

78
26j



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

APLICACIONES DE LA TEORIA DE
NUCLEOS EN DIGRAFICAS

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
A C T U A R I A
P R E S E N T A :
VERONICA PUENTE VERA



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES
DIRECTOR DE TESIS:
RA. HORTENSIA GALEANA SANCHEZ
1996
FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

Aplicaciones de la Teoría de Núcleos en Digráficas

realizado por Puente Vera Verónica

con número de cuenta 8839341-8 , pasante de la carrera de Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis	
Propietario	Dra. Hortensia Galeana Sánchez
Propietario	Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía <i>Hugo A. Rincón M.</i>
Propietario	M. en C. Virginia Abrín Batule <i>Virginia Abrín Batule</i>
Suplente	Mat. Laura Pastrana Ramírez <i>Laura Pastrana R.</i>
Suplente	M. en C. Patricia Cortés Flores <i>Patricia Cortés Flores</i>

Consejo Departamental de Matemáticas

Claudia Carrillo Q.
Act. Claudia Carrillo Quiroz

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN.....	i
1. DEFINICIONES	1
2. APLICACIONES	17
2.1. UBICACIÓN DE ESTACIONES DE RADAR.....	17
2.2. DETECCIÓN O LOCALIZACIÓN DE GRUPOS DE PODER O PANDILLAS	21
2.3. UN PROBLEMA DE COMBINATORIA EN LÓGICA.....	24
2.3.1. Las antibases de una teoría	27
2.3.2. La digráfica de implicaciones.....	31
2.4. TOMA DE DECISIONES INDIVIDUAL	33
2.5. TOMA DE DECISIONES	36
2.6. TOMA DE DECISIONES GRUPAL	38
2.7. JUEGOS TIPO NIM	41
2.8. OTRO JUEGO TIPO NIM.....	43
2.9. UN JUEGO VENENOSO	49
2.10. NÚCLEOS Y FUNCIONES DE GRUNDY.....	55
2.11. ALGUNOS RESULTADOS SOBRE CONJUNTOS INDEPENDIENTES Y TRAYECTORIAS DIRIGIDAS DE LONGITUD MÁXIMA	58
3. RESULTADOS.....	63
APÉNDICE.....	76

INTRODUCCION

El propósito del presente trabajo, es el de exponer algunas aplicaciones de la Teoría de Núcleos en Digráficas. Estas aplicaciones son de gran utilidad para el problema de toma de decisiones y para otras áreas en general.

En la primera parte de este trabajo, daremos las definiciones que requerimos sobre la Teoría de Digráficas, ilustrando algunas definiciones para su mayor comprensión. Estas definiciones nos ayudarán a su vez a entender los modelos matemáticos utilizados en la segunda parte, en la cual se desarrollan las aplicaciones, dando en la mayoría de ellas un ejemplo concreto.

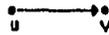
En la tercera parte se darán algunas condiciones suficientes para que una digráfica tenga núcleo.

Terminaremos el trabajo, implementando el algoritmo para encontrar el núcleo de una digráfica sin ciclos dirigidos.

El concepto de núcleo surgió a partir de un problema en la Teoría de Juegos, que en principio Von Neumann lo llamó " solución de un juego ". Posteriormente C. Berge notó que el mismo concepto resultaba de utilidad en otros contextos, y lo llamó " núcleo de una digráfica ".

1. DEFINICIONES

1.1 Una **digráfica** D consiste de un conjunto finito no vacío de objetos llamados vértices (nodos o puntos) y denotado por $V(D)$, junto con una colección de pares ordenados de distintos elementos de $V(D)$, llamados las flechas de D y denotadas $F(D)$. Si $f \in F(D)$, escribimos $f = (u, v)$; tal que $u, v \in V(D)$, como una flecha que va de u a v , representada en la siguiente figura:

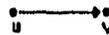


1.2 Decimos que u y v son los **extremos** de la flecha f . u es llamado vértice inicial y v vértice terminal.

1.3 Una flecha de la forma (x, x) es llamada **lazo**. En este trabajo, consideraremos digráficas sin lazos.



1.4 Decimos que la flecha (u, v) **incide hacia** v .



1.5 Decimos que la flecha (v, u) **incide desde** v .



DEFINICIONES

1.6 Dado $N \subseteq V(D)$, y $x \in V(D)$, denotaremos por **xN -flecha** a una flecha que incide desde x hacia algún vértice en N , **Nx -flecha**, a una flecha que incide desde algún vértice en N hacia el vértice x , y **N_1N -flecha**, como una flecha que va de algún vértice de N_1 a algún vértice en N .

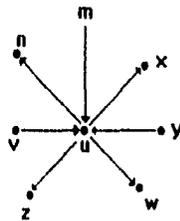
1.7 La **valencia o grado interior** de $u \in V(D)$, es el número de flechas que inciden hacia u . (Notación $\delta^-_D(u)$)

1.8 La **valencia o grado exterior** de $u \in V(D)$, es el número de flechas que inciden desde u . (Notación $\delta^+_D(u)$)

1.9 Definimos la **valencia o grado** de $u \in V(D)$, como

$$\delta_D(u) = \delta^-_D(u) + \delta^+_D(u).$$

Ejemplo:



$$\delta^+_D(u) = 4, \quad \delta^-_D(u) = 3 \quad \text{y} \quad \delta_D(u) = 7$$

1.10 Definimos $\Gamma^+(x) = \{y \in V(D) \mid (x,y) \in F(D)\}$ como los vecinos exteriores de D .

DEFINICIONES

1.11 Definimos $\Gamma^-(x) = \{y \in V(D) \mid (y,x) \in E(D)\}$ como los vecinos interiores de D .

$$1.12 \Gamma(x) = \Gamma^-(x) \cup \Gamma^+(x)$$

De la digráfica anterior, podemos decir que:

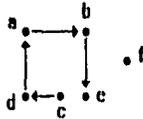
$$\Gamma^+(u) = \{n, x, z, w\} \text{ y } \Gamma^-(x) = \{m, v, y\}$$

Dado $L \subseteq V(D)$ definimos:

$$1.13 \Gamma^+(L) = \{x \in V(D) \text{ tal que existe una } Lx\text{-flecha}\}$$

Ejemplo:

$$\text{sea } L = \{a, b, c\}$$



$$\Gamma^+(L) = \{d, e\}$$

1.14 Un uv -camino es una sucesión de vértices ($u = z_0, z_1, \dots, z_n = v$) tal que $(z_i, z_{i+1}) \in E(D)$ ó $(z_{i+1}, z_i) \in E(D)$, para toda $i, 0 \leq i \leq n-1$.

1.15 Un uv -camino dirigido es una sucesión de vértices ($u = z_0, z_1, \dots, z_n = v$) tal que $(z_i, z_{i+1}) \in E(D)$ para toda $i, 0 \leq i \leq n-1$.

1.16 Un paseo (dirigido), es un camino (dirigido) en el cual no se repiten flechas.

1.17 Un paseo es cerrado (dirigido) si empieza y termina en el mismo punto.

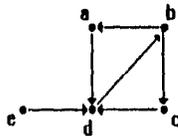
1.18 Un ciclo (dirigido) es un camino (dirigido) cerrado en donde no se repiten vértices, excepto el primero y el último.

1.19 Una uv -trayectoria (dirigida) es un uv -camino (dirigido) en el cual no se repiten vértices.

Llamaremos **vértice inicial** de la trayectoria al vértice u , y **vértice terminal** al vértice v .

Denotaremos por (u, T, v) a la uv -trayectoria T , y por $\ell(T)$ a la longitud de la trayectoria T .

En la siguiente digráfica:



tenemos que:

(a, b, c, d) es un ad -camino

(e, d, b, c, d, b, c) es un ec -camino dirigido

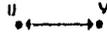
(e, d, b, c, d) es un paseo

(c, d, b, a, d, c) es un paseo cerrado

(d, b, a, d) y (b, c, d, b) son ciclos dirigidos

(c, d, b, a) es una ea -trayectoria dirigida

1.20 Una flecha (u,v) es simétrica, si $(v,u) \in F(D)$.



1.21 Una flecha (u,v) es asimétrica, si $(v,u) \notin F(D)$.

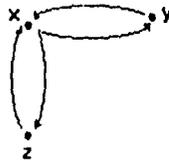


1.22 D_1 es una subdígrafa de D si:

$$V(D_1) \subseteq V(D), F(D_1) \subseteq F(D)$$

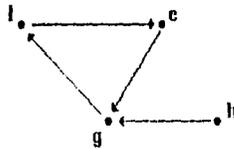
1.23 Una dígrafa D es simétrica, si todas sus flechas son simétricas.

Ejemplo:



1.24 Una dígrafa D es asimétrica, si todas sus flechas son asimétricas.

Ejemplo:



1.25 Sea $\text{Sim}(D)$ la subdígrafa de D definida como sigue:

DEFINICIONES

- $V(\text{Sim}(D)) = V(D)$
- $F(\text{Sim}(D)) = \{f \in F(D) \mid f \text{ es simétrica}\}$.

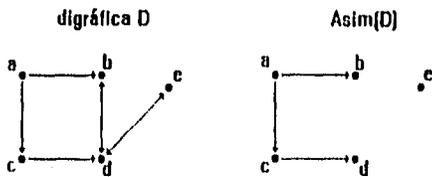
Ejemplo:



1.26 Sea $\text{Asim}(D)$ la subdigráfica de D definida como sigue:

- $V(\text{Asim}(D)) = V(D)$
- $F(\text{Asim}(D)) = \{f \in F(D) \mid f \text{ es asimétrica}\}$.

Ejemplo:

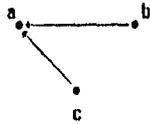


1.27 Definimos el **complemento** de D como la digráfica \bar{D} que cumple con:

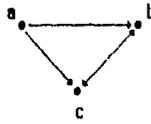
$$V(\bar{D}) = V(D)$$

$$(x,y) \in F(\bar{D}) \text{ si y sólo si } (x,y) \notin F(D).$$

Digráfica D

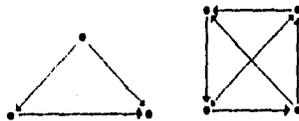


Digráfica \bar{D}



1.28 Una **digráfica** D es **completa**, si para cualesquiera $u, v \in V(D)$ ocurre que $(u,v) \in F(D)$ o $(v,u) \in F(D)$.

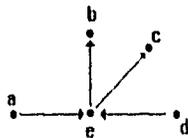
Ejemplo de digráficas completas:



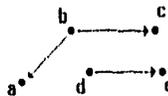
1.29 Una **digráfica** D es **conexa**, si para cualesquiera $u, v \in V(D)$ existe una uv -trayectoria. En caso contrario, diremos que D es **no conexa**.

Ejemplos:

Digráfica conexa



Digráfica no conexa



1.30 Una **digráfica** D es **unilateralmente conexa** si para cualesquiera dos vértices u, v , al menos una de las siguientes proposiciones se cumple:

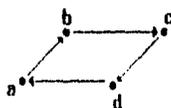
- a) Existe una uv -trayectoria dirigida
- b) Existe una vu -trayectoria dirigida.

Ejemplo:



1.31 Una digráfica D es fuertemente conexa, si para cualesquiera dos vértices u, v , existen una uv -trayectoria dirigida y una vu -trayectoria dirigida.

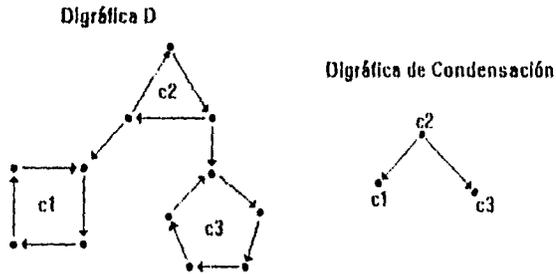
Ejemplo:



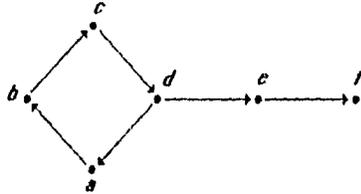
1.32 Una componente fuertemente conexa de D , es una subdigráfica fuertemente conexa de D , y es máxima por inclusión.

