega = 2/3(r_0/H) \quad [rad], \quad (1.6)$$

donde H es la distancia al estrato responsable de la mayor parte del "seeing". Cuando no es usada la misma estrella que se estudia para medir las deformaciones del frente de onda, debido a que la intensidad de ésta puede ser muy débil, la estrella de referencia que se use debe estar dentro del mismo campo de isoplanetismo, garantizándose así, que las aberraciones son las mismas. La tabla 1.3 lista las principales distorsiones de un frente de onda atmosférico calculadas para un telescopio de 2 m con base en las ecuaciones anteriores (Roddier *et. al.*, 1986).

λ (μm)	r_0 (cm)	Con tilt (λ)	Sin tilt (λ)	Ta- maño del "seeing" (")	Movi- miento de la imagen (")	Cte. de tiempo (ms)	Campo de isopla- netismo (")
0.5	10	1.96	0.71	1.03	38	10	3.5
0.9	20	1.10	0.40	0.93	38	20	7.0
1.25	30	0.79	0.28	0.86	38	30	10.0
2.2	60	0.44	0.16	0.16	37	60	21.0

Tabla 1.3. Distorsiones del frente de onda atmosférico. La leyenda "Con tilt" se refiere a que el frente de onda tiene tal aberración y "Sin tilt" lo contrario, (") quiere decir segundos de arco.

1.8 Corrección de tilt en un telescopio de 2 m.

La mejor manera de evaluar el funcionamiento de un sistema de OA es en términos de la máxima intensidad obtenida en la imagen de una fuente puntual. Como se mencionó en párrafos anteriores, el cociente de esta intensidad y la intensidad máxima de la imagen limitada por difracción es llamada razón de Strehl. En el caso de compensación atmosférica es conveniente el uso de una forma normalizada de la razón de Strehl que de información del funcionamiento del sistema de OA en largos tiempos de exposición. Fried (1966), presenta

esta forma normalizada R/R_{max} donde R es la razón de Strehl y R_{max} representa la razón de Strehl máxima que se puede lograr sin compensación en largos tiempos de exposición con un telescopio hipotético infinitamente grande a través de la turbulencia atmosférica. La razón de Strehl R lograda por un sistema de OA está en función de dos variables D y r_0 , en cambio, la razón de Strehl normalizada R/R_{max} está en función únicamente del cociente D/r_0 , lo cual simplifica la evaluación del sistema.

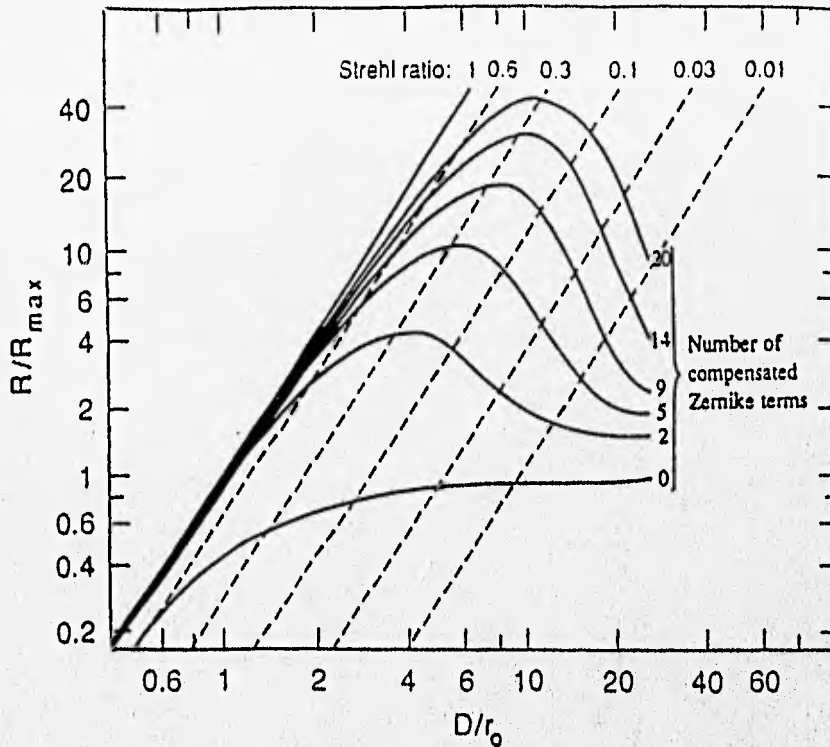


Figura 1.5. Razón de Strehl normalizada en función de D/r_0 .

Basándose en las publicaciones presentadas por Fried (1966) y Wang y Markey (1978), N. Roddier (1990) calculó R/R_{max} en función de D/r_0 hasta 20 términos de Zernike y presentó la gráfica logarítmica para varios grados de corrección o modos de Zernike (figura 1.5). Con ésta gráfica se puede conocer la eficiencia máxima de cualquier sistema de OA a partir de algún valor de D/r_0 . Se nota en la gráfica que ésta eficiencia máxima está muy cerca de una razón de Strehl igual 0.3 para las funciones con diferente número de grados de compensación, donde el máximo de la función puede ser encontrado con la ecuación (1.7) si N es el número de modos de Zernike compensados,

$$D/r_0 \approx 2.7\sqrt{N}. \quad (1.7)$$

Con la gráfica anterior y aplicando los datos de la tabla 1.3, en un sistema de OA que corrija únicamente los dos primeros modos de Zernike, es decir *tip* y *tilt*, se puede lograr una eficiencia máxima en un valor de D/r_0 entre 4 y 6, lo que corresponde a las bandas

espectrales K ($2.2 \mu m$) y J ($1.25 \mu m$), para un disco de "seeing" de un segundo de arco, pero si el disco de "seeing" es menor, como el valor promedio reportado ($0.6 \text{ segundos de arco.}$) en SPM, el sistema podría incluir la banda J . Se puede notar la mejoría que tendría el sistema con el valor de R/R_{max} que tienen en su máximo las funciones con cero modos de corrección y con dos modos en la figura 1.5.

Se puede concluir que es completamente factible el desarrollo de un sistema de óptica adaptativa, corrigiendo los dos primeros modos de Zernike *tip* y *tilt*, mejorando así sustancialmente la imagen a partir del cercano infrarrojo, aplicación provechosa debido a que una buena parte de la astronomía observacional se empieza a hacer en la parte infrarroja del espectro de la luz.

CAPÍTULO II

El telescopio como un sistema lineal

2.1 Introducción.

Poco a poco, la óptica es aplicada cada vez más en la ingeniería eléctrica, en áreas como comunicaciones, informática y control. En óptica, al igual que las áreas antes mencionadas, la finalidad es transportar o coleccionar información, y pueden ser descritas con modelos matemáticos similares, ya que tanto los sistemas ópticos como los sistemas electrónicos comparten dos propiedades importantes: linealidad e invariancia. Cualquier sistema ya sea óptico o electrónico puede ser descrito matemáticamente con el uso de técnicas de análisis en frecuencia, siendo la única diferencia la naturaleza de la información. En óptica, la información es de naturaleza espacial (la distribución de la amplitud o intensidad de la luz en el espacio); en los otros casos la información es de naturaleza temporal, (una señal modulada de voltaje o corriente).

En un sistema de óptica adaptativa están completamente relacionados el espacio y el tiempo, por lo que es necesario tener identificado el sistema espacial y temporalmente, debido a que el sistema de control actúa directamente sobre un sistema óptico. En este capítulo se demuestra que un telescopio, como sistema óptico, es un sistema lineal desde el punto de vista espacial y que puede ser descrito con técnicas de análisis en frecuencia. Se introduce la función de transferencia óptica del telescopio y se analizan los efectos de la turbulencia atmosférica en la función de transferencia óptica del sistema compuesto por la atmósfera y el telescopio.

2.2 El telescopio como sistema lineal e invariante.

En un telescopio, una respuesta debida a varios estímulos puede ser encontrada como la suma de las respuestas de cada estímulo específico. Entonces, al telescopio como sistema óptico se le puede aplicar el principio de superposición y se puede decir, por lo tanto, que el telescopio es un sistema lineal.

Tan sólo con la propiedad de linealidad la descripción matemática de un sistema se simplifica y la respuesta a un estímulo complicado puede ser expresado en términos de respuestas a ciertos estímulos conocidos. El análisis de Fourier es una herramienta matemática de gran utilidad en la descripción de fenómenos y sistemas lineales.

El uso de dicho análisis es familiar en circuitos eléctricos y sistemas de comunicación, sistemas de una sola variable independiente (el tiempo). Sin ser la finalidad extenderse en el estudio del análisis de Fourier, se hace a continuación una introducción a él en funciones de dos variables independientes, aplicado en el estudio de sistemas ópticos.

2.2.1 La transformada de Fourier en dos dimensiones.

El espectro de Fourier de una función compleja g de dos variables independientes x y y es representada por $F\{g(x, y)\}$ y está definida por:

$$F\{g(x, y)\} = \hat{g}(u, v) = \int \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \exp[-j2\pi(ux + vy)] dx dy. \quad (2.1)$$

La transformada es una función compleja de dos variables independientes u y v o frecuencias. De manera similar, la transformada inversa de Fourier de una función $\hat{g}(u, v)$ es representada por $F^{-1}\{\hat{g}(u, v)\}$ y está definida por:

$$F^{-1}\{\hat{g}(u, v)\} = g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(u, v) \exp[j2\pi(ux + vy)] du dv. \quad (2.2)$$

La transformada y la transformada inversa son muy similares y la diferencia es únicamente el signo del exponente en el argumento de la integral. La transformada de Fourier cumple con todas las propiedades de cualquier transformación lineal (Lathi, 1987).

2.2.2 La integral de superposición y linealidad en un sistema óptico.

Se dice que un sistema es lineal si sigue la propiedad de superposición y cumple que para todas las funciones de entrada t y s y todas las constantes complejas a y b :

$$S\{as(x_1, y_1) + bt(x_1, y_1)\} = aS\{s(x_1, y_1)\} + bS\{t(x_1, y_1)\}. \quad (2.3)$$

Si se considera un sistema óptico descrito por un operador S con una entrada g_0 y una salida g_1 :

$$g_1(x_1, y_1) = S[g_0(x_0, y_0)]. \quad (2.4)$$

La entrada puede ser descompuesta como una suma de funciones impulso $\delta(x, y)$:

$$g_0(x_0, y_0) = \int \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\xi, \eta) \delta(x_0 - \xi, y_0 - \eta) d\xi d\eta, \quad (2.5)$$

donde los coeficientes $g_0(\xi, \eta)$ son simplemente factores de peso. Entonces, si el sistema es lineal se tiene:

$$\begin{aligned} g_1(x_1, y_1) &= S \left[\int \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\xi, \eta) \delta(x_0 - \xi, y_0 - \eta) d\xi d\eta \right] \\ &= \int \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\xi, \eta) S[\delta(x_0 - \xi, y_0 - \eta)] d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (2.6)$$

la ecuación anterior es llamada teorema de superposición y $S[\delta(x, y)]$ es la respuesta a impulso del sistema (Goodman, 1968).

2.2.3 Sistemas ópticos lineales e invariantes.

Al examinar las relaciones de entrada y salida para un sistema lineal general es importante también hablar de los sistemas lineales invariantes. Se puede decir que un circuito electrónico es invariante en el tiempo si su respuesta a impulso $h(t, \tau)$ no cambia con la diferencia de tiempo $(t - \tau)$. Los circuitos eléctricos compuestos de resistencias, capacitores e inductores son invariantes en el tiempo debido a que sus características no cambian con el tiempo.

De manera análoga, un sistema óptico lineal es invariante en el espacio si su respuesta impulsional $h(x_2, y_2; \xi, \eta)$ no se ve afectada con el cambio en las distancias $(x_2 - \xi)$ y $(y_2 - \eta)$. Se dice que un sistema invariante en el espacio es isoplanático, por lo tanto, para un sistema óptico lineal invariante en el espacio se puede escribir:

$$h(x_2, y_2; \xi, \eta) = h(x_2 - \xi, y_2 - \eta). \quad (2.7)$$

En general, la condición de isoplanetismo es un requisito muy fuerte para un sistema óptico, debido a que varias aberraciones geométricas (por ejemplo coma, astigmatismo, esférica, etc.) son dependientes del campo, es decir, la respuesta impulsional cambia con respecto a la distancia del eje óptico. Por lo tanto, la condición de isoplanetismo impone que el soporte de las funciones g_0 y g_1 esté restringido al campo de isoplanetismo a fin de asegurar la invariancia espacial. Tomando en cuenta las aberraciones debidas a un medio turbulento como la atmósfera es necesario que la respuesta impulsional cumpla la condición de ser invariante en el tiempo. Cumpliendo esa condición se puede escribir (Goodman, 1968):

$$S[\delta(x_0 - \xi, y_0 - \eta)] = h(x_1 - \xi, y_1 - \eta), \quad (2.8)$$

por lo tanto;

$$g_1(x_1, y_1) = \int \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\xi, \eta) \cdot h(x_1 - \xi, y_1 - \eta) d\xi d\eta, \quad (2.9)$$

la ecuación (2.9) representa una relación de convolución:

$$g_1(x, y) = g_0(x, y) * h(x, y). \quad (2.10)$$

Aplicando la transformada de Fourier a la ecuación (2.10) y por el teorema de convolución de la Transformada de Fourier (apéndice II) la relación se simplifica en:

$$\hat{g}_1(u, v) = \hat{g}_0(u, v) \cdot \hat{h}(u, v), \quad (2.11)$$

donde $\hat{h}(u, v)$ es la función de transferencia del sistema.

El telescopio es invariante en el espacio si la imagen de una fuente puntual cambia solamente de posición y no de forma. En la práctica los telescopios no son isoplanáticos en todo el campo del objeto, pero usualmente se divide el campo en pequeñas regiones de isoplanetismo con lo cual el telescopio es aproximadamente invariante dentro de un intervalo de tolerancia establecido como criterio. De hecho, para describir un sistema

óptico completamente se debería conocer la respuesta a impulso específica para cada región de isoplanetismo pero, en general, es suficiente considerar solamente el dominio de isoplanetismo en el eje del sistema o si es necesario en el eje y en una zona muy cercana a su alrededor.

2.3 La función de transferencia espacial instantánea del telescopio.

Para poder aplicar el formalismo de los sistemas lineales, donde una entrada g_0 y una salida g_1 representan una distribución bidimensional de un campo óptico escalar del objeto y de la imagen se puede suponer que (Goodman, 1968 y Mariotti, 1989):

- La función de transferencia es invariante en el espacio (y en el tiempo si es necesario), tomando en cuenta las restricciones mencionadas en el subtítulo anterior.
- La propagación de la luz dentro del sistema óptico está limitado por un diafragma circular, el cual es llamado pupila P .
- Excepto para efectos de difracción, la transferencia de la luz desde el objeto al plano imagen puede ser tratado con las leyes de óptica geométrica.

Si se considera la imagen de una fuente puntual monocromática para una longitud de onda λ , y por la teoría de difracción, la amplitud compleja $A(\vec{\alpha})$ difractada en la dirección $\vec{\alpha}$ en el plano focal del telescopio es proporcional a (Rodier, 1981):

$$A(\vec{\alpha}) \propto \int \phi(\vec{u})P(\vec{u})\exp(-2i\pi\vec{\alpha}\vec{u})d\vec{u}, \quad (2.12)$$

donde \vec{u} es una variable adimensional normalizada:

$$\vec{u} = \frac{\vec{x}}{\lambda}, \quad (2.13)$$

\vec{x} representa el vector de posición (x, y) sobre la pupila del telescopio, $\phi(\vec{u})$ es la amplitud compleja en el plano de la pupila del telescopio y $P(\vec{u})$ es la función pupila del telescopio:

$$P(\vec{u}) = \begin{cases} \exp \frac{2i\pi}{\lambda} Z(\vec{u}), & \text{para } |\vec{u}| \leq D \\ 0, & \text{para } |\vec{u}| > D, \end{cases} \quad (2.14)$$

donde $Z(\vec{u})$ es un polinomio que describe las aberraciones ópticas del telescopio (capítulo III y apéndice I).

La ecuación (2.12) puede ser representada por la transformada de Fourier bidimensional del producto $\phi(\vec{u})P(\vec{u})$ entonces:

$$A(\vec{\alpha}) = \mathbf{F} \{ \phi(\vec{u})P(\vec{u}) \}. \quad (2.15)$$

La iluminación observada en el plano focal del telescopio en función de la dirección de $\vec{\alpha}$ es:

$$S(\vec{\alpha}) = |A(\vec{\alpha})|^2 \approx |\mathbf{F} \{ \phi(\vec{u})P(\vec{u}) \}|^2. \quad (2.16)$$

la ecuación anterior es la respuesta impulsional instantánea del sistema óptico compuesto por la atmósfera y el telescopio, y su transformada de Fourier es la función de transferencia óptica instantánea del mismo sistema:

$$\hat{S}(\vec{f}) = \int S(\vec{\alpha}) \exp[-2i\pi\vec{\alpha} \cdot \vec{f}] d\vec{\alpha}, \quad (2.17)$$

\vec{f} es la frecuencia espacial en unidades angulares inversas (rad^{-1}).

De acuerdo con el teorema de autocorrelación (apéndice II), la transformada de Fourier del módulo al cuadrado del producto $\phi(\vec{u})P(\vec{u})$ es su autocorrelación, entonces la ecuación (2.17) queda:

$$\hat{S}(\vec{f}) \approx \int \phi(\vec{u})\phi^*(\vec{u} + \vec{f})P(\vec{u})P^*(\vec{u} + \vec{f})d\vec{u}, \quad (2.18)$$

$$\hat{S}(\vec{f}) = \frac{1}{S} \int \phi(\vec{u})\phi^*(\vec{u} + \vec{f})P(\vec{u})P^*(\vec{u} + \vec{f})d\vec{u}, \quad (2.19)$$

la ecuación (2.19) es la función de transferencia óptica normalizada del sistema atmósfera y telescopio y S es la superficie de la pupila del telescopio en unidades de longitud de onda al cuadrado.

En un medio perfecto sin turbulencia la función de amplitud compleja $\phi(\vec{u}) = 1$, entonces la ecuación anterior se reduce a:

$$T(\vec{f}) = \frac{1}{S} \int P(\vec{f})P^*(\vec{u} + \vec{f})d\vec{u}, \quad (2.20)$$

que es la autocorrelación de la amplitud compleja de la pupila y representa la función de transferencia óptica del telescopio.

El módulo de la función de transferencia es la función de transferencia de modulación (FTM). La resolución está definida como la integral sobre todas las frecuencias espaciales del módulo de la función de transferencia óptica:

$$\int |\hat{S}(\vec{f})| \cdot d\vec{f}. \quad (2.21)$$

Si el sistema óptico es perfecto está limitado únicamente por la difracción, como es el caso de un telescopio perfecto en órbita, la resolución es:

$$s = \frac{1}{4}\pi \left(\frac{D}{\lambda}\right)^2, \quad (2.22)$$

donde el diámetro de la pupila circular es D y λ la longitud de onda. En la función de transferencia, la transmisión de frecuencias espaciales no es uniforme sino que es decreciente desde $f = 0$ hasta la frecuencia de corte:

$$f_c = \frac{D}{\lambda}. \quad (2.23)$$

2.3.1 La relación entre el objeto y su imagen.

La imagen instantánea $I_i(\vec{\alpha})$ de un objeto extendido puede ser representada por la relación de convolución (apéndice II) entre la distribución de intensidad del objeto $O(\vec{\alpha})$ y la respuesta impulsional instantánea:

$$I_i(\vec{\alpha}) = O(\vec{\alpha}) * S_i(\vec{\alpha}). \quad (2.24)$$

En el espacio de Fourier la ecuación anterior es representada como el producto de las transformadas de Fourier de $S_i(\vec{\alpha})$ y $O(\vec{\alpha})$:

$$\hat{I}_i(\vec{f}) = \hat{O}(\vec{f}) \cdot \hat{S}_i(\vec{f}), \quad (2.25)$$

\vec{f} representa al vector de frecuencias espaciales del objeto. Debido a que la relación entre el objeto y la imagen en un telescopio puede ser descrita por una relación de convolución, el comportamiento del telescopio es como el de un filtro pasa bajas en frecuencias espaciales.

2.4 Función de transferencia a largos tiempos de exposición.

La astronomía dio un gran paso en su desarrollo con la aparición de dispositivos con los cuales se podía "almacenar" luz. La aparición de las placas fotográficas permitió el descubrimiento de objetos que la astronomía realizada con el ojo humano, como elemento de detección, no había logrado, hecho que ha sido mucho más evidente con el desarrollo de sistemas electrónicos de detección.

La identificación espacial del sistema telescopio y atmósfera es más próxima a la real, si se toma en cuenta que la función principal de un telescopio es la adquisición de imágenes a largo tiempo de exposición. En la tabla 1.3 del capítulo I, se puede ver que los valores de las constantes de tiempo asociadas a la estabilidad en las áreas de coherencia óptica en la atmósfera, son del orden de las decenas de milisegundos, en contraste con los tiempos de adquisición de imágenes que pueden ser desde los segundos hasta las decenas de minutos, y en algunos casos más, dependiendo de la intensidad luminosa del objeto observado.

