



DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO  
Facultad de Ingeniería

01190

6

95

**IDENTIFICACIÓN DE PROPIEDADES DINÁMICAS DE ESTRUCTURAS NO LINEALES  
PARA CÁLCULO DE RESPUESTA SÍSMICA**

**Alberto Salgado Rodríguez**

**TESIS DOCTORAL**

Presentada a la División de Estudios de Posgrado de la  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
de la  
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
Como requisito para obtener el grado de

**DOCTOR EN INGENIERÍA**

CIUDAD UNIVERSITARIA  
JUNIO, 1996

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## **RESUMEN**

En este trabajo se revisan, aplican, y proponen diferentes métodos de identificación de sistemas en ingeniería estructural. Se estudia con detalle la identificación de propiedades dinámicas de estructuras bajo carga sísmica intensa. Se propone un modelo de comportamiento estructural para representar estructuras con comportamiento no lineal importante. Asimismo, se presenta un método para estimar las propiedades de estructuras no lineales de múltiples grados de libertad. Se estudia la identificación de un sistema estructural denominado de "esqueleto de pescado", que mejora la aproximación que se obtiene con el modelo de cortante. Se propone una estrategia para estimar los parámetros que intervienen en cierto tipo de sistemas suelo-estructura. Se presenta un método para predecir en forma óptima la respuesta de sistemas estructurales no lineales de múltiples grados de libertad.

## **ABSTRACT**

In this thesis, several structural-system identification methods are reviewed, applied, and proposed. Identification of structural systems under severe earthquake excitation is studied in detail. A structural model, which can represent systems with strong nonlinear behaviour, is presented. A method to estimate dynamic properties of multistory buildings with nonlinear behaviour is proposed. System identification of a certain model named "fishbone" is studied. This "fishbone" model improves the approximation obtained by means of shear-beam models of multistory buildings. A strategy to estimate the dynamic parameters that participate in a certain type of soil-structure system is proposed. A new method for optimal prediction of the seismic response of nonlinear multistory buildings is introduced.

A MIS PADRES

y

A MI HIJA

## **AGRADECIMIENTOS**

A Dios y a mi Familia, por darme todo lo que tengo.

Al doctor Luis Esteva Maraboto, mi director de tesis, por sus enseñanzas, su apoyo y, sobretodo, por su ejemplo, el cual constituye, para mí, el mejor modelo de referencia.

Al doctor Roberto Meli Piralla, por su apoyo y su confianza.

A la doctora Cristina Verde Rodarte, por sus agudas observaciones a este trabajo y por su tiempo y disposición para atenderme.

A los doctores David Muriá Vila, Roberto Gómez Martínez, Mario Ordaz Schroeder, y Francisco José Sánchez Sesma, por la revisión y comentarios a la presente tesis.

A la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Guerrero, por su apoyo y por darme la oportunidad de transmitir mis conocimientos.

Al Instituto de Ingeniería de la UNAM, por el espacio y ambiente propicios que me permitieron concluir este trabajo.

## **RESUMEN**

En este trabajo se revisan, aplican, y proponen diferentes métodos de identificación de sistemas en ingeniería estructural. Se estudia con detalle la identificación de propiedades dinámicas de estructuras bajo carga sísmica intensa. Se propone un modelo de comportamiento estructural para representar estructuras con comportamiento no lineal importante. Asimismo, se presenta un método para estimar las propiedades de estructuras no lineales de múltiples grados de libertad. Se estudia la identificación de un sistema estructural denominado de "esqueleto de pescado", que mejora la aproximación que se obtiene con el modelo de cortante. Se presenta una estrategia para estimar los parámetros que intervienen en cierto tipo de sistemas suelo-estructura. Se propone un método para predecir en forma óptima la respuesta de sistemas estructurales no lineales de múltiples grados de libertad.

## **ABSTRACT**

In this thesis, several structural-system identification methods are reviewed, applied, and proposed. Identification of structural systems under severe earthquake excitation is studied in detail. A structural model, which can represent systems with strong nonlinear behaviour, is presented. A method to estimate dynamic properties of multistory buildings with nonlinear behaviour is proposed. System identification of a certain model named "fishbone" is studied. This "fishbone" model improves the approximation obtained by means of shear-beam models of multistory buildings. A strategy to estimate the dynamic parameters that participate in a certain type of soil-structure system is proposed. A new method for optimal prediction of the seismic response of nonlinear multistory buildings is introduced.

# CONTENIDO

CAPÍTULO	Página
<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>1</b>
<b>1 COMPORTAMIENTO SÍSMICO OBSERVADO Y MODELADO DE LAS ESTRUCTURAS</b> .....	<b>9</b>
1.1 Introducción .....	10
1.2 Comportamiento durante la fase inicial del sismo .....	11
1.2.1 Energía disipada por ciclo .....	12
1.3 Comportamiento durante la fase intensa del sismo .....	14
1.3.1 Energía disipada por ciclo .....	15
1.3.2 Modelos de comportamiento estructural .....	17
1.3.3 Daño acumulado en las estructuras .....	21
1.4 Propuesta de modelo estructural .....	21
Simbología .....	27
<b>2 ASPECTOS TEÓRICOS DE LA IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS</b> .....	<b>28</b>
2.1 Introducción .....	29
2.2 El filtro de Kalman extendido .....	31
2.3 Divergencia en las estimaciones .....	33
2.3.1 Problemas numéricos .....	33



## CONTENIDO

---

	2.3.2 Errores de modelado . . . . .	34
	2.3.3 Problemas de observabilidad . . . . .	35
	2.3.3.1 Observabilidad de sistemas lineales . . . . .	35
	2.3.3.2 Observabilidad de sistemas no lineales (linealizados) . . .	37
	Simbología . . . . .	39
<b>3</b>	<b>IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO . . . . .</b>	<b>40</b>
	3.1 Estimación de rigideces y amortiguamientos . . . . .	41
	3.1.1 Ecuaciones de estado y de mediciones . . . . .	42
	3.1.2 Caso especial. Amortiguamiento proporcional . . . . .	44
	3.1.3 Ejemplos de estimación de rigideces y amortiguamientos . . . . .	44
	Ejemplo 1. Sistemas de cortante . . . . .	45
	Ejemplo 2. Sistemas acoplados . . . . .	46
	3.1.4 Problemas numéricos y de modelado . . . . .	46
	3.2 Estimación de parámetros modales . . . . .	48
	3.2.1 Ecuaciones de estado y de mediciones . . . . .	48
	3.2.2 Problemas numéricos y de modelado . . . . .	51
	Simbología . . . . .	52
<b>4</b>	<b>IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA . . .</b>	<b>53</b>
	4.1 Introducción . . . . .	54
	4.2 Receptancia, Movilidad e Inertancia . . . . .	55
	4.3 Ecuaciones de estado y de mediciones . . . . .	56
	4.5 Problemas numéricos . . . . .	59
	Simbología . . . . .	61
<b>5</b>	<b>MAS ALLÁ DE LOS SISTEMAS DE CORTANTE: IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS DE ESQUELETO DE PESCADO . . . . .</b>	<b>62</b>
	5.1 Introducción . . . . .	63

## CONTENIDO

---

5.2	Modelo matemático de los sistemas de esqueleto de pescado . . . . .	63
5.3	Ecuaciones de estado y de mediciones . . . . .	65
5.4	Observabilidad del sistema . . . . .	66
5.5	Ejemplo numérico . . . . .	68
	Simbología . . . . .	73
<b>6</b>	<b>IDENTIFICACIÓN DE CIERTO TIPO DE SISTEMA SUELO-ESTRUCTURA . . .</b>	<b>74</b>
6.1	El efecto de la interacción suelo-estructura . . . . .	75
6.2	Modelo matemático del sistema suelo-estructura . . . . .	77
6.3	Procedimiento de identificación propuesto . . . . .	78
6.3.1	Primera Etapa. Estimación de los parámetros de la estructura . . . .	79
6.3.2	Segunda Etapa. Estimación de los parámetros del suelo . . . . .	81
6.4	Ejemplo numérico . . . . .	83
	Simbología . . . . .	95
<b>7</b>	<b>IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS ESTRUCTURALES NO LINEALES . . . . .</b>	<b>96</b>
7.1	Introducción . . . . .	97
7.2	Estimación de parámetros de modelos discontinuos . . . . .	98
7.2.1	Ecuaciones de estado y de mediciones . . . . .	99
7.3	Estimación de parámetros de modelos continuos . . . . .	100
7.3.1	Ecuaciones de estado y de mediciones . . . . .	100
7.4	Ejemplo numérico . . . . .	101
7.5	Problemas en la identificación de sistemas estructurales no lineales de múltiples grados de libertad . . . . .	105
	Simbología . . . . .	106
<b>8</b>	<b>IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS ESTRUCTURALES NO LINEALES MEDIANTE MODELOS REDUCIDOS . . . . .</b>	<b>107</b>
8.1	Condiciones presentes en la práctica y modelo estructural propuesto . . .	108

## CONTENIDO

---

8.2	Dimensión y número de elementos en el modelo propuesto . . . . .	109
8.3	Estimación de los parámetros del modelo . . . . .	110
8.3.1	Matriz de masa . . . . .	110
8.3.2	Rigideces secantes . . . . .	112
8.3.3	Coefficientes de amortiguamiento viscoso equivalente . . . . .	114
8.3.4	Parámetros del modelo de deterioro . . . . .	115
8.3.4.1	Función objetivo o de error . . . . .	116
8.3.4.2	Algoritmo de estimación . . . . .	117
8.4	Ejemplo numérico . . . . .	120
8.4.1	Estimación de los parámetros del modelo . . . . .	121
	Simbología . . . . .	133
<b>9</b>	<b>PREDICCIÓN DE RESPUESTA SÍSMICA . . . . .</b>	<b>135</b>
9.1	El problema de la predicción de respuesta con modelos simplificados . .	136
9.2	Algoritmo de predicción propuesto . . . . .	139
9.2.1	Estimación de los parámetros óptimos . . . . .	140
9.3	Corrección de la respuesta por deriva o desplazamientos permanentes . .	142
9.4	Ejemplos numéricos . . . . .	144
	Simbología . . . . .	150
	<b>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES . . . . .</b>	<b>155</b>
	<b>REFERENCIAS . . . . .</b>	<b>158</b>
	<b>APÉNDICE A. CÁLCULO DE LA RESPUESTA MEDIANTE LA MATRIZ DE TRANSICIÓN. FORMULACIÓN DE ESTADO. . . . .</b>	<b>163</b>
	<b>APÉNDICE B. DEDUCCIÓN DE LAS EXPRESIONES DEL FILTRO DE KALMAN . . . . .</b>	<b>168</b>
	B.1 Problemas no lineales. El filtro de Kalman extendido . . . . .	173

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA	Página
1.1	Ciclo histerético en el intervalo lineal. Rigidez secante . . . . . 13
1.2a	Sistema histerético sin deterioro . . . . . 15
1.2b	Sistema histerético con deterioro . . . . . 15
1.3	Las derivas en los ciclos histeréticos . . . . . 16
1.4	Adelgazamiento de ciclo histerético por efecto del daño acumulado . . . . . 16
1.5	Modelo Elastoplástico . . . . . 17
1.6	Modelo Bilineal . . . . . 18
1.7	Modelo de de Ramberg-Osgood . . . . . 18
1.8	Modelo de Takeda . . . . . 19
1.9	Modelo de Iwan . . . . . 19
1.10	Modelo de Bouc-Wen . . . . . 20
1.11	Diagrama de rigideces secantes del Banco de California. Adaptado de [Iwan y Cifuentes, 1986]. . . . . 22
1.12	Diagrama de rigideces secantes del edificio de Servicios del Condado. Adaptado de [Iwan y Cifuentes, 1986] . . . . . 22
1.13	Comportamiento observado de las rigideces secantes con respecto a las deformaciones relativas. Gráfica obtenida con señales simuladas . . . . . 23
1.14	Comportamiento observado del amortiguamiento viscoso equivalente con respecto a las deformaciones relativas. Gráfica obtenida con señales simuladas . . . . . 23
1.15	Patrón de comportamiento de las rigideces secantes con respecto a las deformaciones relativas . . . . . 24
1.14	Patrón de comportamiento del amortiguamiento viscoso equivalente con respecto a deformaciones relativas . . . . . 24
2.1	El proceso de identificación de sistemas . . . . . 30
5.1	Modelos de comportamiento estructural. a) Marco completo. b) Modelo de esqueleto de pescado. c) Modelo de cortante . . . . . 64

5.2	Sistema real y modelo de esqueleto de pescado empleado en el ejemplo numérico .....	68
5.3	Excitación empleada en el ejemplo numérico .....	69
5.4	Historias de desplazamientos empleadas en el ejemplo numérico .....	69
5.5	Historias de velocidades empleadas en el ejemplo numérico .....	70
6.1	Instrumentación de sistemas suelo-estructura .....	76
6.2	Variables que participan en el modelo suelo-estructura .....	78
6.3	Elementos que participan en la primera etapa .....	80
6.4	Registro obtenido en campo libre .....	87
6.5	Registros de la respuesta del sistema estructural .....	87
6.6	Variación del parámetro $k$ y su variancia durante la primera (—) y la quinta (...) iteración global, para la primera etapa del caso 1 (ruido = 0%) .....	91
6.7	Comparación entre las historias de aceleraciones medidas (—) y estimadas (indistinguibles), caso 1 (ruido = 0%) .....	92
6.8	Comparación entre las historias de aceleraciones medidas (—) y estimadas (...), caso 3 (ruido = 10%) .....	93
6.9	Comparación entre las historias de aceleraciones medidas (—) y estimadas (...), caso 4 (ruido = 20%) .....	94
7.1	Historias empleadas en el ejemplo numérico .....	103
7.2	Ciclos histeréticos reales y estimados en el ejemplo numérico .....	104
8.1	Relación entre coordenadas instrumentadas y no instrumentadas .....	111
8.2	Rigideces reales y ficticias. a) Durante la fase intensa del sismo. b) Durante la fase final del sismo .....	113
8.3	El concepto de la rigidez secante .....	113
8.4	Area de semiciclo histerético .....	115
8.5	Procedimiento propuesto de estimación de los parámetros del modelo de deterioro .....	119
8.6	Modelo de edificio de concreto reforzado .....	120
8.7	Excitación utilizada en el ejemplo numérico .....	123
8.8	Aceleraciones registradas en el edificio .....	124
8.9	Desplazamientos obtenidos del edificio .....	125

8.10	Ciclos histeréticos de los tres bloques del edificio .....	126
8.11	Rigideces secantes reales (a) y predichas (b) para el bloque 1 .....	127
8.12	Rigideces secantes reales (a) y predichas (b) para el bloque 2 .....	128
8.13	Rigideces secantes reales (a) y predichas (b) para el bloque 3 .....	129
8.14	Amortiguamiento histerético real (a) y predicho (b) del bloque 1 .....	130
8.15	Amortiguamiento histerético real (a) y predicho (b) del bloque 2 .....	131
8.16	Amortiguamiento histerético real (a) y predicho (b) del bloque 3 .....	132
9.1	Problema de divergencia en método convencional. Fluctuación entre conjuntos de parámetros .....	138
9.2	Problema de divergencia en método convencional. Inestabilidad creciente. ....	138
9.3	Diagrama de flujo del procedimiento de predicción de respuesta propuesto .	139
9.4	Procedimiento de estimación de parámetros para predicción de respuesta ..	140
9.5	Procedimiento de cálculo de respuesta .....	141
9.6	Comportamiento de las estimaciones con el algoritmo de predicción propuesto .....	142
9.7	Derivas locales y acumuladas en los semiciclos histeréticos .....	143
9.8	Excitación utilizada en el caso 1 .....	145
9.9	Excitación utilizada en el caso 2 .....	145
9.10	Comparación entre desplazamientos reales (línea contínua) y predichos (línea descontínua) para el caso 1 .....	146
9.11	Comparación entre aceleraciones reales (línea contínua) y predichas (línea descontínua) para el caso 1 .....	147
9.12	Comparación entre desplazamientos reales (línea contínua) y predichos (línea descontínua) para el caso 2 .....	148
9.13	Comparación entre aceleraciones reales (línea contínua) y predichas (línea descontínua) para el caso 2 .....	149

# INTRODUCCIÓN

Conocer las propiedades que presentan las estructuras cuando son excitadas por acciones dinámicas es un problema que durante mucho tiempo ha atraído la atención tanto de ingenieros como de investigadores. La experiencia muestra que las diferencias entre las propiedades teóricas (calculadas con base en las dimensiones y las propiedades empleadas en el diseño) y las propiedades reales que presentan las estructuras cuando son excitadas pueden ser extraordinariamente grandes.

La identificación de sistemas es el proceso de construcción de modelos de sistemas reales a partir de los registros o señales de entrada y salida de dichos sistemas.

La identificación de sistemas aplicada a estructuras presenta particularidades notables, que crean la necesidad de desarrollar métodos especiales para la solución de sus problemas. Algunas particularidades importantes que presenta la identificación de sistemas aplicada a estructuras son las siguientes:

- a) Existe una cantidad reducida de registros entrada-salida de sistemas estructurales.
- b) Las estructuras son sistemas complejos cuyo modelado matemático en general no es fácil.
- c) Ante excitaciones severas tales como temblores intensos (y aun ante sismos de poca intensidad), los componentes de las estructuras pueden incursionar en el intervalo inelástico, presentándose un comportamiento no lineal, que hace que el modelo matemático del sistema se complique.

El desarrollo de la identificación de propiedades de estructuras se ha acelerado debido al mejoramiento y disponibilidad cada vez mayor de los equipos de cómputo, así como de los aparatos y técnicas de medición. Lo anterior ha provocado que cada vez existan más estructuras instrumentadas con el fin de estudiar su comportamiento.



Una buena parte de las técnicas de identificación que se emplean en ingeniería estructural tienen su origen en las áreas de la ingeniería de control y matemáticas, y algunas de estas técnicas se han tenido que adaptar para poder ser usadas de manera eficiente en la identificación de sistemas estructurales. A continuación se presenta una descripción cronológica de los principales trabajos publicados sobre identificación de sistemas estructurales.

