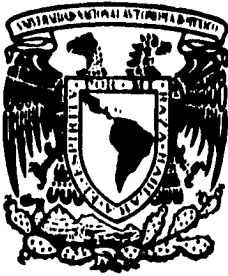


7  
26j



**UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**ECUACIONES DIFERENCIALES EN LA  
TRANSICION SUPERCONDUCTORA**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:**

**M A T E M A T I C A**

**P R E S E N T A**

**MARIA DEL PILAR / ELU CAYADO**



**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

**M. EN C. U. S. O. S. O. Z. O. S. S. E. G. O. V. I. A**  
DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES



**1996  
FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule  
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"ECUACIONES DIFERENCIALES EN LA TRANSICION SUPERCONDUCTORA"

realizado por MARIA DEL PILAR ELU CAYADO

con número de cuenta 651166-9 , pasante de la carrera de MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

**Acreditaciones**

Director de Tesis	M. EN C. SUSANA OROZCO SEGOVIA	<i>[Firma]</i>
Propietario	M. en C. PATRICIA GOLDSTEIN MENACHE	<i>[Firma]</i>
Propietario	M. EN C. MARY GLAZMAN NOWALSKY	<i>[Firma]</i>
Suplente	MAT. MATILDE BARRIOS ZARAGOZA	<i>[Firma]</i>
Suplente	FIS. ROBERTO TITO HERNANDEZ LOPEZ	<i>[Firma]</i>

**Consejo Departamental de Matemáticas**

M. EN C. ALEJANDRO BRAVO NOJICA *[Firma]*

**A MIS PADRES**

**EMETERIO Y MARIA LUISA**

**Y**

**A MARIO**

## CONTENIDO

- I.- INTRODUCCION
- II.- Capítulo 1. ECUACIONES DIFERENCIALES
- III.- Capítulo 2. METODOS NUMERICOS
- IV.- Capítulo 3. SISTEMAS TERMODINAMICOS
- V.- Capítulo 4. EL MODELO DE DOS FLUIDOS
- VI.- RESULTADOS Y CONCLUSIONES.
- VII.- APENDICE A

## INTRODUCCION

En el campo de las matemáticas es de vital importancia el estudio de las ecuaciones diferenciales. En el mundo en que vivimos nos las encontramos en los cursos de investigaciones, en los fenómenos que rodean el mundo de hoy.

Las ecuaciones diferenciales son herramientas para aplicaciones en campos como la astronomía, ingeniería, biología, química, ecología, economía, finanzas, medicina, etc.

Las matemáticas son utilizadas por todas las ciencias y una parte importante de ellas en este sentido son las ecuaciones diferenciales. Están al servicio del hombre y de la ciencia.

En la física encontramos múltiples fenómenos representados por medio de las ecuaciones diferenciales. Entre ellas existen funciones Termodinámicas cuyas relaciones se pueden establecer a través de ecuaciones diferenciales.

Uno de los fenómenos más interesantes que estudia la Termodinámica es el de las Transiciones de Fase, entre ellas la Transición Superconductor ha despertado un gran interés.

Fue descubierta en 1911, pero hasta ahora es que empieza a darse a conocer fuera del ambiente científico. Su uso aún no está muy extendido.

La corriente en un flujo de electrones, es la electricidad. El medio por el que fluyen es el conductor, pero parte de la electricidad se pierde, pues los materiales con que estan hechos los conductores ejercen resistencia al flujo eléctrico y por lo tanto algo se pierde.

Los superconductores son materiales que en ciertas condiciones, permiten el paso de la energía eléctrica sin presentar resistencia al flujo, tienen casi resistencia nula.

Es de mi interés estudiar la transición Superconductor como un problema de Condiciones de Frontera.

Los materiales que nos rodean, en forma de sustancias, pueden estar en tres fases diferentes:

- 1) Sólida
- 2) Líquida
- 3) Gaseosa

Sufren cambios como son la fusión, la vaporización, la condensación, etc. Algunas sustancias como el carbono, por ejemplo, pueden existir como grafito, diamante, etc. y todas ellas en la misma fase sólida. Esta transformación en un sólido es nombrada Transformación Alótrópica.

En otra fase, líquida, también encontramos que algunas sustancias, como el helio cuatro, tiene al menos dos formas de líquido:

- 1) Líquido Normal.
- 2) Líquido Superfluido.

En los años de 1911, K. Onnes descubrió que la Resistencia Eléctrica desaparecía, cuando la temperatura declende por debajo de un temperatura  $T_c$ . Con el Mercurio (Hg) observó que pasaba a un nuevo estado al bajar la temperatura a  $t < 4K$  que su resistencia eléctrica era nula. A este estado se le llama Estado Superconductor.

La transición entre el estado normal y el estado superconductor de un material se conoce con el nombre de Transición de Fase Superconductor y está asociada a su comportamiento magnético a bajas temperaturas. La temperatura a la cual el material pasa a ser superconductor la nombraremos Temperatura Critica ( $T_c$ ).

En este trabajo estamos interesados en estudiar la Transición Superconductores a campo magnético cero planteándonolo como un problema de ecuaciones diferenciales con condiciones a la Frontera.

En el capítulo 1, daremos una introducción a las ecuaciones diferenciales con la teoría que utilizaremos en el planteamiento y solución de nuestro problema.:

En capítulo 2, se dará una visión general de los métodos numéricos y dando algunos ejemplos de los mismos se verá con más detalle el método de Euler o de las tangentes.

El capítulo 3, consta de conceptos de física referentes a sistemas termodinámicos, capacidad calorífica, calores específicos, trabajo, entropía, etc. y mostraremos las ecuaciones diferenciales que resolveremos más adelante.

Así mismo, se plantean las transiciones de fase, transición superconductor, superconductores de tipo I y otros conceptos que utilizaremos en la resolución de nuestra problemática.



En el capítulo 4, describimos el modelo de dos fluidos de Gorter y Casimer y los postulados en el que se basa la teoría de este modelo. En este capítulo modificaremos este modelo, partiendo del hecho de que el sistema se encuentra en equilibrio térmico y que la variación en las energías libres del Estado Superconductor y el estado normal son las mismas.

Resultados y Conclusiones. Quinta y última parte de esta tesis y en la cual se presentarán los resultados obtenidos en este trabajo.

Para la solución de las ecuaciones se utilizó el paquete Mathematica y se muestra el comportamiento del Aluminio ya que los demás materiales superconductores estudiados se comportan de una forma similar.

En nuestro días se está viendo la necesidad de aprovechar al máximo los recursos naturales de nuestro planeta, La Tierra. La energía que producimos explotando sus recursos naturales, como por ejemplo la energía eléctrica, debemos tratar de utilizarla al 100% sin desperdiciar nada.

El problema continúa abierto siendo de un especial interés para matemáticos, físicos y cualquier persona interesada en la aplicación de los descubrimientos científicos al mejoramiento de la vida de los pueblos. Espero poder continuar estudiando el tema, de esta tesis, y cooperar a su aplicación en la vida cotidiana.

## 1. - ECUACIONES DIFERENCIALES

### 1.1. ASPECTOS GENERALES

Las ecuaciones diferenciales están presentes en aplicaciones de diversos campos de nuestros días. Están presentes en ciencias químicas, físicas, biológicas, ecológicas, sociales, etc.

El término de Ecuaciones Diferenciales es introducida por Leibniz en 1676. Por ejemplo:

$$y' + x y = 3 \quad (1)$$

$$y'' + 5y' + 6y = \cos x \quad (2)$$

$$y'' = (1 + y^2) (x^2 + y^2) \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (4)$$

En las ecuaciones (1), (2), y (3) la función esta representada por "y" y la variable independiente por x, esto es  $y = y(x)$ .

Los términos  $y'$  y  $y''$  en (1) (2) y (3) son la primera y segunda derivada respectivamente de la función  $y(x)$  con respecto a  $x$ .

En la ecuación (4) "u" es función de las variables independientes  $t$  y  $x$ , esto es  $u = u(t,x)$  con respecto a  $t$  y  $x$ .

La ecuación (4) envuelve derivados parciales y las (1) (2) y (3) son derivadas ordinarias.

Una ecuación diferencial ordinaria es una relación entre una función desconocida de una sola variable y una o más de sus derivadas. Esta relación a menudo es el resultado de una ley física que conecta cantidades físicas y sus razones de cambio en términos matemáticos. En física, un ejemplo de esto es la Segunda Ley de Newton que establece que la rapidez de cambio del momento de una partícula es igual a la fuerza que actúa sobre ella.

Las funciones que satisfacen la ecuación diferencial son llamadas Soluciones. Para encontrar estas soluciones se han desarrollado un gran número de técnicas que determinan sus propiedades cuantitativas y cualitativas; siendo los métodos numéricos especialmente importantes cuando la representación explícita de las soluciones no puede ser encontrada.

Si en una ecuación están presentes derivadas o diferenciales estamos ante una "Ecuación Diferencial".

Las ecuaciones diferenciales las clasificamos de acuerdo a tres características:

1) Según su tipo.

De acuerdo a esta característica las ecuaciones diferenciales se dividen en :

a) Ordinarias

Y

b) Parciales

a) Las ecuaciones diferenciales son ordinarias si contienen derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente.

b) Si la ecuación diferencial contiene derivadas de una o más variables dependientes con respecto a dos o más variables independientes, entonces tenemos una ecuación diferencial Parcial.

2) Según el orden.

Con este criterio las ecuaciones diferenciales se clasifican de acuerdo al orden de la derivada mayor.

3) Según su linealidad o no-linealidad.

Si la ecuación diferencial contiene a la variable dependiente con grado uno se dice que es una ecuación diferencial Lineal. Si la ecuación no cumple con lo anterior tenemos una ecuación diferencial No-Lineal.

Por ejemplo:

$$-\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t) \quad (5)$$

La ecuación (5) es lineal.

$$-\frac{dy}{dt} = ty^{1/2} \quad (6)$$

La ecuación (6) es No-lineal.

4) Homogéneas y No-Homéneas.

Si en la ecuación (5)  $q(t) = 0$ , la ecuación diferencial es homogénea; si es diferente de cero es no-homogénea.

Si una ecuación la podemos escribir en la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad (7)$$

Decimos que es una Ecuación Diferencial de Variables Separables.

Si también la podemos escribir como:

$$M(tx,ty) = Mt^n(x,y) \quad ( 8 )$$

y

$$N(tx,ty) = Nt^n(x,y) \quad ( 9 )$$

Decimos que tenemos una ecuación que tiene Coeficientes Homogéneos o simplemente que es una ecuación Homogénea. Algo importante de estas ecuaciones es el hecho de que siempre las podemos reducir a una ecuación de Variables Separables.

Esto es, si  $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$  para algún número real  $n$  entonces decimos que  $f(x,y)$  es una Función Homogénea.

