



00365

A  
2ej

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

# **TOMOGRAFIA FRACTAL**

# **T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE  
MAESTRIA EN CIENCIAS (MATEMATICAS)**

**P R E S E N T A**

**LUIS EDUARDO FALCON MORALES**

**DIRECTOR DE TESIS**

**DR. FERNANDO BRAMBILA PAZ**

**CODIRECTORA DE TESIS**

**DRA. FLOR DE MA. ACEFF SANCHEZ**

**MEXICO, D.F.**

**1996**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**a mi hija**

**ITZEL**

*a mis padres  
Hilda y Manuel*

### *AGRADECIMIENTO*

En estas líneas quiero agradecer a todas aquellas personas que me apoyaron para que este trabajo fuera posible. En particular a mi director de tesis Dr. Fernando Brambila Paz, al Dr. Carlos Fuentes Ruiz y al M. en C. Roberto Mercado.

Asimismo quiero hacer constar mi más sincero agradecimiento a la Universidad de Guadalajara por el apoyo que me han brindado para el desarrollo de este trabajo.

## CONTENIDO

<i>Capítulo 0. Introducción</i> .....	1
<i>Capítulo 1. Porosidad y Dimensión Fractal</i> .....	12
1.1 Conjuntos- $sP$ .....	13
1.2 Conjuntos Tridimensionales.....	18
<i>Capítulo 2. Algebra de Conjuntos</i> .....	22
2.1 Medida exterior métrica.....	28
<i>Capítulo 3. Medida y Dimensión de Hausdorff</i> .....	32
3.1 Contracciones y propiedades de $H^s$ .....	38
3.2 Medidas de Hausdorff y Lebesgue.....	40
3.3 Dimensión de Hausdorff.....	42
<i>Capítulo 4. Medidas y Dimensiones Alternativas</i> .....	48
4.1 Dimensión Box-Counting.....	48
4.2 Construcción de Carathéodory.....	51
<i>Capítulo 5. Lemmas Previos</i> .....	54
5.1 Desigualdades Integrales.....	58
5.2 Propiedades de Densidad.....	62

<i>Capítulo 6. Propiedades de Densidad.....</i>	67
<i>Capítulo 7. Proyección de Fractales.....</i>	71
7.1 Proyección sobre un subespacio de menor dimensión.....	71
7.2 Medida de Hausdorff y Capacidad.....	77
7.3 Proyección sobre un subespacio de mayor dimensión.....	81
<i>Capítulo 8. Intersección con Subespacios.....</i>	85
<i>Capítulo 9. Producto Cartesiano.....</i>	101
9.1 Subconjuntos de medida finita.....	103
9.2 Producto cartesiano de conjuntos.....	109
<i>Capítulo 10. Conjuntos Auto-Similares.....</i>	114
10.1 Métrica de Hausdorff.....	115
<i>Capítulo 11. Conjuntos de Cantor.....</i>	125
11.1 Conjunto Ternario de Cantor.....	125
11.2 Conjunto Uniforme de Cantor.....	127
11.3 Series y Conjuntos de Cantor.....	128
11.4 Factores de contracción.....	129
11.5 Aproximaciones mediante un Cantor Uniforme.....	132
11.6 Cantor Afín.....	135

*Conclusiones* ..... 139

*Bibliografía* ..... 144

*Apéndice A*

*Apéndice B*

*Apéndice C*

*Apéndice D*

# CAPITULO 0

## INTRODUCCION

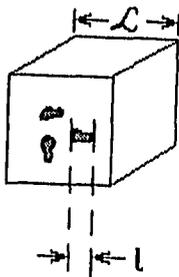
# 0. INTRODUCCIÓN

Entre los fenómenos estudiados por la física de suelos los procesos de transferencia de agua ocupan un lugar importante, particularmente en la agricultura. Para el estudio de estos procesos se han desarrollado ecuaciones diferenciales fundadas más o menos sobre la experiencia o calcadas en base a otros formalismos que aparecen en las ciencias experimentales. La ecuación largamente utilizada para describir la transferencia de agua en el suelo es una ecuación Fokker-Planck no lineal. Es muy afortunado el hecho de que esta ecuación sea precisamente la que rige estos procesos en el suelo, ya que algunas soluciones obtenidas en el dominio de la matemática de difusión de probabilidades han sido adaptadas para ciertas condiciones específicas a la transferencia de agua en el suelo — en particular soluciones de los problemas de difusión del calor y difusión de los gases —. Nuevas soluciones han sido igualmente propuestas. La física de suelos ha por lo tanto enriquecido con sus soluciones el universo de la ecuación Fokker-Planck. Pero ella también ha suscitado numerosos problemas.

Veamos como surge la ecuación de Fokker-Planck, para lo cual necesitaremos algunos conceptos preliminares.

Un *medio poroso* es una estructura sólida continua la cual tiene gran cantidad de espacios vacíos, o poros, en ella. En ciertos sólidos porosos los espacios vacíos no están conectados o bien la conexión es demasiado estrecha, lo cual impedirá que un fluido fluya a través de ellos. A dichos medios porosos los llamaremos *impermeables* al flujo de fluidos. Si, en cambio, los poros de un medio poroso están interconectados de manera que un fluido fluya a través de ellos llamaremos *permeable* a dicho medio. En este trabajo nos abocaremos al estudio de medios porosos permeables.

Consideremos un medio poroso con estructura aleatoria. La medida promedio ( $\phi$ ) de una cantidad dada  $\phi(x)$  se define como el promedio de esta cantidad sobre una cantidad independiente de experimentos hechas en dicho medio poroso. El medio se llamará *homogéneo* si estadísticamente el comportamiento geométrico no depende de la posición. Los medios porosos homogéneos se caracterizan por ser estadísticamente 'invariantes' bajo traslaciones, y por la existencia de dos longitudes de escala. Dichas escalas son:



- (i) la longitud de escala  $l$  de una partícula promedio del medio poroso,
- (ii) la longitud de escala  $L$  de la frontera exterior del medio poroso.

Se considera que  $l \ll L$ . La existencia de esta desigualdad permite la introducción de una longitud de escala intermedia  $\bar{L}$  tal que

$$l \ll \bar{L} \ll L. \quad (0.1)$$

Esta diferencia de escalas nos permitirá estudiar el medio poroso desde los puntos de vista 'microscópico' y 'macroscópico'.

### Escala macroscópica

Veamos primeramente el razonamiento a escala 'macroscópica'  $\mathcal{L}$  según (0.1).

Consideremos el movimiento de un fluido cuyo volumen de líquido contenido en una unidad de volumen de suelo está dado por  $\theta(x, y, z, t)$  y con un campo vectorial de velocidad  $\vec{q}(x, y, z, t)$ . Supondremos que  $\vec{q}(x, y, z, t)$  es un campo vectorial continuamente diferenciable en  $\mathbb{R}^3$  para cada tiempo  $t$ , y  $\theta(x, y, z, t)$  una función de valor real continuamente diferenciable. A  $\theta(x, y, z, t)$  se le conoce como *contenido volumétrico de agua*.

Definimos  $\vec{J} = \theta \vec{q}$  el vector 'flujo' de volumen de agua. Sea  $\Omega$  una región fija arbitraria en  $\mathbb{R}^3$ , limitada por la superficie  $S \equiv \partial\Omega$ . Entonces, el volumen total de fluido que pasa a través de la frontera de  $\Omega$ , del interior hacia el exterior, en una unidad de tiempo está dada por

$$\int_{\partial\Omega} \theta (\vec{q} \cdot \vec{n}) dS$$

o bien

$$\int_{\partial\Omega} \vec{J} \cdot \vec{n} dS \quad (0.2)$$

donde  $\vec{n}$  es el vector normal hacia afuera en cada punto de  $S$ . Aplicando en (0.2) el teorema de la divergencia de Gauss obtendremos que el volumen total del fluido que sale de  $\Omega$  en la unidad de tiempo a través de su frontera es, [ver Courant/John],

$$\int_{\partial\Omega} \vec{J} \cdot \vec{n} dS = \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{J} dx dy dz$$

o bien

$$\int_{\partial\Omega} \theta \vec{q} \cdot \vec{n} dS = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\theta \vec{q}) dx dy dz. \quad (0.3)$$

Por otro lado, el volumen total de fluido contenido en  $\Omega$  en cualquier instante está dado mediante  $\int_{\Omega} \theta dx dy dz$ , por lo que la disminución por unidad de tiempo del volumen de fluido contenido en  $\Omega$  es, ya que  $\theta(x, y, z, t) \in C^1$ ,

$$-\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \theta dx dy dz = - \int_{\Omega} \frac{\partial \theta}{\partial t} dx dy dz. \quad (0.4)$$

Suponiendo que se cumple la ley de conservación de la masa y si no existen fuentes ni sumideros de fluido en  $\Omega$ , entonces, la cantidad total del volumen del fluido que sale de  $\Omega$  a través de la superficie  $\partial\Omega$ , ecuación (0.3), debe ser exactamente igual a la pérdida de volumen de fluido contenido en  $\Omega$ , ecuación (0.4). Es decir, en cualquier instante  $t$  y para cualquier región  $\Omega$

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\theta \vec{q}) dx dy dz = - \int_{\Omega} \frac{\partial \theta}{\partial t} dx dy dz$$

o bien

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot (\theta \overline{\mathbf{q}}) \right] dx dy dz = 0,$$

como el integrando es continuo y la región  $\Omega$  arbitraria, tendremos que

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot (\theta \overline{\mathbf{q}}) = 0 \quad (0.5)$$

lo cual expresa la *ley de conservación de la masa* para el movimiento de fluidos.

Sea  $H(x, y, z, t)$  la energía potencial que contiene el agua por unidad de peso en un tiempo  $t$ , y el cual es igual a la suma del potencial de presión del agua en el suelo  $\Psi$ , y del potencial gravitacional que asociaremos a la coordenada del eje  $z$  orientada positivamente hacia abajo. Así  $H$  tiene unidades de longitud. Además  $\nabla H$  representa el gradiente de la energía potencial y es directamente proporcional al campo vectorial de velocidad  $\overline{\mathbf{q}}$  de acuerdo a la ley de Darcy, la cual se expresa como

$$\overline{\mathbf{q}} = -K \nabla H \quad (0.6)$$

donde  $K$  es llamado *coeficiente de conductividad hidráulica*. De dicha igualdad obtenemos que  $K$  tiene unidades de velocidad. Así la ley de Darcy nos indica que el campo de velocidad del agua en un medio poroso estará generado por la fuerza gravitacional en cada punto del agua, y por la fuerza de presión que ejerce en dicho punto el agua que se encuentra en la superficie.

El coeficiente de conductividad hidráulica es una constante que expresa la facilidad con que el agua atraviesa un suelo. La magnitud del coeficiente de conductividad depende de la viscosidad del agua y de la geometría (tamaño, forma y área de los poros) del suelo a través del cual fluye el agua [ver la ecuación (0.10).]

En la mayoría de los suelos el valor de  $K$  depende además de la dirección en que se produzca el movimiento del agua (por ejemplo, si el fluido se mueve en dirección paralela o perpendicular a los planos de estratificación), o bien, el valor de  $K$  variará si el suelo está formado de diversos materiales distribuidos irregularmente. Así, para determinar el valor de  $K$  la geometría del suelo juega un factor primordial y difícil de controlar en el flujo de un fluido a través de un medio poroso. Luego, expresaremos mediante  $K(\theta)$  la dependencia del coeficiente de conductividad hidráulica en la geometría del suelo.

Asimismo, el contenido volumétrico de agua en una unidad de volumen del suelo dependerá del potencial de presión del agua en el suelo  $\Psi$ , lo cual se expresará como  $\theta(\Psi)$ .

Las relaciones  $K(\theta)$  y  $\theta(\Psi)$  son conocidas como las *características hidrodinámicas* del suelo, y la experiencia muestra que dichas relaciones son altamente no lineales.

La introducción de la difusividad hidráulica definida por  $D(\theta) = \frac{K(\theta)}{C(\theta)}$ , donde  $C(\theta) = \frac{d\theta}{d\Psi}$  es la capacidad específica, nos lleva, con (0.5) y (0.6), a la

ecuación

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot [D(\theta) \nabla \theta] - \frac{dK}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad (0.7)$$

que es la ecuación que nos describe el comportamiento de un fluido a través de un medio poroso, y la cual es del tipo Fokker-Planck.

Obviamente para resolver la ecuación (0.7) es necesario conocer las características hidrodinámicas del suelo  $K(\theta)$  y  $\theta(\Psi)$ . Esto puede alcanzarse siguiendo dos caminos, los cuales pueden ser complementarios:

- (i) medición y solución del problema inverso,
- (ii) a partir de las propiedades geométricas del suelo.

En este trabajo estudiaremos el segundo de estos casos.

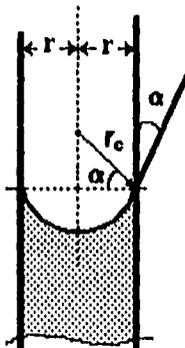
Para hacer explícita las relaciones entre la geometría y las características hidrodinámicas del suelo, se utilizan ampliamente las siguientes dos leyes, en las cuales se considerará ahora una escala microscópica  $l$  según (0.1).

#### Escala microscópica

El médico francés J.L. Poiseuille (1799-1869) interesado en el flujo de la sangre en las venas y los capilares llegó a investigar el flujo en tuberías de diámetros pequeños. Sus resultados se resumen en la llamada ley de Poiseuille la cual relaciona la velocidad media del agua  $\bar{v}$  en un capilar cilíndrico, asociado a un poro de radio  $r$ , y el gradiente de energía  $H$  de tal manera que

$$\bar{v} = -\frac{\rho_w g}{8\mu} r^2 \nabla H \quad (0.8)$$

donde  $\rho_w$  es la densidad del agua;  $\mu$  la viscosidad dinámica del agua y  $g$  la constante gravitacional. La viscosidad dinámica se define como *viscosidad/densidad*.



Por menisco se entiende la concavidad o convexidad que forma la superficie de un líquido con la pared del sólido que lo contiene.

En la mayoría de los problemas de fluidos el efecto de la tensión superficial puede considerarse insignificante; sin embargo en el fenómeno de ascenso o descenso de un líquido en un tubo capilar, la tensión superficial tiene un papel predominante. Esto se observa en la ley de Laplace, la cual relaciona el potencial de presión del agua en el suelo  $\Psi$ , con el radio medio de curvatura  $r_c$  del menisco de agua en un poro de radio  $r$  mediante la expresión

$$\Psi = -\frac{2\sigma}{\rho_w g r_c}$$

donde  $\sigma$  es la tensión superficial en la interface agua-aire. Los radios de curvatura y poro se relacionan a través del ángulo de contacto  $\alpha$  entre el menisco del agua y las partículas del suelo mediante  $r = r_c \cos(\alpha)$ . Ver figura.

Así, de acuerdo a (0.1), la ley de Darcy proporciona una velocidad media en un sentido 'macroscópico'  $\mathcal{L}$ , ya que es el flujo de agua por una unidad de superficie que contiene poros y partículas, mientras que la ley de Poiseuille proporciona una velocidad media en un poro, es decir, en un sentido 'microscópico'  $l$ .

### Geometría del suelo

Para obtener un modelo conceptual que relacione la conductividad hidráulica  $K(\theta)$  con la geometría del suelo, consideremos un 'escurrimiento' del agua siguiendo la dirección del eje  $z$  y hagamos un corte perpendicular a dicho eje dividiendo en dos el sólido poroso y obteniendo así dos secciones de área total  $A_T$  cada una (ver Figura.) En ingeniería usualmente se está más interesado en la razón de flujo volumétrico total  $Q$  que en la velocidad local  $\vec{v}$ . Para ello se define  $Q$ , en un flujo de velocidad uniforme, como el producto de la velocidad y la sección de área normal al flujo. El flujo total de agua  $Q$ , a escala microscópica  $l$  según (0.1), y que atraviesa un área elemental  $dA$  será entonces

$$dQ = \vec{v} dA,$$

de donde el flujo total con respecto al área total, es decir a escala macroscópica  $\mathcal{L}$  según (0.1), estará dado por

$$\frac{dQ}{A_T} = \vec{v} \frac{dA}{A_T}$$

o bien, en términos del diferencial de área relativa  $d\varphi = dA/A_T$

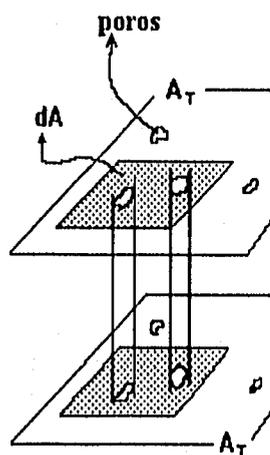
$$dq = \vec{v} d\varphi$$

donde  $q$  es el llamado flujo de Darcy:  $dq = dQ/A_T$ . Si  $\Omega$  representa el dominio de los poros llenos de agua en una sección unitaria de suelo (a escala macroscópica  $\mathcal{L}$ ),  $\vec{v}$  la velocidad media sobre todos estos poros (a escala microscópica  $l$ ) y  $\varphi$  un área relativa, entonces  $\int_{\Omega} \vec{v} d\varphi$  será el flujo de agua a través de  $\Omega$ , que es precisamente el flujo de Darcy  $q$  a escala  $\mathcal{L}$ . Con base a esto y usando (0.8)

$$q = \int_{\Omega} \vec{v} d\varphi = - \left( \frac{\rho_w g}{8\mu} \int_{\Omega} r^2 d\varphi \right) \nabla_z H. \quad (0.9)$$

Al relacionar esta expresión con la ley de Darcy (0.6) obtendremos la relación entre la conductividad hidráulica  $K$  y la geometría del suelo, i.e. los tamaños de los poros  $r$ , de manera tal que

$$K(\Omega) = \frac{\rho_w g}{8\mu} \int_{\Omega} r^2 d\varphi. \quad (0.10)$$



Es conveniente diferenciar en esta expresión los diferentes efectos debidos por una parte a las propiedades del fluido y por otra a la geometría del suelo. Para ello introducimos el *coeficiente de permeabilidad*  $k$  que por definición está dado como

$$k(\Omega) = \frac{1}{8} \int_{\Omega} r^2 d\varphi, \quad (0.11)$$

de tal manera que  $K = k\rho_w g/\mu$ .

### Porosidad y Saturación

Es importante hacer notar que el contenido de agua en una unidad de volumen de suelo  $\theta$  está acotado. La cota superior se llama *porosidad volumétrica total del suelo* o simplemente *porosidad*, se denota como  $\phi$  y se define como

$$\phi = \frac{V_V}{V_T} = \frac{\text{Volumen Total de Vacío}}{\text{Volumen Total de Suelo}} \quad (0.12)$$

donde  $V_T = V_S + V_V$ , siendo  $V_S$  el volumen total de sólido.

Siendo  $\phi$  cota superior tendremos  $0 < \theta < \phi$ , y de (0.12)  $0 < \phi < 1$ . Definimos  $S$ , el *grado de saturación del suelo*, como  $S = \theta/\phi$ , por lo que  $0 < S < 1$ . De acuerdo a estas desigualdades  $\theta$  se conoce también como *porosidad volumétrica parcial*, lo que permite hacer abstracción de la naturaleza del fluido y no considerar necesariamente al agua como el líquido que fluye en el medio poroso. El valor de la permeabilidad  $k$  cuando el dominio de los poros está totalmente lleno con el fluido, es decir cuando  $\Omega = \Omega_T$ , se denomina *permeabilidad saturada* y se denota  $k_S$ .

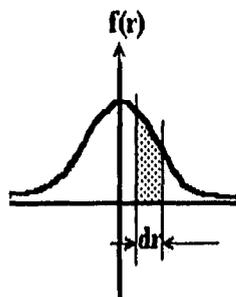
Sea  $f(r)$  una función de distribución la cual describe los espacios vacíos de un medio poroso, Purcell (1949) remarca que en un sistema de capilares paralelos la *fracción del área de flujo*  $\varphi$  será igual a la *fracción de la porosidad volumétrica parcial*  $\theta$ , es decir

$$d\varphi(r) = d\theta(r) = f(r) dr. \quad (0.13)$$

De aquí que la expresión de Purcell para la permeabilidad saturada  $k_S$  sea, de (0.11)

$$k_S = \frac{1}{8} \int_0^{\phi} r^2 d\theta = \frac{\phi}{8} \int_0^1 r^2 dS \quad (0.14)$$

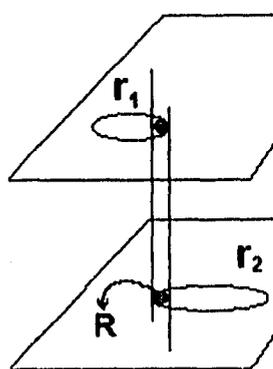
ya que  $\theta = \phi S$ .



### Modelo probabilístico

Childs y Collis-George (1950) analizan el problema desde un punto de vista probabilístico. Al inicio del párrafo anterior, intitulado 'Geometría del suelo', se realizó un corte perpendicular al eje  $z$  para obtener dos secciones de área total  $A_T$  cada una. Ahora se realizarán dos cortes perpendiculares al eje del escurrimiento  $z$  para obtener dos secciones paralelas. Los autores suponen que la función densidad de la porosidad es la misma en ambas secciones, lo

cual es razonable para medios homogéneos. Ahora bien, si  $r_1$  y  $r_2$  denotan los radios de los poros de la primera y segunda sección respectivamente, entonces la probabilidad del intervalo conteniendo a  $r_1$  es precisamente igual a la fracción de área representada por  $d\theta(r_1) = f(r_1) dr_1$ . Análogamente la probabilidad del intervalo conteniendo a  $r_2$  sobre la otra sección es igual a  $d\theta(r_2) = f(r_2) dr_2$ . La probabilidad de que estos intervalos se encuentren de manera completamente aleatoria en un punto intermedio será el producto de estas dos probabilidades, al considerar ambos eventos como independientes. En otras palabras, el producto de las fracciones de área elementales  $d\theta(r_1)$  y  $d\theta(r_2)$  (a escala microscópica  $l$  según (0.1)) representa el área común de flujo, por lo que



$$d\varphi(r_1, r_2) = d\theta(r_1) d\theta(r_2) = f(r_1) f(r_2) dr_1 dr_2. \quad (0.15)$$

Así la expresión de Childs y Collis-George para la permeabilidad saturada  $k_S$  será, de (0.11),

$$k_S = \frac{1}{8} \int_{\Omega_T} R^2 d\theta(r_1) d\theta(r_2) = \frac{\phi^2}{8} \int_{\Omega_T} R^2 dS(r_1) dS(r_2) \quad (0.16)$$

ya que  $\theta = \phi S$  y donde  $R$  es un radio efectivo del área común de flujo.

#### Correlación de modelos

Mualem y Dagan (1978) señalan que el modelo de Purcell puede ser formalmente deducido del modelo de Childs y Collis-George si el área común de flujo proporcionada por la ecuación (0.15) es redefinida como

$$d\varphi(r_1, r_2) = f(r_1) \delta(r_2 - r_1) dr_1 dr_2$$

donde  $\delta$  designa la distribución delta de Dirac.

En términos probabilísticos el primer modelo representa una correlación total entre las dos secciones, mientras que el segundo una decorrelación total. De la ecuación (0.14) se infiere que  $k_S \propto \phi$ , en tanto que de (0.16) inferimos que  $k_S \propto \phi^2$ . Estos dos modelos representan así los comportamientos extremos posibles.

Millington y Quirk (1961) intentan por primera vez proporcionar un enfoque intermedio entre los dos modelos precedentes. Ellos consideran una correlación parcial entre las dos secciones. La correlación la introducen en el área total común entre las dos secciones, es decir,

$$\int_{\Omega_T} d\varphi(r_1, r_2) = \phi^\gamma \quad \text{donde } 1 < \gamma < 2.$$

Así el modelo de Purcell se obtiene cuando  $\gamma \rightarrow 1$ ; y el modelo de Childs y Collis-George cuando  $\gamma \rightarrow 2$ . Los autores suponen que la porosidad de cada sección paralela de área sea igual a  $\phi^d$ , con  $d = \gamma/2$ . Así, el área total común de

flujo, denotado  $\mu$ , se obtiene mediante el producto de las áreas de cada sección, es decir

$$\mu = \phi^d \phi^d = \phi^{2d} = \phi^\gamma. \quad (0.17)$$

Ellos proponen un valor de  $d$  siguiendo el siguiente razonamiento: puesto que el área y el volumen son proporcionales a  $L^2$  y  $L^3$  respectivamente, donde  $L$  es una longitud, entonces en cada sección paralela de área se cumple

$$\text{area} \propto L^2 \propto \text{vol}^{2/3}.$$

Aplicando esta relación a  $\mu$  y  $\phi$ , área y volumen común de flujo (o vacíos) respectivamente, tendremos ahora que el área común se puede expresar como  $\mu = \phi^{2/3} \phi^{2/3}$ , de donde  $d = 2/3$  de acuerdo a (0.17). Por otro lado, considerando que la estructura formada por los sólidos está fija, el área total de los sólidos es proporcionada por  $(1 - \phi)^{2/3}$ .

#### Modelo Fractal

C. Fuentes (1992) interpreta este razonamiento basándose en la relación superficie-volumen propuesta en *The Fractal Geometry of Nature* [1983] por B. B. Mandelbrot, a saber,

$$(G\text{-area}) \propto (G\text{-vol})^{s/3} \quad (0.18)$$

donde  $G\text{-area}$  indica que el área se mide a una escala  $G$ , por lo que la unidad de área será  $G^2$ . Análogamente se considera  $G\text{-vol}$ , el volumen a escala  $G$ , por lo que la unidad de volumen será  $G^3$ . Si para  $E \subset \mathbb{R}^3$  existe  $s > 0$  cuya  $G\text{-area}$  y  $G\text{-volumen}$  satisfacen la relación (0.18), diremos que  $E$  tiene *dimensión fractal*  $s$ .

En los objetos reales tridimensionales la relación (0.18) no puede, obviamente, extrapolarse a valores infinitamente grandes o pequeños a escala  $G$ , por lo que debe existir un límite inferior y un límite superior para los valores permisibles en la variación de  $G$  [véase M. Rieu/E. Perrier, por aparecer.]

La relación (0.18), área( $\mu_S$ )-volumen( $\phi_S$ ), aplicada a los sólidos conduce a, generalizando el razonamiento a sólidos de medios porosos en  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\mu_S = \phi_S^d \quad (0.19)$$

donde  $\mu_S = 1 - \mu$ ,  $\phi_S = 1 - \phi$ ,  $d = s/n$ . La relación área( $\mu$ )-volumen( $\phi$ ) aplicada a los poros nos lleva, generalizando el razonamiento como en (0.17), a que

$$\mu = \phi^{2d}. \quad (0.20)$$

Se considera que todos estos parámetros se miden a una escala  $G$ .

Como  $\mu_S + \mu = 1$ , de (0.19) y (0.20) tendremos  $\phi_S^d + \phi^{2d} = 1$ , que junto con  $\phi_S + \phi = 1$  obtenemos la relación entre la porosidad volumétrica y la dimensión fractal, a saber,

$$(1 - \phi)^d + \phi^{2d} = 1 \quad (0.21)$$

o bien, ya que  $d = s/n$

$$(1 - \phi)^{\frac{s}{n}} + \phi^{\frac{2s}{n}} = 1. \quad (0.22)$$

Asimismo, la relación entre la porosidad areal y la dimensión fractal será

$$(1 - \mu)^{\frac{1}{d}} + \mu^{\frac{1}{1-d}} = 1 \quad (0.23)$$

o bien

$$(1 - \mu)^{\frac{n}{s}} + \mu^{\frac{n}{1-s}} = 1. \quad (0.24)$$

La gráfica en la Figura 1 muestra la función  $d(\phi)$ . Obsérvese que  $d \rightarrow 1/2$  cuando  $\phi \rightarrow 0$ , y  $d \rightarrow 1$  cuando  $\phi \rightarrow 1$ .

La Figura 2 muestra la función  $\mu(\phi)$ . Gráficamente observamos que  $\mu \leq \phi$ .

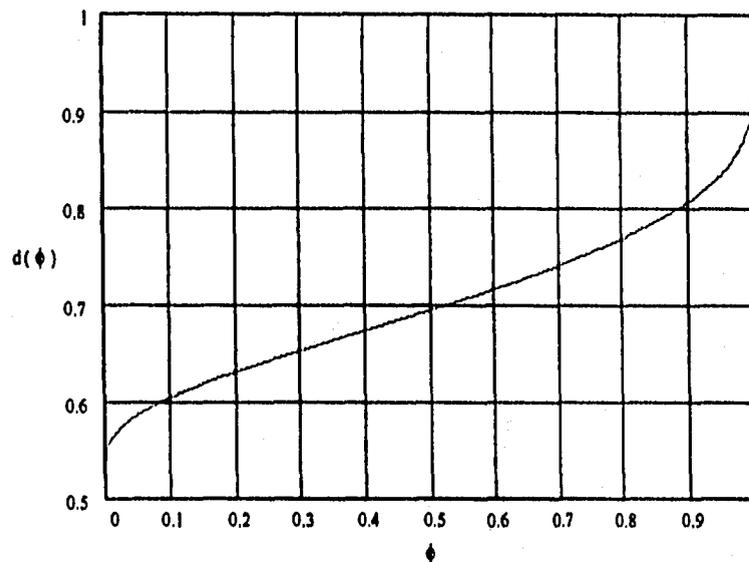


Figura 1. Gráfica de la ecuación (0.21):  $d(\phi)$

#### Casos particulares

Algunos valores remarcables de la dimensión fractal y de la porosidad se obtienen para los siguientes casos:

1. Para el valor de Millington y Quirk,  $d = 2/3$  (si  $n = 3$  entonces  $s = 2$ ), se puede demostrar a partir de la ecuación (0.21), que la porosidad volumétrica  $\phi$  satisface el polinomio

$$\phi^9 + 3\phi^7 - 6\phi^6 + 3\phi^5 - 12\phi^4 + 40\phi^3 - 60\phi^2 + 39\phi - 8 = 0,$$

cuya única raíz en el intervalo  $(0, 1)$  es  $\phi \cong 0.3671$ , lo cual implica, por (0.20), que  $\mu \cong 0.2628$ .

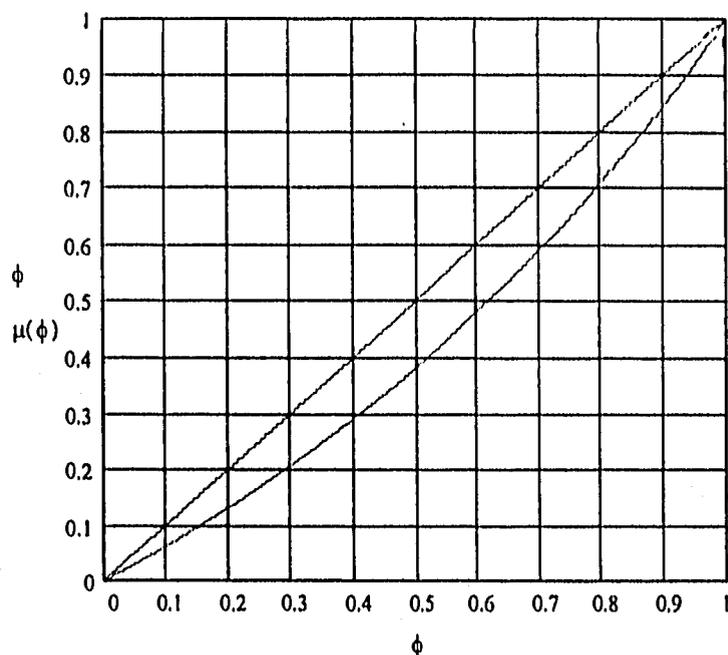


Figura 2. Gráfica de  $\mu(\phi)$  a partir de las ecuaciones (0.20) y (0.23)

2. Si la porosidad volumétrica es igual al volumen de los sólidos, es decir,  $\phi = \phi_S = 1/2$ , entonces de (0.21)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^d + \left(\frac{1}{2}\right)^{2d} = 1.$$

Considerando  $x = \left(\frac{1}{2}\right)^d$ , obtenemos la ecuación que define la proporción aurea [ver Huntley, 1970], a saber,  $x^2 + x - 1 = 0$ . Observemos que  $x$  es precisamente  $\mu_S$ . Considerando la raíz positiva tendremos:

- (a) el área de los sólidos:

$$\mu_S = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cong 0.6180,$$

- (b) como  $\mu_S = 2^{-d}$  entonces

$$d = \log_2 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \cong 0.6942,$$

por lo que la dimensión fractal, para  $n = 3$ , será  $s = nd \cong 2.0827$ ,

- (c) y como  $\mu_S + \mu = 1$  la porosidad areal será

$$\mu = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \cong 0.3820.$$

3. Si la porosidad areal es igual al área de los sólidos, es decir,  $\mu = \mu_S = 1/2$ , entonces de (0.23)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{d}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2d}} = 1$$

o bien

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2d}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2d}} = 1.$$

Tomando  $\mu^{\frac{1}{2d}} \equiv x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2d}}$ , se obtiene nuevamente la ecuación que define la proporción aurea,  $x^2 + x - 1 = 0$ . La raíz positiva proporciona:

- (a) la porosidad volumétrica a partir de (0.20)

$$\phi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cong 0.6180,$$

- (b) nuevamente de (0.20) tendremos que  $d = \frac{\log(\mu)}{2 \log(\phi)}$ , que con los valores de  $\mu$  y  $\phi$

$$d = \frac{1}{2 \log_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} \cong 0.7202$$

donde consideramos logaritmos en base 2. Así, la dimensión fractal, con  $n = 3$ , será  $s = nd \cong 2.1606$ ,

- (c) y como  $\phi_S + \phi = 1$  el volumen de sólidos será

$$\phi_s = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \cong 0.3820.$$

# CAPITULO 1

POROSIDAD Y DIMENSION FRACTAL

# 1. POROSIDAD FRACTAL

En el capítulo introductorio se obtuvo la ecuación (0.22)

$$(1 - \phi)^{\frac{s}{n}} + \phi^{\frac{s}{n}} = 1 \quad (1.1)$$

donde  $\phi$  es el  $G$ -volumen de vacíos de un medio poroso y  $s$  su dimensión fractal definida en Mandelbrot [1983].

En este capítulo daremos una nueva interpretación a dicha ecuación mediante el uso de la dimensión de Hausdorff en sustitución de dicha dimensión fractal. Para ello requeriremos ahora medir los conjuntos con la  $s$ -medida de Hausdorff, que para el caso particular  $s = n$  se reduce a la medida  $n$ -dimensional de Lebesgue  $L^n$ , (ver Teorema 17 del capítulo 3).

Así, sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto compacto y no-vacío y  $U$  el paralelepípedo de menor volumen que contiene a  $E$ . Para evitar casos triviales supondremos que el volumen de  $U$  es estrictamente positivo, es decir,  $\text{Vol}(U) = L^n(U) > 0$ . Entonces la porosidad de  $E$  con respecto a la medida de Lebesgue  $L^n$  la denotamos  $e$ , y la definimos como

$$e = \frac{L^n(U \setminus E)}{\text{Vol}(U)}. \quad (1.2)$$

De aquí obtenemos que  $e \in [0, 1]$ . Hay que tomar en cuenta que esta definición de porosidad generaliza la definición dada en (0.11) del capítulo introductorio, por lo que  $\phi$  y  $e$  en general son diferentes.

Si consideramos ahora  $e$  como en (1.2) y a  $s$  como la dimensión de Hausdorff de  $E$ , la relación entre  $e$  y  $s$  dada por la ecuación (1.1) sólo se satisface para los casos triviales  $e = 0$  y  $e = 1$ , por lo que en esta tesis generalizaremos la definición del parámetro  $e$  de manera que la ecuación (1.1) siga siendo válida para cualesquier valor de  $e$  entre 0 y 1. Dicha generalización se hará considerando en todo momento que  $s$  es la dimensión fractal de Hausdorff. Es decir, queremos emplear en una forma no trivial la relación (1.1) para el caso en que  $s = \dim_H(E)$ .

Veamos primeramente que en efecto  $e$  sólo puede tomar los valores de cero y uno si satisface la ecuación (1.1). Para ello supongámonos lo contrario, que  $0 < e < 1$ , entonces (1.2) implica que  $0 < L^n(E) = L^n(U) - L^n(U \setminus E) < +\infty$ . Luego entonces  $s = \dim_H(E) = n$  ya que  $c_n H^n(E) = L^n(E)$  [ver Teorema 17 capítulo 3], y esto implicaría, de (1.1), que  $1 - e + e^2 = 1$ , es decir  $e(e - 1) = 0$ , por lo que  $e = 0$  o bien  $e = 1$ , lo cual contradice la forma inicial en que tomamos  $e$ . Así, los conjuntos cuya porosidad con respecto a la medida de Lebesgue  $e$  sea estrictamente positiva y menor que 1 no satisfacen la igualdad (1.1), además de que tienen dimensión de Hausdorff entera,  $n$  precisamente. Es decir no se requiere de la dimensión fraccionaria de Hausdorff para describir a estos

conjuntos. Para estos conjuntos precisamente se puede emplear la 'porosidad'  $\phi$  definida en (0.12) junto con la dimensión fractal  $s$ .

Supongamos ahora que  $e = 0$ , entonces (1.2) implica  $L^n(U \setminus E) = 0$  y por lo tanto, ya que el cubo  $U \subset \mathbb{R}^n$  es compacto y no-vacio,  $0 < L^n(E) = L^n(U) < +\infty$ , y nuevamente tendremos que  $s = \dim_H(E) = n$ , aunque en este caso  $e = 0$  sí satisface (1.1). Por último  $e = 1$  también satisface (1.1) y además por (1.2)  $L^n(E) = 0$  y por lo tanto  $s = \dim_H(E) \leq n$ . Resumiendo, si  $e$  representa el valor de la porosidad de un conjunto  $n$ -dimensional con respecto a la medida de Lebesgue, entonces la identidad  $(1 - e)^{s/n} + e^{2s/n} = 1$  sólo se satisface para aquellos conjuntos en los que  $e = 0$  o  $1$ , y únicamente en el segundo de estos casos podría tratarse de un conjunto con dimensión de Hausdorff no-entera.

Así, solamente el caso con porosidad  $e = 1$ , según (1.2), podría implicar que el conjunto tenga dimensión de Hausdorff no-entera. Sin embargo el valor de dicho parámetro, a saber  $e = 1$ , no sería nada significativo en la descripción de todos estos conjuntos.

Así pues, a continuación definiremos un nuevo parámetro que satisfaga (1.1) en una forma no trivial, en sustitución de las 'porosidades'  $\phi$  y  $e$  dadas por (0.12) y (1.2) respectivamente, y de manera tal que podamos utilizar la dimensión  $s$  de Hausdorff. Dicho parámetro estará asociado en forma única al conjunto  $E$  y será un valor estrictamente entre cero y uno. Se definirá además para ciertos conjuntos particulares como veremos a continuación.

Cabe hacer sin embargo la siguiente observación: En el capítulo introductorio se obtuvo que la dimensión fractal  $s$  que satisface (1.1) es válida para ciertos objetos tridimensionales reales y dicho valor es válido sólo dentro de un límite de escala inferior y uno superior. Sin embargo, si el valor de  $s$  lo consideramos válido a cualesquier escala de medición, la dimensión fractal  $s$  coincidirá frecuentemente con la dimensión Box-counting, y ésta a su vez coincidirá con la dimensión de Hausdorff en objetos auto-similares.

## 1.1 Conjuntos $sP$

**Definición 1** Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto de Borel tal que  $0 < H^s(E) < +\infty$  y  $0 < \dim_H(E) = s < n$ . Definimos la constante de contracción del conjunto  $E$ , denotada  $P$ , como el único valor de  $P \in (0, 1)$  tal que

$$(1 - P)^{\frac{s}{n}} + P^{\frac{2s}{n}} = 1.$$

Al conjunto  $E$  con dichas condiciones lo llamaremos **Conjunto- $sP$**  de  $\mathbb{R}^n$ , o simplemente **Conjunto- $sP$**  cuando esté claro el espacio  $\mathbb{R}^n$ .

La existencia de  $P$  se observa en la gráfica de la Figura 1 en el capítulo introductorio, considerando  $P$  y  $s/n$  en sustitución de  $\phi$  y  $d$  respectivamente.

A continuación enumeramos algunos conjuntos bidimensionales particulares en los cuales se determina su parámetro  $P$ , (ver Figura 1.1)

- En el producto cartesiano del Cantor Ternario (ver capítulo 11)  $C \times C$ ,  $\dim_H(C \times C) = 2 \log(2) / \log(3) \simeq 1.261859\dots$ , de donde  $P \simeq 0.200748\dots$
- En el triángulo de Sierpinski  $S$ ,  $\dim_H(S) = \log(3) / \log(2) \simeq 1.584962\dots$ , de donde  $P \simeq 0.868160\dots$
- Para la esponja tridimensional de Menger  $E$ ,  $\dim_H(E) = \log(20) / \log(3) \simeq 2.726833\dots$ , de donde  $P \simeq 0.9985806\dots$



Si  $E \subset \mathbb{R}^n$  es un Conjunto- $sP$  entonces de la gráfica de la Figura 1 del capítulo introductorio se tiene que  $\frac{1}{2} < d < 1$  donde  $d = s/n$ , de aquí que

$$\frac{n}{2} < s < n \quad (1.3)$$

para cualesquier entero positivo  $n$ .

Los siguientes dos teoremas nos relaciona los Conjuntos- $sP$  con los conjuntos autosimilares.

**Teorema 2** Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  un Conjunto- $sP$ . Entonces existen funciones de similitud  $\psi_1$  y  $\psi_2$  de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$  con constantes de contracción  $(1-P)$  y  $P^2$ , respectivamente, y cuyo conjunto no-vacío, invariante y auto-similar  $J \subset \mathbb{R}^n$  es tal que

$$\dim_H(E) = n \dim_H(J) = n \dim_B(J).$$

Además,  $0 < H^{s/n}(J) < \infty$ .

*Demostración:* Definimos las transformaciones  $\psi_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  para  $j = 1$  y 2, como

$$\psi_1(\vec{x}) = (1-P)\vec{x} + \vec{h}_1$$

$$\psi_2(\vec{x}) = P^2\vec{x} + \vec{h}_2$$

donde  $\vec{h}_1$  y  $\vec{h}_2$  son vectores constantes de traslación por determinar. Como  $\|\psi_1(\vec{x}) - \psi_1(\vec{y})\| = (1-P)\|\vec{x} - \vec{y}\|$  y  $\|\psi_2(\vec{x}) - \psi_2(\vec{y})\| = P^2\|\vec{x} - \vec{y}\|$ ,

y además  $0 < 1 - P < 1$  y  $0 < P^2 < 1$ , entonces  $\psi_1$  y  $\psi_2$  son funciones de similaridad con constantes de contracción  $(1 - P)$  y  $P^2$  respectivamente. Entonces por el Teorema 10 del capítulo 10, existe un conjunto compacto no-vacío  $J \subset \mathbb{R}^n$  el cual es invariante bajo  $\psi_1$  y  $\psi_2$ , es decir, tal que  $\psi_1(J) \cup \psi_2(J) = J$ .

Veamos ahora que para ciertos valores de  $\vec{h}_1$  y  $\vec{h}_2$ ,  $\psi_1$  y  $\psi_2$  satisfacen la condición del conjunto abierto, es decir, que existe un conjunto no-vacío abierto y acotado  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $V \supset \psi_1(V) \cup \psi_2(V)$  con dicha unión disjunta. En efecto, tomemos en particular el cubo unitario  $n$ -dimensional

$$V = \overbrace{(0, 1) \times \cdots \times (0, 1)}^{n\text{-veces}}.$$

Entonces,

$$\|\psi_1(V)\| + \|\psi_2(V)\| = (1 - P)\|V\| + P^2\|V\| = (P^2 - P + 1)\|V\|. \quad (1.4)$$

Ahora, si definimos la función continua  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  como  $f(t) = t^2 - t + 1$ , entonces  $f$  alcanza dos máximos en el intervalo  $[0, 1]$  en  $t = 0$  y  $t = 1$ , así como un mínimo en  $t = 1/2$ . Luego  $\frac{3}{4} < P^2 - P + 1 < 1$  para cualesquier valor de  $P \in (0, 1)$ . Por lo tanto de (1.4) tendremos que  $0 < \frac{3}{4}\|V\| < \|\psi_1(V)\| + \|\psi_2(V)\| < \|V\|$ . De aquí que podamos elegir adecuadamente las constantes  $\vec{h}_1$  y  $\vec{h}_2$  de manera tal que los cubos 'contraídos'  $\psi_1(V)$  y  $\psi_2(V)$  queden completamente contenidos en  $V$  de manera disjunta. (En particular,  $\vec{h}_1 = \vec{0}$  y  $0 < 1 - P < a_j < 1 - P^2 < 1$ , para  $j = 1, \dots, n$  y donde  $\vec{h}_2 = (a_1, \dots, a_n)$  hacen que se satisfaga la condición del conjunto abierto en  $\psi_1$  y  $\psi_2$ ). Que dicha unión sea disjunta nos dice que  $J$  es auto-similar, por el Teorema 15 del capítulo 10. Entonces por el Teorema 14 del capítulo 10, si  $r = \dim_H(J)$  tendremos que  $(1 - P)^r + P^{2r} = 1$  además de que  $0 < H^r(J) < \infty$ . Por último, dado  $P \in (0, 1)$  podemos definir la función  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $t \mapsto (1 - P)^t + P^{2t}$ , la cual es estrictamente decreciente en todo su dominio, pues  $g'(t) < 0 \forall t \in \mathbb{R}$ , y por lo tanto inyectiva. De aquí que como

$$(1 - P)^r + P^{2r} = 1 = (1 - P)^{s/n} + P^{2s/n}$$

es decir,  $g(r) = g(\frac{s}{n})$ , entonces  $r = s/n$ , y como además  $0 < H^r(J) < \infty$ , obtenemos los resultados deseados ya que  $r = \dim_H(J)$  y  $s = \dim_H(E)$ .  $\square$

**Corolario 3** El conjunto no-vacío invariante y autosimilar  $J \subset \mathbb{R}^n$  del Teorema 2 anterior es totalmente desconexo.

*Demostración:* Del teorema anterior  $\dim_H(J) = \dim_H(E)/n < 1$ , lo cual implica por el Teorema 22 del capítulo 3 que  $J$  es totalmente desconexo.  $\square$

En el siguiente teorema  $G \times \cdots \times G$   $n$ -veces, indica el producto cartesiano.  $G \times \cdots \times G \subset \mathbb{R}^n$  ya que  $G \subset \mathbb{R}$ .

**Teorema 4** Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  un Conjunto- $sP$ , entonces existen funciones de similitud  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  con constantes de contracción  $(1 - P)$  y  $P^2$  respectivamente y cuyo conjunto no-vacío invariante y auto-similar  $G \subset \mathbb{R}$  es tal que

$$\dim_H(E) = \dim_H \left( \overbrace{G \times \cdots \times G}^{n\text{-veces}} \right) = \dim_B \left( \overbrace{G \times \cdots \times G}^{n\text{-veces}} \right)$$

o bien

$$\dim_H(E) = n \dim_H(G) = n \dim_B(G).$$

*Demostración:* Como  $E$  es un Conjunto- $sP$  en  $\mathbb{R}^n$  entonces por el Teorema 2, existe un conjunto no-vacío  $J \subset \mathbb{R}^n$  tal que

$$\dim_H(J) = \dim_B(J) = \frac{s}{n}.$$

Ahora, por definición de Conjunto- $sP$ ,  $0 < s = \dim_H E < n$ . Así,  $\dim_H(J) < 1$ , lo cual implica por el Teorema 14 sobre proyecciones (capítulo 7) que

$$\dim_H[Proj_{\Pi}(J)] = \dim_H(J) \quad \text{para casi todo } \Pi \in G_{n,1}$$

donde  $G_{n,1}$  es el espacio de todos los subespacios 1-dimensionales de  $\mathbb{R}^n$ , y  $Proj_{\Pi}(J)$  denota la proyección ortogonal de  $J$  sobre  $\Pi$ . El *para casi todo* es con respecto a la medida de  $\gamma_{n,1}$  en  $G_{n,1}$  definida en el capítulo 5, así  $\gamma_{n,1} \{ \Pi \in G_{n,1} : \dim_H[Proj_{\Pi}(J)] \neq \dim_H(J) \} = 0$ . De aquí que exista  $\Pi_0 \in G_{n,1}$  tal que

$$\dim_H[Proj_{\Pi_0}(J)] = \dim_H(J) = \frac{s}{n}. \quad (1.5)$$

Así, tenemos un conjunto no-vacío (ya que  $0 < s/n < 1$ )  $Proj_{\Pi_0}(J) \subset \mathbb{R}^1$ , cuya dimensión de Hausdorff  $\dim_H[Proj_{\Pi_0}(J)] = s/n \in (0, 1)$ . Asimismo  $(1 - P)^{\frac{s/n}{1}} + P^{\frac{2s/n}{1}} = 1$  donde  $P$  es la constante crítica asociada al conjunto  $E$ . Es decir, el conjunto  $Proj_{\Pi_0}(J)$  es un Conjunto- $\frac{s}{n}P$  en  $\mathbb{R}^1$ , entonces aplicando nuevamente el Teorema 2, existen funciones de similitud  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  con constantes de contracción  $(1 - P)$  y  $P^2$  respectivamente, y cuyo conjunto invariante y autosimilar  $G \subset \mathbb{R}$  es tal que

$$\dim_H(G) = \dim_B(G) = \frac{\dim_H[Proj_{\Pi_0}(J)]}{1} = \frac{s}{n}$$

por (1.5), y como  $s = \dim_H(E)$ , tendremos que  $\dim_H(E) = n \dim_H(G) = n \dim_B(G)$ , lo cual demuestra una de las afirmaciones del teorema. Ya que  $\dim_H(G) = \dim_B(G)$  entonces por el Teorema 13 del capítulo 9

$$\dim_H \left( \overbrace{G \times \cdots \times G}^{n\text{-veces}} \right) = \dim_H \left( \overbrace{G \times \cdots \times G}^{(n-1)\text{-veces}} \times G \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \dim_H \left( \overbrace{G \times \cdots \times G}^{(n-1)\text{-veces}} \right) + \dim_H(G) \\
&\quad \vdots \\
&= \overbrace{\dim_H(G) + \cdots + \dim_H(G)}^{n\text{-veces}} = n \dim_H(G) = \dim_H(E),
\end{aligned}$$

por lo obtenido anteriormente y lo cual demuestra completamente el teorema.  $\square$

### Comentarios

Hagamos unas observaciones sobre estos resultados:

- El último teorema nos dice que para cualesquier  $E$ , Conjunto- $sP$  en  $\mathbb{R}^n$ , existe un conjunto  $G$  auto-similar y totalmente desconexo en  $\mathbb{R}^1$ , cuyo producto cartesiano  $n$ -veces genera un conjunto en  $\mathbb{R}^n$  con la misma dimensión de Hausdorff que  $E$ .
- Las funciones de similaridad  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  tienen la misma forma para cualquier valor de  $n$  y  $P$ .
- Sobre la forma particular de las constantes de contracción, a saber,  $(1 - P)$  y  $P^2$ , cabe mencionar que los resultados anteriores se pueden obtener en forma análoga si consideramos como constantes de contracción, cualesquier números  $c_1$  y  $c_2$  en el intervalo  $(0, 1)$ , tales que

$$c_1^{s/n} + c_2^{s/n} = 1 \quad \text{y} \quad 0 < c_1 + c_2 \leq 1.$$

- La forma particular que tienen las constantes de contracción, a saber  $(1 - P)$  y  $P^2$ , deberán de ser corroborados en objetos reales tridimensionales, bidimensionales y unidimensionales mediante la medición de sus parámetros  $P$  y  $s$ . El resto de este capítulo se dedica en particular a la obtención de  $s$  mediante diversos métodos.
- Los Teoremas 2 y 4 no implican que  $E$ , el Conjunto- $sP$ , sea autosimilar.
- Los resultados obtenidos en los Teoremas 2 y 4 son nuevos.

## 1.2 Conjuntos Tridimensionales

---

En las secciones siguientes veremos algunas de las formas en que puede recuperarse el parámetro  $P$  de un conjunto tridimensional, mediante proyecciones e intersecciones con planos o rectas. Para ello emplearemos los resultados de los capítulos posteriores. Definamos alguna de la notación empleada en dichos capítulos y que necesitaremos en lo que resta de éste:

$G(n, m)$  denota al espacio de todos los subespacios vectoriales  $\mathbb{R}^m$  de  $\mathbb{R}^n$ .  $O^*(n, m)$  denota al espacio de todas las proyecciones ortogonales de  $\mathbb{R}^n$  sobre  $\mathbb{R}^m$ . Además  $\gamma_{n,m}$  y  $\mathcal{V}_{n,m}^*$  denotan a las medidas  $O(n)$  invariantes sobre  $G(n, m)$  y  $O^*(n, m)$  respectivamente. Si  $x \in E$  y  $E \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\tau_x(E)$  denota la traslación de  $E$  en  $x$ :  $\{w \in \mathbb{R}^n : w - x \in E\}$ .

### INTERSECCION CON PLANOS

**Teorema 5** Sea  $E \subset \mathbb{R}^3$  un Conjunto- $sP$  arbitrario, entonces

$$\dim_H(E) = \dim_H[E \cap \tau_x(V)] + 1 \quad (1.6)$$

para  $\mathbb{H}^s \times \gamma_{3,2}$ -casi todo  $(x, V) \in E \times G(3, 2)$ , de donde  $1/2 < \dim_H[E \cap \tau_x(V)] < 2$ .

*Demostración:* De (1.3) se tiene que  $\dim_H(E) > 3/2 > 1$ , luego, del Teorema 7 del capítulo 8  $\dim_H[E \cap \tau_x(V)] = s - 1$ . Ya que  $3/2 < s < 3$ , se sigue la segunda afirmación.  $\square$

Observemos que en este caso  $\tau_x(V)$  es simplemente un plano bidimensional que contiene a  $x \in E$ .

De esta manera podremos obtener la dimensión de Hausdorff de cualesquier Conjunto- $sP$   $E$  en  $\mathbb{R}^3$  calculando la dimensión de Hausdorff de conjuntos bidimensionales que resulten de intersectar a  $E$  con planos bidimensionales.

Hay que tener en cuenta que este resultado, así como los que veremos a continuación, son válidos 'casi donde quiera' con respecto a una medida o medidas particulares, es decir, el conjunto de puntos donde dicho resultado no es válido tendrá 'medida' cero. Por lo tanto, si dicho conjunto de medida cero es un conjunto denso y numerable en el subespacio que lo contiene, la aplicación práctica de dichos teoremas puede plantear un inconveniente difícil de superar.

### PROYECCION SOBRE PLANOS

Sean  $E \subset \mathbb{R}^3$  un Conjunto- $sP$ ,  $\Pi \in G(3, 2)$  subespacio bidimensional y  $\tau_x(D) \in G(2, 1)$  una línea recta que está contenida en  $\Pi$  y que pasa por un

punto  $x \in Proj_{\Pi}(E)$ , donde  $Proj_{\Pi}(E)$  denota la proyección ortogonal de  $E$  sobre  $\Pi$ . Nuevamente como  $3/2 < \dim_H(E) < 3$  si  $\dim_H(E) > 2$  el Teorema 11 del capítulo 7 referente a proyecciones nos dice que  $\dim_H[Proj_{\Pi}(E)] = 2$  para  $\mathcal{V}_{3,2}^*$ -casi toda proyección en  $O^*(3,2)$  generada por  $\Pi$ ; si en cambio  $1 < 3/2 < \dim_H(E) \leq 2$  entonces por el Teorema 14 del capítulo 7,  $\dim_H[Proj_{\Pi}(E)] = \dim_H(E)$  para  $\mathcal{V}_{3,2}^*$ -casi toda proyección, por lo que en ambos casos tendremos  $\dim_H[Proj_{\Pi}(E)] > 1$ .

Ahora veamos al conjunto  $Proj_{\Pi}(E)$  como un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  e intersectémoslo con la recta  $\tau_x(D)$  la cual definimos anteriormente (ver Figura 1.2.)

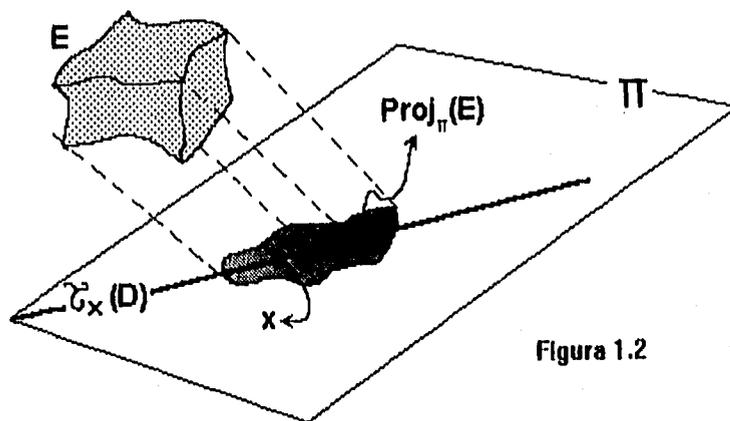


Figura 1.2

Entonces del Teorema 7 del capítulo 8 sobre intersecciones, tendremos que 'casi siempre'

$$\dim_H[Proj_{\Pi}(E) \cap \tau_x(D)] = \dim_H[Proj_{\Pi}(E)] + 1 - 2$$

es decir

$$\dim_H[Proj_{\Pi}(E)] = \dim_H[Proj_{\Pi}(E) \cap \tau_x(D)] + 1.$$

Hemos llegado así al siguiente resultado

**Teorema 6** Sea  $E \subset \mathbb{R}^3$  un Conjunto- $sP$  arbitrario, entonces

$$\dim_H[Proj_{\Pi}(E)] = \dim_H[Proj_{\Pi}(E) \cap \tau_x(D)] + 1 \quad (1.7)$$

para  $\mathcal{V}_{3,2}^*$ -casi toda proyección en  $O^*(3,2)$ , y  $H^s \times \gamma_{2,1}$ -casi todo  $(x, D) \in Proj_{\Pi}(E) \times G(2,1)$ .

Observamos de (1.7) que  $\dim_H[Proj_{\Pi}(E)] \geq 1$  lo cual está de acuerdo para los Conjuntos- $sP$  tridimensionales.