Los primeros trabajos importantes sobre el tema aparecen publicados a principio de los setentas. En los artículos de Pilkey y Cohen (1972), Caravani y Thomson (1974), y Collins y cols. (1979), se presentan los primeros trabajos de identificación estructural en el dominio de la frecuencia. Caravani, Watson y Thomson (1977) publican el primer trabajo sobre identificación de estructuras de edificios en el dominio del tiempo. En el trabajo mencionado desarrollan un algoritmo de identificación basado en mínimos cuadrados recursivos, y lo aplican en la identificación de las propiedades de un modelo de edificio de cortante, para lo cual utilizan señales simuladas contaminadas con ruido gaussiano. Un poco antes, en 1975, Distefano y Rath (1975, 1975a) presentan los primeros trabajos sobre identificación de sistemas estructurales no lineales. En el trabajo mencionado presentan tres métodos de identificación secuencial basados en técnicas de minimización del error entre la respuesta medida y calculada. Aplican los algoritmos desarrollados en la identificación de modelos de estructuras de comportamiento bilineal histerético estable de un grado de libertad. Emplearon señales simuladas de respuesta y también registros experimentales del ensayo de un marco de acero. Carmichael (1979) emplea por primera vez el filtro de Kalman extendido [Kalman, 1960; Kalman y Bucy, 1961; Jazwinski, 1970] en problemas de identificación estructural. Al problema de estimación de los estados le adiciona, mediante el filtro de Kalman extendido, la estimación de los parámetros del modelo, para lo cual aumenta el tamaño del vector de estado con los parámetros que rigen el comportamiento dinámico del sistema. Aplicó el algoritmo desarrollado a problemas de dinámica estructural y de comportamiento de probetas de concreto ante carga sostenida. Utilizó señales simuladas de respuesta. En esta propuesta, la adaptabilidad del vector de estado a la

trayectoria de referencia no fue marcadamente estable debido a la aproximación en diferencias finitas que emplea en su formulación. Beck y Jennings (1980), trabajando en el dominio del tiempo, y McVerry (1980), en el dominio de la frecuencia, desarrollan métodos basados en técnicas de optimización para obtener los parámetros modales (frecuencias y porcentajes de amortiguamiento crítico) de modelos de estructuras y sistemas reales de múltiples grados de libertad con comportamiento lineal. Utilizan señales simuladas y registros sísmicos obtenidos en edificios. Udwardia y Jerath (1980) proponen un método para estimar en edificios las variaciones de las frecuencias y porcentajes de amortiguamiento de los primeros modos de vibración con respecto al tiempo. El método incorpora, además de los registros del sismo en estudio, los registros obtenidos antes y después de éste. Los parámetros que contribuyen a la fuerza de restauración se modelan mediante polinomios de Chebychev. Shinozuka, Yun e Imai (1982) aplican las técnicas de identificación de la variable instrumental y de máxima verosimilitud para identificar propiedades de estructuras lineales de múltiples grados de libertad modelados como sistemas ARMAX. Los algoritmos se aplicaron en la identificación de los coeficientes de las matrices que aparecen en la ecuación del movimiento de un modelo bidimensional de un puente suspendido. Hoshiya y Saito (1984) mejoran lo desarrollado por Carmichael (1979) al plantear el filtro de Kalman extendido con iteración global pesada; lo aplican a modelos estructurales lineales de múltiples grados de libertad y modelos bilineales estables de un grado de libertad. La solución planteada intenta obtener estabilidad y convergencia en las estimaciones mediante la multiplicación de la matriz de covariancia del error por un peso, a cada iteración total. Iwan y Cifuentes (1986) desarrollan un procedimiento de identificación de estructuras con elementos de deterioro distribuido. Consideran el sistema estructural compuesto por una colección de elementos lineales y elastoplásticos agrupados en serie. El método de identificación desarrollado se basa en ajustar los parámetros para que la diferencia entre la fuerza de restitución medida y la calculada sea mínima. Realizan aplicaciones en edificios modelados como sistemas de un grado de libertad bajo acción sísmica. Loh y Tsaur (1988) aplican el filtro de Kalman extendido para identificar propiedades de sistemas no lineales de un grado de libertad, para lo cual utilizan los modelos bilineal histerético estable y

Clough modificado [Mahin y Bertero, 1976]. Utilizan señales simuladas de respuesta y registros obtenidos en edificios. En todos los casos utilizan modelos de un grado de libertad. Sues, Mau y Wen (1988) desarrollan un procedimiento de identificación de estructuras que se comportan de acuerdo al modelo de Bouc y Wen [Bouc, 1967; Wen, 1976]. El método que proponen se basa en un enfoque clásico de mínimos cuadrados, donde los parámetros del sistema se obtienen al resolver un conjunto de ecuaciones lineales simultáneas. Aplican el método a un caso experimental donde se tiene como dato la fuerza de restitución real. Koh, See y Balendra (1991) proponen un enfoque de subestructuras en la identificación de sistemas lineales de múltiples grados de libertad. Utilizan el filtro de Kalman extendido como herramienta de identificación estructural, y lo aplican a modelos de estructuras de cortante, marcos y armaduras. Utilizan señales simuladas de respuesta estructural. Hoshiya y Sutoh (1992) proponen una estrategia para aplicar el filtro de Kalman extendido en la identificación de estructuras modeladas por elementos finitos. La estrategia propuesta consiste en multiplicar por un peso la matriz de covariancia en el error en las estimaciones a cada iteración local a fin de mejorar la convergencia. Lo aplican a un sistema lineal de un grado de libertad utilizando señales simuladas de respuesta. Peng y Iwan (1992) proponen un método para identificar estructuras de comportamiento no lineal, del tipo de deterioro distribuido, de múltiples grados de libertad. El método que proponen se basa en descomponer el comportamiento de la estructura en superposición cuasi-modal del sistema no lineal. El ajuste de los parámetros se basa en emplear sólo los picos de las historias de respuesta del sistema para minimizar la diferencia entre la respuesta medida y calculada. El método se aplica a modelos con respuestas simuladas y a estructuras ensayadas en laboratorio.

La descripción anterior no es exhaustiva y presenta sólo un panorama general de los principales trabajos publicados sobre identificación de propiedades de estructuras. Algunos de los trabajos mencionados han servido de guía para otras publicaciones no mencionadas aquí, donde simplemente se presentan pequeñas variantes al método original o a las aplicaciones.

Los objetivos que se plantean en el presente trabajo son los siguientes:

1. Presentar una revisión de las principales aplicaciones de la identificación de sistemas en la ingeniería estructural.
2. Proponer un modelo de comportamiento estructural original y su método de estimación de parámetros correspondiente, que permita obtener las propiedades dinámicas significativas del sistema cuando éste se somete a temblores intensos.
3. Desarrollar un procedimiento original de predicción de respuesta sísmica que proporcione, además de la respuesta, las propiedades que exhibirían las estructuras ante excitaciones futuras.

La presente tesis se divide en diez capítulos y dos apéndices.

En el Capítulo 1 se revisan algunos modelos de comportamiento estructural no lineal. Especial atención se dedica a los conceptos de daño y a los mecanismos de disipación de energía de los sistemas. En dicho capítulo se presenta (aportación de este trabajo) un modelo de comportamiento no lineal con base en el comportamiento sísmico observado de las estructuras.

En el Capítulo 2 se revisan los aspectos teóricos de la identificación de sistemas. Se presentan las expresiones del filtro de Kalman Extendido. Este filtro es la herramienta de estimación de parámetros que se utiliza a lo largo de todo el trabajo. Se revisan también los problemas más frecuentes encontrados en la identificación de sistemas y la manera de resolverlos.

En el Capítulo 3 se inicia la revisión de las aplicaciones de la identificación de sistemas en la ingeniería estructural. En este capítulo se estudia la identificación de sistemas en el

dominio del tiempo.

En el Capítulo 4 se ven conceptos relacionados con la identificación de sistemas en el dominio de la frecuencia.

En el Capítulo 5 se presenta la identificación de un modelo denominado de "esqueleto de pescado". Dicha representación mejora el comportamiento del modelo de cortante, pero trae consigo problemas en la estimación, los cuales son analizados.

En el Capítulo 6 se presenta (aportación de este trabajo) una estrategia para estimar los parámetros que participan en cierto tipo de sistemas suelo-estructura.

En el Capítulo 7 se revisan conceptos relacionados con la identificación de sistemas estructurales no lineales de un grado de libertad. Se estudia la estimación de parámetros de sistemas no lineales del tipo continuo y discontinuo.

En el Capítulo 8 se presenta (aportación de este trabajo) un método para estimar propiedades de estructuras no lineales de múltiples grados de libertad sujetas a cargas sísmicas intensas. En el método propuesto se toman en cuenta las condiciones de instrumentación presentes en la práctica.

En el Capítulo 9 se presenta (aportación de este trabajo) una técnica para predecir en forma óptima la respuesta de sistemas estructurales no lineales de múltiples grados de libertad.

En el Capítulo de Conclusiones y Recomendaciones se presentan las conclusiones generales del trabajo, además se dan recomendaciones que pueden ser útiles en investigaciones futuras. Se mencionan los aspectos que merecen mayor estudio.

En el Apéndice A se describe el método de la matriz de transición de estado para calcular la respuesta dinámica de sistemas.

En el Apéndice B se presenta la deducción de las expresiones del filtro de Kalman lineal, y su extensión para la identificación de sistemas no lineales.

# 1

## COMPORTAMIENTO SÍSMICO OBSERVADO Y MODELADO DE LAS ESTRUCTURAS

---

1.1 Introducción .....	10
1.2 Comportamiento durante la fase inicial del sismo .....	11
1.2.1 Energía disipada por ciclo .....	12
1.3 Comportamiento durante la fase intensa del sismo .....	14
1.3.1 Energía disipada por ciclo .....	15
1.3.2 Modelos de comportamiento estructural .....	17
1.3.3 Daño acumulado en las estructuras .....	21
1.4 Propuesta de modelo estructural .....	21
Simbología .....	27

---

Los objetivos de este capítulo son los siguientes:

1. Analizar el comportamiento sísmico de las estructuras en un contexto de identificación de sistemas.
2. Revisar los principales modelos propuestos de comportamiento estructural.
3. Proponer, con fines de identificación y predicción de respuesta sísmica, un modelo de comportamiento estructural con base en el comportamiento sísmico observado de las estructuras.

## 1.1 INTRODUCCIÓN

El comportamiento de las estructuras reales es complejo, sobre todo cuando su trabajo es en el intervalo inelástico. Las estructuras que conforman las obras civiles suelen estar constituidas por una gran cantidad de elementos interconectados entre sí; esto hace que su modelado en general no sea sencillo. El intentar construir modelos de sistemas reales requiere de la observación de su comportamiento. Lo anterior permite proponer un conjunto de modelos candidatos a representar al sistema real.

Durante un sismo fuerte las estructuras pueden sufrir daños importantes. El daño estructural se presenta a partir de que las amplitudes de la respuesta del sistema alcanzan cierta magnitud, y se puede incrementar en la medida que aumenten tanto las amplitudes mencionadas como el número de ciclos de carga y descarga.

En este trabajo, los sistemas estructurales que se estudian son los correspondientes a estructuras de edificios. En dichos sistemas se acepta que el sistema real, de parámetros distribuidos, se puede representar mediante un sistema de parámetros concentrados.

Se distinguen dos fases importantes del comportamiento: al inicio y durante la fase intensa de la excitación.



## 1.2 COMPORTAMIENTO DURANTE LA FASE INICIAL DEL SISMO

Al inicio del sismo, durante algunos segundos, los edificios presentan un comportamiento aproximadamente lineal, debido a que las respuestas no alcanzan valores importantes. Durante esta etapa, se puede considerar que las propiedades del sistema (masa, rigidez y amortiguamiento) permanecen prácticamente constantes.

En esta etapa se considera que el sistema se comporta de acuerdo con el siguiente modelo:

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = -MJ\ddot{x}_g \quad (1.1)$$

Donde  $M$  es la matriz de masa,  $C$  es la matriz de amortiguamiento,  $K$  es la matriz de rigidez del sistema.  $X$ ,  $\dot{X}$ ,  $\ddot{X}$ , son los vectores de desplazamientos, velocidades y aceleraciones respectivamente,  $J$  es un vector que toma en cuenta la direccionalidad de la excitación con respecto a los grados de libertad del sistema,  $\ddot{x}_g$  es la aceleración del suelo.

La matriz de rigidez  $K$  es una matriz simétrica, generalmente llena con diagonal principal pesada. Los elementos fuera de la diagonal principal (que son índices de acoplamiento entre los diferentes grados de libertad horizontales del sistema) decrecen conforme se alejan de ella.

La matriz de amortiguamiento  $C$  está relacionada con los mecanismos de disipación de energía del sistema. Las fuentes de disipación de energía de los sistemas reales son múltiples y variadas. El suponer que el amortiguamiento del sistema es viscoso es una simplificación matemática a un problema de complejidad superior. La simplificación anterior se acepta en el sentido de que se trata de un amortiguamiento equivalente y se considera, frecuentemente, que la matriz de amortiguamiento es proporcional a los valores de las matrices de masa y rigidez, es decir:

$$C = \alpha_1 M + \alpha_2 K \quad (1.2)$$

La consideración anterior es un caso particular de las condiciones que permiten que la matriz de amortiguamiento sea diagonalizable.

### 1.2.1 ENERGÍA DISIPADA POR CICLO

La respuesta en estado permanente de un sistema lineal, de un grado de libertad, ante una excitación armónica del tipo  $p_o \text{sen} \omega t$  está dada por la siguiente ecuación:

$$x(t) = x_o \text{sen}(\omega t - \phi) \quad (1.3)$$

Donde,  $\omega$  es la frecuencia angular de la excitación,  $x_o$  y  $\phi$  son amplitud y ángulo de fase de la respuesta respectivamente. En forma explícita,

$$x_o = \frac{\frac{p_o}{k}}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}} ; \phi = \tan^{-1} \frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$$

Donde,  $\zeta$ ,  $\omega_n$  y  $k$  son el porcentaje de amortiguamiento crítico, la frecuencia circular y la rigidez del sistema respectivamente.

Si  $f_D$  es la fuerza amortiguadora, la energía disipada en un ciclo se puede obtener como

$$\begin{aligned} E_D &= \int f_D dx = \int_0^{2\pi/\omega} (c\dot{x})\dot{x}dt = \int_0^{2\pi/\omega} c\dot{x}^2 dt \\ &= c \int_0^{2\pi/\omega} [\omega x_o \cos(\omega t - \phi)]^2 dt = \pi c \omega x_o^2 = 2\pi \zeta \frac{\omega}{\omega_n} k x_o^2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

La fuerza amortiguadora se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f_D &= c\dot{x}(t) = c\omega x_o \cos(\omega t - \phi) \\ &= c\omega \sqrt{x_o^2 - x_o^2 \text{sen}^2(\omega t - \phi)} \\ &= c\omega \sqrt{x_o^2 - [x(t)]^2} \end{aligned}$$

la ecuación anterior se puede reescribir como

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{f_D}{c\omega x_0}\right)^2 = 1 \quad (1.5)$$

La ecuación anterior es la de una elipse cuya área es igual a  $\pi c\omega x_0^2$ . Por lo tanto el área del ciclo es igual a la energía disipada.

Si se considera la fuerza de restauración total,  $V$ , se tiene

$$V = kx + c\omega\sqrt{x_0^2 - x^2} \quad (1.6)$$

La cual corresponde a la ecuación de una elipse rotada con centro en el origen (fig. 1.1), cuya pendiente (definida como la inclinación de la línea que une los puntos de máximo desplazamiento) equivale a la rigidez del sistema.

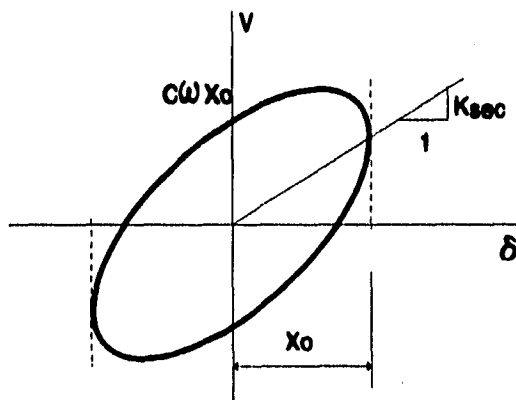


Fig. 1.1 Ciclo histérico en el intervalo lineal.  
Rigidez secante.

La equivalencia existente entre la energía disipada y el área de un ciclo histerético, para el intervalo de comportamiento lineal, se emplea posteriormente en el capítulo 8, donde se establece una equivalencia similar (modelo lineal equivalente), pero para el intervalo de comportamiento no lineal.

### 1.3 COMPORTAMIENTO DURANTE LA FASE INTENSA DEL SISMO

Conforme aumenta la intensidad de las aceleraciones del terreno, algunos elementos de la estructura alcanzan su resistencia elástica y fluyen; las características del movimiento sísmico son tales que las partes que fluyen de los elementos (trabes, columnas y/o muros) son una pequeña parte de los mismos y ubicadas normalmente en sus extremos. Lo anterior provoca un cambio (disminución) en la rigidez global del sistema. A medida que las aceleraciones se mantienen en cierto nivel o aumentan, el número de elementos con comportamiento inelástico puede aumentar, con un consecuente deterioro mayor en la rigidez del conjunto. Se puede considerar que el comportamiento del sistema durante la fase intensa es una sucesión de sistemas lineales en los cuales la rigidez de los mismos disminuye conforme la amplitud de la respuesta aumenta. En algunos sistemas (tal vez los menos), el comportamiento arriba descrito da lugar a ciclos de carga y descarga de forma más o menos constante (fig. 1.2.a); es decir, no existe degradación importante de las propiedades. En la mayoría de los casos, a cada nuevo ciclo el sistema o elemento presenta una rigidez menor; además no alcanza la misma resistencia del ciclo anterior, lo que implica deterioro tanto en rigidez como en resistencia (fig. 1.2.b). Un aspecto muy importante en el comportamiento de los sistemas estructurales no lineales son las derivas o deformaciones permanentes (fig. 1.3). Desde el inicio del comportamiento no lineal la deriva se hace presente y puede ser importante sobre todo en la fase de mayor intensidad.

Posterior a la fase intensa del temblor, se ha observado que existe una recuperación parcial de la rigidez de los elementos que presentaron fluencia, pero no se alcanza la rigidez inicial.

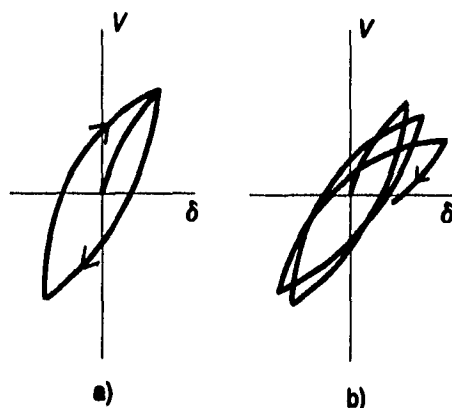


Fig. 1.2 a) Sistema histerético sin deterioro. b) Sistema histerético con deterioro.

### 1.3.1 ENERGÍA DISIPADA POR CICLO

Durante la fase intensa, la entrada de energía al sistema se incrementa. Ya dentro del sistema, la energía se libera en forma de deformaciones inelásticas (daño) y otras formas tales como calor en las juntas debido al proceso de carga y descarga, fricciones internas, fricciones entre elementos estructurales y no estructurales, apertura y cierre de microgrietas, etc. Estos efectos hacen que los ciclos histeréticos cambien en forma y en tamaño con respecto a los que se tienen en el intervalo lineal [Bertero y Bresler, 1969]. En general se presenta un incremento en el área de los ciclos, aunque en estructuras con un daño acumulado importante puede presentarse un adelgazamiento o estrangulamiento de éstos [Aoyama, 1964], provocado principalmente por la apertura y cierre de grietas en los elementos (fig. 1.4).

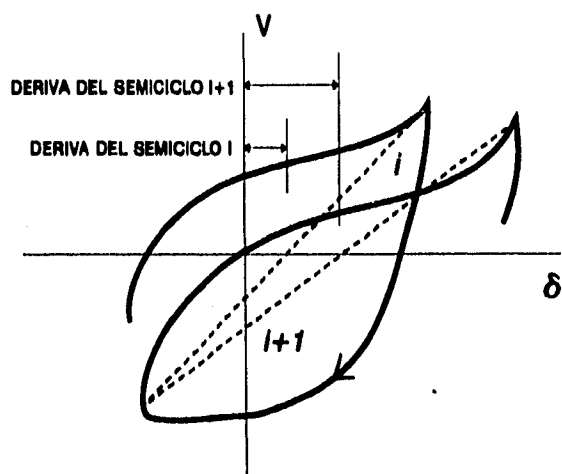


Fig. 1.3 Las derivas en los ciclos histeréticos.

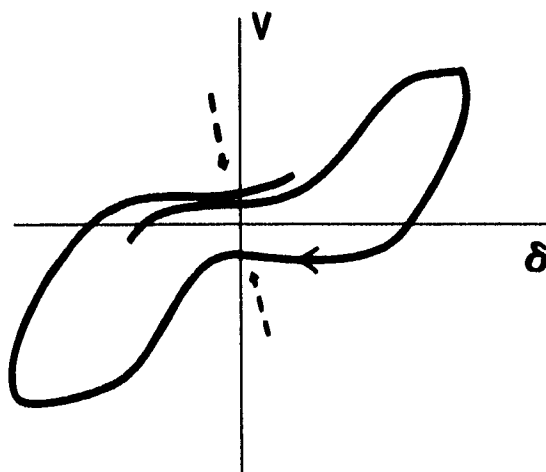


Fig. 1.4 Adelgazamiento de ciclo histerético por efecto del daño acumulado.

1.3.2 MODELOS DE COMPORTAMIENTO ESTRUCTURAL

Durante la fase intensa, el comportamiento del sistema no lineal se puede modelar como sigue:

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + G(X, \dot{X}) = -MJ\ddot{x}_g \quad (1.7)$$

Donde  $G(X, \dot{X})$  es la fuerza restitutiva del sistema. Dicha fuerza es función de los desplazamientos y velocidades en ese instante y además de la historia previa de deformaciones del sistema. Cada uno de los modelos de comportamiento no lineal propuestos recomienda ciertas reglas para representar dicha fuerza histerética. Los modelos propuestos varían desde muy simples, pero no muy realistas, hasta muy sofisticados, donde la interpretación de las reglas de carga y descarga es confusa. Sin embargo, ninguno de los modelos propuestos ha ganado gran aceptación entre los investigadores ya que ninguno ha mostrado total concordancia con los datos sísmicos reales. En las figuras 1.5 a 1.9 se presentan los diagramas esquemáticos de algunos de los más importantes modelos de comportamiento estructural no lineal.

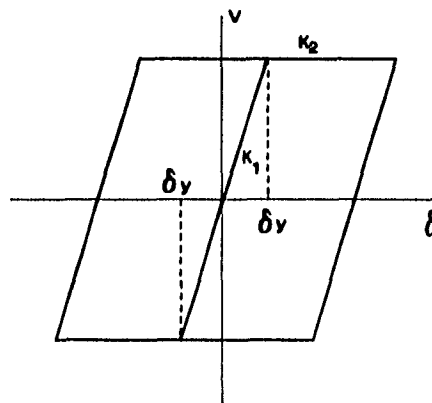


Fig. 1.5 Modelo elastoplástico.