Por ejemplo:

$$f(x,y) = x - 3\sqrt{xy} + 5y$$

$$f(tx,ty) = tx - 3\sqrt{txty} + 5ty$$

$$= tx - 3t\sqrt{xy} + 5ty$$

$$= t(x - 3\sqrt{xy} + 5y) = t f(x,y)$$

En el siguiente ejemplo:

$$\frac{dy}{dt} + t^2 y = 0$$

La ecuación es Homogénea de grado uno y lineal.

Si una ecuación diferencial se puede escribir en la forma:

$$\frac{dy}{dt} + t^2 y^2 = 0$$

Decimos que es una Ecuación Homogénea no-lineal.

Con sólo examinar una ecuación diferencial no es fácil predecir en qué intervalo se encuentra definida su solución. El Teorema de Existencia nos asegura que existe una solución que contiene un punto arbitrario en el dominio en el que está definida la ecuación diferencial, y el Teorema de Unicidad nos dice que esta solución es única.

#### **I.- TEOREMA BASICO DE LA EXISTENCIA**

Sea  $f(t,y)$  con valores reales una función continua en el dominio  $D$  del plano  $ty$  y sea  $(t_0, y_0)$  un punto arbitrario en  $D$ . Existe solución  $y(t)$  de la ecuación diferencial.

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y) \tag{10}$$

Que está definida en un intervalo  $I$  que contiene a  $t_0$  y el cual satisface la condición

$$y(t_0) = y_0 \tag{11}$$

## II. - TEOREMA DE UNICIDAD

Sean  $f(t,y)$  y  $df(t,y)/dy$  funciones continuas en  $D$  y sean  $y_1(t)$  y  $y_2(t)$  dos soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y) \quad (12)$$

Con los valores de  $a < t < b$ . Si  $y_1(t_0) = y_2(t_0)$  para alguna  $t_0$  tal que  $a < t_0 < b$  entonces  $y_1(t) = y_2(t)$  para toda  $t$  que cumpla con  $a < t < b$ .

A continuación veremos algunas características de las ecuaciones diferenciales de primer orden.

Analizaremos, en primer lugar, algunos conceptos básicos con respecto a la solución de las ecuaciones diferenciales homogéneas.

### 1.2. - ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \quad (13)$$



Si tenemos que  $h(y) = 1$  la ecuación (13) se puede escribir como

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \quad (14)$$

Y su solución se encuentra por integración

$$y = \int g(x) dx + C \quad (15)$$

Si  $y = f(x)$  es solución de la ecuación (15), entonces tendremos para la ecuación (13) que:

$$h(f(x)) f'(x) = g(x) \quad (16)$$

Y tenemos que la solución de la ecuación (13) es:

$$\int h(f(x)) f'(x) dx = \int g(x) dx + C \quad (17)$$

Donde C es una constante arbitraria

### 1.2.1.- ECUACIONES HOMOGENEAS LINEALES

A manera de ejemplo, plantearemos la solución de una ecuación diferencial de primer orden lineal y homogénea.

Si tenemos una ecuación del tipo de variables separables

$$\frac{dy}{dt} = -p(t)y \quad (18)$$

Podemos aplicar los siguientes pasos para encontrar su solución:

- 1.- Encontrar todas las soluciones constantes.
- 2.- Separar las variables y encontrar la solución implícita.
- 3.- Encontrar la solución explícita de la solución implícita.
- 4.- Usar los valores iniciales, si los tenemos, para determinar la constante a sumar.

Si además nosotros separamos las variables contenidas en la ecuación escribimos

$$\frac{1}{y} \frac{d}{dt} y(t) = -p(t) \quad (19)$$

la

$$P(t) = \int p(t) dt \quad (20)$$

Es la antiderivada de  $p(t)$  y tenemos

$$\ln|y(t)| = -P(t) + C \quad (21)$$

Y la solución explícita es:

$$y(t) = C \exp[-P(t)] \quad (22)$$

La cuál es llamada Solución General de la ecuación homogénea

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = 0 \quad (23)$$

Para ilustrar este procedimiento resolveremos por ejemplo la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = y(1 - y), \quad (1)$$

Con condiciones iniciales

$$y(0) = 2$$

Solución:

- 1.-  $f(y) = y(1 - y) = 0$  cuando  $y = 0, 1$ , existen dos soluciones constantes;  $y(t) = 0$  y  $y(t) = 1$

2.- Separación de variables para obtener la solución no constante

$$\frac{1}{y(t)[1-y(t)]} \frac{d}{dt} y(t) = \left[ \frac{1}{y(t)} + \frac{1}{1-y(t)} \right] \frac{d}{dt} y(t) = 1$$

y la solución implícita obtenida por integración es

$$\ln|y(t)| - \ln|1-y(t)| = t + C \quad (2)$$

4.- Para resolver el problema con valores iniciales  $t=0$

y  $y = 2$  sustituimos en (2)

$$\ln\left|\frac{2}{1-2}\right| = \ln 2 = 0 + C \quad y$$

$C = \ln 2$ . y la solución implícita es

$$\ln\left|\frac{y(t)}{1-y(t)}\right| = t + \ln 2. \quad y \quad \text{entonces tenemos que}$$

$$y(0) = 2, \quad [1-y(t)] < 0$$

3.- Solución explícita

$$y(t) = \frac{-2e^t}{2e^t - 1} = \frac{2e^t}{2e^t - 1}$$

### 1.3. - ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN O MAYOR.

#### 1.3.1.- ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN.

Las ecuaciones de segundo orden son de la forma

$$a(t)\frac{d^2y}{dt^2} + b(t)\frac{dy}{dt} + c(t)y = f(t) \quad (24)$$

Donde  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$  y  $f(t)$  son funciones continuas en un intervalo no vacío, y el término  $a(t)\frac{d^2y}{dt^2}$  debe ser diferente de cero en el intervalo. Si  $t_0$  es cualquier punto del intervalo existe una solución  $y(t)$  del problema de valor inicial en el intervalo y esa solución es única.

Al igual que las ecuaciones de primer orden, las ecuaciones diferenciales de segundo orden pueden ser:

- 1) Lineales ó No-Lineales.
- 2) Homogéneas ó No-Homogéneas.

Para las ecuaciones diferenciales de primer orden sabemos que existe una solución que contiene una constante arbitraria. Como una ecuación de segundo orden involucra una segunda derivada. Por lo general, serán necesarias dos integraciones para hallar una solución; por lo que las soluciones de una ecuación de segundo orden contendrán dos constantes arbitrarias. Por ejemplo, la solución de:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = g(t) \quad (25)$$

$$y(t) = C_1 + C_2 t + \int^t \left[ \int^x g(s) ds \right] ds \quad (26)$$

Donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes arbitrarias. Para una ecuación diferencial de primer orden es suficiente especificar el valor de la solución en un punto. Para obtener la solución de una ecuación de segundo orden será necesario especificar dos condiciones; por

Ejemplo, el valor de la solución  $y(0)$  y su derivada  $\frac{dy}{dt}$  en el punto  $t_0$  para determinar una única solución. Estas condiciones son denominadas condiciones iniciales.

Las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden pueden escribirse en términos de un operador  $L(x)$  a los que le podemos asociar la representación de un sistema físico. Estas ecuaciones tienen una amplia aplicación en Mecánica, Teoría de Circuitos, etc.

Una característica importante de las ecuaciones diferenciales que describen un sistema físico dado en que si se sustituye  $X$  por  $X + Y$  en:

$$a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = F(t) \quad (27)$$

Obtenemos una suma de la misma operación lineal  $X$  y  $Y$  esto es sea

$$L(x) = a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx \quad (28)$$

$$L(x + y) = a \frac{d(x + y)}{dt^2} + b(x + y) + c(x + y) \quad (29)$$

$$L(x + y) = L(x) + L(y) \quad (30)$$

Y por otro lado

$$L(ax) = aL(x) \quad (31)$$

En un problema más complicado puede haber más derivadas y más términos en  $L$  ; lo importante es si se mantienen o no las ecuaciones (25) y (26).

Si lo hacen llamamos al problema que describen Problema Lineal y a la ecuación (27) la llamamos Ecuación Diferencial Lineal de Segundo Orden.

La solución de este tipo de ecuaciones también tiene una característica importante. Suponemos que tenemos una solución  $X$  de la ecuación

$$L(x) = 0 \quad (32)$$

Entonces  $L(x) = 0$  donde  $ax = 0$  también es solución de la misma ecuación, esto es

$$L(ax) = aL(x). \quad (33)$$

Supongamos que con algún otro método hemos encontrado otra solución  $X$  entonces  $X_1 + X_2$  también es solución y tenemos que

$$X = X_1 + X_2. \quad (34)$$

Donde X también es solución de las ecuaciones

$$L(x_1) = 0 \quad \text{y} \quad L(x_2) = 0 \quad (35)$$

$$L(x_1) + L(x_2) = L(x_1 + x_2) \quad (36)$$

Luego se han encontrado un cierto número de soluciones para un sistema lineal, las podemos sumar.

Por otro lado, si  $X_1$  es solución y  $\alpha X_1$  también lo es cualquier suma  $\alpha X_1 + \beta X_2$  de estas soluciones  $X_1$  y  $X_2$  es también solución.

Si podemos encontrar tres soluciones encontramos que cualquier combinación de las tres soluciones es también solución. Resulta que el número de soluciones independientes que hayamos obtenido para la ecuación lineal de segundo orden es de solamente dos. Esto es, si tenemos una ecuación diferencial de segundo orden, hay solo dos soluciones independientes y tienen así la solución más general.

Supongamos ahora que:

$$L(x) = F(t) \quad (37)$$



Y que  $x_i$  es solución de esta ecuación diferencial entonces:

$$L(x_i + x_j) = L(x_i) + L(x_j) = F(t) + 0 = F(t) \quad (38)$$

Por lo tanto a la solución de la no homogénea le podemos sumar la solución homogénea y también tienen una solución.

Otra característica importante es la de la superposición de las soluciones. esto es que

$$L(x_a) = Fa; \quad L(x_b) = Fb; \quad (39)$$

$$L(x_a + x_b) = L(x_a) + L(x_b) = F_a(t) + F_b(t) \quad (40)$$

Esto es la solución para la ecuación

$$L(x) = F_a(t) + F_b(t) \quad (41)$$

Es la suma de las soluciones

$$L(x_a) + L(x_b)$$

Esto es si tenemos un elemento no homogéneo muy complicado lo podemos separar de una manera conveniente en la suma de partes separadas.

En física existen un importante número de ecuaciones lineales en las que son aplicables estos conceptos, tales como las ecuaciones mecánicas de un oscilador compuesto por masas y resortes y sus análogos en circuitos lineales; las ecuaciones de Maxwell y ecuaciones que aparecen en mecánica cuántica. Lo que resulta de que las leyes fundamentales de la física son a menudo lineales.