1.33 La digráfica de condensación de D , denotada $C(D)$ tiene un vértice por cada componente fuertemente conexa de D , y $(c_u, c_v) \in F(C(D))$ si y sólo si existe al menos una flecha de la componente fuertemente conexa c_u a la componente fuertemente conexa c_v en D .

Ejemplo:



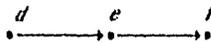
Fijémonos en la siguiente digráfica D , pues nos servirá para ilustrar de la definición 1.32 a la 1.36:



1.34 Dada D una digráfica, decimos que D_1 es subdigráfica inducida por $A \subseteq V(D)$ si:

- a) $V(D_1) = A$
- b) $(u, v) \in F(D_1)$ si $u, v \in A$ y $(u, v) \in F(D)$.

La siguiente digráfica, es una digráfica inducida por $\{d, e, f\} \subseteq V(D)$



1.35 Dada D una digráfica, decimos que D_1 es subdigráfica inducida por $A \subseteq F(D)$ si:

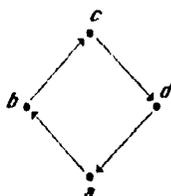
- a) $F(D_1) = A$

DEFINICIONES

b) Los vértices de D_1 son los extremos de las flechas en A .

Denotaremos $D[A]$ la subdigráfica inducida por $A \subset V(D)$.

La siguiente digráfica es una digráfica inducida por $\{(b,c), (c,d), (d,a), (a,b)\} \subseteq F(D)$



1.36 Un conjunto $I \subseteq V(D)$ es independiente si para cualesquiera dos vértices $x, y \in I$, $(x,y) \notin F(D)$.

Los siguientes subconjuntos de vértices cumplen con ser independientes:

$\{b, d, f\}$, $\{e, c, a\}$, $\{a, c, f\}$.

Podemos checar la independencia del conjunto $\{b,d,f\}$: entre b y d no hay ninguna flecha, entre d y f tampoco y entre b y f tampoco.

1.37 Un conjunto $A \subseteq V(D)$ es absorbente si para cada $x \in V(D)-A$ existe una xA -flecha en D .

Los siguientes conjuntos de vértices cumplen con ser absorbentes:

$\{f, d, b, e\}$, $\{e, f, b, c\}$, $\{a, c, f\}$, $\{a, b, c, d, e, f\}$.

Podemos verificar que el conjunto $\{f, d, b, e\}$ es absorbente:

El vértice a lo absorbe el vértice b , al vértice c el vértice d , y al vértice e el vértice f .

DEFINICIONES

1.38 Un conjunto $N \subseteq V(D)$ es núcleo de D si es independiente y absorbente.

Los siguientes conjuntos de vértices son núcleos de D :

$\{f, d, b\}, \{a, c, f\}$.

Notemos que el núcleo de una digráfica no siempre es único, y no toda digráfica tiene núcleo.

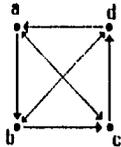
Ejemplo de digráficas sin núcleo:



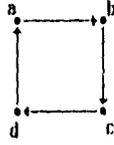
Observemos en la primer digráfica que si tomamos cualquier vértice como elemento del núcleo, digamos y ; x ni z pueden estar en él, pues el núcleo es independiente, y de esta forma, a z no lo absorbe un elemento del núcleo.

En general los ciclos dirigidos de longitud impar, no tienen núcleo.

También los ciclos dirigidos asimétricos, con las demás flechas simétricas son ejemplos de digráficas sin núcleo:



La siguiente digráfica tiene más de un núcleo:

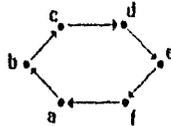


Aquí observamos que $\{a, c\}$ y $\{b, d\}$ son núcleos de la digráfica anterior.

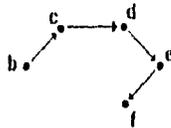
Otro ejemplo es una digráfica bipartita fuertemente conexa.

1.39 Una digráfica D es **núcleo-perfecta** (NP) si D y cada una de sus subdigráficas inducidas tienen núcleo.

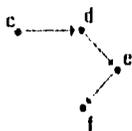
Ejemplo de una digráfica núcleo perfecta:



Un núcleo de D es $\{a, e, c\}$, fijémosnos en la subdigráfica inducida por $\{b, c, d, e, f\}$:



El núcleo de la digráfica anterior es $\{f, d, b\}$, ahora veamos la subdigráfica inducida por $\{c, d, e, f\}$:



El núcleo de la digráfica anterior es $\{d\}$, la subdigráfica inducida por $\{d, e, f\}$:



El núcleo de la subdigráfica anterior es $\{f, d\}$, la subdigráfica inducida por $\{e, f\}$:

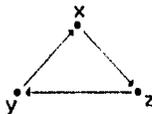


El núcleo de la subdigráfica anterior es $\{f\}$, y es claro, que el núcleo de la subdigráfica inducida por $\{f\}$ es $\{f\}$.

Más ejemplos de digráficas núcleo-perfectas, son los ciclos dirigidos de longitud par.

1.40 Una digráfica D es **núcleo-imperfecta-crítica** (NIC) si D no tiene núcleo, pero toda subdigráfica inducida propia de D tiene núcleo.

Ejemplo de digráficas núcleo imperfectas críticas:



DEFINICIONES

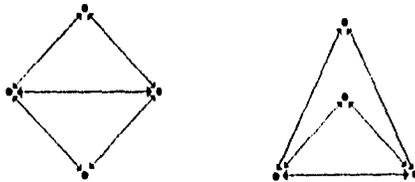
Los ciclos dirigidos de longitud impar, son ejemplos de digráficas NIC, un ciclo dirigido de longitud impar no tiene núcleo, y al quitar cualquier vértice, nos queda una digráfica sin ciclos dirigidos, la cual tiene núcleo. En el capítulo tres, se demuestra este resultado.



La digráfica con ciclos dirigidos, asimétricos, pero que entre los vértices hay flechas simétricas, también es un ejemplo de digráfica NIC, como lo muestra la digráfica anterior. En este caso, estamos hablando de una completa, y el núcleo debiera ser un sólo vértice, pero esto no es posible, a menos que quitémos al menos un vértice de la digráfica, la cual sería una subdigráfica inducida.

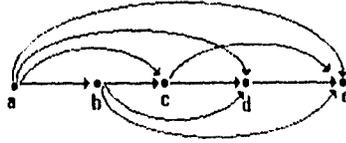
1.41 Sean D_1 y D_2 , dos digráficas, D_1 es isomorfa a D_2 ($D_1 \cong D_2$) si existe una función $f: V(D_1) \rightarrow V(D_2)$ biyectiva tal que (u, v) es flecha de D_1 si y sólo si $(f(u), f(v))$ es flecha de D_2 .

Ejemplo de 2 digráficas isomorfas:



1.42 Una digráfica D es **transitiva** si cada vez que existe una uv -trayectoria dirigida, $(u,v) \in F(D)$.

Ejemplo:



1.43 Una digráfica D es **bipartita**, si existe una partición de $V(D)$ en dos conjuntos V_1, V_2 , tal que cada flecha de D tiene un extremo en V_1 y otro en V_2 .

Ejemplo:



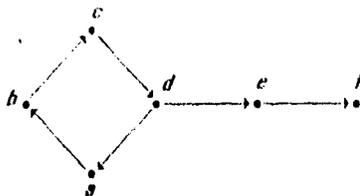
1.44 Una función $g:V(D) \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ es una **función de Grundy** si para toda $x \in V(D)$,

$$g(x) = \{\min i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \mid i \notin \{g(y) \mid y \in \Gamma^+(x)\}\}.$$

Una **función de Grundy** también puede definirse como g tal que:

- 1) Si $g(x) = k > 0$, entonces para toda $j, 0 \leq j < k$ existe $y \in \Gamma^+(x)$ tal que $g(y) = j$
- 2) Si $g(x) = k$, entonces para toda $y \in \Gamma^+(x)$ $g(y) \neq k$

Ejemplo:

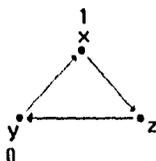


$g(a) = 0$	$g(d) = 2$	$g'(a) = 1$	$g'(d) = 0$
$g(b) = 1$	$g(e) = 1$	$g'(b) = 0$	$g'(e) = 1$
$g(c) = 0$	$g(f) = 0$	$g'(c) = 1$	$g'(f) = 0$

Para construir la función g , comenzamos con $g(f)$: este valor está obligado a ser 0, pues no le podemos asignar un valor mayor que 0, pues $\Gamma^+(f) = \emptyset$. $g(e)$ es 1, pues $\Gamma^+(e) = \{f\}$. $g(d)$ puede ser 2 ó 0, le asignamos valor de 2 pues $\Gamma^+(d) = \{e, a\}$, y como $g(e) = 1$, $g(a)$ debe ser 0. $g(b)$ debe ser distinto de 0, y el entero mínimo es 1, así $g(b) = 1$, y $g(c) = 0$.

Observemos que la función de Grundy no es única.

Y notemos que no toda digráfica tiene función de Grundy:



Dimos valor de 0 al vértice y , el valor del vértice z queda obligado a ser 1, el vértice x tendría el valor 0, pero esto no satisface la definición de función de Grundy.

2. APLICACIONES

En esta sección desarrollaremos algunas de las aplicaciones de la Teoría de Núcleos en digráficas.

Dado un cierto tipo de problema, se da un modelo matemático utilizando digráficas, y se da una solución al problema planteado mediante la Teoría de Núcleos. En cada caso trabajaremos al menos un problema particular.

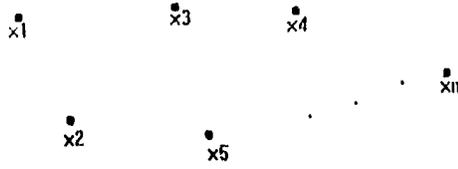
2.1 UBICACION DE ESTACIONES DE RADAR.

Consideremos un conjunto de lugares estratégicos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ que llamaremos celdas y se quiere tener bajo vigilancia de radar a cada una de las celdas de manera óptima, es decir, encontrar el mínimo número de radares necesarios para esto y dónde colocarlos, bajo las siguientes condiciones:

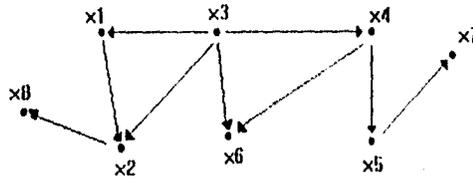
un puesto de radar se puede vigilar a sí mismo y una celda puede ser vigilada por más de un radar.

Daremos un planteamiento de este problema como sigue:

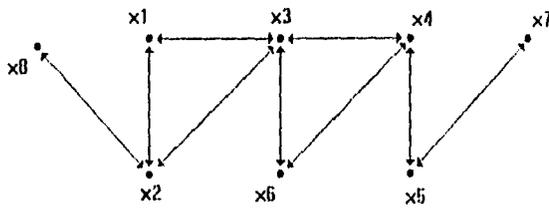
Por cada celda x_i tomamos un vértice $x_i, 1 \leq i \leq n$



y ponemos una flecha (x_i, x_j) si al colocar un radar en x_j se alcanza a vigilar x_i desde x_j , $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$.



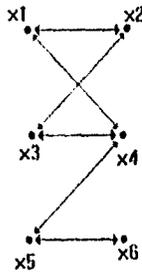
Al hacer esto obtenemos una digráfica; de hecho obtenemos una digráfica simétrica ya que si desde x_j alcanzamos a vigilar x_i entonces desde x_i alcanzamos a vigilar x_j .



En este ejemplo $S = \{x_2, x_4, x_7\}$ es un núcleo de la digráfica, y podemos ver que las celdas $x_1, x_3, x_5, x_6,$ y x_8 están vigiladas, por las celdas que pertenecen al núcleo.

Ahora el problema se reduce a encontrar un núcleo S de cardinalidad mínima ya que para cada $x \notin S$ existe una flecha de x a S , por ser D simétrica y S independiente máximo por inclusión; y colocar un radar en cada elemento de S . De esta manera cualquier $x \notin S$ estará vigilada por un elemento de S .