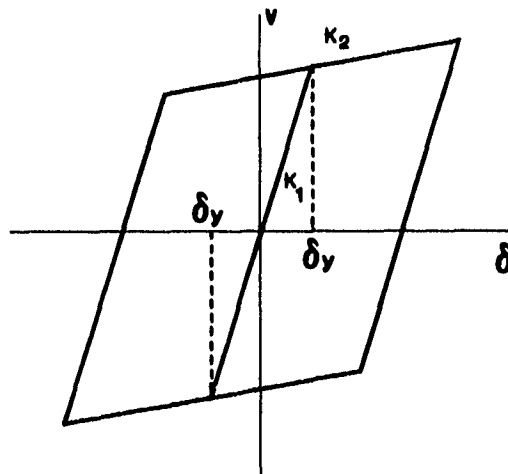


Fig. 1.6 Modelo Bilineal.

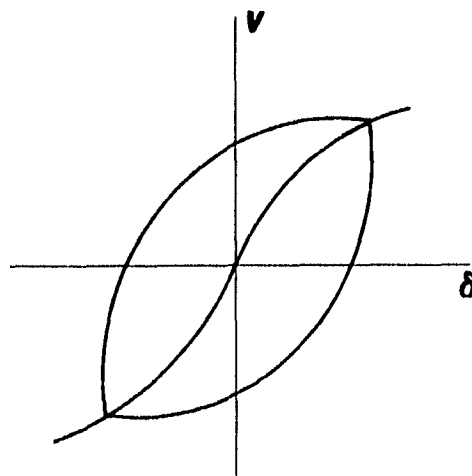


Fig. 1.7 Modelo de Ramberg-Osgood (1943).



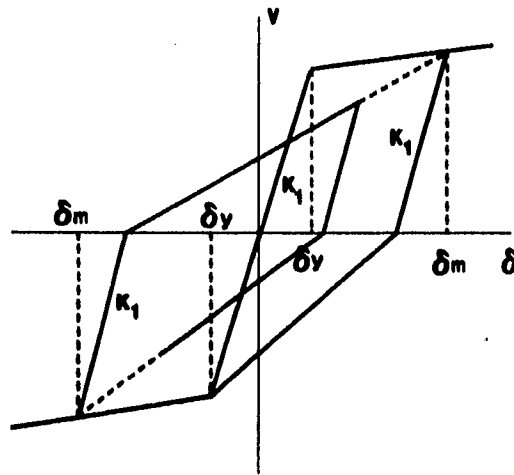


Fig. 1.8 Modelo de Takeda (1970).

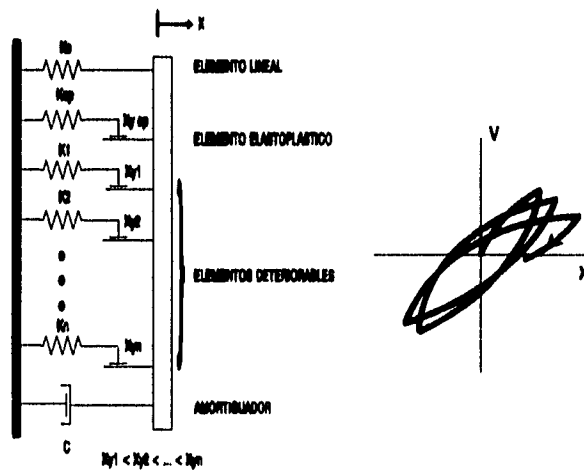


Fig. 1.9 Modelo de Iwan (1966).

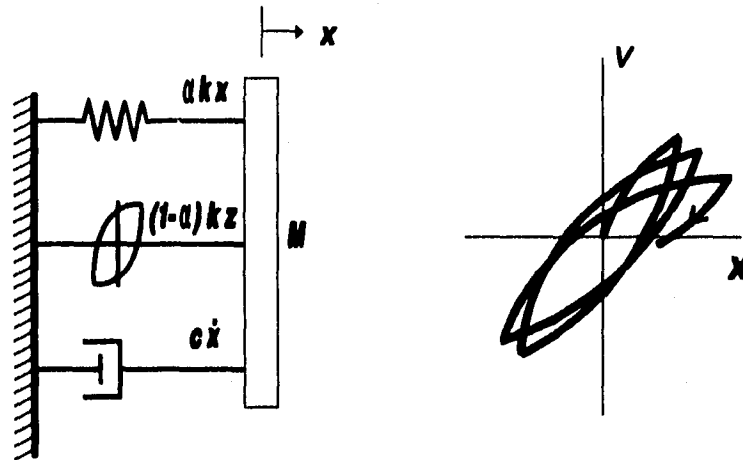


Fig. 1.10 Modelo de Bouc(1967)-Wen(1976).

El modelo de Bouc-Wen [Bouc, 1967, Wen, 1976] tiene la particularidad de que con la incorporación de una ecuación adicional (1.9) se introduce de manera directa el comportamiento histerético del sistema. Este hecho hace que se presente continuidad en la formulación analítica; es decir, se sigue una misma ley durante todo el proceso excitación-respuesta. En los demás modelos se van comparando a cada instante las condiciones de la respuesta para saber en que rama del diagrama fuerza de restitución-deformación se encuentra el sistema.

En el modelo de Bouc-Wen la ecuación que define el comportamiento del sistema es la siguiente:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \alpha kx + (1 - \alpha)kz = f(t) \tag{1.8}$$

donde

$$\dot{z} = \frac{A\dot{x} - v(\beta|\dot{x}| |z|^{n-1}z + \gamma\dot{x}|z|^n)}{\eta} \tag{1.9}$$

Los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $A$ ,  $v$ ,  $\eta$  y  $n$  determinan la forma del ciclo histerético y el nivel de degradación del sistema.

### 1.3.3 DAÑO ACUMULADO EN LAS ESTRUCTURAS

El efecto de las cargas en las estructuras es difícil de evaluar, sobre todo cuando se requiere establecer el grado de daño que la estructura ha sufrido. El daño en una estructura depende de muchos factores, principalmente del tipo de material con que está construída, del tipo de estructuración que tiene y del tipo de carga a la que ha sido sometida. La naturaleza aleatoria que presentan algunos de los factores anteriores son razón para que no se tenga actualmente una forma única de evaluar el daño en las estructuras. Las pruebas han mostrado [Park y Ang, 1985; Stephens y Yao, 1988] que el daño estructural es causado principalmente por dos variables: la incursión de la estructura o elemento estructural en grandes deformaciones y la inversión repetida de esfuerzos. La mayoría de los cuantificadores de daño propuestos son función de una o ambas de las variables anteriores; el predominio de alguna de ellas dependerá en general del tipo de estructura y del material con que esté construída.

### 1.4 PROPUESTA DE MODELO ESTRUCTURAL

Estudios realizados sobre sistemas reales [Iwan y Cifuentes, 1986] muestran (figs. 1.11 y 1.12) que las rigideces secantes de los sistemas estructurales sujetos a carga sísmica intensa (o de mediana intensidad, en algunos casos) varían en función de los desplazamientos pico a pico de los ciclos histeréticos, así como de la fatiga provocada por la repetición de ciclos de carga y descarga en la estructura. Resultados similares (fig. 1.13) a los presentados por Iwan y Cifuentes se han obtenido, por simulación, en esta investigación. Las señales simuladas se obtuvieron de un modelo estructural mediante el programa DRAIN-2D [Kanaan y Powell, 1973].

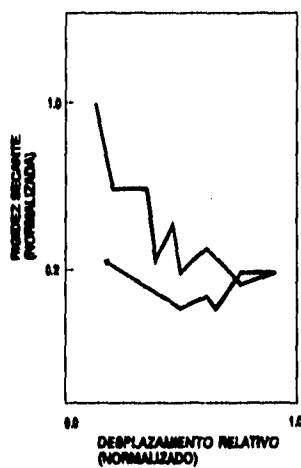


Fig. 1.11 Diagrama de rigideces secantes del Banco de California. Adaptado de [Iwan y Cifuentes, 1986].

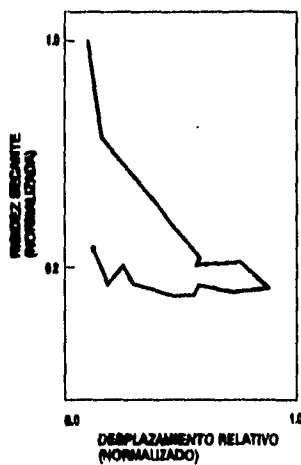


Fig. 1.12 Diagrama de rigideces secantes del edificio de Servicios del Condado. Adaptado de [Iwan y Cifuentes, 1986].

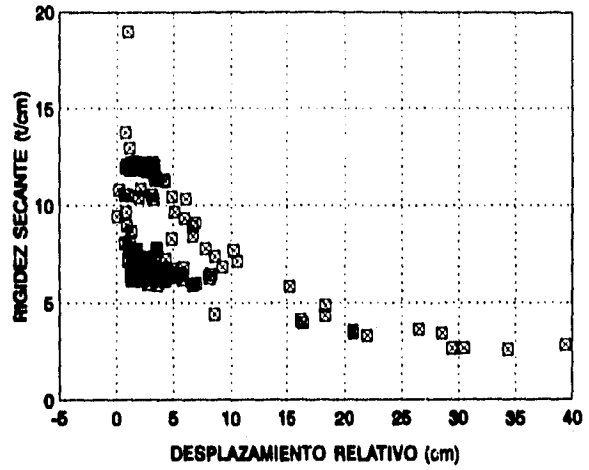


Fig. 1.13 Comportamiento observado de las rigideces secantes con respecto a las deformaciones relativas. Gráfica obtenida con señales simuladas.

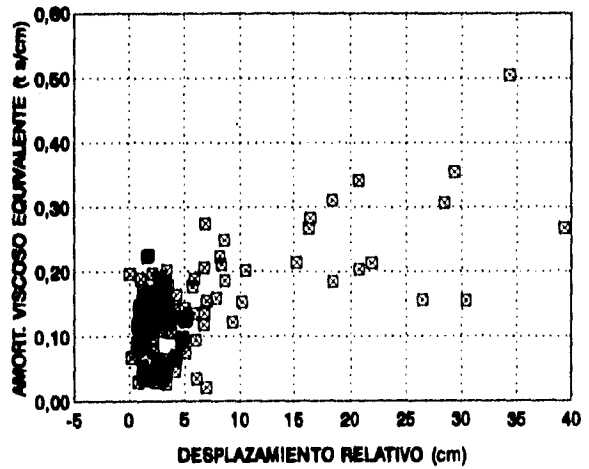


Fig. 1.14 Comportamiento observado del amortiguamiento viscoso equivalente con respecto a las deformaciones relativas. Gráfica obtenida con señales simuladas.

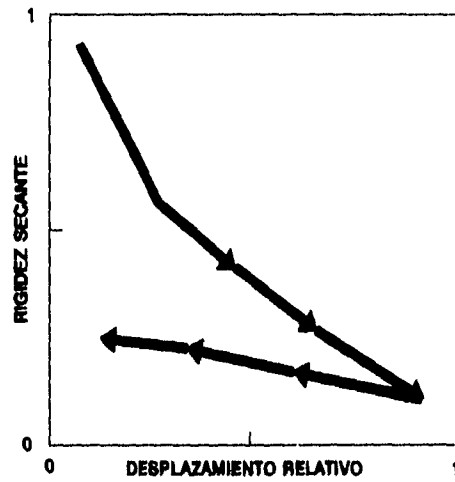


Fig. 1.15 Patrón de comportamiento de las rigideces secantes con respecto a las deformaciones relativas.

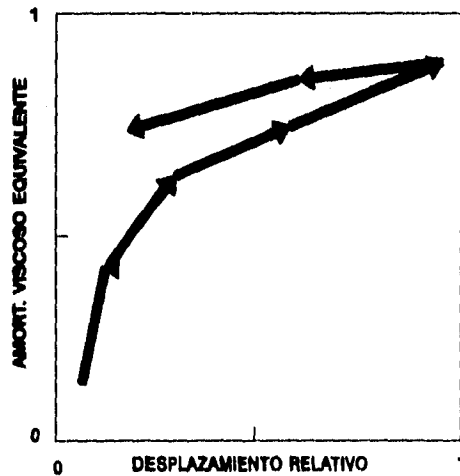


Fig. 1.16 Patrón de comportamiento del amortiguamiento viscoso equivalente con respecto a las deformaciones relativas.

En este trabajo se propone un modelo de comportamiento estructural para fines de identificación y predicción de respuesta. El modelo propuesto es un lineal equivalente [Jacobsen, 1930] que toma en cuenta el efecto del deterioro en la estructura. El modelo permite representar el comportamiento no lineal de un sistema en forma simplificada. Se toman en cuenta en su formulación sólo las principales propiedades que definen a un sistema estructural. Dichas propiedades son: la rigidez secante y el amortiguamiento viscoso equivalentes. En complemento a lo anterior, se toman en cuenta leyes de variación de las propiedades citadas con respecto a ciertas variables de la historia de respuesta. Las leyes referidas se proponen en su forma funcional con base en el comportamiento sísmico observado de las estructuras (figs. 1.11 a 1.14). Los patrones de comportamiento de las propiedades estructurales con respecto a las variables de respuesta (figs. 1.15 y 1.16) sugieren la forma funcional de las ecuaciones que rigen dichas relaciones. En esta investigación, se proponen para dichas ecuaciones las formas siguientes:

$$k = k_0 * e^{(a_k \Delta^{r_k} + b_k D^{s_k})} \quad (1.10)$$

$$c = c_0 * (1 + a_c \ln(1 + \Delta^{r_c})) * (1 + b_c \ln(1 + D^{s_c})) \quad (1.11)$$

Donde,  $k$  y  $c$ , son valores instantáneos de la rigidez y amortiguamiento equivalentes respectivamente.  $\Delta$  es la amplitud de deformación de medio ciclo de respuesta,  $D$  es el daño acumulado.  $k_0$  y  $c_0$  son los valores de  $k$  y  $c$  cuando la estructura todavía no presenta daño (fase inicial del sismo).  $D$  es función de los valores de las amplitudes de deformación de los medios ciclos previos:

$$D = \sum_{i=1}^N \Delta_i^q \quad (1.12)$$

$N$  es el número de semiciclos histeréticos acumulados.

Los parámetros  $a_{k,c}$ ,  $b_{k,c}$ ,  $r_{k,c}$ ,  $s_{k,c}$  y  $q$  se determinan para cada caso mediante un procedimiento de identificación de sistemas.

El modelo propuesto es para fines de identificación y predicción de respuesta sísmica. Es decir, para poder utilizarlo se tienen que determinar, mediante un proceso de identificación de sistemas (capítulo 8), los parámetros que contiene el modelo matemático. Para utilizarse en cálculos de respuesta se tiene que usar en combinación con un algoritmo de predicción de respuesta (capítulo 9), ya que los parámetros de la estructura se proponen como función de las propiedades de la respuesta, la cual no se conoce de antemano.



## SIMBOLOGÍA

$M$	matriz de masa
$K$	matriz de rigidez
$C$	matriz de amortiguamiento
$X, \dot{X}, \ddot{X}$	vectores de desplazamientos, velocidades, y aceleraciones
$J$	vector de direccionalidad de la excitación
$\ddot{x}_g$	aceleración del terreno
$\alpha_1, \alpha_2$	coeficientes de amortiguamiento proporcional
$x_0$	amplitud de la respuesta
$\phi$	ángulo de fase de la respuesta
$\omega$	frecuencia circular de la excitación
$p_0$	amplitud de la excitación
$\omega_n$	frecuencia circular del sistema
$\zeta$	porcentaje de amortiguamiento crítico
$E_D$	energía disipada por ciclo
$f_D$	fuerza amortiguadora
$V$	fuerza cortante
$\delta$	deformación
$G$	vector de fuerza histerética
$\alpha, \beta, \gamma, A, v, \eta, n$	parámetros empleados en el modelo de Bouc-Wen
$z$	variable auxiliar asociada al comportamiento histerético del modelo de Bouc-Wen
$k_0$	rigidez inicial
$c_0$	amortiguamiento inicial
$\Delta$	amplitud de deformación de medio ciclo de respuesta
$D$	coeficiente de daño estructural acumulado
$a, b, r, s, q$	parámetros del modelo de deterioro propuesto

# 2

## ASPECTOS TEÓRICOS DE LA IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS

---

2.1 Introducción .....	29
2.2 El filtro de Kalman extendido .....	31
2.3 Divergencia en las estimaciones .....	33
2.3.1 Problemas numéricos .....	33
2.3.2 Errores de modelado .....	34
2.3.3 Problemas de observabilidad .....	35
2.3.3.1 Observabilidad de sistemas lineales .....	35
2.3.3.2 Observabilidad de sistemas no lineales (linealizados) .....	37
Simbología .....	39

---

El objetivo del presente capítulo es revisar los conceptos generales de la identificación de sistemas con énfasis en la técnica del filtro de Kalman extendido (herramienta utilizada en la presente tesis). Se analizan con detalle los problemas que pueden presentarse en su aplicación, así como estrategias para evitarlos.

## 2.1 INTRODUCCIÓN

La identificación de sistemas trata el problema de la construcción de modelos matemáticos de éstos con base en información sobre respuestas observadas de los mismos. Conviene enfatizar que cualquier modelo, por sofisticado que sea, es siempre una aproximación a la realidad. La construcción de un modelo vía la identificación de sistemas involucra tres aspectos principales [Ljung, 1987]:

1. El registro de la información excitación-respuesta del sistema.
2. Un conjunto de modelos candidatos.
3. Una regla para elegir el mejor de los modelos del conjunto, mediante el uso de la información disponible.

El proceso de identificación de sistemas se resume en el diagrama de la figura 2.1.

Si el modelo es capaz de reproducir la información obtenida del sistema real, se dice que es adecuado.

Para la estimación de los parámetros existen varios algoritmos numéricos. Los que más se utilizan son: el método de mínimos cuadrados, el método de máxima verosimilitud, el filtro de Kalman extendido, y variaciones de los mismos. En el presente trabajo se emplea el filtro de Kalman extendido. Su empleo en esta tesis es debido a que el filtro de Kalman extendido ha mostrado gran flexibilidad y eficacia en la estimación de parámetros, sobre todo en problemas relacionados con sistemas no lineales [Imai y cols., 1989; Ghanem y cols., 1991]. En el apéndice B se presenta la deducción completa de este método.

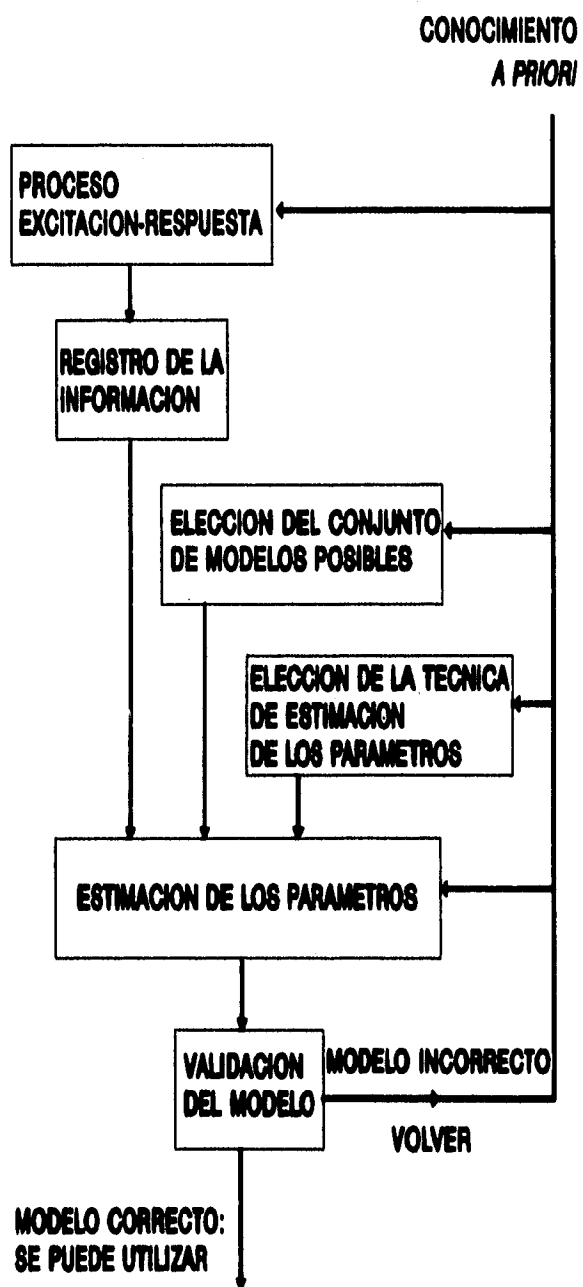


Fig. 2.1 El proceso de identificación de sistemas.

## 2.2 EL FILTRO DE KALMAN EXTENDIDO

El filtro de Kalman extendido [Jazwinski, 1970] es un algoritmo numérico que estima en forma óptima el vector de estado de un sistema no lineal. Su aplicación se basa en observaciones de las entradas (excitaciones) y salidas (respuestas) del sistema. Se presentan a continuación en forma condensada las expresiones que lo caracterizan.

