



01180
UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA
División de Estudios de Posgrado

ESTUDIO DEL EFECTO
TERMOACUSTICO

T E S I S

Que para obtener el Grado de
DOCTORA EN INGENIERIA
p r e s e n t a

GUADALUPE HUELSZ LESBROS

México, D.F.

1996

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Resumen

En esta tesis se demuestra teórica y experimentalmente la validez de la explicación dada por Rayleigh a la generación de potencia acústica por el efecto termoacústico. La demostración teórica es válida para cualquier solución a la ecuación de onda para la presión, incluyendo ondas viajeras y estacionarias. La producción de potencia acústica por efecto termoacústico es debida a la adecuada diferencia de fase entre la transferencia de calor al fluido y la oscilación de presión en el mismo. Cuando la transferencia de calor al fluido y la oscilación de presión presentan una diferencia de fase, en valor absoluto, menor a $\pi/2$, la onda acústica es excitada produciéndose potencia acústica. El valor de la diferencia de fase entre la transferencia de calor por una frontera sólida y la oscilación de presión está determinado por el gradiente axial de temperatura en la frontera sólida. La demostración experimental fue posible gracias a que en una onda estacionaria la diferencia de fase crítica entre el flujo de calor al fluido y la presión tiene una relación biunívoca con la diferencia de fase crítica entre las oscilaciones de temperatura y presión en la frontera sólido-fluido. En condiciones de atenuación de la onda acústica, el valor absoluto de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión al acercarse a la frontera sólido-fluido, es menor a $\pi/2$. Mientras que en condiciones de excitación, el valor de esta variable es mayor a $\pi/2$. Esta predicción teórica fue confirmada experimentalmente a través de las mediciones de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y presión dentro de la capa límite térmica, para diferentes valores del gradiente axial de temperatura media en la pared sólida. En esta investigación se desarrollaron las técnicas experimentales necesarias para la medición de la oscilación de temperatura y su defasamiento con respecto a la presión dentro de la capa límite térmica oscilatoria.

Abstract

The validity of the explanation given by Rayleigh for the acoustic power generation by the thermoacoustic effect is theoretically and experimentally demonstrated in this thesis. The theoretical demonstration is valid for any solution of the pressure wave equation, including traveling and standing waves. The acoustic power production by the thermoacoustic effect is due to a suitable phase difference between the heat transfer to the fluid and the fluid pressure oscillation. When the heat transference to the fluid and the pressure oscillation present a phase difference, in absolute value, less than $\pi/2$, the acoustic wave is promoted producing acoustic power. The value of the phase difference between the heat transfer to the fluid from a solid boundary and the pressure oscillation is determined by the axial mean-temperature gradient at the solid boundary. The experimental demonstration was possible due to the fact that in a standing wave, the critical phase difference between the heat flux to the fluid and the pressure has a one-to-one correspondence with the critical phase difference between the temperature and the pressure oscillations in the solid-fluid boundary. In acoustic wave attenuation conditions, the absolute value of the phase difference between the temperature and the pressure oscillations approaching to the solid-fluid boundary is less than $\pi/2$. In excitation conditions, the value of this variable is larger than $\pi/2$. This theoretical prediction was experimentally confirmed through direct measurements of the phase difference between the temperature and pressure oscillations in the thermal boundary layer, for different values of the axial mean-temperature gradient at the solid wall. In this research, the necessary experimental techniques for the measurement of the acoustic temperature oscillations and its phase difference relative to the pressure oscillation inside the thermal boundary layer were developed.

TESIS

COMPLETA

A mis padres por su amor y el ejemplo de honradez, tenacidad y esfuerzo que me dieron.

A Toño y Antonio por su amor y su apoyo para que pudiera realizar este trabajo.

A Eduardo por sus enseñanzas y su amistad.

A mis hermanos y amigos.

A Blanca, Ofelia, y Juan.

A los maestros que me inculcaron el gusto por aprender.

Agradecimientos

En el desarrollo de esta tesis han contribuido de una u otra manera muchas personas, a quienes les agradezco su ayuda. En primer lugar doy las gracias a Eduardo Ramos por su invaluable asesoría, las largas discusiones sostenidas y sus minuciosas revisiones del trabajo. A Mihir Sen por habernos introducido en este interesante tema, sus sugerencias marcaron sin duda la orientación de esta tesis. A José Luis Fernández Zayas y a Jorge Cantó, quienes en su calidad de miembros del Comité Doctoral, a lo largo de tres años supervisaron y con sus sugerencias enriquecieron la investigación. A los demás miembros del Jurado Doctoral: Rosalío Rodríguez, Rina Aguirre y Francisco Solorio por sus útiles observaciones y comentarios. Agradezco también las enriquecedoras discusiones sostenidas con Luis del Castillo y con Antonio del Río.

En la parte experimental, en especial quiero mencionar a Raúl Espejel, quien me orientó en varios aspectos de la instrumentación, además amablemente reparó varios instrumentos. Zellman Warhaft me asesoró en el uso del anemómetro de hilo caliente y me brindó su apoyo para realizar una estancia en la Universidad de Cornell, donde Edward Jordan me enseñó la técnica de reparación de los sensores del anemómetro de hilo caliente y del anemómetro de hilo frío. Luis Felipe Rodríguez contribuyó con útiles sugerencias para la medición del defasamiento. Ricardo Ruiz Boullosa, Antonio Pérez López y Arturo Orozco del Departamento de Acústica del Centro de Instrumentos me asesoraron en varios aspectos de la instrumentación acústica. Guillermo Hernández siempre estuvo dispuesto a ayudarme en los problemas electrónicos y de instrumentación que se iban presentando. Alfredo Nava coordinador técnico, Gregorio Hernández, Miguel Ángel Ríos y Sergio Hernández técnicos del taller del Laboratorio de Energía Solar colaboraron en la construcción del dispositivo experimental. Maricela Ocampo me asesoró en la elaboración de las sustancias químicas necesarias para la reparación de los sensores de los anemómetros. Francisco Solorio y Luis Cerecedo de la Facultad de Ingeniería amablemente prestaron el micrófono y un anemómetro de hilo frío, indispensables para la realización de los experimentos.

Agradezco a Adrian Oskam las fotografías del dispositivo experimental que se incluyen en esta tesis. A Antonio Sierra la revisión del documento final.

A lo largo de mi estancia en el Laboratorio de Energía Solar para la realización de esta investigación, conté con la ayuda de varios investigadores y del personal administrativo, a quienes les agradezco su colaboración. Así mismo, doy las gracias al Instituto de Investigaciones en Materiales que me brindó el apoyo necesario

para la obtención de una beca de la Dirección General de Asuntos del Personal Académico. Además de expresar mi agradecimiento a esta dirección por la beca otorgada, le doy las gracias por el financiamiento proporcionado a través de los proyectos IN 102292 y IN 108195. También quiero agradecer el apoyo económico recibido de la Coordinación General de Estudios de Posgrado bajo los proyectos 011302 y 011306.

Índice

Resumen.....	1
Nomenclatura	2
Introducción	8
1. Revisión bibliográfica	11
1.1. Primeras investigaciones	11
1.2. Análisis en tubos simples	12
1.3. Análisis en tubos con estructuras en su interior	16
1.4. Análisis de ondas viajeras en tubos con estructuras en su interior	18
1.5. Oscilador termoacústico	19
1.6. Bomba de calor y refrigerador termoacústicos	23
1.7. Desarrollos comerciales	25
2. Interpretación del efecto termoacústico	28
2.1. Teoría de Rayleigh	28
2.2. Descripción euleriana en ondas estacionarias	31
2.2.1. Generador	33
2.2.2. Bomba de calor	35
2.3. Interpretación de la teoría de Rayleigh en términos de la diferencia de fase entre el flujo de calor al fluido y la presión	37
3. Teoría del efecto termoacústico	39
3.1. Ecuaciones de balance	40
3.2. Ecuación de onda para la presión	42
3.3. Diferencia de fase entre el flujo de calor y la presión	43
3.4. Producción de potencia acústica	43
3.5. Comprobación teórica de la explicación de Rayleigh	44
3.6. Soluciones a la ecuación de onda para la presión	44

4.5.8. Efecto del gradiente axial de temperatura media en la placa sobre las características globales de la onda de presión	110
4.6. Medición de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y presión	112
4.6.1. Programas de adquisición y análisis de los datos	112
4.6.2. Calibración de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y presión	118
4.7. Resultados y análisis	118
4.7.1. Comprobación experimental de la explicación de Rayleigh ..	120
4.7.2. Medición de la temperatura media como función de la distancia a la placa	127
4.7.3. Comparación con el primer modelo teórico	130
4.7.4. Análisis de la señal de temperatura en el espacio de frecuencias	140
4.8. Conclusiones	150

5. Conclusiones

Anexo 1. Ondas acústicas	156
A1.1. Ondas viajeras	160
A1.2. Ondas estacionarias	161
Anexo 2. Ecuaciones de balance y producción de potencia acústica	164
A2.1. Deducción del modelo bidimensional	164
A2.2. Cálculo del promedio de la producción de potencia acústica	167
A2.3. Cálculo del promedio de la producción de potencia acústica en forma adimensional	172
Anexo 3. Anemometría de hilo caliente y de hilo frío	173
A3.1. Principio de funcionamiento	173
A3.2. Modos de operación	173
A3.3. Sensores empleados	174

Índice

Resumen.....	1
Nomenclatura	2
Introducción	8
1. Revisión bibliográfica	11
1.1. Primeras investigaciones	11
1.2. Análisis en tubos simples	12
1.3. Análisis en tubos con estructuras en su interior	16
1.4. Análisis de ondas viajeras en tubos con estructuras en su interior	18
1.5. Oscilador termoacústico	19
1.6. Bomba de calor y refrigerador termoacústicos	23
1.7. Desarrollos comerciales	25
2. Interpretación del efecto termoacústico	28
2.1. Teoría de Rayleigh	28
2.2. Descripción euleriana en ondas estacionarias	31
2.2.1. Generador	33
2.2.2. Bomba de calor	35
2.3. Interpretación de la teoría de Rayleigh en términos de la diferencia de fase entre el flujo de calor al fluido y la presión	37
3. Teoría del efecto termoacústico	39
3.1. Ecuaciones de balance	40
3.2. Ecuación de onda para la presión	42
3.3. Diferencia de fase entre el flujo de calor y la presión	43
3.4. Producción de potencia acústica	43
3.5. Comprobación teórica de la explicación de Rayleigh	44
3.6. Soluciones a la ecuación de onda para la presión	44

3.7. Primer modelo	47
3.7.1. Onda viajera	47
3.7.2. Onda estacionaria	51
Diferencia de fase entre la temperatura y la presión	53
3.8. Segundo modelo	53
3.8.1. Onda viajera	54
3.8.2. Onda estacionaria	57
3.9. Comparación entre ambos modelos	61
3.9.1. Comparación entre ondas viajeras y estacionarias	62
3.10. Estudio paramétrico en el segundo modelo	65
3.10.1. Onda viajera	65
3.10.2. Onda estacionaria	76
3.11. Conclusiones	80
4. Experimentación	82
4.1. Objetivo	82
4.2. Dispositivo experimental	83
4.3. Instrumentación	88
4.3.1. Medición de la presión acústica	88
4.3.2. Medición de la temperatura del aire	88
4.3.3. Medición de la velocidad acústica	90
4.3.4. Medición de la temperatura de la placa	90
4.3.5. Equipo auxiliar	90
4.4. Sistemas de adquisición de datos	92
4.5. Desarrollo de la técnica de medición	93
4.5.1. Determinación de la frecuencia de resonancia del sistema	93
4.5.2. Análisis de la señal del micrófono	97
4.5.3. Determinación del perfil axial de la amplitud de la onda de presión	97
4.5.4. Análisis de la señal del anemómetro de hilo caliente	97
4.5.5. Análisis de la señal del "anemómetro de hilo frío"	103
4.5.6. Calibración del "anemómetro de hilo frío" en una onda acústica	106
4.5.7. Calibración del anemómetro de hilo caliente en una onda acústica	108

4.5.8. Efecto del gradiente axial de temperatura media en la placa sobre las características globales de la onda de presión	110
4.6. Medición de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y presión	112
4.6.1. Programas de adquisición y análisis de los datos	112
4.6.2. Calibración de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y presión	118
4.7. Resultados y análisis	118
4.7.1. Comprobación experimental de la explicación de Rayleigh ..	120
4.7.2. Medición de la temperatura media como función de la distancia a la placa	127
4.7.3. Comparación con el primer modelo teórico	130
4.7.4. Análisis de la señal de temperatura en el espacio de frecuencias	140
4.8. Conclusiones	150

5. Conclusiones

Anexo 1. Ondas acústicas	156
A1.1. Ondas viajeras	160
A1.2. Ondas estacionarias	161
Anexo 2. Ecuaciones de balance y producción de potencia acústica	164
A2.1. Deducción del modelo bidimensional	164
A2.2. Cálculo del promedio de la producción de potencia acústica	167
A2.3. Cálculo del promedio de la producción de potencia acústica en forma adimensional	172
Anexo 3. Anemometría de hilo caliente y de hilo frío	173
A3.1. Principio de funcionamiento	173
A3.2. Modos de operación	173
A3.3. Sensores empleados	174

A3.4. Transferencia de calor en el hilo	174
A3.5. Sensibilidad del hilo a fluctuaciones de velocidad o de temperatura	176
A3.6. Características del sensor de fluctuaciones de velocidad	177
A3.7. Medición de velocidad con el anemómetro de hilo caliente	177
A3.8. Medición de la oscilación de velocidad en una onda acústica	179
A3.9. Características del sensor de fluctuaciones de temperatura	179
A3.10. Medición de temperatura con el "anemómetro de hilo frío"	180
A3.11. Medición de la oscilación de temperatura en una onda acústica	181
Anexo 4. Propiedades del aire y de la cerámica	182
Anexo 5. Publicaciones derivadas de esta tesis	184

Referencias

Resumen

En esta tesis se demuestra teórica y experimentalmente la validez de la explicación dada por Rayleigh a la generación de potencia acústica por el efecto termoacústico. La demostración teórica es válida para cualquier solución a la ecuación de onda para la presión, incluyendo ondas viajeras y estacionarias. La producción de potencia acústica por efecto termoacústico es debida a la adecuada diferencia de fase entre la transferencia de calor al fluido y la oscilación de presión en el mismo. Cuando la transferencia de calor al fluido y la oscilación de presión presentan una diferencia de fase, en valor absoluto, menor a $\pi/2$, la onda acústica es excitada produciéndose potencia acústica. El valor de la diferencia de fase entre la transferencia de calor por una frontera sólida y la oscilación de presión está determinado por el gradiente axial de temperatura en la frontera sólida. La demostración experimental fue posible gracias a que en una onda estacionaria la diferencia de fase crítica entre el flujo de calor al fluido y la presión tiene una relación biunívoca con la diferencia de fase crítica entre las oscilaciones de temperatura y presión en la frontera sólido-fluido. En condiciones de atenuación de la onda acústica, el valor absoluto de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión al acercarse a la frontera sólido-fluido, es menor a $\pi/2$. Mientras que en condiciones de excitación, el valor de esta variable es mayor a $\pi/2$. Esta predicción teórica fue confirmada experimentalmente a través de las mediciones de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y presión dentro de la capa límite térmica, para diferentes valores del gradiente axial de temperatura media en la pared sólida. En esta investigación se desarrollaron las técnicas experimentales necesarias para la medición de la oscilación de temperatura y su defasamiento con respecto a la presión dentro de la capa límite térmica oscilatoria.

Abstract

The validity of the explanation given by Rayleigh for the acoustic power generation by the thermoacoustic effect is theoretically and experimentally demonstrated in this thesis. The theoretical demonstration is valid for any solution of the pressure wave equation, including traveling and standing waves. The acoustic power production by the thermoacoustic effect is due to a suitable phase difference between the heat transfer to the fluid and the fluid pressure oscillation. When the heat transfer to the fluid and the pressure oscillation present a phase difference, in absolute value, less than $\pi/2$, the acoustic wave is promoted producing acoustic power. The value of the phase difference between the heat transfer to the fluid from a solid boundary and the pressure oscillation is determined by the axial mean-temperature gradient at the solid boundary. The experimental demonstration was possible due to the fact that in a standing wave, the critical phase difference between the heat flux to the fluid and the pressure has a one-to-one correspondence with the critical phase difference between the temperature and the pressure oscillations in the solid-fluid boundary. In acoustic wave attenuation conditions, the absolute value of the phase difference between the temperature and the pressure oscillations approaching to the solid-fluid boundary is less than $\pi/2$. In excitation conditions, the value of this variable is larger than $\pi/2$. This theoretical prediction was experimentally confirmed through direct measurements of the phase difference between the temperature and pressure oscillations in the thermal boundary layer, for different values of the axial mean-temperature gradient at the solid wall. In this research, the necessary experimental techniques for the measurement of the acoustic temperature oscillations and its phase difference relative to the pressure oscillation inside the thermal boundary layer were developed.

Nomenclatura

Minúsculas

a	amplitud de la onda
c	velocidad del sonido en el fluido
d	semiseparación de las placas con gradiente de temperatura
f	frecuencia de la onda
f_r	frecuencia de resonancia del sistema
f_k	efecto de la capa límite térmica en la ecuación de onda
f_v	efecto de la capa límite viscosa en la ecuación de onda
g	aceleración de la gravedad
$gradT_m$	gradiente axial de temperatura media (equivalente a ∇T_m)
h	coeficiente de transferencia de calor
i	número imaginario $i = \sqrt{-1}$
k	número de onda
\mathbf{k}	vector de onda
l	semiespesor de la placa con gradiente de temperatura
n	exponente en la ley de King (anemómetro de hilo caliente)
\mathbf{n}	vector unitario en la dirección de propagación de la onda
p	presión
q	generación de calor en el hilo
q_0	calor suministrado al fluido desde la frontera sólida en la posición x
\mathbf{r}	vector de posición (x,y,z)
s	entropía
t	tiempo
u	componente de la velocidad en la dirección x
v	componente de la velocidad en la dirección y
\mathbf{v}	vector velocidad
w	promedio temporal de la potencia acústica producida por el fluido en la posición x
\dot{w}	potencia producida por el fluido por unidad de volumen
x	coordenada paralela a la dirección de propagación de la onda
$x_{(1)}$	posición del anemómetro dentro de la guía de onda

$x_{(2)}$	posición del micrófono dentro de la guía de onda
y	coordenada transversal a la propagación de la onda y normal a la placa
z	coordenada transversal a la propagación de la onda y paralela a la placa

Mayúsculas

A	área transversal del hilo
B	coeficiente en la relación entre las fluctuaciones del voltaje de salida del anemómetro de hilo caliente y las fluctuaciones de velocidad
C_p	calor específico a presión constante del gas
C_s	calor específico de la placa sólida
C_+	amplitud compleja de la onda que se propaga en la dirección positiva del eje x
C_-	amplitud compleja de la onda que se propaga en la dirección negativa del eje x
D	diámetro del hilo del sensor
E	voltaje de salida de un instrumento, el subíndice que lo acompaña se refiere a la variable que corresponde a dicho voltaje
$E_{u_{ab}}$	voltaje de salida del anemómetro de hilo caliente con velocidad (media y perturbación) igual a cero
F_T	coeficiente independiente a determinar por la calibración del "anemómetro de hilo frío"
F_U	coeficiente independiente en la ley de King a determinar por la calibración del anemómetro de hilo caliente
Gr	número de Grashof $Gr \equiv \frac{g\beta_m D^3 (T_w - T_a)}{\mu^2}$
G_T	coeficiente a determinar por la calibración del "anemómetro de hilo frío"
G_U	coeficiente en la ley de King a determinar por la calibración del anemómetro de hilo caliente
H	longitud del hilo del sensor
I	corriente eléctrica a través del hilo del sensor

K	conductividad térmica
L	longitud de la guía de ondas
Nu	número de Nusselt $Nu \equiv hD/K$
Pr	número de Prandtl $Pr \equiv C_p\mu/K$
Q	flujo de calor hacia la parcela de fluido
R	resistencia eléctrica
R_{20}	resistencia eléctrica del sensor del anemómetro evaluada en $T = 20^\circ C$
Re	número de Reynolds $Re \equiv \rho UD/\mu$
S	sobrecalentamiento del hilo
T	temperatura
U	magnitud de la velocidad media normal al hilo
V	volumen
W	trabajo termodinámico
X	desplazamiento de las partículas de fluido con respecto a su posición media
Y	máxima longitud transversal de la guía de ondas

Griegas minúsculas

α	diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión
α_b	diferencia de fase entre el voltaje de salida del anemómetro de hilo frío (o su negativo en el caso del anemómetro DANTEC) y el voltaje de salida del micrófono medida lejos de la placa y sin gradiente de temperatura
α_{exp}	diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión medida experimentalmente
β	coeficiente de expansión térmica del fluido
γ	cociente entre los calores específicos a presión constante y a volumen constante en el fluido
δ_k	profundidad de penetración térmica en el fluido $\delta_k = \sqrt{2K/\rho_m C_p \omega}$

δ_s	profundidad de penetración térmica en el sólido $\delta_s = \sqrt{2K_s/\rho_s C_s \omega}$
δ_v	profundidad de penetración viscosa en el fluido $\delta_v = \sqrt{2\mu/\rho_m \omega}$
ϵ	relación entre las propiedades del fluido y del sólido $\epsilon = \sqrt{K \rho_m C_p / K_s \rho_s C_s}$
ϵ_s	factor por el acoplamiento de la temperatura del fluido y de la placa sólida
ζ	fase de la amplitud compleja de la onda C_+
θ	diferencia de fase entre el calor suministrado al fluido y la oscilación de presión como función de la coordenada x
ϑ	coeficiente térmico de resistividad eléctrica del hilo
λ	longitud de onda
μ	densidad dinámica
ξ	calor perdido por el hilo debido a la convección forzada (adimensional)
ρ	densidad
τ	período de la onda
ϕ	potencial de velocidad
χ	razón entre la sensibilidad del hilo a fluctuaciones de temperatura y la sensibilidad a fluctuaciones de velocidad
ψ	diferencia de fase entre las oscilaciones de velocidad y de presión
ω	frecuencia angular

Griegas mayúsculas

Γ	$\Gamma = \beta_{mr} T_{mr} \nabla T_m / (\gamma - 1)$
Δx	longitud en la dirección x de la placa con gradiente de temperatura
Δz	longitud en la dirección z de la placa con gradiente de temperatura
Φ	se emplea para designar cualquier variable mecánica o termodinámica

Superíndices

- * en el análisis adimensional denota a las variables dimensionales
- † en el análisis adimensional denota a la coordenada transversal a la placa dentro de la placa
- ' perturbación de la variable

Subíndices

- a* amplitud local de la oscilación en onda estacionaria
- aa* amplitud local de la oscilación en onda estacionaria adiabática
- c* relativo a los cables conductores
- calc* valor de la variable calculado teóricamente a partir del valor de presión correspondiente
- m* valor medio de la variable
- o* posición óptima (donde se obtiene máxima producción de potencia acústica)
- r* valor de la variable en el punto de referencia
- s* relativo a la placa sólida
- t* relativo al termistor
- w* relativo al hilo calentado
- A* amplitud máxima de la oscilación (en ondas estacionarias corresponde a la amplitud en el antinodo)
- Aa* amplitud máxima de la oscilación en condiciones adiabáticas
- I* parte imaginaria de una variable
- R* parte real de una variable
- 1* perturbación de primer orden
- 1, 2, 3, 4* número de la etapa en que se evalúa la variable (en el esquema del efecto termoacústico en ondas estacionarias)
- ∞ lejos de la placa

Operadores

∇T_m	gradiente axial de la temperatura media (en las gráficas se usa alternativamente $\text{grad}T_m$)
∇T_{mc}	valor crítico del gradiente axial de la temperatura media dado por la condición $w = 0$
mag	magnitud del espectro de frecuencias
$O()$	orden de magnitud
$Re()$	parte real
$ $	valor absoluto o magnitud de un vector
$\langle \rangle$	promedio temporal
$\ \ $	magnitud de un número complejo
$\hat{}$	función que sólo depende de las coordenadas espaciales
\sim	complejo conjugado de la variable

Introducción

Este trabajo tiene por objetivo estudiar teórica y experimentalmente el origen físico de la generación o atenuación de sonido por efecto termoacústico. El interés actual en el estudio de este fenómeno se debe a sus aplicaciones potenciales, como son el refrigerador termoacústico y el motor termoacústico utilizado para accionar el refrigerador de pulsos o el generador eléctrico magnetohidrodinámico, o bien, como fuente de ondas acústicas. Es importante enfatizar que los refrigeradores termoacústicos se han planteado como una alternativa importante para eliminar el uso de fluorocarbonos indispensables en los refrigeradores de diseño convencional. En nuestro país se ha iniciado recientemente el estudio de este fenómeno por un grupo de investigadores del Departamento de Acústica del Centro de Instrumentos y por un grupo del Laboratorio de Energía Solar. Fue en este laboratorio donde llevé a cabo la investigación que aquí se reporta.

Las palabras termoacústica y efecto termoacústico son empleadas en diferentes contextos en donde existen fenómenos acústicos y fenómenos térmicos asociados, como por ejemplo en Swift (1988), Chotiros (1988) y Huang & Bau (1995). En esta tesis se estudia el efecto termoacústico que se presenta en un sistema compuesto por un fluido compresible y una frontera sólida. En particular se considera el efecto termoacústico donde un adecuado gradiente de temperatura en una superficie sólida en contacto con un fluido produce una onda acústica, en este caso parte de la energía térmica se transforma en energía mecánica. Y también se considera el efecto inverso, en el cual, una onda acústica al interactuar con una frontera sólida produce un gradiente de temperatura en ésta, es decir parte de la energía mecánica de la onda se transforma en energía térmica.

Usualmente se piensa en una onda acústica en un fluido compresible como las oscilaciones acopladas de presión y de desplazamiento. Sin embargo, éstas siempre van acompañadas de oscilaciones de temperatura y demás variables termodinámicas. La combinación de las oscilaciones mecánicas y termodinámicas en el fluido y su interacción con una frontera sólida es lo que produce el efecto termoacústico. Aunque este efecto ocurre en la vida diaria, es tan pequeño que comúnmente no puede apreciarse. Sin embargo, en algunos sistemas se dan las condiciones adecuadas para que esta interacción produzca efectos considerables.

En el primer capítulo de esta tesis, se hace una revisión bibliográfica sobre el

efecto termoacústico, desde las primeras observaciones de este fenómeno, hasta los diseños comerciales de máquinas termoacústicas. Esta revisión de la literatura, permite contextualizar la aportación de esta tesis y puede coadyuvar en la planeación de futuras investigaciones en este campo.

En el segundo capítulo se estudia la explicación cualitativa de la generación o atenuación de sonido por efecto termoacústico dada por Lord Rayleigh. Utilizando una descripción euleriana, se presenta un esquema del fenómeno termoacústico en ondas estacionarias, en sus modalidades de motor y de bomba de calor. En este esquema se hace evidente el cambio en la diferencia de fase entre la oscilación de temperatura y la oscilación de presión según se tenga producción o atenuación de la onda acústica. Por último, se interpreta la explicación de Rayleigh en términos de un parámetro cuantitativo: la diferencia de fase entre el flujo de calor al fluido a través de la frontera sólida y la oscilación de presión.

La teoría del efecto termoacústico se desarrolla en el tercer capítulo de la tesis. Se describe el sistema físico a considerar y se presentan las ecuaciones de balance que gobiernan dicho sistema, llegándose a la deducción de una ecuación de onda para las oscilaciones de presión. Se calculan la diferencia de fase entre el flujo de calor al fluido a través de la frontera sólida y la oscilación de presión, y la producción de potencia acústica. Se comparan las expresiones obtenidas para ambas variables, obteniéndose la comprobación teórica de la explicación de Rayleigh a la generación o atenuación de sonido por efecto termoacústico. A continuación se presentan dos modelos de solución a la ecuación de onda, estudiándose en cada uno de ellos las ondas viajeras y las ondas estacionarias. Se lleva a cabo una comparación entre ambos modelos y un estudio paramétrico en el segundo modelo. Finalmente, se señalan las conclusiones derivadas del estudio teórico.

En el cuarto capítulo se muestran los experimentos realizados, cuyo objetivo principal es validar la explicación de Rayleigh a la producción o atenuación de potencia acústica por efecto termoacústico. Se describen el dispositivo experimental, la instrumentación y los sistemas de adquisición de datos empleados. Se hace una presentación de los diferentes experimentos realizados, los cuales se dividen en dos etapas: la primera incluye aquellos experimentos que sirvieron para desarrollar la técnica de medición y la segunda etapa contiene la descripción de las mediciones efectuadas para el cálculo de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión en una onda acústica estacionaria que se encuentra en contacto con una placa sólida con gradiente axial de la temperatura media. Los resultados experimentales se comparan con las predicciones teóricas y se efectúa un análisis de los mismos. Por último se presentan las conclusiones

del trabajo experimental, que demuestran la validez del criterio de Rayleigh.

Las conclusiones globales de esta tesis se presentan en el quinto capítulo.

Se incluyen cinco anexos que complementan la información proporcionada en los capítulos de esta tesis. Esto se hace con el objeto de hacer de este trabajo, en la medida de lo posible, un documento autocontenido. En el anexo 1 se presentan los conceptos básicos de las ondas acústicas en fluidos. Se describen algunos aspectos de las ondas viajeras y de las ondas estacionarias monocromáticas. El anexo 2 incluye la deducción de algunas de las principales ecuaciones del desarrollo teórico. En el anexo 3 se presenta un resumen de las técnicas de anemometría de hilo caliente y de hilo frío, empleadas para la medición de las oscilaciones de velocidad y de temperatura en la onda acústica, respectivamente. El anexo 4 contiene los valores de las propiedades del aire y de la cerámica empleados en el cálculo de las predicciones teóricas correspondientes a los experimentos realizados. Finalmente se incluye un quinto anexo donde se encuentran las publicaciones derivadas de esta tesis.

1 Revisión bibliográfica

En este capítulo se presenta una visión general del estado del arte sobre el efecto termoacústico, particularmente en sistemas similares al tubo de Sondhauss. El objetivo de esto es contextualizar la contribución de esta tesis, así mismo esta información ayudará a planear futuras investigaciones en este campo. Parte del material de este capítulo está contenido en las diversas revisiones bibliográficas que se han publicado sobre el tema. La más antigua data de 1956, en ella Putman y Dennis revisaron los estudios sobre oscilaciones en tubos de sistemas de combustión. En 1968, Feldman publicó dos revisiones sobre el efecto termoacústico, una enfocada al tubo de Sondhauss y otra, al tubo de Rijke. Rott presentó en 1980 un artículo que resume los principales resultados de la teoría desarrollada durante más de una década por él y su grupo. Posteriormente, en 1988, Swift escribió un artículo tutorial y de revisión enfocado a las máquinas termoacústicas (Swift 1988b). En 1994, Sen presentó una amplia revisión bibliográfica sobre el tema. Recientemente, en un artículo de divulgación escrito por Swift (1995) se mencionan los últimos trabajos de investigación sobre el efecto termoacústico incluyendo desarrollos de prototipos comerciales para máquinas termoacústicas.

1.1 Primeras investigaciones

Las primeras observaciones de la producción de sonido a través del calentamiento adecuado en un sistema, es decir del efecto termoacústico en su modalidad de generador de sonido, datan de mediados del siglo XVIII. Los sopladores de vidrio emplean un tubo de vidrio, en un extremo se encuentra el vidrio fundido y por el otro extremo soplan. El tubo es lo suficientemente largo y delgado para que, aunque el extremo con el vidrio fundido tenga una alta temperatura, la temperatura del extremo por el que soplan sea cercana a la temperatura ambiente. Fue en este sistema en el que por primera vez se observó el efecto termoacústico. Cuando se deja de soplar, el extremo a temperatura ambiente queda abierto y emite un fuerte sonido.

En 1777 Byron Higgins realizó los primeros experimentos en este campo y produjo oscilaciones acústicas colocando adecuadamente una flama de hidrógeno dentro de un tubo largo (Putman & Dennis, 1956). El trabajo de Higgins eventualmente evolucionó en la ciencia moderna de la combustión de pulso (Zinn, 1986).

Sondhauss construyó en 1850 un tubo con características similares a los tubos

de los sopladores de vidrio, es decir un tubo largo y delgado con un extremo abierto y el otro cerrado con un bulbo tal como se muestra en la Fig. 1.1. Cuando el extremo cerrado es suficientemente calentado el tubo emite oscilaciones acústicas. Sondhauss encontró que la frecuencia del sonido emitido depende de las dimensiones del tubo. Sin embargo no ofreció ninguna explicación del fenómeno.

Posteriormente, se estudiaron otras geometrías en donde el efecto termoacústico en su modalidad de generación de oscilaciones acústicas se manifestaba, como por ejemplo el tubo de Rijke (Feldman, 1968b). En este tubo, las oscilaciones acústicas se producen cuando se introduce calor a una malla interna localizada en la mitad inferior de un tubo vertical con una corriente de aire ascendente (ver Fig. 1.2.).

El principio de la termoacústica teórica se remonta a 1868, en que Kirchhoff calculó la atenuación de la onda acústica en un gas dentro de un ducto debido a la transferencia de calor oscilatoria entre la pared isotérmica y el gas.

En 1896 Lord Rayleigh ofreció una explicación cualitativa de la producción de oscilaciones acústicas en un gas en términos de la fase relativa entre el flujo de calor al gas y las perturbaciones de presión. En particular explicó las condiciones para la generación de sonido en el tubo de Sondhauss. Varios autores han considerado válida la explicación de Rayleigh a la producción de sonido por efecto termoacústico, sin embargo no se ha hecho explícita su relación con los desarrollos teóricos que actualmente se usan para modelar este fenómeno.

1.2 Análisis en tubos simples

El estudio del efecto termoacústico permaneció prácticamente olvidado durante aproximadamente 50 años. No fue sino hasta mediados de este siglo que en investigaciones criogénicas, Taconis y colaboradores (1949) encontraron que se producían oscilaciones en tubos llenos de gas cuyos extremos se encontraban a temperaturas muy diferentes. A partir de entonces, estas oscilaciones se conocen como oscilaciones de Taconis y se estudiaron en detalle pues constituían un problema en los tubos criogénicos. Taconis y colaboradores explicaron el fenómeno en términos de la diferencia de fase entre el efecto de atenuación y el efecto de la conducción de calor, sin embargo la exposición resulta poco clara. En 1954 Clement y Gaffney hicieron observaciones sistemáticas de las oscilaciones de Taconis y encontraron que la distribución de temperatura a lo largo del tubo es una de las variables más importantes que determinan la producción de oscilaciones.

A partir de 1969, Nicholas Rott del Instituto Federal Suizo de Tecnología

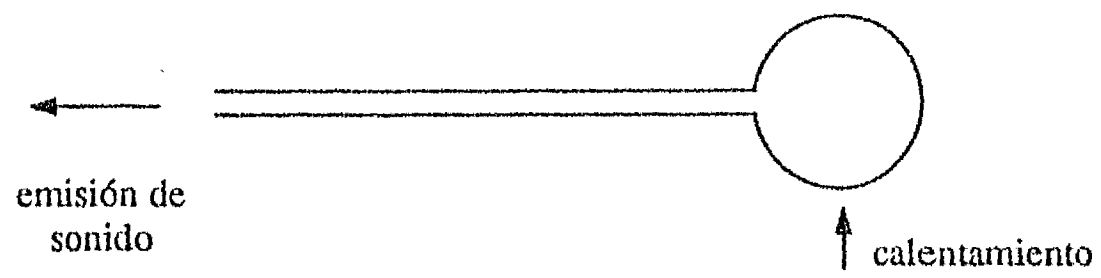


Fig. 1.1. Tubo de Sondhauss

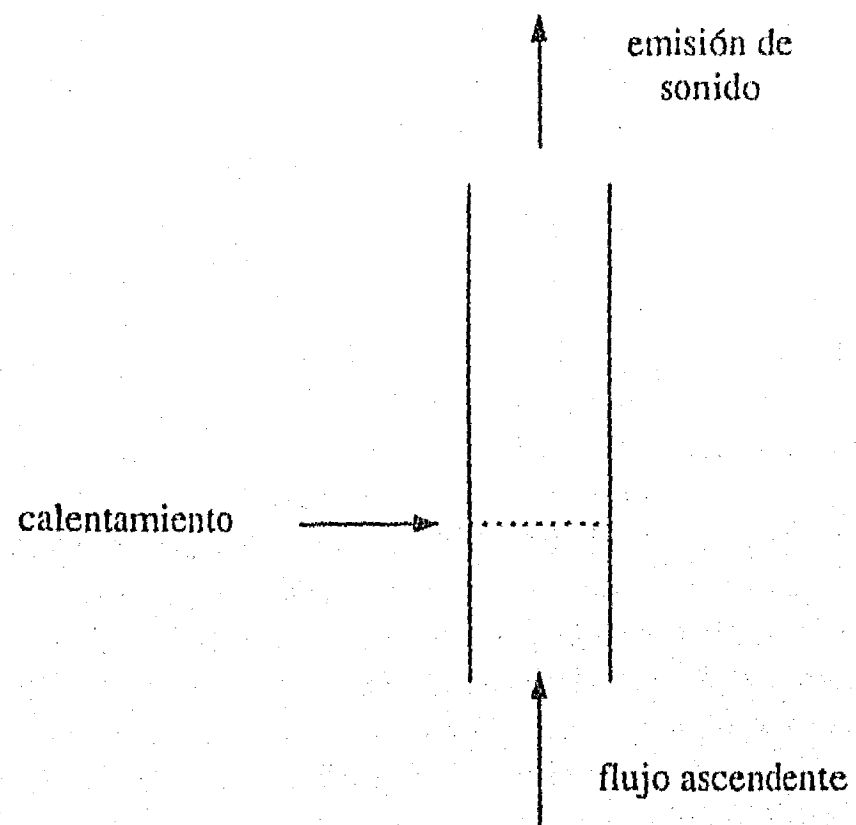


Fig. 1.2. Tubo de Rijke

publicó una serie de artículos para modelar las oscilaciones de Taconis. Basado en las ecuaciones de balance estableció una teoría lineal para tubos con temperatura media dependiente de la posición axial que ha servido como fundamento para el estudio del efecto termoacústico. Con esta teoría se obtiene una ecuación de onda para la presión. Como primera aproximación para resolver analíticamente la ecuación de onda resultante y determinar el límite de estabilidad del helio, Rott supuso la temperatura media como una función escalón. Posteriormente consideró una función continua tipo S y obtuvo numéricamente el límite de estabilidad para el helio, encontrando la existencia de dos curvas de estabilidad (Rott, 1973). En otro artículo Rott (1974a) analizó la influencia de la conducción de calor y del gradiente de temperatura en las componentes de la velocidad axial y transversal de segundo orden de una onda acústica estacionaria¹, en un tubo con temperatura media dependiente de la posición axial.

El descubrimiento de que la energía acústica puede también convertirse en flujo de calor, esto es el efecto termoacústico en modalidad de bomba de calor, es mucho más reciente. En 1975 P. Merkli y H. Thomann del Instituto Federal Suizo de Tecnología realizaron experimentos para estudiar el origen del calentamiento encontrado por Sprenger. Este autor había publicado en 1954 un artículo describiendo sus sorprendentes hallazgos experimentales en los que las oscilaciones generadas en un tubo lleno de gas al dirigirle un chorro de gas al extremo abierto (tubo de Hartmann-Sprenger) puede producir un fuerte calentamiento del extremo cerrado, observándose temperaturas mayores a 1000K. Estas temperaturas son mayores que la temperatura de estancamiento de corriente libre del flujo. Ya que el flujo incidente era supersónico, dentro del tubo se observaron ondas de choque viajeras. Varios autores trataron de explicar el calentamiento a través del aumento de entropía debido a las discontinuidades. Sin embargo, la intensidad de las ondas de choque no cambia a lo largo del tubo, por lo que el calentamiento debido a ellas no cambiaría con la posición y por lo tanto, este fenómeno no puede explicarse por qué el extremo cerrado se calentaba mayormente. Brocher y Maresca (1973) habían tratado de explicar sin éxito el calentamiento tomando en cuenta el intercambio de masa con el chorro incidente. Merkli y Thomann usaron un pistón oscilatorio para generar ondas acústicas en un tubo y observaron diferencias de temperatura a lo largo de la pared del tubo sin que existieran ondas de choque. Encontraron calentamiento del extremo cerrado y enfriamiento del ex-

¹La existencia de las componentes de velocidad de segundo orden en una onda acústica fue estudiada inicialmente por Rayleigh (1896) y se le conoce con el nombre de *acoustic streaming*.

tremo abierto, que es la región de máxima velocidad, donde la disipación viscosa es mayor. Para modelar este efecto usaron las ecuaciones de balance a segundo orden, y calcularon el promedio temporal del flujo de calor como función de la posición axial; demostraron que esta cantidad de segundo orden puede expresarse en términos del producto de cantidades de primer orden. Éstas fueron obtenidas de soluciones aproximadas de las ecuaciones de balance a primer orden para un tubo isotérmico, y además encontraron que el flujo de calor es mayor para fluidos con menor número de Prandtl. Los resultados teóricos concordaron satisfactoriamente con los experimentos y demostraron la importancia de la naturaleza oscilatoria del flujo.

Usando una simplificación de la teoría de Merkli y Thomann para el caso de capa límite delgada, Rott (1974b) estudió el efecto combinado del calentamiento por efecto termoacústico, que él denominó *thermoacoustic streaming*, y del calentamiento por el efecto de ondas de choque en un tubo resonante. Este autor encontró que aunque el primer efecto es de segundo orden y el segundo efecto es de tercer orden en amplitud, debido a los pequeños parámetros del efecto termoacústico, resulta que el calentamiento por ambos efectos puede tener un peso similar. En otro trabajo Rott (1975) extendió la teoría de Merkli y Thomann para el caso de tubos con distribución de temperatura axial.

En 1976 Rott y Zouzoulas estudiaron las oscilaciones termoacústicas en tubos de sección transversal variable, con un énfasis particular en la posible reducción de la razón entre temperatura caliente y la temperatura fría necesaria para la excitación de las oscilaciones. Encontraron que tubos con una sección transversal óptima en la zona de cambio de temperatura y con mayor sección transversal en las zonas isotérmicas disminuye la razón crítica de temperaturas. Realizaron experimentos que confirmaron su teoría. Estos autores analizaron también las oscilaciones producidas en una columna de gas y líquido en el extremo abierto del tubo, encontrando que la frecuencia de las oscilaciones se reduce debido a la inercia del líquido y del engrosamiento de la capa límite de Stokes. Los experimentos realizados con helio confirmaron los límites de estabilidad teóricos. Los experimentos con aire y agua mostraron que el valor crítico de la razón de temperaturas es menor que para el helio.

En la década de los ochentas T. Yazaki y colaboradores (1980) de la Universidad de Tsukuba confirmaron experimentalmente las dos líneas de estabilidad predichas por la teoría de Rott para el helio. R. G. Galiullin (1982, 1984 y 1985) de la Universidad Estatal de V.I. Ul'yanov-Lenin Kazan propuso algunas modificaciones al modelo de Merkli para satisfacer la condición de velocidad

transversal nula en la pared e incluir otros efectos no lineales para estudiar el caso cerca de la frecuencia de resonancia. Experimentalmente midió el flujo de calor en la pared como función de la posición y sus observaciones coincidieron satisfactoriamente con la teoría. Müller y Rott (1983) calcularon la potencia acústica producida en tubos con una discontinuidad en la distribución de temperatura axial demostrando teóricamente la utilidad de estos dispositivos aún a moderada razón de temperaturas. En 1984, Rott obtuvo soluciones analíticas aproximadas para calcular el calentamiento en el extremo cerrado del tubo producido por una onda acústica estacionaria en el gas, considerando las paredes del tubo adiabáticas. Akira Tominaga y colaboradores (1984) de la Universidad de Tsukuba relacionaron el flujo de calor y la producción de energía en ondas acústicas con las oscilaciones de entropía debidas a procesos irreversibles, en su estudio consideró fluidos sin viscosidad. Las observaciones experimentales de Gorchachev *et al.* (1986), y las investigaciones teóricas y experimentales de H. Luck y Ch. Trepp (1992c) del Instituto de Ingeniería de Procesos y Criogenia en Zürich se enfocaron a estudiar la forma de evitar las oscilaciones en tubos criogénicos. En 1992 A.G. Kuzmina de la Asociación Científica e Industrial de Energía Criogénica en Moscú reportó flujos de calor en los tubos criogénicos debido a las oscilaciones termoacústicas dos ordenes de magnitud mayores que los publicados previamente y ofreció algunas explicaciones para estas oscilaciones anómalas.

1.3 Análisis en tubos con estructuras en su interior

En 1962 investigadores de la Universidad de Missouri iniciaron la búsqueda de mecanismos para mejorar la eficiencia en la producción de sonido por efecto termoacústico, logrando esto al introducir estructuras al interior del tubo (Carter *et al.* 1962). Feldman y Carter reportaron en 1970 experimentos donde usaron un pequeño paquete de tubos de vidrio *pyrex* en el interior del tubo. Calentaron el extremo del paquete más cerca del extremo cerrado del tubo con una resistencia interna y enfriaron el otro lado con un intercambiador externo. Señalaron que el mecanismo para la producción de oscilaciones termoacústicas consiste de dos efectos separados, uno debido la expansión periódica y contracción térmica y el otro debido al mezclado del gas caliente y el frío dentro del tubo. En su artículo tutorial de 1988, Swift incluyó el análisis del efecto termoacústico en una pequeña placa y en un apilamiento de pequeñas placas paralelas dentro de un tubo con una onda estacionaria (Swift 1988b). Estos análisis permiten estudiar las características principales del efecto termoacústico.

W. Pat Arnott y colaboradores de la Universidad de Mississippi propusieron en 1991 una formulación utilizando teoremas de translación² para el estudio del fenómeno termoacústico en estructuras con poros de sección transversal arbitraria y encontraron que el flujo de calor y la producción de potencia son mayores para el apilamiento de placas paralelas. Al año siguiente Anthony A. Atchley y colaboradores (1992a) de la Escuela naval para posgraduados de Monterey emplearon técnicas de ondas planas propagándose en direcciones contrarias en el estudio de tubos termoacústicos con estructuras en su interior. Usando helio y argón como fluidos de trabajo, reportaron mediciones de la respuesta frecuencial y del factor de calidad³ de un tubo termoacústico como función de la presión media y del gradiente de temperatura en la estructura (placas paralelas) usando gradientes menores al crítico. El acuerdo entre la teoría y el experimento es bueno para valores altos de la presión media, sin que se expliquen las causas de las discrepancias a bajas presiones. Los resultados muestran que si se desea producir potencia acústica es conveniente usar argón ya que su gradiente crítico es menor. Así mismo, parecería que existe un valor intermedio de presión media (entre 170 y 500 kPa) en que el gradiente crítico es mínimo. Los datos de estos experimentos fueron comparados por Atchley (1992) con resultados teóricos usando un análisis en que supone ondas estacionarias en el tubo. Esta teoría extiende la teoría de Swift (1988b) al no considerar a la capa límite pequeña, ni placas pequeñas. Este enfoque no es tan general como la teoría de ondas propagándose en sentidos opuestos, pero da resultados satisfactorios si se incluye la distribución de temperaturas, sin embargo subestima la atenuación de la onda. J. H. Xiao (1992) del Laboratorio Criogénico de la Academia Sínica aplicó la teoría termoacústica en regeneradores de flujo cíclico. Los regeneradores son matrices porosas usadas en máquinas de calor regenerativas como componentes activos. El diámetro típico de los poros de la matriz es menor que la profundidad de penetración térmica (δ_k), mientras que en tubos termoacústicos la distancia típica es mayor a $3\delta_k$.

En 1993 Swift y Keolian propusieron una geometría que llamaron *pin-array* para la estructura activa del tubo termoacústico. Ésta consiste en un arreglo hexagonal de alambres alineados en la dirección de propagación de la onda y demostraron analíticamente las ventajas de esta geometría. El año siguiente, Atchley y Kuo (1994) investigaron teórica y experimentalmente las curvas de

²Los teoremas de translación son relaciones entre impedancias acústicas específicas o presión en una posición z y el valor de estas mismas cantidades en una posición diferente $z - d$.

³El factor de calidad (Q) es una medida indirecta de la atenuación de la onda acústica en un sistema. $1/Q$ es proporcional a la atenuación neta del resonador.

estabilidad⁴ de los modos fundamental y segundo en un tubo termoacústico lleno de helio. Estas curvas muestran que existe una presión media (p_m) donde la diferencia de temperatura crítica (ΔT_c) es mínima. Olson y Swift (1994) aplicaron el principio de similitud al estudio de la termoacústica sin usar la aproximación acústica (linealidad de las ecuaciones de balance). Demostraron utilidad de la similitud, aún para grandes amplitudes de presión (comportamiento no lineal), aplicando esta teoría en la máquina termoacústica construida por Swift (1992) donde se usó helio o neón y argón como fluidos de trabajo. Estos autores discutieron las implicaciones de la similaridad para construir modelos a escala.

Arturo O. Santillán y Ricardo R. Boullosa del Centro de Instrumentos, UNAM usando el modelo de placa pequeña de Swift presentaron en 1995 un análisis de la dependencia de la producción de potencia acústica, el flujo de calor hidrodinámico y el flujo de calor transversal con la distancia a la placa. Recientemente N. Cao y colaboradores (1996) de Los Alamos estudiaron los detalles de los flujos de calor y energía con soluciones numéricas de las ecuaciones de balance en un apilamiento de placas paralelas mucho menor que la longitud de la onda y suponiendo que no existe gradiente longitudinal de temperatura. Los resultados numéricos muestran que la energía es suministrada por un extremo de cada placa (fuente de calor) y es absorbida por el otro extremo (sumidero de calor).

1.4 Análisis de ondas viajeras

En 1979 Peter H. Ceperley de la Universidad George Mason mostró experimentalmente que las ondas acústicas viajeras cambian en amplitud si se propagan a través de un tubo con una estructura interna donde existe un gradiente de temperatura. Si la onda se propaga en la misma dirección del gradiente de temperatura y éste es suficientemente grande, la onda es amplificada; pero si la onda se propaga en la dirección contraria la onda es atenuada. Ceperley analizó este fenómeno suponiendo que la onda viajera propagándose a través de un gradiente térmico axial forma un ciclo Stirling⁵. Suponiendo la ganancia ideal de la máquina Stir-

⁴Las gráficas de la diferencia de temperatura crítica para autoexcitación (ΔT_c) de la onda acústica como función de la presión media (p_m) se conocen como curvas de estabilidad.

⁵El ciclo Stirling y el efecto termoacústico presentan varias similitudes, ambos están basados en la tendencia de una gas a expandirse o aumentar su presión cuando es calentado. En la máquina Stirling se usa una estructura interna con un gradiente térmico axial, llamada regenerador, cuya función es servir de intercambiador y almacenamiento de calor. La distancia característica entre los poros de esta estructura es mucho menor a la profundidad de penetración térmica del fluido, para asegurar que la temperatura no dependa de la coordenada transversal.

ling, Ceperley (1982) calculó la ganancia y la eficiencia en una estructura infinita encontrando un valor del 70% de la eficiencia de Carnot, y en una estructura pequeña obtuvo 10% de la eficiencia de Carnot (Ceperley 1985). Ceperley (1979) también propuso circuitos para formar motores o bombas de calor empleando ondas acústicas viajeras.

Richard Raspet y colaboradores de la Universidad de Mississippi en 1993 estudiaron teóricamente el efecto termoacústico en ondas viajeras, demostrando que en este tipo de ondas la producción de potencia acústica reportada anteriormente por Ceperley se debe al efecto termoacústico y no a un ciclo Stirling, dando valores menores de eficiencia que los calculados por Ceperley. Esto fue confirmado experimentalmente en 1995 por Kordomenos y colaboradores de esta misma universidad. El mismo año, Garrett y Swift afirmaron que el efecto termoacústico requiere que la diferencia de fase entre las ondas de presión y de velocidad sea cercana a $\pi/2$, tal como ocurre en la onda acústica estacionaria (ver el anexo 1), mientras que en la onda viajera este defasamiento es cercano al cero. Arturo Orozco (1995) del Centro de Instrumentos, UNAM usando el modelo de Raspet de placa simple con longitud finita mostró teóricamente que el efecto termoacústico en ondas viajeras es menos eficiente que empleando ondas estacionarias.

1.5 Máquinas termoacústicas

Las máquinas termoacústicas son máquinas térmicas que utilizan el efecto termoacústico para su operación. Las máquinas térmicas son máquinas donde existe un intercambio entre el calor transferido entre dos zonas a diferentes temperaturas y el trabajo. Las máquinas térmicas y por tanto las máquinas termoacústicas se dividen en dos clases dependiendo de que si la máquina recibe o cede trabajo al

En la máquina termoacústica también se usa una estructura interna con un gradiente térmico axial, la función de esta estructura es fundamentalmente la de proporcionar el intercambio de calor oscilatorio. En esta estructura la distancia característica entre los poros es del mismo orden que la profundidad de penetración térmica, eso permite que exista una diferencia de temperatura transversal oscilatoria entre el fluido y la estructura y que pueda darse la transferencia de calor oscilatoria. El efecto termoacústico es un efecto en la capa límite térmica. Una característica fundamental en el ciclo Stirling ideal es que el calor es añadido al gas que ya se encuentra a mayor temperatura y es extraído del gas que ya está a menor temperatura. Un ciclo de este tipo, donde todos los procesos son isotérmicos, tiene la eficiencia más alta permitida por las leyes de la física, la eficiencia de Carnot (West 1986). En el ciclo termoacústico (ya sea con onda estacionaria o con onda viajera) los procesos no son isotérmicos. Por lo tanto, las máquinas termoacústicas son menos eficientes que las Stirling, sin embargo su ventaja consiste en que no requieren de partes móviles.

medio ambiente. En la primera clase están las máquinas que reciben trabajo del medio ambiente, en esta clase existen dos subclases. La primera constituida por dispositivos que aumentan la transferencia de calor, estas máquinas transfieren calor de la zona de mayor temperatura a la zona de menor temperatura (Omari 1996). La segunda subclase formada por los refrigeradores y por las bombas de calor, en estas máquinas se transfiere calor de la zona de menor temperatura a la zona de mayor temperatura. La segunda clase de máquinas térmicas son los motores, estas máquinas ceden trabajo al medio ambiente transfiriendo calor de la zona de alta temperatura a la de menor temperatura.

Según refiere Swift (1988b), los primeros en sugerir aplicaciones de las oscilaciones acústicas creadas por el efecto termoacústico fueron investigadores de la Universidad de Missouri . En 1962 Carter y colaboradores propusieron el uso del efecto termoacústico para producir oscilaciones acústicas en plasma contenido en un tubo y acoplado a un generador magnetohidrodinámico para producir corriente eléctrica alterna.

En 1983 Wheatley y colaboradores (1983a y 1983b) iniciaron en el Laboratorio Nacional de Los Alamos el desarrollo de máquinas termoacústicas: motores, bombas de calor y refrigeradores. Actualmente se puede considerar a este grupo como el líder en este campo.

Wheatley (1985a) designó a los dispositivos termoacústicos como "máquinas naturales" debido a que el defasamiento requerido entre los efectos termodinámicos en el gas y el flujo del gas respecto a la estructura interna se lograba por un proceso irreversible natural, en particular la conducción de calor por la existencia de una diferencia de temperatura entre el fluido y el sólido.

1.5.1 Motor termoacústico

Un motor termoacústico está constituido básicamente por un resonador, una estructura interna llamada *stack*, a cuyos extremos se encuentran dos intercambiadores de calor, uno caliente y otro frío, el intercambiador caliente está colocado cerca del antinodo de presión. La función de los intercambiadores es crear el gradiente axial de temperatura necesario para el funcionamiento del motor. En la Fig. 1.3. se encuentra un esquema del motor termoacústico.

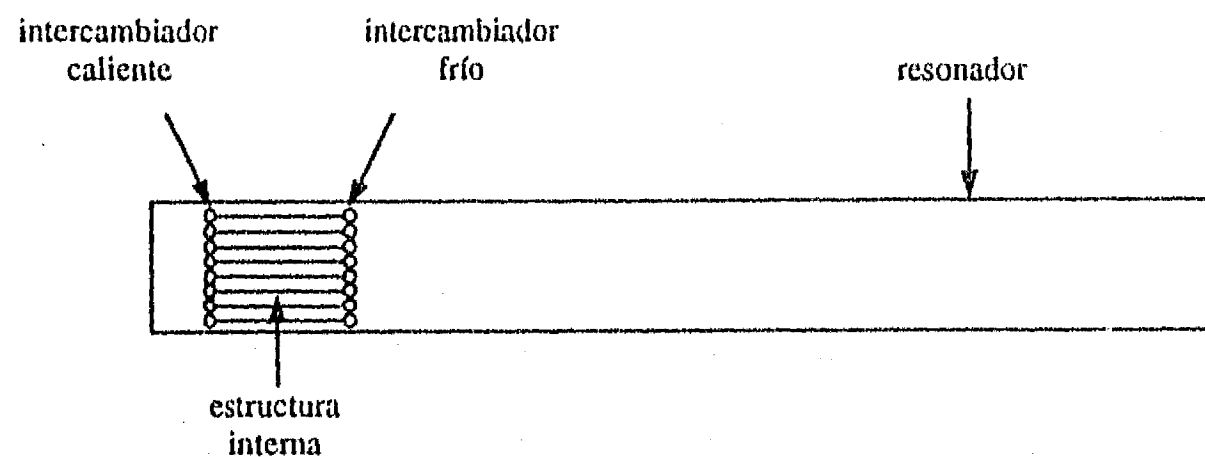


Fig. 1.3. Esquema básico de un motor termoacústico.

Swift y colaboradores de este laboratorio desarrollaron a partir de 1985 una teoría basada en los trabajos de Rott y la aplicaron al diseño de un motor termoacústico funcionando con sodio líquido. Estos autores (Swift *et al.* 1985) supusieron la estructura interna como un apilamiento de placas paralelas con intercambiadores de calor en sus extremos. Con resultados numéricos estimaron que este motor operando entre intercambiadores con temperaturas de 1000 y 400 K, puede generar cerca de 60 W/cm^2 de potencia acústica con una eficiencia cercana a $1/3$ de la eficiencia de Carnot. Por otro lado, Wheatley y colaboradores (1985) construyeron un motor termoacústico semiabierto con aire como fluido de trabajo y reportaron algunas mediciones demostrando la viabilidad de este tipo de dispositivo.

Migliori y Swift reportaron en 1988 experimentos en un motor termoacústico usando sodio líquido. La estructura interna consistió en un apilamiento de placas paralelas de molibdeno, en cuyos extremos se encontraban los intercambiadores de calor formados por tubos. Los resultados experimentales difirieron cuantitativamente de los resultados numéricos basados en la teoría presentada antes por Swift y colaboradores (1985). Consideraron y rechazaron algunas posibles causas de estas diferencias. En la mayor amplitud acústica conseguida, el motor produjo 18 W de potencia acústica con 990 W de calor con una eficiencia del

1.8%. Esto se obtuvo con una diferencia de temperatura a lo largo de la estructura interna de 360K. Estos autores propusieron el acoplamiento de este motor a un transductor magnetohidrodinámico usando la conductividad eléctrica del metal líquido para generar potencia eléctrica, este dispositivo es conocido como generador MHD por efecto termoacústico. Swift y Fusco (1988) señalaron la posibilidad de utilizar agua de mar como fluido de trabajo en el generador MHD por efecto termoacústico. En 1991 en un reporte interno, el grupo del Laboratorio Nacional de Los Alamos (Ward *et al.* 1991) analizó el funcionamiento de motores termoacústicos de 1 MW de potencia acústica operando con una mezcla de helio y xenón, con helio puro y con una mezcla eutéctica de sodio y potasio (NaK-78) como fluidos de trabajo y con un conjunto de placas planas paralelas (de molibdeno en el caso del NaK-78) como estructura interna. Con base en los resultados del análisis teórico usando soluciones numéricas a la ecuación de onda para la presión, consideraron que los motores termoacústicos con estos fluidos de trabajo funcionando con eficiencias totales satisfactorias (cercanas al 20%) son técnicamente viables. Sin embargo, este grupo no continuó la investigación sobre el motor termoacústico con metales líquidos debido a las estrictas políticas de seguridad implementadas en ese laboratorio (Swift 1996).

Thomas B. Gabrielson del Centro de Desarrollo Aéreo y Naval de los Estados Unidos, en 1991 propuso el uso de un motor termoacústico como fuente acústica submarina. Como resultado del análisis teórico que realizó, encontró que una fuente submarina usando un motor termoacústico puede alcanzar más potencia si el resonador es llenado con gas en vez de líquido. Además, dada una amplitud máxima de presión dentro del resonador, la potencia radiada está en función de la geometría del resonador. Al año siguiente, W. Pat Arnott y colaboradores (1992) de la Universidad de Mississippi reportaron la medición de la impedancia acústica en un motor termoacústico como función de la diferencia de temperaturas entre los intercambiadores. El motor estaba formado por un resonador de un cuarto de longitud de onda con aire como fluido de trabajo, capaz de generar sonido de frecuencia 115 Hz con una diferencia de temperatura mayor de 176 K. Encontraron que la parte real de la impedancia cambia de signo para diferencias de temperatura suficientemente grandes, indicando la posibilidad de producir sonido. En otro artículo Arnott (1992) propuso un motor termoacústico con ondas radiales con posible aplicación en un espectrómetro fotoacústico mejorado termoacústicamente. H. Luck y Ch. Trepp (1992b) del Instituto para Ingeniería y Procesos Criogénicos en Zürich propusieron un motor termoacústico en forma radial, con un apilamiento de placas en forma de anillo, el intercambiador frío

en la zona central, en la zona periférica el intercambiador caliente y un pistón en la zona superior central. Modelaron el gas contenido en el sistema como un resorte ideal y usaron una solución a la ecuación de onda de Rott (1969). Las predicciones teóricas sobre la potencia y la presión en el pistón concordaron sólo cualitativamente con los resultados experimentales (Luck & Trepp 1992a). Swift (1992) reportó el análisis y el comportamiento de un motor termoacústico largo (4.32 m) funcionando con helio o con argón. En el punto de máxima potencia (helio a 13.8 bar), este motor entregó 630 W a una carga acústica externa con una eficiencia del 9%. Las predicciones teóricas obtenidas por solución numérica fueron buenas para amplitudes acústicas bajas, observándose mayores discrepancias para amplitudes mayores ($p_A/p_m > 0.16$). Swift indicó los pasos de un programa para modelar tubos termoacústicos usando la aproximación de placa pequeña, este programa sirve para el diseño de estos dispositivos.

En 1994 Ward y Swift presentaron un programa (DELTAE) de uso comercial para el diseño de máquinas termoacústicas de baja amplitud. Este programa usa la continuidad de las oscilaciones de presión, de las oscilaciones de velocidad volumétrica y de temperatura media para acoplar las soluciones de los segmentos adyacentes y para modelar la estructura interna usa la ecuación de onda de Swift (1988b). Al año siguiente Olson y Swift (1995) reportaron mediciones efectuadas en un motor termoacústico con dos estructuras internas en su interior, operando una carga acústica disipativa. El análisis de su funcionamiento mostró que la potencia suministrada a los calentadores y la temperatura del extremo caliente son funciones de la impedancia de la carga y los valores de estas variables calculados sin carga. Las predicciones obtenidas con el programa DELTAE se compararon satisfactoriamente con los resultados experimentales.

1.5.2 Bomba de calor y refrigerador termoacústicos

El inicio del desarrollo de refrigeradores termoacústicos tuvo su origen en el Laboratorio Nacional de Los Alamos a principios de la década de los ochentas, bajo el liderazgo de John C. Wheatley. Una bomba de calor o un refrigerador termoacústico está constituido básicamente por un resonador, una bocina o cualquier otro generador de ondas acústicas, una estructura interna, a cuyos extremos se encuentran dos intercambiadores de calor, el intercambiador caliente está colocado cerca del antinodo de presión. El refrigerador extrae calor del intercambiador frío y lo entrega al intercambiador caliente. En la Fig. 1.4. se encuentra el esquema básico de una bomba de calor o de un refrigerador termoacústico.

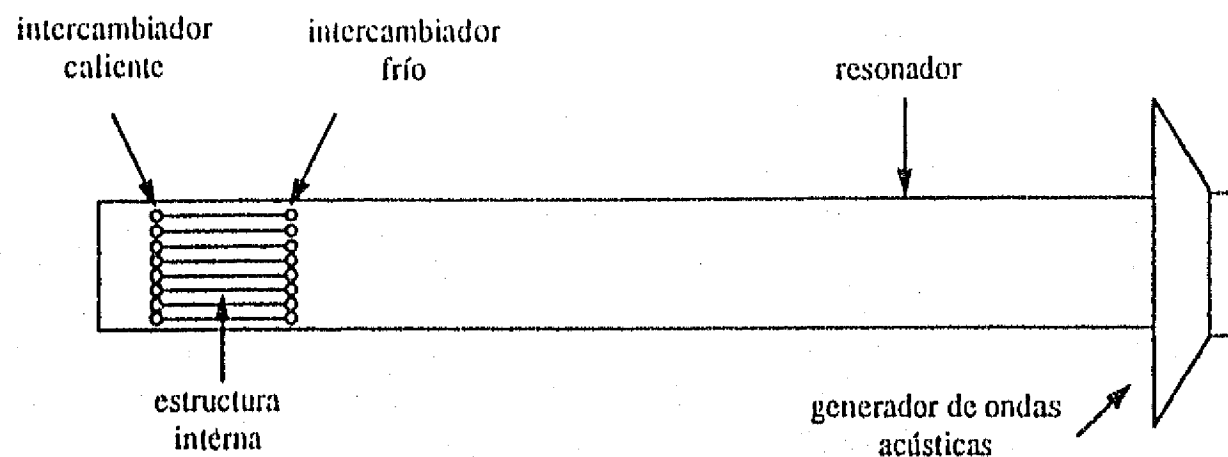


Fig. 1.4. Esquema básico de una bomba de calor o de un refrigerador termoacústico.

En 1983 Wheatley y colaboradores reportaron experimentos realizados con una bomba de calor termoacústica usando helio como fluido de trabajo. Estudiaron la distribución de temperaturas a lo largo de la estructura interna formada por placas paralelas de fibra de vidrio. Encontraron que la eficiencia de estas máquinas está determinada principalmente por su geometría (Wheatley *et al.* 1983a y 1983b). Posteriormente, estos autores (Wheatley *et al.* 1985) reportaron resultados en un refrigerador termoacústico con helio como fluido de trabajo. Lograron una diferencia de temperatura de 80 °C entre los dos extremos de la estructura interna, formada por una película de Kapton enrollada. El trabajo sistemático tanto experimental como teórico en Los Alamos llevó al diseño y construcción del primer refrigerador termoacústico completo (Hoffler 1986). La temperatura mínima alcanzada por este refrigerador fue de 200 K con una carga de 3 W. El máximo coeficiente de funcionamiento obtenido fue de 12% el coeficiente de Carnot. Debido a la repentina muerte del profesor Wheatley antes de la terminación de este refrigerador, el trabajo experimental en refrigeración se trasladó a la Escuela Naval de Posgraduados en Monterey, California.

Ya que al reducir el número de Prandtl aumenta el flujo de calor a la pared mejorando el funcionamiento de las máquinas termoacústicas (Merkli & Maresca 1975), algunos grupos se han dado a la tarea de buscar gases con menor número de

Prandtl, M. Suzalla y colaboradores (1988) de la Escuela Naval de Postgraduados de Monterey propusieron el mezclado de dos especies de gas que tengan pesos moleculares muy diferentes, como helio y xenón cuya mezcla tiene un $Pr = 0.22$. En 1989 Garrett y colaboradores de la misma escuela, reportaron el uso de esta mezcla en un pequeño refrigerador para aplicaciones espaciales. Este dispositivo es capaz de enfriar a 100 K abajo de la temperatura ambiente utilizando una estructura interna formada por una lámina plástica enrollada. Al siguiente año, Atchley y otros investigadores (1990) de esta escuela construyeron una bomba de calor cuya estructura interna estaba formada por un apilamiento de placas paralelas. Midieron la diferencia de temperaturas generada en esta estructura como función de la geometría del apilamiento, del fluido de trabajo: helio o argón, de la posición de la estructura interna, de la presión media (p_m) y la amplitud de la onda de presión (p_A). Las mayores diferencias de temperatura ($\Delta T < 5K$) se obtuvieron lejos de los nodos de presión y de velocidad. Los resultados coincidieron con la teoría de Wheatley y colaboradores (1983b) para valores $p_A/p_m < 0.004$.

En 1992 Garrett y colaboradores reportaron el diseño y el funcionamiento un refrigerador termoacústico para aplicaciones espaciales, que fue probado en el Discovery en enero de 1992. La vibración del refrigerador fue despreciable debido a la baja masa del fluido en movimiento (15 g) y a la alta frecuencia de oscilación (400 Hz). La baja vibración y la falta de sellos móviles hacen del refrigerador termoacústico un excelente candidato para aplicaciones en satélites. Posteriormente, en 1995, Swift y Radebugh propusieron el primer refrigerador criogénico sin partes móviles y construyeron una versión experimental dirigida al enfriamiento de sensores infrarrojos en satélites. El refrigerador alcanzó los 90 K y produjo 5 W de refrigeración a 120 K. Boye Ahlborn y Jean Camire (1995) de la Universidad de Columbia Británica reportaron que la bomba de calor termoacústica ideal opera a 1/3 de la eficiencia de Carnot y que la mejor posición de la estructura interna es a una distancia $\lambda/8$ del extremo cerrado. Garret y Swift (1995) presentaron los primeros resultados obtenidos con un refrigerador termoacústico construido con un resonador de media longitud de onda en forma de U, con doble estructura interna y cuatro intercambiadores de calor, utilizando una mezcla de 94% de helio y 6% de argón. La potencia acústica fue generada por dos bocinas colocadas cerca de los antinodos de presión. Ya que este es el punto de máxima impedancia acústica, el movimiento de los fuelles se minimiza para una amplitud de presión dada. Esto también hace que el calor generado por las bocinas esté lejano al intercambiador frío.

1.6 Desarrollos comerciales

En un artículo de difusión publicado en 1995, Swift menciona cuatro dispositivos propuestos para uso comercial que usan el efecto termoacústico. Estos muestran el potencial que tiene la tecnología termoacústica.

El primero es un refrigerador para uso doméstico desarrollado por el Consejo para la Investigación Científica e Industrial de la República de Sudáfrica. Este refrigerador es una variante del diseñado por Garrett y colaboradores (1992) y consiste de un resonador simétrico, de media longitud de onda, operado por dos bocinas modificadas colocadas en ambos extremos, con dos estructuras activas, cada una con sus dos intercambiadores de calor. El nodo de presión se encuentra en el centro de la sección inferior. El uso de dos estructuras maximiza la potencia de enfriamiento para un tamaño dado del resonador. El resonador, hecho de fibra de vidrio, tiene forma de U, que lo hace compacto y no afecta significativamente la acústica. La potencia de enfriamiento (100 W) y las temperaturas son apropiadas para la refrigeración doméstica en la mayoría de los países (los refrigeradores americanos son más grandes que en el resto de los países y requieren al menos el doble de potencia de enfriamiento).

Científicos de la compañía Ford Motor construyeron un refrigerador termoacústico cuya bocina se encuentra en el antinodo de desplazamiento de una onda estacionaria en el resonador de un cuarto de longitud de onda. Por lo que en éste la potencia acústica se entrega con poca presión y un gran desplazamiento volumétrico, usando una gran área en la bocina. El calor generado en la bocina fluye al intercambiador frío, pero no constituye un gran problema si la bocina es eficiente y si la temperatura fría no es muy diferente de la caliente. Este refrigerador opera a 10 bar usando helio como fluido de trabajo y funcionando a una frecuencia de 430 Hz o con una mezcla de 80% helio y 20% argón a una frecuencia de 260 Hz.

Investigadores de la Corporación Tektronix desarrollan un sistema para el enfriamiento de componentes electrónicos a temperaturas criogénicas. Un motor termoacústico opera un refrigerador de pulso⁶, el sistema constituye un refrigerador criogénico operado por calor, no contienen partes móviles y enfría a 150 K. Tiene un resonador de media longitud de onda con dos motores termoacústicos

⁶El refrigerador de pulso fue inventado en el Laboratorio Nacional de Los Alamos. En este refrigerador, el refrigerante es comprimido utilizando una onda acústica resonante. En la etapa de menor presión, el refrigerante entra al resonador a través de una válvula unidireccional de alta velocidad; en la etapa de mayor presión, el refrigerante es expulsado hacia la línea de descarga por otra válvula similar (Scott & Skerret 1991).

cerca de los extremos. En la parte lateral se entrega la potencia acústica generada por los motores (500W) a un refrigerador de pulso.

En 1994 John J. Wollan de Cryenco, Greg W. Swift y Ray Radebaugh de Los Alamos propusieron el desarrollo de un licuefactor de gas natural termoacústico (TANGL). Actualmente Cryenco construye el motor que operará un refrigerador de pulso. La fuente de calor para el motor será la combustión de gas natural. El motor medirá 12 m de largo, siendo el más grande a la fecha, y usará estructuras activas en forma de espiral de 0.5 m de diámetro. Se estima que producirá 40 kW de potencia acústica a 40Hz, con helio a 30 bar.

El grupo de Los Alamos ha creado animaciones por computadora de los fundamentos del motor termoacústico, del refrigerador termoacústico y del tubo refrigerador de pulso-orificio acoplado con un motor termoacústico. Estas animaciones para computadoras con DOS pueden ser obtenidas vía Internet a través del servidor WWW (*Word Wide Web*) cargando el URL (*Uniform Resource Locators*) <http://rott.esa.lanl.gov/> para acceder la página de termoacústica.

Como se observa en la revisión bibliográfica, son pocos los autores que se han avocado al estudio del origen físico del efecto termoacústico. En el capítulo siguiente se analizarán con más detalle las explicaciones dadas a este fenómeno.

2. Interpretación del efecto termoacústico

Como ya se mencionó, son pocos los autores que han estudiado el origen físico del efecto termoacústico. La contribución más importante a la comprensión a este fenómeno, fue hecha por Rayleigh a fines del siglo pasado. Rayleigh (1896) dió una explicación cualitativa a la producción de sonido debida a la diferencia de fase apropiada entre la transferencia de calor a un fluido compresible y la perturbación de presión en el mismo. En particular, explicó la generación de sonido en el "tubo de Sondhauss", es decir en un tubo semicerrado con un alto gradiente térmico a lo largo del tubo. En forma independiente, a mediados de este siglo Taconis y colaboradores (1949) dieron una explicación cualitativa a las oscilaciones producidas en los tubos que extraen fluidos criogénicos. En ella, señala que el origen de las oscilaciones es una diferencia de fase, sin embargo su explicación es poco clara. En 1985 un grupo del Laboratorio Nacional de Los Alamos dió una explicación cualitativa del efecto termoacústico en tubos semicerrados, utilizando una descripción lagrangiana y haciendo una serie de suposiciones para simplificar el problema (Wheatley *et al.* 1985).

La explicación de Rayleigh al efecto termoacústico ha sido aceptada como válida por varios autores, pero no ha sido comparada con los resultados de los modelos usados para describir cuantitativamente el fenómeno termoacústico y comprobar su validez.

2.1. Teoría de Rayleigh

Esta tesis toma como base la explicación cualitativa general dada por Rayleigh (1896) en su libro "The Theory of Sound" para la producción de sonido por transferencia de calor.

Rayleigh supone la existencia de una onda acústica en un fluido compresible y señala que:

*"... If heat be given to the air at the moment of greatest condensation, or be taken from it at the moment of greatest rarefaction, the vibration is encouraged."*¹

La entrada de calor al fluido produce naturalmente un aumento en su temperatura, éste a su vez ocasiona un aumento en la presión. Contrariamente, la salida

¹"Si en el momento de mayor condensación se le suministra calor al aire, o si en el momento de mayor rarefacción se extrae calor de él, se estimula la vibración"

de calor al fluido produce una disminución en la temperatura y esta disminución provoca una disminución en la presión.

Por eso, si se transfiere calor al fluido en el momento de máxima presión (máxima condensación) aumentará aún más la presión, y si se extrae calor en el momento de mínima presión (máxima rarefacción), se disminuirá más la presión, por lo que estará aumentando la amplitud de la perturbación de presión original, es decir la onda acústica será excitada. Esta situación se muestra en la Fig.2.1.

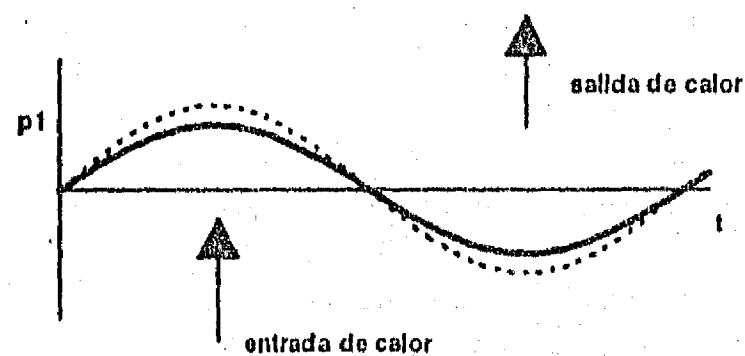


Fig.2.1. Gráfica de la oscilación de presión como función del tiempo para una cierta posición (línea continua). Si la entrada de calor al fluido se da en el momento de máxima presión y la salida de calor en el momento de mínima presión, la onda es excitada aumentando la oscilación de presión (línea discontinua).

Continúa Rayleigh: "*On the other hand, if heat be given at the moment of greatest rarefaction, or abstracted at the moment of greatest condensation, the vibration is discouraged...*"²

En este caso, al introducir calor en el momento de mínima presión (máxima rarefacción) se estará aumentando la presión, y al extraer calor en el momento de máxima presión (máxima condensación), se estará disminuyendo la presión, por lo que la amplitud original de la perturbación de presión, es decir la onda acústica será atenuada. Esta situación se muestra en la Fig. 2.2.

²"Por otro lado, si en el momento de mayor rarefacción se suministra calor, o se extrae en el momento de mayor condensación, la vibración es desalentada"

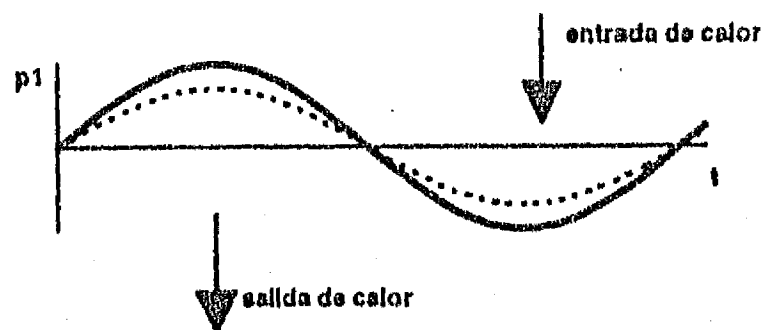


Fig.2.2. Gráfica de la oscilación de presión como función del tiempo para una cierta posición (línea continua). Si la salida de calor al fluido se da en el momento de máxima presión y la entrada de calor en el momento de mínima presión, la onda acústica es atenuada disminuyendo la oscilación de presión (línea discontinua)

Debido a la oscilación de las parcelas de fluido en una onda acústica, es posible obtener una transferencia de calor oscilatoria, a pesar de tener condiciones independientes del tiempo en la frontera sólida.

Rayleigh explicó como puede darse una transferencia de calor oscilatoria en un tubo semicerrado con un gradiente térmico axial independiente del tiempo, el llamado Tubo de Sondhauss. *"...a simple tube, hot at the closed end and getting gradually cooler towards the open end, may be considered. At a quarter of a period before the phase of greatest condensation (which occurs almost simultaneously at all parts of the column) the air is moving inwards, i.e. towards the closed end, and therefore is passing from colder to hotter parts of the tube; but the heat received at this moment (of normal density) has no effect either in encouraging or discouraging the vibration. The same would be true of the entire operation of heat, if the adjustment of temperature were instantaneous, so that there was never any sensible difference between the temperatures of the air and of the neighboring parts of the tube. But in fact the adjustment of temperature takes time, and thus the temperature of the air deviates from that of the neighboring parts of the tube, inclining towards the temperature of that part of the tube from which the air has just come. From this it follows that at the phase of greatest condensation heat is received by the air, and at the phase of greatest rarefaction heat is given up from it, and thus there is a tendency to maintain the vibration..."*³

³ "...se puede considerar un tubo simple, calentado en el extremo cerrado y gradualmente más

Esto explica la excitación de una onda acústica estacionaria existente en el interior del tubo semicerrado y se encuentra esquematizado en la Fig. 2.3.

La producción espontánea de sonido en este sistema se puede entender si se tiene en cuenta que es común que en un fluido real existan perturbaciones a su estado de reposo. En un tubo semicerrado, cualquier perturbación del fluido en su interior en que las partículas se muevan hacia el extremo cerrado significa un aumento en la presión, si este extremo del tubo se encuentra a mayor temperatura, habrá una transferencia de calor desde las paredes del tubo al fluido en el momento en que la presión había aumentado, por lo que la amplitud de la perturbación original aumentará, dando lugar a la producción de una onda acústica estacionaria.

2.2. Descripción euleriana en ondas estacionarias

A continuación se presenta un esquema que permite entender el efecto termoacústico en sus modalidades de motor y de bomba de calor o refrigerador. Este esquema está basado en el esquema presentado por el grupo de Los Alamos (Wheatley *et al.* 1985) usando una descripción lagrangiana. El esquema fue modificado a la descripción euleriana del fenómeno, para poder relacionarlo posteriormente con el modelo matemático y con las mediciones experimentales.

Este esquema supone la existencia de una onda acústica estacionaria interaccionando con una pared sólida con un gradiente de temperatura media axial ∇T_m , la pared puede ser la misma pared del tubo resonador o una placa en el interior del mismo, tal como se muestra en la figura 2.4. Se considera que la pared

frío hacia el extremo abierto. Un cuarto de período antes de la fase de mayor condensación (la cual ocurre casi simultáneamente en todas partes de la columna) el aire se mueve hacia adentro, i.e. hacia el extremo cerrado, y por lo tanto está pasando de partes del tubo más frías a partes más calientes; pero el calor recibido en ese momento (de densidad normal) no tiene ningún efecto, ni para promover ni para desalentar la vibración. Lo mismo sería cierto para toda la operación del calor, si la temperatura se ajustara instantáneamente, de tal manera que nunca hubiera una diferencia sensible entre las temperaturas del aire y de las partes vecinas del tubo. De hecho el ajuste de la temperatura toma tiempo, y entonces la temperatura del aire se desvía de aquella de las partes vecinas del tubo, inclinándose hacia la temperatura de la parte del tubo de donde el aire justo ha provenido. De esto se sigue que en la fase de mayor condensación el aire recibe calor, y en la fase de mayor rarefacción se extrae calor de él, por lo tanto existe una tendencia a mantener la vibración ..."