#### **1.4.- APLICACIONES**

A manera de ejemplo veremos la solución de un problema de un circuito eléctrico con una ecuación diferencial de primer orden y un oscilador mecánico con una ecuación diferencial de segundo orden.

##### **A) MODELO MATEMATICO DE UN CIRCUITO ELECTRICO**

El siguiente modelo matemático resolverá el problema de encontrar la variación del flujo en una bobina con el núcleo de fierro.

El equipo de experimentación consiste de una bobina, un voltímetro y un ohmetro, una resistencia variable, una batería y un switch.

Por la ley de Ohm, el voltaje decrece al pasar la corriente al pasar por cada elemento del circuito y la caída del voltaje debida a la resistencia es:

$$V_{res} = R.I ;$$

Y la caída de voltaje en la bobina es:

$$V_{ind} = \frac{d\phi}{dt}$$

Donde

$V_{res}$ : Voltaje de la resistencia  
 $R$ : Resistencia Total del Circuito  
 $I$ : Corriente  
 $V_{ind}$ : Voltaje de inducción  
 $\phi$ : Flujo Magnético

De acuerdo con la ley de Kirchhoff tenemos que:

La suma de la caída del voltaje a través de la bobina y la resistencia, deberá ser igual al voltaje de la bobina

$$V_{res} + V_{ind} = E \quad \text{ó} \quad \frac{d\phi}{dt} + RI = E$$

$I$ : Corriente eléctrica

$E$ : Voltaje de la bobina

También sabemos que el flujo es proporcional a la corriente eléctrica,

$$\phi = LI$$

La constante de proporcionalidad es la  $L$

$L$ : Inductancia de la bobina

De todo lo anterior podemos ya escribir la ecuación diferencial para un circuito en series es:

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E \quad (1)$$

Volviendo a nuestro ejemplo de la variación del flujo de la bobina. Los elementos del circuito están conectados en serie con el switch abierto y entonces el ohmmetro mide la R (resistencia) la variación de la resistencia. Una vez que esto se ha realizado, se cierra el swith ( $t=0$ ), entonces  $I(0) = 0$  y la solución de la ecuación diferencial, (1), es

$$I(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-Rt/L})$$

y

$$\phi(t) = LI(t) = \frac{EL}{R} (1 - e^{-Rt/L})$$

$$\frac{d(\phi)}{dt}(t) = E - RI(t) = Ee^{-Rt/L}$$

Y sacando logaritmos a ambos lados tenemos

$$\ln \frac{d\phi}{dt}(t) = \ln E - \frac{Rt}{L}$$

## B) MODELO MATEMATICO DE UN OSCILADOR MECANICO.

El modelo Matemático que veremos a continuación resolverá el problema de un simple oscilador mecánico. El modelo será una ecuación diferencial lineal de segundo grado.

Consideremos una masa ( $m$ ) suspendida por un resorte soporte vertical. Sea  $l_0$  la longitud del resorte sin soportar la masa  $m$ , o sea en su estado natural. Al colgarle la masa el resorte se alargará siendo su nueva longitud  $l_0 + l$  y aplicando la ley de Hooke tenemos que la tensión en el resorte es directamente proporcional a su extensión y estará dada por:

$$kl = mg \quad ( 1 )$$

Siendo  $g$  una constante gravitacional y  $k$  la constante del resorte.

Cuando comenzamos el experimento será un tiempo inicial ( $t_0$ ) y la masa se encuentra desplazada  $y_0$  unidades de su estado de equilibrio y tiene una velocidad de  $v_0$ .

La distancia en un tiempo  $t$  esta representada por

$$y = y(t) \quad ( 2 )$$

Siendo  $y$  la distancia del equilibrio. La extensión del resorte en ese mismo tiempo  $t$  es:

$$l + y(t) \quad ( 3 )$$

Y la ley de Newton nos dice que:

La Razón de cambio hacia abajo es igual a la Fuerza Neta hacia abajo. O sea

$$- \frac{d}{dt} \left[ m \frac{dy}{dt} (t) \right] = mg - k [ 1 + y(t) ] \quad ( 4 )$$

Por (1) y haciendo  $y = y(t)$  obtenemos

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = - k l \quad \text{o} \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} + k l = 0 \quad ( 5 )$$

El problema es encontrar el valor de los coeficientes constantes de la ecuación diferencial de segundo orden (5) y también teniendo en cuenta las condiciones iniciales:

$$y(t_0) = y_0 \quad \text{y} \quad v(t_0) = \frac{dy}{dt} (t_0) = v_0 \quad ( 6 )$$

Integrando la ecuación ( 5 ) tenemos:

$$y = A \operatorname{sen} \sqrt{k t} + B \operatorname{cos} \sqrt{k t}$$

$$y(t_0) = y_0 = A \operatorname{sen} \sqrt{k t} + B \operatorname{cos} \sqrt{k t} = A.1 + B.0$$

$$y_0 = A.1 \quad \text{=====} \quad \text{>} \quad A = y_0$$

y

$$v(t) = v_0 \quad = - \frac{dy}{dt} (t_0) = - A \sqrt{k} \operatorname{sen} \sqrt{k t} + B \sqrt{k} \operatorname{cos} \sqrt{k t}$$

$$v_0 = 0 + B\sqrt{k} \cdot 1 \quad \text{=====}> \quad B = \frac{v_0}{\sqrt{k}}$$

En el siguiente capítulo de la tesis veremos los conceptos necesarios para comprender el planteamiento del problema que nos interesa resolver.

## BIBLIOGRAFIA

- 1.- Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones. D. G. Zill.  
G. Ed. Iberoamericana, S.A. de C.V. 1982.
- 2.- Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera. W. E. Boyce, R. C. DiPrima  
Limusa, 1978.
- 3.- Differential Equations. D. A. Sanchez, R. C. Allen, Jr., W. T. Kyner. Addison-Wesley Publishing Company.
- 4.- Lecturas de Física. Feynman. Vol.1.Fondo Educativo Interamericano, S.A.
- 5.- Ordinary Differential Equations with Modern Applications  
N. Finizio and G. Ladas. Wadsworth Publishing Company.



## 2. - METODOS NUMERICOS

### 2.1. ASPECTOS GENERALES

Una ecuación diferencial no siempre tiene una solución y a veces, cuando existe, no es fácil de encontrar una fórmula explícita en términos de funciones elementales que satisfaga la ecuación.

Muchas ecuaciones que representan fenómenos físicos no tienen una solución explícita y usamos, para encontrar su solución, el Método Numérico

### 2.2.- METODO DE EULER

Entre los métodos numéricos más sencillos está el de Euler ó método de las tangentes. Para ilustrar el uso de un metodo numérico veremos a continuación los fundamentos de este metodo.

Utilizaremos las notaciones  $y' = \frac{dy}{dx}$  -- indistintamente.

Supongamos la ecuación:

$$y' = f(x,y)$$

Con la condición inicial  $y(x_0) = y_0$

Sea  $h$  un incremento positivo sobre el eje de las  $x$ , entonces podemos encontrar un punto

$$(x_1, y_1) = (x_0 + h, y_1) \quad (1)$$

Que estará sobre la tangente en  $(x_0, y_0)$  a la curva de la solución desconocida. También de la ecuación de una recta que pasa por un punto dato tenemos que:

$$\frac{y_1 - y_0}{x_0 + h - x_0} = y'_0 \quad (2)$$

ó

$$y_1 = y_0 + hy'_0 \quad (3)$$

Si hacemos  $x_1 = x_0 + h$ , entonces el punto  $(x_1, y_1)$  sobre la tangente es una aproximación del punto  $(x_1, y(x_1))$  de la curva solución. Cuanto más pequeña sea  $h$ , mayor la aproximación a la solución.

Suponiendo que  $h$  es constante, podemos escribir la siguiente sucesión de puntos:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

Que son aproximaciones de los puntos:

$$(x_1, y(x_1)), (x_2, y(x_2)), \dots, (x_n, y(x_n)).$$

Si usamos  $(x_1, y_1)$  podemos obtener el valor de  $y_2$  que es la ordenada de un punto sobre una nueva tangente. Tenemos que:

$$\frac{y_2 - y_1}{h} = y'_1 \quad (4)$$

ó

$$y_2 = y_1 + hy'_1 \quad (5)$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) \quad (6)$$

Y en general tenemos:

$$y_{n+1} = y_n + hY'_n \quad (7)$$

$$= y_n + hf(x_n, y_n)$$

Donde  $x_n = x_0 + nh$  (8)

A manera de ejemplo resolveremos la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

Con condición  $y(1) = 1$

Obtengamos una aproximación de  $y(1.5)$  usando  $h = 0.1$  y  $h = 0.05$ .

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + h(2xy)$$

Para  $h = .1$

$$\begin{aligned}
 y_1 &= y_0 + .1(2(x_0 y_0)) \\
 &= 1 + .1(2)(1)(1) \\
 &= 1.2 \qquad \text{=====> } y(1.1) = 1.2
 \end{aligned}$$

Para h = 0.05

$$\begin{aligned}
 y_1 &= 1 + (0.05)[2(1)(1)] \\
 &= 1.1 \\
 y_2 &= 1.1 + (0.05)[2(1.05)(1.1)] \\
 &= 1.2155
 \end{aligned}$$

**TABLA 1 METODO DE EULER CON h = 0.1**

$x_n$	$y_n$	valor real	error	X de error rel
1.00	1.0000	1.0000	0.0000	0.00
1.10	1.2000	1.2337	0.0337	2.73
1.20	1.4640	1.5527	0.0887	5.71
1.30	1.8154	1.9937	0.1784	8.95
1.40	2.2874	2.6117	0.3244	12.42
1.50	2.9278	3.4904	0.5625	16.12

Otros métodos numéricos son el método de Range-Kutta y el de Taylor de tres términos.