Considere un sistema dinámico descrito por la siguiente ecuación continua de estado

$$\dot{X} = f(X, u(t); t) + Gw(t) \quad (2.1)$$

Si el sistema es observado en el instante  $t = k \Delta t$ , se tiene la ecuación de observaciones siguiente

$$Z(k) = h(X(k); k) + v(k) \quad (2.2)$$

donde:

$X(k)$  = vector de estado en el instante  $k \Delta t$ ,  $Z(k)$  = vector de observaciones,  $u(t)$  = vector de excitación,  $v(k)$  = vector de ruido en las observaciones con media igual a cero y matriz de covarianza  $R(k)$ , y  $w(k)$  = vector de ruido del sistema con media igual a cero y matriz de covarianza  $Q(k)$ .

El algoritmo consta de dos etapas: la de predicción y la de filtrado. El estado predicho  $\hat{X}(k+1|k)$  y su matriz de covarianza del error en la estimación  $P(k+1|k)$  se pueden evaluar como sigue

$$\hat{X}(k+1|k) = E\{X(k+1) | Z(1), Z(2), \dots, Z(k)\} \quad (2.3)$$

$E\{A|B\}$  es la esperanza condicional de A dado B.

$$\hat{X}(k+1|k) = \hat{X}(k|k) + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} f(X(t|k), u; t) dt \quad (2.4)$$

$$P(k+1|k) = \Phi(k+1|k)P(k|k)\Phi^T(k+1|k) + Q(k+1) \quad (2.5)$$

Donde

$$Q(k+1) = \int_k^{k+1} \Phi(k+1, \tau)G(\tau)Q(\tau)G^T(\tau)\Phi(k+1, \tau)d\tau \quad (2.5a)$$

Dada la ecuación (2.1), para que la ecuación (2.4) sea correcta se requiere que  $\Delta t \rightarrow 0$  y que  $E\{w(t)\} = 0$ .

$\Phi(k+1|k)$  es la matriz de transición de estado del modelo linealizado, la cual se puede calcular de manera aproximada [serie de Taylor truncada] como

$$\Phi(k+1|k) \approx I + \Delta t \left[ \frac{\partial f_i(X, u; t)}{\partial x_j} \right]_{X(t)=X(k|k)} \quad (2.6)$$

El estado filtrado  $\hat{X}(k+1|k+1)$  y la matriz de covariancia de su error  $P(k+1|k+1)$  se pueden estimar como

$$\hat{X}(k+1|k+1) = E\{X(k+1) | Z(1), Z(2), \dots, Z(k+1)\} \quad (2.7)$$

$$= \hat{X}(k+1|k) + K(k+1)[Z(k+1) - h(\hat{X}(k+1|k); k)] \quad (2.8)$$

$$P(k+1|k+1) = [I - K(k+1)H(k+1)]P(k+1|k)[I - K(k+1)H(k+1)]^T + K(k+1)R(k+1)K^T(k+1) \quad (2.9)$$

$K(k+1)$  es la matriz de ganancia de Kalman y se expresa como

$$K(k+1) = P(k+1|k)H^T(k+1)[H(k+1)P(k+1|k)H^T(k+1) + R(k+1)]^{-1} \quad (2.10)$$

$H(k)$  es la matriz de coeficientes linealizados de la ecuación de observaciones

$$H(k) = \left[ \frac{\partial h(X(k), u(k))}{\partial x_j} \right]_{X(k) = \hat{x}(k|k-1)} \quad (2.11)$$

### 2.3 DIVERGENCIA EN LAS ESTIMACIONES

Las técnicas empleadas para estimar los parámetros de un modelo pueden presentar divergencia durante su aplicación. Las causas principales que originan la divergencia son las siguientes:

1. Problemas numéricos
2. Errores de modelado
3. Problemas de observabilidad

Generalmente, los problemas anteriores afectan a todos los métodos de estimación de parámetros. Para determinados casos particulares, algunos métodos son más eficientes que otros. A continuación se describen cada uno de los problemas enumerados y la manera de evitarlos, cuando esto es posible.

#### 2.3.1 PROBLEMAS NUMÉRICOS

Si las etapas son largas, la acumulación de errores debidos al redondeo puede ser importante. No existe solución única para este problema; cada caso debe ser analizado de acuerdo con sus características. En el caso del filtro de Kalman, los errores de redondeo pueden provocar desviaciones importantes en los valores de la diagonal principal de la

matriz de covariancia del error en la estimación; de manera que, aunque los parámetros todavía estén lejos de los óptimos, la matriz mencionada reporta valores que indican lo contrario. Para aliviar este problema existen varias propuestas, entre las que destaca la presentada por Hoshiya y Saito en 1984. En dicha referencia recomiendan utilizar iteraciones globales pesadas. Es decir, se propone incrementar, multiplicando por un peso arbitrario, los valores de la diagonal principal de la matriz de covariancia del error en las estimaciones en cada iteración global. El fundamento teórico de este enfoque fue demostrado por Maruyama y cols. (1989). En el presente trabajo se emplea el enfoque arriba descrito. Adicionalmente, el empleo de doble precisión en los cálculos ayuda a evitar que se presente la divergencia.

### 2.3.2 ERRORES DE MODELADO

Los errores de modelado se presentan cuando la información que se proporciona al método de estimación sobre el sistema es errónea y no se considera como tal en la formulación. Es decir, el sistema real difiere en mucho del modelo utilizado y no se toman en cuenta estas diferencias o errores en la formulación del problema. Lo anterior trae consigo la divergencia y se puede hacer presente de varias formas. Entre las más comunes están: estimaciones sesgadas de los parámetros, inestabilidad numérica por imposibilidad de ajustar los parámetros al modelo propuesto, inestabilidad numérica por violación de las hipótesis de inicio del método de estimación. En algunos métodos, como es el caso del filtro de Kalman, es posible considerar en forma explícita las estadísticas del error en el modelo. Para evitar la divergencia por modelado es recomendable utilizar modelos representativos que consideren las variables más significativas de los sistemas reales. Si no se hace lo anterior, se tiene que considerar en forma explícita, mediante sus estadísticas, el error en el modelado. En el caso de divergencia por violar las hipótesis de inicio de los algoritmos de estimación se recomienda trabajar mediante aproximaciones sucesivas; es decir, se supone al principio que el sistema tiene un comportamiento muy simple, y se determinan las



variables correspondientes a este modelo de comportamiento. Para las siguientes etapas el modelo se va complicando (se le van agregando más variables), dando por hecho que se conocen las variables determinadas en las etapas previas y se corrigen en etapas posteriores.

### 2.3.3 PROBLEMAS DE OBSERVABILIDAD

El conocimiento de la observabilidad de un sistema es fundamental para saber si será posible estimar los estados del modelo.

Se dice que un sistema es observable cuando es posible estimar todas las variables del vector de estado a partir de las mediciones que se realizan del sistema.

#### 2.3.3.1 OBSERVABILIDAD DE SISTEMAS LINEALES

Sea un sistema de orden  $n$  con ecuación dinámica y de observación siguientes:

$$X(k+1) = \phi(k+1,k)X(k) \quad (2.12)$$

$$Z(k) = HX(k) \quad (2.13)$$

El objetivo es tratar de determinar  $X$  a partir de  $Z$ .

Ya que el vector de estado es de orden  $n$ , para su estimación se requieren  $n$  mediciones. Es decir, si se pretende estimar el estado en el instante  $i$  se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 Z(i) &= HX(i) \\
 Z(i+1) &= HX(i+1) = H\phi X(i) \\
 &\vdots \\
 Z(i+n-1) &= HX(i+n-1) = H\phi^{n-1}X(i)
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

por lo tanto

$$\begin{Bmatrix} Z(i) \\ Z(i+1) \\ \vdots \\ Z(i+n-1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H \\ H\phi \\ \vdots \\ H\phi^{n-1} \end{Bmatrix} X(i) = AX(i)
 \tag{2.15}$$

Si el vector de mediciones se denomina como  $b$ , la ecuación anterior se puede escribir como sigue

$$b = AX(i) \tag{2.16}$$

La ecuación (2.16) representa un sistema de ecuaciones lineales cuya solución presenta las siguientes variantes:

1. Las columnas de  $A$  son linealmente independientes y  $b$  se encuentra en el espacio columna de  $A$ ; es decir,  $b$  se puede expresar como la combinación lineal de las columnas de  $A$ . En este caso existe solución, y es única.
2. Las columnas de  $A$  son linealmente independientes, pero  $b$  no se encuentra en el espacio columna de  $A$ . En este caso no existe solución. Se puede obtener la "mejor" solución mediante mínimos cuadrados.
3. Las columnas de  $A$  son linealmente dependientes y  $b$  se encuentra en el espacio columna de  $A$ . En este caso existe un número infinito de soluciones.
4. Las columnas de  $A$  son linealmente dependientes y  $b$  no se encuentra en el espacio columna de  $A$ . La proyección de  $b$  en el espacio columna de  $A$  posee un número infinito de soluciones.

Por lo tanto, para que el sistema sea observable (y el vector de estado pueda determinarse en forma única) se requiere que las columnas de la matriz  $A$  sean linealmente independientes. Es decir, su rango debe ser igual al orden del vector de estado (rango completo). Si la condición se satisface, entonces a  $(\phi, H)$  se le llama par observable.

### 2.3.3.2 OBSERVABILIDAD DE SISTEMAS NO LINEALES (LINEALIZADOS)

Con la incorporación de los parámetros como variables aumentadas del vector de estado del sistema, el conjunto de ecuaciones que describe su comportamiento se convierte en no lineal. A esta no linealidad se le pueden agregar otros tipos de no linealidades, tales como la geométrica y/o la debida al tipo de material del que está constituido el sistema. El sistema puede ser lineal pero las ecuaciones de estado que lo representan dentro del filtro no lo son. En el filtro de Kalman extendido se emplean ecuaciones variacionales o de perturbación (ver apéndice B) para describir los cambios que se dan en el vector de estado. Una vez que se obtienen las variaciones en las variables de estado es posible actualizarlas para el instante en estudio. Se dice que un sistema no lineal (linealizado) es observable cuando, con las mediciones que se toman del mismo, es posible determinar las variaciones que presentan la totalidad de las variables de estado.

El concepto de observabilidad en sistemas no lineales (linealizados) es, en cierta forma, análogo al que se presenta en sistemas lineales, con la excepción de que en los sistemas linealizados el par observable está dado por

$$(F, H) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right)_{x = \hat{x}} \quad (2.17)$$

Donde  $f_i$  y  $h_i$  son ecuaciones de estado y de mediciones del sistema linealizado respectivamente.

En este trabajo continuamente se hace referencia a las matrices  $F$  y  $H$  mencionadas arriba. Dichas matrices son determinantes para la revisión de la observabilidad del sistema y para la estimación de los estados mediante el filtro de Kalman extendido.

De no satisfacerse la condición de observabilidad del sistema, la matriz  $A$ , arriba descrita, posee columnas linealmente dependientes y el número de vectores de estado que son solución se vuelve infinito. Esto quiere decir que el filtro ajusta los parámetros, pero el conjunto de parámetros que satisfacen el error mínimo no es único (en general se llega a diferentes soluciones dependiendo de las condiciones iniciales).

**SIMBOLOGÍA**

$X$	vector de estado
$\hat{X}$	vector de estado estimado
$f$	vector de funciones de estado
$G$	matriz que relaciona el vector de ruido en el modelo con el vector de estado
$w$	vector de ruido en el modelo
$v$	vector de ruido en las mediciones
$Z$	vector de mediciones
$h$	vector de funciones de medición
$k$	variable independiente
$u$	vector de excitación
$E\{X\}$	esperanza del vector $X$
$R$	matriz de covariancia del ruido en las mediciones
$Q$	matriz de covariancia del ruido en el modelo
$P$	matriz de covariancia del error en las estimaciones
$\Phi$	matriz de transición de estado
$K$	matriz de ganancia de Kalman
$H$	matriz de coeficientes linealizados de la ecuación de mediciones
$F$	matriz de coeficientes linealizados de la ecuación de estado

# 3

## IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

---

3.1 Estimación de rigideces y amortiguamientos .....	41
3.1.1 Ecuaciones de estado y de mediciones .....	42
3.1.2 Caso especial. Amortiguamiento proporcional .....	44
3.1.3 Ejemplos de estimación de rigideces y amortiguamientos .....	44
Ejemplo 1. Sistemas de cortante .....	45
Ejemplo 2. Sistemas acoplados .....	46
3.1.4 Problemas numéricos y de modelado .....	46
3.2 Estimación de parámetros modales .....	48
3.2.1 Ecuaciones de estado y de mediciones .....	48
3.2.2 Problemas numéricos y de modelado .....	51
Simbología .....	52

---

El objetivo de este capítulo es revisar algunas estrategias de identificación de sistemas lineales en el dominio del tiempo.

La identificación de sistemas en el dominio del tiempo utiliza, para la estimación de los parámetros, historias de excitación y respuesta precisamente en ese dominio.

El marco teórico de la estimación de parámetros en el dominio del tiempo es similar al de cualquier otro método de estimación de parámetros. Es decir, se trata de minimizar el error existente entre la respuesta real del sistema y la respuesta predicha de un modelo representativo, a los parámetros del modelo que logran esta minimización se les llama parámetros óptimos.

En sistemas estructurales lineales, normalmente interesa conocer los siguientes conjuntos de parámetros:

1. Rigideces y amortiguamientos.
2. Frecuencias, porcentajes de amortiguamiento y factores de participación de los modos de vibración.

### 3.1 ESTIMACIÓN DE RIGIDECES Y AMORTIGUAMIENTOS

En este caso, el modelo del sistema está dado por la siguiente expresión:

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = -MJ\ddot{x}_g \quad (3.1)$$

Si el modelo anterior se reduce a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{Y}_1 &= \dot{X} = Y_2 \\ \dot{Y}_2 &= \ddot{X} = -M^{-1}CY_2 - M^{-1}KY_1 - J\ddot{x}_g\end{aligned}$$

El vector de estado es el siguiente:

$$Y = \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix}$$

### 3.1.1 ECUACIONES DE ESTADO Y DE MEDICIONES

Los parámetros del sistema se incorporan dentro del vector de estado. Por lo tanto, el vector de estado aumentado es el siguiente:

$$Y = \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ k \\ c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{Bmatrix}$$

Donde  $k$  y  $c$  son vectores que contienen a los elementos de la matriz de rigidez y amortiguamiento respectivamente.

Las ecuaciones de estado, ahora, son las siguientes:

$$f(Y, t) = \begin{Bmatrix} \dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_2 \\ \dot{Y}_3 \\ \dot{Y}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_2 \\ -M^{-1}K(Y_3)Y_1 - M^{-1}C(Y_4)Y_2 - J\ddot{x}_g \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$



El sistema de ecuaciones diferenciales anterior es no lineal y describe la trayectoria de referencia del sistema.

Si se miden desplazamientos y velocidades del sistema, las funciones de medición son las siguientes:

$$h = \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix}$$

La ecuación de observaciones linealizada queda como sigue

$$Z = HY \quad (3.3)$$

La matriz  $H$  queda de la siguiente forma

$$H = [I_m | 0_{m \times (n-m)}]$$

Donde  $m$  es el número de variables de estado que se miden;  $n$  es el tamaño del vector de estado.

La matriz  $F$  de coeficientes linealizados, en este caso, se puede expresar como:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ -M^{-1}K(Y_3) & -M^{-1}C(Y_4) & -M^{-1}\frac{\partial K(Y_3)}{\partial Y_3}Y_1 & -M^{-1}\frac{\partial C(Y_4)}{\partial Y_4}Y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

En este caso, el vector de estado contiene las variables de respuesta (desplazamientos y velocidades) y los parámetros del modelo.

### 3.1.2 CASO ESPECIAL. AMORTIGUAMIENTO PROPORCIONAL

Se pueden suponer diferentes comportamientos estructurales cambiando el número y disposición de los elementos de las matrices  $K$  y  $C$ .

En ocasiones no es necesario determinar la matriz de amortiguamiento en su forma general; sino que se pueden obtener coeficientes de amortiguamiento proporcional; es decir,

$$C = \alpha M + \beta K \quad (3.5)$$

En este caso, la matriz  $F$  en forma explícita es la siguiente:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ -M^{-1}K(Y_3) & -M^{-1}C(Y_4) & -M^{-1}\frac{\partial K(Y_3)}{\partial Y_3}Y_1 & -Y_2 & -M^{-1}KY_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

### 3.1.3 EJEMPLOS DE ESTIMACIÓN DE RIGIDECES Y AMORTIGUAMIENTOS.

En las diferentes aplicaciones del filtro de Kalman extendido se distinguen dos fases importantes, que son las siguientes:

1. Definición de las ecuaciones dinámica y de mediciones, con sus respectivas matrices de coeficientes linealizados  $F$  y  $H$ , las cuales, aparte de su participación dentro del algoritmo numérico, permiten la revisión de la condición de observabilidad.
2. Empleo de las expresiones del filtro de Kalman extendido para la estimación del vector de estado a cada instante.

Se presentan a continuación dos ejemplos de estimación de rigideces y amortiguamientos. Se hace énfasis en la definición de las ecuaciones y matrices que intervienen en los cálculos y en las condiciones de observabilidad. Los aspectos numéricos, que constituyen la segunda fase del proceso arriba descrito (ver apéndice B), ya han sido presentados en otros trabajos [Hoshiya y Saito, 1984; Loh y Tsaur, 1988; Koh y cols, 1991] y no interesa repetirlos.

**EJEMPLO 1: SISTEMAS DE CORTANTE**

Suponga que se tiene un sistema estructural que se pretende modelar como un sistema de cortante con amortiguamiento proporcional. El sistema es un marco de un edificio con  $n$  grados de libertad, en los cuales se miden sólo los desplazamientos en todos los niveles. Se pretende estimar las rigideces de los  $n$  entrepisos así como los coeficientes de amortiguamiento proporcional.

En este caso, el vector de estado es el siguiente:

$$Y = [Y_1, Y_2, k_1, \dots, k_n, \alpha, \beta]^T$$

La dinámica del sistema está representada por la ecuación (3.2).

La matriz  $F$ , para este caso, se representa mediante la ecuación (3.4), donde la matriz de la columna 3, expresada en forma explícita, es la siguiente:

$$M^{-1} \frac{\partial K(Y_3)}{\partial k} Y_1 = M^{-1} \begin{bmatrix} x_1 & x_1 - x_2 & & & & \\ & x_2 - x_1 & x_2 - x_3 & & & \\ & & x_3 - x_2 & & & \\ & & & \dots & & \\ & & & & x_{n-1} - x_n & \\ & & & & x_n - x_{n-1} & \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

La matriz  $H$ , en este caso, es la siguiente

$$H = [I_n | 0_{2(n+1)}] \quad (3.8)$$

Con el empleo de las expresiones del filtro de Kalman extendido y las ecuaciones (3.2), (3.3), (3.6) y (3.8) arriba descritas es posible estimar los parámetros del modelo.

#### EJEMPLO 2: SISTEMAS ACOPLADOS

Si el sistema estructural es acoplado, la matriz de rigidez del sistema es llena, y el vector de estado, en este caso, es el siguiente:

$$X = [Y_1, Y_2, k_{11}, k_{21}, \dots, k_{n1}, \dots, k_{1n}, k_{2n}, \dots, k_{nn}, \alpha, \beta]^T$$

Las ecuaciones dinámicas y de mediciones del sistema, en su forma funcional, son las mismas que en el ejemplo anterior. En este caso, la matriz de la columna 3 de  $F$  queda como sigue

$$M^{-1} \frac{\partial K(Y_3)}{\partial k} Y_1 = M^{-1} \begin{bmatrix} x_1 & & & & & & \\ & x_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & x_1 & & & \\ & & & & x_2 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & x_n \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

#### 3.1.4 PROBLEMAS NUMÉRICOS Y DE MODELADO

Cuando se tiene un vector de estado de gran tamaño, las matrices que intervienen en la

formulación se vuelven numéricamente difíciles de manejar y se puede presentar divergencia en la estimación. Las razones son las siguientes:

1. La acumulación de los errores en los cálculos se vuelve importante.
2. La hipótesis de que las variaciones de la trayectoria del sistema con respecto a la trayectoria de referencia se pueden representar mediante un sistema de ecuaciones diferenciales lineales se viola frecuentemente.

Existen algunas propuestas para aliviar los problemas anteriores. Entre las más importantes se encuentran las siguientes:

1. Manejar sistemas reducidos. Es decir, los sistemas completos dividirlos en subsistemas o subestructuras y realizar la estimación de los parámetros por separado de cada una de ellas. En estos casos es necesario contar con los registros de todas las variables de respuesta que actúan en las interfases seleccionadas y cuidar que para cada una de las subestructuras resultantes se cuente con registros entrada-salida.
2. Realizar la estimación de los parámetros por acercamientos sucesivos. Es decir, se supone en un principio un comportamiento simplificado del modelo y se le van agregando parámetros por etapas, de manera que cuando el modelo esté completo, se esté razonablemente cerca de los parámetros óptimos. Por ejemplo, en el caso del ejemplo del sistema acoplado arriba analizado se puede suponer en principio que la matriz de rigidez es tridiagonal. En etapas posteriores se puede ir aumentando el número de bandas de la matriz de rigidez hasta tener el grado de complejidad que se requiera.