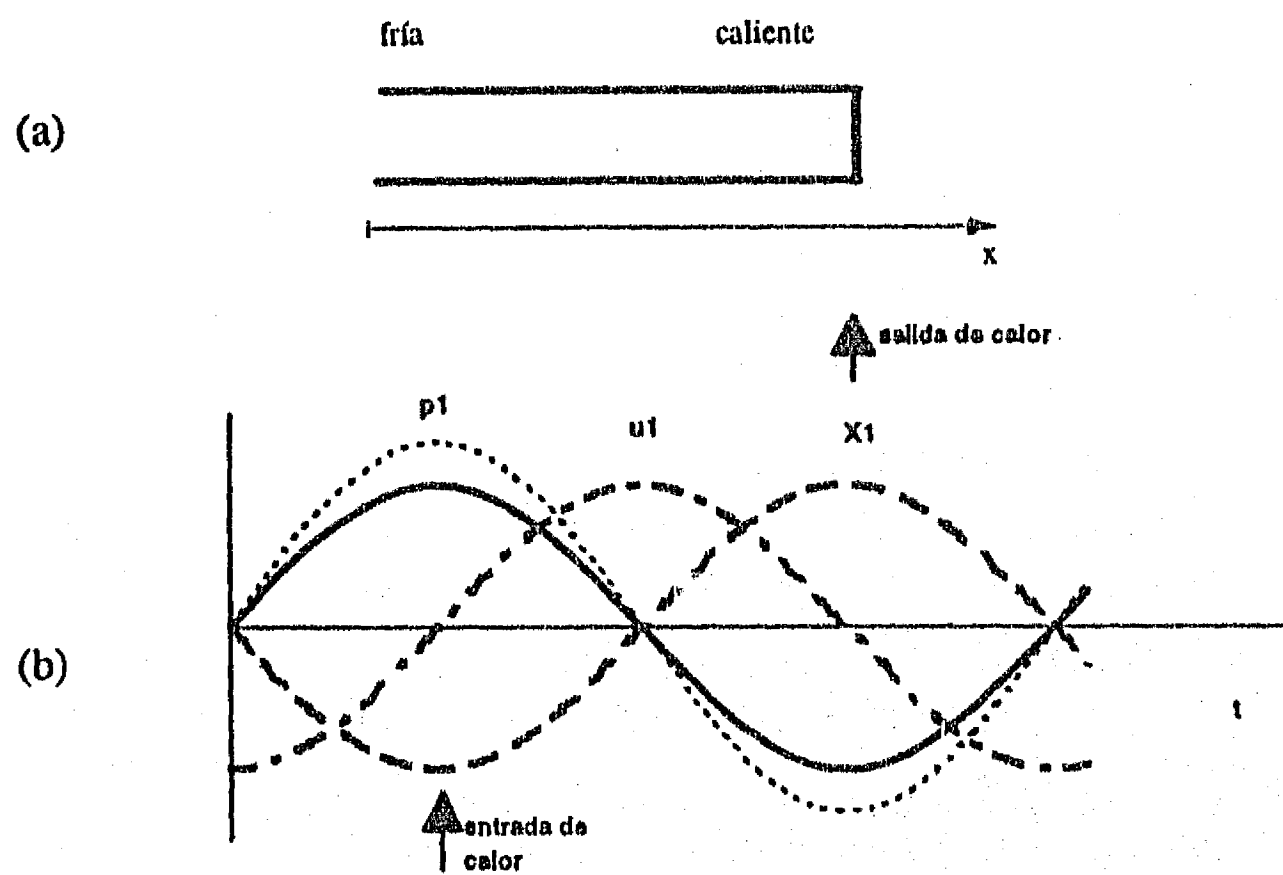


Fig. 2.3. (a) Esquema del sistema descrito por Rayleigh. (b) Gráficas de presión (p_1), velocidad (u_1) y desplazamiento (X_1) en una onda acústica estacionaria, como función del tiempo para una cierta posición x . En estas gráficas se muestra el momento y la dirección del flujo de calor si el extremo cerrado se encuentra suficientemente más caliente que el extremo abierto. Estos flujos de calor satisfacen la condición de Rayleigh para excitación de la onda acústica.

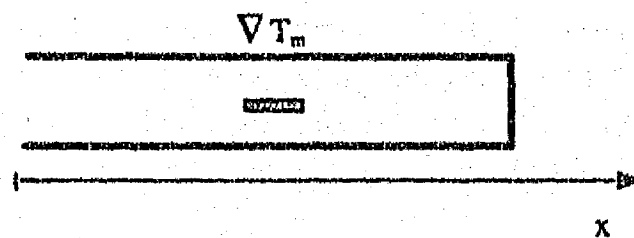


Fig. 2.4. Esquema del sistema: un tubo semicerrado y una placa en su interior con un gradiente de temperatura media en la dirección axial.

tiene una capacidad calorífica infinita, lo que implica que no presenta oscilación de temperatura y además se desprecia la viscosidad del fluido.

Por simplicidad la onda de velocidad se supone cuadrada (Figs. 2.5a y 2.6a), consecuentemente la presión tendrá la forma mostrada en las Figs. 2.5b y 2.6b. En una onda estacionaria la presión y la velocidad se encuentran defasadas $\pi/2$, ocurriendo simultáneamente en todo lo largo del tubo, lo que facilita la descripción del fenómeno. En una onda viajera, las oscilaciones no ocurren en forma simultánea en toda posición axial, por lo que un análisis similar resulta más complicado.

En esta explicación se observa un volumen de control en la vecindad de la frontera sólida, dividiendo el ciclo en cuatro etapas. Como se verá, el comportamiento del sistema depende del gradiente de temperatura media axial ∇T_m .

2.2.1. Motor termoacústico

Este modo se presenta si el gradiente de temperatura media axial ∇T_m es suficientemente grande. En la figura 2.5a. se encuentra el esquema del volumen de control a lo largo de un ciclo para este caso.

En la primera etapa (1), fluido procedente de una región distante $2X_1$ que se encuentra a menor temperatura ($T_m - 2X_1 \nabla T_m$) entra al volumen de control. Dada su velocidad, se considera que este fluido tuvo poco tiempo para intercambiar calor con la frontera, por lo que su temperatura es prácticamente la de su lugar de procedencia. En esta etapa la presión aumenta y los alrededores hacen trabajo dW_1 sobre el volumen de control.

En la segunda etapa (2) la velocidad del fluido es nula, la presión es máxima ($p_m + p_1$). Al comenzar esta etapa, la temperatura del fluido es la temperatura del lugar de procedencia más el aumento termodinámico debido al aumento de presión ($T_m - 2X_1 \nabla T_m + T_{aa}$). En esta etapa, el fluido intercambia calor con la frontera sólida que se encuentra a temperatura T_m . Si el gradiente de temperatura media a lo largo del tubo ∇T_m es suficientemente grande ($\nabla T_m > T_{aa}/2X_1$), la temperatura de la pared sólida en contacto con el fluido es mayor que la temperatura de éste, por lo que hay un flujo de calor hacia el fluido dQ_2 . La temperatura del fluido aumenta hasta tener la temperatura de la pared T_m , el aumento de temperatura ocasiona una expansión, y el fluido hace trabajo sobre sus alrededores dW_2 .

En la tercera etapa (3), fluido procedente de una región distante $2X_1$ que se encuentra a mayor temperatura ($T_m + 2X_1 \nabla T_m$) entra al volumen de control,

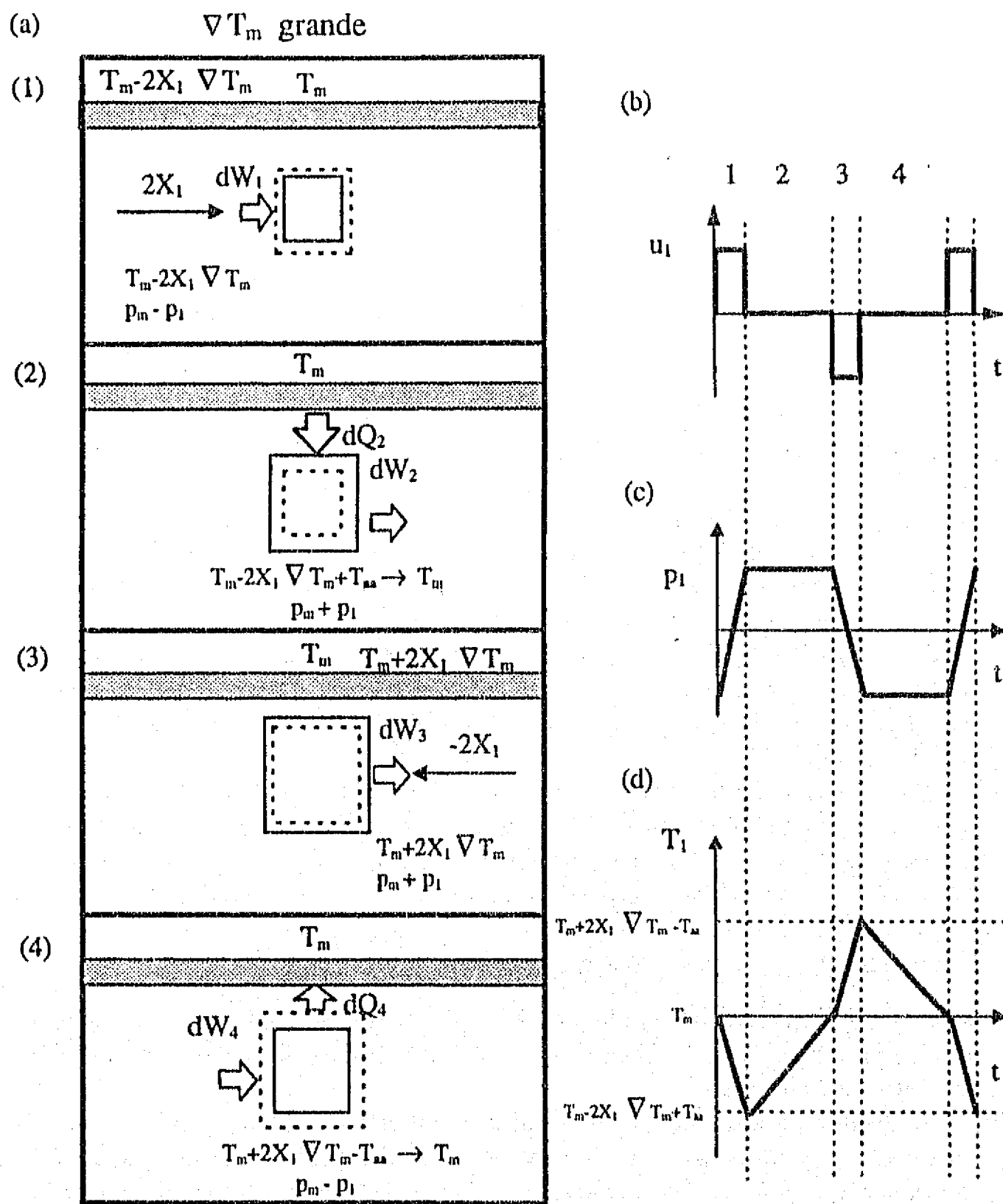


Fig. 2.5. Motor termoacústico ($\nabla T_m > T_{sa}/2X_1$). (a) Esquema del volumen de control a lo largo de un ciclo; (b) gráfica de velocidad (u_1); (c) gráfica de presión (p_1) y (d) gráfica de temperatura (T_1).

este fluido tuvo poco tiempo para intercambiar calor con la frontera, por lo que su temperatura es prácticamente la de su lugar de procedencia. En esta etapa la presión disminuye y el fluido en el volumen de control hace trabajo dW_3 sobre los alrededores.

En la cuarta etapa (4) la velocidad del fluido es nula, la presión es mínima ($p_m - p_1$). Al comenzar esta etapa, la temperatura del fluido es la temperatura del lugar de procedencia menos la disminución debida a la reducción de presión ($T_m + 2X_1 \nabla T_m - T_{aa}$). En esta etapa, el fluido intercambia calor con la frontera sólida que se encuentra a temperatura T_m . La temperatura de la pared sólida en contacto con el fluido es menor que la temperatura de éste, por lo que hay un flujo de calor del fluido hacia la pared dQ_4 . La temperatura del fluido disminuye hasta tener la temperatura de la pared T_m , la disminución de temperatura ocasiona una contracción, y los alrededores hacen trabajo sobre el volumen de control dW_4 .

En este caso en el que el gradiente de temperatura media axial ∇T_m es suficientemente grande ($\nabla T_m > T_{aa}/2X_1$), en el momento de máxima presión entra calor al fluido y en el momento de mínima presión sale calor de él; según el criterio de Rayleigh se tiene la condición de excitación de la onda acústica, es decir modo de generador y habrá una producción neta de potencia acústica. Además, en este caso hay un flujo de calor a través del fluido, de la región más caliente a la región más fría del tubo.

En la misma figura 2.5. se encuentran las gráficas de la velocidad u_1 , la presión p_1 y la temperatura T_1 del fluido en el volumen de control como función del tiempo. De ellas se observa que existe un defasamiento entre la presión y la temperatura, este defasamiento es mayor a $\pi/2$ (en este esquema $\frac{3}{4}\pi$).

2.2.2. Bomba de calor y refrigerador termoacústicos

Este modo se presenta si el gradiente de temperatura media axial ∇T_m es pequeño. En la figura 2.6a. se encuentra el esquema del volumen de control a lo largo de un ciclo para este caso.

La primera etapa (1), es similar al caso anterior. En la segunda etapa (2) de manera similar al caso anterior, la velocidad del fluido es nula, la presión es máxima ($p_m + p_1$). Análogamente, al comenzar esta etapa, la temperatura del fluido es la temperatura del lugar de procedencia más el aumento termodinámico debido al aumento de presión ($T_m - 2X_1 \nabla T_m + T_{aa}$). En esta etapa, el fluido intercambia calor con la frontera sólida que se encuentra a temperatura T_m . Pero

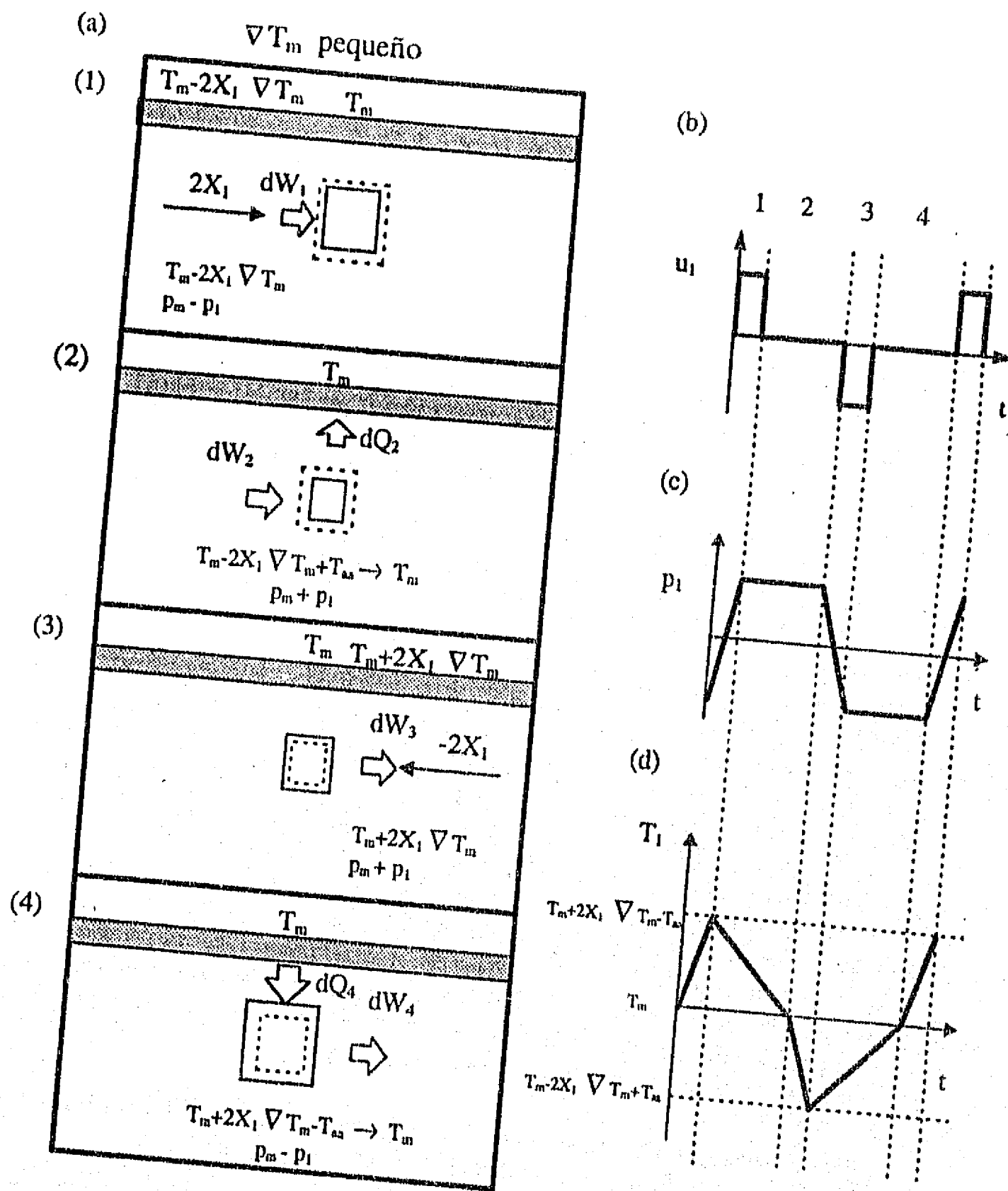


Fig. 2.6. Bomba de calor o refrigerador termoacústico ($\nabla T_m < T_{sa}/2X_1$). (a) Esquema del volumen de control a lo largo de un ciclo; (b) gráfica de velocidad (u_1); (c) gráfica de presión (p_1) y (d) gráfica de temperatura (T_1).

en este caso, como el gradiente de temperatura media axial ∇T_m es pequeño ($\nabla T_m < T_{aa}/2X_1$) la temperatura de la pared sólida en contacto con el fluido es menor que la temperatura de éste, por lo que hay un flujo de calor del fluido hacia la pared dQ_2 . La temperatura del fluido disminuye hasta tener la temperatura de la pared T_m , la disminución de temperatura ocasiona una contracción del fluido en la que los alrededores hacen trabajo sobre él dW_2 .

La tercera etapa (3) se lleva a cabo de manera análoga al caso del generador. En la cuarta etapa (4) la velocidad del fluido es nula, la presión es mínima ($p_m - p_1$). Al comenzar esta etapa, la temperatura del fluido es la temperatura del lugar de procedencia menos la disminución debida a la reducción de presión ($T_m + 2X_1 \nabla T_m - T_{aa}$), el fluido intercambia calor con la frontera sólida que se encuentra a temperatura T_m . La temperatura de la pared sólida en contacto con el fluido resulta mayor que la temperatura de éste, por lo que hay un flujo de calor de la pared hacia el fluido dQ_4 . La temperatura del fluido aumenta hasta alcanzar la temperatura de la pared T_m , el aumento de temperatura del fluido ocasiona una expansión del mismo, en ella el fluido en el volumen de control hace trabajo sobre sus alrededores dW_4 .

Por lo tanto, en este caso en el que el gradiente de temperatura media axial ∇T_m es pequeño o incluso en la dirección opuesta ($\nabla T_m < T_{aa}/2X_1$), en el momento de máxima presión sale calor del fluido y en el momento de mínima presión entra calor a él. Según el criterio de Rayleigh se tiene la condición de atenuación de la onda acústica. Además, en este caso hay un flujo de calor a través del fluido, de la región más fría a la región más caliente del tubo, es decir se tiene el modo de bomba de calor, en donde parte de la energía mecánica de la onda se emplea en el flujo de calor de la zona fría a la zona caliente.

En la misma figura 2.6. se encuentran las gráficas de la velocidad u_1 , la presión p_1 y la temperatura T_1 del fluido en el volumen de control como función del tiempo. De ellas se observa que en este caso, el defasamiento entre presión y temperatura es menor de $\pi/2$ (en este esquema es $\frac{1}{4}\pi$).

2.3. Interpretación de la teoría de Rayleigh en términos de la diferencia de fase entre el flujo de calor al fluido y la presión

Como se ha mencionado, Rayleigh enfatizó el hecho de que si el gas recibe calor en el momento de máxima presión y se le extrae en el momento de menor presión, la oscilación es excitada. Similarmente señaló que una vibración es atenuada si el

calor es extraído del gas en el momento de máxima presión y suministrado al gas en el momento de menor presión. Por lo tanto la fase relativa entre la transferencia de calor y la presión determina si el efecto es amplificador o atenuador.

En el caso en que el suministro o extracción de calor al gas se lleva a cabo a través de la frontera con una pared sólida, la diferencia de fase entre el flujo de calor al fluido y la presión en la interfase fluido-sólido (θ) determina si la onda es amplificada o es atenuada. Una diferencia de fase aproximadamente cero conduce a la excitación de la onda acústica, ya que el calor es suministrado al gas en la etapa de máxima presión y es extraído de él en la etapa de mínima presión. Una diferencia de fase cercana a π (o $-\pi$), produce atenuación, ya que en ese caso el calor es extraído del gas en la etapa de máxima presión y es suministrado en la etapa de mínima presión. El límite preciso entre atenuación y excitación depende de la forma de la onda, pero para ondas simétricas la excitación ocurre para $|\theta| < \pi/2$ y la atenuación para $|\theta| > \pi/2$. Por lo tanto, en ondas simétricas

$$\begin{aligned} |\theta| < \pi/2 &\Rightarrow \text{excitación} \\ |\theta| > \pi/2 &\Rightarrow \text{atenuación} \end{aligned} \quad (2.1)$$

En forma general, el criterio se puede establecer a través del promedio temporal del producto entre el flujo de calor hacia el fluido a través de la frontera fluido-sólido (q_0) y la oscilación de presión p . Si el promedio temporal es positivo, significa que en promedio en la etapa de mayor presión se suministra calor al fluido a través de la frontera fluido-sólido y que en la etapa de menor presión se extrae calor del fluido, por lo que la onda es excitada. Mientras que si este promedio temporal es negativo implica que en promedio en la etapa de mayor presión se extrae calor del fluido a través de la frontera y que en la etapa de menor presión se suministra calor al fluido, por lo tanto la onda es excitada. Esto se puede resumir como

$$\begin{aligned} \langle q_0 p \rangle > 0 &\Rightarrow \text{excitación} \\ \langle q_0 p \rangle < 0 &\Rightarrow \text{atenuación} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Como ya se mencionó anteriormente, el objetivo de esta tesis es validar cuantitativamente la explicación cualitativa del origen del efecto termoacústico dada por Rayleigh utilizando la teoría actual que modela este fenómeno. Esto se verá en el siguiente capítulo.

3. Teoría del efecto termoacústico

El objetivo de este capítulo es validar cuantitativamente la explicación física del efecto termoacústico, para ello es necesario desarrollar la teoría que permita calcular analíticamente la diferencia de fase entre el flujo de calor al fluido y la producción de potencia acústica. Los principales resultados de este capítulo se encuentran en Huelsz *et al.* (1994), Huelsz & Ramos (1995a) y Huelsz & Ramos (1996).

La teoría que aquí se presenta está basada en los trabajos de Rott (1969), Swift (1988) y Raspel (1993). Esta teoría supone la existencia de una onda acústica monocromática de frecuencia angular ω en un fluido compresible con gradiente de la temperatura media en la misma dirección de propagación de la onda. El fluido está en contacto con una o varias placas paralelas a la dirección de propagación de la onda; esta placa o placas poseen el mismo gradiente axial de temperatura media que el fluido. El sistema físico, en sus dos configuraciones, se muestra en la Fig. 3.1.

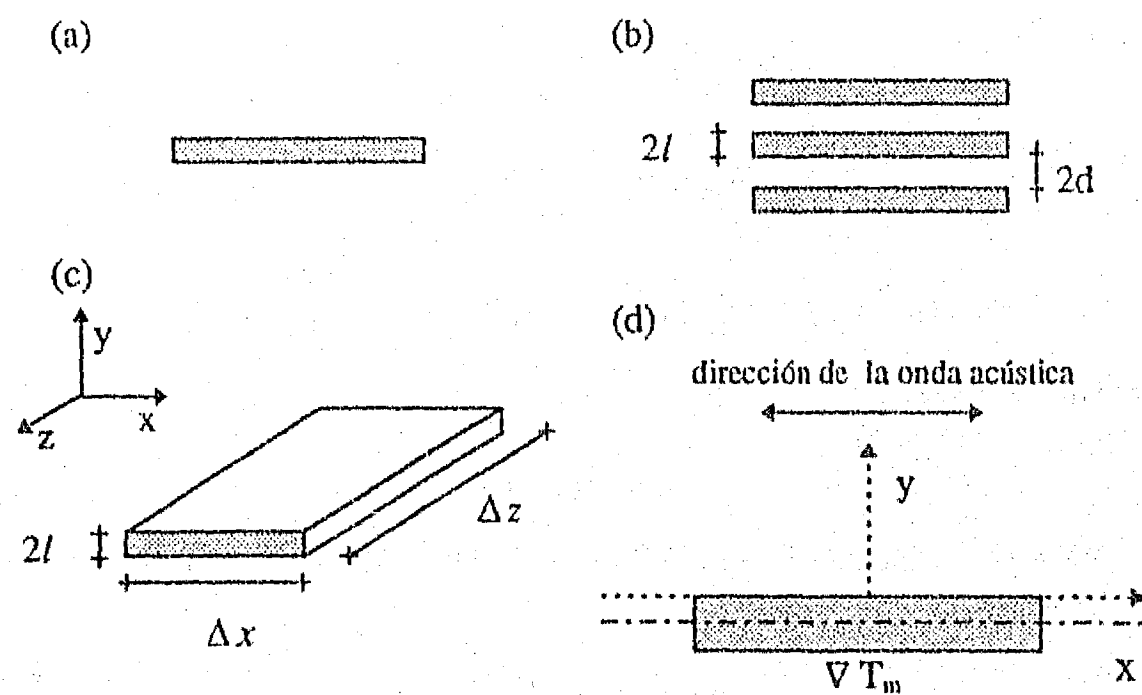


Fig. 3.1. (a) Configuración de una placa, (b) configuración de varias placas, (c) sistema de referencia utilizado y (d) vista del plano xy , el origen de la coordenada y se encuentra en la frontera sólido-gas. La onda acústica y el gradiente de temperatura media (∇T_m) son paralelos al eje x .

Las variables involucradas se expresan como un valor medio (Φ_m) más una perturbación de primer orden (Φ_1). Los subíndices m y 1 denotan respectivamente una cantidad media y una perturbación de primer orden.

$$\Phi(x, y, t) = \Phi_m + \Phi_1(x, y, t) \quad (3.1)$$

La perturbación es una onda acústica monocromática, por lo que se puede expresar como (ver el anexo 1)

$$\Phi_1(x, y, t) = \hat{\Phi}_1(x, y)e^{i\omega t} \quad (3.2)$$

x es la coordenada en la dirección de propagación de la onda, y es la coordenada transversal medida desde la placa y t es el tiempo.

3.1. Ecuaciones de balance

El sistema en estudio se describe con las siguientes ecuaciones:

Las ecuaciones de balance linealizadas, en la aproximación de capa límite para un fluido con gradientes de temperatura y densidad medias en la dirección x son (en el anexo 2 se encuentra la deducción de estas ecuaciones)

$$i\omega\rho_1 + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_m u_1) + \rho_m \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad (3.3)$$

$$i\omega\rho_m u_1 = -\frac{dp_1}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \quad (3.4)$$

$$\rho_m C_p (i\omega T_1 + \nabla T_m u_1) - i\omega\beta_m T_m p_1 - K \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} = 0, \quad (3.5)$$

la ecuación de estado

$$\rho = \rho(T, p) \quad (3.6)$$

y la ecuación de energía para la placa, la cual en la aproximación de capa límite se expresa como

$$i\omega\rho_s C_s T_{s1} - K_s \frac{\partial^2 T_{s1}}{\partial y^2} = 0 \quad (3.7)$$

ρ , u , v y T son respectivamente la densidad, las componentes de la velocidad en las direcciones x y y , y la temperatura del fluido. μ , β_m , K y C_p son respectivamente la

viscosidad dinámica, el coeficiente de expansión térmica, la conductividad térmica y el calor específico del fluido. ρ_s y T_s son la densidad y la temperatura del sólido. K_s y C_s son la conductividad térmica y el calor específico del sólido. El subíndice s denota una propiedad o variable de la placa sólida.

Las condiciones de frontera requeridas para resolver las ecuaciones (3.3-3.7) son:

$$u|_{y=0} = v|_{y=0} = 0, \quad T|_{y=0} = T_s|_{y=0}$$

$$K \partial T / \partial y|_{y=0} = K_s \partial T_s / \partial y|_{y=0}$$

$$u|_{y \rightarrow \infty} < \infty \quad T|_{y \rightarrow \infty} < \infty$$

$$\partial T_s / \partial y|_{y=-l} = 0 \quad (3.8)$$

Resolviendo la ecuación de balance de cantidad de movimiento (Ec. (3.4)) se puede obtener una expresión para la perturbación de velocidad $u_1(x, y, t)$ en términos de p_1

$$u_1(x, y, t) = u_\infty \left(1 - e^{-(1+i)y/\delta_v}\right) e^{i\omega t} \quad (3.9)$$

donde u_∞ es la velocidad lejos de la placa y está dada por

$$u_\infty = \frac{i}{\omega \rho_m} \frac{dp_1}{dx} \quad (3.10)$$

y $\delta_v = \sqrt{2\mu/\rho_m\omega}$ es la profundidad de penetración viscosa en el fluido.

La perturbación de temperatura en el fluido y en la placa sólida, $T_1(x, y, t)$ y $T_{s1}(x, y, t)$ respectivamente, se determinan usando las ecuaciones de balance de energía en el fluido (Ec. (3.5)) y en la placa (Ec (3.7)), junto con las condiciones de frontera (Ec. (3.8)). Las expresiones resultantes, en términos de p_1 y u_∞ son

$$T_1(x, y, t) = \left\{ \frac{\beta_m T_m}{\rho_m C_p} p_1 + i \frac{\nabla T_m}{\omega} u_\infty \left(1 - \frac{\text{Pr}}{\text{Pr} - 1} e^{-(1+i)y/\delta_v}\right) - \left(\frac{\beta_m T_m}{\rho_m C_p} p_1 - i \frac{\nabla T_m}{\omega} u_\infty \frac{1 + \epsilon_s \sqrt{\text{Pr}}}{\text{Pr} - 1} \right) \frac{e^{-(1+i)y/\delta_k}}{1 + \epsilon_s} \right\} e^{i\omega t} \quad (3.11)$$

y

$$T_{1s}(x, y, t) = \left\{ \frac{\epsilon_s}{1 + \epsilon_s} \left(\frac{\beta_m T_m}{\rho_m C_p} p_1 + i \frac{\nabla T_m}{\omega} \frac{u_{\infty}}{\sqrt{\text{Pr} + 1}} \right) \frac{\cosh [(1 + i)(y + l)/\delta_s]}{\cosh [(1 + i)l/\delta_s]} \right\} e^{i\omega t} \quad (3.12)$$

donde $\text{Pr} = C_p \mu / K$ es el número de Prandtl, $\delta_k = \sqrt{2K/\rho_m C_p \omega}$ es la profundidad de penetración térmica en el fluido y $\delta_s = \sqrt{2K_s/\rho_s C_s \omega}$ es la profundidad de penetración térmica en el sólido. Para la configuración de una placa $\epsilon_s = \epsilon \coth [(1 + i)l/\delta_s]$ y para la configuración de varias placas $\epsilon_s = \epsilon \tanh [(1 + i)y_o/\delta_k] / \tanh [(1 + i)l/\delta_s]$, donde ϵ muestra la relación entre propiedades del fluido y del sólido $\epsilon = \sqrt{K \rho_m C_p / K_s \rho_s C_s}$. Nótese que en la ecuación (3.11) $\text{Pr} = 1$ no es singular, ya que los términos con $(\text{Pr} - 1)$ en los denominadores se cancelan.

3.2. Ecuación de onda para la presión

Las ecuaciones (3.3)-(3.6) se pueden reducir a la siguiente ecuación de onda para la presión

$$\rho_m \frac{d}{dx} \left(\frac{1 - f_v}{\rho_m} \frac{dp_1}{dx} \right) - \beta_m \frac{f_k - f_v}{(1 - \text{Pr})(1 + \epsilon_s)} \nabla T_m \frac{dp_1}{dx} + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \left(1 + \frac{(\gamma - 1) f_k}{(1 + \epsilon_s)} \right) p_1 = 0 \quad (3.13)$$

donde c es la velocidad del sonido en el fluido y γ es el cociente entre los calores específicos a presión constante y a volumen constante. Para la configuración de una sola placa,

$$f_v = \delta_v \quad f_k = \delta_k, \quad (3.14)$$

mientras que para la configuración de varias placas paralelas

$$f_v = \frac{\tanh [(1 + i)y_o/\delta_v]}{(1 + i)y_o/\delta_v} \quad f_k = \frac{\tanh [(1 + i)y_o/\delta_k]}{(1 + i)y_o/\delta_k} \quad (3.15)$$

La solución de la ecuación (3.13) describe ondas estacionarias, viajeras o una combinación, dependiendo de las condiciones de frontera laterales que se le impongan.

3.3. Diferencia de fase entre el flujo de calor y la presión

La diferencia de fase entre el calor suministrado al fluido y la presión determina las condiciones en las que las ondas son excitadas o son atenuadas, de acuerdo con el criterio dado por Rayleigh discutido en el capítulo 2.

La diferencia de fase θ entre dos perturbaciones que tienen la forma dada por la ecuación (3.2) puede ser evaluada por $|\theta| = \arccos(2 \langle \Phi_1 \Psi_1 \rangle / \|\Phi_1\| \|\Psi_1\|)$, donde $|\quad|$ indica valor absoluto, $\langle \quad \rangle$ denota promedio temporal y $\|\quad\|$ significa módulo de un número complejo. Usando esta expresión, la diferencia de fase entre el calor suministrado al fluido y la presión para una cierta posición x es

$$|\theta| = \arccos \left(\frac{2 \langle p_1 q_{01} \rangle}{\|p_1\| \|q_{01}\|} \right) \quad (3.16)$$

donde q_{01} es el calor suministrado al fluido desde la frontera sólida en la posición x , y está dado por

$$q_{01} = -K \left. \frac{\partial T_1}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (3.17)$$

Calculando $(\partial T_1 / \partial y)|_{y=0}$ de la Ec. (3.11) y sustituyendo en la Ec. (3.17) se obtiene

$$\begin{aligned} \langle p_1 q_{01} \rangle = & \frac{K}{\delta_k} \left\{ -\frac{\beta_m T_m}{\rho_m C_p} \left[\left\langle p_1 \left(\frac{1}{1 + \epsilon_s} p_1 \right) \right\rangle + \left\langle p_1 \left(\frac{i}{1 + \epsilon_s} p_1 \right) \right\rangle \right] \right. \\ & \left. + \frac{\nabla T_m}{\omega} \frac{1}{\sqrt{Pr} + 1} \left[\left\langle p_1 \left(\frac{1}{1 + \epsilon_s} u_{\infty} \right) \right\rangle - \left\langle p_1 \left(\frac{i}{1 + \epsilon_s} u_{\infty} \right) \right\rangle \right] \right\} \quad (3.18) \end{aligned}$$

De acuerdo a la interpretación de Rayleigh (ecuaciones (2.1) y (3.16) o (2.2)), el signo de esta expresión es determinante para la excitación o atenuación de la onda acústica.

3.4. Producción de potencia acústica

El promedio temporal de la potencia producida ($w > 0$) o absorbida ($w < 0$) por el fluido en un cierta posición axial x puede calcularse a partir de la expresión de la expresión termodinámica:

$$w = \left\langle \int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} \int_0^{\infty} \left(-\frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right) dy dz \right\rangle \quad (3.19)$$

Una expresión conveniente para w es la siguiente

$$w = \Delta z \int_0^{\infty} (\omega \beta_m \langle p_1 (iT_1) \rangle + \beta_m \nabla T_m \langle p_1 u_1 \rangle) dy \quad (3.20)$$

La deducción de esta ecuación se encuentra en la sección 2 del anexo 2.

Sustituyendo la perturbación de temperatura de la Ec. (3.11) y la perturbación de la velocidad de la Ec. (3.9), la Ec. (3.20) toma la forma

$$w = \Delta z \frac{\delta_k}{2} \left\{ -\frac{\beta_m T_m}{\rho_m C_p} \left[\left\langle p_1 \left(\frac{1}{1 + \epsilon_s} p_1 \right) \right\rangle + \left\langle p_1 \left(\frac{i}{1 + \epsilon_s} p_1 \right) \right\rangle \right] \right. \\ \left. + \frac{\nabla T_m}{\omega} \frac{1}{\sqrt{\Gamma} + 1} \left[\left\langle p_1 \left(\frac{1}{1 + \epsilon_s} u_{\infty} \right) \right\rangle - \left\langle p_1 \left(\frac{i}{1 + \epsilon_s} u_{\infty} \right) \right\rangle \right] \right\} \quad (3.21)$$

Un valor positivo de esta expresión significa que hay producción de potencia acústica, es decir la onda es excitada. Mientras que un valor negativo implica que la atenuación de la onda.

3.5. Comprobación teórica de la explicación de Rayleigh

Comparando las expresiones para $\langle p_1 q_{01} \rangle$ (Ec. (3.18)) y para la producción de potencia acústica w (Ec. (3.20)), se encuentra que ambas expresiones son proporcionales, *i.e.*

$$w = \frac{\Delta z \beta_m}{\rho_m C_p} \langle p_1 q_{01} \rangle \quad (3.22)$$

Recordando la ecuación (3.16), este resultado indica que existe generación de potencia acústica ($w > 0$) cuando el calor suministrado al fluido está en fase con la perturbación de presión ($|\theta| < \pi/2$) y que la potencia acústica es absorbida ($w < 0$) cuando el calor suministrado al fluido está fuera de fase con la presión ($|\theta| > \pi/2$). Esto muestra la completa concordancia entre la interpretación cualitativa dada por Rayleigh al efecto termoacústico y la teoría cuantitativa moderna.

En este momento, es importante enfatizar que la ecuación (3.22) es válida para cualquier solución de la ecuación de onda para la presión (Ec. (3.13)) incluyendo ondas estacionarias, ondas viajeras o sumas de éstas, en cualquier fluido compresible. La ecuación (3.22) constituye la demostración cuantitativa de la explicación dada por Rayleigh al efecto termoacústico. Una consecuencia obvia de la ecuación (3.22) es que la condición sobre el gradiente axial de temperatura media para tener el valor crítico de producción de potencia acústica, *i.e.* $w = 0$, coincide con el

valor del gradiente axial de temperatura media crítico estimado por la condición crítica de una diferencia de fase de $\pi/2$ entre el calor suministrado al fluido y la oscilación de presión.

3.6. Soluciones a la ecuación de onda para la presión

Para estudiar el efecto termoacústico, se han hecho esfuerzos por encontrar soluciones analíticas a la ecuación de onda para la presión (Ec. (3.13)). Rott (1969) supuso un artificioso gradiente de temperatura en forma de escalón en un tubo (gas ideal, $\mu = 0$, $\epsilon = 0$, $\delta_k \ll 1$). Swift (1988) consideró una placa pequeña con un gradiente de temperatura lineal, en esta aproximación Swift despreció el efecto del gradiente sobre las características globales de la onda acústica. Recientemente, Raspét *et al.* (1993) consideraron el efecto del gradiente axial de temperatura media sobre las características globales de la onda acústica y dieron una solución aproximada para el caso de una placa pequeña y una solución exacta considerando una placa con una longitud arbitraria, suponiendo un gradiente axial de temperatura media lineal (gas ideal y $\mu = 0$, $\epsilon = 0$, $\delta_k \ll 1$).

En esta tesis se presentarán dos modelos, el primero es una extensión de la aproximación de placa pequeña de Swift (1988), este modelo será utilizado para comparar los resultados experimentales. El segundo modelo es una extensión de la aproximación de placa pequeña de Raspét *et al.* (1993) y servirá para analizar los cambios debidos a la consideración de los efectos del gradiente axial de temperatura sobre la onda de presión.

En estas presentaciones se usarán expresiones adimensionales, lo que permite la identificación de los parámetros relevantes del efecto termoacústico. Se ha adoptado la siguiente adimensionalización para las coordenadas espaciales y la temporal

$$x = \frac{\omega}{c} x^* \quad y = \frac{y^*}{\delta_k} \quad y^\dagger = \frac{y^{\dagger*}}{\delta_s} \quad l = \frac{l^*}{\delta_s} \quad t = \omega t^* \quad (3.23)$$

A partir de esta sección, el asterisco indica una variable dimensional, mientras que las variables adimensionales no llevan ninguna anotación especial. Nótese que se ha introducido una nueva variable (y^\dagger), ésta es la coordenada transversal dentro del sólido. Esto se hace para adimensionalizar y y y^\dagger con una diferente escala, su correspondiente profundidad de penetración térmica.

La presión, temperatura y densidad medias son escaladas con el valor correspondiente en un punto de referencia (subíndice r)

$$\rho_m = \frac{p_m^*}{p_{mr}} = 1 \quad T_m = \frac{T_m^*}{T_{mr}} \quad \rho_m = \frac{\rho_m^*}{\rho_{mr}} \quad (3.24)$$

Las propiedades del fluido se consideran constantes y toman el valor correspondiente a la presión media y a la temperatura media del punto de referencia, con excepción del coeficiente de expansión térmica β_m . Esta propiedad varía fuertemente con la temperatura por lo que sí se considera su dependencia con la temperatura y por lo tanto se adimensionaliza con su valor de referencia

$$\beta_m = \frac{\beta_m^*}{\beta_{mr}} \quad (3.25)$$

Ya que las perturbaciones de las variables son independientes de sus valores medios, pueden escalarse con diferentes parámetros. Las perturbaciones de presión (p_1), velocidad (u_1), temperatura (T_1) y densidad (ρ_1) se adimensionalizan de la siguiente forma

$$p_1 = \frac{p_1^*}{p_A} \quad u_1 = \frac{u_1^*}{u_{Aa}} \quad T_1 = \frac{T_1^*}{T_{Aa}} \quad \rho_1 = \frac{\rho_1^*}{\rho_{mr}} \quad (3.26)$$

p_A es la amplitud máxima de la oscilación de presión, $u_{Aa} = p_A / \rho_{mr} c$ y $T_{Aa} = \beta_{mr} T_{mr} p_A / \rho_{mr} C_p$.

Expresadas en forma adimensional, las condiciones de frontera toman la forma:

Para la velocidad

$$u_1|_{y=0} = 0 \quad \text{y} \quad u_1|_{y \rightarrow \infty} < \infty \quad (3.27)$$

Para la temperatura

$$\begin{aligned} T_{s1}|_{y^*=0} &= T_1|_{y=0} = T_w \\ T_1|_{y \rightarrow \infty} &= 1 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Para el flujo de calor

$$\begin{aligned} dT_1/dy|_{y=0} &= \frac{1}{\epsilon} dT_{s1}/dy^*|_{y^*=0} \\ \partial T_{s1}/\partial y^*|_{y^*=-l} &= 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Obsérvese que suponer que la placa posee una capacidad calorífica C_s infinita implica $\epsilon = 0$ dando lugar a una singularidad en la transferencia de calor en la frontera sólida.

La producción de potencia acústica (Ec. 3.21) escalada con $\frac{1}{2}\Delta z^* \delta_k \omega p_A \frac{T_{Aa}}{T_{mr}}$ toma la siguiente forma

$$w = p_{1R} \int_0^\infty (-T_{1I} + \Gamma u_{1R}) dy \quad (3.30)$$

donde los subíndices R y I denotan respectivamente la parte real y la parte imaginaria de la variable. Γ está definido como

$$\Gamma = \frac{\beta_{mr} T_{mr} \nabla T_m}{\gamma - 1} \quad (3.31)$$

Dado el escalamiento empleado, el gradiente axial de temperatura media en forma adimensional está dado por

$$\nabla T_m = \frac{c \nabla T_m^*}{\omega T_{mr}} \quad (3.32)$$

3.7. Primer modelo

Se considera que la placa tiene una extensión pequeña $\Delta x^* \ll \lambda^*/k^*$ y un grosor $2l^*$. En esta tesis el modelo original de Swift [?], se extiende para incluir la viscosidad del fluido y la capacidad finita de la placa. Este modelo es una primera aproximación a la descripción del efecto termoacústico y es válido para cualquier fluido, en él se desprecia el efecto del gradiente térmico sobre la onda acústica de presión. Bajo esta consideración y lejos de la placa donde los efectos de la viscosidad y de la transferencia de calor son despreciables, la ecuación de onda para la presión (Ec. (3.13)), expresada en forma adimensional, se reduce a la siguiente

$$\frac{d^2 p_1}{dx^2} + p_1 = 0 \quad (3.33)$$

Nótese que al despreciar los efectos del gradiente axial de temperatura, de la viscosidad y de la transferencia de calor en este modelo se están despreciando factores de amortiguamiento de la onda.

La ecuación (3.33) es una ecuación de onda cuya solución general es:

$$p_1(x, t) = (C_+ e^{-ix} + C_- e^{+ix}) e^{it} \quad (3.34)$$

cada término representa una onda viajera, el primero corresponde a una onda propagándose en la dirección positiva del eje x y el segundo, en la dirección opuesta. En general C_+ y C_- son amplitudes complejas. En este trabajo se consideran

dos casos una onda viajera pura propagándose en la dirección positiva del eje x ($C_+ = 1, C_- = 0$) y una onda estacionaria pura ($C_+ = C_- = \frac{1}{2}$). En ambos casos, el centro de la placa será usado como el punto de referencia x_r y sólo se estudiarán puntos en la vecindad de este punto ($x \sim x_r$), por lo que $T_m \sim \rho_m \sim \beta_m \sim 1$.

3.7.1. Onda viajera

Considérese una onda viajera en la dirección positiva del eje x , paralela a la placa. La presión está dada por la ecuación (3.34) con $C_+ = 1$ y $C_- = 0$, obteniéndose

$$p_1(x, t) = e^{i(-x+t)} \quad (3.35)$$

Sustituyendo la expresión para la presión (Ec. (3.35)) en la ecuación para la velocidad (Ec.(3.9)), en forma adimensionalizada se obtiene

$$u_1(x, y, t) = \left(1 - e^{-(1+i)y/\sqrt{\text{Pr}}}\right) e^{i(-x+t)} \quad (3.36)$$

En este caso, las oscilaciones de temperatura en el fluido $T_1(x, y, t)$ y en la placa $T_{s1}(x, y^\dagger, t)$ en forma adimensionalizada se expresan como

$$T_1(x, y) = \left[1 + i\Gamma \left(1 - \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}-1} e^{-(1+i)y/\sqrt{\text{Pr}}}\right) + \left(-1 + \frac{i\Gamma}{\text{Pr}-1} + \frac{i\epsilon_s\sqrt{\text{Pr}}\Gamma}{\text{Pr}-1}\right) \frac{e^{-(1+i)y}}{1 + \epsilon_s}\right] e^{i(-x+t)} \quad (3.37)$$

y

$$T_{s1}(x, y^\dagger, t) = \frac{\epsilon_s}{1 + \epsilon_s} \left(1 + \frac{i\Gamma}{\sqrt{\text{Pr}} + 1}\right) \left(\frac{\cosh((1+i)y^\dagger)}{\cosh((1+i)l)}\right) e^{i(-x+t)} \quad (3.38)$$

En la placa simple, expresada en forma adimensional $\epsilon_s = \epsilon \coth((1+i)l)$.

La producción de potencia acústica se calcula sustituyendo las expresiones correspondientes en la ecuación (3.30): la parte real de la presión de la ecuación (3.35), la parte imaginaria de la oscilación de temperatura de la ecuación (3.37) y la parte real de la oscilación de velocidad (Ec. (3.36)), resultando

$$w = \frac{1}{2 \left((1 + \epsilon_{sR})^2 + \epsilon_{sI}^2 \right)} \left(\frac{\Gamma}{1 + \sqrt{\text{Pr}}} (1 + \epsilon_{sR} - \epsilon_{sI}) - (1 + \epsilon_{sR} + \epsilon_{sI}) \right) \quad (3.39)$$

ϵ_{sR} y ϵ_{sI} son respectivamente la parte real y la imaginaria de ϵ_s . Recuérdese que este parámetro depende de la relación de propiedades termodinámicas entre fluido y la placa (ϵ) y del semigrosor de la placa (l); en todo caso $\epsilon_{sR} > 0$ y $|\epsilon_{sI}| < \epsilon_{sR}$, implicando $(\epsilon_{sR} - \epsilon_{sI}) > 0$ y $(\epsilon_{sR} + \epsilon_{sI}) > 0$ (ver Fig. 3.2) por lo que los factores $(1 + \epsilon_{sR} - \epsilon_{sI})$ y $(1 + \epsilon_{sR} + \epsilon_{sI})$ siempre serán positivos.

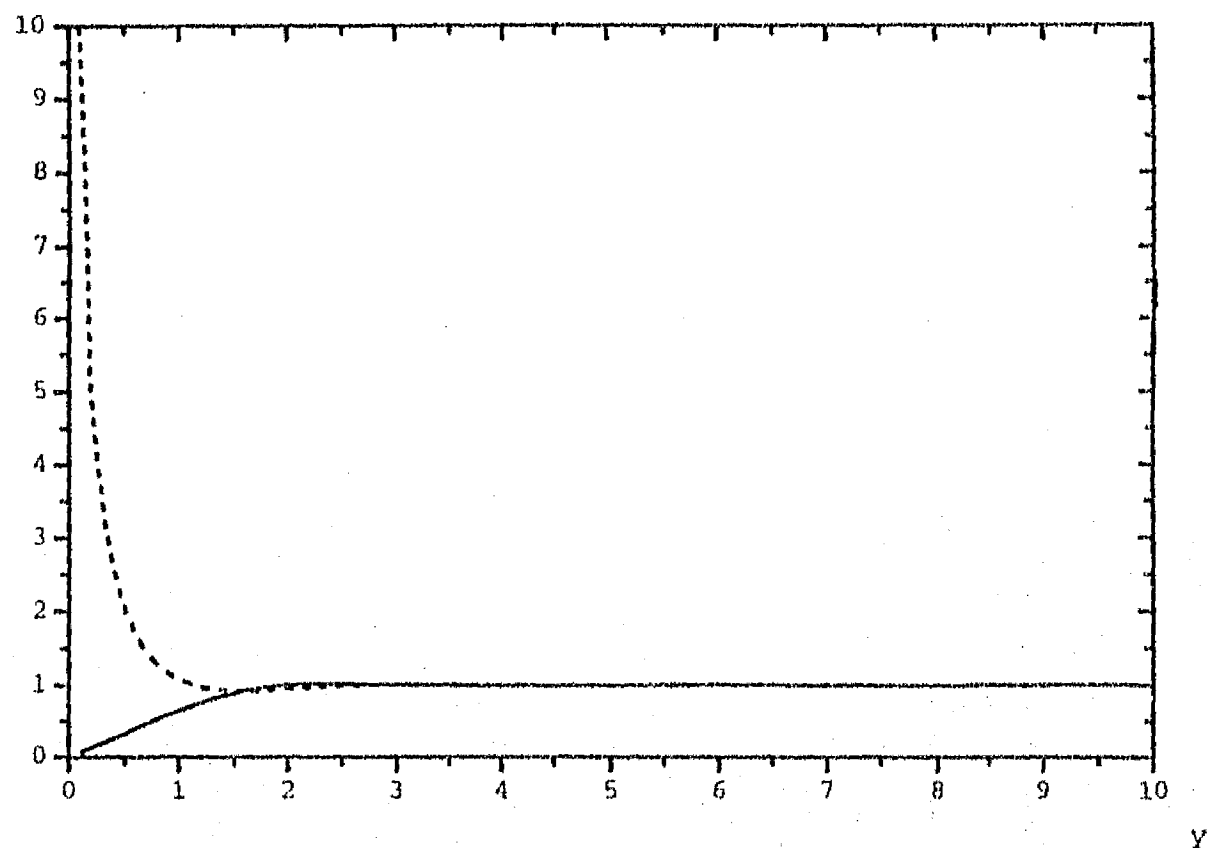


Fig. 3.2. — representa la gráfica de $(\epsilon_{sR} + \epsilon_{sI}) / \epsilon$ como función de la distancia y . ---- corresponde a la gráfica de $(\epsilon_{sR} - \epsilon_{sI}) / \epsilon$

El segundo término de la ecuación (3.39) es independiente del gradiente axial de temperatura (∇T_m) y sólo depende de la relación de propiedades termodinámicas entre fluido y placa y del semigrosor de la placa. Este término siempre es negativo por lo que contribuye a la atenuación de la onda.

El primer término depende además del gradiente axial de la temperatura media a través de Γ . La producción de potencia acústica sólo es posible si $\Gamma > 0$, es

decir, si el gradiente axial de la temperatura media tiene la misma dirección que la propagación de la onda.

$w = 0$ determina el valor crítico del gradiente axial de la temperatura media ∇T_{mc} entre excitación y atenuación de la onda, el cual viene dado por

$$\nabla T_{mc} = \frac{(\gamma - 1)(1 + \sqrt{Pr})(1 + \epsilon_{sR} + \epsilon_{sI})}{\beta_{mr} T_{mr} (1 + \epsilon_{sR} - \epsilon_{sI})} \quad (3.40)$$

Si $\nabla T_m < \nabla T_{mc} \Rightarrow w < 0$ por lo que se tiene atenuación de la onda y para $\nabla T_m > \nabla T_{mc} \Rightarrow w > 0$ la onda es excitada. Tal como se observa en la Fig. 3.3.

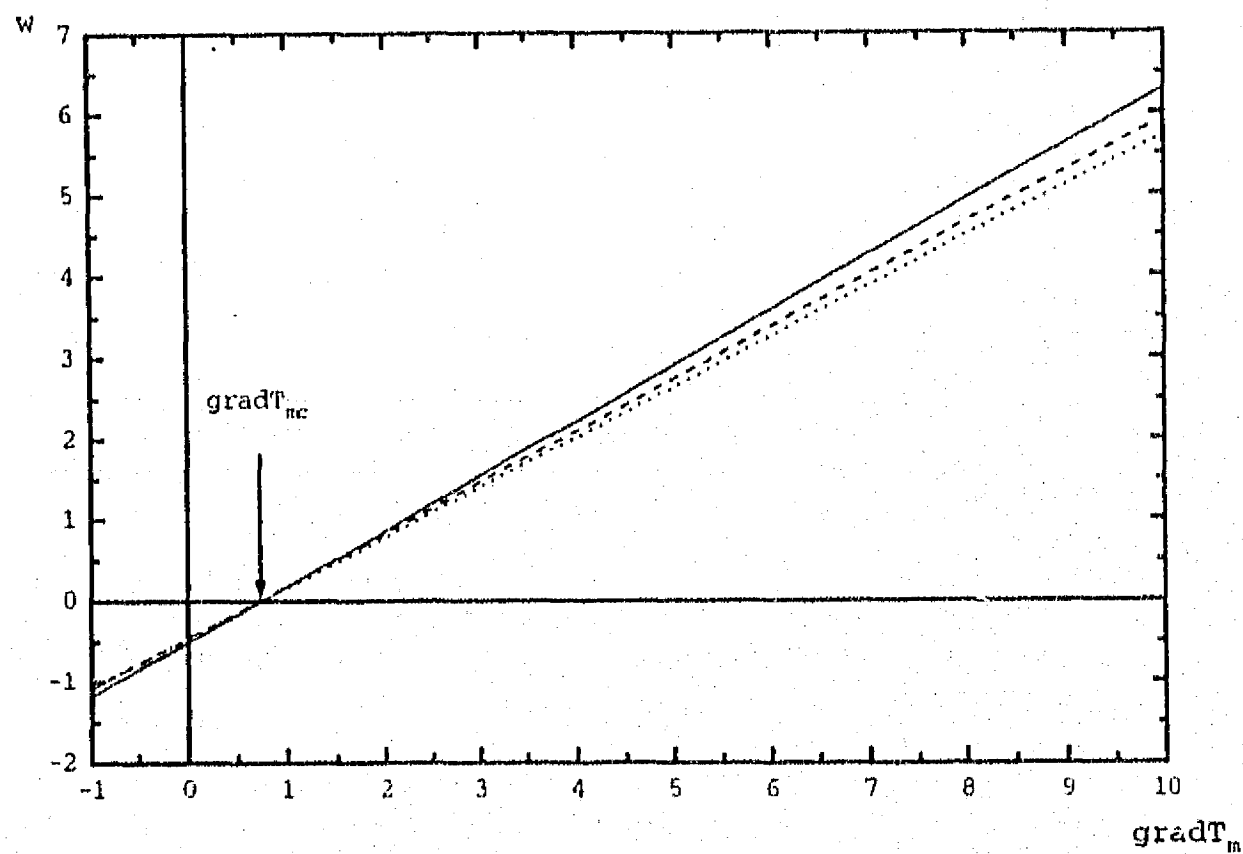


Fig. 3.3. Producción de potencia acústica en ondas viajeras, según el primer modelo, como función de $\text{grad}T_m$.

— $\epsilon = 0$ - - - $\epsilon = 0.1, l = 1$ ····· $\epsilon = 0.1, l = 10$

3.7.2. Onda estacionaria

Considérese ahora, una onda estacionaria paralela a la placa, la presión está dada por la ecuación (3.34) con $C_+ = C_- = 1/2$, y toma la forma

$$p_1(x, t) = \cos(x) e^{it} \quad (3.41)$$

Procediendo en forma similar a la sección anterior, la oscilación de velocidad está dada por:

$$u_1(x, y, t) = -i \sin x \left(1 - e^{-(1+i)y/\sqrt{\text{Pr}}}\right) e^{it} \quad (3.42)$$

La oscilación de temperatura toma la forma

$$T_1(x, y, t) = \left\{ \cos x + \Gamma \sin x \left(1 - \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}-1} e^{-(1+i)y/\sqrt{\text{Pr}}}\right) + \left(-\cos x + \frac{\Gamma \sin x}{\text{Pr}-1} + \frac{\epsilon_s \sqrt{\text{Pr}} \Gamma \sin x}{\text{Pr}-1}\right) \frac{e^{-(1+i)y}}{1+\epsilon_s} \right\} e^{it} \quad (3.43)$$

La expresión para $T_{s1}(x, y^\dagger, t)$ es:

$$T_{s1}(x, y^\dagger, t) = \frac{\epsilon_s}{1+\epsilon_s} \left(\cos x + \frac{\Gamma \sin x}{\sqrt{\text{Pr}+1}} \right) \left(\frac{\cosh((1+i)y^\dagger)}{\cosh((1+i)l)} \right) e^{it} \quad (3.44)$$

Para la onda estacionaria, la producción de potencia acústica (Ec. (3.30)) toma la forma

$$w = \frac{\cos x_r (1 + \epsilon_{sR} + \epsilon_{sI})}{2 \left((1 + \epsilon_{sR})^2 + \epsilon_{sI}^2 \right)} \left(-\frac{\Gamma}{1 + \sqrt{\text{Pr}}} \sin x_r - \cos x_r \right) \quad (3.45)$$

Obsérvese que, ya que en este tipo de ondas la amplitud de la oscilación depende de la coordenada axial, la producción de potencia acústica w depende de la posición de la placa, existiendo una posición óptima (x_{ro}) para la producción de potencia acústica. La Fig. 3.4. muestra la gráfica de w como función de la posición x_r para diferentes valores del gradiente ∇T_m . En ella se observa que la posición de máxima producción depende ligeramente del valor de ∇T_m .

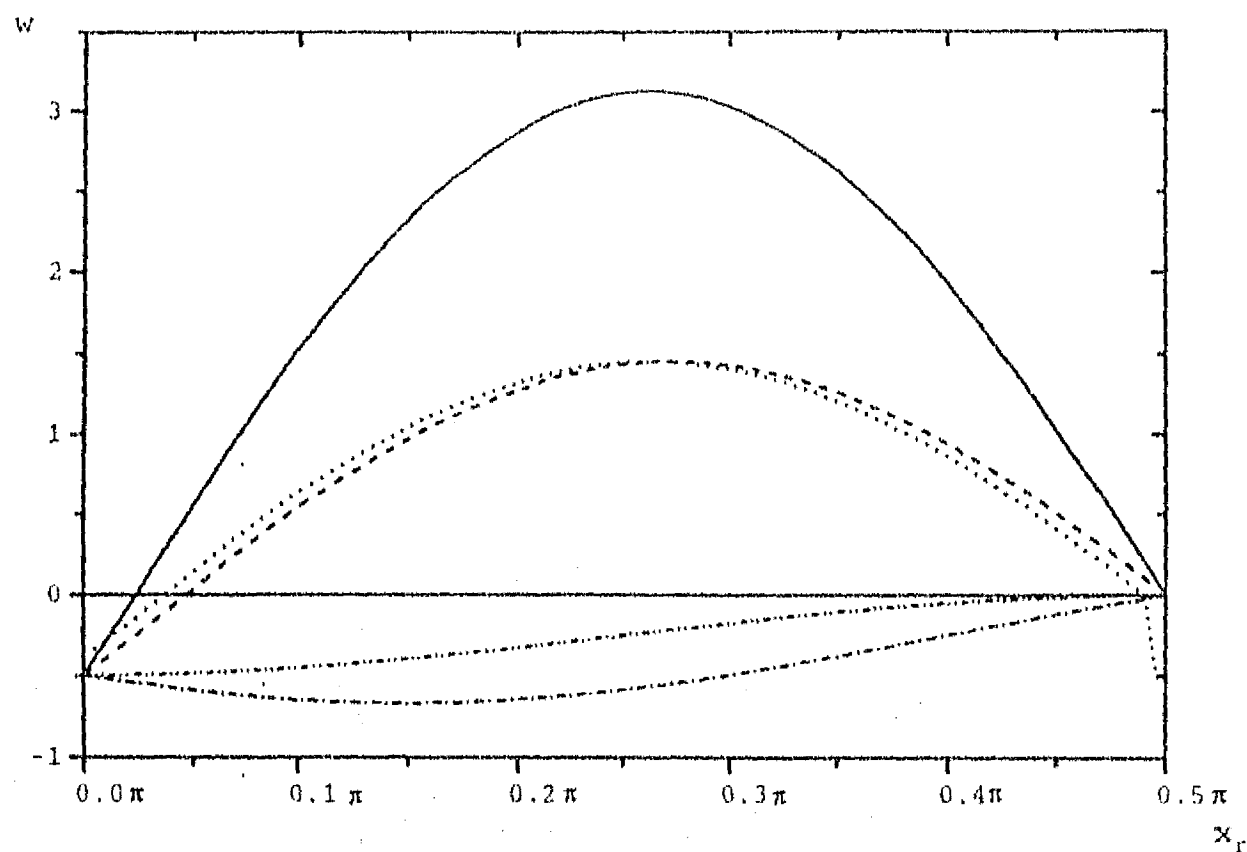


Fig. 3.4. Gráfica de la producción de potencia acústica en ondas estacionarias, según el primer modelo, como función de la posición axial, para diferentes valores del gradiente axial de temperatura media. x_{r0} es la posición óptima dado el valor del $\text{grad}T_m$ en la que se obtiene un valor máximo de w .

— $\text{grad}T_m = -10$ $x_{r0} = 0.26\pi$ - - - - $\text{grad}T_m = -5$ $x_{r0} = 0.275\pi$
 ····· $\text{grad}T_m = -1$ $x_{r0} = 0.265\pi$ - · - · $\text{grad}T_m = 0$
 - · - · $\text{grad}T_m = 1$

El gradiente crítico para el cual $w = 0$ es

$$\nabla T_{mc} = \frac{(\gamma - 1)(1 + \sqrt{\text{Pr}})}{\beta_{mr} T_{mr}} \cot x_r \quad (3.46)$$

Nótese que en este caso, la condición crítica sobre ∇T_m no depende de ϵ_s ya que la influencia de las propiedades de la placa en la modificación en el campo de temperatura se manifiesta como un factor común en los dos términos de la ecuación (3.45). La diferencia respecto a las ondas viajeras, se encuentra en el

hecho que en las ondas estacionarias la fase relativa entre la velocidad y la presión (ψ) está cercana a $\pi/2$, mientras que en las ondas viajeras es $\psi \sim 0$. Sin embargo en este caso, ∇T_{mc} depende de la posición de referencia x_r .

Debido al sistema de referencia utilizado, el gradiente crítico es negativo indicando que, para que exista producción de potencia acústica el antinodo de presión ($x = 0$) debe estar más caliente que el nodo de presión ($x = \pi/2$).

Si $\nabla T_m < \nabla T_{mc} \Rightarrow w > 0$, *i.e.* excitación de la onda y si $\nabla T_m > \nabla T_{mc} \Rightarrow w < 0$, *i.e.* atenuación de la onda.

Diferencia de fase entre la temperatura y la presión La diferencia de fase entre la temperatura y la presión α se expresa como

$$|\alpha| = \arccos \left(\frac{2 \langle p_1 T_1 \rangle}{\|p_1\| \|T_1\|} \right) \quad (3.47)$$

si $\langle p_1 T_1 \rangle > 0 \Rightarrow |\alpha| < \pi/2$, mientras que si $\langle p_1 T_1 \rangle < 0 \Rightarrow |\alpha| > \pi/2$. Calculando

$$\lim_{y \rightarrow 0} \langle p_1 T_1 \rangle = \frac{\cos x_r \epsilon_{sR} (1 + \epsilon_{sR}) + \epsilon_{sI}^2}{2 (1 + \epsilon_{sR})^2 + \epsilon_{sI}^2} \left(\frac{\Gamma}{1 + \sqrt{\text{Pr}}} \sin x_r + \cos x_r \right) \quad (3.48)$$

el gradiente crítico para el cual $\lim_{y \rightarrow 0} \langle p_1 T_1 \rangle = 0$ coincide con el obtenido a través de $w = 0$ (Ec. (3.46)). Esto implica que, para condiciones de atenuación ($\nabla T_m > \nabla T_{mc}$) se tiene que $\lim_{r \rightarrow 0} |\alpha| < \pi/2$, mientras que para condiciones de excitación ($\nabla T_m < \nabla T_{mc}$) $\lim_{r \rightarrow 0} |\alpha| > \pi/2$. Este resultado es importante para validar experimentalmente la explicación de Rayleigh al efecto termoacústico (ver sección 2.3.). La interpretación directa de la explicación de Rayleigh exigiría la medición del defasamiento entre flujo de calor y la presión en la vecindad de la placa, para ello habría que medir el defasamiento del gradiente oscilatorio de temperatura y la presión en la vecindad de la placa, esto es difícil. Sin embargo, la medición del defasamiento entre la oscilación de temperatura y la presión en la vecindad de la placa se estima más factible. Ver sección 4.6.

3.8. Segundo modelo

Este segundo modelo está basado en el presentado por Raspet *et al.* (1993) como modelo de placa pequeña para ondas viajeras. En esta tesis también se extiende este modelo para incluir el efecto de la viscosidad del fluido y la capacidad calorífica finita de la placa. Este modelo constituye una mejor aproximación al fenómeno

termoacústico ya que sí considera el efecto del gradiente de temperatura axial en la forma de la onda acústica, sin embargo impone una restricción adicional, ya que para resolver la ecuación de onda modificada supone que el fluido es un gas ideal.

Bajo esta consideración y lejos de la placa donde la viscosidad y la transferencia de calor son despreciables, la ecuación de onda para la presión (Ec. (3.13)), expresada en forma adimensional, se reduce a la siguiente

$$\frac{d^2 p_1}{dx^2} + \beta_{mr} T_{mr} \beta_m \nabla T_m \frac{dp_1}{dx} + p_1 = 0 \quad (3.49)$$

Para resolver analíticamente esta ecuación se supone que el fluido es un gas ideal ($\beta_{mr} T_{mr} = 1$, $\beta_m T_m = 1$). Por lo que la ecuación (3.49) se expresa como:

$$\frac{d^2 p_1}{dx^2} + \frac{\nabla T_m}{T_m} \frac{dp_1}{dx} + p_1 = 0 \quad (3.50)$$

Si se supone que el gradiente ∇T_m es constante, esta ecuación, después de un cambio de variable conveniente, puede llevarse a una ecuación de Bessel de orden cero y resolverse en términos de las funciones de Hankel. Sin embargo haciendo la suposición adicional de considerar x en una pequeña región alrededor del punto de referencia, la solución de la ecuación (3.50) es la siguiente

$$p_1(x, t) = \left\{ \frac{C_+}{T_m^{1/2}} e^{-ikx} + \frac{C_-}{T_m^{1/2}} e^{+ikx} \right\} e^{it} \quad (3.51)$$

en este modelo la amplitud de la onda se modifica con la posición ($T_m = T_m(x)$) y el número de onda k también se modifica

$$k = \sqrt{\frac{1}{T_m} + \left(\frac{\nabla T_m}{2T_m} \right)^2} \quad (3.52)$$

También en este modelo el centro de la placa será usado como el punto de referencia x_r y sólo se estudiarán puntos en la vecindad de este punto.

3.8.1. Onda viajera

Para una onda viajera en la dirección positiva del eje x , paralela a la placa. La presión cerca del punto de referencia está dada por la ecuación (3.51) con $C_+ = 1$ y $C_- = 0$. Obteniéndose

$$p_1(x, t) = e^{i(-kx+t)} \quad (3.53)$$

Sustituyendo la expresión para la presión (Ec. (3.53)) en la ecuación para la velocidad (Ec.(3.9)), en forma adimensionalizada se obtiene

$$u_1(x, r, t) = \left(k - i \frac{\nabla T_m}{2} \right) \left(1 - e^{-(1+i)y/\sqrt{Pr}} \right) e^{i(-kx+t)} \quad (3.54)$$

Para una futura referencia, es importante notar que la presencia del gradiente axial de temperatura modifica la amplitud de la velocidad, modificando el número de onda e introduciendo un término imaginario. Este último término, también modifica la fase relativa entre las oscilaciones de velocidad y de presión en ondas viajeras (ψ); cerca de la placa la fase también es modificada por la viscosidad, esto significa que $\psi = f(\nabla T_m, Pr)$. En la Fig. 3.5 se muestra la diferencia de fase entre la velocidad y la presión en ondas viajeras para diversos valores de ∇T_m y Pr , como función de la distancia a la placa (y). Las curvas indican que la velocidad sufre un retraso con respecto a la presión debida a la presencia de ∇T_m . Cuando $\nabla T_m \rightarrow \infty$, $\psi \rightarrow \pi/4$.

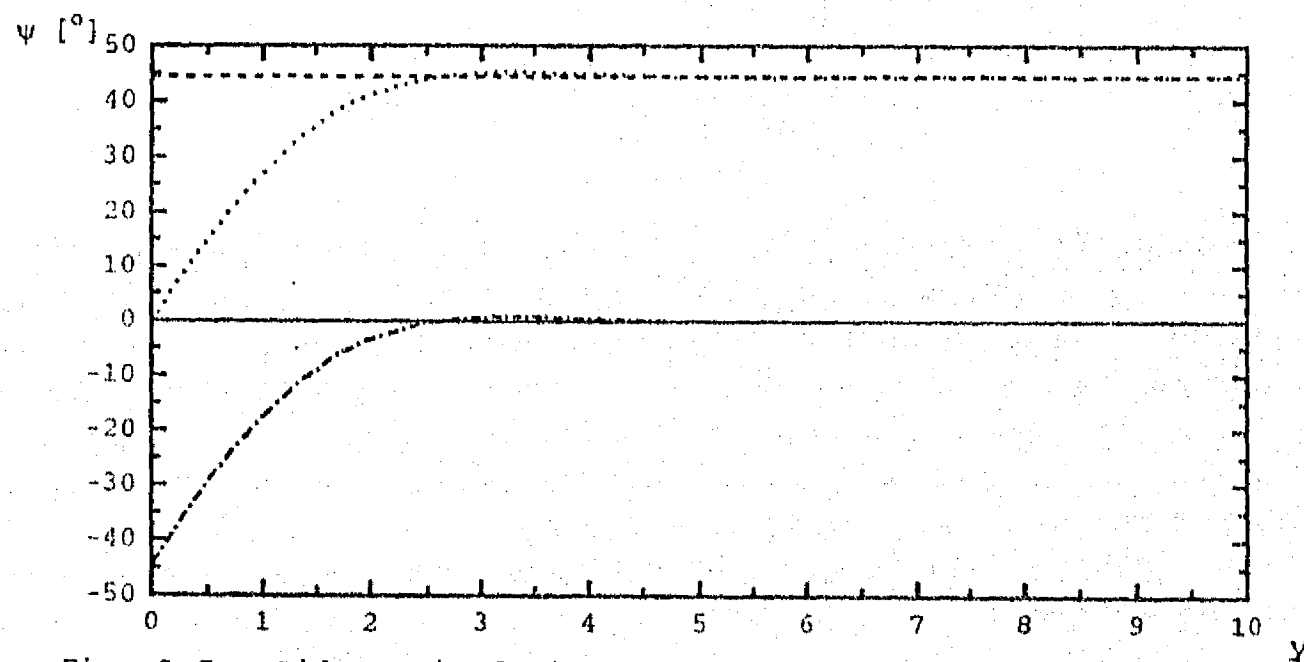


Fig. 3.5. Diferencia de fase entre la velocidad y la presión (θ) en ondas viajeras, según el segundo modelo, como función de la distancia a la placa. Para: — $\text{grad}T_m = 0, Pr = 0$
 - - - $\text{grad}T_m = 10, Pr = 0$ - · - · $\text{grad}T_m = 0, Pr = 0.7$
 ····· $\text{grad}T_m = 10, Pr = 0.7$

En este caso y en forma adimensional, la expresión para las oscilaciones de temperatura en el gas $T_1(x, y, t)$ (Ec. (3.11)) toma la forma

$$T_1(x, y, t) = \left[1 + \Gamma \left(\frac{\nabla T_m}{2} + ik \right) \left(1 - \frac{\text{Pr}}{\text{Pr} - 1} e^{-(1+i)y/\sqrt{\text{Pr}}} \right) \right. \\ \left. + \left(-1 + \frac{\Gamma \left(\frac{\nabla T_m}{2} + ik \right)}{\text{Pr} - 1} + \frac{\epsilon_s \sqrt{\text{Pr}} \Gamma \left(\frac{\nabla T_m}{2} + ik \right)}{\text{Pr} - 1} \right) \frac{e^{-(1+i)y}}{1 + \epsilon_s} \right] e^{i(-kx+t)} \quad (3.55)$$

Y la expresión para $T_{s1}(x, y^\dagger, t)$ (Ec. (3.12)) resulta

$$T_{s1}(x, y^\dagger, t) = \frac{\epsilon_s}{1 + \epsilon_s} \left(1 + \frac{\Gamma \left(\frac{\nabla T_m}{2} + ik \right)}{\sqrt{\text{Pr}} + 1} \right) \left(\frac{\cosh((1+i)y^\dagger)}{\cosh((1+i)l)} \right) e^{i(-kx+t)} \quad (3.56)$$

En este caso, la producción de potencia acústica (Ec. (3.30)) toma la forma

$$w = \frac{1}{2 \left((1 + \epsilon_{sR})^2 + \epsilon_{sI}^2 \right)} \left(\frac{\Gamma k}{1 + \sqrt{\text{Pr}}} (1 + \epsilon_{sR} - \epsilon_{sI}) \right. \\ \left. - \left(1 + \frac{\Gamma \nabla T_m}{2(1 + \sqrt{\text{Pr}})} \right) (1 + \epsilon_{sR} + \epsilon_{sI}) \right) \quad (3.57)$$

Comparando la ecuación (3.57) con su correspondiente en el primer modelo (Ec. (3.39)) se observa que el primer término se modifica por el cambio en el número de onda por el efecto del gradiente axial, además aparece un tercer término, éste se debe al cambio de fase entre velocidad y presión producido por ∇T_m (ver Fig. 3.5), este último término siempre es negativo, implicando que existe un factor adicional de atenuación de la onda por la modificación al campo de presión debida a la presencia del gradiente axial de temperatura.

$w = 0$ determina el valor crítico del gradiente axial de temperatura media, en este caso se obtiene:

$$\nabla T_{mc} = \begin{cases} (\gamma - 1) \frac{1 + \sqrt{\text{Pr}}}{\sqrt{1 - (\gamma - 1)(1 + \sqrt{\text{Pr}})}} & \epsilon = 0 \\ (\gamma - 1) \sqrt{\frac{-d + \sqrt{d^2 - 4a\epsilon}}{2C_+}} & \epsilon \neq 0 \end{cases} \quad (3.58)$$

donde

$$\begin{aligned} a &= -(\gamma - 1)^2 \epsilon_I (1 + \epsilon_{sR}) \\ d &= 1 + \epsilon_{sR} - \epsilon_{sI} - (\gamma - 1) (1 + \sqrt{\text{Pr}}) (1 + \epsilon_{sR} + \epsilon_{sI}) \\ e &= - (1 + \sqrt{\text{Pr}})^2 (1 + \epsilon_{sR} + \epsilon_{sI}) \end{aligned}$$

Para el caso $\epsilon = 0$, si $\nabla T_m < \nabla T_{mc} \Rightarrow w < 0$, es decir la onda es atenuada, mientras que para $\nabla T_m > \nabla T_{mc} \Rightarrow w > 0$ la onda es excitada.

Para el caso $\epsilon \neq 0$, la consideración del efecto de ∇T_m sobre la onda acústica resulta en un comportamiento interesante. Dependiendo del valor del semiespesor de la placa l , la ecuación $w = 0$ como función de ∇T_m tiene una o dos soluciones reales, y éstas siempre son positivas. En la Fig. 3.6 se encuentra graficada w como función de ∇T_m para distintos valores de l . En esta gráfica se puede apreciar que para ciertos valores de l (p.ej. 0.1, 1, 3.5, 4) existe un sólo valor crítico de ∇T_m . Sin embargo para otros valores de l (p.ej. 2, 2.5, 3, 5) existen dos valores críticos de ∇T_m . En la gráfica se observa que el valor de ∇T_{mc} (el primero en el caso de solución doble) aumenta al aumentar l hasta alcanzar un valor asintótico. Mientras que en solución doble, el segundo valor de ∇T_{mc} tiende a infinito al aumentar l . En los casos de una solución, cuando $\nabla T_m > \nabla T_{mc}$ se tiene condición de excitación de la onda. En los casos de solución doble, la condición de excitación se presenta en el rango $\nabla T_{mc1} < \nabla T_m < \nabla T_{mc2}$. La causa de este comportamiento se encuentra en la forma ondulatoria de ϵ_{sI} como función de l (Fig. 3.7). En los rangos de l donde la función ϵ_{sI} es negativa, la ecuación $w = 0$ tiene una solución para ∇T_m mientras que en los rangos donde ϵ_{sI} es positiva, la ecuación anterior presenta dos soluciones.

3.8.2. Onda estacionaria

En este segundo modelo la presión para el caso de onda estacionaria está dada por la ecuación (3.51) con $C_+ = C_- = 1/2$

$$p_1(x, t) = \cos(kx) e^t \quad (3.59)$$

Procediendo en forma similar a la sección anterior, la oscilación de velocidad está dada por:

$$u_1(x, y, t) = -i \left(\frac{\nabla T_m}{2} \cos(kx) + k \sin(kx) \right) (1 - e^{-(1+i)y/\sqrt{\text{Pr}}}) e^t \quad (3.60)$$

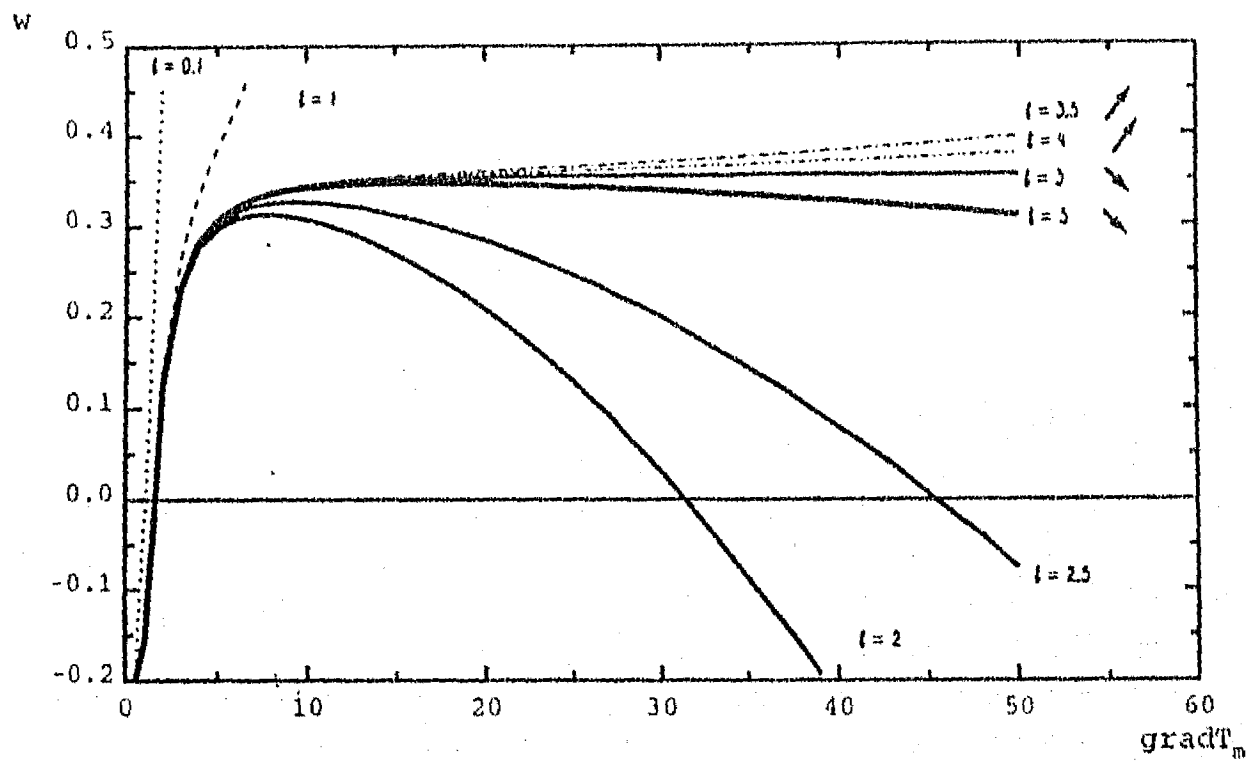


Fig. 3.6. Producción de potencia acústica (w) como función de $\text{grad}T_m$ en una onda viajera, según el segundo modelo. Para distintos valores de l . Las gráficas con línea continua presentan dos valores críticos del gradiente.