Denotemos

$$\beta = \dim_H[Proj_{\Pi}(E) \cap \tau_x(D)].$$

De (1.7)  $0 \leq \beta \leq 1$ . Supongamos que  $0 < \beta < 1$ , entonces por el Teorema 6 tendremos ahora que 'casi siempre'  $\dim_H[Proj_{\Pi}(E)] < 2$ . Afirmamos

que esta última desigualdad implica 'casi siempre' que  $\dim_H(E) < 2$ . En efecto, si  $\dim_H(E) > 2$  entonces por el Teorema 11 capítulo 7, 'casi siempre'  $\dim_H[Proj_{\Pi}(E)] = 2$ , lo cual contradice la suposición inicial. Por otro lado, si  $\dim_H(E) = 2$  entonces por el Teorema 14 del capítulo 7, 'casi siempre'  $\dim_H[Proj_{\Pi}(E)] = 2$  lo cual contradice nuevamente la suposición inicial. Así,  $0 < \beta < 1$  implica 'casi siempre'  $\dim_H(E) < 2$ , y nuevamente por el Teorema 14 del capítulo de proyecciones tendremos que 'casi siempre'  $\dim_H(E) = \dim_H[Proj_{\Pi}(E)]$ , que al sustituirlo en (1.7) obtenemos 'casi siempre'  $\dim_H(E) = \beta + 1$ . Resumimos este resultado en el siguiente teorema

**Teorema 7** Sea  $E \subset \mathbb{R}^3$  un Conjunto- $sP$  arbitrario, y supongamos que para  $\mathcal{V}_{3,2}^*$ -casi toda proyección en  $O^*(3, 2)$ , y  $H^s \times \gamma_{2,1}$ -casi todo  $(x, D) \in Proj_{\Pi}(E) \times G(2, 1)$

$$0 < \dim_H[Proj_{\Pi}(E) \cap \tau_x(D)] < 1,$$

entonces para dichos términos

$$\dim_H(E) = \dim_H[Proj_{\Pi}(E) \cap \tau_x(D)] + 1.$$

Por lo que este teorema nos permite obtener la dimensión de Hausdorff de un Conjunto- $sP$  tridimensional mediante el cálculo de la dimensión de un conjunto unidimensional.

Supongamos ahora que en el Teorema 6  $\beta = 0$ , entonces de este mismo Teorema 'casi siempre'  $\dim_H(Proj_{\Pi}(E)) = 1$  lo cual no es posible, ya que como  $\dim_H(E) > 1$  nuevamente los Teoremas de Proyección implican que  $\dim_H(Proj_{\Pi}(E)) > 1$ . Se tiene así el siguiente corolario

**Corolario 8** Sea  $E \subset \mathbb{R}^3$  un Conjunto- $sP$  arbitrario, entonces

$$\dim_H[Proj_{\Pi}(E) \cap \tau_x(D)] > 0$$

para  $\mathcal{V}_{3,2}^*$ -casi toda proyección en  $O^*(3, 2)$ , y  $H^s \times \gamma_{2,1}$ -casi todo  $(x, D) \in Proj_{\Pi}(E) \times G(2, 1)$ .

### INTERSECCION CON RECTAS

Veamos lo que resulta al intersectar el conjunto  $E$  con rectas tridimensionales de  $G(3, 1)$ . Supongamos ahora que en el Teorema 6 tengamos  $\beta = 1$ , entonces del mismo Teorema 'casi siempre'  $\dim_H[Proj_{\Pi}(E)] = 2$  de donde por los Teoremas de Proyección  $\dim_H(E) \geq 2$ .

Supongamos que  $\dim_H(E) > 2$ , e intersectemos el Conjunto- $sP$   $E$  con rectas tridimensionales  $\tau_x(D)$ , donde  $x \in E$  y  $D \in G(3, 1)$ . Entonces por el Teorema 7 del capítulo 8,  $\dim_H[E \cap \tau_x(D)] = s + 1 - 3$ , es decir 'casi siempre'  $s = \dim_H[E \cap \tau_x(D)] + 2$ . Expresamos ésto en el siguiente enunciado

**Teorema 9** Sea  $E \subset \mathbb{R}^3$  un Conjunto- $sP$  tal que  $\dim_H(E) > 2$ . Entonces

$$\dim_H(E) = \dim_H[E \cap \tau_x(D)] + 2$$

para  $H^s \times \gamma_{3,1}$ -casi todo  $(x, D) \in E \times G(3, 1)$ .

Por último del Teorema 6 del capítulo 8, si  $\dim_H(E) < 2$  la intersección con rectas tridimensionales 'casi siempre' será vacía, enunciamos este resultado como sigue

**Teorema 10** Sean  $E \subset \mathbb{R}^3$  un Conjunto- $sP$  tal que  $\dim_H(E) < 2$ , y  $x \in \mathbb{R}^3$  arbitrario, entonces para  $\gamma_{3,1}$ -casi todo  $D \in G(3, 1)$

$$(E \setminus \{x\}) \cap \tau_x(D) = \emptyset.$$

De esta manera el Teorema 10 nos permitiría 'casi siempre' utilizar el Teorema 9 para determinar la dimensión de Hausdorff aún cuando no se conozca de antemano la condición  $\dim_H(E) > 2$  en los Conjuntos- $sP$ .

# CAPITULO 2

## ALGEBRA DE CONJUNTOS

## 2. ALGEBRA DE CONJUNTOS

En este capítulo veremos algunos conceptos que serán usados en capítulos posteriores.

**Definición 1** Sea  $X$  cualquier conjunto no vacío. Una colección no vacía  $\Gamma$  de subconjuntos de  $X$  se llamará  $\sigma$ -álgebra si se satisfacen las siguientes condiciones:

- i) Si  $E \in \Gamma$  entonces  $X \setminus E \in \Gamma$
- ii) Si  $E_1, E_2, \dots \in \Gamma$  entonces  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Gamma$ .

De las leyes de DeMorgan observamos que si  $\Gamma$  es una  $\sigma$ -álgebra, entonces  $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \Gamma$  si  $E_n \in \Gamma$  para  $n = 1, 2, \dots$ . Además se tiene que la diferencia de conjuntos, definida como  $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$ , también es una operación cerrada en  $\Gamma$ .

**Teorema 2** Sea  $\mathcal{C}$  una colección arbitraria de subconjuntos de  $X$ , entonces existe una mínima  $\sigma$ -álgebra la cual contiene a  $\mathcal{C}$ . Es decir, existe una  $\sigma$ -álgebra  $\Gamma(\mathcal{C})$  la cual contiene a  $\mathcal{C}$ , y si  $\mathcal{B}$  es una  $\sigma$ -álgebra arbitraria que contiene a  $\mathcal{C}$  entonces  $\Gamma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}$ .

*Demostración:* Sea  $\mathcal{F}$  la familia de todas las  $\sigma$ -álgebras de subconjuntos de  $X$  que contienen a  $\mathcal{C}$ .  $\mathcal{F}$  es no vacía ya que al menos se encuentra la  $\sigma$ -álgebra potencia  $P(X)$ , la cual obviamente contiene a  $\mathcal{C}$ . Definimos ahora  $\Gamma(\mathcal{C}) = \bigcap \{ \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \in \mathcal{F} \}$ . Entonces  $\mathcal{C}$  es una subcolección de conjuntos de  $\Gamma(\mathcal{C})$  ya que cada  $\mathcal{B}$  en  $\mathcal{F}$  contiene a  $\mathcal{C}$ . Veamos que  $\Gamma(\mathcal{C})$  es una  $\sigma$ -álgebra. En efecto, si  $E \in \Gamma(\mathcal{C})$  entonces  $E \in \mathcal{B}$  para toda  $\mathcal{B}$  en  $\mathcal{F}$ , y como cada  $\mathcal{B}$  es una  $\sigma$ -álgebra entonces  $X \setminus E \in \mathcal{B}$  para toda  $\mathcal{B}$  en  $\mathcal{F}$ , es decir,  $X \setminus E \in \Gamma(\mathcal{C})$ . Análogamente, si  $E_1, E_2, \dots \in \Gamma(\mathcal{C})$  entonces  $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{B}$  para toda  $\mathcal{B}$  en  $\mathcal{F}$ , luego entonces como cada  $\mathcal{B}$  es  $\sigma$ -álgebra  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{B}$  para toda  $\mathcal{B}$  en  $\mathcal{F}$ , es decir,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Gamma(\mathcal{C})$ . Así,  $\Gamma(\mathcal{C})$  es una  $\sigma$ -álgebra que contiene a  $\mathcal{C}$  y por lo tanto está en la familia  $\mathcal{F}$ . Por la construcción de  $\Gamma(\mathcal{C})$  es claro que si  $\mathcal{B}$  es una  $\sigma$ -álgebra que contiene a  $\mathcal{C}$  entonces  $\Gamma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}$ .  $\square$

A  $\Gamma(\mathcal{C})$  también se le llama la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\mathcal{C}$ .

**Definición 3** Una medida exterior  $m$  sobre un conjunto  $X$  es una función definida sobre todos los subconjuntos de  $X$  que toma valores en el intervalo  $[0, +\infty]$  y tal que:

i)  $m(\emptyset) = 0$

ii) (Monotonía)  $m(A) \leq m(B)$  si  $A \subset B$

iii) Si  $A_1, A_2, \dots$  es una colección numerable o finita de subconjuntos de  $X$  entonces

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

**Definición 4** Una medida  $\mu$  es una función definida sobre una  $\sigma$ -álgebra  $\Gamma$  de subconjuntos de  $X$  que toma valores en el intervalo  $[0, +\infty]$  y tal que:

i)  $\mu(\emptyset) = 0$

ii) (Sigma Aditiva)  $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$  para cualesquier sucesión numerable o finita de subconjuntos disjuntos de  $E_n$  en  $\Gamma$ .

Observamos que la condición de monotonía de una medida exterior  $m$  es en  $\mu$  una consecuencia de su definición. En efecto, si  $A \subset B$  entonces podemos expresar a  $B$  como la unión disjunta  $B = A \cup [B \setminus A] \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$ , y por ser  $\mu$  sigma aditiva tendremos que

$$\mu(B) = \mu(A \cup [B \setminus A] \cup \emptyset \cup \dots) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) + \mu(\emptyset) + \dots = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$$

y como  $\mu(B \setminus A) \geq 0$  se sigue el resultado deseado.

Denotaremos la diferencia  $X \setminus E$  como  $E^c$ .

**Definición 5** Sea  $m$  una medida exterior en  $X$ . Un subconjunto  $E$  de  $X$  se llamará **m-medible** o **medible con respecto a la medida exterior  $m$** , si para cualesquier conjunto  $A \subset X$  se tiene que

$$m(A) = m(A \cap E) + m(A \cap E^c).$$

**Teorema 6** Si  $m$  es una medida exterior en  $X$  y  $E$  es un subconjunto de  $X$ , tendremos que:

i) Si  $m(A) \geq m(A \cap E) + m(A \cap E^c)$  para cualesquier  $A \subset X$  entonces  $E$  es  $m$ -medible.

ii) Si  $m(E) = 0$  entonces  $E$  es  $m$ -medible.

*Demostración:* i) Como  $A = (A \cap E) \cup (A \cap E^c)$  y  $m$  es medida exterior, entonces  $m(A) \leq m(A \cap E) + m(A \cap E^c)$  y el resultado se sigue.

ii) Sea  $A$  un subconjunto arbitrario de  $X$ . Como  $A \cap E \subset E$  y  $m$  es medida exterior, entonces  $m(A \cap E) \leq m(E)$ , de donde  $m(A \cap E) \leq 0$ , pues por hipótesis  $m(E) = 0$ . Y por la no negatividad de la medida exterior

$$m(A \cap E) = 0 \tag{2.1}$$

Asimismo  $m(A \cap E^c) \leq m(A)$  ya que  $A \cap E^c \subset A$ , de aquí que con (2.1)  $m(A \cap E) + m(A \cap E^c) \leq m(A)$  para cualesquier subconjunto  $A$  de  $X$ . El resultado se sigue por el inciso anterior.  $\square$

El siguiente teorema es muy importante ya que nos dice que para cualesquier medida exterior en un conjunto dado  $X$ , siempre existe una  $\sigma$ -álgebra en  $X$  mismo donde dicha medida exterior llega a ser una medida. La demostración puede consultarse en el Royden.

**Teorema 7** Sea  $m$  una medida exterior en  $X$ . La colección  $M$  de conjuntos  $m$ -medibles forman una  $\sigma$ -álgebra, y la restricción de  $m$  a  $M$  es una medida.

**Definición 8** Sea  $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de conjuntos en  $X$ , entonces definimos el **límite inferior** y el **límite superior** de dicha sucesión, denotados  $\varliminf_{n \rightarrow \infty} E_n$  y  $\varlimsup_{n \rightarrow \infty} E_n$  respectivamente, como

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n$$

y

$$\varlimsup_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n.$$

Así, el  $\varliminf E_n$  consiste de todos aquellos puntos que se encuentran en todo  $E_n$  salvo un número finito de ellos, y el  $\varlimsup E_n$  consiste de aquellos puntos que se encuentran en una infinidad de conjuntos  $E_n$ . De acuerdo a las definiciones se sigue entonces que el límite inferior y el límite superior de una sucesión de conjuntos en una  $\sigma$ -álgebra también estarán en dicha  $\sigma$ -álgebra. Cuando  $\varliminf E_n = \varlimsup E_n$  escribiremos simplemente  $\lim E_n$  para dicho valor común; por cierto esto siempre será válido si  $\{E_n\}$  es una sucesión creciente o una sucesión decreciente de conjuntos. En efecto, sea  $\{E_n\}$  una sucesión creciente de conjuntos, entonces por definición de límite superior

$$\varlimsup_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n$$

pero  $\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ ,  $\forall k = 1, 2, \dots$  ya que  $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ , y como además  $E_n = \bigcap_{j=n}^{\infty} E_j$ , entonces

$$\begin{aligned} &= \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=n}^{\infty} E_j = \varliminf_{j \rightarrow \infty} E_j \end{aligned}$$

donde la última igualdad es por la definición de límite inferior. Así, si  $\{E_n\}$  es una sucesión creciente

$$\varlimsup_{n \rightarrow \infty} E_n = \varliminf_{n \rightarrow \infty} E_n. \quad (2.2)$$

Por las leyes de DeMorgan dicha igualdad también se cumple para una sucesión decreciente de conjuntos en  $X$ .

Veamos ahora algunos resultados referentes a cualesquier medida dada.

**Teorema 9** [Continuidad de las medidas] Sea  $\mu$  una medida en una  $\sigma$ -álgebra  $\Gamma$  de subconjuntos de  $X$ .

(i) Si  $E_1 \subset E_2 \subset \dots$  es una sucesión creciente de conjuntos en  $\Gamma$ , entonces

$$\mu \left( \lim_{n \rightarrow \infty} E_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n).$$

(ii) Si  $F_1 \supset F_2 \supset \dots$  es una sucesión decreciente de conjuntos en  $\Gamma$ , y además  $\mu(F_1) < \infty$ , entonces

$$\mu \left( \lim_{n \rightarrow \infty} F_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n).$$

(iii) Para cualesquier sucesión de conjuntos  $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$  en  $\Gamma$  se tiene que

$$\mu \left( \lim_{n \rightarrow \infty} F_n \right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n).$$

*Demostración:* (i) Podemos expresar

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E_1 \cup \left[ \bigcup_{n=2}^{\infty} (E_n \setminus E_{n-1}) \right] \quad (2.3)$$

donde la unión de la derecha es disjunta. Así, por ser  $\mu$  medida tendremos

$$\begin{aligned} \mu \left( \lim_{n \rightarrow \infty} E_n \right) &= \mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \mu(E_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu(E_n \setminus E_{n-1}) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \mu(E_1) + \sum_{n=2}^k \mu(E_n \setminus E_{n-1}) \right] \end{aligned}$$

y como la expresión del lado derecho de (2.3) es una unión disjunta

$$\begin{aligned} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu \left[ E_1 \cup \bigcup_{n=2}^k (E_n \setminus E_{n-1}) \right] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu [E_1 \cup (E_2 \setminus E_1) \cup (E_3 \setminus E_2) \cup \dots \cup (E_k \setminus E_{k-1})] \end{aligned}$$

y como  $E_j \subset E_{j+1}$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu [E_k]$$

es decir  $\mu \left( \lim_{n \rightarrow \infty} E_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$ .

(ii) Definimos  $E_n = F_1 \setminus F_n$  para  $n = 1, 2, \dots$ , entonces  $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots$  es una sucesión creciente. Además se tiene que  $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = F_1 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ , entonces

$$\begin{aligned} \mu \left( \lim_{n \rightarrow \infty} F_n \right) &= \mu \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \right) \\ &= \mu \left( F_1 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \end{aligned}$$

y como  $\mu(\bigcup E_n) \leq \mu(F_1) < \infty$

$$= \mu(F_1) - \mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right)$$

y por el inciso anterior

$$\begin{aligned} &= \mu(F_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [\mu(F_1) - \mu(E_n)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_1 \setminus E_n). \end{aligned}$$

Pero  $F_1 \setminus E_n = F_1 \cap E_n^c$ , y por construcción  $E_n = F_1 \setminus F_n$  luego

$$\begin{aligned} &F_1 \cap [F_1 \setminus F_n]^c \\ &= F_1 \cap [F_1 \cap F_n^c]^c = F_1 \cap [F_1^c \cup F_n] \\ &= [F_1 \cap F_1^c] \cup [F_1 \cap F_n] = F_1 \cap F_n \\ &= F_n \end{aligned}$$

ya que  $F_1 \supset F_n$ . Así,  $\mu(F_1 \setminus E_n) = \mu(F_n)$ , y por lo tanto  $\mu \left( \lim_{n \rightarrow \infty} F_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n)$ .

iii) Definamos  $E_k = \bigcap_{n=k}^{\infty} F_n$  para  $k = 1, 2, \dots$ , entonces de la Definición 8 de límite inferior de una sucesión de conjuntos podemos escribir  $\varliminf_{n \rightarrow \infty} F_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ . Pero  $\{E_k\}$  es una sucesión creciente de subconjuntos. En efecto, sea  $x \in E_k$  entonces  $x \in F_n$ ,  $\forall n \geq k$ , en particular para  $n \geq k+1$ , es decir  $x \in \bigcap_{n=k+1}^{\infty} F_n = E_{k+1}$ . Así,  $E_k \subset E_{k+1}$  como se deseaba mostrar. Así

$$\begin{aligned} \mu \left( \varliminf_{n \rightarrow \infty} F_n \right) &= \mu \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) \\ &= \mu \left( \lim_{k \rightarrow \infty} E_k \right) \end{aligned}$$

por ser una sucesión creciente, y usando ahora el inciso (2) anterior

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(E_k) = \varliminf_{k \rightarrow \infty} \mu(E_k)$$

nuevamente por ser  $\{E_k\}$  creciente, y como  $E_k = \bigcap_{j=k}^{\infty} F_j \subset F_n$  para  $n \geq k$  entonces

$$\leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n)$$

para cualesquier sucesión  $\{F_n\}$  de subconjuntos en la  $\sigma$ -álgebra  $\Gamma$ .  $\square$

### Conjuntos de Borel

**Definición 10** Sea  $X$  un espacio topológico. La colección  $B$  de conjuntos de Borel es la mínima  $\sigma$ -álgebra que contiene todos los subconjuntos cerrados de  $X$ .

Dicha  $\sigma$  álgebra mínima existe por el Teorema 2 de este capítulo. Además  $B$  también es la mínima  $\sigma$ -álgebra la cual contiene a todos los subconjuntos abiertos de  $X$ .

Un subconjunto de un espacio topológico  $X$  que pueda expresarse como unión numerable de conjuntos cerrados se llamará conjunto  $F_\sigma$ . De aquí que todo conjunto numerable sea un  $F_\sigma$ , lo mismo que cualquier conjunto cerrado. Diremos que un subconjunto de  $X$  es un subconjunto  $G_\delta$  si éste puede expresarse como una intersección numerable de conjuntos abiertos, por lo que cualquier conjunto abierto es un  $G_\delta$ . Además de las definiciones el complemento de un conjunto  $F_\sigma$  es un conjunto  $G_\delta$  y viceversa. De acuerdo a las definiciones anteriores los conjuntos  $F_\sigma$  y  $G_\delta$  están contenidos en los conjuntos de Borel.

### Medida exterior regular

**Definición 11** Sea  $X$  un conjunto no-vacio. Una medida exterior  $m$  en  $X$  se dice que es **regular** si para todo conjunto  $A$  en  $X$  existe un conjunto  $m$ -medible  $E$  en  $X$ , tal que  $A \subset E$  y  $m(A) = m(E)$ .

**Lema 12** Si  $m$  es una medida exterior regular en  $X$  y  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  cualesquier sucesión creciente de conjuntos en  $X$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n) = m\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right).$$

*Demostración:* Sea  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$  una sucesión creciente de subconjuntos arbitrarios de  $X$ . Entonces por ser  $m$  una medida exterior regular, para cada  $A_n$  existe un conjunto  $m$ -medible  $E_n$  tal que  $E_n \supset A_n$  y además  $m(E_n) = m(A_n)$ . Entonces por (2.2)

$$\begin{aligned} m\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) &= m\left(\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n\right) \\ &\leq m\left(\varliminf_{n \rightarrow \infty} E_n\right) \end{aligned}$$

ya que  $A_n \subset E_n, \forall n = 1, 2, \dots$ , y como  $m$  es una medida, al restringirse a los conjuntos  $E_n$  podemos utilizar la continuidad de la medida, véase Teorema 9, para obtener

$$\leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} m(E_n) = \varliminf_{n \rightarrow \infty} m(A_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n).$$

Por lo tanto

$$m\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n). \quad (2.4)$$

Por otro lado,  $A_k \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  entonces, por monotonía de  $m$

$$m(A_k) \leq m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

y como ésto es válido para cualesquier natural  $k$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m(A_k) \leq m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = m\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right). \quad (2.5)$$

De (2.4) y (2.5) se sigue el resultado deseado.  $\square$

## 2.1 Medida exterior métrica

**Definición 13** Sea  $\langle X, \rho \rangle$  un espacio métrico. Una medida exterior  $m$  en  $X$  se llamará **medida exterior métrica** si

$$m(E \cup F) = m(E) + m(F) \quad (2.6)$$

siempre que  $E$  y  $F$  estén separados positivamente. Decimos que los conjuntos  $E$  y  $F$  están separados positivamente si

$$\rho(E, F) = \inf \{ \rho(x, y) : x \in E \wedge y \in F \} > 0.$$

Mostraremos que si  $m$  es una medida exterior métrica entonces la colección de todos los conjuntos  $m$ -medibles, incluirá a los conjuntos de Borel. Para ello necesitamos el siguiente lema:

**Lema 14** Sea  $m$  una medida exterior métrica en el espacio métrico  $\langle X, \rho \rangle$ . Sea  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión creciente de subconjuntos en  $X$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ . Supóngase además que  $\rho(A_n, A \setminus A_{n+1}) > 0$  para  $n = 1, 2, \dots$  (ver Figura 2.1). Entonces

$$m(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n).$$

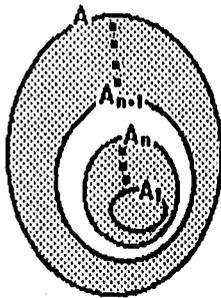


Figura 2.1

*Demostración:* Como  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ , y  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supset A_k$  para cualquier natural  $k$ , entonces  $m(A_k) \leq m(A)$ . Luego entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n) \leq m(A). \quad (2.7)$$

Veamos que la otra desigualdad también es válida. Para ello definimos los siguientes conjuntos  $B_j$ , (ver Figura 2.2)

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \\ B_2 &= A_2 \setminus A_1 \\ B_3 &= A_3 \setminus A_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$B_n = A_n \setminus A_{n-1} \quad \text{si } n \geq 2.$$

De esta manera tendremos que  $B_n \subset A_n$  para todo natural  $n$ , y además si  $n+2 \leq i$  entonces  $n+1 \leq i-1$ , por lo que

$$\begin{aligned} B_i &= A_i \setminus A_{i-1} \subset A \setminus A_{i-1} \quad \text{ya que } A_i \subset A \quad \forall i \in \mathbb{N} \\ &\subset A \setminus A_{n+1} \quad \text{ya que } n+1 \leq i-1. \end{aligned}$$

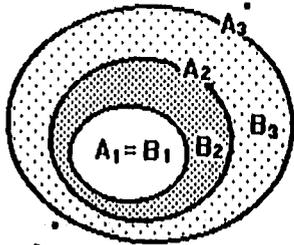


Figura 2.2

Esta última contención es por lo siguiente: Ya que  $A_k \subset A_j$  si  $k \leq j$  entonces  $A_k^c \supset A_j^c$ , de donde  $A \cap A_j^c \subset A \cap A_k^c$ . Es decir  $A \setminus A_j \subset A \setminus A_k$  si  $k \leq j$  y en particular para  $k = n+1$  y  $j = i-1$ , que es precisamente la contención utilizada. Así

$$\rho(B_n, B_i) \geq \rho(A_n, A \setminus A_{n+1}) > 0 \quad \text{si } n+2 \leq i.$$

es decir,  $B_n$  y  $B_i$  estarán separados positivamente si  $n+2 \leq i$ . Además por construcción se tiene que  $\rho(B_n, B_i) = \rho(\bigcup_{j=i}^n B_j, B_i)$  siempre que  $n+2 \leq i$ , entonces aplicando  $(m-1)$ -veces la igualdad (2.6) de la definición de medida exterior métrica tendremos que

$$m\left(\bigcup_{k=1}^m B_{2k-1}\right) = \sum_{k=1}^m m(B_{2k-1}) \quad (2.8)$$

y análogamente

$$m\left(\bigcup_{k=1}^m B_{2k}\right) = \sum_{k=1}^m m(B_{2k}). \quad (2.9)$$

Como  $\bigcup_{k=1}^m B_{2k-1} \subset A_{2m}$  y también  $\bigcup_{k=1}^m B_{2k} \subset A_{2m}$ , entonces, si alguna de las series (2.8) o bien (2.9) diverge cuando  $n \rightarrow \infty$  tendremos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n) = \infty$  y el resultado del lema se seguiría trivialmente de la desigualdad (2.7). Supongamos entonces que ambas series convergen, por lo tanto

$$m(A) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = m\left[A_n \cup \bigcup_{k=n+1}^{\infty} B_k\right]$$

$$\leq m(A_n) + m\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} B_k\right) \leq m(A_n) + \sum_{k=n+1}^{\infty} m(B_k)$$

ambas desigualdades por ser  $m$  medida exterior. Así

$$m(A) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} m(B_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n)$$

ya que el residuo  $\sum_{k=n+1}^{\infty} m(B_k) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Y junto con la desigualdad (2.7) se obtiene la igualdad deseada.  $\square$

Veamos a continuación uno de los principales teoremas de este capítulo.

**Teorema 15** Si  $m$  es una medida exterior métrica en un espacio métrico  $\langle X, \rho \rangle$ , entonces todos los conjuntos de Borel de  $X$  son  $m$ -medibles.

*Demostración:* Ya que los conjuntos  $m$ -medibles forman una  $\sigma$ -álgebra y los conjuntos de Borel son la mínima  $\sigma$ -álgebra que contiene a los subconjuntos cerrados de  $X$ , es suficiente demostrar el teorema para cualesquier subconjunto cerrado de  $X$ . Es decir, si  $E \subset X$  es un conjunto cerrado y  $A \subset X$  es arbitrario entonces habría que demostrar que

$$m(A) \geq m(A \cap E) + m(A \cap E^c).$$

Definimos, para  $n = 1, 2, \dots$  (ver Figura 2.3)

$$A_n = \{x \in A \cap E^c \mid \rho(x, E) \geq 1/n\}$$

y como  $A \cap E \subset E$  entonces  $\rho(A_n, A \cap E) \geq 1/n$  para  $n = 1, 2, \dots$ . Es decir,  $A_n$  y  $A \cap E$  están positivamente separados, así para cada  $n = 1, 2, \dots$  se tiene que

$$m(A \cap E) + m(A_n) = m[(A \cap E) \cup A_n] \leq m(A) \quad (2.10)$$

donde la desigualdad se sigue por la monotonía de  $m$  y ya que  $(A \cap E) \cup A_n \subset A$  para  $n = 1, 2, \dots$ . Por construcción  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ , por lo que

$$\begin{aligned} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{x \in A \cap E^c \mid \rho(x, E) \geq 1/n > 0\} \\ &= \{x \in A \cap E^c \mid \rho(x, E) > 0\} = A \cap E^c \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde la última igualdad se sigue por el hecho de ser  $E$  un subconjunto cerrado de  $X$ . Demostremos ahora que (ver Figura 2.4)

$$\rho[A_n, (A \cap E^c) \setminus A_{n+1}] > 0 \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

Sea  $x \in (A \cap E^c) \setminus A_{n+1}$ , entonces  $x \notin A_{n+1}$ , de donde existe  $z \in E$  tal que  $\rho(x, z) < \frac{1}{n+1}$ . Si además tomamos  $y \in A_n$  entonces  $\rho(y, z) \geq 1/n$  y por la desigualdad triangular

$$\rho(x, y) \geq \rho(y, z) - \rho(x, z) > \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

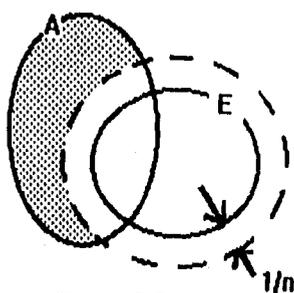


Figura 2.3

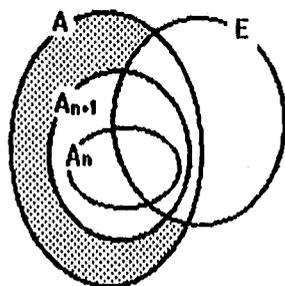


Figura 2.4

para  $n = 1, 2, \dots$ , es decir, (2.12) queda demostrado. Ahora, sustituyendo (2.11) en (2.12) obtendremos que  $\rho[A_n, (\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \setminus A_{n+1}] > 0$  para  $n = 1, 2, \dots$  y por el Lema anterior y nuevamente (2.11) obtendremos  $m(A \cap E^c) = m(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n)$ . Este resultado junto con (2.10) cuando  $n \rightarrow \infty$ , nos da  $m(A \cap E) + m(A \cap E^c) \leq m(A)$  ya que  $(A \cap E) \cup A_n \subset A$  para  $n = 1, 2, \dots$  y obtenemos el resultado deseado.  $\square$

Para finalizar este capítulo veamos aquellas medidas que están concentradas en cierto conjunto particular.

**Definición 16** Sea  $\mu$  una medida sobre una  $\sigma$ -álgebra  $\Gamma$  que contenga todos los conjuntos de Borel de  $\mathbb{R}^n$ . El soporte de  $\mu$  es el mínimo conjunto cerrado  $D \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $\mu(\mathbb{R}^n \setminus D) = \mu(D^c) = 0$ . Diremos que  $\mu$  es una medida sobre un conjunto  $A$ , si  $A$  contiene el soporte de  $\mu$ .

Así, por definición, el soporte de una medida es un conjunto cerrado.

Sea  $\langle X, \rho \rangle$  un espacio métrico y  $x \in X$ . La bola cerrada con centro  $x$  y radio  $r > 0$  la definimos como  $B_r(x) = \{z \in X \mid \rho(x, z) \leq r\}$ . Asimismo, la bola abierta la definimos como  $B_r^o(x) = \{z \in X \mid \rho(x, z) < r\}$ .

**Teorema 17** Sea  $\mu$  una medida con soporte  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Entonces  $x \in D$  si y sólo si  $\mu(B_r(x)) > 0$  para todo  $r > 0$ .

*Demostración:* Sea  $x \in D$  el soporte de  $\mu$ . Supongamos que existe  $r > 0$  tal que  $\mu(B_r(x)) = 0$  entonces el conjunto cerrado  $D \setminus B_r^o(x)$  esta contenido propiamente en  $D$  y es tal que su complemento tiene medida cero, lo cual contradice que  $D$  sea el mínimo conjunto cerrado con dicha propiedad. Por lo tanto  $\mu(B_r(x)) > 0 \quad \forall r > 0$ . Recíprocamente, sea  $\mu(B_r(x)) > 0 \quad \forall r > 0$  y supongamos que  $x \notin D$ , el soporte de  $\mu$ . Luego  $x \in D^c$ , donde  $D^c$  es abierto, por lo tanto existe  $\xi > 0$  tal que  $B_\xi(x) \subset D^c$ , por lo que  $\mu(B_\xi(x)) \leq \mu(D^c) = 0$ . Esta contradicción nos lleva a que  $x \in D$ .  $\square$

Necesitaremos más adelante las siguientes definiciones.

**Definición 18** Sea  $\mu$  una medida sobre una  $\sigma$ -álgebra  $\Gamma$  que contenga todos los borelianos de  $\mathbb{R}^n$ . Llamaremos a  $\mu$  una **distribución de masa** si  $\mu$  tiene soporte compacto y si  $0 < \mu(\mathbb{R}^n) < \infty$ . En particular para cualesquier conjunto  $\mu$ -medible  $A$ , diremos que  $\mu(A)$  es la masa de  $A$ .

**Definición 19** Una medida de Radon  $\mu$ , es una medida sobre un espacio de Hausdorff localmente compacto  $X$ , con las siguientes propiedades:

(i) Si  $K$  es un subconjunto compacto de  $X$ , entonces  $\mu(K) < \infty$ .

(ii) Si  $V$  es un subconjunto abierto de  $X$ , entonces  $V$  es  $\mu$ -medible y

$$\mu\{V\} = \sup\{\mu(K) : K \text{ es compacto, } K \subset V\}.$$

(iii) Si  $E$  es cualquier subconjunto de  $X$ , entonces

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : V \text{ es abierto, } E \subset V\}.$$

# CAPITULO 3

## MEDIDA Y DIMENSION DE HAUSDORFF

### 3. MEDIDA DE HAUSDORFF

En lo subsiguiente trabajaremos siempre en el espacio Euclideo  $n$ -dimensional,  $\mathbb{R}^n$ , cuya norma la denotaremos como  $\|\cdot\|$ . Sin embargo gran parte de los resultados que obtendremos son válidos para cualquier espacio métrico en general.

**Definición 1** Sea  $F$  un conjunto no-vacío de  $\mathbb{R}^n$ . Definimos el **diámetro** de  $F$ , denotado  $|F|$ , como

$$|F| = \sup_{x, y \in F} \|x - y\|$$

**Definición 2** Definimos a una familia  $\{\mathcal{U}_i\}$  como una  $\delta$ -cubierta de  $F$ , si  $\{\mathcal{U}_i\}$  es una colección numerable o finita de subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $0 < |\mathcal{U}_i| \leq \delta$  y  $F \subset \bigcup \mathcal{U}_i$ .

Denotemos el conjunto potencia de  $\mathbb{R}^n$  como  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ .

**Definición 3** Sea  $F$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  y  $s$  un número real no-negativo, entonces definimos para cada  $\delta > 0$  el mapeo  $H_\delta^s : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$  como

$$H_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\mathcal{U}_i|^s : \{\mathcal{U}_i\} \text{ es una } \delta\text{-cubierta de } F \right\}. \quad (3.1)$$

Observemos que el ínfimo se está tomando sobre todas las  $\delta$ -cubiertas  $\{\mathcal{U}_i\}$  de  $F$ .

De acuerdo a esta definición si tomamos  $0 < \xi < \delta$ , el valor de  $H_\xi^s(F)$  será mayor o igual al valor de  $H_\delta^s(F)$  pues todas las cubiertas de  $F$  de diámetro máximo  $\xi$  están contenidas en el conjunto de cubiertas de radio máximo  $\delta$ . Es decir,  $H_\delta^s$  es monótona creciente cuando  $\delta$  decrece. Esto nos lleva a la siguiente definición:

**Definición 4** Sea  $F$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  y  $s$  un número real no-negativo. Definimos la **medida exterior  $s$ -dimensional de Hausdorff** de  $F$ , denotada  $H^s(F)$ , como el siguiente límite

$$H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F). \quad (3.2)$$

Observemos que dicho límite existe por ser  $H_\delta^s$  monótona creciente cuando  $\delta$  decrece. Por lo tanto  $H^s : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$ .

**Teorema 5** Tanto  $H_\delta^s$  como  $H^s$  son medidas exteriores en  $\mathbb{R}^n$ .

*Demostración:* De acuerdo a las definiciones de  $H_\delta^s$  y de  $H^s$  ambas son funciones que están definidas en el conjunto potencia de  $\mathbb{R}^n$  y toman sus valores en el intervalo  $[0, +\infty]$ .

Sea  $j$  un entero positivo arbitrario. Cualesquier bola  $n$ -dimensional de diámetro  $1/j$  es una  $\delta$ -cubierta del conjunto vacío, así por (3.1)  $H_\delta^s(\emptyset) = 0$  y como esto es válido para cualesquier  $\delta > 0$  entonces por (3.2)  $H^s(\emptyset) = 0$ . Veamos que ambas funciones también satisfacen la propiedad de monotonia. Sean  $A$  y  $B$  subconjuntos arbitrarios de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $A \subset B$  y  $\delta > 0$  arbitrario. Tomemos una  $\delta$ -cubierta arbitraria  $\{U_i\}$  de  $B$ , entonces, ya que  $A \subset B$  dicha  $\delta$ -cubierta también lo será para  $A$ , de donde

$$H_\delta^s(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |W_i|^s : \{W_i\} \text{ es una } \delta\text{-cubierta de } A \right\} \leq \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$$

y al tomar el ínfimo en ambos lados de esta desigualdad sobre todas las  $\delta$ -cubiertas  $\{U_i\}$  de  $B$  obtendremos,

$$H_\delta^s(A) \leq \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ es una } \delta\text{-cubierta de } B \right\} = H_\delta^s(B)$$

y por lo tanto  $H_\delta^s(A) \leq H_\delta^s(B)$  si  $A \subset B$ . Y como esto es válido para cualesquier  $\delta > 0$  entonces también  $H^s(A) \leq H^s(B)$ .

Probemos por último que si  $A_1, A_2, \dots$  es una sucesión numerable y arbitraria en  $\mathbb{R}^n$  entonces  $H_\delta^s(\cup_i A_i) \leq \sum_i H_\delta^s(A_i)$  y lo mismo con  $H^s$ . En efecto, si existe un conjunto  $A_i$  tal que  $H_\delta^s(A_i) = +\infty$  el resultado se sigue directamente, y análogamente con  $H^s$ . Supongamos entonces que  $H_\delta^s(A_i) < +\infty$  para toda  $i = 1, 2, \dots$ , entonces por la Definición 3, dado  $\epsilon > 0$  arbitrario existe una  $\delta$ -cubierta  $\{U_n^{(i)}\}_{n=1}^{\infty}$  de  $A_i$  tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |U_n^{(i)}|^s < H_\delta^s(A_i) + \frac{\epsilon}{2^i} \quad (3.3)$$

para cada  $i = 1, 2, \dots$ . Ahora, por la construcción de las  $\delta$ -cubiertas tenemos que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n^{(i)} \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad \text{y donde } 0 < |U_n^{(i)}| \leq \delta \quad \forall n, i \in \mathbb{N}$$

es decir  $\{U_n^{(i)}\}_{n,i \in \mathbb{N}}$  es una  $\delta$ -cubierta particular de  $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ , de donde

$$\begin{aligned} H_\delta^s \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |U_n^{(i)}|^s \\ &< \sum_{i=1}^{\infty} \left[ H_\delta^s(A_i) + \frac{\epsilon}{2^i} \right] \quad \text{de acuerdo a (3.3)} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} H_\delta^s(A_i) + \epsilon \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^i = \sum_{i=1}^{\infty} H_\delta^s(A_i) + \epsilon \end{aligned}$$

y como  $\epsilon > 0$  se tomó arbitrario tendremos que

$$H_\delta^s \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} H_\delta^s(A_i).$$

Como además esta desigualdad es válida para cualesquier  $\delta > 0$  el resultado también será válido para  $H^s$ . Así, tanto  $H_\delta^s$  como  $H^s$  son medidas exteriores en  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

De acuerdo al Teorema 7 del Capítulo 2 podemos hacer la siguiente definición:

**Definición 6** La restricción de la medida exterior  $H^s$  a la  $\sigma$ -álgebra de todos los conjuntos  $H^s$ -medibles se llamará **medida  $s$ -dimensional de Hausdorff**.

Abusando de la notación, tanto la medida exterior como la medida  $s$ -dimensional de Hausdorff las denotaremos mediante  $H^s$ , haciendo referencia explícita a cada uno de ellos para evitar confusiones.

El siguiente teorema nos dice que la  $\sigma$ -álgebra sobre la cual está definida la medida  $s$ -dimensional de Hausdorff es bastante grande, es decir, incluye una gran cantidad de conjuntos entre ellos todos los borelianos.

**Teorema 7** Todos los conjuntos de Borel de  $\mathbb{R}^n$  son  $H^s$ -medibles.

*Demostración:* Sea  $\rho$  la métrica euclídeana de  $\mathbb{R}^n$ . Sean  $E$  y  $F$  cualesquier conjuntos de  $\mathbb{R}^n$  positivamente separados, es decir,  $\rho(E, F) > 0$ . Tomemos  $0 < \delta < \rho(E, F)$  arbitrario y  $\{U_i\}$  una  $\delta$ -cubierta de  $E \cup F$ , entonces para cada  $i = 1, 2, \dots$  se tiene que  $U_i \cap E = \emptyset$  o bien  $U_i \cap F = \emptyset$ . Por lo tanto podemos descomponer la cubierta  $\{U_i\}$  como la unión  $\{U_i\} = \{A_i\} \cup \{B_i\}$  donde  $A_i \cap F = \emptyset$  y  $B_i \cap E = \emptyset$  para  $i = 1, 2, \dots$ . Además  $\{A_i\}$  es una  $\delta$ -cubierta de  $E$  y  $\{B_i\}$  es una  $\delta$ -cubierta de  $F$ . Entonces

$$\begin{aligned} H_\delta^s(E \cup F) &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ es una } \delta\text{-cubierta de } E \cup F \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |A_i|^s + \sum_{i=1}^{\infty} |B_i|^s : \{A_i\} \cup \{B_i\} \text{ es una } \delta\text{-cubierta de } E \cup F \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |A_i|^s + \sum_{i=1}^{\infty} |B_i|^s : \right. \\ &\quad \left. \{A_i\} \text{ y } \{B_i\} \text{ son } \delta\text{-cubiertas de } E \text{ y } F \text{ respectivamente} \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |A_i|^s : \{A_i\} \text{ es una } \delta\text{-cubierta de } E \right\} + \\ &\quad + \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |B_i|^s : \{B_i\} \text{ es una } \delta\text{-cubierta de } F \right\} \end{aligned}$$

esta última igualdad por la propiedad aditiva del ínfimo, así

$$H_\delta^s(E \cup F) = H_\delta^s(E) + H_\delta^s(F)$$

para cualesquier  $0 < \delta < \rho(E, F)$  y haciendo  $\delta \rightarrow 0$  obtendremos que  $H^s(E \cup F) = H^s(E) + H^s(F)$ . Es decir  $H^s$  es una medida exterior métrica en el espacio métrico euclideo, entonces por el Teorema 15 del capítulo 2 todos los borelianos  $n$ -dimensionales son  $H^s$ -medibles.  $\square$

Definiciones equivalentes de la medida  $s$ -dimensional de Hausdorff se pueden obtener si el ínfimo en la definición de  $H_\delta^s$  se toma sobre  $\delta$ -cubiertas de conjuntos abiertos, o bien de conjuntos cerrados, o inclusive -ya que cualquier conjunto está contenido en un conjunto convexo del mismo diámetro- sobre conjuntos convexos. En dichos casos, aún cuando pueden obtenerse valores diferentes para  $H_\delta^s$ , el valor del límite  $H^s$  seguirá siendo el mismo en todos estos casos. Sin embargo, si tomamos el ínfimo sobre  $\delta$ -cubiertas con bolas cerradas se obtiene una medida diferente a la de  $H^s$ , en cuyo caso se le llama medida esférica de Hausdorff. (Ver capítulo 4).

**Teorema 8** Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto arbitrario y  $H^s$  la medida exterior  $s$ -dimensional de Hausdorff en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces:

- (i) Existe un conjunto  $G$  en  $\mathcal{G}_\delta$  que contiene a  $E$  y tal que  $H^s(G) = H^s(E)$ . En particular  $H^s$  es una medida exterior regular.
- (ii) Si  $H^s(E) < +\infty$  y además es  $H^s$ -medible, entonces existe un conjunto  $B$  en  $\mathcal{F}_\sigma$  contenido en  $E$  tal que  $H^s(B) = H^s(E)$ , y por lo tanto, dado  $\epsilon > 0$  existe un conjunto cerrado  $H \subset E$  tal que  $H^s(E \setminus H) < \epsilon$ .

*Demostración:* (i) Si  $H^s(E) = +\infty$  entonces  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto abierto de igual medida lo cual probaría este inciso. Supongamos entonces que  $H^s(E) < +\infty$ . Para cada  $j = 1, 2, \dots$  existe (por la definición de  $H_\delta^s$ ) una  $\frac{2}{j}$ -cubierta de conjuntos abiertos de  $E$ , denotados  $\{\mathcal{O}_{jk}\}_{k=1}^\infty$ , tal que

$$\sum_{k=1}^\infty |\mathcal{O}_{jk}|^s < H_\frac{2}{j}^s(E) + \frac{1}{j} \quad (3.4)$$

para  $j = 1, 2, \dots$ . Definimos ahora  $G = \bigcap_{j=1}^\infty \bigcup_{k=1}^\infty \mathcal{O}_{jk}$ . Como  $\bigcup_k \mathcal{O}_{jk} \supset E$  para cada  $j$ , entonces  $G = \bigcap_{j=1}^\infty \bigcup_{k=1}^\infty \mathcal{O}_{jk} \supset E$ , es decir,  $G \supset E$ . Y como  $\bigcup_k \mathcal{O}_{jk}$  es un conjunto abierto para cada  $j$ , entonces  $G \in \mathcal{G}_\delta$ . Ahora  $G = \bigcap_j \bigcup_k \mathcal{O}_{jk} \subset \bigcup_k \mathcal{O}_{jk}$  para cada  $j = 1, 2, \dots$ , es decir  $\{\mathcal{O}_{jk}\}_{k=1}^\infty$  es una  $\frac{2}{j}$ -cubierta de  $G$ , entonces de (3.4) y por la definición de  $H_\delta^s$  tendremos que

$$H_\frac{2}{j}^s(G) \leq H_\frac{2}{j}^s(E) + \frac{1}{j}, \quad j = 1, 2, \dots$$

y cuando hacemos  $j \rightarrow +\infty$   $H^s(G) \leq H^s(E)$ , de donde  $H^s(G) = H^s(E)$  ya que  $E \subset G$ , lo cual demuestra la primera afirmación del inciso. Ya que

$E \subset \mathbb{R}^n$  se tomó arbitrario y los conjuntos  $\mathcal{G}_\delta$  son  $H^s$ -medibles tendremos que  $H^s$  es regular.

(ii) Sea  $E$   $H^s$ -medible y  $H^s(E) < +\infty$ . Por el inciso anterior existen conjuntos abiertos  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots$  con  $\bigcap_j \mathcal{O}_j \in \mathcal{G}_\delta$  y tales que

$$E \subset \bigcap_{j=1}^{\infty} \mathcal{O}_j \subset \mathcal{O}_j, \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

y

$$H^s \left( \bigcap_{j=1}^{\infty} \mathcal{O}_j \right) = H^s(E) < +\infty.$$

Por lo tanto

$$H^s \left( \bigcap_{j=1}^{\infty} \mathcal{O}_j \setminus E \right) = H^s \left( \bigcap_{j=1}^{\infty} \mathcal{O}_j \right) - H^s(E) = 0. \quad (3.6)$$

Ahora, como todo conjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  es un  $\mathcal{F}_\sigma$ , supongamos que  $\mathcal{O}_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_{jk}$  para  $j = 1, 2, \dots$  donde  $\{F_{jk}\}_{k=1}^{\infty}$  es una sucesión creciente de conjuntos cerrados para cada  $j$ . Ahora, como  $E$  es  $H^s$ -medible, entonces  $E \cap F_{jk}$  es  $H^s$ -medible para toda  $j, k$  en  $\mathbb{N}$ , por lo que, usando la continuidad de  $H^s$  con la sucesión creciente  $\{E \cap F_{jk}\}_{k=1}^{\infty}$ , tendremos

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} H^s(E \cap F_{jk}) &= H^s \left( \lim_{k \rightarrow \infty} E \cap F_{jk} \right) = H^s \left( E \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} F_{jk} \right) \\ &= H^s(E \cap \mathcal{O}_j) = H^s(E) < +\infty \end{aligned}$$

pues por (3.5)  $E \subset \mathcal{O}_j$ . De aquí que, dado  $\epsilon > 0$  existe  $k(j) \in \mathbb{N}$  tal que

$$H^s(E \cap F_{jk(j)}^c) < \frac{\epsilon}{2^j}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

Si definimos el conjunto cerrado  $F = \bigcap_{j=1}^{\infty} F_{jk(j)}$ , entonces

$$H^s(F) \geq H^s(E \cap F) = H^s(E) - H^s(E \cap F^c)$$

ya que  $F$  es  $H^s$ -medible y  $H^s(E) < +\infty$

$$\begin{aligned} &= H^s(E) - H^s \left[ E \cap \left( \bigcap_{j=1}^{\infty} F_{jk(j)} \right)^c \right] \\ &= H^s(E) - H^s \left[ E \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} F_{jk(j)}^c \right] = H^s(E) - H^s \left[ \bigcup_{j=1}^{\infty} (E \cap F_{jk(j)}^c) \right] \end{aligned}$$

y por ser  $H^s$  medida exterior y además por (3.7)

$$\geq H^s(E) - \sum_{j=1}^{\infty} H^s(E \cap F_{jk(j)}^c) > H^s(E) - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^j} = H^s(E) - \epsilon$$

Por lo tanto

$$H^s(F) > H^s(E) - \epsilon. \quad (3.8)$$

Ahora, ya que  $F_{jk(j)} \subset \cup_{k=1}^{\infty} F_{jk}$  para  $j = 1, 2, \dots$ , entonces  $\cap_{j=1}^{\infty} F_{jk(j)} \subset \cap_{j=1}^{\infty} \cup_{k=1}^{\infty} F_{jk}$  lo cual implica  $F \subset \cap_{j=1}^{\infty} \mathcal{O}_j$  por construcción de  $F$  y  $\mathcal{O}_j$ . De aquí que

$$H^s(F \setminus E) \leq H^s\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \mathcal{O}_j \setminus E\right) = 0$$

por (3.6), y por lo tanto  $H^s(F \setminus E) = 0$ . Además, por el primer inciso existe un conjunto  $G \in \mathcal{G}_\delta$  con

$$G \supset F \setminus E \quad \text{y tal que} \quad H^s(G) = 0. \quad (3.9)$$

Además, como  $G \in \mathcal{G}_\delta$  entonces  $G^c \in \mathcal{F}_\sigma$  de aquí que existan conjuntos cerrados  $B_1, B_2, \dots$  tales que  $G^c = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$ , y como  $F$  es cerrado entonces

$$F \setminus G = F \cap G^c = F \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F \cap B_n) \in \mathcal{F}_\sigma.$$

Además  $F \setminus G \subset E$ . En efecto, como  $F \setminus E \subset G$  entonces  $F \cap E^c \subset G$  de donde  $F^c \cup E \supset G^c$  y por lo tanto  $F \cap (F^c \cup E) \supset F \cap G^c = F \setminus G$ . Es decir  $F \setminus G \subset F \cap (F^c \cup E) = F \cap E \subset E$ . Así  $F \setminus G$  es un conjunto  $\mathcal{F}_\sigma$  contenido en  $E$ , lo cual implica  $H^s(F \setminus G) < +\infty$  y como  $F \subset (F \setminus G) \cup G$  entonces  $H^s(F) \leq H^s(F \setminus G) + H^s(G)$  y por (3.8) y (3.9)

$$H^s(F \setminus G) \geq H^s(F) > H^s(E) - \epsilon.$$

Resumiendo, dado un conjunto  $E \subset \mathbb{R}^n$  que es  $H^s$ -medible y  $H^s(E) < +\infty$  y dado  $\epsilon > 0$  arbitrario, existe  $F \setminus G \in \mathcal{F}_\sigma$  con  $F \setminus G \subset E$  y  $H^s(F \setminus G) > H^s(E) - \epsilon$ . Luego, en particular para  $\epsilon = \frac{1}{n}$  existe  $B_n \in \mathcal{F}_\sigma$  con  $B_n \subset E$  y tal que  $H^s(B_n) > H^s(E) - \frac{1}{n}$ . Definimos ahora  $B = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$  el cual obviamente es un conjunto en  $\mathcal{F}_\sigma$  y está contenido en  $E$ , luego entonces para todo  $k = 1, 2, \dots$

$$H^s(B) = H^s\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \geq H^s(B_k) > H^s(E) - \frac{1}{k}$$

por lo que  $H^s(B) \geq H^s(E)$  y ya que  $B \subset E$  entonces  $H^s(B) = H^s(E)$ , lo cual demuestra la primer afirmación de este inciso. Además como  $B \in \mathcal{F}_\sigma$ , existen conjuntos cerrados  $H_1, H_2, \dots$  tales que  $E \supset B = \cup_{n=1}^{\infty} H_n$ , más aún, podemos tomar la sucesión  $\{H_n\}$  creciente por lo que usando la continuidad de  $H^s$

$$H^s(E) = H^s(B) = H^s\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} H^s(H_n).$$

Así, dado  $\xi > 0$  arbitrario existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $H^s(E) < H^s(H_N) + \xi$ , lo cual implica que  $H^s(E \setminus H_N) < \xi$  ya que  $E \supset H_N$ , y esto demuestra la segunda afirmación del inciso.  $\square$

### 3.1 Contracciones y propiedades de la medida $H^s$

**Teorema 9** Sean  $F \subset \mathbb{R}^n$  y  $\lambda > 0$  arbitrarios y  $H^s$  la medida exterior de Hausdorff, entonces

$$H^s(\lambda F) = \lambda^s H^s(F)$$

donde  $\lambda F = \{\lambda x : x \in F\}$ .

*Demostración:* Sea  $\{U_j\}$  una  $\delta$ -cubierta de  $F$ , entonces  $\{\lambda U_j\}$  es una  $\lambda\delta$ -cubierta de  $\lambda F$ , por lo que

$$H_{\lambda\delta}^s(\lambda F) \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda U_j|^s = \lambda^s \sum_{j=1}^{\infty} |U_j|^s.$$

Como ésto es válido para toda  $\delta$ -cubierta de  $F$  entonces  $H_{\lambda\delta}^s(\lambda F) \leq \lambda^s H_{\delta}^s(F)$  y cuando  $\delta \rightarrow 0$

$$H^s(\lambda F) \leq \lambda^s H^s(F). \quad (3.10)$$

Sustituyendo ahora en esta desigualdad  $\lambda$  por  $1/\lambda$  y  $F$  por  $\lambda F$  obtenemos

$$H^s\left(\frac{1}{\lambda}\lambda F\right) \leq \frac{1}{\lambda^s} H^s(\lambda F)$$

o bien

$$\lambda^s H^s(F) \leq H^s(\lambda F). \quad (3.11)$$

De (3.10) y (3.11) obtenemos la igualdad requerida.  $\square$

**Definición 10** Sean  $F \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$  un mapeo y  $\alpha > 0$ . Diremos que  $f$  satisface la condición  $\alpha$ -exponencial de Hölder si

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c \|x - y\|^\alpha \quad (3.12)$$

para todo  $x, y$  en  $F$  y cierta constante  $c > 0$ . El caso particular  $\alpha = 1$  se reduce a la condición de Lipschitz, es decir

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c \|x - y\| \quad (3.13)$$

para todo  $x, y$  en  $F$  y cierta constante  $c > 0$ .

Observamos que las normas en cada uno de los lados de estas desigualdades están en diferentes espacios.

Obviamente cualquiera de estas dos condiciones implican la continuidad de la función.

**Teorema 11** Sea  $F \subset \mathbb{R}^n$  arbitrario y  $H^s$  la medida exterior de Hausdorff. Si un mapeo  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$  satisface la condición  $\alpha$ -exponencial de Hölder con la constante  $c > 0$ , entonces para cada  $s \geq 0$

$$H^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} H^s(F). \quad (3.14)$$

En particular si  $f$  satisface la condición de Lipschitz tendremos que

$$H^s(f(F)) \leq c^s H^s(F). \quad (3.15)$$

*Demostración:* Sea  $\{U_j\}$  una  $\delta$ -cubierta de  $F$ , entonces  $F \subset \cup_j U_j$  lo cual implica  $F \subset \cup_j (F \cap U_j)$  y por lo tanto  $f(F) \subset \cup_j f(F \cap U_j)$ . Además de la definición de diámetro de un conjunto, tendremos que para cada  $j = 1, 2, \dots$

$$|f(F \cap U_j)| = \sup_{x, y \in F \cap U_j} \|f(x) - f(y)\| \leq \sup_{x, y \in F \cap U_j} c \|x - y\|^\alpha \leq c |U_j|^\alpha \leq c \delta^\alpha \quad (3.16)$$

es decir,  $\{f(F \cap U_j)\}$  es una  $c\delta^\alpha$ -cubierta de  $f(F)$ . Y de (3.16)

$$|f(F \cap U_j)|^{\frac{1}{\alpha}} \leq c^{\frac{1}{\alpha}} |U_j|^s$$

para cada  $j = 1, 2, \dots$  por lo que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f(F \cap U_j)|^{\frac{1}{\alpha}} \leq c^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{j=1}^{\infty} |U_j|^s$$

y como la  $\delta$ -cubierta  $\{U_j\}$  se tomó arbitraria entonces

$$H_{\delta/c^\alpha}^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} H_\delta^s(F)$$

y cuando  $\delta \rightarrow 0$ ,  $c\delta^\alpha \rightarrow 0$  por lo que se sigue el resultado buscado

$$H^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} H^s(F). \quad \square$$

Inclusive si  $f$  es una isometría, es decir  $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ , tendríamos que  $H^s(f(F)) = H^s(F)$ . En efecto, si  $f$  es isometría entonces es inyectiva, por lo que  $f^{-1}$  restringida a  $f(F)$  es Lipschitz con constante  $c = 1$  por lo que con (3.15)  $H^s(F) = H^s[f^{-1}(f(F))] \leq H^s[f(F)]$ . La otra desigualdad se sigue directamente de (3.15) con  $c = 1$ .