La respuesta a impulso para una exposición de largo tiempo en presencia de turbulencia atmosférica es descrita por $\langle S(\vec{\alpha}) \rangle$, donde los símbolos $\langle \rangle$ representan el promedio del conjunto (apéndice II), y al igual que la ecuación (2.19) la función de transferencia es la transformada de Fourier de la respuesta a impulso $\langle S(\vec{\alpha}) \rangle$ y queda (Rodier, 1981):

$$\langle \hat{S}(\vec{f}) \rangle = S^{-1} \int \langle \varphi(\vec{u})\varphi^*(\vec{u} + \vec{f}) \rangle P(\vec{u})P^*(\vec{u} + \vec{f}) d\vec{u}, \quad (2.26)$$

en esta última ecuación aparece la función de coherencia:

$$B(\vec{f}) = \langle \varphi(\vec{u})\varphi^*(\vec{u} + \vec{f}) \rangle = B_0(\lambda\vec{f}), \quad (2.27)$$

la función de coherencia de onda $B(\vec{f})$ describe la función de transferencia de la atmósfera que multiplicada por la función de transferencia del telescopio da la función de transferencia

del sistema real telescopio y atmósfera.

$$\langle \hat{S}(\vec{f}) \rangle = B(\vec{f}) \cdot T(\vec{f}). \quad (2.28)$$

En electrónica, una manera de identificar un sistema es conociendo su ancho de banda, el cual está dado por la integral de su función de transferencia. En óptica es conocido como el criterio de Strehl:

$$R = \int B(\vec{f}) \cdot T(\vec{f}) d\vec{f}. \quad (2.29)$$

La resolución del sistema en presencia de la atmósfera está limitado por cualquiera de los anchos de las funciones $B(\vec{f})$ o $T(\vec{f})$, tanto el telescopio como la atmósfera se comportan como dos filtros pasa bajas y la resolución depende de la función de transferencia más angosta, haciendo prácticamente despreciable la contribución de la más ancha. Cuando $B(\vec{f})$ es grande comparada con $T(\vec{f})$ la resolución depende solamente del telescopio:

$$R_{tel} = \int T(\vec{f}) d\vec{f}. \quad (2.30)$$

Aplicando la ecuación (2.30) en la (2.20) para un telescopio perfecto de diámetro D , la resolución está dada por la ecuación (2.23). Cuando la función de transferencia de la atmósfera es más angosta que la del telescopio, la resolución está limitada por los efectos de la turbulencia y la resolución es:

$$R_{atm} = \int B(\vec{f}) d\vec{f}. \quad (2.31)$$

El parámetro de Fried r_0 es una medida importante del "seeing" y es el diámetro crítico para el cual:

$$\int B(\vec{f}) d\vec{f} = \int T(\vec{f}) d\vec{f}. \quad (2.32)$$

La función de transferencia atmosférica es de la forma (Rodier, 1981):

$$B(\vec{f}) = \exp -3.44 \left(\frac{\lambda f}{r_0} \right)^{5/3}. \quad (2.33)$$

El poder de resolución está limitado por el telescopio cuando su diámetro es menor que r_0 y está limitado por la atmósfera cuando el diámetro del telescopio es mayor que r_0 . Los valores típicos de r_0 son del orden de 20 cm o más (tabla 1.3, capítulo I), por lo tanto, la resolución en los grandes telescopios está limitada enteramente por la atmósfera. La figura 2.1 muestra las funciones de transferencia para: a) un telescopio de 2 m perfecto sin turbulencia atmosférica; b) para el mismo telescopio pero con turbulencia atmosférica y un valor de r_0 de 60 cm; y c) igual a b) pero con un r_0 de 30 cm.

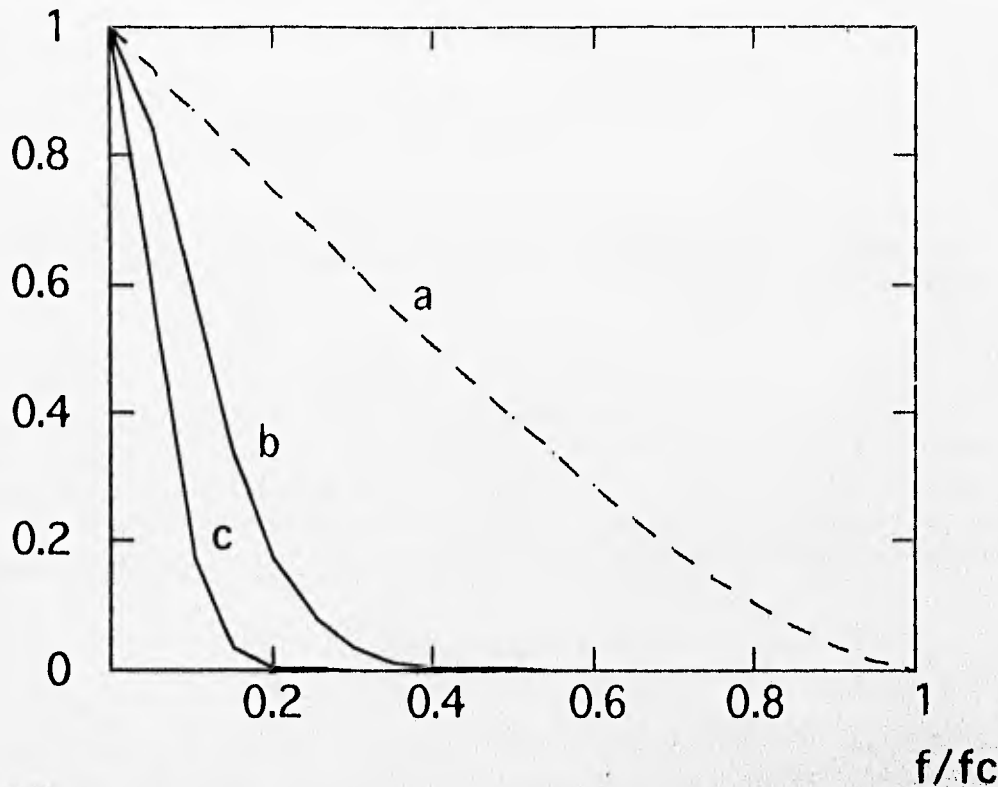


Figura 2.1. Funciones de transferencia a largos tiempos de exposición para: a) un telescopio de 2 m perfecto sin turbulencia atmosférica; b) para el mismo telescopio pero con turbulencia atmosférica y un valor de r_0 de 60 cm; y c) igual a b) pero con un r_0 de 30 cm.

2.4.1 La relación entre el objeto y su imagen a largos tiempos de exposición.

El promedio de la iluminación $\langle I(\vec{\alpha}) \rangle$, producida por un objeto extendido representado por la distribución de intensidad $O(\vec{\alpha})$, puede ser también representado por la relación de convolución (Rodier, 1989):

$$\langle I(\vec{\alpha}) \rangle = O(\vec{\alpha}) * \langle S(\vec{\alpha}) \rangle, \quad (2.34)$$

aplicando la transformada de Fourier se tiene :

$$\langle \hat{I}(\vec{f}) \rangle = \hat{O}(\vec{f}) \cdot \langle \hat{S}(\vec{f}) \rangle, \quad (2.35)$$

donde $\langle \hat{S}(\vec{f}) \rangle$ es la función de transferencia para imágenes a largo tiempo de exposición.

El análisis en frecuencia del telescopio permite conocer el comportamiento de su función de transferencia en presencia de la atmósfera y que la calidad en la imagen de los telescopios podría ser mejorada con sistemas que midan los efectos nocivos de la turbulencia atmosférica y tengan la capacidad de corregirlos parcial o totalmente en tiempo real. Ya que en la actualidad se puede tener bastante control sobre la calidad de la óptica de un telescopio, desde su diseño y fabricación hasta su funcionamiento en el observatorio,

aplicando sistemas de óptica activa, la mejoría en la calidad de las imágenes depende, entonces, en gran medida de la óptica adaptativa. En el capítulo siguiente, se hace un análisis de los efectos ópticos de la turbulencia atmosférica sobre un telescopio, el aumento del ancho de la función de transferencia óptica y el grado de mejoría en la imagen con la corrección parcial del frente de onda que pasa a través de la turbulencia atmosférica.

CAPÍTULO III

Características de la Atmósfera

3.1 Introducción.

En este capítulo se hace un estudio acerca de la propagación del frente de onda y la formación de imágenes a través de un medio turbulento. Para éste análisis se toma en cuenta como un solo sistema óptico al telescopio y a la porción de la atmósfera limitada por el diámetro del mismo. Si se considera que la calidad de la óptica del telescopio está limitada por la difracción y perfectamente alineada, se puede decir que sus aberraciones son despreciables en comparación con las producidas por la turbulencia atmosférica.

Se define aquí al frente de onda atmosférico, como el frente de onda producido por una fuente puntual en el infinito y que es deformado al pasar a través de la atmósfera perturbada por la turbulencia, siendo su diámetro el de la pupila del telescopio (figura 3.1).

Para evaluar el grado de corrección del sistema de Óptica Adaptativa, se calculan los primeros 21 coeficientes de Zernike de un frente de onda deformado por la atmósfera a partir de la teoría de Kolmogorov.

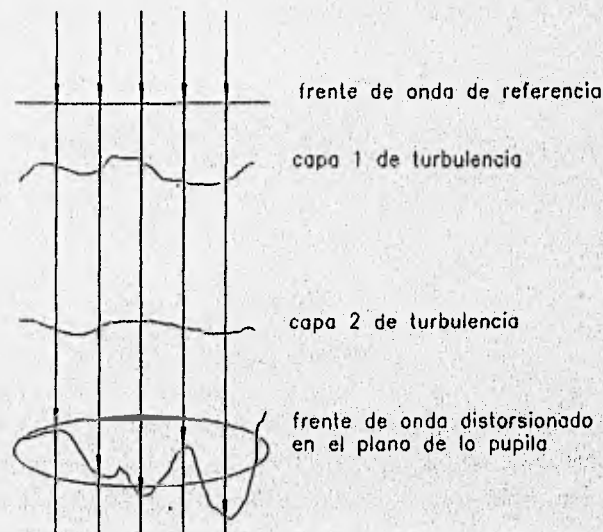


Figura 3.1. Frente de onda atmosférico.

3.2 Polinomios de Zernike.

En 1934, F. Zernike, presenta por primera vez este conjunto de polinomios en su trabajo acerca de la prueba de la navaja. Desde entonces, su uso para la descripción de aberraciones ópticas clásicas es bien conocido. A partir de la descripción del frente de onda con estos polinomios se pueden conocer los errores residuales para cualquier número de correcciones independientes del sistema de OA (Born and Wolf, 1980).

Los polinomios de Zernike son ortogonales y están definidos en el interior de un círculo unitario y pueden ser desarrollados como una serie de funciones. Estos polinomios son un producto de funciones radiales y angulares, por lo que es conveniente el uso de coordenadas polares. Se aplica aquí la normalización que hace Noll (1976) para hacer el análisis estadístico. Los polinomios son definidos por:

$$\begin{aligned} z_{parj} &= \sqrt{n+1} R_n^m(r) \sqrt{2} \cos m\theta, \\ z_{imparj} &= \sqrt{n+1} R_n^m(r) \sqrt{2} \operatorname{sen} m\theta, \\ z_j &= \sqrt{n+1} R_n^0(r), \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde

$$R_n^m = \sum_{s=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! \left[\frac{(n-m)}{2-s} \right]! \left[\frac{(n-m)}{2-s} \right]!} r^{n-2s}. \quad (3.2)$$

Los valores n y m son siempre valores enteros y satisfacen que $m \leq n$, $n - |m| = \text{par}$. El índice j es el orden del modo y es una función de n y m . La condición de ortogonalidad está dada por:

$$\int d^2r W(r) Z_j Z_{j'} = k \delta_{jj'}, \quad (3.3)$$

donde

$$\begin{aligned} W(r) &= \frac{1}{\pi} & r \leq 1 \\ W(r) &= 0 & r > 1. \end{aligned}$$

Con el desarrollo de polinomios de Zernike se puede describir un frente de onda arbitrario sobre una apertura circular de radio total R , $\phi(r, \theta)$, que es función de una apertura r y un desplazamiento angular θ ; su expansión polinomial está dada por:

$$\phi(R\rho, \theta) = \sum_j a_j Z_j(\rho, \theta), \quad (3.4)$$

con $\rho = r/R$ y el coeficiente a_j está dado por:

$$a_j = \int d^2\rho W(\rho)\phi(R\rho, \theta)Z_j(\rho, \theta), \quad (3.5)$$

o

$$a_j = (1/R^2) \int d^2r W(r/R)\phi(r, \theta)Z_j(r/R, \theta). \quad (3.6)$$

La tabla 3.1 muestra los primeros 21 polinomios usados en este capítulo, la nota después de algunos de ellos describe el tipo de aberración óptica que representa (apéndice I).

$Z_1 = 1$	
$Z_2 = 2r \cos \theta$	<i>Tip.</i>
$Z_3 = 2r \operatorname{sen} \theta$	<i>Tilt.</i>
$Z_4 = \sqrt{3}(2r^2 - 1)$	<i>Desenfoque.</i>
$Z_5 = \sqrt{6}r^2 \operatorname{sen} 2\theta$	<i>Astigmatismo.</i>
$Z_6 = \sqrt{6}r^2 \cos 2\theta$	<i>Astigmatismo.</i>
$Z_7 = \sqrt{8}(3r^3 - 2r) \operatorname{sen} \theta$	<i>Coma.</i>
$Z_8 = \sqrt{8}(3r^3 - 2r) \cos \theta$	<i>Coma.</i>
$Z_9 = \sqrt{8}r^3 \operatorname{sen} 3\theta$	
$Z_{10} = \sqrt{8}r^3 \cos 3\theta$	
$Z_{11} = \sqrt{5}(6r^4 - 6r^2 + 1)$	<i>Esférica.</i>
$Z_{12} = \sqrt{10}(4r^4 - 3r^2) \cos 2\theta$	
$Z_{13} = \sqrt{10}(4r^4 - 3r^2) \operatorname{sen} 2\theta$	
$Z_{14} = \sqrt{10}r^4 \cos 4\theta$	
$Z_{15} = \sqrt{10}r^4 \operatorname{sen} 4\theta$	
$Z_{16} = \sqrt{12}(10r^5 - 12r^3 + 3r) \cos \theta$	
$Z_{17} = \sqrt{12}(10r^5 - 12r^3 + 3r) \operatorname{sen} \theta$	
$Z_{18} = \sqrt{12}(5r^5 - 4r^3) \cos 3\theta$	
$Z_{19} = \sqrt{12}(5r^5 - 4r^3) \operatorname{sen} 3\theta$	
$Z_{20} = \sqrt{20}r^5 \cos 5\theta$	
$Z_{21} = \sqrt{20}r^5 \operatorname{sen} 5\theta$	

Tabla 3.1. Polinomios de Zernike.

3.3 La atmósfera.

Al inicio de este trabajo se cita a Arthur C. Clarke, seguramente, él imaginó cómo podrían verse las luces de las ciudades desde el espacio, al ver las estrellas desde la tierra. Sería imposible querer explicar totalmente a qué se deben los "atmospheric tremors" y saber también con cuánta fuerza bate las alas una mariposa en China. Pero, aceptando que la turbulencia atmosférica existe en este lado del mundo, se presenta a continuación una explicación sobre el origen de las deformaciones que sufre el frente de onda atmosférico.

3.3.1 Turbulencia atmosférica.

Las inhomogeneidades de índice de refracción asociadas a la turbulencia atmosférica provocan perturbaciones en un rayo de luz que se propaga a cualquier distancia a través de la atmósfera. Esta perturbación se manifiesta en una deformación de la forma del frente de onda y en una variación de la intensidad del mismo. Si un haz colimado (luz proveniente de un objeto situado en un lugar tan lejano que todos los rayos de luz son paralelos) pasa a través de la atmósfera y es colectado por una lente, forma una imagen cuya calidad es modificada por las perturbaciones producidas por la turbulencia atmosférica.

En contraste con los flujos estables, también llamados flujos laminares, los flujos turbulentos tienen un campo aleatorio de velocidades. En una tubería, la transición de flujo laminar a flujo turbulento ocurre cuando el número de Reynolds excede un valor determinado, que depende solamente de la geometría del flujo. El número de Reynolds está dado por

$$R_e = \frac{V \cdot L}{\nu}, \quad (3.7)$$

donde V es la velocidad característica, L el tamaño del flujo, y ν la viscosidad cinemática del fluido. Si se tiene que la viscosidad del aire es del orden de $\nu = 15 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, la velocidad $V = 1 \text{ m/s}$ y el tamaño del flujo $L = 15 \text{ m}$, entonces el número de Reynolds es del orden de $R_e = 10^6$. El número de Reynolds es la relación de la velocidad de un flujo con respecto a su viscosidad, lo cual da información del comportamiento de un medio. Cuando $R_e = 10^6$, el medio está en la llamada "capa de frontera turbulenta", por lo tanto, en las condiciones anteriores el aire es un medio turbulento (Feynman, 1964).

3.3.2 Las fluctuaciones de temperatura.

De acuerdo con la teoría de Kolmogorov (Roddier, 1989), un flujo turbulento produce grandes remolinos a una escala L (entre 100 metros y hasta algunos kilómetros), llamada turbulencia de escala externa. Estos remolinos producen otros más y más pequeños transfiriendo la energía de la turbulencia a escalas cada vez más pequeñas. La cascada de energía finaliza cuando es disipada en forma de calor por fricción molecular. A estos pequeños remolinos (en el orden de los milímetros), se les conoce como turbulencia de escala interna. Los flujos turbulentos producen inhomogeneidades, debidas a la mezcla adiabática de los estratos atmosféricos a diferentes temperaturas, lo que conduce a que la atmósfera sea un medio con una fluctuación aleatoria del índice de refracción.

Una manera de describir el campo aleatorio de las fluctuaciones de la temperatura es en términos de su función de estructura:

$$D_T(\vec{\rho}) = \left\langle \left| \theta(\vec{r} + \vec{\rho}) - \theta(\vec{r}) \right|^2 \right\rangle, \quad (3.8)$$

la cual expresa la varianza de la temperatura entre dos puntos separados una distancia ρ . La teoría de Kolmogorov, considera que el campo aleatorio es homogéneo e isotrópico y el intervalo inercial de la función de estructura depende solamente de que $\rho = |\rho|$. La función de estructura de Kolmogorov $D_T(\vec{\rho})$ es usualmente escrita de la siguiente forma:

$$D_T(\vec{\rho}) = C_T^2 \rho^{2/3}, \quad (3.9)$$

donde C_T es conocida como la constante de estructura de las fluctuaciones de temperatura y es la medida de la intensidad local de las fluctuaciones de temperatura.

3.3.3 Las fluctuaciones de índice de refracción.

De acuerdo con la ley de Gladstone, el índice de refracción del aire puede ser relacionado con su masa específica μ por:

$$N - 1 = \beta\mu, \quad (3.10)$$

donde β es un coeficiente de proporcionalidad. Bajo condiciones normales de presión y temperatura, $N - 1 = 3 \times 10^{-4}$ y $\mu = 1.3 \text{ kgm}^{-3}$, entonces $\beta = 2.3 \times 10^{-4}$.

De la ley del gas perfecto la presión y la temperatura del aire están relacionados como sigue:

$$P = \mu \frac{RT}{M}. \quad (3.11)$$

Despejando μ de la ecuación (3.11) y sustituyendo en (3.10) queda:

$$N - 1 = \frac{\beta M P}{R T}. \quad (3.12)$$

Suponiendo que se tiene aire seco y condiciones de presión en equilibrio, se considera que las fluctuaciones del índice de refracción del aire están directamente relacionadas con las fluctuaciones de temperatura:

$$\frac{\Delta(N - 1)}{N - 1} = -\frac{\Delta T}{T}. \quad (3.13)$$

Usando la ecuación (3.12) en (3.13) se tiene:

$$n = \Delta(N - 1) = -(N - 1) \frac{\Delta T}{T} = -\frac{\beta M P}{R T^2} \Delta T. \quad (3.14)$$

Debido a que las fluctuaciones de índice de refracción del aire son proporcionales a las fluctuaciones de la temperatura, el campo del índice de refracción también puede ser descrito como un campo aleatorio con la función de estructura:

$$D_N(\vec{\rho}) = C_N^2 \rho^{2/3}. \quad (3.15)$$

De acuerdo con la ecuación (3.15), la constante de C_N está relacionada con la constante de estructura de temperatura C_T por:

$$C_N = \frac{\beta M}{R} \frac{P}{T^2} C_T, \quad (3.16)$$

y para $M = 27 \times 10^{-3} \text{ kg}$ y $R = 8.32 \text{ J/K}$

$$C_N = 7.5 \times 10^{-5} \frac{P}{T^2} C_T, \quad (3.17)$$

donde P está expresada en milibares y T en grados Kelvin.