### 2.3.- METODO DE RANGE-KUTTA

Veremos un ejemplo para ilustrar el método de Range-Kutta usando

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$k_1 = hF(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hF(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = hF(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2)$$

$$k_4 = hF(x_n + h, y_n + k_3)$$

Sea:

$$y' = 2xy$$

Con la condición de

$$y(1) = 1$$

Con  $h = 0.1$

Usemos el método de Runge-Kutta para obtener una aproximación de  $y(1.5)$  para la solución de

$$y' = 2xy$$

$$y(1) = 1$$

$$h = 0.1$$

**SOLUCION:** Como ilustración, hagamos los cálculos para el caso  $n = 0$ . De (3) obtenemos

$$\begin{aligned}k_1 &= (0.1) f(x_0, y_0) \\ &= (0.1) 2x_0 y_0 \\ &= 0.2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_2 &= (0.1) f(x_0 + \frac{1}{2}(0.1), y_0 + \frac{1}{2}(0.2)) \\ &= (0.1) 2(x_0 + \frac{1}{2}(0.1), y_0 + \frac{1}{2}(0.2)) \\ &= 0.231,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_3 &= (0.1) f(x_0 + \frac{1}{2}(0.1), y_0 + \frac{1}{2}(0.231)) \\ &= (0.1) 2(x_0 + \frac{1}{2}(0.1), y_0 + \frac{1}{2}(0.231)) \\ &= 0.234255,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_4 &= (0.1) f(x_0 + 0.1, y_0 + 0.234255) \\ &= (0.1) 2(x_0 + 0.1)(y_0 + 0.234255) \\ &= 0.2715361,\end{aligned}$$

Y por lo tanto,

$$\begin{aligned}y_1 &= y_0 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ &= 1 + \frac{1}{6} (0.2 + 0.231) + 0.234255 + 0.2715361 \\ &= 1.23367435\end{aligned}$$

Si redondeamos este valor a las acostumbradas cuatro cifras decimales obtenemos

$$y_1 = 1.2337$$

**TABLA 2                      METODO DE RUNGE-KUTTA CON  $h = 0.1$**

$X_n$	$Y_n$	valor real	error	% de error rel.
1.00	1.0000	1.0000	0.0000	0.00
1.10	1.2337	1.2337	0.0000	0.00
1.20	1.5527	1.5527	0.0000	0.00
1.30	1.9937	1.9937	0.0000	0.00
1.40	2.6116	2.6117	0.0001	0.00
1.50	3.4902	3.4904	0.0001	0.00

A continuación veremos los fundamentos físicos necesarios para el estudio del problema que nos interesa resolver.

### 3.1.- SISTEMAS TERMODINAMICOS

Un Sistema termodinámico puede ser descrito en términos de las variables físicas que lo representan, sus variables termodinámicas. Estas son un conjunto de atributos macroscópicos susceptibles de medirse experimentalmente. De estas variables solo un subconjunto de ellas serán independientes; las demás, estarán, relacionadas con las otras a través de una ecuación de estado.

Un estado termodinámico de equilibrio es aquella condición de un sistema, para los cuales han sido asignados valores numéricos a las variables que los describen. Definiremos un proceso como el mecanismo mediante el cual un sistema cambia de estado. Si en todo momento durante el cual ocurre el proceso podemos definir inequívocamente el estado termodinámico del sistema, diremos que el proceso es reversible.

La termodinámica clásica solo trata de sistemas que se encuentran en un estado de equilibrio,<sup>(1)</sup> esto es las variables termodinámicas tienen valores definidos que permanecen constantes, mientras no se modifiquen las condiciones externas. Los cambios que sufren las variables del sistema debido a las interacciones con sus alrededores deben ocurrir en condiciones de equilibrio. En este caso diremos que el proceso que nos interesa describir resulta de una sucesión de estados de equilibrio o que es un proceso cuasiestático.



Consideremos un sistema cuyos estados de equilibrio están descritos por una pareja de variables  $X$  y  $Y$  y la temperatura ( $\theta$ ). Sea la ecuación de estado del sistema:

$$\theta = f( X, Y ), \quad ( 1 )$$

Un proceso cuasiestático mediante el cual variamos  $X$  por una cantidad  $dX$  puede ser descrito calculando la diferencial total de  $X$ ,

$$dX = \left( -\frac{\partial X}{\partial Y} \right)_{\theta} dy + \left( -\frac{\partial X}{\partial \theta} \right)_{Y} d\theta, \quad ( 2 )$$

La cual describe el cambio  $dX$  cuando las variables independientes  $Y$  y  $\theta$  sufren un incremento  $dy$  y  $d\theta$ . En un espacio de estados  $X$  y  $Y$  entre dos puntos cualesquiera,  $P_1$  y  $P_2$ , podemos tomar una trayectoria que represente un proceso entre ambos estados, la cantidad

$$d'W = XdY \quad ( 3 )$$

Representa el TRABAJO efectuado sobre el sistema. Siendo el trabajo total el área bajo la curva en cuestión. La energía interna de un sistema puede ser modificada realizando una cierta cantidad de trabajo ó transmitiendo una forma de energía no mecánica llamada CALOR. La primera ley de termodinámica establece que para un proceso infinitesimal que ocurre en un sistema dado

$$dU = d'Q + d'W \quad (4)$$

Donde las d's representan diferenciales inexactas, esto es tanto W como Q dependen de los estados inicial y final y del proceso seguido. En los procesos reversibles dW (el trabajo) se relaciona con las variables de estado del sistema a través de la definición de trabajo y en ese caso la d'Q (calor) se relaciona con éstas a través de la expresión de la Primera Ley de la termodinámica, esto es:

$$dU = d'Q + \sum_{i=1}^n X_i dY_i \quad (5)$$

Esta ecuación permite calcular la cantidad de calor absorbida o cedida por el sistema cuando sufre un proceso que cambia la energía interna una cantidad dU.

Una de las cantidades más importantes utilizadas en el estudio de las propiedades térmicas de un sistema es la CAPACIDAD CALORIFICA que se define como el cociente entre la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura una cierta cantidad y el incremento de temperatura dT esto es:

$$C = \frac{d'Q}{dT} \quad (6)$$

Siendo C una cantidad que al igual que  $d'Q$  depende del proceso mismo. La Capacidad Calorífica por Unidad de Masa es llamada CALOR ESPECIFICO.

Si un sistema absorbe una cantidad infinitesimal de calor  $d'Q$  durante un proceso reversible se define la ENTROPIA (S) como la función cuyo cambio infinitesimal está dado por:

$$dS = \frac{d'Q}{T} \quad (7)$$

Donde T es la temperatura expresada en Kelvin.

La Entropía de un sistema es función de las coordenadas termodinámicas y su cambio es igual a la integral de:

$$\int \frac{d'Q}{T}$$

Entre los estados terminales, integrada a través de cualquier trayectoria reversible que conecte los dos estados. Esto es, el cambio de Entropía es independiente del proceso y solo depende de los estados inicial y final.

Definiremos la función de Gibbs  $G = G(X,T)$  llamada energía libre, relacionada con la Entropía y la Capacidad Calorífica de la siguiente manera:

$$S = - \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_x \quad (8)$$

$$C_x = -T \left( \frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \right)_x = T \frac{\partial S}{\partial T} \quad (9)$$

La función de Gibbs, también es llamada Energía Libre y es particularmente importante en el estudio de los cambios de fase.

### 3.2.- TRANSICIONES DE FASE

Las transiciones de fase más conocidas son las de fusión, vaporización y sublimación, en estas transiciones, la temperatura (T) y la presión (P) permanecen constantes mientras que la entropía (S) y el volumen (V) cambian. Estas transiciones se conocen como Transiciones de Fase de Primer Orden porque las derivadas de primer orden de la función de Gibbs cambian discontinuamente. Esto es:

$$dG = -SdT + VdP, \quad (10)$$

$$S = - \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_P, \quad (11)$$

$$V = \left( \frac{\partial G}{\partial P} \right)_T \quad (12)$$

La entropía y el volumen del sistema tienen cambio discontinuo a la temperatura crítica, como se muestra en las figuras 1.a y 1.b.

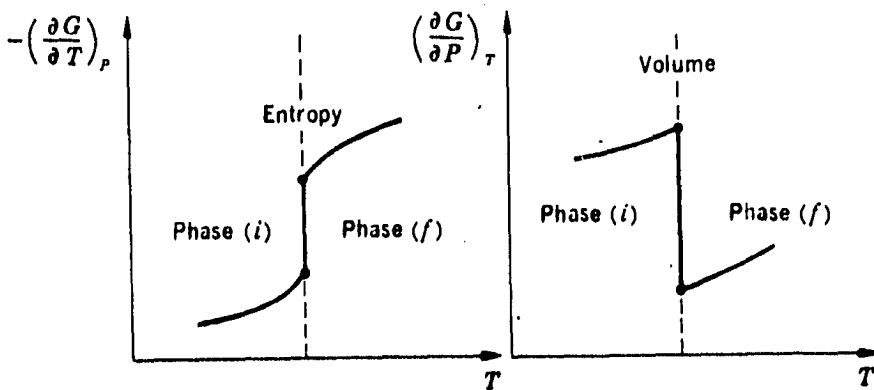


Figura 1a

Figura 1b

mientras que otras cantidades relacionadas con las derivadas de segundo orden, como la capacidad calorífica;  $\beta$  la expansión volumétrica. (la variación del volumen con la temperatura); y  $\kappa$  la compresibilidad isotérmica (la variación del volumen con la presión) definidas como:

$$C_p = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_p \quad (13)$$

$$\beta = 1/V \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad (14)$$

$$\kappa = -1/V \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \quad (15)$$

Son infinitas a la temperatura crítica como se muestra esquemáticamente en la figura 2a y 2b. Esto ocurre porque la transición se realiza a presión y temperatura constante, mientras que el volumen y la entropía tienen un cambio finito.

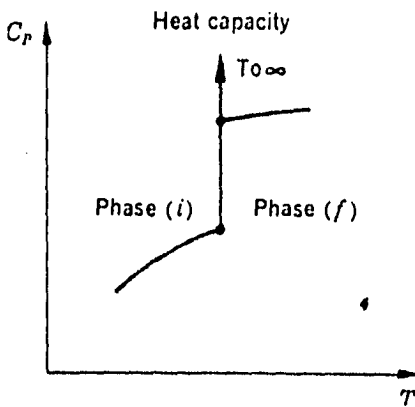


Figura 2a

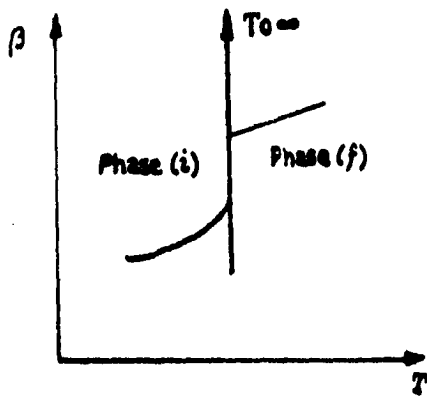


Figura 2b

En contraste hay otros cambios de fase en los cuales la entropía y el volumen son los mismos al comienzo y al final de la transición, en tales cambios de fase, la temperatura, la presión, la función de Gibbs, la entropía y el volumen permanecen constantes. Por otro lado cantidades físicas relacionadas con las derivadas de segundo orden tales como:

$$C_p/T = \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_p = -\partial/\partial T \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_p = -\partial^2 G / \partial T^2 ; \quad (16)$$

$$\beta V = \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = +\partial/\partial T \left( \frac{\partial G}{\partial P} \right)_p = \partial^2 G / \partial T \partial P ; \quad (17)$$

$$y \quad \kappa V = - \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = -\partial/\partial P \left( \frac{\partial G}{\partial P} \right)_T = -\partial^2 G / \partial P^2 \quad (18)$$

Tienen cambios finitos, por lo que diremos que la transición es de segundo orden. La variación de G y S con la temperatura se muestra en las figuras 3.a y 3.b.