### 3.2 ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS MODALES

Otra opción para obtener parámetros estructurales en el dominio del tiempo es: utilizar la ecuación del movimiento en su versión diagonalizada. En este caso los parámetros por estimar son: las frecuencias, porcentajes de amortiguamiento y factores de participación efectivos de los diferentes modos de vibración del sistema.

#### 3.2.1 ECUACIONES DE ESTADO Y DE MEDICIONES

Si se diagonaliza la ecuación (3.1), se obtiene

$$\ddot{\eta} + 2\xi\omega\dot{\eta} + \omega^2\eta = -\psi^T M^{-1} \ddot{x}_g \quad (3.10)$$

donde

$$X = \psi \eta ; \quad \psi^T M \psi = I ; \quad \psi^T C \psi = [2\xi\omega] ; \quad \psi^T K \psi = [-\omega^2]$$

La ecuación del modo  $i$  es la siguiente

$$\ddot{\eta}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{\eta}_i + \omega_i^2\eta_i = -g_i\ddot{x}_g \quad (3.11)$$

Donde  $g_i$  es el factor de participación del modo  $i$ .

Si la ecuación (3.11) se multiplica por  $\psi_{ji}$  (= elemento de la matriz de modos asociado al modo  $i$  y al nivel  $j$ ), se obtiene:

$$\psi_{ji}\ddot{\eta}_i + 2\xi_i\omega_i\psi_{ji}\dot{\eta}_i + \omega_i^2\psi_{ji}\eta_i = -\psi_{ji}g_i\ddot{x}_g \quad (3.12)$$

Si  $\psi_{ji} \eta_i = u_{ji}$ , entonces

$$\ddot{u}_{ji} + 2\xi_i \omega_i \dot{u}_{ji} + \omega_i^2 u_{ji} = -p_{ji} \ddot{x}_g \quad (3.13)$$

$u_{ji}$  = contribución del modo  $i$  a la respuesta del nivel  $j$ ;  $p_{ji}$  = factor de participación efectivo de la contribución del modo  $i$  a la respuesta del nivel  $j$ .

Si se suman las contribuciones de todos los modos, se obtiene la respuesta en el nivel  $j$ , es decir

$$x_j = u_{j1} + u_{j2} + \dots + u_{jn} \quad (3.14)$$

El vector de estado (aumentado con los parámetros) de la contribución del modo  $i$  a la respuesta del nivel  $j$  es el siguiente:

$$(Y_j)_i = [u_{ji}, \dot{u}_{ji}, \omega_i, \xi_i, p_{ji}]^T = [y_1, y_2, y_3, y_4, y_5]^T$$

En este caso, las ecuaciones de estado son las siguientes:

$$\begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \\ \dot{y}_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{u}_{ji} \\ -2\xi_i \omega_i \dot{u}_{ji} - \omega_i^2 u_{ji} - p_{ji} \ddot{x}_g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = (\dot{Y}_j)_i \quad (3.15)$$

Si se consideran las contribuciones de todos los modos a la respuesta del nivel  $j$  se obtienen la ecuaciones de estado siguientes

$$f_j(Y, t) = \begin{Bmatrix} (\dot{Y}_j)_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (\dot{Y}_j)_n \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

Si se conocen los desplazamientos y velocidades en el nivel  $j$ , las funciones de medición son las siguientes:

$$h = \begin{Bmatrix} x_j \\ \dot{x}_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^n u_{ji} \\ \sum_{i=1}^n \dot{u}_{ji} \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

La ecuación linealizada de mediciones es la siguiente

$$Z = HY \quad (3.18)$$

La matriz  $H$ , de coeficientes linealizados, en este caso, es la siguiente

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz  $F_{ji}$  de la contribución del modo  $i$  a la respuesta del nivel  $j$ , es como sigue

La matriz  $F_j$ , de las contribuciones de todos los modos a la respuesta del nivel  $j$ , es la siguiente:



$$F_{ji} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_i^2 & -2\xi_i\omega_i & -2(\xi_i\dot{\mu}_{ji} + \omega_i\mu_{ji}) & -2\omega_i\dot{\mu}_{ji} & -\ddot{x}_g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$F_j = \begin{bmatrix} F_{j1} & & \\ & \ddots & \\ & & F_{jn} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

### 3.2.2 PROBLEMAS NUMÉRICOS Y DE MODELADO

Tratar de determinar, de manera directa, totalmente el vector de parámetros puede ser difícil debido a la cantidad de variables de que consta y a la posibilidad de violar la hipótesis de que las variaciones de la trayectoria del sistema con respecto a la trayectoria de referencia se puede representar mediante un sistema de ecuaciones diferenciales lineales; un procedimiento de acercamientos sucesivos es el siguiente:

1. Se estiman los parámetros considerando el sistema como de un grado de libertad.
2. Se fijan los parámetros del primer modo (identificados en el paso anterior) y se estiman los parámetros restantes, considerando el sistema como de dos grados de libertad.
3. Se liberan ambos parámetros modales y se realiza nuevamente la identificación considerando el sistema como de dos grados de libertad.
4. Para modos superiores se sigue un procedimiento análogo.

La estimación de las propiedades de los modos superiores (arriba del cuarto modo) es muy difícil de lograr, debido principalmente a problemas numéricos, provocados por la magnitud del vector de estado. Para estimar las propiedades del modo  $i$ , el vector de estado contiene  $5 \cdot i$  variables de estado.

**SIMBOLOGÍA**

$M$	matriz de masa
$K$	matriz de rigidez
$C$	matriz de amortiguamiento
$X, \dot{X}, \ddot{X}$	vectores de desplazamientos, velocidades, y aceleraciones
$J$	vector de direccionalidad de la excitación
$\ddot{x}_g$	aceleración del terreno
$Y$	vector de estado
$f$	vector de funciones de estado
$h$	vector de funciones de medición
$H$	matriz de coeficientes linealizados de la ecuación de mediciones
$F$	matriz de coeficientes linealizados de la ecuación de estado
$\alpha, \beta$	coeficientes de amortiguamiento proporcional
$\eta$	vector de coordenadas modales
$\psi$	matriz de formas modales
$\omega_i$	frecuencia del modo $i$
$\xi_i$	porcentaje de amortiguamiento crítico del modo $i$
$g_i$	factor de participación del modo $i$
$p_{ji}$	factor de participación efectivo del modo $i$ en el nivel $j$
$u_{ji}$	contribución del modo $i$ a la respuesta del nivel $j$
$Z$	vector de mediciones

# 4

## IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

---

4.1 Introducción .....	54
4.2 Receptancia, Movilidad e Inertancia .....	55
4.3 Ecuaciones de estado y de mediciones .....	56
4.5 Problemas numéricos .....	59
Simbología .....	61

---

El objetivo de este capítulo es revisar algunas estrategias de identificación de sistemas en el dominio de la frecuencia. Se analizan las condiciones de aplicabilidad y se hacen algunas recomendaciones para lograr eficiencia en las estimaciones.

#### 4.1 INTRODUCCIÓN

Las técnicas en el dominio de la frecuencia son muy utilizadas, sobre todo en estimaciones preliminares y no paramétricas. La razón es que permite, de una manera rápida, conocer la forma de las funciones de transferencia del sistema, y sus parámetros significativos tales como la frecuencia fundamental de vibración.

La respuesta de un sistema lineal, en el dominio de la frecuencia, se puede expresar en la siguiente forma:

$$X(\omega) = \Xi(\omega)G(\omega) \quad (4.1)$$

Donde  $X(\omega)$  y  $G(\omega)$  son las transformadas de Fourier de las funciones de respuesta y excitación respectivamente.  $\Xi(\omega)$  es la función de transferencia del sistema; la cual contiene toda la información acerca de éste. Ya que la respuesta del sistema se puede expresar por medio de diferentes variables (por ejemplo, desplazamientos, velocidades o aceleraciones), se pueden generar tantas funciones de transferencia como relaciones entre respuestas y excitaciones se establezcan.

La ecuación (4.1) supone linealidad entre entradas y salidas del sistema, y por lo tanto, con rigor, dicha ecuación sólo se deberían utilizar en la identificación de sistema lineales. No obstante, en la práctica se utiliza para estimar los cambios que se presentan en las características frecuenciales de los sistemas durante excitaciones severas. En estos casos la estimación de los parámetros del modelo se realiza por ventanas de tiempo.

La estimación de parámetros de sistemas lineales en el dominio de la frecuencia presenta las siguientes ventajas con respecto a su contraparte en el dominio del tiempo:

1. No requiere resolver un sistemas de ecuaciones diferenciales a cada instante. Esto permite flexibilidad en cuanto al número de puntos utilizados para realizar la estimación.
2. En el caso de trabajar por ventanas, es más eficiente este método, ya que no requiere de continuidad en el cálculo de las contribuciones de cada modo a la respuesta, tal como se necesita en el enfoque en el dominio del tiempo.
3. En el caso de identificación de sistemas no lineales por ventanas, las derivas o deformaciones permanentes tienen poca influencia en este tipo de análisis, mientras que en el dominio del tiempo son muy importantes.

#### 4.2 RECEPTANCIA, MOVILIDAD E INERTANCIA

En las funciones de transferencia se encuentran los parámetros que interesa estimar. En el presente trabajo se utilizan los siguientes tipos de funciones de transferencia (en todos los casos se considera como entrada al sistema la aceleración del terreno):

1. Receptancia. La salida del sistema es desplazamiento.

$$\Xi(\omega) = \frac{1}{(\bar{\omega}^2 - \omega^2) + i(2\xi\bar{\omega}\omega)} \quad (4.2)$$

$$i = \sqrt{-1}$$

2. Movilidad. La salida del sistema es velocidad.

$$\Xi(\omega) = \frac{i\omega}{(\bar{\omega}^2 - \omega^2) + i(2\xi\bar{\omega}\omega)} \quad (4.3)$$

3. Inertancia. La salida es aceleración.

$$\Xi(\omega) = \frac{-\omega^2}{(\bar{\omega}^2 - \omega^2) + i(2\xi\bar{\omega}\omega)} \quad (4.4)$$

#### 4.3 ECUACIONES DE ESTADO Y DE MEDICIONES

Para un sistema lineal sujeto a excitación sísmica, la función de transferencia de la contribución del modo  $i$  al desplazamiento del nivel  $j$  se expresa como sigue:

$$\Xi_{ji}(\omega) = \frac{-p_{ji}}{(\bar{\omega}_i^2 - \omega^2) + i(2\xi_i\bar{\omega}_i\omega)} \quad (4.5)$$

Donde  $\bar{\omega}_i$ ,  $\xi_i$  son la frecuencia y el porcentaje de amortiguamiento del modo  $i$  respectivamente;  $p_{ji}$  es el factor de participación efectivo el modo  $i$  en el nivel  $j$ .

Por lo tanto, la función de transferencia total de la excitación al nivel  $j$  es

$$\Xi_j(\omega) = \sum_{i=1}^n \Xi_{ji}(\omega) \quad (4.6)$$

El vector de estado por estimar es el siguiente

$$Y_{ji} = [\bar{\omega}_i, \xi_i, p_{ji}]^T = [y_1, y_2, y_3]^T \quad (4.7)$$

La ecuación de estado de la contribución del modo  $i$  a la respuesta del nivel  $j$  se puede expresar como sigue

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}_{k+1} \quad (4.8)$$

Lo anterior implica que el vector de estado es estacionario ( $k$  es la variable con respecto a la cual se realizan las estimaciones).

Las funciones de medición de la contribución del modo  $i$  al desplazamiento del nivel  $j$  son las siguientes:

$$h_{ji}(k) = \begin{Bmatrix} \text{Re}[\Xi_{ji}(k)] \\ \text{Im}[\Xi_{ji}(k)] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-y_3[y_1^2 - \omega^2(k)]}{[y_1^2 - \omega^2(k)]^2 + [2y_2y_1\omega(k)]^2} \\ \frac{2y_3y_2y_1\omega(k)}{[y_1^2 - \omega^2(k)]^2 + [2y_2y_1\omega(k)]^2} \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

En el caso de la movilidad se tienen las siguientes funciones:

$$h_{ji}(k) = \begin{Bmatrix} \text{Re}[\Xi_{ji}(k)] \\ \text{Im}[\Xi_{ji}(k)] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-2y_3y_2y_1\omega^2(k)}{[y_1^2 - \omega^2(k)]^2 + [2y_2y_1\omega(k)]^2} \\ \frac{-y_3\omega(k)[y_1^2 - \omega^2(k)]}{[y_1^2 - \omega^2(k)]^2 + [2y_2y_1\omega(k)]^2} \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

Para la inercia las funciones son las siguientes:

$$h_{ji}(k) = \begin{Bmatrix} \text{Re}[\Xi_{ji}(k)] \\ \text{Im}[\Xi_{ji}(k)] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{y_3\omega^2(k)[y_1^2 - \omega^2(k)]}{[y_1^2 - \omega^2(k)]^2 + [2y_2y_1\omega(k)]^2} \\ \frac{-2y_3y_2y_1\omega^3(k)}{[y_1^2 - \omega^2(k)]^2 + [2y_2y_1\omega(k)]^2} \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

En las funciones anteriores,  $\omega(k)$  es el valor discretizado de la frecuencia.

Debido a que las ecuaciones de estado son lineales y estacionarias, la matriz  $F$  es unitaria.

La matriz  $H$ , de coeficientes linealizados, para cada tipo de observación es como sigue:

Para la receptancia:

$$H_{ji} = \begin{bmatrix} \frac{-2y_1y_3\alpha_1 + y_3(y_1^2 - \omega^2(k))\alpha_2}{\alpha_1^2} & \frac{y_3(y_1^2 - \omega^2(k))\alpha_3}{\alpha_1^2} & \frac{-(y_1^2 - \omega^2(k))}{\alpha_1} \\ \frac{2y_2y_3\omega(k)\alpha_1 - 2y_1y_2y_3\omega(k)\alpha_2}{\alpha_1^2} & \frac{-2y_1y_2y_3\omega(k)\alpha_3}{\alpha_1^2} & \frac{2y_1y_2\omega(k)}{\alpha_1} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Para la movilidad:

$$H_{ji} = \begin{bmatrix} \frac{-2y_2y_3\omega^2(k)\alpha_1 + 2y_1y_2y_3\omega^2(k)\alpha_2}{\alpha_1^2} & \frac{2y_1y_2y_3\omega^2(k)\alpha_3}{\alpha_1^2} & \frac{-2y_1y_2\omega^2(k)}{\alpha_1} \\ \frac{-2y_1y_3\omega(k)\alpha_1 + y_3(y_1^2 - \omega^2(k))\alpha_2}{\alpha_1^2} & \frac{y_3\omega(k)(y_1^2 - \omega^2(k))\alpha_3}{\alpha_1^2} & \frac{-\omega(k)(y_1^2 - \omega^2(k))}{\alpha_1} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Para la inercia:

$$H_{ji} = \begin{bmatrix} \frac{2y_1y_3\omega^2(k)\alpha_1 - y_3\omega^2(k)(y_1^2 - \omega^2(k))\alpha_2}{\alpha_1^2} & \frac{-y_3\omega^2(k)(y_1^2 - \omega^2(k))\alpha_3}{\alpha_1^2} & \frac{\omega^2(k)(y_1^2 - \omega^2(k))}{\alpha_1} \\ \frac{-2y_2y_3\omega^3(k)\alpha_1 + 2y_1y_2y_3\omega^3(k)\alpha_2}{\alpha_1^2} & \frac{2y_1y_2y_3\omega^3(k)\alpha_3}{\alpha_1^2} & \frac{-2y_1y_2\omega^3(k)}{\alpha_1} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$



Donde,

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (y_1^2 - \omega^2(k))^2 + (2y_1y_2\omega(k))^2 \\ \alpha_2 &= 4y_1(y_1^2 - \omega^2(k)) + 8y_1y_2^2\omega^2(k) \\ \alpha_3 &= 8y_1^2y_2\omega^2(k)\end{aligned}$$

Si se toman en cuenta las contribuciones de todos los modos a la respuesta del nivel  $j$  entonces se tienen las siguientes ecuaciones

$$\begin{Bmatrix} Y_{j1} \\ \vdots \\ Y_{jn} \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} Y_{j1} \\ \vdots \\ Y_{jn} \end{Bmatrix}_{k+1} \quad (4.15)$$

En este caso, las funciones de medición son las siguientes:

$$h_j(k) = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^n \operatorname{Re}[\Xi_{ji}] \\ \sum_{i=1}^n \operatorname{Im}[\Xi_{ji}] \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

y  $H_j$  es como sigue

$$H_j = \begin{bmatrix} H_{j1} & & \\ & \ddots & \\ & & H_{jn} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

#### 4.5 PROBLEMAS NUMÉRICOS

Tratar de determinar totalmente el vector de parámetros de manera directa puede ser difícil, debido a la cantidad de variables de que consta y a la posibilidad de violar las hipótesis de

partida de la técnica de identificación; un procedimiento de acercamientos sucesivos es el siguiente:

1. Se estiman los parámetros considerando el sistema como de un grado de libertad. Se utilizan los valores del espectro de Fourier en la vecindad de la frecuencia natural de vibración.
2. Se fijan los parámetros del primer modo (identificados en el paso anterior) y se estiman los parámetros restantes, considerando el sistema como de dos grados de libertad. Se utiliza una banda de frecuencias más ancha que la empleada en la estimación del primer modo.
3. Se liberan ambos parámetros modales y se realiza nuevamente la identificación considerando el sistema como de dos grados de libertad.
4. Para modos superiores se sigue un procedimiento análogo.

**SIMBOLOGÍA**

$X(\omega)$	función de respuesta del sistema en el dominio de la frecuencia
$\Xi(\omega)$	función de transferencia del sistema
$G(\omega)$	función de excitación en el dominio de la frecuencia
$\omega$	variable independiente en las funciones de frecuencia
$\bar{\omega}_i$	frecuencia del modo $i$
$\xi_i$	porcentaje de amortiguamiento crítico del modo $i$
$\rho_{ji}$	factor de participación efectivo del modo $i$ en el nivel $j$
$Y$	vector de estado
$k$	variable con respecto a la cual se realizan las estimaciones
$h$	vector de funciones de medición
$H$	matriz de coeficientes linealizados de la ecuación de mediciones
$F$	matriz de coeficientes linealizados de la ecuación de estado

# 5

## MAS ALLÁ DE LOS SISTEMAS DE CORTANTE: IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS DE ESQUELETO DE PESCADO

---

5.1 Introducción .....	63
5.2 Modelo matemático de los sistemas de esqueleto de pescado .....	63
5.3 Ecuaciones de estado y de mediciones .....	65
5.4 Observabilidad del sistema .....	66
5.5 Ejemplo numérico .....	68
Simbología .....	73

---

El objetivo de este capítulo es analizar la identificación de sistemas denominados de "esqueleto de pescado".

### 5.1 INTRODUCCIÓN

La mayor parte de los estudios realizados sobre identificación de sistemas estructurales de múltiples grados de libertad [Hoshiya y Saito, 1984; Koh y cols., 1993; Udwadia y cols., 1984] suponen que éstos presentan un comportamiento de cortante. Es decir, consideran que no existe interacción entre entrepisos más allá de los contiguos.

El modelo de cortante es una simplificación del comportamiento de las estructuras reales. En este modelo se supone que las rigideces de las trabes son infinitamente rígidas. Obviamente este tipo de comportamiento, en algunos casos (por ejemplo en edificios con cierta cantidad de muros de cortante), está alejado de la realidad.

El modelo de esqueleto de pescado es, en cierta forma, un modelo intermedio entre el modelo de marco completo y el modelo de cortante (fig. 6.1), donde se ha quitado la restricción de que las trabes son infinitamente rígidas.

### 5.2 MODELO MATEMÁTICO DE LOS SISTEMAS DE ESQUELETO DE PESCADO

La ecuación del movimiento del sistema es la siguiente

$$\begin{bmatrix} M_{xx} & 0 \\ 0 & M_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{x\theta} \\ C_{\theta x} & C_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{x\theta} \\ K_{\theta x} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ \theta \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} M_{xx} & 0 \\ 0 & M_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \ddot{x}_g \quad (5.1)$$

En la ecuación (5.1), 1 es un vector cuyos elementos son iguales a la unidad.