Es interesante como una cadena de eventos debidos a la turbulencia atmosférica se van sucediendo hasta llegar a la deformación del frente de onda atmosférico. Todo comienza con la turbulencia de escala externa, que se descompone en remolinos cada vez más pequeños hasta llegar a una turbulencia de escala interna. Esta última disipa su energía en forma de calor por la fricción molecular, el calor produce una fluctuación de la temperatura lo que induce variaciones en el índice de refracción del aire, cambiando la trayectoria óptica, para, finalmente, tener una variación aleatoria de la fase del frente de onda.

3.3.4 La función estructura de fase.

La teoría de la turbulencia de Kolmogorov, predice que la correlación espacial de la turbulencia decrece proporcionalmente a una potencia de dos tercios de la separación espacial; Fried (1965), muestra que la función estructura de fase puede ser escrita como:

$$D(r) = Ar^{5/3}, \quad (3.18)$$

la ecuación (3.18) es exacta solamente para trayectorias cortas de propagación, donde A es una constante determinada por el camino óptico, la longitud de onda y las condiciones ambientales particulares. Fried determina que A puede ser escrita como:

$$A = 2.91 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) \int d\Lambda C_N^2, \quad (3.19)$$

donde λ es la longitud de onda, Λ es una variable que define una longitud a lo largo de la trayectoria de propagación y C_N es la constante de estructura del índice de refracción para la turbulencia atmosférica. C_N^2 puede ser escrito en términos de la varianza del índice de refracción atmosférico A, y la escala externa de turbulencia L_o se define aquí como la distancia en la cual la correlación de la turbulencia decae a la mitad del valor máximo. La expresión es:

$$C_N^2 = BL^{-2/3}. \quad (3.20)$$

De la siguientes expresiones dadas por Fried (1965), se obtienen valores "razonables" para B y L_o ,

$$B = 6.7 \times 10^{-4} \exp^{-h/3200}, \quad (3.21a)$$

$$L_o = 2h^{1/2}, \quad (3.21b)$$

donde h es la altura de la capa atmosférica correspondiente a la turbulencia de escala externa. Sustituyendo (3.21a,b) en (3.20) y (3.19) se llega a un valor consistente de A .

3.3.5 El parámetro de Fried.

Fried, introduce el parámetro r_0 que corresponde al diámetro de una porción del frente de onda atmosférico, en el que el tamaño de las aberraciones provocadas por la turbulencia atmosférica es tal que la imagen formada con un telescopio hipotético del mismo diámetro r_0 solamente estaría limitada por difracción (ver la sección 2.3 del capítulo II).

Para que esto suceda, la variación máxima en el frente de onda debe ser aproximadamente de $1/6$ de la longitud de onda. Los valores típicos de r_0 , para longitudes de onda en el visible y en el cercano infrarojo y una propagación vertical de la trayectoria óptica, a través de la atmósfera, son del orden de los centímetros. La tabla 3.2 muestra los valores típicos de r_0 para algunas longitudes de onda considerando que se tiene un "seeing" de 1 segundo de arco.

Fried, reemplaza la constante A con el parámetro r_0 y lo define como:

$$r_0 \approx (6.88/A)^{3/5}. \quad (3.22)$$

Y la función de estructura que queda expresada en términos de r_0 es:

$$D(r) = 6.88(r/r_0)^{5/3}. \quad (3.23)$$

λ (μm)	r_0 (cm)
0.5	10
0.9	20
1.25	30
2.2	60

Tabla 3.2. Valores típicos de r_0 para algunas longitudes de onda.

3.4 El frente de onda atmosférico.

3.4.1 Grados de corrección.

El grado de corrección de un sistema de OA puede ser determinado conociendo el error remanente en el frente de onda cuando han sido corregidas las aberraciones de orden menor en el frente de onda atmosférico.

Noll (1976), define la varianza de las fluctuaciones de fase como:

$$\sigma^2 = \int r d^2r W(r) \phi^2(r). \quad (3.24)$$

Las deformaciones de fase del frente de onda $\phi(r)$ son aproximadas por la serie infinita:

$$\phi(r) = \sum_j^{\infty} a_j Z_j. \quad (3.25)$$

Se puede representar la deformación de fase del frente de onda de manera aproximada con la serie finita:

$$\Phi(r) = \sum_j^n a_j Z_j. \quad (3.26)$$

Donde Z_j es el polinomio de Zernike de orden j , el coeficiente a_j es el promedio de la fluctuación de fase sobre la región circular de interés asociada a ese polinomio de Zernike específico, y describe un tipo de aberración. La aberración que describe un polinomio específico se puede escribir como:

$$\Phi_j(r) = a_j Z_j. \quad (3.27)$$

El error de aproximación Δ , que es la diferencia del promedio cuadrático de la apertura entre la deformación de fase del frente de onda $\phi(r)$ y la aproximación finita $\Phi(r)$ es:

$$\Delta_j = \int r dr W(r) \langle [\phi(r) - \Phi(r)]^2 \rangle; \quad (3.28)$$

la ecuación anterior se puede reescribir usando la función de estructura de fase (ecuación (3.23)):

$$\Delta_j = \int r dr W(r) Z_j D(r). \quad (3.29)$$

Integrando en todo el diámetro de la pupila del telescopio, se obtiene el error residual en función del diámetro del telescopio y en función del parámetro de Fried, al usar la función estructura de fase. Los primeros 21 errores residuales de "Zernike-Kolmogorov" se presentan en la tabla 3.3.

$\Delta_1 = 1.0299(D/r_0)^{5/3}$	$\Delta_{12} = 0.0352(D/r_0)^{5/3}$
$\Delta_2 = 0.5820(D/r_0)^{5/3}$	$\Delta_{13} = 0.0328(D/r_0)^{5/3}$
$\Delta_3 = 0.1340(D/r_0)^{5/3}$	$\Delta_{14} = 0.0304(D/r_0)^{5/3}$
$\Delta_4 = 0.1110(D/r_0)^{5/3}$	$\Delta_{15} = 0.0279(D/r_0)^{5/3}$
$\Delta_5 = 0.0880(D/r_0)^{5/3}$	$\Delta_{16} = 0.0267(D/r_0)^{5/3}$
$\Delta_6 = 0.0648(D/r_0)^{5/3}$	$\Delta_{17} = 0.0255(D/r_0)^{5/3}$
$\Delta_7 = 0.0587(D/r_0)^{5/3}$	$\Delta_{18} = 0.0243(D/r_0)^{5/3}$
$\Delta_8 = 0.0525(D/r_0)^{5/3}$	$\Delta_{19} = 0.0232(D/r_0)^{5/3}$
$\Delta_9 = 0.0463(D/r_0)^{5/3}$	$\Delta_{20} = 0.0220(D/r_0)^{5/3}$
$\Delta_{10} = 0.0401(D/r_0)^{5/3}$	$\Delta_{21} = 0.0208(D/r_0)^{5/3}$
$\Delta_{11} = 0.0377(D/r_0)^{5/3}$	

Tabla 3.3. Errores residuales de "Zernike-Kolmogorov" en rad².

Con los errores residuales se puede evaluar el grado de corrección de las aberraciones de menor orden de un sistema de OA. El valor de los errores residuales, corrigiendo aberraciones de *tip - tilt* para las longitudes de onda de 1.25 μm y 2.2 μm y un diámetro de telescopio de 2 m, se presentan en la tabla 3.4.

λ (μm)	Sin corrección $\Delta\phi$ (λ)	Con corrección $\Delta\phi$ (λ)
1.25	0.79	0.28
2.2	0.44	0.16

Tabla 3.4. Valores de los errores residuales en el frente de onda corrigiendo *tip - tilt*.

3.4.2 Modelo del frente de onda atmosférico.

Para saber la respuesta angular que debe tener el espejo de compensación del sistema de OA, es necesario tener un modelo de la forma del frente de onda atmosférico aleatorio esperado en un instante de máxima deformación.

A partir de estos errores residuales se puede calcular el coeficiente de Zernike para determinar la deformación de fase debida a la turbulencia atmosférica y modelar el frente de onda.

La deformación de fase cuadrática media para una aberración específica se puede escribir como:

$$\sigma_j^2 = (\Delta_{j-1} - \Delta_j). \tag{3.30}$$

De la ecuación (3.24), que representa la varianza de fluctuaciones de fase y la ecuación (3.27), la cual describe un frente de onda deformado por una aberración, se encuentra otra forma de escribir la deformación de fase cuadrática media para una aberración,

$$\sigma_j^2 = \int r d^2 r W(r) a_j^2 Z_j^2, \quad (3.31)$$

de la equivalencia de las ecuaciones (3.30) y (3.31) el coeficiente de Zernike a_j se escribe como:

$$a_j = \left[\frac{\pi(\Delta_{j-1} - \Delta_j)}{\int Z_j^2 r} \right]^{1/2} [rad], \quad (3.32)$$

$$a_j = \left[\frac{(\Delta_{j-1} - \Delta_j)}{4\pi \int Z_j^2 r} \right]^{1/2} [\lambda].$$

La tabla 3.5 presenta los primeros 20 coeficientes de Zernike, en forma general, en función del diámetro del telescopio y el parámetro de Fried, en unidades de la longitud de onda $[\lambda]$.

$a_2 = 0.2130(D/r_0)^{5/6}$	$a_{12} = 0.0252(D/r_0)^{5/6}$
$a_3 = 0.2131(D/r_0)^{5/6}$	$a_{13} = 0.0247(D/r_0)^{5/6}$
$a_4 = 0.0418(D/r_0)^{5/6}$	$a_{14} = 0.0247(D/r_0)^{5/6}$
$a_5 = 0.0591(D/r_0)^{5/6}$	$a_{15} = 0.0252(D/r_0)^{5/6}$
$a_6 = 0.0594(D/r_0)^{5/6}$	$a_{16} = 0.0191(D/r_0)^{5/6}$
$a_7 = 0.0352(D/r_0)^{5/6}$	$a_{17} = 0.0191(D/r_0)^{5/6}$
$a_8 = 0.0354(D/r_0)^{5/6}$	$a_{18} = 0.0191(D/r_0)^{5/6}$
$a_9 = 0.0354(D/r_0)^{5/6}$	$a_{19} = 0.0183(D/r_0)^{5/6}$
$a_{10} = 0.0354(D/r_0)^{5/6}$	$a_{20} = 0.0191(D/r_0)^{5/6}$
$a_{11} = 0.0174(D/r_0)^{5/6}$	$a_{21} = 0.0191(D/r_0)^{5/6}$

Tabla 3.5. Formas generales para obtener los primeros 20 coeficientes de Zernike.

Aplicando la ecuación (3.26) y usando la tabla 3.5, se obtienen los modelos de los frentes de onda atmosféricos. La figura 3.2 muestra el modelo del frente de onda atmosférico para $1.25 \mu\text{m}$ de longitud de onda. El modelo de frente de onda, que se presenta, se obtuvo a partir de los primeros errores residuales de "Zernike-Kolmogorov" y los primeros modos de Zernike. Se considera que se llega a una buena aproximación dado que el error residual de orden mayor al 21 es aproximadamente del 2% (tabla 3.3).

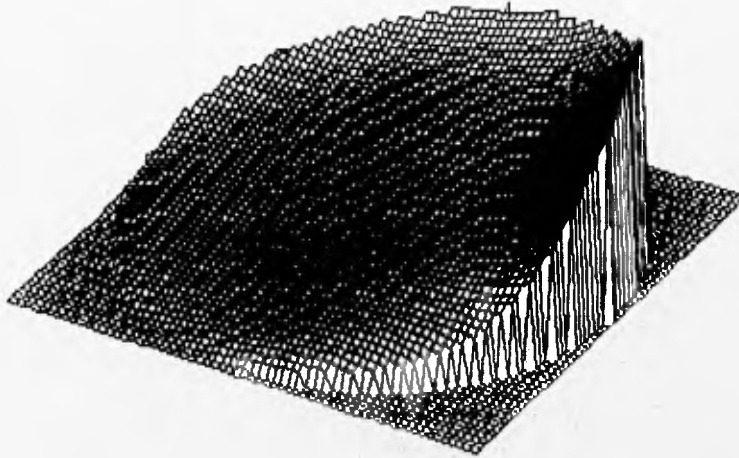


Figura 3.2. Modelo del frente de onda atmosférico para $1.25 \mu\text{m}$ de longitud de onda.

3.5 La función de transferencia espacial del telescopio con corrección adaptativa.

Con respecto a la intensidad, como se vio en el capítulo II, un telescopio es un sistema lineal, continuo e invariante ante la translación. El telescopio se comporta, entonces, como un filtro espacial, y la imagen $I_i(\vec{\alpha})$, formada en un instante i en el foco del telescopio, está dada por la convolución de la respuesta a impulso instantánea $S_i(\vec{\alpha})$ con el objeto observado $O_i(\vec{\alpha})$:

$$I_i(\vec{\alpha}) = O_i(\vec{\alpha}) * S_i(\vec{\alpha}), \quad (3.33)$$

cada instante i es menor al tiempo de estabilidad de la aberraciones en el frente de onda, y $\vec{\alpha}$ es un vector angular para un punto dado en el objeto.

La ecuación (3.33), puede ser representada en el espacio de Fourier como el producto de las transformadas de Fourier de $S_i(\vec{\alpha})$ y $O_i(\vec{\alpha})$:

$$\hat{I}_i(\vec{f}) = \hat{O}(\vec{f}) \cdot \hat{S}(\vec{f}), \quad (3.34)$$

donde \vec{f} corresponde a la frecuencia espacial angular del objeto.

Como se demostró en el capítulo II la transformada de Fourier de la respuesta a impulso espacial es igual a la autocorrelación de la amplitud compleja de onda en la pupila y es la función de transferencia óptica o espacial del sistema y está dada por:

$$T(\vec{f}) = \int P(\vec{u})P^*(\vec{u} + \vec{f})d\vec{u}, \quad (3.35)$$

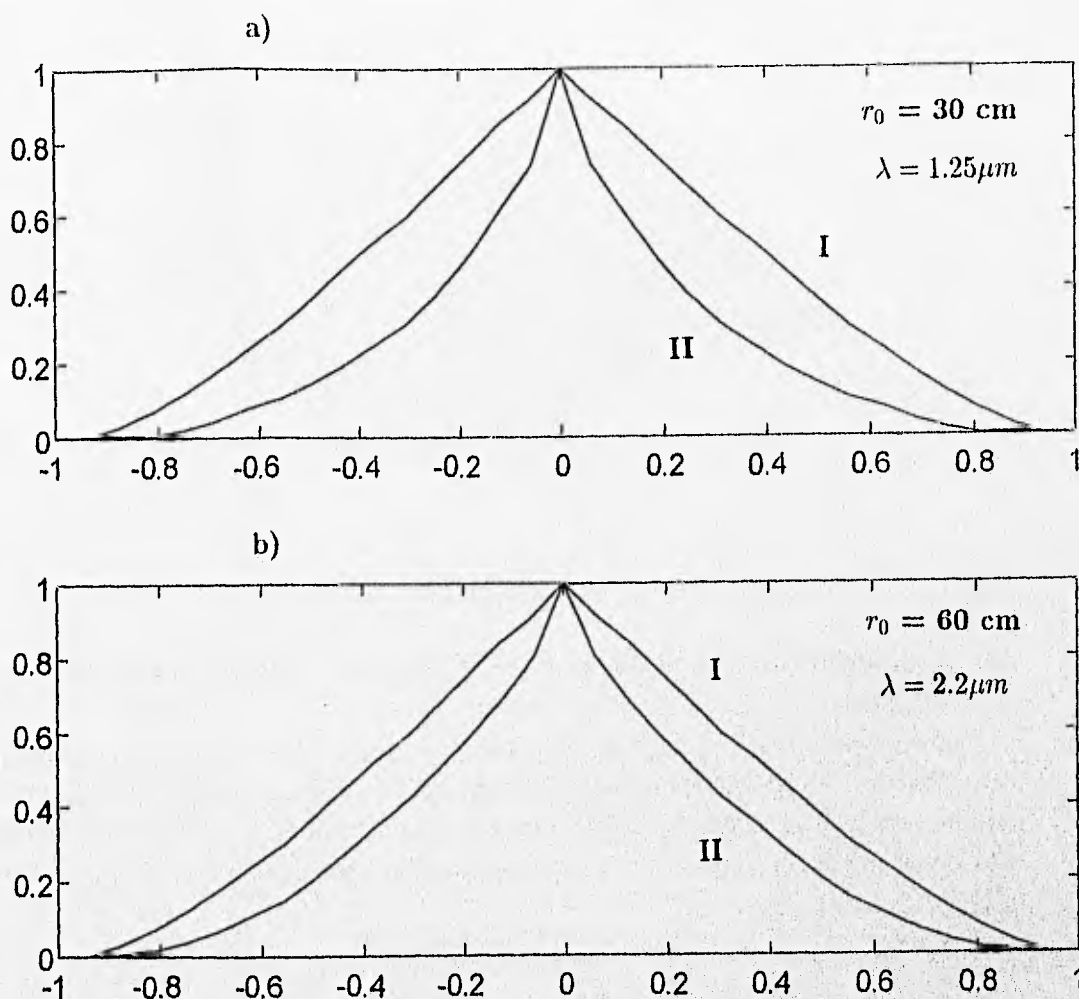


Figura 3.3. Funciones de transferencia espacial, (a) $\lambda = 1.25 \mu\text{m}$ y (b) $2.2 \mu\text{m}$. I representa la función de transferencia de un sistema perfecto y II la función de transferencia de un sistema con aberraciones.

donde $P(\vec{u})$ es la función de pupila compleja del telescopio y está definida por:

$$P(\vec{u}) = \begin{cases} \exp \frac{2i\pi}{\lambda} Z(\vec{u}), & |\vec{u}| \leq D \\ 0, & |\vec{u}| > D, \end{cases} \quad (3.36)$$

El polinomio $Z(\vec{u})$ describe las aberraciones; el vector $\vec{u} = \vec{x}/\lambda$ corresponde a las coordenadas "reducidas" donde \vec{x} es un punto sobre la pupila.

El cálculo del modelo del frente de onda atmosférico permite obtener la función de transferencia óptica. El módulo de la función de transferencia óptica es la función de

transferencia de modulación (FTM). La figura 3.3 muestra las gráficas de las FTM de un telescopio de 2 m, con las aberraciones inducidas por la atmósfera sobre la pupila, para las longitudes de onda de $1.25 \mu\text{m}$ y $2.2 \mu\text{m}$ junto con la FTM de un sistema perfecto.

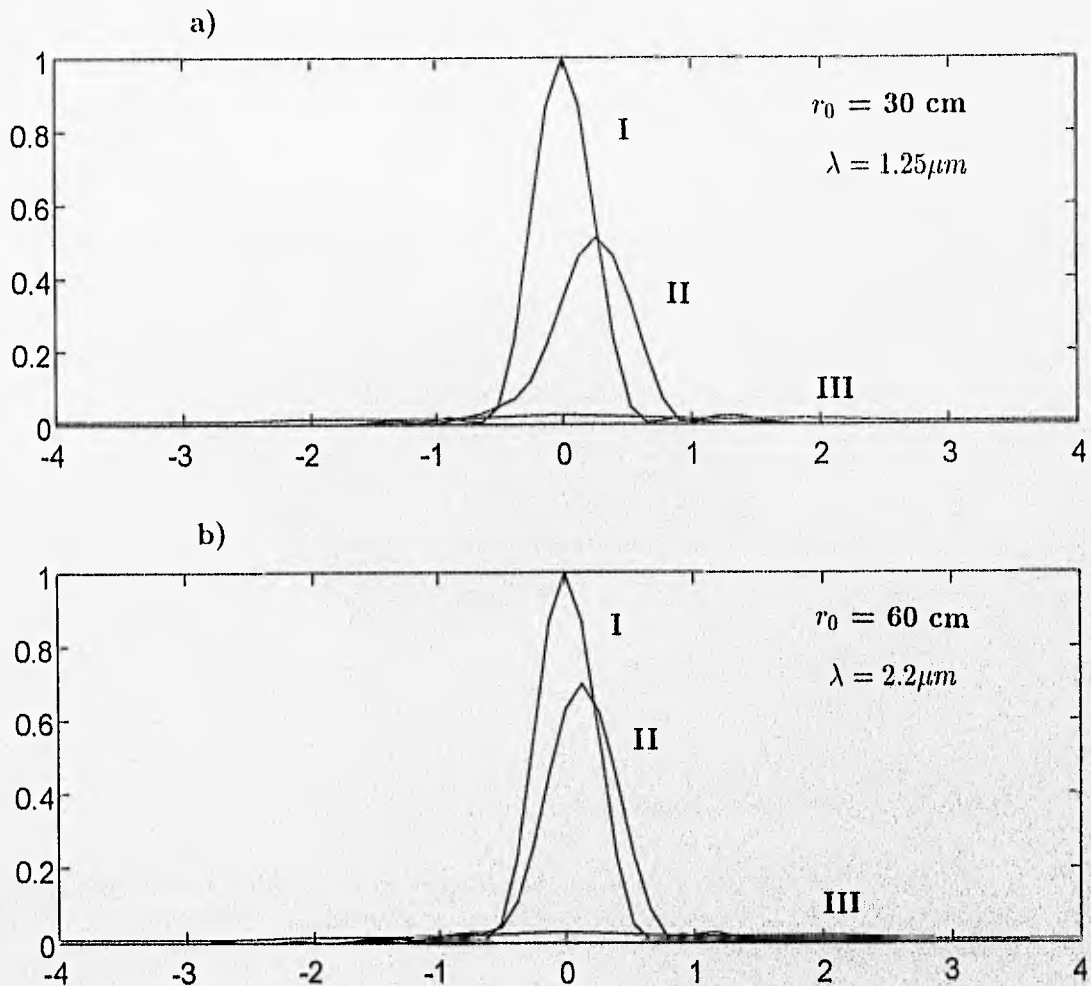


Figura 3.4. Respuestas a impulso, (a) $\lambda = 1.25 \mu\text{m}$ y (b) $2.2 \mu\text{m}$. I representa la respuesta a impulso para un sistema óptico perfecto, II la respuesta a impulso del sistema con corrección, y III la respuesta a impulso de un sistema sin corrección.