Veamos ahora que  $H^s$  es invariante bajo traslaciones, donde denotaremos  $F + x = \{w + x : w \in F\}$ . Las traslaciones y rotaciones definen isometrías por lo que tendremos los siguientes resultados.

**Teorema 12** La medida exterior de Hausdorff  $H^s$  es invariante bajo traslaciones, es decir,  $H^s(F + x) = H^s(F)$  para cualesquier  $F \subset \mathbb{R}^n$  y  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Teorema 13** La medida exterior de Hausdorff  $H^s$  es invariante bajo rotaciones.

## 3.2 Medidas de Hausdorff y Lebesgue

Como es de esperarse las medidas exteriores de Hausdorff y de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$ ,  $H^n$  y  $L^n$  respectivamente, están relacionadas. Para demostrarlo veamos algunos teoremas previos.

El próximo teorema nos dice que dada cualesquier colección de conjuntos suficientemente grande que cubra a un conjunto  $E$ , existe una subcolección disjunta que cubre a casi todo  $E$ .

**Definición 14** Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$ . Una colección de conjuntos  $\mathcal{V}$  se llama **clase de Vitali de  $E$**  si para cada  $x \in E$  y  $\delta > 0$  existe  $U \in \mathcal{V}$  con  $x \in U$  y  $0 < |U| \leq \delta$ .

**Teorema 15 (del Recubrimiento de Vitali)** Sea  $H^s$  la medida exterior  $s$ -dimensional de Hausdorff en  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $E$  un subconjunto  $H^s$ -medible de  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathcal{V}$  una clase de Vitali de conjuntos cerrados de  $E$ . Entonces podemos seleccionar una sucesión (numerable o finita) disjunta  $\{U_j\}$  de  $\mathcal{V}$  tal que o  $\sum_j |U_j|^s = \infty$  o bien  $H^s(E \setminus \cup_j U_j) = 0$ .

*Demostración:* Fijemos  $\rho > 0$  y supongamos que  $|U| \leq \rho$  para todo  $U \in \mathcal{V}$ . Seleccionaremos la sucesión deseada  $\{U_j\}$  inductivamente. Sea  $U_1$  cualquier miembro de  $\mathcal{V}$ . Supongamos que  $U_1, U_2, \dots, U_m$  han sido seleccionados y sea

$$d_m = \sup\{|U| : U \in \mathcal{V} \wedge U \cap U_j = \emptyset \quad \forall j = 1, \dots, m\}.$$

Si  $d_m = 0$  entonces  $E \subset \cup_{j=1}^m U_j$  y el teorema quedaría demostrado. Si  $d_m > 0$  sea  $U_{m+1}$  un conjunto en  $\mathcal{V}$  disjunto de  $\cup_{j=1}^m U_j$  tal que  $|U_{m+1}| \geq \frac{1}{2}d_m$ . Supóngase que este proceso continua indefinidamente y que  $\sum_j |U_j|^s < \infty$ . Para cada  $j$  sea  $B_j$  la bola con centro en  $U_j$  y con radio  $3|U_j|$ . Afirmamos que para toda  $k > 1$

$$E \setminus \bigcup_{j=1}^k U_j \subset \bigcup_{j=k+1}^{\infty} B_j. \quad (3.17)$$

En efecto, si  $x \in E \setminus \cup_{j=1}^k U_j$ , entonces existe  $U \in \mathcal{V}$  que no interseca a  $U_1, \dots, U_m$  y tal que  $x \in U$ . Ya que  $|U_j| \rightarrow 0$ , por la convergencia de la serie  $\sum_j |U_j|^s$ , entonces existe un  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $|U_m| < \frac{1}{2}|U|$ , es decir,  $|U| > 2|U_m|$  para alguna  $m \in \mathbb{N}$ . De acuerdo a la construcción de  $\{U_j\}$ ,  $U$  debe intersecar a  $U_j$  para alguna  $j$ , con  $k < j < m$  para la cual  $|U| \leq 2|U_j|$ . Luego, por geometría elemental  $U \subset B_j$  de donde se seguiría (3.17). Así, si  $\delta > 0$

$$\begin{aligned} H_\delta^s \left( E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j \right) &\leq H_\delta^s \left( E \setminus \bigcup_{j=1}^k U_j \right) \leq H_\delta^s \left( \bigcup_{j=k+1}^{\infty} B_j \right) \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} H_\delta^s(B_j) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |B_j|^s \end{aligned} \quad (3.18)$$

con tal de que  $k$  sea suficientemente grande para que  $|B_j| \leq \delta$  si  $j \geq k$  y así  $B_j$  pueda considerarse como una  $\delta$ -cubierta particular de  $B_j$ . Y como cada  $B_j$  es de radio  $3|U_j|$ , entonces  $|B_j| = 6|U_j|$  y así de (3.18)

$$H_\delta^s \left( E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j \right) \leq 6^s \sum_{j=k+1}^{\infty} |U_j|^s$$

y como  $\sum_j |U_j|^s < \infty$  entonces  $H_\delta^s \left( E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j \right) = 0$  para toda  $\delta > 0$ , luego entonces  $H^s \left( E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j \right) = 0$  y queda demostrado el teorema.  $\square$

Necesitaremos además del siguiente resultado geométrico, el cual nos dice que el conjunto de máximo volumen con un diámetro dado es la esfera. La demostración puede encontrarse en el texto *Convexity* de Eggleston.

**Teorema 16** *El volumen  $n$ -dimensional de un conjunto cerrado y convexo de diámetro  $d$  es, a lo más,  $\pi^{n/2} \left(\frac{1}{2}d\right)^n / \left(\frac{1}{2}n\right)!$ , el volumen de una bola de diámetro  $d$ .*

**Teorema 17** *Sean  $L^n$  y  $H^n$  medidas de Lebesgue y Hausdorff respectivamente. Si  $E \subset \mathbb{R}^n$ , entonces  $L^n(E) = c_n H^n(E)$  donde  $c_n = \pi^{n/2} / 2^n \left(\frac{1}{2}n\right)!$ . En particular  $c_1 = 1$  y  $c_2 = \pi/4$ .*

*Demostración:* Dado  $\epsilon > 0$  podemos cubrir a  $E$  mediante una colección de conjuntos cerrados y convexos  $\{U_j\}$  tal que  $\sum_j |U_j|^n < H^n(E) + \epsilon$ . Por el teorema anterior, con  $d = |U_j|$ , se tiene  $L^n(U_j) \leq c_n |U_j|^n$ , y por construcción de medida de Lebesgue  $L^n(E) = \inf \sum_j \text{Vol}(C_j)$  donde el infimum se toma sobre todas las cubiertas de  $E$  por sucesiones  $\{C_j\}$  de  $n$ -paralelepípedos. Llamamos  $n$ -paralelepípedo a un conjunto de la forma  $\{x \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i, 1 \leq i \leq n\}$  o bien cualquier otro conjunto resultante al sustituir algunos o todos los signos de  $<$  por  $\leq$ . Así

$$L^n(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} L^n(U_j) \leq c_n \sum_{j=1}^{\infty} |U_j|^n < c_n H^n(E) + c_n \epsilon$$

de donde por ser  $\epsilon > 0$  arbitrario  $L^n(E) \leq c_n H^n(E)$ .

Veamos ahora la otra desigualdad. Sea  $\{C_j\}$  una colección de paralelepípedos que cubren a  $E$  y tal que

$$\sum_j \text{Vol}(C_j) < L^n(E) + \epsilon. \quad (3.19)$$

Podemos suponer que los paralelepípedos sean abiertos sin que la desigualdad (3.19) se altere. Para cada  $j$  las bolas cerradas contenidas en  $C_j$  y de radios a lo más  $\delta$  forman una clase de Vitali de  $C_j$ . Por el Teorema del Recubrimiento de Vitali existen bolas disjuntas  $\{B_{jk}\}_{k=1}^{\infty}$  en  $C_j$  de diámetros a lo más  $\delta$  y tal

que  $H^n(C_j \setminus \cup_{k=1}^{\infty} B_{jk}) = 0$  y por lo tanto con  $H_{\delta}^n(C_j \setminus \cup_{k=1}^{\infty} B_{jk}) = 0$ . Ya que la medida exterior de Lebesgue  $L^n$  es una medida de Borel, entonces para cada  $j = 1, 2, \dots$

$$\sum_{k=1}^{\infty} L^n(B_{jk}) = L^n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_{jk}\right) \leq L^n(C_j)$$

De donde

$$\begin{aligned} H_{\delta}^n(E) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} H_{\delta}^n(C_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} H_{\delta}^n\left[\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_{jk}\right) \cup \left(C_j \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{jk}\right)\right] \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} H_{\delta}^n(B_{jk}) + \sum_{j=1}^{\infty} H_{\delta}^n\left(C_j \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{jk}\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |B_{jk}|^n + 0 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_n^{-1} L^n(B_{jk}) \\ &\leq c_n^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} L^n(C_j) < c_n^{-1} L^n(E) + c_n^{-1} \epsilon \end{aligned}$$

esta última desigualdad por (3.19) y por lo tanto  $c_n H_{\delta}^n(E) \leq L^n(E) + \epsilon$  para cualesquier  $\epsilon$  y  $\delta$ , luego entonces  $c_n H^n(E) \leq L^n(E)$ .  $\square$

### 3.3 Dimensión de Hausdorff

En esta sección  $H^s$  indicará la medida exterior  $s$ -dimensional de Hausdorff. De la definición de  $H_{\delta}^s$  observamos que para  $\delta < 1$  y  $\{U_j\}$  una  $\delta$ -cubierta arbitraria, la sumatoria  $\sum_j |U_j|^s$  es no-creciente con respecto a  $s$ . Luego, por la Definición 4  $H^s$  también será no-creciente con respecto a  $s$ . Más aún, para  $F \subset \mathbb{R}^n$  afirmamos que si existe un número real no-negativo  $s_0$  tal que  $0 < H^{s_0}(F) < \infty$ , entonces dicho número es único. En efecto, sea  $t > s_0$  y  $\{U_j\}$  una  $\delta$ -cubierta de  $F$  con  $0 < \delta < 1$ , entonces para cada  $j = 1, 2, \dots$

$$|U_j|^t \leq |U_j|^{s_0}$$

o bien para cada  $j$

$$\left(\frac{|U_j|}{\delta}\right)^t \leq \left(\frac{|U_j|}{\delta}\right)^{s_0}$$

de donde

$$\sum_{j=1}^{\infty} |U_j|^t \leq \delta^{t-s_0} \sum_{j=1}^{\infty} |U_j|^{s_0}$$

y tomando el infimum sobre todas las  $\delta$ -cubiertas de  $F$ , con  $\delta < 1$ , obtenemos

$$H_{\delta}^t(F) \leq \delta^{t-s_0} H_{\delta}^{s_0}(F) \quad \text{si } t > s_0. \quad (3.20)$$

Y como estamos suponiendo que  $0 < H^{s_0}(F) < \infty$ , entonces cuando  $\delta \rightarrow 0$ , obtendremos de esta última desigualdad que para  $t > s_0$

$$H^t(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^t(F) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} (\delta^{t-s_0}) \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^{s_0}(F) = 0.$$

Es decir  $H^t(F) = 0$  si  $t > s_0$ . Es decir, siendo  $s_0$  un real no-negativo

$$\text{si } 0 < H^{s_0}(F) < \infty \text{ entonces } H^t(F) = 0 \quad \forall t > s_0. \quad (3.21)$$

Ahora supongamos que tomamos  $t < s_0$ , donde  $s_0 > 0$  es tal que  $0 < H^{s_0}(F) < \infty$ , entonces de (3.20)

$$H_\delta^{s_0}(F) \leq \delta^{s_0-t} H_\delta^t(F)$$

o bien

$$H_\delta^t(F) \geq \frac{1}{\delta^{s_0-t}} H_\delta^{s_0}(F)$$

por lo que

$$H^t(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^t(F) \geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\delta^{s_0-t}} \right) \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^{s_0}(F) = \infty.$$

Es decir, siendo  $s_0$  un real positivo

$$\text{si } 0 < H^{s_0}(F) < \infty \text{ entonces } H^t(F) = \infty \quad \forall 0 \leq t < s_0. \quad (3.22)$$

De (3.21) y (3.22) se sigue que dicho valor  $s_0$ , si existe, es único. Inclusive si  $H^{s_0}(F) = 0$  de (3.20) obtendríamos nuevamente que  $H^t(F) = 0$  si  $t > s_0$ , por lo que (3.21) sigue siendo válido si sólo consideramos  $H^{s_0}(F) < \infty$ , aunque este valor  $s_0$  ya no será necesariamente único. Análogamente (3.22) seguirá siendo válido si solamente consideramos  $0 < H^{s_0}$ , aunque ya no tengamos nuevamente la unicidad de  $s_0$ . Por lo tanto, con esta observación y de (3.21) y (3.22) existe un punto crítico  $s_0$  de  $H^s(F)$  en el cual dicha función tiene un brinco de  $\infty$  a 0. A este valor crítico  $s_0$  de  $H^s(F)$  lo llamaremos **dimensión de Hausdorff de  $F$** , y lo denotaremos  $\dim_H(F)$ , llegamos así a la siguiente definición

**Definición 18** Sea  $H^s$  la medida exterior  $s$ -dimensional de Hausdorff en  $\mathbb{R}^n$  y  $F$  un conjunto arbitrario en  $\mathbb{R}^n$ , entonces la **dimensión de Hausdorff de  $F$** , denotada  $\dim_H(F)$ , se define como

$$\dim_H(F) = \inf \{s \geq 0 : H^s(F) = 0\} = \sup \{s \geq 0 : H^s(F) = \infty\}.$$

$$H^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{si } s < \dim_H(F) \\ 0 & \text{si } s > \dim_H(F). \end{cases}$$

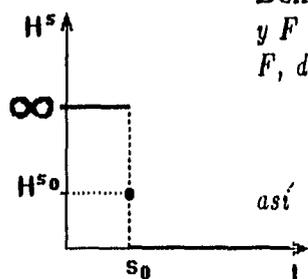


Figura 3.1

Frecuentemente a los conjuntos de Borel  $B \subset \mathbb{R}^n$  tales que  $0 < H^s(B) < \infty$  se les llama  **$s$ -conjuntos ( $s$ -sets)**.

Veamos ahora algunos resultados referentes a la dimensión de Hausdorff.

**Teorema 19** a) Sea  $F \subset \mathbb{R}^n$  arbitrario, entonces  $0 \leq \dim_H(F) \leq n$ .

b) (Monotonía de  $\dim_H$ ) Si  $E \subset F$  conjuntos arbitrarios de  $\mathbb{R}^n$  entonces  $\dim_H(E) \leq \dim_H(F)$ .

c) Sea  $\mathcal{O}$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$  entonces  $\dim_H(\mathcal{O}) = n$ .

d) Si  $F_1, F_2, \dots$  es una sucesión numerable de conjuntos en  $\mathbb{R}^n$ , entonces

$$\dim_H \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \right) = \sup_{j \in \mathbb{N}} \{ \dim_H(F_j) \}.$$

e) Si  $F$  es un conjunto numerable entonces  $\dim_H(F) = 0$ .

*Demostración:* a) Sea  $C$  un cubo en  $\mathbb{R}^n$  de lado unitario. Dividámoslo, en la forma obvia, en  $k^n$  subcubos iguales  $U_j$ , cada uno de lado  $1/k$ . Sea  $\delta \geq \frac{\sqrt{n}}{k} > 0$  entonces

$$\begin{aligned} H_\delta^n(C) &= H_\delta^n \left( \bigcup_{j=1}^{k^n} U_j \right) \leq \sum_{j=1}^{k^n} H_\delta^n(U_j) = k^n H_\delta^n(U_j) \\ &\leq k^n H_{\sqrt{n}/k}^n(U_j) \quad \text{ya que } \delta \geq \sqrt{n}/k \\ &\leq k^n \left( \frac{\sqrt{n}}{k} \right)^n = n^{n/2} < \infty \end{aligned}$$

Así, si  $C$  es un cubo unitario  $n$ -dimensional  $H_\delta^n(C) \leq n^{n/2} < \infty$  para toda  $\delta > \frac{\sqrt{n}}{k} > 0$  por lo que cuando  $\delta \rightarrow 0$  obtendremos que  $H^n(C) < \infty$ . Y por (3.21)  $H^s(C) = 0$  si  $s > n$ . Ahora como  $\mathbb{R}^n$  puede expresarse como una unión numerable de dichos cubos unitarios  $C_j$  entonces si  $s > n$   $H^s(\mathbb{R}^n) = H^s(\bigcup_j C_j) \leq \sum_j H^s(C_j) = 0$ . De donde  $H^s(\mathbb{R}^n) = 0$  si  $s > n$ , y por monotonía de  $H^s$ ,  $H^s(F) = 0$  si  $s > n$  y  $F$  es cualesquier subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  y por la Definición 18 de dimensión de Hausdorff  $0 \leq \dim_H(F) \leq n$ .

b) Sea  $E \subset F$ . Si  $\dim_H F = \infty$  la desigualdad es trivial. Supongamos entonces que  $s_0 = \dim_H F < \infty$ , por lo tanto  $H^t(F) = 0$  si  $t > s_0$ , y por propiedad de monotonía de la medida si  $E \subset F$  entonces  $H^t(E) \leq H^t(F)$ , por lo que  $H^t(E) = 0$  si  $t > s_0$ . Esto implica, por la definición de dimensión de Hausdorff que  $\dim_H E \leq s_0 = \dim_H F$ .

c) Si  $F$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$  entonces existe una bola abierta  $B$ ,  $n$ -dimensional, contenida en  $F$ . Obviamente  $B$  tiene volumen  $n$ -dimensional positivo, por lo que el Teorema 17 implica que  $\dim_H B = n$ . Y por monotonía  $n \leq \dim_H F$ , que junto con el primer inciso obtenemos la igualdad deseada.

d) Sea  $F_1, F_2, \dots$  una sucesión de conjuntos en  $\mathbb{R}^n$ . Como  $F_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$  para cada  $k$ , la monotonía de la dimensión implica  $\dim_H F_k \leq \dim_H(\bigcup_j F_j)$  para cada  $k = 1, 2, \dots$  de donde

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \dim_H(F_k) \leq \dim_H \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \right). \quad (3.23)$$

Veamos ahora la otra desigualdad. Si  $\dim_H(F_j) = \infty$  para algun entero positivo  $j$ , o bien  $\sup_j \dim_H(F_j) = \infty$ , dicha desigualdad quedaria demostrada. Sea entonces  $\sup_j \dim_H(F_j) < \infty$ , y tomemos  $t > \dim_H(F_j)$  para toda  $j$ , entonces  $H^t(F_j) = 0$  para toda  $j$ , que junto con el hecho de que

$$H^t\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} H^t(F_j)$$

obtenemos que  $H^t(\cup_j F_j) = 0$  si  $t > \dim_H(F_j)$  para toda  $j \in \mathbb{N}$ , o bien si  $t \geq \sup_j \dim_H(F_j)$ . Asi por definici6n de dimensi6n de Hausdorff

$$\dim_H\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j\right) \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} \{\dim_H(F_j)\}. \quad (3.24)$$

(3.23) y (3.24) implican la igualdad deseada.

e) Sea  $F$  un conjunto que conste de un solo punto, digamos  $x$ , entonces cualesquier cubo  $U$  con centro en dicho punto y lado  $\delta > 0$  es una  $\delta$ -cubierta  $x$ , por lo que  $\sum_j |U_j|^0 = |U|^0 = 1$  y esto implica  $\dim_H F = \dim_H \{x\} = 0$  para cualesquier  $x \in \mathbb{R}^n$ . Ahora si  $F$  es un conjunto numerable, digamos  $F = \{x_1, x_2, \dots\}$  entonces por el inciso anterior  $\dim_H F = \sup_j \dim_H \{x_j\} = 0$ .  $\square$

**Teorema 20** Sea  $F \subset \mathbb{R}^n$  y supongamos que la funci6n  $f: F \rightarrow \mathbb{R}^m$  satisface la condici6n  $\alpha$ -exponencial de Hausdorff. Entonces

$$\dim_H[f(F)] \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H(F).$$

*Demostraci6n:* Del Teorema 11

$$H^{t/\alpha}(f(F)) \leq c^{t/\alpha} H^t(F) = 0 \quad \text{si } t > \dim_H(F)$$

de donde, ya que  $\alpha > 0$

$$H^{t/\alpha}(f(F)) = 0 \quad \text{si } \frac{t}{\alpha} > \frac{1}{\alpha} \dim_H(F)$$

que por lo definici6n de  $\dim_H$  tenemos que

$$\dim_H(f(F)) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H(F). \quad \square$$

El siguiente corolario nos dice que la dimensi6n de Hausdorff es invariante bajo transformaciones bi-Lipschitz.

**Corolario 21** Sea  $F \subset \mathbb{R}^n$  conjunto arbitrario.

a) Sea  $f: F \rightarrow \mathbb{R}^m$  una transformaci6n Lipschitz, entonces

$$\dim_H[f(F)] \leq \dim_H(F).$$

b) Si  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una transformación bi-Lipschitz, es decir, si existen constantes  $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$  tales que

$$c_1 \|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq c_2 \|x - y\|$$

para todo  $x, y$  en  $F$ , entonces

$$\dim_H [f(F)] = \dim_H (F).$$

*Demostración:* El primer inciso es el teorema anterior con  $\alpha = 1$ . Veamos pues el segundo inciso. Si  $f$  es bi-Lipschitz entonces  $f$  es inyectiva. En efecto, si  $f(x) = f(y)$  entonces como  $c_1 \|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\|$  tendremos que  $x = y$ . Así, podemos ahora definir  $f^{-1} : f(F) \rightarrow F$  como sigue: para  $z \in f(F)$ ,  $f^{-1}(z) = x$  si y sólo si  $f(x) = z$ . De aquí que, si  $f(x) = z$  y  $f(y) = w$  para  $x, y$  en  $F$  entonces

$$c_1 \|f^{-1}(z) - f^{-1}(w)\| \leq \|z - w\| \quad \forall z, w \in f(F).$$

Es decir,  $f^{-1} : f(F) \rightarrow F$  es una transformación de Lipschitz, y por el inciso anterior

$$\dim_H [f^{-1}(f(F))] \leq \dim_H [f(F)]$$

y como  $f^{-1}$  es biyectiva en su dominio  $f(F)$ , entonces  $f^{-1}(f(F)) = F$ , por lo que  $\dim_H F \leq \dim_H [f(F)]$ . El otro lado de la desigualdad se sigue del inciso anterior.  $\square$

En general, la dimensión de Hausdorff de un conjunto nos dice muy poco acerca de sus propiedades topológicas, sin embargo cuando dicha dimensión es menor estrictamente a 1, el conjunto será totalmente desconexo, es decir, dos de sus puntos distintos cualesquiera nunca estarán en una misma componente conexa de dicho conjunto.

**Teorema 22** Un conjunto  $F \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $\dim_H (F) < 1$  es totalmente desconexo.

*Demostración:* Sean  $x$  y  $y$  puntos cualesquiera distintos en  $F$ . Definamos la transformación  $f_x : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  como  $f_x(z) = \|z - x\|$ . Luego,  $f_x$  es una transformación de Lipschitz ya que

$$|f_x(z) - f_x(w)| = |||z - x| - |w - x|| \leq \|z - w\|.$$

Por lo tanto, del teorema anterior,  $\dim_H [f_x(F)] \leq \dim_H (F) < 1$ . Así,  $f_x(F)$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}$  tal que  $H^1(f_x(F)) = L^1(f_x(F)) = 0$ , de acuerdo a la definición de dimensión de Hausdorff, y la relación existente entre las medidas de Hausdorff  $H^n$  y de Lebesgue  $L^n$ . De aquí que  $[f_x(F)]^c$  sea denso en  $\mathbb{R}$ . Ahora, como  $f_x(y) > 0$ , entonces por densidad de  $[f_x(F)]^c$  existe un número real  $r \notin f_x(F)$  y tal que  $0 < r < f_x(y)$ , de aquí que

$$F = \{z \in F : \|z - x\| < r\} \cup \{z \in F : \|z - x\| > r\}.$$

Es decir, existen dos conjuntos abiertos no-vacíos y disjuntos de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $x$  está en uno de ellos y  $y$  en el otro, lo cual implica que  $x$  y  $y$  están en diferentes componentes conexas de  $F$ . Ya que  $x$  y  $y$  se tomaron arbitrarios en  $F$ ,  $F$  es totalmente desconexo.  $\square$

# CAPITULO 4

## MEDIDAS Y DIMENSIONES ALTERNATIVAS

## 4. MEDIDAS Y DIMENSIONES

---

La medida y dimensión de Hausdorff estudiadas principalmente hasta ahora son una de las tantas formas que existen para asignarle una 'medida' y una 'dimensión' a un conjunto dado de  $\mathbb{R}^n$ .

En este capítulo estudiaremos diversas medidas obtenidas a partir de la llamada construcción de Carathéodory, las cuales usaremos posteriormente.

A diferencia de lo que ocurre con una 'medida', los criterios a seguir para asignarle una 'dimensión' a un conjunto dado no existen como tal. Es decir, en la actualidad no existen criterios o reglas que nos digan si una cantidad puede o no ser considerada razonablemente como una dimensión. Sin embargo uno desearía que ciertas propiedades se satisfagan, como las obtenidas para la dimensión de Hausdorff [ver Teoremas 19 a 22 del capítulo 3]. La mayoría de las dimensiones satisfacen las propiedades de monotonía e invarianza. La propiedad de que un conjunto abierto  $n$ -dimensional tenga 'dimensión-nueva'  $n$  nos asegurará que esta nueva dimensión es una extensión de la dimensión topológica.

En general, al definir una nueva dimensión se tratará de cuantificar la noción intuitiva que tenemos sobre que tan densamente un conjunto ocupa el espacio métrico en el que se encuentra.

En este capítulo estudiaremos la dimensión Box-Counting y la relación que guarda con la dimensión de Hausdorff. A diferencia de esta última, la dimensión box-counting no se obtiene a partir de una 'medida'.

### 4.1 Dimensión Box-counting

---

La dimensión box-counting es una de las dimensiones más difundidas y usadas actualmente, ésto se debe a su relativa facilidad para calcularla, ya sea teórica o empíricamente.

**Definición 1** Sea  $F$  cualesquier subconjunto no-vacío y acotado de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $N_\delta(F)$  el mínimo número de conjuntos de diámetro a lo más  $\delta$  que cubran a  $F$ . Entonces definimos las **dimensiones box-counting inferior y superior de  $F$**  respectivamente, como

$$\underline{\dim}_B(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log [N_\delta(F)]}{-\log(\delta)} \quad (4.1)$$

$$\overline{\dim}_B(F) = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log [N_\delta(F)]}{-\log(\delta)}. \quad (4.2)$$

Si dichos valores son iguales llamaremos a dicho valor común la **dimensión box-counting** de  $F$ , y lo denotamos

$$\dim_B(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log [N_\delta(F)]}{-\log(\delta)}. \quad (4.3)$$

#### Definiciones Equivalentes

Existen definiciones equivalentes de la dimensión box-counting que en ocasiones resultan más convenientes. Por ejemplo, consideremos la colección de cubos en una malla o red  $\delta$ -coordenada en  $\mathbb{R}^n$ , es decir, cubos de la forma

$$[m_1\delta, (m_1 + 1)\delta] \times \cdots \times [m_n\delta, (m_n + 1)\delta]$$

donde  $m_1, \dots, m_n$  son enteros y  $\delta > 0$ . Sea  $M_\delta(F)$  el número de  $\delta$ -cubos de malla que intersectan a  $F$ . Dichos cubos forman obviamente una colección con  $M_\delta(F)$  conjuntos de diámetro  $\delta\sqrt{n}$  que cubren a  $F$ , luego entonces, si  $N_{\delta\sqrt{n}}(F)$  es el mínimo número de conjuntos de diámetro a lo más  $\delta$  que cubren a  $F$ , tendremos

$$N_{\delta\sqrt{n}}(F) \leq M_\delta(F). \quad (4.4)$$

Si  $\delta\sqrt{n} < 1$  entonces  $-\log(\delta\sqrt{n}) > 0$  por lo que de (4.4)

$$\frac{\log [N_{\delta\sqrt{n}}(F)]}{-\log(\delta\sqrt{n})} \leq \frac{\log [M_\delta(F)]}{-\log \sqrt{n} - \log(\delta)}$$

por lo que al tomar el límite cuando  $\delta \rightarrow 0^+$  en ambos lados de la desigualdad

$$\underline{\dim}_B(F) \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log [M_\delta(F)]}{-\log(\delta)} \quad (4.5)$$

$$\overline{\dim}_B(F) \leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log [M_\delta(F)]}{-\log(\delta)}. \quad (4.6)$$

Por otro lado, cualquier conjunto de diámetro a lo más  $\delta$  está contenido en a lo más  $3^n$  cubos de malla de lado  $\delta$ , para ello basta escoger un cubo que contenga un punto de  $F$  junto con sus cubos vecinos (ver Figura 4.1 para el caso en  $\mathbb{R}^2$ ). Así

$$M_\delta(F) \leq 3^n N_\delta(F)$$

y al tomar logaritmos obtenemos las desigualdades opuestas a (4.5) y (4.6).

Esta opción para encontrar la dimensión box-counting es bastante usada empíricamente. Para encontrar la dimensión box-counting de un conjunto de  $\mathbb{R}^2$  se hace una cuadrícula de lados  $\delta$  y se cuentan el número  $M_\delta(F)$  de cuadrados que intersectan al conjunto  $F$ . Esto se hace para diversos valores de  $\delta$ . La dimensión box-counting es la razón logarítmica en la cual  $M_\delta(F)$  se incrementa cuando  $\delta \rightarrow 0$ , y entonces se podrá estimar la pendiente de la gráfica de  $\log [M_\delta(F)]$  contra  $-\log(\delta)$  la cual estimará a  $\dim_H(F)$ .

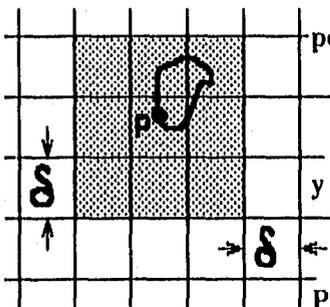


Figura 4.1

Otra manera de definir  $\dim_H$  es interpretando  $M_\delta(F)$  como el mínimo número de cubos de lado  $\delta$  que cubren a  $F$ , y dichos cubos siendo arbitrarios, es decir, cuyos lados no necesariamente sean paralelos a los ejes coordenados. Nuevamente se tienen  $M_\delta(F)$  conjuntos de diámetro a lo más  $\delta\sqrt{n}$  que cubren a  $F$ , por lo que se tiene (4.4) y por lo tanto (4.5) y (4.6). Asimismo cualquier conjunto de diámetro a lo más  $\delta$  está contenido en un cubo de lado  $\delta$  por lo que  $M_\delta(F) \leq N_\delta(F)$  y se obtienen las desigualdades opuestas.

Análogamente se obtiene  $\dim_H$  si tomamos  $N_\delta(F)$  como el mínimo número de bolas cerradas de radio  $\delta$  que cubren a  $F$ .

Resumimos lo anterior en las definiciones equivalentes siguientes:

**Definición 2** Las dimensiones box-counting inferior y superior de un subconjunto  $F$  de  $\mathbb{R}^n$  y la dimensión box-counting de  $F$ , si existe, están dadas por (4.1), (4.2) y (4.3) respectivamente, donde  $N_\delta(F)$  está dado por cualquiera de los incisos siguientes:

- (i) el mínimo número de conjuntos de diámetro a lo más  $\delta$  que cubren a  $F$ ;
- (ii) el número de  $\delta$ -cubos de red que intersectan a  $F$ ;
- (iii) el mínimo número de cubos arbitrarios de lado  $\delta$  que cubren a  $F$ ;
- (iv) el mínimo número de bolas cerradas de radio  $\delta$  que cubren a  $F$ .

Las equivalencias podrían extenderse aún más, de hecho, en la práctica uno adopta la definición que mejor le convenga. Inclusive en (4.1), (4.2) y (4.3) es suficiente considerar los límites cuando  $\delta$  tiende a cero en una manera discreta y no necesariamente en forma continua. Una forma de hacerlo nos la da el siguiente teorema.

**Teorema 3** En las definiciones anteriores es suficiente considerar los límites cuando  $\delta$  tiende a cero mediante cualquier sucesión decreciente  $\delta_k$  tal que  $\delta_{k+1} \geq c\delta_k$  para alguna constante  $0 < c < 1$ ; en particular para  $\delta_k = c^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$

*Demostración:* Sea  $N_\delta(F)$  el mínimo número de conjuntos de diámetro a lo más  $0 < \delta < 1$  que cubren a  $F$ . Sea el natural  $k$  tal que  $\delta_{k+1} \leq \delta < \delta_k$ . Supongamos que  $\delta$  es suficientemente pequeño de manera que  $1 < c/\delta_{k+1}$ , de donde  $\delta_k < 1$ . Entonces  $-\log(\delta) > -\log(\delta_k) > 0$ , además  $N_\delta(F) \leq N_{\delta_{k+1}}(F)$  por lo que

$$\frac{\log [N_\delta(F)]}{-\log(\delta)} \leq \frac{\log [N_{\delta_{k+1}}(F)]}{-\log(\delta_k)}$$

y como  $1 < c/\delta_{k+1} \leq 1/\delta_k$

$$\leq \frac{\log [N_{\delta_{k+1}}(F)]}{\log\left(\frac{c}{\delta_{k+1}}\right)} = \frac{\log [N_{\delta_{k+1}}(F)]}{\log(c) - \log(\delta_{k+1})}$$

por lo que

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log [N_\delta (F)]}{-\log (\delta)} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\log [N_{\delta_k} (F)]}{-\log (\delta_k)}.$$

Ya que  $\{\delta_k\}$  es una sucesión a partir de la variable continua  $\delta$ , la desigualdad opuesta es directa. El caso del límite inferior se obtiene en forma análoga.  $\square$

Mediante este teorema podremos calcular  $N_\delta$  mediante una cuadrícula de lados  $1/n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , y después con una cuadrícula de  $1/n^2$ , después de  $1/n^3$  y así hasta obtener una cantidad finita de resultados que nos permitan evaluar  $\dim_H$  a través de la pendiente en la gráfica log-log.

Veamos la relación entre la dimensión de Hausdorff y la box-counting.

**Teorema 4** Sea  $F$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  arbitrario, entonces

$$\dim_H (F) \leq \underline{\dim}_B (F) \leq \overline{\dim}_B (F).$$

*Demostración:* Si  $F$  puede cubrirse por  $N_\delta (F)$  conjuntos de diámetro  $\delta$ , entonces de la definición de  $H_\delta^s (F)$  tendremos que

$$H_\delta^s (F) \leq N_\delta (F) \delta^s. \quad (4.7)$$

Ahora si  $s > 0$  es tal que  $1 < H^s (F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s (F)$  entonces existe  $\delta$  suficientemente pequeño tal que  $1 < H_\delta^s (F)$ , que al aplicar logaritmos en (4.7) y resolver para  $s$  obtendremos

$$s \leq \frac{\log [N_\delta (F)]}{-\log (\delta)}$$

considerando que  $\log (\delta) < 0$  al tomar  $\delta$  suficientemente pequeño, de donde

$$s \leq \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log [N_\delta (F)]}{-\log (\delta)} = \underline{\dim}_B (F).$$

Y como  $s$  se tomó arbitraria, tendremos entonces que  $\sup \{s > 0 : H^s (F) > 1\} \leq \underline{\dim}_B (F)$ , de donde se sigue el resultado ya que  $\sup \{s > 0 : H^s (F) > 1\} = \sup \{s > 0 : H^s (F) = \infty\} = \dim_H (F)$ .  $\square$

## 4.2 Construcción de Carathéodory

---

A continuación haremos una breve descripción sobre la construcción de Carathéodory para la obtención de diversas medidas en un espacio métrico dado.

Sean  $X$  un espacio métrico,  $F$  una familia de subconjuntos de  $X$ ,  $\zeta$  una función tal que

$$0 \leq \zeta (S) \leq \infty \quad \text{siempre que } S \in F,$$

y  $0 < \delta \leq \infty$ .

Para cualesquier  $A \subset X$ ,  $\phi_\delta(A)$  será el infimum sobre el conjunto de números

$$\sum_{S \in \mathcal{G}} \zeta(S)$$

correspondiente a todas las familias numerables  $\mathcal{G}$  tales que

$$G \subset F \cap \{S : |S| \leq \delta\} \text{ y } A \subset \bigcup G.$$

El hecho de que  $\phi_\delta \geq \phi_\sigma$  para  $0 < \delta < \sigma \leq \infty$  implica la existencia de

$$\psi(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \phi_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \phi_\delta(A) \text{ siempre que } A \subset X.$$

Procediendo en forma análoga a lo hecho con  $H_\delta^s$  y  $H^s$  en el capítulo 3 se demuestra que  $\phi_\delta$  y  $\psi$  son medidas exteriores en  $X$ , inclusive que  $\psi$  es una medida exterior métrica, y entonces por el Teorema 15 del capítulo 2 tendremos que todos los subconjuntos abiertos de  $X$  son  $\psi$ -medibles.

Si todos los miembros de  $F$  son conjuntos de Borel, entonces todo subconjunto de  $X$  estará contenido en un boreliano de igual  $\phi_\delta$ -medida, por lo que  $\psi$  también será una medida de Borel regular.

A  $\psi$  suele llamársele el 'resultado de la construcción de Carathéodory de  $\zeta$  sobre  $F$ ' y a  $\phi_\delta$  se le suele llamar la 'medida de aproximación de tamaño  $\delta$ '.

Así, la construcción de Carathéodory nos proporciona un método para obtener un medida  $\psi$  a partir de una función  $\zeta$  definida sobre una familia  $F$  de conjuntos de un espacio métrico. En general  $\psi$  no es una extensión de  $\zeta$ , pero refleja las propiedades de  $\zeta$  y  $F$  más adecuadamente. Dependiendo de la elección de  $\zeta$  y  $F$  se obtienen diversas medidas  $\psi$ . En particular veamos algunas que requeriremos en capítulos posteriores. En todos los casos siguientes,  $X$  es un espacio métrico con métrica  $\rho$ .

- El caso en que  $F$  sea la familia de todos los subconjuntos no-vacíos de  $X$ , y  $\zeta(S) = |S|^s$  donde  $s > 0$ ,  $\psi$  resulta ser claramente la medida  $s$ -dimensional de Hausdorff,  $H^s$ , sobre  $X$ , con las propiedades que ya vimos en el capítulo 3.
- Observemos que si tomamos  $s = 0$  en el caso anterior entonces se obtiene  $H^0$ , la medida contadora sobre  $X$ .
- Nuevamente si  $\zeta(S) = |S|^s$  con  $s > 0$ , pero ahora  $F$  siendo la familia de todas las bolas cerradas  $B(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) \leq r\}$  en  $X$ . A la medida  $\psi$  resultante la llamaremos medida esférica  $s$ -dimensional sobre  $X$ , y la denotaremos  $S^s$ . Claramente  $H^s \leq S^s \leq 2^s H^s$ .

- Sea  $X = \mathbb{R}^n$ . Sea  $\zeta(S) = |S|^s$  para  $s > 0$ , y tomemos ahora  $F$  como la familia de todos los cubos binarios semi-abiertos  $n$ -dimensionales, es decir, conjuntos de la forma

$$\left( \frac{m_1}{2^k}, \frac{m_1 + 1}{2^k} \right) \times \left( \frac{m_2}{2^k}, \frac{m_2 + 1}{2^k} \right) \times \cdots \times \left( \frac{m_n}{2^k}, \frac{m_n + 1}{2^k} \right)$$

donde  $k$  es un entero no-negativo y  $m_1, m_2$  son enteros. Entonces la medida  $\psi$  obtenida es la **medida de malla o de red  $s$ -dimensional**, y la denotaremos  $M^s$ . Y como todo cubo binario es de Borel entonces  $M^s$  es regular. Asimismo la medida exterior  $\phi_s = M_s^s$  tiene la propiedad de que es finita sobre cualesquier conjunto acotado de  $\mathbb{R}^n$ . En el capítulo sobre productos cartesianos demostraremos que  $H^s \leq M^s \leq b_n H^s$ , donde  $b_n$  es una constante que solo depende de  $n$ . La clase  $F$  llamada **red o malla de conjuntos** tiene la propiedad de que si  $U_1, U_2$  están en  $F$  entonces o  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ , o  $U_1 \subset U_2$ , o  $U_2 \subset U_1$ . Además cualquier conjunto de cubos binarios en  $F$  está contenido en una cantidad finita de otros conjuntos de cubos binarios. En particular, dada cualquier colección de cubos binarios en  $F$  es posible encontrar una subcolección disjunta con la misma unión si removemos todos aquellos cubos contenidos en otros. A ésta propiedad la llamaremos **propiedad de red o de malla**.

# CAPITULO 5

LEMAS PREVIOS

## 5. LEMAS PREVIOS

En este capítulo enunciaremos varios resultados que serán necesarios en los capítulos referentes a intersección y proyección de fractales. Definamos primeramente algunos conceptos.

Sea  $O(n)$  el grupo ortogonal del espacio Euclideo  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^n$ , y  $\vartheta_n$  la medida de Haar única en  $O(n)$  tal que  $\vartheta_n[O(n)] = 1$ . Si  $m$  es un entero tal que  $0 \leq m \leq n$ , entonces  $O^*(n, m)$  denota el espacio de todas las proyecciones ortogonales de  $\mathbb{R}^n$  sobre  $\mathbb{R}^m$ , y  $G(n, m)$  denotará al espacio de todos los subespacios  $m$ -dimensionales de  $\mathbb{R}^n$ . Necesitaremos las medidas  $\vartheta_{n,m}^*$  en  $O^*(n, m)$  y  $\gamma_{n,m}$  en  $G(n, m)$  las cuales dejan invariante a  $O(n)$  [véase Federer 2.7.16(16) para la existencia de dichas medidas invariantes.] Si  $p \in O^*(n, m)$  y  $V \in G(n, m)$ , y además  $A \subset O^*(n, m)$  y  $B \subset G(n, m)$ , entonces por definición

$$\vartheta_{n,m}^*(A) = \vartheta_n \{g \in O(n) : p \circ g \in A\},$$

$$\gamma_{n,m}(B) = \vartheta_n \{g \in O(n) : g(V) \in B\}.$$

Además las medidas  $\vartheta_{n,m}^*$  y  $\gamma_{n,n-m}$  se relacionan mediante la siguiente expresión

$$\gamma_{n,n-m}(A) = \vartheta_{n,m}^* \{p \in O^*(n, m) : \ker(p) \in A\}$$

para cualesquier  $A \subset G(n, n-m)$ .

A lo largo de este capítulo  $n$  y  $m$  denotarán enteros tales que  $0 < m < n$ .

Denotemos por  $S^{n-1}$  la esfera unitaria  $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$  y recordamos que para  $a \in \mathbb{R}^n$  y  $r > 0$  la bola cerrada  $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}$  la denotamos como  $B^n(a, r)$  o simplemente  $B(a, r)$ . Si  $w \in \mathbb{R}^k$  entonces  $\|w\|$  denotará la norma euclidea  $k$ -dimensional.

**Lema 1** Sea la función

$$f : B^m\left(0, \frac{1}{2}\right) \times S^{n-m-1} \rightarrow S^{n-1}$$

donde  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-m}$ , definida como

$$f(y, z) = \left(y, z\sqrt{1 - \|y\|^2}\right)$$

entonces

(i)  $f$  es Lipschitz

(ii) Si  $0 < \delta < \frac{1}{2}$  y  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es el operador proyección definido como  $p(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m)$ , entonces  $f$  mapea  $B^m(0, \delta) \times S^{n-m-1}$  sobre  $\{x \in S^{n-1} : \|p(x)\| \leq \delta\}$ .

*Demostración:* (i) Sea  $(y, z) = (y_1, \dots, y_m, z_{m+1}, \dots, z_n) \in B^m(0, \frac{1}{2}) \times S^{n-m-1}$  entonces por la definicin de  $f$

$$f(y, z) = \left( y_1, \dots, y_m, z_{m+1} \sqrt{1 - y_1^2 - \dots - y_m^2}, \dots, z_n \sqrt{1 - y_1^2 - \dots - y_m^2} \right) \\ \equiv (f_1, \dots, f_m, f_{m+1}, \dots, f_n)$$

luego entonces

$$\frac{\partial f_j}{\partial y_k} = \delta_{jk} \quad \text{para } j = 1, \dots, m \text{ y } k = 1, \dots, m$$

donde  $\delta_{jk}$  denota la función delta de Kronecker. Asimismo

$$\frac{\partial f_j}{\partial y_k} = \frac{-y_k z_{m+1}}{\sqrt{1 - y_1^2 - \dots - y_m^2}} \quad \text{para } j = m+1, \dots, n \text{ y } k = 1, \dots, m.$$

Además

$$\frac{\partial f_j}{\partial z_k} = 0 \quad \text{para } j = 1, \dots, m \text{ y } k = m+1, \dots, n$$

y también

$$\frac{\partial f_j}{\partial z_k} = \delta_{jk} \sqrt{1 - y_1^2 - \dots - y_m^2} = \delta_{jk} \sqrt{1 - \|y\|^2}$$

para  $j = m+1, \dots, n$  y  $k = m+1, \dots, n$ ; donde  $y = (y_1, \dots, y_m)$ . Y como  $\|y\| \leq \frac{1}{2}$ , entonces todas estas parciales existen y son continuas en  $B^m(0, \frac{1}{2}) \times S^{n-m-1}$ . Veamos que además están acotadas continuamente en dicho conjunto.

En efecto, como  $y \in B^m(0, \frac{1}{2})$  y  $z \in S^{n-m-1}$  entonces  $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sqrt{1 - \|y\|^2} \leq 1$ ,  $|y_k| \leq \frac{1}{2}$ ,  $\|z\| = 1$  y  $|z_k| \leq 1$ , lo cual implica, para  $k = 1, \dots, m$ , que

$$\left| \frac{\partial f_j}{\partial y_k} \right| \leq 1 \quad \text{si } j = 1, \dots, m,$$

$$\left| \frac{\partial f_j}{\partial y_k} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{si } j = m+1, \dots, n,$$

y para  $k = m+1, \dots, n$ , que

$$\left| \frac{\partial f_j}{\partial z_k} \right| \leq 1 \quad \text{si } k = 1, \dots, n.$$

Así, todas las parciales están acotadas continuamente por 1 en  $B^m(0, \frac{1}{2}) \times S^{n-m-1}$ , lo cual implica que  $f$  es una transformación de Lipschitz en dicho conjunto. [Véase Lema 2-10 del Spivack]

ii) Sea  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \{x \in S^{n-1} : \|p(x)\| \leq \delta\}$ . Afirmamos que el vector

$$u = \left( w_1, \dots, w_m, \frac{w_{m+1}}{\sqrt{1 - \|y\|^2}}, \dots, \frac{w_n}{\sqrt{1 - \|y\|^2}} \right)$$

donde denotamos  $y = (w_1, \dots, w_m)$ , está en  $B^m(0, \delta) \times S^{n-m-1}$  y es tal que  $f(u) = w$ . En efecto, como  $w \in S^{n-1}$  entonces

$$w_1^2 + \dots + w_m^2 + w_{m+1}^2 + \dots + w_n^2 = 1 \quad (5.1)$$

Además,  $\frac{1}{2} > \delta \geq \|p(w)\| = \|(w_1, \dots, w_m)\| = \|y\| = \sqrt{w_1^2 + \dots + w_m^2}$ , de donde  $1 - \|y\|^2 > \frac{3}{4}$ , de aquí que el vector  $u$  siempre existirá y pueda definirse de la forma en que se hizo. Asimismo vemos que  $y \in B^m(0, \delta)$ . Ahora si consideramos el vector en  $\mathbb{R}^{n-m}$

$$z = \left( \frac{w_{m+1}}{\sqrt{1 - \|y\|^2}}, \dots, \frac{w_n}{\sqrt{1 - \|y\|^2}} \right)$$

entonces  $\|z\| = \frac{1}{\sqrt{1 - \|y\|^2}} \sqrt{w_{m+1}^2 + \dots + w_n^2} = 1$  por (5.1) y así  $z \in S^{n-m-1}$ . Así,  $u \in B^m(0, \delta) \times S^{n-m-1}$ . Es claro que  $f(u) = w$ .  $\square$

**Lema 2** Existe una constante  $c_1$  que depende solamente de  $n$  y  $m$ , y tal que

$$H^{n-1} \{x \in S^{n-1} : \|p(x)\| \leq \delta\} \leq c_1 \delta^m$$

para toda  $p \in \mathcal{O}^*(n, m)$  y  $\delta > 0$ .

*Demostración:* Supongamos que  $0 < \delta < \frac{1}{2}$  y, para simplificar la notación, supondremos además que la proyección  $p$  está dada por  $p(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m)$ . Definimos  $f : B^m(0, \frac{1}{2}) \times S^{n-m-1} \rightarrow S^{n-1} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$  mediante  $f(y, z) = (y, z\sqrt{1 - \|y\|^2})$ . Del lema anterior sabemos que dicha función es Lipschitz y mapea  $B^m(0, \delta) \times S^{n-m-1}$  sobre  $\{x \in S^{n-1} : \|p(x)\| \leq \delta\}$  para  $0 < \delta < \frac{1}{2}$ , denotemos por  $K$  la constante de Lipschitz de  $f$ , entonces por el Teorema 11 del capítulo 3 tendremos

$$H^{n-1} \{x \in S^{n-1} : \|p(x)\| \leq \delta\} \leq K^{n-1} H^{n-1} [B^m(0, \delta) \times S^{n-m-1}]$$

y por el teorema de Fubini

$$\begin{aligned} &= K^{n-1} H^m [B^m(0, \delta)] H^{n-m-1} (S^{n-m-1}) \\ &= K^{n-1} (2\delta)^m H^{n-m-1} (S^{n-m-1}) = c_1 \delta^m \end{aligned}$$

donde estamos denotando por  $c_1$  todos los parámetros dependientes de  $n$  y  $m$ .  $\square$

**Lema 3** Existe una constante  $c_2$  que sólo depende de  $n$  y  $m$  y tal que

$$\vartheta_{n,m}^* \{p \in \mathcal{O}^*(n, m) : \|p(x)\| \leq \delta\} \leq c_2 \delta^m \|x\|^{-m}$$

para toda  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $\delta > 0$ .

*Demostración:* Podemos considerar que la proyección  $p$  está dada como  $p(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m)$ , y como  $p(x) = \|x\| p\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$  siempre que  $x \neq 0$  podemos restringir la demostración para el caso en que  $x \in S^{n-1}$ . Sea entonces  $x \in S^{n-1}$  fijo y fijemos también  $q \in \mathcal{O}^*(n, m)$ . Definamos  $\Phi: \mathcal{O}(n) \rightarrow S^{n-1}$  mediante  $\Phi(g) = g(x)$  para toda  $g \in \mathcal{O}(n)$ . Así, podemos encontrar una constante  $c$  que sólo dependa de  $n$  y tal que  $\vartheta_n[\Phi^{-1}(E)] = cH^{n-1}(E)$  para  $E \subset S^{n-1}$  [Ver Federer 3.2.47(3) y 3.2.28(5)]. Así, si  $q \in \mathcal{O}^*(n, m)$ , entonces por la definición de  $\vartheta_{n,m}^*$  con  $A = \{p \in \mathcal{O}^*(n, m) : \|p(x)\| \leq \delta\}$ , tendremos que

$$\begin{aligned} \vartheta_{n,m}^* \{p \in \mathcal{O}^*(n, m) : \|p(x)\| \leq \delta\} &= \vartheta_n \{g \in \mathcal{O}(n) : q \circ g \in A\} \\ &= \vartheta_n \{g \in \mathcal{O}(n) : q \circ g \in \mathcal{O}^*(n, m) \wedge \|(q \circ g)(x)\| \leq \delta\} \\ &= \vartheta_n \{g \in \mathcal{O}(n) : \|(q \circ g)(x)\| \leq \delta\} \end{aligned}$$

ya que  $q$  está definido en todo  $\mathbb{R}^n$ , en particular en  $g(x) \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ , luego

$$\leq \vartheta_n \left[ \Phi^{-1} \{y \in S^{n-1} : \|q(y)\| \leq \delta\} \right]$$

y como  $\vartheta_n[\Phi^{-1}(E)] = cH^{n-1}(E)$  para todo  $E \subset S^{n-1}$  entonces

$$= cH^{n-1} \{y \in S^{n-1} : \|q(y)\| \leq \delta\} \leq cc_1 \delta^m$$

esta última desigualdad por el Lema 2.  $\square$

Veamos ahora un resultado equivalente para un conjunto en  $G(n, m)$ . Denotamos como  $\text{dist}(x, V)$  la distancia de un punto  $x$  a un conjunto  $V$  con la métrica euclídeana,  $\rho$ , en  $\mathbb{R}^n$ .

**Lema 4** Existe una constante  $c_3$  que sólo depende de  $n$  y  $m$  y tal que

$$\gamma_{n,m} \{V \in G(n, m) : \text{dist}(x, V) \leq \delta\} \leq c_3 \delta^{n-m} \|x\|^{m-n}$$

para toda  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $\delta > 0$ .

*Demostración:* (Ver Figura 5.1) Sea  $x \neq 0$  en  $\mathbb{R}^n$  fijo y  $\delta > 0$ . De la relación entre las medidas  $\vartheta_{n,n-m}^*$  y  $\gamma_{n,m}$  tendremos, tomando  $F \subset G(n, m)$  de la forma  $F = \{V \in G(n, m) : \text{dist}(x, V) \leq \delta\}$ , que

$$\begin{aligned} \gamma_{n,m}(F) &= \vartheta_{n,n-m}^* \{p \in \mathcal{O}^*(n, n-m) : \ker(p) \in F\} \\ &= \vartheta_{n,n-m}^* \{p \in \mathcal{O}^*(n, n-m) : \ker(p) \in \{V \in G(n, m) : \text{dist}(x, V) \leq \delta\}\} \\ &= \vartheta_{n,n-m}^* \{p \in \mathcal{O}^*(n, n-m) : \text{dist}[x, \ker(p)] \leq \delta\}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Afirmamos que  $\|p(x)\| = \text{dist}[x, \ker(p)]$  para cualesquier  $p \in \mathcal{O}^*(n, m)$  y  $x \in \mathbb{R}^n$  (ver Figura 5.2). En efecto, si  $x = (x_1, \dots, x_n)$  podemos considerar que  $p(x_1, \dots, x_m, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m)$  luego entonces

$$\|p(x)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_m^2}$$

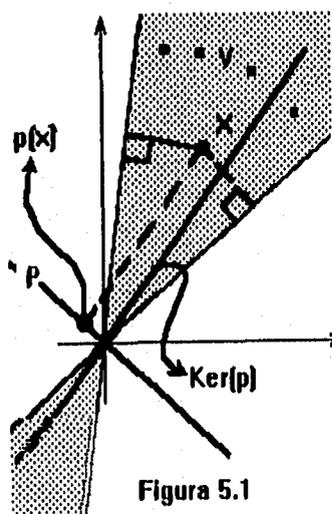
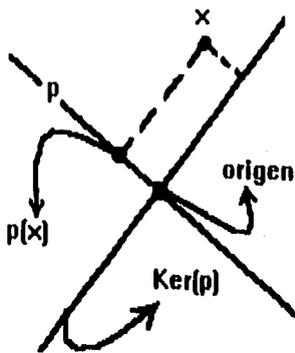


Figura 5.1



$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{(x_1 - 0)^2 + \dots + (x_m - 0)^2 + (x_{m+1} - x_{m+1})^2 + \dots + (x_n - x_n)^2} \\
 &= \inf \left\{ \rho(x, w) : w = \left( \overbrace{0, \dots, 0}^{m\text{-veces}}, w_{m+1}, \dots, w_n \right) \right\} \\
 &= \inf \{ \rho(x, w) : w \in \text{Ker}(p) \}
 \end{aligned}$$

ya que  $w \in \text{Ker}(p)$  si y sólo si  $w = \left( \overbrace{0, \dots, 0}^{m\text{-veces}}, w_{m+1}, \dots, w_n \right)$ , y esta última expresión es precisamente  $\text{dist}[x, \text{Ker}(p)]$ , que es lo que deseábamos mostrar y  $\text{dist}[x, \text{Ker}(p)] = \|p(x)\|$  que junto con (5.2) se sigue que

$$\begin{aligned}
 \gamma_{n,m}(F) &= \vartheta_{n,n-m}^* \{ p \in \mathcal{O}^*(n, n-m) : \|p(x)\| \leq \delta \} \\
 &\leq c \delta^{n-m} \|x\|^{m-n}
 \end{aligned}$$

Figura 5.2

de acuerdo al Lema 3.  $\square$

## 5.1 Desigualdades Integrales

En esta sección asumiremos las siguientes condiciones:

- (♣ a)  $M$  es un espacio métrico separable.
- (♣ b)  $F : \mathbb{R}^n \times M \rightarrow \mathbb{R}^1$  es una función de Borel no-negativa tal que  $F(x, a) \leq \|x\|$  para todo  $(x, a) \in \mathbb{R}^n \times M$ .
- (♣ c)  $\alpha$  y  $b$  son números positivos y  $\varphi$  es una medida regular de Borel sobre  $M$  tal que

$$\varphi \{ a \in M : F(x, a) \leq \delta \} \leq b \delta^\alpha \|x\|^{-\alpha} \quad (5.3)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $\delta > 0$ .

Hacemos estas suposiciones para aplicarlos posteriormente con  $M = \mathcal{O}^*(n, m)$ ,  $F : (x, p) \mapsto \|p(x)\|$ , y con  $M = G(n, m)$ ,  $F : (x, V) \mapsto \text{dist}(x, V)$ . Los Lemas 3 y 4 anteriores garantizan que  $\vartheta_{n,m}^*$  y  $\gamma_{n,m}$  satisfacen la condición (5.3) con  $\alpha = m$  y  $\alpha = n - m$  respectivamente.