Ejemplo: Tenemos la siguiente digráfica, que nos muestra el alcance de cada radar:



Esto significa que si ponemos un radar en la celda x_1 , alcanzaremos a vigilar las celdas x_2 y x_4 ; si ponemos un radar en la celda x_2 , entonces alcanzaremos a vigilar las celdas x_1 y x_3 . En general, si ponemos un radar en la celda x_i alcanzaremos a vigilar a $\Gamma^+(x_i)$. Un núcleo de esta digráfica es $\{x_1, x_3, x_5\}$, así que sólo basta poner radar en las celdas x_1, x_3, x_5 , y así todas las celdas están bajo vigilancia de radar. El núcleo es de cardinalidad mínima.

Si N es núcleo entonces es un conjunto independiente máximo y un conjunto absorbente mínimo. (Resultado 3)

Toda digráfica simétrica D tiene núcleo (Resultado 4)

APLICACIONES

Así el problema de encontrar el conjunto de celdas que serán los radares, tendrá solución por el resultado anterior, y un núcleo de cardinalidad mínima de la digráfica asociada al problema de ubicación de estaciones de radar es solución.

2.2 DETECCION O LOCALIZACION DE GRUPOS DE PODER O PANDILLAS

Consideremos ahora un grupo S de personas dentro de alguna organización y supongamos que queremos localizar las posibles "pandillas" o "grupos de poder". Podemos pensar que un grupo de poder o pandilla, es un grupo de personas $A \subseteq S$ tal que cualquier persona que no está en A es dominada por alguna que sí está en A , y si a y b están en A , ninguna de ellas domina a la otra.

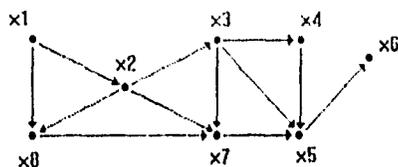
Plantaremos el problema usando digráficas como modelo:

Tomamos un vértice por cada elemento del grupo S : x_1, x_2, \dots, x_n y ponemos una flecha de x_i a x_j , ($i \neq j, 1 \leq i, j \leq n$) si x_i domina a x_j . Ahora el problema se reduce a encontrar conjuntos de vértices A que sean independientes y absorbentes, pues al ser independiente, significa que las personas en A , no se dominan entre sí, y el ser absorbente significa que cualquier persona que no este en A , será dominada por al menos una que si esté en A .

De esta forma, cada pandilla o grupo de poder esta representada en la digráfica por un núcleo.

Ejemplo:

Sean $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$, las personas que pertenecen a determinada organización: la siguiente digráfica nos muestra las relaciones de dominancia entre los miembros de la organización:

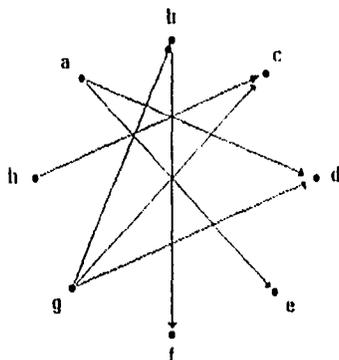


En esta digráfica, el conjunto $A = \{x_1, x_3, x_6, x_7\}$ es núcleo.

Y podemos decir que las personas x_1, x_3, x_6, x_7 de la organización, son un grupo de poder o pandilla, pues entre ellas no se dominan, y las personas x_2, x_3, x_5, x_8 son dominadas por el conjunto A .

Ejemplo:

La siguiente digráfica nos muestra la relación de dominancia entre las personas a, b, c, d, e, f, g, h de una organización:



Observemos que la digráfica anterior no contiene ciclos, así que podemos encontrar un núcleo, y el problema de encontrar un grupo de poder está resuelto.

El núcleo de la digráfica es: $\{ c, d, e, f \}$

En el tercer capítulo, se dan algunas condiciones necesarias para que una digráfica tenga núcleo.

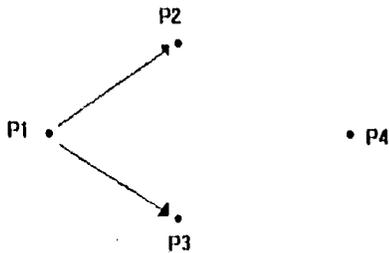
2.3 UN PROBLEMA DE COMBINATORIA EN LOGICA.

Consideremos un conjunto de proposiciones $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ y un conjunto de teoremas del tipo: " p_i implica p_j ".

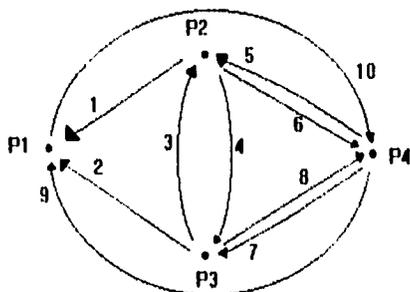
Éstos teoremas pueden ser representados por una digráfica D , con un conjunto de vértices P , donde $(p_i, p_j) \in F(D)$ si y sólo si p_i implica p_j se sigue de uno o más de los teoremas dados. Supongamos que queremos mostrar que todas las implicaciones representadas por las flechas del complemento de D (\bar{D}) son falsas, es decir que la teoría representada en D es completa. Más precisamente, que por cada pareja (p, q) $p \neq q$ y $(p, q) \in F(\bar{D})$, queremos asignar un estudiante que tiene que encontrar un ejemplo de que p se cumpla pero q no (es decir un contraejemplo de la afirmación p implica q).

Resolveremos este problema.

Consideremos la siguiente digráfica D , la cual suponemos que es completa y queremos verificar que lo es:



\bar{D} . digráfica complemento de D :



Es suficiente con probar la falsedad de las implicaciones representadas por las 5 flechas: 3, 4, 5, 7 y 10 de \bar{D} de las cuales se sigue la falsedad de las otras implicaciones faltantes.

Tenemos:

$p_2 \rightarrow p_1$, de otro modo $(p_2 \rightarrow p_1) \Rightarrow (p_2 \rightarrow p_3)$ contradice la afirmación de que la flecha 4 es falsa.

$p_3 \rightarrow p_1$, de otro modo $(p_3 \rightarrow p_1) \Rightarrow (p_3 \rightarrow p_2)$ contradice la afirmación de que la flecha 3 es falsa.

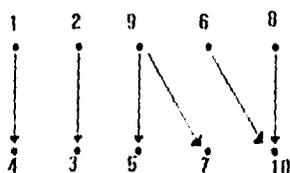
$p_2 \rightarrow p_4$, de otro modo $(p_1 \rightarrow p_2) \Rightarrow (p_1 \rightarrow p_4)$ contradice la afirmación de que la flecha 10 es falsa.

$p_3 \rightarrow p_4$, de otro modo $(p_1 \rightarrow p_3) \Rightarrow (p_1 \rightarrow p_4)$ contradice la afirmación de que la flecha 10 es falsa.

$p_1 \rightarrow p_1$, de otro modo $(p_1 \rightarrow p_1) \Rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)$ contradice la afirmación de que la flecha 5 es falsa.

Veamos como se llegó a esta solución.

Sea H una digráfica cuyos vértices representan a las flechas 1, 2, ..., 10 de \bar{D} y donde una flecha es dibujada de i a j si y sólo si la implicación " i es verdadera" implica "la implicación j es verdadera".



En H el conjunto $N = \{3, 4, 5, 7, 10\}$ es un núcleo, es decir, es absorbente e independiente. Del hecho que N es absorbente, se sigue que si las implicaciones 3, 4, 5, 7 y 10 son falsas, entonces todas las implicaciones 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 son falsas, ya que si tomamos cualquier otra implicación que no esté en N , si esta fuera verdadera, como existe una flecha hacia $n \in N$, se tendría que n sería verdadera, y al ser N independiente, resulta ser mínimo con respecto a la propiedad anterior pues cualquier elemento de N cuya falsedad no puede ser deducida de la falsedad del resto de los elementos de N ya que no hay flechas de $N - \{n\}$ a n . Como N es el único núcleo de H , se sigue que 5 contraejemplos son necesarios para mostrar que todas las implicaciones de \bar{D} son falsas.

Toda digráfica transitiva tiene núcleo (resultado 5). la digráfica H resultó ser una digráfica bipartita y transitiva, y por eso fué posible encontrar un núcleo.

2.3.1 LAS ANTIBASES DE UNA TEORIA

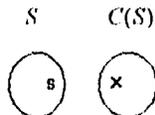
Una teoría formal típica $T = (X, C)$ consta de:

- i) Un conjunto X cuyos elementos x_1, x_2, x_3, \dots son llamados proposiciones
- ii) Una relación de cerradura C en X ; que depende de cada teoría, para $S \subseteq X$, $C(S)$ denota el conjunto de todas las proposiciones en X que pueden ser probadas a partir de las proposiciones en S .

Así que $x \in C(X)$, $X \subseteq C(Y) \Rightarrow x \in C(Y)$.

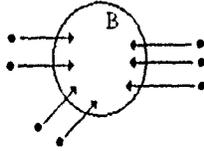
Escribiremos $C(s)$ en lugar de $C(\{s\})$ para $s \in X$.

Una teoría $T = (X, C)$ es **unitaria** si $(x \in C(S) \Rightarrow \exists s \in S \text{ tal que } x \in C(s))$.
En otro caso T es **plural**.

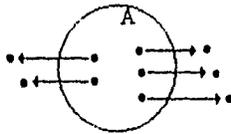


Si una teoría T es unitaria, puede ser representada por una digráfica transitiva con un conjunto de vértices X , donde (x, y) es una flecha si y sólo si $x \in C(y)$.

Una **base de axiomas** para T es un conjunto $B \subseteq X$ tal que $C(B) = X$ y el cual es mínimo con respecto a esta propiedad.



Una **antibase** para T es un conjunto $A \subseteq X$ tal que $C(x) \cap A \neq \emptyset$ para todo $x \in X$ y el cual es mínimo con respecto a esta propiedad. La interpretación de esta definición es que si todas las proposiciones en A son falsas, entonces todas las proposiciones en X son falsas, y A es mínimo con respecto a esta propiedad.



La **inversa** $T' = (X, C')$ de una teoría $T = (X, C)$ está definida por: $x \in C'(S)$ si y sólo si $C(x) \cap S \neq \emptyset$.

Lema 2.3.2.1: La inversa T' de una teoría T es unitaria y transitiva.

Demostración. Sea $S \subseteq X$ y $x \in C'(S)$, entonces $C(x) \cap S \neq \emptyset$ por definición de C' .

Sea $s \in C(x) \cap S$, entonces $C(x) \cap \{s\} \neq \emptyset$ esto implica que $x \in C'(s)$ y por lo tanto T' es unitaria.

Ahora $c \in C'(b)$, $b \in C'(a) \Rightarrow C'(c) \cap \{b\} \neq \emptyset$, $C'(b) \cap \{a\} \neq \emptyset \Rightarrow b \in C'(c)$ y $a \in C'(b) \Rightarrow a \in C'(c) \Rightarrow C'(c) \cap \{a\} \neq \emptyset \Rightarrow c \in C'(a)$.

Lema 2.3.2.2: Un conjunto $A \subseteq X$ es una antibase para T si y sólo si A es una base para T' .

Demostración. Si $A \subseteq X$ es una antibase para T entonces $C(x) \cap A \neq \emptyset$ para toda $x \in X$ y es mínimo con respecto a esta propiedad. Esto es, $x \in C'(A)$ para toda $x \in X$, donde C' es la relación de cerradura de T . Esto implica que $X = C'(A)$ y A es mínimo con respecto a esta propiedad, por lo tanto A es una base de axiomas para T' .

Ahora si A es una base de axiomas para T' , entonces $C'(A) = X$, y A es mínimo con respecto a esta propiedad, esto es, $x \in C'(A)$ para toda $x \in X$.

Esto implica que $C(x) \cap A \neq \emptyset$ para todo $x \in X$, por lo tanto A es una antibase para T .

Como T' , la inversa de una teoría T es unitaria, entonces puede ser representada por una digráfica transitiva, es decir, T' es transitiva.

Lema 2.3.2.3: $A \subseteq X$ es una base para $T' = (X, C')$ si y sólo si es un núcleo para H , donde H es la digráfica transitiva que representa a T' .

Demostración. Sea H la digráfica transitiva que representa a T' , entonces $V(H) = X$ y $(x,y) \in F(H)$ si y sólo si $x \in C'(y)$.