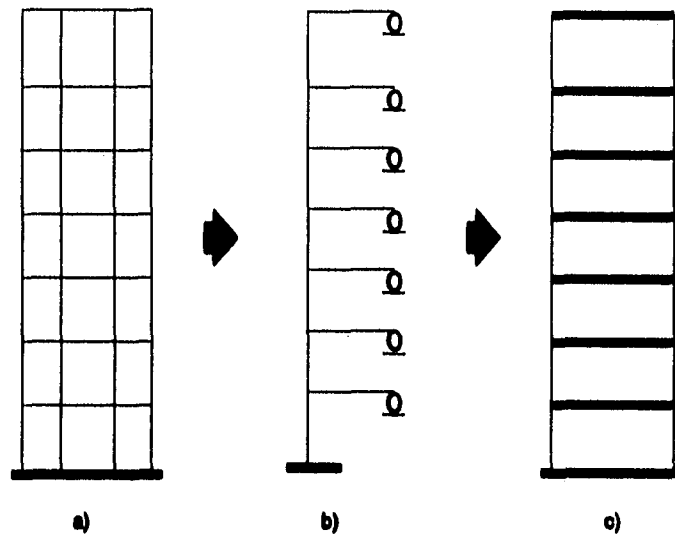


Fig. 5.1 Modelos de comportamiento estructural. a) Marco completo. b) Modelo de esqueleto de pescado. c) Modelo de cortante.

La inercia rotacional de los nodos, comparada con la inercia traslacional de los niveles del sistema, es prácticamente nula. Este hecho hace que exista una relación lineal entre coordenadas traslacionales y rotacionales en la estructura. Por lo tanto, la ecuación del movimiento queda como sigue

$$M_{xx}\ddot{X} + (C_{xx} - C_{x\theta}C_{\theta\theta}^{-1}C_{\theta x})\dot{X} + (K_{xx} - K_{x\theta}K_{\theta\theta}^{-1}K_{\theta x})X = -M_{xx}1\ddot{x}_g \quad (5.2)$$

En forma reducida

$$M\ddot{X} + C^*X + K^*X = -M1\ddot{x}_g \quad (5.3)$$

### 5.3 ECUACIONES DE ESTADO Y DE MEDICIONES

Con el propósito de reducir el número de parámetros por estimar, sólo se consideran coeficientes de amortiguamiento proporcional.

El vector de estado es el siguiente:

$$Y = [X, \dot{X}, k^c_1, \dots, k^c_s, k^t_1, \dots, k^t_s, \alpha, \beta]^T = [Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6]^T \quad (5.4)$$

Donde  $k^c_i$  es la rigidez de la columna equivalente del entrepiso  $i$ ;  $k^t_i$  es la rigidez de la trabe equivalente del nivel  $i$ ;  $\alpha$  y  $\beta$  son coeficientes de amortiguamiento proporcional;  $s$  es el número de niveles instrumentados.

Las ecuaciones de estado son las siguientes

$$f(Y, t) = \begin{Bmatrix} \dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_2 \\ \dot{Y}_3 \\ \dot{Y}_4 \\ \dot{Y}_5 \\ \dot{Y}_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_2 \\ -M^{-1}K'(Y_3, Y_4)Y_1 - M^{-1}C'(Y_3, Y_4, Y_5, Y_6)Y_2 - J\ddot{X}_g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.5)$$

Si se miden desplazamientos y velocidades del sistema, la ecuación de observaciones es la siguiente:

$$Z = HY \quad (5.6)$$

Donde  $H$  es

$$H = [I_q | 0_{q \times (n-q)}] \quad (5.7)$$

Donde  $q$  es el número de variables de estado que se miden;  $n$  es el tamaño del vector de estado.

La matriz  $F$  de coeficientes linealizados, en este caso, se puede expresar como sigue

$$F = \begin{Bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ -M^{-1}K(Y_3, Y_4) & -M^{-1}C(Y_5, Y_6) & -M^{-1}\frac{\partial K(Y_3, Y_4)}{\partial(Y_3, Y_4)}Y_1 & -M^{-1}\frac{\partial C(Y_5, Y_6)}{\partial(Y_5, Y_6)}Y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad (5.8)$$

#### 5.4 OBSERVABILIDAD DEL SISTEMA

Es difícil, en forma analítica, demostrar la observabilidad del sistema. Se estudia la observabilidad del sistema para un modelo de un grado de libertad. Para múltiples grados de libertad la observabilidad se revisa en forma numérica. Es decir, se verifica si los parámetros se obtienen en forma única.

Para un sistema de un grado de libertad, el modelo de esqueleto de pescado consta de una columna y una trabe solamente. En este caso el modelo matemático del sistema es el siguiente:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + (k_a + k_b)x = -m\dot{x}_g \quad (5.9)$$

Donde

$$k_a + k_b = k_{xx} - k_{x\theta}k_{\theta\theta}^{-1}k_{\theta x} \quad (5.10)$$

El vector de estado, para este caso, es el siguiente



$$Y = [x, \dot{x}, c, k_a, k_b]^T = [y_1, y_2, y_3, y_4, y_5]^T \quad (5.11)$$

Se tienen las siguientes ecuaciones de estado

$$f(Y, t) = \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \\ \dot{y}_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_2 \\ -m^{-1}y_3y_2 - m^{-1}(y_4 + y_5)y_1 - \ddot{x}_g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.12)$$

La matriz  $F$  de coeficientes linealizados, para este ejemplo, es la siguiente

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m}(k_a + k_b) & -\frac{c}{m} & \frac{\dot{x}}{m} & -\frac{x}{m} & -\frac{x}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Se puede apreciar que las columnas 4 y 5 de la matriz  $F$  son linealmente dependientes, y se encuentra que un número infinito de pares de valores de  $k_a$  y  $k_b$  reproducen la respuesta del sistema.

### 5.5 EJEMPLO NUMERICO

Se pretende obtener los parámetros del modelo de un marco de un edificio de 10 niveles de concreto reforzado ( $f'c = 250 \text{ kg/cm}^2$ ) sujeto a excitaciones en su base. El modelo del edificio en cuestión se supone que cuenta con instrumentos que registran la respuesta en los niveles 3, 7 y 10. La excitación que aparece en la fig. 5.3 se utiliza escalada por un factor arbitrario de 2. La respuesta de este sistema, obtenida por simulación mediante el programa DRAIN-2D [Kanaan y Powell, 1973], se aprecia en las figs. 5.4 y 5.5. El modelo de esqueleto de pescado, en este caso, está compuesto por tres columnas y tres traveses semiarticuladas (fig. 5.2).

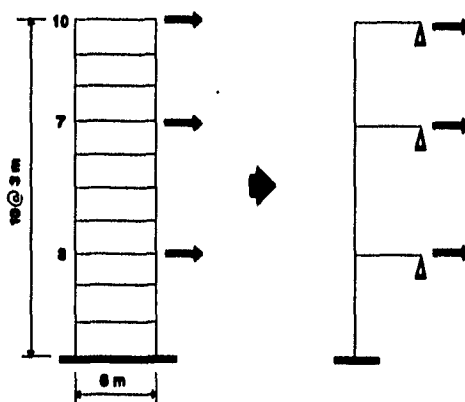


Fig. 5.2 Sistema real y modelo de esqueleto de pescado empleado en el ejemplo numérico.

Las propiedades del sistema real son las siguientes:

La masa en todos los niveles es igual a  $0.05 \text{ t s}^2/\text{cm}$ .

Traveses: sección rectangular de  $30 \times 60 \text{ cms}$ .

Columnas de sección rectangular con las siguientes dimensiones: entrepisos 1-3:  $80 \times 80 \text{ cms}$ ; entrepisos 4-7:  $60 \times 60 \text{ cms}$ ; entrepisos 8-10:  $50 \times 50 \text{ cms}$ .

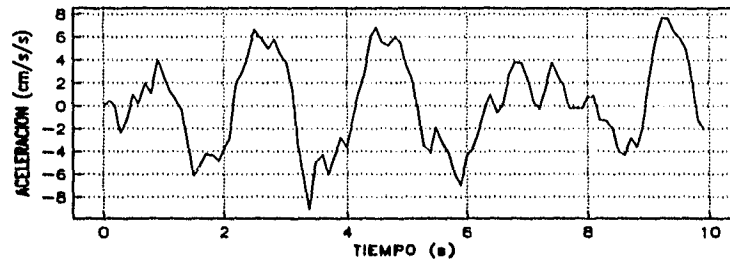


Fig 5.3 Excitación empleada en el ejemplo numérico.

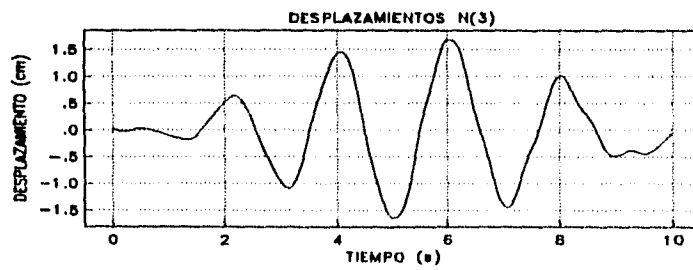
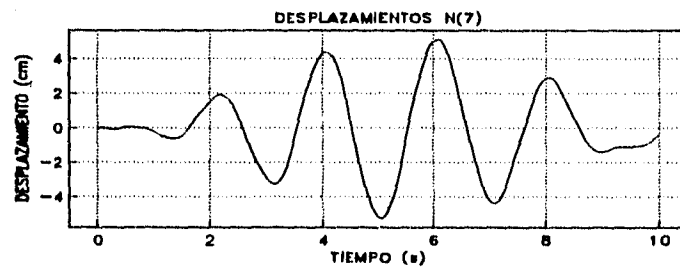
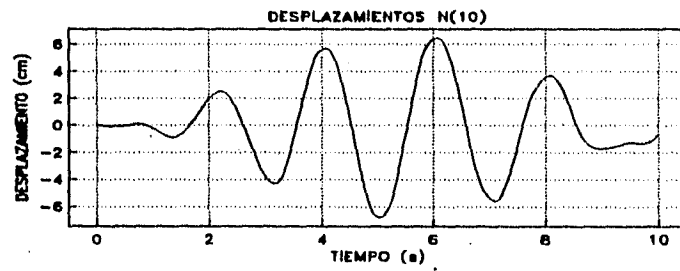


Fig. 5.4 Historias de desplazamientos empleadas en el ejemplo numérico.

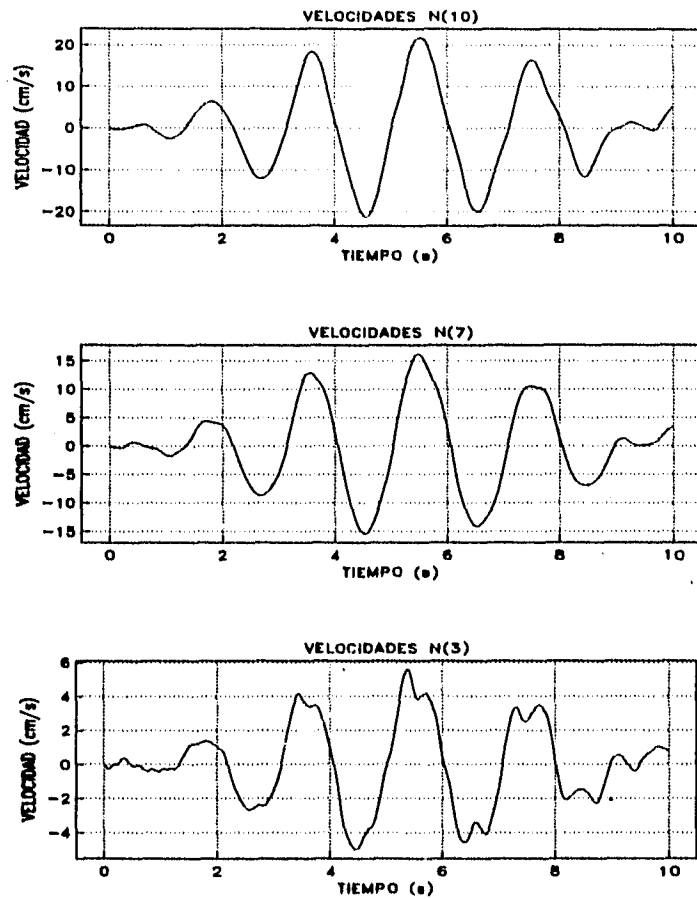


Fig. 5.5 Historias de velocidades empleadas en el ejemplo numérico.

Mediante el filtro de Kalman extendido, y empleando las ecuaciones de estado (5.5) y de mediciones (5.6) se realizaron tres estimaciones de los parámetros, con diferentes valores iniciales. Los resultados se muestran en la tabla 5.1.

Con los valores estimados de los parámetros, se procedió a calcular la respuesta del modelo, para los tres casos analizados. La respuesta medida y la respuesta predicha, para los tres casos, son prácticamente iguales.

Tabla 5.1 Resultados de la estimación.

CASOS	RIGIDECES INICIALES	RIGIDECES ESTIMADAS
1	14,12,11,11.5,11.5,11.5	12.8,4.5,4.6,130.0,72.5,34.4
2	24,2,1,111.5,111.5,111.5	12.6,5.2,5.5,141.0,35.35,133.0
3	50,42,31,51.5,51.5,51.5	25.5,6.5,4.0,40.5,57.7,10.4

Se concluye que el sistema es no observable. Existe un número infinito de conjuntos de parámetros que generan la misma respuesta.

Las matrices condensadas de rigidez que se obtienen con los parámetros estimados, para cada uno de los casos, son las siguientes:

$$M^{-1}K^*_1 = \begin{bmatrix} 116.25 & -37.35 & 3.88 \\ -37.35 & 56.65 & -25.72 \\ 10.46 & -69.32 & 60.09 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1}K^*_2 = \begin{bmatrix} 118.25 & -43.95 & 8.96 \\ -43.95 & 78.02 & -41.11 \\ 24.15 & -110.79 & 89.33 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1}K^*_3 = \begin{bmatrix} 176.85 & -61.69 & 7.32 \\ -61.69 & 72.43 & -32.00 \\ 19.71 & -86.24 & 71.37 \end{bmatrix}$$

Si se calculan las frecuencias y modos de vibración para las estructuras resultantes de las estimaciones, se tiene lo siguiente:

$$\omega_1^2 = \begin{Bmatrix} 10.7891 \\ 79.76 \\ 142.46 \end{Bmatrix} ; \quad \phi_1 = \begin{bmatrix} 0.18 & 0.40 & 0.74 \\ 0.59 & 0.31 & -0.47 \\ 0.79 & -0.86 & 0.49 \end{bmatrix}$$

$$\omega_2^2 = \begin{Bmatrix} 10.72 \\ 95.24 \\ 179.63 \end{Bmatrix} ; \quad \phi_2 = \begin{bmatrix} 0.18 & 0.63 & 0.46 \\ 0.59 & 0.18 & -0.50 \\ 0.78 & -0.75 & 0.73 \end{bmatrix}$$

$$\omega_3^2 = \begin{Bmatrix} 10.81 \\ 96.11 \\ 213.73 \end{Bmatrix} ; \quad \phi_3 = \begin{bmatrix} 0.19 & 0.33 & 0.81 \\ 0.59 & 0.33 & -0.44 \\ 0.78 & -0.88 & 0.38 \end{bmatrix}$$

Se observa que las frecuencias fundamentales y sus formas modales, en los tres casos, son prácticamente iguales. Esto significa que, si la respuesta traslacional del sistema está fuertemente influenciada por el primer modo (como casi siempre sucede), no es posible estimar en forma única los parámetros del sistema. En pocas palabras, al modelo le "sobran" parámetros para reproducir la respuesta del sistema y por lo tanto tiene muchas opciones (un número infinito) para combinarlos. Todos los sistemas resultantes presentan las mismas propiedades en su modo fundamental.

**SIMBOLOGÍA**

$M$	matriz condensada de masa
$K'$	matriz condensada de rigidez
$C'$	matriz condensada de amortiguamiento
$X, \dot{X}, \ddot{X}$	vectores de desplazamientos, velocidades, y aceleraciones
$\{1\}$	vector de unos
$\ddot{x}_g$	aceleración del terreno
	rigidez de la columna equivalente del entrepiso $i$
$k_i'$	rigidez de la trabe equivalente del nivel $i$
$s$	número de niveles instrumentados
$q$	número de variables de estado que se miden
$n$	tamaño del vector de estado
$Y$	vector de estado
$\alpha, \beta$	coeficientes de amortiguamiento proporcional
$f$	vector de funciones de estado
$F$	matriz de coeficientes linealizados de la ecuación de estado
$H$	matriz de coeficientes linealizados de la ecuación de mediciones
$Z$	vector de mediciones
$\omega_i$	vector de frecuencias para el caso $i$
$\Phi_i$	matriz de formas modales para el caso $i$

# 6

## IDENTIFICACIÓN DE CIERTO TIPO DE SISTEMA SUELO-ESTRUCTURA

---

6.1 El efecto de la interacción suelo-estructura .....	75
6.2 Modelo matemático del sistema suelo-estructura .....	77
6.3 Procedimiento de identificación propuesto .....	78
6.3.1 Primera Etapa. Estimación de los parámetros de la estructura .....	79
6.3.2 Segunda Etapa. Estimación de los parámetros del suelo .....	81
6.4 Ejemplo numérico .....	83
Simbología .....	95

---



El objetivo de este capítulo es presentar una estrategia para estimar los parámetros dinámicos que intervienen en la interacción suelo-estructura, modelada por medio de dos grados de libertad adicionales (traslación y rotación) en la base de la estructura. El método propuesto opera en dos etapas, dividiendo el sistema en subestructuras complementarias. Se utiliza el filtro de Kalman extendido con iteración global pesada como herramienta de identificación estructural. Se aplica a un sistema estructural utilizando señales simuladas de respuesta del mismo ante excitación sísmica. Se analiza la eficiencia del método ante diferentes niveles de ruido presentes en las señales.

### 6.1 EL EFECTO DE LA INTERACCIÓN SUELO-ESTRUCTURA

Se dice que existe el fenómeno interacción suelo-estructura, cuando los movimientos que se presentan en cualquier punto en la frontera entre el suelo y la estructura difieren de los que se tendrían en ese punto en el campo libre, si no existiese la estructura. El fenómeno de la interacción por lo general siempre se presenta, pero no siempre se considera, debido principalmente a que su introducción complica el modelo matemático y en algunos casos el modelo sin considerar la interacción da resultados adecuados desde el punto de vista práctico. La interacción suelo-estructura se presenta con mayor notoriedad en edificios desplantados en terreno blando, lo que hace que para estos casos la suposición de empotramiento de la estructura no sea válido y sea necesario considerar la flexibilidad de la base en el modelado del sistema en cuestión. Un tratamiento riguroso de la interacción suelo-estructura [Wolf, 1985] considera que ésta se compone de dos efectos, la interacción cinemática y la interacción inercial; en el presente trabajo se considera sólo el efecto de la interacción inercial.

Para la identificación de las propiedades de los sistemas suelo-estructura se requiere registrar los movimientos en ciertas partes del mismo. En el procedimiento que se propone, se supone que se cuenta con los siguientes registros (fig. 6.1):

1. Registro de aceleraciones en campo libre.
2. Registro de aceleraciones horizontales en la base de la estructura.
3. Registros de aceleraciones verticales a ambos lados del eje rotación (con respecto a la base) del edificio.
4. Uno o varios registros en la superestructura del edificio.

Las aceleraciones rotacionales de la base de la estructura se pueden obtener de manera indirecta utilizando dos acelerógrafos triaxiales colocados separados en la base de la estructura, como se muestra en la fig. 6.1. Las aceleraciones rotacionales se obtienen en función de las aceleraciones verticales registradas en la base de la estructura y su distancia al eje de rotación de la misma.

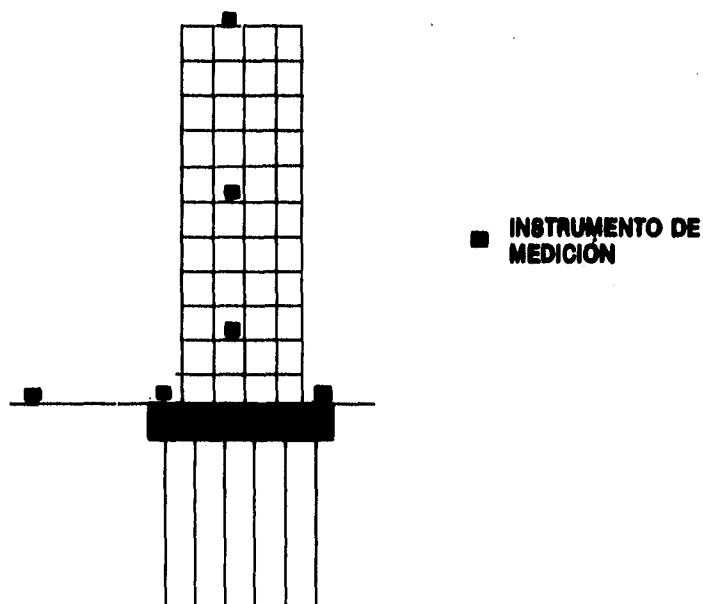


Fig. 6.1 Instrumentación de sistemas suelo-estructura.