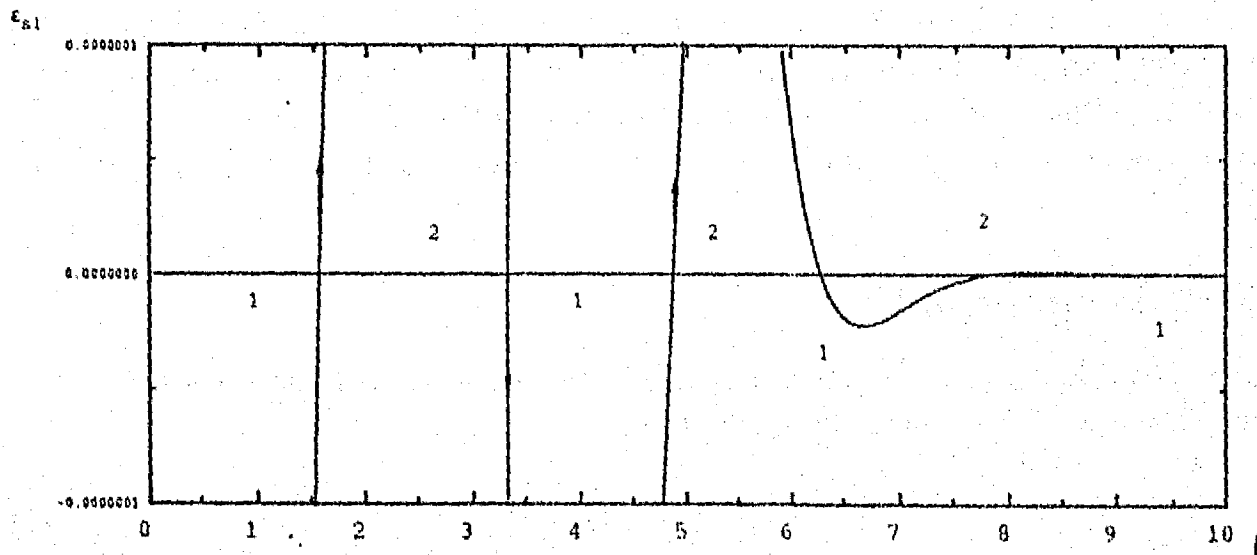


Fig. 3.7. ϵ_{sl} como función de l . Los rangos en que la función es positiva, la ecuación (3.57) presenta dos soluciones (2) para el $\text{grad}T_m$, mientras que en los rangos en que ϵ_{sl} es negativa, la ecuación tiene una única solución real (1).

En este caso la presencia del gradiente axial de temperatura sólo modifica la amplitud de la velocidad, la fase relativa entre las oscilaciones de velocidad y presión (ψ) sólo se modifica por la viscosidad, esto es $\psi = f(\text{Pr})$. En la Fig. 3.8 se muestra la diferencia de fase entre la velocidad y la presión en ondas estacionarias como función de la distancia a la placa (y) para dos valores de Pr.

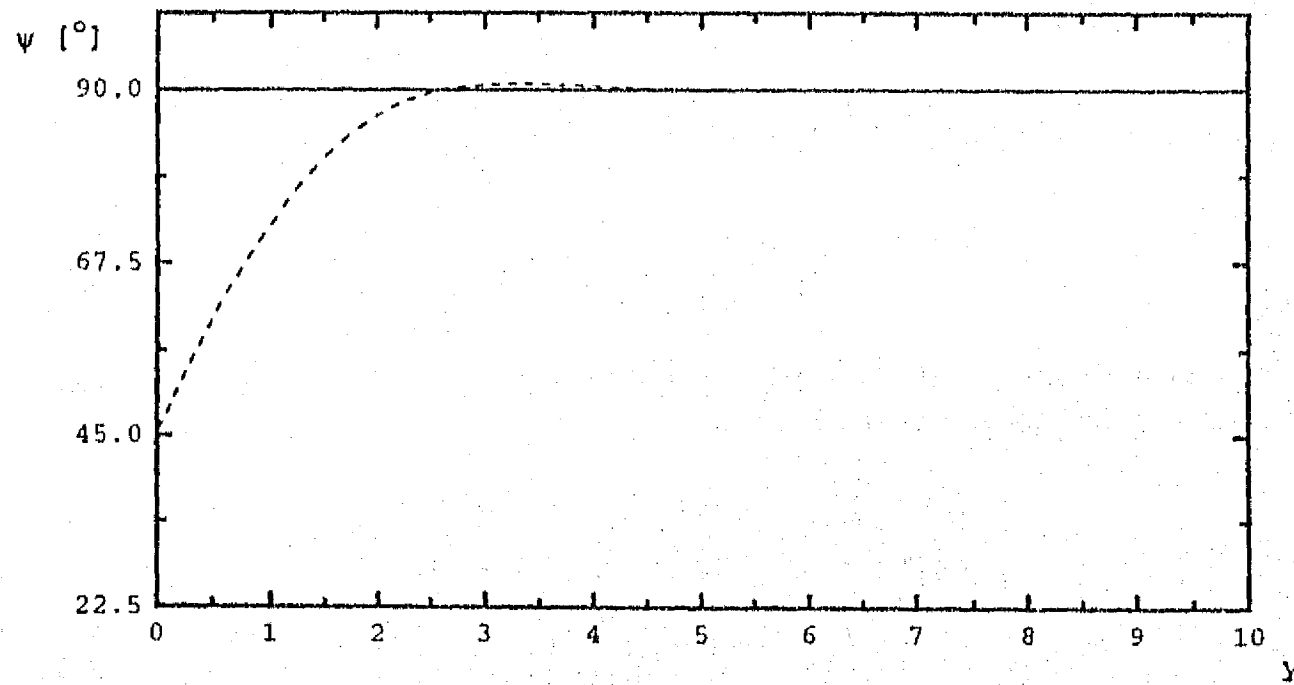


Fig. 3.8. Diferencia de fase entre la velocidad y la presión (ψ) en ondas estacionarias, según el segundo modelo, como función de la distancia a la placa. Para dos valores de Pr:
 — Pr = 0 y - - - - Pr = 0.7.

La oscilación de temperatura toma la forma

$$\begin{aligned}
 T_1(x, y, t) = & \cos(kx) + \Gamma \left(\frac{\nabla T_m}{2} \cos(kx) + k \sin(kx) \right) \left(1 - \frac{\text{Pr}}{\text{Pr} - 1} e^{-(1+i)y/\sqrt{\text{Pr}}} \right) \\
 & + \left(-\cos(kx) + \frac{\Gamma \left(\frac{\nabla T_m}{2} \cos(kx) + k \sin(kx) \right)}{\text{Pr} - 1} \right) \\
 & + \frac{\epsilon_s \sqrt{\text{Pr}} \Gamma \left(\frac{\nabla T_m}{2} \cos(kx) + k \sin(kx) \right)}{\text{Pr} - 1} \frac{e^{-(1+i)y e^t}}{1 + \epsilon_s} \quad (3.61)
 \end{aligned}$$

La expresión para $T_{s1}(x, y^t, t)$ es:

$$\begin{aligned}
 T_{s1}(x, y^t, t) = & \frac{\epsilon_s}{1 + \epsilon_s} \left(\cos(kx) + \frac{\Gamma \left(\frac{\nabla T_m}{2} \cos(kx) + k \sin(kx) \right)}{\sqrt{\text{Pr} + 1}} \right) \\
 & \left(\frac{\cosh((1+i)y^t)}{\cosh((1+i)t)} \right) e^t \quad (3.62)
 \end{aligned}$$

Para la onda estacionaria, la producción de potencia acústica (Ec. (3.30)) en el punto de referencia se expresa como

$$\begin{aligned}
 w = & \frac{\cos(kx_r)(1 + \epsilon_{sR} + \epsilon_{sI})}{2((1 + \epsilon_{sR})^2 + \epsilon_{sI}^2)} \left(-\frac{\Gamma k}{1 + \sqrt{\text{Pr}}} \sin(kx_r) \right. \\
 & \left. - \left(1 + \frac{\Gamma \nabla T_m}{2(1 + \sqrt{\text{Pr}})} \right) \cos(kx_r) \right) \quad (3.63)
 \end{aligned}$$

Comparando esta ecuación con su correspondiente para el primer modelo se observa que también en este tipo de ondas, la consideración del efecto de ∇T_m sobre la onda, modifica el número de onda y genera la aparición de un tercer término, que siempre es de atenuación. Ya que el número de onda k depende de ∇T_m , en este tipo de ondas la condición crítica ∇T_{mc} no tiene una expresión analítica directa. Si $\nabla T_m < \nabla T_{mc} \Rightarrow w > 0$, i.e. excitación de la onda y si $\nabla T_m > \nabla T_{mc} \Rightarrow w < 0$, i.e. atenuación de la onda. En la Fig. 3.9 se muestra w como función de la posición kx_r .

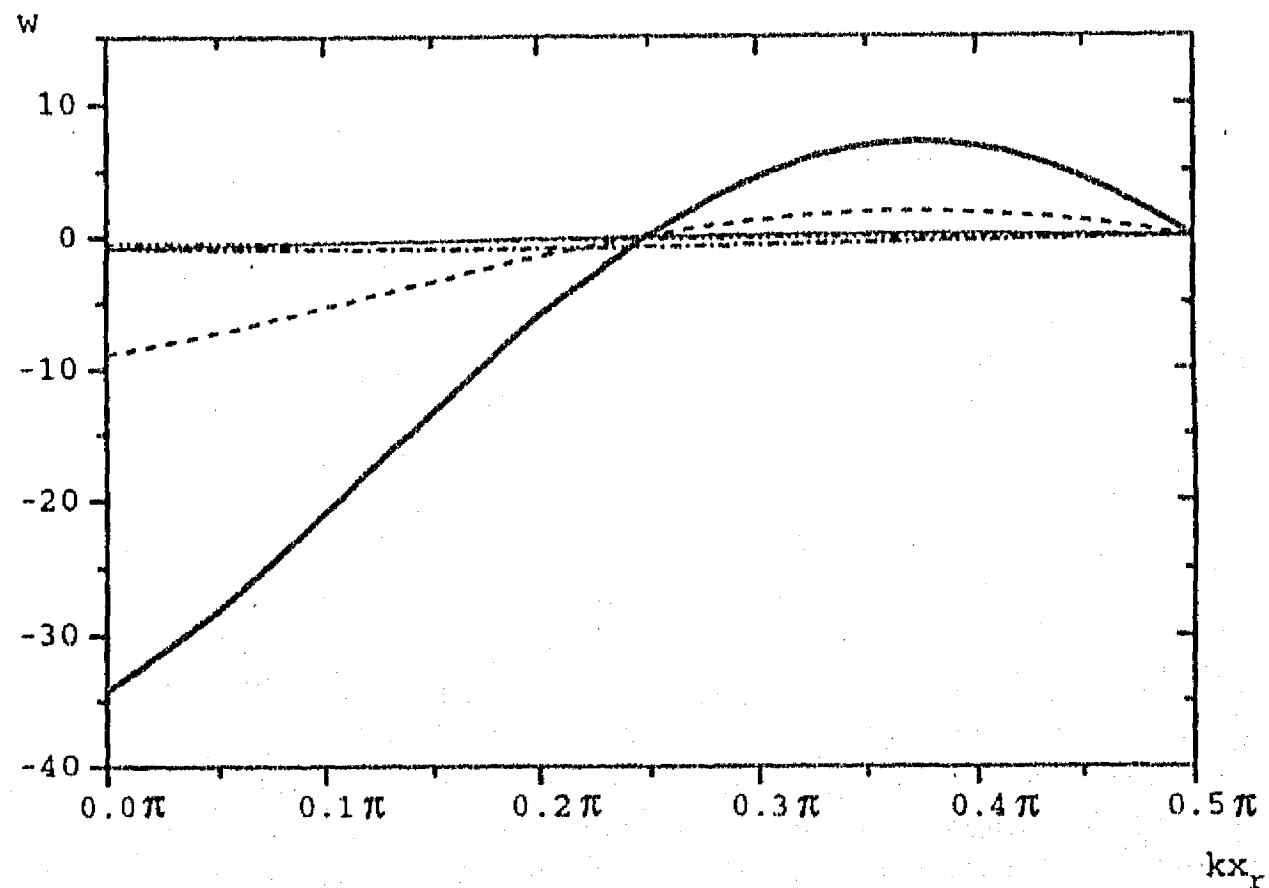


Fig. 3.9. Gráfica de la producción de potencia acústica (w) en ondas estacionarias, según el segundo modelo, como función de la posición axial (kx_r). kx_{r0} es la posición óptima, dado un valor del $\text{grad}T_m$, en la que se obtiene un valor máximo de w .

Las líneas corresponden a:

—	$\text{grad}T_m = -10$	$kx_{r0} = 0.375\pi$
- - -	$\text{grad}T_m = -5$	$kx_{r0} = 0.375\pi$
- · - · -	$\text{grad}T_m = 0$	
· · · · ·	$\text{grad}T_m = 1$	$kx_{r0} = 0.385\pi$

3.9. Comparación entre ambos modelos

Como el segundo modelo sólo aplica a gas ideal, para comparar los resultados de ambos modelos debe también considerarse gas ideal en el primer modelo. Recuérdese que el primer modelo desprecia el efecto del gradiente axial de temperatura media ∇T_m sobre la onda de presión, mientras que el segundo modelo

considera el efecto del gradiente térmico sobre la onda de presión, cuando la región analizada es pequeña. En todos los casos el efecto del gradiente axial de temperatura media es de atenuación de la onda. En ondas viajeras, existe un cambio cualitativo entre estos dos modelos, mientras que en el primero sólo existe un valor crítico del gradiente axial de temperatura medio ∇T_{mc} en el segundo modelo se presentan rangos alternados en l para los cuales se presentan dos valores de ∇T_{mc} , en este caso la onda es excitada si $\nabla T_{mc1} < \nabla T_m < \nabla T_{mc2}$. Este resultado no había sido reportado anteriormente, ya que los estudios previos en ondas viajeras habían considerado $\epsilon = 0$ (Raspet *et al.* 1993) o $l \ll 1 \Rightarrow \epsilon = \epsilon_{sR}$ (i.e. $\epsilon_{Is} = 0$) (Orozco 1995). En la Fig. 3.10(a), w se encuentra graficada como función del gradiente ∇T_m en ondas viajeras, con el primer modelo (Fig.3.3.) el valor de w es mucho mayor que en el segundo modelo (Fig.3.6.), para un mismo valor de $\nabla T_m > \nabla T_{mc}$ y depende débilmente de l . En cambio en el segundo modelo la dependencia de l es muy importante. Bajo las mismas condiciones, el gradiente crítico ∇T_{mc} (∇T_{mc1} en el caso de doble valor crítico) es mayor en el segundo modelo. En el primer modelo la producción de potencia siempre aumenta con el aumento del valor absoluto del gradiente térmico (en la dirección adecuada), sin embargo en el segundo modelo se tienen dos situaciones: en el caso de un valor del gradiente crítico, la producción de potencia acústica tiende a un valor asintótico con el aumento del gradiente térmico, en el caso de doble valor del gradiente crítico, la producción de potencia acústica presenta un máximo, después del cual al aumentar el gradiente térmico disminuye la producción de potencia. En la Fig. 3.10(b) se encuentra w graficada como función del gradiente ∇T_m en ondas estacionarias, en ambos modelos w es independiente de l , pero depende de la posición kx_r . (en el primer modelo $k = 1$). En este tipo de ondas, para algunas posiciones, el efecto del gradiente térmico en la onda acústica aumenta la producción de potencia acústica.

3.9.1. Comparación entre ondas viajeras y estacionarias

En la Fig. 3.11. se encuentran las gráficas de la producción de potencia acústica w para onda viajera y para onda estacionaria, usando ambos modelos ($\gamma = 1.4$, $Pr = 0.7$, $\epsilon = 0.01$). En ella se puede observar que en el primer modelo la onda viajera produce mayor potencia acústica que la onda estacionaria (cerca de la posición óptima $x_r = 0.3\pi$). En el segundo modelo, en teoría la onda viajera puede producir mayor potencia acústica si l tiene un valor cercano al óptimo ($l \sim 0.01$), sin embargo es difícil trabajar con placas tan delgadas. De hecho

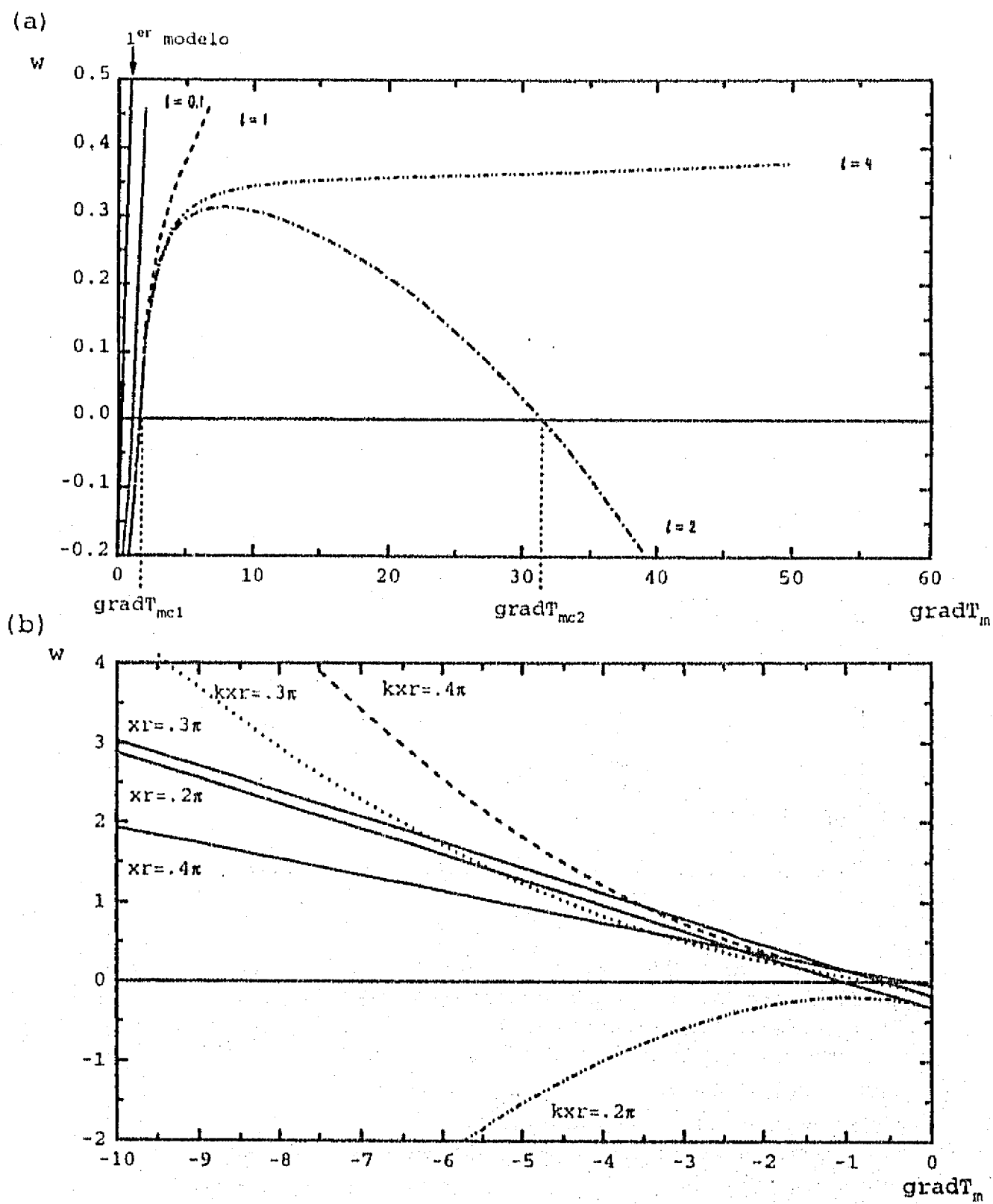


Fig. 3.10. Comparación entre la producción de potencia acústica (w) como función del gradiente, calculada según el primer y el segundo modelo. (a) en ondas viajeras, w es independiente de kx_r . (b) en ondas estacionarias, w es independiente de l . Las líneas continuas corresponden al primer modelo. Las líneas discontinuas, representan al segundo modelo.

trabajando con placas de Kapton (Dupont), el mínimo valor comercial de l^* es de 3.5×10^{-6} m. Expresado en escala adimensional (para $f=100$ Hz) $l = 0.2$. Para este valor de l , dado un gradiente $\nabla T'_m$, la onda viajera produce menos potencia acústica que la onda estacionaria en la posición óptima $kx_{ro} = 0.4\pi$.

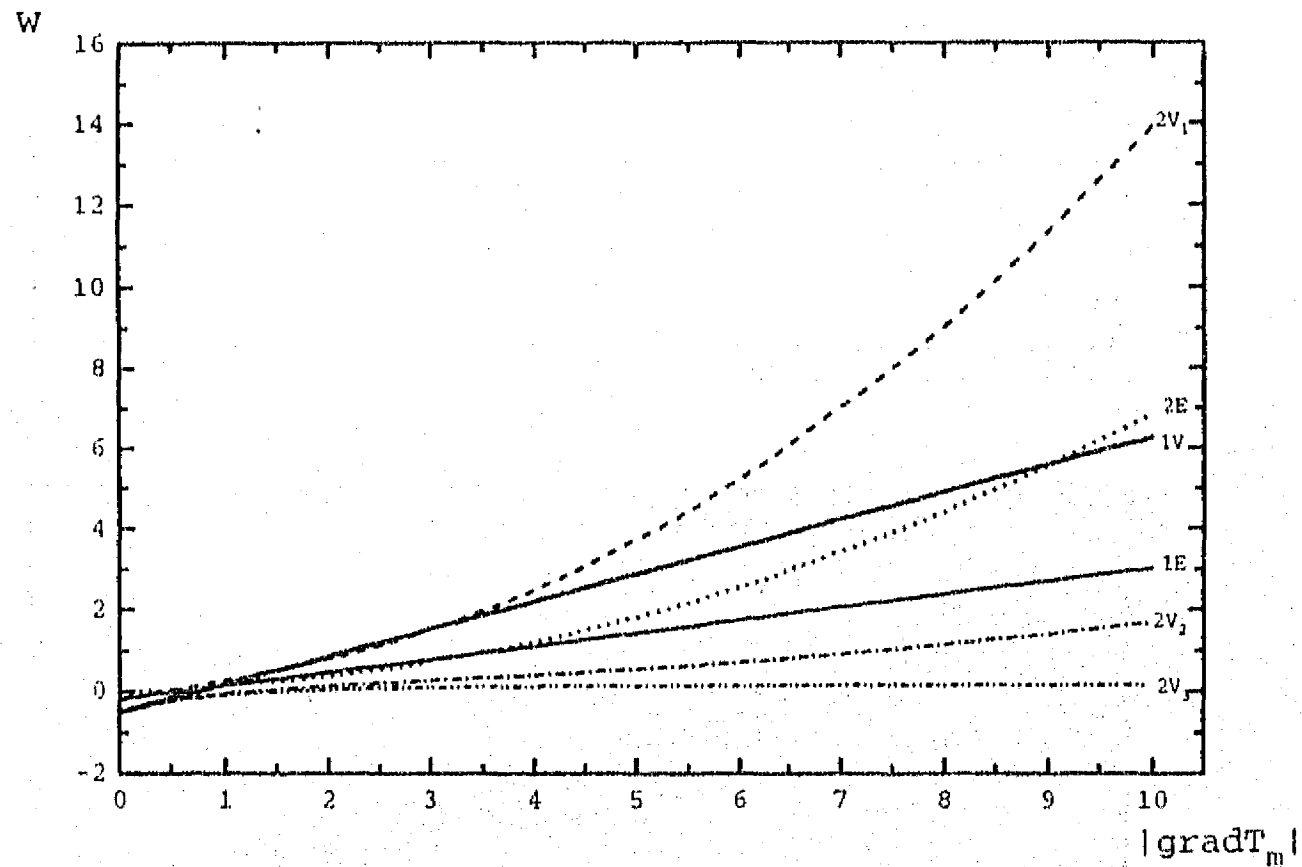


Fig. 3.11. Comparación de la producción de potencia acústica (w) entre onda viajera y onda estacionaria. ($\gamma = 1.4$, $Pr = 0.7$, $\epsilon = 0.01$)

Primer modelo (Línea continua) resultados independientes de l

- 1V Onda viajera (independiente de x_r)
- 1E Onda estacionaria en $x_{ro} = 0.3\pi$

Segundo modelo (línea discontinua)

- 2V₁ Onda viajera $l = 0.01$ (independiente de kx_r)
- 2V₂ Onda viajera $l = 0.2$ (independiente de kx_r)
- 2V₃ Onda viajera $l = 10$ (independiente de kx_r)
- 2E Onda estacionaria en $kx_{ro} = 0.4\pi$ (independiente de l)

3.10. Estudio paramétrico en el segundo modelo

Dado que en este trabajo se hizo una extensión de la teoría para incluir la capacidad calorífica finita de la placa y la viscosidad del gas, es interesante estudiar el efecto de estos parámetros en la producción de potencia acústica, tanto en ondas estacionarias como en ondas viajeras.

3.10.1. Ondas viajeras

En la Fig. 3.12 se muestra la producción de potencia acústica w para ondas viajeras como función del gradiente axial de temperatura media ∇T_m para diferentes valores de γ , en todas las curvas $Pr = 0$ y $\epsilon = 0$. En ellas se observa que se obtiene un incremento sustancial en w si se reduce el valor de γ , también se logra una disminución del gradiente crítico ∇T_{mc} al reducir γ . Por lo que es conveniente trabajar con gases con el menor valor de γ por ejemplo el propano.

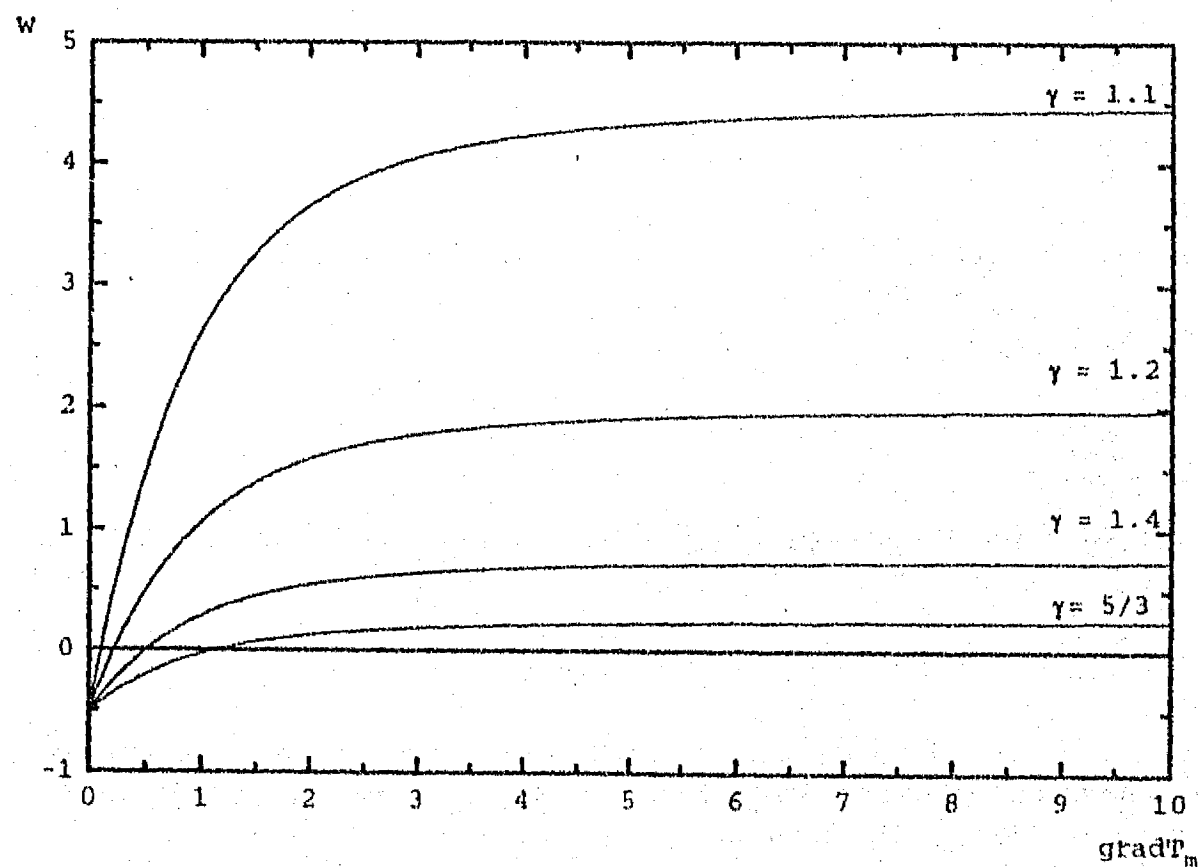


Fig. 3.12. Efecto de γ en la producción de potencia acústica (w) como función del gradiente, en ondas viajeras, según el segundo modelo. ($Pr = 0$, $\epsilon = 0$)

La producción de potencia acústica w aumenta al reducir el valor del número de Prandtl Pr y el gradiente crítico ∇T_{mc} disminuye al reducir Pr , tal como se muestra en la Fig. 3.13. En estas gráficas $\gamma = 1.4$ y $\epsilon = 0$. Queda en evidencia que es conveniente trabajar con gases con el menor valor de Pr , por ejemplo la mezcla de helio-xenón (Suzalla *et al.* 1988).

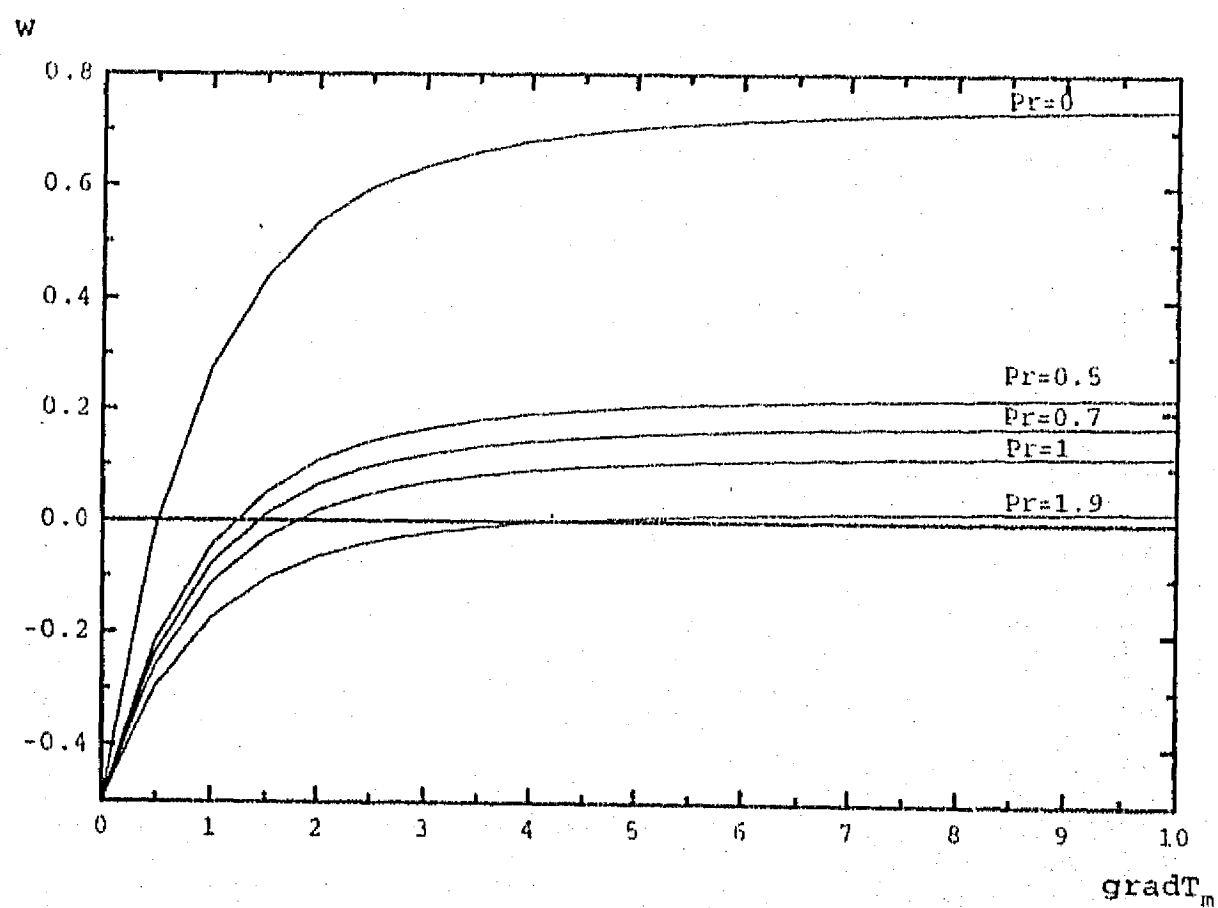


Fig. 3.13. Efecto de número de Prandtl (Pr) en la producción de potencia acústica (w) como función del gradiente, en ondas viajeras, según el segundo modelo. ($\gamma = 1.4$, $\epsilon = 0$)

La relación de las propiedades físicas entre el gas y el sólido ϵ afecta débilmente la producción de potencia acústica en ondas viajeras. w aumenta si ϵ disminuye, tal como se muestra en la Fig. 3.14. En estas gráficas $\gamma = 1.4$, $Pr = 0.7$ y $l = 10$.

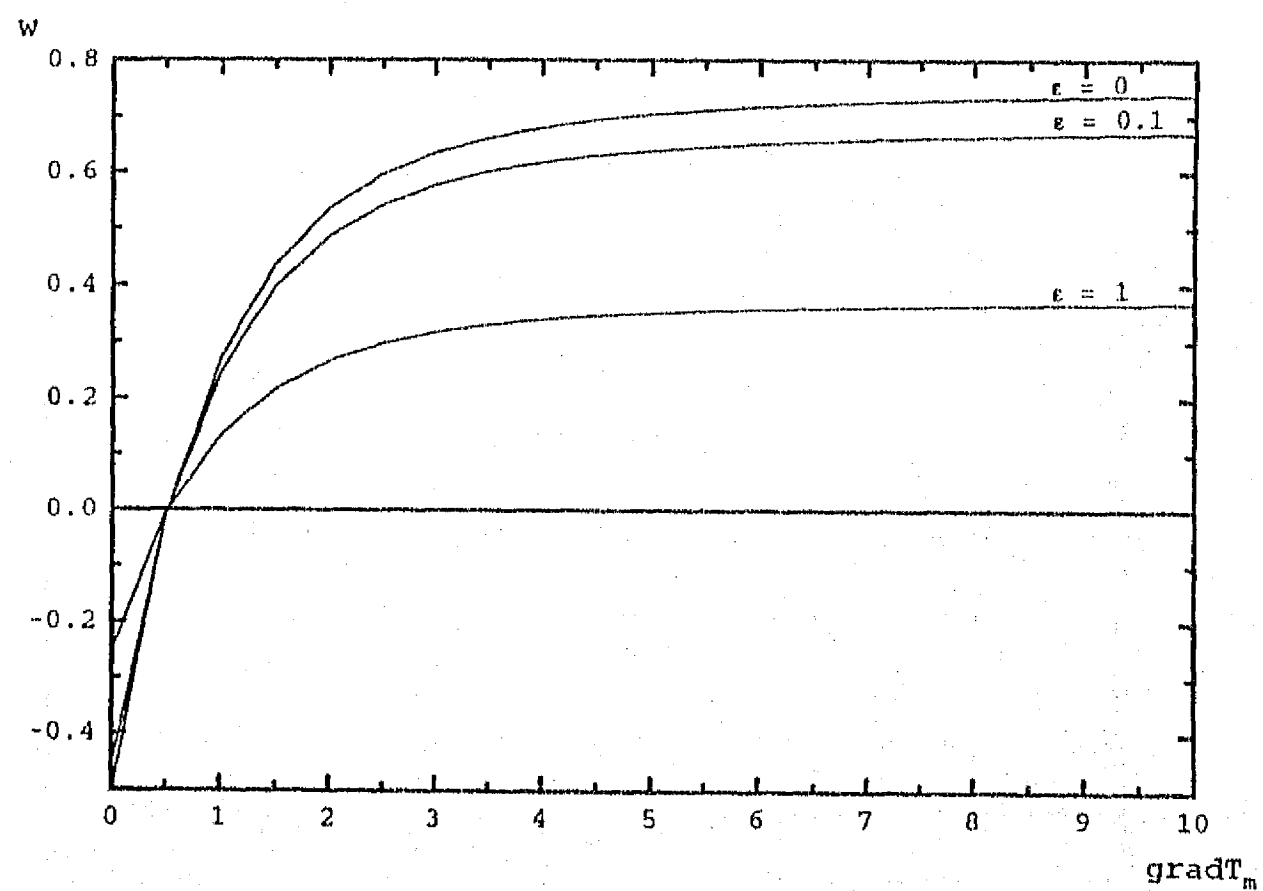


Fig. 3.14. Efecto de ϵ en la producción de potencia acústica (w) como función del gradiente, en ondas viajeras, según el segundo modelo. ($\gamma = 1.4$, $Pr = 0.7$, $l = 10$)

La Fig. 3.15 muestra la producción de potencia acústica w para ondas viajeras como función del semigrosor de la placa l , para diferentes valores de ∇T_m , manteniendo constantes $\gamma = 1.4$, $Pr = 0.7$ y $\epsilon = 0.01$. En ellas se observa la existencia de un valor de l óptimo, y la presencia de un rango de l , en el cual el sistema absorbe potencia ($w < 0$) cuando se aumenta ∇T_m . Este comportamiento es muy interesante por lo que se estudiará con más detenimiento.

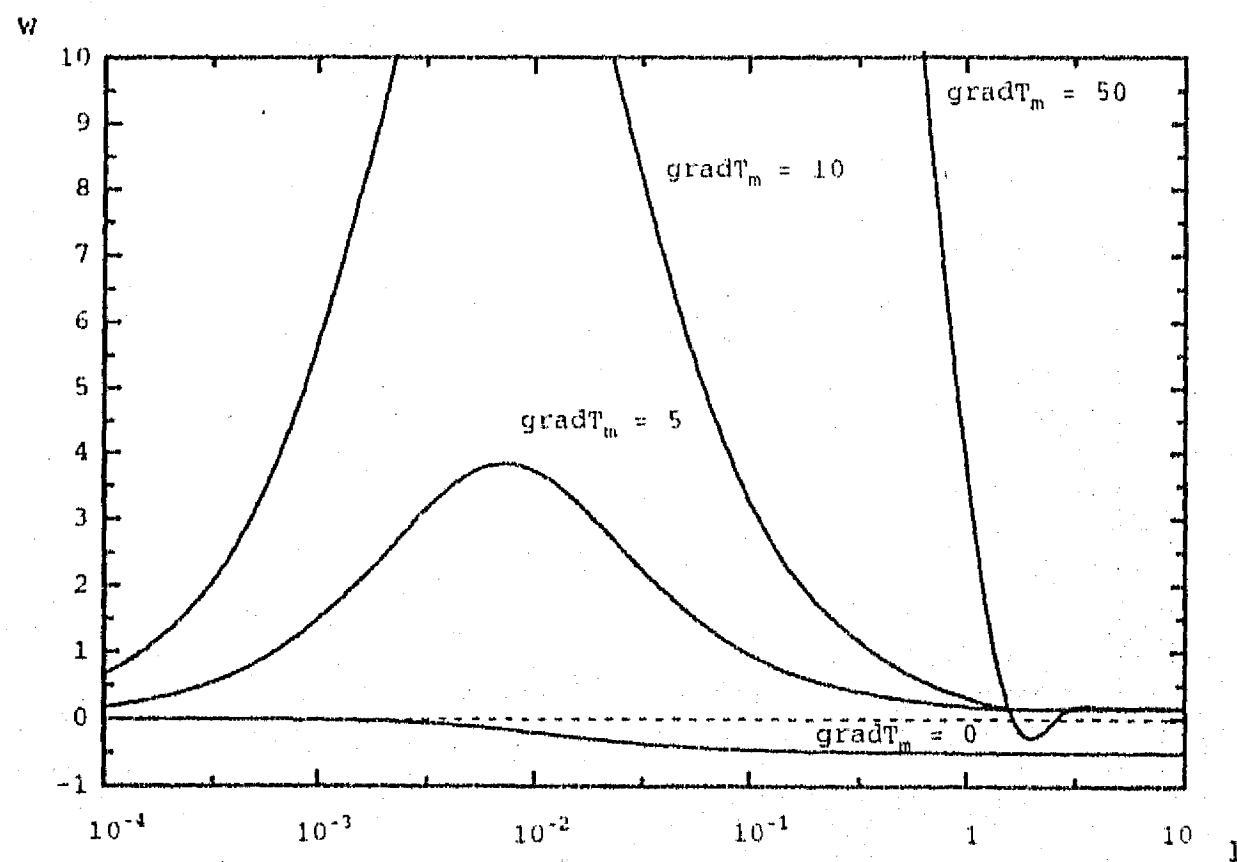


Fig. 3.15. Gráfica de la producción de potencia acústica (w) como función de l , en ondas viajeras, según el segundo modelo. Para diversos valores del gradiente. ($\gamma = 1.4$, $Pr = 0.7$, $\epsilon = 0.01$)

Las características de $w(l)$ pueden ser estudiadas si se analizan los términos de la ecuación (3.57). En la Fig. 3.16 se grafica w y los tres términos que la componen, para el caso $\nabla T_m = 10$, $\gamma = 1.4$, $Pr = 0.7$ y $\epsilon = 0.01$. Se observa que para $l \gg 1$, la producción de potencia acústica es casi independiente de l . Esto indica que sólo una región dentro de la placa cerca de la interfase sólido-gas juega un papel relevante en la producción de potencia acústica. Los tres términos de la ecuación (3.57) tienden a cero cuando $l \rightarrow 0$, pero los términos negativos disminuyen más rápidamente que el positivo, resultando en un máximo de w . En el caso analizado, el valor máximo de w es un orden de magnitud mayor que el valor para $l \rightarrow \infty$. Puede ser impráctico trabajar con placas tan delgadas, sin embargo un aumento considerable en w se puede alcanzar reduciendo l en un rango accesible.

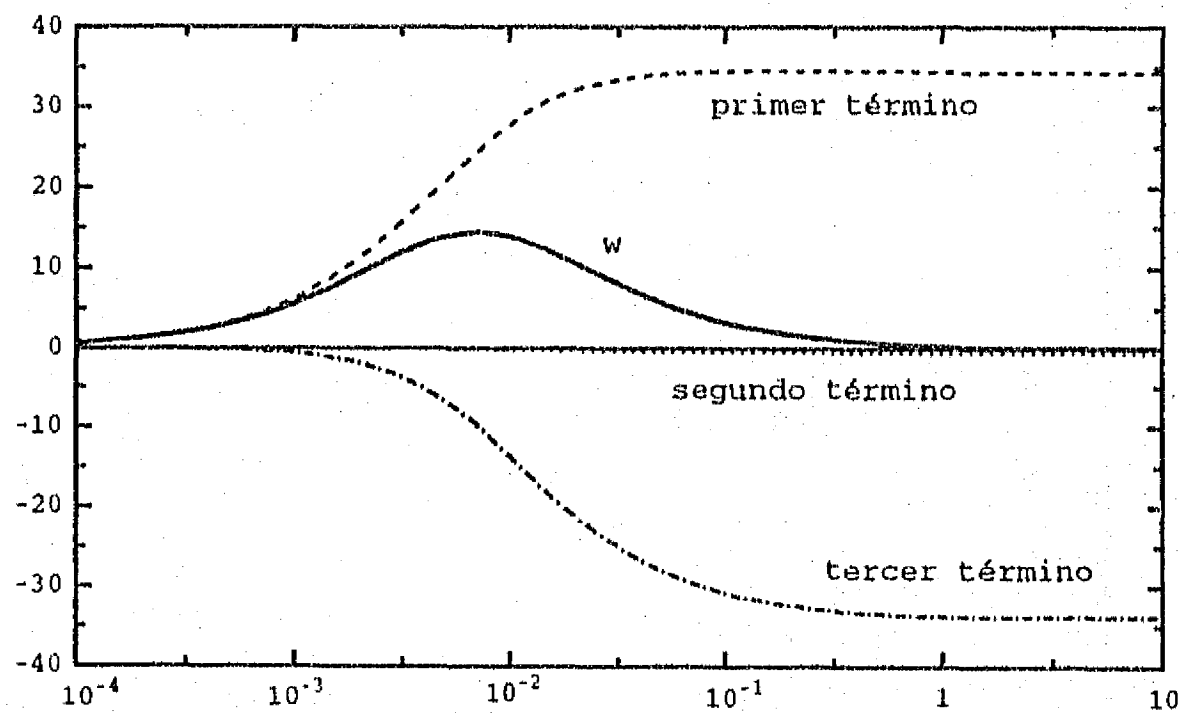


Fig. 3.16. Términos de la producción de potencia acústica (w) en ondas viajeras, según el segundo modelo (Ec. (3.57)).

$$\text{Primer término: } \frac{1}{2((1+\epsilon_s R)^2 + \epsilon_s^2 I)} \left(\frac{\Gamma k}{1+\sqrt{Pr}} (1 + \epsilon_s R - \epsilon_s I) \right)$$

$$\text{Segundo término: } \frac{-(1+\epsilon_s R + \epsilon_s I)}{2((1+\epsilon_s R)^2 + \epsilon_s^2 I)}$$

$$\text{Tercer término: } \frac{-1}{2((1+\epsilon_s R)^2 + \epsilon_s^2 I)} \left(\frac{\Gamma \nabla T_m}{2(1+\sqrt{Pr})} \right) (1 + \epsilon_s R + \epsilon_s I)$$

Las características de $w(l)$ pueden ser estudiadas si se analizan los términos de la ecuación (3.57). En la Fig. 3.16 se grafica w y los tres términos que la componen, para el caso $\nabla T_m = 10$, $\gamma = 1.4$, $Pr = 0.7$ y $\epsilon = 0.01$. Se observa que para $l \gg 1$, la producción de potencia acústica es casi independiente de l . Esto indica que sólo una región dentro de la placa cerca de la interfase sólido-gas juega un papel relevante en la producción de potencia acústica. Los tres términos de la ecuación (3.57) tienden a cero cuando $l \rightarrow 0$, pero los términos negativos disminuyen más rápidamente que el positivo, resultando en un máximo de w . En el caso analizado, el valor máximo de w es un orden de magnitud mayor que el valor para $l \rightarrow \infty$. Puede ser impráctico trabajar con placas tan delgadas, sin embargo un aumento considerable en w se puede alcanzar reduciendo l en un rango accesible.

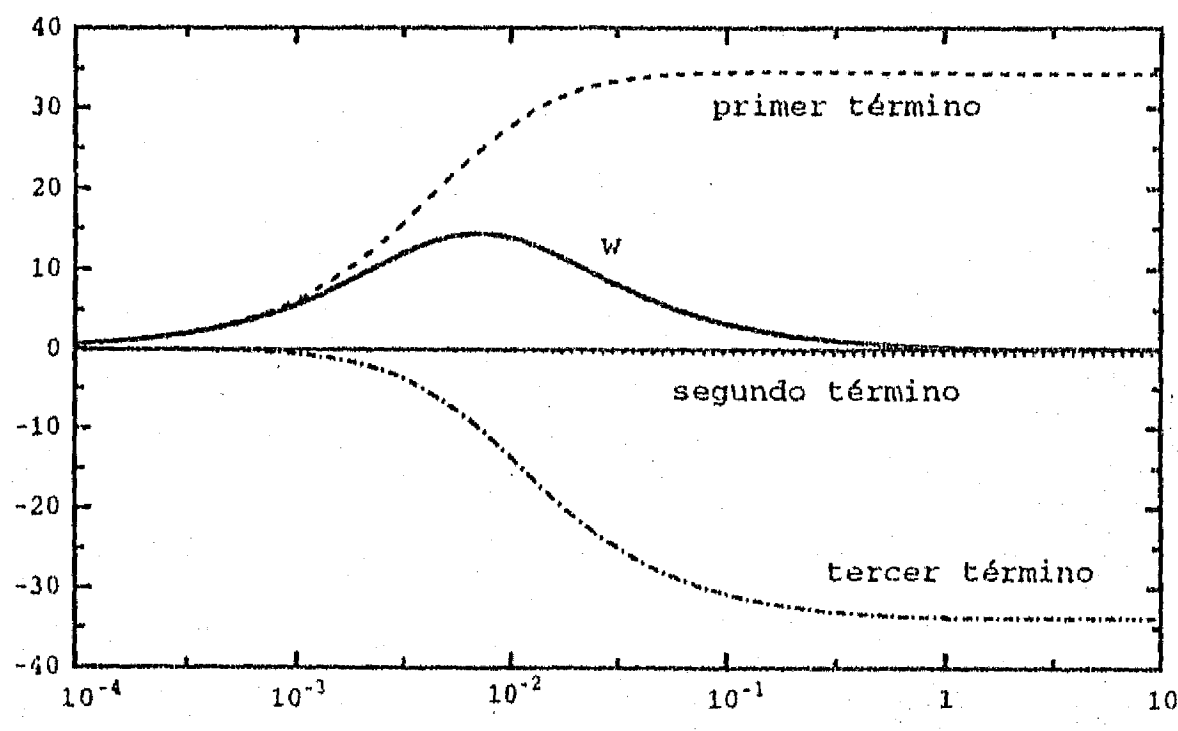


Fig. 3.16. Términos de la producción de potencia acústica (w) en ondas viajeras, según el segundo modelo (Ec. (3.57)).

$$\begin{aligned} \text{Primer término:} & \frac{1}{2((1+\epsilon_s R)^2 + \epsilon_s^2 l)} \left(\frac{\Gamma k}{1+\sqrt{Pr}} (1 + \epsilon_s R - \epsilon_s l) \right) \\ \text{Segundo término:} & \frac{-(1+\epsilon_s R + \epsilon_s l)}{2((1+\epsilon_s R)^2 + \epsilon_s^2 l)} \\ \text{Tercer término:} & \frac{-1}{2((1+\epsilon_s R)^2 + \epsilon_s^2 l)} \left(\frac{\Gamma \nabla T_m}{2(1+\sqrt{Pr})} \right) (1 + \epsilon_s R + \epsilon_s l) \end{aligned}$$

El comportamiento en la producción de potencia acústica (w) también puede analizarse en términos de la transferencia de calor en la frontera sólida en el momento de máxima presión (Ec. (3.22)). En las Fig. 3.17. (a) y (b) se muestran perfiles de temperatura en el momento de máxima presión para el gradiente $\nabla T_m = 10$, con $\gamma = 1.4$, $Pr = 0.7$, $\epsilon = 0.01$ como función de y^\dagger y y respectivamente. Cabe recordar que debido a la diferente escala de adimensionalización para las coordenadas y^\dagger y y , las pendientes en la frontera sólo coinciden en signo, no en valor (ver Ec. (3.29)). En la Fig. 3.17(a) se observa que existe una oscilación de temperatura en la dirección transversal a la placa. La oscilación de la temperatura penetra significativamente sólo hasta una distancia a la placa de aproximadamente 5, por lo cual, cualquier aumento en l es irrelevante. A una distancia de la placa de 2.35 se tiene el primer cruce de la oscilación de temperatura en la placa con el eje.

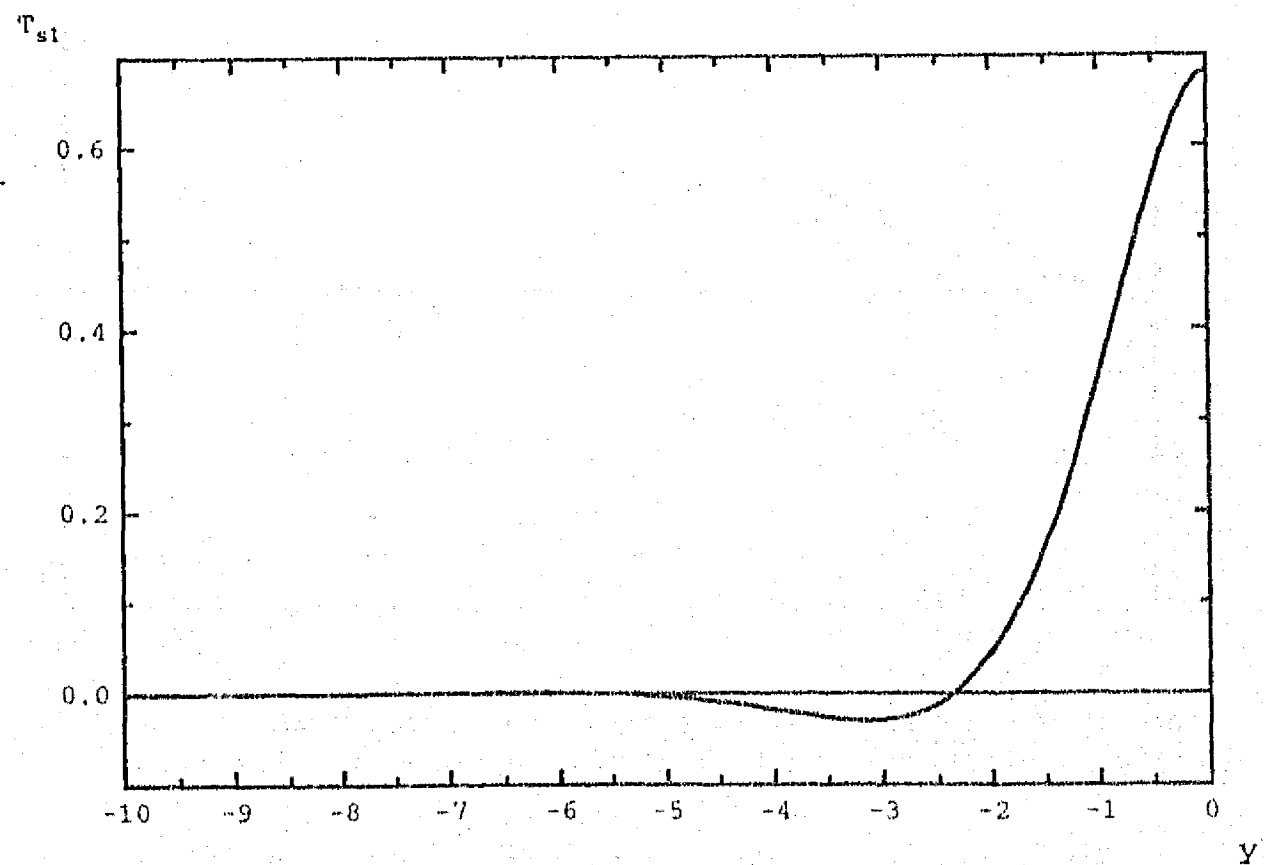


Fig. 3.17. (a) Perfil de temperatura dentro de la placa (T_{s1}) en el momento de máxima presión, para $l = 10$. ($\text{grad}T_m = 10$, $\gamma = 1.4$, $Pr = 0.7$, $\epsilon = 0.01$)

En la Fig. 3.17(b) se encuentra el perfil de temperatura en el gas. Lejos de la placa la oscilación de temperatura del gas es positiva y su valor no depende de l , sin embargo es posible tener un gradiente negativo en la frontera sólido-gas debido al comportamiento de la función cerca de esta frontera; del lado de la placa existe un máximo relativo y del lado del gas existe un mínimo relativo, i.e. $(\partial T_1/\partial y|_{y=0} < 0)$ tal como se observa en la Fig. 3.18(a). Esto indica que se transfiere calor hacia el gas en el momento de máxima presión.

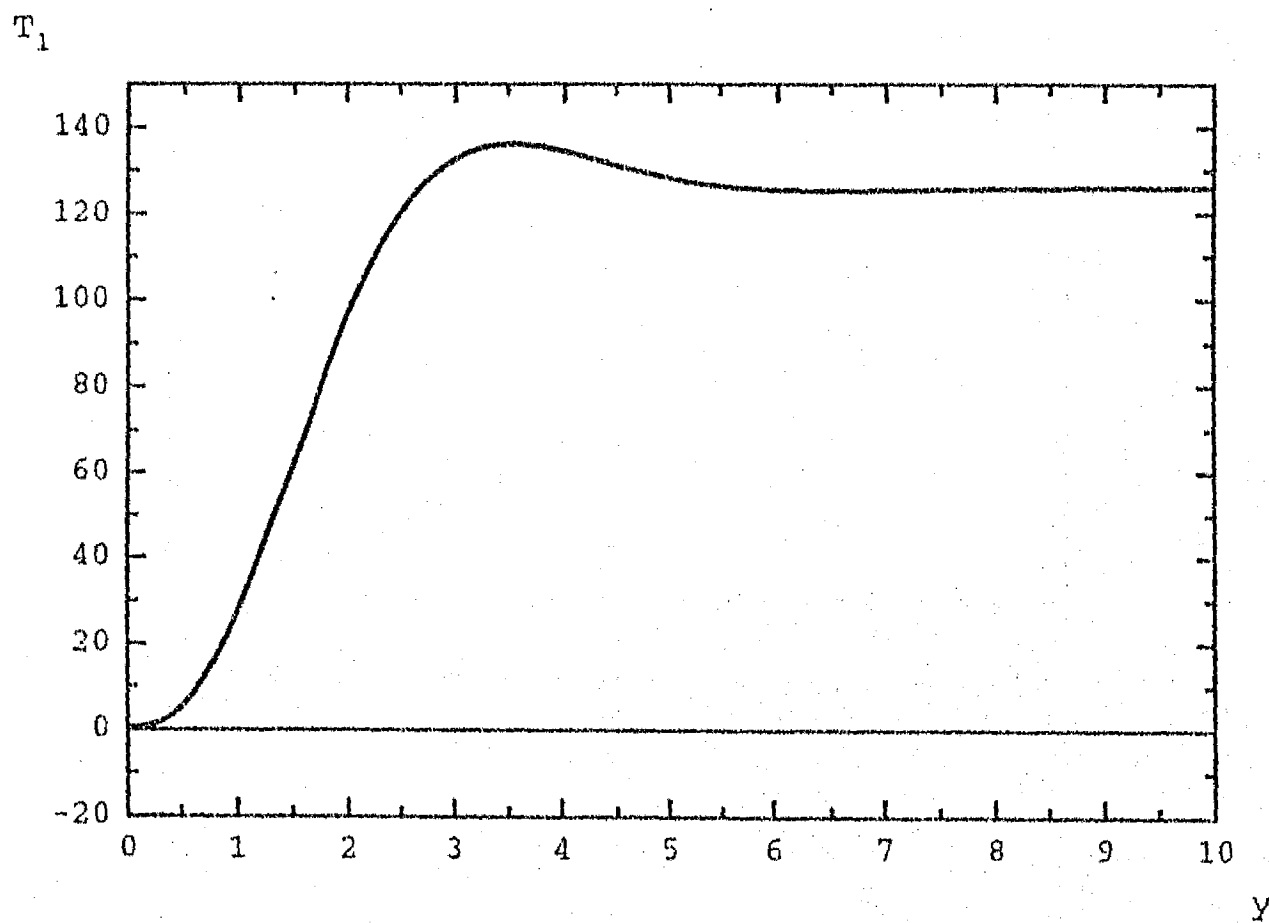


Fig. 3.17. (b) Perfil de temperatura en el gas (T_1), en el momento de máxima presión, para $l = 10$. ($\text{grad}T_m = 10$, $\gamma = 1.4$, $Pr = 0.7$, $\epsilon = 0.01$)

En las Fig. 3.18 se muestran perfiles de temperatura en el momento de máxima presión para el gradiente $\nabla T_m = 10$, con $\gamma = 1.4$, $Pr = 0.7$, $\epsilon = 0.01$, para distintos valores de l . En la Fig. 3.18(a) $l = 10$. Si l se reduce a un valor $l < 2.35$ la temperatura en la placa presenta un valor positivo en el centro de la placa. En la Fig. 3.18(b) se encuentra el perfil de temperatura cerca de la frontera, correspondiente a $l = 1$. Nótese que a pesar de que el valor de la temperatura en el centro de la placa no es cero, la pendiente ($Re(dT/dy)|_{y=0}$) es similar al caso $l = 10$ (Fig. 3.18(a)) ya que la diferencia entre el máximo relativo y el mínimo relativo no ha cambiado significativamente.

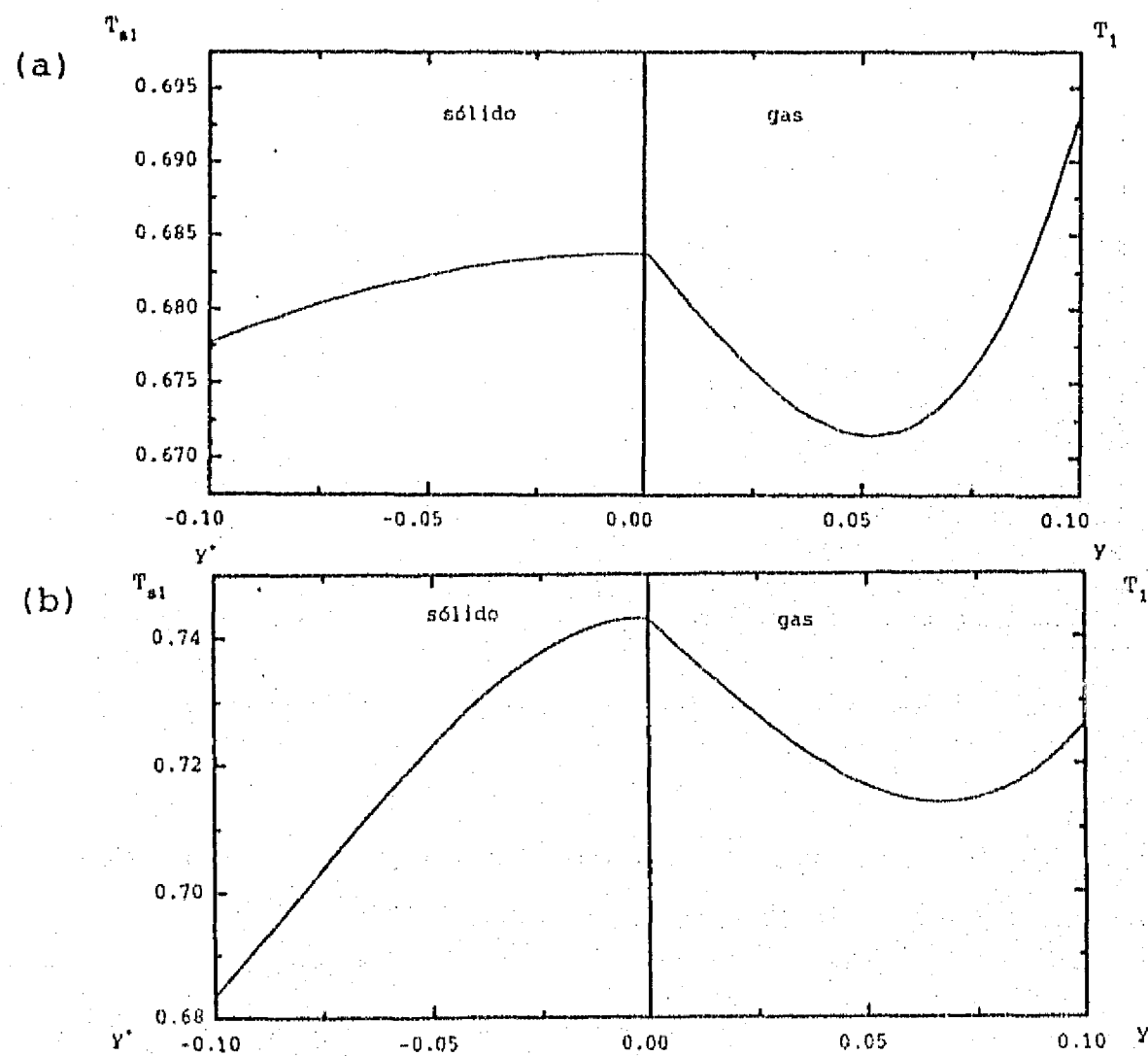


Fig. 3.18. Perfiles de temperatura en el momento de máxima presión, cerca de la frontera sólido-gas, para $\text{grad}T_m = 10$.
(a) $l = 10$, (b) $l = 1$. ($\gamma = 1.4$, $Pr = 0.7$, $\epsilon = 0.01$)

El perfil de temperatura correspondiente a $l = 10^{-1}$ se encuentra en la Fig. 3.18(c), en este caso la diferencia entre el valor de la temperatura en la frontera y el mínimo ha aumentado y consecuentemente la pendiente $(Re(dT/dy))|_{y=0}$ aumenta negativamente, es decir la transferencia de calor de la placa al gas en el momento de máxima presión aumenta. En la Fig. 3.18(d) se encuentra el perfil de temperatura correspondiente a $l = 0.71 \times 10^{-2}$ valor óptimo del semiespesor de la placa. En este caso, la diferencia entre el valor de la temperatura en la frontera y el mínimo ha aumentado aún más, y se tiene la máxima pendiente en la frontera indicando la máxima transferencia de calor de la placa al gas.

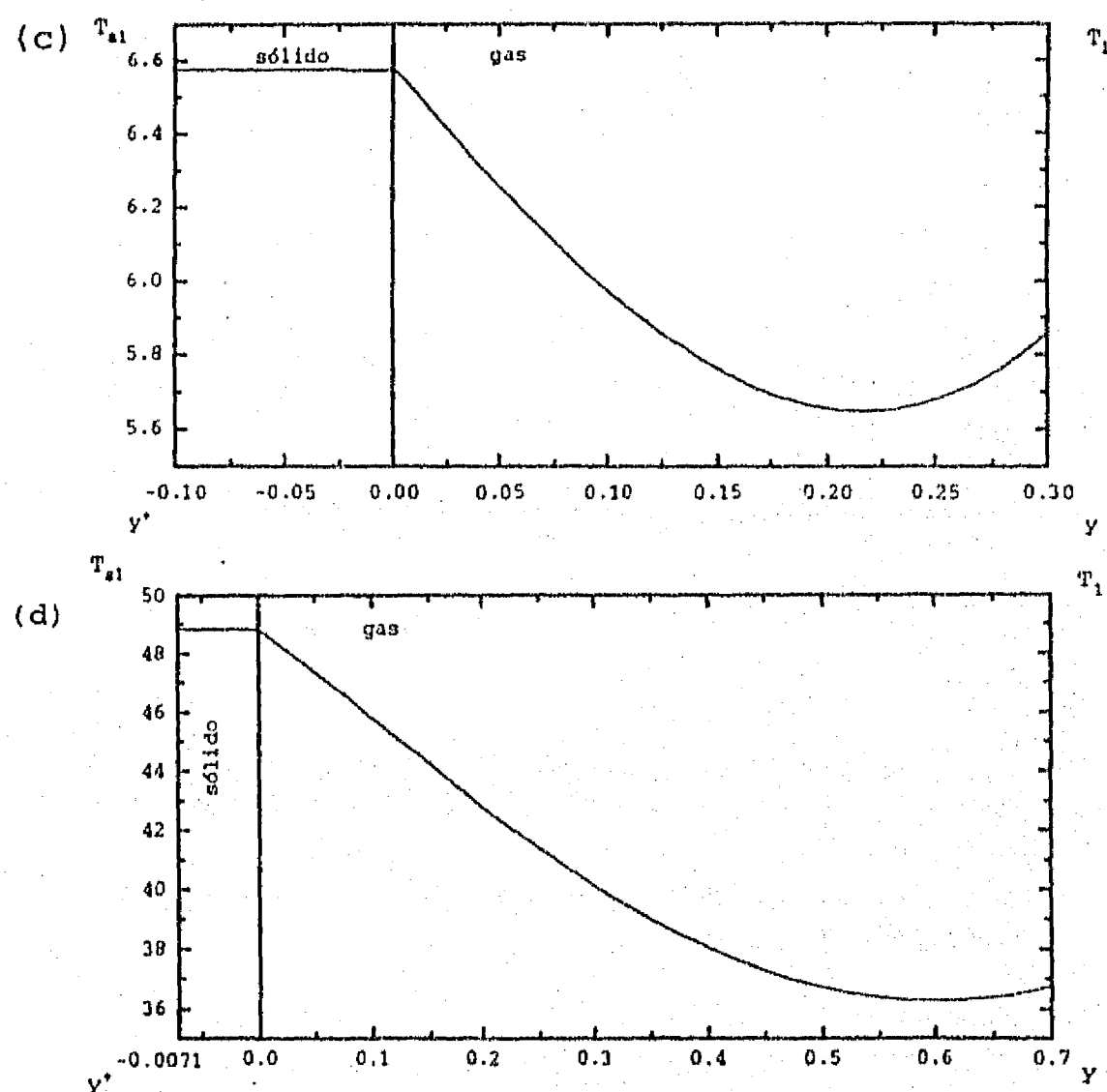


Fig. 3.18. Perfiles de temperatura en el momento de máxima presión, cerca de la frontera sólido-gas, para $\text{grad}T_m = 10$.
 (c) $l = 10^{-1}$ (d) $l = 0.0071$ ($\gamma = 1.4$, $\text{Pr} = 0.7$, $\epsilon = 0.01$)

Para $l < 0.71 \times 10^{-2}$ la diferencia entre el máximo y el mínimo sigue aumentando a medida que se reduce l , como puede observarse en la Fig. 3.18(e) para $l = 10^{-4}$, sin embargo el máximo relativo dentro de la placa se acerca a la frontera, por lo que la pendiente en ella se reduce, disminuyendo la transferencia de calor de la placa al gas.

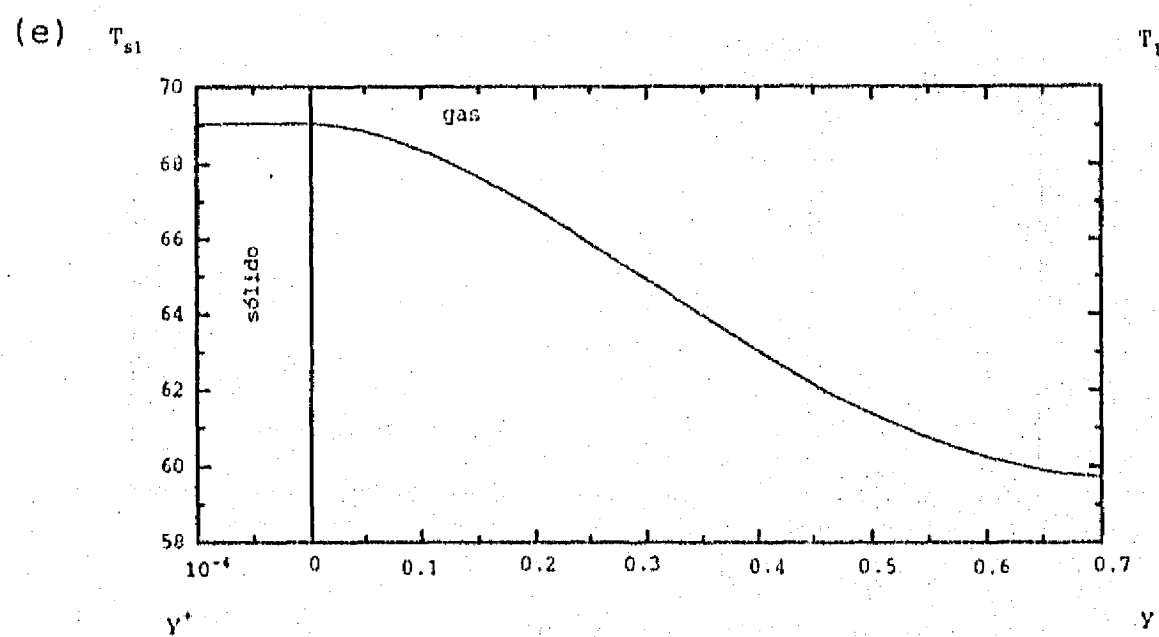


Fig. 3.18. Perfiles de temperatura en el momento de máxima presión, cerca de la frontera sólido-gas, para $\text{grad}T_m = 10$. (e) $l = 10^{-4}$ ($\gamma = 1.4$, $\text{Pr} = 0.7$, $\epsilon = 0.01$) Nótese el cambio de escala entre la coordenada y^* y la coordenada y .

Para analizar el comportamiento del sistema a gradientes ∇T_m mayores, en las Fig. 3.19 se muestran perfiles de la temperatura en el momento de máxima presión, cerca de la frontera, para el gradiente $\nabla T_m = 50$, con $\gamma = 1.4$, $Pr = 0.7$, $\epsilon = 0.01$. (a) Para $l = 1$ la pendiente en la frontera es negativa indicando transferencia de calor del sólido al gas en el momento de máxima presión, interpretado bajo los resultados de esta tesis (Ec. (3.22)) implica producción de potencia acústica. En cambio en (b) para $l = 2$ la pendiente en la frontera es positiva, por lo que la transferencia de calor en el momento de máxima presión, es del gas al sólido, esto es absorción de potencia acústica ($w < 0$).

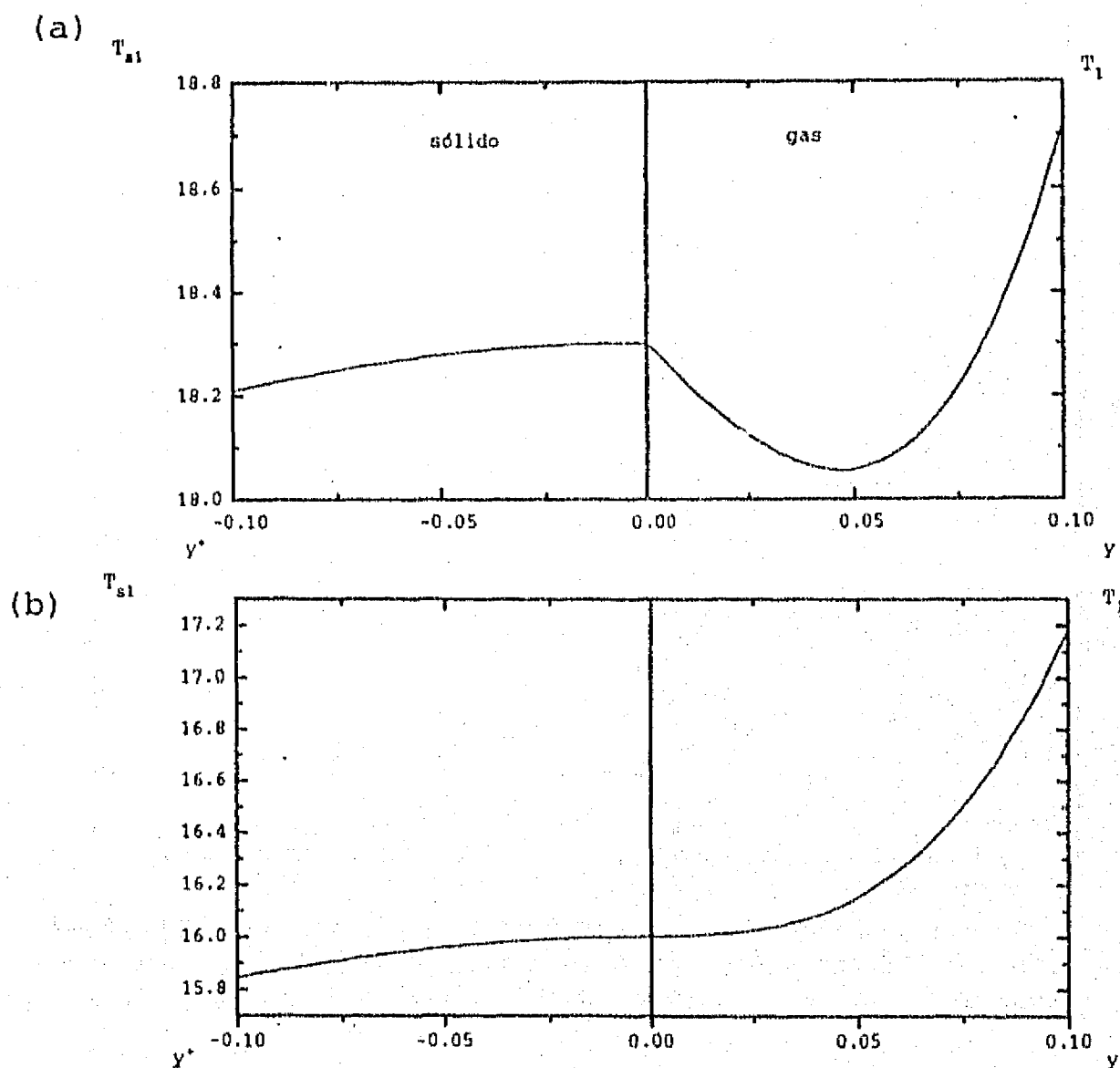


Fig. 3.19. Perfiles de temperatura en el momento de máxima presión, cerca de la frontera sólido-gas, para $\text{grad}T_m = 50$.
 (a) $l = 1$ (b) $l = 2$. ($\gamma = 1.4$, $Pr = 0.7$, $\epsilon = 0.01$)

3.10.2. Onda estacionaria

En la Fig. 3.20 se muestra la producción de potencia acústica w para ondas estacionarias como función del gradiente axial de temperatura media ∇T_m para diferentes valores de γ . En estas gráficas $kx_r = 0.4\pi$, $Pr = 0$ y $\epsilon = 0$. En ellas se observa que se obtiene un incremento en w si se reduce el valor de γ , y una disminución del gradiente crítico ∇T_{mc} al reducir γ . Por lo que para obtener mayor producción de potencia acústica, al igual que en ondas viajeras, es conveniente trabajar con gases con el menor valor de γ .

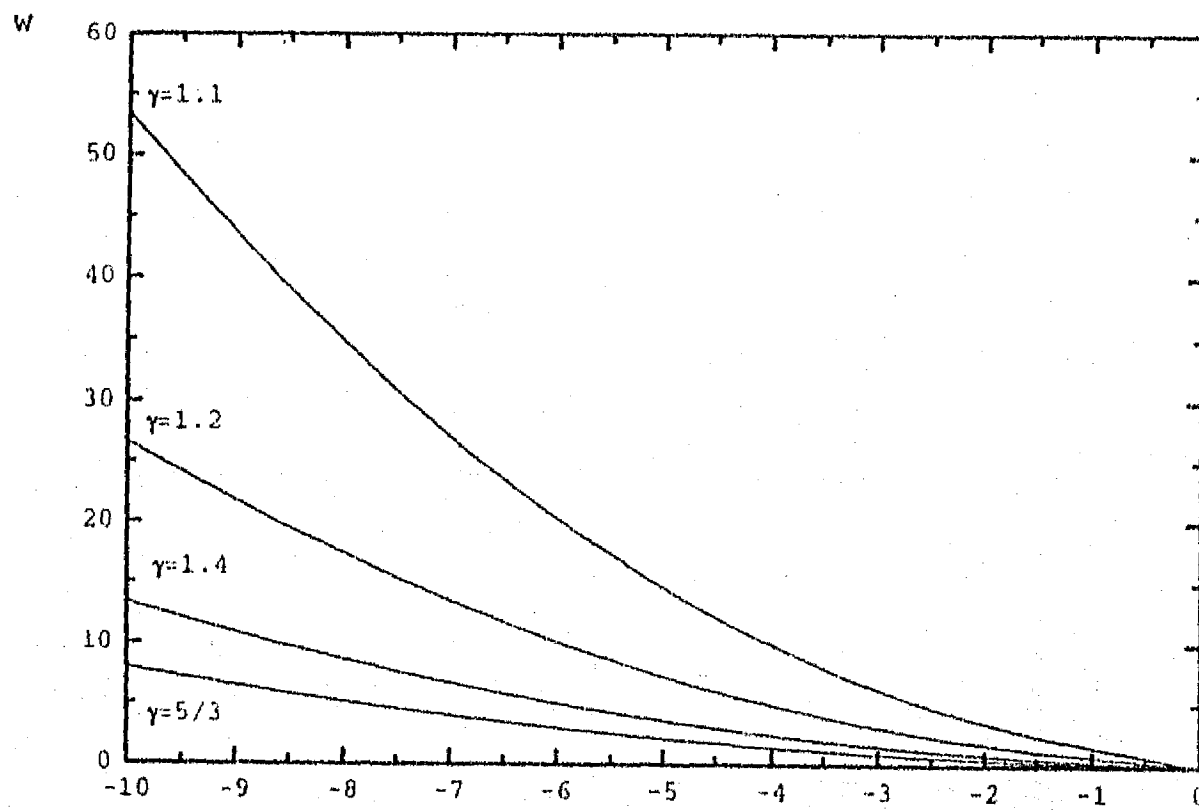


Fig. 3.20. Efecto de γ en la producción de potencia acústica w como función del gradiente axial de temperatura media, en ondas estacionarias, según el segundo modelo. ($kx_r = 0.4\pi$, $Pr = 0$, $\epsilon = 0$)

En la fig. 3.21 se muestra la producción de potencia acústica w para ondas estacionarias como función del gradiente axial de temperatura media ∇T_m para diferentes valores de Pr , manteniendo constantes $kx_r = 0.4\pi$, $\gamma = 1.4$ y $\epsilon = 0$. En ellas se observa que, al igual que en ondas viajeras, w aumenta si se reduce el valor de Pr , y disminuye el gradiente crítico ∇T_{mc} al reducir Pr . Por lo que es conveniente trabajar con gases con el menor valor de Pr .

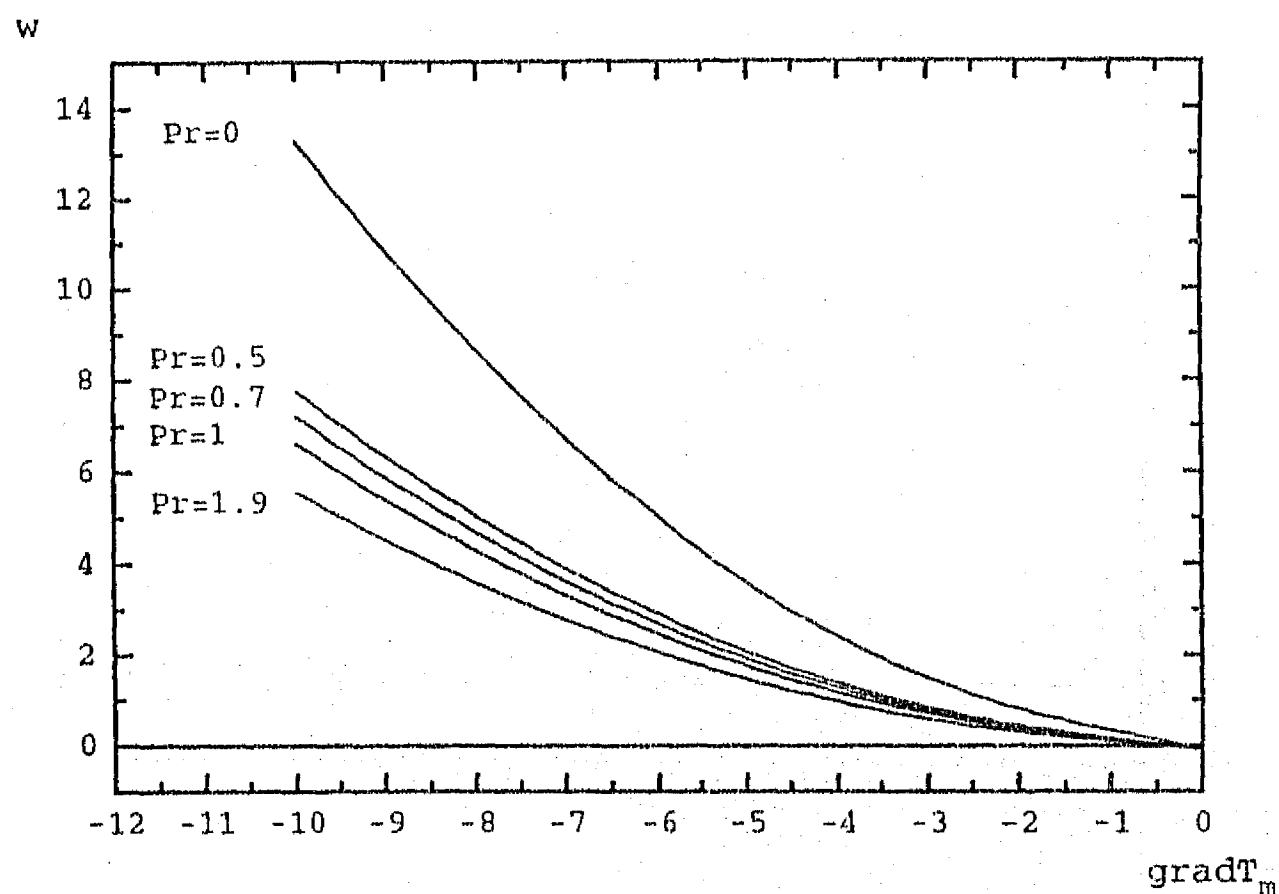


Fig. 3.21. Efecto del número de Prandtl (Pr) en la producción de potencia acústica (w) como función del gradiente, para ondas estacionarias, según el segundo modelo. ($kx_r = 0.4\pi$, $\gamma = 1.4$, $\epsilon = 0$)

La relación de las propiedades físicas entre el gas y el sólido ϵ afecta débilmente la producción de potencia acústica en ondas estacionarias w . Al igual que en ondas viajeras, w aumenta si ϵ disminuye, tal como se muestra en la Fig. 3.22. En estas gráficas $kx_r = 0.4\pi$, $\gamma = 1.4$ y $Pr = 0.7$.