**Lema 5** Sea  $\mu$  una medida exterior sobre  $X$  tal que  $\mu(X) < \infty$ . Si  $a \geq 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$  y  $f : X \rightarrow \{w \in \mathbb{R} : 0 \leq w \leq a\}$  es una función  $\mu$ -medible, entonces

$$\int_X f^t d\mu = \int_0^a r^t d\mu \{ x \in X : f(x) \leq r \},$$

donde la integral del lado derecho es la integral de Riemann-Stieltjes.

*Demostración:* **Caso 1:** Si  $t = 0$  ambos lados de la igualdad son igual a  $\mu(X)$ . Sea entonces  $t > 0$ , luego  $f^t$  es acotada y  $\mu$ -medible en  $X$ , con  $0 \leq f^t \leq a^t$ . Sea  $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_n = a$  una partición del intervalo  $[0, a]$ . Definamos ahora, ya que  $t > 0$

$$E_k = \{x \in X : r_{k-1}^t < f^t(x) \leq r_k^t\}.$$

Dichos conjuntos son  $\mu$ -medibles, disjuntos y  $\cup_{k=1}^n E_k = X$ , entonces  $\sum_{k=1}^n \mu(E_k) = \mu(X) < \infty$ , y como  $g(r) = \mu\{x \in X : f^t(x) \leq r^t\}$  es no-decreciente con respecto a  $r \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n r_{k-1}^t \mu\{x \in X : r_{k-1}^t < f^t(x) \leq r_k^t\} &\leq \int_X f^t d\mu \\ &\leq \sum_{k=1}^n r_k^t \mu\{x \in X : r_{k-1}^t < f^t(x) \leq r_k^t\} \end{aligned} \quad (5.4)$$

o bien

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n r_{k-1}^t \mu\{x \in X : r_{k-1} < f(x) \leq r_k\} &\leq \int_X f^t d\mu \\ &\leq \sum_{k=1}^n r_k^t \mu\{x \in X : r_{k-1} < f(x) \leq r_k\} \end{aligned}$$

y como ésto es válido para cualesquier  $n$ , cuando  $n \rightarrow \infty$  tenemos que el primer y último términos de la expresión anterior son igual a una integral de Riemann-Stieltjes, así

$$\int_X f^t d\mu = \int_0^a r^t d\mu\{x \in X : f(x) \leq r\}.$$

**Caso 2:** Si  $\inf\{f(x)\} > 0$ , digamos  $\xi_0$ , entonces, por el caso anterior sólo habría que analizar cuando  $t < 0$ . Pero si  $0 < \xi_0 \leq f(x) \leq a$  entonces  $a^t \leq f^t(x) \leq \xi_0^t$  cuando  $t < 0$  y para cualesquier  $x \in X$ . Ahora si tomamos la partición  $0 < \xi_0 = r_0 < r_1 < \dots < r_n = a$ ,  $t < 0$  implica  $0 < a^t = r_n^t < r_{n-1}^t < \dots < r_1^t < r_0^t = \xi_0^t$ . Y nuevamente ya que  $g(r) = \mu\{x : f^t(x) < r^t\}$  es no-decreciente con respecto a  $r$ , para cualesquier  $t < 0$  podemos obtener una expresión análoga a (5.4), a saber

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^1 r_k^t \mu\{x \in X : r_k^t \leq f^t(x) < r_{k-1}^t\} &\leq \int_X f^t d\mu \\ &\leq \sum_{k=n}^1 r_{k-1}^t \mu\{x \in X : r_k^t \leq f^t(x) < r_{k-1}^t\} \end{aligned}$$

y como  $t < 0$

$$\sum_{k=1}^n r_k^t \mu\{x \in X : r_{k-1} < f(x) \leq r_k\} \leq \int_X f^t d\mu$$

$$\leq \sum_{k=1}^n r_{k-1}^t \mu \{x \in X : r_{k-1} < f(x) \leq r_k\}$$

y cuando hacemos  $n \rightarrow \infty$ , nuevamente el límite común en ambos lados de la expresión anterior es una integral de Riemann-Stieltjes, y nuevamente obtenemos el resultado deseado.

**Caso 3:** Caso general para  $t$  y  $f$  arbitrarios según las hipótesis del teorema. Definimos  $f_n = \sup \{f, \frac{1}{n}\}$  entonces, para cada  $n$  tendremos que  $\inf [f_n(X)] > 0$  (ver Figura 5.3). Además,  $|f_n(x)| \leq a$  para toda  $n \in \mathbb{N}$  y para todo  $x \in X$ , asimismo  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  para cada  $x \in X$ . Y como  $\mu(X) < \infty$  el Teorema de la Convergencia Acotada [Ver Royden] nos lleva a que

$$\int_X f^t d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n^t d\mu$$

y por los dos casos anteriores

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a r^t d\mu \{x \in X : f_n(x) \leq r\}$$

$$= \int_0^a r^t d\mu \{x \in X : f(x) \leq r\}. \quad \square$$

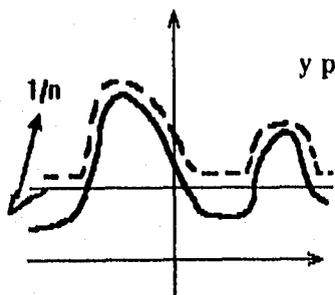


Figura 5.3

Veamos una de las desigualdades integrales que nos serán de utilidad en los capítulos posteriores referentes a proyección e intersección de conjuntos.

**Lema 6** Sean  $M$ ,  $F$  y  $\varphi$  como en ( $\clubsuit$  a), ( $\clubsuit$  b) y ( $\clubsuit$  c) respectivamente. Si  $0 < t < \alpha$  y  $x \in \mathbb{R}^n$ , entonces

$$\int F(x, a)^{-t} d\varphi a \leq c \|x\|^{-t}$$

donde  $c = b [1 + t(\alpha - t)^{-1}]$ .

*Demostración:* Aplicando el Lema 5 a la función  $F : \mathbb{R}^n \times M \rightarrow \mathbb{R}$  tendremos que

$$\int F(x, a)^{-t} d\varphi a = \int_0^{\|x\|} r^{-t} d\varphi \{a \in M : F(x, a) \leq r\}$$

donde  $d\varphi a$  nos indica la integración en  $M$ , es decir, con respecto a la segunda componente de  $F$ . Apliquemos ahora integración por partes al término derecho de la igualdad:

$$\text{sean } u = r^{-t} \text{ y } dv = d\varphi \{a \in M : F(x, a) \leq r\}$$

$$\text{luego entonces } du = -tr^{-t-1} dL^1 r \text{ y } v = \varphi \{a \in M : F(x, a) \leq r\}$$

donde  $L^1$  denota la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^1$ , de aquí que

$$\begin{aligned} \int F(x, a)^{-t} d\varphi a &= r^{-t} \varphi \{a \in M : F(x, a) \leq r\}_{r=0}^{\|x\|} - \\ &\quad - \int_0^{\|x\|} \varphi \{a \in M : F(x, a) \leq r\} (-tr^{-t-1}) dL^1 r \\ &= \|x\|^{-t} \varphi \{a : F(x, a) \leq \|x\|\} - \lim_{\xi \rightarrow 0} \xi^{-t} \varphi \{a : F(x, a) \leq \xi\} + \\ &\quad + t \int_0^{\|x\|} r^{-t-1} \varphi \{a : F(x, a) \leq r\} dL^1 r \end{aligned}$$

Ahora de la condición ( $\clubsuit$  c) sobre  $\varphi$  tendremos que

$$0 \leq \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\varphi \{a \in M : F(x, a) \leq \xi\}}{\xi^t} \leq b \|x\|^{-t}$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $a \in M$ . Así, la expresión anterior quedará como

$$\int F(x, a)^{-t} d\varphi a \leq \|x\|^{-t} \varphi \{a : F(x, a) \leq \|x\|\} + t \int_0^{\|x\|} r^{-t-1} \varphi \{a : F(x, a) \leq r\} dL^1 r$$

y aplicando la condición ( $\clubsuit$  c) a la expresión de la derecha con  $\delta = \|x\|$  en el primer sumando y  $\delta = r$  en el segundo sumando, tendremos que

$$\begin{aligned} &\leq \|x\|^{-t} b \|x\|^\alpha \|x\|^{-\alpha} + t \int_0^{\|x\|} r^{-t-1} b r^\alpha \|x\|^{-\alpha} dL^1 r \\ &= b \|x\|^{-t} + bt \|x\|^{-\alpha} \int_0^{\|x\|} r^{\alpha-t-1} dL^1 r \\ &= b \|x\|^{-t} + bt \|x\|^{-\alpha} \left\{ \frac{r^{\alpha-t}}{\alpha-t} \right\}_{r=0}^{\|x\|} \end{aligned}$$

ya que  $0 < t < \alpha$ , y después de hacer las simplificaciones correspondientes obtenemos

$$= b \|x\|^{-t} + \frac{bt \|x\|^{-t}}{\alpha-t}$$

lo cual es el resultado deseado.  $\square$

**Lema 7** Sean  $M$ ,  $F$ , y  $\varphi$  como en las condiciones ( $\clubsuit$  a), ( $\clubsuit$  b) y ( $\clubsuit$  c). Si  $\mu$  es una medida regular de Borel sobre  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mu(\mathbb{R}^n) < \infty$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $\delta > 0$ , entonces

$$\int \mu \{y \in \mathbb{R}^n : F(x-y, a) \leq \delta\} d\varphi a \leq b\delta^\alpha \int \|x-y\|^{-\alpha} d\mu y.$$

*Demostración:* De la condición ( $\clubsuit$  b)  $F$  es una función de Borel no-negativa, de aquí que  $\{(y, a) \in \mathbb{R}^n \times M : F(x - y, a) \leq \delta\}$  es un conjunto de Borel. En efecto, pues  $F(x - y, a) = F \circ g_x$ , donde  $g_x$  es la traslación  $g_x : \mathbb{R}^n \times M \rightarrow \mathbb{R}^n \times M$  definida como  $g(y, a) = (x - y, a)$ , y la composición de funciones de Borel es de Borel. Entonces,

$$\int \mu \{y \in \mathbb{R}^n : F(x - y, a) \leq \delta\} d\varphi a = \int \varphi \{a \in M : F(x - y, a) \leq \delta\} d\mu y$$

donde aplicamos el Teorema de Fubini, y ahora, por la condición ( $\clubsuit$  c)

$$\leq \int b\delta^\alpha \|x - y\|^{-\alpha} d\mu y = b\delta^\alpha \int \|x - y\|^{-\alpha} d\mu y. \quad \square$$

## 5.2 Propiedades de densidad

Sean  $r > 0$  y  $x \in \mathbb{R}^n$ . Ya que  $B^n(x, r)$  es un boreliano en  $\mathbb{R}^n$  y por la condición ( $\clubsuit$  b)  $F : \mathbb{R}^n \times M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de Borel, entonces el conjunto

$$\{(y, x, a) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times M : y \in B^n(x, r), F(x - y, a) \leq \delta\}$$

es un conjunto de Borel en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times M$ . Por lo tanto

$$\mu \{y \in B(x, r) : F(x - y, a) \leq \delta\}$$

es una función de Borel con respecto a  $(x, a)$ , de acuerdo al teorema de Fubini.

**Lema 8** Sean  $\mu$  una medida exterior en  $\mathbb{R}^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $a \in M$  y  $r > 0$ , entonces

$$\psi_r^\alpha(\mu, x, a) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \delta^{-\alpha} \mu \{y \in B(x, r) : F(x - y, a) \leq \delta\}$$

y

$$\psi^\alpha(\mu, x, a) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \psi_r^\alpha(\mu, x, a).$$

son funciones de Borel-medibles con respecto a  $(x, a)$ .

*Demostración:* Sean  $\delta > 0$  y  $r > 0$ . Por lo mencionado anteriormente  $\mu \{y \in B(x, r) : F(x - y, a) \leq \delta\}$  es una función Borel-medible con respecto a  $(x, a)$ . Denotemos por  $f$  dicha función medible, entonces  $f : \mathbb{R}^n \times M \rightarrow [0, \infty]$  estará definida como

$$f(x, a) = \mu \{y \in B(x, r) : F(x - y, a) \leq \delta\},$$

luego para cualesquier  $\beta > 0$ , el conjunto  $\{(x, a) : f(x, a) < \beta\}$  es un conjunto de Borel en  $\mathbb{R}^n \times M$ , es decir para cada  $\delta > 0$  el conjunto

$$\{(x, a) : \mu \{y \in B(x, r) : F(x - y, a) \leq \delta\} < \beta\}$$

es de Borel en  $\mathbb{R}^n \times M$  para cualesquier  $\beta > 0$ . En particular para  $\delta > 0$  y  $\beta$  igual a  $\beta\delta^\alpha$  el conjunto

$$\{(x, a) \in \mathbb{R}^n \times M : f(x, a) < \beta\delta^\alpha\} \quad (5.5)$$

es de Borel en  $\mathbb{R}^n \times M$ . Así, dado  $\rho > 0$  definimos

$$F_\rho = \{(x, a) \in \mathbb{R}^n \times M : f(x, a) < \beta\delta^\alpha \text{ para algún } \delta < \rho\}$$

el cual es la unión de conjuntos de la forma (5.5) y por lo tanto es boreliano para cada  $\rho > 0$ . Ahora si tomamos el límite cuando  $\delta \rightarrow 0^+$  obtendremos que

$$\left\{ (x, a) \in \mathbb{R}^n \times M : \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(x, a)}{\delta^\alpha} < \beta \right\} = \bigcap_{\rho > 0} F_\rho. \quad (5.6)$$

Veamos que  $F_\rho$  es decreciente cuando  $\rho$  decrece. En efecto, sea  $0 < \rho_1 < \rho_2$  y  $x \in F_{\rho_1}$  entonces  $f(x, a) < \beta\delta^\alpha$  para algún  $\delta < \rho_1$ , o bien para algún  $\delta < \rho_2$ , lo cual implica que  $x \in F_{\rho_2}$ , así  $F_{\rho_1} \subset F_{\rho_2}$ . Entonces podemos considerar la intersección en (5.6) sobre el conjunto de todos los valores racionales positivos de  $\rho$ ; pero intersección numerable de borelianos es un boreliano, de aquí que (5.6) sea un boreliano en  $\mathbb{R}^n \times M$  para cada real  $\beta$ . Por lo tanto  $\psi_r^\alpha(\mu, x, a) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(x, a)}{\delta^\alpha}$  es una función de Borel con respecto a  $(x, a)$ , lo cual demuestra la primera afirmación. Como  $\psi_r^\alpha$  decrece cuando  $r > 0$  decrece, entonces por lo que acabamos de demostrar  $\psi_{1/n}^\alpha$ , para  $n = 1, 2, \dots$  es una sucesión de funciones de Borel con respecto a  $(x, a)$ , las cuales convergen a  $\psi^\alpha$ , por lo que dicho límite también es de Borel con respecto a  $(x, a)$  [ver Royden].  $\square$

**Lema 9** Si  $\mu$  es una medida de Borel regular sobre  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mu(\mathbb{R}^n) < \infty$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $r > 0$ , entonces

$$\int \psi_r^\alpha(\mu, x, a) d\varphi a \leq b \int_{B(x, r)} \|x - y\|^{-\alpha} d\mu y.$$

*Demostración:* Por definición de  $\psi_r^\alpha$

$$\int \psi_r^\alpha(\mu, x, a) d\varphi a = \int \liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\mu\{y \in B(x, r) : F(x - y, a) \leq \delta\}}{\delta^\alpha} d\varphi a$$

y usando el Lema de Fatou

$$\begin{aligned} &\leq \liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \int \frac{\mu\{y \in B(x, r) : F(x - y, a) \leq \delta\}}{\delta^\alpha} d\varphi a \\ &= \liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \delta^{-\alpha} \int \mu\{y \in B(x, r) : F(x - y, a) \leq \delta\} d\varphi a \\ &= \liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \delta^{-\alpha} \int \chi_{B(x, r)}(y) \mu\{y \in \mathbb{R}^n : F(x - y, a) \leq \delta\} d\varphi a \end{aligned}$$

y usando el Lema 7

$$\leq \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \delta^{-\alpha} b \delta^\alpha \int \chi_{B(x,r)}(y) \|x - y\|^{-\alpha} d\mu y = b \int_{B(x,r)} \|x - y\|^{-\alpha} d\mu y. \quad \square$$

Veamos el siguiente resultado que será necesario para la demostración del lema posterior. Para ello definimos lo siguiente: decimos que  $G$  es una **partición de Borel** de  $A$  si y sólo si  $G$  es una familia numerable y disjunta de conjuntos de Borel tal que  $\cup G = A$ .

**Lema 10** Sea  $\psi$  la construcción de Carathéodory que resulta de  $\zeta$  sobre la familia de todos los conjuntos de Borel de un espacio métrico y separable  $X$ , con

$$\zeta(A) \leq \sum_{B \in G} \zeta(B) \quad (5.7)$$

siempre que  $G$  sea una familia numerable de conjuntos de Borel de  $X$ , y tal que  $A \subset \cup G$ . Si  $A$  es un subconjunto de Borel arbitrario de  $X$ , entonces

$$\psi(A) = \sup \left\{ \sum_{B \in H} \zeta(B) : H \text{ es una partición de Borel de } A \right\}.$$

Más aún, si  $H_1, H_2, \dots$  son las particiones de Borel de  $A$ , entonces

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \{ |B| : B \in H_j \} = 0 \quad \text{implica que} \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{B \in H_j} \zeta(B) = \psi(A).$$

*Demostración:* Como  $\psi$  es la construcción de Carathéodory que resulta de  $\zeta$  sobre la familia de todos los conjuntos de Borel de  $X$ , entonces  $\zeta$  se evalúa únicamente en los conjuntos de Borel de  $X$ . Así, si  $S$  es cualesquier conjunto de Borel de  $X$ , por (5.7) tendremos que  $\zeta(S) \leq \sum_{B \in G} \zeta(B)$  para cualesquier familia numerable  $G$  de conjuntos de Borel en  $X$ , tales que  $\cup G \supset A$ . Y en particular podemos tomar a todos los elementos de  $G$  con un diámetro no mayor que  $\delta$ , para cualesquier  $\delta > 0$  dado. Es decir  $\zeta(S) \leq \sum_{B \in G} \zeta(B)$  es válido para cualesquier  $\delta$ -cubierta con borelianos de  $S$ , de aquí que  $\zeta(S) \leq \phi_\delta(S)$  para cualesquier  $\delta > 0$ , por lo que

$$\zeta(S) \leq \psi(S) \quad \text{para cualesquier conjunto de Borel } S \text{ en } X. \quad (5.8)$$

Por la construcción de  $\psi$ , dicha medida es regular de Borel, además de que todos los Borelianos son  $\psi$ -medibles. Luego si  $H$  es una partición arbitraria de Borel de  $A$ , entonces

$$\psi(A) = \psi \left( \bigcup_{B \in H} B \right) = \sum_{B \in H} \psi(B) \geq \sum_{B \in H} \zeta(B)$$

usando (5.8), lo cual es válido para cualesquier  $H$ , así,

$$\begin{aligned} \psi(A) &\geq \sup \left\{ \sum_{B \in H} \zeta(B) : H \text{ es una partición de Borel de } A \right\} \\ &\geq \inf \left\{ \sum_{B \in H} \zeta(B) : H \text{ es una partición de Borel de } A \right\} \\ &\geq \inf \left\{ \sum_{B \in G} \zeta(B) : G \text{ es una } \delta\text{-cubierta numerable de Borelianos de } A \right\} = \phi_\delta(A), \end{aligned}$$

y como ésto es válido para cualesquier  $\delta > 0$ , la última expresión es precisamente  $\psi(A)$  cuando  $\delta \rightarrow 0^+$ , de donde se obtiene el primer resultado buscado. Ahora, si los diámetros de los miembros de  $H_j$  tienden a cero, entonces, para cualesquier  $\delta > 0$

$$\begin{aligned} &\liminf_{j \rightarrow \infty} \sum_{B \in H_j} \zeta(B) \\ &\geq \inf \left\{ \sum_{B \in G} \zeta(B) : G \text{ es una } \delta\text{-cubierta numerable de Borelianos de } A \right\} \end{aligned}$$

donde la expresión del lado derecho es  $\phi_\delta(A)$  y es válido para cualesquier  $\delta > 0$  de aquí que

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \sum_{B \in H_j} \zeta(B) \geq \psi(A)$$

que con el resultado de la primera afirmación del teorema se sigue la segunda afirmación.  $\square$

En el capítulo referente a proyección de fractales, que veremos más adelante, requeriremos la afirmación  $L^m[p(E)] > 0$ , donde  $L^m$  es la medida de Lebesgue  $m$ -dimensional y  $p \in O^*(n, m)$ . Si en el conjunto  $E$  la proyección  $p$  toma el valor  $y$ , la afirmación  $L^m[p(E)] > 0$  podrá ser sustituida por una afirmación más fuerte, a saber,  $\int N(p|E, y) dL^m y = \infty$ , donde  $N(p|E, y)$  se define como el número de puntos (posiblemente  $\infty$ ) en el conjunto  $E \cap p^{-1}\{y\}$ . En general, a  $N(f, y)$  se le llama la multiplicidad de la transformación  $f$ . Veamos el siguiente teorema que nos da un primer resultado al integrar dicha multiplicidad.

**Lema 11** Sean  $X$  un espacio métrico separable,  $\mu$  una medida exterior en  $Y$ , y  $f$  una transformación de  $X$  en  $Y$ , tal que  $f(A)$  es  $\mu$ -medible siempre que  $A$  sea un subconjunto de Borel en  $X$ . Si  $\zeta(S) = \mu[f(S)]$  para  $S \subset X$ , y  $\psi$  es la medida sobre  $X$  que resulta de la construcción de Carathéodory de  $\zeta$  sobre la familia de todos los subconjuntos de Borel de  $X$ , entonces

$$\psi(A) = \int N(f|A, y) d\mu y$$

para todo subconjunto de Borel  $A \subset X$  (ver Figura 5.4).

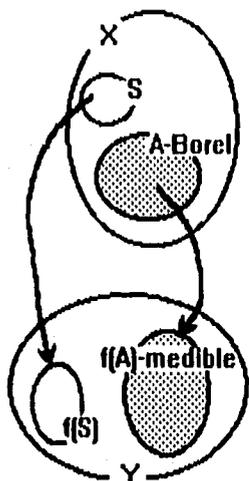


Figura 5.4

*Demostración:* Sean  $H_1, H_2, \dots$  una sucesión de particiones de Borel de  $A$ , tales que cada miembro de  $H_j$  sea la unión de alguna subfamilia de  $H_{j+1}$  y

$$\sup \{|S| : S \in H_j\} \rightarrow 0 \quad \text{si } j \rightarrow \infty.$$

Sea  $C_S$  la función característica de  $f(S)$  y tomemos  $y \in Y$  arbitrario. Entonces, por la forma en que se definieron las  $H_j$ , si  $j \rightarrow \infty$ , cada elemento de  $f^{-1}\{y\}$  quedará contenido en un sólo elemento  $S$  de la partición de  $H_j$  (ver Figura 5.5), de tal forma que  $\sum_{S \in H_j} C_S(y)$  tiende al número de elementos en  $A$  cuyas imágenes bajo  $f$  son iguales a  $y$ , es decir, tiende al número de elementos de  $A \cap f^{-1}\{y\}$ , que denotamos precisamente como  $N(f|A, y)$ . Además, dicha sucesión es no-decreciente cuando  $j \rightarrow \infty$ , así, para cada  $y \in Y$

$$\sum_{S \in H_j} C_S(y) \rightarrow N(f|A, y) \quad \text{cuando } j \rightarrow \infty. \quad (5.9)$$

Luego entonces, si  $A \subset X$  es un subconjunto de Borel arbitrario, por el Teorema 10 anterior

$$\psi(A) = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{S \in H_j} \zeta(S)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{S \in H_j} \mu[f(S)]$$

de acuerdo a como se definió  $\zeta$ , y ya que  $C_S$  es la función característica de  $f(S)$

$$= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{S \in H_j} \int C_S(y) d\mu y$$

$$= \lim_{j \rightarrow \infty} \int \sum_{S \in H_j} C_S(y) d\mu y$$

como consecuencia del Teorema de convergencia monótona, y nuevamente por dicho argumento

$$= \int \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{S \in H_j} C_S(y) d\mu y$$

$$= \int N(f|A, y) d\mu y$$

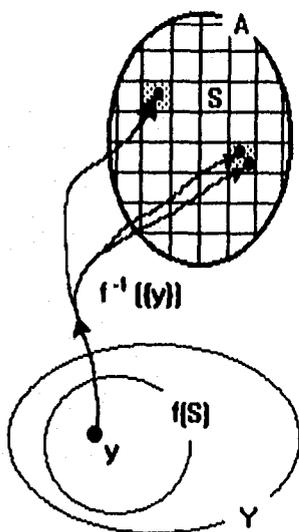


Figura 5.5

por (5.9).  $\square$

**Corolario 12** Sean las hipótesis como en el Teorema 11 anterior. Entonces la transformación  $y \mapsto N(f|A, y)$  es  $\mu$ -medible para toda  $f : X \rightarrow Y$ , tal que  $f(A)$  es  $\mu$ -medible siempre que  $A \subset X$  sea boreliano.

# CAPITULO 6

## PROPIEDADES DE DENSIDAD

## 6. PROPIEDADES DE DENSIDAD

Recordemos que un subconjunto  $E$  de  $\mathbb{R}^n$  se llama un  $s$ -conjunto, ( $0 \leq s \leq n$ ) si  $E$  es  $H^s$ -medible y  $0 < H^s(E) < \infty$ . En esta sección veremos algunas propiedades locales de los  $s$ -conjuntos, en particular las referentes a densidad.

Sea  $B(x, r)$  la bola cerrada con centro en  $x$  y radio  $r$ . Definimos la densidad superior e inferior de un  $s$ -conjunto  $E$  en un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  como

$$\overline{D}^s(E, x) = \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{H^s(E \cap B(x, r))}{(2r)^s}$$

y

$$\underline{D}^s(E, x) = \underline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{H^s(E \cap B(x, r))}{(2r)^s}$$

respectivamente. Si  $\overline{D}^s(E, x) = \underline{D}^s(E, x)$  diremos que la densidad de  $E$  en  $x$  existe y escribiremos simplemente  $D^s(E, x)$  para dicho valor común. En algunas de las demostraciones será de utilidad manejar la densidad convexa superior de un  $s$ -conjunto  $E$  en  $x$  definida como

$$\overline{D}_c^s(E, x) = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \sup \frac{H^s(E \cap U)}{|U|^s} \right\}, \quad (6.1)$$

donde el supremum se toma sobre todos los conjuntos convexos  $U$  con  $x \in U$  y  $0 < |U| \leq r$ . Ya que cualquier conjunto está contenido en un conjunto convexo de igual diámetro, el supremum en (6.1) podría inclusive tomarse sobre todos los conjuntos  $U$  tales que  $x \in U$  y  $0 < |U| \leq r$ .

**Lema 1** Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  un  $s$ -conjunto y  $x \in \mathbb{R}^n$ . Entonces

$$2^{-s} \overline{D}_c^s(E, x) \leq \overline{D}^s(E, x) \leq \overline{D}_c^s(E, x). \quad (6.2)$$

*Demostración:* Sea  $U$  convexo y  $\rho \geq r > 0$ . Si  $x \in U$  entonces  $U \subset B(x, r)$  donde  $r = |U|$ , de donde  $|U|^{-s} H^s[E \cap U] \leq r^{-s} H^s[E \cap B(x, r)] = 2^s \left\{ (2r)^{-s} H^s[E \cap B(x, r)] \right\}$  y de aquí obtenemos la primer desigualdad. Ya que  $B(x, r)$  es convexo, el supremum en (6.1) incluye todas estas bolas, por lo que la segunda desigualdad también se sigue.  $\square$

Veamos ahora que las densidades son funciones medibles con respecto a  $x$ . Recordamos que una función  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es  $\mu$ -medible (respectivamente, Borel-medible; semicontinua superiormente) si el conjunto  $\{x: f(x) < \alpha\}$  es  $\mu$ -medible (respectivamente, de Borel; abierto) para todo  $\alpha$ . Definiciones equivalentes de función  $\mu$ -medible se obtienen al sustituir ' $<$ ' por ' $>$ ', ' $\leq$ ' o ' $\geq$ '. Salvo que se indique lo contrario los conjuntos medibles se tomarán con respecto a  $H^s$ .

**Lema 2** Sea  $E$  un  $s$ -conjunto.

(i)  $H^s[E \cap B(x, r)]$  es una función de  $x$  semicontinua superiormente para cada  $r > 0$ , y por lo tanto también una función de  $x$  Borel-medible para cada  $r > 0$ .

(ii)  $\underline{D}^s(E, x)$  y  $\overline{D}^s(E, x)$  son funciones de  $x$  Borel-medibles.

*Demostración:* (i) Dados  $r > 0$  y  $\alpha > 0$  definimos

$$F = \{x : H^s[E \cap B(x, r)] < \alpha\}.$$

Sea  $x \in F$ . Como  $B(x, r + \epsilon)$  decrece a  $B(x, r)$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0^+$  (ver Figura 6.1), entonces por la continuidad de  $H^s$ , [Teorema 9(ii) del capítulo 2]

$$H^s[E \cap B(x, r + \epsilon)] \longrightarrow H^s[E \cap B(x, r)]$$

si  $\epsilon \rightarrow 0$ . Luego entonces existe  $\epsilon = \epsilon(x) > 0$  tal que  $H^s[E \cap B(x, r + \epsilon)] < \alpha$ . Ahora sea  $y \in B(x, \epsilon)$  arbitrario, entonces  $B(y, r) \subset B(x, r + \epsilon)$ , ya que si  $w \in B(y, r)$  entonces  $\|w - x\| \leq \|w - y\| + \|y - x\| \leq r + \epsilon$ . Así de dicha contención  $H^s[E \cap B(y, r)] \leq H^s[E \cap B(x, r + \epsilon)] < \alpha$  de acuerdo a como se tomó  $\epsilon$ . Por lo tanto  $y \in F \quad \forall y \in B(x, \epsilon)$ , es decir  $B(x, \epsilon) \subset F$ , y como  $x \in F$  se tomó arbitrario entonces  $F$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$ .

(ii) De (i),  $\{x : H^s[E \cap B(x, r)] < \alpha(2r)^s\}$  es abierto, entonces dado  $\rho > 0$  el conjunto  $F_\rho = \{x : H^s(E \cap B(x, r)) < \alpha(2r)^s \text{ para algún } r < \rho\}$  es la unión de conjuntos abiertos y por lo tanto abierto. Ahora  $\{x : \underline{D}^s(E, x) < \alpha\} = \bigcap_{\rho > 0} F_\rho$ . Ahora como  $F_\rho$  decrece cuando  $\rho$  decrece, podemos tomar dicha intersección sobre los racionales positivos de  $\rho$ . De aquí que  $\{x : \underline{D}^s(E, x) < \alpha\}$  sea un  $G_\delta$  y por lo tanto un boreliano para cada  $\alpha$ , es decir  $\underline{D}^s(E, x)$  es una función Borel-medible con respecto a  $x$ . Análogamente se demuestra para  $\overline{D}^s(E, x)$ .  $\square$

**Teorema 3** Si  $E$  es un  $s$ -conjunto en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $\overline{D}_c^s(E, x) = 0$  para  $H^s$ -casi toda  $x \notin E$ .

*Demostración:* Fijemos  $\alpha > 0$ . Mostraremos que el conjunto medible  $F = \{x \notin E : \overline{D}_c^s(E, x) > 0\}$  tiene  $H^s$ -medida cero. Ya que  $H^s$  es regular existe, dado  $\delta > 0$ , un conjunto cerrado  $E_1 \subset E$  tal que  $H^s(E \setminus E_1) < \delta$ . Ahora, para  $\rho > 0$  sea

$$\mathcal{V} = \{U : U \text{ es cerrado y convexo, } 0 < |U| \leq \rho, U \cap E_1 = \emptyset \text{ y } H^s(E \cap U) > \alpha|U|^s\}. \quad (6.3)$$

Ahora, de acuerdo a la definición (6.1) y a que  $E_1$  es cerrado,  $\mathcal{V}$  es una clase de Vitali de conjuntos cerrados de  $F$ , por lo que por el teorema del recubrimiento de Vitali [Teorema 15, capítulo 3] existe una sucesión, numerable o finita, disjunta  $\{U_i\}$  en  $\mathcal{V}$  tal que o  $\sum_i |U_i|^s = \infty$  o bien  $H^s(F \setminus \bigcup_i U_i) = 0$ . Veamos que es la segunda opción la que se cumple en este caso. En efecto, de (6.3)

$$\sum_i |U_i|^s < \frac{1}{\alpha} \sum_i H^s(E \cap U_i) = \frac{1}{\alpha} H^s\left(E \cap \bigcup_i U_i\right)$$

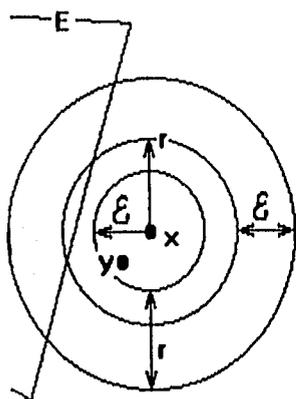


Figura 6.1

ya que los  $U_i$  son disjuntos, y como  $E \cap \bigcup_i U_i \subset E \setminus E_1$  ya que los  $U_i$  no intersectan  $E_1$  entonces

$$\leq \frac{1}{\alpha} H^s(E \setminus E_1) < \frac{\delta}{\alpha} < \infty,$$

por lo que efectivamente  $H^s(F \setminus \bigcup_i U_i) = 0$ . Así, ya que  $H^s_\rho$  es medida exterior

$$H^s_\rho(F) \leq H^s_\rho\left(F \setminus \bigcup_i U_i\right) + H^s_\rho\left(F \cap \bigcup_i U_i\right) \leq H^s\left(F \setminus \bigcup_i U_i\right) + \sum_i |U_i|^s < \frac{\delta}{\alpha}.$$

Como esto es válido para cualesquier  $\delta > 0$  y cualesquier  $\rho > 0$ , entonces  $H^s(F) = 0$ .  $\square$

**Teorema 4** Si  $E$  es un  $s$ -conjunto en  $\mathbb{R}^n$  entonces  $\overline{D}_c^s(E, x) = 1$  en  $H^s$ -casi toda  $x \in E$ .

*Demostración:* Sean  $\alpha < 1$  y  $\rho > 0$ , definimos el conjunto

$$F = \{x \in E : H^s(E \cap U) < \alpha |U|^s \text{ para todo convexo } U \text{ con } x \in U \text{ y } |U| \leq \rho\}. \quad (6.4)$$

Entonces  $F$  es un subconjunto de Borel de  $E$  y de acuerdo a la definición de  $H^s$  existe una  $\rho$ -cubierta de  $F$ ,  $\{U_i\}$ , de conjuntos convexos tal que  $\sum_i |U_i|^s < H^s(F) + \epsilon$ . Entonces, suponiendo que cada  $U_i$  contiene algún punto de  $F$  y usando (6.4) tendremos

$$\begin{aligned} H^s(F) &\leq H^s\left[F \cap \bigcup_i U_i\right] \leq \sum_i H^s(F \cap U_i) \leq \sum_i H^s(E \cap U_i) \\ &< \alpha \sum_i |U_i|^s < \alpha [H^s(F) + \epsilon]. \end{aligned}$$

De aquí, y como  $H^s(F) \leq H^s(E) < \infty$  y  $\alpha < 1$  es fijo, entonces  $H^s(F) < \frac{\alpha}{1-\alpha} \epsilon$ ; pero  $\epsilon > 0$  es arbitrario, luego entonces  $H^s(F) = 0$ . Ya que  $F$  se definió para cualesquier  $\rho > 0$  entonces por definición  $\overline{D}_c^s(E, x) \geq \alpha$  para  $H^s$ -casi toda  $x \in E$ , y esto es verdadero para toda  $\alpha < 1$ , luego entonces  $\overline{D}_c^s(E, x) \geq 1$  para  $H^s$ -casi toda  $x \in E$ .

Veamos ahora que la otra desigualdad también se satisface usando el teorema de Vitali. Sea  $\alpha > 1$  y definamos  $F = \{x \in E : \overline{D}_c^s(E, x) > \alpha\}$ , luego entonces  $F$  es un subconjunto medible de  $E$ . Sea  $F_0 = \{x \in F : \overline{D}_c^s(E \setminus F, x) = 0\}$  entonces aplicando el teorema anterior al  $s$ -conjunto  $E \setminus F$  tendremos  $H^s(F \setminus F_0) = 0$ . Ahora, de la definición dada en (6.1) obtendremos que  $\overline{D}_c^s(F, x) \geq \overline{D}_c^s(E, x) - \overline{D}_c^s(E \setminus F, x) > \alpha$  si  $x \in F_0$ . Sea  $\epsilon > 0$ , entonces como  $H^s_\delta \rightarrow H^s$  cuando  $\delta \rightarrow 0$  entonces existe  $\rho > 0$  tal que

$$H^s(F_0) < \sum_i |W_i|^s + \frac{\epsilon}{2} \quad (6.5)$$

para cualesquier  $\rho$ -cubierta  $\{W_i\}$  de  $F_0$ . Ahora sea

$$\mathcal{V} = \{U : U \text{ es cerrado y convexo, } 0 < |U| \leq \rho \text{ y } H^s(F \cap U) > \alpha |U|^s\} \quad (6.6)$$

es una clase de Vitali para  $F_0$ , entonces, dado  $\epsilon > 0$ , afirmamos que podemos encontrar una sucesión disjunta de conjuntos  $\{U_i\}$  en  $\mathcal{V}$  con

$$H^s(F_0) \leq \sum_i |U_i|^s + \epsilon. \quad (6.7)$$

En efecto, por el teorema del recubrimiento de Vitali existe, en  $\mathcal{V}$ , una sucesión disjunta  $\{U_i\}$  tal que o  $\sum |U_i|^s = \infty$  o bien  $H^s(F_0 \setminus \bigcup_i U_i) = 0$ . Si  $\sum |U_i|^s = \infty$  entonces (6.7) es directo. En otro caso, sea  $\{V_i\}$  una  $\rho$ -cubierta del conjunto  $H^s$ -medible  $F_0 \setminus \bigcup_i U_i$  tal que  $\sum |V_i|^s < H^s(F_0 \setminus \bigcup_i U_i) + \frac{1}{2}\epsilon$ . Dicha cubierta existe por la definición de  $H^s$ . Así,  $\{U_i\} \cup \{V_i\}$  es una  $\rho$ -cubierta de  $F_0$  entonces de (6.5)  $H^s(F_0) < \sum_i |U_i|^s + \sum_i |V_i|^s + \frac{1}{2}\epsilon$ , y por lo tanto ya que  $F_0$  es un  $s$ -conjunto

$$\begin{aligned} H^s\left(F_0 \cap \bigcup_i U_i\right) &= H^s(F_0) - H^s\left(F_0 \setminus \bigcup_i U_i\right) \\ &< \sum_i |U_i|^s + \sum_i |V_i|^s + \frac{1}{2}\epsilon - \sum_i |V_i|^s + \frac{1}{2}\epsilon = \sum_i |U_i|^s + \epsilon \end{aligned}$$

que junto con el hecho de que

$$H^s(F_0) = H^s\left(F_0 \setminus \bigcup_i U_i\right) + H^s\left(F_0 \cap \bigcup_i U_i\right) = 0 + H^s\left(F_0 \cap \bigcup_i U_i\right)$$

se sigue (6.7) en cualquiera de los dos casos del teorema de recubrimiento de Vitali. Con este resultado tendremos que

$$H^s(F) = H^s(F \setminus F_0) + H^s(F_0) \leq 0 + \sum_i |U_i|^s + \epsilon$$

y por (6.6)

$$< \frac{1}{\alpha} \sum_i H^s(F \cap U_i) + \epsilon \leq \frac{1}{\alpha} H^s(F) + \epsilon.$$

Ya que esto es válido para cualesquier  $\epsilon > 0$  entonces  $H^s(F) = 0$  si  $\alpha > 1$ , lo cual deseábamos demostrar.  $\square$

Usando (6.2) obtenemos el análogo a estos dos últimos teoremas para densidades circulares, y los cuales necesitaremos en nuestro desarrollo posterior.

**Corolario 5** Si  $E$  es un  $s$ -conjunto en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $D^s(E, x) = 0$  para  $H^s$ -casi toda  $x \notin E$ .

**Corolario 6** Si  $E$  es un  $s$ -conjunto en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $2^{-s} \leq \bar{D}^s(E, x) \leq 1$  para  $H^s$ -casi toda  $x \in E$ .

# CAPITULO 7

## PROYECCION DE FRACTALES

## 7. PROYECCIÓN DE FRACTALES

---

En este capítulo analizaremos las proyecciones ortogonales de conjuntos con dimensión fractal de  $\mathbb{R}^n$ , sobre subespacios de menor dimensión. Veremos que bajo ciertas condiciones la 'sombra' que proyectan dichos objetos nos permitirá obtener alguna información sobre el conjunto original.

Por ejemplo, un objeto tridimensional o una superficie bidimensional proyectarán 'generalmente' sombras bidimensionales sobre un plano, asimismo una curva suave unidimensional en el espacio proyectará sobre un plano 'generalmente' otra curva suave unidimensional. Sin embargo, en general para un subconjunto arbitrario  $E \subset \mathbb{R}^n$  con dimensión fractal, si  $\Pi$  es un subespacio  $k$ -dimensional de  $\mathbb{R}^n$  y  $Proj_{\Pi}$  es una proyección ortogonal de  $\mathbb{R}^n$  sobre  $\Pi$ , la dimensión fractal de la proyección de  $E$  sobre  $\Pi$  no se obtiene en forma tan inmediata. Investigaremos la medida de Hausdorff de  $Proj_{\Pi}(E)$  en términos de los parámetros conocidos de  $E$  y veremos que la dimensión del conjunto proyectado depende tanto del conjunto  $E$  como de su relación con el subespacio  $\Pi$ . Veamos un primer Teorema.

**Teorema 1** Sea  $E$  cualesquier subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $\Pi$  cualesquier subespacio en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces

$$H^s [Proj_{\Pi}(E)] \leq H^s(E).$$

*Demostración:* El mapeo proyección es una transformación de Lipschitz ya que  $\|Proj_{\Pi}(x) - Proj_{\Pi}(y)\| \leq \|x - y\|$  para cualesquier  $x$  y  $y$  en  $E$ , luego entonces del Teorema 11 del capítulo 3 se sigue el resultado del lema.  $\square$

De dicho teorema se sigue que  $\dim_H [Proj_{\Pi}(E)] \leq \dim_H(E)$ . El resto de este capítulo se refiere principalmente a buscar las condiciones que me permitan obtener la desigualdad opuesta. Los resultados que se obtienen son diferentes dependiendo de si la dimensión de Hausdorff de  $E$  es mayor o menor a la del subespacio  $\Pi$  sobre el cual se proyectará.

A un subconjunto  $S$  de un espacio vectorial  $V$  lo llamaremos subespacio afín si y sólo si  $\alpha v + \beta w \in S$ , con  $\alpha, \beta$  en  $\mathbb{R}$  y  $\alpha + \beta = 1$ . En caso de que  $0 \in S$  tendremos que  $S$  es un subespacio vectorial o lineal de  $V$ .

### 7.1 Proyección sobre un subespacio de menor dimensión

---

Si  $\mu$  es una medida exterior sobre un conjunto  $X$  y  $A \subset X$ , entonces  $\mu|_A$ , la restricción de  $\mu$  a  $A$ , se define como

$$(\mu|_A)(B) = \mu(A \cap B)$$

para cualesquier  $B \subset X$ .

**Lema 2** Sean  $\mu$  una medida regular de Borel sobre  $\mathbb{R}^n$ , y  $E \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto de Borel tal que  $\mu(E) < \infty$ . Si  $p \in \mathcal{O}^*(n, m)$  y  $h > 0$  entonces

$$\mu\{x \in E : \psi^m(\mu|_E, x, p) \leq h\} \leq 2^m m^{m/2} h \int N(p|E, y) dL^m y.$$

*Demostración:* Ya que

$$\mu\{x \in E : \psi^m(\mu|_E, x, p) \leq h\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \left\{ x \in E : \psi^m(\mu|_E, x, p) < h + \frac{1}{j} \right\}$$

es suficiente probar el resultado

$$\mu\{x \in E : \psi^m(\mu|_E, x, p) \leq h\} \leq 2^m m^{m/2} h \int N(p|E, y) dL^m y.$$

Para simplificar la notación, consideremos que  $p$  está dado como  $p(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m)$ . Sean  $r$  y  $d$  números positivos tales que  $d < r/n$ . Tomemos  $I \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$  y denotemos  $\mathbb{R}^{n-m}$  como

$$\mathbb{R}^{n-m} = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$$

donde  $Q_1, Q_2, \dots$  son cubos cerrados paralelos a los ejes coordenados con interiores disjuntos mutuamente y con lados de longitud  $d$  (ver Figura 7.1). Supongamos que  $\int N(p|E, y) dL^m y < \infty$ , ya que de lo contrario el resultado del teorema es directo. Entonces, podemos elegir los cubos  $Q_i$  tales que  $L^m\{p[E \cap (I^m \times \partial Q_i)]\} = 0$ , ya que  $L^m[p(E \cap V)]$  puede ser positivo solamente para una cantidad a lo más numerable de subespacios  $V$  afines disjuntos  $(n-1)$ -dimensionales de  $\mathbb{R}^n$ .

Si  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\delta > 0$  y  $\rho > 0$ , denotaremos

$$I(x, \delta, \rho)$$

$$= \{y \in \mathbb{R}^n : |x_i - y_i| \leq \delta, i = 1, \dots, m; |x_i - y_i| \leq \rho, i = m+1, \dots, n\}.$$

Sean

$$f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mu[E \cap I(x, \delta, d)]}{\delta^m}$$

para  $x \in \mathbb{R}^n$  y

$$E_i = E \cap \{x \in \mathbb{R}^m \times Q_i : f(x) < h\} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots \quad (7.1)$$

(ver Figura 7.2). Entonces por razonamientos análogos al Teorema 8 del capítulo 5,  $f$  es una función de Borel. Sea  $\epsilon > 0$  y fijemos  $i$ . Por la regularidad de la medida de Borel  $\mu$  y ya que  $E$  es un boreliano, existe un conjunto cerrado  $F_i \subset E_i$ , [ver Rudin] al que

$$\mu(E_i) \leq (1 + \epsilon) \mu(F_i) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots \quad (7.2)$$

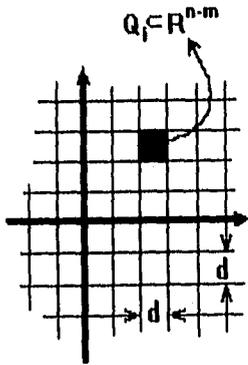


Figura 7.1

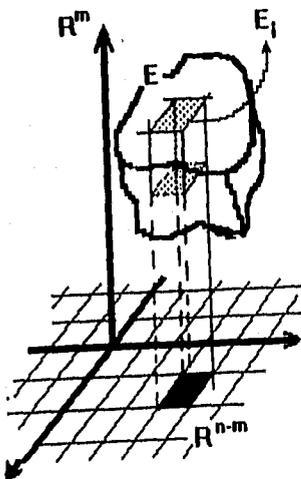


Figura 7.2

Ahora seleccionemos cubos cerrados  $P_j \subset \mathbb{R}^m$  paralelos a los ejes coordenados, tales que

$$p(F_i) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j \quad (7.3)$$

y

$$\sum_{j=1}^{\infty} L^m(P_j) \leq L^m[p(F_i)] + \epsilon. \quad (7.4)$$

Dichos cubos existen de acuerdo a la construcción de la medida de Lebesgue mediante estos conjuntos [ver Rudin], (ver Figura 7.3).

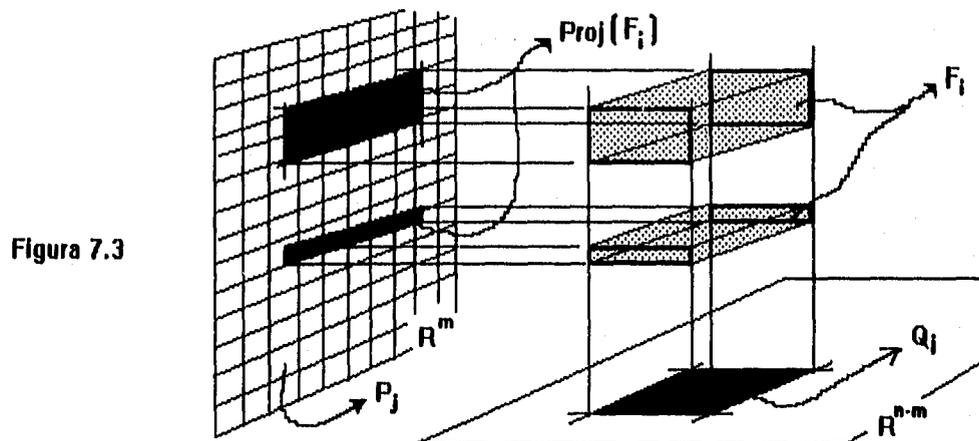


Figura 7.3

Entonces, de acuerdo a como consideramos  $p$  y por (7.1) y (7.3)

$$F_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j \times Q_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots$$

donde  $\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j \times Q_i \subset \mathbb{R}^n$  es, para cada  $i$ , un cubo con lados paralelos a los ejes coordenados de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces

$$F_i \subset F_i \cap \left[ \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j \times Q_i \right], \quad i = 1, 2, \dots$$

o bien

$$F_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} [F_i \cap (P_j \times Q_i)], \quad i = 1, 2, \dots$$

de donde

$$\mu(F_i) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu[F_i \cap (P_j \times Q_i)], \quad i = 1, 2, \dots \quad (7.5)$$

Mostraremos ahora que

$$\mu[F_i \cap (P_j \times Q_i)] \leq 2^n h L^m(P_j) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots \quad (7.6)$$

Supongamos que (7.6) es falso para alguna  $j$ . Ahora, para  $k = 1, 2, \dots$ , dividamos  $P_j$  en  $2^m$  subcubos congruentes y obtendremos una sucesión decreciente  $\{R_k\}$  de subcubos de  $P_j$  tales que

$$|R_k| = 2^{-k} |P_j| \quad (7.7)$$

(ver Figura 7.4), y como supusimos (7.6) falso entonces

$$\mu[F_i \cap (R_k \times Q_i)] > 2^m h L^m(R_k). \quad (7.8)$$

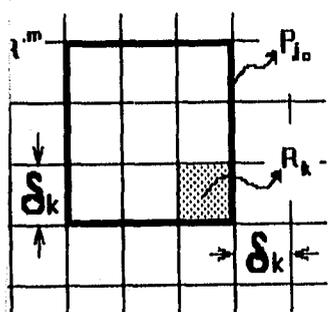


Figura 7.4

Las expresiones (7.7) y (7.8), se obtienen en forma completamente análoga a las expresiones (8.17) y (8.18) encontradas en la demostración del Lema 2 en el Capítulo 8. Ya que los conjuntos compactos no-vacíos  $F_i \cap (R_k \times Q_i)$  forman una sucesión decreciente existe por propiedad de compacidad un punto  $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_i \cap (R_k \times Q_i)$ . Sea  $\delta_k$  la longitud de cada uno de los lados de  $R_k$ . Entonces

$$F_i \cap (R_k \times Q_i) \subset E \cap I(x, \delta_k, d)$$

ya que  $F_i \subset E_i \subset E$ , y  $R_k \times Q_i \subset I(x, \delta_k, d)$  para toda  $i$  y  $k$  (ver Figura 7.5). De este resultado y de (7.8)

$$\mu[E \cap I(x, \delta_k, d)] \geq \mu[F_i \cap (R_k \times Q_i)] > 2^m h L^m(R_k)$$

y como  $R_k$  es un cubo en  $\mathbb{R}^n$  con una longitud de cada uno de sus lados igual a  $\delta_k$ , entonces la medida  $m$ -dimensional de Lebesgue es simplemente el volumen de dicho cubo, es decir,  $L^m(R_k) = \delta_k^m$ . Así, de la última expresión, para toda  $k = 1, 2, \dots$

$$\frac{\mu[E \cap I(x, \delta_k, d)]}{\delta_k^m} > 2^m h$$

luego entonces, como el lado derecho no depende de  $k$

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu[E \cap I(x, \delta_k, d)]}{\delta_k^m} \geq 2^m h. \quad (7.9)$$

Ahora, de (7.7) se sigue que  $\delta_k = \text{lado}(P_j) / 2^k$  donde  $\text{lado}(P_j)$  es la longitud de cada uno de los lados del cubo  $P_j$ . Luego entonces para cualesquier  $\delta > 0$  tal que  $0 < \delta < \delta_1 = \text{lado}(P_j) / 2$ , existe un natural  $k \geq 2$  tal que  $\frac{\text{lado}(P_j)}{2^k} \leq \delta$ , sea además dicho natural  $k$  el primero que satisface dicha desigualdad, entonces

$$\frac{\text{lado}(P_j)}{2^k} \leq \delta < \frac{\text{lado}(P_j)}{2^{k-1}}$$

es decir  $\delta_k \leq \delta < 2\delta_k$ . Por lo tanto  $\frac{1}{2\delta_k} < \frac{1}{\delta}$  o bien  $\frac{1}{2^m \delta_k^m} < \frac{1}{\delta^m}$  y como además  $I(x, \delta, d) \supset I(x, \delta_k, d)$  entonces de (7.9) obtenemos que

$$f(x) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mu[E \cap I(x, \delta, d)]}{\delta^m} \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu[E \cap I(x, \delta_k, d)]}{2^m \delta_k^m} \geq h.$$

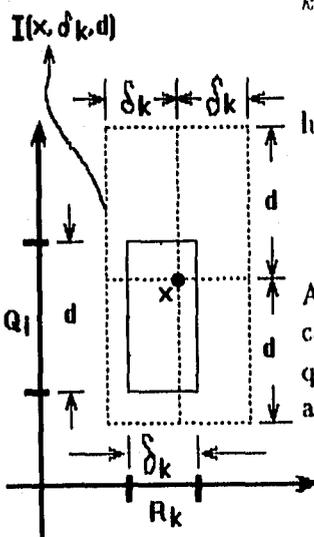


Figura 7.5

Es decir,  $f(x) \geq h$ , donde  $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \cap (R_k \times Q_i)$  y de acuerdo a como se construyeron los  $F_k$  esto implica que  $x \in E_i$ , lo cual está en contradicción con (7.1). Por lo tanto (7.6) se satisface.

Luego entonces, utilizando (7.2), (7.5), (7.6) y (7.4) obtendremos que para  $i = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \mu(E_i) &\leq (1 + \epsilon) \mu(F_i) \leq (1 + \epsilon) \sum_{j=1}^{\infty} \mu[F_i \cap (P_j \times Q_i)] \\ &\leq (1 + \epsilon) 2^m h \sum_{j=1}^{\infty} L^m(P_j) \leq (1 + \epsilon) 2^m h \{L^m[p(F_i)] + \epsilon\} \\ &\leq (1 + \epsilon) 2^m h \{L^m[p(E_i)] + \epsilon\} \end{aligned}$$

ya que  $F_i \subset E_i$ , y cuando  $\epsilon \rightarrow 0$

$$\mu(E_i) \leq 2^m h L^m[p(E_i)] \quad \text{para } i = 1, 2, \dots$$

de aquí que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \leq 2^m h \sum_{i=1}^{\infty} L^m[p(E_i)] \quad (7.10)$$

Ahora, recordemos que  $L^m[p(E_i \cap E_k)] = 0$  para  $i \neq k$  (en efecto, ya que los  $Q_i$  se tomaron con interior disjunto y tal que  $L^m\{p[E \cap (\mathbb{R}^m \times \partial Q_i)]\} = 0$ ), y como

$$\begin{aligned} \{x \in E \subset \mathbb{R}^n : f(x) < h\} &= \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \\ &= \bigcup_{i=1}^{\infty} [E \cap \{x \in \mathbb{R}^m \times Q_i : f(x) < h\}] \end{aligned}$$

ya que tomamos  $\mathbb{R}^{n-m} = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ , entonces

$$\mu\{x \in E : f(x) < h\} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \leq 2^m h \sum_{i=1}^{\infty} L^m[p(E_i)]$$

usando (7.10)

$$= 2^m h \sum_{i=1}^{\infty} \int \chi_{p(E_i)}(y) dL^m y$$

donde  $\chi_{p(E_i)}$  es la función característica de  $p(E_i)$  y utilizando ahora el teorema de convergencia monótona de Lebesgue

$$= 2^m h \int \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{p(E_i)}(y) dL^m y$$

por último como los  $E_i \subset E$ , el número de elementos  $N(p|E, y)$  en  $E \cap p^{-1}\{y\}$  es mayor que  $\sum_i \chi_{p(E_i)}(y)$  para cada  $y \in \mathbb{R}^m$ , luego entonces

$$\leq 2^m h \int N(p|E, y) L^m y.$$

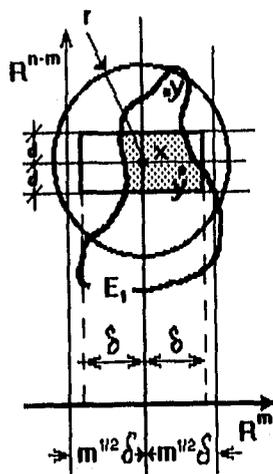


Figura 7.6

Ahora, como  $d < r/n$  entonces  $I(x, \delta, d) \subset \{y \in B(x, r) : \|p(x-y)\| \leq m^{1/2}\delta\}$  para algún  $\delta > 0$  suficientemente pequeño (ver Figura 7.6).. Por lo tanto

$$\mu \{x \in E : \psi_r^m(\mu[E, x, p]) < h\}$$

$$= \mu \left\{ x \in E : \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{-m} \mu [E \cap \{y \in B(x, r) : \|p(x-y)\| \leq \delta\}] < h \right\}$$

y sustituyendo  $\delta$  por  $m^{1/2}\delta$

$$= \mu \left\{ x \in E : \lim_{\delta \rightarrow 0} m^{-m/2} \delta^{-m} \mu [E \cap \{y \in B(x, r) : \|p(x-y)\| \leq m^{1/2}\delta\}] < h \right\}$$

$$= \mu \left\{ x \in E : \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{-m} \mu [E \cap \{y \in B(x, r) : \|p(x-y)\| \leq m^{1/2}\delta\}] < m^{m/2}h \right\}$$

que por lo encontrado anteriormente

$$\leq 2^m m^{m/2} h \int N(p | E, y) dL^m y,$$

y haciendo  $r \rightarrow 0^+$  obtenemos el resultado deseado.  $\square$

**Lema 3** Sea  $\mu$  una medida regular de Borel sobre  $\mathbb{R}^n$  y  $E$  un subconjunto  $\mu$ -medible de  $\mathbb{R}^n$  con  $0 < \mu(E) < \infty$ . Si

$$\int_B \|x-y\|^{-m} d\mu y < \infty$$

para casi toda  $x \in E$  con respecto a  $\mu$ , entonces

$$\int^* N(p | E, y) dL^m y = \infty$$

para casi toda  $p \in \mathcal{O}^*(n, m)$  con respecto a  $\vartheta_{n,m}^*$ .