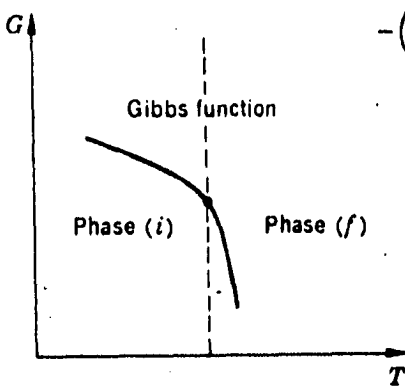


Figura 3a

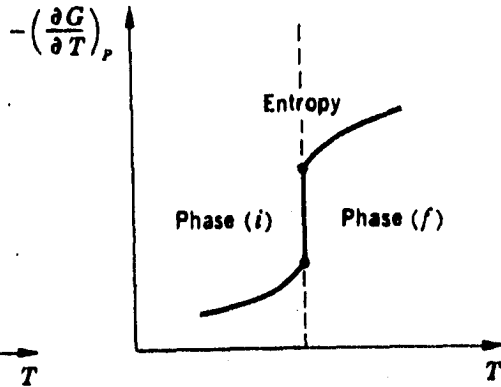


Figura 3b

Hasta ahora se ha encontrado experimentalmente que la única transición que reúne estas características, es el cambio de la superconductividad a conductividad normal a campo magnético cero. Otras transiciones también muy interesantes no son discutidas en esta tesis. Se puede distinguir entre diferentes tipos de transiciones con la gráfica de capacidad en función de la temperatura, como se muestra en las figuras 4.a y 4.b.

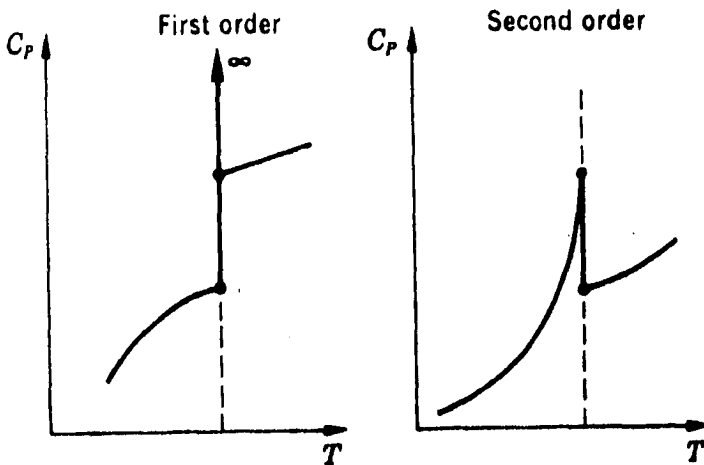


Figura 4a

Figura 4b.



### 3.3.- LA TRANSICION SUPERCONDUCTORA

La superconductividad fue descubierta por un físico Holandés, H. K. Onnes en 1911, quien encontró que el mercurio perdía toda su resistencia al flujo de la electricidad cuando se enfriaba a una temperatura de aproximadamente 4 K , antes de esta fecha no había forma de eliminar la resistencia inherente de un material, ni siquiera en los mejores conductores, en los que se llega a una resistencia residual si se disminuye la temperatura, atribuida a la presencia de impurezas. En un conductor, un impulso de corriente eléctrica se atenuará rápidamente hasta desaparecer debido a la resistencia, mientras que en un superconductor la corriente podría fluir por siempre. Este fenómeno se encontró también en otros materiales que se comportaron como superconductores al disminuir su temperatura por debajo de un valor crítico  $T_c$ ; sin embargo las aplicaciones prácticas de este descubrimiento se mantuvieron restringidas debido a las bajas temperaturas necesarias y a que la superconductividad es destruida cuando hay un campo magnético presente de cierta intensidad. Durante mucho tiempo solo se encontraron materiales con temperaturas críticas de unos cuantos Kelvins, hasta que en 1986,

A. Müller y G. Bednorz sintetizaron un material cerámico con temperatura crítica de 30 K, a partir de ahí se inició una carrera por descubrir materiales con temperaturas críticas cada vez más altas (135 para superconductores basados en mercurio).

Cuando un superconductor se coloca en un campo magnético  $H$  y es mantenido a una temperatura constante menor que la  $T_c$  y si el campo magnético se aumenta a partir de cero, el material permanecerá superconductor hasta que el campo magnético alcanza un valor crítico  $H_c$  y el material vuelve a ser normal. Si el campo magnético se reduce, la transición superconductor se presenta al mismo valor  $H_c$ . La magnitud del campo crítico depende solo de la temperatura, entonces  $H_c$  es una función de la temperatura como se muestra en la figura 5. La curva divide al plano  $H$ - $T$  en dos regiones, superconductor y normal. La relación entre el  $H_c$  y la  $T$  es la siguiente:

$$H_c = H_0 \left( 1 - \frac{T^2}{T_c^2} \right) \quad (19)$$

Donde  $H_0$  es el campo crítico a la temperatura del cero absoluto.

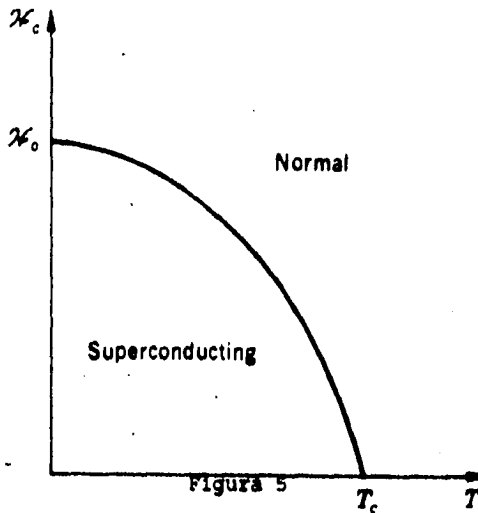


Figura 5

En los superconductores en presencia de un campo magnético se presenta un fenómeno conocido como efecto Meissner. Este consiste en que el campo magnético no penetra en el interior del superconductor. En los superconductores llamados de tipo I, el efecto se presenta de manera completa para valores de  $H$  menores que  $H_c$ . En los superconductores de tipo II se presenta el efecto Meissner incompleto cuando el campo magnético tiene un valor entre  $H_{c1} < H < H_{c2}$ . Si el campo magnético aplicado es mayor que  $H_{c2}$  el material vuelve al estado no superconductor.

La transición superconductor a campo magnético cero, es una transición de fase reversible de segundo orden, mientras que en presencia de un campo magnético existe un cambio finito en la entropía a  $T_c$ , por lo que la transición es de primer orden.

Se define la función de Gibbs magnética como<sup>(2)</sup>

$$G = U - TS - HM \quad (20)$$

Donde la  $H$  es el campo magnético y  $M$  la magnetización del sistema. Derivando (20) obtenemos:

$$dG = dU - TdS - HdM - SdT - MdH \quad (21)$$

Siendo

$$TdS = d'Q$$

Y de las ecuaciones (3) y (4) se obtiene que

$$TdS = dU - HdM,$$

La ecuación (21) se reduce a:

$$dG = - SdT - MdH \quad (22)$$

Con T y H constantes,  $dG = 0$  y

$$G_s = G_n \quad (23)$$

Donde los subíndices s y n se refieren a las fases superconductor y normal.

A una temperatura  $T + dT$  y con un campo magnético  $H + dH$

$$G_s + dG_s = G_n + dG_n \quad (24)$$

$$dG_s = dG_n$$

Y por esto,

$$S_s dT - M_s dH_c = S_n dT - M_n dH_c \quad (25)$$

De donde obtenemos que

$$-\frac{dH_c}{dT} = \frac{S_n - S_s}{M_n - M_s} \quad (26)$$

De relaciones electromagnéticas se tiene que:

$$M_n - M_s = 0 + \frac{VH_c}{4\pi} \quad (27)$$

Y finalmente podemos escribir la ecuación (26) como

$$-\frac{dH_c}{dT} = 4\pi \frac{S_n - S_s}{VH_c} \quad (28)$$

El valor de la derivada de  $H_c$  es obtenido de la curva de  $H_c(T)$ .

### 3.4. - CAPACIDAD CALORIFICA DE LOS SUPERCONDUCTORES DEL TIPO I

El comportamiento de la capacidad calorífica en la fase superconductor es completamente diferente del comportamiento en la fase normal. De los resultados experimentales es posible determinar la diferencia entre la capacidad calorífica en el estado normal y el estado superconductor. También podemos obtener esta diferencia de resultados termodinámicos. A partir de la ecuación (28) podemos mostrar que en la transición superconductor la diferencia de entropías entre el estado normal y el estado superconductor:

$$S_n - S_s = (V/4\pi) H_c (dH_c/dT) \quad (29)$$

Diferenciando ambos lados con respecto a la temperatura y multiplicando por la temperatura se obtiene que:

$$T(dS_n/dT) - T(dS_s/dT) = - (VT/4\pi) (d/dT) \left( H_c (dH_c/dT) \right) \quad (30)$$

Esto es, la capacidad calorífica por unidad de masa será:

$$C_s - C_n = (vT/4\pi) (d/dT) \left( H_c (dH_c/dT) \right) \quad (31)$$

Esta ecuación nos conduce a una ecuación diferencial de segundo orden no-lineal. Integrando la ecuación (31) desde  $T = 0$  hasta  $T = T_c$  obtenemos

$$\int_0^{T_c} (C^s - C^n) dT = (v/4\pi) \int_{H_0}^0 T d \left( H_c (dH_c/dT) \right) \quad (32)$$

El lado derecho puede ser integrado por partes. El primer término de la integración se desvanece y el segundo término nos conduce a que:

$$\int_0^{T_c} (C^s - C^n) dT = vH_c^2 / 8\pi \quad (33)$$

$$y \quad H_0 = \sqrt{(8\pi/v) \int_0^{T_c} (C^s - C^n) dT} \quad (34)$$

Coincidiendo razonablemente bien con los resultados obtenidos experimentalmente para algunos superconductores como el Vanadio.

En la capacidad calorífica de un material podemos considerar dos contribuciones: la de la red formada por los iones cargados positivamente y la de los electrones. La capacidad calorífica de

la red no se modifica al pasar al estado superconductor, mientras que a bajas temperaturas el calor específico <sup>(3)</sup> de los electrones. en el estado normal es proporcional a la temperatura y en el estado superconductor varia como la exponencial del inverso de la temperatura, esto es:

$$C_n = \gamma T \quad (35)$$

y

$$C_{nl}^s / \gamma T_c = a e^{-bT_c/T} \quad (36)$$

Donde  $\gamma$  es la constante de Sommerfield. La diferencia entre estas dos cantidades puede ser determinado experimentalmente y se usa como un parámetro que sirve para determinar el grado de aplicación de las teorías a los resultados experimentales.

En el siguiente capítulo plantearemos el problema de la transición superconductor y utilizaremos el modelo de dos fluidos.