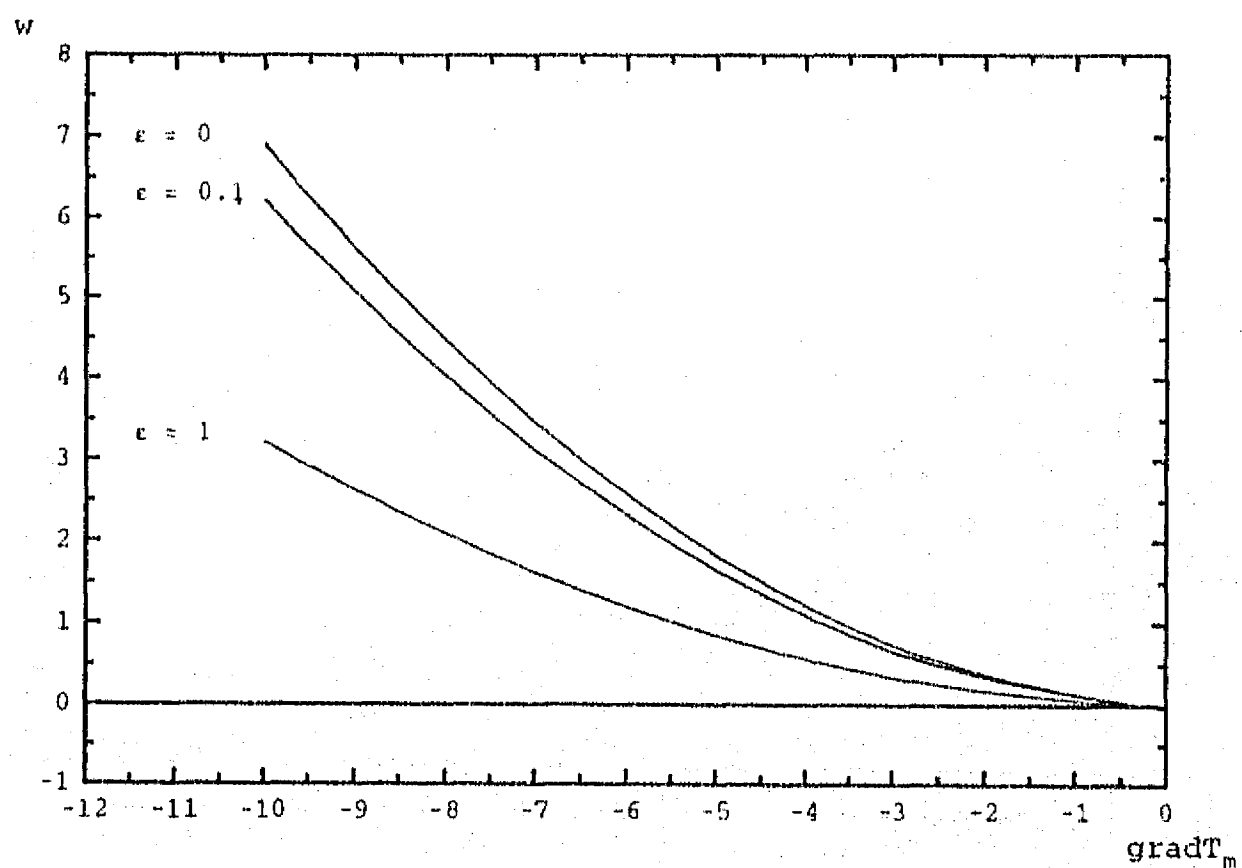


Fig. 3.22. Efecto de ϵ en la producción de potencia acústica (w) como función del gradiente axial de temperatura media, en ondas estacionarias, según el segundo modelo. ($Kx_r = 0.4\pi$, $\gamma = 1.4$, $Pr = 0.7$)

La producción de potencia acústica w para ondas estacionarias es independiente del semigrosor de la placa l , como puede observarse en la Fig. 3.23. En estas gráficas $kx_r = 0.4\pi$, $\gamma = 1.4$, $Pr = 0.7$ y $\epsilon = 0.01$.

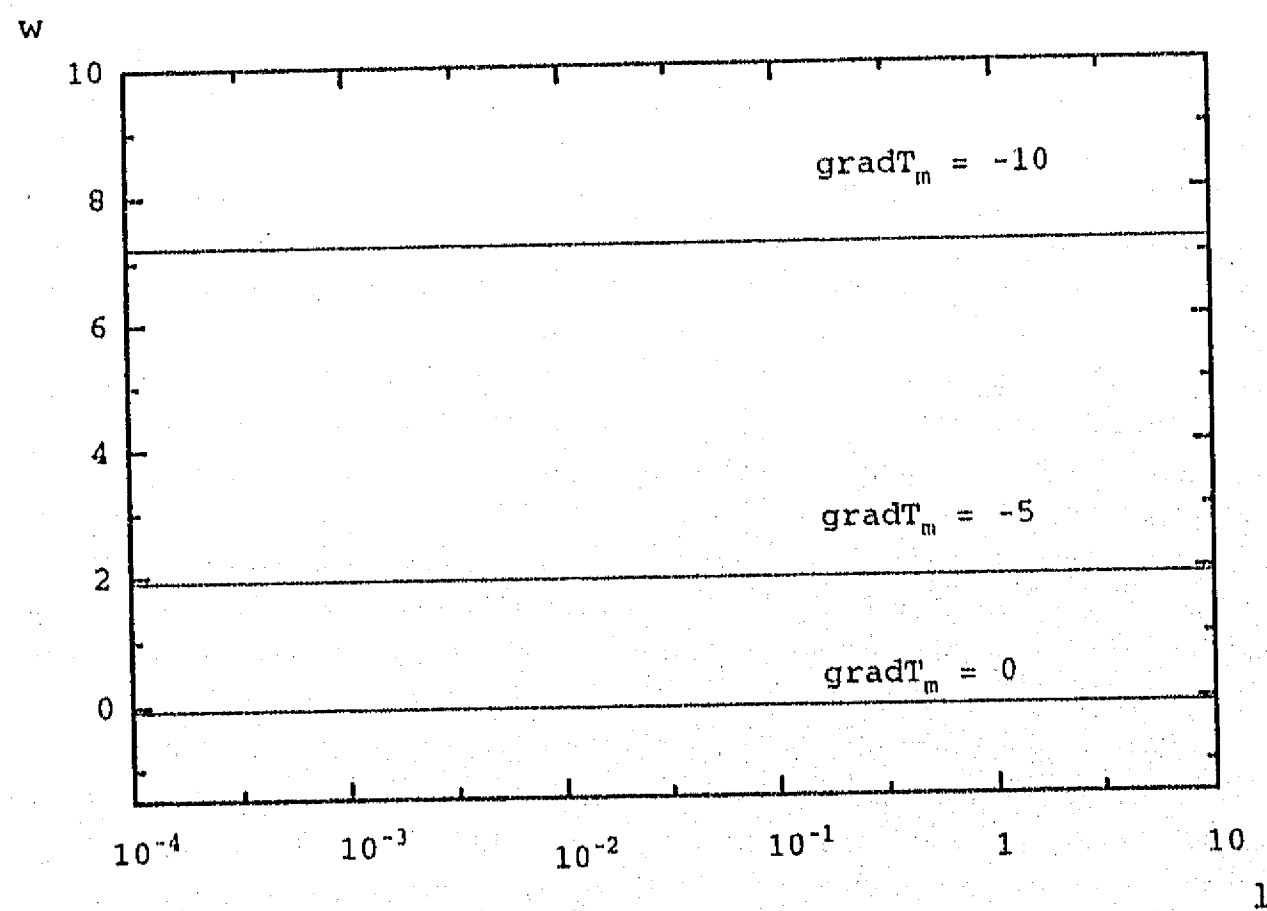


Fig. 3.23. Producción de potencia acústica (w) como función del semigrosor de la placa, en ondas estacionarias, según el segundo modelo, para diferentes valores del gradiente. ($kx_r = 0.4\pi$, $\gamma = 1.4$, $Pr = 0.7$, $\epsilon = 0.01$)

3.11. Conclusiones

El resultado original más importante de este estudio teórico es la demostración formal y cuantificación de la explicación física del efecto termoacústico dada por Rayleigh. Este resultado es válido para cualquier solución a la ecuación de onda para la presión (Ec. (3.13)). Esto demuestra que el mecanismo para la producción de potencia acústica por efecto termoacústico, en cualquier tipo de ondas (incluyendo ondas viajeras y ondas estacionarias), es la adecuada fase entre la transferencia de calor al fluido y la presión. También enfatiza el hecho de que la generación de potencia acústica está determinada por las condiciones en la frontera fluido-sólido.

Se demostró que de acuerdo al primer modelo, donde se desprecia el efecto del gradiente térmico, de la viscosidad y de la transferencia de calor en la onda de presión, en ondas estacionarias, existe una relación biunívoca entre la diferencia de fase crítica entre el flujo de calor al fluido y la presión y la diferencia de fase crítica entre las oscilaciones de temperatura y de presión en la frontera fluido-sólido.

La demostración de que la explicación a la producción o atenuación de potencia por efecto termoacústico sea la misma en ondas estacionarias que en ondas viajeras ratifica los trabajos de Raspet *et al.* (1993) y Kordomenos *et al.* (1995), en el sentido que la producción de potencia acústica en una onda viajera propagándose en el sentido del gradiente axial de temperatura media, se debe al efecto termoacústico, y contradice lo afirmado por Garrett y Swift (1995) quienes señalan que el efecto termoacústico sólo se lleva a cabo en ondas estacionarias.

Como resultados adicionales de este estudio se encuentra que si se desprecia el efecto del gradiente axial de temperatura media ∇T_m en la onda de presión (primer modelo) una onda viajera puede ser excitada ($w > 0$) si el gradiente axial de temperatura media se encuentra en la misma dirección de propagación de la onda $\nabla T_m > 0$ y además es mayor que un valor crítico ∇T_{mc} ; este primer modelo establece que una onda estacionaria puede ser excitada si el gradiente axial de temperatura media es tal que la zona más caliente se encuentra en el antinodo de presión, y su valor absoluto es mayor que un valor crítico.

Además se obtuvo que, cuando se desprecia el efecto del gradiente axial de temperatura media ∇T_m en la onda de presión (primer modelo), dado un gradiente $\nabla T_m > \nabla T_{mc}$, la onda viajera produce más potencia acústica que la onda estacionaria. Mientras que si se considera el efecto del gradiente axial de

temperatura media ∇T_m en la onda de presión (segundo modelo), si la placa tiene un semiespesor $l \geq 10$, la onda estacionaria produce en su posición óptima, más potencia acústica que la onda viajera, sin embargo se puede obtener mayor potencia acústica en la onda viajera si se reduce l a un valor adecuado.

El estudio paramétrico del segundo modelo, es decir, considerando el efecto del gradiente ∇T_m en la onda de presión, señala que tanto para ondas viajeras como para ondas estacionarias, la producción de potencia acústica se incrementa si se reducen γ , Pr y ϵ . Sin embargo, el efecto del semiespesor de la placa es distinto si se trata de ondas viajeras o de ondas estacionarias; en el caso de ondas viajeras, resulta que este parámetro juega un papel determinante en la producción de potencia acústica, en cambio, en el caso de ondas estacionarias, la producción de potencia acústica es independiente de l . Los resultados del efecto de l en la producción de potencia acústica en ondas viajeras constituyen una aportación original de este trabajo y señalan una posible vía para aumentar la producción de potencia acústica.

4. Experimentación

4.1. Objetivo

El objetivo principal de la parte experimental de esta tesis es validar la explicación de Rayleigh a la producción o atenuación de potencia acústica por efecto termoacústico. Por lo demostrado en la sección 3.7, en una onda estacionaria existe una correlación biunívoca entre la condición crítica para la excitación o atenuación de la onda en términos de la diferencia de fase entre el calor suministrado al fluido y la oscilación de presión, y la condición crítica en términos de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión. Por lo que para comprobar experimentalmente el criterio de Rayleigh a la producción o atenuación de potencia acústica por efecto termoacústico, se puede hacer a través de la medición de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión en una onda acústica estacionaria en la proximidad de la frontera sólida con un gradiente de temperatura axial. Cuando el gradiente axial de temperatura media es igual a su valor crítico, en el cual la producción de potencia acústica es nula ($w = 0$)¹, es decir no se presenta ni excitación, ni atenuación de la onda, el límite al aproximarse a la frontera sólida del valor absoluto de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión es igual a $\pi/2$. Cuando el gradiente axial de temperatura media toma un valor mayor a su valor crítico (menor en valor absoluto) se tiene atenuación de la onda acústica ($w < 0$) y en este caso, el valor del límite al aproximarse a la frontera sólida del valor absoluto de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión es menor a $\pi/2$. Mientras que, si el valor del gradiente axial de temperatura media es menor a su valor crítico (mayor en valor absoluto) se presenta excitación de la onda acústica ($w > 0$) y en este caso, el valor del límite al aproximarse a la frontera sólida del valor absoluto de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión es mayor a $\pi/2$.

Inicialmente se pensó generar la onda acústica con un oscilador termoacústico y en él medir la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y presión. Sin embargo esto tenía dos inconvenientes importantes; el primero, el introducir los sensores en el interior de la estructura activa del oscilador implica romper

¹En este capítulo se utilizan preferentemente variables adimensionales. Las variables en forma dimensional se denotan con un superíndice *.

4. Experimentación

4.1. Objetivo

El objetivo principal de la parte experimental de esta tesis es validar la explicación de Rayleigh a la producción o atenuación de potencia acústica por efecto termoacústico. Por lo demostrado en la sección 3.7, en una onda estacionaria existe una correlación biunívoca entre la condición crítica para la excitación o atenuación de la onda en términos de la diferencia de fase entre el calor suministrado al fluido y la oscilación de presión, y la condición crítica en términos de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión. Por lo que para comprobar experimentalmente el criterio de Rayleigh a la producción o atenuación de potencia acústica por efecto termoacústico, se puede hacer a través de la medición de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión en una onda acústica estacionaria en la proximidad de la frontera sólida con un gradiente de temperatura axial. Cuando el gradiente axial de temperatura media es igual a su valor crítico, en el cual la producción de potencia acústica es nula ($w = 0$)¹, es decir no se presenta ni excitación, ni atenuación de la onda, el límite al aproximarse a la frontera sólida del valor absoluto de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión es igual a $\pi/2$. Cuando el gradiente axial de temperatura media toma un valor mayor a su valor crítico (menor en valor absoluto) se tiene atenuación de la onda acústica ($w < 0$) y en este caso, el valor del límite al aproximarse a la frontera sólida del valor absoluto de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión es menor a $\pi/2$. Mientras que, si el valor del gradiente axial de temperatura media es menor a su valor crítico (mayor en valor absoluto) se presenta excitación de la onda acústica ($w > 0$) y en este caso, el valor del límite al aproximarse a la frontera sólida del valor absoluto de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión es mayor a $\pi/2$.

Inicialmente se pensó generar la onda acústica con un oscilador termoacústico y en él medir la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y presión. Sin embargo esto tenía dos inconvenientes importantes; el primero, el introducir los sensores en el interior de la estructura activa del oscilador implica romper

¹En este capítulo se utilizan preferentemente variables adimensionales. Las variables en forma dimensional se denotan con un superíndice *.

4. Experimentación

4.1. Objetivo

El objetivo principal de la parte experimental de esta tesis es validar la explicación de Rayleigh a la producción o atenuación de potencia acústica por efecto termoacústico. Por lo demostrado en la sección 3.7, en una onda estacionaria existe una correlación biunívoca entre la condición crítica para la excitación o atenuación de la onda en términos de la diferencia de fase entre el calor suministrado al fluido y la oscilación de presión, y la condición crítica en términos de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión. Por lo que para comprobar experimentalmente el criterio de Rayleigh a la producción o atenuación de potencia acústica por efecto termoacústico, se puede hacer a través de la medición de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión en una onda acústica estacionaria en la proximidad de la frontera sólida con un gradiente de temperatura axial. Cuando el gradiente axial de temperatura media es igual a su valor crítico, en el cual la producción de potencia acústica es nula ($w = 0$)¹, es decir no se presenta ni excitación, ni atenuación de la onda, el límite al aproximarse a la frontera sólida del valor absoluto de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión es igual a $\pi/2$. Cuando el gradiente axial de temperatura media toma un valor mayor a su valor crítico (menor en valor absoluto) se tiene atenuación de la onda acústica ($w < 0$) y en este caso, el valor del límite al aproximarse a la frontera sólida del valor absoluto de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión es menor a $\pi/2$. Mientras que, si el valor del gradiente axial de temperatura media es menor a su valor crítico (mayor en valor absoluto) se presenta excitación de la onda acústica ($w > 0$) y en este caso, el valor del límite al aproximarse a la frontera sólida del valor absoluto de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión es mayor a $\pi/2$.

Inicialmente se pensó generar la onda acústica con un oscilador termoacústico y en él medir la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y presión. Sin embargo esto tenía dos inconvenientes importantes; el primero, el introducir los sensores en el interior de la estructura activa del oscilador implica romper

¹En este capítulo se utilizan preferentemente variables adimensionales. Las variables en forma dimensional se denotan con un superíndice *.

esta estructura, lo cual perturbaría la generación de la onda. Segundo, no se mediría el defasamiento en condiciones de atenuación de la onda, ya que ésta no estaría presente. Sin embargo, dado el objetivo de esta investigación basta tener un gradiente axial de temperatura en una pequeña zona en una pared sólida en contacto con una onda acústica y medir las oscilaciones de temperatura y presión en la parte central de esta zona, lo más cerca posible de la pared. Por esto se optó por diseñar, contruir y emplear un dispositivo en el que se puede generar una onda acústica dentro de una guía de onda con un gradiente axial de temperatura en una de las paredes. Con esta idea, además se simplificó significativamente el dispositivo experimental.

4.2. Dispositivo experimental

Con este objetivo, el dispositivo experimental debía contar con los siguientes elementos:

- Un fluido de trabajo
- Un mecanismo de generación de una onda acústica monocromática, con amplitud y frecuencia variables dentro de un rango que se especificará después.
- Un ducto semi-cerrado para establecer una onda estacionaria unidireccional, *i.e.* la proporción entre su longitud L^* y la máxima longitud transversal Y^* debía ser $L^* > 2Y^*$ (Kinsler 1982). Esta guía de ondas debe permitir la visualización a su interior para la localización de los sensores. La longitud de la guía de ondas L^* debe ser tal que su frecuencia de resonancia sea lo suficientemente baja (~ 100 Hz) (ver ecuación A1.37) para tener mayor profundidad de penetración térmica (δ_k) (sección 3.1) y mayor distancia de desplazamiento de las parcelas de fluido (ecuación A1.36). En la Fig. 4.1. se encuentran graficadas la profundidad de penetración térmica y la distancia de desplazamiento de las parcelas de fluido como función de la frecuencia de acuerdo a su correspondiente definición dada en la sección 3.1. Esta información se empleo en el diseño de la guía de ondas.
- Una placa en el interior de la guía de ondas, en su zona central, con un gradiente axial de temperatura media (∇T_m^*) variable entre 0 y 50 °C/cm ya que el gradiente crítico (∇T_{mc}^*) para estas condiciones se estima cercano a 5 °C/cm de acuerdo al primer modelo teórico expuesto en el capítulo 3 de esta tesis.

esta estructura, lo cual perturbaría la generación de la onda. Segundo, no se mediría el defasamiento en condiciones de atenuación de la onda, ya que ésta no estaría presente. Sin embargo, dado el objetivo de esta investigación basta tener un gradiente axial de temperatura en una pequeña zona en una pared sólida en contacto con una onda acústica y medir las oscilaciones de temperatura y presión en la parte central de esta zona, lo más cerca posible de la pared. Por esto se optó por diseñar, contruir y emplear un dispositivo en el que se puede generar una onda acústica dentro de una guía de onda con un gradiente axial de temperatura en una de las paredes. Con esta idea, además se simplificó significativamente el dispositivo experimental.

4.2. Dispositivo experimental

Con este objetivo, el dispositivo experimental debía contar con los siguientes elementos:

- Un fluido de trabajo
- Un mecanismo de generación de una onda acústica monocromática, con amplitud y frecuencia variables dentro de un rango que se especificará después.
- Un ducto semi-cerrado para establecer una onda estacionaria unidireccional, *i.e.* la proporción entre su longitud L^* y la máxima longitud transversal Y^* debía ser $L^* > 2Y^*$ (Kinsler 1982). Esta guía de ondas debe permitir la visualización a su interior para la localización de los sensores. La longitud de la guía de ondas L^* debe ser tal que su frecuencia de resonancia sea lo suficientemente baja (~ 100 Hz) (ver ecuación A1.37) para tener mayor profundidad de penetración térmica (δ_k) (sección 3.1) y mayor distancia de desplazamiento de las parcelas de fluido (ecuación A1.36). En la Fig. 4.1. se encuentran graficadas la profundidad de penetración térmica y la distancia de desplazamiento de las parcelas de fluido como función de la frecuencia de acuerdo a su correspondiente definición dada en la sección 3.1. Esta información se empleo en el diseño de la guía de ondas.
- Una placa en el interior de la guía de ondas, en su zona central, con un gradiente axial de temperatura media (∇T_m^*) variable entre 0 y 50 °C/cm ya que el gradiente crítico (∇T_{mc}^*) para estas condiciones se estima cercano a 5 °C/cm de acuerdo al primer modelo teórico expuesto en el capítulo 3 de esta tesis.

- Sensores de las oscilaciones de presión, temperatura y velocidad, las características de estos sensores se especificarán más adelante.

Por facilidad de operación, se escogió el aire a presión ambiente como fluido de trabajo. La onda acústica sinusoidal se generó con la siguiente concatenación de aparatos, un generador de señales Wavetek modelo 29, con impedancia de salida de 50Ω y amplitud en voltaje de 2.5 mVpp a 10 Vpp, conectado a un amplificador Onkyo RI modelo A-RV410, con potencia máxima de salida de 80 W a impedancia de salida de 8Ω . Éste a su vez se conectó a una bocina *JLT* de 8Ω y potencia máxima de 45 W.

Se construyó una guía de ondas de longitud interior $L^* = 0.60$ m con sección transversal rectangular de 0.098 m \times 0.054 m, con las dos caras verticales de acrílico transparente, la base y la tapa de naylacero, esta última con un soporte para la placa con el gradiente térmico. La bocina se colocó en un extremo de la guía de ondas ($x^* = 0.60$ m) y el extremo opuesto ($x^* = 0$) fue cerrado con un tapa masiva de *coldroll* con una alta impedancia acústica. Este sistema es capaz de generar una onda acústica estacionaria de al menos una amplitud en presión en el antinodo de $p_A^* = 195$ Pa (140 dB).

La placa con gradiente térmico se construyó usando una pastilla de convertidor catalítico de cerámica y una resistencia eléctrica tipo listón conectada a un variac, tal como se muestra en la Fig. 4.2. Gracias a la geometría y al material de la pastilla, calentando la resistencia fue posible generar y mantener en una pequeña región de la placa (poco mayor a 1cm de ancho y los 5 cm de largo) un gradiente térmico de hasta 100 °C/cm. Nótese que no se utilizó algún sistema activo de enfriamiento, esto además de simplificar el montaje experimental, evita las vibraciones inducidas al hacer circular algún fluido de enfriamiento. El único inconveniente es que la temperatura media de la placa aumenta al aumentar el gradiente térmico. La placa con gradiente térmico se colocó en la tapa superior de la guía de ondas para disminuir los efectos de convección natural y en la parte central de la dirección axial ($x^* = 0.314$ m) para tener una adecuada amplitud de las oscilaciones de presión, temperatura y velocidad. (Ver Fig. A1.1).

En la Fig. 4.3. se encuentra el esquema constructivo de la guía de ondas, incluyendo la placa con gradiente térmico, bocina y soportes. Para reducir vibraciones de la guía de ondas y de los sensores, la bocina y su soporte se colocaron en una mesa separada.

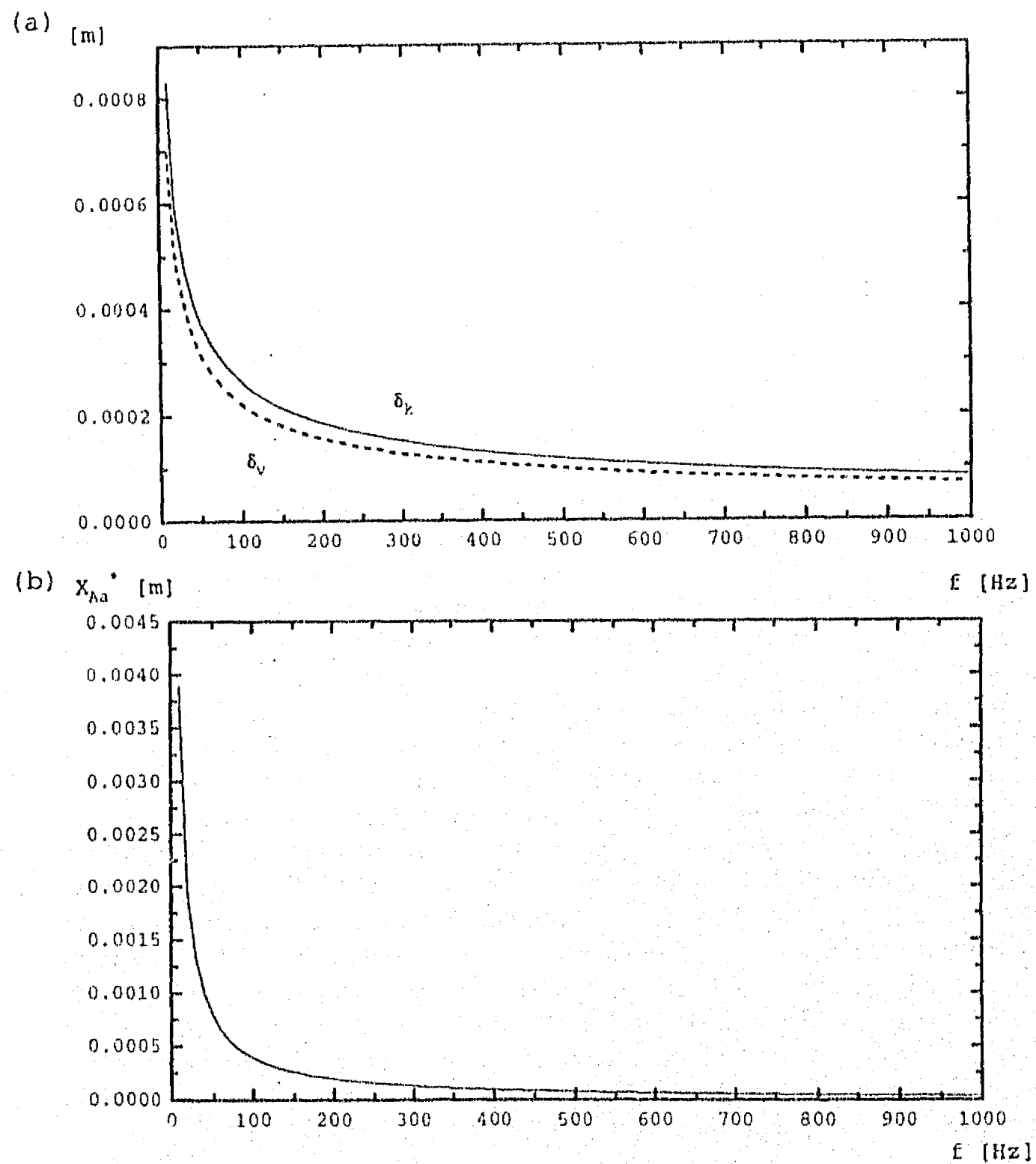


Fig. 4.1. (a) Gráficas de la profundidad de penetración térmica (δ_k) y de la profundidad de penetración viscosa (δ_v) en una onda acústica como función de la frecuencia. (b) Gráfica de la amplitud de la distancia de desplazamiento de las parcelas del fluido (X_{Aa}) en una onda acústica adiabática como función de la frecuencia. ($p_A^* = 100 \text{ Pa}$, $T_m^* = 300 \text{ K}$)

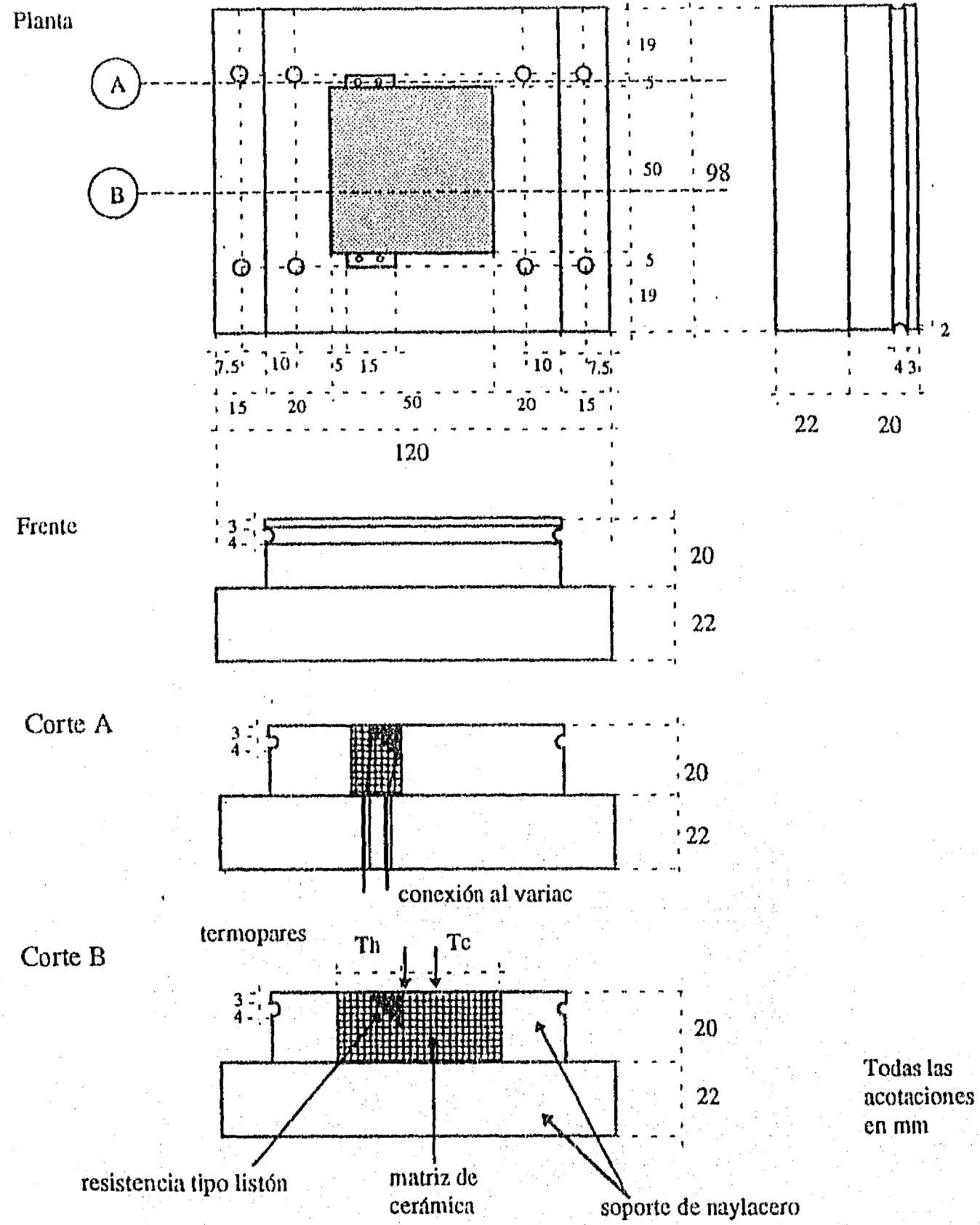


Fig. 4.2. Esquema constructivo de la placa cerámica con resistencia eléctrica para producir el gradiente axial de temperatura media, conexión al variac y soporte de naylacero.

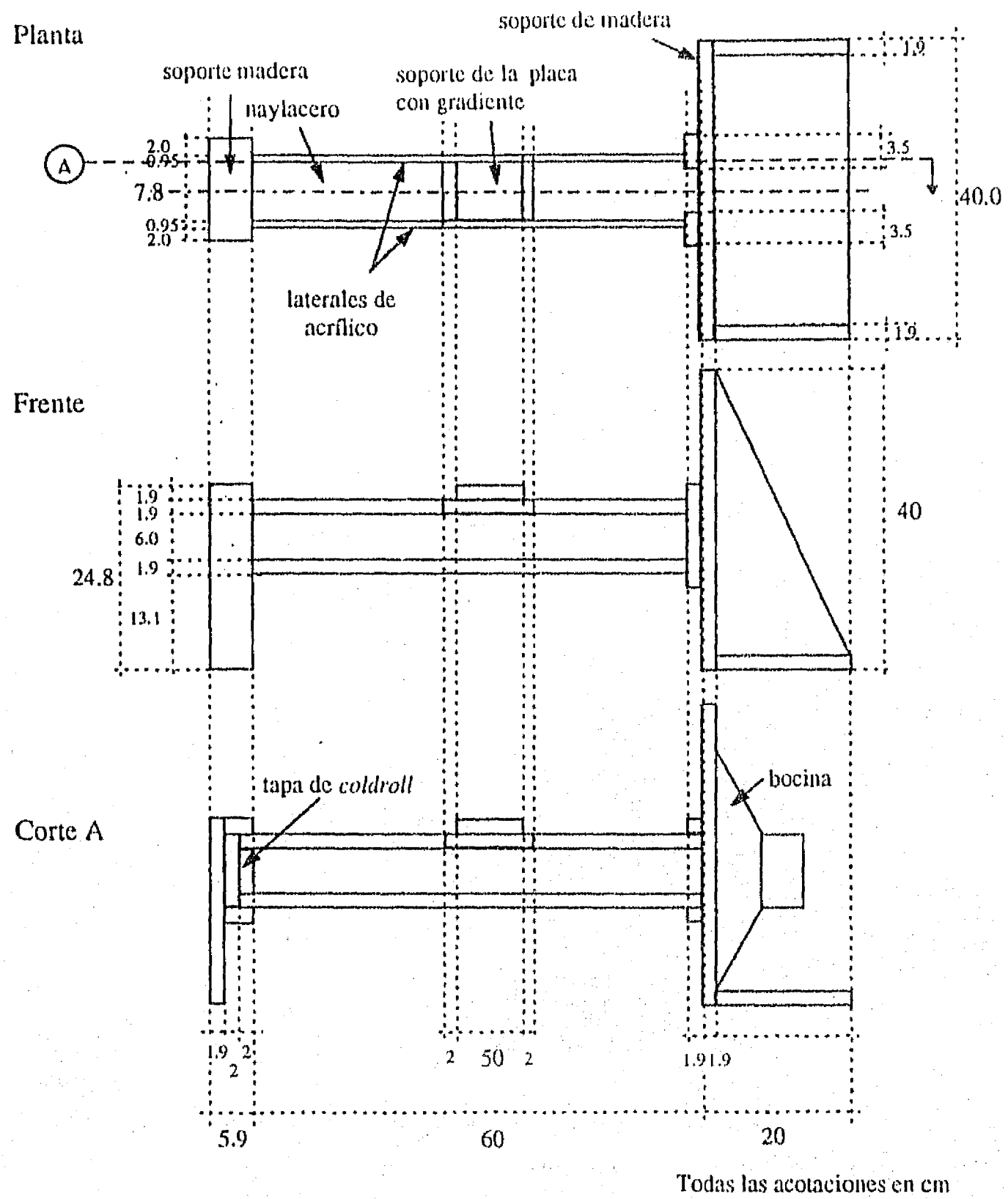


Fig. 4.3. Esquema constructivo de la guía de ondas. Se indica la posición de la placa con gradiente térmico, la bocina y los soportes de la guía.

4.3. Instrumentación

Para seleccionar la instrumentación, se tomó en cuenta las características de la onda que generaría el sistema diseñado. Los parámetros de diseño iniciales son: frecuencia $f^* \sim 100$ Hz y amplitud de presión en el antinodo $p_A^* < 200$ Pa. Considerando condiciones adiabáticas y valores lejos de la pared, la amplitud de la oscilación de temperatura en el antinodo $T_{Aa}^* < 0.07$ °C, amplitud de la oscilación de velocidad en el antinodo $u_{Aa}^* < 0.6$ m/s y amplitud de la oscilación de desplazamiento de las partículas del fluido en el antinodo $X_{Aa}^* < 0.9$ mm. En la Fig. 4.4. se encuentran gráficas de T_{Aa}^* , u_{Aa}^* y X_{Aa}^* como función de p_A^* .

4.3.1. Medición de la presión acústica

La oscilación de presión acústica fue medida con un micrófono de condensación Brujaer & Kajer modelo 4165 (1/2" de diámetro). La calibración del mismo fue hecha con el sistema calibrador Brüel & Kjaer modelo 4230 del Centro de Instrumentos de la UNAM, obteniéndose una sensibilidad de 43.5 ± 0.2 mV/Pa.

4.3.2. Medición de la temperatura del aire

Para medir las oscilaciones de temperatura en el aire ($f^* \sim 100$ Hz y $T_1^* < 0.07$ °C) y sobre todo cerca de la pared, se requiere un sensor con baja inercia térmica y pequeñas dimensiones, por lo que se propuso el llamado "anemómetro de hilo frío" ("anemómetro" de corriente constante), este instrumento es llamado "anemómetro" pese a que es un sensor de temperatura, sin embargo recibe este nombre debido a su similitud con el anemómetro de hilo caliente. En el anexo 3 se discute brevemente el principio de operación de estos dos instrumentos, haciendo énfasis en las características que permiten que un sea sensible a temperatura y el otro a velocidad. El "anemómetro de hilo frío" se usa también para medir la temperatura media del aire. Se contó con dos anemómetros de este tipo: un anemómetro TSI modelo 1745 y un anemómetro DANTEC 55M. Se utilizaron sensores DANTEC 55P11 y 55P31 con hilo de platino de $1 \mu\text{m}$ de diámetro, capaces de medir oscilaciones de temperatura de frecuencias hasta 7 kHz.

Cabe mencionar que estos sensores son muy frágiles debido a las dimensiones del hilo. Es frecuente que el hilo se rompa o se separe de las puntas del sensor al poner o quitar el sensor en el portasensor o al acercarse el sensor a una pared

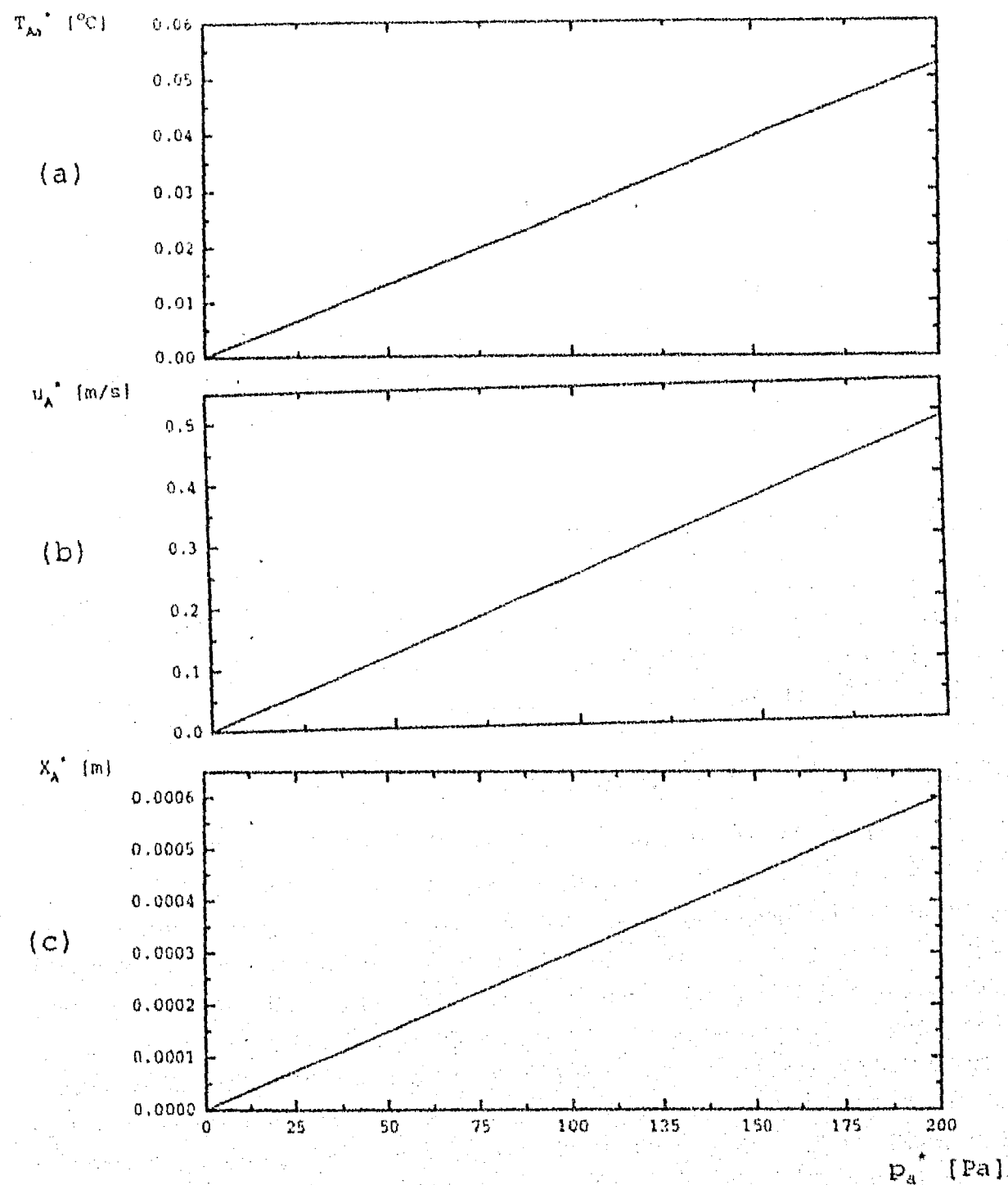


Fig. 4.4. Gráficas de (a) la amplitud de la oscilación de temperatura (T_{Aa}^*), (b) la amplitud de la oscilación de velocidad (u_{Aa}^*) y (c) la amplitud de la distancia de desplazamiento de las partículas (X_{Aa}^*) en una onda acústica adiabática, como función de la amplitud de la oscilación de presión (p_A^*). De acuerdo a las ecuaciones (29), (26) y (27) del anexo 1. ($f^* = 130$ Hz, $T_m^* = 300$ K)

sobre todo si ésta se encuentra caliente. Los fabricantes de estos sensores ofrecen el servicio de reparación, sin embargo además de ser costoso es tardado. Por esto, fue necesario aprender una técnica de reparación de los sensores.

4.3.3. Medición de la velocidad acústica

Para medir la oscilación de velocidad de las partículas en la onda acústica ($f^* \sim 100$ Hz y $u_{Aa}^* < 0.6$ m/s), también se requería de un sensor de baja inercia y pequeñas dimensiones, por lo que se propuso el anemómetro de hilo caliente (anemómetro de temperatura constante). Se usó un anemómetro DANTEC 56C y sensores DANTEC 55P11, con hilo de tungsteno de $5 \mu\text{m}$ de diámetro.

4.3.4. Medición de temperatura de la placa

Para calcular el gradiente axial de la temperatura media en la placa, se midió la temperatura en dos puntos de la pared de la pastilla de cerámica. Esto se hizo con termopares de lámina (0.0005" de espesor) Omega tipo K (cromel-alumel) pegados a la pared con cemento Omega CC de alta temperatura. Se utilizó la curva de calibración de este tipo de termopares dada por Hewlett-Packard (Hewlett-Packard 1984), requiriendo la medición de la temperatura de la tableta de conexión. Para medir esta temperatura se usó un termistor, cuya curva de calibración (Fig. 4.5.) se obtuvo mediante un calibrador de temperatura JOFRA modelo D55SE. Usando el mismo calibrador de temperatura se verificó la respuesta de los termopares en el rango 0 a 120°C . Encontrándose una discrepancia menor a 0.5°C .

4.3.5. Equipo auxiliar

Para colocar la punta del sensor de los anemómetros, se utilizó un posicionador micrométrico XYZ Melles-Griot. Con este dispositivo se tiene una precisión de 0.01mm en cualquier dirección. La carrera máxima es de 14mm en la dirección vertical y en la dirección transversal horizontal. En la dirección axial horizontal la carrera máxima es de 25cm. Este posicionador cuenta además con un desplazamiento grueso en la dirección vertical.

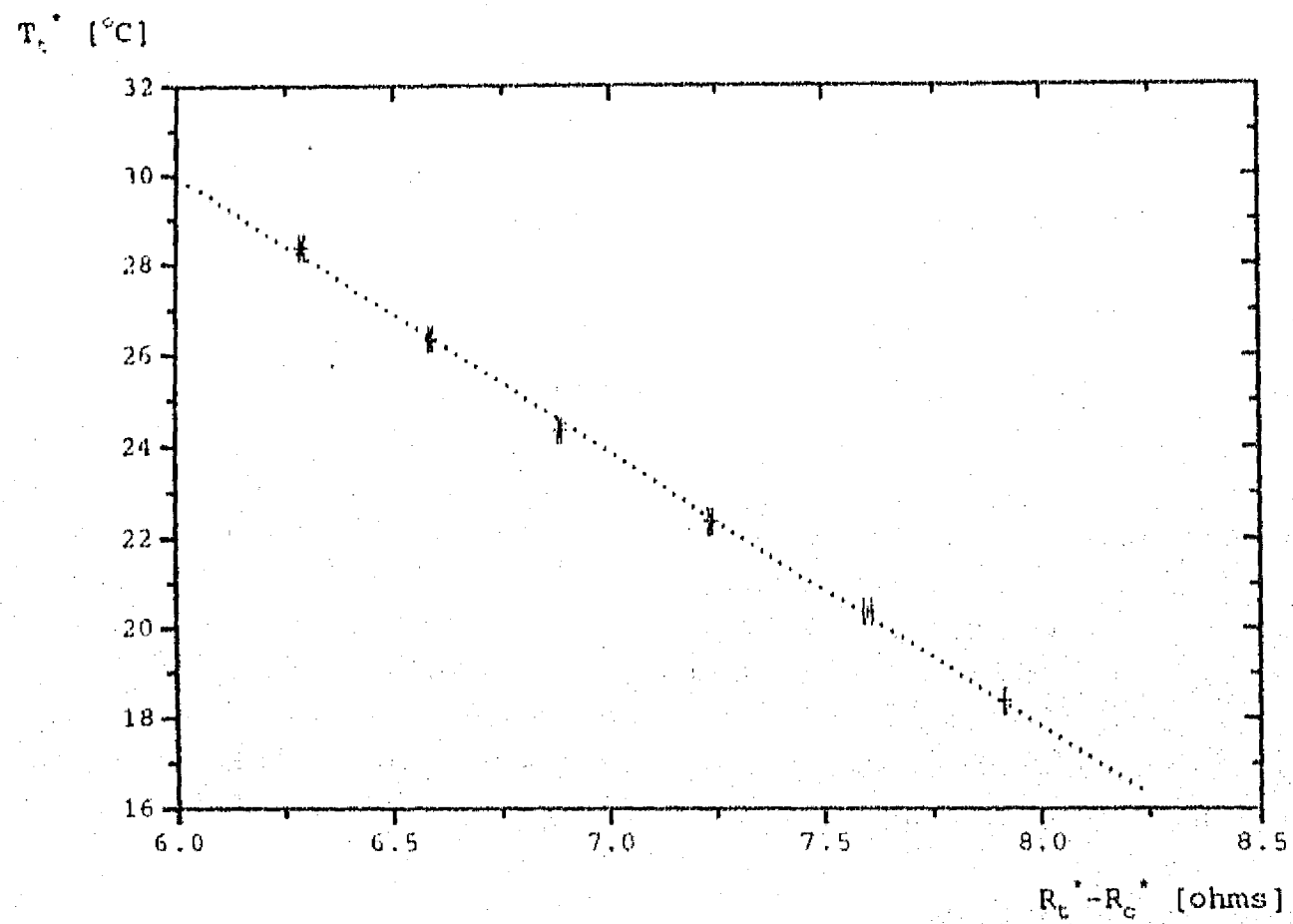


Fig. 4.5. Calibración del termistor. + representan datos experimentales, la línea $T_t^* = 66.29 - 6.05985(R_t^* - R_c^*) \pm 0.15$ °C se obtuvo del ajuste por mínimos cuadrados. R_t^* es la resistencia total medida, R_c^* es la resistencia del cable.

Para observar la distancia del hilo del sensor a la pared, se utilizó un microscopio *American Optical* con amplificación máxima de 60, y su correspondiente lámpara para iluminación.

Para observar las señales en tiempo real se utilizó un osciloscopio *Hewlett-Packard* modelo 54502A. Este osciloscopio permite hacer observaciones y mediciones simultáneas de dos canales con una velocidad máxima de 400 MHz.

Se contó con un amplificador *Stanford Research System* tipo *lock-in* modelo SR530. Un amplificador *lock-in* puede medir con precisión pequeñas señales aún cuando éstas se encuentren ocultas por fuentes de ruido que pueden ser miles de veces mayores. En esencia, un *lock-in* es un filtro con un ancho de banda extremadamente pequeño alrededor de una frecuencia que es seleccionada a través de una señal de referencia (Stanford 1992). La ventaja que presenta este instrumento para los propósitos de esta tesis es que mide directamente la amplitud de la señal del "anemómetro de hilo frío" de la frecuencia de interés (f^*) y su defasamiento con respecto a la señal del micrófono. Sin embargo presenta una desventaja, pues con este instrumento no se puede medir simultáneamente la amplitud de la señal del micrófono de la frecuencia f^* . Por esto se decidió hacer la adquisición de datos de las salidas directas del anemómetro y del micrófono, y procesar las señales por *software*. El *lock-in* se empleó para monitorear en tiempo real la amplitud de la señal del anemómetro de la frecuencia f^* y su defasamiento con respecto a la señal del micrófono. Las mediciones efectuadas con el *lock-in* fueron consistentes con las obtenidas por el análisis por *software*.

4.4. Sistemas de adquisición de datos

Se utilizaron dos sistemas de adquisición de datos. El sistema Hewlett-Packard modelo 3052A para la adquisición de la temperatura de la placa. Y el sistema Hewlett-Packard modelo 3852A para la adquisición de las señales de presión, temperatura y velocidad. Este sistema permite leer señales a una velocidad máxima de 10^5 muestras/s. Estos equipos se programaron a través de una estación de trabajo Hewlett-Packard modelo 9000-386, empleando el programa *Veetest*. Éste es un código construido usando la filosofía de programación orientada a objetos que permite construir programas, concatenando varias acciones desplegadas en pantalla. Además, es posible presentar en modo de panel, los controles, resultados y gráficas más importantes.

En la Fig. 4.6. se encuentra un esquema del dispositivo, la instrumentación y

los sistemas de adquisición, así como fotografías del montaje experimental.

4.5. Desarrollo de la técnica de medición

El trabajo experimental se divide en dos etapas: la primera es el desarrollo de la técnica de medición y la segunda es la propia medición del defasamiento. La primera etapa incluye varias pruebas que se hicieron para estudiar las características de la onda generada y para analizar la posibilidad de utilizar diferentes técnicas para la validación experimental del criterio de Rayleigh. Las diferentes pruebas individuales se presentan en las secciones 4.5.1. a 4.5.8. Estas pruebas fueron muy importantes ya que del resultado de ellas se determinó la técnica a seguir en la medición del defasamiento. En particular no se sabía si la sensibilidad del "anemómetro de hilo frío" era suficiente para medir las oscilaciones de temperatura acústica. Tampoco existía la certeza de poder medir la velocidad de la onda acústica con el anemómetro de hilo caliente, ya que este anemómetro es usado comúnmente para medir la velocidad media de un flujo y las perturbaciones alrededor de ésta, sin embargo existe poca información en la literatura sobre su uso para medir perturbaciones de velocidad cuando no existe velocidad media. Algunas pruebas sencillas efectuadas previamente a la construcción de la guía de ondas, como la observación de la señal de salida del anemómetro estando el sensor expuesto a una onda acústica, dieron confianza de que estas mediciones eran posibles. El desarrollo de la técnica de la calibración de estos dos anemómetros para medir perturbaciones acústicas es parte de la aportación original de esta tesis.

4.5.1. Determinación de la frecuencia de resonancia del sistema

Para determinar la frecuencia de resonancia del sistema, se varió la frecuencia de la señal generada en un rango entre 100 y 160 Hz, mientras que se mantenía constante el voltaje a la bocina. La frecuencia donde se obtiene el máximo en la amplitud de presión acústica determina la frecuencia de resonancia del sistema, (ver Fig. 4.7.) resultando ésta de 130 ± 1 Hz. Las mediciones se realizaron a una temperatura media de 22 ± 1 °C. La frecuencia de resonancia estimada a través de la ecuación A1.37 con la longitud del ducto $L^*=0.60$ m es de 143.5 ± 0.2 Hz. Sin embargo debido a la forma de la bocina, la longitud efectiva de la guía de ondas es mayor a la longitud del ducto. En lo subsecuente se denomina f_r^* a la frecuencia de resonancia del sistema.

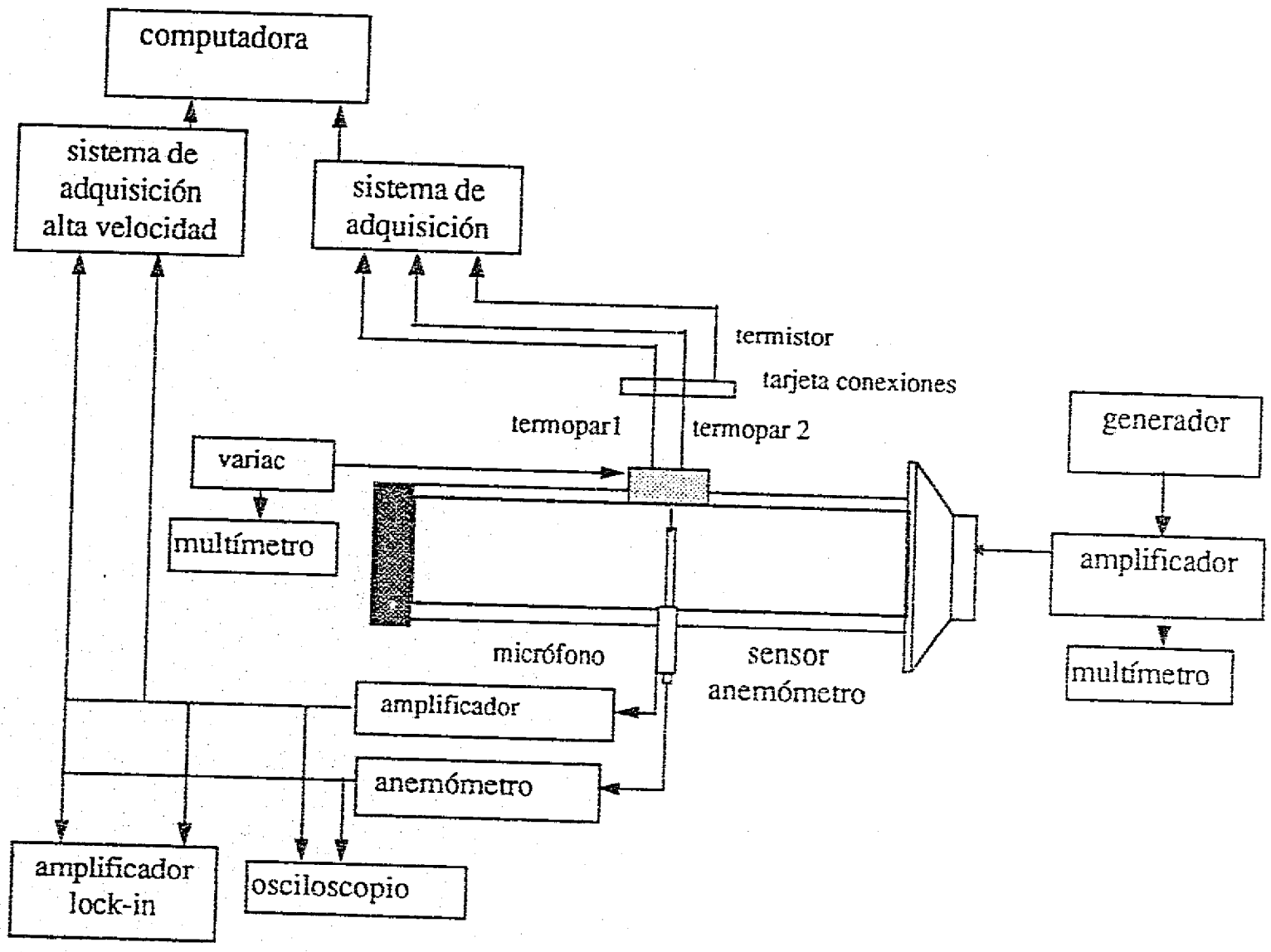


Fig. 4. 6. a) Esquema del dispositivo experimental, la instrumentación y los sistemas de adquisición utilizados.

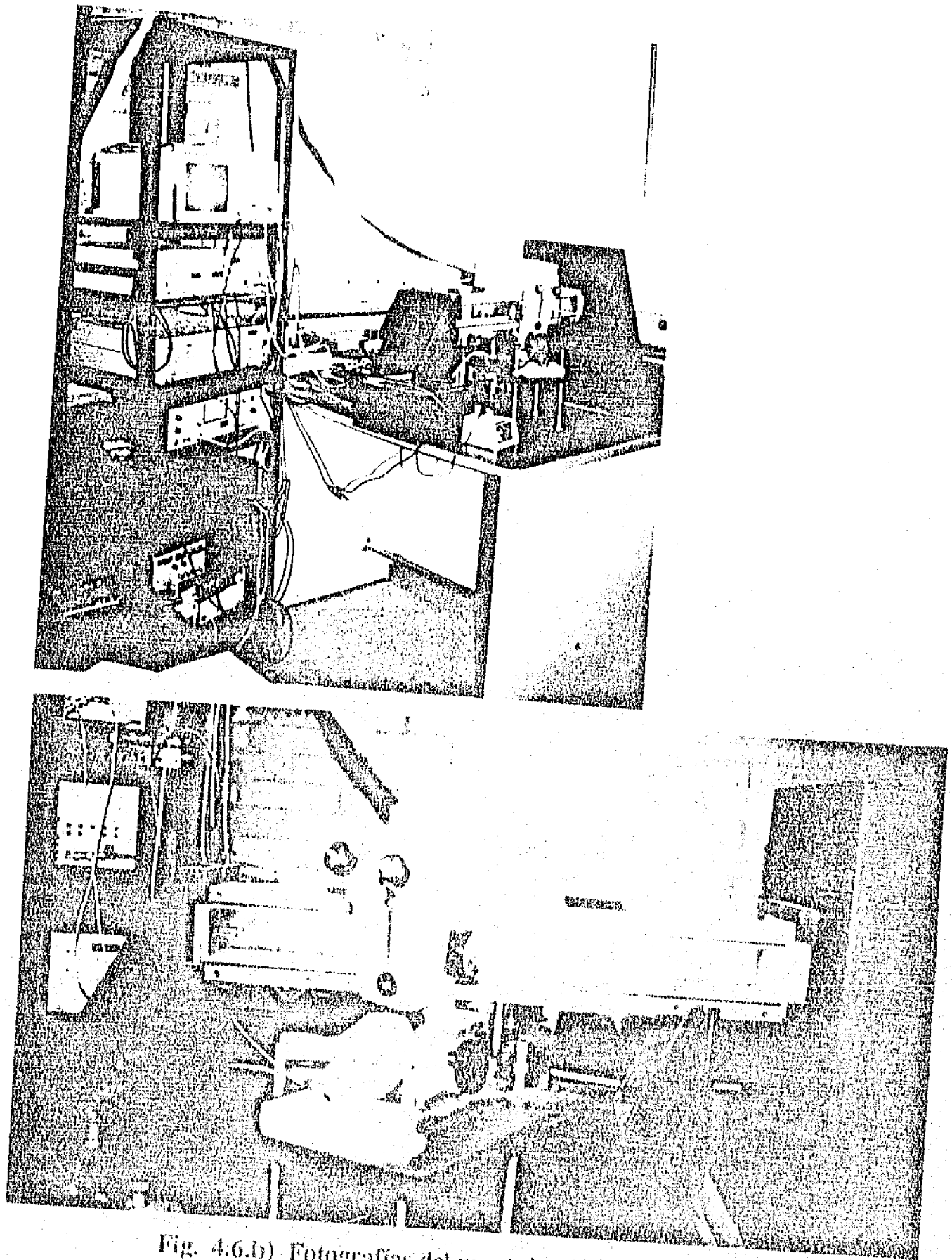


Fig. 4.6.b) Fotografias del montaje experimental.

$P_A^*/P_{A^*}^{(máx)}$

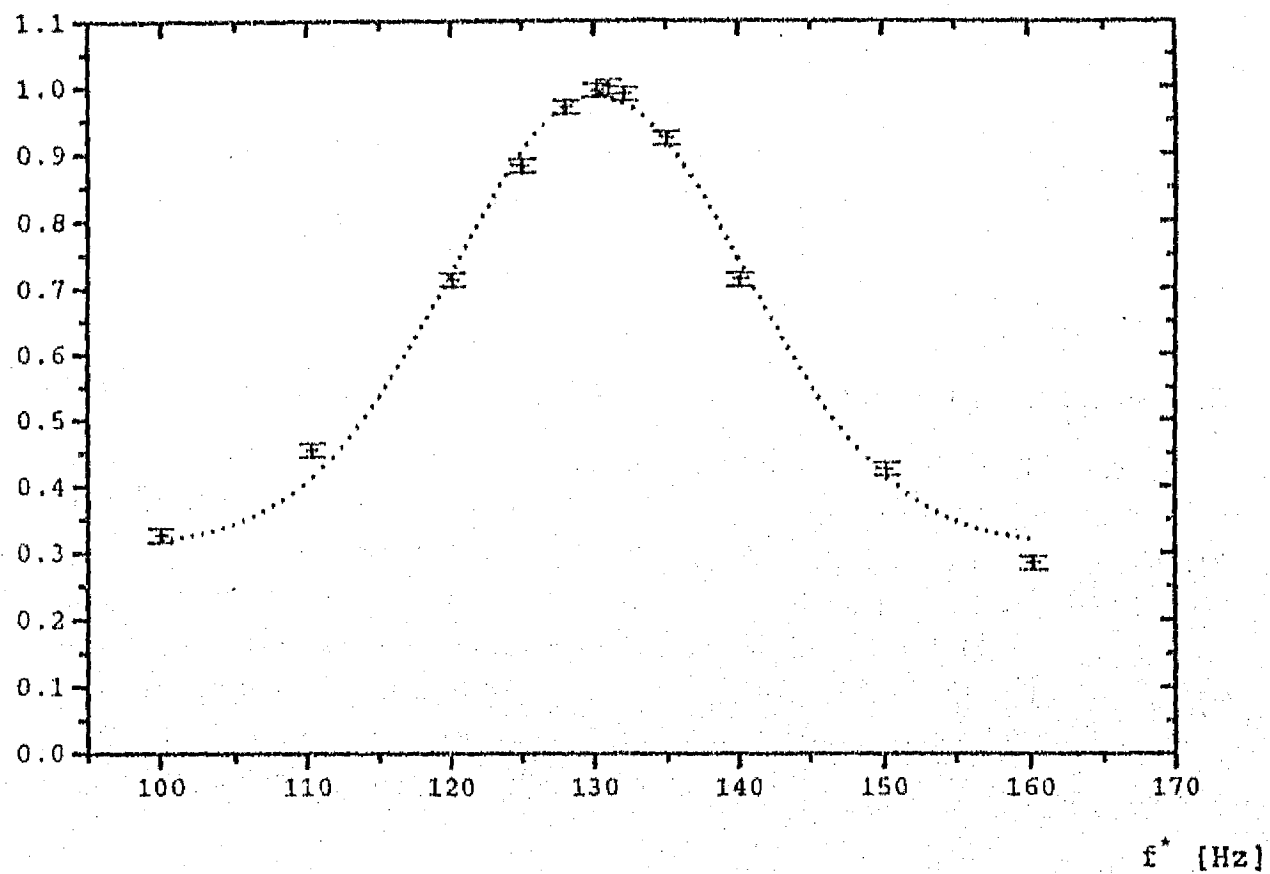


Fig. 4.7. Amplitud de la oscilación de presión normalizada ($P_A^*/P_{A^*}^{(máx)}$) como función de la frecuencia (f^*). ($T_m^*=22 \pm 1$ °C) La frecuencia en la que se obtiene el máximo es la frecuencia de resonancia del sistema: $f^* = 130 \pm 1$ Hz.

4.5.2. Análisis de la señal del micrófono

En la Fig. 4.8. se muestra la señal de salida del micrófono en una onda acústica de frecuencia $f_r^* = 130.0 \pm 0.2 Hz$, con amplitud de la oscilación de presión en el antinodo de $p_A^* = 184 \pm 1 Pa$, medida en $x^* = 0.314 m$, donde la amplitud de la presión es $p_a^* = 135 \pm 1 Pa$, (a) en el espectro temporal y (b) en el espectro de frecuencias. En ellas se comprueba que la frecuencia principal de la señal de salida del micrófono es igual a la frecuencia de generación de la onda. La señal es básicamente monocromática, la contribución del segundo armónico es menor al 2%, y el ruido de frecuencia alta es pequeño (menor al 0.1%). Por lo tanto, la onda acústica se puede considerar monocromática y la aproximación lineal es válida en el rango estudiado ($p_A^* < 200 Pa$).

4.5.3. Determinación del perfil axial de la amplitud de la onda de presión

Para verificar la existencia de una onda acústica estacionaria en el interior de la guía de ondas, se midió la amplitud de la presión acústica como función de la posición axial. En la Fig. 4.9. se pueden observar los perfiles axiales de la amplitud de la onda de presión para diferentes intensidades de la misma, estos perfiles confirman la existencia de una onda estacionaria en el interior de la guía de ondas. Efectuando un ajuste de los datos se determinó la longitud de onda $\lambda = 2.65 \pm 0.01 m$ y la amplitud de la onda de presión en el antinodo (p_A^*) para cada intensidad analizada. $\lambda/4 = 0.66 m$ es la longitud efectiva de la guía de ondas.

4.5.4. Análisis de la señal del anemómetro de hilo caliente

El anemómetro de hilo caliente (y el "anemómetro de hilo frío") es básicamente un transductor térmico. El principio de operación es el siguiente: se hace pasar una corriente eléctrica a través de un filamento delgado expuesto a un flujo transversal. A medida que la razón de flujo o la temperatura varían, la transferencia de calor del filamento también varía. Esto causa variaciones en el balance de calor del filamento. El filamento está hecho de un material cuya resistencia eléctrica depende de la temperatura. La variación de la resistencia es monitoreada por métodos electrónicos. Como se describe con detalle en el anexo 3, a mayor sobrecalentamiento del hilo la sensibilidad a la magnitud de la velocidad aumenta

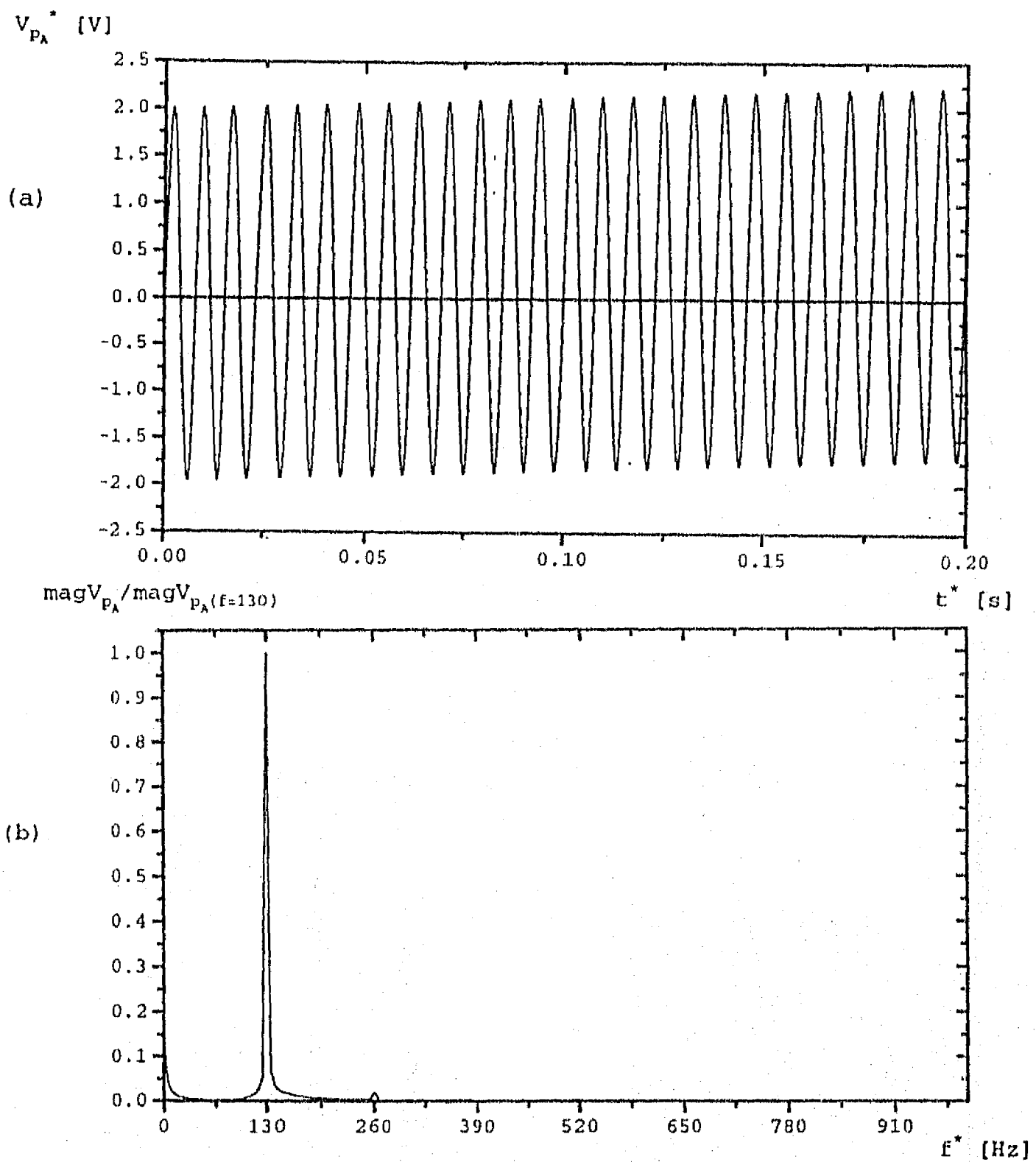


Fig. 4.8. (a) Señal temporal y (b) magnitud normalizada del espectro de frecuencias de la salida del micrófono en la onda acústica de frecuencia $f^* = 130$ Hz, con amplitud de la oscilación de presión en el antinodo de $p_A^* = 184$ Pa, medida en $x^* = 0.314$ m, donde $p_a^* = 135$ Pa. ($T_m^* = 22.3$ °C)

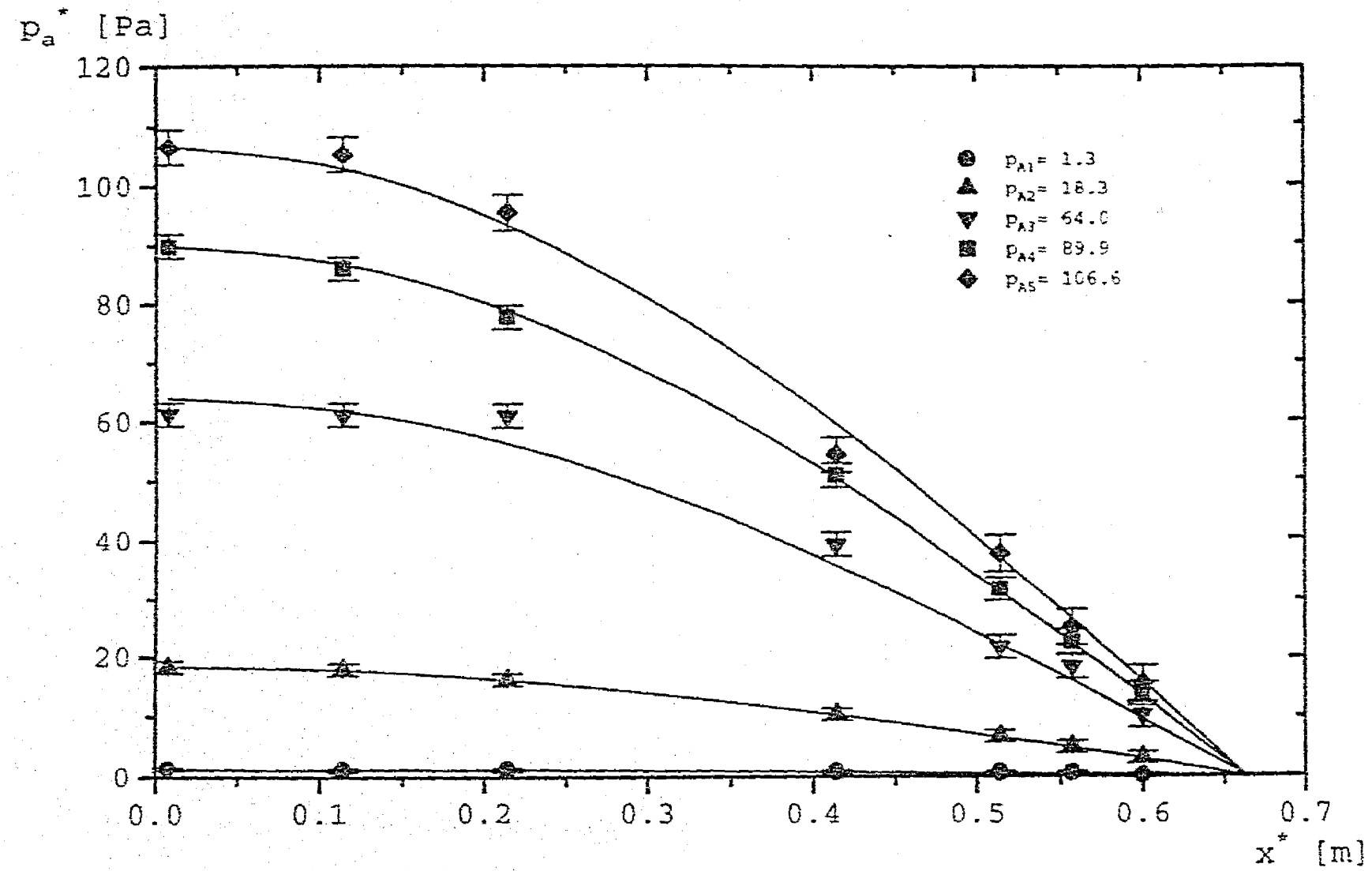


Fig. 4.9. Perfiles axiales de la amplitud de la onda de presión (p_a^*) para diferentes intensidades de la onda de frecuencia 130 ± 0.2 Hz. Los símbolos corresponden a datos experimentales, las líneas continuas corresponden al ajuste $p_a^* = p_A^* \cos(2\pi x/\lambda)$. Los mejores ajustes se lograron con $\lambda = 2.65 \pm 0.01$ m.

y disminuye la sensibilidad a la temperatura. Por eso el llamado anemómetro de hilo caliente es básicamente sensible a la magnitud de la velocidad, aunque presenta cierta sensibilidad a la temperatura y el llamado "anemómetro de hilo frío" es básicamente sensible a temperatura, presentando una pequeña sensibilidad a la magnitud de velocidad.

Si el anemómetro de hilo caliente fuera sensible a las oscilaciones de velocidad y de temperatura acústicas, con un solo sensor se podría medir el defasamiento entre las ondas de velocidad y de temperatura cerca de la pared y con ello estudiar indirectamente el criterio de Rayleigh (traduciendo los resultados teóricos al defasamiento entre las señales de temperatura y velocidad). Por ello se analizó la respuesta del anemómetro de hilo caliente en la onda acústica. Debido a que el anemómetro sólo es sensible a la magnitud de la velocidad, en una onda acústica en un fluido en reposo, la señal de salida en voltaje del anemómetro es el valor absoluto de la onda de velocidad. En la Fig. 4.10. se muestra esquemáticamente la oscilación de velocidad acústica y la señal esperada en la salida del anemómetro de hilo caliente debida a dicha oscilación, para una medición hipotética, (a) en el espacio temporal y (b) en el espacio de frecuencias. En ella se observa que las componentes frecuenciales de la señal de salida son la frecuencia nula y múltiplos pares de la frecuencia original f_r^* , *i.e.* $0, 2f_r^*, 4f_r^*, 6f_r^*, \dots$ en amplitud exponencialmente decreciente. Si el anemómetro de hilo caliente fuera sensible a las oscilaciones de temperatura presentaría también la componente de frecuencia f_r^* .

Para estudiar la magnitud de la contaminación de la lectura de velocidad por efectos térmicos, se generó dentro de la guía una onda acústica de la frecuencia de resonancia $f_r^* = 130.0 \pm 0.2$ Hz, con amplitud máxima de presión de $p_A^* = 90 \pm 5$ Pa. Se analizaron las señales del anemómetro para tres diferentes posiciones axiales del sensor dentro de la guía de ondas, en los tres casos el sensor se colocó en el centro de la sección transversal. En todos los experimentos reportados en esta tesis, el anemómetro de hilo caliente fue operado con un sobrecalentamiento de 0.8. En la Fig. 4.11. se muestra un ejemplo, correspondiente a la señal de salida del anemómetro en $x = 0.45\pi$, (a) en el dominio temporal y (b) en el dominio frecuencial. Se observa que las magnitudes correspondientes a los múltiplos pares de la frecuencia original presentan un patrón similar al esperado (ver Fig. 4.10.). Sin embargo, la frecuencia principal y sus múltiplos impares tienen magnitudes diferentes de cero. También se observa la presencia de ruido de altas frecuencias (15 a 20 kHz), aunque la magnitud de estas frecuencias es menor al 1% de la magnitud de la frecuencia $2f_r^*$. Dada la constancia de las principales componentes

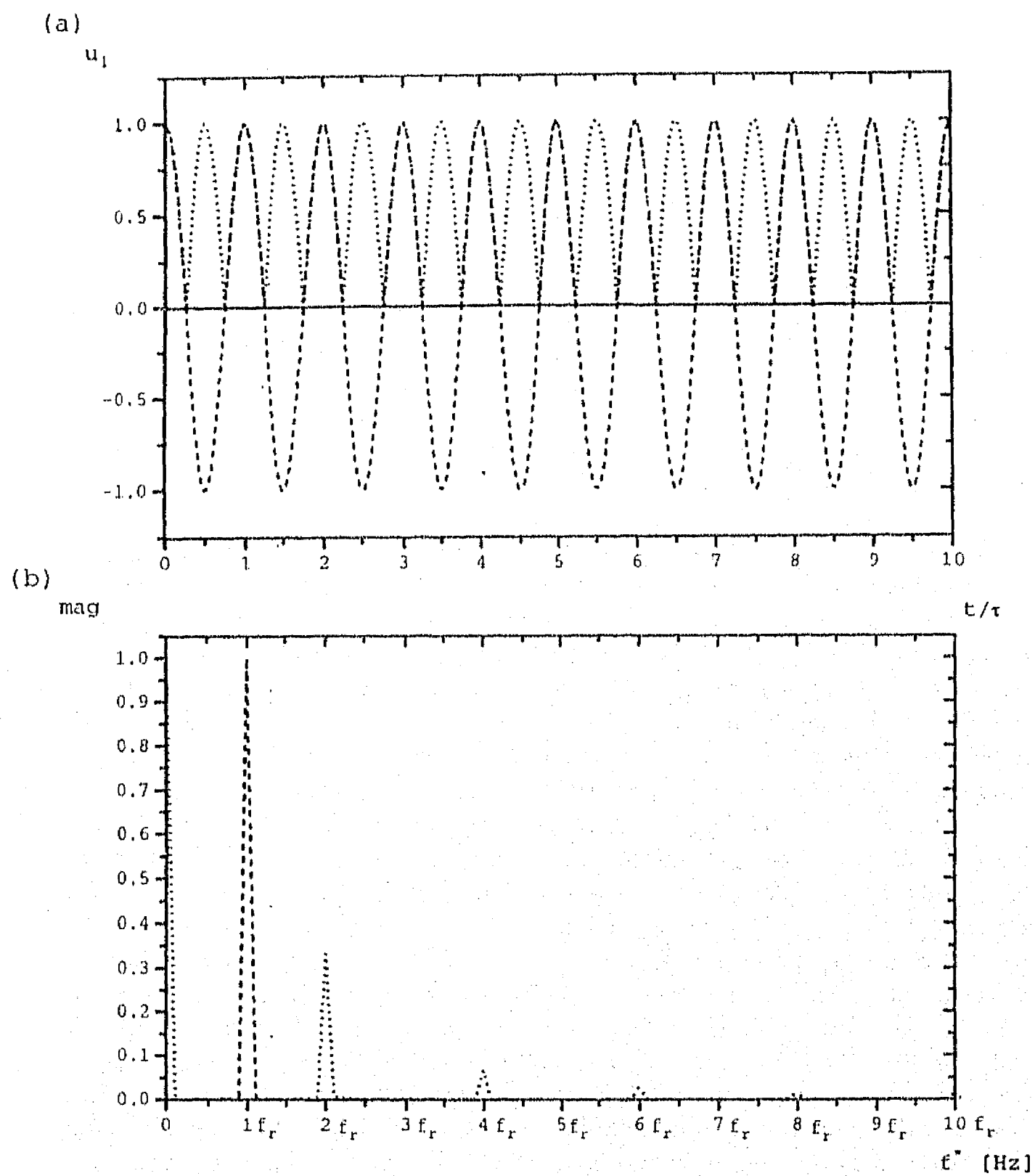


Fig. 4.10. ----- representa la oscilación de velocidad acústica y representa la señal esperada en la salida del anemómetro de hilo caliente debida a dicha oscilación. (a) en el espacio temporal y (b) en el espacio de frecuencias.