Sea N un núcleo de H , entonces N es un conjunto independiente y absorbente. Entonces para $x \in X - N$ existe $y \in N$ tal que $(x,y) \in F(H)$, esto es $x \in C'(y)$, por lo tanto $X = C'(N)$, y N es mínimo con respecto a esta propiedad, ya que si suponemos que existe $N' \subset N$ tal que $X = C'(N')$, tomamos $x' \in N - N'$ y como N es independiente $x' \notin C'(y)$ para todo $y \in N$, entonces $x' \notin C'(N')$ y por lo tanto $X \not\subset C'(N')$, por lo tanto N es una base de axiomas para T' .

Inversamente, sea N una base de axiomas para T' , esto es, $X = C'(N)$ y N es mínimo con respecto a esta propiedad. Como T' es unitaria entonces para cada $x \in X$ existe $y \in N$ tal que $x \in C'(y)$, es decir $(x,y) \in F(H)$ y N es mínimo con respecto a esta propiedad, por lo tanto N es absorbente.

N es independiente ya que si suponemos que existen $x, x' \in N$ tales que $(x,x') \in F(H)$, entonces si $y \in C'(x)$ $(y,x) \in F(H)$ y por la transitividad de H , $(y, x') \in F(H)$ es decir $y \in C'(x')$ por lo tanto $X = C'(N - \{x\})$ pero esto no es posible por que N es mínimo. Por lo tanto N es núcleo de H .

Teorema 2.3.2.1: En una teoría $T = (X,C)$ todas las antibases tienen la misma cardinalidad.

Demostración. Por el lema 2.3.2.2 $A \subseteq X$ es una antibase para T si y sólo si A es una base para T' , por el lema 2.3.2.3 esto sucede si y sólo si A es un núcleo de H , donde H es la digráfica transitiva que representa a T' . Por el resultado 5 en el capítulo 3, todos los núcleos de H tienen la misma cardinalidad, por lo tanto todas las antibases para T tienen la misma cardinalidad.

2.3.2 LA DIGRAFICA DE IMPLICACIONES

Sea D una digráfica transitiva cuyos vértices representan proposiciones, y cuyas flechas representan implicaciones, y sean x_1, x_2, \dots, x_m las flechas de la digráfica complementaria \bar{D} . Sea $X = \{ x_1, x_2, \dots, x_m \}$ y para $S \subseteq X$, denotemos $C(S)$ las implicaciones que se pueden derivar de las implicaciones en S , es decir, todas las flechas de X que están en la cerradura transitiva de $D + S$. La pareja $T = (X, C)$ es una teoría.

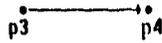
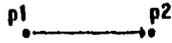
Teorema 2.3.3.1: En la teoría $T = (X, C)$, definida anteriormente por una digráfica transitiva D , todas las antibases tienen la misma cardinalidad, y esta cardinalidad es el número de absorción de la digráfica H definida por $F(H) = X$, y $(x, y) \in F(H)$ si y sólo si y es una flecha de la cerradura transitiva de $D + x$. Además, hay una correspondencia uno a uno entre las antibases de T y los núcleos de H .

Demostración.

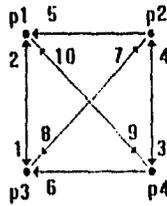
H es una digráfica transitiva; $(x, y) \in F(H)$ si y sólo si $y \in C(x)$, esto es si y sólo si $C(x) \cap \{y\} \neq \emptyset$, es decir, si y sólo si $x \in C'(y)$. Esto quiere decir que H representa a T' y por el lema 2.3.2.1 T' es unitaria y por lo tanto H es transitiva. De los lemas 2.3.2.2 y 2.3.2.3 se sigue directamente la demostración.

Así este teorema nos da el mínimo número de estudiantes necesarios para el problema planteado.

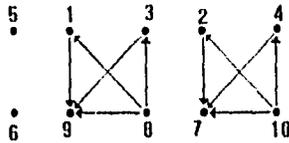
Ejemplo. consideremos la siguiente digráfica de implicaciones D :



D complemento:



y la digráfica H :



Tenemos que el núcleo de H contiene a los vértices 5, 6, 7, y 9, por lo tanto, cuatro contraejemplos son necesarios para demostrar que todas las implicaciones de D complemento son falsas.

2.4 TOMA DE DECISIONES INDIVIDUAL

Consideremos el problema en el que una persona debe elegir una opción dentro de un conjunto $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de alternativas. El problema puede ser resuelto de la siguiente manera:

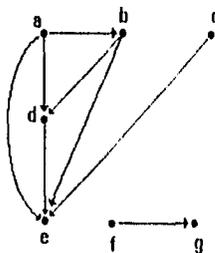
Sea G la digráfica cuyos vértices son las alternativas dadas, existirá una flecha de x_j a x_i , si x_i es preferible a x_j .



Al encontrar un núcleo en G , el número de alternativas se reduce. Notemos que G no tiene flechas simétricas ni ciclos dirigidos pues sería una contradicción. G es una digráfica transitiva ya que la relación de preferencia es transitiva. Y como toda digráfica transitiva tiene núcleo (resultado 5, siempre encontraremos una solución al problema de tomar una decisión individual.

Ejemplo:

La siguiente digráfica nos muestra las preferencias de una persona:



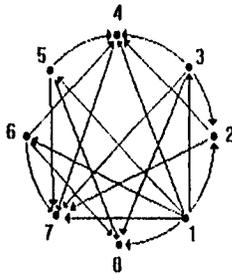
Es decir, la persona prefiere la alternativa *b*, que la *a*, la alternativa *d* que la *b* y por lo tanto prefiere la alternativa *d* que la *a*; la alternativa *e* es preferible que la *d*, y por lo tanto también es preferible que la *a* y la *b*. La alternativa *e* también es preferible que la *c*. Y por último, la alternativa *g* es preferible que la *f*.

Un núcleo de esta digráfica es $\{e, g\}$, y podemos decir que la persona puede elegir cualquiera de estas dos alternativas, pues entre ellas no existe preferencia alguna, y cualquiera de las dos es preferible que cualquier otra alternativa.

Ejemplo:

A cierta persona le dan una lista de posibles lugares para pasar un fin de semana:

(1) Quedarse en el D.F., (2) Guanajuato, (3) Puebla, (4) Acapulco (5) Cuernavaca, (6) Tepoztlán, (7) Mazatlán y (8) Cancún. A continuación se presenta la Digráfica correspondiente al problema planteado:



El núcleo de esta digráfica es $\{7, 8\}$

APLICACIONES

Entonces la persona puede ir a Mazatlán o Cancún a pasar el fin de semana, pues cualquiera de los dos lugares es preferible que los demás, y entre ellos no existe preferencia alguna.

2.5 TOMA DE DECISIONES

Supongamos que un grupo de n personas $1, 2, \dots, n$ se reunirá para tomar una decisión sobre algún asunto (es decir, elegir una situación de un conjunto X de posibles situaciones). Para resolver el problema de cómo elegir una situación, lo primero que se ocurre es considerar las preferencias individuales, pero cuando $n \geq 2$ encontramos que las preferencias individuales podrían no ser compatibles digamos que la persona 1 prefiere la situación a a la b , pero la persona 2 opina que b es mejor que a . ¿Cómo resolver este problema?

Este problema fue primeramente planteado por John Von Neumann y veremos como solucionó el problema de las incompatibilidades en las preferencias individuales. Para esto introdujo la noción de preferencia efectiva y la definió como sigue: diremos que a es **efectivamente preferible** a b , si existe un grupo de personas (dentro de las n personas), capaces, si quieren, de imponer la preferencia de a sobre b .

Denotaremos $a > b$ si a es efectivamente preferible a b y notemos que esta relación no es necesariamente transitiva.

Podemos ahora dar un planteamiento del problema usando digráficas como modelo.

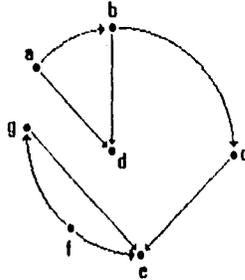
Tomemos un vértice por cada una de las posibles situaciones a considerar, y ponemos una flecha de a a b , si b es efectivamente preferible que a .



Obtenemos así cierta digráfica D , si podemos encontrar un conjunto $S \subseteq V(D)$, tal que S sea núcleo de D , habremos reducido el problema a elegir una situación en S , ya que por ser S independiente, tenemos que para cualesquiera dos elementos de S , no hay uno que sea efectivamente preferible que otro, y por ser S absorbente, tenemos que para cualquier situación fuera de S siempre hay al menos una en S que es efectivamente preferible.

Ejemplo:

A continuación tenemos la digráfica, que nos muestra la relación de preferencia efectiva de un grupo de personas:



Un núcleo de esta digráfica es $\{e, d\}$, así que el grupo de personas, puede escoger la situación e o la situación d , pues e o d es mejor que cualquier otra situación, y entre e y d , no hay relación de preferencia efectiva, es decir, no existe un grupo de personas capaces de imponer una que la otra.

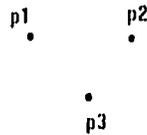
2.6 TOMA DE DECISIONES GRUPAL

Supongamos que un grupo de personas se reúne para tomar una decisión, es decir, elegir una alternativa de un conjunto $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ de alternativas. En este modelo, tomaremos en cuenta, las preferencias individuales, pues se consideran importantes.

Modelaremos este problema utilizando multidigráficas.

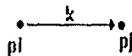
Decimos que una **multidigráfica** es una digráfica con flechas múltiples.

Cada alternativa, será representada mediante un vértice en la multidigráfica:



A cada persona le asignamos un color.

De p_i a p_j pondremos una flecha de color k , cuando la persona k opine que p_j es mejor que p_i .



Si en la multidigráfica podemos encontrar un núcleo, este será una solución al problema de elegir una alternativa.

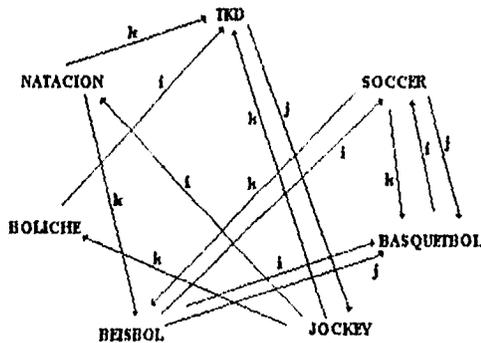
Podremos escoger cualquier alternativa representada en dicho núcleo, pues tenemos que entre cualesquiera dos alternativas del núcleo, ninguna es preferible a la otra, y para cualquier alternativa que este fuera del núcleo, siempre hay al menos una persona que opina que una alternativa dentro del núcleo es mejor.

Definimos $C(D) = D \cup \{(z, d) \in F(D) \text{ de color } i \mid \text{ existe } z\text{-trayectoria dirigida de color } i \text{ en } D\}$

Resultado: Si D es una multidigráfica completa, tal que $C(D)$ tiene núcleo, entonces dicho núcleo es una solución para el problema de toma de decisiones grupal.

Ejemplo:

Consideremos el siguiente problema, las personas i, j, k tienen que decidir entre estos deportes, a cual asistirán. Cada una marca su preferencia de la siguiente manera:



Tenemos que un núcleo de la multidigráfica asociada al problema es {TKD, Basquetbol}, así que las personas i, j, k pueden asistir sin problema a

cualquiera de los dos deportes que conforman el núcleo de la digráfica, pues nadie prefiere uno a otro, y para cualquier otro deporte, al menos una persona opina que TKD o Basquetbol son mejores opciones.

2.7 JUEGOS TIPO NIM

A partir de una digráfica describiremos un juego tipo Nim para dos personas A y B .

Dada una digráfica $D=(X,F)$, elegimos un punto cualquiera de la digráfica digamos z .

El primer jugador tiene que elegir un punto de la digráfica, tal que existe flecha de z hacia el punto elegido. El siguiente jugador tiene que elegir un punto tal que haya flecha desde el punto elegido por el anterior jugador hacia el punto elegido por el último jugador en turno etc. y pierde el jugador que ya no puede elegir un punto de la digráfica (es válido repetir puntos).

Observemos que si la digráfica tiene ciclos dirigidos, entonces el juego podría no terminar.