*Demostración:* Por la regularidad de la medida,  $E$  contiene un subconjunto cerrado con  $\mu$ -medida positiva, luego entonces es suficiente demostrar el teorema para el caso en que  $E$  es cerrado. Sea

$$P = \left\{ p \in \mathcal{O}^*(n, m) : \int N(p | E, y) dL^m y < \infty \right\}$$

demostraremos que  $P$  tiene  $\vartheta_{n,m}^*$ -medida igual a cero. Entonces del Lema 2 anterior,  $p \in P$  implica que

$$\psi^m(\mu[E, x, p]) > 0 \tag{7.11}$$

para casi toda  $x \in E$  con respecto a  $\mu$ , de donde, ya que  $0 < \mu(E) < \infty$

$$\int_B \psi^m(\mu[E, x, p]) d\mu x > 0. \tag{7.12}$$

Por otro lado, como  $\psi^m(\mu|E, x, p) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \psi_r^m(\mu|E, x, p)$  entonces por (7.6) existe un  $r_0 > 0$  tal que  $\psi_r^m(\mu|E, x, p) > 0$  si  $0 < r < r_0$  para casi toda  $x \in E$  con respecto a  $\mu$ . Así, por el Lema de Fatou

$$\begin{aligned} \int \psi^m(\mu|E, x, p) d\vartheta_{n,m}^* p &\leq \liminf_{r \rightarrow 0} \int \psi_r^m(\mu|E, x, p) d\vartheta_{n,m}^* p \\ &\leq \liminf_{r \rightarrow 0} b \int_{B(x,r)} \|x - y\|^{-m} d(\mu|E) y \end{aligned}$$

usando el Lema 9 del capítulo 5,

$$= b \lim_{r \rightarrow 0} \int_{E \cap B(x,r)} \|x - y\|^{-m} d\mu y = 0$$

ya que para  $\mu$ -casi toda  $x \in E$ ,  $\int_E \|x - y\|^{-m} d\mu y < \infty$ , y para cualesquier  $\xi > 0$  existe  $r_0 > 0$  tal que  $\mu[E \cap B(x, r_0)] < \xi$  [Ver Royden]. Por lo tanto

$$\int \psi^m(\mu|E, x, p) d\vartheta_{n,m}^* p = 0 \quad (7.13)$$

para casi toda  $x \in E$  con respecto a  $\mu$ . Ahora, sea  $p \in P$  cualesquiera, entonces por el teorema de Fubini

$$\int \int_E \psi^m(\mu|E, x, p) d\mu x d\vartheta_{n,m}^* p = \int \int_E \psi^m(\mu|E, x, p) d\vartheta_{n,m}^* p d\mu x = 0,$$

usando (7.13) y el hecho de que  $\mu(E) < \infty$ . Así, este resultado junto con (7.12) nos dice que  $\vartheta_{n,m}^*(P) = 0$ , lo cual demuestra el teorema.  $\square$

## 7.2 Medida de Hausdorff y Capacidad

En esta sección usaremos ideas de la Teoría del Potencial para estudiar proyecciones ortogonales de  $s$ -conjuntos. Veremos que la dimensión de Hausdorff y la capacidad de un conjunto están relacionadas, y en ocasiones resulta más conveniente usar capacidades para el estudio de las propiedades dimensionales.

Definamos algunos conceptos preliminares. En lo subsiguiente consideraremos que  $\mu$  es una medida de Radon. De acuerdo a la definición del soporte de una medida  $\mu$ , que denotamos  $\text{supp}(\mu)$ ,  $\int f d\mu = 0$  para cualesquier función continua  $f$  que se anula en  $\text{supp}(\mu)$ .

En el capítulo 1 definimos distribución de masa como una medida de  $\mu$  en  $\mathbb{R}^n$  con soporte compacto y  $0 < \mu(\mathbb{R}^n) < \infty$ , en este capítulo consideraremos que  $\mu$  es además una medida de Radon.

Sea  $t \geq 0$ . El  $t$ -potencial en un punto  $x$  debido a la distribución de masa  $\mu$  se define como

$$\phi_t(x) = \int \frac{d\mu(y)}{\|x-y\|^t}.$$

La  $t$ -energía de  $\mu$  está definida por

$$I_t(\mu) = \int \phi_t(x) d\mu(x) = \iint \frac{d\mu(x) d\mu(y)}{\|x-y\|^t}.$$

Si  $K$  es un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$ , la  $t$ -capacidad de  $K$ , denotada  $C_t(K)$  se define como

$$C_t(K) = \sup_{\mu} \left\{ \frac{1}{I_t(\mu)} : \text{supp}(\mu) \subset K, \mu(K) = 1 \right\}.$$

Ya que en la  $t$ -capacidad el  $t$ -potencial y la  $t$ -energía pueden ser infinito, consideraremos la convención  $1/\infty = 0$ . Para un subconjunto arbitrario  $E \subset \mathbb{R}^n$  definimos

$$C_t(E) = \sup \{ C_t(K) : K \text{ es compacto y } K \subset E \}.$$

De aquí que si  $E \subset E'$  entonces  $C_t(E) \leq C_t(E')$  para cualesquier  $t \geq 0$ . También si  $\mu$  es cualesquier distribución de masa con  $I_t(\mu) = \infty$  entonces  $I_s(\mu) = \infty$  para cualesquier  $s > t$ . En efecto, pues si  $s > t$  entonces  $\|x-y\|^{-t} \leq \|x-y\|^{-s}$  por lo que  $I_t(\mu) \leq I_s(\mu)$ . De aquí mismo tendremos que  $C_s(E) \leq C_t(E)$ , por lo que si  $C_t(E) = 0$  entonces  $C_s(E) = 0$  para  $s > t$ .

**Lema 4**  $C_t(E) > 0$  si y sólo si existe una distribución de masa  $\mu$  con soporte contenido en  $E$  tal que  $I_t(\mu) < \infty$ .

*Demostración:* Se sigue directamente de la definición de  $t$ -capacidad.  $\square$

**Lema 5** Sea  $E$  un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$  con  $H^s(E) < \infty$ . Sea  $\mu$  una distribución de masa con soporte contenido en  $E$  y sea

$$F_0 = \left\{ x \in E : \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu[B(x,r)]}{r^s} = 0 \right\}.$$

Entonces  $\mu(F_0) = 0$ .

*Demostración:* Fijemos  $\alpha > 0$  y  $\rho > 0$ , y sea

$$F = \left\{ x \in E : \frac{\mu[B(x,r)]}{r^s} < \alpha \quad \forall r \leq \rho \right\}. \quad (7.14)$$

Sea  $\{U_i\}$  una  $\delta$ -cubierta arbitraria de  $F$  con  $\delta \leq \rho$ , entonces, suponiendo que cada  $U_i$  contiene algún punto de  $F$ , existirán bolas  $\{B_i\}$  centradas en  $F$  con  $|B_i| \leq 2|U_i| \leq 2\rho$  y con  $U_i \subset B_i$  para cada  $i$ . Entonces

$$\mu(F) \leq \sum_i \mu(B_i) < \sum_i \alpha \left( \frac{|B_i|}{2} \right)^s,$$

considerando  $r \leq |B_i|/2 \leq \rho$  en (7.14), y por lo tanto

$$\leq \alpha \sum_i |U_i|^s.$$

Esto es válido para cualesquier  $\delta$ -cubierta  $\{U_i\}$  de  $F$ , de donde  $\mu(F) \leq \alpha H_\delta^s(F)$  y de aquí  $\mu(F) \leq \alpha H^s(F) \leq \alpha H^s(E)$ . Como  $H^s(E) < \infty$  y  $\alpha > 0$  es arbitrario  $\mu(F) = 0$ , asimismo  $\rho > 0$  se puede tomar arbitrariamente pequeño, por lo que  $\mu(F_0) = 0$ .  $\square$

Obtengamos ahora la relación básica entre la medida de Hausdorff y las capacidades.

**Teorema 6** Sea  $E$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ .

(i) Si  $E$  es un conjunto de Borel con  $C_t(E) = 0$  entonces  $H^s(E) = 0$  para todo  $s > t$ .

(ii) Si  $H^s(E) < \infty$  entonces  $C_s(E) = 0$ .

*Demostración:* (i) Supongamos que  $E$  es un conjunto de Borel con  $H^s(E) > 0$ . Mostraremos que  $C_t(E) > 0$  si  $t < s$ , para ello usaremos el Teorema 4. Por el Teorema 4(ii) del capítulo 9 existe un subconjunto compacto  $F \subset E$ , con  $0 < H^s(F) < \infty$  y tal que

$$H^s[B(x, r) \cap F] < br^s, \quad (x \in \mathbb{R}^n, r < 1)$$

para alguna constante  $b$ . Definamos  $\mu = H^s|_F$  la restricción de  $H^s$  a  $F$ . Entonces  $\mu$  es una distribución de masa con soporte contenido en  $F$ . Sea  $x \in \mathbb{R}^n$  y

$$\varphi(r) = \mu[B(x, r)] = H^s[B(x, r) \cap F] \leq br^s \quad (7.15)$$

con  $r \leq 1$ . Entonces

$$\begin{aligned} \phi_t(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\mu(y)}{\|x-y\|^t} = \int_{\|x-y\| \leq 1} \frac{d\mu(y)}{\|x-y\|^t} + \int_{\|x-y\| > 1} \frac{d\mu(y)}{\|x-y\|^t} \\ &\leq b \left(1 + \frac{t}{s-t}\right) + \int_{\|x-y\| > 1} \frac{d\mu(y)}{\|x-y\|^t} \end{aligned}$$

por el Lema 6 del capítulo 5 junto con (7.15), además en la integral restante  $\|x-y\|^{-t} < 1$  por lo que

$$\leq b \left(1 + \frac{t}{s-t}\right) + \int_{\|x-y\| > 1} d\mu(y) \leq b \left(1 + \frac{t}{s-t}\right) + \mu(\mathbb{R}^n) = b \left(1 + \frac{t}{s-t}\right) + H^s(F),$$

por (7.15). Es decir  $\phi_t(x)$  está uniformemente acotada en  $\mathbb{R}^n$ , luego entonces

$$I_t(\mu) = \int \phi_t(x) d\mu(x) \leq \int c d\mu(x) = c\mu(\mathbb{R}^n) < \infty$$

como se deseaba.

(ii) Por la forma en que se definió la  $t$ -capacidad  $C_t$  para un conjunto arbitrario es suficiente demostrar el inciso para el caso en que  $E$  es compacto. Sea  $\mu$  una distribución de masa arbitraria cuyo soporte está contenido en  $E$ ; mostraremos que  $I_s(\mu) = \infty$ . Sea  $E_0$  el conjunto

$$E_0 = \left\{ x \in E : \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mu[B(x, r)]}{r^s} > 0 \right\}.$$

Si  $x \in E_0$  podemos encontrar una sucesión  $\{r_i\}$  decreciente a cero y tal que  $\mu[B(x, r_i)] \geq \epsilon r_i^s$  para algún  $\epsilon > 0$ . Si  $\mu(\{x\}) > 0$  entonces de la definición  $I_s(\mu) = \infty$ . Supongamos entonces que  $\mu(\{x\}) = 0$ , entonces por la continuidad de  $\mu$  existe  $q_i$  con  $0 < q_i < r_i$  y  $\mu(A_i) \geq \frac{1}{2}\epsilon r_i^s$  para cada  $i = 1, 2, \dots$ , donde  $A_i$  es la región anular  $B(x, r_i) \setminus B(x, q_i)$ . Tomando subsucesiones en caso necesario, podemos suponer que  $r_{i+1} < q_i$  para toda  $i$ , obteniendo la sucesión  $\{A_i\}$  disjunta. Por lo tanto si  $x \in E_0$

$$\phi_s(x) = \int \frac{d\mu(y)}{\|x-y\|^s} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} \frac{d\mu(y)}{\|x-y\|^s} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{r_i^s} \int_{A_i} d\mu(y)$$

ya que  $\|x-y\| \leq r_i \quad \forall y \in A_i$ , luego

$$\geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{r_i^s} \left( \frac{\epsilon r_i^s}{2} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2} = \infty.$$

Por el Lema 5 el boreliano  $E_0$  contiene  $\mu$ -casi todos los puntos de  $E$ , luego entonces  $\mu(E_0) > 0$  y  $I_s(\mu) = \int \phi_s(x) d\mu(x) = \infty$ . Como esto es válido para cualesquier distribución de masa  $\mu$  cuyo soporte esté contenido en  $E$ , entonces  $C_s(E) = 0$ .  $\square$

**Corolario 7** Si  $E$  es un subconjunto de Borel de  $\mathbb{R}^n$ , entonces

$$\dim_H(E) = \inf \{t : C_t(E) = 0\} = \sup \{t : C_t(E) > 0\}.$$

*Demostración:* (Figura 7.7) Se sigue del teorema anterior y del hecho de que  $H^s(E) = \infty$  para  $s < \dim_H(E)$ , y de que  $H^s(E) = 0$  para  $s > \dim_H(E)$ .  $\square$

Este corolario a veces se usa de la forma siguiente

**Corolario 8** Sea  $E$  un subconjunto de Borel de  $\mathbb{R}^n$ .

- (i) Si  $I_t(\mu) < \infty$  para alguna distribución de masa  $\mu$  con soporte contenido en  $E$ , entonces  $t \leq \dim_H(E)$ .
- (ii) Si  $t < \dim_H(E)$ , entonces existe una distribución de masa  $\mu$  con soporte contenido en  $E$  y tal que  $I_t(\mu) < \infty$ .

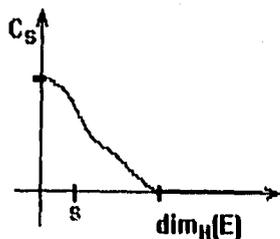


Figura 7.7

**Teorema 9** Si  $E \subset \mathbb{R}^n$  es medible con respecto a toda medida de Radon y si  $C_m(E) > 0$ , entonces  $\int^* N(p | E, y) dL^m y = \infty$  para  $\mathcal{V}_{n,m}^*$ -casi toda  $p \in \mathcal{O}^*(n, m)$ .

*Demostración:* Se sigue del inciso (ii) del Teorema anterior y del Teorema 3.  $\square$

**Teorema 10** Sea  $E$  un conjunto de Borel de  $\mathbb{R}^n$  y  $\dim_H(E) > m$ , entonces  $\int^* N(p | E, y) dL^m y = \infty$  para  $\mathcal{V}_{n,m}^*$ -casi toda  $p \in \mathcal{O}^*(n, m)$ , por lo que  $L^m[p(E)] > 0$ .

*Demostración:* La primer afirmación se sigue del Corolario 7 y del Teorema anterior. Ya que la integral se evalúa sobre  $p(E)$ , entonces que  $\int^* N(p | E, y) dL^m y = \infty$  implica que la medida de Lebesgue  $m$ -dimensional de  $p(E)$  es estrictamente mayor que cero.  $\square$

Asimismo  $L^m[p(E)] > 0$  implica que  $m \leq \dim_H[p(E)]$ , y como además  $p(E) \subset \mathbb{R}^m$  tenemos el primero de los dos resultados importantes de este capítulo.

**Teorema 11** Sea  $E$  un conjunto de Borel de  $\mathbb{R}^n$  y  $\dim_H(E) > m$ , entonces  $\dim_H[p(E)] = m$  para  $\mathcal{V}_{n,m}^*$ -casi toda  $p \in \mathcal{O}^*(n, m)$ .

### 7.3 Proyección sobre un subespacio de mayor dimensión

El último teorema de la sección anterior nos dice que al proyectar cualesquier conjunto de Borel  $E$  con dimensión de Hausdorff  $s$  en un subespacio  $m$ -dimensional,  $m < s$ , entonces la proyección ortogonal de  $E$  sobre dicho subespacio casi siempre tendrá dimensión de Hausdorff  $m$ . En esta sección veremos que si  $s \leq m$  entonces la proyección ortogonal de  $E$  sobre el subespacio  $m$ -dimensional ahora tendrá casi siempre dimensión de Hausdorff  $s$ .

En lo que resta de esta sección supondremos que  $0 < \alpha \leq m$ ,  $b > 0$ , y  $\varphi$  es una medida de Borel regular en  $\mathcal{O}^*(n, m)$  tal que  $\varphi\{p \in \mathcal{O}^*(n, m) : \|p(x)\| \leq \delta\} \leq b\delta^\alpha \|x\|^{-\alpha}$  para toda  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $\delta > 0$ .

**Lema 12** Si  $0 < s < \alpha$  y  $K$  es un conjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$ , entonces

$$\int \frac{d\varphi p}{C_s[p(K)]} \leq \frac{c}{C_s(K)}$$

donde  $c = b[1 + s/(\alpha - s)]$ .

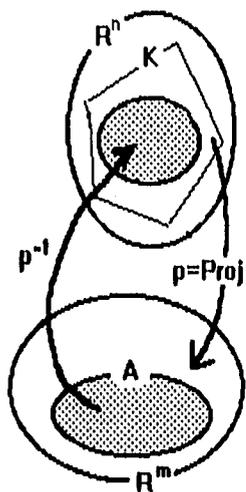


Figura 7.8

*Demostración:* Sea  $\mu$  una medida de Radon en  $\mathbb{R}^n$  tal que el soporte  $\text{supp}(\mu) \subset K$  y  $\mu(K) = 1$ . Si  $p \in \mathcal{O}^*(n, m)$  definimos la medida  $p_{\#}\mu$  en  $\mathbb{R}^m$  como  $(p_{\#}\mu)(A) = \mu[p^{-1}(A)]$  para cualesquier  $A \subset \mathbb{R}^m$  (ver Figura 7.8). Entonces ( $\clubsuit$ ):  $p_{\#}\mu$  es una medida de Radon en  $\mathbb{R}^m$ , tal que  $\text{supp}(p_{\#}\mu) \subset p(K)$  y  $(p_{\#}\mu)[p(K)] = 1$ . En efecto,  $p_{\#}\mu$  es medida ya que  $\mu$  lo es, en particular  $(p_{\#}\mu)(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) = \mu[p^{-1}(\cup_{j=1}^{\infty} A_j)] = \mu[\cup_{j=1}^{\infty} p^{-1}(A_j)] \leq \sum_j \mu[p^{-1}(A_j)] = \sum_j (p_{\#}\mu)(A_j)$ . Si  $\mathcal{O}$  es un abierto arbitrario contenido en  $[p(K)]^c$  entonces  $p^{-1}(\mathcal{O}) \subset [p^{-1}(p(K))]^c \subset K^c$ . Luego  $\mu[p^{-1}(\mathcal{O})] = 0$ , es decir  $(p_{\#}\mu)(\mathcal{O}) = 0$ , por lo que  $\text{supp}(p_{\#}\mu) \subset p(K)$ . Asimismo  $(p_{\#}\mu)[p(K)] = \mu[p^{-1}(p(K))] \geq \mu(K) = 1$  y como además  $\mu(\mathbb{R}^n) = 1$  entonces  $(p_{\#}\mu)[p(K)] = 1$ .

Sea ahora  $B \subset \text{imagen}(p) = \mathbb{R}^m$  y  $\epsilon > 0$  demostraremos que existe un abierto  $W$  de  $\mathbb{R}^m$  tal que  $B \subset W$  y  $(p_{\#}\mu)(W) \leq (p_{\#}\mu)(B) + \epsilon$ . Expresemos a  $\mathbb{R}^m$  como la unión de una sucesión de subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^m$ ,  $\emptyset = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots$  con cerraduras compactas. Escojamos ahora, (por ser  $\mu$  de Radon), subconjuntos abiertos  $U_j$  de  $\mathbb{R}^n$  para  $j = 1, 2, \dots$  tales que

$$A_j = p^{-1}[B \cap V_j \setminus V_{j-1}] \subset U_j$$

y

$$\mu(U_j) \leq \frac{\epsilon}{2^j} + \mu(A_j) \quad (7.16)$$

(ver Figura 7.9). Observemos que  $p[p^{-1}(\overline{V}_j) \setminus U_j]$  es cerrado, por lo que  $W_j = V_j \setminus p[p^{-1}(\overline{V}_j) \setminus U_j]$  es abierto en  $\mathbb{R}^m$  (ver Figura 7.10). Además por la construcción

$$B \cap V_j \setminus V_{j-1} \subset W_j$$

y

$$p^{-1}(W_j) \subset U_j. \quad (7.17)$$

Por lo tanto  $B \subset W = \cup_{j=1}^{\infty} W_j$ , y así

$$(p_{\#}\mu)(W) = \mu[p^{-1}(W)] = \mu\left[p^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} W_j\right)\right] \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu[p^{-1}(W_j)]$$

y usando ahora (7.17) y (7.16)

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(U_j) \leq \epsilon \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} + \sum_j \mu(A_j) = \epsilon + \sum_j \mu(A_j)$$

$$= \epsilon + \sum_j \mu[p^{-1}(B \cap V_j \setminus V_{j-1})] = \epsilon + \sum_j \mu[p^{-1}(B) \cap p^{-1}(V_j) \setminus p^{-1}(V_{j-1})]$$

$$= \epsilon + \sum_j (\mu[p^{-1}(B)] [p^{-1}(V_j) \setminus p^{-1}(V_{j-1})]) = \epsilon + \mu[p^{-1}(B)] = \epsilon + (p_{\#}\mu)(B).$$

Así para cualesquier  $B \subset \mathbb{R}^m$  se tiene que

$$(p_{\#}\mu)(B) = \inf \{(p_{\#}\mu)(W) : W \text{ es abierto y } B \subset W\}.$$

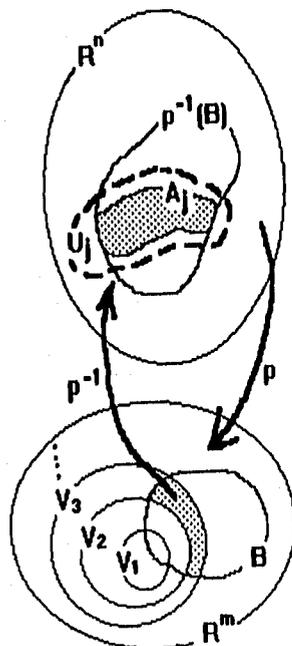
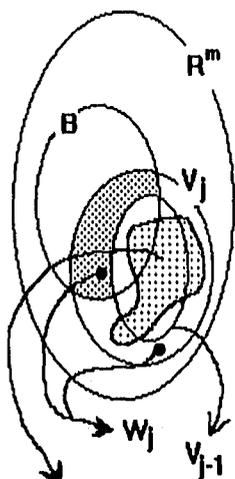


Figura 7.9

En forma análoga se demuestra que si  $W$  es un abierto en  $\mathbb{R}^m$  entonces  $(p_{\#}\mu)(W) = \sup \{(p_{\#}\mu)[F] : F \text{ es compacto en } \mathbb{R}^m, F \subset W\}$ . Así, las condiciones  $(\clubsuit)$  se satisfacen. Ahora como  $(\phi, \circ p)_{\#}\mu = \mu[p^{-1} \circ \phi_s^{-1}] = (p_{\#}\mu)\phi_s^{-1}$  entonces  $\phi_s$  es  $p_{\#}\mu$ -medible, luego

$$\begin{aligned} I_s(p_{\#}\mu) &= \int \phi_s(x) d(p_{\#}\mu)(x) = \int (\phi_s \circ p)(x) d\mu(x) \\ &= \int \phi_s[p(x)] d\mu(x) = \iint \frac{d\mu(y) d\mu(x)}{\|p(x-y)\|^s} \end{aligned}$$



$p(p^{-1}(\bar{V}_j) \cup U_j)$

Figura 7.10

Por lo tanto

$$\int I_s(p_{\#}\mu) d\varphi(p) = \iiint \|p(x-y)\|^{-s} d\mu(y) d\mu(x) d\varphi(p)$$

y usando el teorema de Fubini y el Lema 6 del capítulo 5 se tendrá

$$\leq \iint c \|x-y\|^{-s} d\mu(y) d\mu(x) = cI_s(\mu),$$

y como  $[C_s(K)]^{-1} = \inf I_s(\mu)$  se sigue el resultado deseado.  $\square$

**Lema 13** Si  $0 < s < \alpha$ ,  $E \subset \mathbb{R}^n$  y  $C_s(E) > 0$  entonces existe un subconjunto de Borel  $Q \subset \mathcal{O}^*(n, m)$ , independiente de  $\varphi$  tal que  $\varphi(Q) = 0$  y  $C_s[p(E)] > 0$ , para todo  $p \in \mathcal{O}^*(n, m) \setminus Q$ .

*Demostración:* Tomemos un compacto  $K \subset E$  tal que  $C_s(K) > 0$ . Dicho  $K$  existe ya que  $C_s(E) > 0$  y por definición de  $s$ -capacidad  $C_s$ . Afirmamos que el conjunto

$$Q = \{p \in \mathcal{O}^*(n, m) : C_s[p(K)] = 0\}$$

tiene las propiedades requeridas. En efecto, bajo estas condiciones, por el lema anterior tendremos que  $\int_Q C_s[p(K)]^{-1} d\varphi \leq cC_s(K)^{-1} < \infty$ , lo cual solo es posible si  $\varphi(Q) = 0$ . Por otro lado como

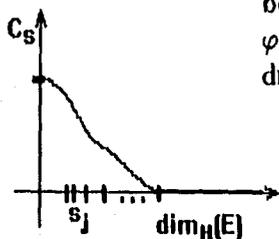
$$C_s[p(E)] = \sup \{C_s(K') : K' \subset p(E), K' \text{-compacto}\}$$

y en particular con el conjunto  $K$  tomado inicialmente  $C_s[p(K)] > 0$ , para cualesquier  $p \in \mathcal{O}^*(n, m) \setminus Q$  y  $p(K) \subset p(E)$ , entonces  $C_s[p(E)] > 0$  para todo  $p \in \mathcal{O}^*(n, m) \setminus Q$ .  $\square$

Observemos que la condición  $C_s(E) > 0$  implica  $s \leq \dim_H(E)$ . Enunciamos ahora el segundo de los resultados principales de este capítulo. Recordemos que  $n$  y  $m$  son enteros tales que  $0 < m < n$ , y  $\alpha$  es un real tal que  $0 < \alpha \leq m$

**Teorema 14** Si  $E$  es un conjunto de Borel de  $\mathbb{R}^n$  y  $\dim_H(E) \leq \alpha$ , entonces existe un conjunto de Borel  $Q \subset \mathcal{O}^*(n, m)$ , independiente de  $\varphi$ , tal que  $\varphi(Q) = 0$  y  $\dim_H[p(E)] = \dim_H[E]$  para todo  $p \in \mathcal{O}^*(n, m) \setminus Q$ .

*Demostración.* Sea  $s_j = \dim_H(E) - 1/j$ , para  $j = 1, 2, \dots$  (ver Figura 7.11), entonces por el Corolario 7  $C_{s_j}(E) > 0$ , luego por el lema anterior existe un conjunto de Borel  $Q_j \subset \mathcal{O}^*(n, m)$ , independiente de  $\varphi$ , tal que  $\varphi(Q_j) = 0$  y  $C_{s_j}[p(E)] > 0$  para todo  $p \in \mathcal{O}^*(n, m) \setminus Q_j$ . Definimos ahora  $Q = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ , entonces  $Q$  satisface las propiedades deseadas. En efecto, obviamente  $Q$  es boreliano e independiente de  $\varphi$ . Además  $\varphi(Q) = 0$ , ya que  $\varphi$  es aditiva:  $\varphi(Q) \leq \sum_j \varphi(Q_j) = 0$ . Por último, para cualesquier  $p \in \mathcal{O}^*(n, m) \setminus Q$  tendremos que



$$\begin{aligned} \dim_H[p(E)] &= \sup \{s : C_s[p(E)] > 0\} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left\{ s_j = \dim_H(E) - \frac{1}{j} \right\} = \dim_H(E). \quad \square \end{aligned}$$

Figura 7.11

Por el Lema 3 del capítulo 5 este teorema es válido en particular para  $\alpha = m$  y  $\varphi = \nu_{n,m}^*$ .

# CAPITULO 8

## INTERSECCION CON SUBESPACIOS

## 8. INTERSECCIÓN CON SUBESPACIOS

En este capítulo examinaremos la intersección de conjuntos  $s$ -dimensionales con subespacios afines  $m$ -dimensionales de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $A \subset \mathbb{R}^n$  denotaremos por  $\tau_x(A)$  la  $x$ -traslación  $\{y \in \mathbb{R}^n : y - x \in A\}$  de  $A$ .

**Lema 1** Sean  $F$  un conjunto compacto en  $\mathbb{R}^n$  y  $x \in F$ . Supongamos que para todo valor de  $r \in \mathbb{R}$  y  $H^s$ -casi toda  $x \in F$ ,  $\psi_r^{(n-m)}(H^s \lfloor F, x, V)$  es una función medible no-negativa de  $V \in G(n, m)$  con respecto a  $\gamma_{n,m}$ . Sean  $p$  y  $q$  números reales positivos y supongamos además

(i) que para todo  $V \in G(n, m)$  y  $H^s$ -casi toda  $x \in F$

$$\frac{\psi_r^{(n-m)}(H^s \lfloor F, x, V)}{r^t} r^p$$

es no-decreciente con respecto a  $r$ , y

(ii)

$$\int \frac{\psi_r^{(n-m)}(H^s \lfloor F, x, V)}{r^t} d\gamma_{n,m} V = \mathcal{O}(r^q)$$

cuando  $r \rightarrow 0^+$  para  $H^s$ -casi toda  $x \in F$ , y donde  $\mathcal{O}(r^q)$  nos indica que la integral es de orden  $r^q$ .

Entonces

$$\int \overline{\lim}_{r \rightarrow 0^+} \frac{\psi_r^{(n-m)}(H^s \lfloor F, x, V)}{r^t} d\gamma_{n,m} V = 0$$

para  $H^s$ -casi toda  $x \in F$ .

*Demostración:* De (ii) existe  $M > 0$  y  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\int \frac{\psi_{2^{-k}}^{(n-m)}(H^s \lfloor F, x, V)}{(2^{-k})^t} d\gamma_{n,m} V < 2^{-kp} M$$

si  $k > k_0$ , para  $H^s$ -casi toda  $x \in F$ , luego entonces

$$\begin{aligned} \int \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_{2^{-k}}^{(n-m)}(H^s \lfloor F, x, V)}{(2^{-k})^t} d\gamma_{n,m} V &= \sum_{k=1}^{\infty} \int 2^{kt} \psi_{2^{-k}}^{(n-m)}(H^s \lfloor F, x, V) d\gamma_{n,m} V \\ &< M \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^q}\right)^k < \infty \end{aligned}$$

ya que  $0 < 2^{-q} < 1$  para cualesquier  $q > 0$ . La igualdad anterior es consecuencia del Teorema de convergencia monótona ya que para cada natural  $k$ ,

$2^{kt} \psi_{2^{-k}}^{(n-m)}(H^s[F, x, V])$  es una función medible no-negativa de  $V$  con respecto a  $\gamma_{n,m}$ . Así

$$\int \sum_{k=1}^{\infty} 2^{kt} \psi_{2^{-k}}^{(n-m)}(H^s[F, x, V]) d\gamma_{n,m} V < \infty$$

de donde

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{kt} \psi_{2^{-k}}^{(n-m)}(H^s[F, x, V]) < \infty$$

para casi todo  $V \in G(n, m)$  con respecto a  $\gamma_{n,m}$ . De aquí que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 2^{kt} \psi_{2^{-k}}^{(n-m)}(H^s[F, x, V]) = 0 \quad (8.1)$$

para casi todo  $V \in G(n, m)$ .

Supongamos ahora que  $r$  es cualquier número real tal que  $0 < r < 1$ , y sea  $k$  el natural para el cual  $2^{-(k+1)} \leq r < 2^{-k}$ , de aquí que

$$[2^{-(k+1)p}] \frac{\psi_r^{(n-m)}(H^s[F, x, V])}{r^t} \leq [r^p] \frac{\psi_r^{(n-m)}(H^s[F, x, V])}{r^t}$$

además con la hipótesis (i)

$$\leq [2^{-kp}] \frac{\psi_{2^{-k}}^{(n-m)}(H^s[F, x, V])}{2^{-kt}}$$

de donde para todo  $V \in G(n, m)$

$$\frac{\psi_r^{(n-m)}(H^s[F, x, V])}{r^t} \leq 2^p \frac{\psi_{2^{-k}}^{(n-m)}(H^s[F, x, V])}{2^{-kt}}$$

ahora, esta desigualdad junto con (8.1) y ya que  $0 < r < 2^{-k}$  nos lleva a que

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\psi_r^{(n-m)}(H^s[F, x, V])}{r^t} = 0$$

para casi todo  $V \in G(n, m)$ , de donde

$$\int \overline{\lim}_{r \rightarrow 0^+} \frac{\psi_r^{(n-m)}(H^s[F, x, V])}{r^t} d\gamma_{n,m} V = 0$$

para casi toda  $x \in F$ .  $\square$

**Lema 2** Supongamos que  $E$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  con  $0 < H^s(E) < \infty$ ,  $t > 0$  y  $V \in G(n, m)$ . Si  $H^t(E \cap \tau_a(V)) = 0$  para toda  $a \in \mathbb{R}^n$  entonces

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 0^+} \frac{\psi_r^{(n-m)}(H^s[E, x, V])}{r^t} = \infty$$

para  $H^s$ -casi toda  $x \in E$ .

*Demostración:* Ya que

$$\psi_r^{(n-m)}(H^s[E, x, V]) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \delta^{m-n} (H^s[E] (\{y \in B(x, r) : \text{dist}(x-y, V) \leq \delta\}))$$

entonces el resultado del teorema que deseamos probar puede expresarse como

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 0^+} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} r^{-t} \delta^{m-n} H^s(E \cap \{y \in B(x, r) : \text{dist}(x-y, V) \leq \delta\}) = \infty$$

para  $H^s$ -casi toda  $x \in E$ . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $E$  es un conjunto acotado. Además, para simplificar la notación supongamos que  $V \in G(n, m)$  es de la forma

$$V = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 = \dots = x_{n-m} = 0; x_i \in \mathbb{R} \text{ para } i = n-m+1, \dots, n\}$$

y que el conjunto de puntos  $(x_1, \dots, x_n) \in E$  son tales que  $0 \leq x_i \leq 1$  para  $i = 1, \dots, n-m$ . Supongamos que  $\alpha > 0$  y  $\kappa > 0$  son arbitrarios, y denotemos por  $E_1 = E_1(\alpha, \kappa)$  el conjunto de puntos  $x = (x_1, \dots, x_n)$  de  $E$  tales que

$$\sup_{r < \kappa} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} r^{-t} \delta^{m-n} H^s(E \cap \{y \in B(x, r) : \text{dist}(x-y, V) \leq \delta\}) < \alpha. \quad (8.2)$$

Demostraremos que  $H^s(E_1) = 0$ .

Ahora, como  $0 < H^s(E) < \infty$ , entonces existe un conjunto cerrado  $F_1 \subset E_1$  tal que

$$\frac{1}{2} H^s(E_1) \leq H^s(F_1). \quad (8.3)$$

Sean  $I_1, I_2, \dots, I_{n-m}$  intervalos en los ejes  $x_1, x_2, \dots, x_{n-m}$  respectivamente, entonces denotamos

$$S(I) = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in I_i, i = 1, \dots, n-m; x_j \in \mathbb{R}, j = n-m+1, \dots, n\}$$

. Ahora, debe existir un punto  $(\xi_1, \dots, \xi_{n-m}, 0, \dots, 0)$  en el cubo cerrado

$$u = \{(x_1, \dots, x_n) : 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, n-m; x_{n-m+1} = \dots = x_n = 0\} \quad (8.4)$$

y una sucesión de cubos cerrados de la misma forma  $u_r, r = 1, 2, \dots$  tales que  $(\xi_1, \dots, \xi_{n-m}, 0, \dots, 0) \in u_r$ , para  $r = 1, 2, \dots$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} L^{(n-m)}(u_r) = 0 \quad (8.5)$$

y

$$[L^{(n-m)}(u_r)]^{-1} H^s[F_1 \cap S(u_r)] \geq H^s(F_1) \quad (8.6)$$

para  $r = 1, 2, \dots$

Denotemos  $a = (\xi_1, \dots, \xi_{n-m}, 0, \dots, 0)$ . Ahora, el conjunto  $F_1 \cap \tau_a(V)$  es cerrado y acotado, y por lo tanto compacto en  $\mathbb{R}^n$ . Por hipótesis  $H^s[E \cap \tau_a(V)] = 0$  para cualesquier  $a \in \mathbb{R}^n$  y  $V \in G(n, m)$ , y como además  $F_1 \subset E$ , entonces  $H^t(F_1 \cap \tau_a(V)) = 0$ . Por lo tanto, dado  $\epsilon > 0$ , podemos encontrar una sucesión

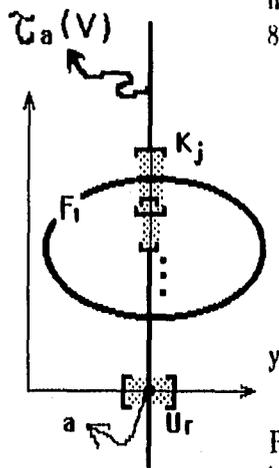


Figura 8.1

finita de cubos abiertos  $K_j, j = 1, \dots, p$  en  $\tau_a(V)$ , de forma tal que (ver Figura 8.1)

$$F_1 \cap \tau_a(V) \subset \bigcup_{j=1}^p K_j \quad (8.7)$$

$$\sum_{j=1}^p |K_j| < \epsilon, \quad (8.8)$$

$$\sum_{j=1}^p |K_j|^t < \epsilon \quad (8.9)$$

$$|K_j| < \kappa, \quad j = 1, \dots, p. \quad (8.10)$$

Para cada cubo  $K_j$  denotemos por  $T(K_j)$  el producto cartesiano de  $K_j$  con los ejes  $x_1, \dots, x_{n-m}$ . Ya que se tiene una cantidad finita de cubos abiertos  $K_j$  que satisfacen (8.7) y  $F_1$  es cerrado, entonces de (8.5) existe un natural  $N$ , tal que si  $r > N$ , entonces (ver Figura 8.2)

$$F_1 \cap S(u_r) \subset \bigcup_{j=1}^p T(K_j) \cap S(u_r). \quad (8.11)$$

Ahora, de (8.6) junto con (8.11)

$$L^{(n-m)}(u_r) H^s(F_1) \leq H^s[F_1 \cap S(u_r)]$$

$$\begin{aligned} &\leq H^s \left\{ F_1 \cap \left[ \bigcup_{j=1}^p T(K_j) \cap S(u_r) \right] \right\} = H^s \left\{ \bigcup_{j=1}^p [F_1 \cap T(K_j) \cap S(u_r)] \right\} \\ &\leq \sum_{j=1}^p H^s [F_1 \cap T(K_j) \cap S(u_r)]. \end{aligned} \quad (8.12)$$

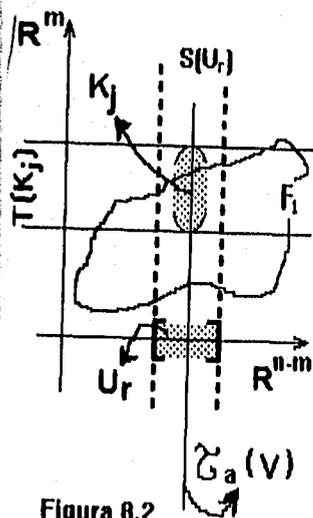


Figura 8.2

Ahora, para cada  $j$  y  $r$ ,  $T(K_j) \cap S(u_r)$  es un 'rectángulo' en  $\mathbb{R}^n$  de 'base'  $L^{(n-m)}(u_r)$  y 'altura'  $L^m(K_j)$ . Así, para todo  $x = (x_1, \dots, x_n) \in F_1$  tenemos de (8.2) y (8.10) que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \delta^{n-n} H^s [E \cap \{y \in B(x, |K_j|) : \text{dist}(x-y, V) \leq \delta\}] < \alpha |K_j|^t \quad (8.13)$$

para  $j = 1, 2, \dots, p$ .

Por otro lado, veamos que de (8.2) podemos obtener la siguiente desigualdad para todo natural  $r = 1, 2, \dots$

$$[L^{(n-m)}(u_r)]^{-1} H^s [F_1 \cap T(K_j) \cap S(u_r)] < 2^{n-m} \alpha |K_j|^t \quad (8.14)$$

$j = 1, 2, \dots, p$ . Demostraremos esta desigualdad suponiendo lo contrario. Entonces, supongamos que para algún natural  $r_0$  la desigualdad (8.14) no se satisface. Para simplificar la notación denotaremos dicho cubo cerrado  $u_{r_0}$  como  $J$ . Así

$$[L^{(n-m)}(J)]^{-1} H^s [F_1 \cap T(K_j) \cap S(J)] < 2^{n-m} \alpha |K_j|^t. \quad (8.15)$$

De acuerdo a (8.4)  $J = \left\{ \left( \underbrace{x_1, \dots, x_{n-m}, 0, \dots, 0}_{n\text{-componentes}} \right) : 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, n-m \right\}$ .

Ahora dividamos  $J$  en  $2^{n-m}$  subcubos cerrados y congruentes, es decir, subcubos de la forma  $(I_1, \dots, I_{n-m}, 0, \dots, 0)$  donde  $I_i \in \left\{ \left[ 0, \frac{x_i}{2} \right], \left[ \frac{x_i}{2}, 1 \right] \right\}$ ,  $i = 1, \dots, n-m$ . Denotaremos a dichos subcubos de  $J$  como  $J_q$ ,  $q = 1, 2, \dots, 2^{n-m}$ . Así

$$J = \bigcup_{q=1}^{2^{n-m}} J_q$$

de donde

$$S(J) = \bigcup_q S(J_q)$$

y entonces para  $j = 1, \dots, p$

$$F_1 \cap T(K_j) \cap S(J) = \bigcup_q [F_1 \cap T(K_j) \cap S(J_q)]$$

y aplicando la  $s$ -medida de Hausdorff obtendremos

$$H^s [F_1 \cap T(K_j) \cap S(J)] \leq \sum_{q=1}^{2^{n-m}} H^s [F_1 \cap T(K_j) \cap S(J_q)], \quad j = 1, \dots, p$$

que junto con (8.15) tendremos

$$\sum_{q=1}^{2^{n-m}} H^s [F_1 \cap T(K_j) \cap S(J_q)] \geq 2^{n-m} \alpha |K_j|^t L^{(n-m)}(J) \quad (8.16)$$

para  $j = 1, \dots, p$ . Ya que cada sumando en el lado izquierdo de la anterior desigualdad es no-negativo, entonces al menos uno de dichos sumandos, digamos  $q = 1$ , debe ser mayor o igual que

$$\frac{2^{n-m} \alpha |K_j|^t L^{(n-m)}(J)}{2^{n-m}}$$

es decir

$$H^s [F_1 \cap T(K_j) \cap S(J_1)] \geq \alpha |K_j|^t L^{(n-m)}(J),$$

y de acuerdo a la definición de las  $J_q$ , se tiene

$$L^{(n-m)}(J) = Vol^{(n-m)}(J) = 2^{n-m} Vol(J_1) = 2^{n-m} L^{(n-m)}(J_1),$$

por lo que

$$H^s [F_1 \cap T(K_j) \cap S(J_1)] \geq 2^{n-m} \alpha |K_j|^t L^{(n-m)}(J_1), \quad j = 1, \dots, p.$$

Análogamente, dividamos  $J_1$  en  $2^{n-m}$  subcubos cerrados y congruentes, y denotemos por  $J_2$  aquel que satisface

$$H^s [F_1 \cap T(K_j) \cap S(J_2)] \geq 2^{n-m} \alpha |K_j|^t L^{(n-m)}(J_2), \quad j = 1, \dots, p.$$

Procediendo en esta forma obtendremos una sucesión decreciente  $\{J_u\}_{u=1}^\infty$  de subcubos de  $J$  tales que

$$|J_u| = 2^{-u} |J| \quad (8.17)$$

y

$$[L^{(n-m)}(J_u)]^{-1} H^s [F_1 \cap T(K_j) \cap S(J_u)] \geq 2^{n-m} \alpha |K_j|^t \quad (8.18)$$

para  $u = 1, 2, \dots; j = 1, \dots, p$ .

Ya que los  $K_j$  son una cantidad finita de cubos abiertos que satisfacen (8.7), tendremos que para cada  $j = 1, \dots, p$  y  $u = 1, 2, \dots$  los conjuntos  $F_1 \cap T(K_j) \cap S(J_u)$  son compactos y por (8.18) son no-vacíos. Así, por (8.17) forman una sucesión decreciente de conjuntos compactos y no-vacíos encajados, luego entonces por propiedad de compacidad para cada  $j = 1, \dots, p$  existe un punto  $z_j \in \bigcap_{u=1}^\infty [F_1 \cap T(K_j) \cap S(J_u)]$ . Denotemos mediante  $\delta_u$  la longitud de una de las aristas del cubo  $J_u$ , entonces  $L^{(n-m)}(J_u) = Vol^{(n-m)}(J_u) = \delta_u^{n-m}$ .

Por otro lado, para  $j = 1, \dots, p$  se tiene que para toda  $u = 1, 2, \dots$

$$\{y \in B(z_j, |K_j|) : \text{dist}(z_j - y, V) \leq \delta_u\} \supset T(K_j) \cap S(J_u)$$

(ver Figura 8.3), y como  $E \supset F_1$

$$E \cap \{y \in B(z_j, |K_j|) : \text{dist}(z_j - y, V) \leq \delta_u\} \supset F_1 \cap T(K_j) \cap S(J_u)$$

que junto con (8.18) obtendremos, para cada  $j = 1, \dots, p$  y toda  $u = 1, 2, \dots$

$$[L^{(n-m)}(J_u)]^{-1} H^s [E \cap \{y \in B(z_j, |K_j|) : \text{dist}(z_j - y, V) \leq \delta_u\}] \geq 2^{n-m} \alpha |K_j|^t.$$

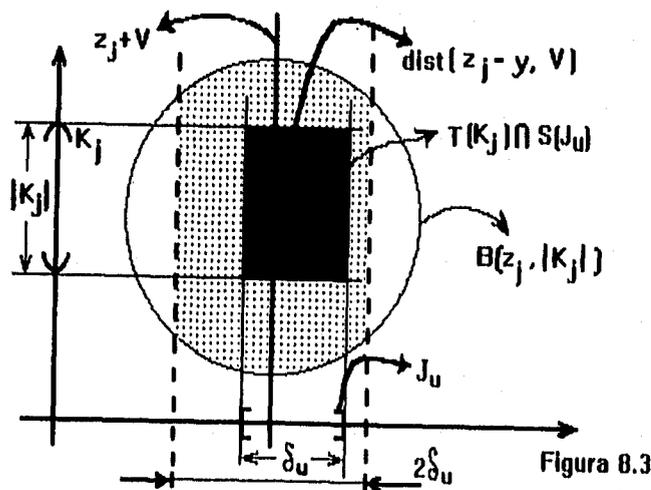


Figura 8.3

Ahora,  $L^{(n-m)}(J_u) = \delta_u^{n-m}$ , y como la desigualdad anterior es válida para toda  $u$ , entonces

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \delta_u^{n-m} H^s [E \cap \{y \in B(z_j, |K_j|) : \text{dist}(z_j - y, V) \leq \delta_u\}] \geq 2^{n-m} \alpha |K_j|^t, \quad (8.19)$$

para  $j = 1, \dots, p$ . Ahora, para cualquier  $0 < \delta < \delta_1$ , existe un natural  $u$  tal que  $\delta_u \leq \delta < 2\delta_u$  debido a (8.17). Así, de  $\delta_u \leq \delta$  se tiene que

$$\{y \in B(z_j, |K_j|) : \text{dist}(z_j - y, V) \leq \delta\} \supset \{y \in B(z_j, |K_j|) : \text{dist}(z_j - y, V) \leq \delta_u\},$$

y de  $1/\delta_u < 2/\delta$  junto con (8.19)

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0^+} 2^{n-m} \delta^{m-n} H^s [E \cap \{y \in B(z_j, |K_j|) : \text{dist}(z_j - y, V) \leq \delta\}] \geq 2^{n-m} \alpha |K_j|^t,$$

para  $j = 1, \dots, p$ , o bien

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \delta^{m-n} H^s [E \cap \{y \in B(z_j, |K_j|) : \text{dist}(z_j - y, V) \leq \delta\}] \geq \alpha |K_j|^t, \quad j = 1, \dots, p,$$

pero ésto contradice (8.13) ya que  $z_j \in F_1$  para toda  $j = 1, \dots, p$ . Por lo tanto (8.14) es verdadero, que junto con (8.9)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p H^s [F_1 \cap T(K_j) \cap S(u_r)] &\leq 2^{n-m} \alpha L^{(n-m)}(u_r) \sum_{j=1}^p |K_j|^t \\ &< 2^{n-m} \alpha L^{(n-m)}(u_r) \epsilon. \end{aligned}$$

Además,  $L^{(n-m)}(u_r) > 0$  por lo que usando (8.12) se tiene  $H^s(F_1) < 2^{n-m} \alpha \epsilon$ , lo cual es válido para todo  $\epsilon > 0$ , de aquí que  $H^s(F_1) = 0$  y entonces de (8.3)  $H^s(E_1) = 0$ . Por lo tanto de (8.2), para  $H^s$ -casi todo  $x \in E$

$$\sup_{r < \kappa} \liminf_{\delta \rightarrow 0^+} r^{-t} \delta^{m-n} H^s [E \cap \{y \in B(x, r) : \text{dist}(x - y, V) \leq \delta\}] \geq \alpha,$$

y como  $\alpha > 0$  y  $\kappa > 0$  se tomaron arbitrarios el lema queda demostrado.  $\square$

**Lema 3** Si  $0 < u < s$ ,  $E \subset \mathbb{R}^n$  y  $H^s(E) < \infty$ , entonces

$$\liminf_{r \rightarrow 0^+} r^{u-s} \int_{B \cap B(x, r)} \|x - y\|^{-u} dH^s y \leq 2^s \frac{s}{s-u}$$

para  $H^s$ -casi toda  $x \in \mathbb{R}^n$ .

*Demostración:* Sea  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $r > 0$ . Como  $H^s(E \cap B(x, r)) < \infty$  y  $0 \leq \|x - y\| \leq r$  para cualesquier  $y \in E \cap B(x, r)$ , entonces aplicando el Lema 5 del capítulo 5

$$\begin{aligned} \int_{B \cap B(x, r)} \|x - y\|^{-u} dH^s y &= \int_0^r \rho^{-u} dH^s \{y \in E \cap B(x, \rho) : \|x - y\| \leq \rho\} \\ &= \int_0^r \rho^{-u} dH^s \{E \cap B(x, \rho)\} \end{aligned}$$

e integrando por partes, con

$$\begin{aligned} \alpha &= \rho^{-u} & d\beta &= dH^s \{E \cap B(x, \rho)\} \\ d\alpha &= -u\rho^{-u-1} dL^1 \rho & \beta &= H^s \{E \cap B(x, \rho)\} \end{aligned}$$

de la última integral tendremos

$$\begin{aligned} &= \left[ \rho^{-u} H^s \{E \cap B(x, \rho)\} \right]_{\rho=0}^r + u \int_0^r \rho^{-u-1} H^s \{E \cap B(x, \rho)\} dL^1 \rho \\ &= r^{-u} H^s \{E \cap B(x, r)\} - \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \rho^{-u} H^s \{E \cap B(x, \rho)\} + \\ &\quad + u \int_0^r \rho^{-u-1} H^s (E \cap B(x, \rho)) dL^1 \rho \end{aligned}$$

y usando propiedades de densidad, Corolario 6 del capítulo 6,

$$\leq r^{-u} H^s \{E \cap B(x, r)\} + u \int_0^r \rho^{-u-1} H^s \{E \cap B(x, \rho)\} dL^1 \rho.$$

Mediante esta desigualdad y tomando  $r > 0$  arbitrario tendremos

$$\begin{aligned} &r^{u-s} \int_{E \cap B(x, r)} \|x - y\|^{-u} dH^s y \\ &\leq r^{-s} H^s \{E \cap B(x, r)\} + ur^{u-s} \int_0^r \rho^{-u-1} H^s \{E \cap B(x, \rho)\} dL^1 \rho \end{aligned}$$

y nuevamente por el Corolario 6 del capítulo 6

$$\begin{aligned} &\leq 2^s + ur^{u-s} \int_0^r \rho^{-u-1} (2\rho)^s dL^1 \rho, \quad \text{para } H^s\text{-casi toda } x \in E, \\ &= 2^s + ur^{u-s} 2^s \int_0^r \rho^{s-u-1} dL^1 \rho \end{aligned}$$

y ya que  $s - u - 1 \neq -1$

$$= 2^s + ur^{u-s} 2^s \left( \frac{\rho^{s-u}}{s-u} \right)_{\rho=0}^r = 2^s + \frac{ur^{u-s} 2^s}{s-u} (r^{s-u}) = 2^s \frac{s}{s-u}. \quad \square$$

**Lema 4** Si  $E$  es un subconjunto  $H^s$ -medible de  $\mathbb{R}^n$ ,  $0 < H^s(E) < \infty$ , entonces

$$\dim_H [E \cap \tau_x(V)] \geq s + m - n$$

para  $H^s \times \gamma_{n,m}$ -casi toda  $(x, V) \in E \times G(n, m)$ .

*Demostración:* Es suficiente demostrar el teorema para un subconjunto compacto arbitrario  $F$  de  $E$ , y naturalmente para  $s + m - n > 0$ . Sea  $0 < t < s + m - n$ . Denotemos

$$f(x, V) = \overline{\lim}_{r \rightarrow 0^+} r^{-t} \psi_r^{n-m} [H^s [F, x, V]]$$

para  $(x, V) \in \mathbb{R}^n \times G(n, m)$ . Entonces si las condiciones (i) y (ii) del Lema 1 las satisface esta función  $f$  tendremos que

$$\int_F f(x, V) d\gamma_{n,m} V = 0 \quad (8.20)$$

para  $H^s$ -casi toda  $x \in F$ . Veamos entonces que dichas condiciones efectivamente  $f$  las satisface. Del Lema 9 del capítulo 5

$$\int_F \psi_r^{n-m} [H^s [F, x, V]] d\gamma_{n,m} V \leq b \int_{F \cap B(x,r)} \|x - y\|^{m-n} dH^s y$$

y como  $s > n - m$  usando lema anterior para  $r > 0$  arbitrario tendremos que

$$\leq \frac{b' s r^{s+m-n}}{s + m - n}$$

para  $H^s$ -casi toda  $x \in \mathbb{R}^n$ . Por lo tanto

$$\int_F \frac{\psi_r^{n-m} [H^s [F, x, V]]}{r^t} d\gamma_{n,m} V \leq \frac{b' s r^{s+m-n-t}}{s + m - n}$$

lo cual nos dice que la integral de la izquierda es del orden de  $r^q$ , con  $q = s + m - n - t > 0$ . Además como

$$\psi_r^{(n-m)} [H^s [F, x, V]] = \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{m-n} \mu \{y \in B(x, r) : \text{dist}(x - y, V) \leq \delta\}$$

entonces  $\psi_r^{(n-m)}$  es no decreciente con respecto a  $r$ , y si tomamos además un real positivo  $p > t$  entonces  $r^{p-t}$  también es no decreciente con respecto a  $r$ . Así las condiciones (i) y (ii) del Lema 1 se satisfacen por lo que efectivamente la igualdad (8.20) se satisface.

Por los resultados del capítulo 5, (comentario antes del Lema 8), sabemos que  $\psi_r^{n-m} [H^s [F, x, V]]$  es una función Borel medible en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times G(n, m)$ . Entonces por el teorema de Fubini y como  $H^s(F) < \infty$

$$\int \int_F f(x, V) dH^s x d\gamma_{n,m} V = \int \int f(x, V) d\gamma_{n,m} V dH^s x = 0. \quad (8.21)$$

Apliquemos ahora el Lema 2 de este capítulo al conjunto

$$E_V = \{x \in F : H^t [F \cap \tau_x(V)] = 0\}$$

para  $V \in G(n, m)$ , entonces  $f(x, V) = \infty$  para  $H^s$ -casi toda  $x \in E_V$ . De aquí que por (8.21),  $H^s(E_V) = 0$  para  $\gamma_{n,m}$ -casi todo  $V \in G(n, m)$ . Ahora el conjunto  $\{(x, V) : x \in E_V\}$  es  $H^s \times \gamma_{n,m}$ -medible (ver Teorema 6.1 del Mattila), y por el Teorema de Fubini  $(H^s \times \gamma_{n,m})\{(x, V) : x \in E_V\} = 0$ . Por lo tanto  $H^t[F \cap \tau_x(V)] > 0$  para  $(H^s \times \gamma_{n,m})$ -casi todo  $(x, V) \in F \times G(n, m)$ . Y como ésto es válido para cualesquier  $t$  tal que  $0 < t < s + m - n$ , entonces

$$\dim_H [F \cap \tau_x(V)] \geq s + m - n$$

para  $(H^s \times \gamma_{n,m})$ -casi todo  $(x, V) \in F \times G(n, m)$ .  $\square$

**Lema 5** Supongamos que  $r > 0$  y  $s > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $E \subset \mathbb{R}^n$  y  $H^s(E) < \infty$ .