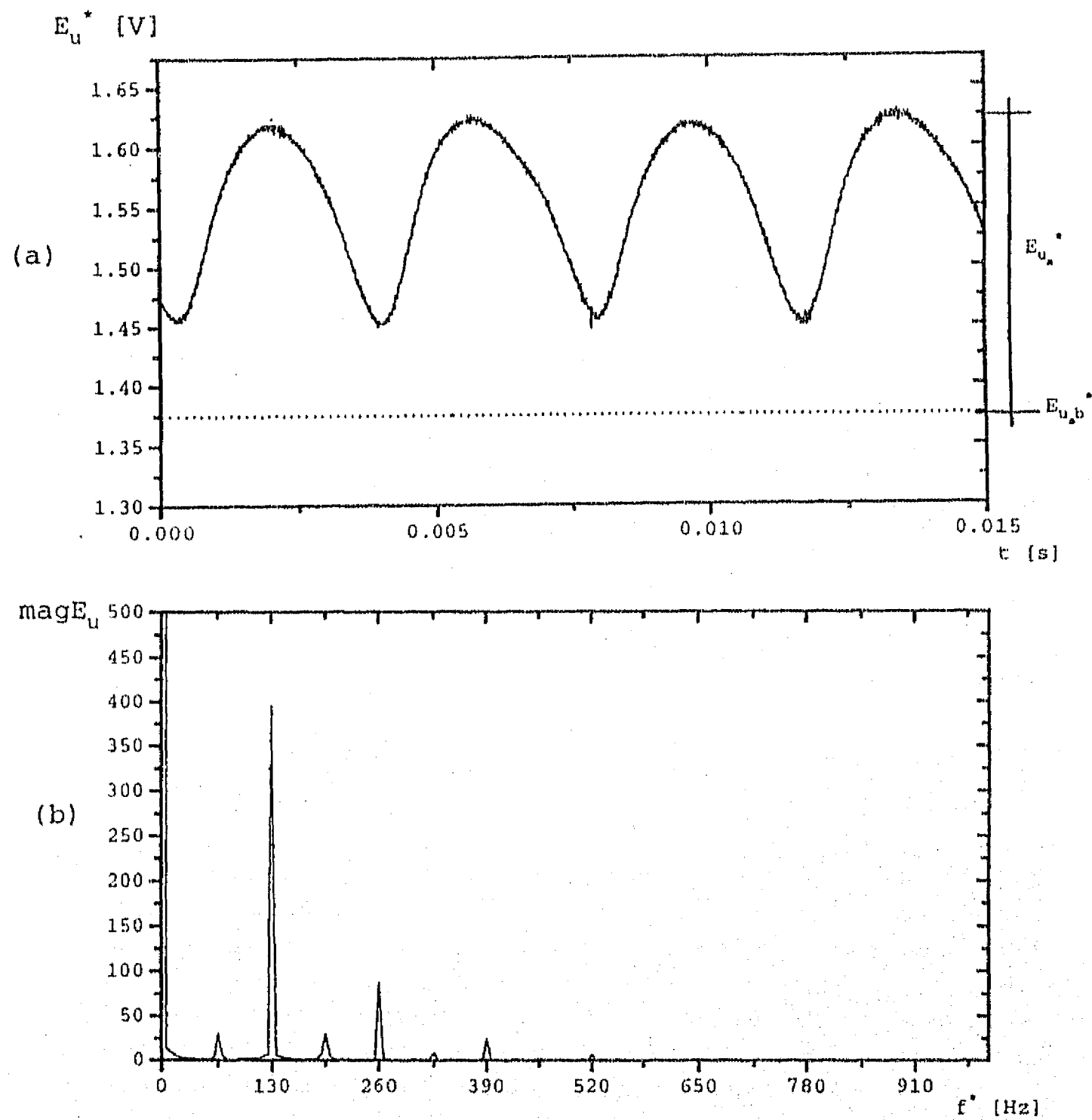


Fig. 4.11. (a) Señal temporal y (b) magnitud del espectro de frecuencias de la salida del anemómetro de hilo caliente en la onda acústica de frecuencia $f^* = 130$ Hz, con amplitud de la oscilación de presión en el antinodo de $p_A^* = 90$ Hz. El sensor fue colocado cerca del antinodo de velocidad en $x = 0.45\pi$. $E_{u_b}^*$ corresponde al voltaje de salida del anemómetro de hilo caliente, cuando la velocidad (media y perturbación) es cero.

de este ruido de alta frecuencia se sospecha se deba al circuito electrónico del anemómetro. En el espectro de frecuencias se midieron las magnitudes de la frecuencia f_r^* y de sus primeros múltiplos. Los resultados se encuentran en la Fig. 4.12. (las líneas que unen a los puntos se dibujaron exclusivamente para facilitar la localización de los mismos). Obsérvese que, como era de esperarse los múltiplos pares de f_r^* aumentan en magnitud al acercarse el sensor al antinodo de velocidad, confirmando que este instrumento es sensible a la amplitud de velocidad. Sin embargo la magnitud de f_r^* no aumenta al acercarse al antinodo de temperatura, además su desviación estándar es relativamente grande. Estos dos hechos indican que la componente de frecuencia f_r^* no se puede relacionar con la sensibilidad del sensor a la temperatura. Es posible que la presencia de la componente f_r^* se deba a vibraciones mecánicas transmitidas al sensor, presentes a pesar del cuidado puesto en reducir las fuentes de vibración al sensor.

De estas pruebas se concluye que el anemómetro de hilo caliente es capaz de medir oscilaciones acústicas de velocidad, pero no es sensible a las oscilaciones acústicas de temperatura, por lo que no es posible usar sólo este sensor en las mediciones de defasamiento.

4.5.5. Análisis de la señal del "anemómetro de hilo frío"

Como se señaló en la sección anterior, el llamado "anemómetro de hilo frío" es básicamente sensible a temperatura, aunque también puede presentar cierta sensibilidad a la magnitud de la velocidad. Para una descripción detallada de esta propiedad, ver el anexo 3. Ahora bien, si el "anemómetro de hilo frío" fuera sensible a las oscilaciones de velocidad y de temperatura acústica, con un solo sensor se podría medir el defasamiento entre las ondas de velocidad y de temperatura cerca de la pared y con ello estudiar indirectamente el criterio de Rayleigh. Con la finalidad de explorar esta posibilidad se analizó la señal de salida del "anemómetro de hilo frío". En todos los experimentos reportados en esta tesis, los "anemómetros de hilo frío" fueron operados con una corriente eléctrica de 0.2 mA. En la Fig. 4.13. se muestra un ejemplo de la señal de salida del "anemómetro de hilo frío" (DANTEC) usando un sensor DANTEC 55P11 con hilo de platino de $1\mu m$, (a) en el espacio temporal y (b) en el espacio de frecuencias, con el sensor colocado en $x = 0.24\pi$ y $y = 60$, en una onda acústica de la frecuencia de resonancia del sistema $f_r^* = 130.0 \pm 0.2$ Hz, con $p_A = 184 \pm 1$ Pa. En ellas se observa que la señal de salida de este "anemómetro" se encuentra contaminada con otras frecuencias,

mage

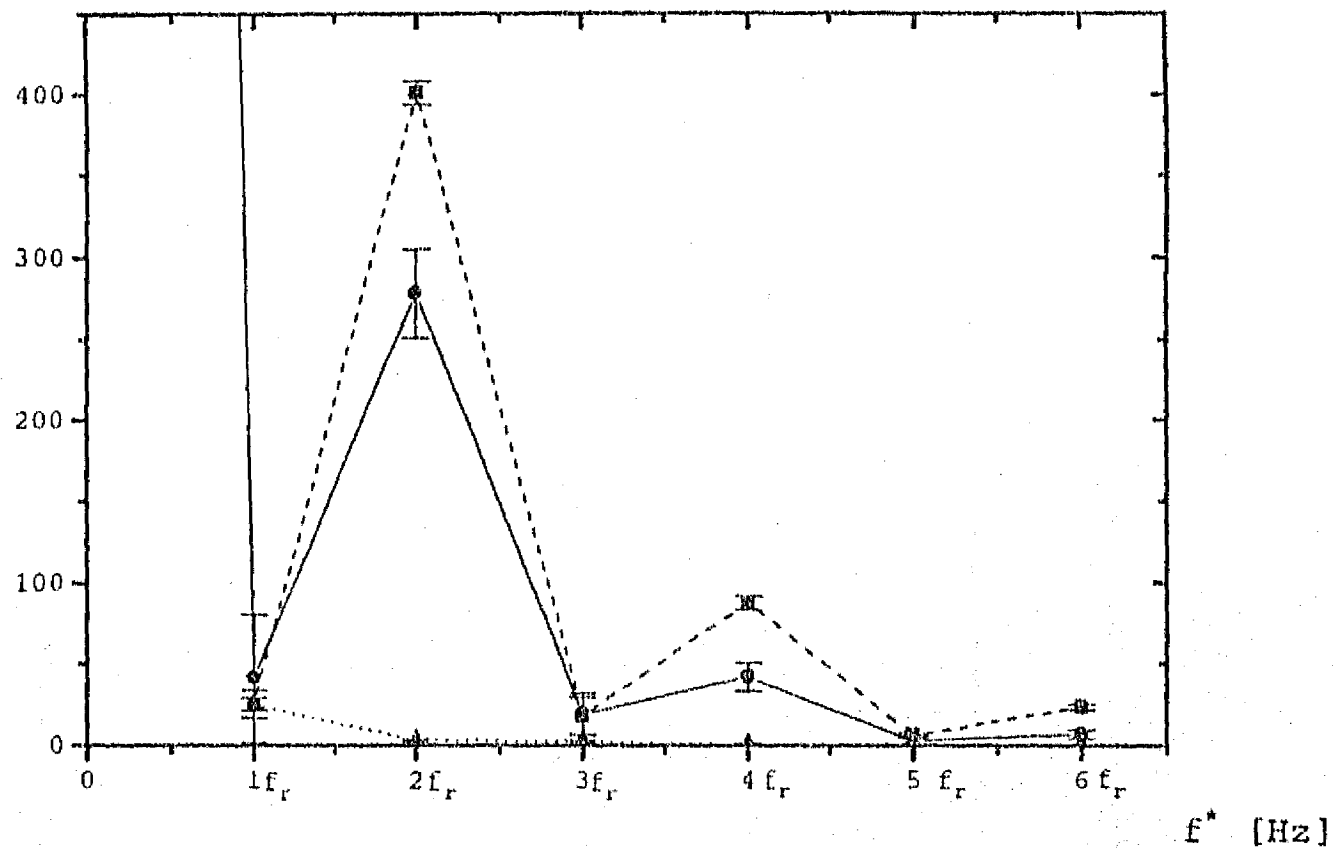


Fig. 4.12. Magnitud de la frecuencia de la onda acústica ($f_r^* = 130.0 \pm 0.2$ Hz) y sus múltiplos en el dominio espectral para la señal de salida del anemómetro de hilo caliente. Los símbolos corresponden a las tres diferentes posiciones del sensor: $\cdots\Delta\cdots$ $x_1 = 0.006\pi$, $-\bullet-$ $x_2 = 0.24\pi$ y $--\blacksquare--$ $x_3 = 0.45\pi$. Los múltiplos pares de la frecuencia fundamental $f=1$, están asociados a la medición de velocidad. Las líneas que unen los puntos se dibujaron exclusivamente para facilitar la localización de los mismos.

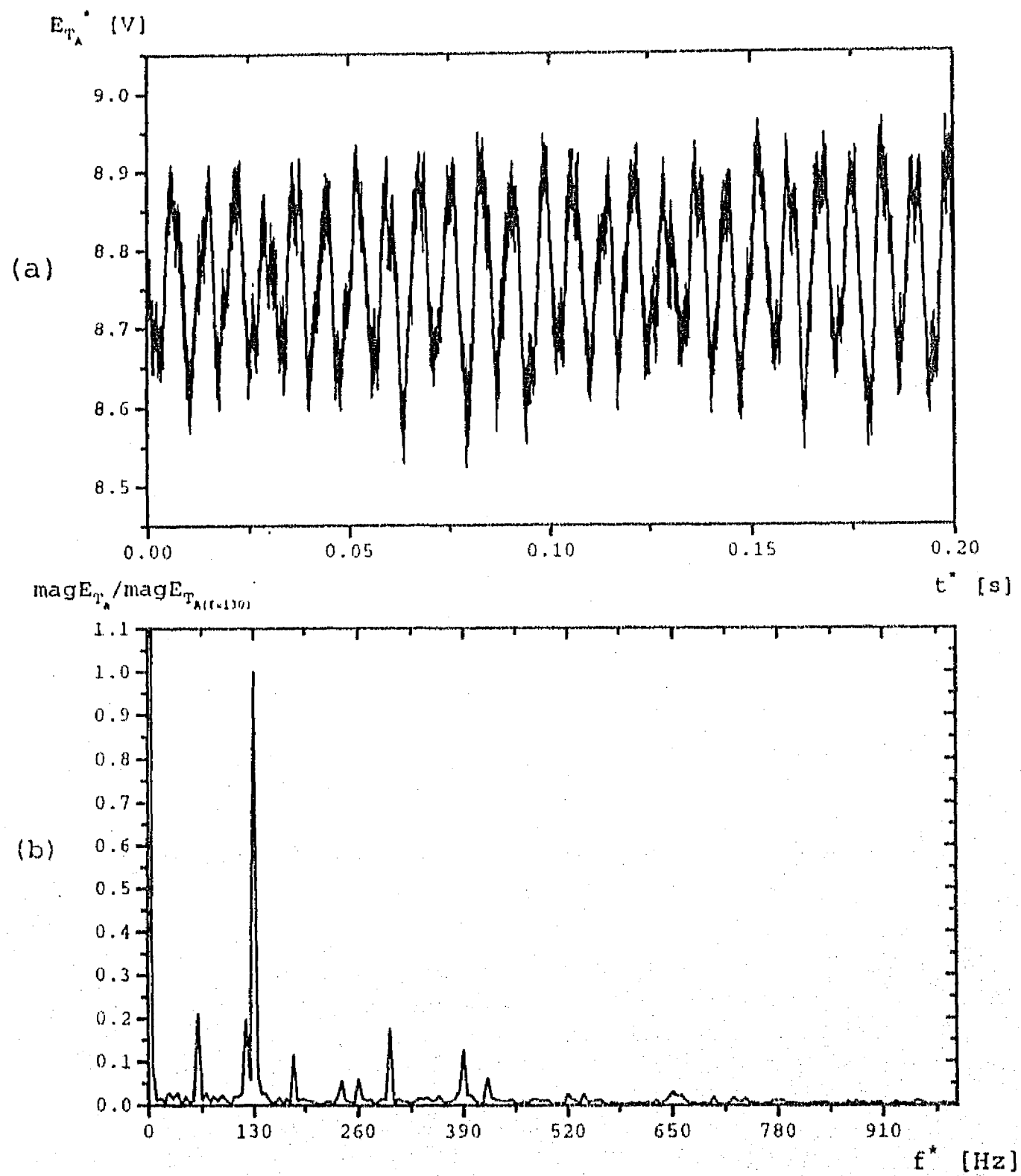


Fig. 4.13. (a) Señal temporal y (b) magnitud normalizada del espectro de frecuencias de la salida del "anemómetro de hilo frío" en la onda acústica de frecuencia $f_r^* = 130$ Hz, con amplitud de la oscilación de presión en el antinodo de $p_A^* = 184$ Pa, medida en $x = 0.24\pi$, donde $p_n^* = 135$ Pa. ($T_m^* = 22.3$ °C)

principalmente debidas a campos electromagnéticos (60 Hz y sus múltiplos), para presiones menores, la magnitud de estas frecuencias, son incluso mayores a la magnitud de la frecuencia de la onda acústica. El segundo armónico es mayor que en la correspondiente señal de presión (Fig. 4.8.), por lo que se analizaron las señales del "anemómetro de hilo frío" al variar la posición axial del sensor y estudiar si esta componente se debía o no a sensibilidad del instrumento a las oscilaciones de velocidad. Los resultados se encuentran en la Fig. 4.14. En ella se observa que la magnitud de f_r^* aumenta al acercarse al antinodo de temperatura, este resultado confirma que la componente f_r^* de la señal, corresponde efectivamente a la oscilación de temperatura. Es interesante observar que la componente $2f_r^*$ aumenta al acercarse al antinodo de velocidad, abriendo la posibilidad a que esta componente se deba al menos en parte a la sensibilidad del sensor a la velocidad. Sin embargo, no se encontró consistencia en la diferencia de fase entre f_r^* y $2f_r^*$. Esto, debido a que la componente $2f_r^*$ puede ser la suma del segundo armónico de la componente asociada a la temperatura y de la componente de frecuencia asociada a la velocidad, con lo cual la fase de la componente $2f_r^*$ es una combinación lineal de ambas.

Por lo tanto, el "anemómetro de hilo frío" es sensible a la oscilación acústica de temperatura, pero no es posible medir el defasamiento usando sólo este sensor.

4.5.6. Calibración del "anemómetro de hilo frío" en una onda acústica

Para calibrar la respuesta del "anemómetro de hilo frío" a las oscilaciones de temperatura en la onda acústica estacionaria, se usó como referencia la amplitud de la oscilación de temperatura calculada a partir de la amplitud de la oscilación de presión. En la sección 3 del anexo 1 se encuentra una breve descripción de las características de la onda acústica estacionaria y las relaciones entre las variables involucradas. El micrófono se colocó en la tapa inferior de la guía de ondas, el sensor del "anemómetro de hilo frío" se colocó en el centro de la sección transversal de la guía, ambos en la zona axial central ($x = 0.24\pi$). Observando con el microscopio, se tuvo mucho cuidado en que el hilo quedara perpendicular al eje de la guía de ondas. Se desarrolló un programa de adquisición y análisis de los datos en el ambiente *Vecetest*. Con él se adquirieron 10^4 datos por instrumento, a una velocidad de muestreo de 10^5 Hz. Esto permite el análisis de Fourier de cada señal, hasta una frecuencia de 25000 Hz, con una resolución de ± 2.5 Hz. El programa filtra las señales en el espacio de frecuencias, dejando pasar sólo la

magE

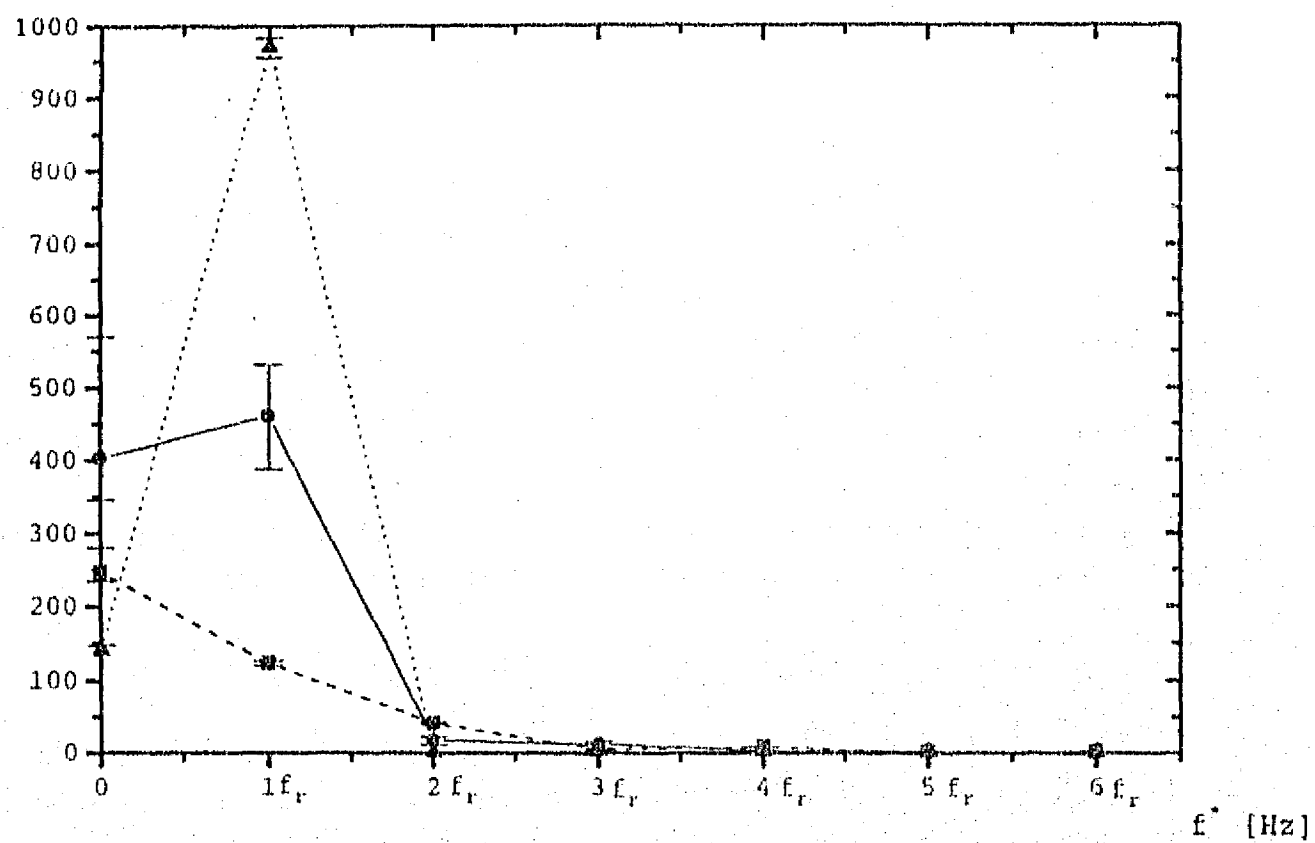


Fig. 4.14. Magnitud de la frecuencia de la onda acústica ($f_r = 130 \pm 0.2$ Hz) y sus múltiplos en el dominio espectral de la señal de salida del "anemómetro de hilo frío". Los símbolos corresponden a tres diferentes posiciones del sensor: $\dots\Delta\dots$ $x_1 = 0.006\pi$, $-\bullet-$ $x_2 = 0.24\pi$ y $-\square-$ $x_3 = 0.45\pi$. La frecuencia fundamental $f = 1$, está asociada a la medición de temperatura. Las líneas que unen los puntos se dibujaron exclusivamente para facilitar la localización de los mismos.

componente 130 ± 2.5 Hz y calcula las amplitudes de las señales filtrada tanto del micrófono E_{p_a} como del anemómetro E_{T_a} . Tomando en cuenta la sensibilidad del micrófono y las ganancias del amplificador utilizados, calcula la amplitud de la oscilación de presión para el punto de medición p_a^* . Finalmente, usando la relación $T_{aa}^* = \beta_m T_m^* p_a^* / (\rho_m C_p)$ (ecuación A1.27.), el programa calcula la amplitud de la oscilación de temperatura para el punto de medición $T_{a\text{ calc}}^*$.

Se hicieron pruebas con los dos "anemómetros de hilo frío" el TSI y el DANTEC, la respuesta de ambos anemómetros a las oscilaciones de temperatura en la onda acústica es prácticamente lineal. El "anemómetro" DANTEC es más fácil de operar con máxima sensibilidad y variación de la temperatura media, además que la contaminación por campos electromagnéticos es menor, por lo que en lo sucesivo, se empleó este "anemómetro", aunque hay que tomar en cuenta en los estudios de fase, que este instrumento disminuye el voltaje de salida al aumentar la temperatura. Pruebas más detalladas con este anemómetro mostraron una pequeña variación en la respuesta al variar la intensidad de la onda acústica, así como una mayor dispersión en los resultados a menor amplitud de la oscilación de temperatura. En la Fig. 4.15. se encuentra graficada la respuesta del "anemómetro de hilo frío" usando un sensor DANTEC P5531 con hilo de platino de $1 \mu\text{m}$ de diámetro y resistencia $R_{20} = 56\Omega$, esta gráfica fue obtenida al variar la intensidad de la onda acústica. En ella se observa que los datos correspondientes a amplitudes del voltaje de salida $E_{T_a}^* < 10$ mV ($T_a^* < 0.012$ °C) presentan gran dispersión. Se calibraron los dos "anemómetros de hilo frío" en la forma convencional para la medición de la temperatura media. En el rango de 0 a 120 °C, se verificó la linealidad de la respuesta señalada por los fabricantes (TSI y DANTEC).

4.5.7. Calibración del anemómetro de hilo caliente en una onda acústica

El método empleado en la calibración del anemómetro de velocidad se desarrolló con base en el trabajo de Levedeva y Dragan (1991) (ver el anexo 3). Para calibrar la respuesta del anemómetro de hilo caliente a las oscilaciones de velocidad en la onda acústica estacionaria, se usó como referencia la amplitud de la oscilación de velocidad calculada a partir de la amplitud de la oscilación de presión (ver el anexo 1).

Para tener la mejor resolución posible, el micrófono se colocó en la tapa inferior de la guía de ondas, cerca del antinodo de presión ($x_2 = 0.01\pi$), mientras que el sensor del anemómetro de hilo caliente se colocó en la parte central de la guía,

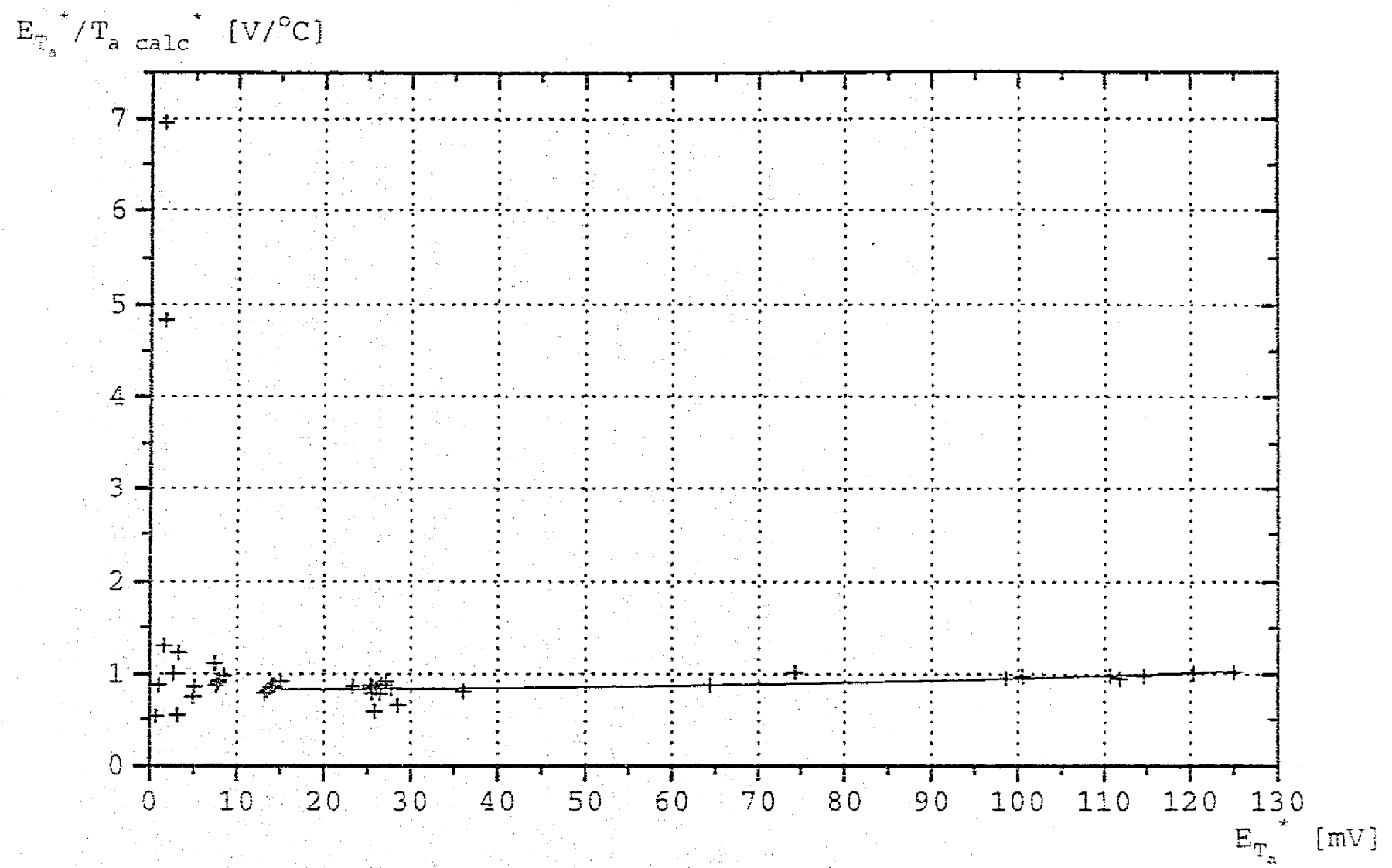


Fig. 4.15. Respuesta del "anemómetro de hilo frío" al variar la intensidad de la onda acústica. La magnitud de la insertidumbre asociada a cada uno de los datos experimentales no es apreciable. El ajuste por mínimos cuadrados determina la curva de calibración

$$E_{T_a}^+ / T_a \text{ calc}^+ = (0.83 \pm 0.05) + (0.000 \pm 0.002) V_{T_a} + (0.00001 \pm 0.00002) V_{T_a}^2$$

cerca del antinodo de velocidad ($x_1 = 0.45\pi$), con el hilo perpendicular a la guía de ondas. En el ambiente *Veetest*, se desarrolló un programa de adquisición y análisis de los datos. Con él se adquirieron 10^4 datos por instrumento, a una velocidad de muestreo de 10^5 Hz. El programa incorpora un filtro pasa bajas en el espacio de frecuencias ($LP = 2000$ Hz), a las señales del micrófono y del anemómetro. Tomando un promedio de los valores absolutos de los puntos extremos locales, calcula la amplitud de la señal filtrada del micrófono V_{pa} . Tomando en cuenta la sensibilidad del micrófono y las ganancias del amplificador utilizados, calcula la amplitud de la oscilación de presión p_a^* . Finalmente, el programa calcula la amplitud de la oscilación de velocidad u_{aa}^* usando las siguientes relaciones entre las amplitudes de presión y velocidad en una onda acústica estacionaria adiabática que toman en cuenta la posición del anemómetro ($x_{(1)}$) y la posición del micrófono ($x_{(2)}$)

$$u_{aa}^*(x_{(1)}) = \frac{p_A^*}{\rho_m c} \sin(x_{(1)}) \quad p_A^* = \frac{p_a^*(x_{(2)})}{\cos(x_{(2)})} \quad (4.1)$$

u_{aa}^* y p_a^* son respectivamente las amplitudes de las oscilaciones de velocidad y presión en el correspondiente punto de medición, p_A^* es la amplitud máxima de la oscilación de presión.

Para determinar la amplitud de voltaje de la señal de salida del anemómetro E_{u_A} , se obtuvo el promedio de los máximos locales y se le restó el valor del voltaje base. Este voltaje es el promedio del voltaje de salida del anemómetro de hilo caliente en ausencia de onda acústica (ver la Fig. 4.11.). En la Fig. 4.16. se encuentra la curva de calibración obtenida al variar la intensidad de la onda acústica. En ella se observa que en el rango estudiado, la respuesta de anemómetro de hilo caliente a la velocidad acústica es lineal.

4.5.8. Efecto del gradiente axial de la temperatura media en la placa sobre las características globales de la onda de presión

Ya que la zona en que se aplica el gradiente axial de temperatura es relativamente pequeña y sólo se aplica en una placa empotrada en la pared, se esperaba que la onda de presión no sufriera cambios globales debido a la existencia del gradiente axial de temperatura en la placa. Para verificar esto, primero se determinó la frecuencia de resonancia del sistema al variar el gradiente axial de temperatura en la placa (modificando el voltaje a la resistencia de calentamiento). La frecuencia

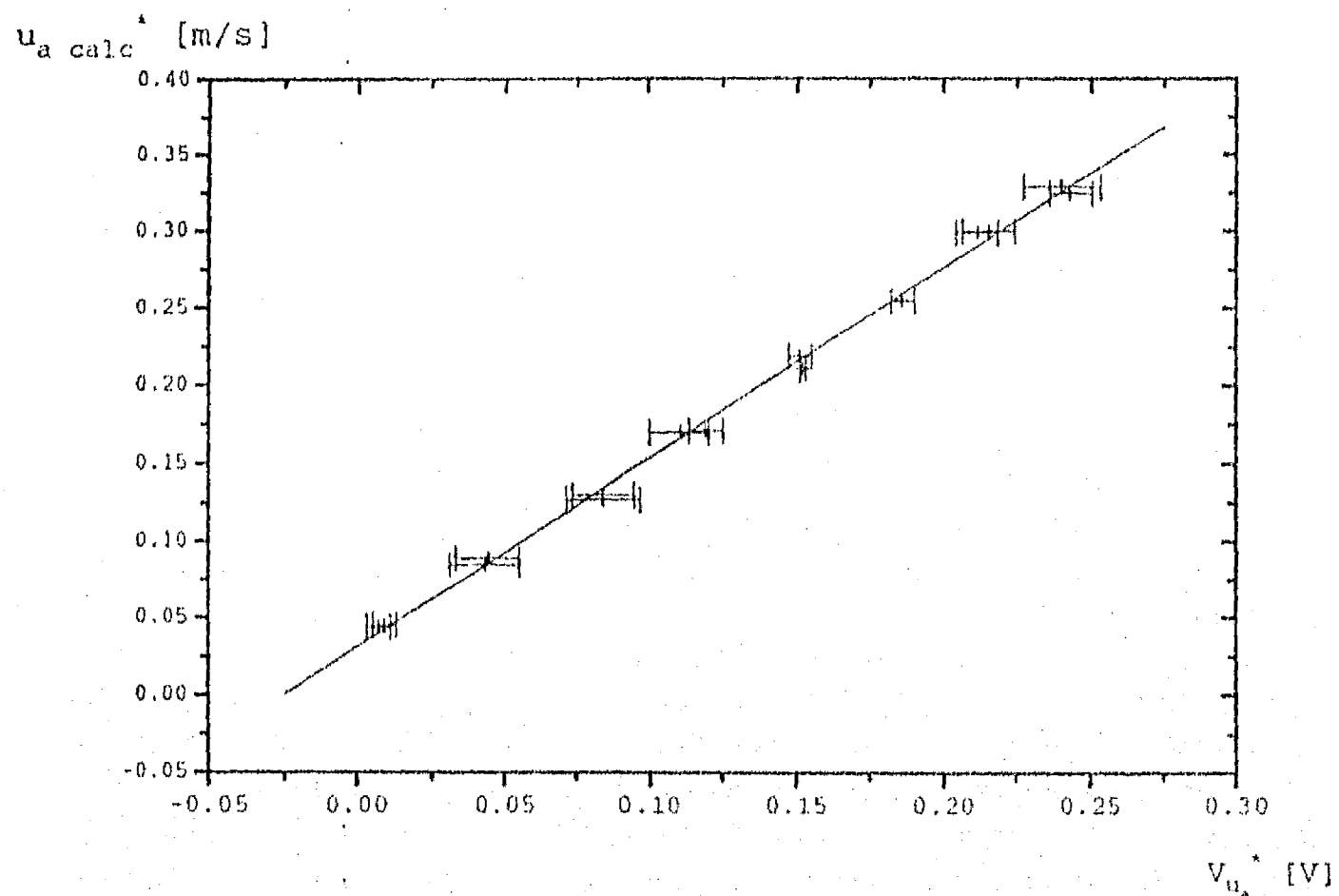


Fig. 4.16. Curva de calibración del anemómetro de hilo caliente en una onda acústica de frecuencia $f^* = 130$ Hz.

La línea — $u_a^* = (0.031 \pm 0.003) + (1.23 \pm 0.02) V_{u_a}^*$

se obtuvo por un ajuste de mínimos cuadrados a los datos experimentales. Se reporta la desviación estimada en el cálculo de la amplitud de voltaje $V_{u_a}^*$, la desviación en la amplitud de la velocidad calculada u_a^* es despreciable.

de resonancia del sistema $f_r^* = 130 \pm 2$ Hz no se modificó en el rango del gradiente analizado (∇T_m^* entre 0 y $50^\circ\text{C}/\text{cm}$). Los perfiles de la amplitud de la onda de presión a lo largo de la guía al variar el gradiente axial de temperatura en la placa fueron iguales, dentro de la incertidumbre reportada, a los obtenidos sin gradiente de temperatura (sección 4.5.3).

La comprobación de que la presencia del gradiente axial de temperatura en la placa no produce cambios globales a la onda acústica, indica que puede usarse el primer modelo teórico, en este caso, en ondas estacionarias (sección 3.7.2.) para modelar el fenómeno.

4.6. Medición de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión

En una onda unidimensional, la oscilación de presión acústica no depende de la posición transversal. Además, en una onda estacionaria, la oscilación de presión se lleva a cabo simultáneamente en todo punto, aunque con distinta amplitud (ver sección 2 del anexo 1). De las dimensiones de la guía de onda (ver sección 4.2.) se estima que la onda acústica dentro de ella es unidimensional, además de los resultados del perfil axial de la amplitud de la onda de presión (sección 4.5.3.) se puede afirmar que dentro de la guía se tiene una buena aproximación de una onda estacionaria. Por lo anterior, es posible calcular la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión, a través de la medición de la presión acústica con un micrófono colocado en cualquier posición transversal (en este caso, en la pared inferior) en una posición axial determinada y de la medición de la temperatura con un "anemómetro de hilo frío", colocado de preferencia en la misma posición axial, para evitar desviaciones debido a la imperfección de la onda estacionaria experimental (ver sección 2 del anexo 1). En las mediciones reportadas en las siguientes secciones, ambos sensores se colocaron en la misma posición axial correspondiente al centro de la placa con gradiente de temperatura ($x = 0.24\pi$).

4.6.1. Programas de adquisición y análisis de los datos

Los programas de adquisición y análisis de los datos de temperatura y la presión se desarrollaron en el ambiente *Vectest*. El esquema general y el panel de control del programa de adquisición se muestra en las Fig. 4.17. El programa cuenta con cuatro subrutinas, la primera subrutina guarda en un archivo las condiciones

113

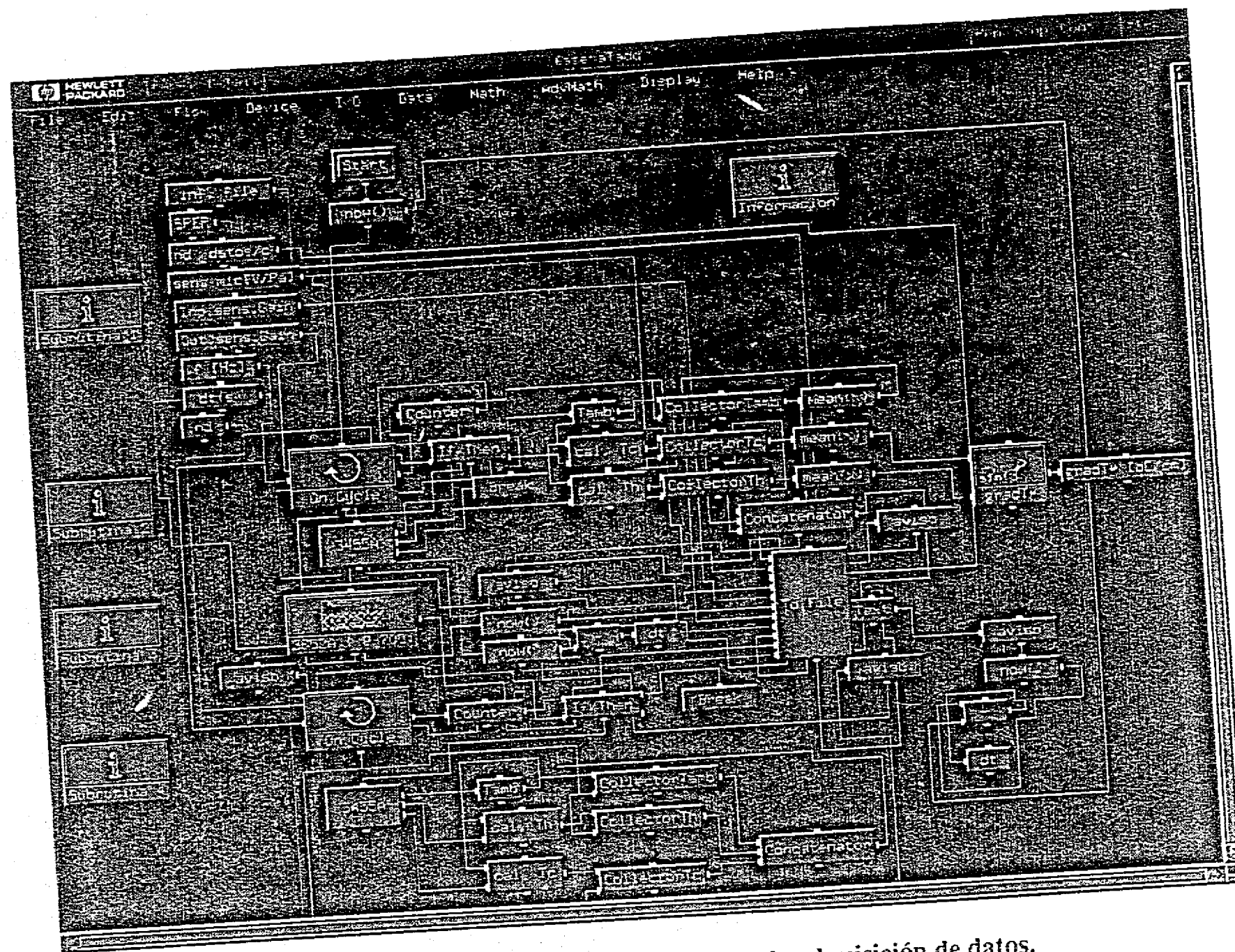


Fig. 4.17.a) Esquema general del programa de adquisición de datos.

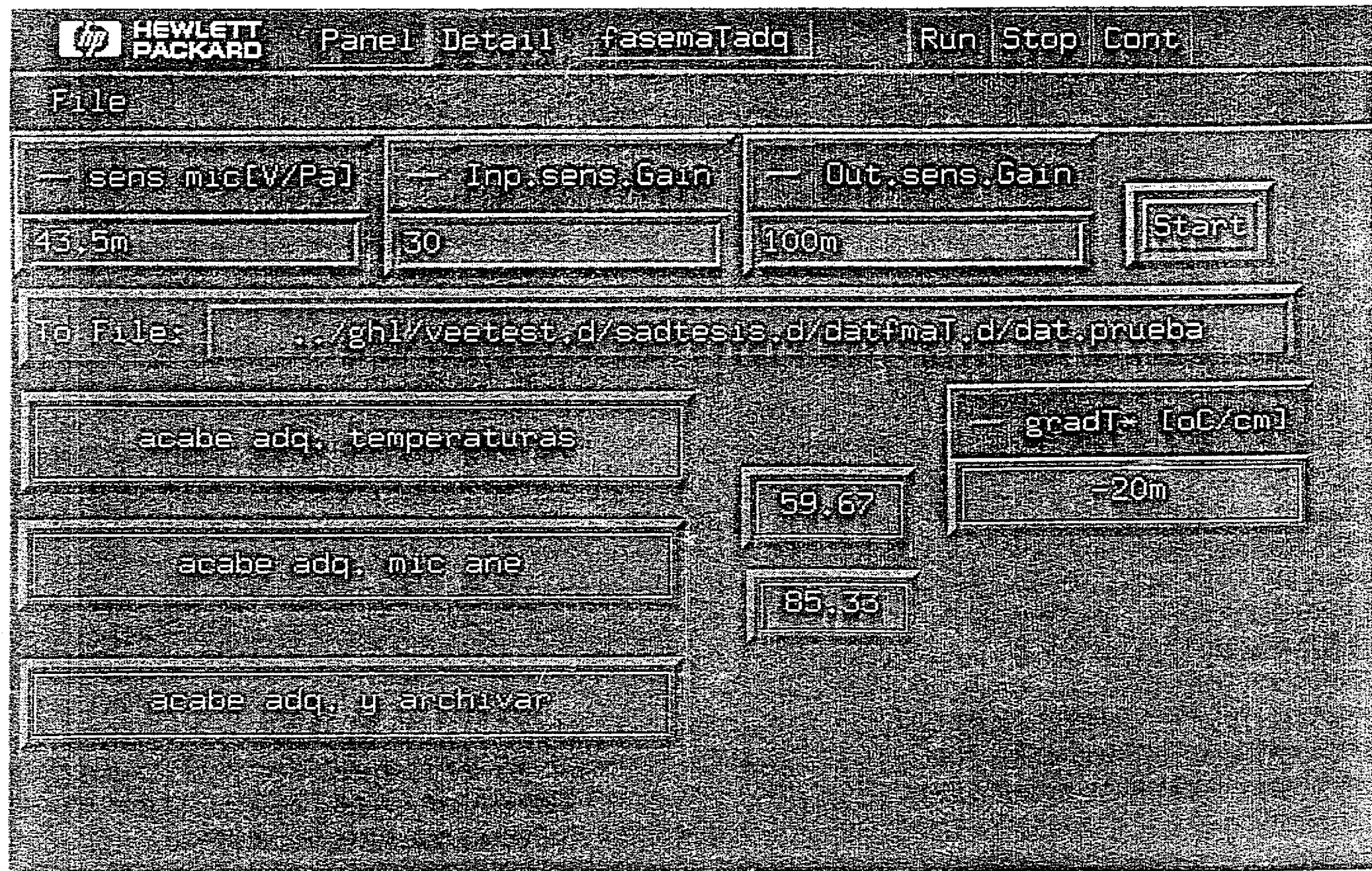


Fig. 4.17.b) Panel de control del programa de adquisición de datos.

de adquisición, tales como la frecuencia, la sensibilidad del micrófono y las ganancias del amplificador. La segunda controla la adquisición de datos de temperatura de la tarjeta de conexiones y la temperatura en dos puntos de la placa, se registran 5 datos de cada variable. La tercera controla la adquisición de los voltajes de salida del micrófono y "anemómetro de hilo frío". Se tomaron 10^4 datos por instrumento, con una velocidad de muestreo de 10^5 Hz. Esto permite el análisis de Fourier de cada señal, hasta una frecuencia de 25000 Hz, con una resolución de ± 2.5 Hz. La cuarta subrutina toma una segunda etapa de lectura de la temperatura en la tarjeta de conexiones y en la placa (5 datos de cada variable).

El programa de análisis cuenta con seis subrutinas, en las Fig. 4.18. se muestran el esquema general y el panel de control de este programa. La primera subrutina lee de un archivo los datos adquiridos por el programa anterior. La segunda calcula y despliega los valores de las temperaturas de la tarjeta de conexiones, de los dos puntos de la placa y el gradiente y calcula los promedios y desviaciones estándar de estas variables. Además calcula la temperatura media y el gradiente adimensional en la placa, para lo cual incluye el cálculo de propiedades del aire dependiendo de la temperatura media. La tercera subrutina separa las señales correspondientes al micrófono y al anemómetro y despliega las señales originales de voltaje del micrófono y del anemómetro en el espacio temporal y en el espacio de frecuencias a través de la Transformada Rápida de Fourier, mostrando la magnitud y la fase de las componentes de frecuencia. Debido a que el voltaje de salida del "anemómetro de hilo frío" aumenta al disminuir la temperatura, el análisis de la fase se lleva a cabo con $-E_{T_a}^*$ que corresponde a la fase de la oscilación de temperatura. Se calcula el promedio de la señal de voltaje del "anemómetro" $E_{T_m}^*$, traduciendo su valor a temperatura media del aire T_m^* . La cuarta subrutina filtra las señales en el espacio de frecuencias, dejando pasar sólo la componente 130 ± 2.5 Hz. La quinta subrutina calcula las amplitudes de las señales filtrada tanto del micrófono $E_{p_a}^*$ como del "anemómetro" $E_{T_a}^*$, calcula la amplitud de la oscilación de presión p_a^* y la amplitud de la oscilación de temperatura correspondiente T_a^{*calc} . Esta subrutina también despliega las señales filtradas y normalizadas. La sexta subrutina calcula el valor absoluto de la diferencia de fase entre las oscilaciones de presión y temperatura (α), usando la siguiente relación:

$$|\alpha_{exp}| = \arccos \left(\frac{2}{E_{p_a}^* E_{T_a}^* \Delta t^*} \int_0^{\Delta t^*} E_p^*(t) E_T^*(t) dt^* \right) \quad (4.2)$$

donde Δt^* es el intervalo de tiempo de muestreo.

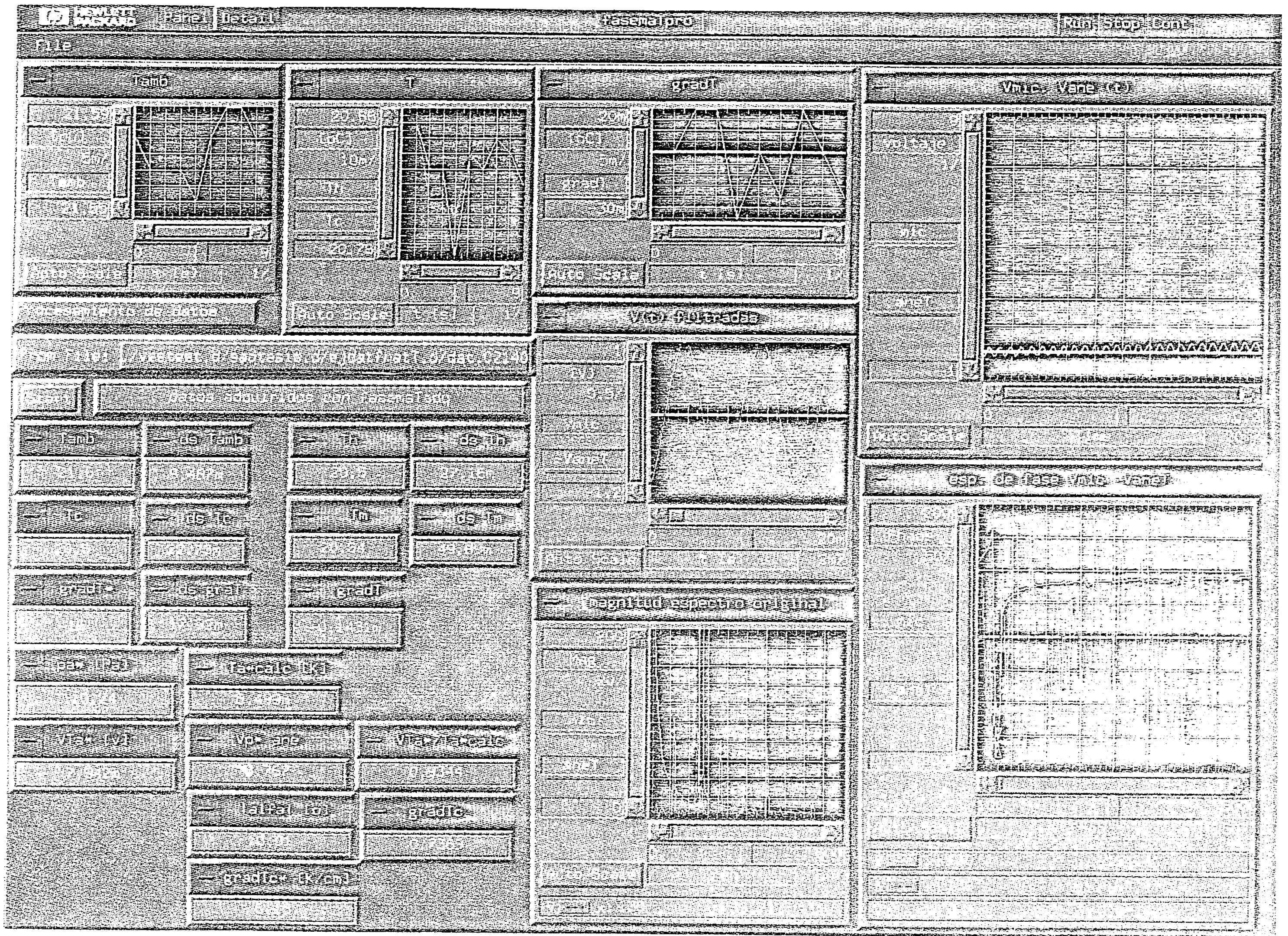


Fig. 4.18.b) Panel de control del programa de procesamiento de datos.

La diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y presión (α_{exp}) también puede calcularse de la diferencia entre la fase de la componente de frecuencia 130 Hz de la señal de presión y la correspondiente fase de la señal de temperatura. Es importante señalar que los resultados en ambos casos coincidieron en todos los casos, con un error máximo de $\pm 0.1^\circ$. Se un valor positivo de la diferencia de fase significa un retraso de la temperatura con respecto a la presión.

4.6.2. Calibración de la diferencia de fase entre las oscilaciones de presión y temperatura

Lejos de las paredes y sin gradiente axial de temperatura media, la onda acústica puede considerarse como adiabática y la diferencia de fase entre las oscilaciones de presión y temperatura es cero. Sin embargo, experimentalmente en este caso se registra una diferencia de fase entre las señales de salida del micrófono y del "anemómetro de hilo frío", que se denominará diferencia de fase base. Esta diferencia de fase se debe a la respuesta del sensor empleado, al defasamiento entre la entrada y la salida de cada una de estos instrumentos debida a los circuitos electrónicos; además del retraso en la toma de datos de temperatura con respecto a la toma de datos de presión (10^{-5} s equivalente a un defasamiento de 0.003π). Para medir esta diferencia de fase base (α_b) se colocó el sensor del "anemómetro de hilo frío" en el centro de la guía de ondas, lejos de las paredes, sin gradiente de temperatura en la pared y se varió la intensidad de la onda acústica producida por la bocina. Esto significa que se variaron tanto la amplitud de las oscilaciones de presión como la amplitud de las oscilaciones de temperatura. Se encontró que el valor de α_b depende de la intensidad de la onda acústica. Se consideró que la respuesta del micrófono es menos susceptible a la variación de presión que la respuesta del "anemómetro de hilo frío" a la variación de temperatura y sólo se consideró la variación de α_b con respecto al cambio en la amplitud de la salida en voltaje del "anemómetro de hilo frío". Esta consideración puede introducir un error en los casos en que las oscilaciones de presión y de temperatura no guarden la misma proporción que en una onda adiabática, como sucede cerca de la pared y con gradiente axial de temperatura distinto de cero. En la Fig. 4.19. se encuentra graficado α_b para un sensor DANTEC P5531 con hilo de platino de $1 \mu m$ y $R_{20} = 56\Omega$ como función de la amplitud del voltaje de salida del "anemómetro" $E_{T_a}^*$. Nótese que la dispersión de los datos aumenta al disminuir la amplitud del

voltaje. Debido a la gran incertidumbre en los valores de α_b y de la sensibilidad del "anemómetro" (Fig. 4.15.) para bajos voltajes, se determinó no tomar en cuenta los resultados experimentales con $V_{T_a}^* < 10$ mV. Se ajustó una curva a los datos con $V_{T_a}^* > 10$ mV, obteniéndose el valor de α_{exp} en función de $E_{T_a}^*$. La correspondiente función para cada sensor fue utilizada, en los experimentos que se reportan en el resto de esta tesis, para calcular la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y presión (α). Esto se hizo restando la diferencia de fase base a la diferencia de fase medida experimentalmente $\alpha = \alpha_{exp} - \alpha_b$.

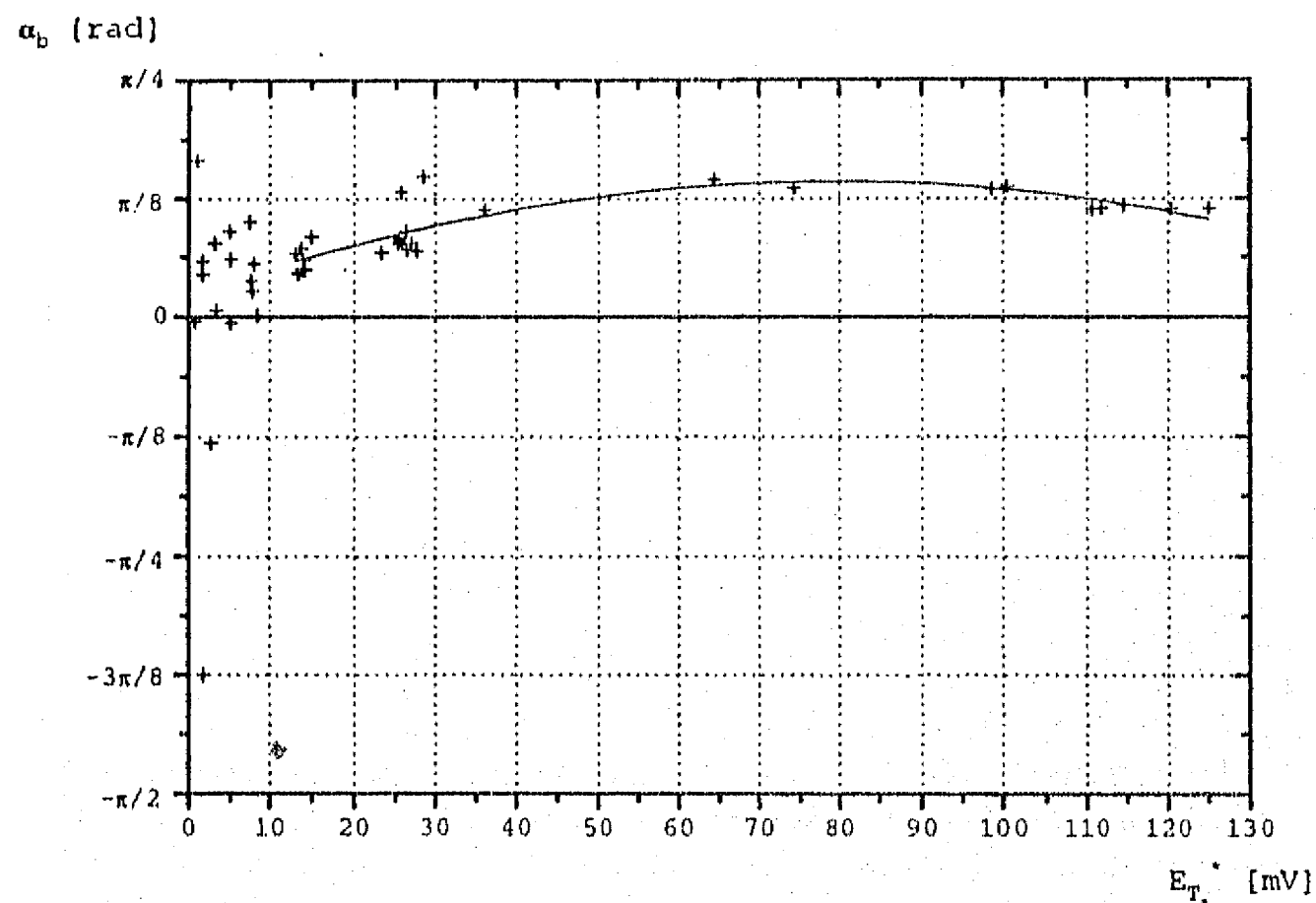


Fig. 4.19. Gráfica del defasamiento base (α_b) entre la salida del "anemómetro de hilo frío" y el micrófono en una onda acústica de frecuencia 130 Hz al variar la intensidad de la onda. La magnitud de la incertidumbre asociada a cada uno de los datos experimentales no es apreciable. Los datos con $E_{T_a}^* < 10$ mV presentan gran dispersión, por lo que sólo se toman datos con $E_{T_a}^* > 10$ mV.

El ajuste por mínimos cuadrados determina la curva:

$$\alpha_b = (0.02\pi \pm 0.01\pi) + (0.003\pi \pm 0.001\pi) E_{T_a}^* + (-0.000017\pi \pm 0.000006\pi) E_{T_a}^{*2}$$

4.7. Resultados y análisis

Como se mencionó en la sección 4.5.8, el hecho de que la presencia del gradiente axial de temperatura en la placa no produce cambios globales en la onda acústica estacionaria en el sistema experimental indica que puede usarse el primer modelo teórico (sección 3.7.2.) es el más adecuado para describir el fenómeno de interés.

El valor crítico del gradiente axial de temperatura media adimensional en la placa, que determina si la onda es atenuada o es excitada, depende de la temperatura media a través de las propiedades del fluido (ecuación 3.45.). Considerando el valor de la temperatura media que se obtiene experimentalmente cuando el gradiente es cercano al crítico ($T_m^* = 30 \pm 1$ °C), el gradiente crítico adimensional teórico, empleando el primer modelo, tiene un valor $\nabla T_{mc} = -0.737 \pm 0.001$. Recuérdese que el signo negativo proviene de la definición del origen de la coordenada axial, significando que la zona de calentamiento se encuentra más cerca del antinodo de presión que la zona fría. Los gradientes mayores (aunque menores en valor absoluto) a este valor crítico corresponden a la condición de atenuación de la onda, mientras que los gradientes adimensionales menores (mayores en valor absoluto) al crítico corresponden a excitación de la onda.

4.7.1. Comprobación experimental de la explicación de Rayleigh

De acuerdo al primer modelo teórico, en las ondas estacionarias existe una correspondencia biunívoca entre el criterio de Rayleigh expresado a través de la diferencia de fase entre la entrada de calor al fluido y la oscilación de presión y la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y presión (sección 3.7.2.). De tal manera que en condiciones de atenuación de la onda acústica ($\nabla T_m > \nabla T_{mc}$) el $\lim_{y \rightarrow 0} |\alpha| < \pi/2$ y en condiciones de excitación ($\nabla T_m < \nabla T_{mc}$) el $\lim_{y \rightarrow 0} |\alpha| > \pi/2$.

Experimentalmente se midió la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y presión (α) dentro de la capa límite térmica, para siete diferentes valores del gradiente axial de temperatura media en la placa.

En la Fig. 4.20. se encuentra graficada la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y presión² en función de la distancia a la placa, para

²Los valores de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y presión (α) fueron obtenidos mediante la relación $\alpha = \alpha_{exp} - \alpha_b$, con $\alpha_b = 0.02\pi \pm 0.01\pi + (0.003\pi \pm 0.001\pi)E_{T_m}^* + (-0.000017\pi \pm 0.000006\pi)E_{T_m}^{*2}$ (ver sección 4.6.2).

$\nabla T_m = 0.00 \pm 0.01$. Del ajuste con un polinomio de orden 2 a los datos experimentales se obtiene $\lim_{y \rightarrow 0} \alpha = -0.09\pi \pm 0.01\pi$. La gráfica correspondiente al $\nabla T_m = -0.26 \pm 0.01$ se muestra en la Fig. 4.21., el ajuste de los datos experimentales con un polinomio de orden 3 da como resultado $\lim_{y \rightarrow 0} \alpha = -0.25\pi \pm 0.02\pi$. Estos dos casos corresponden a la condición de atenuación de la onda acústica y en ellos se confirma que el $\lim_{y \rightarrow 0} |\alpha| < \pi/2$.

Para $\nabla T_m = -0.54 \pm 0.3$ y $\nabla T_m = -0.70 \pm 0.03$ se obtuvieron los datos mostrados en las Fig. 4.22. y 4.23. respectivamente. En estos casos, no fue posible obtener datos confiables en las regiones cercanas a la placa, pues la amplitud de la señal es menor a 10 mV (correspondiente a 0.012 °C), que es el umbral de confiabilidad. Ver sección 4.6.2. Datos adicionales tuvieron que desecharse ya que no eran confiables ($E_{T_n}^* < 10$ mV), esto imposibilita calcular el correspondiente límite. Es importante señalar que el $\nabla T_m = -0.70$, está cerca del valor crítico, en este caso se obtiene una dispersión de los datos (0.5π) mucho mayor a la incertidumbre experimental (0.06π), lo que puede indicar un cambio en la estabilidad del sistema por encontrarse, en la zona de estudio, cerca de las condiciones críticas entre atenuación y excitación de la onda acústica.

La gráfica correspondiente al $\nabla T_m = -1.0 \pm 0.1$ se muestra en la Fig. 4.24., el mejor ajuste de los datos experimentales con $0 < y < 1.0$ es un polinomio de orden 3, a través del cual se calcula $\lim_{y \rightarrow 0} \alpha = 0.87\pi \pm 0.07\pi$. Sin embargo, observando la gráfica, se encuentra que para los datos con $0 < y < 0.4$ puede ser mejor un ajuste lineal, el cual da como resultado $\lim_{y \rightarrow 0} \alpha = 1.03\pi \pm 0.03\pi$. Por lo que finalmente se estima un valor intermedio $\lim_{y \rightarrow 0} \alpha = 0.95\pi \pm 0.15\pi$. Para $\nabla T_m = -2.3 \pm 0.1$ y $\nabla T_m = -4.5 \pm 0.2$ se obtuvieron los datos mostrados en las Fig. 4.25. y 4.26. respectivamente. En cada caso se aplicó un ajuste con un polinomio de orden 2 y a través de estos, se estimaron los valores respectivos de $\lim_{y \rightarrow 0} \alpha = 1.29\pi \pm 0.02\pi$ y $\lim_{y \rightarrow 0} \alpha = 1.28\pi \pm 0.01\pi$. Estos tres últimos casos corresponden a la condición de excitación de la onda acústica y en ellos se verifica que el $\lim_{y \rightarrow 0} |\alpha| > \pi/2$.

Es importante enfatizar que la incertidumbre en la estimación del límite de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y presión es mayor para valores del gradiente más cercanos al valor crítico.

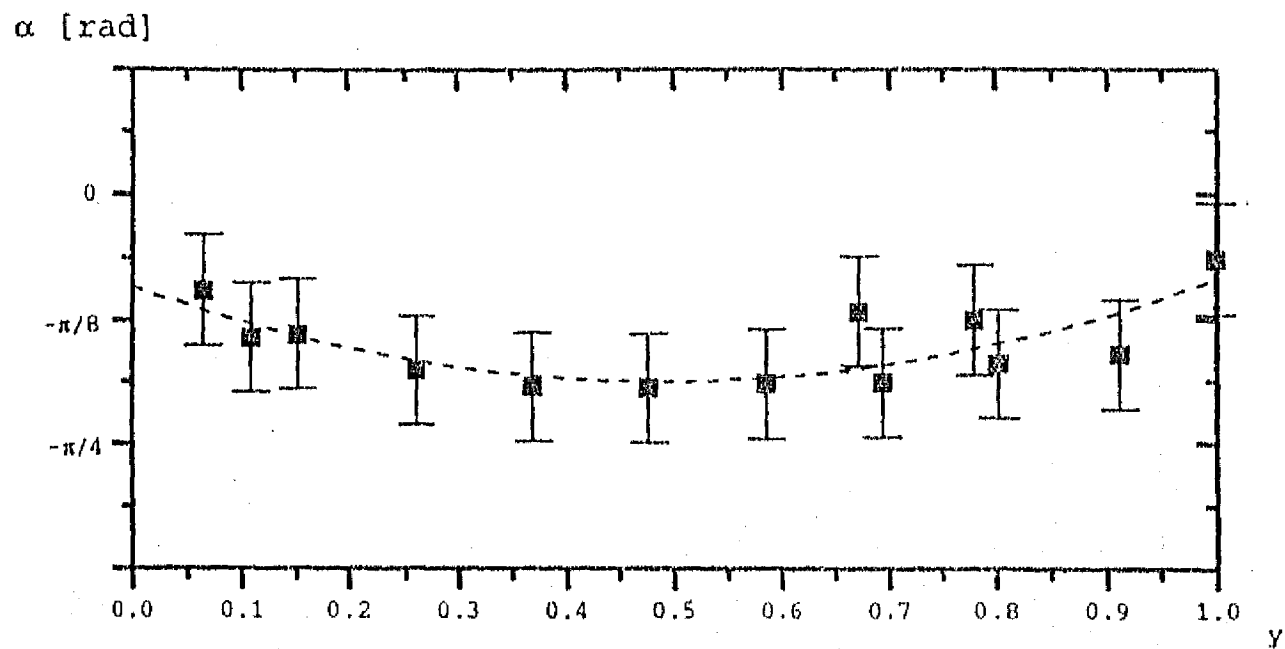


Fig. 4.20. Gráfica de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión (α) en función de la distancia a la placa (y). Para $\text{grad}T_m = 0$, $T_m^* = 23 \pm 1$ °C. La línea corresponde al ajuste con un polinomio de orden 2 a los datos experimentales. ■ $p_a^* = 123$ Pa.

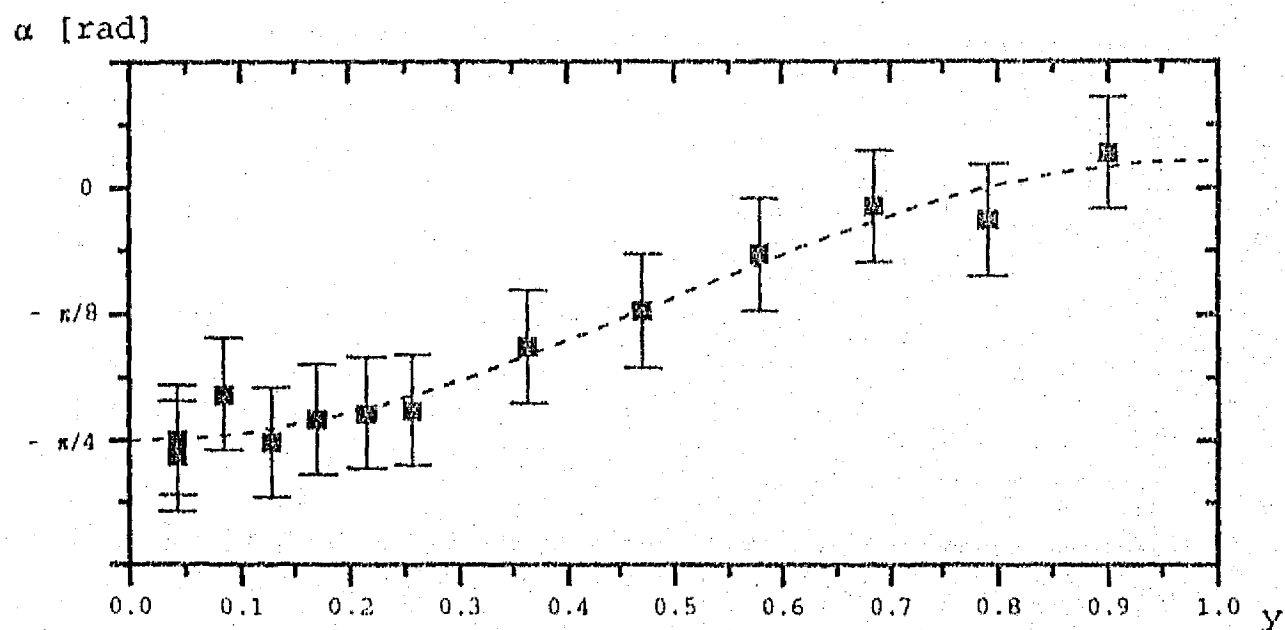


Fig. 4.21. Gráfica de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión (α) en función de la distancia a la placa (y). Para $\text{grad}T_m = -0.26$, $T_m^* = 25 \pm 2$ °C. La línea corresponde al ajuste con un polinomio de orden 3 a los datos experimentales. ■ $p_a^* = 107$ Pa.

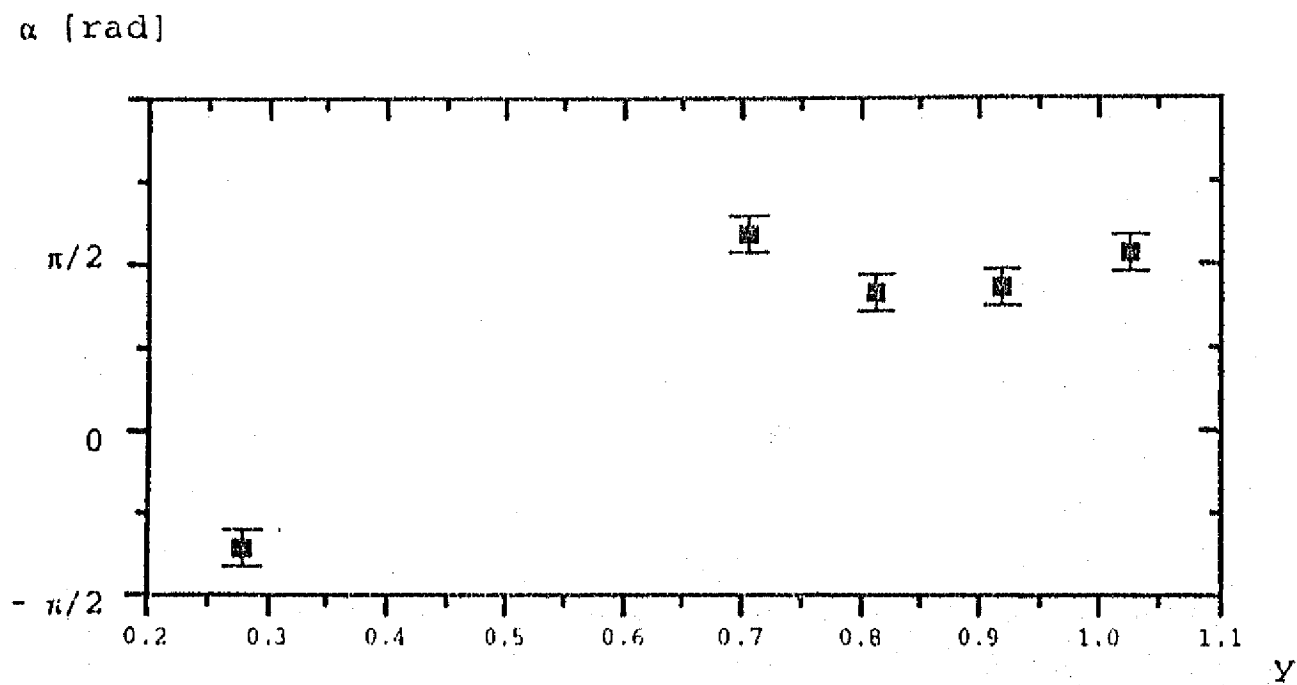


Fig. 4.22. Gráfica de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión (α) en función de la distancia a la placa (y). Para $\text{grad}T_m = -0.54$, $T_m^* = 28.3 \pm 0.3$ °C. $p_a^* = 140$ Pa.

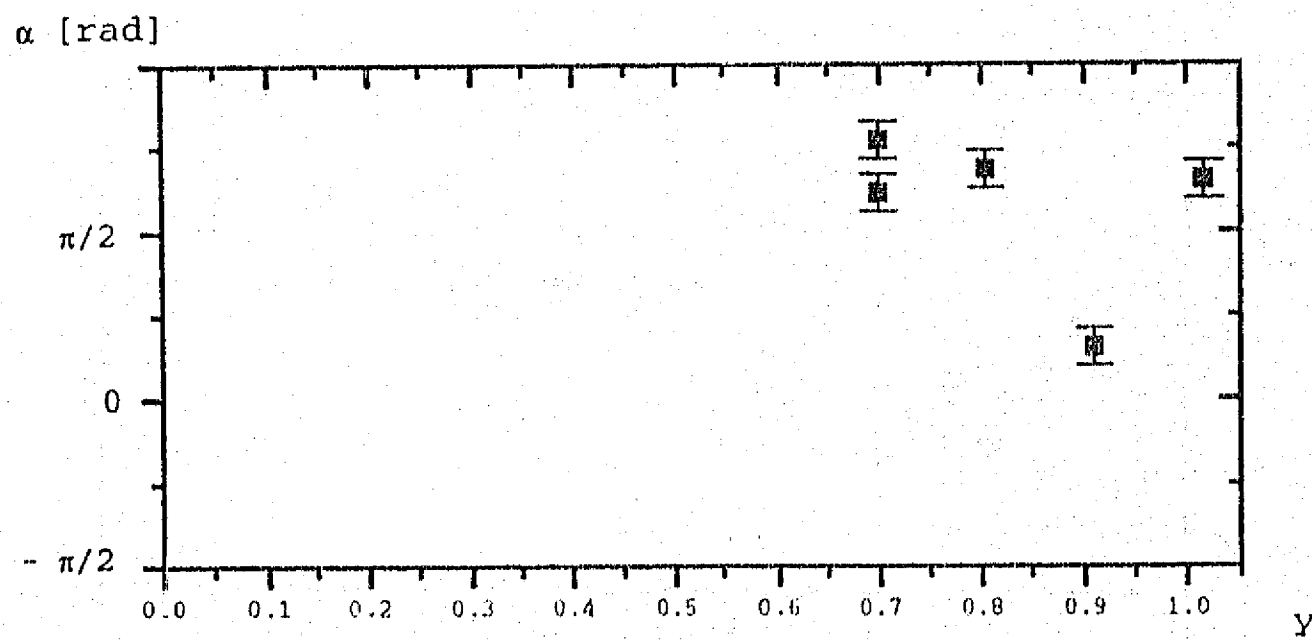


Fig. 4.23. Gráfica de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión (α) en función de la distancia a la placa (y). Para $\text{grad}T_m = -0.70$, $T_m^* = 29.5 \pm 0.1$ °C. $p_a^* = 138$ Pa.

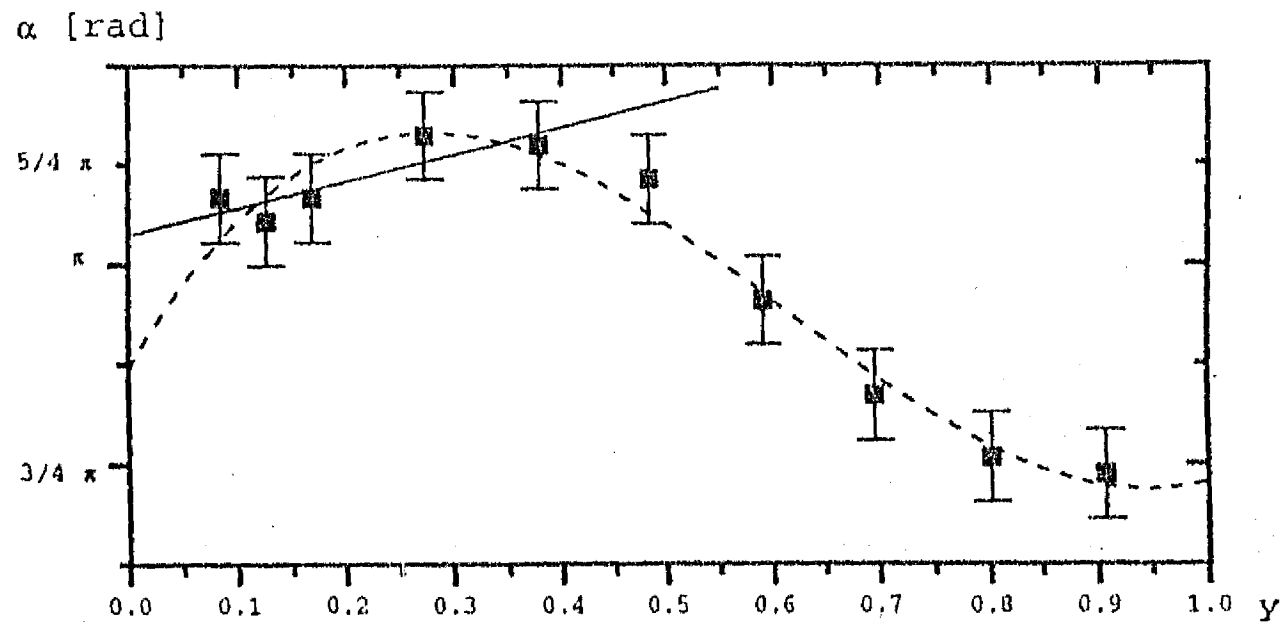


Fig. 4.24. Gráfica de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión (α) en función de la distancia a la placa (y). Para $\text{grad}T_m = -1.0$, $T_m^* = 34.4 \pm 0.4$ °C. La línea discontinua corresponde al ajuste con un polinomio de orden 3 a los datos experimentales. La línea continua corresponde al ajuste lineal de los datos experimentales con $y < 0.4$. ■ $p_a^* = 138$ Pa.

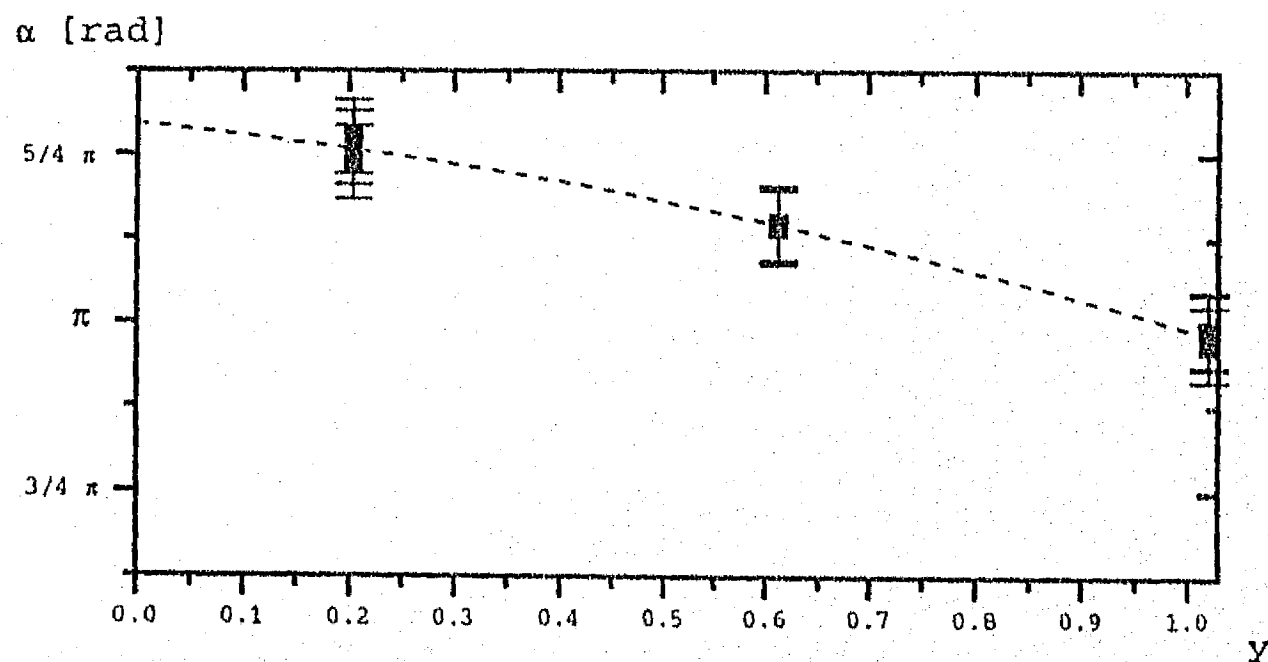


Fig. 4.25. Gráfica de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión (α) en función de la distancia a la placa (y). Para $\text{grad}T_m = -2.3$, $T_m^* = 45 \pm 3$ °C. La línea corresponde al ajuste con un polinomio de orden 2 a los datos experimentales. ■ $p_a^* = 20$ Pa.