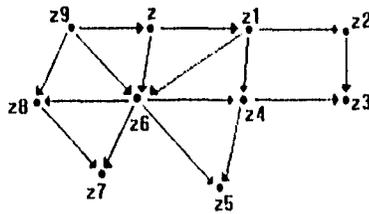


Pero si pedimos que la digráfica que vamos a utilizar no tenga ciclos dirigidos, entonces siempre habrá una estrategia ganadora, pues una digráfica sin ciclos dirigidos siempre tiene núcleo (resultado II, capítulo 3). Veremos que el primer jugador que elige un punto en S un núcleo de D , la digráfica utilizada como tablero siempre tiene una estrategia ganadora.

Supongamos que A fue el primer jugador que eligió un punto x en S . Si de x no sale ninguna flecha, entonces el jugador A ha ganado y si de x sale alguna

flecha, digamos $f=(x,y)$ tal que B eligió y , entonces $y \notin S$, pues S es independiente, y ya que S es absorbente y $y \notin S$, existe $z \in S$ tal que $(y,z) \in F(D)$; así que el jugador A puede elegir el punto z y seguir jugando.

Tomemos como tablero la siguiente digráfica:

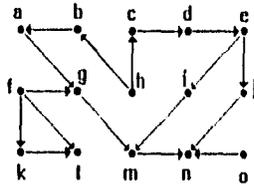


Un núcleo de la digráfica es $\{z_1, z_3, z_5, z_7, z_9\}$

El jugador que gana, es aquel que se posiciona en los vértices z_1, z_3, z_5, z_7 y z_9 .

Ejemplo:

Consideremos la siguiente digráfica como tablero para el juego Nim descrito anteriormente:



Sabemos que una estrategia ganadora es colocarse en los vértices que pertenezcan al núcleo de la digráfica, en este caso un núcleo es $\{b, d, g, i, l, n\}$, y el jugador que quiera ganar, deberá colocarse en estos vértices.

Notemos que como la digráfica no tiene ciclos dirigidos, el juego termina.

2.8 OTRO JUEGO TIPO NIM

En este juego participan dos jugadores y se tienen n cerillos (puede ser cualquier otro objeto) colocados en una mesa. Los jugadores toman su turno alternadamente, cada jugador en su turno podrá tomar uno o dos cerillos según lo prefiera.

El jugador que tome el último o los dos últimos cerillos, será el ganador.

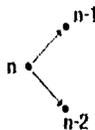
Si n es el número de cerillos del juego, entonces podemos dar una representación de los estados del juego en una digráfica.

El número de cerillos que estén sobre la mesa, corresponderá a un vértice en la digráfica.

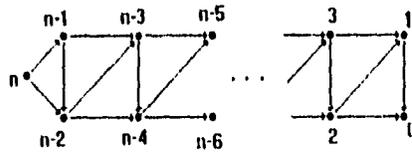
Al iniciar el juego, tenemos n cerillos, entonces tenemos el vértice n

n •

Tendremos una flecha (u,v) en la digráfica, si un jugador tomó de los u cerillos uno o dos, de tal forma que dejó v cerillos en la mesa.



Todo el juego estará representado por la siguiente digráfica:



Estrategia

Puesto que el vértice "0" indica que ya no hay cerillos, entonces, el jugador que gana (llamémosle J_1), es el que se coloca en este vértice. Dicho de otra manera, en la mesa quedaban uno o dos cerillos, y J_1 tomó el último o los dos últimos cerillos, dejando cero cerillos en la mesa.

Para que esto suceda, es necesario que el jugador que pierde (llamémosle J_2), se coloque en los vértices 1 ó 2, es decir, que deje 1 ó 2 cerillos sobre la mesa.

Y para que el punto anterior suceda, J_1 , debió colocarse en el vértice 3, o dicho de otra manera, debió dejar 3 cerillos sobre la mesa, y así sucesivamente hasta terminar con los vértices.

Observemos que el jugador que se coloca en los vértices de la forma $3m$, $3m < n$, $m=0, 1, 2, 3, \dots$, es el que gana el juego.

Notemos también, que los vértices de la forma $3m$, constituyen un núcleo de la digráfica asociada al juego.

Demostremos por inducción sobre el número de vértices de D , que los vértices de la forma $3m$, constituyen un núcleo de la digráfica asociada al juego:

Observemos que si $V(D) = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ entonces $(v_j, v_i) \in F(D)$ si y sólo si $0 < j - i \leq 2$.

Por construcción D no tiene ciclos dirigidos, y por lo tanto tiene núcleo (ver resultado 11).

para $|V(D)|=3$ tenemos que v_0 es núcleo de D .

Supongamos que la proposición es cierta para un juego con k vértices $k < p$, es decir el núcleo sería $\{v_0, v_3, v_6, \dots\}$

demostraremos que la proposición es cierta para una digráfica con p vértices.

El vértice v_0 es de exgrado cero, y al aplicar el algoritmo para encontrar el núcleo de una digráfica sin ciclos dirigidos, que consiste en tomar los vértices de exgrado cero, definimos $D' = D - \{\text{vértices de exgrado cero}\}$ (ver algoritmo en apéndice), obtenemos la digráfica $D' = D - \{v_0, v_1, v_2\}$.

Por hipótesis de inducción los vértices del núcleo de D' , son de la forma $3m$, demostraremos que $N = N(D') \cup \{v_0\}$ es núcleo de D .

Ningún vértice de la forma $3m$ es adyacente a v_0 , por construcción de D .

Por lo tanto N es independiente.

N es absorbente, pues v_0 absorbe a v_1 y v_2 .

Por lo tanto N es núcleo de D y sus vértices son de la forma $3m$.

Ejemplo:

Comencemos un juego tomando 12 cerillos, y supongamos que gana el jugador que toma el último o los dos últimos cerillos.

Así que el jugador que comienza el juego, no es precisamente el que gana, pues el jugador que comienza el juego deja once o diez cerillos, lo que equivale a colocarse en el vértice 11 ó 10 que no son de la forma $3m$ de la digráfica asociada al juego.

Así que al principio del juego tenemos 12 cerillos:



El jugador que tiene su turno primero J_1 , tomará uno o dos cerillos, dejando once o diez cerillos



En cualquiera de los dos casos, el otro jugador J_2 , puede dejar solamente nueve cerillos, que equivale a posicionarse en el vértice 9 de la digráfica asociada al juego.



J_1 sólo puede tomar uno o dos cerillos, así que dejará ocho o siete cerillos, lo que equivale a colocarse en el vértice 8 ó 7 de la digráfica asociada al juego.



J_2 puede volver a un vértice de la forma $3m$ de la digráfica asociada al juego, en este caso $3(2)=6$, que es lo mismo que dejar 6 cerillos



Así J_1 sólo puede dejar cinco o cuatro cerillos, que equivale a posicionarse en los vértices 5 ó 4 de la digráfica asociada al juego.



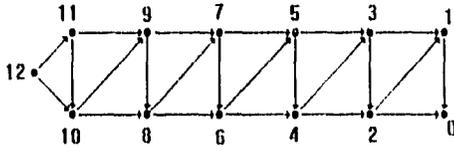
J_2 puede regresar en la digráfica a un vértice de la forma $3m$ en este caso 3, que equivale a dejar sólo 3 cerillos.



Y así J_1 sólo podrá dejar uno o dos cerillos, que equivale a colocarse en el vértice 2 ó 1 de la digráfica.



J_2 gana el juego tomando el último o los dos últimos cerillos, que es equivalente a posicionarse en el vértice 0 de la digráfica que representa a este juego.

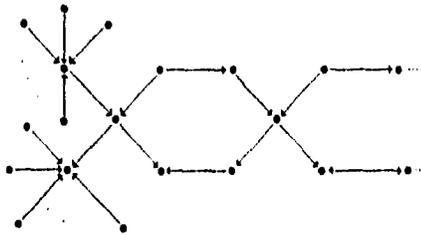


2.9 UN JUEGO VENENOSO

Aquí describiremos un juego, en el cual los jugadores toman como tablero, una digráfica que cumple con las siguientes definiciones.

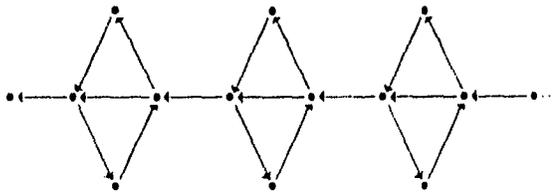
Una digráfica D es **exteriormente finita** si para todo $v \in V(D)$, $\delta^+_D(v)$ es finito.

Ejemplo:



Una digráfica D es **progresivamente finita** si para todo $v \in V(D)$, v no es el origen de una trayectoria infinita.

Ejemplo:



Un **semínúcleo** o **núcleo local** L de D es un subconjunto no vacío de $V(D)$ tal que:

- i) L es independiente
- ii) para todo $v \in \Gamma_D^+(L)$, v tiene un sucesor en L .

Observación. Si $V(D) = L \cup \Gamma_D^+(L)$ entonces L es núcleo de D .

Reglas del Juego Venenoso:

Dos jugadores A y B toman como tablero del juego venenoso una digráfica (sin lazos).

Juegan alternadamente escogiendo en turno un vértice sucesor del vértice escogido en el turno anterior por el oponente.

El jugador A comienza el juego escogiendo un vértice de su preferencia.

El jugador B envenena el vértice sobre el que juega.

El veneno de B es usado en contra de A , A no puede jugar sobre vértices envenenados por B , B puede jugar sobre vértices envenenados.

El juego termina cuando A no tiene opción de colocarse más que sobre un vértice envenenado o, cuando B no puede colocarse en un vértice sucesor del escogido por A .

Lo que interesa es encontrar una estrategia en la que A sobreviva al juego venenoso.

Teorema 1. Sea D una digráfica exterior y progresivamente finita. El jugador A puede sobrevivir al juego venenoso en D si y sólo si D tiene núcleo local.

Demostración.

Sea D una digráfica exterior y progresivamente finita, sea L un núcleo local de D . Supondremos que D no tiene vértices de exgrado cero, pues la estrategia de A es trivial para este caso.

A toma su primer turno y escoge un vértice de L , puede continuar jugando en los vértices de L , ningún vértice de L puede ser envenenado y A puede seguir jugando a salvo infinitamente en los vértices de L .

A se coloca en su primer jugada en el vértice $x \in L$; B se coloca en algún $y \in \Gamma_D^+(x)$, como L es núcleo local tenemos que si $(x,y) \in F(D)$, entonces existe una flecha de y hacia algún $x_1 \in L$, A se coloca en x_1 , B se coloca en $z \in \Gamma_D^+(x_1)$, y por el argumento anterior, A puede tirar en algún vértice de L ...

Por lo tanto A sobrevive al juego venenoso, y la estrategia de A es buscar un seminúcleo en D .

Ahora, sea Σ la estrategia de sobrevivencia del jugador A . Supongamos que B aplica la estrategia Θ , que consiste en turno a turno, envenenar a los sucesores de todo vértice v jugado por A . Es decir, si el vértice v jugado por A , ha sido visitado k veces por A , entonces el jugador B envenena el k' -ésimo sucesor de v , $k' \equiv k \pmod{|\Gamma^+(v)|}$; $1 \leq k' \leq |\Gamma^+(v)|$.

A sobrevive si y sólo si existen vértices en los cuales puede jugar infinitamente sin ser envenenados por B .

Observamos que cada paseos infinito en una digráfica progresivamente finita contiene vértices ocurrentes un número infinito de veces.

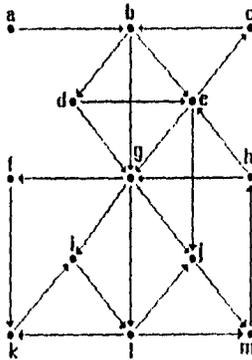
Sea \mathfrak{I} el conjunto de vértices en los cuales A juega una infinidad de veces determinado por (Σ, Θ) .

Decimos que \mathfrak{I} es seminúcleo de D .

\mathfrak{I} es independiente ya que todos los sucesores de $x \in \mathfrak{I}$ son envenenados en algún momento.

Si $x \in \mathfrak{I}$ debe existir en $\Gamma^+(\Gamma^+(x))$ un vértice y que es jugado infinitamente por A .