Si  $s \geq n - m$ ,

$$\int^* H^{s+m-n} \{[E \setminus B(x, r)] \cap \tau_x(V)\} d\gamma_{n,m} V \leq cr^{m-n} H^s[E \setminus B(x, r)]$$

donde  $c$  es una constante que solamente depende de  $n, m$  y  $s$ .

Si  $s < n - m$ ,

$$[E \setminus B(x, r)] \cap \tau_x(V) = \emptyset$$

para  $\gamma_{n,m}$ -casi todo  $V \in G(n, m)$ .

*Demostración:* De acuerdo a la definición de la medida esférica  $s$ -dimensional  $S^s$ , dado cualesquier entero positivo  $k$  existe una familia de bolas cerradas en  $\mathbb{R}^n$ ,  $\{B_{k,i}\}_{i=1}^\infty$ , tal que

$$E \setminus B(x, r) \subset \bigcup_{i=1}^\infty B_{k,i} \subset \mathbb{R}^n \setminus B\left(x, \frac{r}{2}\right) \quad (8.22)$$

(ver Figura 8.4), y

$$\sum_{i=1}^\infty |B_{k,i}|^s < S^s[E \setminus B(x, r)] + \frac{2^s}{k}$$

pero ya que  $S^s \leq 2^s H^s$ , dicha desigualdad se puede expresar como

$$\sum_{i=1}^\infty 2^{-s} |B_{k,i}|^s < H^s[E \setminus B(x, r)] + \frac{1}{k}, \quad (8.23)$$

además las bolas pueden escogerse tal que

$$|B_{k,i}| < \frac{1}{k}. \quad (8.24)$$

Ahora, sea  $B_{k,i}$  una de estas bolas con centro en un punto  $w \in \mathbb{R}^n$ , entonces

$$\gamma_{n,m} \{V \in G(n, m) : B_{k,i} \cap \tau_x(V) \neq \emptyset\}$$

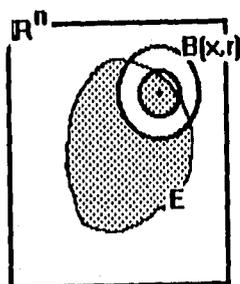


Figura 8.4

$$= \gamma_{n,m} \left\{ V \in G(n,m) : \text{dist}(w-x, V) \leq \frac{|B_{k,i}|}{2} \right\}$$

(ver Figura 8.5), lo cual se obtiene al trasladar simplemente el origen de coordenadas al punto  $x$ , además

$$\leq \gamma_{n,m} \{ V \in G(n,m) : \text{dist}(w-x, V) \leq |B_{k,i}| \}$$

y usando el Lema 4 del capítulo 5, existe una constante  $c_3$  que depende de  $n$  y  $m$ , y tal que

$$\leq c_3 |B_{k,i}|^{n-m} |w-x|^{m-n}.$$

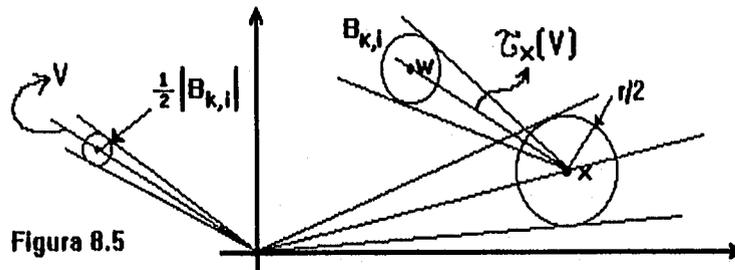


Figura 8.5

Ahora, como toda  $B_{k,i} \subset \mathbb{R}^n \setminus B(x, \frac{r}{2})$  entonces  $\|w-x\| > \frac{r}{2}$  de donde  $\|w-x\|^{m-n} < 2^{n-m} r^{m-n}$  ya que  $n > m$ , por lo que se sigue

$$\leq c_3 |B_{k,i}|^{n-m} 2^{n-m} r^{m-n}. \quad (8.25)$$

Ahora, si  $s \geq n-m$ , entonces  $|B_{k,i} \cap \tau_x(V)|^{s+m-n} \leq |B_{k,i}|^{s+m-n}$ , y considerando el diámetro  $|\emptyset| = 0$  tendremos que

$$\int |B_{k,i} \cap \tau_x(V)|^{s+m-n} d\gamma_{n,m} V$$

$$\leq |B_{k,i}|^{s+m-n} \int d\gamma_{n,m} \{ V \in G(n,m) : B_{k,i} \cap \tau_x(V) \neq \emptyset \}$$

y por (8.25)

$$\leq |B_{k,i}|^{s+m-n} c_3 |B_{k,i}|^{n-m} 2^{n-m} r^{m-n} = c_3 |B_{k,i}|^s 2^{n-m} r^{m-n}. \quad (8.26)$$

Además, el integrando no-negativo  $|B_{k,i} \cap \tau_x(V)|^{s+m-n}$  es continuo con respecto a  $V$  y por lo tanto medible con respecto a  $\gamma_{n,m}$ . Entonces, sumando sobre  $i = 1, 2, \dots$  y empleando el lema de Fatou

$$\int \varliminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} |B_{k,i} \cap \tau_x(V)|^{s+m-n} d\gamma_{n,m} V = \int \varliminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} |B_{k,i} \cap \tau_x(V)|^{s+m-n} d\gamma_{n,m} V$$

$$\leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} \int \sum_{i=1}^{\infty} |B_{k,i} \cap \tau_x(V)|^{s+m-n} d\gamma_{n,m} V$$

y por el teorema de convergencia monótona, (8.26) y (8.23)

$$\begin{aligned} &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \int |B_{k,i} \cap \tau_x(V)|^{s+m-n} d\gamma_{n,m} V \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} c_3 |B_{k,i}|^s 2^{n-m} r^{m-n} \\ &\leq c_3 2^{n-m} r^{m-n} \lim_{k \rightarrow \infty} 2^s \left\{ H^s [E \setminus B(x, r)] + \frac{1}{k} \right\} \\ &= c_3 2^{n-m} r^{m-n} 2^s H^s [E \setminus B(x, r)] \end{aligned} \quad (8.27)$$

Ahora, por (8.22) y de acuerdo a la definición de la medida de Hausdorff

$$H^{s+m-n} \{ [E \setminus B(x, r)] \cap \tau_x(V) \} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} |B_{k,i} \cap \tau_x(V)|^{s+m-n}.$$

Y como  $f^* f(u) \leq f^* g(u)$  si  $f(u) \leq g(u)$  c.d.q. entonces esta última desigualdad junto con (8.27) nos dará

$$\begin{aligned} &\int H^{s+m-n} \{ [E \setminus B(x, r)] \cap \tau_x(V) \} d\gamma_{n,m}(V) \\ &\leq \int \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} |B_{k,i} \cap \tau_x(V)|^{s+m-n} d\gamma_{n,m} V \\ &\leq c_3 2^{n-m} r^{m-n} 2^s H^s [E \setminus B(x, r)] = c(n, m, s) r^{m-n} H^s [E \setminus B(x, r)] \end{aligned}$$

con lo cual queda demostrada la primer afirmación.

Demostremos ahora el caso en que  $s < n - m$ . De acuerdo a (8.22), para  $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} &\gamma_{n,m} \{ V \in G(n, m) : [E \setminus B(x, r)] \cap \tau_x(V) \neq \emptyset \} \\ &\leq \gamma_{n,m} \left\{ V \in G(n, m) : \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{k,i} \cap \tau_x(V) \neq \emptyset \right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_{n,m} \{ V \in G(n, m) : B_{k,i} \cap \tau_x(V) \neq \emptyset \} \end{aligned}$$

y por (8.25)

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{i=1}^{\infty} c_3 |B_{k,i}|^{n-m} 2^{n-m} r^{m-n} = c_3 2^{n-m} r^{m-n} \sum_{i=1}^{\infty} |B_{k,i}|^{n-m} \\ &= c_3 2^{n-m} r^{m-n} \sum_{i=1}^{\infty} |B_{k,i}|^s |B_{k,i}|^{n-m-s} \end{aligned}$$

y usando (8.24) con  $n - m - s > 0$  tendremos

$$\leq c_3 2^{n-m} r^{m-n} \left( \frac{1}{k} \right)^{n-m-s} \sum_{i=1}^{\infty} |B_{k,i}|^s$$

$$\leq c_3 2^{n-m} r^{m-n} \left(\frac{1}{k}\right)^{n-m-s} 2^s \left[ H^s(E \setminus B(x, r)) + \frac{1}{k} \right]$$

de acuerdo a (8.23), y haciendo tender  $k$  a infinito tendremos que si  $s < n - m$  entonces

$$\left(\frac{1}{k}\right)^{n-m-s} \rightarrow 0,$$

de donde  $[E \setminus B(x, r)] \cap \tau_x(V) = \emptyset$  para  $\gamma_{n,m}$ -casi todo  $V \in G(n, m)$ .  $\square$

Veamos ahora un importante caso particular de este teorema. Asimismo aplicaremos dicho teorema para determinar cuando es posible obtener la desigualdad opuesta en el Lema 4.

**Teorema 6** Si  $s < n - m$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $E \subset \mathbb{R}^n$  y  $H^s(E) < \infty$  entonces,

$$[E \setminus \{x\}] \cap \tau_x(V) = \emptyset$$

para  $\gamma_{n,m}$ -casi todo  $V \in G(n, m)$ .

**Teorema 7** Si  $s > n - m$  y  $E$  es un conjunto de Borel en  $\mathbb{R}^n$  tal que  $0 < H^s(E) < \infty$ , entonces

$$\dim_H [E \cap \tau_x(V)] = s + m - n$$

y

$$H^{s+m-n} [E \cap \tau_x(V)] < \infty$$

para  $H^s \times \gamma_{n,m}$ -casi todo  $(x, V) \in E \times G(n, m)$ .

*Demostración:* Sean  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $0 < \delta < r$ . Sea  $\delta = \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k = r$  una partición en subintervalos iguales del intervalo  $[\delta, r]$ . Ahora, aplicando el Teorema 5 para el conjunto  $E \cap B(x, \rho_{i+1})$ , obtendremos, ya que  $E \cap B(x, \rho_{i+1}) \cap B(x, \rho_i) = E \cap B(x, \rho_i)$  y  $M \setminus B(x, \rho_i) = M \setminus [M \cap B(x, \rho_i)]$ , que

$$\int^* H^{s+m-n} \{([E \cap B(x, \rho_{i+1})] \setminus [E \cap B(x, \rho_i)]) \cap \tau_x(V)\} d\gamma_{n,m} V \\ \leq c \rho_i^{m-n} H^s \{([E \cap B(x, \rho_{i+1})] \setminus [E \cap B(x, \rho_i)])\}$$

para  $i = 1, 2, \dots, k - 1$ . Tomando la sumatoria finita para  $i = 1, \dots, k - 1$  en ambos lados de esta desigualdad obtendremos

$$\int^* \sum_{i=1}^{k-1} H^{s+m-n} \{([E \cap B(x, \rho_{i+1})] \setminus [E \cap B(x, \rho_i)]) \cap \tau_x(V)\} d\gamma_{n,m} V \\ \leq c \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i^{m-n} H^s \{([E \cap B(x, \rho_{i+1})] \setminus [E \cap B(x, \rho_i)])\}$$

y como  $\rho_1 = \delta$  y  $\rho_k = r$

$$\int^* H^{s+m-n} \{([E \cap B(x, r)] \setminus [E \cap B(x, \delta)]) \cap \tau_x(V)\} d\gamma_{n,m} V$$

$$\leq c \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i^{m-n} H^s \{ [E \cap B(x, \rho_{i+1})] \setminus [E \cap B(x, \rho_i)] \}.$$

Si hacemos ahora tender  $k \rightarrow \infty$ , el lado derecho de la anterior desigualdad resulta ser una integral de Riemann-Stieltjes, es decir

$$\begin{aligned} \int^* H^{s+m-n} \{ ([E \cap B(x, r)] \setminus [E \cap B(x, \delta)]) \cap \tau_x(V) \} d\gamma_{n,m} V \\ \leq \int_{\rho=\delta}^r \rho^{m-n} dH^s \{ E \cap B(x, \rho) \}. \end{aligned} \quad (8.28)$$

Integrando el lado derecho por partes mediante

$$\begin{aligned} u &= \rho^{m-n} & dv &= dH^s \{ E \cap B(x, \rho) \} \\ du &= (m-n) \rho^{m-n-1} dL^1 \rho & v &= H^s \{ E \cap B(x, \rho) \} \end{aligned}$$

obtendremos

$$\begin{aligned} & \int_{\rho=\delta}^r \rho^{m-n} dH^s \{ E \cap B(x, \rho) \} \\ &= \rho^{m-n} H^s \{ E \cap B(x, \rho) \} \Big|_{\rho=\delta}^r - (m-n) \int_{\rho=\delta}^r \rho^{m-n-1} H^s \{ E \cap B(x, \rho) \} dL^1 \rho \\ &= r^{m-n} H^s \{ E \cap B(x, r) \} - \delta^{m-n} H^s \{ E \cap B(x, \delta) \} + \\ & \quad + (n-m) \int_{\rho=\delta}^r \rho^{n-n-1} H^s \{ E \cap B(x, \rho) \} dL^1 \rho \end{aligned}$$

y como  $\delta > 0$

$$\leq r^{m-n} H^s \{ E \cap B(x, r) \} + (n-m) \int_{\rho=\delta}^r \rho^{m-n-1} H^s \{ E \cap B(x, \rho) \} dL^1 \rho$$

que junto con (8.28)

$$\begin{aligned} & \int^* H^{s+m-n} \{ ([E \cap B(x, r)] \setminus [E \cap B(x, \delta)]) \cap \tau_x(V) \} d\gamma_{n,m} V \\ & \leq cr^{m-n} H^s \{ E \cap B(x, r) \} + c(n-m) \int_{\rho=\delta}^r \rho^{m-n-1} H^s \{ E \cap B(x, \rho) \} dL^1 \rho. \end{aligned}$$

El integrando del lado izquierdo de esta desigualdad es una función no-creciente de  $\delta$ , por lo que al hacer tender  $\delta \rightarrow 0$  en ambos lados de la desigualdad

$$\int^* H^{s+m-n} \{ [E \cap B(x, r)] \cap \tau_x(V) \} d\gamma_{n,m} V$$

$$\leq cr^{m-n} H^s \{E \cap B(x, r)\} + c(n-m) \int_0^r \rho^{m-n-1} H^s \{E \cap B(x, \rho)\} dL^1 \rho. \quad (8.29)$$

Ahora,  $E \cap \tau_x(V)$  puede expresarse como una unión disjunta, de la forma  $E \cap \tau_x(V) = \{(E \setminus B(x, r)) \cap \tau_x(V)\} \cup \{(E \cap B(x, r)) \cap \tau_x(V)\}$ , de donde por aditividad de la medida

$$\begin{aligned} & \int^* H^{s+m-n} [E \cap \tau_x(V)] d\gamma_{n,m} V = \\ & = \int^* H^{s+m-n} \{(E \setminus B(x, r)) \cap \tau_x(V)\} d\gamma_{n,m} V + \\ & \quad + \int^* H^{s+m-n} \{(E \cap B(x, r)) \cap \tau_x(V)\} d\gamma_{n,m} V \end{aligned}$$

aplicando el Lema 5 junto con (8.29) tendremos que

$$\begin{aligned} & \leq c'r^{m-n} H^s [E \setminus B(x, r)] + cr^{m-n} H^s [E \cap B(x, r)] + \\ & \quad + c(n-m) \int_0^r \rho^{m-n-1} H^s [E \cap B(x, \rho)] dL^1 \rho \end{aligned}$$

$$\leq (c' + c) r^{m-n} H^s (E) + c(n-m) \int_0^r \rho^{m-n-1} H^s [E \cap B(x, \rho)] dL^1 \rho$$

para cualesquier  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $r > 0$ , o bien

$$= (c' + c) r^{m-n} H^s (E) + c(n-m) \int_0^r \rho^{s+m-n-1} \frac{H^s \{E \cap B(x, \rho)\}}{\rho^s} dL^1 \rho$$

y por propiedades de densidad, pues  $0 < H^s (E) < \infty$ , tendremos que

$$\rho^{-s} H^s [E \cap B(x, \rho)] \leq 2^s$$

para  $H^s$ -casi toda  $x \in E$ ; y como  $s + m - n - 1 > -1$  de la última expresión tendremos

$$\begin{aligned} & \leq (c' + c) r^{m-n} H^s (E) + c(n-m) 2^s \int_0^r \rho^{s+m-n-1} dL^1 \rho \\ & = (c' + c) r^{m-n} H^s (E) + c(n-m) 2^s \left( \frac{\rho^{s+m-n}}{s+m-n} \right)_{\rho=0}^r \\ & = (c' + c) r^{m-n} H^s (E) + c(n-m) 2^s \left( \frac{r^{s+m-n}}{s+m-n} \right) \end{aligned}$$

y como  $0 < H^s (E) < \infty$  esta última expresión es finita para cualesquier  $r > 0$ , en particular por ejemplo para  $r = 1$ . Así para  $H^s$ -casi toda  $x \in E$

$$\int^* H^{s+m-n} \{E \cap \tau_x(V)\} d\gamma_{n,m} V < \infty$$

por lo que

$$\gamma_{n,m} \{V \in G(n, m) : H^{s+m-n} \{E \cap \tau_x(V)\} = \infty\} = 0$$

para  $H^s$ -casi toda  $x \in E$ . De aquí que para  $H^s \times \gamma_{n,m}$ -casi todo  $(x, V) \in E \times G(n, m)$  tengamos que  $H^{s+m-n} \{E \cap \tau_x(V)\} < \infty$ , de donde para  $H^s \times \gamma_{n,m}$ -casi todo  $(x, V) \in E \times G(n, m)$

$$\dim_H [E \cap \tau_x(V)] \leq s + m - n$$

que junto con el Lema 4 se obtiene la igualdad deseada.  $\square$

Cabe hacer la observación que la validez o falsedad de este teorema permanece abierta para el caso  $s = n - m$ .

# CAPITULO 9

## PRODUCTO CARTESIANO

## 9. PRODUCTO CARTESIANO

Una forma de obtener fractales 'nuevos' a partir de unos ya dados es mediante su producto cartesiano. Usando la definición clásica de dimensión se sabe que para conjuntos  $E$  y  $F$  tales como curvas 'suaves', superficies o variedades  $k$ -dimensionales  $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$ . Sin embargo dicha igualdad deja de ser válida para el caso de la dimensión de Hausdorff. Sin embargo, veremos que en algunos casos particulares podemos obtener dicha igualdad.

La medida de malla o de red, se usa frecuentemente junto a la medida de Hausdorff para obtener algunas propiedades referentes a esta última de una manera más sencilla, ya que como veremos ambas medidas son 'comparables'. En este capítulo la utilizaremos para demostrar que todo conjunto  $E \subset \mathbb{R}^n$  de Borel tal que  $H^s(E) = \infty$  contiene un subconjunto compacto cuya  $s$ -medida de Hausdorff es finita y positiva. Asimismo la utilizaremos para obtener algunos resultados referentes a la medida de Hausdorff del producto cartesiano entre dos conjuntos.

En el capítulo 4 introducimos la medida de malla o de red. Veamos ahora la relación que guarda con la medida de Hausdorff.

**Teorema 1** *Existen constantes  $b_n$  que dependen solamente de  $n$ , tal que para todo  $E \subset \mathbb{R}^n$*

$$H_\delta^s(E) \leq M_\delta^s(E) \leq b_n H_\delta^s(E) \quad (9.1)$$

si  $0 < \delta < 1$ , y además

$$H^s(E) \leq M^s(E) \leq b_n H^s(E). \quad (9.2)$$

*Demostración:* Sea  $0 < \delta < 1$ . Ya que la medida de Hausdorff se toma sobre una clase mayor de cubiertas  $H_\delta^s(E) \leq M_\delta^s(E)$ , que es la primer desigualdad de (9.1). Ahora si  $U$  es cualquier conjunto con  $0 < |U| \leq \delta$ , sea  $k$  el entero positivo tal que

$$2^{-k-1} \leq |U| < 2^{-k} \quad (9.3)$$

y sea  $S$  un cubo binario de lado  $2^{-k}$  que intersekte a  $U$ . Ahora, si consideramos a  $S$  junto con sus cubos binarios vecinos, entonces  $U$  estará contenido en una colección de  $3^n$  cubos binarios de lado  $2^{-k}$  y diámetro  $2^{-k}\sqrt{n}$ . Subdividiendo cada uno de estos cubos en  $2^{2n}$  cubos binarios más pequeños,  $U$  está contenido en  $b_n = 3^n 2^{2n}$  cubos binarios de diámetro

$$2^{-k}\sqrt{n}2^{-n} \leq 2|U|\sqrt{n}2^{-n}$$

por (9.3), y como  $\sqrt{n} \leq 2^{n-1}$  para todo natural  $n$  entonces

$$\leq |U| \leq \delta. \quad (9.4)$$

Ahora, sea  $\{U_i\}$  una  $\delta$ -cubierta de  $E$  con conjuntos arbitrarios. Para cada  $i$  tendremos que  $U_i \subset \bigcup_{j=1}^{b_n} S_{ij}$ , donde  $\{S_{ij}\}_{j=1}^{b_n}$  es una colección de  $b_n$  cubos binarios de diámetro a lo más  $|U_i|$ , es decir, de acuerdo a (9.4)  $|S_{ij}| \leq |U_i| \leq \delta$ . Así,  $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{b_n} S_{ij}$  y además

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{b_n} |S_{ij}|^s \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{b_n} |U_i|^s = b_n \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s,$$

por lo que al tomar el infimum sobre todas las  $\delta$ -cubiertas  $\{U_i\}$  de  $E$

$$M_{\delta}^s(E) \leq \inf \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{b_n} |S_{ij}|^s \leq b_n H_{\delta}^s(E)$$

lo cual demuestra (9.1). Haciendo  $\delta \rightarrow 0$  obtenemos (9.2).  $\square$

Veamos dos lemas que requeriremos posteriormente en este capítulo.

**Lema 2** Sea  $\{E_j\}$  una sucesión decreciente de subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces, para cualesquier  $\delta > 0$

$$2^s H_{\delta}^s \left( \lim_{j \rightarrow \infty} E_j \right) \geq \lim_{j \rightarrow \infty} H_{2\delta}^s(E_j). \quad (9.5)$$

*Demostración:* Tenemos que  $E_1 \supset E_2 \supset \dots$ . Sea  $\{U_i\}$  una  $\delta$ -cubierta arbitraria de  $\lim_{j \rightarrow \infty} E_j$ . Para cada  $i$ , sea  $V_i$  un conjunto abierto conteniendo a  $U_i$  tal que  $|V_i| \leq 2|U_i|$ , el cual existe por ser  $H_{\delta}^s$  regular. Denotemos por  $V$  al conjunto abierto  $\bigcup_i V_i$ . Afirmamos que  $E_j \subset V$  para algún entero positivo  $j$ . Supongamos lo contrario, entonces  $\{E_j \setminus V\}$  es una sucesión decreciente de conjuntos compactos no-vacíos, la cual, por propiedad de compacidad tiene un conjunto límite no-vacío  $(\lim_{j \rightarrow \infty} E_j) \setminus V$ , lo cual contradice que  $V \supset \lim_{j \rightarrow \infty} E_j$ . Así, existe un entero  $j$  tal que  $E_j \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$ , es decir,  $\bigcup_i V_i$  es una  $2\delta$ -cubierta de  $E_j$  por lo que  $H_{2\delta}^s(E_j) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |V_i|^s$ . Así, por todo ésto

$$2^s \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \geq \sum_{i=1}^{\infty} |V_i|^s \geq H_{2\delta}^s(E_j) \geq \lim_{j \rightarrow \infty} H_{2\delta}^s(E_j)$$

la última desigualdad ya que  $\{E_j\}$  es decreciente. El resultado se sigue ya que la  $\delta$ -cubierta  $\{U_i\}$  de  $\lim_{j \rightarrow \infty} E_j$  se tomó arbitrariamente.  $\square$

Por el Teorema 9, capítulo 2, de la continuidad de una medida sabemos que si  $\{E_j\}$  es cualquier sucesión creciente de subconjuntos en  $\mathbb{R}^n$  entonces  $\lim_{j \rightarrow \infty} M^s(E_j) = M^s(\lim_{j \rightarrow \infty} E_j)$ . Sin embargo, éste resultado no es válido para  $M_{\delta}^s$ , ya que ésta medida no es regular (ver Lema 12, capítulo 2), aunque tenemos el siguiente caso particular:

**Lema 3** Sea  $\{E_j\}$  una sucesión creciente de subconjuntos en  $\mathbb{R}^n$  y supongamos que cada  $E_j$  es una unión finita de cubos binarios. Entonces

$$M_{\delta}^s \left( \lim_{j \rightarrow \infty} E_j \right) = \lim_{j \rightarrow \infty} M_{\delta}^s(E_j).$$

*Demostración:* Denotemos  $E = \lim_j E_j = \cup_j E_j$ . Ya que  $M_\delta^s(E_j) \leq M_\delta^s(E)$  para toda  $j$ , es suficiente demostrar que  $M_\delta^s(E) \leq \lim_j M_\delta^s(E_j)$  para el caso en que  $\lim_j M_\delta^s(E_j) < \infty$ . Como  $E_j$  es una unión finita de cubos binarios, el infimum al tomar  $M_\delta^s(E_j)$  se alcanza por alguna colección finita disjunta de cubos binarios, ésto por la propiedad de red que tienen los cubos binarios. Supongamos que para cada  $j$ ,  $S_j$  es dicha  $\delta$ -cubierta finita de  $E_j$ , luego entonces

$$\sum_{C \in S_j} |C|^s = M_\delta^s(E_j). \quad (9.6)$$

Supongamos además, también para cada  $j$ , que no existe otra  $\delta$ -cubierta de  $E_j$  que satisfaga (9.6) y que tenga una menor cantidad de cubos binarios a la de  $S_j$ . ( $\clubsuit$ ) Afirmamos que si  $S \in S_j$  entonces existe  $T \in S_{j+1}$  tal que  $S \subset T$ . En efecto, si  $S \in S_j$ , entonces  $S$  debe contener un punto de  $E_j$ . Este punto también estará en  $E_{j+1}$  y así en algún  $T \in S_{j+1}$ . Por la propiedad de red se tendrá que o  $S \subset T$  o bien  $T \subset S$ . Con la primer contención estaría probada la afirmación, luego supongamos que  $T$  es un subconjunto propio de  $S$ , entonces podremos hacer cualquiera de los dos casos siguientes: (a) reemplazar  $S$  por los cubos de  $S_{j+1}$  que están contenidos en  $S$  para reducir  $\sum_{C \in S_j} |C|^s$  y además tendríamos que  $S \subseteq T$ ; o bien, (b) reemplazar los cubos de  $S_{j+1}$  que están contenidos en  $S$  por el mismo cubo simple  $S$ , y así  $S = T$ , para reducir, ya sea  $\sum_{C \in S_{j+1}} |C|^s$  —en el caso de que existan traslapes en  $S_{j+1}$ —, o bien reducir el número de términos en esta suma —y que tengan las propiedades como en (9.6)—. Esto prueba la afirmación ( $\clubsuit$ ).

Sea  $\{C_1, C_2, \dots\}$  el conjunto de cubos binarios que se obtienen de  $\cup_{j=1}^{\infty} S_j$  al excluir cualquier cubo contenido en algún otro cubo de la colección, de donde dichos conjuntos serán disjuntos dos a dos. Entonces  $E_j \subset \cup_{i=1}^{\infty} C_i$  para toda  $j$ , y como  $E = \cup_j E_j$  entonces  $E \subset \cup_{i=1}^{\infty} C_i$ , y así por definición de  $M_\delta^s$

$$M_\delta^s(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |C_i|^s. \quad (9.7)$$

Pero para cada cubo  $C_i$ ,  $C_i$  pertenece a  $S_j$  para  $j$  suficientemente grande, de acuerdo a ( $\clubsuit$ ). Así, dado  $k$ , podemos encontrar  $j(k)$  tal que los cubos  $C_1, C_2, \dots, C_k$  estén todos en  $S_{j(k)}$ . Usando (9.7) y (9.6) obtendremos que

$$M_\delta^s(E) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} |C_i|^s \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{C \in S_{j(k)}} |C|^s = \lim_{k \rightarrow \infty} M_\delta^s(E_{j(k)}) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} M_\delta^s(E_j)$$

y el lema queda demostrado.  $\square$

## 9.1 Subconjuntos de medida finita

En los teoremas siguientes veremos que existen una gran variedad de  $s$ -conjuntos. De hecho veremos que dado cualquier conjunto de Borel con  $H^s(E) > 0$  pode-

mos encontrar un subconjunto compacto  $F$  de  $E$  tal que  $0 < H^s(F) < \infty$ .

**Teorema 4** Sea  $E$  un subconjunto cerrado de  $\mathbb{R}^n$  con  $H^s(E) = \infty$ .

(i) Sea  $c > 0$ , entonces existe un subconjunto compacto  $F$  de  $E$  tal que  $H^s(F) = c$ .

(ii) Existe un subconjunto compacto  $F$  de  $E$  tal que  $H^s(F) > 0$  y

$$H^s[B(x, r) \cap F] \leq br^s, \quad x \in \mathbb{R}^n, r \leq 1$$

para alguna constante  $b$ .

*Demostración:* (i) Sea  $c > 0$ . Supongamos que  $E$  es cerrado y acotado en  $\mathbb{R}^n$  y  $H^s(E) = \infty$ . Del Teorema 1  $M^s(E) = \infty$  por lo que existe un entero  $m_0$  tal que

$$M_{2^{-m_0}\sqrt{n}}^s(E) \geq 2^s cb_n \quad (9.8)$$

siendo  $b_n$  la constante del Teorema 1.

Definiremos inductivamente una sucesión decreciente  $\{E_k\}_{k=m_0}^\infty$  de subconjuntos cerrados de  $E$ : sea  $E_{m_0} = E$ . Para  $k \geq m_0$ , definiremos  $E_{k+1}$  mediante su intersección con cada cubo binario de diámetro  $2^{-k}\sqrt{n}$ , y por lo tanto de lado  $2^{-k}$ . Sea  $I$  cualesquier cubo binario de diámetro  $2^{-k}\sqrt{n}$ , entonces (ver Figura 9.1): Caso (a): si

$$M_{2^{-(k+1)}\sqrt{n}}^s[E_k \cap I] \leq 2^{-sk} r_n^{s/2} = |I|^s \quad (9.9)$$

definimos  $E_{k+1} \cap I = E_k \cap I$  entonces

$$M_{2^{-(k+1)}\sqrt{n}}^s[E_{k+1} \cap I] = M_{2^{-k}\sqrt{n}}^s[E_k \cap I]$$

ya que al considerar  $M_{2^{-k}\sqrt{n}}^s$  en realidad los únicos cubos binarios de más que estamos considerando para cubrir a  $E_k \cap I$ , y que no se consideran en  $M_{2^{-(k+1)}\sqrt{n}}^s$ , es únicamente  $I$  mismo. De aquí que si  $M_{2^{-(k+1)}\sqrt{n}}^s < |I|^s$  entonces  $M_{2^{-k}\sqrt{n}}^s = M_{2^{-(k+1)}\sqrt{n}}^s$  ya que la única cubierta de más de  $M_{2^{-k}\sqrt{n}}^s$  nos da un valor mayor a cualquiera de los de  $M_{2^{-(k+1)}\sqrt{n}}^s$ . Y si  $M_{2^{-(k+1)}\sqrt{n}}^s = |I|^s$  entonces como la cubierta formada únicamente por  $I$  está en  $M_{2^{-k}\sqrt{n}}^s$  y es igual a  $|I|^s$  volverían a ser iguales. Por esto y (9.9)

$$M_{2^{-(k+1)}\sqrt{n}}^s[E_{k+1} \cap I] = M_{2^{-k}\sqrt{n}}^s[E_k \cap I] \leq 2^{-sk} r_n^{s/2} = |I|^s. \quad (9.10)$$

Caso (b): Si

$$M_{2^{-(k+1)}\sqrt{n}}^s[E_k \cap I] > 2^{-sk} r_n^{s/2} = |I|^s \quad (9.11)$$

entonces definimos  $E_{k+1} \cap I$  que sea un subconjunto compacto de  $E_k \cap I$  tal que

$$M_{2^{-(k+1)}\sqrt{n}}^s[E_{k+1} \cap I] = 2^{-sk} r_n^{s/2}. \quad (9.12)$$

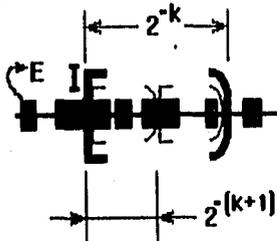


Figura 9.1

Dicho compacto existe ya que  $M_{2^{-(k+1)}\sqrt{n}}^s[E_{k+1} \cap I \cap A]$  donde

$$A = \{(-\infty, \infty) \times \cdots \times (-\infty, \infty) \times (-\infty, u]\} \subset \mathbb{R}^n$$

es continua con respecto a  $u$ . Ahora como  $M_{2^{-(k+1)}\sqrt{n}}^s[E_k \cap I] > |I|^s$  entonces al considerar  $M_{2^{-k}\sqrt{n}}^s$ , la única cubierta mínima no considerada en  $M_{2^{-(k+1)}\sqrt{n}}^s$  es  $\{I\}$  la constituida únicamente por  $I$ . Y como  $\sum_{S \in \{I\}} |S|^s = |I|^s$ , por (9.11) ésta será la cubierta mínima tal que  $M_{2^{-k}\sqrt{n}}^s[E_k \cap I] = |I|^s = 2^{-sk}n^{s/2}$ . Entonces por (9.12)

$$M_{2^{-(k+1)}\sqrt{n}}^s[E_{k+1} \cap I] = M_{2^{-k}\sqrt{n}}^s[E_k \cap I] = 2^{-sk}n^{s/2}. \quad (9.13)$$

Así, para ambos casos (a) y (b) la desigualdad (9.10) es válida. Como  $E$  es acotado podemos tomar la suma sobre todos los cubos binarios  $I$  de diámetro  $2^{-k}\sqrt{n}$  y ya que cualquier cubo binario que se utilice en alguna de las cubiertas para calcular  $M_{2^{-k}\sqrt{n}}^s$  y  $M_{2^{-(k+1)}\sqrt{n}}^s$  debe estar en uno de los cubos binarios  $I$  de diámetro  $2^{-k}\sqrt{n}$ , tendremos que (9.13) implica

$$M_{2^{-(k+1)}\sqrt{n}}^s[E_{k+1}] = M_{2^{-k}\sqrt{n}}^s[E_k] \quad \text{para } k \geq m_0.$$

Iterando obtendremos

$$M_{2^{-k}\sqrt{n}}^s[E_k] = M_{2^{-m_0}\sqrt{n}}^s[E_{m_0}] \quad \text{para } k \geq m_0. \quad (9.14)$$

Sea  $I$  un cubo binario de diámetro  $2^{-k}\sqrt{n}$ . Si  $m_0 \leq k < r$  entonces por la construcción de  $\{E_k\}$ ,  $E_r \subset E_{k+1}$ , por lo que usando la monotonía de  $M_\delta^s$  y aplicando (9.10)

$$M_{2^{-(k+1)}\sqrt{n}}^s[E_r \cap I] \leq M_{2^{-(k+1)}\sqrt{n}}^s[E_{k+1} \cap I] \leq 2^{-sk}n^{s/2}. \quad (9.15)$$

Hagamos el análisis siguiente: al calcular  $M_{2^{-k}\sqrt{n}}^s[E_r]$  se utilizan cubiertas constituidas por cubos binarios de diámetro a lo más  $2^{-k}\sqrt{n}$ . En particular, cuando se utiliza un cubo binario  $I$  de diámetro exactamente  $2^{-k}\sqrt{n}$ , ya que  $M_\delta^s$  se evalúa sobre cubos binarios, tendremos que  $M_{2^{-k}\sqrt{n}}^s[E_r \cap I] \leq M_{2^{-k}\sqrt{n}}^s[I] = |I|^s$ . Pero por (9.15)  $M_{2^{-(k+1)}\sqrt{n}}^s[E_r \cap I] \leq |I|^s$ . Ahora la única cubierta de  $E_r \cap I$  con cubos binarios de diámetro  $2^{-k}\sqrt{n}$ , es la constituida únicamente por el cubo binario  $I$  precisamente. Entonces de estas dos últimas desigualdades vemos que al evaluar  $M_{2^{-k}\sqrt{n}}^s[E_r \cap I]$  no es necesario considerar la cubierta  $\{I\}$ . Por lo tanto al calcular  $M_{2^{-k}\sqrt{n}}^s[E_r]$  cualquier cubo binario  $I$  de diámetro  $2^{-k}\sqrt{n}$  puede reemplazarse por cubos binarios de diámetros de a lo más  $2^{-(k+1)}\sqrt{n}$  sin incrementar el valor del infimum. Por lo tanto

$$M_{2^{-(k+1)}\sqrt{n}}^s[E_r] = M_{2^{-k}\sqrt{n}}^s[E_r] \quad \text{para } m_0 \leq k < r.$$

Iterando esta expresión para  $k = m_0, \dots, r-1$  se tendrá que  $M_{2^{-m_0}\sqrt{n}}^s[E_r] = \dots = M_{2^{-r}\sqrt{n}}^s[E_r]$ , y usando (9.14)

$$M_{2^{-m_0}\sqrt{n}}^s[E_r] = M_{2^{-m_0}\sqrt{n}}^s[E_{m_0}] \quad \text{para } r \geq m_0. \quad (9.16)$$

Además por construcción  $\{E_k\}_{k=m_0}^\infty$  es una sucesión decreciente de subconjuntos no-vacíos, pues se construyeron a partir de  $E$  que satisface (9.8). Asimismo de los casos (a) y (b) analizados anteriormente los  $E_k$  resultan ser cerrados.

Sea  $F$  el compacto  $F = \bigcap_{k=m_0}^\infty E_k$ . Entonces del Teorema 1 y la expresión (9.14)

$$H^s(F) \leq M^s(F) = \lim_{k \rightarrow \infty} M_{2^{-k}\sqrt{n}}^s(F)$$

ya que  $M^s = \lim_{\delta \rightarrow 0} M_\delta^s$ , y como  $E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset F$

$$\leq \lim_{k \rightarrow \infty} M_{2^{-k}\sqrt{n}}^s[E_k] = M_{2^{-m_0}\sqrt{n}}^s[E_{m_0}] < \infty. \quad (9.17)$$

Por otro lado, por definición de  $H^s$

$$2^s H^s(F) \geq 2^s H_{2^{-(m_0+1)}\sqrt{n}}^s(F) = 2^s H_{2^{-(m_0+1)}\sqrt{n}}^s\left(\lim_{k \rightarrow \infty} E_k\right)$$

y usando el Lema 2, así como el Teorema 1

$$\geq \lim_{k \rightarrow \infty} H_{2^{-m_0}\sqrt{n}}^s(E_k) \geq b_n^{-1} \lim_{k \rightarrow \infty} M_{2^{-m_0}\sqrt{n}}^s[E_k]$$

y por (9.16)

$$= b_n^{-1} \lim_{k \rightarrow \infty} M_{2^{-m_0}\sqrt{n}}^s[E_{m_0}] = b_n^{-1} M_{2^{-m_0}\sqrt{n}}^s[E_{m_0}] \geq 2^s c$$

esta última desigualdad por (9.8) y ya que  $E_{m_0} = E$ . Este resultado junto con (9.17) nos da  $c \leq H^s(F) < \infty$ . Si  $H^s(F) > c$  entonces un conjunto de la

forma  $F \cap \left\{ \underbrace{(-\infty, \infty) \times \dots \times (-\infty, \infty)}_{(n-1)\text{-veces}} \times [u, \infty) \right\}$  tendrá medida exactamente  $c$ , usando la continuidad por arriba y por abajo de  $H^s$ .

(ii) Con una pequeña variante al inciso (i) demostraremos (ii). Sea  $J$  un cubo binario cerrado de diámetro  $2^{-r}\sqrt{n}$  donde  $r \geq m_0$ , y  $m_0$  se define como en el inciso (i), (ver Figura 9.2). Sumemos nuevamente (9.10) sobre todos los subcubos binarios  $I$  de diámetro  $2^{-k}\sqrt{n}$  y que descansan en  $J$  ( $k \geq r$ ), y continuamos como en el inciso anterior para obtener, en lugar de (9.14),

$$M_{2^{-k}\sqrt{n}}^s(E_k \cap J) = M_{2^{-m_0}\sqrt{n}}^s(E_{m_0} \cap J), \quad k \geq r \geq m_0$$

y así obtener, en lugar de (9.17)

$$H^s(F \cap J) \leq M_{2^{-r}\sqrt{n}}^s(E_r \cap J) \leq M_{2^{-r}\sqrt{n}}^s(J) \leq |J|^s$$

y donde  $F = \bigcap_{k=m_0}^\infty E_k$ . Ahora, cualquier cubo cerrado  $J_0$  puede ser cubierto por, a lo más,  $n+1$  cubos binarios consecutivos de diámetro a lo más  $|J_0|$ . Así, para cualesquier bola cerrada de radio  $r < 1$  se tendrá que  $B(x, r) \subset \bigcup_{i=1}^{q_0} J_i$ , donde  $|J_i| \leq r \leq 1$ , por lo que

$$H^s[B(x, r) \cap F] \leq H^s\left[\bigcup_{i=1}^{q_0} J_i \cap F\right] \leq \sum_{i=1}^{q_0} H^s(F \cap J_i) \leq \sum_{i=1}^{q_0} |J_i|^s \leq br^s. \quad \square$$

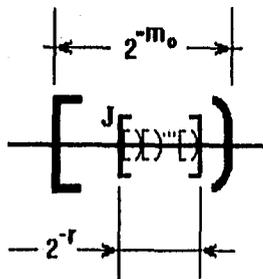


Figura 9.2

Diremos que un conjunto es  $\sigma$ -finito si se puede expresar como la unión numerable de conjuntos de  $H^s$ -medida finita. Observemos que un conjunto que no sea  $\sigma$ -finito tiene  $H^s$ -medida infinita.

**Lema 5:**

Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto de Suslin. Si  $E$  no es  $\sigma$ -finito entonces existe un subconjunto cerrado  $F \subset E$  tal que  $H^s(F) = \infty$ .

*Demostración:* Podemos suponer que  $E$  es acotado, y por hipótesis no es  $\sigma$ -finito. Además es suficiente probar el teorema para la medida  $M^s$ . Definamos un sistema  $\{A_{i_1 i_2 \dots i_j}\}$  de cubos binarios cerrados tal que

$$A_{i_1 \dots i_j i_{j+1}} \subset A_{i_1 \dots i_j} \quad \text{para } j = 1, 2, \dots \quad (9.18)$$

y tal que

$$E = \bigcup_{i_1, i_2, \dots} [A_{i_1} \cap A_{i_1 i_2} \cap \dots \cap A_{i_1 i_2 \dots i_j} \cap \dots] \quad (9.19)$$

donde la unión se extiende sobre todas las sucesiones infinitas de enteros positivos  $i_1, i_2, \dots, i_j, \dots$ . Dichos conjuntos existen ya que  $E$  es Suslin.

Sea  $m_1$  un entero positivo tal que  $M_{2^{-m_1}}^s(E) > 1$ . Dicho entero existe ya que  $M^s(E) = \infty$ . Definimos

$$N_r = \bigcup_{i_1, i_2, \dots} [A_{i_1} \cap A_{i_1 i_2} \cap \dots] \quad (9.20)$$

extendiendo la unión sobre todas las sucesiones  $\{i_1, i_2, \dots\}$  de enteros tales que  $1 \leq i_1 \leq r$ . Entonces  $\{N_r\}_{r=1}^\infty$  es una sucesión creciente de conjuntos y  $E = \bigcup_{r=1}^\infty N_r$ . Escojamos un entero  $r_1$  suficientemente grande de manera que:

- (i)  $M_{2^{-m_1}}^s(N_{r_1}) > 1$ , dicho entero  $r_1$  existe por el Lema 3; y además tal que
- (ii)  $N_{r_1}$  no sea  $\sigma$ -finito.

Entonces por (ii)  $M^s(N_{r_1}) = \lim_{m_1 \rightarrow \infty} M_{2^{-m_1}}^s(N_{r_1}) = \infty$ . Luego podemos encontrar un entero  $m_2 \geq m_1$  tal que  $M_{2^{-m_2}}^s(N_{r_1}) > 2$ . Denotemos por  $N_{r_1 r}$  la unión (9.19) extendida sobre todas las sucesiones  $i_1, i_2, \dots$  para la cual  $1 \leq i_1 \leq r_1, 1 \leq i_2 \leq r$ . Entonces  $\{N_{r_1 r}\}_{r=1}^\infty$  es una sucesión creciente de conjuntos y  $N_{r_1} = \bigcup_{r=1}^\infty N_{r_1 r}$ . Elijamos un entero  $r_2$  suficientemente grande de manera que:

- (i)  $M_{2^{-m_1}}^s(N_{r_1 r_2}) > 1$
- (ii)  $M_{2^{-m_2}}^s(N_{r_1 r_2}) > 2$ , dicha  $r_2$  existe nuevamente por el Lema 3; y además
- (iii)  $N_{r_1 r_2}$  no es  $\sigma$ -finito.

Continuando en esta forma obtendremos dos sucesiones de enteros  $m_1 \leq m_2 \leq \dots$  y  $r_1, r_2, \dots$  tales que para cada  $j$  tengamos

$$M_{2^{-m_j}}^s(N_{r_1, \dots, r_j}) > \nu \quad (9.21)$$

para  $\nu = 1, 2, \dots, j$ , y donde además  $N_{r_1, \dots, r_j}$  no es  $\sigma$ -finito.

Definamos para  $j = 1, 2, \dots$

$$F_j = \bigcup_{1 \leq i_\nu \leq r_\nu} [A_{i_1} \cap A_{i_1 i_2} \cap \dots \cap A_{i_1 i_2 \dots i_j}]$$

y

$$F = \bigcap_j F_j.$$

Observemos que  $A_{i_1} \cap A_{i_1 i_2} \cap \dots \cap A_{i_1 i_2 \dots i_j} = A_{i_1 i_2 \dots i_j}$  por (9.18). Así, por ejemplo

$$F_1 = \bigcup_{1 \leq i_\nu \leq r_\nu} A_{i_1} = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{r_1},$$

$$F_2 = \bigcup_{1 \leq i_\nu \leq r_\nu} A_{i_1} \cap A_{i_1 i_2} = \bigcup_{1 \leq i_\nu \leq r_\nu} A_{i_1 i_2}$$

$$= \overbrace{A_{11} \cup \dots \cup A_{1r_2}}^{CA_1} \cup \overbrace{A_{21} \cup \dots \cup A_{2r_2}}^{CA_2} \cup \dots \cup \overbrace{A_{r_1 1} \cup \dots \cup A_{r_1 r_2}}^{CA_{r_1}}$$

de aquí que  $F_1 \supset F_2$  y así sucesivamente, es decir  $\{F_j\}$  es una sucesión decreciente. Además cada  $F_j$  es cerrado, ya que son la unión finita de cubos binarios cerrados, de aquí que además sean acotados. También  $N_{r_1, r_2, \dots, r_j} \subset F_j$  y por lo tanto de (9.21)

$$M_{2^{-m_j}}^s(F_j) > \nu$$

para toda  $\nu$  y  $j$ . De esta desigualdad, y aplicando el Lema 2 a  $\{F_j\}$ , que es una sucesión decreciente de compactos tendremos

$$H_{2^{-m_{j-1}}}^s(F) \geq 2^{-s} \lim_{j \rightarrow \infty} H_{2^{-m_j}}^s(F_j) \geq 2^{-s} b_n^{-1} \lim_{j \rightarrow \infty} M_{2^{-m_j}}^s(F_j)$$

$$> 2^{-s} b_n^{-1} \lim_{j \rightarrow \infty} (\nu) = \frac{\nu}{2^s b_n}$$

para toda  $\nu$ . De aquí que  $H^s(F) = \infty$ .

Además  $F \subset E$ . En efecto, supongamos lo contrario, entonces existe  $x \in F$  tal que  $x \notin E$ . Pero si  $x \notin E$  entonces existe  $i_k$  tal que  $x \in A_{i_1, \dots, i_k}$  y  $x \notin A_{i_1, \dots, i_k, i_{k+1}}$ . (Véase la igualdad (9.19)) Tomando en cuenta esto, y por la forma en que se definieron los  $F_j$  existirá un entero  $r_k$  tal que,  $i_k = r_k$ , es decir  $x \in A_{i_1, \dots, r_k}$  pero  $x \notin A_{i_1, \dots, r_k, r_{k+1}}$ , lo cual implica que  $x \notin F_{k+1}$  y esto contradice que  $x \in F$ . Por último, como  $F$  es cerrado el teorema queda demostrado.  $\square$

**Corolario 6** Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto de Suslin tal que  $H^s(E) = \infty$ . Entonces existe un subconjunto cerrado de  $E$  de medida finita arbitrariamente grande.

*Demostración:* Si  $E$  es  $\sigma$ -finito entonces  $E = \cup_i G_i$ , donde  $H^s(G_i) < \infty \forall i$ . Y como  $H^s(E) = \infty$ , entonces dado cualesquier natural  $\nu$  existe un natural  $k_\nu$  tal que  $\nu < H^s(\cup_{i=1}^{k_\nu} G_i) \leq \sum_{i=1}^{k_\nu} H^s(G_i) < \infty$ . Y como  $H^s$  es regular existe (ver capítulo 2) un conjunto cerrado  $F_\nu \subset \cup_{i=1}^{k_\nu} G_i$  y tal que  $H^s(\cup_{i=1}^{k_\nu} G_i) < H^s(F_\nu) + \epsilon$ , que junto con la desigualdad anterior implica  $H^s(F_\nu) \geq \nu$ , y se demuestra el corolario. Por otro lado, si  $E$  no es  $\sigma$ -finito entonces por el lema anterior existe un subconjunto cerrado de  $E$  con  $H^s$ -medida infinita, y por el Teorema 4 quedaría demostrado el Corolario.  $\square$

Combinando este Corolario con el Teorema 4 obtendremos el siguiente resultado importante.

**Teorema 7** Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto de Suslin tal que  $H^s(E) = \infty$ . Entonces dado cualesquier constante  $c > 0$  existe un subconjunto compacto  $F$  de  $E$  tal que  $H^s(F) = c$ .

## 9.2 Producto Cartesiano de conjuntos

Necesitaremos primeramente el siguiente lema.

**Lema 8** Sean  $A \subset \mathbb{R}^n$  arbitrario,  $\{I_i\}$  una  $\delta$ -cubierta numerable de cubos binarios de  $A$ , y  $\{a_i\}$  una sucesión de números positivos. Supongamos que  $c$  es una constante tal que

$$\sum_{\{i: x \in I_i\}} a_i > c \quad (9.22)$$

para toda  $x \in A$ . Entonces

$$\sum_i a_i |I_i|^s \geq c M_\delta^s(A). \quad (9.23)$$

*Demostración:* Supongamos primeramente que las colecciones  $\{I_i\}$  y  $\{a_i\}$  son finitas. Por la densidad de los racionales podemos encontrar para cada  $i$ , un racional  $0 < a'_i \leq a_i$ , tal que  $\sum_{\{i: x \in I_i\}} a'_i > c$  para toda  $x \in A$ . Después podemos multiplicar por un factor adecuado, pues los  $a_i$  son finitos, de manera que podamos suponer que los  $a'_i$  sean enteros. Por último tomando  $a'_i$ -copias del cubo binario  $I_i$  para cada  $i$ , podremos así suponer que  $a_i = 1$  para toda  $i$ .

Con base a dichas suposiciones (9.22) nos dice que cada  $x$  en  $A$  está en al menos  $[c]$  de los cubos binarios, donde  $[c]$  es el mínimo entero mayor estrictamente que  $c$ . Sea  $A \subset \cup_i I_i$ , donde  $\{I_i\}$  es la cubierta que tomamos inicialmente. Entonces como  $x$  en  $A$  está en al menos  $[c]$  de los cubos de la familia  $\{I\}$ , existen al menos  $[c]$  cubiertas de cubos binarios de  $A$ , digamos  $\{I_i\}_{i \in S_1}, \dots, \{I_i\}_{i \in S_{[c]}}$ . Además cada una de dichas cubiertas puede escogerse

disjunta por la propiedad de red de los cubos binarios. Como además  $|I_i| \leq \delta$   $\forall i$  entonces

$$M_\delta^s(A) \leq \sum_{i \in S_j} |I_i|^s, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, [c]$$

y tomando la suma sobre todas las  $j$ , obtendremos

$$[c] M_\delta^s(A) \leq \sum_{i \in \cup_j S_j} |I_i|^s \leq \sum_i |I_i|^s$$

y como  $c < [c]$ , (9.22) se sigue para el caso finito considerado. Supongamos ahora que  $\{I_i\}_{i=1}^\infty$  es una  $\delta$ -cubierta infinita numerable de cubos binarios de  $A$ . Definimos el conjunto

$$A_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{\{i \leq k: x \in I_i\}} a_i > c \right\}$$

para cada  $k = 1, 2, \dots$ . Entonces del caso finito considerado

$$\sum_{i=1}^k a_i |I_i|^s \geq c M_\delta^s(A_k).$$

Pero cada  $A_k$  es una unión finita de cubos binarios (ver Figura 9.3) y la sucesión  $\{A_k\}$  es no-decreciente con  $A \subset \cup_k A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k$ . Entonces aplicando el Lema 3 a la desigualdad anterior cuando  $k \rightarrow \infty$

$$\sum_{i=1}^\infty a_i |I_i|^s \geq c \lim_{k \rightarrow \infty} M_\delta^s(A_k) = c M_\delta^s \left( \lim_{k \rightarrow \infty} A_k \right) \geq c M_\delta^s(A). \quad \square$$

Si  $E \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$  y  $\vec{w} \in \mathbb{R}^m$ , entonces llamaremos al conjunto  $E_{\vec{w}} = \{ \vec{z} \in \mathbb{R}^{n-m} : (\vec{w}, \vec{z}) \in E \}$  una sección de  $E$ .

**Teorema 9** Sean  $0 < m < n$ ,  $E \subset \mathbb{R}^n$  y  $A \subset \mathbb{R}^m$ . Supongamos que existe una constante  $c$  tal que si  $(\xi_1, \dots, \xi_m, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ , donde  $\vec{w} = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in A$ , entonces

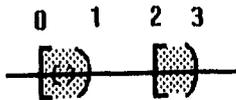
$$H^t(E_{\vec{w}}) > c. \quad (9.24)$$

Entonces  $H^{s+t}(E) \geq c H^s(A)$ .

Observemos que las medidas  $H^{s+t}$  y  $H^s$  se encuentran en espacios diferentes.

*Demostración:* Sea  $V$  el subespacio  $m$ -dimensional de  $\mathbb{R}^n$  dado como  $V = \{(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) : x_i \in \mathbb{R}\}$ . Por el Teorema 1 es suficiente probar el resultado para  $M$  en lugar de  $H$ . Dada  $\delta > 0$  sea  $\{S_i\}_{i=1}^\infty$  una  $\sqrt{n}\delta$ -cubierta de cubos binarios en  $\mathbb{R}^n$  de  $E$ . Para cada  $\vec{w} \in A$  tendremos  $E_{\vec{w}} \subset \cup_i [S_i]_{\vec{w}}$ , de donde por definición de  $M_\delta^t$

$$M_\delta^t(E_{\vec{w}}) \leq \sum_{i=1}^\infty |[S_i]_{\vec{w}}|^t. \quad (9.25)$$



Sea  $a_i > c$ ,  $m = 1$

Si  $I_1 = [0, 1]$

$I_2 = [1/4, 1/2]$

$I_3 = [2, 3]$

entonces

$A_1 = A_2 = [0, 1]$

$A_3 = [0, 1] \cup [2, 3]$

Figura 9.3

Por otro lado si  $Proj(S_i)_{n-m}$  denota la proyección ortogonal de  $S_i$  sobre los ejes  $x_{m+1}, \dots, x_n$ , entonces  $|Proj(S_i)_{n-m}| \leq |S_i|$ . De aquí y tomando  $t > 0$  que satisfaga (9.24) y ya que  $|Proj(S_i)_{n-m}| = |[S_i]_{\vec{w}}|$

$$|[S_i]_{\vec{w}}|^t \leq |S_i|^t. \quad (9.26)$$

Ahora si  $A_\delta = \{\vec{w} \in A : M_\delta^t(E_{\vec{w}}) > c\}$  entonces para  $\vec{w} \in A_\delta$  y con (9.24), (9.25) y (9.26)

$$c < M_\delta^t(E_{\vec{w}}) \leq \sum_{\{i: \vec{w} \in Proj_V(S_i)\}} |S_i|^t$$

donde  $Proj_V(S_i)$  es el cubo binario de diámetro a lo más  $\sqrt{m}\delta$  que resulta al proyectar  $S_i$  sobre el subespacio  $m$ -dimensional  $V$ . Así tomando  $I_i = Proj_V(S_i)$  y  $a_i = |S_i|^t$  en el Lema 8 anterior

$$\begin{aligned} cM_\delta^s(A_\delta) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |S_i|^t |Proj_V(S_i)|^s \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |S_i|^t |S_i|^s = \sum_{i=1}^{\infty} |S_i|^{s+t} \end{aligned}$$

y como ésto es válido para cualquier  $\sqrt{n}\delta$ -cubierta de  $E$  mediante cubos binarios  $\{S_i\}$ , entonces

$$cM_\delta^s(A_\delta) \leq M_{\sqrt{n}\delta}^{s+t}(E) \leq M^{s+t}(E).$$

Ahora, de acuerdo a como se definió  $A_\delta$ , este conjunto se incrementa hacia  $A$  cuando  $\delta$  decrece a cero, por lo tanto si tomamos  $0 < \delta \leq \rho$ , tendremos  $A_\rho \subset A_\delta$ , por lo que

$$M_\delta^s(A_\rho) \leq M_\delta^s(A_\delta) \leq c^{-1} M^{s+t}(E).$$

Como  $\delta > 0$  es arbitrario

$$M^s(A_\rho) \leq c^{-1} M^{s+t}(E)$$

y por la continuidad de la medida  $M^s$

$$M^s(A) \leq c^{-1} M^{s+t}(E). \quad \square$$

Ahora consideremos a  $E$  como el producto cartesiano  $A \times B$ . Se considera en dado caso que  $0 \cdot \infty = 0$ .