## 6.2 MODELO MATEMÁTICO DEL SISTEMA SUELO-ESTRUCTURA

El modelo empleado, cuyo esquema se muestra en la figura 6.2, se rige por la ecuación de equilibrio siguiente:

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = -MJ\ddot{x}_g \quad (6.1)$$

$$M = \begin{bmatrix} M_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & \dots & 0 & M_1 d_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M_n & M_n d_n \\ 0 & M_1 d_1 & \dots & M_n d_n & I_g + \sum M_i d_i^2 \end{bmatrix}_{(n+2) \times (n+2)} ; C = \begin{bmatrix} C_h + C_{01} & \dots & C_{0n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & \dots & C_{nn} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & C_r \end{bmatrix}_{(n+2) \times (n+2)}$$

$$K = \begin{bmatrix} K_h + K_{01} & \dots & K_{0n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K_{n0} & \dots & K_{nn} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & K_r \end{bmatrix}_{(n+2) \times (n+2)} ; X = \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_n \\ Y \end{bmatrix}_{n+2} ; J = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{n+2}$$

Donde:  $M$  = Matriz de masa de la estructura,  $K$  = Matriz de rigidez,  $C$  = Matriz de amortiguamiento,  $\ddot{x}_g$  = aceleración del terreno en campo libre,  $M_0$  = masa del sistema suelo-cimiento que interviene en la interacción,  $M_i$  = masa del nivel  $i$  en la estructura,  $I_g$  = inercia rotacional del sistema suelo-cimiento,  $K_{ij}$  = elemento de la matriz de rigidez de la estructura,  $K_h$  = rigidez traslacional del suelo,  $K_r$  = rigidez rotacional del suelo,  $C_{ij}$  = elemento de la matriz de amortiguamiento,  $C_h$  = amortiguamiento traslacional del suelo,  $C_r$  = amortiguamiento rotacional del suelo.

Se considera que la rigidez de la losa de cimentación es infinita en comparación con la rigidez de la estructura y la rigidez del suelo que la soporta. Además se considera que la estructura y el suelo están siempre en contacto.

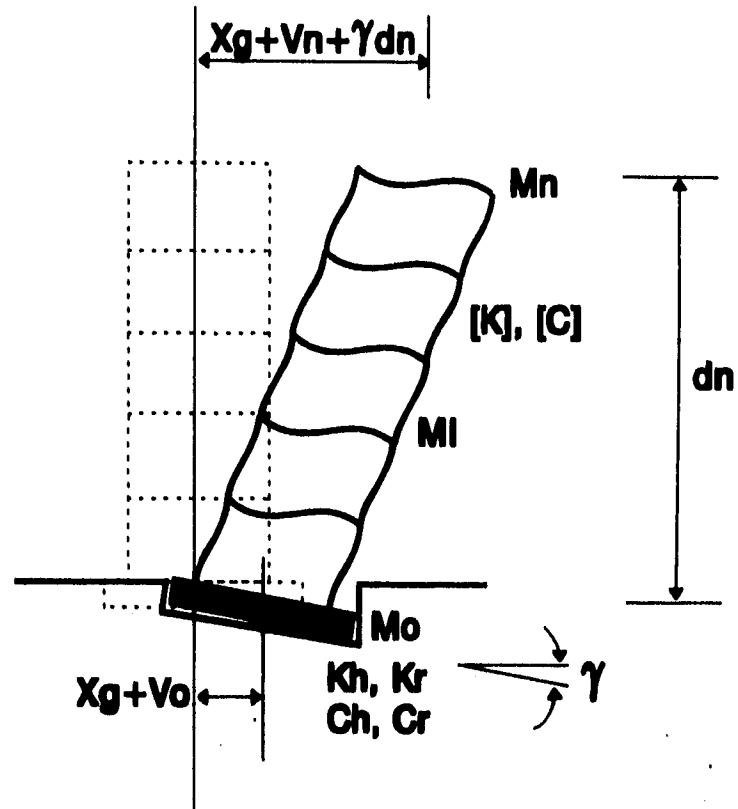


Fig 6.2 Variables que participan en el modelo suelo-estructura.

### 6.3 PROCEDIMIENTO DE IDENTIFICACIÓN PROPUESTO

Se propone un método basado en descomponer el sistema completo en subestructuras complementarias y estimar los parámetros de cada una de ellas de manera secuencial. El objetivo del método propuesto es: conocidas las señales de respuesta del sistema (en términos de aceleraciones y velocidades) y conocida la excitación al mismo dada por el registro de aceleraciones en lo que se conoce como campo libre, estimar los parámetros dinámicos con que responde el sistema. Dichos parámetros son: la rigidez y el amortiguamiento equivalentes de la estructura, la rigidez y amortiguamiento laterales

equivalentes del suelo adyacente a la cimentación, la rigidez y amortiguamiento de rotación equivalentes del suelo y la masa del sistema suelo-cimiento que participa en la interacción.

El estimar todos los parámetros del sistema de manera simultánea es muy difícil, ya que se presentan problemas numéricos y falta de convergencia puesto que el número de parámetros por estimar es grande. Para evitar este problema se propone una estimación secuencial por etapas, las cuales se describen a continuación.

### 6.3.1 PRIMERA ETAPA. ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS DE LA ESTRUCTURA

Se estiman los parámetros asociados a la estructura solamente; es decir la rigidez y amortiguamiento. La matriz de masa del sistema se considera conocida. La manera de estimar las propiedades de estructuras con base rígida ya se ha visto en capítulos anteriores; la única diferencia, en este caso, es la forma en que se modifica la excitación y las respuestas para considerar el efecto de los dos grados de libertad adicionales en la base. En la fig. 6.3 se aprecian los elementos que intervienen en esta primera etapa.

El vector de estado por estimar es el siguiente

$$Y = [Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5]^T \quad (6.2)$$

Donde  $Y_1$  y  $Y_2$  son los vectores de desplazamientos y velocidades relativos a la base, de los niveles instrumentados de la estructura; es decir,

$$Y_1 = [V_1 - V_0, \dots, V_m - V_0]^T ; \quad Y_2 = [\dot{V}_1 - \dot{V}_0, \dots, \dot{V}_m - \dot{V}_0]^T$$

$m$  es el número de niveles instrumentados en la estructura.

$Y_3$  es un vector de parámetros de rigidez;  $Y_4$  y  $Y_5$  son coeficientes de amortiguamiento proporcional.

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

La ecuación de estado, para la primera etapa, es la siguiente:

$$f(Y, t) = \begin{Bmatrix} \dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_2 \\ \dot{Y}_3 \\ \dot{Y}_4 \\ \dot{Y}_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_2 \\ -M^{-1}K(Y_3)Y_1 - Y_4Y_2 - Y_5M^{-1}K(Y_3)Y_2 - 1(\ddot{x}_g + \ddot{V}_0) - \dot{\gamma}d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.3)$$

$d$  = vector de alturas de los niveles instrumentados.

La ecuación de mediciones del sistema, para la primera etapa, es la siguiente

$$Z = [I_m | 0_{m \times (n-m)}]Y \quad (6.4)$$

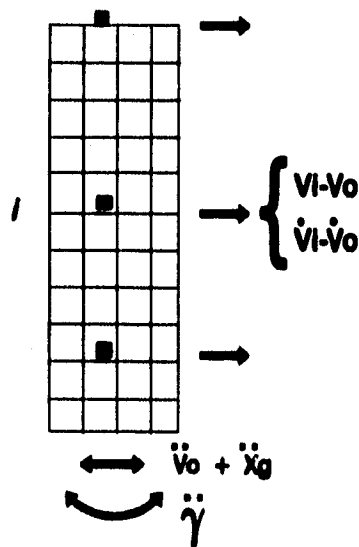


Fig. 6.3 Elementos que participan en la primera etapa.

### 6.3.2 SEGUNDA ETAPA. ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL SUELO

La segunda etapa se realiza en dos pasos, los cuales utilizan el modelo completo del sistema suelo-estructura. En el primer paso se consideran correctos los parámetros estimados en la primera etapa; es decir, se les asignan valores nulos a las variancias asociadas a las rigideces y amortiguamientos de la estructura, y se ajustan sólo los párametros del suelo. El segundo paso es un proceso de afine, donde se liberan todos los parámetros del modelo (que se encuentran muy cercanos a los óptimos).

A continuación se describen en forma detallada los dos pasos de la segunda etapa.

#### Paso 1:

Una vez estimados los parámetros de la estructura, se procede a estimar los parámetros asociados a la interacción misma, para lo cual se toma en cuenta el sistema completo, manteniendo los parámetros de la estructura (estimados en la primera etapa) constantes. Es decir, en el algoritmo de estimación se eligen los valores de sus variancias iguales a cero.

El vector de estado es el siguiente:

$$Y = [Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5]^T \quad (6.5)$$

Donde  $Y_1$  y  $Y_2$  son los vectores de desplazamientos y velocidades del sistema total;  $Y_3$  es un vector de parámetros que contiene la rigidez traslacional y rotacional del suelo;  $Y_4$  es un vector de parámetros que contiene el amortiguamiento traslacional y rotacional del suelo;  $Y_5$  es una función de la masa del sistema suelo-cimiento que participa en la interacción.

La ecuación de estado, en este caso es la siguiente:

$$f(Y, t) = \begin{Bmatrix} \dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_2 \\ \dot{Y}_3 \\ \dot{Y}_4 \\ \dot{Y}_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_2 \\ -M^{-1}(Y_3) K(Y_3) Y_1 - M^{-1}(Y_3) C(Y_4) Y_2 - J\ddot{x}_g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.6)$$

En forma explícita,

$$Y_1 = [V_0, \dots, V_m]^T ; \quad Y_2 = [\dot{V}_0, \dots, \dot{V}_m]^T$$

La composición de  $Y_3$  depende de la suposición que se adopte con respecto a la matriz de rigidez. Por ejemplo, si se considera comportamiento de cortante entonces  $Y_3$  se expresa como sigue:

$$Y_3 = [K_1, \dots, K_m, K_h, K_r]^T$$

Si se cuenta con varios niveles instrumentados, lo mejor, desde el punto de vista de emplear pocos parámetros, es suponer amortiguamiento proporcional en la estructura. Lo anterior trae consigo que en la segunda etapa, donde se tiene que ensamblar la matriz de amortiguamiento total, se tenga que realizar un paso adicional, el cual es el siguiente: Se estiman los coeficientes de amortiguamiento viscoso asociados a cada uno de los entrepisos o bloques entre niveles instrumentados del sistema; para lo cual se resuelve por mínimos cuadrados el siguiente sistema de ecuaciones lineales simultáneas:

$$\alpha M + \beta K = C_t \quad (6.7)$$

$C_t$  es una matriz tridiagonal de amortiguamiento con  $m$  parámetros a ser determinados.

Por lo tanto, la composición de  $Y_4$  es la siguiente:

$$Y_4 = [C_1, \dots, C_m, C_h, C_r]^T$$



Una alternativa es que  $Y_4$  esté formada por  $\alpha$  y  $\beta$ , o por una pareja de dichos valores para la cimentación, y otra para la estructura.

En resumen, en el paso 1 de la segunda etapa se estiman los siguientes parámetros:

1. Masa del sistema suelo-cimiento que participa en la interacción.
2. Rigidez lateral equivalente del suelo adyacente a la cimentación.
3. Rigidez rotacional equivalente del suelo subyacente a la cimentación.
4. Amortiguamiento lateral equivalente del suelo adyacente a la cimentación.
5. Amortiguamiento rotacional equivalente del suelo subyacente a la cimentación.

#### Paso 2:

El paso 2 de la segunda etapa es un proceso de afinar de las estimaciones realizadas en la primera etapa y en el paso 1 de la segunda etapa. Este paso es necesario para validar en un contexto global las estimaciones realizadas en las etapas y pasos anteriores. El proceso de afinar se realiza liberando todos los parámetros, asignándoles variancias no nulas dentro del algoritmo de estimación.

### 6.5 EJEMPLO NUMÉRICO

El procedimiento propuesto se aplicó para identificar las propiedades de un marco de un edificio considerando la interacción suelo-estructura. El sistema estudiado consta de un sólo registro en la estructura y presenta las siguientes propiedades:

Masa condensada de la estructura:	10.19 t s <sup>2</sup> /m
Masa del suelo-cimiento:	8.15 t s <sup>2</sup> /m
Profundidad de desplante:	1.50 m
Ancho de la cimentación:	6.00 m

Altura de la estructura:	5.00 m
Rigidez condensada de la estructura:	5865 t/m
Amortiguamiento equiv. de la estructura:	50 t s/m
Rigidez traslacional del suelo:	18617 t/m
Amortiguamiento traslacional del suelo:	150 t s/m
Rigidez rotacional del suelo:	140500 t m
Amortiguamiento rotacional del suelo:	765 t m s

Se obtuvieron respuestas simuladas del sistema ante la excitación sísmica registrada en campo libre (fig. 6.4). Las respuestas obtenidas en términos de aceleraciones y velocidades (fig. 6.5) se contaminaron con ruido blanco filtrado de magnitud igual al 5, 10 y 20 por ciento de la raíz cuadrada del valor cuadrático medio de la respuesta en cuestión.

En este caso las matrices y vectores que participan en la ecuación (6.1) se pueden expresar como sigue:

$$M = \begin{bmatrix} M_0 & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & M_1 d \\ 0 & M_1 d & I_g + M_1 d^2 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} C_h + c & -c & 0 \\ -c & c & 0 \\ 0 & 0 & C_r \end{bmatrix}; K = \begin{bmatrix} K_h + k & -k & 0 \\ -k & k & 0 \\ 0 & 0 & K_r \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{Bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \gamma \end{Bmatrix}; J = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

El vector de estado para la primera etapa es el siguiente:

$$Y = [\dot{V}_1 - \dot{V}_0, V_1 - V_0, k, c]^T$$

$$Y = [y_1, y_2, y_3, y_4]^T$$

Las ecuaciones de estado y de mediciones, para la primera etapa de este ejemplo, quedan de la siguiente forma:

$$f(Y, t) = \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -(1/M_1)(y_1 y_4 + y_2 y_3) - \ddot{x}_g - \dot{V}_0 - \ddot{u}d \\ y_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$Z = HY \quad ; \quad H = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

El vector de estado para la segunda etapa es el siguiente:

$$Y = [\dot{V}_0, \dot{V}_1, \dot{y}, V_0, V_1, \gamma, 1/M_0, K_h, K_r, C_h, C_r, k, c]^T$$

$$Y = [y_1, y_2, \dots, y_{13}]^T$$

Para la segunda etapa se tienen las siguientes ecuaciones de estado y de mediciones

$$f(Y, t) = \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_{13} \end{Bmatrix}$$

En forma explícita,

$$\dot{y}_1 = -(y_{13} + y_{10})y_7 y_1 + y_{13} y_7 y_2 - (y_8 + y_{12})y_7 y_4 + y_{12} y_7 y_5 - \ddot{x}_g$$

$$\dot{y}_2 = (y_{13}/s_0 + y_{13} s_1^2 y_7 s_4)(y_1 - y_2) + y_{11} s_1 y_3 y_7 s_4 +$$

$$+ (y_{12}/s_0 + y_{12}s_1^2 y_7 s_4)(y_4 - y_5) + y_9 s_1 y_6 y_7 s_4 - \ddot{x}_g$$

$$\dot{y}_3 = -y_{13} s_1 y_7 s_4 (y_1 - y_2) - y_{11} y_3 y_7 s_4 - y_{12} s_1 y_7 s_4 (y_4 - y_5) - y_6 y_7 y_9 s_4$$

$$\dot{y}_4 = y_1$$

$$\dot{y}_5 = y_2$$

$$\dot{y}_6 = y_3$$

$$\dot{y}_7 = \dot{y}_8 = \dots = \dot{y}_{13} = 0$$

$$s_0 = M_1 ; s_1 = d ; s_2 = a ; s_3 = b ; s_4 = 12/(a^2 + b^2)$$

$$Z = HY ; H = [I | 0]$$

Donde  $a$  = altura de la cimentación,  $b$  = ancho de la cimentación.

$I$  = matriz unitaria de orden 3;  $0$  = matriz de ceros de (3 x 10).

Se considera que la inercia rotacional  $I_g$  y la masa traslacional del sistema suelo-cimiento  $M_0$  están relacionadas mediante la siguiente expresión:

$$I_g = \frac{M_0}{12} (a^2 + b^2)$$

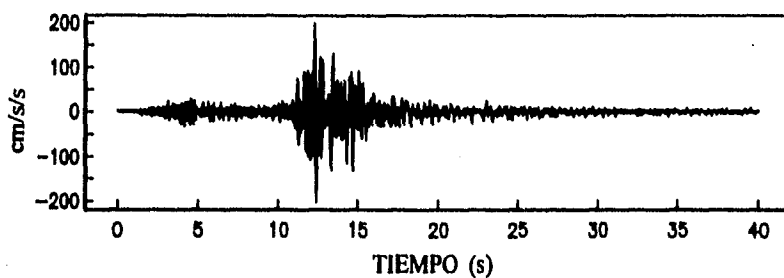


Fig 6.4 Registro obtenido en campo libre.

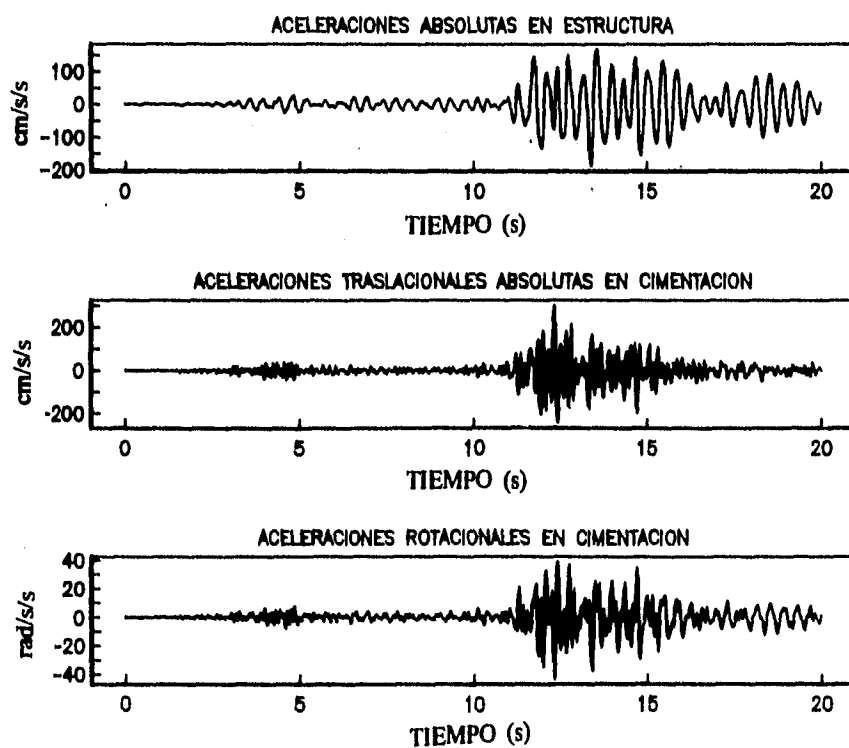


Fig. 6.5 Registros de la respuesta del sistema estructural.

Se estudió la eficiencia del método ante diferentes niveles de ruido (0, 5, 10, 20%) presentes en las señales. Los resultados obtenidos se presentan en las tablas 6.1 a 6.5.

Tabla 6.1 Valores exactos e iniciales de los parámetros para todos los casos

PARAMETRO	VALOR EXACTO	VALOR INICIAL
$k$	5865	586
$c$	50	10
$1/M_0$	0.1227	0.20
$K_s$	18617	10000
$K_r$	140500	100500
$C_s$	150	100
$C_r$	765	1000

La incertidumbre inicial considerada en el proceso, dada por los valores en las diagonales de las matrices de covariancia en las mediciones  $R$  y covariancia en las estimaciones  $P$ , se muestran en la tabla 6.2. La función de peso por la que se multiplican las variancias en las estimaciones de los parámetros a cada iteración global, así como el número de iteraciones globales requeridas para lograr la convergencia para cada uno de los casos también se muestran en la tabla 6.2.

Tabla 6.2 Condiciones de control elegidas para cada uno de los casos analizados.

CASO	COVARIANCIA MEDICIONES	COVARIANCIA ESTIMACION	PESO	ITERACIONES GLOBALES
RUIDO 0%	0.0001	10000	1000	5
RUIDO 5%	0.001	10000	1000	5
RUIDO 10%	0.10	1000	100	7
RUIDO 20%	1.00	1000	100	10

La justificación de las variables de control elegidas puede verse en [Salgado, 1989, pp. 25-44].

Tabla 6.3 Estimación de parámetros en etapa 1.

PARAMETRO	ESTIMACIONES											
	ITERACION GLOBAL 1				ITERACION GLOBAL 2				ITERACION GLOBAL FINAL			
	0%	5%	10%	20%	0%	5%	10%	20%	0%	5%	10%	20%
k	5744	705	1615	737	5773	6253	5672	5631	5780	5693	5635	5658
c	56	1101	680	508	55	36	59	101	55	54	59	68

Tabla 6.4 Estimación de parámetros en etapa 2 y paso 1.