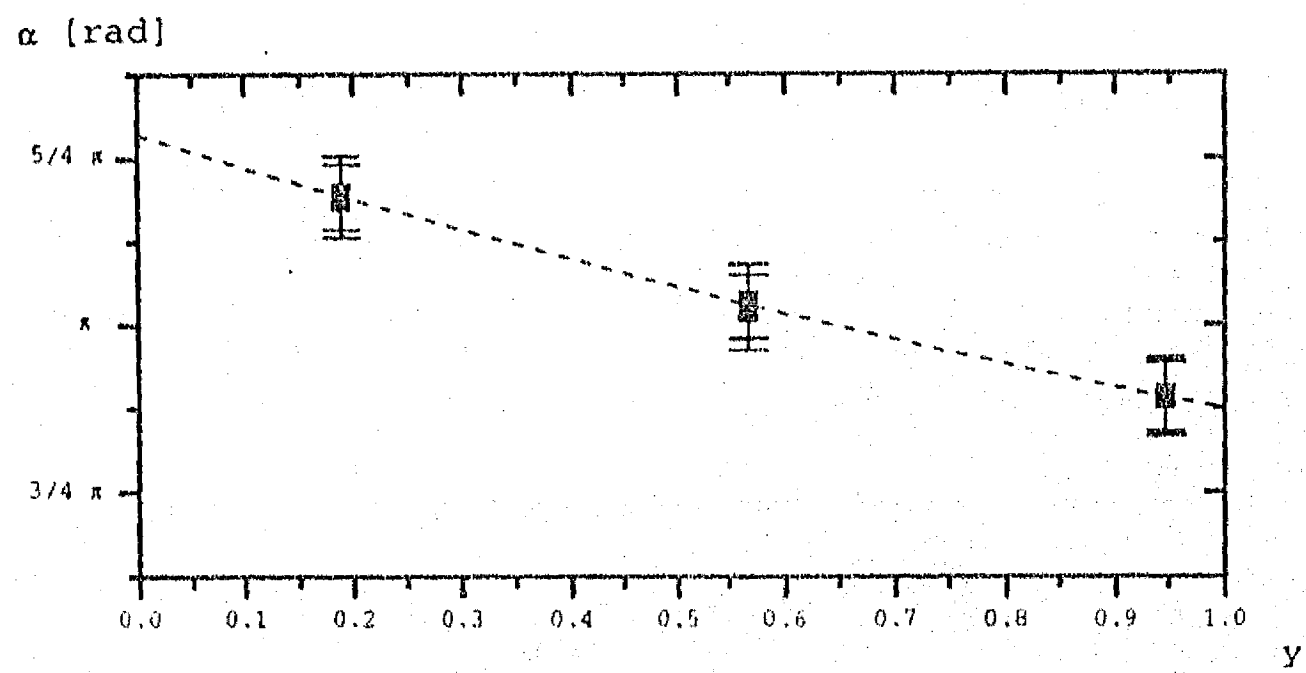


Fig. 4.26. Gráfica de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión (α) en función de la distancia a la placa (y). Para $\text{grad}T_m = -4.5$, $T_m^* = 74 \pm 6$ °C. La línea corresponde al ajuste con un polinomio de orden 2 a los datos experimentales.

■ $p_a^* = 20$ Pa.

En la Fig. 4.27. se muestran la predicción teórica del primer modelo y valores experimentales obtenidos del $\lim_{y \rightarrow 0} |\alpha|$ como función de ∇T_m . En la gráfica se señala el valor crítico de esta variable que separa las condiciones de excitación y atenuación de la onda de acuerdo a los resultados teóricos de la sección 3.7.2. Los resultados experimentales, aunque difieren cuantitativamente de la predicción teórica del primer modelo, cumplen con el criterio que indica que $\lim_{y \rightarrow 0} |\alpha| < \pi/2$ implica atenuación de la onda acústica y que $\lim_{y \rightarrow 0} |\alpha| > \pi/2$ corresponde a excitación. El valor experimental del gradiente axial de temperatura media crítica se encuentra en el rango $-1 < \nabla T_{mc} < -0.7$ (ver sección 4.7.3.). El valor teórico estimado por el primer modelo $\nabla T_{mc} = -0.737$ (ver sección 3.7.2.) queda comprendido en el rango experimental.

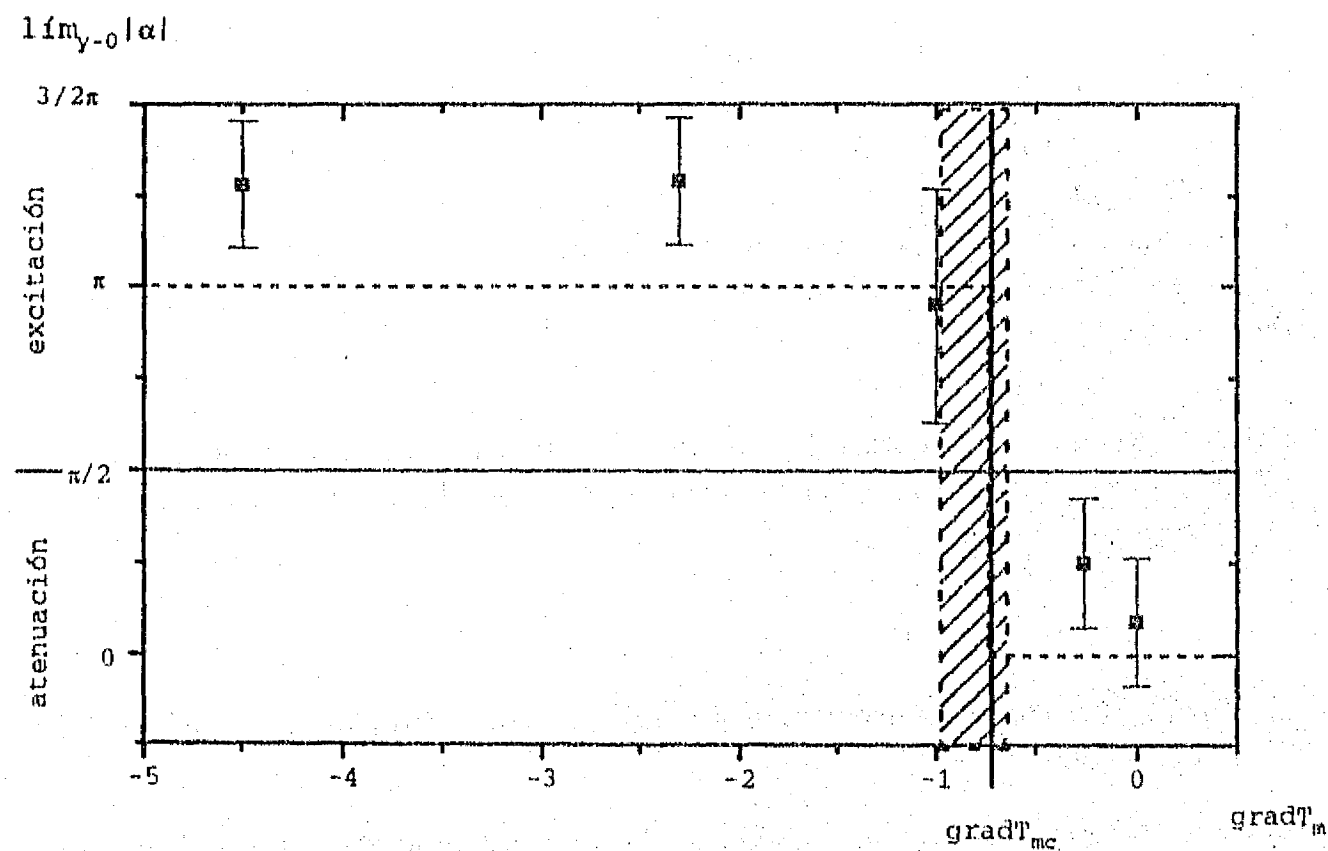


Fig. 4.27. Gráfica del límite al acercarse a la frontera sólido-fluido del valor absoluto de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión como función del gradiente axial de temperatura media. ---- valor teórico (1^{er} modelo), ■ valor experimental. — valor crítico entre excitación y atenuación de la onda acústica. El valor teórico del gradiente axial de temperatura media crítica es -0.737, el valor experimental se encuentra en la zona sombreada.

En la Tabla 4.1. se encuentra un resumen de estos resultados experimentales, los cuales demuestran la validez de la explicación de Rayleigh para la producción o atenuación de potencia acústica por efecto termoacústico.

∇T_m	$\nabla T_{mc} = -0.737$	condición	$\lim_{y \rightarrow 0} \alpha $	
			teórico	experimental**
0	$> \nabla T_{mc}$	atenuación	$< 0.5\pi$	$0.09\pi \pm 0.01\pi$
-0.26	$> \nabla T_{mc}$	atenuación	$< 0.5\pi$	$0.25\pi \pm 0.02\pi$
-0.54	$> \nabla T_{mc}$	atenuación	$< 0.5\pi$	*
-0.70	$> \nabla T_{mc}$	atenuación	$< 0.5\pi$	*
-1.0	$< \nabla T_{mc}$	excitación	$> 0.5\pi$	$0.95\pi \pm 0.15\pi$
-2.3	$< \nabla T_{mc}$	excitación	$> 0.5\pi$	$1.29\pi \pm 0.02\pi$
-4.5	$< \nabla T_{mc}$	excitación	$> 0.5\pi$	$1.28\pi \pm 0.01\pi$

* No se obtuvo una estimación debido a que la amplitud de la oscilación es menor al criterio de confiabilidad indicando que el sistema se encuentra cercano al ∇T_{mc} .

** La incertidumbre reportada aquí corresponde al ajuste de los datos experimentales, sin embargo debe considerarse la suma de este valor con la máxima incertidumbre asociada al defasamiento base ($\pm 0.17\pi$)

Tabla 4.1. Resumen de los resultados que demuestran experimentalmente la explicación de Rayleigh a la excitación o atenuación de la onda acústica por efecto termoacústico.

4.7.2. Medición de la temperatura media como función de la distancia a la placa

Se midió la temperatura media del fluido T_m^* con el anemómetro de hilo frío como función de la distancia a la placa y , para los siete valores del gradiente axial de temperatura media en la placa empleados, las gráficas correspondientes se encuentran en la Fig. 4.28. Se hicieron estimaciones de la variación del gradiente axial de temperatura en el fluido al alejarse de la placa, basadas en interpolaciones y extrapolaciones de la variación de la temperatura media con la distancia

a la placa (Fig. 4.28). Las gráficas correspondientes se encuentran en la Fig. 4.29. Aunque estas gráficas son una estimación, queda en evidencia la diferencia entre las condiciones experimentales y el modelo teórico que supone que el gradiente axial de temperatura media en el fluido es el mismo que el de la placa, independientemente de la distancia a ésta.

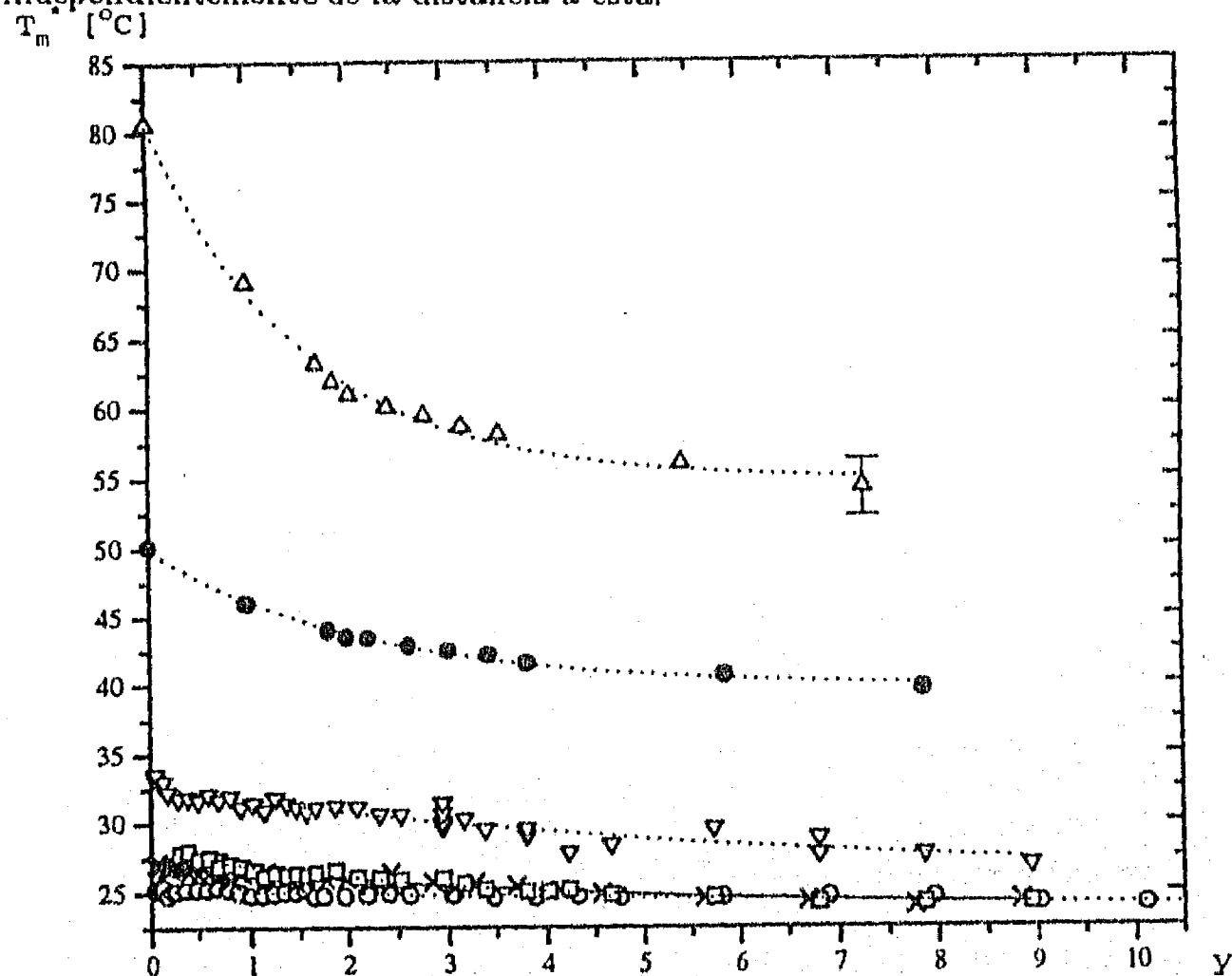


Fig. 4.28. Gráficas de la temperatura media del aire (T_m^*) medida con el "anemómetro de hilo frío" como función de la distancia a la placa. Los símbolos representan datos experimentales, las líneas representan las curvas obtenidas por el ajuste con una función exponencial decreciente a los datos correspondientes a cada uno de los valores del gradiente axial de temperatura media en la placa. Se indica la incertidumbre máxima asociada en los datos experimentales. Los símbolos corresponden a la temperatura medida en los experimentos con los siguientes valores del $\text{grad}T_m$.

- | | | | | | |
|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|
| ○ | $\text{grad}T_m = -0.26$ | × | $\text{grad}T_m = -0.54$ | □ | $\text{grad}T_m = -0.70$ |
| ▽ | $\text{grad}T_m = -1.0$ | ● | $\text{grad}T_m = -2.3$ | △ | $\text{grad}T_m = -4.5$ |

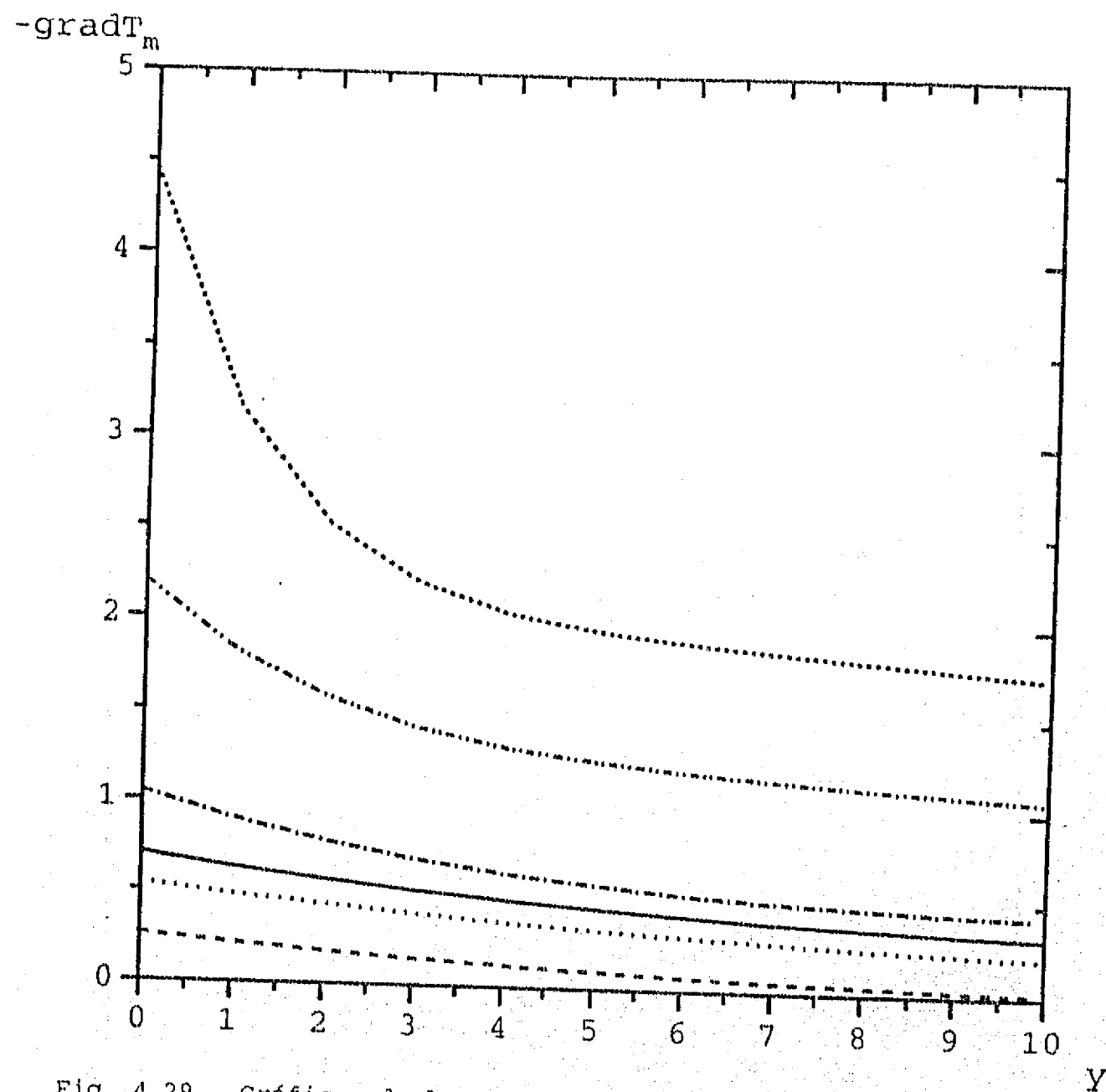


Fig. 4.29. Gráficas de la variación del gradiente axial de temperatura media en el aire como función de la distancia a la placa. Estimaciones basadas en interpolaciones y extrapolaciones de la variación de la temperatura media con la distancia y (Fig. 4.28.) Para los gradientes de temperatura en la placa:

--- $\text{grad}T_m = - 0.26$ $\text{grad}T_m = - 0.54$	— $\text{grad}T_m = - 0.70$
----- $\text{grad}T_m = - 1.1$	— · — $\text{grad}T_m = - 2$ $\text{grad}T_m = - 4.5$

4.7.3. Comparación con el primer modelo teórico

La diferencia de fase entre las oscilaciones de presión y temperatura y la amplitud de la oscilación de temperatura, ambas como función de la distancia a la placa, fueron medidas para siete valores del gradiente axial de temperatura media en la placa. Para la mayoría de valores del gradiente se hicieron mediciones a diferentes valores de la amplitud de la oscilación de presión, aunque solo se reportan aquellos datos que satisfacen el criterio de confiabilidad $V_{T_a}^* > 10$ mV. Los resultados experimentales son comparados con predicciones teóricas basadas en el primer modelo (ver sección 3.6.1.) usando los siguientes valores para los parámetros: el semiespesor adimensional de la placa $l = 100$, $Pr = 1.547(T_{sm}^*)^{-0.08567}$, donde T_{sm}^* es la temperatura media de la placa medida en Kelvin y $\gamma = 1.4$. Para ϵ se estimó un valor de $\epsilon = 0.46$, este valor se obtuvo a través de valores reportados en la literatura para las propiedades de materiales cerámicos, sin que se tenga la certeza de que sean aplicables a la cerámica empleada en el experimento (ver el anexo 4). Los resultados también se comparan con las predicciones utilizando un valor menor, $\epsilon = 0.01$.

Los resultados de la amplitud de la oscilación de temperatura en función de y se reportan en forma normalizada. Esta normalización se efectúa con el valor de la amplitud de oscilación de temperatura adiabática calculada a través de la presión local $T_a = T_a^*/T_{a\text{ calc}}^*$, esto permite comparar resultados obtenidos con ondas acústicas de diferentes amplitudes. Además al normalizarse con el valor local permite observar más claramente si la onda ha sido atenuada o excitada.

En las Fig. 4.30. se encuentran (a) la gráfica de la diferencia de fase entre las oscilaciones de presión y temperatura α como función de la distancia adimensional a la placa y y (b) la gráfica de la amplitud de la oscilación de temperatura en función de y , para el gradiente axial de temperatura media $\nabla T_m = 0.00 \pm 0.01$. Los datos fueron obtenidos en cuatro experimentos distintos, en todos estos experimentos la temperatura media fue $T_m^* = 23 \pm 1$ °C. Los datos experimentales indican que el valor de ϵ se encuentra entre $0.01 < \epsilon < 0.46$, los resultados experimentales coinciden cuantitativamente con las predicciones teóricas, difiriendo a lo más en un 6% en los valores de α y 10% en los valores de T_a . Como era de esperarse, los resultados experimentales presentan menor dispersión a mayor amplitud de la onda acústica. Sin embargo, si se observa la tendencia media de los valores de α en los experimentos realizados con la misma amplitud de la oscilación

de presión se nota un comportamiento medio distinto para las dos amplitudes utilizadas. Esto puede deberse al error introducido al considerar α_b independiente de la amplitud de la oscilación de presión (sección 4.6.2.).

En este caso en que no existe gradiente de temperatura en la placa, las condiciones experimentales coinciden con las del modelo teórico. La buena coincidencia entre los resultados experimentales y el modelo teórico permiten afirmar que la técnica de medición desarrollada es satisfactoria.

Las gráficas correspondientes de α y de T_a para $\nabla T_m = -0.26 \pm 0.01$, se encuentran en las Fig. 4.31., en estos experimentos $T_m^* = 25 \pm 2$ °C. Para este gradiente, los datos experimentales coinciden satisfactoriamente con las predicciones teóricas para puntos cercanos a la placa (diferencia menor a 10% en α y menor a 13% en T_a para $y \leq 1.5$). A medida que aumenta la distancia a la placa los resultados experimentales presentan mayor diferencia con las predicciones teóricas (13% en α y 67% en T_a). Esta discrepancia se puede explicar si se toma en cuenta que en el modelo teórico se considera que el gradiente axial de temperatura del fluido para cualquier distancia y es el mismo que el de la placa y en el experimento este gradiente disminuye al alejarse de la placa (ver Fig. 4.29).

Las Fig. 4.32. corresponden a las gráficas de α y de T_a para el $\nabla T_m = -0.54 \pm 0.3$, con $T_m^* = 28.3 \pm 0.6$ °C. En este caso no se pudieron tener datos confiables ($V_{T_a} > 10$ mV) para puntos con $y < 0.35$, a pesar de que se realizaron con la máxima intensidad de la onda acústica que se podía generar con el dispositivo, dada la gran atenuación de la onda en dicha zona. Los datos experimentales del defasamiento α coinciden satisfactoriamente con las predicciones teóricas para $y \leq 2$ (diferencia menor a 13%), para distancias mayores, los resultados experimentales discrepan considerablemente. En la Fig.4.32(a) también se han graficado las curvas teóricas para $\nabla T_m = -0.40$ y $\nabla T_m = -0.35$, en ellas se observa un cambio cualitativo en α con el cambio del gradiente entre estos valores, lo que pudiera junto con la variación experimental del gradiente axial (Fig.4.29) explicar los valores experimentales de α . Los datos experimentales en amplitud de temperatura T_a coinciden cualitativamente para $y \leq 1.3$ (diferencia menor a 30%). Al alejarse de la placa la dispersión de los resultados crece, haciendo imposible determinar la tendencia en el rango de $1.3 < y < 4$. Para distancias mayores $\alpha \rightarrow 0$ (2π) y $T_a \rightarrow 1$ como es de esperarse.

Los resultados para el $\nabla T_m = -0.70 \pm 0.03$, con $T_m^* = 29.5 \pm 0.1$ °C se encuentran graficados en las Fig. 4.33. La discusión es similar al caso anterior, aunque en este caso la dispersión de los datos en amplitud de temperatura es mayor a distancias entre $1 < y < 5$ disminuyendo a distancias mayores. Como ya

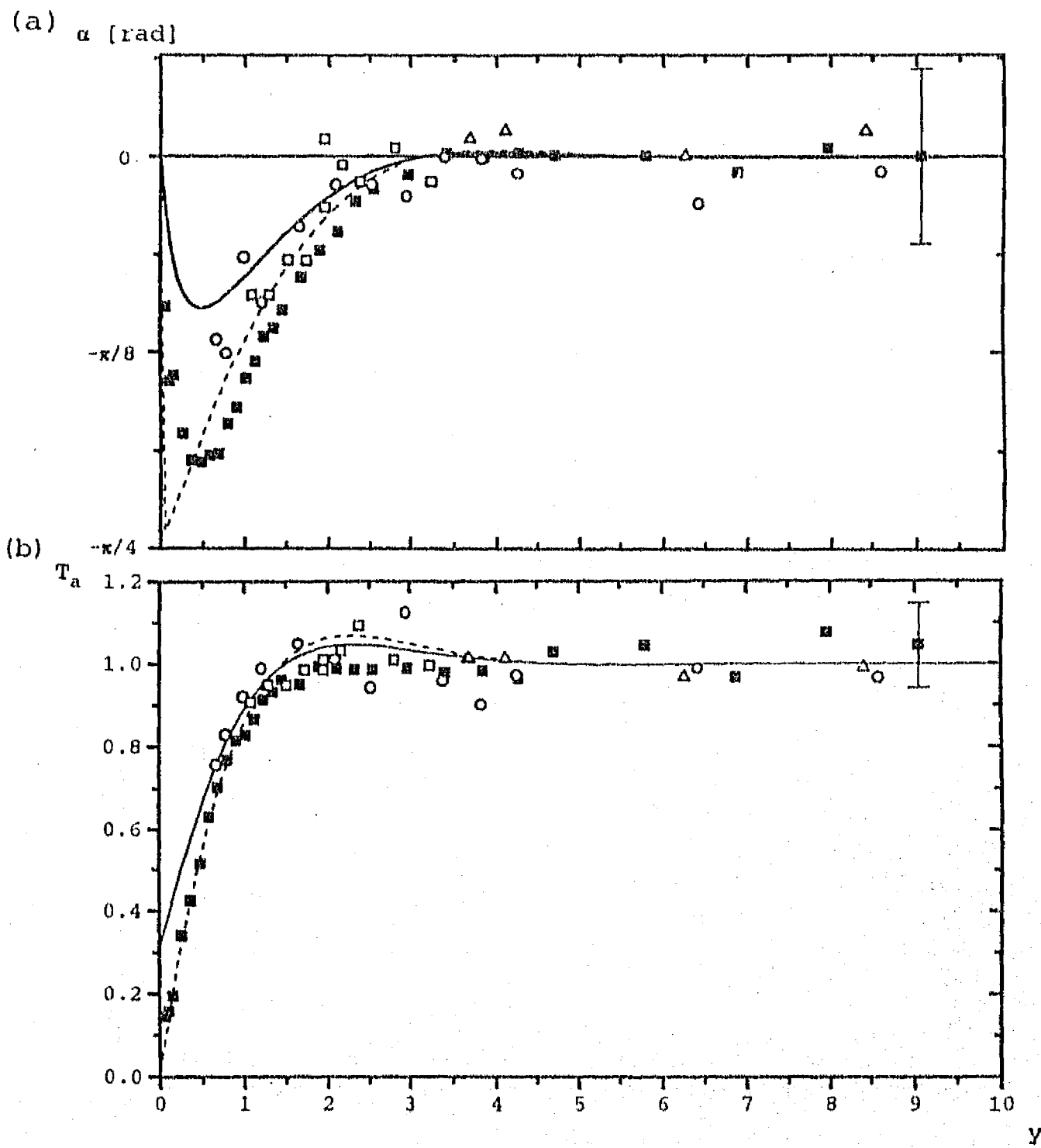


Fig. 4.30. $\text{grad}T_m = 0$ $T_m^* = 23 \pm 1$ °C. (a) Gráfica de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión (α) y (b) gráfica de la amplitud normalizada de las oscilaciones de temperatura (T_a), ambas en función de la distancia a la placa (y). Los símbolos corresponden a datos experimentales: Δ exp 1208 $p_a^* = 20$ Pa \square exp 1214 $p_a^* = 20$ Pa \circ exp 0208 $p_a^* = 20$ Pa \blacksquare exp 0214 $p_a^* = 123$ Pa. Las líneas corresponden a predicciones teóricas: --- $\zeta = 0.46$ - - - - $\zeta = 0.01$. Se indica la incertidumbre máxima estimada en los datos experimentales.

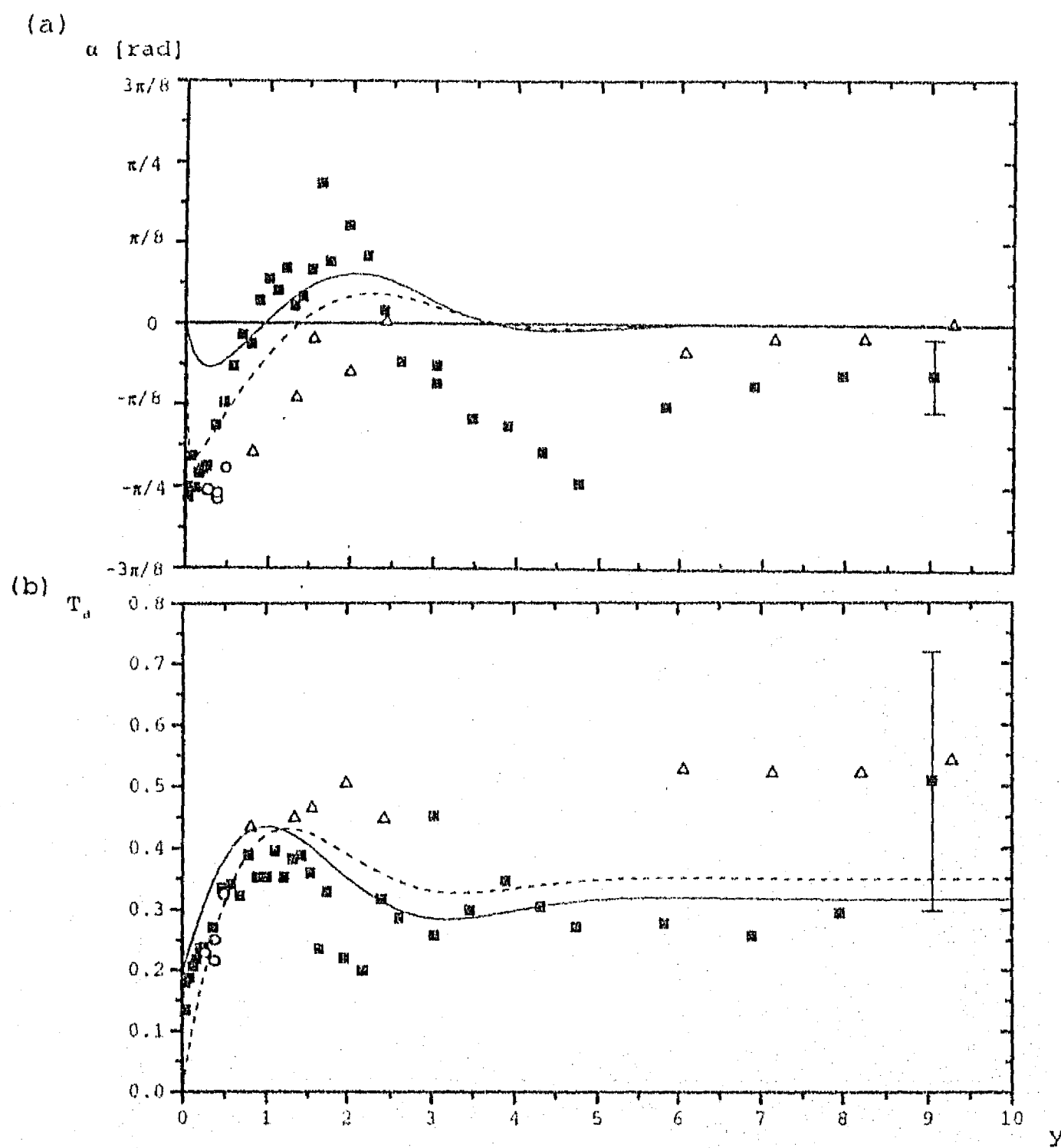


Fig. 4.31. $\text{grad}T_m = -0.26 \pm 0.01$ $T_m = 25 \pm 2$ °C. (a) Gráfica de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y presión (α) y (b) gráfica de la amplitud normalizada de las oscilaciones de temperatura (T_a), ambas en función de la distancia a la placa (y). Los símbolos corresponden a datos experimentales: Δ exp 0209 $p_a^* = 20$ Pa \circ exp 0209 $p_a^* = 70$ Pa \blacksquare exp 0215 $p_a^* = 107$ Pa. Las líneas corresponden a predicciones teóricas: — $\tau = 0.46$ ---- $\tau = 0.01$. Se indica la incertidumbre máxima estimada en los datos experimentales.

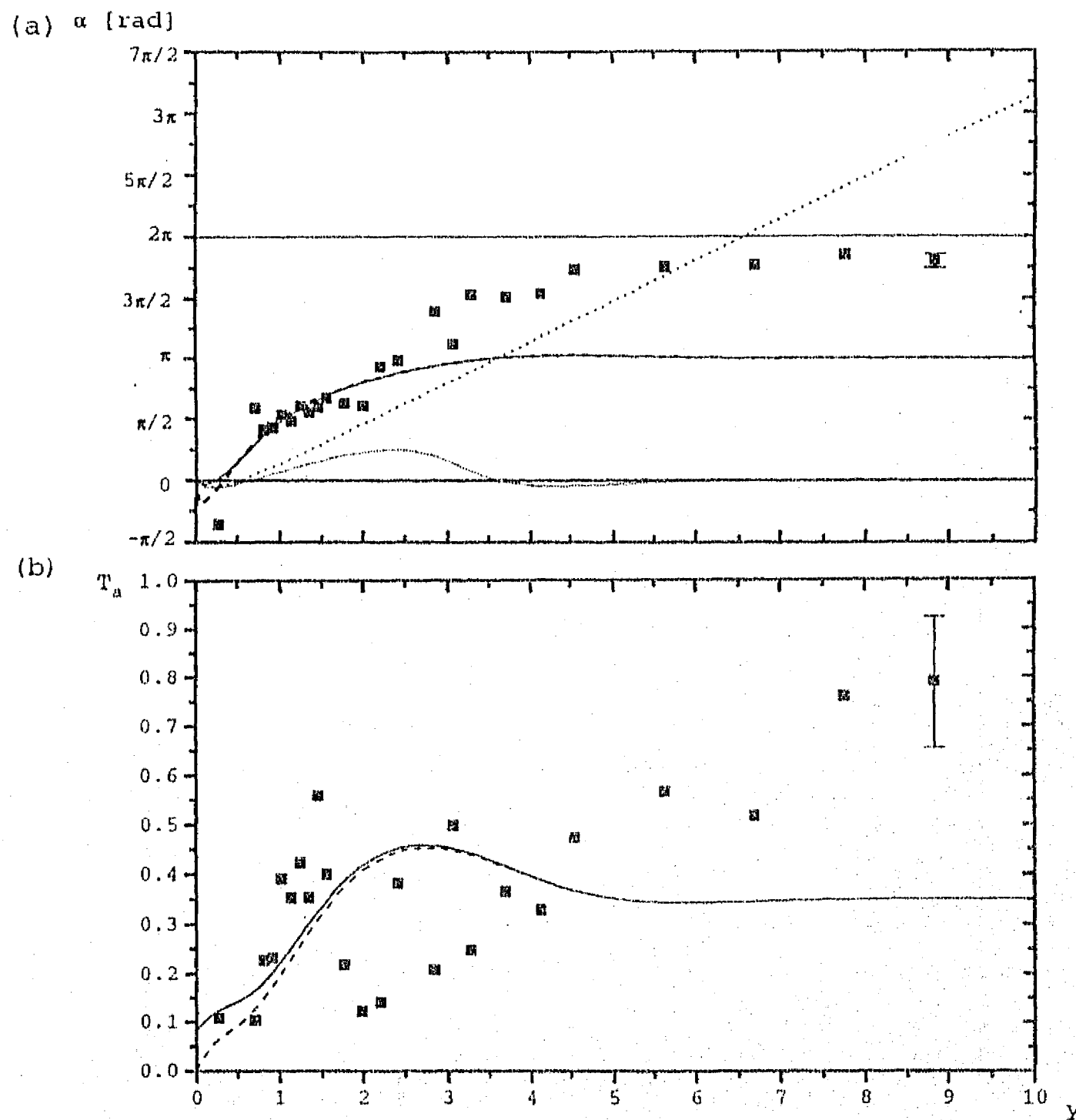


Fig. 4.32. $\text{grad}T_m = -0.54 \pm 0.3$ $T_m^* = 28.3 \pm 0.6$ °C. (a) Gráfica de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión (α) y (b) gráfica de la amplitud normalizada de las oscilaciones de temperatura (T_a), ambas en función de la distancia a la placa (y). Los símbolos corresponden a datos experimentales: \blacksquare exp 0216 $p_a^* = 140$ Pa. Las líneas corresponden a predicciones teóricas: — $\epsilon = 0.46$ - - - $\epsilon = 0.01$. Y $\text{grad}T_m = -0.40$ $\epsilon = 0.46$, — $\text{grad}T_m = -0.35$ $\epsilon = 0.46$. Se indica la incertidumbre máxima estimada en los datos experimentales. Nótese que por la propiedad cíclica de la diferencia de fase $2\pi=0$.

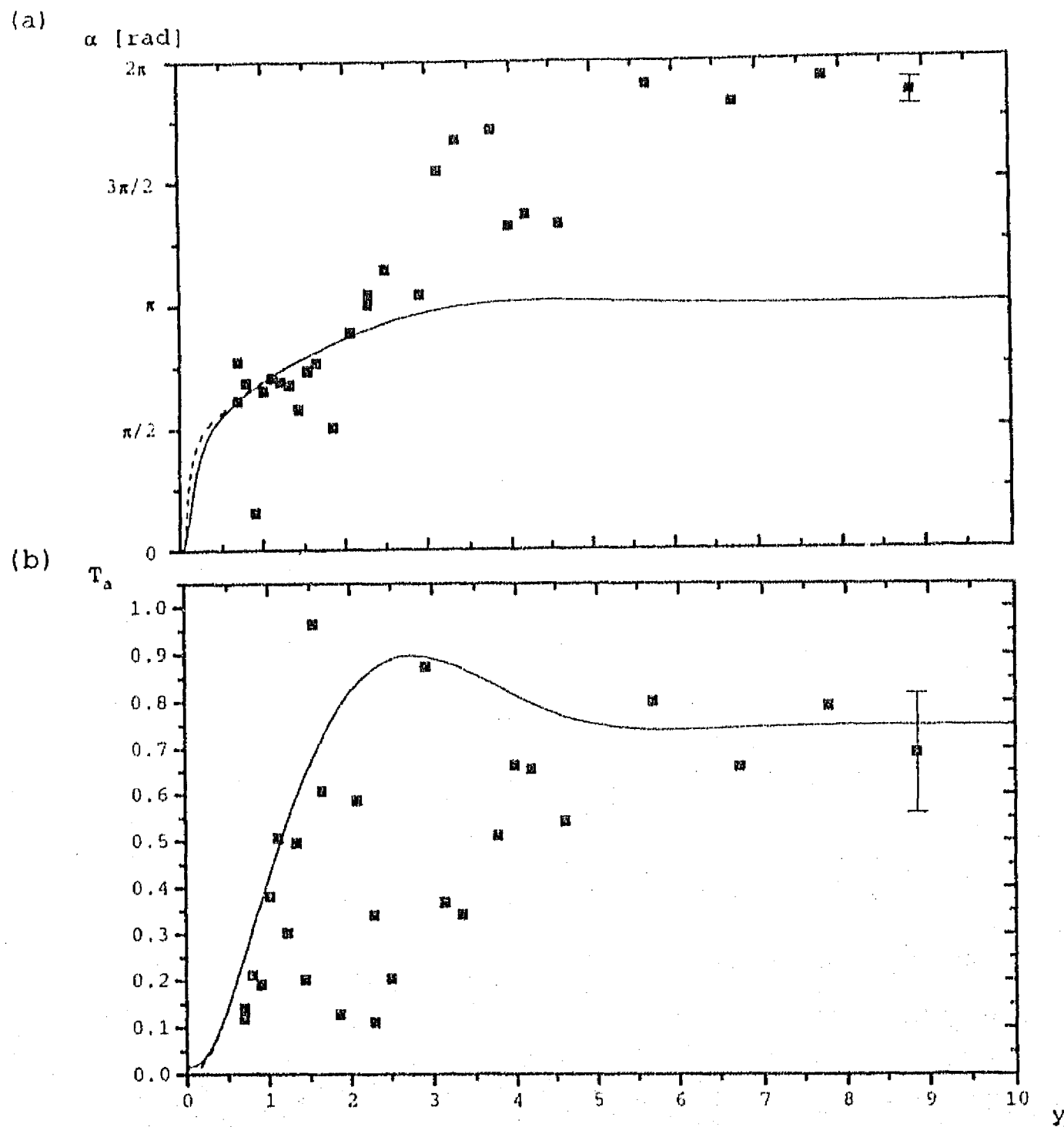


Fig. 4.33. $\text{grad}T_m = -0.70 \pm 0.03$ $T_m^* = 29.5 \pm 0.1$ °C. (a) Gráfica de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión (α) y (b) gráfica de la amplitud normalizada de las oscilaciones de temperatura (T_a), ambas en función de la distancia a la placa (y). Los símbolos corresponden a datos experimentales: \blacksquare $p_a^* = 138$ Pa. Las líneas corresponden a predicciones teóricas: — $\epsilon = 0.46$ - - - $\epsilon = 0.01$. Se indica la incertidumbre máxima estimada en los datos experimentales.

se indicó en la sección 4.7.1., esta gran dispersión de los datos indica un cambio en la estabilidad del sistema.

Los cuatro casos anteriores corresponden a condición de atenuación de la onda acústica, esto se confirma observando el valor de la amplitud de la oscilación de temperatura. En estos cuatro casos la amplitud de la oscilación de temperatura es menor o igual a la unidad.

Las Fig. 4.34. se encuentran las gráficas de α y de T_a para el $\nabla T_m = -1.0 \pm 0.1$, con $T_m^* = 34.4 \pm 0.4$ °C. Los resultados experimentales de α son similares a las predicciones teóricas para $y < 2.8$ con una diferencia menor al 20%, aunque presentan un comportamiento cualitativo distinto para $y < 0.8$. Los resultados experimentales de T_a muestran coincidencia cualitativa con las predicciones teóricas para $y < 1.1$ (diferencia menor a 35%), para distancias mayores aumenta la dispersión de datos llegando a ser hasta del 50% de su valor medio. Esto hace imposible determinar la tendencia con certidumbre. Las observaciones experimentales se encuentran abajo de las predicciones teóricas, indicando una amplificación menor a la estimada.

Los resultados para $\nabla T_m = -2.3 \pm 0.1$, con $T_m^* = 45 \pm 3$ °C se encuentran graficados en las Fig. 4.35. Los resultados experimentales de α son similares a las predicciones teóricas, las mayores diferencias se encuentran cerca de la placa, aunque estas son menores al 15%. Los resultados experimentales de T_a son cualitativamente similares a las predicciones teóricas, tienen poca dispersión aunque para $y > 0.5$ tiene un valor menor al teórico.

Las Fig. 4.36. se encuentran las gráficas de α y de T_a para el $\nabla T_m = -4.5 \pm 0.2$, con $T_m^* = 74 \pm 6$ °C. Los resultados experimentales de α muestran la misma tendencia cualitativa que las predicciones teóricas con una diferencia menor al 25%. Los resultados experimentales de T_a muestran buena coincidencia cualitativa con las predicciones teóricas, aunque la amplificación de la onda es menor a la estimada.

Los tres casos anteriores corresponden a condición de excitación de la onda acústica, esto se confirma observando que, para valores intermedios de la distancia a la placa, existen puntos donde la amplitud de la oscilación de temperatura es mayor a la unidad.

Para todos los gradientes axiales de temperatura media en la placa estudiados, se midió la oscilación de temperatura lejos de la placa ($y > 60$), en todos los casos, a esta distancia de la placa el gradiente axial de temperatura en el fluido es despreciable y como era de esperarse el valor de la amplitud normalizada de

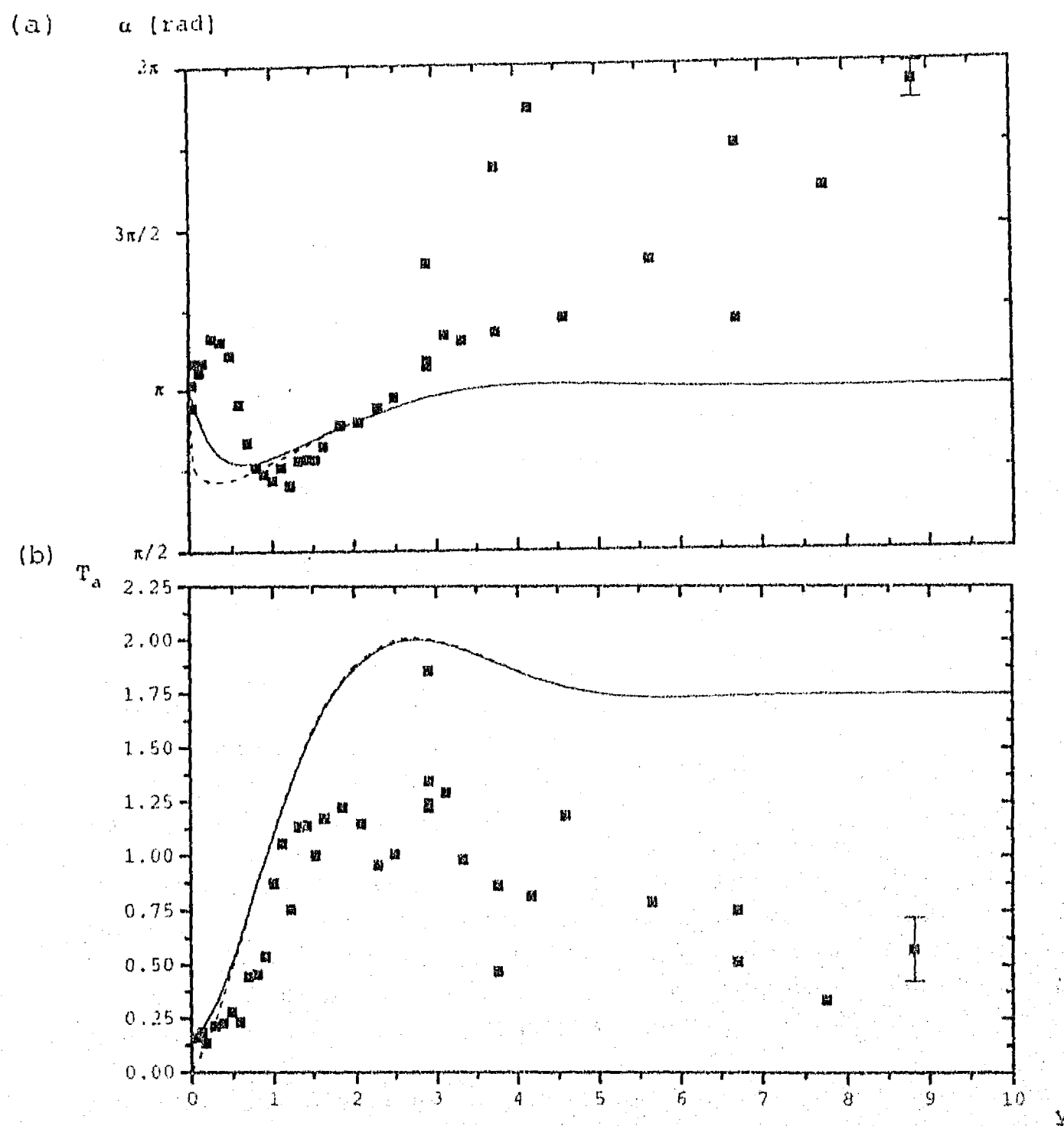


Fig. 4.34. $\text{grad}T_m = -1.0 \pm 0.1$ $T_m = 34.4 \pm 0.4$ °C. (a) Gráfica de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión (α) y (b) gráfica de la amplitud normalizada de las oscilaciones de temperatura (T_a), ambas en función de la distancia a la placa (y). Los símbolos corresponden a datos experimentales: \blacksquare $p_a = 138$ Pa. Las líneas corresponden a predicciones teóricas: — $\epsilon = 0.46$ - - - $\epsilon = 0.01$. Se indica la incertidumbre máxima estimada en los datos experimentales.

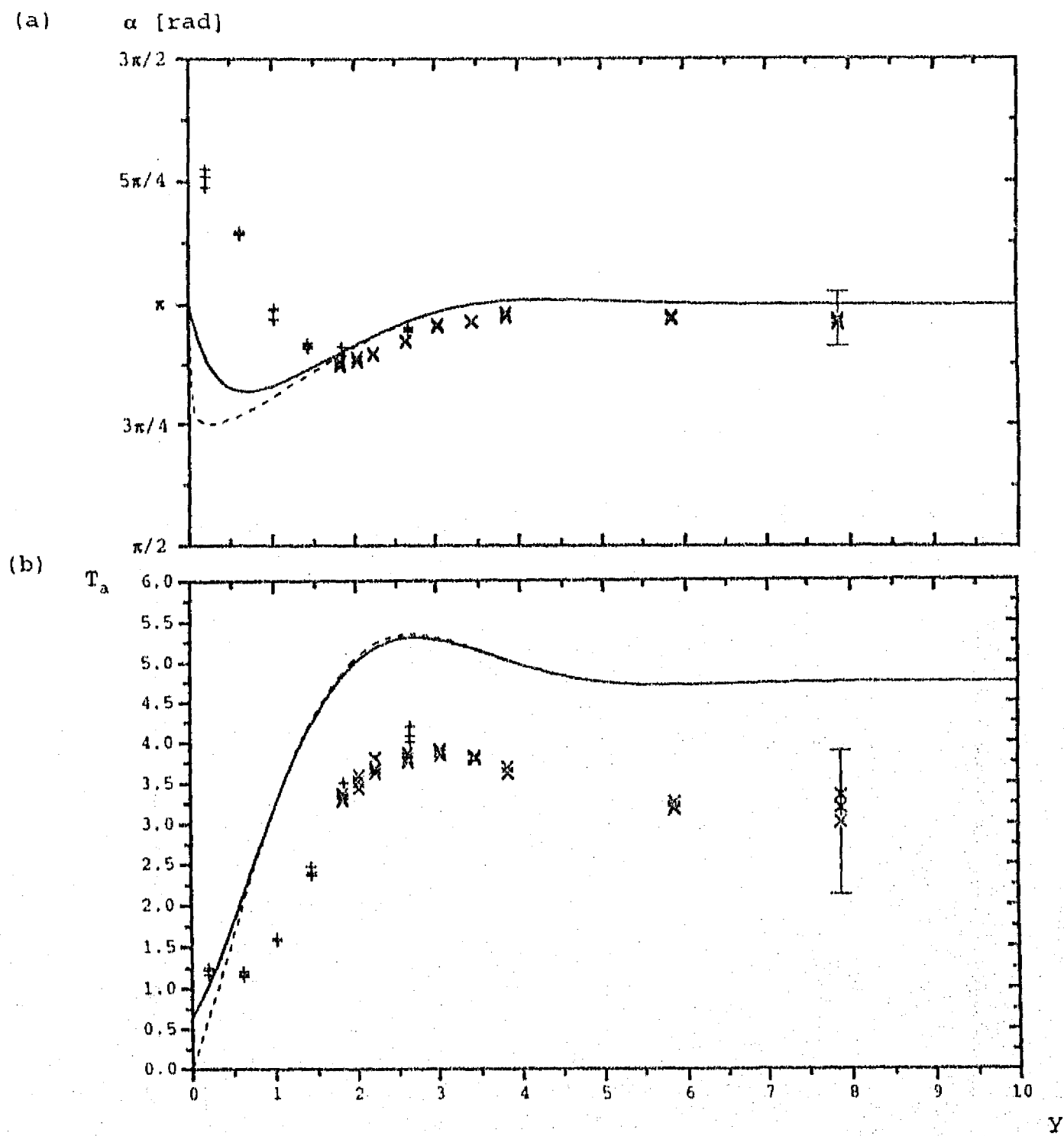


Fig. 4.35. $\text{grad}T_m = -2.3 \pm 0.1$ $T_m^* = 45 \pm 3$ °C. (a) Gráfica de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión (α) y (b) gráfica de la amplitud normalizada de las oscilaciones de temperatura (T_a), ambas en función de la distancia a la placa (y). Los símbolos corresponden a datos experimentales: \times $p_a^* = 20$ Pa
 $+$ $p_a^* = 20$ Pa. Las líneas corresponden a predicciones teóricas: — $\epsilon = 0.46$ - - - $\epsilon = 0.01$.
 Se indica la incertidumbre máxima estimada en los datos experimentales.

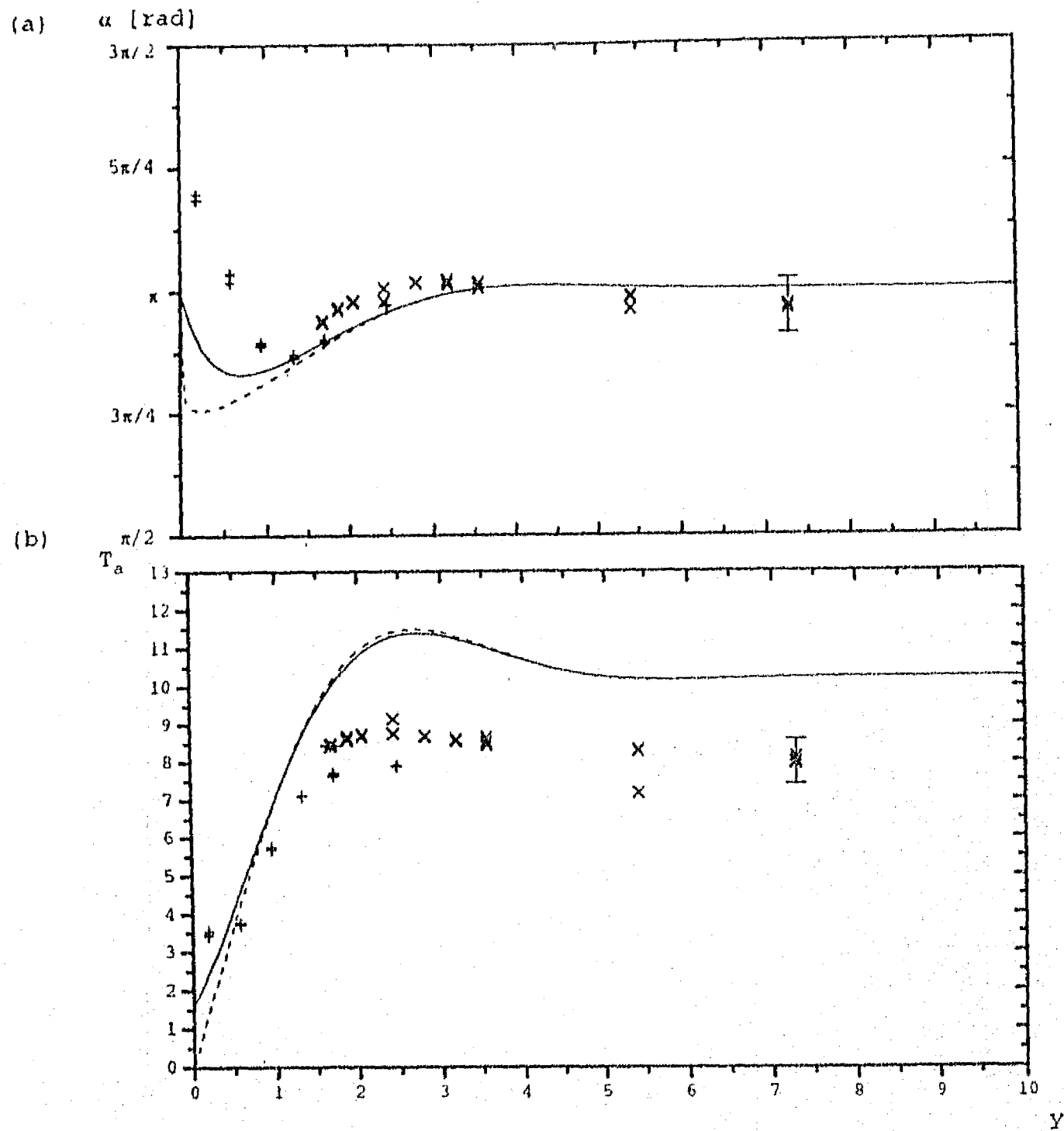


Fig. 4.36. $\text{grad}T_m = -4.5 \pm 0.2$ $T_m^* = 74 \pm 6$ °C. (a) Gráfica de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión (α) y (b) gráfica de la amplitud normalizada de las oscilaciones de temperatura (T_a), ambas en función de la distancia a la placa (y). Los símbolos corresponden a datos experimentales: \cdot $p_a^* = 20$ Pa \times $p_a^* = 20$ Pa. Las líneas corresponden a predicciones teóricas: — $\epsilon = 0.46$ ---- $\epsilon = 0.01$. Se indica la incertidumbre máxima estimada en los datos experimentales.

las oscilaciones de temperatura $T_a = 1$ y el valor de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y presión $\alpha = 0$.

4.7.4. Análisis de la señal de temperatura en el espacio de frecuencias

A continuación se analizan las señales de salida del "anemómetro de hilo frío" en el espacio de frecuencias como función del gradiente axial de temperatura media en la placa y como función de la distancia a la placa. El análisis se lleva a cabo a través de la magnitud normalizada con la magnitud de la frecuencia principal ($f_r^* = 130$ Hz).

Las magnitudes de la frecuencia de 60 Hz y sus múltiplos están asociadas a ruido eléctrico, cada una de ellas mantiene un valor aproximadamente constante, es decir no depende de la amplitud de la onda acústica, ni del gradiente de temperatura, ni de la posición del sensor. Ya que las magnitudes de estas frecuencias no se deben a la variación de la temperatura en el fluido, no se toman en cuenta en el siguiente análisis. En las Fig. 4.37. a 4.44. donde se grafican las magnitudes normalizadas del espectro de frecuencias, las frecuencias asociadas a ruido eléctrico han sido eliminadas.

Cuando no existe gradiente de temperatura, la señal de salida del "anemómetro de hilo frío" es prácticamente monocromática independientemente de la distancia del sensor a la placa, en todos los experimentos realizados la magnitud del segundo armónico es menor al 20% de la magnitud de la frecuencia principal. Esto se aprecia en la Fig. 4.37. Sin embargo cuando existe gradiente axial de temperatura media, la señal de salida del "anemómetro de hilo frío" deja de ser monocromática. En la Fig. 4.38. se encuentran gráficas de la magnitud normalizada del espectro de frecuencias para el gradiente axial de temperatura media $\nabla T_m = -0.26$, correspondientes a cuatro distancias a la placa (y). En estas gráficas se observa que muy cerca de la placa ($y = 0.04$) la magnitud del segundo armónico es cercana al 70% de la magnitud de la frecuencia principal, al alejarse de la placa, este valor aumenta alcanzando un máximo (210%) en $y = 4.3$, al alejarse aún más de la placa, esta magnitud disminuye. La magnitud correspondiente a bajas frecuencias ($f^* < 15$ Hz) aumenta ligeramente al alejarse de la placa. Para $\nabla T_m = -0.54$ y para distancias cercanas a la placa la magnitud del segundo armónico aumenta todavía más (320% de magnitud de la frecuencia principal), tal como se observa en la Fig. 4.39. Para este valor del gradiente las magnitudes de las frecuencias bajas aumentan significativamente, para $y = 4.1$ alcanzan el 250% de la magnitud

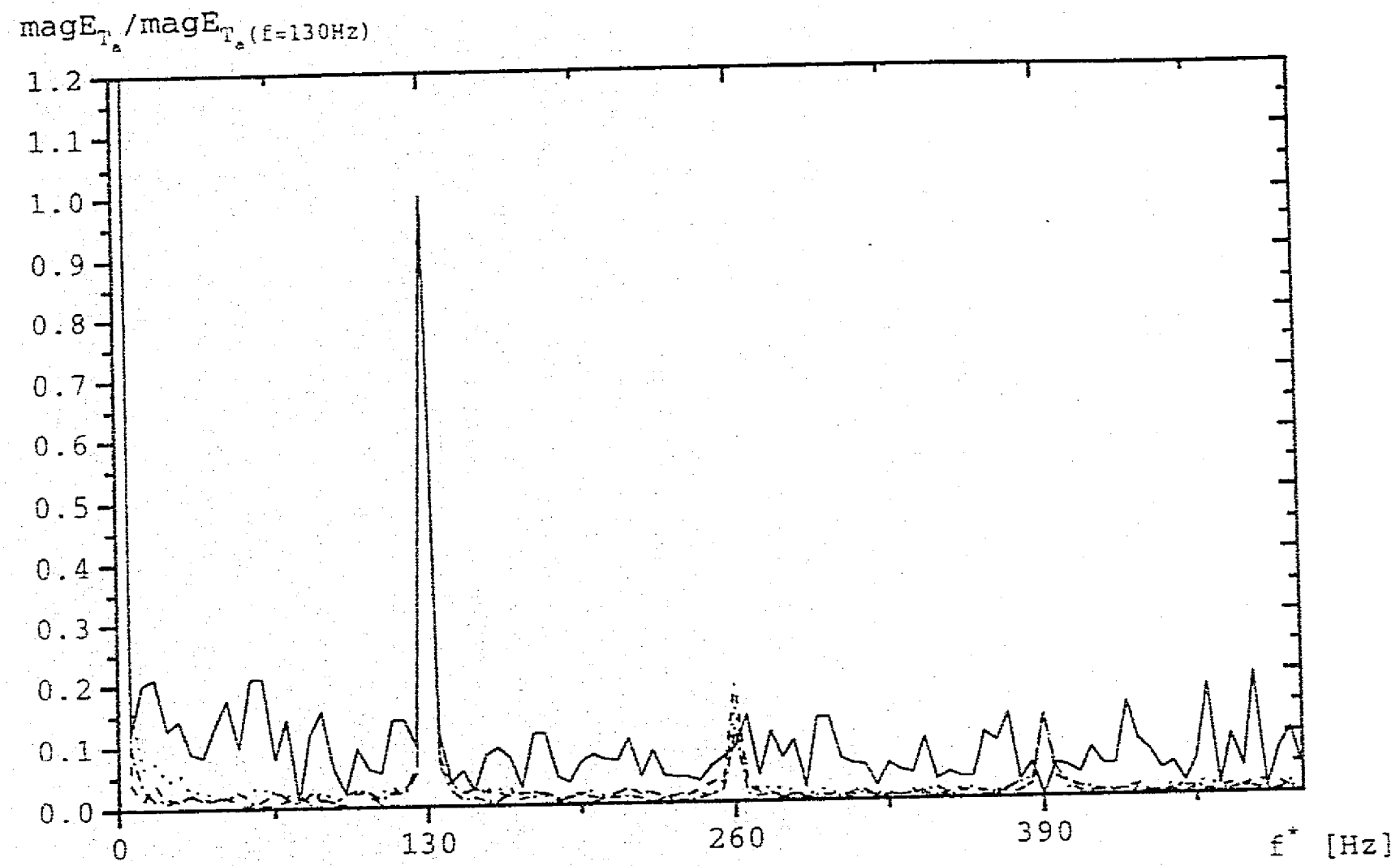


Fig. 4.37. Gráficas de la magnitud normalizada del espectro de frecuencias
 para $\text{grad}T_m = 0$ $T_m^* = 22.3 \text{ }^\circ\text{C}$ $p_a^* = 123 \text{ Pa}$
 Para distintas distancias a la placa: — $y = 0.07$ --- $y = 1.45$ $y = 4.71$
 - · - · - $y = 9.05$

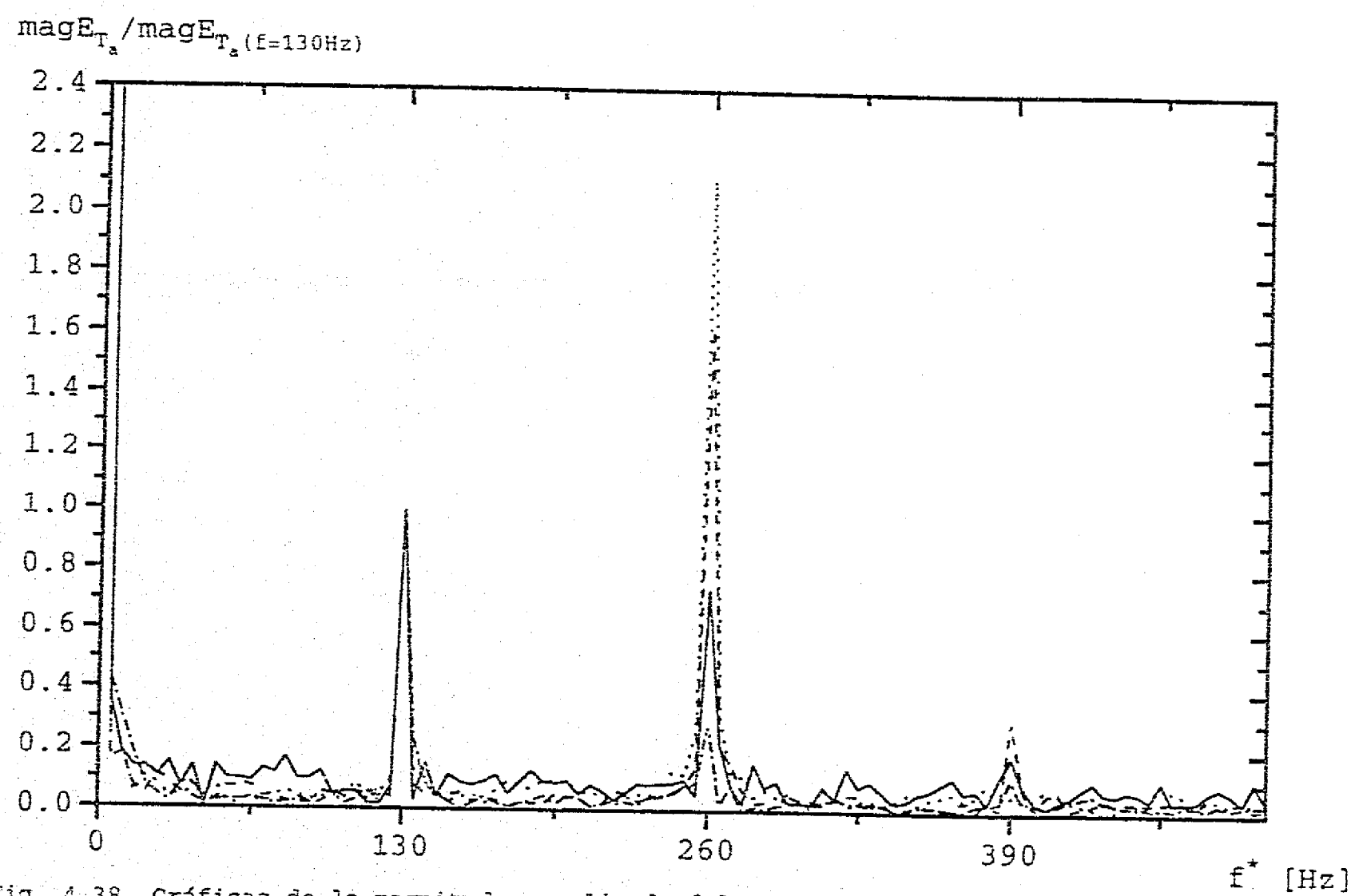


Fig. 4.38. Gráficas de la magnitud normalizada del espectro de frecuencias
 para $\text{grad}T_m = -0.26$ $T_m^* = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ $p_a^* = 107 \text{ Pa}$
 Para distintas distancias a la placa: — $y = 0.04$ --- $y = 1.33$ $y = 4.3$
 - · - · $y = 9$

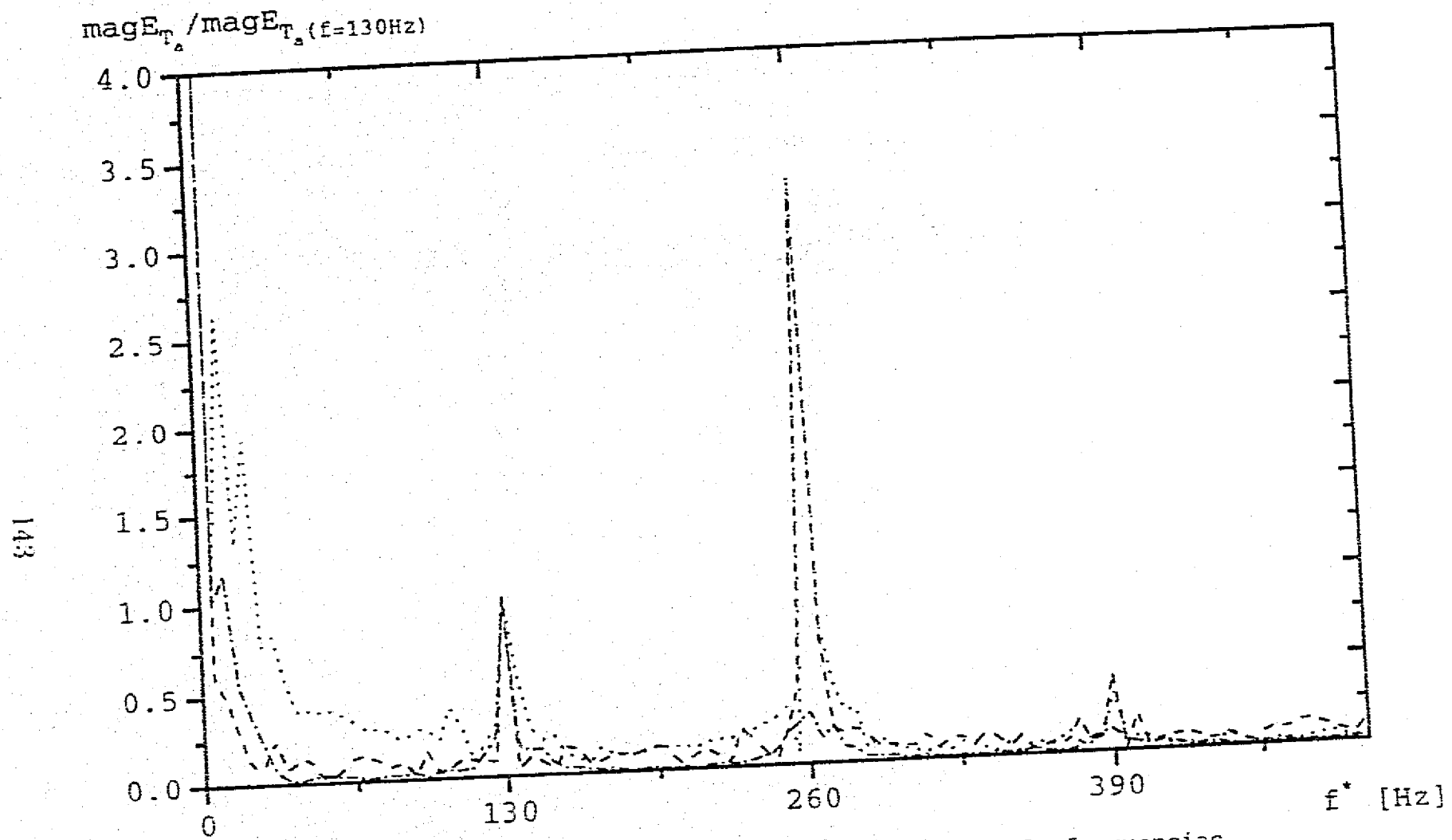


Fig. 4.39. Gráficas de la magnitud normalizada del espectro de frecuencias
 para $\text{grad}T_m = -0.54$ $T_m^* = 28.3^\circ\text{C}$ $P_a^* = 140\text{ Pa}$
 Para distintas distancias a la placa: --- $y = 0.28$ $y = 4.1$ -.- $y = 8.8$

de la frecuencia principal. Con $\nabla T_m = -0.70$, todavía en condición de atenuación, cerca de la placa ($y = 0.70$) la contribución del segundo armónico, alcanza más del 700% de la magnitud de la frecuencia principal, disminuyendo esta contribución al alejarse de la placa. Las magnitudes de las bajas frecuencias siguen siendo importantes, tal como se muestra en la Fig. 4.40. Para $\nabla T_m = -1.0$, condición donde ya se presenta excitación de la onda, la contribución del segundo armónico sigue siendo muy importante tal como se observa en la Fig. 4.41., sin embargo es menor al caso anterior, muy cerca de la placa es del 80%, para distancias cercanas es del 200%, al alejarse de la placa disminuye su amplitud. Las magnitudes de las bajas frecuencias siguen siendo importantes. Para este gra-diente axial de temperatura se analizó el efecto de la amplitud de la onda acústica en la magnitud del espectro de frecuencias, para una misma distancia a la placa ($y = 2.91$). En la Fig. 4.42. se puede observar que la contribución relativa del segundo armónico varía con la amplitud de la oscilación de presión, al aumentar ésta, aumenta la magnitud del segundo armónico hasta alcanzar un máximo y después disminuye. Las magnitudes de frecuencias bajas aumentan con el aumento de la oscilación de presión. En el caso de gradientes $\nabla T_m = -2.3$ y $\nabla T_m = -4.5$, donde la excitación es mayor, la señal sigue teniendo una fuerte contribución del segundo armónico. En estos experimentos, la contribución del segundo armónico no es mayor a la de la frecuencia principal (Fig. 4.43. y 4.44.), aunque esto puede deberse a que para estos dos casos, la amplitud de las oscilaciones de presión empleadas fue mucho menor a los otros casos analizados.