**Corolario 10** Sean  $A \subset \mathbb{R}^n$  y  $B \subset \mathbb{R}^m$ , entonces

$$H^{s+t}(A \times B) \geq H^s(A) H^t(B)$$

donde  $A \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$ .

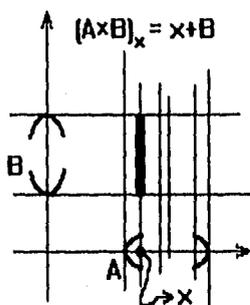


Figura 9.4

*Demostración:* Si  $H^s(A)$  o  $H^t(B)$  son iguales a cero no hay nada que hacer. Supongamos que  $0 < H^s(A) < \infty$  y  $0 < H^t(B) < \infty$ . Luego, sea  $\epsilon > 0$  tal que  $0 < \epsilon < H^t(B)$ . Ahora si  $\bar{w} \in A$  entonces  $H^t[(A \times B)_{\bar{w}}] = H^t(B) > \epsilon$ , donde  $\epsilon = H^t(B) - \epsilon$  (ver Figura 9.4). Luego por el teorema anterior  $H^{s+t}[A \times B] \geq (H^t(B) - \epsilon) H^s(A)$  de donde se sigue el resultado ya que  $\epsilon$  tal que  $0 < \epsilon < H^t(B)$  es arbitrario. Si  $H^s(A) = H^t(B) = \infty$  entonces por el Teorema 7 existen  $s$ -conjuntos compactos tales que  $A_0 \subset A$  y  $B_0 \subset B$ . Por el caso que acabamos de demostrar  $0 < H^s(A_0) H^t(B_0) \leq H^{s+t}(A_0 \times B_0) \leq H^{s+t}(A \times B)$ . Como las medidas de  $A_0$  y  $B_0$  pueden escogerse tan grandes como queramos entonces  $H^{s+t}(A \times B) = \infty$ .  $\square$

Dicho corolario en términos de la dimensión de Hausdorff nos dá el siguiente resultado

**Teorema 11** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  y  $B \subset \mathbb{R}^m$ , entonces

$$\dim_H(A \times B) \geq \dim_H(A) + \dim_H(B).$$

*Demostración:* Sean  $s$  y  $t$  números tales que  $s < \dim_H(A)$  y  $t < \dim_H(B)$ , entonces  $H^s(A) = H^t(B) = \infty$ . Luego por el Teorema 7 existen  $s$ -conjuntos compactos tales que  $A_0 \subset A$  y  $B_0 \subset B$ . Y con el corolario anterior tendremos  $0 < H^s(A_0) H^t(B_0) \leq H^{s+t}(A_0 \times B_0) \leq H^{s+t}(A \times B)$ , lo cual implica  $\dim_H(A \times B) \geq s + t$ . Tomando el supremum sobre la forma en que se tomaron  $s$  y  $t$  se obtiene el resultado deseado.  $\square$

La desigualdad contraria de este teorema no siempre se da, sin embargo se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 12** Para cualesquier conjuntos  $A \subset \mathbb{R}^n$  y  $B \subset \mathbb{R}^m$

$$\dim_H(A \times B) \leq \dim_H(A) + \overline{\dim}_B(B).$$

*Demostración:* Sean  $s > \dim_H(A)$  y  $t > \overline{\dim}_B(B)$ . Luego existe  $\delta_0 > 0$  tal que  $B$  puede ser cubierto por  $N_{\delta/\sqrt{n}}(B) \leq \delta^{-t}$  cubos cerrados de red de lado  $\delta$  para todo  $\delta \leq \delta_0$ . Sea  $\{U_i\}$  cualesquier  $\delta/\sqrt{n}$ -cubierta de  $A$  mediante cubos cerrados de red, y tal que  $\sum_i |U_i|^s < 1$ . Para cada  $i$ , sea  $\{W_{i,j}\}_j$  una cubierta de  $B$  mediante  $N_{|U_i|/\sqrt{n}}(B)$  cubos de red de lado  $|U_i|$ . Entonces  $U_i \times B$  está cubierto por  $N_{|U_i|/\sqrt{n}}(B)$  cubos cerrados de red  $(n+m)$ -dimensionales  $\{U_i \times W_{i,j}\}$  de lado  $|U_i|$ . Así  $A \times B \subset \cup_i \cup_j (U_i \times W_{i,j})$ , de donde

$$H_{\delta/\sqrt{n}}^{s+t}(A \times B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{N_{|U_i|/\sqrt{n}}(B)} |U_i \times W_{i,j}|^{s+t} \leq \sum_{i=1}^{\infty} N_{|U_i|/\sqrt{n}}(B) (\sqrt{n} |U_i|)^{s+t}$$

y por la forma de las cubiertas de  $A$  y  $B$ , tendremos que

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \delta^{-t} n^{(s+t)/2} |U_i|^s |U_i|^t \leq n^{(s+t)/2} \sum_{i=1}^{\infty} \delta^{-t} \delta^t |U_i|^s < n^{(s+t)/2}.$$

Y como  $\delta > 0$  es arbitrario  $H^{s+t}(A \times B) < \infty$ , por lo que  $\dim_H(A \times B) \leq s + t$  siempre que  $\dim_H(A) < s$  y  $\overline{\dim}_B(B) < t$ , de donde  $\dim_H(A \times B) \leq \dim_H(A) + \overline{\dim}_B(B)$ .  $\square$

Conjuntando los dos últimos resultados tendremos el siguiente resultado importante

**Teorema 13** Sean  $A \subset \mathbb{R}^n$  y  $B \subset \mathbb{R}^m$  arbitrarios. Si  $\dim_H(B) = \overline{\dim}_B(B)$  entonces

$$\dim_H(A \times B) = \dim_H(A) + \dim_H(B).$$

En particular, veremos que en todos los fractales generados por funciones de similitud la dimensión de Hausdorff iguala a la Box-counting, por lo que podremos aplicar este teorema para el cálculo de la dimensión de Hausdorff entre el producto cartesiano de un conjunto auto-similar y cualesquier otro conjunto.

# CAPITULO 10

## CONJUNTOS AUTO-SIMILARES

## 10. CONJUNTOS AUTO-SIMILARES

En este capítulo estudiaremos aquellos conjuntos fractales los cuales están contruidos de partes las cuales son similares al conjunto en su totalidad. El conjunto  $C$  ternario de Cantor es uno de los fractales más simples que ilustran este comportamiento. Así  $C \cap [0, 1/3]$  y  $C \cap [2/3, 1]$  son similares a  $C$  pero contraídos por un factor de  $1/3$ .  $C \cap [0, 1/9]$ ,  $C \cap [2/9, 1/3]$ ,  $C \cap [2/3, 7/9]$  y  $C \cap [8/9, 1]$ , son similares a  $C$  pero contraídos por un factor de  $1/9$ , etc.. Veremos que para este tipo de conjuntos la dimensión de Hausdorff, así como la Box-counting, pueden determinarse en una forma bastante sencilla. De hecho las dimensiones dependerán básicamente de los factores de contracción.

Iniciemos con algunas definiciones de dichos conceptos. En particular puede tomarse  $D = \mathbb{R}^n$  en todas las definiciones siguientes.

**Definición 1** Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un subconjunto no vacío y cerrado. Un mapeo  $S : D \rightarrow D$  es llamado una **contracción en  $D$**  si existe una constante  $c$ , con  $0 < c < 1$ , tal que  $\|S(x) - S(y)\| \leq c\|x - y\|$  para todo  $x, y$  en  $D$ . Llamaremos **razón o constante de contracción de  $S$**  a la constante  $c$ .

**Definición 2** Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un subconjunto no vacío y cerrado. Un mapeo  $S : D \rightarrow D$  se llamará **similaridad en  $D$**  si existe una constante  $c$ , con  $0 < c < 1$ , tal que  $\|S(x) - S(y)\| = c\|x - y\|$  para todo  $x, y$  en  $D$ . Llamaremos **razón o constante de similaridad de  $S$**  a la constante  $c$ .

De estas definiciones se sigue inmediatamente que toda función de contracción o de similaridad es continua en su dominio.

**Definición 3** Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un subconjunto no vacío y cerrado. Sean  $S_1, \dots, S_m$  contracciones en  $D$ . Llamaremos a un subconjunto  $F$  de  $D$  **invariante bajo las transformaciones  $S_i$**  si  $F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F)$ .

**Definición 4** Sean  $S_1, \dots, S_m$  similaridades en  $D$ . Llamaremos a un subconjunto  $F$  de  $D$  **auto-similar** si  $F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F)$  y si además existe  $s > 0$  tal que  $H^s(F) > 0$ , pero  $H^s\{S_i(F) \cap S_j(F)\} = 0$  para  $i \neq j$ .

Es decir, un conjunto auto-similar es la unión de un número de pequeñas copias similares al original. La condición sobre la medida de la intersección nos permitirá asegurar que los traslapes no son suficientes para que se pierda la similaridad. Esto también queda expresado en la siguiente definición

**Definición 5** Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un subconjunto no vacío y cerrado. Diremos que las transformaciones  $S_1, \dots, S_m$  de  $D$  en  $D$  satisfacen la **condición del conjunto abierto** si existe un conjunto abierto y acotado no vacío  $V \subset D$ , tal que  $\bigcup_{i=1}^m S_i(V) \subset V$ , con dicha unión disjunta.

## 10.1 Métrica de Hausdorff

Definiremos ahora una métrica, llamada de Hausdorff, que nos permitirá calcular la proximidad entre dos conjuntos compactos  $n$ -dimensionales.

Sea  $\mathcal{K}$  la colección de todos los conjuntos no vacíos y compactos de  $D$ , donde  $D \subset \mathbb{R}^n$  es no vacío y cerrado.

**Definición 6** Sea  $A \in \mathcal{K}$ . El cuerpo  $\epsilon$ -paralelo de  $A$ , denotado  $[A]_\epsilon$ , es el conjunto cerrado de puntos dentro de una distancia  $\epsilon$ , es decir

$$[A]_\epsilon = \{x \in D : \|x - z\| \leq \epsilon \text{ para algún } z \in A\}.$$

Recordemos que en un espacio normado  $X$  se define la distancia de un punto  $x \in X$  a un conjunto  $E \subset X$  como  $\inf \{\|x - w\| : w \in E\}$ .

**Teorema 7** El conjunto  $\mathcal{K}$ , junto con el mapeo  $\rho_H$  definido sobre  $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$  como

$$\rho_H(A, B) = \inf \{\epsilon : A \subset [B]_\epsilon \text{ y } B \subset [A]_\epsilon\}$$

forman un espacio métrico. A  $\rho_H$  la llamaremos métrica o distancia de Hausdorff en  $\mathcal{K}$ .

*Demostración:* (Ver Figura 10.1) Demostremos cada una de las condiciones de una métrica y para simplificar la notación escribiremos simplemente  $\rho$  para indicar la métrica de Hausdorff. (i) Que  $\rho$  existe, es no negativa y finita se sigue de su definición y de que los conjuntos en los que se aplica son compactos. (ii) Como  $A \subset [A]_\epsilon$  para todo  $\epsilon > 0$  entonces por la definición de  $\rho$  tendremos que  $\rho(A, A) = 0$ . Veamos ahora que  $\rho(A, B) = 0$  implica  $A = B$ . En efecto si  $\rho(A, B) = 0$  entonces por definición de dicha métrica

$$A \subset [B]_\epsilon \text{ y } B \subset [A]_\epsilon \quad \forall \epsilon > 0. \quad (10.1)$$

Ahora, suponiendo lo contrario, es decir que  $A \neq B$ , entonces, sin perder generalidad podemos suponer que existe  $a \in A$  tal que  $a \notin B$  y como  $B$  es cerrado  $d_0 = d(a, B) = \min_{b \in B} \|a - b\| > 0$ . Luego entonces  $\{a\} \cap [B]_{d_0/2} = \emptyset$  lo cual contradice la primera contención de (10.1). De aquí que  $\rho(A, B) = 0$  implique  $A = B$ . (iii) De la definición de la métrica de Hausdorff es directo que  $\rho(A, B) = \rho(B, A)$ . (iv) Demostremos por último la desigualdad triangular: que para cualesquier  $A, B$  y  $C$  en  $\mathcal{K}$ ,  $\rho_H(A, B) \leq \rho_H(A, C) + \rho_H(C, B)$ . Sea  $a$  elemento arbitrario de  $A$ . Por la desigualdad triangular de la norma euclídeana y la definición de distancia de un punto a un conjunto

$$\rho(a, B) \leq \|a - b\| \leq \|a - c\| + \|c - b\|$$

para todos  $b \in B$  y  $c \in C$ . Luego, tomando el infimum de  $\|c - b\|$  sobre los elementos de  $B$ , tendremos que

$$\rho(a, B) \leq \|a - c\| + \rho(c, B) \leq \|a - c\| + \epsilon_1$$

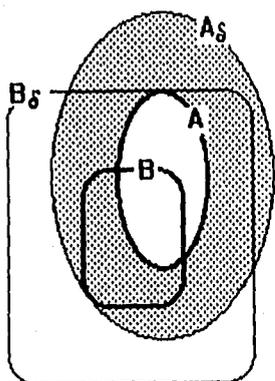


Figura 10.1

para todo  $\epsilon_1 > 0$  tal que  $[B]_{\epsilon_1} \supset C$ , luego entonces al tomar el infimum sobre dichas  $\epsilon_1$  y por la definición de  $\rho_H$

$$\leq \|a - c\| + \rho_H(C, B).$$

Y como este resultado es válido para todo  $c \in C$  entonces

$$\rho(a, B) \leq \rho(a, C) + \rho_H(C, B),$$

por lo que, análogamente a como se obtuvo  $\rho_H(C, B)$ , tendremos  $\rho(a, B) \leq \rho_H(A, C) + \rho_H(C, B)$  donde  $a \in A$  es arbitrario. Así, al tomar el supremum de  $\rho(a, B)$  sobre los elementos de  $A$  tendremos que  $\xi_1 \leq \rho_H(A, C) + \rho_H(C, B)$ , donde  $\xi_1 > 0$  es tal que  $[B]_{\xi_1} \supset A$ . Análogamente se demuestra que  $\xi_2 \leq \rho_H(B, C) + \rho_H(C, A)$  donde  $\xi_2 > 0$  es tal que  $[A]_{\xi_2} \supset B$ . Estas dos desigualdades implican precisamente la desigualdad triangular.  $\square$

Necesitaremos el siguiente teorema.

**Teorema 8 ( de Selección de Blaschke )** Sea  $\mathcal{K}$  una colección infinita de conjuntos no vacíos y compactos dentro de una región acotada de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces existe una sucesión  $\{E_j\}$  de conjuntos diferentes de  $\mathcal{K}$  que convergen con la métrica de Hausdorff a un conjunto no vacío y compacto  $E$ .

*Demostración:* Primero formaremos una sucesión de Cauchy con conjuntos de  $\mathcal{K}$ . Sea  $\{E_{1,i}\}_i$  cualquier sucesión de conjuntos diferentes de  $\mathcal{K}$ . Para cada  $k > 1$  definimos una subsucesión infinita  $\{E_{k,i}\}_i$  de  $\{E_{k-1,i}\}_i$  como sigue. Sea  $\mathcal{B}_k$  una colección finita de bolas cerradas con diámetro a lo más  $1/k$  y que cubran a  $B$ . Cada  $E_{k-1,i}$  intersecciona a una combinación determinada de dichas bolas, luego existe una subcolección infinita  $\{E_{k,i}\}_i$  de  $\{E_{k-1,i}\}_i$  la cual todos los términos de esta nueva sucesión interseccionan exactamente las mismas bolas de  $\mathcal{B}_k$ . Sea  $F$  la unión finita de las bolas de  $\mathcal{B}_k$  con dicha propiedad, es decir, cada término de la sucesión  $\{E_{k,i}\}_i$  intersecciona todas las bolas cerradas que forman  $F$ , asimismo cada término de la misma sucesión está contenido en la unión finita de dichas bolas cerradas. Entonces  $E_{k,i} \subset F \subset [E_{k,i}]_{1/k}$  para toda  $i$ , la segunda contención ya que las bolas cerradas en  $F$  son de diámetro a lo más  $1/k$ . Así  $\rho_H(E_{k,i}, F) \leq 1/k$  para toda  $i$ , lo cual implica que

$$\rho_H(E_{k,i}, E_{m,j}) \leq \rho_H(E_{k,i}, F) + \rho_H(F, E_{m,j}) \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{m}$$

para toda  $i$  y  $j$ . En particular

$$\rho_H(E_{i,i}, E_{j,j}) \leq \frac{1}{i} + \frac{1}{j} \leq \frac{2}{\min\{i, j\}}, \quad (10.2)$$

de aquí que la sucesión  $\{E_i\}_i$  sea una sucesión de Cauchy, donde hemos denotado  $E_i = E_{i,i}$ .

Ahora sea

$$E = \bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{\left( \bigcup_{i=j}^{\infty} E_i \right)}$$

donde la barra indica la cerradura del conjunto en cuestión. Como  $E_i \in \mathcal{K}$ , entonces  $\left\{ \overline{\left( \bigcup_{i=j}^{\infty} E_i \right)} \right\}_j$  es una sucesión decreciente de conjuntos no vacíos y compactos, de aquí que  $E$  sea no vacío y compacto. Por (10.2)  $\overline{\left( \bigcup_{i=j}^{\infty} E_i \right)} \subset [E_j]_{2/j}$  para toda  $j$ , por lo que

$$E \subset [E_j]_{2/j} \quad \text{para toda } j. \quad (10.3)$$

Demostremos ahora que  $E_j \subset [E]_{2/j}$ . Si  $x \in E_j$  entonces por (10.2)  $x \in [E_i]_{2/j}$  si  $i \geq j$ , de aquí que  $x \in \left[ \overline{\left( \bigcup_{i=k}^{\infty} E_i \right)} \right]_{2/j}$  si  $k \geq j$ . Tomemos  $y_k \in \overline{\left( \bigcup_{i=k}^{\infty} E_i \right)}$  tal que  $\|x - y_k\| \leq 2/j$  para cada  $k = 1, 2, \dots$ , luego por la compacidad secuencial de la sucesión  $\left\{ \overline{\left( \bigcup_{i=k}^{\infty} E_i \right)} \right\}_k$  existirá una subsucesión de  $\{y_k\}$  convergente a un punto  $y \in \mathbb{R}^n$  y tal que  $\|x - y\| \leq 2/j$ ; pero  $y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\left( \bigcup_{i=k}^{\infty} E_i \right)} = E$  luego  $x \in [E]_{2/j}$ , es decir,  $E_j \subset [E]_{2/j}$ . Por lo tanto de este resultado y de (10.3) tendremos que  $\rho_H(E, E_j) \leq 2/j$ , es decir, la sucesión  $\{E_j\}$  converge a un conjunto no vacío y compacto  $E$  bajo la métrica de Hausdorff.  $\square$

Tenemos ahora el siguiente teorema esencial en el desarrollo posterior de este capítulo y cuya demostración está incluida en la demostración del Teorema 8, de la expresión (10.2) en delante.

**Teorema 9** Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un subconjunto cerrado y  $\mathcal{K}$  la colección de todos los subconjuntos compactos y no vacíos de  $D$ . Entonces  $\mathcal{K}$  con la métrica de Hausdorff  $\rho_H$  forman un espacio métrico completo.

Veamos ahora uno de los teoremas que nos permitirá construir fractales a partir de funciones de contracción o similitud. Para ello definimos lo siguiente. Sea  $\{S_1, \dots, S_m\}$  conjunto de contracciones en un conjunto no vacío y cerrado  $D \subset \mathbb{R}^n$ , entonces denotaremos mediante  $S$  a la transformación de subconjuntos de  $D$  definida como  $S(E) = \bigcup_{i=1}^m S_i(E)$ . Denotamos además las iteraciones de  $S$  como  $S^0(E) = E$ , y  $S^{k+1}(E) = S(S^k(E))$  para  $k \geq 0$ .

**Teorema 10** Sea  $\mathcal{K}$  la clase de todos los subconjuntos no vacíos y compactos del conjunto cerrado  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Sean  $S_1, \dots, S_m$  contracciones en  $D$  con constantes de contracción  $c_i < 1$ . Entonces existe un único conjunto compacto y no vacío  $F$  el cual es invariante bajo las transformaciones  $S_i$ , es decir,

$$F = S(F) = \bigcup_{i=1}^m S_i(F). \quad (10.4)$$

Además, si  $K$  es cualquier conjunto compacto y no vacío de  $\mathcal{K}$ , las iteraciones  $S^k(K)$  convergen a  $F$  en la métrica de Hausdorff cuando  $k \rightarrow \infty$ .

*Demostración:* Por el teorema anterior  $\mathcal{K}$  es un espacio métrico completo con la métrica  $\rho_H$ . Ahora, sean  $A, B \in \mathcal{K}$  arbitrarios, entonces

$$\rho_H[S(A), S(B)] = \rho_H \left[ \bigcup_{i=1}^m S_i(A), \bigcup_{j=1}^m S_j(B) \right] \leq \max_{1 \leq i \leq m} \rho_H[S_i(A), S_i(B)]$$

ya que si  $\delta_0$  es tal que el cuerpo  $\delta_0$ -paralelo  $[S_i(A)]_{\delta_0} \supset S_i(B)$  para cada  $i = 1, \dots, m$  entonces  $[\bigcup_{i=1}^m S_i(A)]_{\delta_0} \supset \bigcup_{i=1}^m S_i(B)$  (ver Figura 10.2).

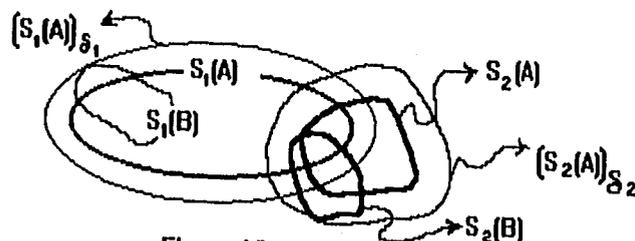


Figura 10.2

Y como cada  $S_i$  es una contracción con constante de contracción  $c_i < 1$ , tendremos que si  $A \subset [B]_{\delta}$  entonces  $S_i(A) \subset [S_i(B)]_{\delta c_i}$ , de donde

$$\rho_H[S(A), S(B)] \leq \left( \max_{1 \leq i \leq m} c_i \right) \rho_H(A, B) = c' \rho_H(A, B)$$

donde  $c' = \max_i c_i < 1$ , lo cual implica que  $S$  es una contracción en  $\mathcal{K}$ , entonces por el teorema de aplicaciones contraídas en espacios métricos completos existe un único  $F \in \mathcal{K}$  tal que  $S(F) = F$ , con lo que se demuestra la primera parte del teorema. Asimismo el principio de aplicaciones contraídas nos dice además que si tomamos cualesquier  $K \in \mathcal{K}$ ,  $\rho_H[S^k(K), F] \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Corolario 11** Sean las hipótesis como en el teorema anterior, entonces si  $E \in \mathcal{K}$  es tal que  $S_i(E) \subset E$  para  $i = 1, \dots, m$  entonces

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E) \tag{10.5}$$

donde  $F$  es el conjunto invariante bajo las transformaciones  $S_i$ . Más aún, existe  $E \in \mathcal{K}$  con tales características.

*Demostración:* Siempre existirá un conjunto compacto no vacío  $E$  tal que  $S(E) \subset E$ . Por ejemplo tomando  $E = D \cap B(0, r)$  con tal de que  $r > 0$  sea suficientemente grande (ver Figura 10.3). En efecto, en general para  $i = 1, \dots, m$

$$S_i(E) = S_i(D \cap B(0, r)) \subset S_i(D) \cap S_i(B(0, r)) \subset D \cap S_i(B(0, r))$$

ya que  $S_i : D \rightarrow D$ , y como  $S_i(B(0, r)) \subset B(0, r)$  también para toda  $i$ , se tiene dicho conjunto  $E$ . Además, como  $S^k(E) \subset S^{k-1}(E)$  para toda  $k$ , entonces

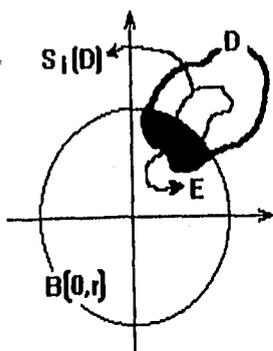


Figura 10.3

$\{S^k(E)\}$  es una sucesión decreciente de conjuntos no vacíos y compactos, por lo que tienen intersección no vacía y compacta  $\bigcap_k S^k(E) = \lim_k S^k(E) = F$ , donde la segunda igualdad se debe a la unicidad del punto fijo dado por el teorema anterior.  $\square$

Veamos ahora unos lemas previos a otro de los teoremas principales de este capítulo.

**Lema 12** Sea  $\{V_i\}$  una colección de subconjuntos abiertos y disjuntos de  $\mathbb{R}^n$  tal que cada  $V_i$  contiene una bola de radio  $a_1 r$  y está contenida en una bola de radio  $a_2 r$ . Entonces cualquier bola  $B$  de radio  $r$  intersecta a lo más  $(1 + 2a_2)^n / a_1^n$  de los conjuntos cerrados  $\overline{V}_i$ .

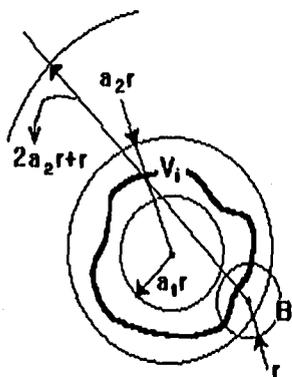


Figura 10.4

*Demostración:* Si  $B$  no intersecta a algún  $\overline{V}_i$  el resultado es trivial. Luego supongamos que  $B$  intersecta a  $q > 0$  de los conjuntos  $\{\overline{V}_i\}$ . Si  $B$  intersecta a  $\overline{V}_i$  entonces  $\overline{V}_i$  está contenido en una bola concéntrica a  $B$  y de radio  $(1 + 2a_2)r$  (ver Figura 10.4). Y esto sucede con cada uno de los  $q$  conjuntos  $\overline{V}_i$  que intersecta  $B$ , entonces, sumando los volúmenes de estas  $q$  bolas interiores de radios  $a_1 r$  cada una, tendremos que

$$q [c_n (a_1 r)^n] \leq c_n (2a_2 r + r)^n$$

ya que los  $V_i$  son disjuntos, y donde  $c_n$  es el volumen de una bola de diámetro uno (ver Teoremas 16 y 17 del capítulo 3). Esta desigualdad implica precisamente la cota buscada.  $\square$

**Lema 13** (Principio de distribución de Masa) Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  y  $\mu$  una distribución de masa en  $E$ . Supongamos que para alguna  $s$  existen reales  $c > 0$  y  $\delta > 0$  tales que

$$\mu(U) \leq c|U|^s$$

para todo conjunto  $U$  con  $|U| \leq \delta$ . Entonces  $H^s(E) \geq \mu(E)/c$  y  $s \leq \dim_H(E) \leq \underline{\dim}_H(E)$ .

*Demostración:* Si  $\{U_i\}$  es cualesquier cubierta de  $E$  entonces

$$0 < \mu(E) \leq \mu\left(\bigcup_i U_i\right) \leq \sum_i \mu(U_i) \leq c \sum_i |U_i|^s,$$

la primera desigualdad por ser  $\mu$  distribución de masa, y la última desigualdad para toda cubierta  $\{U_i\}$  tal que  $|U_i| \leq \delta$ . Tomando el infimum sobre dichas cubiertas,  $\mu(E) \leq cH_s^s(E)$  por lo que  $H^s(E) \geq \mu(E)/c$ .  $\square$

**Teorema 14** Supongamos que las similaridades  $S_1, \dots, S_m$  en  $\mathbb{R}^n$  satisfacen la condición del conjunto abierto con razones  $c_1, \dots, c_m$ , respectivamente. Si  $F$  es el conjunto invariante bajo las transformaciones  $S_i$  entonces  $s = \dim_H(F) = \dim_B(F)$ , donde  $s$  está dado por

$$\sum_{i=1}^m c_i^s = 1. \quad (10.6)$$

Además,  $F$  es un  $s$ -conjunto, es decir,  $0 < H^s(F) < \infty$ .

*Demostración:* Supongamos que  $s$  satisface (10.6). Para cualesquier conjunto  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  escribiremos  $A_{i_1, \dots, i_k} = S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(A)$ . Denotemos mediante  $J_k$  el conjunto de todas las sucesiones de  $k$ -términos  $(i_1, \dots, i_k)$  donde  $1 \leq i_j \leq m$ . Entonces, usando iteradamente la igualdad (10.4) tendremos que

$$F = \bigcup_{J_k} F_{i_1, \dots, i_k}.$$

Veamos que esta cubierta de  $F$  nos permite obtener una cota superior para la medida de Hausdorff. En efecto, para cualesquier  $x, y$  en  $\mathbb{R}^n$  se tiene que

$$\begin{aligned} & \| (S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k})(x) - (S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k})(y) \| \\ &= \| (S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_{k-1}})(c_{i_k}x) - (S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_{k-1}})(c_{i_k}y) \| \\ &= \dots = c_{i_1} \dots c_{i_k} \|x - y\|, \end{aligned}$$

es decir,  $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}$  es una función de similaridad con razón  $(c_{i_1} \dots c_{i_k})$ , entonces

$$\begin{aligned} |F_{i_1, \dots, i_k}| &= \sup_{x, y \in F} \|F_{i_1, \dots, i_k}(x) - F_{i_1, \dots, i_k}(y)\| \\ &= \sup_{x, y \in F} \| (S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k})(x) - (S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k})(y) \| \\ &= (c_{i_1} \dots c_{i_k}) \sup_{x, y \in F} \|x - y\| = (c_{i_1} \dots c_{i_k}) |F|, \end{aligned} \quad (10.7)$$

de aquí que

$$\begin{aligned} \sum_{J_k} |F_{i_1, \dots, i_k}|^s &= \sum_{J_k} (c_{i_1} \dots c_{i_k})^s |F|^s \\ &= \left( \sum_{i_1=1}^m c_{i_1}^s \right) \dots \left( \sum_{i_k=1}^m c_{i_k}^s \right) |F|^s = |F|^s \end{aligned} \quad (10.8)$$

usando (10.6). Ahora, de (10.7) y ya que  $F$  es acotado, dado  $\delta > 0$  arbitrario existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $|F_{i_1, \dots, i_k}| \leq (\max_{1 \leq i \leq m} c_i)^k |F| \leq \delta$ , es decir,  $\{F_{i_1, \dots, i_k}\}_{J_k}$  es una  $\delta$ -cubierta particular de  $F$ , luego entonces, de (10.8) y la definición de la medida de Hausdorff,  $H_\delta^s(F) \leq |F|^s$  para cualesquier  $\delta > 0$ , luego entonces  $H^s(F) \leq |F|^s < \infty$ , de donde  $\dim_H(F) \leq s$ .

Probemos ahora la cota inferior  $H^s(F) > 0$ . Sea  $I$  el conjunto de todas las sucesiones infinitas  $I = \{(i_1, i_2, \dots) : 1 \leq i_j \leq m\}$ , y tomemos el cilindro  $I_{i_1, \dots, i_k} = \{(i_1, \dots, i_k, q_{k+1}, \dots) : 1 \leq q_j \leq m\}$  el cual consiste de todas aquellas sucesiones en  $I$  con los términos iniciales  $(i_1, \dots, i_k)$ . Definiremos una distribución de masa en  $F$ , pero para ello definamos primero una en  $I$ . Si  $I_{i_1, \dots, i_k} \in I$  definimos  $\mu(I_{i_1, \dots, i_k}) = (c_{i_1} \dots c_{i_k})^s$ , entonces  $\mu$  es una distribución de masa en  $I$  con  $\mu(I) = 1$ . En efecto, los cilindros de  $I$  tienen la propiedad de red (o uno contiene al otro, al tomar dos de ellos, o bien son disjuntos). Si  $I_{i_1, \dots, i_k, h_1, \dots, h_r} \subset I_{i_1, \dots, i_k}$  entonces como  $(i_1 \dots i_k h_1 \dots h_r)^s \leq (i_1 \dots i_k)^s$ ,  $\mu$  satisface la monotonía, además claramente se tiene

$$\mu(I_{i_1, \dots, i_k, h_1, \dots, h_r} \cup I_{i_1, \dots, i_k}) = \mu(I_{i_1, \dots, i_k}) \leq \mu(I_{i_1, \dots, i_k, h_1, \dots, h_r}) + \mu(I_{i_1, \dots, i_k}),$$

y cuando son disjuntos directamente se tiene la igualdad. Asimismo ya que  $(c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s = \sum_{i=1}^m (c_{i_1} \cdots c_{i_k} c_i)^s$  de acuerdo a (10.6), entonces  $\mu(I_{i_1, \dots, i_k}) = \sum_{i=1}^m \mu(I_{i_1, \dots, i_k, i})$ , lo cual nos lleva a que  $\mu(I) = \mu(\lim_{k \rightarrow \infty} J_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(J_k) = 1$ , por la continuidad de la medida. Ahora, a partir de  $\mu$  definamos una distribución de masa  $\hat{\mu}$  sobre el conjunto invariante  $F$  como sigue: si  $A$  es un subconjunto arbitrario de  $F$  entonces  $\hat{\mu}(A) = \mu\{(i_1, i_2, \dots) : x_{i_1, i_2, \dots} \in A\}$ . Esto de acuerdo a que según (10.4) y (10.5) podemos expresar  $F = \bigcup \{x_{i_1, i_2, \dots}\}$  donde  $x_{i_1, i_2, \dots} = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_k}(E)$ , siendo esta expresión de  $F$  independiente de  $E$ , con tal de que  $S_i(E) \subset E$  para  $i = 1, \dots, m$ . Se tiene además  $\hat{\mu}(F) = 1$ , en efecto ya que  $F$  está precisamente formado por todas las sucesiones  $(i_1, i_2, \dots)$  con  $1 \leq i_j \leq m$ , que es precisamente  $I$ , por lo que  $\hat{\mu}(F) = \mu(I) = 1$ . Así  $\hat{\mu}$  es una distribución de masa.

Veamos ahora que  $\hat{\mu}$  satisface las condiciones del principio de distribución de Masa.

Sea  $V$  un conjunto abierto que satisfaga la condición del conjunto abierto, entonces  $E \subset \bar{V}$ , donde  $\bar{V}$  indica la cerradura de  $V$ . En efecto, por continuidad de las similaridades  $S_j(\bar{V}) \subset \bar{S}_j(\bar{V})$ , y como  $S(V) \equiv \bigcup_{j=1}^m S_j(V) \subset V$  entonces  $\bigcup_{j=1}^m S_j(\bar{V}) = S(\bar{V}) \subset \bar{V}$ . Iterando esta última expresión obtenemos una sucesión decreciente  $\{S^k(\bar{V})\}_k$  de conjuntos compactos que por el Corolario 11 convergen a  $F$ . En particular  $F \subset \bar{V}$  y  $F_{i_1, \dots, i_k} \subset \bar{V}_{i_1, \dots, i_k}$  para cada sucesión finita  $(i_1, \dots, i_k)$ . Sea  $B$  cualesquier bola de radio  $r < 1$  encontraremos ahora una cota superior para  $\hat{\mu}(B)$ .

Cortemos cada sucesión infinita  $(i_1, i_2, \dots) \in I$  después del primer término  $i_k$  para el cual

$$\left( \min_{1 \leq i \leq m} c_i \right)^k r \leq c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_k} \leq r \quad (10.9)$$

para formar la sucesión finita  $(i_1, \dots, i_k)$ , y denotemos mediante  $Q$  el conjunto de todas las sucesiones finitas obtenidas de esta manera. Veamos que existe un  $k$  único que satisface (10.9). En efecto, como  $0 < r < 1$ , y  $0 < c_i < 1$ ,  $i = 1, \dots, m$ , entonces dada cualquier sucesión  $\{i_1, i_2, \dots\}$  existe un natural  $k$  tal que  $c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_k} \leq r$ , y supongamos que dicha  $k$  es el primer natural que satisface dicha desigualdad. Luego entonces  $r < c_{i_1} \cdots c_{i_{k-1}}$  de donde  $c_{i_k} r < c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_{k-1}} c_{i_k} \leq r$ , pero  $(\min_{1 \leq i \leq m} c_i) r \leq c_{i_k} r$  con lo cual se obtienen ambas desigualdades de (10.9). Así para toda sucesión infinita  $(i_1, i_2, \dots) \in I$  existe un único  $k$  tal que  $(i_1, \dots, i_k) \in Q$ . Ya que  $V_1, \dots, V_m$  son disjuntos, por la propiedad del conjunto abierto también lo serán  $V_{i_1, \dots, i_k, 1}, \dots, V_{i_1, \dots, i_k, m}$  para cada sucesión finita  $(i_1, \dots, i_k)$ . Procediendo de esta manera vemos que la colección de conjuntos abiertos  $\{V_{i_1, \dots, i_k} : (i_1, \dots, i_k) \in Q\}$  es disjunta. De esta manera se obtiene también que  $F \subset \bigcup_Q F_{i_1, \dots, i_k} \subset \bigcup_Q \bar{V}_{i_1, \dots, i_k}$ .

Tomemos ahora constantes  $a_1$  y  $a_2$  tales que  $V$  contenga una bola de radio  $a_1$  y a su vez esté contenido en una bola de radio  $a_2$ . Entonces para  $(i_1, \dots, i_k) \in Q$  el conjunto  $V_{i_1, \dots, i_k}$  contiene una bola de radio  $c_{i_1} \cdots c_{i_k} a_1$  y por (10.9) contendrá una bola de radio  $(\min_i c_i) r a_1$ , asimismo está contenido en una bola de radio  $c_{i_1} \cdots c_{i_k} a_2$  y por lo tanto contenido en una bola de radio  $a_2 r$ . Sea  $Q_1$  el

subconjunto de todas las sucesiones  $(i_1, \dots, i_k)$  en  $Q$  tales que  $B$  interseca a  $\bar{V}_{i_1, \dots, i_k}$ , donde  $B$  es una bola de radio  $r < 1$ . Por el Lema 12 habrá a lo más  $q = (1 + 2a_2)^n a_1^{-n} (\min_i c_i)^{-n}$  de dichas sucesiones en  $Q_1$ . Entonces

$$\hat{\mu}(B) = \hat{\mu}(F \cap B) \leq \mu \{ (i_1, i_2, \dots) : x_{i_1, i_2, \dots} \in F \cap B \} \leq \mu \left\{ \bigcup_{Q_1} I_{i_1, \dots, i_k} \right\}$$

ya que si  $x_{i_1, i_2, \dots} \in F \cap B \subset \bigcup_{Q_1} \bar{V}_{i_1, \dots, i_k}$ , de donde existe un natural  $k$  tal que  $(i_1, \dots, i_k) \in Q_1$ . Así, como en  $Q_1$  los  $I_{i_1, \dots, i_k}$  son disjuntos

$$\hat{\mu}(B) \leq \sum_{Q_1} \mu(I_{i_1, \dots, i_k}) = \sum_{Q_1} (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s \leq \sum_{Q_1} r^s \leq q r^s$$

la penúltima desigualdad por (10.9). Ya que cualesquier conjunto  $U$  está contenido en una bola de radio  $|U|$ , tendremos que  $\hat{\mu}(U) \leq q|U|^s$ , que con el principio de distribución de Masa obtendremos  $H^s(F) \geq q^{-1} > 0$ , que con la cota superior obtenida anteriormente se tiene  $0 < H^s(F) < \infty$ , lo cual implica  $\dim_H(F) = s$ .

Demostremos ahora la relación con la dimensión box-counting. Si  $Q$  es cualesquier conjunto de sucesiones infinitas tales que para todo  $(i_1, i_2, \dots) \in I$  existe exactamente un entero  $k$  con  $(i_1, \dots, i_k) \in Q$  entonces procediendo inductivamente con (10.6) se obtiene  $\sum_Q (c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_k})^s = 1$ . Por lo tanto si tomamos  $Q$  como en (10.9),  $Q$  contendrá a lo más  $(\min_i c_i)^{-s} r^{-s}$  sucesiones, (se sigue de la definición de dimensión box-counting, capítulo 4:  $N_\delta \simeq \delta^{-s}$ ). Para cada sucesión  $(i_1, \dots, i_k)$  en  $Q$  tendremos  $|\bar{V}_{i_1, \dots, i_k}| = c_{i_1} \cdots c_{i_k} |\bar{V}| \leq r |\bar{V}|$ , así  $F$  puede cubrirse con  $(\min_i c_i)^{-s} r^{-s}$  conjuntos de diámetro  $r |\bar{V}|$  para cada  $r < 1$ . Pero de una de las definiciones equivalentes a la dimensión box-counting (Definición 2(i) del capítulo 4)  $\overline{\dim}_B(F)$  se puede obtener a partir del mínimo número de conjuntos de diámetro a lo más  $\delta$  y que cubran a  $F$ , por lo que  $\overline{\dim}_B(F) \leq s$ , y como también  $s = \dim_H F$  se sigue el teorema.  $\square$

**Corolario 15** Sean las condiciones como en el teorema anterior, donde  $F$  es el conjunto invariante de las similitudes  $\{S_i\}_{i=1}^m$ , entonces  $H^s[S_i(F) \cap S_j(F)] = 0$  para  $i \neq j$ , de aquí que  $F$  sea auto-similar.

*Demostración:* Como las  $S_i$  son similitudes con constantes  $c_i$

$$\sum_{i=1}^m H^s[S_i(F)] = \sum_{i=1}^m c_i^s H^s(F) = H^s(F) = H^s\left(\bigcup_{i=1}^m S_i(F)\right)$$

la última igualdad por (10.4). Pero  $0 < H^s(F) < \infty$ , luego por la propiedad aditiva de  $H^s$  la igualdad anterior solo se podrá dar si  $H^s[S_i(F) \cap S_j(F)] = 0$ , y por la Definición 4 se sigue que  $F$  es auto-similar.  $\square$

En el caso de que se tenga un conjunto de contracciones en lugar de similitudes, los resultados del Teorema 14 ya no se dan, sin embargo se tienen los siguientes dos teoremas que también son de gran utilidad.

**Teorema 16** Sean  $\{S_i\}_{i=1}^m$  contracciones en un subconjunto cerrado  $D \subset \mathbb{R}^n$  y cuyo conjunto invariante es  $F$ . Supongamos que para  $i = 1, \dots, m$

$$\|S_i(x) - S_i(y)\| \leq c_i \|x - y\|$$

para toda  $x, y \in D$  y donde  $c_i < 1$  para cada  $i$ . Entonces  $\dim_H(F) \leq s$  y  $\overline{\dim}_B(F) \leq s$ , donde

$$\sum_{i=1}^m c_i^s = 1.$$

*Demostración:* La demostración de las dos afirmaciones son exactamente la primera y última de parte de la demostración del Teorema 14.  $\square$

Observemos que bajo las condiciones de este teorema se tendrá ahora  $|A_{i_1, \dots, i_k}| \leq c_{i_1} \cdots c_{i_k} |A|$  para cualesquier conjunto  $A$ , en lugar de la igualdad como es el caso de las similaridades.

**Teorema 17** Sean  $\{S_i\}_{i=1}^m$  contracciones en un subconjunto cerrado  $D \subset \mathbb{R}^n$  y cuyo conjunto invariante es  $F$ ,  $F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F)$ , con dicha unión disjunta.. Supongamos que para  $i = 1, \dots, m$

$$b_i \|x - y\| \leq \|S_i(x) - S_i(y)\|$$

para toda  $x, y \in D$  y donde  $0 < b_i < 1$ . Entonces  $\underline{\dim}_B(F) \geq \dim_H(F) \geq s$  donde

$$\sum_{i=1}^m b_i^s = 1.$$

*Demostración:* Sea  $d > 0$  la mínima de las distancias entre cualesquier par de conjuntos compactos disjuntos  $S_1(F), \dots, S_m(F)$ , es decir

$$d = \min_{i \neq j} \inf \{ \|x - y\| : x \in S_i(F), y \in S_j(F) \}.$$

Sea  $F_{i_1, \dots, i_k} = S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_k}(F)$  y definamos  $\mu$  como  $\mu(F_{i_1, \dots, i_k}) = (b_{i_1} \cdots b_{i_k})^s$  en forma análoga a la demostración del Teorema 14. Luego, usando la condición sobre  $s$

$$\sum_{i=1}^m \mu(F_{i_1, \dots, i_k, i}) = \sum_{i=1}^m (b_{i_1} \cdots b_{i_k} b_i)^s = (b_{i_1} \cdots b_{i_k})^s$$

$$= \mu(F_{i_1, \dots, i_k}) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^k F_{i_1, \dots, i_k, i}\right)$$

la última igualdad por (10.4), por lo que al ir barriendo todos los subíndices:  $\mu(F) = 1$ , de donde  $\mu$  es una distribución de masa en  $F$ .

Si  $x \in F$ , existe una sucesión infinita y única  $i_1, i_2, \dots$  tal que  $x \in F_{i_1, \dots, i_k}$  para todo natural  $k$ . Para  $0 < r < d$  sea  $k$  el mínimo entero tal que  $b_{i_1} \cdots b_{i_k} d \leq r < b_{i_1} \cdots b_{i_{k-1}} d$ , la existencia y unicidad de dicha  $k$  se demuestra como en (10.9). Si  $i'_1, \dots, i'_k$  es distinto de  $i_1, \dots, i_k$ , los conjuntos  $F_{i_1, \dots, i_k}$  y  $F_{i'_1, \dots, i'_k}$  son

disjuntos y tienen una separación de al menos  $b_{i_1} \cdots b_{i_{k-1}} d > r$ . En efecto, si  $j$  es el mínimo entero tal que  $i_j \neq i'_j$  entonces  $F_{i_k}$  y  $F_{i'_k}$  tienen una separación de al menos  $d$ , además  $F_{i_1, \dots, i_k} \subset F_{i_k}$  y  $F_{i_1, \dots, i'_k} \subset F_{i'_k}$ , por lo que  $F_{i_1, \dots, i_j, \dots, i_k}$  y  $F_{i_1, \dots, i'_j, \dots, i'_k}$  están separados por al menos  $b_{i_1} \cdots b_{i_{j-1}} d$ . Así, como  $r < b_{i_1} \cdots b_{i_{k-1}} d$  y  $x \in F_{i_1, \dots, i_k}$  entonces  $F \cap B(x, r) \subset F_{i_1, \dots, i_k}$ , de donde

$$\mu[B(x, r)] = \mu[F \cap B(x, r)] \leq \mu(F_{i_1, \dots, i_k}) = (b_{i_1} \cdots b_{i_k})^s \leq d^{-s} r^s.$$

Si  $U$  es un conjunto arbitrario de  $\mathbb{R}^n$  que intersecta a  $F$ , entonces  $U \subset B(x, r)$  para alguna  $x \in F$  y con  $r = |U|$ . Así  $\mu(U) \leq d^{-s} |U|^s$ , por lo que el principio de distribución de Masa implica  $H^s(F) > d^s > 0$  que a su vez implica  $\dim_H(F) \geq s$ .  $\square$

# CAPITULO 11

## CONJUNTOS DE CANTOR

# 11. CONJUNTOS DE CANTOR

El conjunto ternario de Cantor es uno de los conjuntos fractales más sencillos de construir. Dicho conjunto ha sido generalizado de muy diversas maneras y en este capítulo estudiaremos algunas de dichas variantes. Veamos primeramente el conjunto ternario de Cantor.

## 11.1 Conjunto Ternario de Cantor

Definimos

$$\left. \begin{aligned} E_0 &= [0, 1], \\ E_1 &= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right], \\ E_2 &= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right], \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (11.1)$$

en general  $E_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , se obtiene al remover el intervalo abierto central de longitud  $3^{-j}$  en cada uno de los subintervalos de  $E_{j-1}$ , de donde  $E_j$  consiste de  $2^j$  intervalos, cada uno de longitud  $3^{-j}$ . El conjunto ternario de Cantor se define como el conjunto  $C = \bigcap_{j=0}^{\infty} E_j$ . Como intersección de cerrados que es,  $C$  también es cerrado y por lo tanto compacto. Además es no vacío, por ser la intersección de una sucesión decreciente de compactos no vacíos.

Por construcción, ningún intervalo está contenido en  $C$ , es decir,  $C$  es totalmente desconexo, resultado que obtendremos también en el Teorema 1.

Veamos que además  $C$  es perfecto, es decir, que es cerrado y denso en sí mismo. Es suficiente con demostrar que todo punto de  $C$  es un punto de acumulación. Sean  $x \in C$  arbitrario y  $J$  cualesquier intervalo abierto que lo contenga. Sea  $I_n$  el intervalo cerrado de  $E_n$ , donde  $E_n$  es un conjunto de la forma (11.1) que contiene a  $x$ , y tomemos  $n$  suficientemente grande para que  $I_n \subset J$ . Tomemos como  $w$  uno de los extremos de  $I_n$  tal que  $w \neq x$ . Luego  $w \in C \cap J$ , y como  $J$  se tomó arbitrario entonces  $x$  es un punto de acumulación de  $C$ , lo cual implica, ya que también se tomó  $x \in C$  arbitrario, que  $C$  es denso en sí mismo. Así  $C$  es un conjunto perfecto que no contiene ningún intervalo.

Veamos cuál es la medida de Lebesgue de  $C$ , de (11.1) se sigue que

$$L^1(C) = 1 - \left\{ \frac{1}{3} + 2 \left( \frac{1}{9} \right) + 4 \left( \frac{1}{27} \right) + \dots \right\}$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} \left(\frac{1}{3}\right)^k = 1 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 0.$$

Así, el conjunto ternario de Cantor tiene medida de Lebesgue cero por lo que  $\dim_H(C) \leq 1$ . Obtendremos a continuación un resultado más preciso.

**Teorema 1** Si  $C$  es el conjunto ternario de Cantor, entonces

$$\dim_H(C) = \dim_B(C) = \frac{\log(2)}{\log(3)} \cong 0.6309297 \dots$$

*Demostración:* Definamos los mapeos  $S_1$  y  $S_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como  $S_1(x) = \frac{1}{3}x$  y  $S_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ . Claramente ambos mapeos son similaridades con constantes de similaridad  $c_1 = c_2 = 1/3$ . Asimismo satisfacen la condición del conjunto abierto. En efecto, para el conjunto abierto y acotado  $V = (0, 1)$  se tiene que

$$(0, 1) \supset S_1[V] \cup S_2[V] = \left(0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, 1\right),$$

con dicha unión disjunta, y como además  $C = S_1(C) \cup S_2(C)$  la unicidad del conjunto invariante de  $S_1$  y  $S_2$  (ver Teorema 10 capítulo 10) nos dice que  $C$  es el conjunto invariante de dichos mapeos. Así, aplicando el Teorema 14 del capítulo 10 se tiene que  $\dim_H(C) = \dim_B(C) = s$  donde  $(1/3)^s + (1/3)^s = 1$ , que al resolver para  $s$  obtenemos  $s = \log(2) / \log(3)$ .  $\square$

**Teorema 2** Si  $C$  es el conjunto ternario de Cantor entonces  $H^s(C) = 1$ , donde  $s = \dim_H(C)$ .

*Demostración:* Sea  $E_j$  un conjunto de la forma (11.1). Como  $E_j \supset C$  y está formado por  $2^j$ -intervalos de longitud  $3^{-j}$  entonces, si  $s = \log(2) / \log(3)$

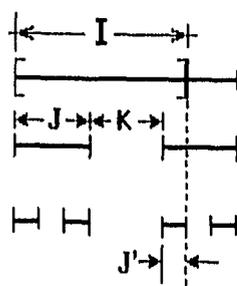
$$H_{3^{-j}}^s(C) \leq \sum_{i=1}^{2^j} (3^{-j})^s = 2^j 3^{-js} = 2^j 2^{-j} = 1$$

ya que  $3^s = 2$ . Haciendo  $j \rightarrow \infty$ , obtenemos  $H^s(C) \leq 1$ .

Para probar la desigualdad opuesta mostraremos que si  $F$  es cualquier colección de intervalos que cubren a  $C$ , entonces

$$1 \leq \sum_{I \in F} |I|^s. \quad (11.2)$$

Usando la compacidad de  $C$  es suficiente probar esta desigualdad cuando  $F$  es una colección finita de intervalos cerrados. Haciendo nuevas reducciones (reduciendo alguno de los extremos si éstos se encuentran completamente en el complemento de  $C$ ), podemos considerar que cada  $I \in F$  sea el mínimo intervalo cerrado que contiene algún par de intervalos de red,  $J$  y  $J'$ , que intervienen en la construcción de  $C$ . ( $J$  y  $J'$  no tienen que ser intervalos de un mismo  $E_j$ .) Si  $J$  y  $J'$  son los intervalos mayores con dicha propiedad,



entonces el intervalo  $I$  de la cubierta  $F$  está formado por  $J$ , seguido por un intervalo  $K$  en el complemento de  $C$ , y seguido por último por  $J'$ , es decir,  $I = J \cup K \cup J'$  (ver Figura 11.1). Por la forma en que se construyeron los  $E_j$  se tiene que  $|J| \leq |K|$  y  $|J'| \leq |K|$ . Entonces ya que  $C$  es el conjunto invariante de las funciones de similitud  $S_1$  y  $S_2$ , usando el Teorema 13 del capítulo 10 tendremos que  $|I|^s = |S_1(I)|^s + |S_2(I)|^s$  para cualesquier subintervalo  $I$  de la construcción de  $C$ , por lo que

$$|I|^s \geq |J|^s + |J'|^s.$$

Figura 11.1

Así podemos sustituir  $I$  por los dos subintervalos  $J$  y  $J'$  de  $C$ , y la suma en (11.2) no se incrementará. Procedemos de la misma manera hasta que después de un número finito de pasos tengamos una cubierta de  $C$  con intervalos de igual longitud, digamos  $3^j$ . Esta cubierta está contenida en  $F$  y contiene a su vez a todos los subintervalos de  $E_j$ . Como los subintervalos de  $E_j$  son tales que  $\sum_{i=1}^{2^j} (3^{-j})^s = 2^j 3^{-sj} = 2^j 2^{-j} = 1$ , entonces la cubierta contenida entre  $E_j$  y  $F$  satisface la desigualdad (11.2) y por lo tanto también la satisface la cubierta original de  $F$ .  $\square$

## 11.2 Conjunto Uniforme de Cantor

Generalizaremos el proceso de construcción del conjunto ternario de Cantor. Para ello cada conjunto  $E_j$  constará ahora de  $m$ -subintervalos de cierta longitud  $\lambda > 0$ .

En efecto, sea  $m$  un entero positivo mayor o igual a 2, y  $\lambda$  un número real tal que  $0 < \lambda < \frac{1}{m}$ . Sea  $b > 0$  y  $I = [0, b]$  el intervalo de longitud  $|I| = b$ . A partir de dicho intervalo  $I$  construimos  $m$ -subintervalos de longitud  $\lambda|I|$  cada uno e igualmente espaciados, y de manera que los extremos del primer y último subintervalo coincidan con los extremos del intervalo  $I$ . A dicho conjunto lo denotaremos  $F_{\lambda_1}$ . Claramente la longitud de  $F_{\lambda_1}$  es  $m\lambda|I|$ . En la siguiente iteración repetimos el procedimiento para cada uno de los  $m$ -intervalos obtenidos de  $I$ . Es decir, ahora cada subintervalo de longitud  $\lambda|I|$  se va a dividir en  $m$ -subintervalos de longitud  $\lambda^2|I|$ , por lo que tendremos el conjunto  $F_{\lambda_2}$  formado por  $m^2$  subintervalos de longitud  $\lambda^2|I|$  cada uno, de aquí que su longitud  $L^1(F_{\lambda_2}) = m^2\lambda^2|I|$ . En general, en el  $k$ -ésimo paso tendremos el conjunto  $F_{\lambda_k}$  formado por  $m^k$ -subintervalos de longitud  $\lambda^k|I|$  cada uno, de donde  $L^1(F_{\lambda_k}) = (m\lambda)^k|I|$ . Definimos el conjunto uniforme de Cantor,  $F_{m,\lambda}$ , como  $F_{m,\lambda} = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{\lambda_k}$ . En forma análoga a lo hecho con  $C$  se demuestra que  $F_{m,\lambda}$  es perfecto.

**Teorema 3** Sean  $0 < \lambda < \frac{1}{m}$ . Si  $F_{m,\lambda}$  es el conjunto uniforme de Cantor entonces

$$\dim_H(F_{m,\lambda}) = \dim_B(F_{m,\lambda}) = \frac{\log(m)}{-\log(\lambda)}.$$

Además  $H^s(F_{m\lambda}) = 1$ .

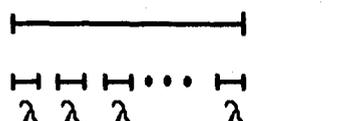
*Demostración:* Definamos los  $m$  mapeos  $S_i : [0, b] \rightarrow [0, b]$  como sigue

$$\begin{aligned} S_1(x) &= \lambda x \\ S_i(x) &= \lambda x + b_i \quad \text{para } i = 2, \dots, m \end{aligned}$$

donde los  $b_i$  son tales que los  $m$  subintervalos generados queden igualmente espaciados. Entonces claramente  $S_1, S_2, \dots, S_m$  son funciones de similitud con constantes  $c_1 = c_2 = \dots = c_m = \lambda$ . Además para el conjunto abierto y acotado  $V = (0, b)$  se tiene que  $\cup_{i=1}^m S_i[(0, b)] \subset (0, b)$  con dicha unión disjunta. Asimismo  $F_{m\lambda}$  es el conjunto invariante bajo las  $S_i$  ya que  $F_{m\lambda} = \cup_{i=1}^m S_i(F_{m\lambda})$ . Luego por el Teorema 14 del capítulo 10 tendremos que  $s = \dim_H(F_{m\lambda}) = \dim_B(F_{m\lambda})$  donde  $c_1^s + \dots + c_m^s = 1$ , por lo que  $m\lambda^s = 1$  y de aquí  $s = \frac{\log(1/m)}{\log(\lambda)}$ . La demostración de que  $H^s(F_{m\lambda}) = 1$  es completamente análoga a la del Teorema 2.  $\square$

Como  $0 < \lambda < 1/m < 1$  entonces  $\frac{\log(1/m)}{\log(\lambda)} < 1$ , de aquí que todos los conjuntos uniforme de Cantor sean totalmente desconexos. Además, de la definición de dimensión de Hausdorff la medida de Lebesgue de cualesquier conjunto uniforme de Cantor  $F_{m\lambda}$  es igual a cero.