3.5.1 Comportamiento de la imagen.

Aunque la función de transferencia óptica instantánea no se ve afectada por las aberraciones de tip-tilt, el efecto de estas aberraciones se manifiesta en la imagen integrada, ya que una inclinación en el frente de onda representa un desplazamiento en la posición de

la imagen en el plano focal del telescopio. La figura 3.4 muestra el comportamiento de la respuesta a impulso espacial en tres casos, para un sistema perfecto equivalente (sin aberraciones), un sistema con corrección de tip-tilt y uno con todas las aberraciones (las 20 aberraciones correspondientes a los primeros 20 coeficientes de Zernike). Se puede notar en las gráficas que, siguiendo el criterio de Roddier, para la evaluación de la calidad de un sistema de OA (capítulo I), la corrección de tip-tilt en estas longitudes de onda ofrece una mejora notable en la calidad de la imagen; el ancho del pico central de la respuesta a impulso espacial del sistema corregido es muy cercano al ancho a media altura del pico central de la respuesta a impulso espacial de un sistema limitado por difracción equivalente.

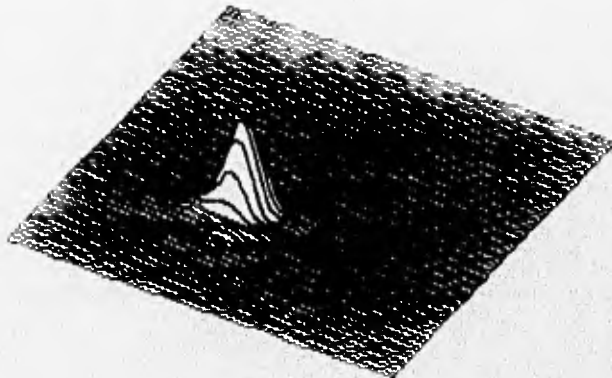


Figura 3.5. Respuesta a impulso espacial para $\lambda = 1.25 \mu\text{m}$.

La figura 3.5 es una gráfica en 3D de la respuesta impulsional instantánea y sin corrección de tilt para $\lambda = 1.25 \mu\text{m}$, en la que se nota el desplazamiento con respecto al centro debido al tilt en el frente de onda.

3.6 Función de transferencia espacial para largos tiempos.

A cortos tiempos de exposición una imagen estelar no sufre la degradación que ocurre en una imagen a largo tiempo de exposición. Fried (1965), calculó la función de transferencia óptica para un telescopio si una imagen de largo tiempo de exposición era obtenida añadiendo cortas exposiciones apropiadamente centradas. Esta función de transferencia es equivalente a la que se obtendría aplicando el sistema de OA para la corrección de tip-tilt. La función dada por Fried está representada por la siguiente ecuación:

$$\langle S_0(\vec{f}) \rangle = T(\vec{f}) \left\{ \exp - 3.44(\lambda f / r_o)^{5/3} \left[1 - (\lambda f / D)^{1/3} \right] \right\}, \quad (3.37)$$

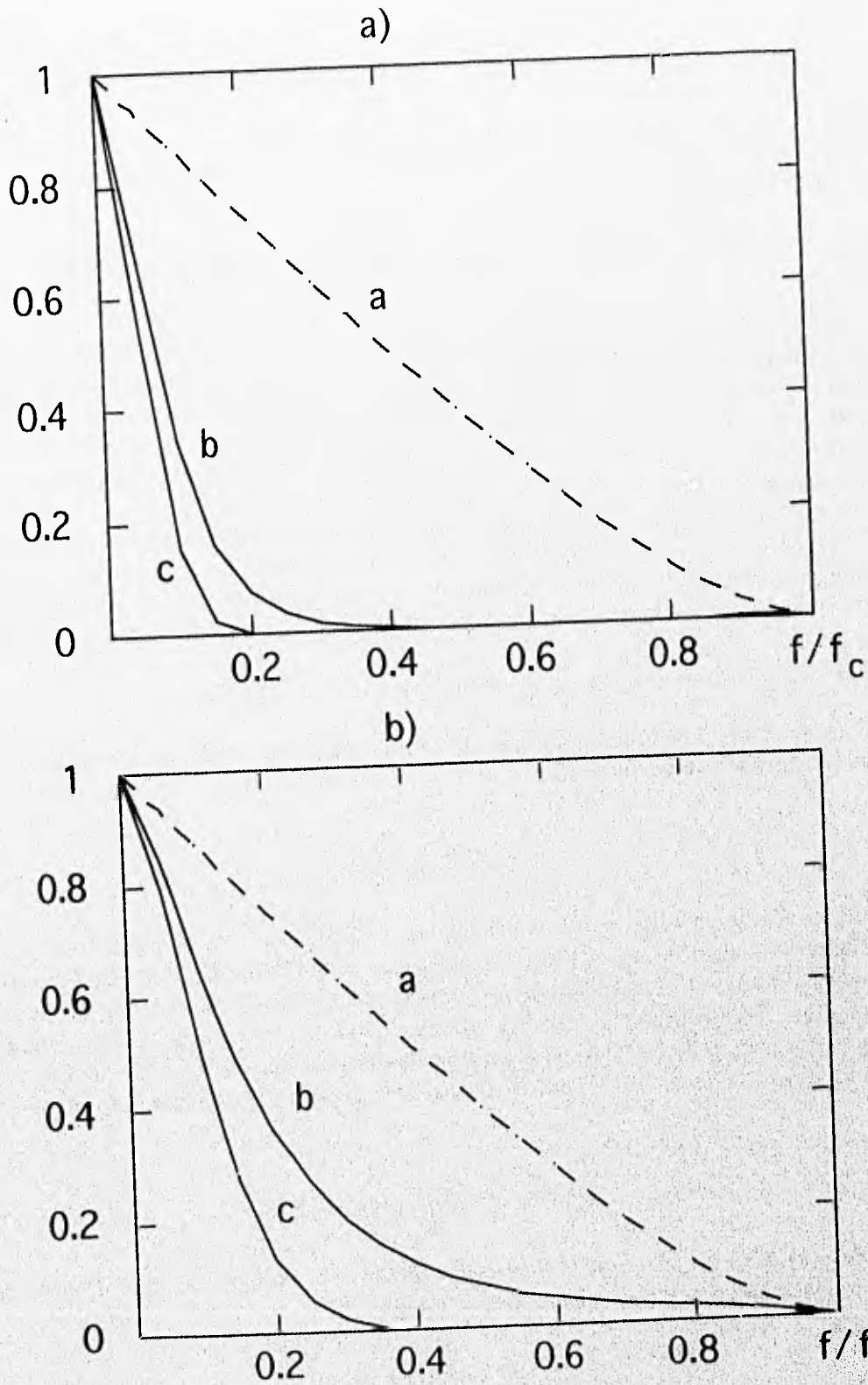


Figura 3.6. Funciones de transferencia espacial a largo tiempo de exposición (a) $\lambda = 1.25 \mu\text{m}$ $r_0 = 30 \text{ cm}$ y (b) $2.2 \mu\text{m}$ $r_0 = 60 \text{ cm}$.

donde $T(\vec{f})$ es la función de transferencia de un telescopio limitado por difracción multiplicada por la función de transferencia de la atmósfera eliminando el tilt. En la figura 3.6 se pueden ver las gráficas de las funciones de transferencia de un telescopio de 2 m para a) $1.25 \mu\text{m}$ de longitud de onda, $r_0 = 30 \text{ cm}$ y b) $2.2 \mu\text{m}$ de longitud de onda y $r_0 = 60 \text{ cm}$. En ambos casos, I representa la función de transferencia para un telescopio limitado por difracción, II la función de un telescopio con turbulencia atmosférica pero con corrección de tip-tilt y III sin corrección.

3.7 La función temporal del sistema de OA para corregir tip-tilt.

Este capítulo finaliza con la determinación del ancho de banda temporal requerido para que el funcionamiento del sistema de OA sea óptimo. Para determinar este parámetro Roddier, *et. al.* (1993), grabaron las señales de error del frente de onda producidas por un sensor de frente de onda durante varias sesiones de observación en el telescopio *Canada-France-Hawaii* (CFH) en el Mauna Kea. A partir de esas grabaciones determinaron experimentalmente la frecuencia temporal de las aberraciones aleatorias en el frente de onda y presentaron un modelo teórico para describir el fenómeno. Ellos estimaron las aberraciones aleatorias en términos de polinomios de Zernike y obtienen el espectro en frecuencias temporales para un número de términos de Zernike. A continuación se presenta el modelo teórico dado por Roddier, *et. al.* (1993), para llegar al espectro de frecuencias temporales.

3.7.1 Modelo teórico de la función de transferencia temporal del sistema.

Sea a_j el coeficiente del desarrollo de Zernike de la aberración del frente de onda instantánea del frente de onda $\phi(r)$:

$$a_j = \int z_j(r)\phi(r)dr. \quad (3.38)$$

Al igual que en (3.4), $z_j(r)$ es definido como la función correspondiente al término j de Zernike, dentro de la apertura del telescopio y cero fuera de esta. La integral de la ecuación (3.38) está extendida sobre el plano completo, así como todas las ecuaciones siguientes. También es eliminado el subíndice j porque las ecuaciones son válidas para cualquier término de Zernike. Se supone que la deformación del frente de onda se propaga con la velocidad del viento V , y la señal de salida del sensor $s(t)$ está en función del tiempo t :

$$s(t) = a(Vt) = \int z(r)\phi(r - Vt)dr, \quad (3.39)$$

donde $a(r)$ es el promedio de la fluctuación de la perturbación del frente de onda $\phi(r)$ y están relacionados por el producto de convolución:

$$a(r) = \phi(r) * z(r). \quad (3.40)$$

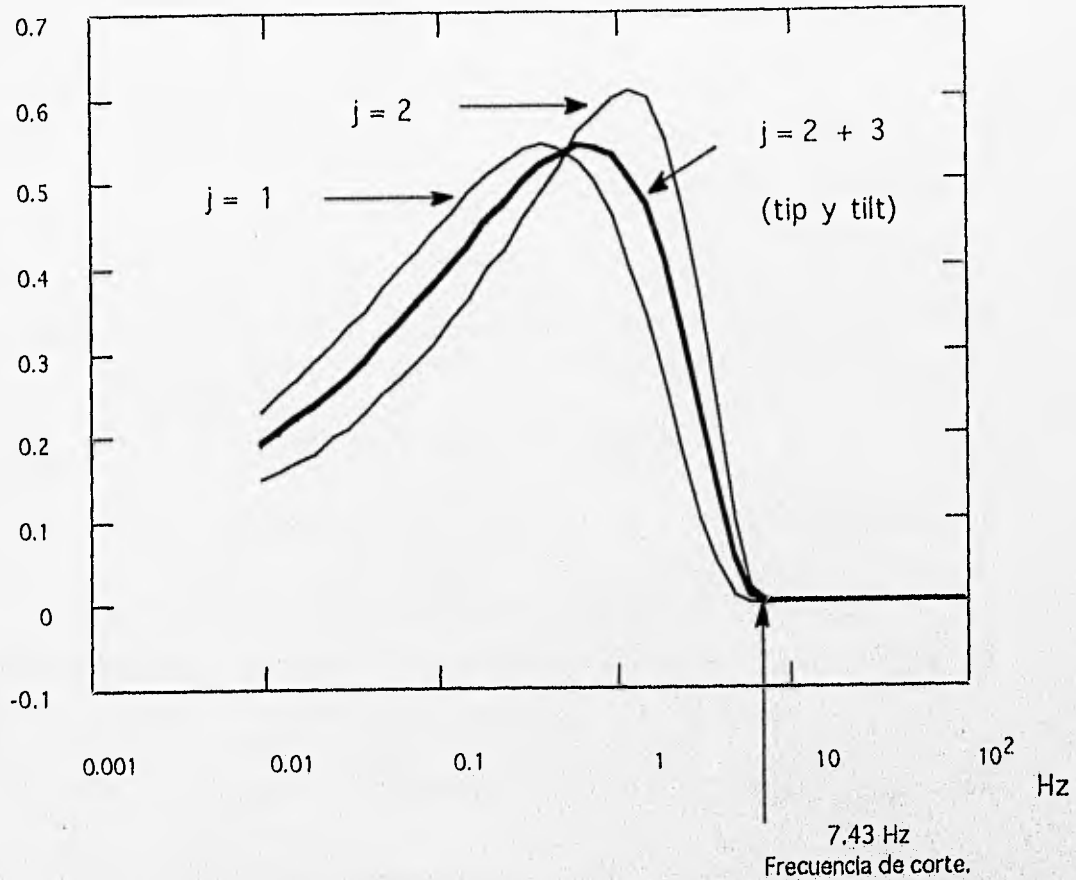


Figura 3.7. Ancho de banda temporal para las variaciones del frente de onda en tip y tilt.

Por lo tanto, el espectro espacial de potencia $W_a(f)$ de $a(r)$ está relacionado con el espectro espacial de potencia $W_\phi(f)$ de $\phi(r)$ por

$$W_a(f) = W_\phi(f) \cdot W_z(f), \tag{3.41}$$

donde $W_z(f)$ es el módulo al cuadrado de la transformada de Fourier de $z(r)$, y para un término de Zernike de grado n y frecuencia azimutal m se puede representar:

$$W_z(f) \propto \left| \frac{J_{n+1}(2\pi f)}{f} \right|^2 \begin{cases} \cos^2 m\theta \\ \text{sen}^2 m\theta \\ 1 \quad (m = 0) \end{cases} \tag{3.42}$$

donde f y θ son el módulo y el argumento del vector f . El comportamiento aproximado de $W_\phi(f)$ para un medio turbulento totalmente desarrollado en el intervalo inercial es (Roddier, 1981),

$$W_\phi(f) \propto f^{-11/3}, \tag{3.43}$$

por lo tanto $W_a(f)$ se puede escribir:

$$W_a(f) \propto f^{-17/3} |J_{n+1}(2\pi f)|^2 \begin{cases} \cos^2 m\theta \\ \text{sen}^2 m\theta \\ 1 \quad (m = 0) \end{cases} \quad (3.44)$$

La covarianza $C_a(\rho)$ de $a(r)$ está definida por:

$$C_a(\rho) = \langle a(r)a(r + \rho) \rangle. \quad (3.45)$$

De acuerdo con el teorema de Wiener-Kinchin (Papoulis, 1965), la covarianza espacial es la transformada inversa bidimensional de Fourier del espectro de potencia:

$$C_a(\rho) = \int W_a(f) \exp(2i\pi\rho \cdot f) df. \quad (3.46)$$

La covarianza temporal $C(\tau)$ de la señal del sensor $s(t)$ está dada por:

$$C(\tau) = \langle s(t)s(t + \tau) \rangle = \langle a(Vt)a(Vt + V\tau) \rangle = C_a(V\tau). \quad (3.47)$$

Usando las variables ξ y η , como componentes del vector ρ , $C_a(\rho)$ se puede escribir:

$$C_a(\rho) = C_a(\xi, \eta). \quad (3.48)$$

Entonces, la ecuación (3.45) puede ser escrita como:

$$C_a(\xi, \eta) = \int W_a(f_x, f_y) \exp[2i\pi(\xi f_x + \eta f_y)] df_x df_y, \quad (3.49)$$

donde f_x y f_y son las componentes del vector f que conjugan a ξ y η . Escogiendo a la componente ξ en la dirección de propagación del viento y combinando las ecuaciones (3.47) y (3.49) se obtiene:

$$\begin{aligned} C(\tau) = C_a(v\tau, 0) &= \iint W_a(f_x, f_y) \exp(2i\pi v f_x \tau) df_x df_y \\ &= \int df_x \exp(2i\pi v f_x \tau) \int df_y W_a(f_x, f_y), \end{aligned} \quad (3.50)$$

donde $v = |V|$ es la velocidad del viento. Introduciendo la frecuencia temporal $\nu = v f_x$ se tiene:

$$C(\tau) = \frac{1}{v} \int d\nu \exp(2i\pi\nu\tau) \int df_y W_a(\nu/v, f_y). \quad (3.51)$$

Por lo tanto, el espectro en frecuencia temporal $\Phi(\nu)$ de la señal del sensor $s(t)$, la cual es una transformada de Fourier unidimensional de la covarianza $C(\tau)$, está dada por:

$$\Phi(\nu) = \frac{1}{v} \int W_a(\nu/v, f_y) df_y. \quad (3.52)$$

Sustituyendo la ecuación (3.44) en la (3.52) se obtiene:

$$\Phi(\nu) \propto \frac{1}{\nu} \int df_y (\nu^2 v^2 + f_y^2)^{-17/6} \left| J_{n+1} \left[2\pi(\nu^2/v^2 + f_y^2)^{1/2} \right] \right|^2 \times \begin{cases} \cos^2 m\theta \\ \text{sen}^2 m\theta \\ 1 \quad (m=0) \end{cases} \quad (3.53)$$

Se puede obtener el espectro en frecuencia temporal $\Phi_j(\nu)$ para cada polinomio específico j de Zernike. La expresión (3.53) puede ser usada para calcular el espectro de potencia, numéricamente para varios valores de j . La gráfica de la figura 3.7 representa el espectro temporal del frente de onda para tip y tilt ($j = 2$ y 3 , $n = 1$ y $m = 1$) y ha sido normalizada de acuerdo a la siguiente ecuación

$$\frac{\nu \Phi_j(\nu)}{\int \Phi_j(\nu) d\nu} \quad (3.54)$$

Con esta normalización el área bajo la curva representa la energía total o varianza. La gráfica está expresada en Hertz y es específica para un telescopio de 2 m, debido a que la frecuencia ν está expresada en unidades de v/R , la velocidad usada fué de 10.0 m/s.

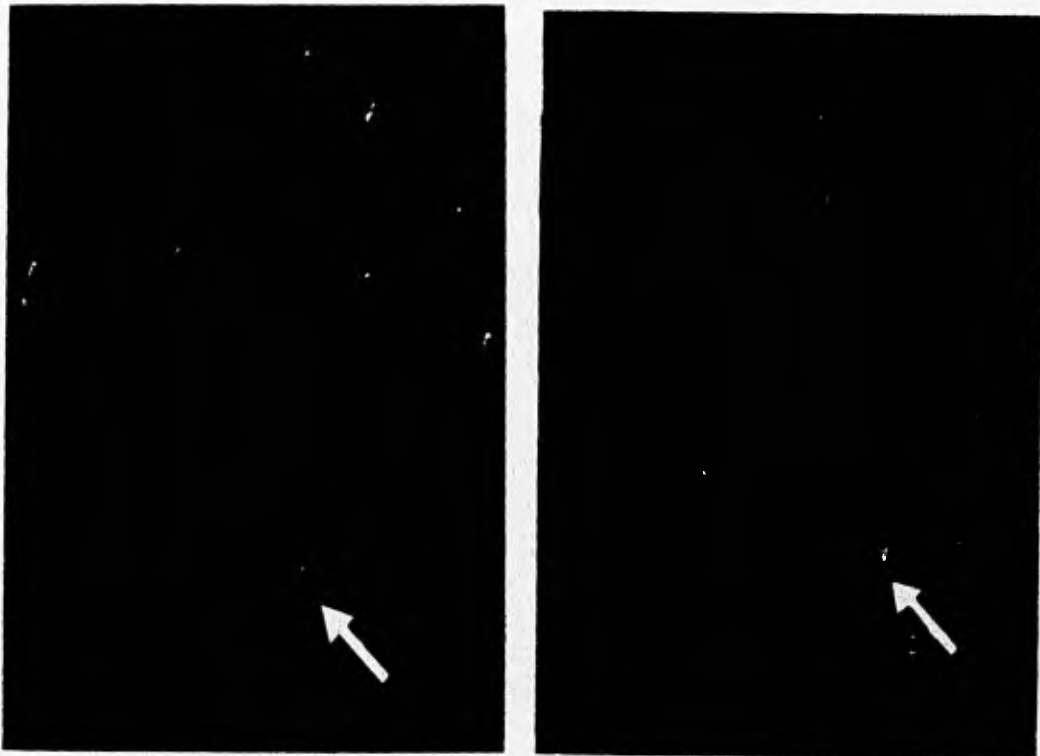


Figura 3.8. Imágenes de video consecutivas del "seeing" sobre la pupila del telescopio 2 m de SPM.