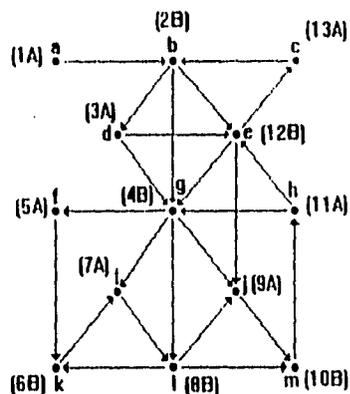
Juguemos en la siguiente digráfica:



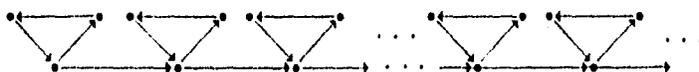
Comienza el juego el jugador A , colocándose en el vértice a . El jugador B sólo puede tirar en el vértice b , así que envenena dicho vértice. A puede tirar en d , g o e , pero tira en d . B envenena el vértice g . A se posiciona en el vértice f , B envenena el vértice k . A se posiciona en el vértice i , B envenena el vértice l . A se posiciona en j , B envenena el vértice m . A se posiciona en h , B envenena el vértice e . A se posiciona en c . B regresa al vértice b . . .

Los vértices sobre los cuales se mueve el jugador *A* constituyen un seminúcleo de la digráfica que tomamos como tablero; de esta manera, el jugador *A* sobrevive al juego venenoso, y puede jugar infinitamente sobre esos vértices, sin ser envenenado por *B*.

La siguiente digráfica, muestra el seguimiento del juego. (1A) significa que la jugada 1, fue hecha por el jugador *A*.

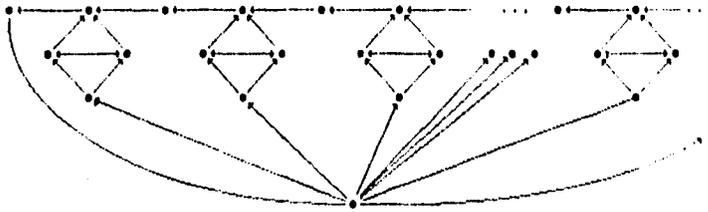


La siguiente digráfica es llamada Digráfica de Danaids Barrel:



La digráfica anterior, es exteriormente finita, no es progresivamente finita y no tiene núcleo local, y sin embargo existe una estrategia de sobrevivencia para el jugador *A*.

La siguiente digráfica es llamada Digráfica de Sísphus:



La digráfica anterior es progresivamente finita, no es exteriormente finita, no tiene núcleo local, y sin embargo existe una estrategia de sobrevivencia para el jugador A .

2.10 NUCLEOS Y FUNCIONES DE GRUNDY

Recordemos la definición de una función de Grundy:

Una función $g: V(D) \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ es una función de Grundy si para toda $x \in V(D)$,

$$g(x) = \{\min i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \mid i \notin \{g(y) \mid y \in \Gamma^+(x)\}\}.$$

Una función de Grundy también puede definirse como g tal que:

- 1) Si $g(x) = k > 0$, entonces para toda j , $0 \leq j < k$ existe $y \in \Gamma^+(x)$ tal que $g(y) = j$
- 2) Si $g(x) = k$, entonces para toda $y \in \Gamma^+(x)$ $g(y) \neq k$

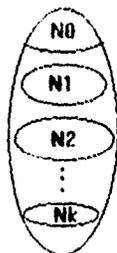
Si D es una digráfica tal que cada subdigráfica de D tiene núcleo, entonces D tiene función de Grundy.

Demostración: Sea D una digráfica tal que cada subdigráfica tiene núcleo.

Sea N_0 un núcleo de D ,

Sea N_1 un núcleo de $D_1 = D - N_0$,

Sea N_i un núcleo de $D_i = D_{i-1} - N_{i-1}$. Los conjuntos N_i forman una partición de $V(D)$.



Sea $g(x)$ un entero definido por:

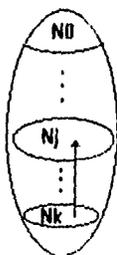
$$g(x) = k \Leftrightarrow x \in N_k$$

Demostraremos que $g(x)$ es una función de Grundy de D :

Sea $g(x)=k$, demostraremos que para cada $j < k$, existe un vértice $y \in \Gamma^+(x)$ tal que $g(y)=j$.

Sea N_j tal que $j < k$, por construcción, D_j contiene a D_k , como N_j es núcleo de D_k y $x \notin N_j$, entonces existe $y \in N_j$ tal que $(x,y) \in F(D)$

por lo tanto $y \in \Gamma^+(x)$ tal que $g(y)=j$



Sea $g(x) = k$, entonces para toda $y \in \Gamma^+(x)$, $g(y) \neq k$, pues de otra forma N_k no sería independiente.

Por lo tanto $g(x)$ es función de Grundy

Si D es una digráfica que tiene función de Grundy, entonces D tiene núcleo.

El conjunto $N = \{x \mid x \in V(D), g(x) = 0\}$ satisface:

$$1) x \in N \Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow \min_{y \in \Gamma^+(x)} g(y) > 0 \Rightarrow \Gamma^+(x) \cap N = \emptyset,$$

$$2) x \notin N \Rightarrow g(x) > 0 \Rightarrow \min_{y \in \Gamma^+(x)} g(y) = 0 \Rightarrow \Gamma^+(x) \cap N \neq \emptyset.$$

Es decir, el conjunto N es absorbente e independiente.

2.11 ALGUNOS RESULTADOS SOBRE CONJUNTOS INDEPENDIENTES Y TRAYECTORIAS DIRIGIDAS DE LONGITUD MAXIMA³.

En esta aplicación, daremos algunas condiciones suficientes para que una digráfica cumpla la siguiente conjetura propuesta por J. M. Laborde, C. Payan y N. H. Huang (1982).

Conjetura: Toda digráfica D tiene un conjunto independiente S , que intersecta a cada trayectoria dirigida de longitud máxima.

Denotaremos por $T(D)$ al conjunto de vértices terminales de las trayectorias dirigidas de longitud máxima.

Y por $\lambda(D)$, al número de vértices de una trayectoria dirigida de longitud máxima de una digráfica sin lazos.

Consideremos la siguiente conjetura: Para cada digráfica sin lazos D , existe un conjunto independiente S tal que $\lambda(D-S) < \lambda(D)$ ⁴.

A continuación se presentan algunas condiciones suficientes para que una digráfica satisfaga la conjetura anterior.

³ Some Results On Independent Sets and Longest Directed Paths. H. Galeana-Sánchez and Hugo A. Rincón Mejía

⁴ J. M. Laborde, C. Payan y N. H. Huang. Independent sets and longest directed paths in digraphs. Graphs and Other Combinatorial Topics. Proceedings of the Third Czechoslovak Symposium on Graph Theory (1982) 173-177

Sea $C \subseteq V(D) - T(D)$. Si $D - C$ tiene núcleo S entonces $\lambda(D - S) < \lambda(D)$.

Demostración por contradicción

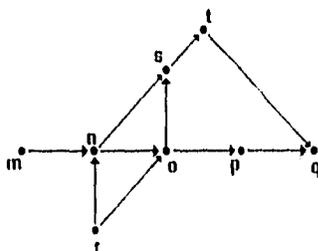
Supongamos que existe τ una trayectoria dirigida de longitud máxima con $S \cap V(\tau) = \emptyset$ y sea z_0 el vértice terminal de τ .

Claramente $z_0 \in [(V(D) - C) \cap (V(D) - S)]$ y como S es núcleo de $D - C$ existe $y \in S$ tal que $(z_0, y) \in F(D)$

por lo tanto $\tau' = \tau \cup (z_0, y)$ es una trayectoria dirigida tal que la longitud de τ' es mayor que la longitud de τ . Lo cual es una contradicción.

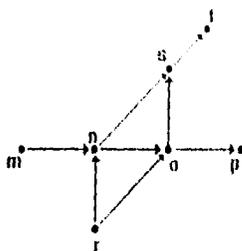
Corolario. Sea D una digráfica, si $D[T(D)]$ tiene núcleo S , entonces $\lambda(D - S) < \lambda(D)$.

Tomemos la siguiente digráfica D :



Podemos observar, que $\lambda(D)=4$ y que q es el vértice terminal de la trayectoria dirigida de longitud máxima.

Consideremos $C = V(D) - T(D)$.



así $D-C$ es la siguiente digráfica:



$D-C$ tiene núcleo $S=\{q\}$, así $\lambda(D-S)=3 < \lambda(D)=4$.

Teorema 2.

Sea $C \subseteq (V(D)-T(D)) \cup \{x \in V(D) \mid \Gamma_D^+(x) \cong K_n^+(x), n(x) = \delta_D^+(x)\}$

$K_n^+(x)$ es la digráfica simétrica completa con n vértices.

Si $D-C$ tiene núcleo, entonces existe $S \subseteq V(D)$, un conjunto independiente tal que $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

Demostración

Sea $C' = C \cap \{x \in V(D) \mid \Gamma_D^+(x) \cong K_n^+(x), n(x) = \delta_D^+(x)\}$

Procederemos por inducción sobre la cardinalidad de los vértices de C' .

Si $C' = \emptyset$ entonces la demostración de este teorema se sigue directamente del teorema anterior.

Supongamos que $C' \neq \emptyset$ y sea N un núcleo de $D-C$, como N es independiente, podemos suponer que existe $\tau=(z_0, z_1, \dots, z_n)$ una trayectoria dirigida de longitud máxima tal que $\tau \cap N = \emptyset$.

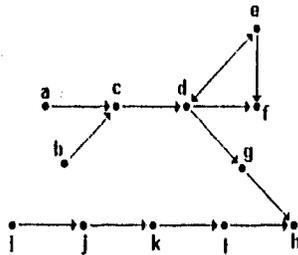
Caso 1. $z_n \in V(D)-C'$. Tenemos que $z_n \in (V(D)-C') \cap (V(D)-N)$ y como N es núcleo de $D-C'$, entonces existe $y \in N$ tal que $(z_n, y) \in F(D)$ y $\tau' = \tau \cup (z_n, y)$ lo que contradice la elección de τ .

Caso 2. $z_n \in C'$. Notemos que $z_n \in C'$ pues $z_n \in T(D)$, probamos que $N \cup \{z_n\}$ es un conjunto independiente.

Supongamos que existe $s \in N$ tal que $\{(s, z_n), (z_n, s)\} \cap F(D) \neq \emptyset$. Como en el caso 1 vemos que $(z_n, s) \notin F(D)$. Por lo tanto $(s, z_n) \in F(D)$. Ahora la hipótesis implica que $\{(z_{n-1}, s), (s, z_{n-1})\} \subseteq F(D)$ y $\tau' = (z_0, \dots, z_{n-1}, s, z_n)$ es una trayectoria dirigida tal que $\lambda(\tau') = \lambda(\tau) + 1$. Se sigue que $N \cup \{z_n\}$ es un conjunto independiente. De hecho es un núcleo de $D - C_1$, donde $C_1 = C' - \{z_n\}$ y se sigue de la hipótesis de inducción, que existe un conjunto independiente $S \subseteq V(D)$ tal que $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

Ejemplo:

Digráfica D



Sea $C = \{a, c, d, e, f\}$

Entonces $D-C$ es la digráfica:



De aquí, $N = \{b, h, i, k\}$

$C'' = \{f\}$

Sea $\tau = (a, c, d, e, f)$

Estamos en el caso 2, $f \in C$, por lo tanto $f \in C''$

Sea $S = N \cup \{f\}$. Es claro que S es independiente y $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

3. RESULTADOS

En este capítulo, daremos algunas condiciones suficientes para que una digráfica tenga núcleo.

Antes de dar las condiciones suficientes para que una digráfica tenga núcleo, expondremos algunos resultados previos.

1. Todo camino cerrado dirigido de longitud impar contiene un ciclo dirigido de longitud impar.

Demostración por inducción sobre la longitud del camino.

Sea $\ell(c)$ la longitud del camino c .