De acuerdo al análisis efectuado en la sección 4.5.2. la oscilación de presión original es básicamente monocromática, presenta una pequeña contribución del segundo armónico, menor al 2% de la correspondiente a la frecuencia principal para el rango de amplitudes de presión en el antinodo empleadas ($p_A^* < 200$ Pa). El gradiente axial de temperatura media adimensional correspondiente al segundo armónico es la mitad del correspondiente a la frecuencia principal (Ec. (3.32)), lo que significa que el efecto del gradiente axial de temperatura en un experimento es diferente para el segundo armónico que para la frecuencia principal, sin embargo, dada la magnitud del segundo armónico en la onda acústica original, este efecto no puede explicar el aumento registrado en la magnitud del segundo armónico. Por lo tanto, este aumento no se puede explicar con la teoría lineal empleada en esta tesis. El aumento en la magnitud de frecuencias bajas indica movimientos lentos del fluido, estos pueden deberse al efecto de la convección natural producida por los gradientes axial y transversal de temperatura. Este efecto no ha sido tomado

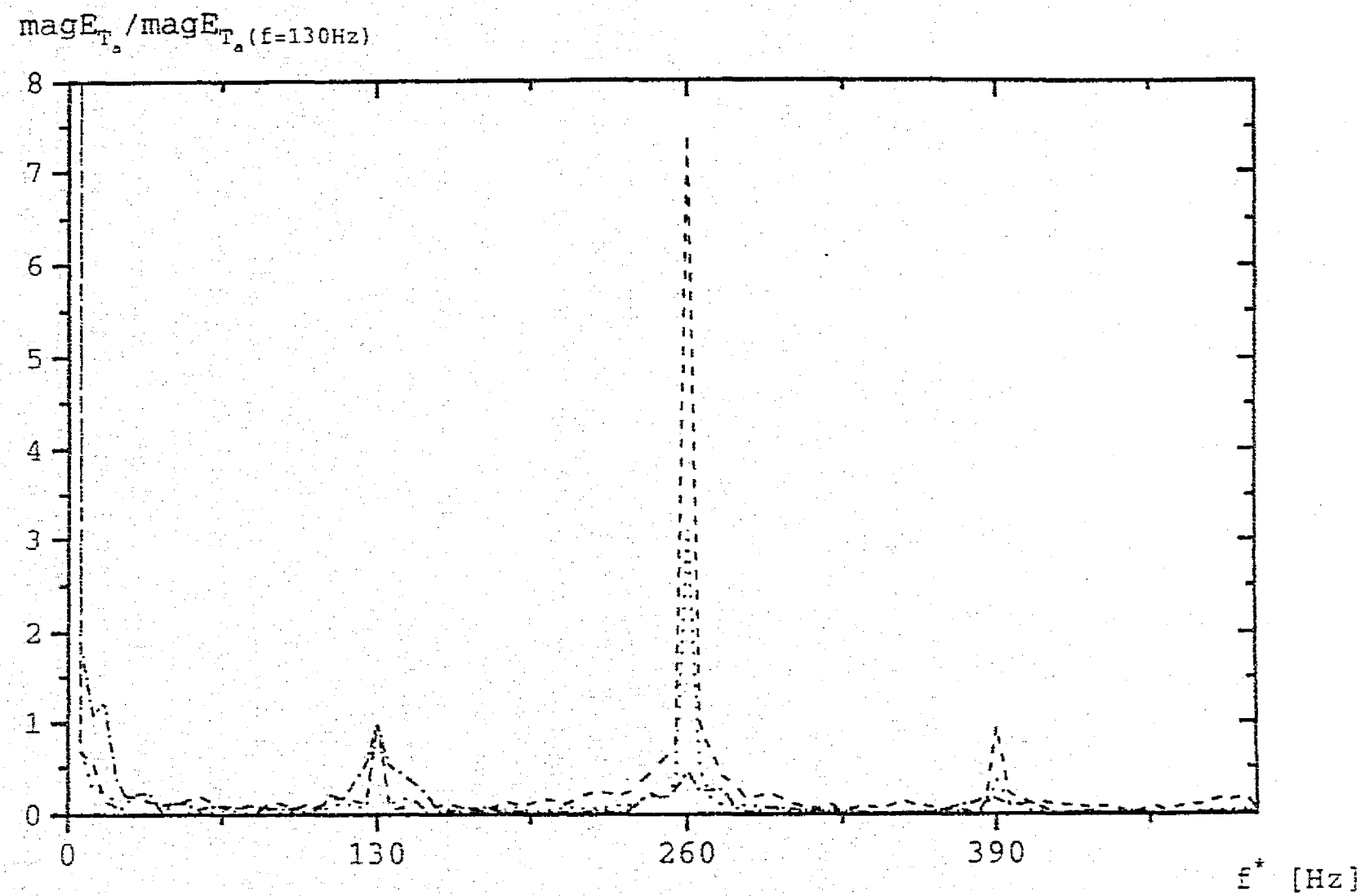


Fig. 4.40. Gráficas de la magnitud normalizada del espectro de frecuencias
 para $\text{grad}T_m = -0.70$ $T_m = 29.5 \text{ }^\circ\text{C}$ $p_a^* = 138 \text{ Pa}$
 Para distintas distancias a la placa: --- $y = 0.70$ $y = 2.08$ -.-.- $y = 8.86$

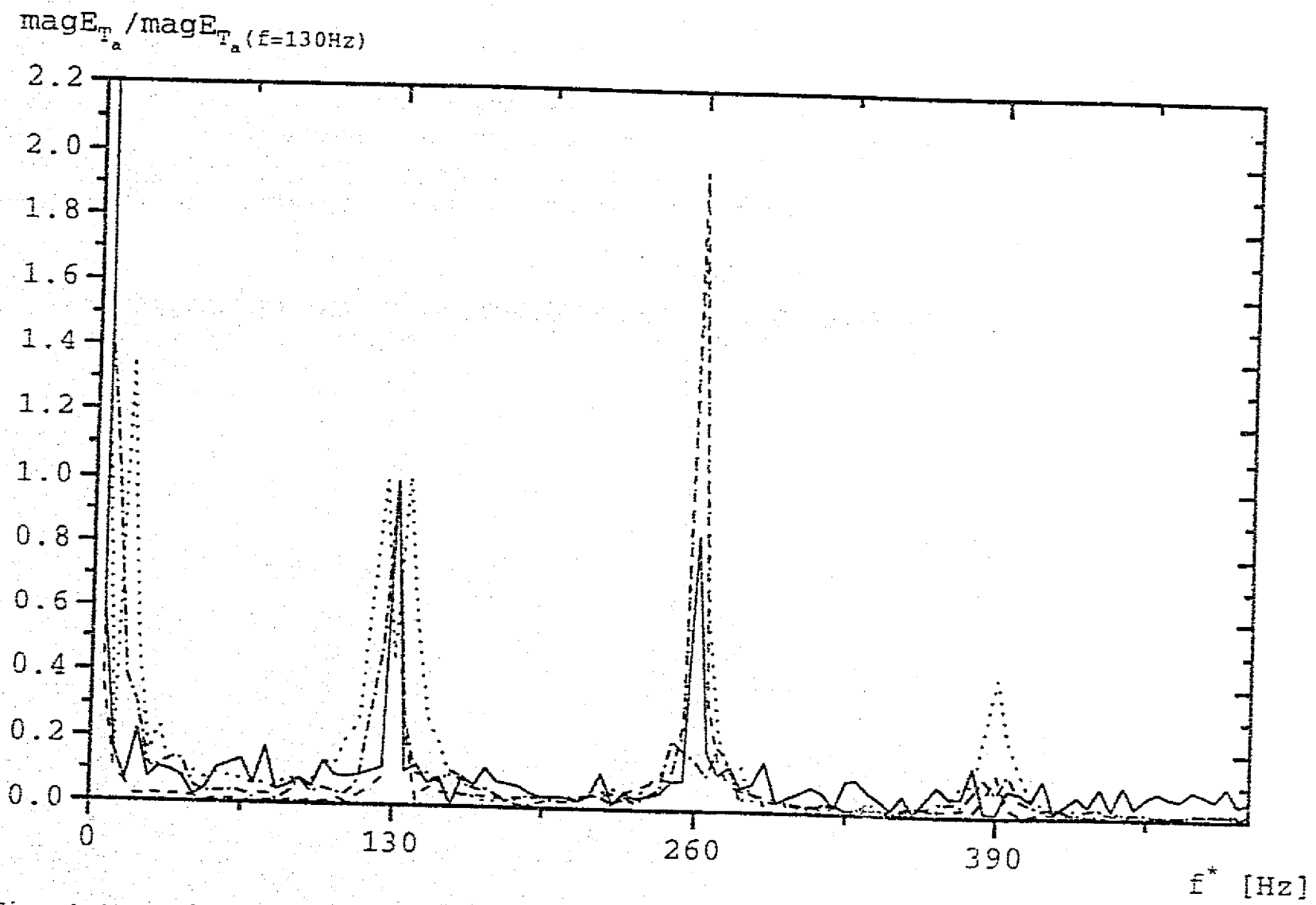


Fig. 4.41. Gráficas de la magnitud normalizada del espectro de frecuencias
 para $\text{grad}T_m = -1.0$ $T_m^* = 34.4 \text{ }^\circ\text{C}$ $p_a^* = 138 \text{ Pa}$
 Para distintas distancias a la placa: — $y = 0.08$ --- $y = 1.86$ $y = 3.75$
 - · - · $y = 8.81$

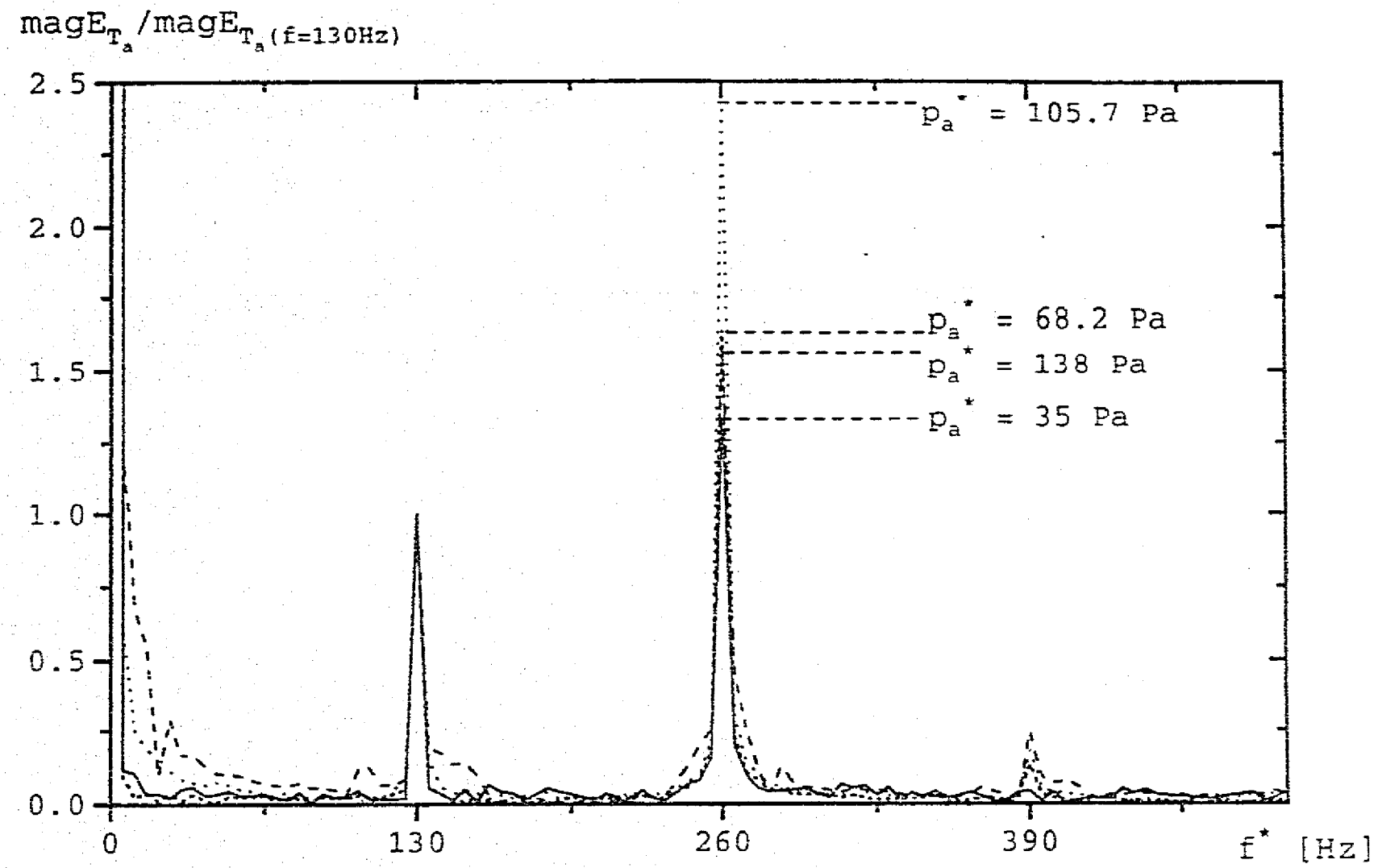


Fig. 4.42. Variación de la magnitud normalizada del espectro de frecuencias con la amplitud de las oscilaciones de presión. $\text{grad}T_m = -1.0$ $T_m^* = 34.4 \text{ }^\circ\text{C}$
 $\gamma = 2.91$ Para distintas amplitudes de la oscilación de presión:
 — $p_a^* = 35.1 \text{ Pa}$ - - - $p_a^* = 68.2 \text{ Pa}$ ····· $p_a^* = 105.7 \text{ Pa}$ - · - · $p_a^* = 138 \text{ Pa}$

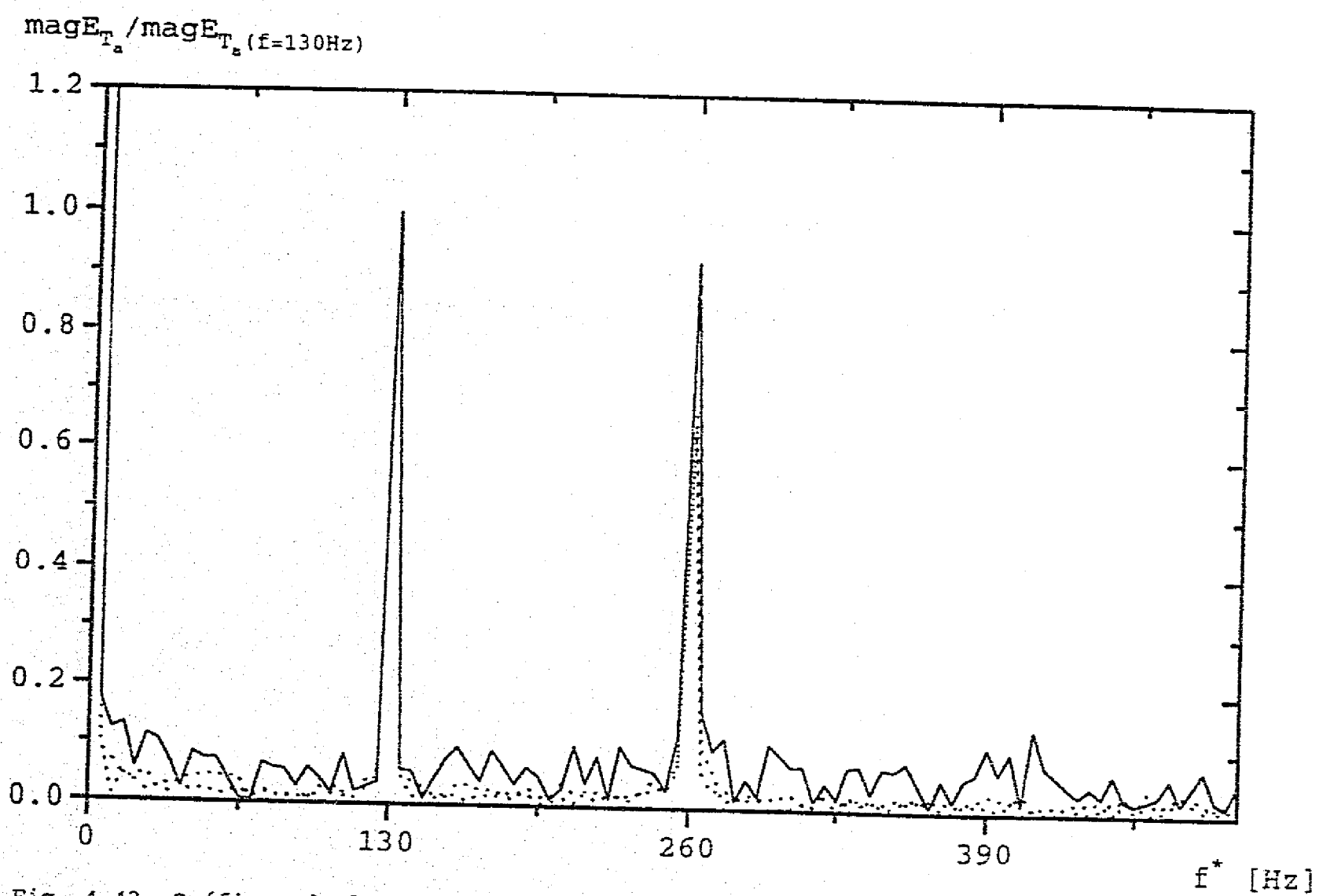


Fig. 4.43. Gráficas de la magnitud normalizada del espectro de frecuencias
 para $\text{grad}T_m = -2.3$ $T_m^* = 45^\circ\text{C}$ $p_a^* = 20 \text{ Pa}$
 Para distintas distancias a la placa: — $y = 0.20$ $y = 2.62$ - · - · $y = 7.86$

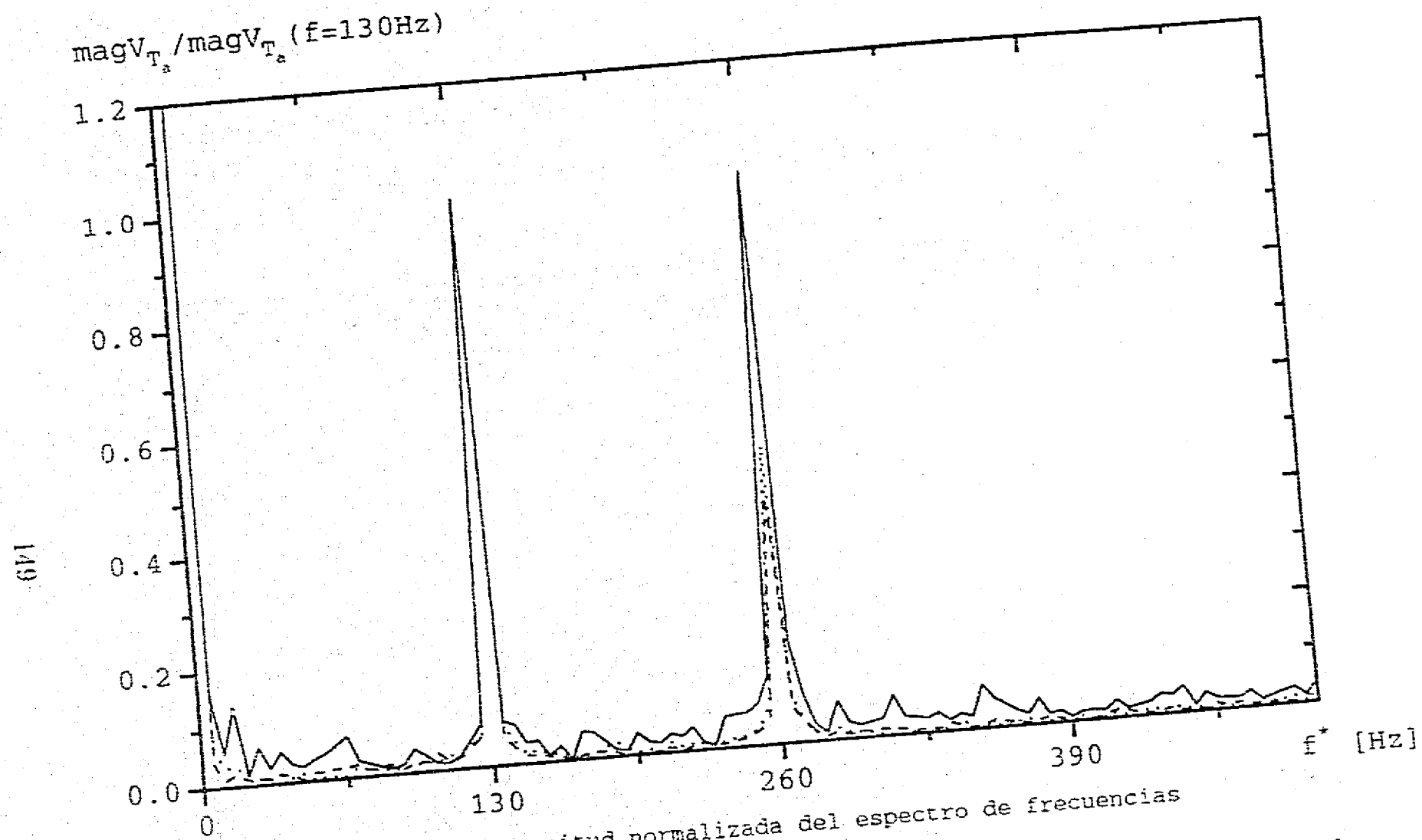


Fig. 4.44. Gráficas de la magnitud normalizada del espectro de frecuencias para $\text{grad}T_m = -4.5$ $T_m^* = 74^\circ\text{C}$ $p_a^* = 20\text{ Pa}$ Para distintas distancias a la placa: — $y = 0.19$ --- $y = 2.46$ $y = 7.28$

en cuenta en la teoría.

Los resultados del análisis en el espacio de frecuencias indican que la placa sin gradiente de temperatura no modifica las magnitudes del espectro de frecuencias, en especial del segundo armónico. Sin embargo, la existencia del gradiente de temperatura introduce una importante contribución del término de segundo orden y un aumento en la magnitud de frecuencias bajas. El aumento en la magnitud del segundo armónico alcanza su máximo para $\nabla T_m = -0.70$. Coincidentemente es para este valor del gradiente, que los valores de la amplitud de las oscilaciones de temperatura como función de y muestran mayor dispersión. El aumento en la magnitud de frecuencias bajas puede deberse a movimientos lentos del fluido producidos por convección natural y pueden ser también causa de la dispersión de los valores de la amplitud de las oscilaciones de temperatura y de fase, sobre todo para los experimentos con $-0.54 \leq \nabla T_m \leq -1.0$.

4.8. Conclusiones

Se demostró experimentalmente que una onda acústica estacionaria en contacto con una placa con $\nabla T_m > \nabla T_{mc}$ (menor en valor absoluto) es atenuada. Bajo esta condición se encontró que el límite al acercarse a la frontera sólido-fluido, de la diferencia de fase entre la oscilación de temperatura y la de presión es menor en valor absoluto a $\pi/2$. Si $\nabla T_m < \nabla T$ (mayor en valor absoluto), la onda es excitada y que el valor absoluto de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión al acercarse a la frontera sólido-fluido es mayor a $\pi/2$. Dada la relación biunívoca que la diferencia de fase crítica entre las oscilaciones de temperatura y presión guarda con la diferencia de fase crítica entre la entrada de calor al fluido y la presión, estos resultados confirman experimentalmente la explicación de Rayleigh de la producción de potencia acústica por efecto termoacústico.

Las mediciones de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión cualitativamente coinciden con las predicciones teóricas para distancias cercanas a la placa ($y < 2$), la discrepancia para mayores distancias se debe a que en el experimento el ∇T_m decae con la distancia y el modelo teórico considera que es independiente de este parámetro. Esta condición del modelo teórico podría relajarse, introduciendo la funcionalidad ∇T_m con respecto a y . Sin embargo, dado el objetivo de esta investigación, lo más importante es el comportamiento cerca de la placa y no es necesario tomar en cuenta esta variación. Cabe mencionar, que en la parte activa de las máquinas termoacústicas, el *stack*, la distancia típica entre

placas o diámetro de los poros es pequeña, por lo que la variación del gradiente axial de temperatura en el fluido es prácticamente independiente de la distancia a la placa.

La amplitud normalizada de las oscilaciones de temperatura medidas experimentalmente tienen un comportamiento cualitativo similar a las predicciones teóricas. La dispersión de los valores experimentales es mayor para $\nabla T_m = -0.70$, valor cercano al gradiente crítico, indicando un cambio en la estabilidad del sistema. Además, el análisis en el espacio de frecuencias indica que coincidentemente, para este valor del gradiente axial de temperatura media, el segundo armónico es más importante que la frecuencia principal.

El valor de la amplitud normalizada de las oscilaciones de temperatura medida es menor que el valor teórico, sobre todo para los experimentos con condición de excitación ($\nabla T_m < \nabla T_{mc}$). Esto significa que existe un factor de atenuación mayor al calculado por el primer modelo, empleado en este capítulo. Esto coincide con lo reportado en la literatura (Atchley *et al.* 1992) y se explica si se considera que el primer modelo, presentado en la sección 3.7., desprecia, en la onda de presión, los efectos de atenuación del gradiente axial de temperatura media, de la viscosidad y de la transferencia de calor. Además, en el experimento, el gradiente de temperatura sólo se mantiene en la zona central de la placa, lo que hace que las zonas continuas contribuyan a la atenuación de la onda.

Los resultados del análisis de las señales del "anemómetro de hilo frío" en el espacio de frecuencias como función de $(\nabla T_m, y)$ indican que la placa sin gradiente de temperatura no modifica la magnitud relativa entre el primer y el segundo armónico de la onda acústica. Sin embargo, la existencia del gradiente de temperatura introduce una importante contribución del término de segundo orden, este aumento en la magnitud del segundo armónico no puede ser explicado con la teoría lineal expuesta en el capítulo 3.

En el caso donde $\nabla T_m = 0$ las condiciones experimentales satisfacen la condición del modelo teórico sobre la independencia de este gradiente con la distancia a la placa (y). Los resultados experimentales de la medición de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión y de la amplitud de la oscilación de temperatura en el fluido en este caso (Fig. 4.30.) muestran una coincidencia satisfactoria con las predicciones teóricas. Esto demuestra la validez del modelo teórico para describir la capa límite térmica oscilatoria en contacto con una pared isotérmica. Además la coincidencia de los resultados teóricos y experimentales da confianza sobre la técnica experimental desarrollada en esta investigación.

5. Conclusiones

Los resultados más importantes de esta tesis, son las demostraciones teórica y experimental de la explicación, dada por Rayleigh, a la generación o atenuación de potencia por efecto termoacústico. Con ello se verifica que la producción de potencia por efecto termoacústico, para ondas viajeras, estacionarias o cualquier combinación de ellas, es debida a la adecuada diferencia de fase entre la transferencia de calor al fluido y la oscilación de presión. Cuando la transferencia de calor al fluido y la oscilación de presión presentan una diferencia de fase, en valor absoluto, menor a $\pi/2$ la onda acústica es excitada, produciéndose potencia acústica. Mientras que cuando la transferencia de calor al fluido y la oscilación de presión tienen una diferencia de fase, en valor absoluto, mayor a $\pi/2$ la onda acústica es atenuada (sección 2.3.). El valor de la diferencia de fase entre la transferencia de calor por una frontera sólida y la oscilación de presión está determinado por el gradiente axial de temperatura en la frontera sólida (sección 3.5.). Las demostraciones teórica y experimental del origen físico del efecto termoacústico enfatizan el hecho de que la generación de potencia acústica por este fenómeno está determinada por las condiciones en la frontera fluido-sólido.

La demostración teórica de la explicación del efecto termoacústico dada en la sección 3.5. es válida para cualquier solución a la ecuación de onda para la presión (Ec. (3.13)), por lo que quedan incluidas en particular las ondas viajeras y las ondas estacionarias. Este resultado ratifica la conclusión de los trabajos de Raspet *et al.* (1993) y Kordomenos *et al.* (1995), en el sentido que la producción de potencia acústica en una onda viajera propagándose en el sentido del gradiente axial de temperatura media, se debe al efecto termoacústico. Y contradice lo afirmado por Garrett y Swift (1995), quienes señalan que el efecto termoacústico sólo se lleva a cabo en ondas estacionarias.

De la investigación teórica efectuada se desprenden otros resultados interesantes y originales. Del estudio paramétrico del segundo modelo (sección 3.10.) se concluye que, tanto para ondas viajeras como para ondas estacionarias, la producción de potencia acústica se incrementa si se reduce alguno de los siguientes parámetros: el cociente entre los calores específicos a presión constante y a volumen constante del fluido (γ), o el cociente de la difusividad de cantidad de

movimiento y la difusividad térmica dado por el número de Prandtl (Pr) o bien la relación entre propiedades del fluido y la pared sólida dada por el factor ϵ . El efecto de estos parámetros en el segundo modelo, es similar al reportado en la literatura, donde se ha empleado el primer modelo. El efecto del semiespesor de la placa l no había sido estudiado anteriormente. En esta investigación se encuentra que la producción de potencia acústica calculada con el primer modelo es prácticamente independiente de este parámetro en ondas viajeras e independiente en ondas estacionarias. El resultado con el segundo modelo para ondas estacionarias es similar. En cambio, en el caso de ondas viajeras, el segundo modelo predice que la producción de potencia acústica depende fuertemente de l . Los sorprendentes resultados del efecto de l en la producción de potencia acústica en ondas viajeras señalan una posible vía para aumentar la producción de potencia acústica en ondas viajeras. De la comparación entre el efecto termoacústico en ondas estacionarias y en ondas viajeras se encuentra que cuando se desprecia el efecto del gradiente axial de temperatura media ∇T_m en la onda de presión (primer modelo), dado un gradiente $\nabla T_m > \nabla T_{m,c}$, la onda viajera produce más potencia acústica que la onda estacionaria (Fig. 3.11.). Mientras que si se considera el efecto del gradiente axial de temperatura media ∇T_m en la onda de presión (segundo modelo), el resultado depende del semiespesor de la placa l . Si la placa tiene un semiespesor $l \geq 10$, la onda estacionaria produce en su posición óptima, más potencia acústica que la onda viajera, sin embargo se puede obtener mayor potencia acústica en la onda viajera si se reduce l a un valor adecuado (Fig. 3.15.). Este resultado hace interesante el estudio de aplicaciones del efecto termoacústico empleando ondas viajeras.

La demostración experimental de la explicación, dada por Rayleigh, a la generación o atenuación de potencia por efecto termoacústico se logró gracias a que en una onda estacionaria la diferencia de fase crítica entre la entrada de calor al fluido y la presión tiene una relación biunívoca con la diferencia de fase crítica entre las oscilaciones de temperatura y presión en la frontera fluido-sólido (sección 3.7.2.). La teoría predice que en condiciones de atenuación de la onda acústica, el valor absoluto de la diferencia de fase entre la oscilación de temperatura y la de presión al acercarse a la frontera sólido-fluido, es menor a $\pi/2$. Mientras que en condiciones de excitación, el valor de esta variable es mayor a $\pi/2$. Esta predicción teórica fue confirmada experimentalmente a través de las mediciones de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y presión dentro de la capa límite térmica (sección 4.7.1.)

A través de la medición de la amplitud de la oscilación de temperatura, se encontró que el gradiente axial de temperatura media crítico para el sistema experimental está comprendido en el rango $-1.0 < \nabla T_{mc} < -0.7$. Para este sistema, el valor teórico estimado por el primer modelo es $\nabla T_{mc} = -0.737$ quedando comprendido en el rango experimental (secciones 4.7.1. y 4.7.3.).

En el caso donde el gradiente axial de temperatura media es nulo ($\nabla T_m = 0$) las condiciones experimentales satisfacen la condición del modelo teórico sobre la independencia de este gradiente con la distancia a la placa (y). Los resultados experimentales de la medición de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión y de la amplitud de la oscilación de temperatura en el fluido en este caso (Fig. 4.30.) muestran una coincidencia satisfactoria con las predicciones teóricas. Esto demuestra la validez del modelo teórico para describir la capa límite térmica oscilatoria en contacto con una pared isotérmica. Además la coincidencia de los resultados teóricos y experimentales da confianza sobre la técnica experimental desarrollada en esta investigación incluyendo la técnica de calibración del "anemómetro de hilo frío". En presencia de gradiente axial de temperatura media, las mediciones de la diferencia de fase entre las oscilaciones de temperatura y de presión coinciden cualitativamente con las predicciones teóricas para distancias cercanas a la placa ($y < 2$), la discrepancia para mayores distancias se debe a que en el experimento el gradiente axial de temperatura decae con la distancia y el modelo teórico considera que el gradiente axial de temperatura media es independiente de esta variable. La amplitud normalizada de las oscilaciones de temperatura medidas experimentalmente tienen un comportamiento cualitativo similar a las predicciones teóricas. La dispersión de los valores experimentales es mayor para $\nabla T_m = -0.70$, valor cercano a gradiente crítico, indicando un cambio en la estabilidad del sistema. La comparación de la amplitud normalizada de las oscilaciones de temperatura medida experimentalmente con su valor teórico, señala que en el experimento existe un factor de atenuación mayor al calculado por el primer modelo, esto se explica porque dicho modelo no toma en cuenta términos disipativos como son los efectos del gradiente axial de temperatura media, de la viscosidad y de la transferencia de calor en el fluido.

El análisis de las señales del "anemómetro de hilo frío" en el espacio de frecuencias muestra un incremento importante en la contribución de la frecuencia del doble de la frecuencia de la onda de presión debido a la presencia del gradiente

axial de temperatura media en la placa, este aumento no puede ser explicado con la teoría lineal utilizada en esta tesis (sección 4.7.4.).

Otra contribución original de esta investigación es el desarrollo de técnicas de calibración de los anemómetros de hilo caliente y de hilo frío para medir respectivamente las oscilaciones de velocidad y temperatura en ondas acústicas. Usando como base el trabajo de Levedeva y Dragan (1991) en esta tesis se desarrolló una técnica para la calibración del anemómetro de hilo caliente en ondas acústicas estacionarias (sección 4.5.7.). Se empleó esta técnica en una onda acústica de frecuencia 130 Hz de baja amplitud, con un rango de la amplitud de la oscilación de velocidad de $0.04 \text{ m/s} < u_a^* < 0.33 \text{ m/s}$. Encontrándose que en este rango la relación entre la amplitud de la fluctuación del voltaje de salida ($E_{u_a}^*$) y la amplitud de la oscilación de velocidad (u_a^*) es lineal. También se desarrolló una técnica para la calibración del "anemómetro de hilo frío" en ondas acústicas estacionarias y se demostró la utilidad de este instrumento para la medición de la oscilación de temperatura en una onda acústica (sección 4.5.6.). Para la frecuencia analizada (130 Hz), se encontró que $0.01 \text{ }^\circ\text{C}$ es la menor amplitud de la oscilación de temperatura que se puede medir con confiabilidad.

Anexo 1. Ondas acústicas

En este anexo se presenta la teoría básica del fenómeno acústico. Una exposición detallada se encuentra en libros de texto clásicos como son el de Landau (1982) y el de Morse & Ingard (1986).

El movimiento oscilatorio de pequeña amplitud en un fluido compresible se conoce con el nombre de onda de acústica u onda de sonido. Este movimiento va acompañado por cambios de pequeña amplitud en las variables termodinámicas que se expresan como una perturbación de primer orden (Φ_1) sumada al valor medio de la variable respectiva (Φ_m), usualmente se desprecian todos los términos de ordenes mayores

$$\Phi = \Phi_m + \Phi_1 \quad (1)$$

La ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2)$$

al sustituir (1) y despreciar las pequeñas cantidades de segundo orden, toma la forma

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_m \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0. \quad (3)$$

En la mayoría de los problemas de acústica la viscosidad es despreciable, por lo que para el estudio de las ondas acústicas se parte de la ecuación de Euler

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (4)$$

que bajo la misma aproximación se reduce a

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + \frac{1}{\rho_m} \nabla p_1 = 0 \quad (5)$$

La condición para que las ecuaciones de movimiento linealizadas (3) y (5) sean aplicables a la propagación de ondas acústicas es que la magnitud de la velocidad de las partículas del fluido en la onda sea pequeña comparada con la velocidad del sonido: $|\mathbf{v}| \ll c$.

Las ecuaciones (3) y (5) contienen tres incógnitas \mathbf{v} , p_1 y ρ_1 . Para eliminar una de ellas, se toma en cuenta que la propagación de sonido en un fluido lejano a fronteras sólidas se puede considerar isentrópica, cuando que el efecto de la viscosidad es despreciable. Por lo tanto un pequeño cambio en la presión está relacionado con un pequeño cambio en la densidad por

$$p_1 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_m} \right)_s \rho_1. \quad (6)$$

Sustituyendo ρ_1 de acuerdo a esta ecuación en la ecuación (3), se encuentra

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + \rho_m \left(\frac{\partial p_m}{\partial \rho_m} \right)_s \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0. \quad (7)$$

Las ecuaciones (5) y (7) pueden reducirse a una sola, en términos de una sola variable, es conveniente introducir el potencial de velocidad (ϕ) definido como $\mathbf{v} = \nabla \phi$. De la ecuación (5) se tiene

$$p_1 = -\rho_m \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (8)$$

sustituyendo en (7) se obtiene la ecuación que debe satisfacer el potencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \phi = 0, \quad (9)$$

donde

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p_m}{\partial \rho_m} \right)_s}. \quad (10)$$

Una ecuación que tiene la forma de (9) se conoce como ecuación de onda. Aplicando el operador gradiente a la ecuación (9), se encuentra que cada una de las tres componentes de la velocidad \mathbf{v} satisface una ecuación de la misma forma. Diferenciando la ecuación (9) con respecto al tiempo se encuentra que también la presión p_1 obedece una ecuación de onda, y dada la ecuación (6), se tiene también que la densidad ρ_1 satisface una ecuación de onda.

Una onda que se propaga en una sola dimensión se conoce como unidireccional, si además todas las variables dependen sólo de una coordenada (por decir x) se denomina onda plana, en este caso el flujo es completamente homogéneo en un plano (yz) y la ecuación de onda (9) toma la forma

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad (11)$$

La solución general de esta ecuación es

$$\phi = f_1(ct - x) + f_2(ct + x) \quad (12)$$

La distribución de las demás cantidades en la onda plana está dada por funciones de la misma forma, por ejemplo la oscilación de presión es

$$p_1 = f_3(ct - x) + f_4(ct + x) \quad (13)$$

Considerando $f_4 = 0$, $p_1 = f_3(ct - x)$ es evidente el significado de la solución de la ecuación de onda. Para cualquier plano x constante, la presión varía con el tiempo y para cualquier tiempo es diferente para diferente x , pero es la misma para coordenadas x y tiempos t tales que $ct - x = \text{constante}$. Por lo tanto el patrón se propaga a través del medio en la dirección x con velocidad c . A c se le conoce como velocidad del sonido. Entonces $f_3(ct - x)$ representa una onda plana viajera propagándose en la dirección positiva del eje x . Es claro que $f_4(ct + x)$ representa una onda propagándose en la dirección contraria.

Una onda acústica en la que todas las variables son funciones periódicas (armónicas) en el tiempo de una sola frecuencia se denomina, por su similitud con la onda de luz de una sola frecuencia, onda acústica monocromática. En este caso es conveniente utilizar la notación compleja, en ella, las variables con significado físico son la parte real (denotado por Re) de una cantidad compleja

$$\Phi_1 = Re [\hat{\Phi}_1(x, y, z) e^{i\omega t}] \quad (14)$$

donde ω es la frecuencia angular de la oscilación definida como

$$\omega = 2\pi f \quad (15)$$

f es la frecuencia de la oscilación.

La variable $\hat{\Phi}_1$ satisface la ecuación

$$\Delta \hat{\Phi}_1 + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\Phi}_1 = 0, \quad (16)$$

que se obtiene al sustituir (14) en (9).

Para una onda unidireccional en x , la solución general de la ecuación (16) está dada por

$$\hat{\Phi}_1 = \text{Re} [C_+ e^{-ix\omega/c} + C_- e^{ix\omega/c}] \quad (17)$$

Sustituyendo en la ecuación (14) se obtiene finalmente

$$\Phi_1 = \text{Re} [C_+ e^{i\omega(t-x/c)} + C_- e^{i\omega(t+x/c)}] \quad (18)$$

Cada uno de los términos representa una onda viajera, plana, monocromática, la primera propagándose en la dirección positiva del eje x y la segunda en sentido opuesto.

Considérese una onda viajera plana monocromática, propagándose en la dirección positiva del eje x . El potencial de velocidad tiene la forma

$$\phi = \text{Re} [C_+ e^{i\omega(t-x/c)}] \quad (19)$$

donde C_+ es una constante llamada amplitud compleja. Escribiendo ésta como $C_+ = ae^{i\zeta}$ con constantes reales a y ζ , se tiene

$$\phi = a \cos(\omega t - \frac{\omega}{c}x + \zeta) \quad (20)$$

La constante a es la amplitud de la onda, y el argumento de la función coseno cuando $t = 0$ se conoce como fase.

Una onda plana que se propaga en la dirección x también se expresa como

$$\phi = \text{Re} [C_+ e^{i(\omega t - kx)}] \quad (21)$$

donde k es el número de onda definido como

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (22)$$

λ es la longitud de onda.

Las ondas monocromáticas son un caso particular pero muy importante, debido a que una onda, cualquiera puede ser representada como una suma de ondas monocromáticas planas con varios vectores y frecuencias. Esta descomposición de una onda en ondas monocromáticas es una expansión en series o integral de Fourier. Los términos de esta expansión son llamadas componentes (de Fourier) de la onda.

En el desarrollo teórico de esta tesis (capítulo 3) y en las secciones siguientes se utilizan oscilaciones monocromáticas, en las ecuaciones que representan dichas oscilaciones, se omite el símbolo Re , quedando sobreentendido que las variables

físicas son la parte real de su representación compleja. A continuación se estudiarán algunos aspectos de las ondas viajeras y estacionarias, que son de utilidad para la comprensión de este trabajo.

A1.1. Ondas viajeras

Considérese nuevamente una onda viajera plana monocromática, propagándose en la dirección positiva del eje x . El potencial tiene la forma

$$\phi = C_+ e^{i(\omega t - kx)} \quad (23)$$

entonces sólo la componente x de la velocidad

$$u_1 = \partial\phi/\partial x = -ikC_+ e^{i(\omega t - kx)} \quad (24)$$

es diferente de cero. Esto significa que la velocidad del fluido en una onda acústica está en la dirección de su propagación. Por esta razón se dice que las ondas acústicas en un fluido son longitudinales.

La presión se obtiene empleando la relación (8)

$$p_1 = p_A e^{i(\omega t - kx)} \quad (25)$$

donde $p_A = -i\rho_m\omega C_+$.

Comparando las expresiones (24) y (25), se encuentra

$$u_1 = \frac{p_1}{\rho_m c} \quad (26)$$

El desplazamiento de las partículas alrededor de su posición media X_1 se obtiene a partir de la definición de velocidad, en este caso se expresa como

$$X_1 = -i \frac{p_A}{\rho_m c \omega} e^{i(\omega t - kx)} \quad (27)$$

Sustituyendo las ecuaciones (6) y (10) se encuentra la variación de la densidad

$$\rho_1 = c^2 p_1 \quad (28)$$

La variación de la temperatura se obtiene a partir de su relación con las oscilaciones de presión

$$T_1 = \left(\frac{\partial T_m}{\partial p_m} \right)_s p_1 \quad (29)$$

y la relación termodinámica (Callen 1960)

$$\left(\frac{\partial T_m}{\partial p_m} \right)_s = \frac{\beta_m T_m}{\rho_m C_p} \quad (30)$$

donde β_m es el coeficiente de expansión térmica y C_p es el calor específico a presión constante. La ecuación (29) toma la forma

$$T_1 = \frac{\beta_m T_m}{\rho_m C_p} p_1 \quad (31)$$

De estas expresiones se deduce que en una onda viajera adiabática, las oscilaciones de presión, velocidad, temperatura y densidad están en fase, es decir simultáneamente crecen o decrecen, mientras que el desplazamiento presenta un defasamiento de $\pi/2$ con respecto a las demás.

Cabe señalarse que experimentalmente obtener una onda viajera pura es difícil, ya que existen reflexiones con los objetos alrededor de la fuente generadora. Existen técnicas especializadas para producirlas (Levedeva & Dragan 1991).

A1.2. Ondas estacionarias

Las ondas estacionarias se forman por la superposición de dos ondas viajeras de igual amplitud ($C_+ = C_-$) viajando en sentidos opuestos. Considerando esto, el potencial de velocidad en una onda estacionaria es

$$\phi = C_+ e^{i(\omega t - kx)} + C_+ e^{i(\omega t + kx)} \quad (32)$$

simplificando se obtiene

$$\phi = 2C_+ \cos(kx) e^{i\omega t} \quad (33)$$

Procediendo en forma similar a la efectuada en el caso de ondas viajeras, la oscilación de presión es

$$p_1 = p_A \cos(kx) e^{i\omega t} \quad (34)$$

donde $p_A = -i2C_+ \rho_m \omega$ es la amplitud de la oscilación de presión en el antinodo, $p_a = p_A \cos(kx)$ es la amplitud local de la oscilación de presión.

La oscilación de velocidad está dada por

$$u_1 = -i \frac{p_A}{\rho_m c} \text{sen}(kx) e^{i\omega t} \quad (35)$$

El desplazamiento de las partículas alrededor de su posición media para la onda estacionaria se expresa como

$$X_1 = -\frac{p_A}{\rho_m c \omega} \text{sen}(kx) e^{i\omega t} \quad (36)$$

La oscilación de densidad y de temperatura se expresan en términos de p_1 de la misma forma que para las ondas viajeras.

Por lo tanto en el caso de ondas estacionarias adiabáticas, la presión y la velocidad se encuentran defasadas en el tiempo una con respecto de la otra por $\pi/2$. El desplazamiento presenta un defasamiento temporal de $\pi/2$ con respecto a la velocidad y de π con respecto a la presión. La densidad y la temperatura se hallan en fase con respecto a la presión.

Obsérvese que en las ondas estacionarias la oscilación de cualquiera de las variables se lleva a cabo simultáneamente en todo punto, aunque con distinta amplitud. En la Fig. A1.1 se grafican las amplitudes de presión y de velocidad en función de la coordenada x .

Una onda estacionaria se obtiene de la reflexión perfecta de una onda viajera en una superficie perpendicular a ella. Experimentalmente es posible obtener una buena aproximación de onda estacionaria en un ducto o guía de ondas con una pared transversal de alta impedancia acústica ($p_1/u_1 \rightarrow \infty$) y una longitud del ducto de uno de los valores siguientes: $\frac{\lambda}{4}$, $\frac{\lambda}{2}$, λ o sus múltiplos. La alta impedancia acústica de la pared se logra si la pared es altamente masiva.

Para generar una onda acústica estacionaria de un cuarto de onda, es decir, que la longitud de la guía de ondas L sea un cuarto de la longitud de la onda en su interior, la frecuencia de la onda debe ser igual a la frecuencia de resonancia

$$f_r = \frac{c}{4L} \quad (37)$$

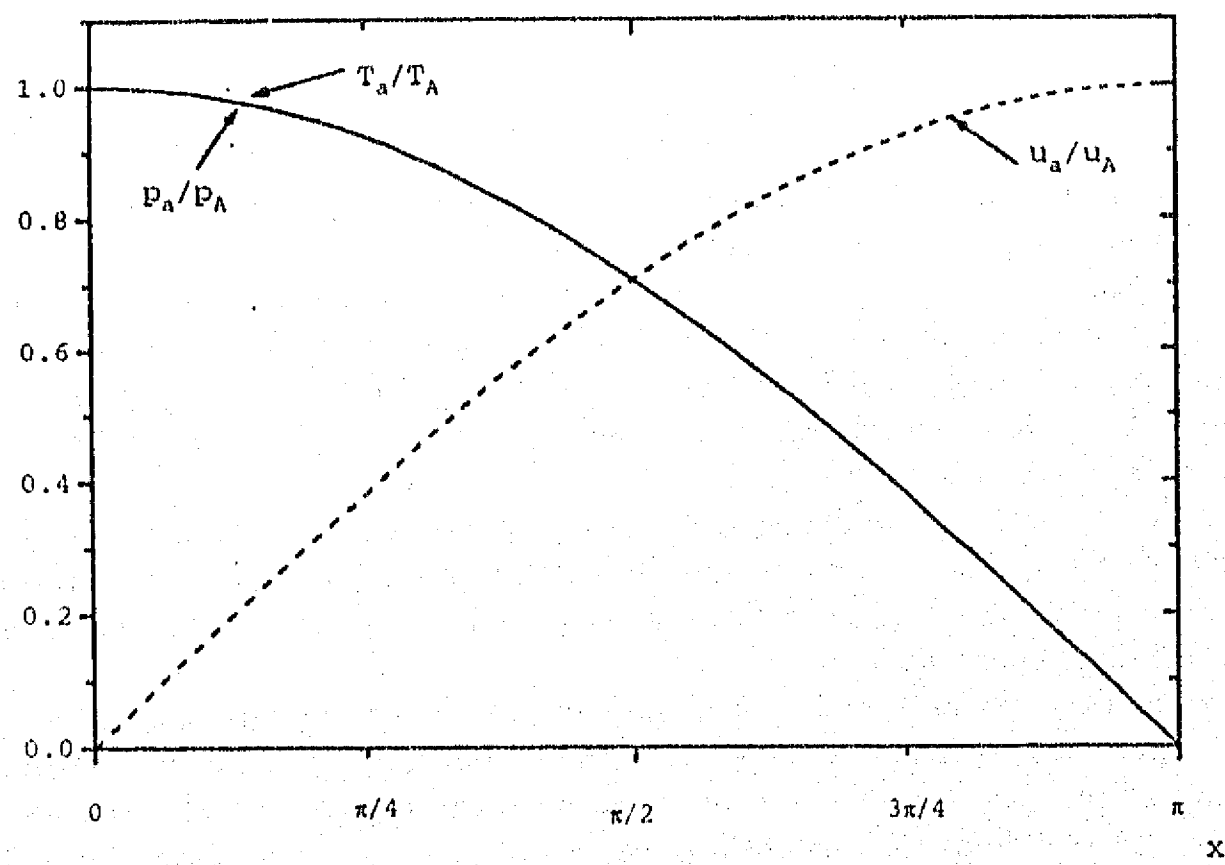


Fig. A1.1. Perfil de las amplitudes normalizadas de las oscilaciones de presión, de temperatura y de velocidad en una onda acústica estacionaria.

Anexo 2. Ecuaciones de balance y producción de potencia acústica

En este anexo se amplian algunos aspectos del desarrollo de la teoría expuesta en el capítulo 3. En particular, se presenta la deducción del modelo bidimensional y se deduce de manera formal la expresión para la producción de potencia acústica en forma dimensional y adimensional.

A2.1. Deducción del modelo bidimensional

Considérese un fluido compresible en la vecindad de una sola placa paralela al eje x e infinita en la dirección z (Fig. 3.1(a)) o entre dos placas paralelas separadas un distancia $2d$ (Fig. 3.1(b)). La(s) placa(s) tiene(n) un gradiente de temperatura media en la dirección x que se extiende al fluido con un valor independiente de la coordenada y .

Se asume que lejos de la(s) placa(s) existe una onda acústica plana monocromática que se propaga en la dirección paralela a la(s) placa(s) (dirección x), es decir existe una perturbación de las variables dinámicas y termodinámicas en el fluido en estado de reposo. Como la velocidad media es nula, la presión media es constante.

Se desprecian los efectos de los bordes de la placa y las fuerzas de cuerpo, por lo que el problema se describe con las ecuaciones de balance para flujo bidimensional, en coordenadas cartesianas, compresible, con propiedades variables y sin fuerzas de cuerpo (Arpaci & Larsen 1984).

Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) = 0 \quad (1)$$

Ecuación de cantidad de movimiento en la dirección x

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad (2)$$

Ecuación de cantidad de movimiento en la dirección y

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] \quad (3)$$

Ecuación de energía

$$\begin{aligned} \rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \beta T \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial T}{\partial x} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{4}{3} \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right] \\ &+ 2\mu \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \quad (4)$$

donde u y v son las velocidades en las direcciones x y y respectivamente. La presión, la temperatura y la densidad son p , T y ρ respectivamente. μ es la viscosidad dinámica, K es la conductividad térmica, y C_p es el calor específico a presión constante.

La teoría se desarrolla haciendo suposiciones adicionales:

- El fluido se encuentra en reposo con perturbaciones de las variables dinámicas y termodinámicas. Las variables se expresan como un valor medio más una perturbación de primer orden

$$\Phi(x, y, t) = \Phi_m(x, y) + \Phi_1(x, y, t) \quad (5)$$

Se asume que la presencia de la pared no modifica la frecuencia de la onda acústica monocromática existente, por lo que la perturbación de primer orden, tiene la forma:

$$\Phi_1(x, y, t) = \hat{\Phi}_1(x, y) e^{i\omega t} \quad (6)$$

donde ω es la frecuencia angular de la onda.

- Se considera la aproximación de capa límite. Esto significa que la profundidad de penetración viscosa en el fluido δ_v ($\delta_v \equiv \sqrt{2\mu/\rho_m\omega}$) es mucho menor que la longitud de onda λ por lo que:

$$v \ll u; \quad \frac{\partial v}{\partial x} \ll \frac{\partial u}{\partial x} \quad y \quad \frac{\partial v}{\partial y} \ll \frac{\partial u}{\partial y} \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \ll \frac{\partial u}{\partial y} \quad (8)$$

- Y la profundidad de penetración térmica en el fluido δ_k ($\delta_k \equiv \sqrt{K/\rho_m C_p \omega}$) es mucho más pequeña que λ . Esto implica que el efecto de la conductividad térmica en la dirección x pueda despreciarse, comparado con la conducción térmica en la dirección y .

Bajo estas condiciones las ecuaciones de balance (Ec. (1)-(4)) se expresan como:

Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (9)$$

Ecuación de cantidad de movimiento en la dirección x

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (10)$$

Ecuación de energía

$$\begin{aligned} \rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \beta T \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) \\ = \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \quad (11)$$

Estas ecuaciones de balance para el fluido con gradientes de temperatura y de densidad en la dirección x , e independientes de la coordenada y , en la aproximación de capa límite linealizadas (considerando la forma de las perturbaciones a primer orden (Ec. (6))), se expresan como

$$i\omega \rho_1 + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_m u_1) + \rho_m \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad (12)$$

$$i\omega\rho_m u_1 = -\frac{\partial p_1}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \quad (13)$$

$$\rho_m C_p \left(i\omega T_1 + u_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) - i\omega\beta_m T_m p_1 - K \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} \quad (14)$$

Estas son las ecuaciones de balance utilizadas en la sección 3.1.

A2.2. Cálculo del promedio de la producción de potencia acústica

En esta sección se expone el cálculo del promedio temporal de la producción de potencia acústica en términos de la teoría lineal.

El trabajo dW hecho por una parcela de fluido de volumen V cuando se expande a un volumen $V + dV$ esta dado por (Callen 1960)

$$dW = p dV = -\frac{p}{\rho} V d\rho \quad (15)$$

La potencia por unidad de volumen desarrollada por el fluido a medida que se expande se obtiene sustituyendo la ecuación anterior en la definición de potencia por unidad de volumen

$$\dot{w}(x, y, z, t) = \frac{1}{V} \frac{dW}{dt} = -\frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (16)$$

El efecto neto para una posición x , se obtiene el promedio temporal de la potencia total desarrollada por el fluido a medida que se expande (ecuación (16)) y se integra sobre la sección transversal. Por lo tanto, la producción de potencia acústica en función de x está dada por

$$w(x) = \iint \left\langle -\frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right\rangle dy dz \quad (17)$$

donde $\langle \rangle$ denota promedio temporal, definido como:

$$\langle \Phi \rangle \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \Phi(t) dt \right) \quad (18)$$

Cabe recordar que cuando la función Φ es periódica, el promedio temporal es cero:

$$\langle \Phi \rangle \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\tau} \int_0^{\Delta t} \Phi(t) dt \right) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \Phi(t) dt = F_1(P) - F_1(0) = 0 \quad (19)$$

donde τ es el período y $\partial F_1/\partial t = \Phi_1$.

Además, el promedio temporal del producto de dos funciones periódicas, ambas de período τ se puede calcular como:

$$\langle \Phi \Psi \rangle = \frac{1}{2} Re [\Phi \tilde{\Psi}] \quad (20)$$

donde \sim denota el complejo conjugado de la variable y Re significa la parte real. Una potencia w positiva significa que el fluido hace potencia sobre los alrededores, es decir existe una producción de potencia acústica. Mientras que una potencia negativa significa que los alrededores hacen potencia sobre el fluido, esto es, hay pérdida de potencia acústica.

Para evaluar la producción de potencia $w(x)$ en términos de las variables físicas (ec. (5)), se efectúa el procedimiento que se detalla a continuación. La ecuación (17) es válida en el sistema de referencia del fluido en movimiento. Para evaluar la potencia para un volumen de control, se utiliza la expresión para la derivada total en dos dimensiones

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \quad (21)$$

Al sustituir las ecuaciones (5) en la anterior se obtiene

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + u_1 \left(\frac{\partial \rho_m}{\partial x} + \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \right) + v_1 \left(\frac{\partial \rho_m}{\partial y} + \frac{\partial \rho_1}{\partial y} \right) \quad (22)$$

Al calcular los productos y considerar que ρ_m sólo depende de x , la ecuación anterior se reduce a

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \rho_m}{\partial x} + u_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial y} \quad (23)$$

Al sustituir las ecuaciones (5) y (23), la ecuación (17) toma la forma

$$w(x) = \int \int \left\langle \frac{(p_m + p_1)}{\rho_m \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_m} \right)} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \rho_m}{\partial x} + u_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial y} \right) \right\rangle dy dz \quad (24)$$

Al usar la serie binomial (Spiegel 1980)

$$(1 + \xi)^{-1} = 1 - \xi + O(\xi^2) \quad \text{donde } -1 < \xi < 1 \quad (25)$$

en el denominador de la ecuación (24), la ecuación (24) toma la forma

$$w(x) = \int \int \left\langle \frac{(p_m + p_1) \left(1 - \frac{p_1}{\rho_m} + O\left(\left(\frac{p_1}{\rho_m}\right)^2\right)\right)}{\rho_m} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \rho_m}{\partial x} + u_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial y} \right) \right\rangle dx dy dz \quad (26)$$

Al efectuar los productos y reteniendo términos hasta segundo orden se obtiene

$$w(x) = -\frac{1}{\rho_m} \int \int \left(\left\langle p_m \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \right\rangle + \left\langle p_m \frac{\partial \rho_m}{\partial x} u_1 \right\rangle + \left\langle p_m u_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \right\rangle + \left\langle p_m v_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial y} \right\rangle - \left\langle \frac{p_m}{\rho_m} \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \frac{p_m}{\rho_m} \frac{\partial \rho_m}{\partial x} \rho_1 u_1 \right\rangle + \left\langle p_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \rho_m}{\partial x} p_1 u_1 \right\rangle \right) dy dz \quad (27)$$

Obsérvese que en la ecuación anterior no existen términos de orden cero. Además el primer y el segundo términos se anulan debido al promedio temporal, con lo que la ecuación (27) se reduce a

$$w(x) = -\frac{1}{\rho_m} \int \int \left(p_m \left\langle u_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \right\rangle + p_m \left\langle v_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial y} \right\rangle - \frac{p_m}{\rho_m} \left\langle \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \right\rangle - \frac{p_m}{\rho_m} \frac{\partial \rho_m}{\partial x} \langle \rho_1 u_1 \rangle + \left\langle p_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \right\rangle + \frac{\partial \rho_m}{\partial x} \langle p_1 u_1 \rangle \right) dy dz \quad (28)$$

Recuperándose el conocido resultado de que el promedio temporal de la producción de potencia acústica es una cantidad de segundo orden.

Por otro lado, la ecuación de continuidad (9), expresada a primer orden

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_m u_1) + \rho_m \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \quad (29)$$

multiplicada por $p_m \rho_1 / \rho_m$ y promediada en el tiempo, se expresa como

$$-\frac{p_m}{\rho_m} \left\langle \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \right\rangle = \frac{p_m}{\rho_m} \left\langle \rho_1 \frac{\partial}{\partial x} (\rho_m u_1) \right\rangle + p_m \left\langle \rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} \right\rangle.$$

Al sustituir la ecuación anterior en el cuarto término de la ecuación (28), e integrando sobre z , se obtiene la siguiente expresión para la producción de potencia acústica

$$w(x) = -\frac{\Delta z}{\rho_m} \int \left(p_m \left\langle u_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \right\rangle + p_m \left\langle v_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial y} \right\rangle + \frac{p_m}{\rho_m} \left\langle \rho_1 \frac{\partial}{\partial x} (\rho_m u_1) \right\rangle \right. \\ \left. + p_m \left\langle \rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} \right\rangle - \frac{p_m}{\rho_m} \frac{\partial \rho_m}{\partial x} \langle \rho_1 u_1 \rangle + \left\langle p_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \right\rangle + \frac{\partial \rho_m}{\partial x} \langle p_1 u \rangle \right) dx dy \quad (30)$$

Al hacer uso de la siguiente igualdad,

$$\frac{\partial}{\partial y} (\rho_1 v_1) = \frac{\partial \rho_1}{\partial y} v_1 + \rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial y}$$

la ecuación (30) puede reescribirse convenientemente como

$$w(x) = -\frac{\Delta z}{\rho_m} \left(+p_m \int \left\langle \frac{\partial}{\partial x} (\rho_1 u_1) \right\rangle dy + p_m \int \left\langle \frac{\partial}{\partial y} (\rho_1 v_1) \right\rangle dy \right. \\ \left. + \int \left\langle p_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \right\rangle dy + \frac{\partial \rho_m}{\partial x} \int \langle p_1 u_1 \rangle dy \right) \quad (31)$$

La ecuación de continuidad (ecuación (9)) a segundo orden¹

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho_1 u_1) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho_1 v_1) = 0, \quad (32)$$

al ser promediada en el tiempo e integrada en la dirección y , se expresa como

$$\int \left\langle \frac{\partial}{\partial x} (\rho_1 u_1) \right\rangle dy + \langle (\rho_1 v_1) \Big|_{y=0}^{y=d} \rangle = 0 \quad (33)$$

¹El considerar las perturbaciones de las variables sólo de primer orden, introduce una inconsistencia en la ecuación de continuidad a segundo orden, sin embargo es un método ampliamente usado en acústica (Morse & Ingard 1986).

El último término es cero debido a los límites en la integración espacial ($v = 0$ para $y = 0$ y $y = d \rightarrow \infty$ en la configuración de una sola placa o para $y = 0$ y $y = d$ en la configuración de placas paralelas). Por lo que la ecuación (33) se reduce a

$$\int \left\langle \frac{\partial}{\partial x} (\rho_1 u_1) \right\rangle dy = 0 \quad (34)$$

El segundo término de la ecuación (31) es cero. Esto se demuestra al intercambiar el orden entre promedio temporal e integración espacial y aplicar las condiciones de frontera:

$$\int \left\langle \frac{\partial}{\partial y} (\rho_1 v_1) \right\rangle dy = \left\langle \int \frac{\partial}{\partial y} (\rho_1 v_1) dy \right\rangle = \langle \rho_1 v_1 |_{y=0}^{y=d} \rangle = 0 \quad (35)$$

Al sustituir las ecuaciones (34) y (35) en la ecuación del promedio temporal de la producción de potencia acústica (Ec. (31)), ésta se reduce a

$$w(x) = -\frac{\Delta z}{\rho_m} \left(\int \left\langle p_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \right\rangle dy + \frac{\partial \rho_m}{\partial x} \int \langle p_1 u_1 \rangle dy \right) \quad (36)$$

Se puede dar una forma alternativa a w si se expresa la perturbación de la densidad en términos de las perturbaciones de temperatura y presión

$$\rho_1 = -\rho_m \beta_m T_1 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T p_1 \quad (37)$$

Donde $\beta_m = -\frac{1}{\rho_m} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$ es el coeficiente de expansión térmica correspondiente a la temperatura media. Sustituyendo lo anterior en la ecuación (36) y notando que el promedio temporal del término $\langle p_1 \partial p_1 / \partial t \rangle$ es cero, se obtiene la siguiente relación

$$w(x) = \Delta z \left(\beta_m \int \left\langle p_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} \right\rangle dy - \frac{\partial \rho_m}{\partial x} \int \langle p_1 u_1 \rangle dy \right) \quad (38)$$

Al sustituir la expresión para T_1 de la ecuación (6), expresando el gradiente de la densidad media en términos del gradiente de la temperatura media y usando la relación para el producto de las variables periódicas (ecuación (20)), la ecuación anterior se expresa como

$$w(x) = \Delta z \int \left(\omega \beta_m \langle p_1 (iT_1) \rangle dy + \beta_m \frac{\partial T_m}{\partial x} \langle p_1 u_1 \rangle \right) dy \quad (39)$$

Esta es la forma empleada en la sección 3.4. (Ecuación (3.19)).

A2.3. Cálculo del promedio de la producción de potencia acústica en forma adimensional

En el estudio adimensional se reescriben todas las variables dimensionales con un superíndice *, por lo que la ecuación (39) se expresa como

$$w^*(x^*) = \Delta z^* \int \left(\omega \beta_m \langle p_1^* (iT_1^*) \rangle dy^* + \beta \frac{\partial T_m^*}{\partial x^*} \langle p_1^* u_1^* \rangle \right) dy^* \quad (40)$$

Al utilizar la ecuación (20), la ecuación (40) toma la forma

$$w^*(x^*) = \frac{\Delta z^*}{2} Re \left[\int \left(\omega \beta_m \langle p_1^* (iT_1^*) \rangle dy^* + \beta \frac{\partial T_m^*}{\partial x^*} \langle p_1^* u_1^* \rangle \right) \right] dy^* \quad (41)$$

Si se considera que la presión es real, como sucede en el primer y segundo modelos, la ecuación anterior se expresa como:

$$w^*(x^*) = \frac{\Delta z^*}{2} p_{1R}^* \int \left(\omega \beta_m \langle -T_{1I}^* \rangle dy^* + \beta \frac{\partial T_m^*}{\partial x^*} \langle u_{1R}^* \rangle \right) dy^* \quad (42)$$

donde p_{1R}^* indica la parte real de p_1^* y T_{1I}^* indica la parte imaginaria de T_1^* . Escalando la producción de potencia acústica con $\frac{1}{2} \Delta z^* \delta_k p_A \frac{T_{\Delta a}}{T_{mr}}$ y tomando en cuenta las ecuaciones ((3.23 y 3.24), la producción de potencia acústica en forma adimensional se expresa como

$$w(x) = p_{1R} \int (-T_{1I} + \Gamma u_{1R}) dy \quad (43)$$

donde

$$\Gamma = \frac{\beta_{mr} T_{mr} \nabla T_m}{\gamma - 1} \quad (44)$$

Estas son las expresiones que se utilizan en la sección 3.6.

Anexo 3. Anemometría de hilo caliente y de hilo frío

Para medir las fluctuaciones de velocidad y las fluctuaciones de temperatura de la onda acústica en esta investigación se utilizó la técnica conocida con el nombre genérico de anemometría de hilo caliente.

A3.1. Principio de funcionamiento

El hilo caliente es básicamente un transductor térmico. Dicho de una manera simple, el principio de funcionamiento es el siguiente: se hace pasar una corriente eléctrica a través de un fino hilo metálico que está expuesto a un flujo transversal. Si la velocidad del flujo o la temperatura varían, la transferencia de calor del hilo varía. Esto a su vez, causa una variación en el balance de calor del hilo. El hilo está hecho de un material termoresistivo, *i.e.* si la temperatura del hilo varía, su resistencia cambia, como también se altera el calentamiento por efecto Joule. La variación de la resistencia es monitoreada por diversos métodos electrónicos que proporcionan una señal relacionada con la velocidad del flujo o con las fluctuaciones de la temperatura.

En sus orígenes, la técnica del hilo caliente fue empleada sólo para medir velocidad, de ahí el nombre de anemometría. Para diferenciar si la técnica se usa para medir velocidad o temperatura, algunos autores denominan anemometría de hilo caliente aquella donde se mide velocidad y "anemometría de hilo frío" en la que se mide temperatura, la razón de esto se verá más adelante.

A3.2. Modos de operación

Existen dos modos básicos de operar los anemómetros de hilo caliente y de hilo frío. Estos son, el modo de corriente constante (CCA del inglés *constant current anemometer*) y el modo de temperatura constante (CTA del inglés *constant temperature anemometer*). El modo de operación está determinado por el tipo de sistema electrónico conectado al sensor. El CCA puede ser usado tanto para medición de velocidad como de temperatura. Sin embargo, actualmente casi no se usa este modo para la medición de velocidad. El CCA es considerado

el mejor instrumento para medir fluctuaciones de temperatura en un gas (Perry 1982). Para mediciones de velocidad y sus fluctuaciones el CTA presenta mejores resultados.

A3.3. Sensores empleados

El hilo sensor puede ser de diferentes materiales, se busca que tengan un alto valor del coeficiente térmico de resistividad eléctrica. Los materiales más usados son el tungsteno y el platino Wollaston. El tungsteno tiene un alto coeficiente térmico de resistividad eléctrica, es utilizado en sensores de velocidad (el diámetro del hilo de tungsteno (D) está dentro del rango de $5\mu m$ a $9\mu m$). En algunos casos se hace un electrodeposición de cobre al hilo de tungsteno y posteriormente se remueve dicho recubrimiento con ácido nítrico. En los sensores de temperatura se requiere que el hilo sea más delgado por lo que se usa el hilo de platino Wollaston. Éste consiste en un hilo de platino cubierto con plata y sometido a un proceso especial que permite hacer el hilo sumamente delgado, la plata es posteriormente removida (en todo el hilo o sólo en la zona central) utilizando ácido nítrico (el diámetro (D) del hilo de platino está en el rango de $0.25\mu m$ a $2.5\mu m$). En la Fig. A3.1 se muestran esquemas de los sensores empleados en la investigación experimental de esta tesis.

A3.4. Transferencia de calor en el hilo

En el hilo calentado y expuesto a un flujo, la transferencia de calor se lleva a cabo por varios mecanismos: convección forzada, convección natural, conducción y radiación. En el anemómetro de hilo caliente el efecto de la convección natural puede ser despreciado si se cumplen las siguientes dos condiciones¹: $Re > 0.5$ y $Gr \times Pr < 10^{-4}$. La transferencia de calor por radiación es despreciable, comparada con los otros mecanismos, si la temperatura del hilo es menor a $300^\circ C$ (Perry 1982).

¹El número de Reynolds (Re) se define $Re \equiv \rho U D / \mu$, donde ρ es la densidad del gas, U es la magnitud de la velocidad media normal al hilo, D es el diámetro del hilo y μ es la viscosidad dinámica del gas. Gr es el número de Grashoff definido como $Gr \equiv \frac{g \rho_m^2 D^3 \beta_m (T_w - T_g)}{\mu^2}$, aquí g es la aceleración de la gravedad y $T_w - T_g$ es la diferencia entre la temperatura del hilo y la temperatura media del gas.

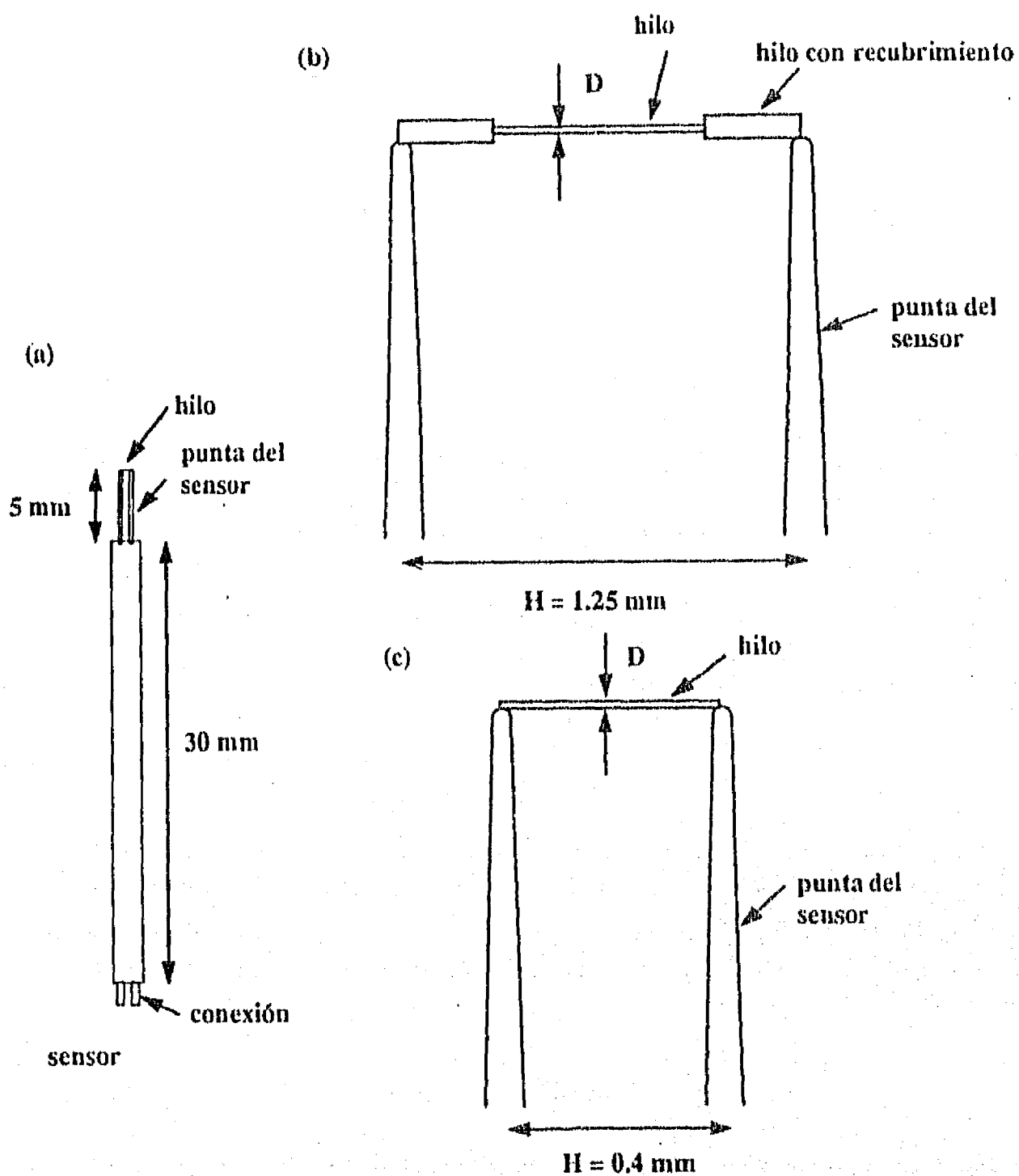


Fig. A3.1 (a) Esquema del sensor de los anemómetros de hilo caliente y de hilo frío, (b) detalle del sensor 55P11 y (c) detalle del sensor 55P31. Estos dos tipos de sensores fueron empleados indistintamente en la medición de las oscilaciones de velocidad y temperatura acústicas, difiriendo para cada caso en el diámetro del hilo: $5 \mu\text{m}$ para velocidad y $1 \mu\text{m}$ para temperatura.

A3.5. Sensibilidad del hilo a fluctuaciones de velocidad o de temperatura

La razón entre la sensibilidad del hilo a fluctuaciones de temperatura y la sensibilidad del hilo a fluctuaciones en la velocidad se define como

$$\chi \equiv \frac{(e/T'_g)_{u=0}}{(e/u)_{T'_g=0}} \quad (1)$$

donde $(e/T'_g)_{u=0}$ es la razón entre la fluctuación en el voltaje de salida del anemómetro (e) y la fluctuación de la temperatura del gas (T'_g) cuando la fluctuación de velocidad (u) es cero y $(e/u)_{T'_g=0}$ es la razón entre la fluctuación en el voltaje de salida del anemómetro (e) y la fluctuación de la velocidad del gas normal al hilo (u) cuando la fluctuación de temperatura del gas (T'_g) es cero.

A partir de un modelo para el balance de calor en el hilo que desprecia los efectos de conducción en los extremos, Smits y colaboradores (1978) demostraron que la razón entre la sensibilidad del hilo a fluctuaciones de temperatura y la sensibilidad del hilo a fluctuaciones en la velocidad está dada por

$$\chi = \frac{-\vartheta_r}{\xi \left(\frac{\partial \xi}{\partial U} \right)} \quad (2)$$

donde U es la velocidad normal media al hilo, ϑ_r es el coeficiente térmico de resistividad eléctrica del hilo definido a través de la expresión $R = \overline{R}_r [1 + \vartheta_r (T - \overline{T}_r)]$, donde \overline{R}_r es la resistencia del hilo correspondiente a la temperatura de referencia \overline{T}_r (usualmente $\overline{T}_r = 20$ °C). S es el sobrecalentamiento del hilo que se define como

$$S \equiv \frac{\overline{R}_w}{\overline{R}_g} - 1 \quad (3)$$

donde \overline{R}_w y \overline{R}_g son las resistencias correspondientes al promedio temporal de la temperatura del hilo \overline{T}_w y al promedio temporal de la temperatura del gas.

ξ es el calor adimensional perdido por el hilo debido a la convección forzada y está definido como

$$\xi = 4Nu \frac{K}{K_w} \left(\frac{H}{D} \right)^2 \quad (4)$$

donde Nu es el número de Nusselt². K y K_w son la conductividad de calor del gas y del hilo respectivamente. H y D son la longitud y el diámetro del hilo.

Estos autores encontraron que el sobrecalentamiento en el hilo está dado por

$$S = \frac{q}{\xi - q} \quad (5)$$

donde q es la generación de calor en forma adimensional definido como

$$q = \frac{\vartheta_r \bar{R} I^2 H}{K_w A} \quad (6)$$

I es la corriente eléctrica a través del hilo (se mantiene constante a través del análisis) y A es el área transversal del hilo.

A3.6. Características del sensor de fluctuaciones de velocidad

- Usa hilo con un valor bajo de la razón H/D . El aumento en el diámetro del hilo D , disminuye χ (ecuación (2)), es decir aumenta la sensibilidad a la velocidad con respecto a la sensibilidad a la temperatura.
- Emplea un valor alto del sobrecalentamiento S (ecuación (3)). Lo que provoca un bajo valor de χ (ecuación (2)).

Debido a que el sobrecalentamiento empleado para medir fluctuaciones de velocidad es alto, esta técnica se denomina anemometría de hilo caliente. En la práctica no es posible reducir a cero la contaminación de temperatura en la señal del sensor de velocidad ya que el sobrecalentamiento no puede aumentarse indefinidamente debido al límite de la temperatura de fusión del hilo.

A3.7. Medición de velocidad con el anemómetro de hilo caliente

El anemómetro de hilo caliente, operado en el modo CTA se ha usado extensivamente en la medición de velocidades en gases en el rango de 1 a 80 m/s. En la calibración del anemómetro en flujos con velocidad media dentro de este rango,

²El número de Nusselt se define como $Nu \equiv hD/K$. h es el coeficiente de transferencia de calor.

es común utilizar la conocida ley de King. Esta ley está dada por $E_U^2 = F + GU^n$ donde E_U es el voltaje de salida del anemómetro debido a la velocidad normal media al hilo U . n , F_U y G_U son respectivamente un exponente y coeficientes a determinar a través de un ajuste de datos experimentales. King sugirió un valor de $n = 0.5$. Estudios posteriores demostraron que para altas velocidades ($0.02 < Re < 44$) se obtiene un mejor ajuste con $n = 0.45$, por lo que algunos autores consideran n como otra variable en el ajuste (Bruun 1995). Diferenciando la ley de King se encuentra que las fluctuaciones del voltaje de salida en función de las fluctuaciones de velocidad alrededor de la velocidad media se pueden considerar lineales $dE_U = BdU$, B es una coeficiente que depende de F_U , G_U y la velocidad media U .

También con este anemómetro se han medido velocidades medias menores a 1 m/s, sin embargo para ello se han tenido que desarrollar técnicas especiales de calibración y de análisis que incorporan el efecto de la convección natural. Christman y Podzimek (1981) encontraron que 10 mm/s es la menor velocidad media que se puede medir con confiabilidad en flujos horizontales. En flujos verticales este valor es mayor debido al efecto de la convección natural.

Además de la calibración en amplitud, una característica importante del anemómetro de hilo caliente es su respuesta frecuencial. Debido a la inercia térmica del hilo, fluctuaciones con una frecuencia mayor a un valor crítico presentan un retardo en la señal de salida de voltaje con respecto a las fluctuaciones de velocidad. Este retardo depende de la frecuencia de las fluctuaciones y afecta la sensibilidad del anemómetro (dE_U/dU). La respuesta frecuencial está dada por la sensibilidad del anemómetro en función de la frecuencia de las fluctuaciones. La respuesta frecuencial determina la máxima frecuencia de las perturbaciones de velocidad alrededor de una velocidad media, que puede medir el anemómetro sin variar su sensibilidad con respecto a la sensibilidad en el flujo medio. A esta frecuencia se le denomina frecuencia de corte. Se ha reportado que la frecuencia de corte depende del sensor usado y de la velocidad media del flujo, entre menor sea la velocidad media, la frecuencia de corte disminuye. Por ejemplo un sensor Dantec 55M10 con hilo de tungsteno de $5\mu m$ de diámetro, operado con un anemómetro de temperatura constante, en un flujo de aire con velocidad media de 100 m/s tiene una frecuencia de corte de 30 kHz, mientras que con velocidad media de 1 m/s su frecuencia de corte es de 6 kHz (Bruun 1995).

A3.8. Medición de la oscilación de velocidad en una onda acústica

Debido al alto valor de la frecuencia de corte y al pequeño tamaño del sensor, el anemómetro de hilo caliente se ha utilizado en la medición de la oscilación de velocidad en ondas acústicas en flujos con velocidad media distinta de cero (Baker 1955) y (Ingard 1967). En estas mediciones se ha considerado la ley de King y no se ha tomado en cuenta la respuesta frecuencial del sensor. Sin embargo cuando la onda acústica se propaga en un gas con velocidad media igual a cero, ya no es posible utilizar la ley de King.

En un breve artículo, Levedeva y Dragan (1991) propusieron una técnica para la calibración del anemómetro de hilo caliente en ondas acústicas con velocidad media igual a cero. Reportaron esta calibración en ondas acústicas intensas con amplitudes de la oscilación de velocidad en el rango de 0.15 a 10 m/s, estudiaron la respuesta frecuencial en el rango de 0 a 2000 Hz. Encontraron que la respuesta frecuencial además de depender del tipo de sensor, depende también de la amplitud de la oscilación de velocidad. Para algunas condiciones la frecuencia de corte es cero, es decir, no existe un rango de frecuencias donde la sensibilidad se mantiene constante. El reporte de sus resultados no permite analizar la forma de la función de la amplitud de las oscilaciones del voltaje de salida en términos de la amplitud de las oscilaciones de velocidad.

Usando como base el trabajo Levedeva y Dragan (1991) en esta tesis se desarrolló una técnica para la calibración del anemómetro de hilo caliente en ondas acústicas estacionarias (sección 4.5.7.). Al emplear esta técnica en una onda acústica de frecuencia 130 Hz, en el rango de velocidades analizado ($0.04 \text{ m/s} < u_a^* < 0.33 \text{ m/s}$), se encontró que la relación entre la amplitud de la fluctuación del voltaje de salida ($E_{u_a}^*$) y la amplitud de la oscilación de velocidad (u_a^*) es lineal.

A3.9. Características del sensor de fluctuaciones de temperatura

- Usa hilo con un valor mayor de la razón geométrica H/D . El incremento en H/D aumenta las pérdidas de calor por convección ξ (ver ecuación (4)) lo cual disminuye el sobrecalentamiento S (ecuación (3)) y finalmente esto aumenta la sensibilidad de la temperatura con respecto a la sensibilidad de velocidad χ (ecuación (2)).

- Utiliza una corriente eléctrica pequeña. A medida que la corriente I se aproxima a cero, la generación de calor q (ecuación (6)) se acerca a cero, y así también el sobrecalentamiento S . Esto provoca que la sensibilidad a la temperatura con respecto a la sensibilidad a la velocidad χ (ecuación (2)) tienda a infinito.

Debido a que el sobrecalentamiento empleado para medir fluctuaciones de temperatura con esta técnica es muy bajo, se le denomina "anemometría de hilo frío". Algunos autores la llaman "de hilo resistivo" debido a que la resistencia del hilo es mayor por la reducción en el diámetro del mismo. En la práctica, dado un sensor, la contaminación en la señal de temperatura debida a fluctuaciones en la velocidad puede reducirse mucho a medida que la corriente eléctrica suministrada se reduzca.

A3.10. Medición de temperatura con el "anemómetro de hilo frío"

El "anemómetro de hilo frío" operado en el modo CCA se usa comúnmente en la medición de temperatura en flujos no isotérmicos, donde las fluctuaciones en la velocidad, alrededor de un valor medio, van acompañadas de fluctuaciones en la temperatura. La variación de la resistencia del hilo con la temperatura es lineal $R = R_r [1 + \vartheta_r (T - T_r)]$, donde R es la resistencia del hilo en un gas con temperatura T . R_r es la resistencia del hilo en el gas con la temperatura de referencia T_r , ϑ_r es el valor del coeficiente térmico de resistividad eléctrica del hilo³. En la práctica es más común hacer una calibración usando la relación $R = F_T + G_T T$ donde F_T y G_T son constantes a determinar por un ajuste a los datos. Debido a que se usa el modo CCA, en algunos anemómetros la señal de salida es en voltaje usándose entonces la relación $E_T = F_T + G_T T$. Se ha reportado que la respuesta frecuencial del "anemómetro de hilo frío" depende del sensor, y de la velocidad media del flujo, entre menor sea la velocidad media, la frecuencia de corte disminuye. Por ejemplo un sensor con hilo de platino de $0.6\mu m$ de diámetro, operado con un anemómetro de corriente constante, en un flujo de aire con velocidad media de 8 m/s tiene una frecuencia de corte de 1050 Hz, mientras que con velocidad media nula su frecuencia de corte es de 20 Hz (La Rue *et al.*

³Se acostumbra sustituir el subíndice r por el valor de la temperatura de referencia medida en grados centígrados, por lo que ϑ_{20} denotaría el coeficiente térmico de resistividad eléctrica del hilo a la temperatura $T_r = 20^\circ C$.

1975). Al disminuir el diámetro del hilo, la frecuencia de corte aumenta considerablemente. Comparando estos valores con los correspondientes al anemómetro de hilo caliente se observa que las frecuencias de corte del "anemómetro de hilo frío" son menores.

A3.11. Medición de la oscilación de temperatura en una onda acústica

El "anemómetro de hilo frío" se ha utilizado para medir fluctuaciones de temperatura en gases no isotérmicos con velocidad media igual a cero (La Rue *et al.* 1975). Sin embargo no se ha encontrado ninguna referencia sobre la medición específica de la oscilación de temperatura en una onda acústica.

En esta tesis se desarrolló una técnica para la calibración del "anemómetro de hilo frío" en ondas acústicas y se demostró la utilidad de este instrumento para la medición de la oscilación de temperatura en una onda acústica (sección 4.5.6.). Para la frecuencia analizada (130 Hz), se encontró que 0.01 °C es la menor amplitud de la oscilación de temperatura que se puede medir con confiabilidad.

ANEXO 4. Propiedades del aire y de la cerámica

A continuación se proporcionan los valores de las propiedades del aire y de la cerámica empleados en el cálculo de predicciones teóricas correspondientes a los experimentos realizados.

A4.1. Propiedades del aire

Los valores de las propiedades del aire se expresan como función de la temperatura media [$T_m = \text{K}$] y fueron obtenidos a través del correspondiente ajuste de los datos reportados en la referencia.

Velocidad del sonido [m/s] (Lide 1990)

$$c = 0.5765(T_m - 273.16) + 331.6421 \quad (1)$$

Densidad media en [kg/m^3] (Welty *et al.* 1976)

$$\rho_m = 354,79010T_m^{-1.00084} \quad (2)$$

Coefficiente de expansión térmica [1/K] (Welty *et al.* 1976)

$$\beta_m = 426.9887T_m^{-0.955573} \quad (3)$$

Calor específico a presión constante [$\text{J}/\text{kg}\cdot\text{K}$] (Welty *et al.* 1976)

$$C_p = 0.000277(T_m - 250)^{2.06794} + 1005.4 \quad (4)$$

esta expresión es válida para $T_m \leq 520 \text{ K}$.

Conductividad térmica [$\text{W}/\text{m}\cdot\text{K}$] (Welty *et al.* 1976)

$$K = 0.000263T_m^{0.807883} \quad (5)$$

Número de Prandtl (Welty *et al.* 1976)

$$\text{Pr} = 1.1547T_m^{-0.08567} \quad (6)$$

Cociente entre los calores específicos a presión constante y a volumen constante (Kevkin 1988)

$$\gamma = 1.43 - 1.2761 \times 10^{-4}T_m + 2.8027 \times 10^{-8}T_m^2 \quad (7)$$

Esta expresión es válida en el rango $250 < T_m < 1600$.

A4.2. Propiedades de la cerámica

Se utilizaron los siguientes datos para el cálculo del orden de magnitud del valor del coeficiente entre propiedades del fluido y de la cerámica ϵ .

Densidad	$\rho_s = 270 \text{ kg/m}^3$
Calor específico	$C_s = 8.4 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$
Conductividad térmica	$K_s = 0.066 \text{ W/m} \cdot \text{K}$

Cabe mencionar que los datos corresponden a una cerámica con 85% de magnesio, a una temperatura de 293 K (Welty *et al.* 1976), sin que se tenga conocimiento de la composición de la cerámica de que esta hecha la placa que se usó en los experimentos.

Sustituyendo estos valores para las propiedades de la placa y los valores correspondientes al aire para la temperatura 293 K, se estimó un valor de $\epsilon = 0.46$.

ANEXO 5. Publicaciones derivadas de esta tesis

A continuación se incluyen copias de las publicaciones que se han escrito con parte del material de esta investigación. Cabe mencionar que, además de los artículos y resúmenes de presentaciones en congresos que aquí se anexan, se preparan otros artículos para reportar los resultados experimentales obtenidos.