## REFERENCIAS

- (1) Introducción a la Dinámica Clásica. L. Garcia-Colín  
Editorial Trillas, S.A. de C.V., 1995
- (2) Heat and Thermodynamics. M. W. Zemansky  
Editorial McGraw-Hill, Kogakusha, LTD.
- (3) Matter at low Temperatures.  
P.V.E. McClintock, D. J. Meredith and J. K. Wigmore  
Blackie, LTD. London 1984.



#### 4.1.- EL MODELO DE DOS FLUIDOS

Una de las teorías fenomenológicas que se desarrolló para explicar la superconductividad es la del modelo de dos fluidos de Gorter y Casimer,<sup>(1)</sup> esta teoría se basa en los siguientes postulados:

- 1) El gas de electrones en el superconductor tiene dos componentes. Una está desprovista de entropía y es responsable de la supercorriente. Este es el estado base del sistema.
- 2) La otra componente se comporta como el gas de electrones normal y ocupa los estados excitados del sistema, los cuales están separados del estado base por una brecha de energía.
- 3) No hay interacción entre las componentes y la fracción superconductor (1 -x), aumenta a costa de la fracción normal x, cuando la temperatura decrece abajo de la temperatura crítica. El modelo consiste en suponer que cuando la temperatura del sistema desciende por debajo de la temperatura crítica, los electrones comienzan a caer en el estado base, y el proceso se completa a 0 K cuando todos los electrones están en el estado base.

Este modelo no requiere conocimientos de las propiedades microscópicas del estado base o del mecanismo de su formación. Sin embargo tuvo éxito al describir algunas de las propiedades del sistema.

Gorter y Casimir propusieron una energía libre para el gas de electrones de la forma,

$$G(x,T) = x^{1/2}g_n(T) + (1 - x)g_s(T) \quad (1)$$

Los términos  $g_n(T)$  y  $g_s(T)$  fueron tomados como:

$$g_n(T) = \frac{3\gamma T^2}{2} \quad (2)$$

$$g_s(T) = -\beta \quad \text{constante.} \quad (3)$$

Minimizando  $G(x,T)$  con respecto a  $x$ , para  $T$  fija, obtienen

$$x = \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 \quad (4)$$

Y un calor específico superconductor igual a:

$$C_s = 3\gamma T_c \left( \frac{T}{T_c} \right)^3 \quad (5)$$

Este resultado se aproxima al resultado experimental en la medida que el exponente 1/2 que aparece en la ecuación (1) fué ajustado para tal efecto,<sup>(2)</sup> aunque no hay ninguna justificación física para suponerlo de este modo.

#### 4.2. - MODIFICACION DEL MODELO

En este trabajo partiremos de la idea inicial del modelo de dos fluidos, suponiendo que el gas de electrones está formado por dos componentes: la de los electrones normales y la de los electrones superconductores. A diferencia del modelo que se describió anteriormente, supondremos que ambas componentes contribuyen a la entropía del sistema y a una temperatura dada tenemos una **fracción** de electrones superconductores  $w(T)$  (número de electrones superconductores/ número de electrones **totales**) y una fracción  $1 - w(T)$  de electrones normales. La función  $w(T)$  es continua en el intervalo  $[0, T_c]$  con la condición que:

$$w(T_c) = 0 \quad (6)$$

y

$$w(0) = 1 \quad (7)$$

Como se muestra en la figura 1.

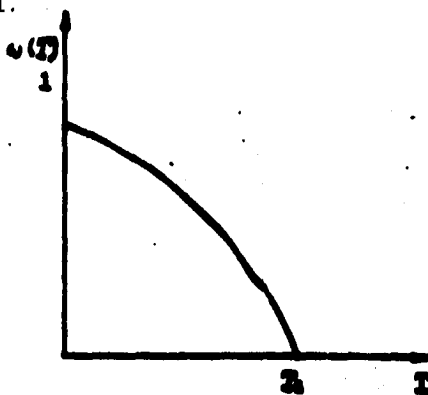


figura 1.

Considerando que el cambio de fase a  $H=0$  es de segundo orden, se imponen las condiciones de continuidad sobre cada una de las fases, de tal manera que si  $g_n(T,0)$  y  $g_s(T,0)$  son las funciones de Gibbs de los electrones normales y los electrones superconductores respectivamente, se satisface que :

$$g_n(T_c) = g_s(T_c) \quad (8)$$

Y la continuidad de sus primeras derivadas implica que la entropía del estado normal y el estado superconductor a la temperatura crítica:

$$S_n(T_c) = S_s(T_c). \quad (9)$$

Supondremos que el cambio entre una fase y otra se da en condiciones de equilibrio termodinámico de tal manera que:

$$d(wg_s) = d((1-w)g_n) \quad (10)$$

Por lo que:

$$\frac{\partial}{\partial T} (wg_s)_n dT + \frac{\partial}{\partial H} (wg_s)_s dH = \frac{\partial}{\partial T} ((1-w)g_n)_n dT + \frac{\partial}{\partial H} ((1-w)g_n)_s dH \quad (11)$$

a  $H$  constante e igual a cero:

$$\frac{d}{dT}(\omega g_s) = \frac{d}{dT}((1 - \omega)g_n) \quad (12)$$

De donde resulta que:

$$\omega g_s = (1 - \omega)g_n + C \quad (13)$$

y que

$$C_s = - \frac{T d^2 g_s}{dT^2} = - \frac{T d^2}{dT^2} \left[ (1 - \omega)g_n + C \right] \quad (14)$$

La teoría BCS<sup>(3)</sup> calcula la contribución electrónica al calor específico en el estado superconductor. Prediciendo un comportamiento exponencial, debido a la excitación térmica de las cargas a través de la brecha de energía que separa los dos estados, que se puede ajustar a bajas temperaturas a la relación

$$\frac{C_s}{\gamma T_c} = a e^{-bT_c/T} \quad (15)$$

Mientras que el calor específico en el estado normal es calculado a partir de un modelo de gas de electrones que se mueven libremente, como<sup>(4)</sup>

$$C_n = \gamma T \quad (16)$$

Usando las relaciones diferenciales entre el calor específico, la entropía y la energía libre expresadas en las ecuaciones (8), (9) del capítulo 2 y a partir de las funciones (15) y (16) se pueden calcular  $s_n$ ,  $g_n$ ,  $s_n$ , y  $g_n$  con 4 constantes por determinar. Las derivadas de cualquier orden de la función exponencial (15) son iguales a cero en  $T = 0$  y su desarrollo en serie es una suma de ceros; por lo que la entropía y la función de Gibbs en el estado superconductor se calcularon numéricamente con el paquete Mathematica. Los detalles de este cálculo se muestran en el apéndice A.

Encontramos  $w(T)$  resolviendo la ecuación (14) con las condiciones (6), (7), (8) y (9) e imponiendo la condición adicional de que  $w(T)$  debe ser una función continua en todo el intervalo  $[0, T_c]$ .

En mediciones del calor específico en superconductores se distinguen contribuciones como las siguientes: 1) términos que se identifican con las vibraciones de la red 2) Un término exponencial que se asocia a los electrones superconductores. En muchos superconductores de alta temperatura se ha podido determinar en mediciones a bajas temperaturas y a campo magnético cero la existencia adicional de un término lineal<sup>(6)</sup>, el cual se puede atribuir a una transición superconductora incompleta; por lo que en principio el modelo que hemos presentado puede ser aplicado

A este tipo de superconductores. Sin embargo en esta trabajo nos restringiremos a aplicar el modelo en algunos materiales en los que la función (15) y los parámetros a y b están determinados en todo el rango de temperaturas entre [0, Tc].

El modelo se aplica en los materiales que se muestran en la tabla I. <sup>(6)</sup>

TABLA I

MATERIAL	$K^{T_c}$	$\gamma$ cal/mol K <sup>2</sup>	a	b
Aluminio	1.20	$3.4 \times 10^{-4}$	6.9	1.28
Vanadio	4.89	$22 \times 10^{-4}$	9	1.5
Estaño	3.74	$4.4 \times 10^{-4}$	9	1.5
U <sub>6</sub> Mn	2.21	$2.36 \times 10^{-4}$	10.13	1.534

Los resultados se mostrarán en la siguiente sección de esta Tesis.

## REFERENCIAS

- (1) Gorter y Casimer (1934).
- (2) High Temperature Superconductivity. Gerald Burns  
Academic Press, Inc. San Diego, CA. 1992
- (3) Sup. Experimental Low-Temperature. Physics Anthony Kent  
MacMillan Physical Science 1993.
- (4) Introducción a la física del estado sólido.  
Reverté 1976.
- (5) E. Phillips, R.A. Fisher et al Phiy Rev. Lett 65,357 (1990)
- (6) K. N. Yang, M.B. Maple, L.E. DeLong, J.G. Huber, A. Junod  
Phys. Rev. B39,151 (1989).



## RESULTADOS

Solucionando la ecuación (14) del capítulo 4 y con las condiciones en  $T = T_c$  y  $T = 0$  encontramos que:

$$w(t) = \frac{\gamma T_c^2 (1 - T^2/T_c^2)/2 + [I_2(T_c) - I_1(T_c) T_c + 2B] (1 - T/T_c)}{-I_2(T) - \gamma T_c T + \gamma T_c^2/2 (1 - T^2/T_c^2) + [I_2(T_c) + 2B] [1 - 2T/T_c] - I_1(T_c) T_c [1 - 3T/T_c]}$$

Donde:

( 1 )

$I_1$ : Integral de la Entropía.

$I_2$ : Integral de la Energía Libre.

$B$ : Energía libre en el estado normal  $T = 0$ .

$B$  es un parámetro que podemos variar en un intervalo ( $B_{min}, B_{max}$ ) en el cual  $w(T)$  es continua.

$B_{min}$  y  $B_{max}$  se calcularon igualando a cero el denominador de la ecuación (1) y con  $T = 0$  y  $T = T_c$  respectivamente. Para valores de  $B$  fuera de este intervalo, obtenemos un polo en  $w(T)$  entre  $[0, T_c]$  que no tiene sentido físico.

La Entropía en los estados normal y superconductor está dado por:

$$s_n(T) = \gamma T + I_2(T_c)/T_c - I_1(T_c) + 2B/T_c \quad ( 2 )$$

$$s_s(T) = I_1(T) + \gamma T_c + I_2(T_c)/T_c - 2I_1(T_c) + 2B/T_c \quad ( 3 )$$

La función de Gibbs en ambos estados es:

$$g_n(T) = -\gamma T^2/2 - [I_2(T_c)/T_c - I_1(T_c) + 2B/T_c]T + B \quad (4)$$

$$g_s(T) = -I_2(T) - [\gamma T_c + I_2(T_c)/T_c - 2I_1(T_c) + 2B/T_c]T + \gamma T_c^2/2 + I_2(T_c)T_c + B \quad (5)$$

Estas funciones se calcularon para cada uno de los materiales que aparecen en la Tabla I del capítulo anterior y se vió que las gráficas de todos los materiales son similares por lo que sólo se muestra las gráficas del aluminio.