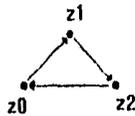
Para $\ell(c)=3$ tenemos $c=(z_0, z_1, z_2, z_0)$

$z_0 \neq z_1$, pues $(z_0, z_1) \in F(c)$

$z_1 \neq z_2$, pues $(z_1, z_2) \in F(c)$

$z_2 \neq z_0$, pues $(z_2, z_0) \in F(c)$

tenemos que c es un ciclo dirigido de longitud 3.



Hipótesis de inducción: Todo camino dirigido cerrado de longitud impar menor que $2n+1$, $n \geq 1$ contiene un ciclo dirigido de longitud impar.

Sea $c = (z_1, z_2, \dots, z_{2n-1}, z_1)$ un ciclo cerrado de longitud $2n+1$.

Si $z_i \neq z_j \forall i, j$ entonces, c es un ciclo dirigido de longitud $2n+1$.

Si $z_i = z_j$ para alguna $i < j$, entonces tenemos $c = (z_1, z_2, \dots, z_i, \dots, z_j, \dots, z_{2n+1}, z_1)$, sean

$$c_1 = (z_1, z_2, \dots, z_i = z_j, \dots, z_{2n+1}, z_1)$$

$$c_2 = (z_i, \dots, z_j)$$

Como c es de longitud impar, tenemos que c_1 o c_2 es de longitud impar;

$$l(c_1) < l(c) \text{ y } l(c_2) < l(c)$$

sin pérdida de generalidad, supongamos que c_1 es de longitud impar y por hipótesis de inducción, c_1 contiene un ciclo dirigido de longitud impar, llamémosle c' , $c' \subseteq c_1 \subseteq c$

Por lo tanto c contiene un ciclo dirigido de longitud impar.

2. $\mathcal{Q}(D)$, la digráfica de condensación de D , no tiene ciclos dirigidos.

Demostración.

Supongamos que $\mathcal{Q}(D)$ tiene al menos un ciclo dirigido.

Sea (C_1, C_2, \dots, C_n) un ciclo dirigido en $\mathcal{Q}(D)$ y $\gamma = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$ una subdigráfica de D .

Sean $u, v \in V(C_i)$ $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ como C_i es una componente fuertemente conexa en D , entonces existe una uv -trayectoria dirigida en C_i , y como $C_i \subseteq \gamma$, en γ existe una uv -trayectoria dirigida.

Sean $a \in C_i$ y $b \in C_j$ con $i < j$, s_i el vértice de salida de C_i , e_i el vértice de entrada a C_i . Como $a \in C_i$ y C_i es fuertemente conexa existe T_1 una as_i -trayectoria dirigida y en γ existe T_{ij} una $s_i e_j$ -trayectoria dirigida, es decir una trayectoria dirigida de C_i a C_j y por ser C_j fuertemente conexa existe T_2 una $e_j b$ -trayectoria dirigida.

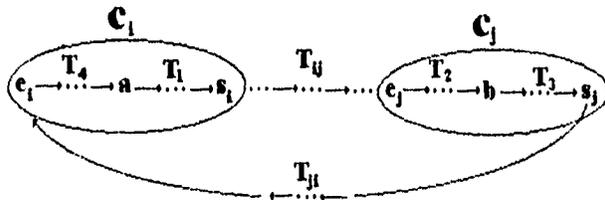
$T_{ab} = (a, T_1, s_1) \cup (s_1, T_{ij}, e_j) \cup (e_j, T_2, b)$ es una ab -trayectoria dirigida.

Existe T_3 una bs_j -trayectoria dirigida, pues $b \in C_j$ y C_j es fuertemente conexa y como $C_j \subseteq \gamma$ existe T_{ji} una $s_j e_i$ -trayectoria dirigida y como $a \in C_i$ existe T_4 una $e_i a$ -trayectoria dirigida.

Tomemos T_{ba} de la siguiente manera $(b, T_3, s_j) \cup (s_j, T_{ji}, e_i) \cup (e_i, T_4, a)$, tenemos que T_{ba} es una ba -trayectoria dirigida.

Así que γ es fuertemente conexa, lo cual contradice el hecho de que cada C_i componente fuertemente conexa de D es máxima por inclusión.

Por lo tanto $\mathcal{C}(D)$ no tiene ciclos dirigidos.



3. Si N es núcleo, entonces es un conjunto independiente máximo y un conjunto absorbente mínimo.

Demostración.

Sea N un núcleo, si $z \notin N$, entonces existe una flecha que va de z a N , y el conjunto $N \cup \{z\}$ no puede ser independiente.

Si $b \in N$, $T = N - \{b\}$ no puede ser absorbente, pues por ser N independiente, no puede haber una flecha de b a T .

Aquí comienzan las condiciones suficientes para que una digráfica tenga núcleo.

4. Toda digráfica simétrica D tiene núcleo (C. Berge 1973).

Demostración:

Sea N un subconjunto independiente máximo de $V(D)$, para cada $z \notin N$ existe $w \in N$ tal que z es adyacente a w (de lo contrario podríamos extender N a $N \cup \{z\}$ contradiciendo que N es independiente máximo) y como D es simétrica se tiene que $(z,w) \in F(D)$.

Nótese que como N es independiente entonces un subconjunto propio de N no es absorbente.

5. Toda digráfica transitiva D tiene núcleo, mas aún, todos los núcleos de D tienen la misma cardinalidad y todo conjunto absorbente mínimo es núcleo.

Demostración. Sea $N \subseteq V(D)$ tal que cada elemento de N proviene de una componente terminal fuertemente conexa de D distinta, y escójase un elemento por cada componente terminal, es decir, de dicha terminal no salen flechas. N es un conjunto independiente: sea $v \in N$, por definición de N , v pertenece a alguna componente terminal fuertemente conexa de D , entonces de v no salen flechas hacia otra componente, en particular hacia otra componente terminal fuertemente conexa. Por lo tanto v no es adyacente hacia los demás elementos de N .

N es absorbente:

Observación. Como D es transitiva, u, v están en la misma componente fuertemente conexa si y sólo si (u,v) y (v,u) son flechas de D .

Sea $v \in V(D) - N$, entonces v está en alguna componente fuertemente conexa de D . Si dicha componente es terminal, existe u en esa componente tal que $u \in N$, y por la observación anterior, $(v,u) \in F(D)$.

Si la componente que contiene a v no es terminal, como D es finita, existe un camino dirigido de esta componente a otra que si es terminal; sean u_1, u_2 los vértices inicial y final respectivamente de este camino, como D es transitiva, $(u_1, u_2) \in F(D)$, por la observación, $(v, u_1) \in F(D)$, por lo tanto $(v, u_2) \in F(D)$. Por otro lado existe u en la componente terminal fuertemente conexa que contiene a u_2 , tal que $u \in N$, y nuevamente por la observación $(u_2, u) \in F(D)$ y por lo tanto $(v, u) \in F(D)$ con $u \in N$.

Inversamente, sea N un núcleo de D , supongamos que existe una componente fuertemente conexa en D tal que ninguno de sus vértices pertenece a N , como de dicha componente no salen flechas hacia otras componentes, entonces N no sería absorbente, lo cual contradice que N es núcleo. Por lo tanto N contiene un vértice por cada componente terminal fuertemente conexa.

Por lo anterior, todos los núcleos de D tienen la misma cardinalidad.

6. Toda digráfica bipartita tiene núcleo.

Demostración por inducción sobre el número de vértices n de D .

Para $n=1$ el resultado es inmediato

Hipótesis de inducción

Toda digráfica bipartita con un número de vértices menor que n tiene núcleo.

Sea D una digráfica bipartita,

Caso 1) D no tiene vértices de exgrado cero.

Sabemos que existe una bipartición de $V(D)$, digamos V_1, V_2 , tal que toda flecha de D tiene un extremo en V_1 y otro en V_2 .

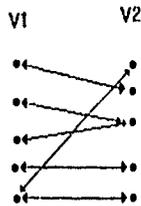
Afirmamos que V_1 es núcleo de D .

V_1 es independiente por definición de D .

Mostraremos que V_1 es absorbente.

Sea $x \in V_2$, como D no tiene vértices de exgrado cero entonces existe xV_1 -flecha en D .

Análogamente V_2 es núcleo de D .



Caso 2) D tiene vértices de exgrado cero;

definimos

$$N_0 = \{x \in V(D) \mid \delta_D^+(x) = 0\}$$

$$S_0 = \{x \in V(D) \mid \text{existe } xy\text{-flecha en } D \text{ para alguna } y \in N_0\}$$

$D_1 = D - (N_0 \cup S_0)$ claramente D_1 es bipartita con un número de vértices menor que n , por hipótesis de inducción D_1 tiene núcleo, digamos N_1 .

Afirmamos que $N_0 \cup N_1$ es núcleo de D .

Cada uno, N_0, N_1 son independientes por construcción, y no hay flechas de N_0 a N_1 por definición de N_0 .

Tampoco hay flechas de N_1 a N_0 por la definición de S_0 y D_1 . Por lo tanto $N_0 \cup N_1$ es independiente.

$N_0 \cup N_1$ es absorbente:

Sea $x \notin (N_0 \cup N_1)$

si $x \in S_0$ entonces existe xN_0 -flecha.

si $x \in D_1$ entonces existe xN_1 -flecha.

Por lo tanto $N_0 \cup N_1$ es absorbente.

7. Si D es una digráfica fuertemente conexa sin ciclos dirigidos de longitud impar, entonces D tiene núcleo.

Demostración:

Sea $m_0 \in V(D)$, y sean V_1 y $V_2 \subseteq V(D)$ tal que:

$V_1 = \{z \in V(D) \mid \text{existe } m_0z\text{-trayectoria dirigida de longitud par}\}$,

$V_2 = \{z \in V(D) \mid \text{existe } m_0z\text{-trayectoria dirigida de longitud impar}\}$.

Mostraremos que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

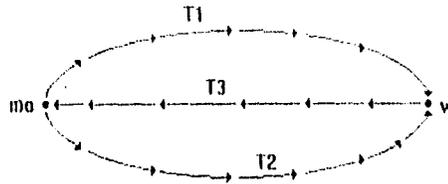
Supongamos que $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$

Sea $w \in V_1 \cap V_2$

Como $w \in V_1$, entonces existe m_0w -trayectoria de longitud par llamémosle T_1

y como $w \in V_2$ entonces existe m_0w -trayectoria de longitud impar llamémosle T_2 .

Como D es fuertemente conexa, existe wm_0 -trayectoria, llamémosle T_3 .



Si T_3 es de longitud par, tomamos $c_1 = (m_0, T_2, w) \cup (w, T_3, m_0)$, c_1 es un camino cerrado de longitud impar, y por el resultado 1, c_1 contiene un ciclo dirigido de longitud impar. Lo cual es una contradicción, pues D no tiene ciclos dirigidos de longitud impar.

Si T_3 es de longitud impar, tomamos $c_2 = (m_0, T_1, w) \cup (w, T_3, m_0)$, c_2 es un camino cerrado de longitud impar, c_2 contiene un ciclo dirigido de longitud impar. Lo cual es una contradicción, pues D no tiene ciclos dirigidos de longitud impar.

Mostraremos que $V_1 \cup V_2 = V(D)$

$V_1 \cup V_2 \subseteq V(D)$ esta dado por la construcción de V_1 y V_2 .

$m_0 \in V_1$ pues la distancia a sí mismo es cero.

$\forall z \in V(D)$ y $m_0 \in V(D)$, $m_0 \neq z$, la longitud de m_0 a z es sólo par o impar, entonces $V_1 \cup V_2 \supseteq V(D)$.

No existe (x,y) flecha tal que $x, y \in V_1$ ni en V_2 .

Supongamos que $a = (x,y) \in V_1$, (demostración análoga para V_2).

Por definición de V_1 , la longitud de la m_0x -trayectoria es par llamémosle t_1 , $t_1 \cup (x,y)$ es una m_0y -trayectoria de longitud impar, llamémosle t_2 . Como $y \in V_1$ existe una m_0y -trayectoria de longitud par, llamémosle t_3 y como D es fuertemente conexa, existe t_4 una ym_0 -trayectoria.

Si t_4 es de longitud impar, $(m_0, t_3, y) \cup (y, t_4, m_0)$ es un camino cerrado de longitud impar, y por el resultado 1, contiene un ciclo dirigido de longitud impar, lo cual es una contradicción.