Veamos que valor se obtiene para  $s = \dim_H(F_{m\lambda}) = \dim_B(F_{m\lambda})$  cuando  $\lambda$  se aproxima a  $1/m$  o a cero, para  $m$  entero positivo fijo,



$$\lim_{\lambda \rightarrow 1/m^-} \dim_H(F_{m\lambda}) = \lim_{\lambda \rightarrow 1/m^-} \frac{\log(1/m)}{\log(\lambda)} = 1, \quad (11.3)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \dim_H(F_{m\lambda}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\log(1/m)}{\log(\lambda)} = 0 \quad (11.4)$$

$m \lambda \rightarrow 1^-$   
 $m \lambda \rightarrow 0^+$

lo cual era de esperarse geoméricamente (ver Figura 11.2). Así, para  $m$  entero positivo fijo, dado cualesquier conjunto  $E \subset \mathbb{R}$  con dimensión de Hausdorff  $s \in (0, 1)$  existe un conjunto uniforme de Cantor  $F_{m\lambda}$  con la misma dimensión que  $E$ , con tal de que  $m\lambda^s = 1$ .

Figura 11.2

## 11.3 Series y conjuntos de Cantor

Sea  $0 < a \leq 1$ . Consideremos la sucesión  $\{a_i\}$ , donde  $a_i \in (0, 1)$  para toda  $i$ , y tal que  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a$ . Con base a dicha sucesión  $\{a_i\}$  definiremos ciertos conjuntos  $F_k$  en el intervalo  $[0, 1]$  en analogía con la construcción del conjunto ternario de Cantor. Veamos:  $F_1$  se define al omitir de  $[0, 1]$  el intervalo abierto central de longitud  $a_1$ , y obtener dos intervalos cerrados. Ahora a cada uno de los dos subintervalos de  $F_1$  le 'quitamos' el intervalo abierto central de longitud

$a_2/2$ . En general,  $F_k$  se obtiene al 'quitarle' a cada uno de los  $2^{k-1}$  subintervalos cerrados de  $F_{k-1}$ , los intervalos abiertos centrales cada uno de longitud  $a_k/2^{k-1}$  (ver Figura 11.3). Así a  $F_{k-1}$  le estamos 'quitando' un conjunto abierto de longitud  $2^{k-1} \left(\frac{a_k}{2^{k-1}}\right) = a_k$  para obtener  $F_k$ . Definimos el conjunto  $\sigma$ -Cantor como  $F_\sigma = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$ .

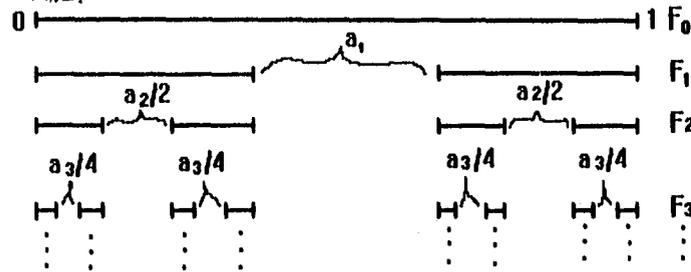


Figura 11.3

Esta construcción, así como todos los resultados sobre  $F_\sigma$  siguientes pueden generalizarse si definimos  $F_\sigma$  a partir del intervalo  $[0, b]$  y la serie  $\sum_i a_i = b$ .

De acuerdo a la construcción anterior la medida de Lebesgue del conjunto  $\sigma$ -Cantor,  $F_\sigma$ , es

$$L^1(F_\sigma) = 1 - (a_1 + a_2 + a_3 + \dots) = 1 - \sum_i a_i = 1 - a, \quad (11.5)$$

y como  $a \in (0, 1]$  entonces  $0 \leq L^1(F_\sigma) < 1$ . De aquí que tengamos el siguiente resultado

**Teorema 4** Si  $F_\sigma$  es el conjunto  $\sigma$ -Cantor obtenido mediante la serie  $\sum_i a_i = a$ , donde  $a_i \in (0, 1) \forall i$ , entonces

$$\begin{aligned} \dim_H(F_\sigma) &= 1 && \text{si } 0 < a < 1 \\ \dim_H(F_\sigma) &\leq 1 && \text{si } a = 1. \end{aligned}$$

*Demostración:* Se sigue de la relación entre las medidas de Hausdorff y Lebesgue junto con (11.5) y la definición de dimensión de Hausdorff.  $\square$

Lo mismo que  $C$  y  $F_{m,\lambda}$  el conjunto  $\sigma$ -Cantor es perfecto, además de seguir siendo totalmente desconexo aún cuando se tenga  $\dim_H(F_\sigma) = 1$  para  $a = 1$ .

En lo que resta de este capítulo trataremos de obtener mejores cotas (inferior y superior) para  $\dim_H$  y  $\dim_B$  de  $F_\sigma$  en el caso en que  $a = 1$ , es decir, cuando  $\sum_i a_i = 1$ .

## 11.4 Factores de contracción

En la construcción del  $\sigma$ -Cantor se definieron ciertos conjuntos  $F_k$  los cuales constan de  $2^k$  subintervalos todos de igual longitud, digamos  $l_k$ , y los cuales se

obtienen a partir del intervalo  $I = [0, 1]$ . Definamos a partir de ellos la siguiente sucesión  $\{\xi_k\}$ , a cuyos términos llamaremos factores de contracción de  $F_\sigma$

$$\xi_1 = \frac{l_1}{l_0}, \quad \xi_2 = \frac{l_2}{l_1}, \quad \dots, \quad \xi_k = \frac{l_k}{l_{k-1}}, \dots \quad (11.6)$$

(ver Figura 11.4).

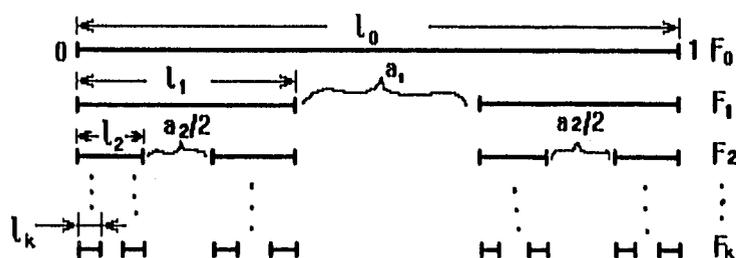


Figura 11.4

Supongamos que ninguno de los  $2^k$  subintervalos cerrados de cada  $F_k$  se traslapan, y que  $\xi_k \in (0, \frac{1}{2}) \forall k$ , luego existe el supremum de la sucesión  $\{\xi_k\}$ , por lo que definimos  $\xi = \sup_k \xi_k$ . Claramente  $\xi \in (0, \frac{1}{2}]$ . Ahora utilizando a  $\xi$  como factor de contracción podemos generar, a partir de  $I$ , el conjunto uniforme de Cantor  $F_{2,\xi}$ . En el  $k$ -ésimo paso de  $F_{2,\xi}$  se tienen  $2^k$  subintervalos cada uno de longitud  $\xi^k$  y los cuales forman una cubierta de  $F_k$  (será necesario hacer una pequeña traslación en cada uno). Por lo tanto

$$\dim_H(F_\sigma) \leq \overline{\dim}_B(F_\sigma) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(2^k)}{-\log(\xi^k)} = \frac{\log(2)}{-\log(\xi)}$$

Usando estos factores de contracción podemos inclusive 'aproximar' a  $F_\sigma$  de la forma siguiente: Sea  $k$  entero positivo y tomemos el conjunto  $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k\}$ . Contraemos el intervalo  $[0, 1]$  por un factor de  $\xi_1$  para formar dos subintervalos: el extremo izquierdo del primero de dichos subintervalos debe coincidir con el extremo izquierdo del  $[0, 1]$ , y el extremo derecho del segundo subintervalo debe coincidir con el extremo derecho del  $[0, 1]$ . A continuación contraemos estos dos subintervalos por un factor ahora de  $\xi_2$  para obtener cuatro subintervalos de longitud  $\xi_1 \xi_2$  cada uno. Repitiendo esta procedimiento  $k$ -veces se tendrá un conjunto con  $2^k$  subintervalos disjuntos de longitud  $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_k$  cada uno, que por otro lado es exactamente igual al conjunto  $F_k$  que se obtiene en el  $k$ -ésimo paso de la construcción del conjunto  $\sigma$ -Cantor, es decir, estos  $2^k$  subintervalos coinciden con  $F_\sigma$  al menos hasta el conjunto  $F_k$ . Definamos ahora  $k$ -funciones de similitud del  $[0, 1]$  al  $[0, 1]$  como  $f_j(x) = (\xi_1 \xi_2 \dots \xi_k)x + a_j$ , ( $j = 1, \dots, k$ ), donde las  $a_j$  son constantes de traslación definidas por los extremos izquierdos de los  $2^k$  subintervalos obtenidos anteriormente. Luego, del Teorema 3 el conjunto invariante generado por estas similitudes tendrá dimensión de

Hausdorff

$$\frac{k \log(2)}{-\log(\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_k)} \quad (11.7)$$

Cuanto mayor sea el valor de  $k$  que tomemos mayor 'aproximación' tendremos con el conjunto  $\sigma$ -Cantor. Surge aquí la pregunta de si dicho cociente tiende a la dimensión de Hausdorff de  $F_\sigma$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . Regresaremos a esta pregunta en la siguiente sección.

En forma análoga a la cota superior podemos encontrar una cota inferior para  $F_\sigma$ . Para ello definimos ahora el factor de contracción  $\rho = \inf_k \xi_k$ , por lo que  $\rho \in [0, 1)$ . Si  $\rho = 0$  entonces  $\dim_H(F_\sigma) = \dim_B(F_\sigma) = 0$  de acuerdo a (11.4), y del hecho de que si  $\{\xi_k\}$  contiene otra subsucesión que converja a un número no-nulo (aparte de la que converge al cero), entonces la longitud de los intervalos al aplicarles las contracciones con base a estas dos subsucesiones es menor que si aplicamos solamente los términos de la subsucesión que converge al cero. Para el caso en que  $\rho > 0$  se tendrá ahora que en el  $k$ -ésimo paso de  $F_{2,\rho}$  se tienen  $2^k$  subintervalos cada uno de longitud  $\rho^k$ . Inclusive, salvo traslaciones, de acuerdo a la definición de  $\rho$  se tendrá que en el  $k$ -ésimo paso de  $F_{2,\rho}$  cada uno de sus subintervalos puede ser cubierto por cada uno de los subintervalos de  $F_k$ , donde recordamos que  $\cap_k F_k = F_\sigma$ . De aquí que

$$\underline{\dim}_B(F_\sigma) \geq \dim_H(F_\sigma) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(2^k)}{-\log(\rho^k)} = \frac{\log(2)}{-\log(\rho)}$$

Resumiendo

**Teorema 5** Sea  $\{a_i\}$  una sucesión de términos en el intervalo  $(0, \frac{1}{2})$  y tal que  $\sum_i a_i = 1$ . Sea  $F_\sigma$  el conjunto  $\sigma$ -Cantor definido a partir de dicha serie y a partir del intervalo  $[0, 1]$ . Sea  $\{\xi_k\}$  la sucesión definida en (11.6). Entonces

(i) Si  $\xi = \sup_k \xi_k$  entonces

$$\dim_H(F_\sigma) \leq \overline{\dim}_B(F_\sigma) \leq \frac{\log(2)}{-\log(\xi)}$$

(ii) Si  $\rho = \inf_k \xi_k$  y  $\rho > 0$  entonces

$$\frac{\log(2)}{-\log(\rho)} \leq \dim_H(F_\sigma) \leq \underline{\dim}_B(F_\sigma)$$

(iii) Si  $\rho = 0$  entonces  $\dim_H(F_\sigma) = \dim_B(F_\sigma) = 0$ .

Estos resultados coinciden además con los Teoremas 16 y 17 del capítulo 10.

Por ejemplo en el Cantor ternario tendríamos  $\xi_k = 1/3 \forall k$ , por lo que  $\xi = \rho = 1/3$  y por (i) y (ii) del Teorema 5  $\dim_H(C) = \dim_B(C) = \log(2)/\log(3)$  como debe ser. Inclusive si tenemos el caso extremo en que  $\xi_k = 1/2 \forall k$ , entonces  $\xi = \rho = 1/2$  por lo que ahora tendremos que  $\dim_H(F_\sigma) = \dim_B(F_\sigma) = 1$  como era de esperarse, ya que en este caso  $F_\sigma$  es precisamente el intervalo  $[0, 1]$ .

## 11.5 Aproximaciones mediante un Cantor Uniforme

El Teorema 5 nos proporciona una cota, tanto inferior como superior, para  $\dim_H(F_\sigma)$ . Sin embargo en ocasiones dichas cotas pueden resultar demasiado burdas. Las dificultades para obtener expresiones más exactas de la dimensión de Hausdorff del conjunto  $\sigma$ -Cantor surgen del hecho de que dicho conjunto  $F_\sigma$  no necesariamente es auto-similar, es decir, que no se obtiene como un conjunto invariante de cierta cantidad finita de funciones de similitud. Sin embargo usaremos conjuntos autosimilares (específicamente el conjunto uniforme de Cantor), para aproximar la dimensión de Hausdorff de  $F_\sigma$ .

De acuerdo a como se construyó el  $\sigma$ -Cantor podemos expresarlo como

$$F_\sigma = \bigcap_i E_i = \lim_{i \rightarrow \infty} E_i \quad (11.8)$$

ya que  $E_{i+1} \subset E_i$ , (escribo  $E_i$  en lugar de  $F_i$  como se hizo en la sección 11.3 para evitar duplicidad de notación más adelante.) En el  $k$ -ésimo paso, el conjunto  $E_k$  consiste de  $2^k$  subintervalos disjuntos y cerrados, todos de igual longitud  $l_k$ , y el cual se obtiene al remover de cada uno de los  $2^{k-1}$  subintervalos de  $E_{k-1}$ , el intervalo abierto centrado de longitud  $\frac{a_k}{2^{k-1}}$ . De aquí que la longitud total de los intervalos abiertos removidos en  $E_{k-1}$  para obtener  $E_k$ , sea de  $2^{k-1} \left(\frac{a_k}{2^{k-1}}\right) = a_k$ . Y con respecto al intervalo inicial  $E_0 = [0, 1]$ , en el  $k$ -ésimo paso se han removido intervalos cuya longitud total es de  $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ . De aquí que la longitud  $l_k$  de cada uno de los  $2^k$  subintervalos que forman  $E_k$  sea, expresada en términos de la sucesión  $\{a_i\}$ , de la forma siguiente

$$l_k = \frac{1 - a_1 - a_2 - \dots - a_k}{2^k}. \quad (11.9)$$

Si usamos los factores de contracción obtendríamos  $l_k = \xi_1 \xi_2 \dots \xi_k$ , como se vió en (11.7). Ahora, dado un natural  $k$  cualesquiera tomemos el conjunto uniforme de Cantor  $F_{2^k, l_k}$ , el cual, de acuerdo a como se construyeron los Cantor uniforme podemos expresarlo como

$$F_{2^k, l_k} = \bigcap_{j=1}^{\infty} F_j^{(k)} = \lim_{m \rightarrow \infty} F_m^{(k)}. \quad (11.10)$$

En particular,  $F_1^{(k)}$  se obtiene al contraer  $2^k$ -veces el intervalo  $[0, 1]$  por un factor de  $l_k$ . Así,  $F_1^{(k)}$  'coincide' con el conjunto  $E_k$  (salvo algunas traslaciones que fueran necesarias hacer), y ésto será expresado diciendo que  $F_{2^k, l_k}$  coincide con  $F_\sigma$  a orden  $k$ . Es decir,  $\bigcap_{i=0}^k E_i = E_k = \psi(F_1^{(k)})$  donde  $\psi$  indica las traslaciones necesarias para que cada subintervalo igualmente espaciado de  $F_1^{(k)}$  coincida con los de  $E_k$ . Por lo tanto, entre mayor sea el valor de  $k$ ,  $F_{2^k, l_k}$  se 'aproxima' mejor a  $F_\sigma$ . Luego entonces con (11.8)

$$F_\sigma = \lim_{k \rightarrow \infty} \bigcap_{i=0}^k E_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi(F_1^{(k)}). \quad (11.11)$$

Como el conjunto invariante *generado* por  $\psi(F_1^{(k)})$  (es decir, a partir de cada subintervalo de  $\psi(F_1^{(k)})$  defino  $2^k$  funciones de similaridad las cuales *generarán* un conjunto invariante) y el conjunto Cantor uniforme  $F_{2^k, l_k}$  difieren solo por sus constantes de traslación, entonces la dimensión de Hausdorff de ambos conjuntos invariantes es la misma para cualesquier entero positivo  $k$ . Con base a ésto afirmo lo siguiente (véase también (11.7))

$$\dim_H \left[ \lim_{k \rightarrow \infty} F_{2^k, l_k} \right] = \dim_H \left[ \lim_{k \rightarrow \infty} \psi(F_1^{(k)}) \right]. \quad (11.12)$$

Asimismo, ya que  $F_{2^k, l_k}$  es invariante, auto-similar y con dimensión no-entera para cada  $k$  afirmo que

$$\dim_H \left[ \lim_{k \rightarrow \infty} F_{2^k, l_k} \right] = \lim_{k \rightarrow \infty} \dim_H [F_{2^k, l_k}]. \quad (11.13)$$

Ahora, de acuerdo al Teorema 3 y de la igualdad (11.9)

$$\begin{aligned} \dim_H (F_{2^k, l_k}) &= \frac{\log(2^k)}{-\log(l_k)} = \frac{\log(2^k)}{-\log\left(\frac{1-a_1-a_2-\dots-a_k}{2^k}\right)} \\ &= \frac{\log(2)}{\log(2) - \frac{\log(1-a_1-a_2-\dots-a_k)}{k}}. \end{aligned} \quad (11.14)$$

De esta manera podemos estimar la dimensión de Hausdorff del conjunto  $\sigma$ -Cantor como sigue, de (11.11)

$$\dim_H (F_\sigma) = \dim_H \left[ \lim_{k \rightarrow \infty} \psi(F_1^{(k)}) \right]$$

habiendo supuesto (11.12) y (11.13) verdaderas

$$= \dim_H \left[ \lim_{k \rightarrow \infty} F_{2^k, l_k} \right] = \lim_{k \rightarrow \infty} \dim_H [F_{2^k, l_k}]$$

y con (11.14)

$$= \frac{\log(2)}{\log(2) + \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\log(1-a_1-a_2-\dots-a_k)}{-k} \right\}}.$$

Resumiendo

$$\dim_H (F_\sigma) = \frac{\log(2)}{\log(2) + \Lambda} \quad (11.15)$$

donde denotamos

$$\Lambda = - \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\log(1-a_1-a_2-\dots-a_k)}{k} \right\}. \quad (11.16)$$

Así, esta aproximación dependerá además de la serie  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1$ , es decir de que el límite en (11.16) exista, aunque pueda ser  $\infty$ . Supongamos que dicho límite existe, luego  $0 \leq \Lambda \leq \infty$ . De (11.15) se tendrá que  $0 \leq \dim_H (F_\sigma) \leq 1$ , inclusive de dicha igualdad obtenemos el siguiente resultado

**Teorema 6** Sea  $\sum_i a_i = 1$ , donde  $a_i \in (0, 1) \forall i$ . Sea  $F_\sigma$  el conjunto  $\sigma$ -Cantor obtenido a partir del intervalo  $[0, 1]$  y mediante dicha serie. Supongamos que  $\Lambda$  definido en (11.16) existe y que (11.12) y (11.13) son verdaderos.

- (i) Si  $\Lambda = 0$  entonces  $\dim_H(F_\sigma) = 1$ .
- (ii) Si  $0 < \Lambda < \infty$  entonces la dimensión de Hausdorff de  $F_\sigma$  está dada por (11.15), de donde  $F_\sigma$  es totalmente desconexo.
- (iii) Si  $\Lambda = \infty$  entonces  $\dim_H(F_\sigma) = 0$ .

Ejemplifiquemos este teorema con algunos casos particulares:

- Si  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a$  donde  $0 < a < 1$ ,  $\Lambda = 0$  por lo que  $\dim_H(F_\sigma) = 1$  lo cual coincide con lo obtenido en el Teorema 4.
- Sea  $r > 1$  y la serie geométrica  $\sum_{k=1}^{\infty} r^{-k} = 1/(1-r^{-1}) - 1 = \frac{1}{r-1}$ . Definimos la constante  $b$  tal que  $b + \sum_{k=1}^{\infty} r^{-k} = 1$ , entonces  $b = \frac{r-2}{r-1}$ . Solo es de interés el caso  $b \geq 0$ , por lo que solo estudiaremos el caso  $r \geq 2$ . Entonces de (11.16), donde estamos considerando a  $b$  el primer término de la sumatoria  $a_1 + \dots + a_k$ , tendremos que

$$\Lambda = - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log [1 - b - r^{-1} - r^{-2} - \dots - r^{-(k-1)}]}{k} \quad (11.17)$$

y como

$$\sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{1}{r}\right)^j = \frac{1 - \left(\frac{1}{r}\right)^{(k-1)+1}}{1 - \frac{1}{r}} - 1 = \frac{1 - r^{-k}}{1 - r^{-1}} - 1$$

entonces de (11.17) tendremos que

$$\Lambda = - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \left[1 - b - \left(\frac{1-r^{-k}}{1-r^{-1}} - 1\right)\right]}{k} = - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \left[2 - b - \frac{1-r^{-k}}{1-r^{-1}}\right]}{k}$$

y como  $b = (r-2)/(r-1)$ , al sustituir y simplificar tendremos que

$$= - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \left[\frac{r}{(r-1)r^k}\right]}{k} = - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \left(\frac{r}{r-1}\right) + k \log \left(\frac{1}{r}\right)}{k} = \log(r).$$

Así,  $0 < \Lambda = \log(r) < \infty$  para cualesquier real  $r \geq 2$ , y por el inciso (ii) del teorema anterior obtendremos de (11.15) que

$$\dim_H(F_\sigma) = \frac{\log(2)}{\log(2r)}. \quad (11.18)$$

Observemos que utilizar una base logarítmica diferente nos llevará a valores diferentes de  $\Lambda$ , pero a un único valor de la dimensión de Hausdorff.

- Para el Cantor uniforme con  $m = 2$  y  $\lambda = 1/4$ ,  $\dim_H(F_{m\lambda}) = \frac{\log(2)}{\log(4)} = 1/2$ , lo cual coincide con (11.18) para el caso  $r = 2$  del ejemplo anterior, donde  $b = 0$  ya que  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1$ .
- Si en (11.18) consideramos el caso  $r = 5$  entonces  $b = 3/4$  ya que  $\sum_{k=1}^{\infty} 5^{-k} = 1/4$ , y así  $\Lambda = \log(5)$  de donde  $\dim_H[F_{\sigma(r=b)}] = \log(2) / \log(10) \simeq 0.30103$ .

#### Observaciones

El Teorema 6 nos permite así obtener una aproximación o bien el valor exacto de la dimensión de Hausdorff de  $F_{\sigma}$  cuando el comportamiento de la sucesión  $\{a_i\}$  sea demasiado irregular de forma tal que no podamos determinar explícitamente su límite.

El conjunto  $F_{2^k, I_k}$  que usamos para aproximar el conjunto  $\sigma$ -Cantor es auto-similar, y de acuerdo a lo obtenido anteriormente podemos hacer dicha aproximación tan grande como queramos. Así, dado  $k$  arbitrario podemos aproximar el conjunto  $F_{\sigma}$  mediante  $2^k$  funciones de similitud. Sin embargo esto ya plantea un inconveniente, pues por ejemplo para una aproximación a orden 10 se requerirán  $2^{10} = 1024$  funciones de similitud.

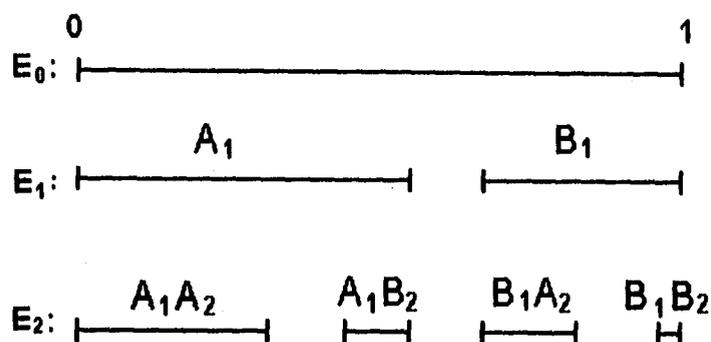
También es importante resaltar que  $F_{2^k, I_k}$  es igual a  $F_{\sigma}$  hasta el orden  $k$ , pero no es posible saber que tan grande o pequeña seguirá siendo la diferencia entre ambos conjuntos a partir del término  $k + 1$ , ya que ésta dependerá del comportamiento de los términos  $a_{k+1}, a_{k+2}, \dots$  los cuales ya no se están tomando en cuenta en  $F_{2^k, I_k}$ . En este caso el Teorema 5 nos ayudaría a complementar el valor de la dimensión.

## 11.6 Cantor Afín

Haremos una construcción análoga a la de  $F_{\sigma}$ , pero en este caso el intervalo abierto que se retira en cada subintervalo no estará necesariamente centrado. Veremos dos casos particulares.

Sean  $A_1, A_2, B_1, B_2$  números reales en el intervalo  $(0, 1)$ . Sea  $E_0 = [0, 1]$ . Definimos  $E_1$  como la unión de dos subintervalos de longitudes  $A_1$  y  $B_1$ . El subintervalo de longitud  $A_1$ , se obtiene al contraer  $E_0$  por un factor de  $A_1$  y su extremo izquierdo coincide con el de  $E_0$ . De la misma manera el subintervalo de longitud  $B_1$  se obtiene al contraer  $E_0$  por un factor de  $B_1$  y su extremo derecho coincide con el de  $E_0$  (Ver Figura 11.5). Así  $E_1$  está formado por un subintervalo 'izquierdo' que se obtiene con el factor de contracción  $A_1$ , y un subintervalo 'derecho' que se obtiene con el factor de contracción  $B_1$ . Definimos ahora el conjunto  $E_2$  como sigue: a partir de cada uno de los subintervalos de  $E_1$  se obtienen dos subintervalos, el izquierdo y el derecho, donde el subintervalo

izquierdo se obtiene con el factor de contracción  $A_2$ , y el subintervalo derecho con el factor  $B_2$ . De esta manera  $E_2$  está compuesto de cuatro subintervalos cerrados de longitudes  $A_1A_2$ ,  $A_1B_2$ ,  $B_1A_2$ , y  $B_1B_2$ . Supondremos que estos cuatro subintervalos de  $E_2$  son disjuntos dos a dos, (aunque podría considerarse el caso en que algunos de ellos se intersectan en sus extremos.)



Caso:  $A_1 + B_1 < 1$

Figura 11.5

Así

$$0 < A_1A_2 + A_1B_2 + B_1A_2 + B_1B_2 < 1$$

o bien

$$0 < (A_1 + B_1)(A_2 + B_2) < 1.$$

No es necesario pedir la condición de la intersección vacía ( $0 < A_1 + B_1 < 1$ ) para los subintervalos de  $E_1$ ; pero de llegar a traslaparse,  $A_1$  y  $B_1$  deberán de considerarse como dos subintervalos diferentes a la hora de construir  $E_2$  (ver Figura 11.6).

A partir de  $E_2$  construiremos un conjunto invariante como sigue. Para  $i = 1, \dots, 4$  definimos las funciones de similitud  $f_i$  del  $[0, 1]$  al  $[0, 1]$  como

$$\begin{aligned} f_1(x) &= A_1A_2x \\ f_2(x) &= A_1B_2x + h_2 \\ f_3(x) &= A_2B_1x + h_3 \\ f_4(x) &= B_1B_2x + h_4 \end{aligned}$$

donde  $h_2 = A_1 - A_1B_2$ ,  $h_3 = 1 - B_1$ ,  $h_4 = 1 - B_1B_2$ . En la definición de estas funciones no importa si los subintervalos de  $E_1$  se traslapan,  $1 \leq A_1 + B_1 < 2$ , aunque en este caso la correspondencia entre el orden de los subintervalos dentro del  $[0, 1]$  y el índice de las similitudes será diferente a la del caso

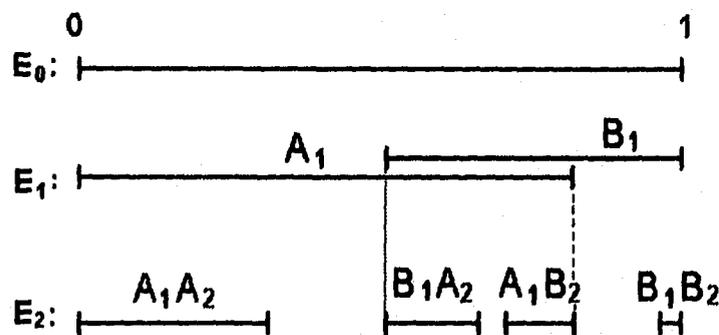
$0 < A_1 + B_1 < 1$ . Luego, por los Teoremas 10 y 14 del capítulo 10 existe un conjunto compacto y no vacío  $G \subset [0, 1]$ , el cual es el conjunto invariante de las similitudes  $f_i$ . Además  $s = \dim_H(G) = \dim_B(G)$  es tal que  $0 < H^s(G) < \infty$ , y

$$(A_1 A_2)^s + (A_1 B_2)^s + (A_2 B_1)^s + (B_1 B_2)^s = 1$$

de donde

$$(A_1^s + B_1^s)(A_2^s + B_2^s) = 1.$$

Dicho razonamiento puede generalizarse como sigue. Sean  $A_1, \dots, A_k$  y  $B_1, \dots, B_k$  números reales en el intervalo  $(0, 1)$ , y  $E_0 = [0, 1]$ . Para cada  $j = 1, \dots, k$ , el conjunto  $E_j$  se obtiene al contraer cada uno de los subintervalos de  $E_{j-1}$  en dos subintervalos cerrados, usando el factor de contracción 'izquierdo'  $A_j$  y el factor de contracción 'derecho'  $B_j$ . La unión de estos  $2^j$  subintervalos formarán  $E_j$ . Así, el conjunto  $E_k$  estará formado por  $2^k$  subintervalos cerrados los cuales además deberán de tener intersecciones dos a dos vacías.



Caso:  $A_1 + B_1 \geq 1$

Figura 11.6

Con base a dichos subintervalos definimos  $2^k$  funciones de similitud con constantes de contracción

$$\alpha_i = \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_k}, \quad i = 1, \dots, 2^k$$

donde  $\alpha_{i_j} \in \{A_j, B_j\}$ ,  $j = 1, \dots, k$ .

Como los subintervalos de  $E_k$  a partir del cual se definieron las similitudes son disjuntos dos a dos, entonces dichas funciones satisfacen la condición del conjunto abierto. Así llegamos al siguiente y último resultado

**Teorema 7** Sean  $A_1, \dots, A_k$  y  $B_1, \dots, B_k$  números reales en el intervalo  $(0, 1)$ . Si  $G$  es el conjunto invariante de las  $2^k$  funciones de similitud que se definieron en la construcción del párrafo anterior, entonces  $s = \dim_H(G) = \dim_B(G)$  donde

$$\prod_{i=1}^k (A_i^s + B_i^s) = 1.$$

Además  $0 < H^s(G) < \infty$ .

Cabría preguntarse que sucede cuando  $k \rightarrow \infty$ , es decir, cuando el número de contracciones diferentes  $A_i$  y  $B_i$  tiende a infinito, y si es posible utilizar el Teorema 7 anterior como *aproximación* de dichos conjuntos límite.

## CONCLUSIONES

## CONCLUSIONES

- Es factible el empleo de fractales en el estudio de los problemas de filtración de fluidos en un medio poroso, como un método alternativo para determinar las características hidrodinámicas del suelo  $K$  y  $\theta$ . Sin embargo, ésto dependerá de una buena elección y determinación que se haga de la dimensión fractal del medio poroso.

- La expresión (0.22)

$$(1 - \phi)^{\frac{s}{n}} + \phi^{\frac{s}{n}} = 1$$

obtenida en C. Fuentes [1992] es válida para la dimensión fractal  $s$  de un medio poroso  $n$ -dimensional, y siendo  $\phi$  el  $G$ -volumen de vacíos de dicho medio. La dimensión fractal  $s$  se toma de acuerdo a la definición dada por B.B. Mandelbrot [1983] en su Capítulo 12.

- Si consideramos ahora a  $s$  como la dimensión de Hausdorff de un conjunto  $n$ -dimensional  $E$ , es decir  $s = \dim_H(E)$ , entonces el parámetro  $\phi$  de la expresión (0.22) debe redefinirse para evitar resultados triviales. En particular, en esta tesis se definió un nuevo parámetro  $P$ , a saber, como aquel único valor en el intervalo  $(0, 1)$  tal que la expresión

$$(1 - P)^{\frac{s}{n}} + P^{\frac{s}{n}} = 1$$

se satisface. Llamamos Conjunto- $sP$  al conjunto  $E$  con dichas condiciones.

- Para cualesquier Conjunto- $sP$ ,  $E \subset \mathbb{R}^n$ , existe un conjunto invariante, totalmente desconexo y autosimilar  $J \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $\dim_H(E) = n \dim_H(J) = n \dim_H(J)$ . Además,  $J$  está generado por dos funciones de similitud de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ , con constantes de contracción  $1 - P$  y  $P^2$ .
- Para cualesquier Conjunto- $sP$ ,  $E \subset \mathbb{R}^n$ , existe un conjunto invariante, totalmente desconexo y autosimilar  $G \subset \mathbb{R}$  tal que

$$\dim_H(E) = \dim_H \left( \overbrace{G \times \cdots \times G}^{n \text{ veces}} \right) = \dim_H \left( \overbrace{G \times \cdots \times G}^{n \text{ veces}} \right)$$

o bien

$$\dim_H(E) = n \dim_H(G) = n \dim_H(G).$$

- Para cualesquier Conjunto- $sP$ ,  $E \subset \mathbb{R}^n$ , el conjunto invariante y autosimilar  $G \subset \mathbb{R}$  es generado por dos funciones de similitud con constantes de contracción  $1 - P$  y  $P^2$ . La forma de dichas funciones no dependen ni de  $n$  ni de  $P$ .

- La dimensión de Hausdorff de un Conjunto-*sP* tridimensional  $E$ , 'casi siempre' puede recuperarse al intersectar a dicho conjunto con un plano bidimensional  $V$ . Estrictamente

$$\dim_H(E) = \dim_H[E \cap \tau_x(V)] + 1$$

para  $H^s \times \gamma_{3,2}$ -casi todo  $(x, V) \in E \times G(3, 2)$ .

- Sea  $E$  un Conjunto-*sP* tridimensional y  $\Pi \in G(3, 2)$  un plano bidimensional. Si proyectamos ortogonalmente a  $E$  sobre  $\Pi$ , bajo ciertas condiciones podremos recuperar la dimensión de Hausdorff de  $E$  al intersectar dicha proyección con una recta  $D$  contenida en  $\Pi$ . Estrictamente, si

$$0 < \beta \equiv \dim_H[Proj_{\Pi}(E) \cap \tau_x(D)] < 1$$

para  $\theta_{3,2}^*$ -casi toda proyección en  $O^*(3, 2)$  y  $H^s \times \gamma_{2,1}$ -casi todo  $(x, D) \in Proj_{\Pi}(E) \times G(2, 1)$ , entonces

$$\dim_H(E) = \beta + 1.$$

- Sea  $E \subset \mathbb{R}^3$  Conjunto-*sP*.
  - Si  $\dim_H(E) > 2$  y  $x \in E$ , entonces, 'casi siempre' puede recuperarse la dimensión de Hausdorff de  $E$  si intersectamos dicho conjunto con rectas  $D \in G(3, 1)$ . En efecto,

$$\dim_H(E) = \dim_H[E \cap \tau_x(D)] + 2$$

para  $H^s \times \gamma_{3,1}$ -casi todo  $(x, D) \in E \times G(3, 1)$ .

- Si  $\dim_H(E) < 2$  y  $x \in \mathbb{R}^3$ , entonces para  $\gamma_{3,1}$ -casi toda recta  $D \in G(3, 1)$

$$[E \setminus \{x\}] \cap \tau_x(D) = \emptyset.$$

Los resultados anteriores son válidos para Conjuntos-*sP*, sin embargo, para ello se obtuvieron resultados de conjuntos  $n$ -dimensionales más generales, entre los cuales enunciamos los siguientes:

- Si  $E \subset \mathbb{R}^n$  es un  $s$ -conjunto, entonces  $D^s(E, x) = 0$  para  $H^s$ -casi toda  $x \notin E$ .
- Si  $E \subset \mathbb{R}^n$  es un  $s$ -conjunto entonces  $2^{-s} \leq \overline{D^s}(E, x) \leq 1$  para  $H^s$ -casi toda  $x \in E$ .
- Para cualesquier conjunto de Borel (Suslin)  $E$  de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $\dim_H(E) \leq m$ ,

$$\dim_H(E) = \dim_H[Proj_{\Pi}(E)]$$

para  $\theta_{n,m}^*$ -casi todo espacio  $m$ -dimensional  $\Pi \in \mathcal{O}^*(n, m)$ .

- Para  $s < n - m$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $E \subset \mathbb{R}^n$  y  $H^s(E) < \infty$ ,

$$[E \setminus \{x\}] \cap \tau_r(V) = \emptyset$$

para  $\gamma_{n,m}$ -casi todo  $V \in G(n, m)$ .

- Si  $s > n - m$  y  $E$  es un  $s$ -conjunto boreliano (Suslin) en  $\mathbb{R}^n$ , entonces

$$\dim_H [E \cap \tau_x(V)] = s + m - n$$

para  $H^s \times \gamma_{n,m}$ -casi todo  $(x, V) \in E \times G(n, m)$ .

- Para cualesquier conjuntos  $A \subset \mathbb{R}^n$  y  $B \subset \mathbb{R}^n$

$$\dim_H (A \times B) \geq \dim_H (A) + \dim_H (B)$$

dándose la igualdad si  $\dim_H (A) = \overline{\dim}_H (A)$ .

- Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  subconjunto cerrado y  $\mathcal{K}$  la colección de todos los subconjuntos compactos y no-vacíos de  $D$ . Entonces  $\mathcal{K}$ , con la métrica de Hausdorff  $\rho_H$ , forman un espacio métrico completo.

Con referencia a los conjuntos de Cantor obtuvimos los resultados siguientes:

- Para el conjunto perfecto uniforme de Cantor  $F_{m,\lambda}$ , con  $0 < m\lambda < 1$ , se tiene

$$\dim_H (F_{m,\lambda}) = \dim_B (F_{m,\lambda}) = -\frac{\log(m)}{\log(\lambda)}$$

- Sea  $m$  un entero positivo arbitrario. Dado cualesquier conjunto  $E \subset \mathbb{R}$  con dimensión de Hausdorff  $0 < s < 1$ , existe  $\lambda$  y por lo tanto un conjunto uniforme de Cantor  $F_{m,\lambda}$  con la misma dimensión que  $E$ . Para ello escoger  $\lambda$  tal que  $m\lambda^s = 1$ .

- Para el conjunto perfecto  $\sigma$ -Cantor,  $F_\sigma$ , obtenido a partir de la serie  $\sum_i a_i = a$ , con  $a_i \in (0, 1) \forall i$ , se tiene que

- Si  $0 < a < 1$

$$\dim_H (F_\sigma) = 1.$$

- Si  $a = 1$

$$\dim_H (F_\sigma) \leq 1.$$

Así, ningún conjunto  $\sigma$ -Cantor obtenido a partir de una serie  $0 < \sum_i a_i < 1$  y del intervalo  $[0, 1]$  tendrá dimensión de Hausdorff fraccionaria.

Ya que  $F_\sigma \subset \mathbb{R}$  el resultado anterior para el caso  $a = 1$  es completamente obvio. De aquí que se deseen obtener mejores cotas para la dimensión de un  $\sigma$ -Cantor generado de una serie de la forma  $\sum_i a_i = 1$ . Cuando el comportamiento de la sucesión  $\{a_i\}_i$  no es posible o difícil de determinar, una primera aproximación para  $\dim_H (F_\sigma)$  se obtiene mediante el siguiente resultado:

- Si los términos  $a_i$  de una serie  $\sum a_i = 1$  Para los factores de contracción  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$  definidos en la Sección 11.4 a partir del conjunto  $\sigma$ -Cantor,  $F_\sigma$ , se tiene que

- Si  $\xi = \sup_k \{\xi_k\}$

$$\dim_H(F_\sigma) \leq \overline{\dim}_B(F_\sigma) \leq \frac{\log(2)}{\log(\xi)}$$

- Si  $\rho = \inf_k \{\xi_k\}$ , con  $\rho > 0$ ,

$$\frac{\log(2)}{\log(\rho)} \leq \dim_H(F_\sigma) \leq \underline{\dim}_B(F_\sigma).$$

- Si  $\rho = 0$

$$\dim_H(F_\sigma) = \dim_B(F_\sigma) = 0.$$

Los Teoremas 16 y 17 del Capítulo 10 nos pueden llegar proporcionar mejores cotas que las que acabamos de enunciar. Sin embargo, en general estas cotas pueden llegar a ser demasiado burdas, por lo que el siguiente resultado nos ayuda a encontrar la dimensión de Hausdorff de conjuntos  $F_\sigma$  en una forma más general y exacta:

- Sea  $F_\sigma$  el conjunto  $\sigma$ -Cantor obtenido a partir de la serie  $\sum a_i = 1$  y del intervalo  $[0, 1]$ . Definimos

$$\Lambda = - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(1 - a_1 - a_2 - \dots - a_k)}{k}.$$

Si las igualdades

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \dim_H [F_{2^k, I_k}] = \dim_H \left[ \lim_{k \rightarrow \infty} F_{2^k, I_k} \right] = \dim_H \left[ \lim_{k \rightarrow \infty} \psi(F_1^{(k)}) \right]$$

son válidas, entonces:

- Si  $\Lambda = 0$

$$\dim_H(F_\sigma) = 1.$$

- Si  $0 < \Lambda < \infty$

$$\dim_H(F_\sigma) = \frac{\log(2)}{\log(2) + \Lambda}$$

además de ser  $F_\sigma$  totalmente desconexo.

- Si  $\Lambda = \infty$

$$\dim_H(F_\sigma) = 0.$$

- Si  $G$  es el conjunto invariante de las  $2^k$ -funciones de similaridad definidas en la sección 11.6 a partir de las constantes  $A_1, \dots, A_k$  y  $B_1, \dots, B_k$ , donde dichas constantes se encuentran en el intervalo  $(0, 1)$ , entonces  $s = \dim_H(G) = \dim_B(G)$  donde

$$\prod_{i=1}^k (A_i^s + B_i^s) = 1.$$

Se conocen pocos resultados referentes a los conjuntos Cantor afín, en gran parte debido a que intervienen una infinidad de parámetros que son difíciles de controlar. Sin embargo, el enunciado anterior nos da una primera pauta para buscar resultados análogos a los obtenidos con los conjuntos  $\sigma$ -Cantor.

Cabe mencionar por último, debido al comportamiento impredecible de ciertos parámetros, que también sería factible utilizar fractales 'aleatorios' para tratar de describir tanto a los conjuntos  $\sigma$ -Cantor como a los Cantor afín.

## BIBLIOGRAFIA

- Adler, P.M. (1989) *Flow in porous media*, en D. Avnir (1989), pp. 341-359.
- Avnir, D. (Editor) (1989) *The fractal approach to heterogeneous chemistry*, John Wiley & Sons Ltd.
- Beardon, A.F. (1965) On the Hausdorff dimension of general Cantor sets, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, Vol. 61, 679-694.
- Bundle, A./Havlin, S. (Eds.) (1991) *Fractals and Disordered Systems*, Springer-Verlag.
- Childs, E.C./ Collis-George, N. (1950) The permeability of porous materials, *Proc. Roy. Soc., Ser. A* (201): 392-405.
- Courant, R./John, F. (1989) *Introducción al cálculo y al análisis matemático Vol.2*, Editorial LIMUSA.
- Davies, R.O. (1952) Subsets of finite measure in analytic sets, *Indagationes Mathematicae*, Vol. 14, 488-489.
- Eggleston (1958) *Convexity*, Cambridge Univ. Press.
- Falconer, K.J. (1985) *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Falconer, K.J. (1987) The Hausdorff dimension of some fractals and attractors of overlapping construction, *Journal of Statistical Physics*, Vol.47, Nos. 1/2, 123-132.
- Falconer, K.J. (1990) *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley & Sons.
- Federer, H. (1969) *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, New-York.
- Fripiat, J.J. (1989) *Porosity and adsorption isotherms*, en D. Avnir (1989), pp.330-340.
- Fuentes R., Carlos (1992) *Approche fractale des transferts hydriques dans les sols non-saturés*, Tesis de Doctorado por la Universidad Joseph Fourier de Grenoble, Francia.
- Gulick, D. (1992) *Encounters with chaos*, McGraw-Hill.
- Hardt/Simon (1986) *Seminar on geometric measure theory*, Birkhauser Verlag.

- Mandelbrot, B.B., (1983) *The fractal geometry of nature*, W.H. Freeman, San Francisco.
- Marstrand, J.M. (1952) The dimension of cartesian products sets, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, Vol. 50, 198-202.
- Marstrand, J.M. (1954) Some fundamental geometrical properties of plane sets of fractal dimensions, *Proc. London Math. Soc.* (3) 4, 257-302.
- Mattila, Pertti (1975) Hausdorff dimension, orthogonal projections and intersections with planes, *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ, Series A. I. Mathematica*, Vol. 1, 227-244.
- Mattila, Pertti (1984) Hausdorff dimension and capacities of interseccions of sets in  $n$ -space, *Acta Mathematica*, Vol. 152, 77-105.
- Mattila, Pertti (1985) On the Hausdorff dimension and capacities of interseccions, *Mathematika*, Vol. 32, 213-217.
- Millington, R.J./Quirk, J.P. (1961) Permeability of porous solids, *Trans. Faraday Soc.*, 57: 1200-1207.
- Morgan, Frank (1988) *Geometric Measure Theory*, Academic Press.
- Mualen, Y./Dagan, G. (1978) Hydraulic conductivity of soils: unified approach to the statistical models, *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 42: 392-395.
- Pfeifer, P./ Obert, M. (1989) *Fractals: basic concepts and terminology*, en D. Avnir (1989), pp. 11-43.
- Purcell, W.R. (1949) Capillary pressures: their measurement using mercury and calculation of permeability therefrom, *Petr. Trans., Amer. Inst. Mining Metallurgical Engrs.*, 186: 39-48.
- Rieu, Michel/Perrier, Edith (por aparecer), *Fractal models of fragmented and aggregated soils*, Laboratoire d'Hydrophysique des Sols/Laboratoire d'Informatique Appliquée, France.
- Royden, H.L. (1968) *Real Analysis*, Collier-Macmillan, Canada.
- Rudin, W. (1974) *Real and Complex Analysis*, 2a. edición, McGraw-Hill.
- Rudin, W. (1980) *Principios de Análisis Matemático*, 3a. edición, McGraw-Hill.
- Spivak, M. (1987) *Cálculo en variedades*, Edit. Reverté, Barcelona.

# APENDICES

## APENDICE A

En este apéndice incluimos una tabla con algunos valores de  $\phi$  y  $d$  que se obtienen a partir de la expresión (0.22), a saber:  $(1 - \phi)^d + \phi^{2d} = 1$ , donde  $d = s/n$ , siendo  $s$  la dimensión fractal definida en la página 8 del capítulo introductorio. Asimismo, dicha tabla puede aplicarse a los parámetros  $P$  y  $d'$  a partir de la Definición 1, página 13 y donde  $d' = s/n$ , siendo en este caso  $s$  la dimensión de Hausdorff.

Recordemos que  $\frac{1}{2} < d < 1$  y  $0 < \phi < 1$ . Análogamente  $\frac{1}{2} < d' < 1$  y  $0 < P < 1$ .

Se utilizaron los métodos de Bisección y Newton-Raphson para encontrar los valores de la tabla.

Los errores de  $\phi$  (o bien,  $P$ ) son del orden de  $10^{-7}$ .

Si calculamos  $nd$  (respectivamente  $nd'$ ), tendremos la dimensión fractal (respectivamente, la dimensión de Hausdorff), de un conjunto  $n$ -dimensional.

$d$ (o bien $d'$ )	$\phi$ (o bien $P$ )
$\rightarrow 0.5^+$	$\rightarrow 0^+$
0.54	0.0004524
0.55	0.0025489
0.58	0.0347950
0.60	0.0848837
0.62	0.1555076
0.65	0.2871789
0.67	0.3832505
0.68	0.4317630
0.70	0.5270345
0.72	0.6171253
0.75	0.7371698
0.80	0.8862317
0.82	0.9268736
0.85	0.9686903
0.87	0.9852807
0.90	0.9971673
0.95	0.9999973
$\rightarrow 1^-$	$\rightarrow 1^-$

APENDICE B

A continuación se muestran algunos valores para los parámetros  $P$  y  $s = \dim_H$  de acuerdo a la Definición 1 de la página 13.

Los métodos empleados fueron el de Bisección y el de Newton-Raphson.

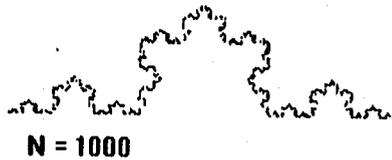
Los errores de  $P$  son del orden de  $10^{-7}$ .

Los conjuntos mostrados fueron generados de acuerdo al método para un Sistema de Funciones Iteradas (IFS), [ver por ejemplo Gulick (1992) capítulo 4.] El valor  $N$  indicado representa el número de puntos generados para obtener dicho gráfico.

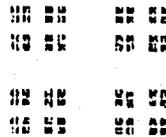
- Conjunto ternario de Cantor:  $s = \log(2)/\log(3) \simeq 0.6309297$ ,  $P \simeq 0.2007480$
- Conjunto uniforme de Cantor, con  $m = 3$  y  $\lambda = 1/5$ :  $s = \log(3)/\log(5) \simeq 0.6826061$ ,  $P \simeq 0.4443562$

.....  
**N = 150**

- Conjunto de Koch:  $s = \log(4)/\log(3) \simeq 1.2618595$ ,  $P \simeq 0.2007482$



- Carpeta de Cantor  $C \times C$ :  $s = \log(4)/\log(3) \simeq 1.2618595$ ,  $P \simeq 0.2007482$



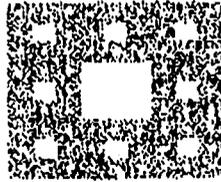
**N = 1500**

- Triángulo de Sierpinski:  $s = \log(3)/\log(2) \simeq 1.5849625$ ,  $P \simeq 0.8681609$



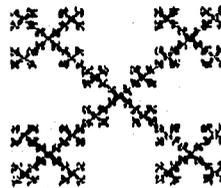
**N = 1500**

- Carpeta de Sierpinski:  $s = \log(8) / \log(3) \approx 1.8927893$ ,  $P \approx 0.9999933$



**N = 4500**

- Variante de la Carpeta de Sierpinski:  $s = \log(5) / \log(3) \approx 1.4649735$ ,  
 $P \approx 0.6695703$



**N = 4000**

- Esponja de Menger:  $s = \log(20) / \log(3) \approx 2.7268330$ ,  $P \approx 0.9985805$
- Pirámide de Sierpinski:  $s = \log(4) / \log(2) = 2$ ,  $P \approx 0.3670764$ .

## APENDICE C

A continuación se muestran algunos Conjuntos- $sP$  contenidos en  $\mathbb{R}^2$ , los cuales son generados por dos funciones de similitud con constantes de contracción  $1-P$  y  $P^2$  respectivamente. Esto de acuerdo al Teorema 4 del Capítulo 1, pág. 16.

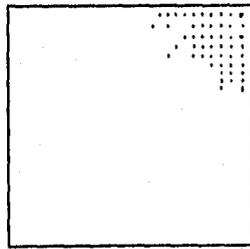
En cada figura se indican los valores de la constante de contracción  $P$  y su dimensión de Hausdorff  $s$ , así como el número  $N$  de puntos generados para ilustrar dicho conjunto.

Todas las figuras están contenidas dentro del cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

Los segmentos de recta izquierdo y derecho en la parte inferior de cada figura denotan la longitud de  $1-P$  y  $P^2$  respectivamente.

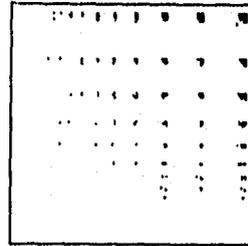
Todas las figuras se obtuvieron mediante el método para un Sistema de Funciones Iteradas (IFS), [ ver Gulick (1992) ]. El programa en QBasic se incluye en el siguiente apéndice.

**P = 0.05    N=1000**



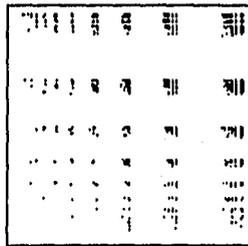
**S = 1.174248**

**P = 0.2    N=1500**



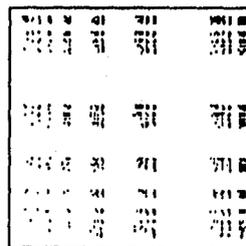
**S = 1.261512**

**P = 0.3    N=2000**



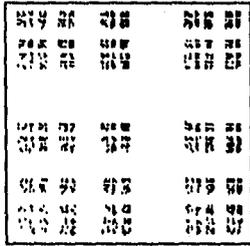
**S = 1.305424**

**P = 0.4    N=2000**



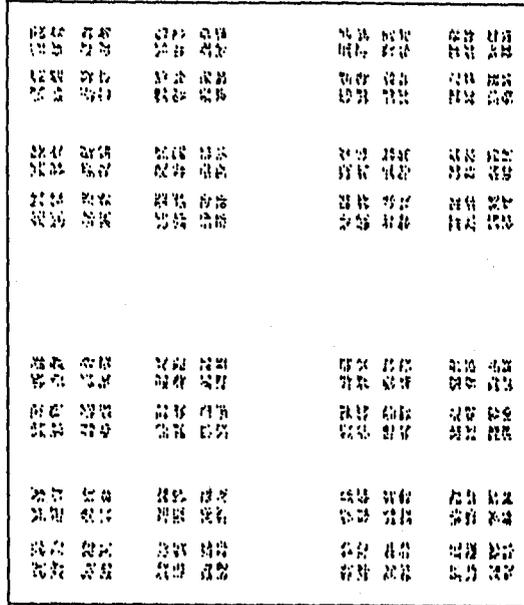
**S = 1.346899**

**P = 0.5 N=2500**



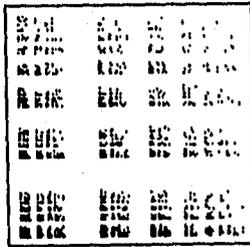
**S = 1.388484**

**P = 0.6 N = 5000**



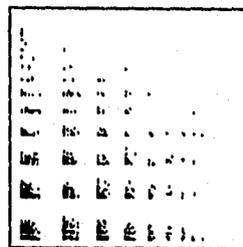
**S = 1.432155**

**P = 0.8 N=3000**



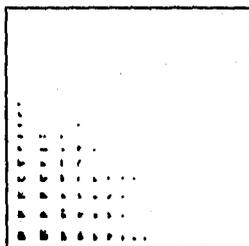
**S = 1.536884**

**P = 0.9 N=2000**



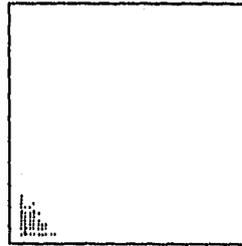
**S = 1.612423**

**P = 0.95 N=1500**



**S = 1.669256**

**P = 0.99 N=1000**



**S = 1.756901**

## APENDICE D

```

REM  PROGRAMA EN QBASIC QUE GRAFICA CONJUNTOS-sP
REM  CONTENIDOS EN EL PLANO.
REM  SE UTILIZAN LAS CONSTANTES DE CONTRACCION
REM  (1-P) Y P^2 DE ACUERDO AL TEOREMA 4 DEL CAPITULO 1.

      KEY OFF: CLS : SCREEN 9
      WINDOW (-.2, -.2)-(1.2, 1.2)
      PRINT "      INTRODUCIR EL VALOR DEL PARAMETRO P. "
      PRINT "                  TAL QUE 0 < P < 1"
      INPUT P
      PRINT "      ¿CUANTAS ITERACIONES DESEAS REALIZAR?"
      INPUT N
      CLS
PRINT "CONJUNTO-sP CON P = "; P; " Y "; N; " ITERACIONES"

REM  Las siguientes dos lineas trazan el marco de la figura:
LINE (-.05, -.05)-(1.05, -.05): LINE -(1.05, 1.05)
LINE -(-.05, 1.05): LINE -(-.05, -.05)

REM  Lo siguiente es el algoritmo del metodo para un
REM  Sistema de Funciones Iteradas (IFS)
      FOR I = 1 TO N
          q = 4 * RND
          IF q < 1 THEN 100
          IF q < 2 THEN 200
          IF q < 3 THEN 300

          X = (1 - P) * X
          Y = (1 - P) * Y
          GOTO 500

      100  X = (1 - P) * X
          Y = Y * P ^ (2) + 1 - P ^ 2
          GOTO 500

      200  X = X * P ^ (2) + 1 - P ^ 2
          Y = (1 - P) * Y
          GOTO 500

      300  X = X * P ^ (2) + 1 - P ^ 2
          Y = Y * P ^ (2) + 1 - P ^ 2

      500 PSET (X, Y): REM Grafica el punto
      NEXT I

REM  Las siguientes dos lineas trazan los segmentos de
REM  rectas con longitudes 1-P y P^2:
      LINE (0, -.07)-(1 - P, -.07)
      LINE (1 - P ^ 2, -.07)-(1, -.07)

      AS = INPUT$(1): END

```