3.7.2 Medición aproximada de la velocidad del viento de la atmósfera en SPM.

En el IAUNAM, se cuenta con una filmación en video de la pupila del telescopio de 2 m de SPM, en la que se observa fácilmente el estrato atmosférico que contribuye con la mayor parte del "seeing". Se digitalizaron alrededor de 15 cuadros de video en los cuales se pudieron seguir estructuras de turbulencia acarreadas por el viento, con lo que se pudo evaluar la velocidad del viento que imperaba en esa noche de observación, que al parecer era una noche común. La figura 3.7 muestra una secuencia de dos cuadros de video, el primero corresponde a 1/30 s antes que el segundo y se encuentra marcada la misma estructura de turbulencia acarreada por el viento, la velocidad máxima fué de 8.7 m/s. Después del dato anterior, se consideró usar 10.0 m/s para obtener el ancho de banda del sistema, aplicando el modelo teórico de Roddier, *et. al.* (1993).

CAPÍTULO IV

El Sistema de Control

4.1 Introducción.

En este capítulo se presenta el análisis del sistema de control de óptica adaptativa, así como la simulación en computadora del mismo. Se obtienen los modelos matemáticos de los componentes del sistema, para así determinar el modelo global del sistema completo. Se estudia la factibilidad de su construcción a partir del análisis de sus respuestas, tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia.

4.2 Sistema de control.

Como se mencionó en el capítulo I, con la óptica adaptativa se pretende compensar, en tiempo real, los errores de fase producidos por la atmósfera terrestre, por medio del uso de componentes ópticos. El estudio del sistema de control se desarrolló alrededor de dos dispositivos fundamentales, el sensor de frente de onda, y el espejo de corrección; el primero, un fotodiodo de avalancha de cuatro cuadrantes (apéndice III) y el segundo un espejo de Tip-Tilt montado sobre tres transductores piezo-eléctricos (apéndice III). La figura 4.1 muestra el diagrama de bloques del sistema de control completo.

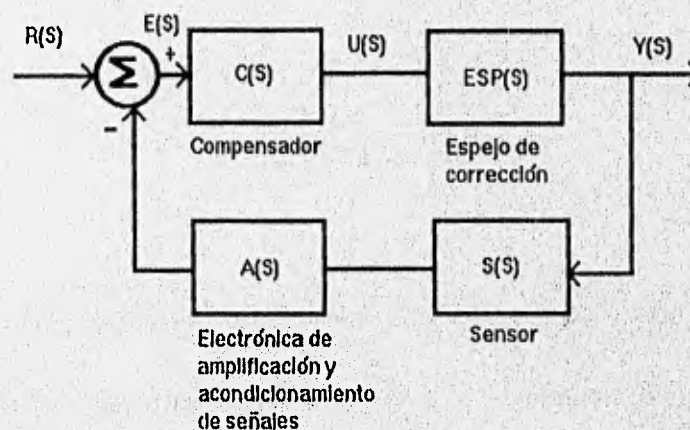


Figura 4.1. Diagrama de bloques del sistema de control.

4.3 Sensor de frente de onda.

La aberración de tilt, en el frente de onda óptico, debida a la turbulencia atmosférica terrestre, produce un desplazamiento de la posición de la imagen de la estrella en el detector astronómico. Para sensar los cambios en la posición de la imagen de la estrella, se propuso el uso de un fotodiodo de avalancha de cuatro cuadrantes.

Ya que la respuesta del sensor de frente de onda es mucho más rápida que los transductores aproximar su función de transferencia a una función usando como dato el tiempo máximo de levantamiento suministrado por los fabricantes (apéndice III).

$$S(s) = \frac{K}{s + P}. \quad (4.1)$$

La figura 4.2 muestra la respuesta típica a una señal escalón de un sistema de primer orden, si se considera el tiempo de levantamiento a partir de un 10 % y hasta un 90 % del valor final de la respuesta, la respuesta a escalón de un sistema de primer orden puede ser descrita por una función exponencial de la siguiente forma:

$$V_0(t) = V(1 - e^{-Pt}), \quad (4.2)$$

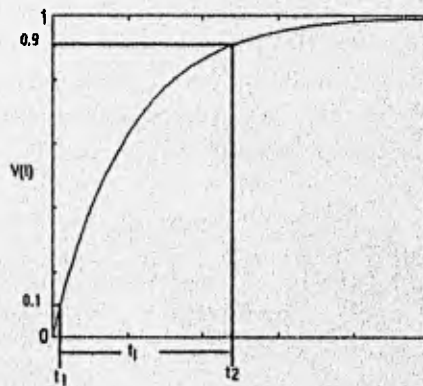


Figura 4.2. Respuesta a escalón típica de un sistema de primer orden.

y el tiempo de levantamiento puede ser descrito a partir de la ecuación (4.2) como sigue:

$$V(t_1) = V(1 - e^{-Pt_1}) = 0.1V, \quad (4.3)$$

$$V(t_2) = V(1 - e^{-Pt_2}) = 0.9V, \quad (4.4)$$

si el tiempo de levantamiento $t_l = t_2 - t_1$, entonces t_l es igual a:

$$t_l = \frac{\ln 0.9 - \ln 0.1}{P}, \quad (4.5)$$

y

$$P = \frac{\ln 0.9 - \ln 0.1}{t_l}, \quad (4.6)$$

donde las frecuencias de corte son: $\omega = P$ [rad/s] y $f_c = P/2\pi$ [Hz], y si $t_{lmax} = 4$ [ns] (apéndice 3),

$$f_c = 87.6 \text{ [MHz]}, \quad (4.7)$$

$$P = 545.5 \text{ [rad/s]}, \quad (4.8)$$

entonces la función de transferencia queda:

$$S(s) = \frac{545.5 \times 10^6}{s + 545.5 \times 10^6}, \quad (4.9)$$

donde $K = P$ para que la función sea normalizada.

4.4 Espejo de Corrección.

4.4.1 Análisis Estático, determinación de isosticidad.

Se hizo un análisis estático del espejo de corrección para determinar la posible dependencia mecánica que pudiera existir entre los transductores posiciones extremas. Al determinar la independencia mecánica entre ellos se simplificó el trabajo de identificación del espejo y el estudio del sistema completo.

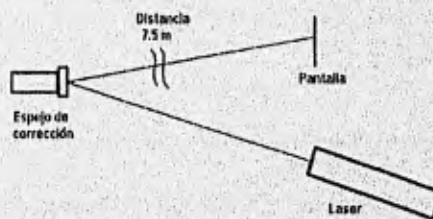


Figura 4.3. Análisis estático del espejo de corrección.

La figura 4.3 presenta la configuración óptica de la prueba, un haz de láser es proyectado al espejo de corrección y de éste a una pantalla en el cual se midieron los desplazamientos debidos a incrementos iguales en el voltaje.

Para poder determinar la independencia mecánica entre los transductores piezo-eléctricos se observó la repetitividad de posición de cada uno de ellos, graficando los datos de voltaje contra la posición medida directamente en la pantalla. Se tomó como base la curva de voltaje contra posición de cada transductor piezo-eléctrico, cuando los otros dos tenían una entrada de voltaje cero, y se comparó con las gráficas obtenidas cuando los otros dos transductores extremas fijas, o también en variación se encontró que el error en la repetitividad era menor al 5 %, la figura 4.4 muestra un ejemplo de esto.

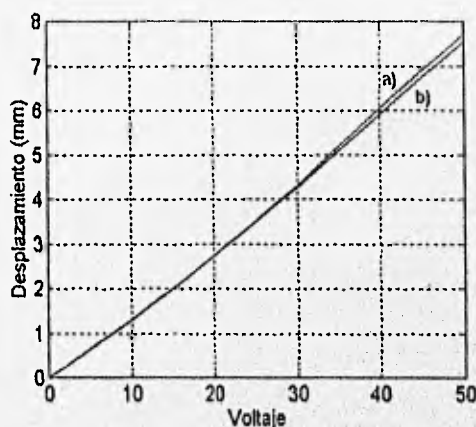


Figura 4.4. Gráfica de pruebas estáticas, a) curva base y b) curva de prueba.

4.4.2 Función de Transferencia del espejo de corrección.

El análisis del sistema de control está especialmente centrado en el espejo de corrección, que es el componente dominante en el ancho de banda del sistema. Se realizó una evaluación directa de la respuesta del espejo de corrección, a fin de determinar con mayor precisión su función de transferencia.

4.4.3 Análisis experimental del espejo de corrección.

Como se puede ver, en la descripción hecha del espejo de corrección (Physic Instrumente, 1992 y el apéndice III), existe la forma de sensar la posición del espejo a partir de las señales de salida de los sensores de extensión en el controlador. Sin embargo, estas señales están filtradas por su electrónica de amplificación y por los mismos sensores de extensión, lo que crea incertidumbre en la evaluación de los tiempos de respuesta del espejo.

4.4.4 Descripción de la prueba.

Se usó un láser y un detector bidimensional para evaluar la respuesta del espejo, digitalizando la señal de salida del detector para su análisis. La figura 4.5 muestra la configuración óptica de la prueba y el arreglo eléctrico para medir las señales. El haz de láser es proyectado al espejo y de éste al detector, donde es medido el desplazamiento del haz. Los fabricantes del detector (apéndice III) garantizan un intervalo de frecuencia desde C.D. hasta 30 kHz, lo que permitió confiar en las respuestas obtenidas, ya que los anchos de banda del espejo, dados por el fabricante son para señal grande hasta 500 Hz y para señal pequeña hasta 2 kHz (apéndice III). Fueron probados individualmente cada uno de los piezo-eléctricos del espejo con una señal escalón. La gráfica de la figura 4.6 muestra la respuesta a una señal escalón de uno de los tres transductores piezo-eléctricos.

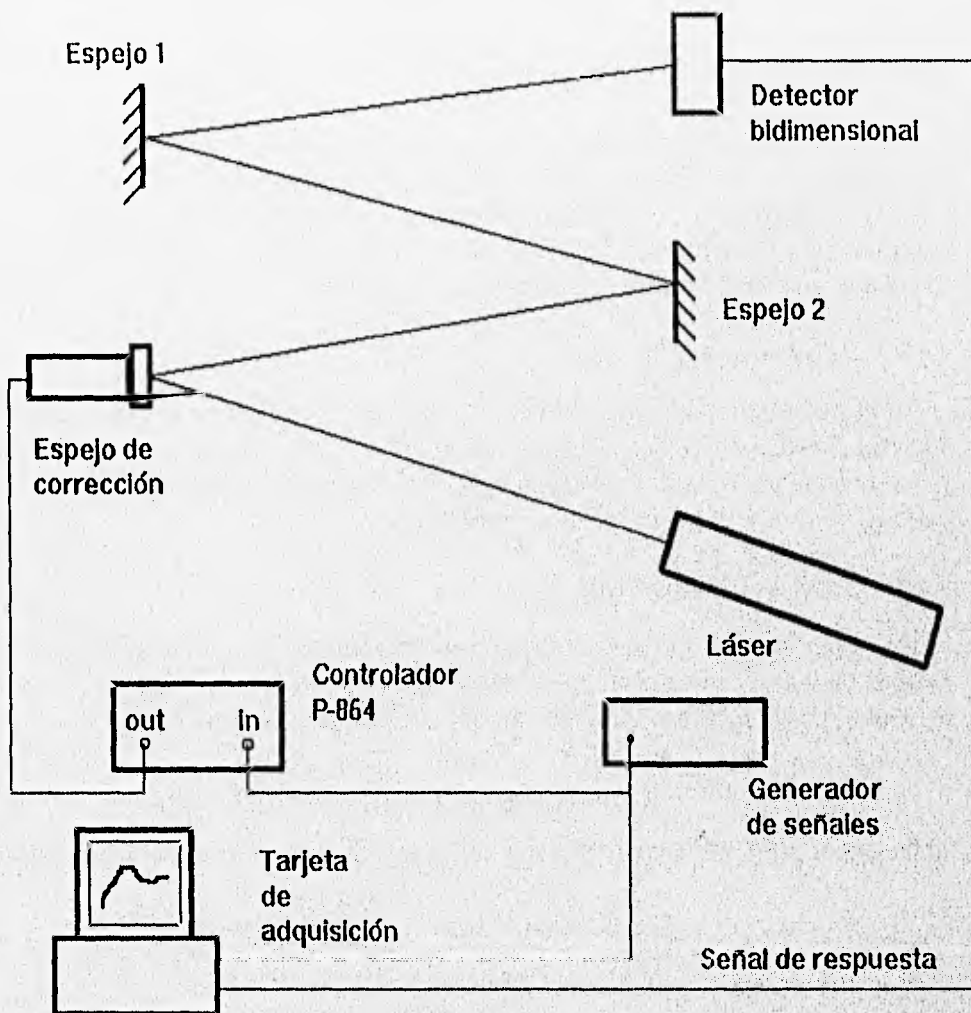


Figura 4.5. Prueba para la identificación del espejo de corrección.

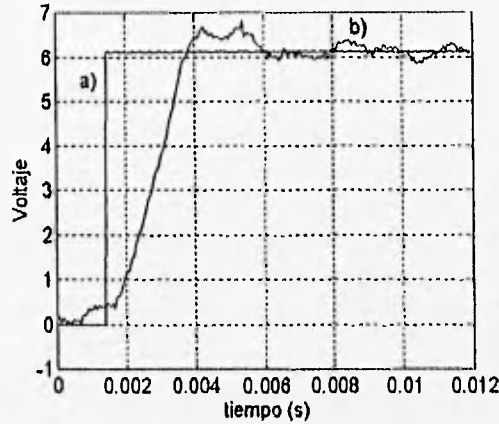


Figura 4.6. Respuesta a una señal escalón experimental.

Aunque el intervalo para las señales de entrada es de 0 a 10 V, se usó una señal un poco menor con el fin de no saturar el sistema del controlador del espejo de corrección en caso de sobrepaso. La configuración óptica fue hecha de tal modo que, aún con un desplazamiento máximo del haz, la iluminación en el detector estuviera siempre dentro de su zona de mayor linealidad (González *et. al.*, 1993).

4.4.5 Método de Identificación.

En el análisis de las respuestas de los sistemas a señales de prueba, especialmente en aquellos sistemas en los cuales no se tiene acceso fácilmente a sus características físicas, y que pueden ser considerados como una "caja negra", pueden ser aplicados los modelos paramétricos autorregresivos, en su identificación.

4.4.6 Modelos Autoregresivos.

Una gran clase de procesos estocásticos pueden ser generados mediante el manejo de sistemas lineales con ruido blanco. Partiendo de $e(k)$, $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$ como una señal de ruido blanco en el tiempo discreto, entonces un modelo generado por,

$$y(k) = e(k) + b_1 e(k-1) + \dots + b_n e(k-n), \quad (4.10)$$

se llama un promedio móvil (*moving average*) o modelo MA; el modelo generado por:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = e(k), \quad (4.11)$$

es una autoregresión o un modelo AR; el modelo

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = e(k) + b_1 e(k-1) + \dots + b_n e(k-n), \quad (4.12)$$

se llama un modelo ARMA; el modelo,

$$y(k) + a_1y(k-1) + \dots + a_ny(k-n) =$$

$$b_0u(k-d) + \dots + b_mu(k-d-m) + e(k) + c_1e(k-1) + \dots + c_ne(k-n), \quad (4.13)$$

se llama un modelo ARMAX, es decir, un modelo ARMA con una señal exógena (Åström, 1990).

4.4.7 Descripción de sistemas.

La configuración básica de entrada-salida en un sistema puede ser descrito con la figura 4.7., en la que se tiene una señal de entrada,

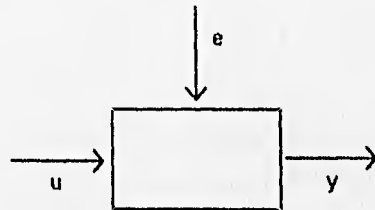


Figura 4.7. Configuración básica de entrada-salida.

$$u(t); t = 1, 2, \dots, N, \quad (4.14)$$

y una señal de salida,

$$y(t); t = 1, 2, \dots, N. \quad (4.15)$$

Suponiendo que las señales están relacionadas por una combinación lineal, se puede escribir:

$$y(t) = G(q)u(t) + v(t), \quad (4.16)$$

donde q es un operador de corrimiento y $G(q)u(t)$ es la forma corta de

$$G(q)u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)u(t-k), \quad (4.17)$$

y

$$G(q) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)q^{-k}; \quad q^{-1}u(t) = u(t-1), \quad (4.18)$$

$G(q)$, es la función de transferencia evaluada en un círculo unitario dado por la función de frecuencia,

$$G(e^{i\omega}). \quad (4.19)$$

En la ecuación (4.16), $v(t)$ es la perturbación no medida o ruido, que llega al sistema, y sus propiedades pueden ser expresadas en términos de su autoespectro,

$$\Phi(\omega), \quad (4.20)$$

el cual es definido por:

$$\Phi(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_v(\tau) e^{-i\omega\tau}, \quad (4.21)$$

donde $R_v(\tau)$ es la función de covarianza de $v(t)$:

$$R_u(\tau) = E \{u(t)v(t - \tau)\}, \quad (4.22)$$

donde E denota la esperanza matemática. Alternativamente, la perturbación $v(t)$ puede ser descrita como ruido blanco filtrado:

$$v(t) = H(q)e(t), \quad (4.23)$$

donde $e(t)$ es ruido blanco con varianza λ . En este caso se tiene:

$$\Phi_v(\omega) = \lambda |H(e^{i\omega})|^2. \quad (4.24)$$

Las ecuaciones (4.16) y (4.24) juntas dan la descripción en el dominio del tiempo del sistema:

$$y(t) = G(q)u(t) + H(q)e(t), \quad (4.25)$$

mientras que (4.19) y (4.20) constituyen la descripción en el dominio de la frecuencia:

$$G(e^{i\omega}); \quad \Phi_v(\omega). \quad (4.26)$$

Para poder estimar las funciones G y H a partir de la ecuación (4.25), a menudo tienen que ser parametrizadas como funciones racionales del operador de atraso q^{-1} .

El modelo paramétrico más usado es el modelo ARX que corresponde a:

$$G(q) = q^{-nk} \frac{B(q)}{A(q)}; \quad H(q) = \frac{1}{A(q)}, \quad (4.27)$$

donde B y A son polinomios del operador de atraso q^{-1}

$$A(q) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_{na}q^{-na}, \quad (4.28)$$

$$B(q) = b_1 + b_2q^{-1} + \dots + b_{nb}q^{-nb+1}, \quad (4.29)$$

na y nb son los grados de los polinomios respectivamente. El número nb es el número de atrasos de la entrada a la salida y el modelo se escribe usualmente como sigue:

$$A(q)y(t) = B(q)u(t - nk) + e(t), \quad (4.30)$$

o explícitamente

$$\begin{aligned} y(t) + a_1y(t-1) + \dots + a_{na}y(t-na) = \\ b_1u(t-nk) + b_2u(t-nk-1) + \dots + b_{nb}u(t-nk-nb) + e(t), \end{aligned} \quad (4.31)$$

4.4.8 Identificación del espejo de corrección.

A partir de la descripción (4.25) y de los datos de entrada-salida de un sistema, se puede calcular el error $e(t)$ de (4.25), y a partir de éste las funciones G y H :

$$e(t) = H^{-1}(q)[y(t) - G(q)u(t - nk)]. \quad (4.32)$$

El método paramétrico de identificación más común es suficiente para determinar estimaciones de G y H , mediante la minimización de

$$V_N(G, H) = \sum_{t=1}^N e^2(t), \quad (4.33)$$

es decir,

$$[\hat{G}_N, \hat{H}_N] = \underset{\text{argmin}}{\sum_{t=1}^N e^2(t)}. \quad (4.34)$$

Lo anterior es llamado método de predicción de error, para perturbaciones Gaussianas coincidentes con el método de máxima verosimilitud (Ljung, 1987).

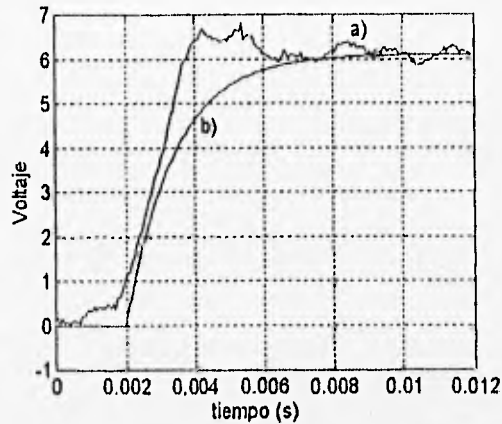


Figura 4.8. Respuesta del modelo ARX b), respuesta real a).