En las figuras 1,2, y 3 se muestran las curvas correspondientes al estado normal con una línea interrumpida ( - . - ) y a las correspondientes al estado superconductor con una línea continua ( \_\_\_\_\_ ).

En la figura 1 el calor específico en función de la temperatura.

En la figura 2 la entropía notándose que en  $T = T_c$  ambos estados tienen la misma entropía.

En la figura 3 se muestra la energía libre observándose que en  $T = T_c$  se satisface la condición requerida.

En la figura 4 se muestra la fracción de electrones superconductores como función de la temperatura. La curva continua corresponde a un valor de B igual a 1.7 y la línea interrumpida se obtuvo con un valor de B igual a .9; para valores de B fuera del intervalo (.856825, 1.71365) la función  $\omega(T)$  tiene un polo entre  $[0, T_c]$ .

C (cal/molK)

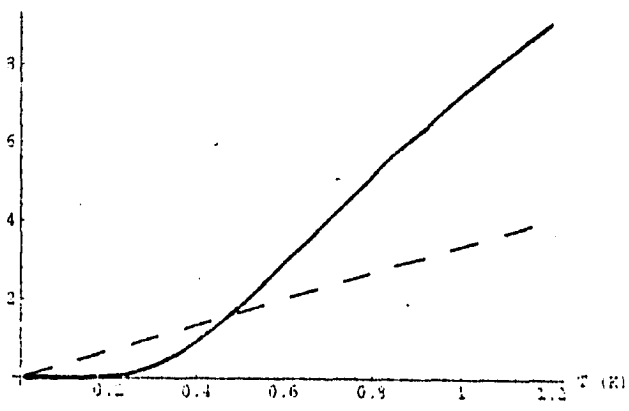


Figura 1

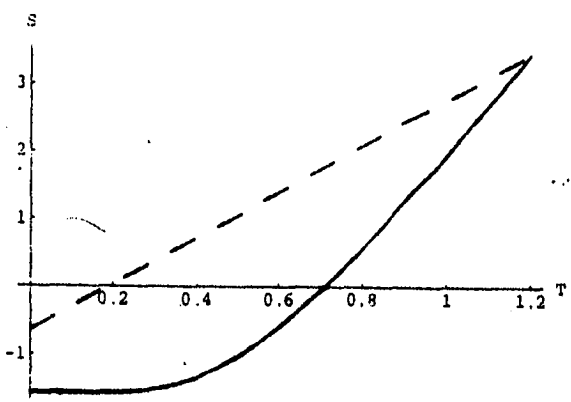


Figura 2

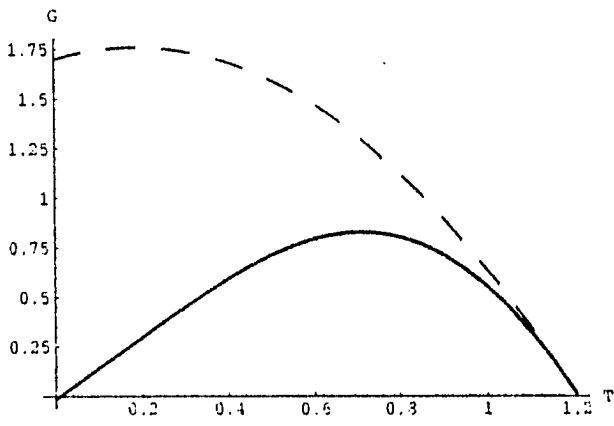


Figura 3

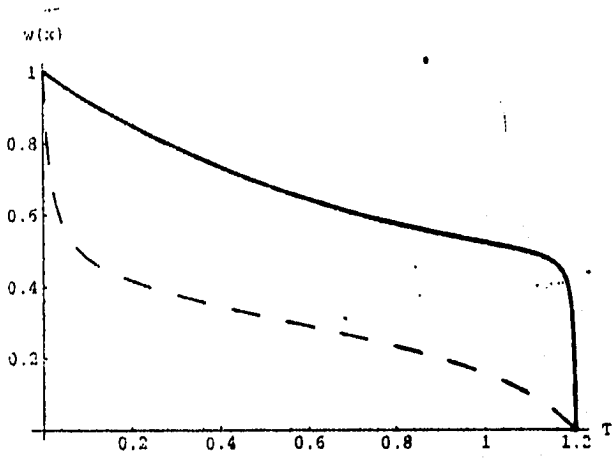


Figura 4

## CONCLUSIONES

El objetivo de esta tesis fué el estudiar la transición de fase superconductor a  $H = 0$  la cual es de segundo orden, utilizando para ello el modelo de dos fluidos modificado.

Encontramos la fracción de electrones superconductiva  $W(T)$  como función de la temperatura, la cual satisface las condiciones impuestas.

El modelo nos sirvió para estudiar propiedades termodinámicas en materiales superconductores de baja temperatura para los cuales se ha calculado teóricamente el calor específico superconductor.

Encontramos que a bajas temperaturas salen entropías negativas lo cual nos indica dos situaciones posibles:

1) Que no todos los electrones son superconductores a  $T = 0$ .

ó

2) Que la expresión del calor específico no sea válida para todo el rango de temperaturas.

Para dilucidar entre estas dos orientaciones tendremos que continuar con esta investigación ya que hasta el momento podemos considerar ambas orientaciones como igualmente posibles.

A lo largo del trabajo utilizamos ecuaciones diferenciales para representar las relaciones entre las funciones con significado físico en este problema en particular.

La solución de las ecuaciones diferenciales del problema junto con las condiciones de frontera indicadas, nos llevo al avance del estudio de este tema que resulta tan interesante como actual y el cual he decidido seguir investigando.

## APENDICE A

Mathematica es un programa de aplicación en matemáticas. La primera versión de este software se presentó en 1988 y fue desde entonces reconocido como un importante avance en tecnología de las matemáticas. La versión que se utilizó para realizar este trabajo es la 2.2 para computadoras NeXT. De las numerosas aplicaciones que tiene este paquete, en esta ocasión se utilizó como una calculadora numérica y un sistema de visualización para funciones y datos. Describimos a continuación las operaciones en las que este paquete nos resultó de mayor utilidad.

1) En la integración numérica de la función:

$$f(T) = \frac{e^{-bTc/T}}{T}$$

Debido a la relación que existe entre esta función y la función  $s(T)$  llamada entropía expresada a través de la ecuación diferencial (9) del capítulo 3, tenemos que :

$$s(T) - s(0) = \text{IIN}[f(t), \{t, 0, T\}] = \text{II1}(T)$$

En esta expresión hemos utilizado la notación de Mathematica para indicar la integración numérica. Donde 0 y T son los límites de integración. Es necesario aclarar que en nuestra aproximación tomamos  $10^{-6}$  como cero.

2) Con el resultado anterior se contruyó la función  $I_1(T)$  por medio de la interpolación de 100 puntos obtenidos de la integración numérica  $I_{11}(T)$  para 100 valores distintos. De tal forma que

$$s(T) = s(0) + I_1(T)$$

3) La segunda integración numérica  $I_{12}[I_1(t), \{t, 0, T\}]$  se realizó con la función que se interpoló en el paso descrito anteriormente. Con los resultados obtenidos se interpoló con 100 puntos una nueva función. A la función resultante de este proceso la llamamos  $I_2(T)$ .

4) La ecuación diferencial (8) del capítulo 3 nos da la relación que existe entre  $s(T)$  y la función  $g(T)$  llamada energía libre y de ésta obtenemos que:

$S(T)$  y  $g(T)$  son la entropía y la energía libre en el estado superconductor. De la solución de las ecuaciones para el estado normal y el estado superconductor obtenemos 4 constantes:  $g(0)$ ,  $s(0)$ ,  $A$  y  $B$ . Con éstas y la constante  $C$  que aparece en la ecuación (13) del capítulo 4 se generó un sistema de 4 ecuaciones y cinco incógnitas. Las 4 ecuaciones provienen de las condiciones establecidas en (6), (7), (8) y (9) en el mismo capítulo. Las soluciones de este sistema se encontraron en términos de una de las constantes ( $B$ ). Esta fue variada en un intervalo ( $B_{min}$ ,  $B_{max}$ ).



```

Cs[a_,b_,Tc_,g_,t_]:=a*g*Tc*Exp[-b*Tc/t]/t
IS[a_,b_,Tc_,g_,t_]:=NIntegrate
[Cs[a,b,Tc,g,x],{x,0,t}]

I1v[a_,b_,Tc_,g_,t_]:=Interpolation[{0,0},
{t1,IS[a,b,Tc,g,t1]},
{t2,IS[a,b,Tc,g,t2]},{t3,IS[a,b,Tc,g,t3]},
{t4,IS[a,b,Tc,g,t4]},{t5,IS[a,b,Tc,g,t4]},
{tn,IS[a,b,Tc,g,tn]}]

IG[a_,b_,Tc_,g_,t_]:=NIntegrate[I1[a,b,Tc,g,x],{x,0,t}]
I2v[a_,b_,Tc_,g_,t_]:=Interpolation[{0,0},{t1,
IG[a,b,Tc,g,t1]},
{t2,IG[a,b,Tc,g,t2]},{t3,IG[a,b,Tc,g,t3]},
{t4,IG[a,b,Tc,g,t4]},{t5,IG[a,b,Tc,g,t4]},
{tn,IG[a,b,Tc,g,tn]}]

ss[a_,b_,Tc_,B_,g_,t_]:=I1[a,b,Tc,g,t]+I2[a,b,Tc,g,Tc]/Tc
-2*I1[a,b,Tc,g,Tc]+2*B/Tc+g*Tc

sn[a_,b_,Tc_,B_,g_,t_]:=g*t+I2[a,b,Tc,g,Tc]/Tc-
I1[a,b,Tc,g,Tc]+2*B/Tc

gs[a_,b_,Tc_,B_,g_,t_]:=-I2[a,b,Tc,g,t]-(g*Tc+
I2[a,b,Tc,g,Tc]/Tc-2*I1[a,b,Tc,g,Tc]
+2*B/Tc)*t+g*Tc^2/2-I1[a,b,Tc,g,Tc]*Tc+
I1[a,b,Tc,g,Tc]+B

gn[a_,b_,Tc_,B_,g_,t_]:=-g*t^2/2-(I2[a,b,Tc,g,Tc]/Tc-
I1[a,b,Tc,g,Tc]+2*B/Tc)*t+B

.w[a_,b_,Tc_,B_,g_,t_]:=
(g*tc^2*(1-t^2/Tc^2)/2+(
I2[a,b,Tc,g,Tc]-
I1[a,b,Tc,g,Tc]*Tc+2*B)*(1-t/tc))/(-I2[a,b,Tc,g,t]-
g*Tc*t+g*Tc^2/2*(1-t^2/Tc^2)+(I2[a,b,Tc,g,Tc]+2*B)*
(1-2*t/Tc)-I1[a,b,Tc,g,Tc]*Tc*(1-3t/Tc))

Cs[6.9,1.128,1.2,3.4,t]
20.152
g 1.3536/t t

I1[s_]:=NIntegrate[Cs[6.9,1.128,1.2,3.4,x],
{x,.000001,s}]