Si t_4 es de longitud par, $(m_0, t_2, y) \cup (y, t_4, m_0)$ es un camino cerrado de longitud impar, y por el resultado 1, contiene un ciclo dirigido de longitud impar, lo cual es una contradicción.

Hemos demostrado que D es bipartita, y por el resultado anterior, D tiene núcleo.

8. Si D no tiene ciclos dirigidos de longitud impar entonces D tiene núcleo.

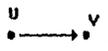
caso 1) Si D es fuertemente conexa, entonces por el resultado anterior, D tiene núcleo.

caso 2) D no es fuertemente conexa

Demostración por inducción sobre el número de vértices de D

$|V(D)| = 1$  el núcleo es $\{u\}$

$|V(D)| = 2$  el núcleo es $\{u, v\}$

 el núcleo es $\{v\}$

Hipótesis de inducción: si $|V(D)| < n$ entonces D tiene núcleo

Sea D tal que $|V(D)| = n$

Sean C_1, C_2, \dots, C_k las componentes fuertemente conexas de D . Por el resultado 2, tenemos que la gráfica de condensación de D tiene al menos un vértice de exgrado cero. Sea C_i este vértice $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, como C_i es una componente fuertemente conexa, por el resultado anterior, C_i tiene núcleo, llamémosle N_i .

Sean $S_0 = \{u \in V(D) \text{ tal que } (u,v) \in F(D), \text{ para algún } v \in V(N_i)\}$ y $D' = D - (N_i \cup S_0)$.

$|V(D')| < |V(D)| = n$, y por hipótesis de inducción D' tiene núcleo, llamémosle N' .

Demostraremos que $N = N_i \cup N'$ es núcleo de D

Por definición de núcleo, N_i y N' son conjuntos independientes.

$N_i \subseteq C_i$ y C_i es de exgrado cero y por definición de N' , $N' \not\subseteq C_i$ por lo tanto no existen flechas de N_i a N'

Como todas las posibles flechas hacia N_i están en S_0 y $N' \cap S_0 \neq \emptyset$ se sigue que no existen flechas de N' a N_i .

Por lo tanto $N' \cap N_i = \emptyset$ y $N = N' \cup N_i$ es independiente.

Sea $x \in (V(D) - V(N))$

Si $x \in C_j$, $j \neq i$, entonces como $C_j \subseteq D'$, y N' es núcleo de D' , existe una flecha de x a algún vértice de N' , y por lo tanto una xN -flecha.

Si $x \in C_i$, tenemos que N_i es núcleo de C_i y existe xN_i -flecha y por lo tanto existe xN -flecha.

Si $x \in S_0$, entonces por definición de S_0 , existe xN_i -flecha y por lo tanto existe xN -flecha.

Así N es absorbente.

Por lo tanto N es núcleo.

9. Si D es una digráfica tal que cada ciclo dirigido tiene al menos una flecha simétrica, entonces D tiene núcleo.

Demostración por inducción sobre la cardinalidad de los vértices de D .

Para uno, dos y tres vértices el resultado es inmediato:



Hipótesis de inducción: Si D' es una digráfica con un número de vértices menor que n , tal que cada ciclo dirigido tiene al menos una flecha simétrica, entonces D' tiene núcleo.

Sea D una digráfica con n vértices.

Notemos que $\text{Asim}(D)$ no tiene ciclos dirigidos.

Sea $N_0 = \{z \in V(D) \mid \text{no existe flecha asimétrica con vértice inicial } z\}$

$N_0 \neq \emptyset$ pues estamos suponiendo que cada ciclo dirigido tiene al menos una flecha simétrica, y estamos suponiendo que hay ciclos dirigidos. Si de todo vértice saliera una flecha asimétrica entonces habría un ciclo asimétrico.

$D[N_0]$ es simétrica y por el resultado 4, $D[N_0]$ tiene núcleo digamos N_1

Sean:

$S_1 = \{z \in V(D) \mid \text{existe } zN_1\text{-flecha}\}$

$D' = D - (N_1 \cup S_1)$,

$|V(D')| < |V(D)| = n$.

Por hipótesis de inducción, D' tiene núcleo digamos N' .

Demostraremos que $N_1 \cup N'$ es núcleo de D

Por construcción no existen $N'N_1$ -flechas.

Supongamos que $(z,w) \in F(D)$ es una $N_1 N'$ -flecha, $z \in N_1 \subseteq N_0$. Se sigue de la definición de N_0 que $(w,z) \in F(D)$, tenemos que $w \in S_1$, pero $w \in N' \subseteq D - (N_1 \cup S_1)$, lo cual es una contradicción.

10. Si en D todo ciclo dirigido de longitud impar tiene al menos dos flechas simétricas, entonces D tiene núcleo

11. Si en una digráfica cada ciclo dirigido de longitud impar tiene dos *polos* consecutivos, entonces la digráfica tiene núcleo.

12. Toda digráfica sin ciclos dirigidos tiene núcleo [John Von Neumann].

Primero demostraremos:

Si $D=(X,F)$ es una digráfica sin ciclos dirigidos, entonces existe algún punto $x_0 \in X$ tal que de x_0 no salen flechas.

Demostración:

Supongamos que de cada vértice de D salen flechas.

Sea $x_0 \in X$, de x_0 sale alguna flecha, digamos $(x_0, x_1) \in F$, de la suposición se sigue, que de x_1 sale alguna flecha digamos $(x_1, x_2) \in F$, de x_2 sale alguna flecha digamos $(x_2, x_3) \in F$, etc. continuando así. y ya que X es un conjunto finito entonces necesariamente repetimos algún punto; y considerando la primera vez que se repite un punto obtenemos un ciclo dirigido, luego D debe tener algún ciclo dirigido, lo que contradice la hipótesis. Así queda esto demostrado.

Demostración:

Consideremos ahora $N_0 = \{x \in X \text{ tal que } \delta^+_{D_0}(x) = \emptyset\}$.

$W_0 = \{w \in X \text{ tal que existe una } w \text{ } N_0\text{-flecha}\}$. Claramente tenemos que $N_0 \cap W_0 = \emptyset$.

Consideremos ahora $D_1 = D - (N_0 \cup W_0)$. Si $D_1 = \emptyset$ entonces N_0 es núcleo de D .

Si $D_1 \neq \emptyset$ consideremos a $D_1 = (X_1, F_1)$ y tenemos que D_1 no tiene ciclos dirigidos y repitiendo lo anterior, tomamos

$N_1 = \{x \in X_1 \text{ tal que } \delta^+_{D_1}(x) = \emptyset\}$

$W_1 = \{w \in X_1 \text{ tal que existe una } w \text{ } N_1\text{-flecha}\}$

Claramente por construcción los conjuntos N_0, W_0, N_1, W_1 son ajenos 2 a 2.

De igual manera $|X| > |X_1| > \dots$ así que continuando así debemos obtener que existe $i \geq 1$ tal que $X_i = \emptyset$.

Sea $i_0 = \min \{i \in \mathbb{N} \text{ tal que } X_i = \emptyset\}$ y tenemos N la unión de X_j con $j=1$ hasta i_0-1 , es un núcleo de D .

APENDICE

Damos el algoritmo para encontrar el núcleo de una digráfica sin ciclos dirigidos.

Paso 1. $N = \emptyset$

paso 2. sea $x \in V(D)$ tal que $\delta_D^-(x) = 0$

paso 3. $N = N \cup \{x\}$

paso 4. $D' = D - \{x\} - \Gamma(x)$

paso 5. $D = D'$

paso 6. si $D \neq \emptyset$ regresa a paso 2

paso 7. Fin

A continuación se presenta el código de un programa en Pascal para calcular el núcleo de una digráfica sin ciclos dirigidos:

```

program calcula_nucleo;
uses crt;
var
D,A,M:array[1..100,1..100] of boolean;
NU,V:array[1..100] of integer;
guardian,l,k,n,dimension,j,i,cont,adyacentes: integer;
exgrado_cero: boolean;
respuesta: char;

```

```

Procedure Quita_vertice(hh,nnn:integer);
begin
for k:=hh+1-adyacentes to nnn do
begin

```

```

V[k-1]:=V[k];
for l:=1 to n do
begin
d[k-1][l]:=d[k][l];
d[l][k-1]:=d[l][k];
end;
end;
n:=n-1;
end;

```

```

Procedure quita_adyacentes(h:integer);
var nnn,l:integer;
begin
nnn:=n;
for ll:=1 to nnn do
if (M[ll][h]=true) then begin
        quita_vertice(ll,nnn);
        adyacentes:=adyacentes+1;
end;
M:=D;
end;

```

```

function encuentraVEC:integer;
begin
i:=1;
exgrado_cero:=false;
while (exgrado_cero=false) and (i<=n) do
begin

```

```

exgrado_cero:=true;
for j:=1 to n do
if M[i][j]=true then exgrado_cero:=false;

if exgrado_cero then encuentraVEC:=i else encuentraVEC:=0;
i:=i+1;
end.
end;

```

```

Procedure Nucleo(nn:integer);
var
  existeVEC:boolean;
  ni:integer;
Begin
  textcolor(RED);
  existeVEC:=true;
  while ((n>1) and (existeVEC=true)) do
  begin
    ni:=encuentraVEC;
    if ni<>0 then begin
      cont:=cont+1;
      Nu[cont]:=v[ni];
      quita_adyacentes(ni);
      quita_vertice(ni,n);
      M:=D;
      end
    else existeVEC:=false;
  end;

```

```

if n=0 then begin textcolor(white); exit; end else
if n=1 then begin
    quita_adyacentes(1);
    quita_vertice(1,1);
    cont:=cont+1;
    Nu[cont]:=v[1];
    writeln(v[1]);
    end
else BEGIN write('La digráfica contiene algún ciclo dirigido, NO PUEDO
CALCULAR EL NUCLEO!!!, pulse [ENTER]...');
    readln;
    guardian:=1;
    end;

textcolor(WHITE);
end;

Begin
clrscr;
respuesta:='s';
while upcase(respuesta)='S'do
begin
cont:=0;
adyacentes:=0;
guardian:=0;
Write ('cuántos vértices tiene la digráfica?');
readln (n);
dimension:=n;

```

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

```

for i:=1 to n do
begin
V[i]:=i;
for j:=1 to n do
Begin
if (i<>j) then begin
write('dame el elemento ('i','j.') de la matriz:');
readln(k);
if (k=1) then M[i][j]:=true else M[i][j]:=false;
end else M[i][j]:=false;
end;
end;
A:=M;
d:=M;
nucleo(n);
clrscr;
if cant<>0 then
begin
GOTOXY(2,2);
write('+');
for i:=1 to dimension do
begin
gotoxy(1,i+2);
write(i,' ');
gotoxy(i+2,1);
write(i);
gotoxy(i+2,2);
write('-');

```

```

for j:=1 to dimension do
Begin
gotoxy(j+2,i+2);
if A[i][j]=true then
writeln('1')
else writeln('0');
end;
end;
if guardian<>1 then begin
writeln ('Los elementos del núcleo son:');
for i:=1 to cont do
writeln (nu[i]);
end;

end else if guardian<>1 then writeln ('La Digráfica no tiene vértices de
exgrado cero!!!');
writeln ("Quieres calcular el núcleo de otra digráfica Si o No?");
readln (respuesta);
adyacentes:=0;
guardian:=0;
end;

end.

```

REFERENCIAS

- [1] C. Berge, *Graphs*, North-Holland Mathematical Library; V.6 pt. 1, 1989. Second revised edition
- [2] C. Berge, A. Ramachandra, A combinatorial problem in Logic. *Discrete Mathematics* 17 (1977) 23-26. North-Holland.
- [3] H. Galeana-Sánchez, H. A. Rincón-Mejía, Some results on independent sets and longest directed paths. por aparecer.
- [4] P. Duchet, H. Meyniel, Kernels in directed graphs: a poison game, *Discrete Mathematics* 115 (1993) 273-276. North-Holland.
- [5] H. Galeana-Sánchez, V. Neumann-Lara, on kernels and semi-kernels of digraphs. *Discrete Mathematics* 48 (1984) 67-76.
- [6] J. Topp, Grundy functions and games in digraphs. *Zeszyty Naukowe Politechniki Gdanskiej, Matematyka XII*, 1982.