4.4.9 Obtención de las Funciones de Transferencia.

En la obtención del modelo matemático, de la función de transferencia, se aplicó un modelo paramétrico ARX, es decir, un modelo autoregresivo con una señal exógena. La figura 4.8 muestra la simulación de la respuesta de este primer modelo usando la misma señal prueba del análisis experimental digitalizada. Con la información en frecuencia, obtenida de este modelo, se hizo un ajuste mediante mínimos cuadrados para obtener los modelos matemáticos definitivos de los tres transductores piezo-eléctricos. En el apéndice IV, pueden ser vistos todos los modelos obtenidos de las funciones de transferencia en variable s , que van desde el orden cero, para el polinomio del numerador y orden uno para el polinomio del denominador, hasta orden cuatro en el numerador y denominador de la función de transferencia. Fue simulada la respuesta a la misma señal escalón y comparada con la respuesta experimental de cada una de estas funciones. A continuación, se muestran las funciones de transferencia elegidas para los tres transductores piezo-eléctricos, y las gráficas de las respuestas usando las funciones de transferencia elegidas (figura 4.9).

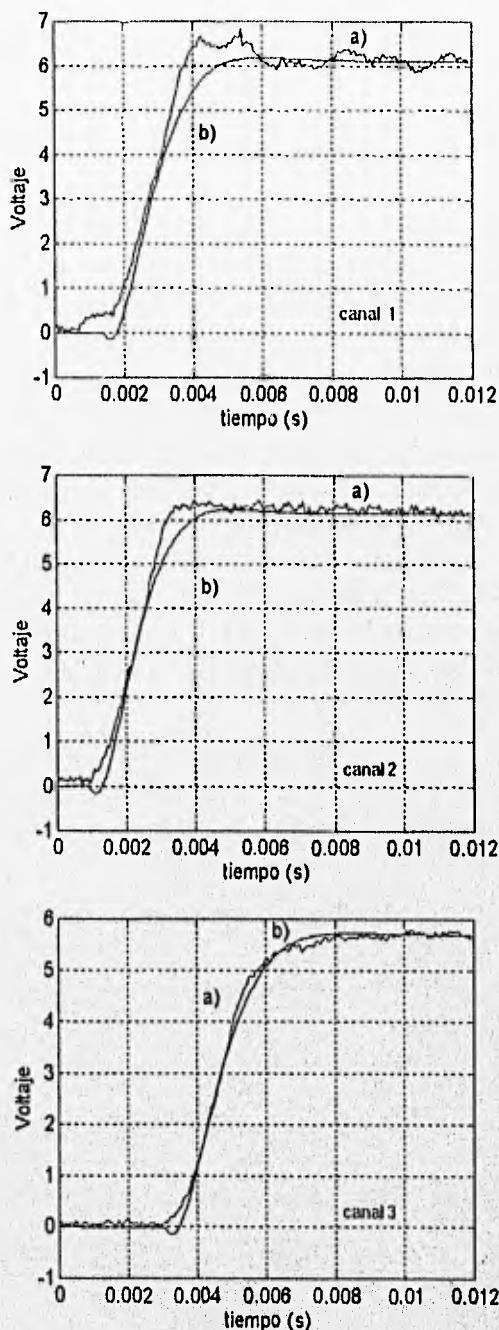


Figura 4.9. Respuestas de los modelos finales de los tres transductores piezo-eléctricos.

$$ESP_1(s) = \frac{-286.3s + 1.358 \times 10^6}{s^2 + 2038s + 1.541 \times 10^6}, \quad (4.35)$$

$$ESP_2(s) = \frac{-319s + 1.521 \times 10^6}{s^2 + 2095s + 1.714 \times 10^6}, \quad (4.36)$$

$$ESP_3(s) = \frac{-237.7s + 1.135 \times 10^6}{s^2 + 1954s + 1.317 \times 10^6}, \quad (4.37)$$

4.5 Electrónica de amplificación y acondicionamiento de señales.

Ya que el acoplamiento de las señales entre los dispositivos no es directa, es necesaria una etapa de amplificación y acondicionamiento de señales. El fotodiodo de avalancha, de cuatro cuadrantes, entrega a su salida cuatro señales, que deben ser usadas para determinar el movimiento de corrección del espejo. Debe existir otra etapa intermedia que a partir de las dos señales de corrección obtenga tres señales para los tres transductores piezo-eléctricos del espejo de corrección, a través de una transformación lineal.

Debido a que las transformaciones lineales pueden ser reducidas a operaciones algebraicas, esta etapa puede ser diseñada con electrónica analógica, y su función de transferencia puede ser reducida a un sistema de primer orden, con una frecuencia de corte una década arriba de la frecuencia de corte de la etapa dominante en el sistema, es decir, el espejo de corrección. De la figura 4.10 se puede ver que la frecuencia de corte es del orden de 100 Hz, por lo tanto, la frecuencia de corte de esta etapa puede situarse en 1 kHz quedando la función de transferencia como sigue:

$$A(s) = \frac{6.28 \times 10^3}{s + 6.28 \times 10^3}. \quad (4.38)$$

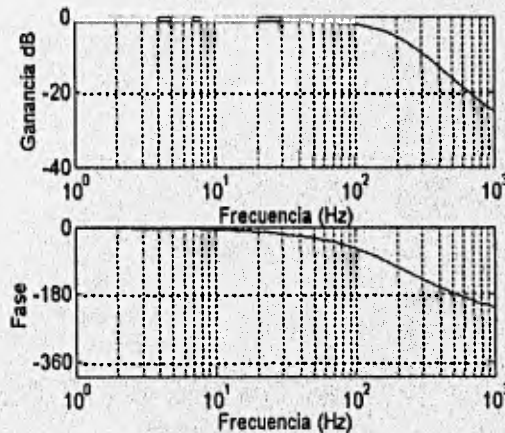


Figura 4.10. Diagrama de Bode del piezo-eléctrico 1.

4.6 El compensador del espejo de corrección.

Una etapa fundamental en el estudio del sistema de control es el compensador en el sistema. En el modelo del sistema de control completo se usó un compensador PID, debido a la factibilidad de aplicar los parámetros de diseño de este compensador en un circuito analógico y en sus versiones discretas en algoritmos de control en forma digital. Los parámetros K_c , T_i y T_d para un compensador PID se obtuvieron con cinco métodos distintos, después de evaluar su comportamiento se eligió un grupo de estos, para un reajuste y su final aplicación en el modelo del sistema completo

La figura 4.11 muestra el diagrama de bloques de un sistema de control sencillo en el cual es controlada una planta mediante un compensador PID (Rodríguez, 1994), donde:

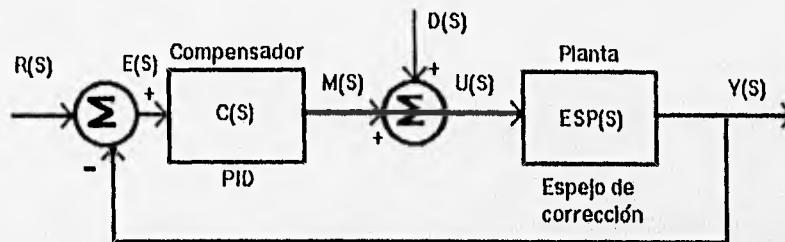


Figura 4.11. Lazo de control sencillo.

$R(S)$: Señal de referencia o punto de ajuste.

$E(S)$: Señal de error.

$M(S)$: Señal de salida del compensador.

$D(S)$: Señal de perturbación.

$U(S)$: Señal de control o variable manipulada.

$Y(S)$: Variable controlada.

El compensador de estructura ideal está caracterizado por la relación de entrada y salida siguiente:

$$M(s) = K_c \left[1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{T_\alpha + 1} \right] E(s), \tag{4.39}$$

y la ecuación que representa la función de transferencia del compensador es,

$$C(s) = K_c \left[1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{T_\alpha + 1} \right], \tag{4.40}$$

donde:

K_c : Constante de modo proporcional.

T_i : Tiempo de modo integral.

T_d : Tiempo de modo derivativo.

T_α : Constante de tiempo del filtro. esta constante T_α está definida por $T_\alpha = \frac{T_d}{N}$ donde N puede encontrarse entre los valores 3 y 20, en este trabajo fue usado $N = 10$.

4.6.1 Métodos de sintonización.

Aunque la sintonización de un compensador puede hacerse mediante tanteo y reajuste, llegando a un buen desempeño del mismo, existen métodos con los cuales se pueden obtener los parámetros de un compensador en forma directa. Con los parámetros de un compensador así obtenidos, se puede determinar la función de transferencia base de un compensador, que a pesar de que pudiera no cumplir con los requerimientos del diseño, esta función es un punto de partida para hacer reajustes mínimos hasta llegar a la función definitiva que cumpla con las características planteadas en el diseño.

4.6.2 Método de oscilaciones amortiguadas.

Este es uno de los métodos más simples para determinar los parámetros de diseño de un compensador, se utiliza un sistema como el de la configuración de la figura 4.12, el compensador en el proceso es proporcional, $ESP(s)$ corresponde a la función de transferencia de la planta, en este caso la función de transferencia del espejo de corrección. La ganancia del compensador se varía hasta que la respuesta a una señal escalón unitario es de la forma de la figura 4.13, donde la relación entre el primer y segundo sobre paso debe ser de 0.25, es decir $\frac{b}{a} = 0.25$, esta condición se logra cuando el factor de amortiguamiento relativo de los polos dominantes es de 0.2176. Quedando así el sistema caracterizado desde el punto de vista dinámico con la constante K_0 , que es el valor de la constante K de proporcionalidad para que el sistema retroalimentado responda a una señal escalón con las condiciones arriba mencionadas ($\frac{b}{a} = 0.25$), y T_0 es el periodo de oscilación de la respuesta. La tabla 4.1 muestra las fórmulas de sintonización para este método.

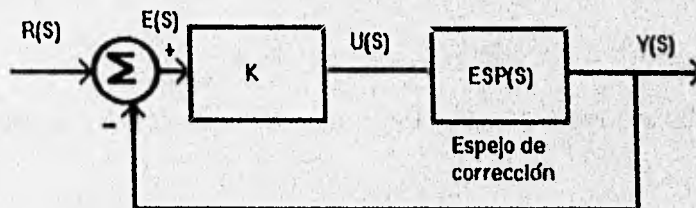


Figura 4.12. Diagrama de bloques del sistema usado para obtener los parámetros del compensador PID con el método de oscilaciones amortiguadas.

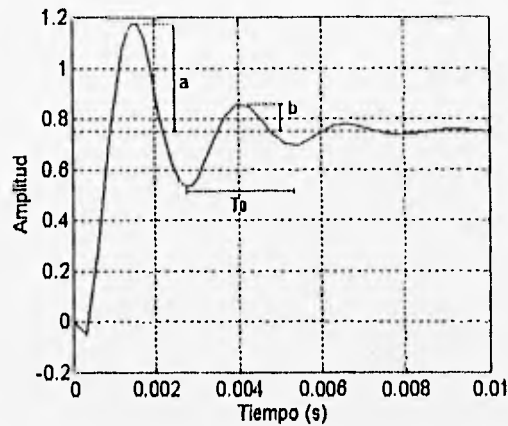


Figura 4.13. Respuesta del sistema aplicando el método de oscilaciones amortiguadas.

Tipo de compensador	K_c	T_i	T_d
P	K_0		
PI	K_0	T_0	
PID	K_0	$\frac{T_0}{1.5}$	$\frac{T_0}{6}$

Tabla 4.1. Fórmulas de sintonización para el método de Oscilaciones Amortiguadas.

4.6.3 Método de la curva reacción de Ziegler-Nichols.

Con este método los parámetros son obtenidos a partir de la respuesta a una señal escalón de la planta o proceso en lazo abierto. La figura 4.12 muestra la respuesta a una excitación escalón del transductor piezo-eléctrico en lazo abierto. En esta curva se determina el punto de inflexión con mayor pendiente y se traza una recta tangente a ella. La distancia desde el origen hasta el punto de intersección de esta recta con el eje del tiempo, representa el tiempo muerto T_m que caracteriza al sistema. Se obtiene también la pendiente R de la recta para el cálculo de los parámetros del compensador. En la tabla 4.2 se presentan las fórmulas de sintonización para obtener los parámetros del compensador

aplicables a la ecuación (4.40).

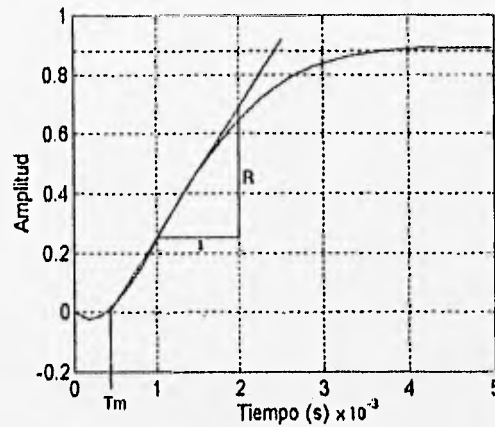


Figura 4.14. Respuesta a una señal escalón en lazo abierto.

Tipo de compensador	Kc	Ti	Td
P	$\frac{1}{RT_m}$		
PI	$\frac{0.9}{RT_m}$	$\frac{T_m}{0.2}$	
PID	$\frac{1.2}{RT_m}$	$\frac{T_m}{0.3}$	$0.8T_m$

Tabla 4.2. Fórmulas de sintonización Ziegler-Nichols.

4.6.4 Método de la curva de reacción Cohen-Coon.

Este método es bastante similar al método de curva de la reacción de Ziegler-Nichols. La planta a controlar es caracterizada por un sistema de primer orden con tiempo muerto donde su función de transferencia es:

$$ESP(s) = \frac{Ke^{-\Theta s}}{\tau s + 1}, \quad (4.41)$$

los parámetros K, Θ y τ se obtienen a partir de la respuesta a escalón en lazo abierto como se muestra en la figura 4.15, esta figura representa la respuesta a escalón en lazo abierto del espejo de corrección.

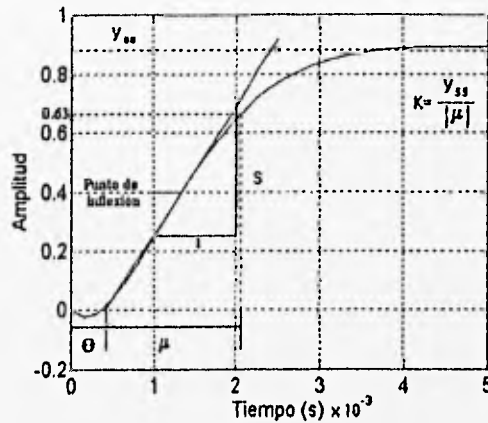


Figura 4.15. Curva de respuesta en lazo abierto del espejo de corrección para la obtención de los parámetros con el método de la curva de reacción Cohen-Coon, IAE e ITEA

Las siguientes ecuaciones son las expresiones de sintonización para obtener los parámetros de un compensador PID con el método de Cohen-Coon.

$$K = \frac{1}{K} \frac{\tau}{\Theta} \left[\frac{4}{3} + \frac{\Theta}{4\tau} \right], \tag{4.42}$$

$$Ti = \Theta \frac{32 + \frac{6\Theta}{\tau}}{13 + \frac{8\Theta}{\tau}}, \tag{4.43}$$

$$Td = \Theta \frac{4}{11 + \frac{2\Theta}{\tau}}. \tag{4.44}$$

4.6.5 Métodos de sintonización basados en criterios de desempeño.

Al igual que en el método de la curva de reacción Cohen-Coon se describe el proceso para un sistema de primer orden con tiempo muerto como el de la ecuación (4.41), y los parámetros K , Θ y τ se estiman a partir de la respuesta a una señal escalón del sistema en lazo abierto como la de la figura 4.15. El principio de este método es minimizar la función de error. En este trabajo fueron utilizadas dos formas de hacerlo, una a través de la minimización de la integral de la función error en valor absoluto (IAE), ecuación (4.45), y dos mediante la minimización de la integral de la función de error en valor absoluto multiplicada por el tiempo (ITAE), ecuación (4.46).

$$\int |e(t)| dt, \tag{4.45}$$

$$\int t |e(t)|^2 dt. \quad (4.46)$$

Los parámetros K , Θ , τ y las constantes a , b , c , d , e y f , de la tabla 4.3, se aplican en las siguientes expresiones (4.47 - 4.49) con las que se pueden obtener las funciones de transferencia de los compensadores PID con una estructura representada por la ecuación (4.40) y con una sintonización para entrada de referencia (Rodríguez, 1994).

$$Kc = \frac{a\left(\frac{\Theta}{\tau}\right)^b}{K}, \quad (4.47)$$

$$Ti = \frac{\tau}{c + d\left(\frac{\Theta}{\tau}\right)}, \quad (4.48)$$

$$Td = \frac{e\left(\frac{\Theta}{\tau}\right)^f}{\tau}. \quad (4.49)$$

Constante	IAE	ITAE
a	1.086	0.965
b	-0.869	-0.855
c	0.740	0.796
d	-0.130	-0.147
e	0.348	0.308
f	0.914	0.929

Tabla 4.3. Constantes de sintonización para los métodos basados en criterios de desempeño, IAE e ITAE.

4.6.6 Reajuste final de parámetros.

Con los cinco métodos antes descritos se obtuvieron los parámetros Kc , Ti y Td , mostrados en la tabla 4.4 de cinco distintos compensadores PID. Las gráficas de la figura 4.17 son las respuestas a una señal escalón en lazo cerrado con retroalimentación unitaria como el sistema representado por el diagrama de bloques de la figura 4.16, con las cinco diferentes versiones de compensadores PID. En la tabla 4.5 se presentan las características de respuesta del sistema con los distintos compensadores.

Método usado	Kc	Ti (ms)	Td (ms)
OA	3.45	1.83	0.459
Z-N	6.33	1.433	0.344
C-C	7.32	0.97	0.15
IAE	4.69	2.81	0.15
ITAE	4.08	2.62	0.15

Tabla 4.4. Parámetros de los compensadores PID obtenidos con cinco distintos métodos .

Características de respuesta	OA	Z-N	C-C	IAE	ITAE
Tiempo de retardo (ms)	0.35	0.27	0.37	0.48	0.53
Tiempo de levantamiento (ms)	0.27	0.08	0.19	0.38	0.44
Tiempo de pico (ms)	0.76	0.46	0.89	1.03	1.16
Tiempo de asentamiento (ms)	2.38	0.98	7.09	4.51	3.10
Sobrepaso (%)	0.6	59.1	97	31.3	26.8
Valor final (V)	1	1	1	1	1

Tabla 4.5. Características de la respuesta a una señal escalón de los compensadores PID.

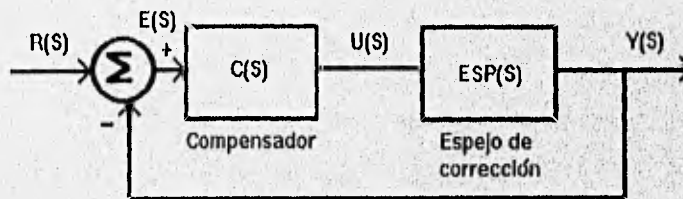


Figura 4.16. Lazo de control sencillo compensador-espejo con retroalimentación unitaria.

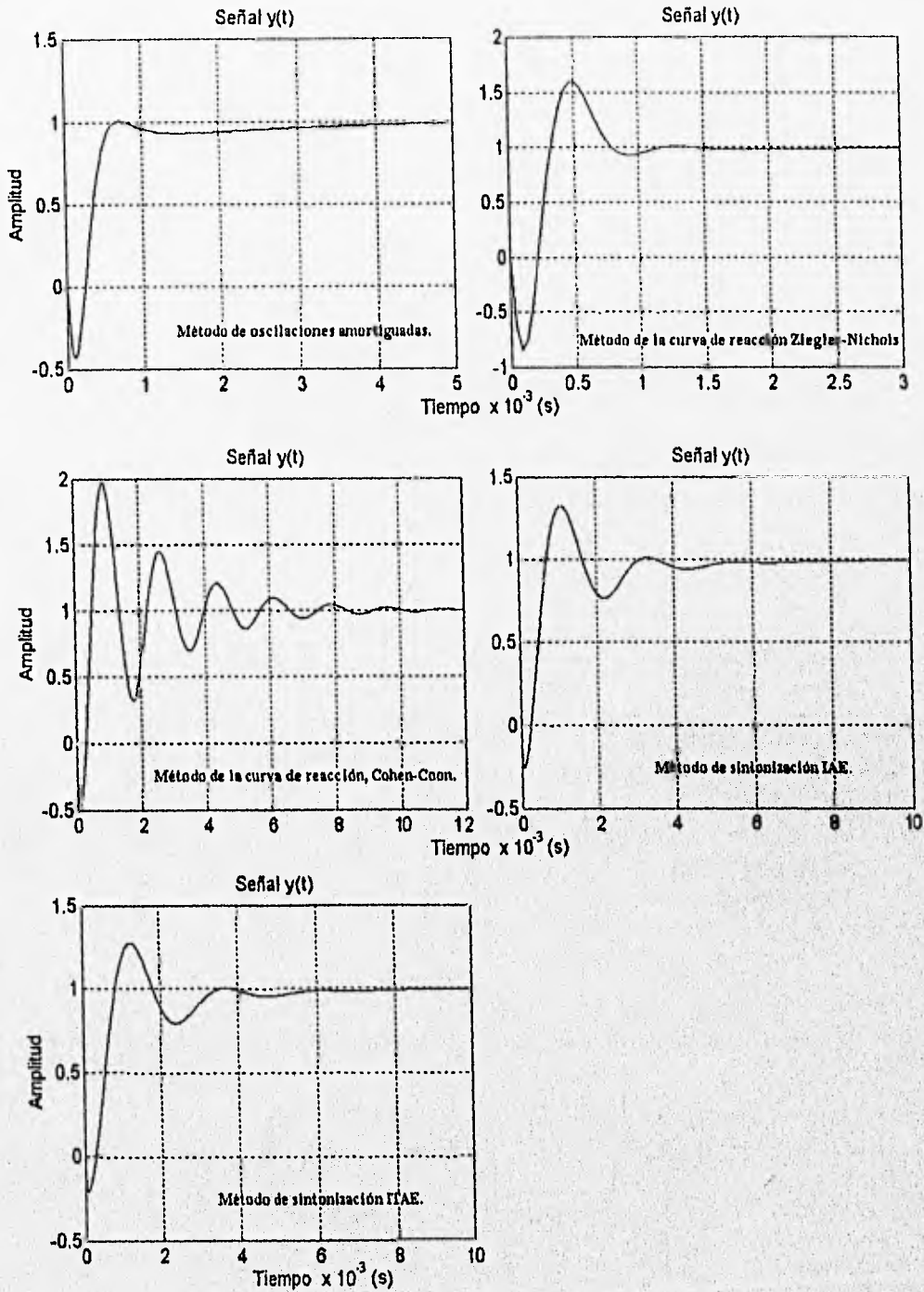


Figura 4.17. Respuestas a una señal escalón unitario del sistema con los cinco distintos compensadores PID

De la tabla 1.3 se tiene que el valor de las constantes de tiempo para las longitudes de onda de 1.25 y $2.2\mu m$ son de 30 y $60ms$ respectivamente, por lo tanto, la respuesta del sistema debe ser menor a $30ms$ y con un error máximo del 5% con respecto al valor final, lo que se traduce al mismo error del 5% en la posición del espejo de corrección.