- En revistas de arbitraje internacional
 - Huelsz, G. & Ramos, E. 1995 On the phase difference in traveling waves in the thermoacoustic effect. *Int. Comm. Heat Mass Transf.* **22**(1), 71-80.
 - Huelsz, G. & Ramos, E. A physical interpretation of the thermoacoustic effect. Aceptado para su publicación en *J. Non Equilibrium Thermodynamics*
- En memorias de congresos internacionales
 - Huelsz, G., Ramos, E. & del Río J.A. 1994 Phase difference in traveling waves in the thermoacoustic effect. *Bol. Am. Phys.* **39**(9), 1988-1988. Resumen
- En memorias de congresos nacionales
 - Huelsz, G. & Ramos, E. 1995 Anemometría de hilo caliente en ondas acústicas. *Suplemento del Vol. Soc. Mex. Fis.* 9-3, 109-109. Resumen



Pergamon

International Communications in Heat and Mass Transfer, Vol. 22, No. 1, pp. 71-80, 1995
Copyright © 1995 Elsevier Science Ltd
Printed in the USA. All rights reserved
0735-1933/95 \$9.50 + .00

0735-1933(94)00053-0

ON THE PHASE DIFFERENCE OF THE TEMPERATURE AND PRESSURE WAVES IN THE THERMOACOUSTIC EFFECT

Guadalupe Huelsz and Eduardo Ramos
Laboratorio de Energia Solar IIM-UNAM
Ap.P. 34, 62580 Temixco, Mor.
Mexico

(Communicated by C.L. Tien and P.F. Peterson)

ABSTRACT

In this comment, the single-plate, linear theory for the thermoacoustic phenomenon in ideal conditions, Prandtl Number (σ) zero and a plate with infinite heat capacity, presented by Swift [1] has been used to find expressions for the phase difference α between the temperature and pressure waves. The effect of Prandtl Number different from zero and a plate with a finite heat capacity has also been analyzed. It has been found that the behavior is governed by the relation between a non-dimensional temperature gradient Γ and σ . Attenuation occurs for $\Gamma < 1 + \sqrt{\sigma}$ and excitation for $\Gamma > 1 + \sqrt{\sigma}$ which correspond to $|\alpha| < \pi/2$ and $|\alpha| > \pi/2$ respectively. Explicit expressions for α as a function of the transverse coordinate are given. A physical interpretation of the results is presented in the context of concepts offered by Lord Rayleigh.

1. Introduction

Lord Rayleigh gave a qualitative explanation of the generation of acoustic waves due to temperature gradients in his book, *The Theory of Sound* [2], but it was not until the seventies and eighties that the quantitative theory on this thermoacoustic phenomenon developed by Rott [3, 4] and the group at Los Alamos [2, 5], made more specific the role played by the different parameters of relevance.

Rayleigh stressed the fact that if the fluid receives heat at the moment of greatest compression and gives it up while it is most rarefied, the oscillatory motion is promoted. Similarly, the vibration is attenuated if heat is taken from the fluid at the moment of maximum compression and supplied to it when it is most rarefied. Therefore, the relative phase of the

pressure wave and the heat communication determines the amplifying or attenuating effect. It is possible to accomplish an amplifying periodic heat transfer in a vibrating fluid by putting it in contact with a solid surface having an adequate temperature gradient. Thus, any small perturbation would generate an acoustic wave. Rayleigh explained this situation in terms of the acoustic motion of air inside a tube. The tube has one end closed and hot and the other open and cold. At a quarter of a period before maximum compression, the fluid moves toward the closed end, i.e. from the cold to the hot region. Since the heat transfer is not instantaneous, at a particular point, and if the temperature gradient is large enough, the fluid is colder than the wall and heat is transferred to it. This fulfills the condition of heat supply at compression. Correspondingly, at a quarter of a period after maximum compression the fluid goes out of the tube, expanding and cooling. These conditions are equivalent to periodic heat transfer with the appropriate phase, provided the temperature gradient is adequate. The process can be described in terms of the relative phases of pressure and temperature oscillations, since the heat transferred from the wall works as a forcing effect on the temperature wave.

When the wave is excited, heat is transferred from the hot zone to the cold one by the acoustic wave. Under adequate conditions, attenuated waves can transfer heat from a cold zone to a hot one [6, 7]. This effect can be used to obtain a useful refrigerating system and for this reason the thermoacoustic effect has received attention recently.

The determination of the phase difference of the pressure and temperature waves in the thermoacoustic effect, and its experimental verification, would constitute a confirmation of the fundamental ideas of the presently available thermoacoustic theory. This communication gives explicit expressions for the relative phase of the pressure and temperature acoustic waves according to the linear, single-plate theory, and a physical interpretation of the results in the context of concepts offered by Rayleigh.

2. Linear Theory For a Short Single Plate

The calculations of the phase difference between the pressure and temperature perturbations in the wave are based on the linear theory given by Swift [1] for a short single plate and therefore, a brief summary of the physical conditions and the main results are given in this section.

Consider a one-dimensional acoustic standing wave in presence of a plate of negligible thickness and of a small extent, compared with the acoustic wavelength. Within the extent of the plate, the pressure and the velocity are independent of the position along the plate.

Taking the pressure and velocity oscillations as

$$p(t) = p e^{it} \quad (1)$$

and

$$u(r, t) = u(r) e^{it} \quad (2)$$

The velocity perturbation $u(r)$ can be found by solving the momentum balance equation. The result is:

$$u(r) = i \left(1 - \exp \left(-(1+i) \frac{r}{\sqrt{\sigma}} \right) \right) \quad (3)$$

where σ is the Prandtl Number and r is the transverse direction.

In obtaining the former expressions, it has been considered that the average pressure and velocity are zero.

Assuming the temperature oscillation as

$$T(r, t) = T(r) e^{it} \quad (4)$$

The perturbation temperature $T(r)$ is determined using the energy balance equation and equations 1 and 2. The resulting expression is:

$$T(r) = 1 - \Gamma \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma-1} e^{-(1+i) \frac{r}{\sqrt{\sigma}}} \right) - \left(1 + \frac{\Gamma}{\sigma-1} + \frac{\sqrt{\sigma} \Gamma}{\sigma-1} \epsilon_s \right) \frac{e^{-(1+i)r}}{1 + \epsilon_s} \quad (5)$$

where

$$\epsilon_s = \frac{\epsilon}{\tanh((1+i)l)}, \quad \epsilon = \sqrt{\frac{k \rho_m^* C_p}{k_s \rho_s^* C_s}} \quad \text{and} \quad \Gamma = \frac{\nabla T_m}{T_{av}}$$

For future reference it is convenient to calculate the power of the acoustic wave W^* . The power produced ($W^* > 0$) or absorbed ($W^* < 0$) by the fluid is:

$$W^* = \frac{1}{\Delta t^*} \int_0^{\Delta t^*} \int_0^{\Delta x^*} \int_0^{\Delta z^*} \int_0^{\infty} \left(-\frac{p^*}{\rho^*} \frac{d\rho^*}{dt^*} \right) dr^* dz^* dx^* dt^*$$

Substituting the acoustic variables and scaling, the following relation is obtained:

$$W = \frac{T_\beta}{2} \int_0^{\infty} (-T_I + \Gamma u_R) dr \quad (6)$$

where u_R is the real part of the velocity $u(r)$.

a) Considering fluids with $\sigma = 0$ and $\epsilon = 0$ equation 6 reduces to:

$$W = \frac{T_\beta}{4} (\Gamma - 1) \quad (7)$$

For $\Gamma < 1$ the acoustic wave is attenuated and for $\Gamma > 1$ the wave is excited.

b) For fluids with $\sigma \neq 0$ and $\epsilon = 0$ equation 6 is:

$$W = \frac{T_\beta}{4} \left(\frac{\Gamma}{1 + \sqrt{\sigma}} - 1 \right) \quad (8)$$

In this case, the limit condition is $\Gamma = 1 + \sqrt{\sigma}$.

c) For a fluid with $\sigma \neq 0$ and $\epsilon \neq 0$ equation 6 becomes:

$$W = \frac{T_D (|L|^2 + \epsilon L_R - \epsilon L_I) L^2}{4 \left((|L|^2 + \epsilon L_R)^2 + \epsilon^2 L_I^2 \right)} \left(\frac{\Gamma}{1 + \sqrt{\sigma}} - 1 \right) \quad (9)$$

The limit condition still is $\Gamma = 1 + \sqrt{\sigma}$, and does not depend on ϵ or l . For $\Gamma < 1 + \sqrt{\sigma}$ the acoustic wave is attenuated, and for $\Gamma > 1 + \sqrt{\sigma}$ the wave is excited.

3. The Pressure-Temperature Phase Difference

The phase difference between the pressure and temperature oscillations can now be calculated. Consider the oscillation on the pressure and temperature given by equations 1 and 4 respectively.

The real part of the pressure and temperature oscillations can be written as:

$$Re(p) = p \cos(t) \quad (10)$$

$$Re(T) = T_R \cos(t) - T_I \sin(t) \quad (11)$$

The real part of T can be written as:

$$Re(T) = A \cos(t - \alpha) \quad (12)$$

with A real and positive, as long as:

$$A = \frac{T_R}{\cos \alpha} \quad (13)$$

and

$$\alpha = \arctan \left(-\frac{T_I}{T_R} \right) \quad (14)$$

using the convention that $\alpha > 0$ means a right shift. The function arctan is doubly valued in the interval $[-\pi, \pi]$, and the value of α must be chosen to fulfill the condition $A \geq 0$.

a) For fluids with $\sigma = 0$ and $\epsilon = 0$, it is found that:

$$\alpha = \arctan \left[\frac{(1 - \Gamma) e^{-r} \sin r}{(1 - \Gamma)(1 - e^{-r} \cos r)} \right] \quad (15)$$

Figure 1 shows the phase difference α as a function r . There are two branches, depending on whether Γ is greater or less than one. $\Gamma < 1$ implies attenuation (equation 7) and gives

the solution in the fourth quadrant. If $\Gamma > 1$, α is in the second quadrant and refers to wave excitation. $\Gamma = 1$ means no oscillation. From the above expression one finds:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \alpha = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & \text{for } \Gamma < 1 \\ \frac{3\pi}{4} & \text{for } \Gamma > 1 \end{cases}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \alpha = \begin{cases} 0 & \text{for } \Gamma < 1 \\ \pi & \text{for } \Gamma > 1 \end{cases} \quad (16)$$

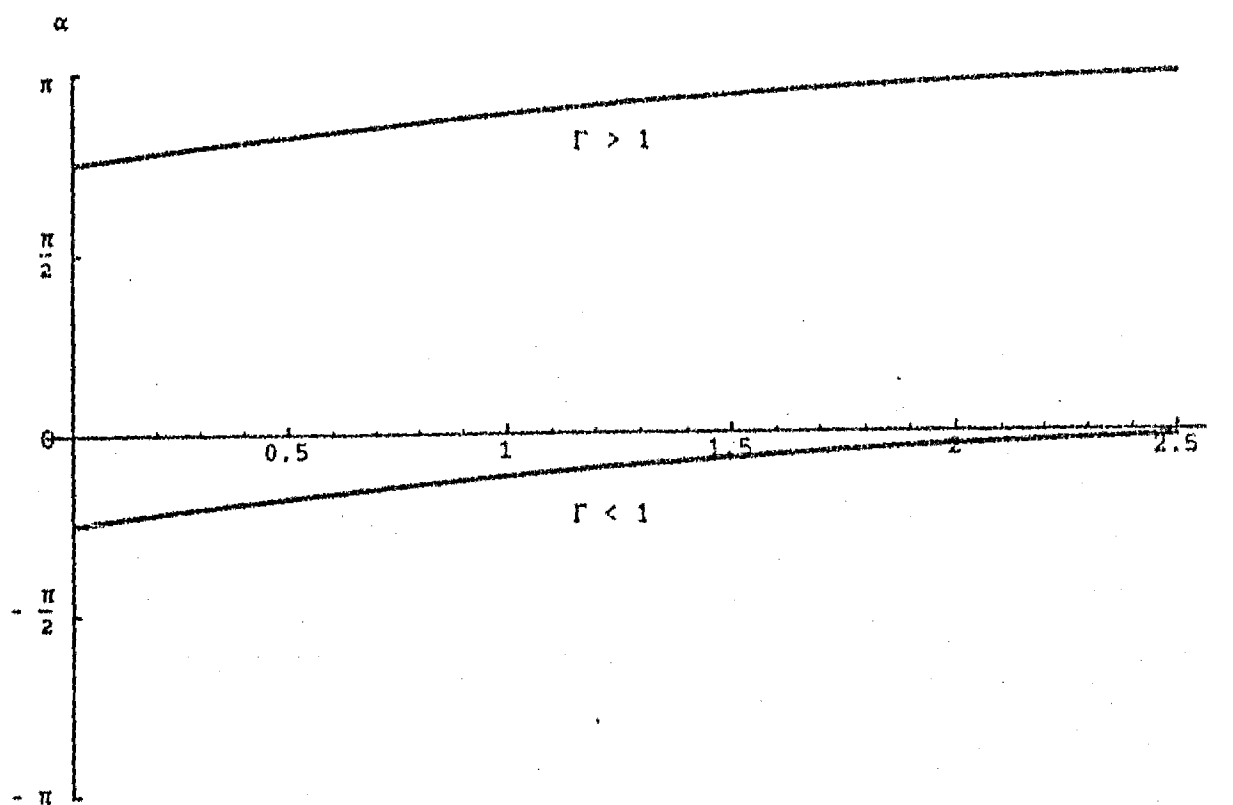


FIG. 1 Phase difference α as function of r . Fluid with $\sigma = 0$ and $\epsilon = 0$.

b) For fluids with $\sigma \neq 0$ and $\epsilon = 0$, the phase angle results in:

$$\alpha = \arctan \left(\frac{\frac{\Gamma\sigma}{\sigma-1} e^{-\frac{r}{\sqrt{\sigma}}} \sin \frac{r}{\sqrt{\sigma}} + \left(1 + \frac{\Gamma}{\sigma-1}\right) e^{-r} \sin r}{1 - \Gamma + \frac{\Gamma\sigma}{\sigma-1} e^{-\frac{r}{\sqrt{\sigma}}} \cos \frac{r}{\sqrt{\sigma}} - \left(1 + \frac{\Gamma}{\sigma-1}\right) e^{-r} \cos r} \right) \quad (17)$$

In this case α is a function of Γ , σ and r . Figure 2 shows α as a function of r for different Γ and $\sigma = 0.7$. In this figure, two families of curves can be distinguished depending on Γ . According to equation 8, $\Gamma = 1 + \sqrt{\sigma}$ is the limit between attenuation and excitation. For $\Gamma < 1 + \sqrt{\sigma}$ attenuation occurs and the phase difference in the vicinity of the plate is $\alpha \sim -\pi/4$. For $\Gamma > 1 + \sqrt{\sigma}$, acoustic waves are amplified and α is approximately $3\pi/4$ near

the plate. The curve obtained for $\Gamma = 1 + \sqrt{\sigma}$ shows a behavior different from the rest. The phase difference near the plate is $\pi/2$ and acoustic wave are neither excited nor attenuated by the thermoacoustic effect.

Taking the limits $r \rightarrow 0, \infty$ it is found from equation 17 that

$$\lim_{r \rightarrow 0} \alpha = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & \text{for } \Gamma < 1 + \sqrt{\sigma} \\ \frac{\pi}{2} & \text{for } \Gamma = 1 + \sqrt{\sigma} \\ -\frac{\pi}{2} & \text{for } \Gamma = 1 + \sqrt{\sigma} \\ \frac{3\pi}{4} & \text{for } \Gamma > 1 + \sqrt{\sigma} \end{cases} \text{ and } \sqrt{\sigma} < 1, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \alpha = \begin{cases} 0 & \text{for } \Gamma < 1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{for } \Gamma = 1 \\ \pi & \text{for } \Gamma > 1 \end{cases} \quad (18)$$

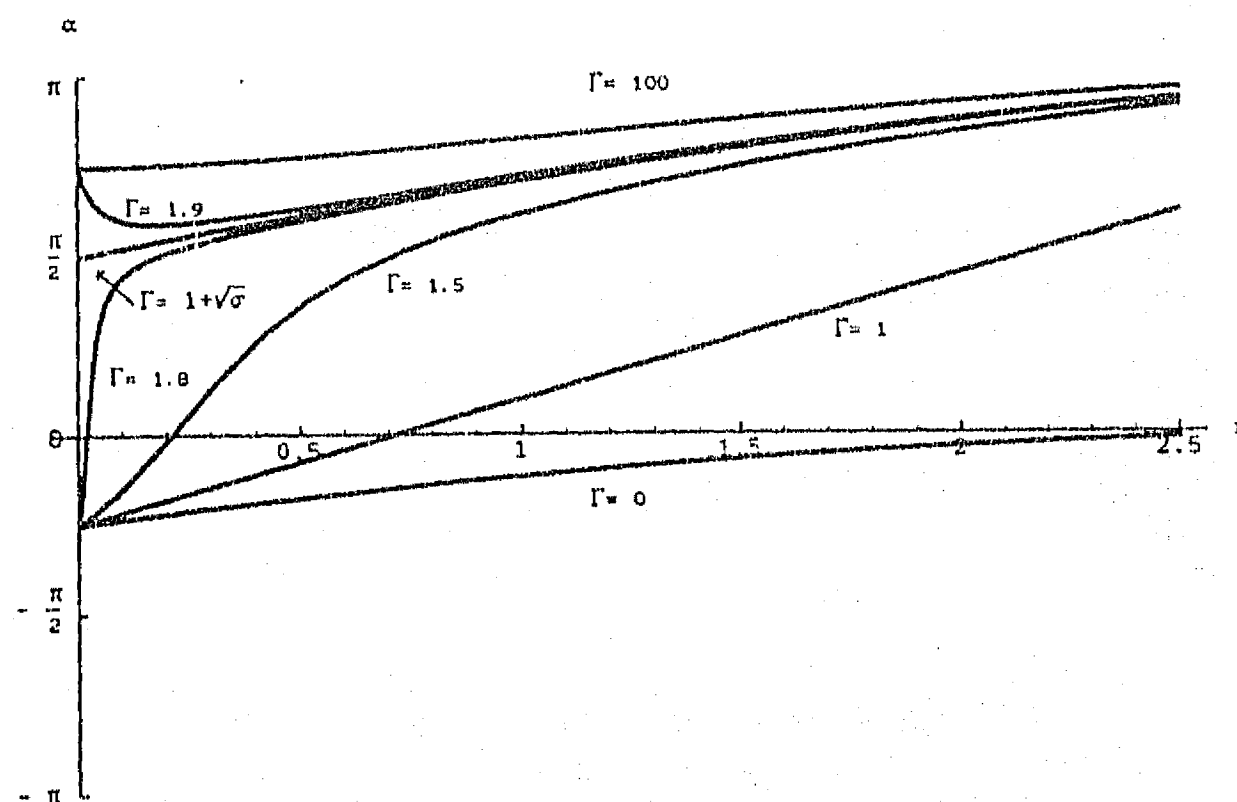


FIG. 2 Phase difference α as function of r . Fluid with $\sigma \neq 0$ and $\epsilon = 0$.

c) For fluids with $\sigma \neq 0$ and $\epsilon \neq 0$,

$$\alpha = \arctan \left(\frac{-\left(\Gamma \left(-\frac{\sigma}{\sigma-1} e^{-\frac{r}{\sqrt{\sigma}}} \sin \frac{r}{\sqrt{\sigma}} + a_3 c + b_3 s\right) + a_4 c + b_4 s\right)}{\Gamma \left(-1 + \frac{\sigma}{\sigma-1} e^{-\frac{r}{\sqrt{\sigma}}} \cos \frac{r}{\sqrt{\sigma}} + a_1 c + b_1 s\right) + 1 + a_2 c + b_2 s} \right) \quad (19)$$

where

$$c = e^{-r} \cos r, \quad s = e^{-r} \sin r$$

$$a_1 = -\frac{(|L|^2 + \sqrt{\sigma} \epsilon L_R) (|L|^2 + \epsilon L_R) + \sqrt{\sigma} \epsilon^2 L_I^2}{(\sigma - 1) ((|L|^2 + \epsilon L_R)^2 + \epsilon^2 L_I^2)}, \quad b_1 = \frac{b_2}{\sqrt{\sigma} - 1}$$

$$a_2 = -\frac{|L|^2 (|L|^2 + \epsilon L_R)}{(|L|^2 + \epsilon L_R)^2 + \epsilon^2 L_I^2}, \quad b_2 = -\frac{|L|^2 \epsilon L_I}{(L^2 + \epsilon L_R)^2 + \epsilon^2 L_I^2}$$

$$a_3 = -\frac{b_1}{1 + \sqrt{\sigma}}, \quad b_3 = -a_1, \quad a_4 = b_2, \quad b_4 = -a_2$$

In this case, α is a function of $\Gamma, \sigma, \epsilon, l$ and r . Figure 3 shows α as function of r for different $\Gamma, \sigma = 0.7, \epsilon = 10^{-2}$ and $l = 10$. For $r > 1$, the features of the curves are very similar to those discussed in figure 2; two families of curves are found separated by that calculated using $\Gamma = 1 + \sqrt{\sigma}$. Near the plate, the behavior is as follows:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \alpha = \begin{cases} \arctan(b) & \text{for } \Gamma < 1 + \sqrt{\sigma} \text{ and } L_I < 0 & -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \\ 0 & \text{for } \Gamma < 1 + \sqrt{\sigma} \text{ and } L_I = 0 \\ \arctan(b) & \text{for } \Gamma < 1 + \sqrt{\sigma} \text{ and } L_I > 0 & 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \text{for } \Gamma = 1 + \sqrt{\sigma} \text{ and } \sqrt{\sigma} < 1 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{for } \Gamma = 1 + \sqrt{\sigma} \text{ and } \sqrt{\sigma} \geq 1 \\ \arctan(b) & \text{for } \Gamma > 1 + \sqrt{\sigma} \text{ and } L_I < 0 & \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \\ \pi & \text{for } \Gamma > 1 + \sqrt{\sigma} \text{ and } L_I = 0 \\ \arctan(b) & \text{for } \Gamma > 1 + \sqrt{\sigma} \text{ and } L_I > 0 & -\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (20)$$

where

$$b = \frac{|L|^2 \epsilon L_I (1 - \frac{\Gamma}{1 + \sqrt{\sigma}})}{((|L|^2 + \epsilon L_R) \epsilon L_R + \epsilon^2 L_I^2) (1 - \frac{\Gamma}{1 + \sqrt{\sigma}})}$$

According to equation 9, $\Gamma = 1 + \sqrt{\sigma}$ is the limit between attenuation and excitation. For attenuation condition $\Gamma < 1 + \sqrt{\sigma}$ the phase difference in the vicinity of the plate is $|\alpha| < \pi/2$ and for excitation $\Gamma > 1 + \sqrt{\sigma}$, the phase difference near the plate is $|\alpha| > \pi/2$.

For practical applications $l \gg 1$, implying $L_R \sim 1$ and $L_I \sim 0$. Under this condition the phase difference near the plate becomes:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \alpha = \begin{cases} 0 & \text{for } \Gamma < 1 + \sqrt{\sigma} \\ \frac{\pi}{2} & \text{for } \Gamma = 1 + \sqrt{\sigma} \text{ and } \sqrt{\sigma} < 1 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{for } \Gamma = 1 + \sqrt{\sigma} \text{ and } \sqrt{\sigma} \geq 1 \\ \pi & \text{for } \Gamma > 1 + \sqrt{\sigma} \end{cases}$$

For values of ϵ , met in practical applications the curves obtained are similar to those of figure 2, except for $r < 1$, as can be observed by comparing the figures 2 and 3.

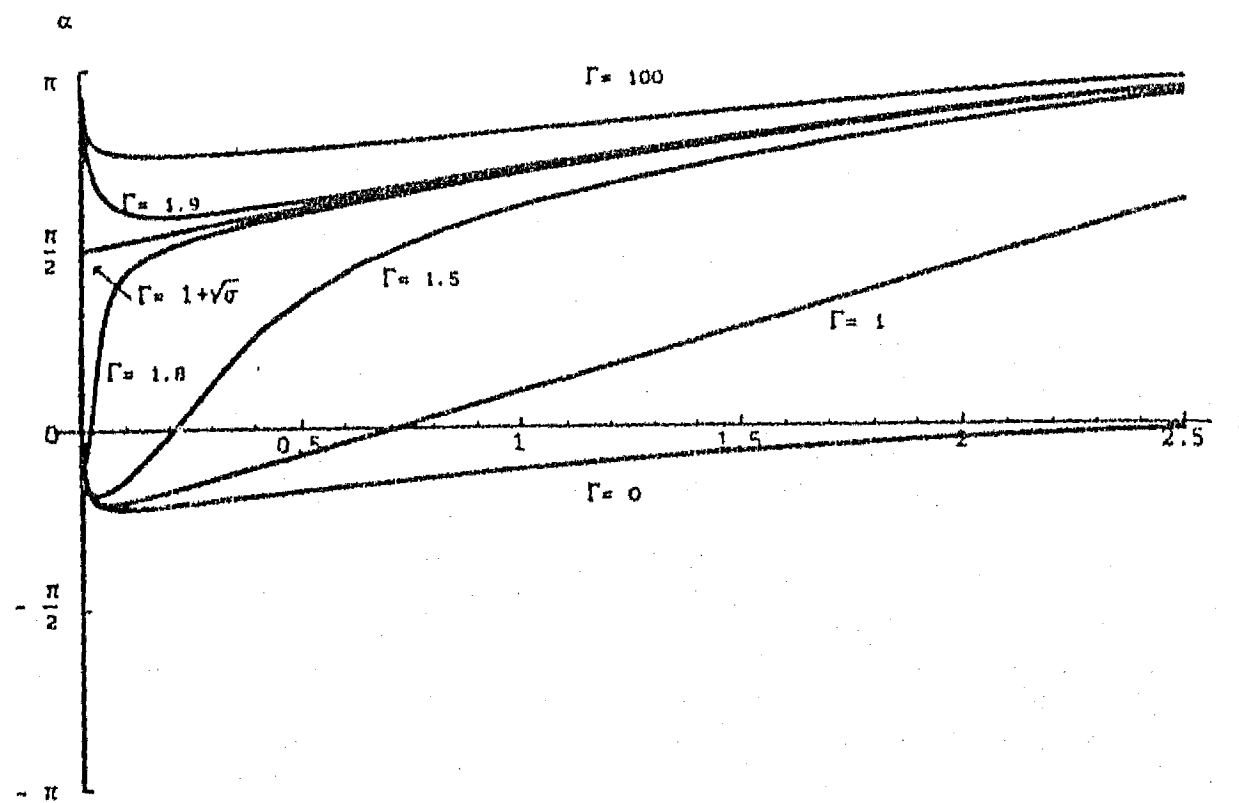


FIG. 3 Phase difference α as function of r . Fluid with $\sigma \neq 0$ and $\epsilon \neq 0$.

4. Discussion and Conclusions

A physical interpretation of the results can be given in terms of the concepts offered by Rayleigh. The phase difference in the vicinity of the plate ($r \rightarrow 0$) determines the heat transfer between the fluid and the plate. A phase difference approximately zero leads to attenuation, since heat is withdrawn from the fluid at the compression stage of the wave and heat is supplied in the expansion stage. Correspondingly, a phase difference of approximately π (or $-\pi$), leads to excitation since heat is added to the fluid during the compression stage and heat is extracted from the fluid in the expansion stage. The precise limits for attenuation or excitation depend on the form of the wave, but for symmetric waves i.e. $f(x+ct) = -f(x+ct+\pi)$, attenuation occurs for $|\alpha| < \pi/2$ and excitation for $|\alpha| > \pi/2$.

This is precisely what was found in equations 16, 18 and 20 for the different physical conditions considered.

It is important to remark that according to the linear theory, the limit condition for wave excitation or attenuation for a single plate is $\Gamma = 1 + \sqrt{\sigma}$ which correspond to $|\alpha| < \pi/2$ and $|\alpha| > \pi/2$ respectively, is independent of the fluid-solid physical properties (ϵ) and the semi-thickness of the plate (l).

In the limit $r \rightarrow \infty$ it is understood that conditions remain uniform as stated in the assumptions. In reality this would hardly be the case. But it is important to emphasize that at distances $r \gg 1$, where the heat exchange due to the thermoacoustic effect is negligible, the phase difference between the temperature and pressure waves for excitation is π .

The whole discussion has been made in terms of the phase difference between pressure and temperature because this relates to Rayleigh's interpretation, but for purposes of experimental measurement, it would be more convenient to express the results in terms of the velocity and temperature waves. The phase difference between temperature and velocity is $\varphi = \theta - \alpha$, where θ is the phase difference between pressure and velocity, given by $\theta = \arctan(-u_I/u_R)$. The value of θ must be chosen to fulfill the condition $B \geq 0$, where $B = u_R/\cos\theta$ and u_I, u_R are given by equation 3.

Acknowledgements

Useful discussions with Dr. Luis del Castillo and Prof. Mihir Sen are gratefully acknowledged. This work has been partially supported by DGAPA-UNAM under project IN102292-IIM-UNAM.

Nomenclature

C_p	heat capacity of the fluid
C_s	heat capacity of the plate
k	thermal conductivity of the fluid
k_s	thermal conductivity of the plate
l	non-dimensional semi-thickness of the plate scaled with δ_s
L	$= \tanh((1+i)l)$
p	non-dimensional pressure oscillation scaled with p_m^*
p_m^*	dimensional average pressure
p	non-dimensional pressure oscillation amplitude at the plate scaled with p_m^*
p^*	dimensional pressure oscillation amplitude at the plate
r^*	dimensional transverse coordinate
r	non-dimensional transverse coordinate scaled with δ_s
t^*	dimensional time
t	non-dimensional time scaled with ω
T	non-dimensional temperature oscillation scaled with T_a
T_m^*	dimensional average temperature
T	non-dimensional temperature oscillation amplitude scaled with T_a
T_a	average adiabatic change of temperature $= \frac{T_m^* \alpha}{\rho_m C_p} p^*$

T_β	$= \beta T_0$
w	non-dimensional velocity oscillation scaled with U
u	non-dimensional velocity oscillation amplitude scaled with U
U	dimensional velocity oscillation amplitude far away from the plate
W^*	dimensional power of the acoustic wave
W	non-dimensional power of the acoustic wave scaled with $\Delta x^* \Delta z^* \delta_k \omega p^*$
α	phase difference of the temperature and pressure waves
β	coefficient of volumetric thermal expansion
Γ	non-dimensional temperature gradient $= \frac{\nabla T_m}{T_0}$
δ_k	fluid thermal penetration depth $= \sqrt{\frac{2k}{\rho_m^* C_p \omega}}$
δ_s	plate thermal penetration depth $= \sqrt{\frac{2k}{\rho_s^* C_s \omega}}$
Δx	dimension of the plate in the x direction
Δz	dimension of the plate in the z direction
c	$= \sqrt{\frac{k \rho_s^* C_s}{k_s \rho_s^* C_s}}$
c_s	$= \frac{1}{\tanh((1+i)l)}$
θ	phase difference between pressure and velocity
ρ_m^*	average density of the fluid
ρ_s^*	average density of the plate
σ	Prandtl Number
φ	phase difference between temperature and velocity
ω	angular frequency
∇T_m	temperature gradient in the x direction

Subindexes

i	imaginary part of a complex variable
r	real part of a complex variable

References

- [1] G.W. Swift, Thermoacoustic engines, *J. Acoust. Soc. Am.* 84 (4), 1145 (1988).
- [2] J.W.S. Rayleigh, *The theory of sound*, Dover (1945).
- [3] N. Rott, Damped and thermally driven acoustic oscillations in wide and narrow tubes, *Zh. Angew. Math. Phys.* 20, 230 (1969).
- [4] N. Rott, Damped and thermally driven acoustic oscillations, Part II., *Zh. Angew. Math. Phys.*, 24, 54 (1973).
- [5] J. Wheatley, T. Holler, G.W. Swift and A. Migliori, An intrinsically irreversible thermoacoustic heat engine, *J. Acoust. Soc. Am.* 74 (1), 153 (1983).
- [6] W.E. Gifford and R.C. Longworth, Surface heat pumping, *Adv. Cryog. Eng.* 11, 171 (1966).
- [7] P. Merkli and H. Thomann, Thermoacoustic effects in a resonance tube, *J. Fluid Mech.* 70 (1), 161 (1975).

Received June 20, 1994

T_0	$= \beta T_a$
u'	non-dimensional velocity oscillation scaled with U
u	non-dimensional velocity oscillation amplitud scaled with U
U	dimensional velocity oscillation amplitud far away from the plate
W^*	dimensional power of the acoustic wave
W'	non-dimensional power of the acoustic wave scaled with $\Delta x \Delta z \delta_k \omega p^*$
α	phase difference of the temperature and pressure waves
β	coefficient of volumetric thermal expansion
Γ	non-dimensional temperature gradient $= \frac{\nabla T_m}{T_0 \alpha}$
δ_k	fluid thermal penetration depth $= \sqrt{\frac{2k}{\rho_m^* C_p \omega}}$
δ_s	plate thermal penetration depth $= \sqrt{\frac{2k_s}{\rho_s^* C_s \omega}}$
Δx	dimension of the plate in the x direction
Δz	dimension of the plate in the z direction
c	$= \sqrt{\frac{k \rho_m^* C_p}{k_s \rho_s^* C_s}}$
c_s	$= \frac{c}{\tanh((1+i)l)}$
θ	phase difference between pressure and velocity
ρ_m^*	average density of the fluid
ρ_s^*	average density of the plate
σ	Prandtl Number
φ	phase difference between temperature and velocity
ω	angular frequency
∇T_m	temperature gradient in the x direction

Subindexes

I	imaginary part of a complex variable
R	real part of a complex variable

References

- [1] G.W. Swift, Thermoacoustic engines, *J. Acoust. Soc. Am.* 84 (4), 1145 (1988).
- [2] J.W.S. Rayleigh, *The theory of sound*, Dover (1945).
- [3] N. Rott, Damped and thermaly driven acoustic oscillations in wide and narrow tubes, *Zh. Angew. Math. Phys.* 20, 230 (1969).
- [4] N. Rott, Damped and thermaly driven acoustic oscillations, Part II., *Zh. Angew. Math. Phys.*, 24, 54 (1973).
- [5] J. Wheatley, T. Hofer, G.W. Swift and A. Migliori, An intrinsically irreversible thermoacoustic heat engine. *J. Acoust. Soc. Am.* 74 (1), 153 (1983)
- [6] W.E. Gifford and R.C. Longworth, Surface heat puniping, *Adv. Cryog. Eng.* 11, 171 (1966).
- [7] P. Merkli and H. Thomann, Thermoacoustic effects in a resonance tube, *J. Fluid Mech.* 70 (1), 161 (1975).

Received June 20, 1991

A physical interpretation of the thermoacoustic effect

Guadalupe Huelsz and Eduardo Ramos
Laboratorio de Energía Solar, IIM-UNAM, Temixco, Morelos, México.

Abstract

The objective of the present work is to analyze Rayleigh's qualitative interpretation for the thermoacoustic effect in terms of a quantitative linear theory. Conditions for attenuation and excitation found by Rayleigh criterion coincide with those obtained by direct calculation of the acoustic power production. It is found that the time-average acoustic power production is proportional to the time-average of the product of the pressure perturbation and the heat flux supplied to the fluid from the solid boundary. This result does not require the explicit solution of the pressure wave equation and demonstrates the agreement between the physical qualitative interpretation of Rayleigh and the modern quantitative theory. It also stresses the fact that the acoustic power generation is determined by the conditions at the fluid-solid boundary.

1. Introduction

The thermoacoustic effect considered here is an interchange between mechanical and thermal energy in a system composed by a compressible gas and a solid boundary. Baron Rayleigh gave a qualitative explanation of the generation of acoustic waves due to temperature gradients in his book, *The Theory of Sound*[1]. Rott[2] laid the basis for the theoretical study of the thermoacoustic effect, the group at Los Alamos[3] continued this work and gave a qualitative interpretation of the effect using a Lagrangian description. Swift[4], in his extended review of the thermoacoustic engines, pointed out that the phase between pressure and density oscillations determines the acoustic power production or attenuation, but did not make an

explicit calculation. Although a great deal of important information on the thermoacoustic effect is available now, some fundamental questions are still open. The objective of the present paper is to relate the physical qualitative interpretation given by Rayleigh and the modern quantitative linear theory. This work extends the results presented in Ref. 5.

2. Qualitative interpretation of the thermoacoustic effect

Rayleigh stressed the fact that if a gas receives heat at the moment of greatest compression and gives it up when it is most rarefied, the oscillatory motion is promoted. Similarly, a vibration is attenuated if heat is taken from the gas at the moment of maximum compression and supplied to it when it is most rarefied. Therefore, the relative phase of the pressure wave and the heat communication determines the amplifying or attenuating effect. Assuming that heat injection or withdrawal to or from the fluid takes place at the solid boundary, the relative phase of the pressure wave and the transverse heat flux to the fluid at the boundary (θ) determines whether the wave is attenuated or excited. A phase difference of approximately zero, leads to excitation since heat is added to the fluid during the compression stage of the wave and heat is extracted from the gas in the expansion stage. A phase difference of approximately π or $(-\pi)$, leads to attenuation since heat is withdrawn from the fluid at the compression stage and heat is supplied in the expansion stage. The precise limits for attenuation or excitation depend on the form of the wave, but for symmetric waves excitation occurs for $|\theta| < \pi/2$ and attenuation for $|\theta| > \pi/2$.

3. Linear theory for the thermoacoustic effect

The presentation is based on the linear theory developed by Rott[2] and Swift[4]. This theory assumes the existence of a one-dimensional acoustic wave with an angular frequency ω in a compressible fluid propagating parallel to a solid plate.

All variables are assumed to be of the form:

$$\Phi(x, y, t) = \Phi_m(x, y) + \Phi_1(x, y, t) \quad (1)$$

where Φ_m is an average value and the perturbation term Φ_1 can be expressed as:

$$\Phi_1(x, y, t) = \hat{\Phi}_1(x, y)e^{i\omega t} \quad (2)$$

x being the coordinate in the direction of propagation of the wave, and y the transverse coordinate measured from the plate and t is time.

The system is described by the following equations:

The linearized conservation equations in the boundary layer approximation for a fluid with average temperature and density gradients in the x direction

$$i\omega\rho_1 + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_m u_1) + \rho_m \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

$$i\omega\rho_m u_1 = -\frac{dp_1}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \quad (4)$$

$$\rho_m C_p (i\omega T_1 + \nabla T_m u_1) - i\omega T_m \beta p_1 - K \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} = 0, \quad (5)$$

the equation of state

$$p = \rho(T, p) \quad (6)$$

and the energy equation for the plate, which in the boundary layer approximation is

$$i\omega\rho_s C_s T_{s1} - K_s \frac{\partial^2 T_{s1}}{\partial y^2} = 0 \quad (7)$$

ρ , u , v and T are respectively the density, x -velocity and y -velocity components and the temperature of the fluid. μ , β , K and C_p are respectively the dynamical viscosity, the compressibility, the thermal conductivity and the heat capacity of the fluid. ρ_s and T_s are the density and temperature of the solid. K_s and C_s are the thermal conductivity and the heat capacity of the solid.

The boundary conditions required to solve equations (3)-(7) are:

$$u|_{y=0} = v|_{y=0} = 0, \quad T|_{y=0} = T_s|_{y=0}$$

$$K \frac{dT}{dy}|_{y=0} = K_s \frac{dT_s}{dy}|_{y=0}$$

$$u|_{y \rightarrow \infty} < \infty \quad T|_{y \rightarrow \infty} < \infty$$

$$\partial T_s / \partial y|_{y=-l} = 0 \quad (8)$$

where l is the semi-thickness of the plate.

Equations (3-6) may be reduced to the following wave equation for the pressure[4]

$$\begin{aligned} \rho_m \frac{d}{dx} \left(\frac{1 - f_v}{\rho_m} \frac{dp_1}{dx} \right) - \beta \frac{f_k - f_v}{(1 - \text{Pr})(1 + \epsilon_s)} \nabla T_m \frac{dp_1}{dx} \\ + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \left(1 + \frac{(\gamma - 1) f_k}{(1 + \epsilon_s)} \right) p_1 = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

where $\text{Pr} = C_p \mu / K$ is the Prandtl number and c is the sound speed of the fluid. For a single plate configuration considered here,

$$f_v = \delta_v, \quad f_k = \delta_k \quad \text{and} \quad \epsilon_s = \epsilon \coth[(1+i)l/\delta_s], \quad (10)$$

where $\delta_k = \sqrt{2K/\rho_m C_p \omega}$ is the thermal penetration depth in the fluid, $\delta_v = \sqrt{2\mu/\rho_m \omega}$ is the viscous penetration depth, $\delta_s = \sqrt{2K_s/\rho_s C_s \omega}$ is the thermal penetration depth in the solid and $\epsilon = \sqrt{K \rho_m C_p / K_s \rho_s C_s}$.

The solution of equation (9) describes traveling or standing waves depending upon the lateral boundary conditions. Efforts have been made to obtain analytical solutions for the pressure wave equation (Eq.(9)). Recently, Raspet *et al.*[6] gave an exact solution assuming an ideal gas, $\mu = 0$, $\epsilon = 0$, $\delta_k \ll 1$ and a linear temperature gradient.

An expression for the velocity perturbation $u_1(x, y)$ in terms of p_1 can be found by solving the momentum balance equation (Eq. (4))

$$u_1(x, y) = u_\infty \left(1 - e^{-(1+i)y/\delta_v} \right) \quad (11)$$

where u_∞ is the velocity far away from the plate given by

$$u_\infty = \frac{i}{\omega \rho_m} \frac{dp_1}{dx} \quad (12)$$

The temperature oscillation in the fluid and in the solid plate $T_1(x, y)$ and $T_{s1}(x, y)$ respectively are determined using the gas energy balance equation

(Eq. (5)) and the plate energy balance equation (Eq. (7)) with the given boundary conditions (Eq. (8)). The resulting expressions in terms of p_1 and u_∞ are:

$$T_1(x, y) = \frac{T_m \beta}{\rho_m C_p} p_1 + i \frac{\nabla T_m}{\omega} u_\infty \left(1 - \frac{\text{Pr}}{\text{Pr} - 1} e^{-(1+i)y/\delta_v} \right) - \left(\frac{T_m \beta}{\rho_m C_p} p_1 - i \frac{\nabla T_m}{\omega} u_\infty \frac{1 + \epsilon_s \sqrt{\text{Pr}}}{(\text{Pr} - 1)} \right) \frac{e^{-(1+i)y/\delta_k}}{1 + \epsilon_s} \quad (13)$$

and

$$T_{s1}(x, y) = \frac{\epsilon_s}{1 + \epsilon_s} \left(\frac{T_m \beta}{\rho_m C_p} p_1 + i \frac{\nabla T_m}{\omega} \frac{u_\infty}{\sqrt{\text{Pr} + 1}} \right) \frac{\cosh [(1+i)(y+l)/\delta_s]}{\cosh [(1+i)l/\delta_s]} \quad (14)$$

4. The phase difference between the pressure and the heat transfer

The aim of this section is to calculate the phase difference between the pressure and the heat supplied to the fluid. This determines the conditions under which the waves are excited or attenuated according to the criterion given by Rayleigh and discussed in Section 1.

The relative phase θ of two perturbations having the form of Eq. (2) can be evaluated by $|\theta| = \arccos(2 \langle \Phi_1 \Psi_1 \rangle / \|\Phi_1\| \|\Psi_1\|)$, where $\langle \quad \rangle$ indicates time-average and $\|\quad\|$ means magnitude of a complex number. Using this expression, the phase difference between the pressure and the heat supplied to the fluid as function of x is,

$$|\theta| = \arccos \left(\frac{2 \langle p_1 q_{w1} \rangle}{\|p_1\| \|q_{w1}\|} \right) \quad (15)$$

where q_{w1} is the heat supplied to the fluid from the solid boundary at x , and is given by

$$q_{w1} = -K \left. \frac{\partial T_1}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (16)$$

According to Eq. (15), the Rayleigh critical condition $|\theta| = \pi/2$ reduces to $\langle p_1 q_{w1} \rangle = 0$. The excitation condition $|\theta| < \pi/2$ will occur if $\langle p_1 q_{w1} \rangle > 0$ and the attenuation condition $|\theta| > \pi/2$ implies that $\langle p_1 q_{w1} \rangle < 0$. Substituting q_{w1} from Eq. (16),

$$\langle p_1 q_{w1} \rangle = \left\langle p_1 \left(-K \frac{\partial T_1}{\partial y} \Big|_{y=0} \right) \right\rangle \quad (17)$$

Calculating $(\partial T_1 / \partial y)|_{y=0}$ from Eq. (13) and substituting into Eq. (17), gives

$$\begin{aligned} \langle p_1 q_{w1} \rangle = & \frac{K}{\delta_k} \left\{ -\frac{T_m \beta}{\rho_m C_p} \left[\left\langle p_1 \left(\frac{1}{1 + \epsilon_s} p_1 \right) \right\rangle + \left\langle p_1 \left(\frac{i}{1 + \epsilon_s} p_1 \right) \right\rangle \right] \right. \\ & \left. + \frac{\nabla T_m}{\omega} \frac{1}{\sqrt{Pr + 1}} \left[\left\langle p_1 \left(\frac{1}{1 + \epsilon_s} u_{\infty} \right) \right\rangle - \left\langle p_1 \left(\frac{i}{1 + \epsilon_s} u_{\infty} \right) \right\rangle \right] \right\} \quad (18) \end{aligned}$$

5. Acoustic power production

The time-average power produced ($W > 0$) or absorbed ($W < 0$) by the fluid can be calculated from the expression

$$W = \left\langle \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} \int_0^{\infty} \left(-\frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right) dy dz dx \right\rangle \quad (19)$$

In the short plate approximation equation (19) can be expressed in terms of products of first order perturbations of the variables p and ρ (see Eq.(1)) as

$$\langle W \rangle = \Delta z \Delta x \langle w \rangle \quad (20)$$

where $\langle w \rangle$ is the time-average power production per unit area for a given x

$$\langle w \rangle = \int_0^{\infty} \left(\omega \beta \langle p_1(iT_1) \rangle + \beta \nabla T_m \langle p_1 u_1 \rangle \right) dy \quad (21)$$

A full derivation of expressions (20) and (21) is given in Ref. 7.

Substituting the temperature perturbation from Eq. (13) and the velocity perturbation from Eq. (11), Eq. (21) takes the form

$$\langle w \rangle = \frac{\delta_k}{2} \left\{ -\frac{T_m \beta^2 \omega}{\rho_m C_p} \left[\left\langle p_1 \left(\frac{1}{1 + \epsilon_s} p_1 \right) \right\rangle + \left\langle p_1 \left(\frac{i}{1 + \epsilon_s} p_1 \right) \right\rangle \right] \right. \\ \left. + \nabla T_m \beta \frac{1}{\sqrt{Pr} + 1} \left[\left\langle p_1 \left(\frac{1}{1 + \epsilon_s} u_\infty \right) \right\rangle - \left\langle p_1 \left(\frac{i}{1 + \epsilon_s} u_\infty \right) \right\rangle \right] \right\} \quad (22)$$

Comparing the expression for $\langle p_1 q_{w1} \rangle$ (Eq. (18)) and that for the acoustic power production (Eq. (22)) for a given x , it is found that the two are proportional, *i.e.*

$$\langle w \rangle = \frac{\beta}{\rho_m C_p} \langle p_1 q_{w1} \rangle \quad (23)$$

Recalling Eq. (15), this result indicates that acoustic power is generated when heat supplied to the fluid is in phase with the pressure perturbation, and the acoustic power is absorbed when heat supplied to the fluid is out of phase with the pressure, in agreement with Rayleigh criterion.

At this point, it must be emphasized that equation (23) is valid for any solution of the wave equation for the pressure (Eq. (9)) including standing and traveling waves. Equation (23) constitutes the quantitative demonstration of Rayleigh's contention. An obvious consequence of Eq. (23) is that the critical value for acoustic power production, *i.e.* $\langle w \rangle = 0$ coincides with the critical condition of a $\pi/2$ phase difference between heat supplied to the fluid and the pressure perturbation.

6. Discussion and conclusions

The conditions for attenuation and excitation obtained by considering the relative phase between pressure and the heat supplied to the fluid coincide with those obtained by direct calculation of the acoustic power production, without depending on the particular solution of the pressure wave equation. This shows full agreement between the physical qualitative interpretation given by Rayleigh for the thermoacoustic effect and the modern quantitative theory.

Eq. (23) indicates that the time-average production of acoustic power, which is an integral quantity, is proportional to the time-average product of the pressure perturbation and the heat flux supplied to the fluid from the solid boundary, which is a local quantity. This stresses the fact that the overall effect is controlled by the conditions at the fluid-solid boundary.

Acknowledgments

Partial support for this work provided by DGAPA-UNAM IN102292 and CGEP-UNAM 011302 projects, is gratefully acknowledged.

References

- [1] Rayleigh, J.W.S., *The theory of sound*, 2nd edition, Vol.2 Sec.322, Dover, New York, 1945.
- [2] Rott, N., Damped and thermally driven acoustic oscillations, Part II., *Zh. Angew. Math. Phys.*, **24**, (1973), 54.
- [3] Swift, G.W., Migliori, A., Hoffer, T., and Wheatley, J., Theory and calculation for an intrinsically irreversible thermoacoustic prime mover using liquid sodium as primary working gas, *J. Acoust. Soc. Am.* **78** (2), (1983), 767.
- [4] Swift, G.W., Thermoacoustic engines, *J. Acoust. Soc. Am.* **84** (4), (1988), 1145.
- [5] Huelsz G. and Ramos, E., On the phase difference of the temperature and pressure waves in the thermoacoustic effect, *Int. Comm. in Heat Mass Transf.*, **22**(1), (1995), 71.
- [6] Raspet, R., Bass, E.E. and Kordomenos, J., Thermoacoustics of traveling waves: Theoretical analysis for an inviscid ideal gas, *J. Acoust. Soc. Am.* **94** (4), (1993), 2232.
- [7] Huelsz, G. and Ramos, E., Power production in thermoacoustics. Submitted for publication.

Additional Papers—Program of the 1994 Meeting of The APS Division of Fluid Dynamics 20–22 November 1994; Atlanta, Georgia

SESSION IC: VORTEX DYNAMICS VI
Tuesday morning, 22 November 1994
English Room at 10:15
K. Ghia, presiding

10:10
JJ 6

Phase difference in travelling waves in the thermoacoustic effect. G. Huelsz, E. Ramos and J.A. del Río. *Laboratorio de Energía Solar, IM-UNAM, Temixco, Mor., México.* A simplified linear theory for the thermoacoustic phenomenon assuming a plate with infinite heat capacity has been used to find expressions for the phase difference (α) between the temperature and pressure perturbations in travelling waves. It has been found that the generation of acoustic work is governed by a relation between the Prandtl number (Pr) and two nondimensional temperature gradients, one (Γ) including the ratio between the externally imposed temperature gradient (∇T) and the characteristic adiabatic temperature and the other (H) including the ratio of ∇T and the average temperature. Generation occurs for $\Gamma\sqrt{1+H^2} > 1 + \sqrt{Pr} + \Gamma H$ which corresponds to $|\alpha| > \pi/2$. Partial support for this work has been provided by DGAPA-UNAM IN102292 and CGEP-UNAM 011302 projects.

11:50

IC 9 **Numerical experiments on vortex breakdown** W. Ma & S. Leibovich, *Cornell University.* Three-dimensional direct spectral NS simulations of vortical flows are reported. The computations model flow in a converging-diverging tube similar to the experiments done by Sarpkaya and by Faler & Leibovich, and employ a numerical algo-

rithm based on the three-dimensional velocity vector potential. The need for careful treatment of inflow and outflow boundaries is emphasized. Sponge filters are used at the inflow to absorb wave reflections, especially from the non-axisymmetric modes. Previous simulations of vortex breakdown assuming axial symmetry are shown to be unstable. The sequence of breakdown transitions experimentally seen by Faler & Leibovich have been reproduced in the simulations, including type 6, spiral, and bubble breakdown forms, and the two-celled internal structure within the bubble breakdown region reported by Faler and Leibovich has been confirmed. Particle traces compare well with experimental flow visualizations.

* Computations and scientific visualization were performed using the resources of the Cornell Theory Center.

11:59

ID 9 **The presence of the history term in the equation of motion of a sphere, which is occasionally referred to as the "Basset term," has been known for a long time. The term arises because of the diffusion of vorticity created in the previous stages of motion of the sphere. We have recently discovered the existence of a history term in the energy equation of a sphere, which is analogous to the history term in the equation of motion. It was also demonstrated, that the equation of motion and the energy equation of a viscous sphere in a fluid of different viscosity includes two time scales for the diffusion of vorticity. Hence, there are two time scales, in the Laplace domain: one for inside and one for the outside domains of the sphere. Here we present the general energy equation of a sphere at zero Peclet numbers and at small but finite Peclet numbers. We also present the analytical transformations of these equations in the time domain at short and long times, as well as some calculations on the importance of the history terms of the equations in actual heat transfer processes.**

Paper CJ 1 has been moved and is now paper JF 6.

sea necesario hacer medidas intermedias de velocidad. En esta conferencia se describirá la teoría que respalda este efecto, así como las aplicaciones de que ha sido objeto hasta ahora en el estudio de flujos turbulentos y laminares. También se indicarán dos direcciones emergentes: la difracción de ondas de superficie y su analogía con el efecto Aharonov-Bohm, así como la difracción de ondas de segundo sonido por vorticidad cuántica en el Helio superfluido.

SESIÓN VII: FLUIDOS VISCOSOS Moderador: Sergio Cuevas García (IIE)

SVII.1 DINÁMICA DEL FLUJO EN UN ESTANQUE CON ENTRADA Y SALIDA CON SIMETRÍA AXIAL. J. Rojas*, J.A. González, C. Patiño e I. Robles. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, Jiutepec, Mor. 62550. Se analizó numéricamente el flujo de agua en un estanque con entrada y salida dispuestas axialmente. Para el estudio numérico se consideró flujo bidimensional, transitorio y laminar. El dominio se discretizó utilizando una malla no uniforme y pasos en el tiempo de 0.3 s. Para el estudio experimental, se inyectó tinta como trazador, se grabó en video la trayectoria del flujo y se digitalizaron las imágenes. Posteriormente, se hicieron mediciones puntuales de la velocidad con un anemómetro de película caliente. Al principio del proceso, el flujo en el tanque se mantuvo en la parte central y a tiempos grandes se desvió indistintamente hacia una u otra de las orillas, manteniéndose en esa posición. Se encontró buena concordancia entre los resultados numéricos y experimentales.

* Dirección permanente: Laboratorio de Energía Solar IIM-UNAM.

SVII.2 ANEMOMETRÍA MULTIPUNTUAL DIGITAL PARA LA CARACTERIZACIÓN DE FLUJOS. J. Ramírez Serrano, G. Barradas, Depto. de Ing. Mecánica, ITESM-CCM, Calle del Puente 222, Tlalpan, México D.F. 14380. Las técnicas de anemometría actuales para caracterizar flujos se encuentran limitadas debido al hecho de que determinan la velocidad del fluido en un solo punto. La anemometría multipuntual digital es capaz de medir el vector velocidad de un fluido en varios puntos en forma simultánea, proporcionando características cuantitativas y cualitativas de visualización. Para caracterizar completamente un flujo es necesario conocer como varían sus características en toda una zona de interés. Con las técnicas actuales de anemometría solo es posible la caracterización de flujos en forma parcial. Para flujos turbulentos requerimos conocer las estructuras espaciales y temporales que se presentan, y ello solo es posible si podemos conocer el campo completo de velocidades y su evolución. La anemometría multipuntual es una técnica de medición capaz de determinar el campo completo (mapas) de velocidades, de vorticidad y de deformaciones que sufre un fluido en movimiento. El sistema consta de un sistema de iluminación con rayo láser, un sistema de adquisición de imágenes en forma digital del fluido en movimiento, y un código para realizar un procesamiento digital de la información.

SVII.3 ANEMOMETRÍA DE HILO CALIENTE EN ONDAS ACÚSTICAS. G. Huelsz y E. Ramos, Laboratorio de Energía Solar, IIM-UNAM, Temixco, Mor. 62580. Se reportan y analizan resultados experimentales que demuestran la utilidad del anemómetro de hilo caliente en la medición de la oscilación de velocidad en una onda acústica en aire ($v = 0.05$ m/s) con velocidad media nula. Se describe la técnica desarrollada para la calibración del anemómetro usando como referencia la velocidad calculada a través de la presión acústica medida. Se analizan las curvas de calibración para diferentes frecuencias.

Parte de este trabajo se realizó con apoyo de los proyectos DGAPA-UNAM IN102292 y CGEP-UNAM 011302.

SVII.4 FRICCIÓN EN FLUJOS OSCILANTES. P. Pérez, S.P.R. Czitrom, Instituto de Ciencias del Mar y Limnología, UNAM, R. Peralta-Fabi, Facultad de Ciencias, UNAM. Se estudia la energía que se disipa debido a la fricción en flujos oscilantes dentro de ductos. Se resuelve la ecuación de movimiento para el caso laminar en un cilindro recto e infinito, y se obtiene la energía disipada y la pérdida de presión por fricción; funciones del número de Reynolds ($Rm = \omega a^2 / \nu$ donde ω = frecuencia de oscilación, a = radio del cilindro y ν = viscosidad cinemática del fluido). Experimentalmente, se obtiene la pérdida de presión en flujos oscilantes dentro de tubos en U, en los que una columna de agua se pone a oscilar con ayuda de la gravedad y la compresión del aire, midiéndose los desplazamientos con un sensor electrónico de alturas colocado en la pared interior del tubo. Se muestran algunos resultados sobre la relación entre dicha pérdida y los parámetros adimensionales que corresponden a las características geométricas de los tubos y a las cantidades físicas involucradas en el flujo.

Se agradece el apoyo brindado por DGAPA, Proyecto No. IN106694. Contactos: e-mail: paula@lya.ciencias.unam.mx

SVII.5 FORMAS DE FONDO Y FACTORES DE FRICCIÓN EN UN CANAL. J. Espinoza, I. Caldiño, J. Figueroa y J. Rojas*. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, Jiutepec, Mor. 62550. Se estudió experimentalmente las formas de fondo y la resistencia al flujo de agua sobre un fondo granular en un canal de laboratorio. En particular se analizó el caso de la formación de rizados bajo diferentes condiciones de flujo. Se midieron las características geométricas de las formas de fondo, los perfiles longitudinales de fondo y la velocidad de flujo. Con estos parámetros se obtuvieron factores de fricción que se encuentran en concordancia con los reportados en la literatura.

* Dirección permanente: Laboratorio de Energía Solar IIM-UNAM.

SVII.6 FLUJOS CON SIMETRÍA AXIAL. I. Santamaría, R. Peralta-Fabi, Facultad de Ciencias, UNAM. Se presentan algunas soluciones a las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas esféricas para flujos con simetría axial. Se presentan algunas soluciones para flujos a lo largo del eje, velocidades radial y polar distintas de cero, en términos de la función de corriente. Se encuentran las soluciones para el flujo dentro de un esfera fluida, Vórtice de Hill (exacta), y para el flujo de Stokes alrededor de una esfera fluida (aproximada), encontradas por Rybczynski y Hadamard (1911). El resultado más importante es que se llega a una ecuación diferencial lineal de segundo orden que contiene tres constantes libres cuyo caso más simple (las tres constantes libres iguales a cero) es la solución de Landau del Jet sumergido. Además se presentan algunas soluciones de dicha ecuación que representan generalizaciones de la solución de Landau.

Se agradece el apoyo del proyecto DGAPA IN-106694.

sea necesario hacer medidas intermedias de velocidad. En esta conferencia se describirá la teoría que respalda este efecto, así como las aplicaciones de que ha sido objeto hasta ahora en el estudio de flujos turbulentos y laminares. También se indicarán dos direcciones emergentes: la difracción de ondas de superficie y su analogía con el efecto Aharonov-Bohm, así como la difracción de ondas de segundo sonido por vorticidad cuántica en el Helio superfluido.

SESIÓN VII: FLUIDOS VISCOSOS

Moderador: Sergio Cuevas García (IIE)

SVII.1 DINÁMICA DEL FLUJO EN UN ESTANQUE CON ENTRADA Y SALIDA CON SIMETRÍA AXIAL. J. Rojas*, J.A. González, C. Patiño e I. Robles. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, Jiutepec, Mor. 62550. Se analizó numéricamente y experimentalmente el flujo de agua en un estanque con entrada y salida dispuestas axialmente. Para el estudio numérico se consideró flujo bidimensional, transitorio y laminar. El dominio se discretizó utilizando una malla no uniforme y pasos en el tiempo de 0.3 s. Para el estudio experimental, se inyectó tinta como trazador, se grabó en video la trayectoria del flujo y se digitalizaron las imágenes. Posteriormente, se hicieron mediciones puntuales de la velocidad con un anemómetro de película caliente. Al principio del proceso, el flujo en el tanque se mantuvo en la parte central y a tiempos grandes se desvió indistintamente hacia una u otra de las orillas, manteniéndose en esa posición. Se encontró buena concordancia entre los resultados numéricos y experimentales.

* Dirección permanente: Laboratorio de Energía Solar IIM-UNAM.

SVII.2 ANEMOMETRIA MULTIPUNTUAL DIGITAL PARA LA CARACTERIZACIÓN DE FLUJOS. J. Ramírez Serrano, G. Barradas, Depto. de Ing. Mecánica, ITESM-CCM, Calle del Puente 222, Tlalpan, México D.F. 14380. Las técnicas de anemometría actuales para caracterizar flujos se encuentran limitadas debido al hecho de que determinan la velocidad del fluido en un solo punto. La anemometría multipuntual digital es capaz de medir el vector velocidad de un fluido en varios puntos en forma simultánea, proporcionando características cuantitativas y cualitativas de visualización. Para caracterizar completamente un flujo es necesario conocer como varían sus características en toda una zona de interés. Con las técnicas actuales de anemometría solo es posible la caracterización de flujos en forma parcial. Para flujos turbulentos requerimos conocer las estructuras espaciales y temporales que se presentan, y ello solo es posible si podemos conocer el campo completo de velocidades y su evolución. La anemometría multipuntual es una técnica de medición capaz de determinar el campo completo (mapas) de velocidades, de vorticidad y de deformaciones que sufre un fluido en movimiento. El sistema consta de un sistema de iluminación con rayo láser, un sistema de adquisición de imágenes en forma digital del fluido en movimiento, y un código para realizar un procesamiento digital de la información.

SVII.3 ANEMOMETRÍA DE HILO CALIENTE EN ONDAS ACÚSTICAS. G. Huelsz y E. Ramos. Laboratorio de Energía Solar, IIM-UNAM, Temixco, Mor. 62580. Se reportan y analizan resultados experimentales que demuestran la utilidad del anemómetro de hilo caliente en la medición de la oscilación de velocidad en una onda acústica en aire ($v = 0.05$ m/s) con velocidad media nula. Se describe la técnica desarrollada para la calibración del anemómetro usando como referencia la velocidad calculada a través de la presión acústica medida. Se analizan las curvas de calibración para diferentes frecuencias.

Parte de este trabajo se realizó con apoyo de los proyectos DGAPA-UNAM IN102292 y CGEP-UNAM 011302.

SVII.4 FRICCIÓN EN FLUJOS OSCILANTES. P. Pérez, S.P.R. Czitrom, Instituto de Ciencias del Mar y Limnología, UNAM, R. Peralta-Fabi, Facultad de Ciencias, UNAM. Se estudia la energía que se disipa debido a la fricción en flujos oscilantes dentro de ductos. Se resuelve la ecuación de movimiento para el caso laminar en un cilindro recto e infinito, y se obtiene la energía disipada y la pérdida de presión por fricción; funciones del número de Reynolds ($Rm = \omega a^2 / \nu$ donde ω = frecuencia de oscilación, a = radio del cilindro y ν = viscosidad cinemática del fluido). Experimentalmente, se obtiene la pérdida de presión en flujos oscilantes dentro de tubos en U, en los que una columna de agua se pone a oscilar con ayuda de la gravedad y la compresión del aire, midiéndose los desplazamientos con un sensor electrónico de alturas colocado en la pared interior del tubo. Se muestran algunos resultados sobre la relación entre dicha pérdida y los parámetros adimensionales que corresponden a las características geométricas de los tubos y a las cantidades físicas involucradas en el flujo.

Se agradece el apoyo brindado por DGAPA, Proyecto No. IN106694. Contactos: e-mail: paula@lya.ciencias.unam.mx

SVII.5 FORMAS DE FONDO Y FACTORES DE FRICCIÓN EN UN CANAL. J. Espinoza, I. Caldiño, J. Figueroa y J. Rojas*. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, Jiutepec, Mor. 62550. Se estudió experimentalmente las formas de fondo y la resistencia al flujo de agua sobre un fondo granular en un canal de laboratorio. En particular se analizó el caso de la formación de rizados bajo diferentes condiciones de flujo. Se midieron las características geométricas de las formas de fondo, los perfiles longitudinales de fondo y la velocidad de flujo. Con estos parámetros se obtuvieron factores de fricción que se encuentran en concordancia con los reportados en la literatura. *Dirección permanente: Laboratorio de Energía Solar IIM-UNAM.

SVII.6 FLUJOS CON SIMETRÍA AXIAL. I. Santamaría, R. Peralta-Fabi, Facultad de Ciencias, UNAM. Se presentan algunas soluciones a las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas esféricas para flujos con simetría axial. Se presentan algunas soluciones para flujos a lo largo del eje, velocidades radial y polar distintas de cero, en términos de la función de corriente. Se encuentran las soluciones para el flujo dentro de una esfera fluida, Vórtice de Hill (exacta), y para el flujo de Stokes alrededor de una esfera fluida (aproximada), encontradas por Rybczynski y Hadamard (1911). El resultado más importante es que se llega a una ecuación diferencial lineal de segundo orden que contiene tres constantes libres cuyo caso más simple (las tres constantes libres iguales a cero) es la solución de Landau del Jet sumergido. Además se presentan algunas soluciones de dicha ecuación que representan generalizaciones de la solución de Landau.

Se agradece el apoyo del proyecto DGAPA IN-106694.

Referencias

- Ahlborn, B. & Camire, J. 1995 Thermoacoustic heat pumps with maximum power transfer. *Am. J. Phys.* **63**(5), 449-451.
- Arpaci, V.S. & Larsen, P.S. 1984 *Convection heat transfer*. Prentice-Hall, New Jersey.
- Atchley, A.A., Hoffer, T.J., Muzzerall M.L. Kite M.D & Ao Ch. 1990 Acoustically generated temperature gradients in short plates. *J. Acoust. Soc. Am.* **88**(1), 251-263.
- Atchley, A.A., Bass, H.E., Hoffer, T.J. & Lin, H-T 1992 Study of a thermoacoustic prime mover below onset of self-oscillation. *J. Acoust. Soc. Am.* **92**(5), 2907-2914.
- Atchley, A.A. 1992 Stability curves for a thermoacoustic prime mover. *J. Acoust. Soc. Am.* **92**(5), 2907-2914.
- Atchley, A.A. & Kuo, F.M. 1994 Stability curves for a thermoacoustic prime mover. *J. Acoust. Soc. Am.* **95**(3), 1401-1404.
- Arnott, W.P., Bass, H.E. & Raspet, R. 1991 General formulation of thermoacoustics for stacks having arbitrarily shaped pore cross sections. *J. Acoust. Soc. Am.* **90**(6), 3228-3237.
- Arnott, W.P. 1992 Radial wave thermoacoustic engine. *J. Acoust. Soc. Am.* **92**(4), Pt.2, 2454-2454.
- Arnott, W.P., Bass, H.E. & Raspet, R. 1992 Specific acoustic impedance measurements of an air-filled thermoacoustic prime mover. *J. Acoust. Soc. Am.* **92**(6), 3432-3434.
- Baker, S. 1955 An acoustic intensity meter. *J. Acoust. Soc. Am.* **27**(2), 269-273.
- Brocher, E. & Maresca, C. 1973 Etude des phénomènes thermiques dans un tube de Hartmann-Sprenger. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **16**, 529-548.

- Bruun, H.H. 1995 *Hot-wire anemometry. Principles and signal analysis*. Oxford Science Publications.
- Callen, H.B. 1960 *Thermodynamics*. John Wiley & Sons, New York.
- Cao, N., Olson, J.r., Swift, G.W. & Chen, S. 1996 Energy flux density in a thermoacoustic couple, enviado a *J. Acoust. Soc. Am.*
- Carter, R.L., White, M. & Steele, A.M. 1962 Private communication of Atomics International Division of North American Aviation, In. Citado por Swift (1988).
- Ceperley, P.H. 1979 A pistonless Stirling engine - The traveling wave heat engine. *J. Acoust. Soc. Am.* **66**, 1508-1513.
- Ceperley, P.H. 1982 Gain and efficiency of a traveling wave heat engine. *J. Acoust. Soc. Am.* **72**(6), 1688-1694.
- Ceperley, P.H. 1985 Gain and efficiency of a short traveling wave heat engine. *J. Acoust. Soc. Am.* **77**(3), 1239-1244.
- Chotiros, N.P. 1988 The moving thermoacoustic array: A theoretical study. *J. Acoust. Soc. Am.* **83**(6), 2145-2158.
- Christman, P.J. & Podzimek, J. 1981 Hot-wire anemometer behaviour in low velocity-air flow. *J. Phys. E: Sci. Instrum.* **14**, 46-51.
- Clement, J.R. & Gaffney, J. 1954 Thermal oscillations in low temperature apparatus. *Adv. Cyog. Eng.* **1**, 302-306.
- Feldman, K.T. 1968a Review of the literature on Sondhauss thermoacoustic phenomena. *J. Sound Vib.* **7**(11), 71-82.
- Feldman, K.T. 1968b Review of the literature on The Rijke thermoacoustic phenomena. *J. Sound Vib.* **7**(11), 83-89.
- Feldman, K.T. & Carter, R.L. 1970 A study of heat driven pressure oscillations in gas. *J. Heat Transf.* **92**, 536-540.
- Gabrielson, T.B. 1991 Radiation from a submerged thermoacoustic source. *J. Acoust. Soc. Am.* **90**(5), 2628-2636.

- Galiullin, R.G., Revva, I.P. & Khalimov, G.G. 1982 Thermoacoustic effect in a resonant semiopen tube. *J. Eng. Phys.* **43**(4), 1126-1132.
- Galiullin, R.G., Revva, I.P. & Konyukhov, A.A. 1984 Theory of nonlinear vibrations in a closed pipe with a view to thermoacoustic effects. *J. Eng. Phys.* **45**(2), 907-911.
- Galiullin, R.G. & Revva, I.P. 1985 Thermoacoustic effect during large-amplitude vibrations in a closed tube. *J. Eng. Phys.* **47**(1), 766-771.
- Garrett, S.L., Adef, J.A. & Hoffer, T.J. 1992 Refrigeration for space applications. *Nav. Reas. Rev.* **2**, 27-35.
- Garrett, L. & Swift, G.W. 1995 Thermoacoustic refrigeration and its relationship to the stirling cycle. ICSC'95 International Conference on Stirling Cycle Machines, November 5-8, 1995, Tokyo, 23-28.
- Gorvachev, S.P., Korolev, A.L., Matyushchenkov, V.K. & Sysoev, V.A. 1986 Simple method for elimination of thermoacoustic oscillations in cryogenic tubes. *Inst. and Exp. Tech.* **29**(1) pt. 2, 258-259.
- Hewlett Packard 1984 *Programming the HP 3421A with the HP-71B and the HP-75D*. Produc Note 3421A-2.
- Hoffer, T.J. 1986 Thermoacoustic refrigerator design and performance, Ph.D. dissertation. Physics Dept., Univ. Calif. San Diego. Citado por Swift (1988).
- Huang, Y., & Bau, H.H. 1995 Thermoacoustic waves in a semi-infinite medium. *Int. J. Heat Mass Transf.* **38**(8), 1329-1345.
- Huelsz, G., Ramos, E. & del Río, J.A. 1994 Phase difference in traveling waves in the thermoacoustic effect. *Bol. Am. Phys.* **39**(9), 1988-1988.
- Huelsz, G. & Ramos, E. 1995a On the phase difference of the temperature and pressure waves in the thermoacoustic effect. *Int. Comm. Heat Mass Transf.* **22**(1), 71-80.
- Huelsz, G. y Ramos, E. 1995b Anemometría de hilo caliente en ondas acústicas. *Soc. Mex. Fís. Sup. Vol.* **9-3**, 109-109.

- Huelsz, G. & Ramos, E. 1996 A physical interpretation of the thermoacoustic effect. Aceptado para su publicación en *J. Non Equilibrium Thermodynamics*.
- Ingard, U. & Ising, H. 1967 Acoustic nonlinearity of an orifice *J. Acoust. Soc. Am.* **42**(1), 6-17.
- Kinsler, L.E., Frey, A.R., Coppens, A.B. & Sanders, J.V. 1982 *Fundamentals of acoustics*. John Wiley & Sons, USA.
- Kirchhoff, G. 1868 Ueber den einfluss der wärmeleitung in einem gas auf die schallbewegung. *Ann.Phys.* (Leipzig) **134**, 177. Citado en Swift 1988
- Kordomenos, J., Atchley, A.A., Raspet, R. & Bass, H.E. 1995 Experimental study of a thermoacoustic termination of a traveling-wave tube. *J. Acoust. Soc. Am.* **98**(3), 1623-1628.
- Kuzmina, A.G. 1992 Thermoacoustic oscillations in cryostats: new results. *Cryogenics*, **32**(1), 11-19.
- Landau, L.D. & Lifshitz, E.M. 1982 *Fluid Mechanics*. Pergamon Press. Oxford, Great Britain.
- LaRue, J.C., Deaton, T. & Gibson, C.H. 1975 Measurement of high-frequency turbulent temperature. *Rev. Sci. Instr.*, **46**, 757-764.
- Levedeva, I.V. & Dragan, S.P. 1991 Calibration of hot-wire anemometer in sound fields. Dantec Information, No. 10, 12-13.
- Lide, D.R. 1990 (Editor) *Handbook of chemistry and physics*. 71 Ed., CRC Press, USA.
- Luck, H. & Trepp, Ch. 1992a Thermoacoustic oscillations in cryogenics. Part 1: basic theory and experimental verification. *Cryogenics* **32**(8), 690-697.
- Luck, H. & Trepp, Ch. 1992b Thermoacoustic oscillations in cryogenics. Part 2: applications. *Cryogenics* **32**(8), 698-702.
- Luck, H. & Trepp, Ch. 1992c Thermoacoustic oscillations in cryogenics. Part 3: avoiding and damping of oscillations. *Cryogenics* **32**(8), 703-706.

- Merkli, P. & Thomann, H. 1975 Thermoacoustic effects in a resonance tube. *J. Fluid Mech.* **70**(1), 161-177.
- Migliori, A. & Swift, G.W. 1988 Liquid-sodium thermoacoustic engine. *App. Phys. Lett.* **53**(5), 355-357.
- Morse, P.M. & Ingard, K.U. 1986 *Theoretical acoustics*. Princeton, New Jersey.
- Müller, U.A. & Rott, N. 1983 Thermally driven acoustic oscillations. Part VI. Excitation and power. *Zh. Angew. Math. Phys.* **34**, 607-626.
- Olson, J.R. & Swift, G.W. 1994 Similitude in thermoacoustics. *J. Acoust. Soc. Am.* **95**(3), 1405-1412.
- Olson, J.R. & Swift, G.W. 1995 A loaded thermoacoustic engine. *J. Acoust. Soc. Am.* **98**(5) Pt. 1, 2690-2692.
- Omari, D. 1996 Mathematical modeling of thermocompressive and thermoacoustic machines, Ph.D. Thesis, Department of Chemical Engineering, University of Notre Dame.
- Orozco, A. 1993 Máquinas termoacústicas y algunas aplicaciones. Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM.
- Orozco, A. 1995 Análisis del fenómeno termoacústico de onda sonora estacionaria y de onda sonora viajera y su comparación. Tesis de maestría, Facultad de Ciencias, UNAM.
- Perry, A.E. 1982 *Hot-wire*. Clarendon Press, Oxford.
- Putman, A.A. & Dennis, W.R. 1956 Survey of organ-pipe oscillations in combustion systems. *J. Acoust. Soc. Am.* **28**, 246-259.
- Rayleigh, Lord (J.W.S.) 1986 *The theory of sound*, (Dover, New York, Ed. 1945).
- Raspet, R., Bass, H.E. & Kormomenos, J. 1993 Thermoacoustics of traveling waves: Theoretical analysis for an inviscid ideal gas. *J. Acoust. Soc. Am.* **94**(4), 2232-2239.
- Rivkin, S.L. 1988 *Thermodynamics properties of gases*. Hemisphere Publishing Co., USA.

- Rott, N. 1969 Damped and thermally driven acoustic oscillations in wide and narrow tubes. *Zh. Angew. Math. Phys.* **20**, 230-243.
- Rott, N. 1973 Thermally driven acoustic oscillations. Part II. Stability limit for helium. *Zh. Angew. Math. Phys.* **24**, 54-72.
- Rott, N. 1974a The influence of heat conduction on acoustic streaming. *Zh. Angew. Math. Phys.* **25**, 417-421.
- Rott, N. 1974b The heating effect connected with non-linear oscillations in a resonance tube. *Zh. Angew. Math. Phys.* **25**, 619-634.
- Rott, N. 1975 Thermally driven acoustic oscillations. Part III. Second-order heat flux. *Zh. Angew. Math. Phys.* **26**, 43-49.
- Rott, N. & Zouzoulas, G. 1976 Thermally driven acoustic oscillations. Part IV. Tubes with variable cross-section. *Zh. Angew. Math. Phys.* **27**, 197-224.
- Rott, N. 1980 Thermoacoustics. *Adv. App. Mech.* **20**, 135-175.
- Rott, N. 1984 Thermoacoustic heating at the closed end of an oscillating gas column. *J. Fluid Mech.* **145**, 1-9.
- Santillan, A.O. & Boulosa, R.R. 1995 Space dependence of acoustic power and heat flux in the thermoacoustic effect. *Int. Comm. Heat Mass Transf.* **22**(4) 539-548.
- Scott, D. & Skerret, P.J. 1991 A sound Idea *Popular Science*, **239**, 44-44.
- Sen, M., Chang, H-Ch & Omari, D. 1994 Thermoacoustic machines. Fifth Latin American Congress of Heat and Mass Transfer, Caracas, Venezuela, Oct.24-27 1994.
- Smits, A.J., Perry, A.E. & Haffmann, P.H. 1978 The response to temperature fluctuations of a constant-current hot-wire anemometer. *J. Phys. E: Sci. Instrum.* **11**, 909-914.
- Sondhauss, C. 1850 Ueber die Schallschwingungen der Luft in erhitzten Glasröhren und in gedeckten Pfeifen von ungleicher Weite, *Ann. Phys. (Leipzig)* **79**, 1. Citado por Feldman 1968a.

- Sprenger, H. 1954 Über thermische Effekte in Resonanzrohere. *Mitt. I.f.A.e., Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich*, **21**, p. 18. Citado por Merkli 1975.
- Spiegel, M.R. 1980 *Manual de fórmulas y tablas matemáticas*. Mc Graw-Hill, México.
- Stanford Research Systems 1992, *Model SR530 Lock-in amplifier*, Revision 2.0.
- Suzalla, M., Hofer, T. & Garrett, S.L. 1988 Low Prandtl number gas mixtures as a working fluid in a thermoacoustic refrigerator. *J. Acoust. Soc. Am. Suppl.1*, **83**, S6-S6.
- Swift, G.W., Migliori, A., Hofer, T. & Wheatley, J. 1985 Theory and calculations for an intrinsically irreversible acoustic prime mover using liquid sodium as primary working fluid. *J. Acoust. Soc. Am.*, **78**(2), 767-781.
- Swift, G.W. 1988a A liquid-metal magnetohydrodynamic acoustic transducer. *J. Acoust. Soc. Am.* **83**(1), 350-361.
- Swift, G.W. 1988b Thermoacoustic engines. *J. Acoust. Soc. Am.* **84**(4), 1145-1180.
- Swift, G.W. & Fusco, A.M. 1988 Seawater as a working fluid for thermoacoustic engines. *J. Acoust. Soc. Am. Suppl.1*, **84**, S37-S37.
- Swift, G.W. 1992 Analysis and performance of a large thermoacoustic engine. *J. Acoust. Soc. Am.* **92**(3), 1551-1563.
- Swift, G.W. & Keolian, R.M. 1993 Thermoacoustics in pin-array stacks. *J. Acoust. Soc. Am.* **94**(2) Pt.1, 941-943.
- Swift, G.W. 1995 Thermoacoustic engines and refrigerators. *Physics Today*, **48**(7), 22-28.
- Swift, G.W. & Radebaugh, R. 1995 Heat driven cryocooler. Los Alamos National Laboratory and National Institute of Standards and Technology Information summary, March 1995.
- Swift, G.W. 1996 Comunicación personal.

- Taconis, K.W., Beenakker, J.J.M, Nier, A.D.C. & Aldrich, L.T. 1949 Measurements concerning the vapor-liquid equilibrium of solutions of He^3 in He^4 below $2.19^\circ K$. *Physica* **15**(8-9), 733-739.
- Tominaga, A., Narahara, Y. & Yazaki T. 1984 Thermoacoustic effects of inviscid fluids. *J.Low Temp.Phys.* **54**(3/4), 233-245.
- Ward, W.C., Swift, G.W., Martin, R.A. & Merrigan, M.A. 1991 Thermoacoustic engine scaling, acoustic, and safety study. Los Alamos National Laboratory LA-12103-MS.
- Ward, W.C. & Swift, G.W. 1994 Design environment for low-amplitude thermoacoustic engines. *J. Acoust. Soc. Am.* **95**(6), 3671-3672.
- Welty, J.R., Wilson, R.E. and Wicks, C.E. 1976 *Fundamentals of momentum heat and mass transfer*. John Wiley & Sons, New York.
- West, C.D. 1986 *Principles and applications of Stirling engines*. Van Nostrand Reinhold, New York.
- Wheatley, J., Hoffer, T., Swift, G.W. & Migliori, A. 1983a Experiments with an intrinsically irreversible acoustic heat engine. *Phys. Rev. Lett.* **50**(7), 499-502.
- Wheatley, J., Hoffer, T., Swift, G.W. & Migliori, A. 1983b An intrinsically irreversible thermoacoustic heat engine. *J. Acoust. Soc. Am.* **74**(1), 153-170.
- Wheatley, J. & Cox, A. 1985a Natural engines. *Physics Today*, **38**, 1-8.
- Wheatley, J., Hoffer, T., Swift, G.W. & Migliori, A. 1985b Understanding some simple phenomena in thermoacoustics with applications to acoustical heat engines. *Am. J. Phys.* **53**(2), 147-162.
- Wollan, J.J., Swift, G. & Radebaugh, R. 1994 Thermoacoustic natural-gas liquefier. Cryenco Inc., Los Alamos National Laboratory & National Institute of Standards and Technology, Information summary, August 1994.
- Xiao, J.H. 1992 Thermoacoustic theory for cyclic flow regenerators. Part I. Fundamentals. *Cryogenics* **32**(10) 895-901.
- Yazaki, T. Tominaga, A. & Narahara, Y. 1980 Experiments on thermally driven acoustic oscillations of gaseous helium. *J.Low Temp. Phys.* **41**(1/2), 45-60.

Zinn, B.T. 1986 Pulsating combustion, in *Advanced Combustion Methods*, edited by F.J. Winberg (Academic, London, 1986), p. 113. Citado en Swift 1988b.

Zouzoulas, G. & Rott, N. 1976 Thermally driven acoustic oscillations. Part V. Gas-liquid oscillations. *Zh. Angew. Math. Phys.* **27**, 325-334.