```

```

I1=Interpolation[{{0,0},{.01,XX1[.01]}
, {.02,XX1[.02]},{.03,XX1[.03]},{.04,XX1[.04]},{.05,XX1[.05]}
{.06,XX1[.06]},{.07,XX1[.07]},{.08,XX1[.08]},{.09,XX1[.09]}
{.10,XX1[.10]},{.11,XX1[.11]},{.12,XX1[.12]},{.13,XX1[.13]}
{.14,XX1[.14]},{.15,XX1[.15]},{.16,XX1[.16]},{.17,XX1[.17]}
{.18,XX1[.18]},{.19,XX1[.19]},{.20,XX1[.20]},{.21,XX1[.21]}
{.22,XX1[.22]},{.23,XX1[.23]},{.24,XX1[.24]},{.25,XX1[.25]}
{.26,XX1[.26]},{.27,XX1[.27]},{.28,XX1[.28]},{.29,XX1[.29]}
{.30,XX1[.30]},{.31,XX1[.31]},{.32,XX1[.32]},{.33,XX1[.33]}
{.34,XX1[.34]},{.35,XX1[.35]},{.36,XX1[.36]},{.37,XX1[.37]}
{.38,XX1[.38]},{.39,XX1[.39]},{.40,XX1[.40]},{.41,XX1[.41]}
{.42,XX1[.42]},{.43,XX1[.43]},{.44,XX1[.44]},{.45,XX1[.45]}
{.46,XX1[.46]},{.47,XX1[.47]},{.48,XX1[.48]},{.49,XX1[.49]}
{.50,XX1[.50]},{.51,XX1[.51]},{.52,XX1[.52]},{.53,XX1[.53]}
{.54,XX1[.54]},{.55,XX1[.55]},{.56,XX1[.56]},{.57,XX1[.57]}
{.58,XX1[.58]},{.59,XX1[.59]},{.60,XX1[.60]},{.61,XX1[.61]}
{.62,XX1[.62]},{.63,XX1[.63]},{.64,XX1[.64]},{.65,XX1[.65]}
{.66,XX1[.66]},{.67,XX1[.67]},{.68,XX1[.68]},{.69,XX1[.69]}
{.70,XX1[.70]},{.71,XX1[.71]},{.72,XX1[.72]},{.73,XX1[.73]}
{.74,XX1[.74]},{.75,XX1[.75]},{.76,XX1[.76]},{.77,XX1[.77]}
{.78,XX1[.78]},{.79,XX1[.79]},{.80,XX1[.80]},{.81,XX1[.81]}
{.82,XX1[.82]},{.83,XX1[.83]},{.84,XX1[.84]},{.85,XX1[.85]}
{.86,XX1[.86]},{.87,XX1[.87]},{.88,XX1[.88]},{.89,XX1[.89]}
{.90,XX1[.90]},{.91,XX1[.91]},{.92,XX1[.92]},{.93,XX1[.93]}
{.94,XX1[.94]},{.95,XX1[.95]},{.96,XX1[.96]},{.97,XX1[.97]}
{.98,XX1[.98]},{.99,XX1[.99]},{1.0,XX1[1.00]},{1.1,XX1[1.1]}
{1.11,XX1[1.11]},
{1.12,XX1[1.12]},{1.13,XX1[1.13]},{1.14,XX1[1.14]}
, {1.15,XX1[1.15]},{1.16,XX1[1.16]},{1.17,XX1[1.17]},
{1.18,XX1[1.18]},{1.19,XX1[1.19]},{1.20,XX1[1.20]}}]
InterpolatingFunction[{{0, 1.2}, <>]

I1[1.2]
5.00372

I12[u_]:=NIntegrate[I1[x], {x, .000001, u}]

```

```

I2=Interpolation[{{(0,0),(0.01,I2[.01])
, (0.02,I2[.02]), (0.03,I2[.03]), (0.04,I2[.04]), (0.05,I2[.05]
(0.06,I2[.06]), (0.07,I2[.07]), (0.08,I2[.08]), (0.09,I2[.09])
(.10,I2[.10]), (.11,I2[.11]), (.12,I2[.12]), (.13,I2[.13])
(.14,I2[.14]), (.15,I2[.15]), (.16,I2[.16]), (.17,I2[.17])
(.18,I2[.18]), (.19,I2[.19]), (.20,I2[.20]), (.21,I2[.21])
(.22,I2[.22]), (.23,I2[.23]), (.24,I2[.24]), (.25,I2[.25])
(.26,I2[.26]), (.27,I2[.27]), (.28,I2[.28]), (.29,I2[.29])
(.30,I2[.30]), (.31,I2[.31]), (.32,I2[.32]), (.33,I2[.33])
(.34,I2[.34]), (.35,I2[.35]), (.36,I2[.36]), (.37,I2[.37])
(.38,I2[.38]), (.39,I2[.39]), (.40,I2[.40]), (.41,I2[.41])
(.42,I2[.42]), (.43,I2[.43]), (.44,I2[.44]), (.45,I2[.45])
(.46,I2[.46]), (.47,I2[.47]), (.48,I2[.48]), (.49,I2[.49])
(.50,I2[.50]), (.51,I2[.51]), (.52,I2[.52]), (.53,I2[.53])
(.54,I2[.54]), (.55,I2[.55]), (.56,I2[.56]), (.57,I2[.57])
(.58,I2[.58]), (.59,I2[.59]), (.60,I2[.60]), (.61,I2[.61])
(.62,I2[.62]), (.63,I2[.63]), (.64,I2[.64]), (.65,I2[.65])
(.66,I2[.66]), (.67,I2[.67]), (.68,I2[.68]), (.69,I2[.69])
(.70,I2[.70]), (.71,I2[.71]), (.72,I2[.72]), (.73,I2[.73])
(.74,I2[.74]), (.75,I2[.75]), (.76,I2[.76]), (.77,I2[.77])
(.78,I2[.78]), (.79,I2[.79]), (.80,I2[.80]), (.81,I2[.81])
(.82,I2[.82]), (.83,I2[.83]), (.84,I2[.84]), (.85,I2[.85])
(.86,I2[.86]), (.87,I2[.87]), (.88,I2[.88]), (.89,I2[.89])
(.90,I2[.90]), (.91,I2[.91]), (.92,I2[.92]), (.93,I2[.93])
(.94,I2[.94]), (.95,I2[.95]), (.96,I2[.96]), (.97,I2[.97])
(.98,I2[.98]), (.99,I2[.99]), (1.0,I2[1.00]), (1.1,I2[1.1]
(1.11,I2[1.11]),
(1.12,I2[1.12]), (1.13,I2[1.13]), (1.14,I2[1.14])
, (1.15,I2[1.15]), (1.16,I2[1.16]), (1.17,I2[1.17]),
(1.18,I2[1.18]), (1.19,I2[1.19]), (1.20,I2[1.20])}]
InterpolatingFunction[{{0, 1.2}, <>]

```

```
I2[1.2]
```

```
1.84281
```

```

salnor[Tc_,B_,g_,t_]:=g*t + I2[1.2]/Tc -I1[1.2] + 2*B/Tc
(-1.7*(1.2)^2 -I2[1.2] + I1[1.2]*1.2)/2

```

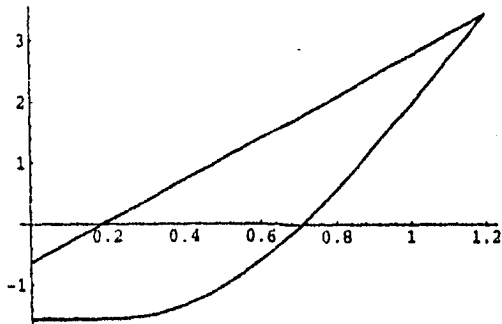
```
0.856825
```

```

salnup[Tc_,B_,g_,t_]:=I1[t] +I2[Tc]/Tc -
2*I1[Tc] + 2*B/Tc + g*Tc

```

Plot[{salsup[1.2,1.7,3.4,t],salnor[1.2,1.7,3.4,t]},(t,0,1.2)



-Graphics-

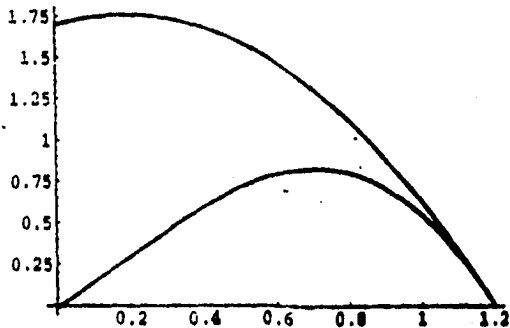
I2[Tc]

InterpolatingFunction[{0, 1.2}, <>][Tc]

gals[Tc\_,B\_,g\_,t\_]:= -I2[t] - (g\*Tc + I2[1.2]/Tc - 2\*I1[1.2] + 2\*B/Tc)\*t + g\*Tc^2/2 + I2[1.2] + B - I1[1.2]\*Tc

elgaln[Tc\_,B\_,g\_,t\_]:= -g\*t^2/2 - (I2[1.2]/Tc - I1[1.2] + 2\*B/Tc)\*t + B

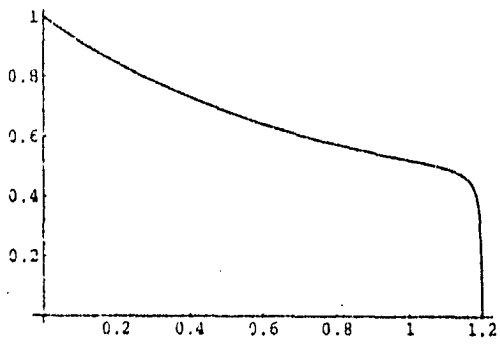
Plot[{gals[1.2,1.7,3.4,t],elgaln[1.2,1.7,3.4,t]},(t,0,1.2)]



-Graphics-

ww[Tc\_,B\_,g\_,t\_]:= (g\*Tc^2/2\*(1-t^2/Tc^2) + (I2[1.2] - I1[1.2]\*Tc + 2\*B)\*(1 - t/Tc))/(-I2[t] - g\*Tc\*t + g\*Tc^2\*(1 - t^2/Tc^2)/2 + (I2[1.2] + 2\*B)\*(1 - 2\*t/Tc) - I1[1.2]\*Tc\*(1 - 3t/Tc))

Plot[ww[1.2,1.7,3.4,t],{t,0,1.2}]



-Graphics-