Al observar las curvas de respuesta y sus características se puede notar que el sistema con los distintos compensadores, no cumple con las características adecuadas de funcionamiento; aunque el tiempo de asentamiento es bueno en los cinco casos, en general; el sobrepaso máximo es mucho más que un 5% . Se hizo un reajuste final en los parámetros del compensador PID, obtenidos con el método de oscilaciones amortiguadas, ya que fue el que presentó una mejor respuesta.

El reajuste final fue hecho con la variación sistemática de los parámetros K_c , T_i y T_d empezando primero con la constante proporcional o ganancia K_c hasta escoger un valor con el que la respuesta $y(t)$ fue aproximadamente adecuada. De igual forma, se continuó con T_i y T_d , manteniendo fijos los valores de parámetros para los que la señal $y(t)$ mostraba un mejor comportamiento, esto es fácil de observar en la figura 4.18 en la que se muestra este proceso con las diferentes señales de salida $y(t)$. Al final se llegó a los valores correspondientes a $0.2K_c$, $0.5T_i$ y $0.5T_d$ de los parámetros obtenidos con el método de oscilaciones amortiguadas, estos parámetros finales del compensador PID son mostrados en la tabla 4.6 y la respuesta $y(t)$ y la señal de control $u(t)$ pueden verse en la figura 4.19.

Parámetros finales	K_c	T_i (ms)	T_d (ms)
PID	0.79	0.915	0.230

Tabla 4.6. Parámetros finales para el compensador PID.

Es muy importante observar el comportamiento de la señal de control $u(t)$, ya que esta debe encontrarse dentro del intervalo de operación para las señales de entrada de los transductores-piezoeléctricos, con la finalidad de que éstos conserven sus características dinámicas. Dicho intervalo de operación no debe sobrepasar un 20% sobre el valor nominal máximo y un 20% menos del nivel mínimo (0.0) en amplitud de la señal de entrada (Apéndice III).

La señal $u(t)$ mostró siempre un impulso inicial excesivamente alto, como se ve en la figura 4.19, donde se muestran las gráficas de $y(t)$ y $u(t)$ finales. Este sobrepaso no cumple con las especificaciones para la señal de entrada del espejo de corrección y aunque se intentó reducir este efecto en algunas pruebas durante el proceso de reajuste, la señal $y(t)$ se veía muy afectada.

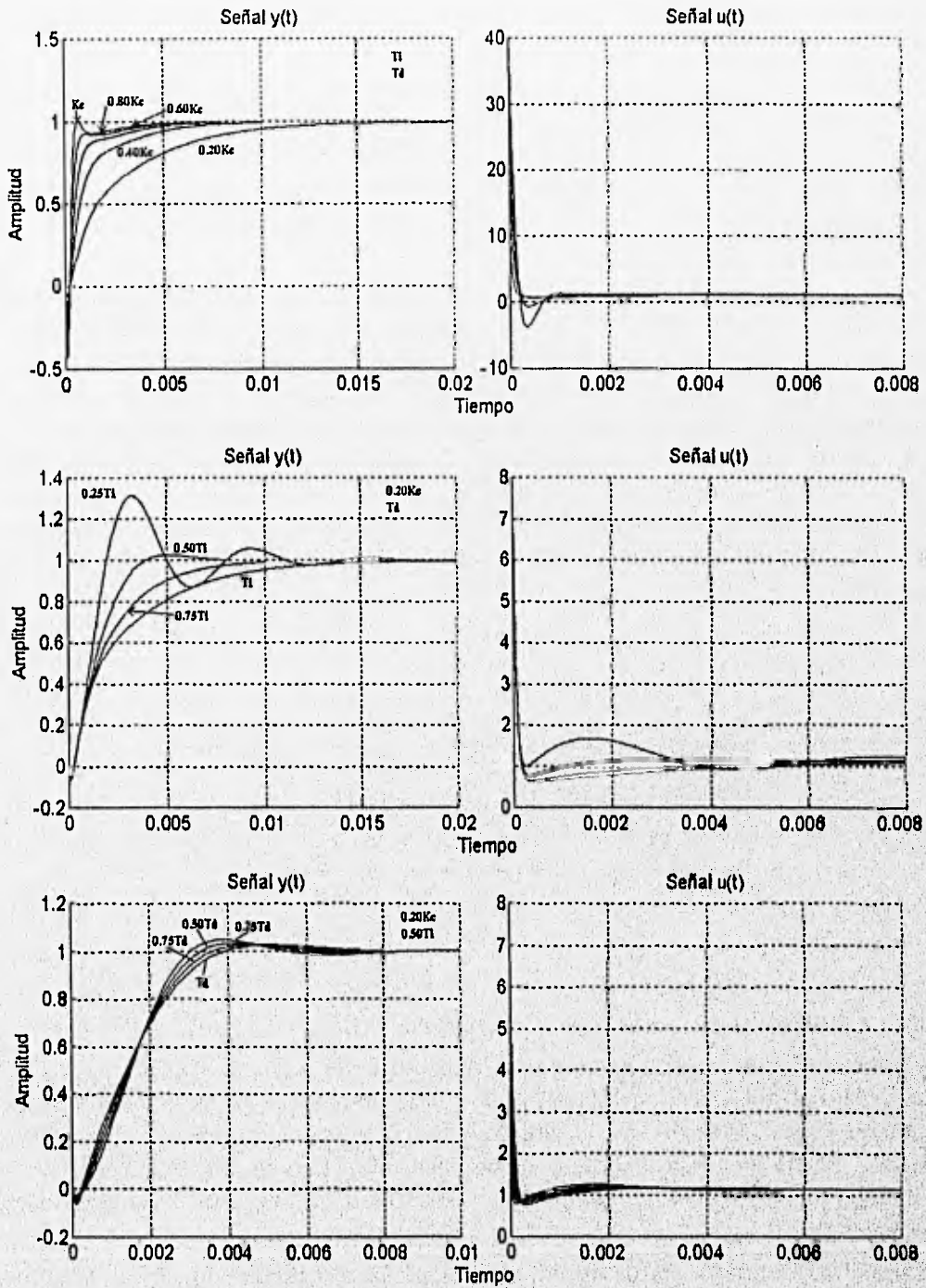


Figura 4.18. Respuestas a una señal escalón unitario durante el proceso de reajuste de parámetros

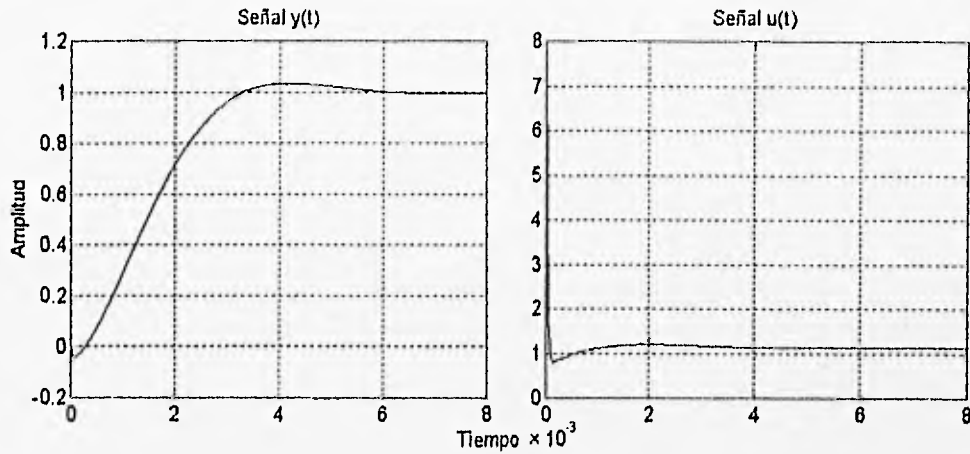


Figura 4.19. Respuesta final después del proceso de reajuste de parámetros

La electrónica del compensador puede ser fácilmente diseñada e implantada para que la señal $u(t)$ esté limitada por saturación al valor máximo permitido para la entrada del espejo de corrección (20 % sobre el valor nominal). En la figura 4.20 se muestran las señales $y(t)$ y $y_l(t)$, que es la señal de respuesta del sistema debida a una señal de control $u(t)$ saturada. Se puede observar que la diferencia entre $y(t)$ y $y_l(t)$ es mínima, la tabla 4.7 muestra las características de respuesta de las dos señales.

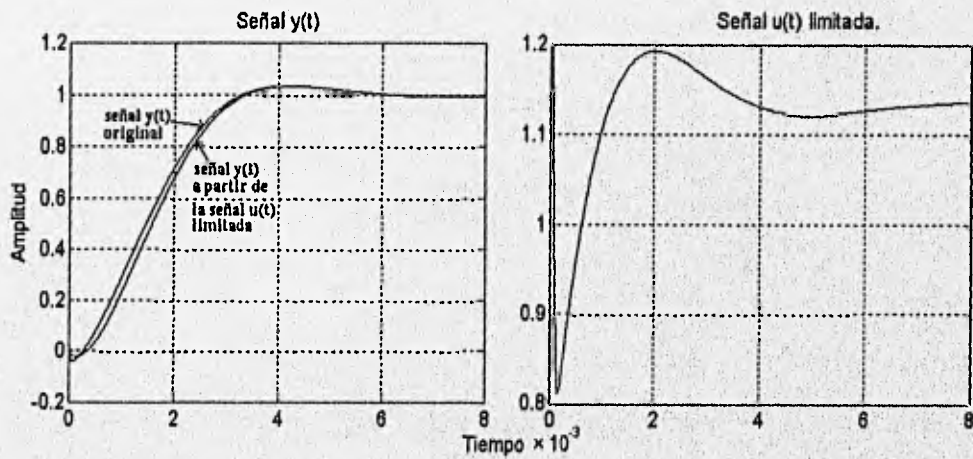


Figura 4.20. Respuesta final después del proceso de reajuste de parámetros, con la señal $u(t)$ limitada en amplitud

Características de respuesta	a) $y(t)$	b) $y_l(t)$
Tiempo de retardo (ms)	1.36	1.50
Tiempo de levantamiento (ms)	1.92	1.92
Tiempo de pico (ms)	3.93	4.10
Tiempo de asentamiento (ms)	2.59	2.80
Sobrepaso máximo (%)	4.8	4.63
Valor final (V)	1	1

Tabla 4.7. Características temporales en las respuestas a una señal escalón del sistema final ajustado a) usando la señal $u(t)$ original y b) la señal $u(t)$ saturada.

4.7 Sistema Completo.

A partir de las funciones de transferencia de cada uno de los elementos en el sistema de control se puede hacer un análisis del comportamiento esperado del sistema completo de la figura 4.1. La función de transferencia del sistema completo en lazo cerrado es la siguiente:

$$G(s) = \frac{-0.04488s^5 - 2.448 \times 10^7 s^4 - 1.37 \times 10^{11} s^3 + \dots}{0.00002295s^6 + 1.252 \times 10^4 s^5 + 6.496 \times 10^8 s^4 + 4.563 \times 10^{12} s^3 + \dots} \quad (4.50)$$

$$\frac{\dots + 4.706 \times 10^{14} s^2 + 2.799 \times 10^{18} s + 3.157 \times 10^{21}}{\dots + 8.048 \times 10^{15} s^2 + 7.575 \times 10^{18} s + 3.157 \times 10^{21}}$$

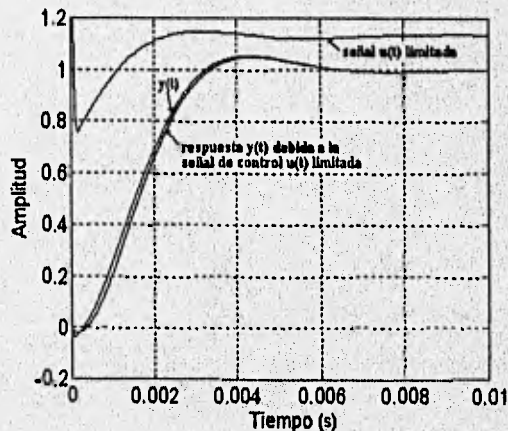


Figura 4.21. Respuesta $y(t)$ a una señal escalón, la señal de control $u(t)$ y el error esperado del sistema completo.

La figura 4.21 representa la respuesta $y(t)$ del sistema a una entrada escalón y el error $e(t)$ esperado. A continuación se listan en la tabla 4.8 las características temporales en la respuesta a una señal escalón del sistema completo:

Características de respuesta	P
Tiempo de retardo (ms)	1.53
Tiempo de levantamiento (ms)	2.09
Tiempo de pico (ms)	4.29
Tiempo de asentamiento (ms)	4.51
Sobrepaso máximo (%)	5.0
Valor final (V)	1

Tabla 4.8. Características temporales en la respuesta a una señal escalón del sistema completo.

La tabla 4.9 lista (datos tomados de la tabla 1.3) las constantes de tiempo para distintas longitudes de onda y áreas de coherencia, lo que permite hacer una comparación con los tiempos de respuesta del sistema.

λ	r_o	Cte. de tiempo
(μm)	(cm)	(ms)
0.5	10	10
0.9	20	20
1.25	30	30
2.2	60	60

Tabla 4.9. Constantes de tiempo para distintas longitudes de onda.

Del análisis de la respuesta en frecuencia se puede determinar, con mayor precisión la estabilidad del sistema, al considerar que el sistema es estable ya que su margen de fase es positivo y su margen de ganancia es positivo (25.87 dB), la figura 4.22 muestra el diagrama de Bode del sistema completo.

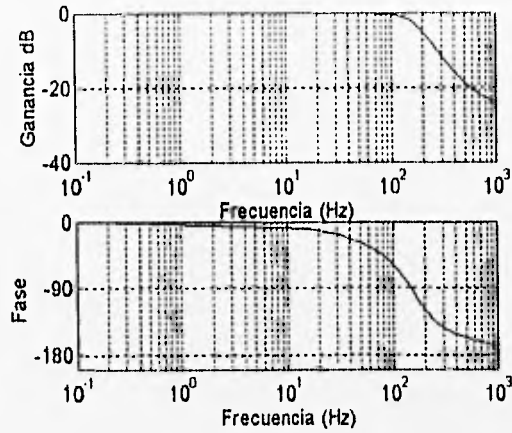
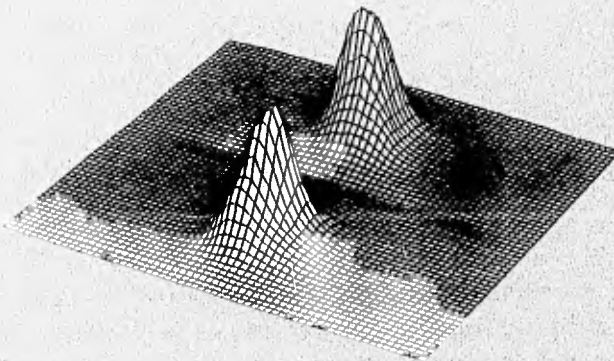


Figura 4.22. Diagrama de Bode del sistema completo.

4.8 Conclusión.

A partir de los datos de la tabla 4.8 y la 4.9 (datos tomados de la tabla 1.3) se puede concluir la factibilidad del desarrollo del sistema de control para óptica adaptativa, ya que la característica temporal principal del sistema de control, el tiempo de asentamiento del sistema, es de 4.51 ms , siendo la constante de tiempo para una longitud de onda $1.25 \mu\text{m}$ de 30 ms . Tomando en cuenta que, además, el tiempo de levantamiento del sistema es de 2.09 ms , y que la respuesta en este intervalo de tiempo tiene la misma tolerancia de 5% del valor final que el tiempo de establecimiento, se puede decir que dentro de esa tolerancia el sistema responde en 2.09 ms .



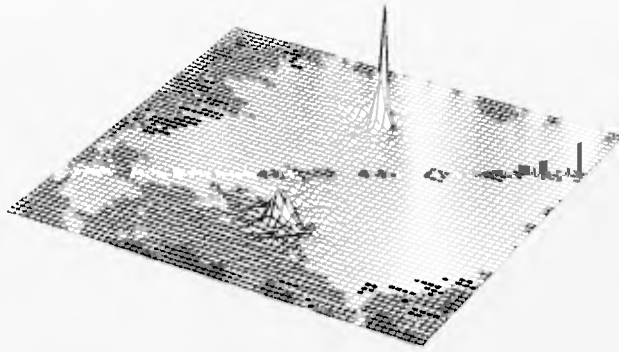


Figura 4.23. a) Imagen a largo tiempo de exposición, b) imagen desplazada y sumada respecto a su centride.

En una observación reciente en el telescopio de 2.12 m en el OAN SPM (Baba *et.al.*, 1995), se reporta la factibilidad de la aplicación de un sistema de óptica adaptativa corrigiendo unicamente tip y tilt. La figura 4.23 muestra los gráficos de estrellas binarias separadas $22''$, la figura 4.23 a), corresponde a una imagen obtenida a largo tiempo de exposición, donde el FWHM ("Full Width at Half Maximum") de la estrella de la izquierda es de $1.1''$, para obtener la imagen de la figura 4.23 b) fueron tomadas una serie de imágenes a cortos tiempos de exposición, luego estas imágenes fueron desplazadas y sumadas con respecto a su centroide. La imagen de la izquierda de la figura 4.23 b) tiene un FWHM de $0.35''$ lo que es un mejoramiento en la resolución de la imagen de un factor aproximado de 3. Los datos anteriores fueron obtenidos con procesamiento posterior a la obtención de las imágenes, pero permite establecer la factibilidad de la realización de un sistema de óptica adaptativa en tiempo real.

CONCLUSIONES

La finalidad de esta tesis fue determinar la factibilidad en el desarrollo de un sistema de óptica adaptativa para el telescopio de 2 m del Observatorio Astronómico Nacional en San Pedro Mártir, B.C. Mex., para la corrección de las imágenes distorsionadas por la turbulencia atmosférica en los dos primeros órdenes de aberración de los polinomios de Zernike, "tip y tilt".

A partir de la teoría de Kolmogorov y los polinomios de Zernike, se modeló un frente de onda correspondiente a un telescopio de 2 m, distorsionado por la turbulencia atmosférica y se determinaron las características espaciales del sistema al evaluar la capacidad de corrección necesaria para que el sistema de óptica adaptativa lograra una mejoría en las imágenes distorsionadas, presentando un modelo de respuesta en el tiempo de las aberraciones de un frente de onda atmosférico, el cual se adaptó a un telescopio de 2 m en las aberraciones de "tip y tilt" y se obtuvo el espectro temporal del frente de onda para dichas aberraciones.

Después del análisis óptico y temporal de la turbulencia atmosférica, se concluyó que se pueden corregir los dos primeros órdenes de aberración, "tip y tilt", en un telescopio de 2 m para las longitudes de onda entre 1.25 y 2.2 μm en el cercano infrarrojo, incrementando al doble la frecuencia espacial de corte en las funciones de transferencia ópticas del telescopio. De hecho, al corregir "tip y tilt" en 2.2 μm las imágenes prácticamente están limitadas por difracción.

En el análisis del sistema de control se obtuvo el modelo matemático del sistema completo, a partir del modelo de cada uno de sus componentes. La identificación del espejo de corrección se hizo aplicando un proceso autoregresivo en el análisis de sus respuestas a señales de prueba, obteniéndose así, las funciones de transferencia de los tres transductores-piezoelectricos. Se decidió usar como compensador del sistema un compensador PID. Fueron aplicados cinco distintos métodos para determinar su función de transferencia, eligiendo la de mejor comportamiento, además de un posterior reajuste hasta que el sistema cumpliera con los requerimientos de respuesta.

La respuesta del sistema control completo, en la simulación del modelo matemático final del sistema, cumple ampliamente con los requerimientos establecidos durante el análisis. El tiempo de asentamiento del sistema es del orden de 5 ms y las constantes de tiempo para las áreas de coherencia en la atmósfera son de 30 y 60 ms para 1.25 μm y 2.2 μm de longitud de onda respectivamente, lo que permitiría hacer cerca de 6 correcciones en 1.25 μm y más en 2.2 μm . La frecuencia de corte del espectro temporal de la atmósfera para las aberraciones de "tip y tilt" está cerca de los 8 Hz quedando éste dentro de la respuesta en frecuencia del sistema.

Una de las preguntas sin resolver, cuando este trabajo comenzó, era la referente a saber qué tanto la óptica del telescopio, permitiría hacer correcciones con óptica adaptativa, de-

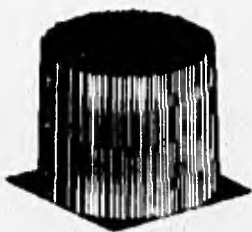
bido a que se desconocía con precisión la calidad óptica del telescopio, y si las aberraciones propias del telescopio serían mayores a las producidas por la atmósfera terrestre. El grupo de óptica del Instituto de Astronomía de la UNAM realizó múltiples pruebas, clásicas y modernas, con la finalidad de medir la superficie del espejo primario del telescopio. Después de un análisis y discusiones al respecto, en el IAUNAM se formó un grupo de óptica activa el cual realizó notables mejoras a la óptica del telescopio de 2 m. En el presente, las aberraciones en la óptica del telescopio son mucho menores a las aberraciones esperadas debidas a la turbulencia atmosférica, por lo tanto, es posible aplicar un sistema de óptica adaptativa.

Actualmente, el sistema está siendo montado en los laboratorios de óptica y ensamble mecánico del IAUNAM, donde se harán pruebas preeliminares para sus posteriores pruebas en el telescopio. Este proyecto es la primera fase en un proyecto de óptica adaptativa que ya se empezó a desarrollar en el IAUNAM, con el cual se contempla corregir más órdenes de Zernike.

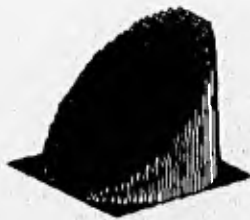
APÉNDICE I

Gráficas de algunos polinomios de Zernike.

A continuación se presentan las gráficas de algunos polinomios de Zernike, éstas pueden ser comparadas con la tabla 3.1 del capítulo III.



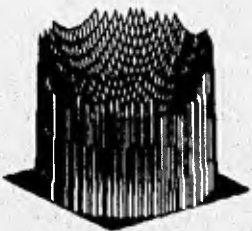
Z_0 (Pistón)



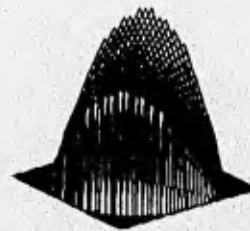
Z_1 (Tlp)



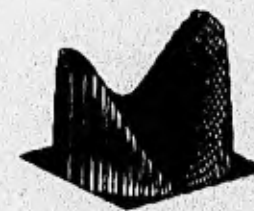
Z_2 (Tm)



Z_3 (Desenfoque)



Z_4 (Astigmatismo)



Z_5 (Astigmatismo)

APÉNDICE II

II.1 Los teoremas de convolución y de autocorrelación en el espacio de la transformada de Fourier.

II.1.1 El teorema de convolución.

La integral de convolución de dos funciones $g_1(x, y)$ y $g_2(x, y)$ es representado por $g_1(x, y) * g_2(x, y)$ y está definida como (Lathi, 1987):

$$g_1(x, y) * g_2(x, y) = \int \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi, \eta) \cdot g_2(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta. \quad (AII.1)$$

La propiedad de convolución establece que si:

$$\mathbf{F} \{g_1(x, y)\} = \hat{g}_1(u, v) \quad \text{y} \quad \mathbf{F} \{g_2(x, y)\} = \hat{g}_2(u, v),$$

entonces:

$$\mathbf{F} \{g_1(x, y) * g_2(x, y)\} = \hat{g}_1(u, v) \cdot \hat{g}_2(u, v), \quad (AII.2)$$

$$\mathbf{F} \left\{ \int \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi, \eta) \cdot g_2(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \right\} = \hat{g}_1(u, v) \cdot \hat{g}_2(u, v). \quad (AII.3)$$

II.1.2 El teorema de autocorrelación.

Si para una función $g(x, y)$ se tiene que:

$$\mathbf{F} \{g(x, y)\} = \hat{g}(u, v),$$

entonces la autocorrelación de la función está dada por:

$$\mathbf{F} \{|g(\xi, \eta)|^2\} = \int \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\xi, \eta) \hat{g}^*(\xi + u, \eta + v) d\xi d\eta, \quad (AII.4)$$

este teorema puede ser considerado como un caso especial del teorema de convolución (Lathi, 1987).

II.3 El promedio de conjunto estadístico.

Una variable aleatoria x está enteramente definida por su densidad de probabilidad $P(x)$. Si la densidad de probabilidad $P(x)$ es una función continua, las esperanzas matemáticas son calculadas por :

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xP(x)dx, \quad (AII.5)$$

donde la integral es sobre el conjunto de los reales, y de manera general, se tiene que el promedio de conjunto estadístico de una función se determina con (Barlow, 1989):

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)P(x)dx. \quad (AII.6)$$

APÉNDICE III

Datos Técnicos de algunos dispositivos.

III.1 Fotodiodo de avalancha de cuatro cuadrantes.

Características eléctricas (a $T = 22^{\circ}C$).

	Min	Typ	Max	Unidades
Voltaje de corte V_{ER}	350	425	485	V
Coefficiente de temperatura de V_R para ganancia constante		2.4		$V/^{\circ}C$
Respuesta: C30927E-03 a 800 nm	45	55		A/W
Eficiencia cuántica: C30927E-03 a 800 nm		85		%
Corriente oscura total I_d		0.1	0.2	μA
Ruido en corriente total i_n todos los cuadrantes $f=10kHz \Delta f = 1.0Hz$		3	1.5	$pA/Hz^{1/2}$
Capacitancia: Todos los cuadrantes		3	5	pF
Entre cuadrantes			0.5	pF
Resistencia entre cuadrantes paralelos	8		50	$k\Omega$
Resistencia en serie			15	Ω
Tiempo de levantamiento T_l		3	4	ns
Tiempo de descenso		3	4	ns

III.2 Controlador de piezo-electricos P-864.

Descripción general.

El controlador de piezoeléctricos P-864 tiene 3 canales amplificadores independientes con una potencia de salida de 6 Watts cada uno. Una señal analógica de entrada es amplificada como una señal de potencia para la retroalimentación.

Modos de operación:

El voltaje de salida del controlador de piezo-eléctricos puede ser controlada de disitintas maneras:

Operación manual:

El voltaje de operación para el TPZ puede ser alimentado manualmente por medio del nivel de CD en el potenciómetro de la parte frontal del controlador. En este modo de operación, el intervalo de voltaje de entre 0 y 100V puede ser ajustado manualmente sin requerir de una entrada de voltaje exterior.

Operación con una entrada externa analógica:

El voltaje de operación para los TPZ es controlado por una señal de entrada analógica externa en un intervalo de voltaje de 0 a 10V. El nivel de CD del potenciómetro debe ser cero, ya que una señal de entrada de 0V corresponde una señal de salida de 0V, y una señal de entrada de 10V corresponde a una señal de salida de 100V. Los límites de voltaje están en el intervalo -20 a +120V para lo que se requiere un señal de entrada de -2 a +12V.

III.3.2 El espejo de tilt.

El espejo de tilt S-320 fue especialmente diseñado para aplicaciones en óptica adaptativa. Como resultado de sus especificaciones generales, esta unidad puede ser usada en operaciones de posicionamiento. La cara frontal, sobre la cual el espejo puede ser pegado, descansa sobre 3 transductores piezo-eléctricos los cuales pueden ser individualmente controlados. Cada uno de los piezo-eléctricos está equipado con un sensor de extensión (*strain gauge*) y puede ser operado en lazo cerrado. El resorte integrado en el soporte cilíndrico sirve de guía en el movimiento de la pared frontal y precarga a los transductores piezo-eléctricos (Physic Instrumente, 1992a). Aunque el catálogo del fabricante declara que esta construcción permite un movimiento lineal de la parte frontal y una inclinación sobre dos ejes, dependiendo de la operación individual de los transductores piezo-eléctricos, se encontró que la distribución geométrica de los transductores piezo-eléctricos no permite esto sin una transformación adecuada antes, ya que los piezo-eléctricos se encuentran distribuidos a 120 grados sobre el plano de la parte frontal.

Datos técnicos:

Dimensiones físicas: diam 20 mm, length 40 mm

Soporte cilíndrico: acero inoxidable, Invar

Movimiento axial: 10 μ m

Angulo de tilt: 1 mrad en cada eje

Resolución: 50 nm (5 μ rad)

Linealidad: mejor que 0.5 %

Ancho de banda: señal grande 500 Hz

Señal pequeña: 2 kHz

APÉNDICE IV

Modelos matemáticos del espejo de corrección.

I.1 Funciones de transferencia del Canal 1.

$$\frac{-0.01215s + 401.5}{s + 425.8}$$
$$\frac{-286.3s + 1.358 \times 10^6}{s^2 + 2038s + 1.541 \times 10^6}$$
$$\frac{-7.04 \times 10^{16}s + 3.138 \times 10^{20}}{s^3 + 2.438 \times 10^{14}s^2 + 4.55 \times 10^{17}s + 3.568 \times 10^{20}}$$
$$\frac{-8.441 \times 10^{24}s + 3.585 \times 10^{28}}{s^4 + 5.57 \times 10^{18}s^3 + 2.814 \times 10^{22}s^2 + 5.582 \times 10^{25}s + 3.924 \times 10^{28}}$$
$$\frac{0.008806s^2 - 306.8s + 1.393 \times 10^6}{s^2 + 2021s + 1.573 \times 10^6}$$
$$\frac{1.246 \times 10^{12}s^2 - 4.328 \times 10^{16}s + 1.843 \times 10^{20}}{s^3 + 1.393 \times 10^{14}s^2 + 2.575 \times 10^{17}s + 2.085 \times 10^{20}}$$
$$\frac{1.429 \times 10^{18}s^2 - 1.766 \times 10^{22}s + 6.634 \times 10^{25}}{s^4 + 8.719 \times 10^{15}s^3 + 4.712 \times 10^{19}s^2 + 9.818 \times 10^{22}s + 7.178 \times 10^{25}}$$
$$\frac{-0.01494s^3 + 503.4s^2 - 2.8 \times 10^7s + 7.38 \times 10^{11}}{s^3 + 3085s^2 + 1.808 \times 10^9s + 7.693 \times 10^{11}}$$
$$\frac{-405.2s^3 + 5.728 \times 10^6s^2 - 7.042 \times 10^{11}s + 2.393 \times 10^{15}}{s^4 + 3580s^3 + 2.085 \times 10^9s^2 + 2.855 \times 10^{12}s + 2.749 \times 10^{15}}$$
$$\frac{0.01551s^4 - 496.3s^3 + 3.509 \times 10^7s^2 - 7.705 \times 10^{11}s + 2.648 \times 10^{15}}{s^4 + 3908s^3 + 2.262 \times 10^9s^2 + 3.202 \times 10^{12}s + 3.011 \times 10^{15}}$$

I.2 Funciones de transferencia del Canal 2.

$$\frac{-65.03}{s + 0.06806}$$

$$\frac{-0.01303s + 429}{s + 446}$$

$$\frac{-319s + 1.521 \times 10^6}{s^2 + 2095s + 1.714 \times 10^6}$$

$$\frac{-1.2 \times 10^{23}s + 5.6 \times 10^{26}}{s^3 + 3.719 \times 10^{20}s^2 + 7.585 \times 10^{23}s + 6.315 \times 10^{26}}$$

$$\frac{-3.75 \times 10^{25}s + 1.637 \times 10^{29}}{s^4 + 1.714 \times 10^{19}s^3 + 10^{29}}$$

$$\frac{0.009788s^2 - 340.1s + 1.563 \times 10^6}{s^2 + 2088s + 1.752 \times 10^6}$$

$$\frac{4.208 \times 10^{12}s^2 - 1.461 \times 10^{17}s + 6.571 \times 10^{20}}{s^3 + 4.246 \times 10^{14}s^2 + 8.63 \times 10^{17}s + 7.372 \times 10^{20}}$$

$$\frac{1.334 \times 10^{16}s^2 - 1.668 \times 10^{20}s + 6.567 \times 10^{23}}{s^4 + 9.523 \times 10^{20}s + 6.996 \times 10^{23}}$$

$$\frac{-3.291 \times 10^{13}s^3 + 1.123 \times 10^{18}s^2 - 4.068 \times 10^{22}s + 1.661 \times 10^{26}}{s^3 + 1.05 \times 10^{20}s^2 + 2.141 \times 10^{23}s + 1.869 \times 10^{26}}$$

$$\frac{-407.9s^3 + 5.04 \times 10^6s^2 - 7.176 \times 10^{11}s + 2.968 \times 10^{15}}{s^4 + 4830s^3 + 2.059 \times 10^9s^2 + 3.709 \times 10^{12}s + 3.356 \times 10^{15}}$$

$$\frac{0.01513s^4 - 479.9s^3 + 3.323 \times 10^7s^2 - 8.101 \times 10^{11}s + 3.294 \times 10^{15}}{s^4 + 7400s^3 + 2.212 \times 10^9s^2 + 4.048 \times 10^{12}s + 3.699 \times 10^{15}}$$

I.3 Funciones de transferencia del Canal 3.

$$\frac{-65.03}{s + 0.06806}$$

$$\frac{-0.01081s + 363.2}{s + 400.1}$$

$$\frac{-237.7s + 1.135 \times 10^6}{s^2 + 1954s + 1.317 \times 10^6}$$

$$\frac{-3.258 \times 10^{16}s + 1.55 \times 10^{20}}{s^3 + 1.371 \times 10^{14}s^2 + 2.666 \times 10^{17}s + 1.8 \times 10^{20}}$$

$$\frac{-9.577 \times 10^{19}s + 4.206 \times 10^{23}}{s^4 + 6.751 \times 10^{13}s^3 + 10^{23}}$$

$$\frac{0.007559s^2 - 261.1s + 1.146 \times 10^6}{s^2 + 1874s + 1.325 \times 10^6}$$

$$\frac{211.2s^2 - 2.46 \times 10^6s + 9.456 \times 10^9}{s^3 + 5586s^2 + 1.718 \times 10^7s + 1.052 \times 10^{10}}$$

$$\frac{6.879 \times 10^{20}s^2 - 7.996 \times 10^{24}s + 2.968 \times 10^{28}}{s^4 + \times 10^{25}s + 3.304 \times 10^{28}}$$

$$\frac{-5.613 \times 10^5s^3 + 1.555 \times 10^{10}s^2 - 5.673 \times 10^{14}s + 2.229 \times 10^{18}}{s^3 + 1.907 \times 10^{12}s^2 + 3.593 \times 10^{15}s + 2.584 \times 10^{18}}$$

$$\frac{-87.31s^3 + 1.788 \times 10^6s^2 - 1.691 \times 10^{10}s + 6.079 \times 10^{13}}{s^4 + 6670s^3 + 5.066 \times 10^7s^2 + 9.96 \times 10^{10}s + 6.854 \times 10^{13}}$$

$$\frac{0.002734s^4 - 107.8s^3 + 2.132 \times 10^6s^2 - 1.83 \times 10^{10}s + 6.424 \times 10^{13}}{s^4 + 6839s^3 + 5.276 \times 10^7s^2 + 1.046 \times 10^{11}s + 7.232 \times 10^{13}}$$

REFERENCIAS

- Åström, K. J. and Wittenmark, B., 1990. *Computer Controlled Systems, Theory and Design*, Prentice Hall, Inc., pp. 162-163.
- Babcock, H. W., 1953. *The possibility of compensating astronomical seeing*, Pub. Astr.Soc. Pac. 65, pp. 221-224.
- Beckers, J. M., 1993. *Adaptive Optics for Astronomy: Principles, Performance, and Applications*. Annu. Rev. Astron. Astrophys. 1993.31, pp. 13-62.
- Born, M. and Wolf, E., 1980. *Principles of Optics. Electromagnetic Theory of Propagation and Diffraction of Light*, Sixth Edition. Pergamon Press.
- Cuevas, S., 1993. *Etude et réalisation d'un tavelographe différentiel pour astronomie*, These présentée pour obtenir le grade de docteur en sciences de L'Université Paris XI Orsay.
- Demerlé, M., 1994. *Servo-loop Analysis for Adaptive Optics*, D.M: Alloin and J. M. Mariotti (eds), *Adaptive Optics for Astronomy*, Kluwer Academic Publishers. Printed in Netherlands, pp. 73-88.
- Fried, D. L., 1965. *Statistics of a Geometric Representation of Wavefront Distortion*, J. Opt. Soc. Am., Vol 55, No. 11 November, pp. 1427-1435.
- Fried, D. L., 1966. *Optical Resolution Through a Randomly Inhomogeneous Medium For Very Long and Very Short Exposures*, J. Opt. Soc. Am., Vol 56, No. 10 October, pp. 1372-1379.
- Feynman, R. P., 1964. *The Feynman Lectures on Physics*, Vol II. Addison-Wesley., pp. 41.1-41.12.
- Goodman, J. W., 1968. *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill.
- González, E., Granados, F. y Díaz, R., 1993 *Amplificador Para Detector de Posición de Haces de Laser de Baja Potencia*, Instrumentación y Desarrollo, Vol. 3, No 3, pp. 136-139.
- Lathi, B. P., 1987. *Introducción a la Teoría y Sistemas de Comunicación*, Limusa.
- Ljung, L., 1987. *System Identification-Theory for the User*, Prentice Hall, Inc.
- Mariotti, J. M., 1989. *Introduction to Fourier Optics and Coherence*, D. M. Alloin and J. M. Mariotti (eds) *Diffraction-Limited Imaging with Very Large Telescopes* by Kluwer Academic Publishers, pp. 3-31.
- Newton, I., 1704. *OPTIKS*, pp. 107-111.
- Noll, J. R., 1976. *Zernike polynomials and atmospheric turbulence*, J. Opt. Soc. Am., Vol 66, No. 3 March, pp. 207-211.
- Papoulis, A., 1965. *Probability Random Variables and Stochastic Processes*, Mc Graw-Hill Series in Electrical Engineering.

Physik Instrumente, 1992. *Operating Manual and Product Documentation*, PHYSIK INSTRUMENTE (PI) GMBH, D-7517 Waldbronn, Germany.

Roddier, F., 1981. *The effects of atmospheric turbulence in optical Astronomy*, Progress in Optics XIX.

Roddier, F., Roddier, C., Beckers, J. M., Eisenhardt, P., Goad, L. E. and Shu, K.L., 1986. *Description and Theory of NOAO Infrared Adaptive Optics Program*, The NNTT Technology Development Program Report, No. 9. By the Advanced Development Program.

Roddier, F., 1989. *Optical propagation and image formation through the turbulent atmosphere*, D. M. Alloin and J. M. Mariotti (eds.) *Diffraction-Limited Imaging with Very Large Telescopes*, by Kluwer Academic Publishers, pp. 33-52.

Roddier, F., 1991. *Status of Astronomical Adaptive Optics Developments*, Institute for Astronomy, University of Hawaii.

Roddier, F., 1992. *The Problematic of Adaptive Optics Design*, Institute for Astronomy University of Hawaii. Woodlawn Drive Honolulu, Hawaii 96822 USA.

Roddier, F., Northcott, J., Graves, J. E., McKenna, D. L. and Roddier, D., 1993. *One-dimensional spectra of turbulence-induced Zernike aberrations: time-delay and isoplanicity error in partial adaptive compensation*, J. Opt. Soc. Am., Vol 10, No. 5 May, pp. 957-965.

Roddier, N., 1990. *Atmospheric wavefront simulation and Zernike polynomials*, SPIE Vol. 1237 Amplitude and Intensity Spatial Interferometry, pp. 668-679.

Texereau J., 1963. *How to Make a Telescope*, The American Museum of Natural History, pp. 232-241.

Wang, J. Y. and Markey, J. K., 1978. *Modal Compensation of Atmospheric Turbulence Phase Distortion*, J. Opt. Soc. Am., Vol 68, No. 1 January, pp. 78-87.

Wilson, R. N. and Noethe, L., 1989. *Close Active Optics: its advantages and limitations for correcting of wind-buffet deformations of large flexible mirrors*, ESO, Garching, FRG. SPIE, Vol. 1114, Active Telescope Systems, pp. 290-301.