PARAMETRO	ESTIMACIONES											
	ITERACION GLOBAL 1				ITERACION GLOBAL 2				ITERACION GLOBAL FINAL			
	0%	5%	10%	20%	0%	5%	10%	20%	0%	5%	10%	20%
$1/M_0$	.138	.086	.007	.155	.125	.087	.019	.141	.123	.121	.076	.124
$K_s$	16187	28483	9963	10083	18418	28045	5610	14535	18673	18973	28876	18663
$K_r$	137083	143791	100454	100532	143962	141447	109082	106832	143509	144007	132396	147360
$C_s$	118	273	1360	137	139	265	1623	133	145	146	330	146
$C_r$	1226	1159	2246	1398	1183	1054	4216	1591	997	867	-332	961
$k$	5780	5693	5635	5658	5780	5693	5635	5658	5779	5693	5635	5658
$c$	55	54	59	68	55	54	59	68	55	54	59	68

Tabla 6.5 Estimación de parámetros en etapa 2 y paso 2.

PARAMETRO	ESTIMACIONES											
	ITERACION GLOBAL 1				ITERACION GLOBAL 2				ITERACION GLOBAL FINAL			
	0%	5%	10%	20%	0%	5%	10%	20%	0%	5%	10%	20%
$1/M_0$	.123	.047	.082	.087	.123	.062	.091	.113	.123	.121	.122	.125
$K_s$	18625	46694	28866	18674	18624	36554	25495	19179	18607	18838	18563	18467
$K_r$	144888	156680	132409	147362	143487	139497	131269	147293	141352	135901	134092	140684
$C_s$	145	732	427	292	147	400	290	213	149	157	158	147
$C_r$	894	58	-170	963	852	232	-101	825	794	541	327	732
$k$	5726	4651	5615	5719	5772	5228	5869	5599	5840	5968	6053	5890
$c$	64	49	58	59	59	1.41	16	52	52	41	40	50

Las variaciones en la estimación de los parámetros, así como en los valores de la matriz de covarianza del error en las estimaciones en cada iteración global se pueden apreciar en la fig. 6.6.

En las figs. 6.7 a 6.9 se comparan las respuestas en aceleraciones medidas y predichas. Se encuentra que, aun para niveles altos (20%) de ruido presentes en las mediciones, la correlación entre respuestas medidas y predichas es aceptable.



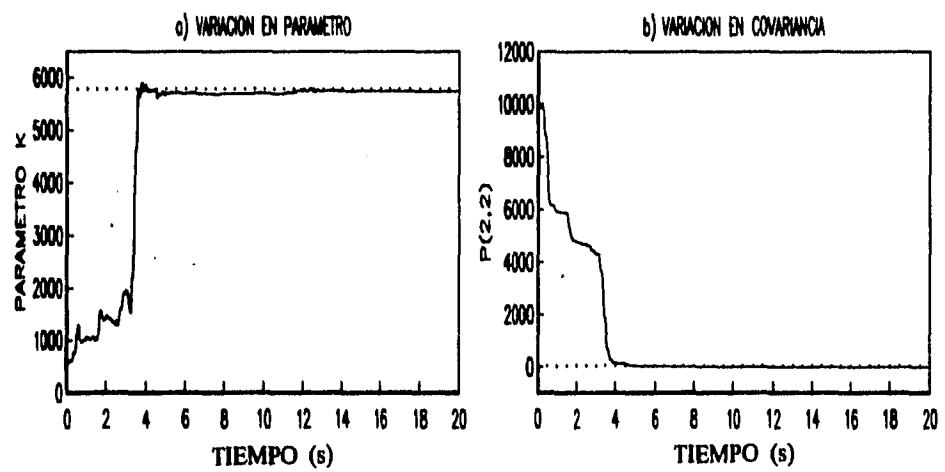


Figura 6.6 Variación del parámetro  $k$  y su variancia durante la primera (—) y la quinta (···) iteración global, para la primera etapa del caso 1 (ruido = 0%).

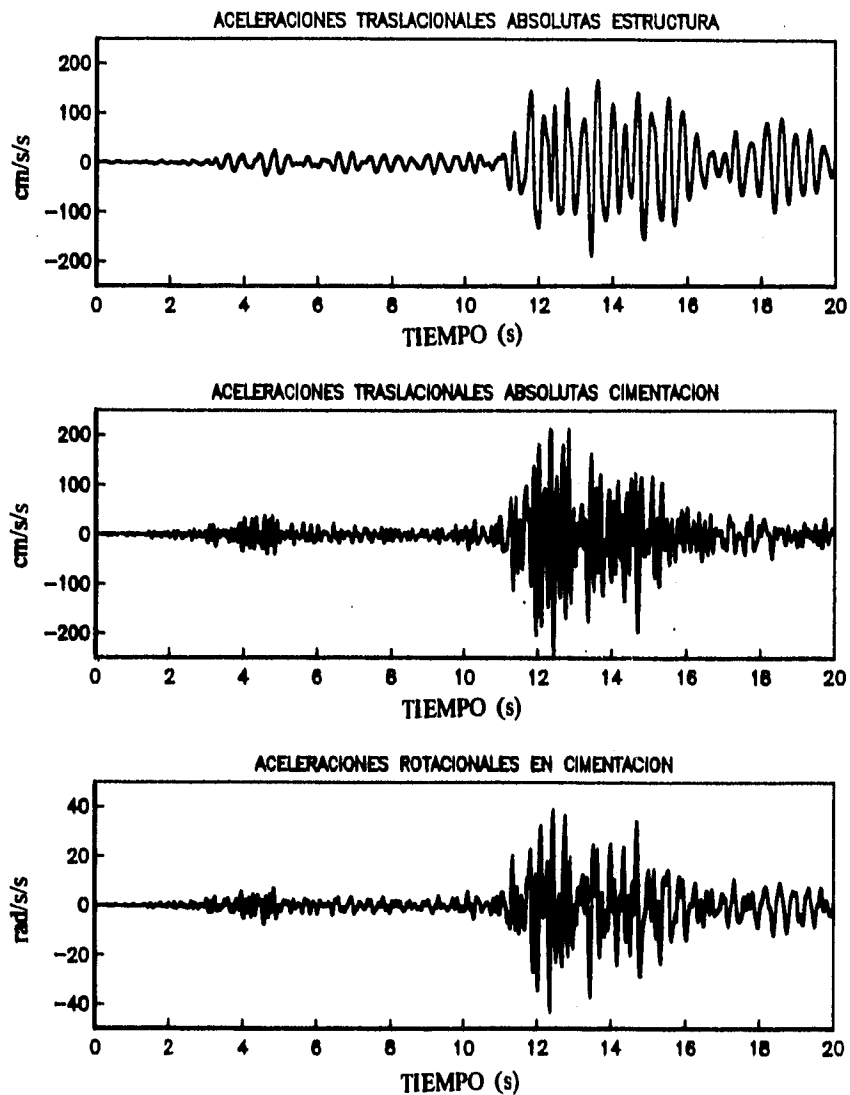


Fig. 6.7 Comparación entre las historias de aceleraciones medidas (—) y estimadas (indistinguibles), caso 1 (ruido = 0%).

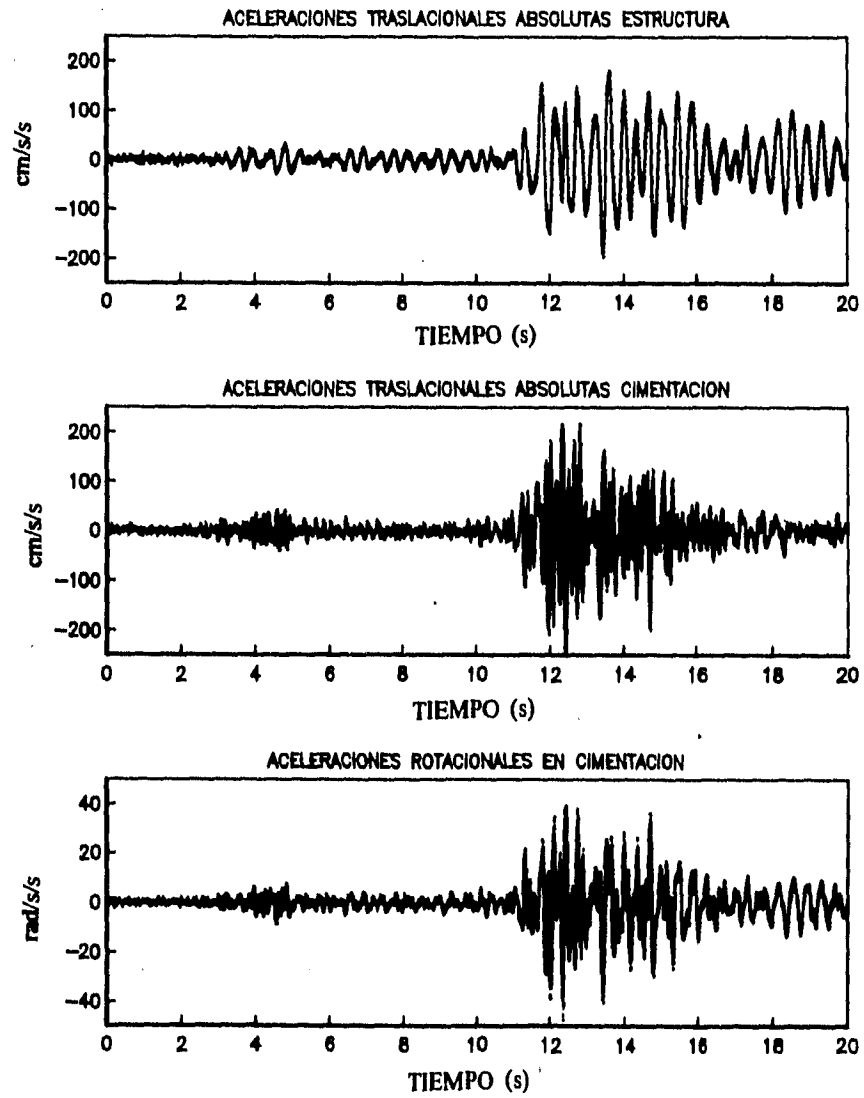


Fig. 6.8 Comparación de las historias de aceleraciones medidas ( — ) y estimadas ( ... ), caso 3 ( ruido = 10% ).

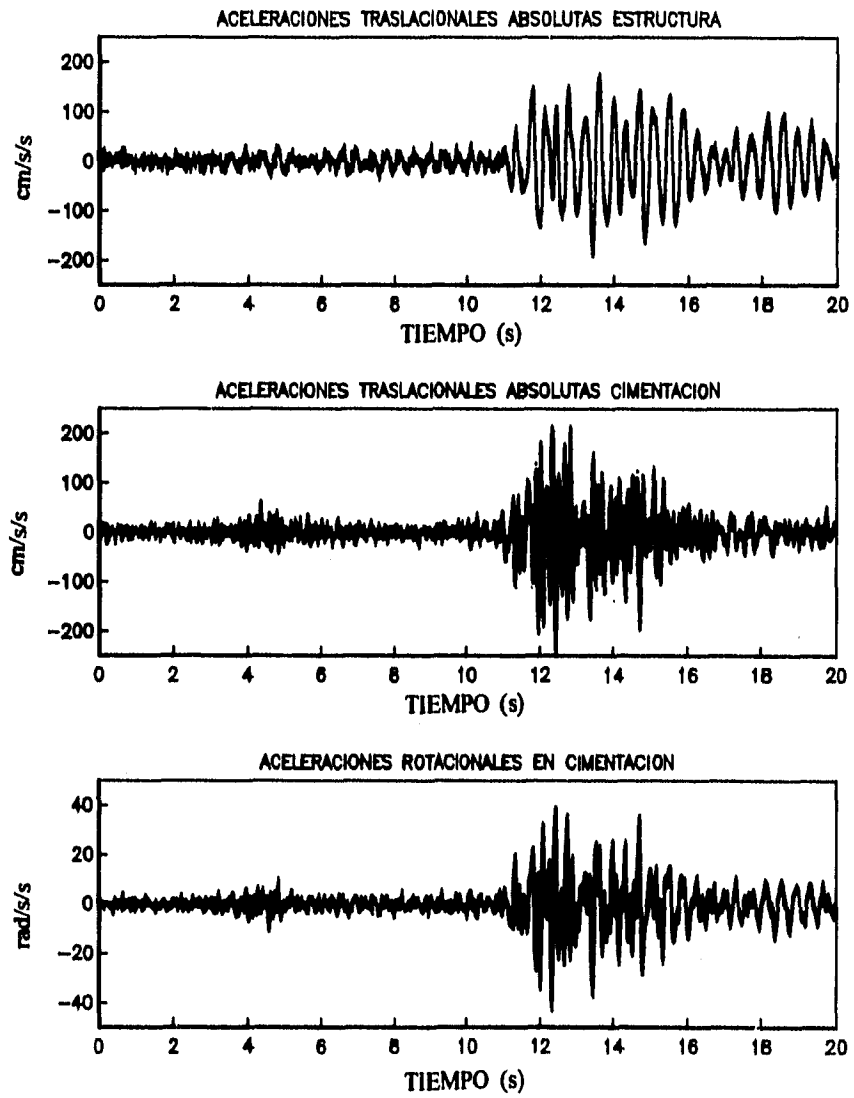


Fig. 6.9 Comparación de las historias de aceleraciones medidas (—) y estimadas (...), caso 4 (ruido = 20%).

## SIMBOLOGÍA

$M$	matriz de masa
$K$	matriz de rigidez
$C$	matriz de amortiguamiento
$X, \dot{X}, \ddot{X}$	vectores de desplazamientos, velocidades, y aceleraciones
$J$	vector de direccionalidad de la excitación
$\ddot{x}_g$	aceleración del terreno en campo libre
$M_0$	masa del sistema suelo-cimiento
$M_i$	masa traslacional del nivel $i$
$d_i$	distancia del eje de rotación al nivel $i$
$I_g$	inercia rotacional del sistema suelo-cimiento
$K_h$	rigidez traslacional equivalente del suelo
$K_r$	rigidez rotacional equivalente del suelo
$C_h$	amortiguamiento traslacional equivalente del suelo
$C_r$	amortiguamiento rotacional equivalente del suelo
$\alpha, \beta$	coeficientes de amortiguamiento proporcional
$C_t$	matriz tridiagonal de amortiguamiento
$\gamma$	desplazamiento rotacional de la base
$Y$	vector de estado
$f$	vector de funciones de estado
$H$	matriz de coeficientes linealizados de la ecuación de mediciones
$s_i$	variables auxiliares
$a$	altura de la cimentación
$b$	ancho de la cimentación

# 7

## IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS ESTRUCTURALES NO LINEALES

---

7.1 Introducción .....	97
7.2 Estimación de parámetros de modelos discontinuos .....	98
7.2.1 Ecuaciones de estado y de mediciones .....	99
7.3 Estimación de parámetros de modelos continuos .....	100
7.3.1 Ecuaciones de estado y de mediciones .....	100
7.4 Ejemplo numérico .....	101
7.5 Problemas en la identificación de sistemas estructurales no lineales de múltiples grados de libertad .....	105
Simbología .....	106

---

El objetivo de este capítulo es estudiar la identificación de sistemas estructurales no lineales de un grado de libertad y los problemas asociados a la identificación de sistemas de este tipo, de múltiples grados de libertad.

## 7.1 INTRODUCCIÓN

En todos los trabajos publicados sobre identificación de sistemas estructurales no lineales, los sistemas estudiados se han modelado como sistemas de un grado de libertad. Lo anterior se explica por lo complejo que resulta estimar los parámetros de sistemas estructurales no lineales de múltiples grados de libertad.

Se han propuesto una serie de modelos de comportamiento no lineal, algunos de los cuales se han ilustrado en el capítulo 1 de este trabajo. La mayoría de ellos (por ejemplo: modelos de Clough, Takeda, bilineal, etc.) son modelos del tipo discontinuo, ya que sus ramas de carga y descarga se representan por líneas rectas cuyas pendientes siguen ciertas leyes preestablecidas.

Existen otros tipos de modelos donde las ramas de carga y descarga son funciones continuas [Ramberg y Osgood, 1943]. En dichos modelos, los parámetros de las funciones mencionadas se pueden modificar [Jennings, 1963] para considerar el efecto de la historia previa de deformaciones. A estos tipos de modelos se les puede denominar como semicontinuos.

Modelos como el del tipo Bouc-Wen (mencionado en el capítulo 1) se pueden considerar del tipo continuo, ya que en su formulación, de manera integral, se incluyen todos los factores que influyen en su comportamiento.

En este capítulo se estudian en forma breve la identificación de sistemas estructurales no lineales representados por modelos discontinuos y continuos de un grado de libertad.

## 7.2 ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS DE MODELOS DISCONTINUOS

El comportamiento de estos modelos se puede expresar con la siguiente ecuación

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \psi(x, \dot{x}) = -m\ddot{x}_g \quad (7.1)$$

$c$  es un coeficiente de amortiguamiento;  $\psi(x, \dot{x})$  es la fuerza de restitución del sistema, la cual es una función no lineal de desplazamientos y velocidades. Por ejemplo, para el modelo bilineal (fig. 1.6), la fuerza de restitución se puede expresar como sigue:

Si  $\dot{x} \geq 0$ ,  $\psi(x, \dot{x})$  toma el menor de los valores siguientes:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \rho + k_1 x \\ \psi_2 &= (k_1 - k_2)d_y + k_2 x \end{aligned} \quad (7.2a)$$

Si  $\dot{x} < 0$ ,  $\psi(x, \dot{x})$  toma el mayor de los valores siguientes:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \rho + k_1 x \\ \psi_2 &= -(k_1 - k_2)d_y + k_2 x \end{aligned} \quad (7.2b)$$

$k_1$  es la rigidez elástica inicial;  $k_2$  es la rigidez después de la fluencia;  $d_y$  es el desplazamiento de fluencia;  $\rho$  es un valor que depende de la trayectoria, y corresponde al punto de cruce de las ramas de carga y descarga con pendiente  $k_1$ , con el eje de las ordenadas.

Ecuaciones similares a (7.2) se tienen para cada modelo del tipo discontinuo.



## 7.2.1 ECUACIONES DE ESTADO Y DE MEDICIONES

El vector de estado para este tipo de modelos es el siguiente:

$$Y = [x, \dot{x}, c, \{\theta\}]^T = [y_1, y_2, y_3, \{y_4\}]^T \quad (7.3)$$

Donde  $\{\theta\}$  son los parámetros de comportamiento no lineal. Por ejemplo, en el caso de un modelo bilineal se tiene lo siguiente

$$\{\theta\} = [k_1, k_2, d_y]^T \quad (7.4)$$

Las ecuaciones de estado para este tipo de modelos son las siguientes

$$f(Y, t) = \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \{y_4\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_2 \\ -\frac{y_3}{m}y_2 - \frac{\Psi(y_1, y_2, \{y_4\})}{m} - \ddot{x}_g \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.5)$$

Si se registran desplazamientos y velocidades, la ecuación de mediciones es como sigue

$$Z = HY \quad ; \quad \text{donde} \quad H = [I_2 | 0_{2,r}] \quad (7.6)$$

Donde  $r$  es el número de parámetros por estimar

En este caso, la matriz  $F$ , de coeficientes linealizados, es la siguiente:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m} \frac{\partial \Psi}{\partial y_1} & -\frac{1}{m} (y_3 + \frac{\partial \Psi}{\partial y_2}) & -\frac{y_2}{m} & -\frac{1}{m} \frac{\partial \Psi}{\partial \{y_4\}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

### 7.3 ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS DE MODELOS CONTINUOS

En esta sección se estudia la estimación de parámetros de sistemas representados por el modelo de Bouc-Wen.

En el modelo de Bouc-Wen, la ecuación que rige el comportamiento es la siguiente

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \alpha kx + (1 - \alpha)kz = f(t) \quad (7.8)$$

donde

$$\dot{z} = \frac{A\dot{x} - v(\beta|\dot{x}||z|^{n-1}z + \gamma\dot{x}|z|^n)}{\eta} \quad (7.9)$$

Los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $A$ ,  $v$ ,  $\eta$  y  $n$  controlan la forma de los ciclos histéricos y el nivel de degradación del sistema. En la literatura [Sues y cols., 1988] es común encontrar que los valores de  $A$  y  $n$  se fijan igual a 1, y los valores de  $\gamma$  y  $\beta$  se adoptan de acuerdo al tipo de material de que está constituido el sistema. En el caso de concreto reforzado se sugiere una combinación de  $3\gamma = -\beta$ ; para acero se recomienda  $\gamma = \beta$ . El parámetro  $n$  controla la transición entre las ramas de los ciclos de histéresis; para  $n \gg 1$  se tiene un cambio brusco entre las pendientes del ciclo histérico (el caso elastoplástico).

#### 7.3.1 ECUACIONES DE ESTADO Y DE MEDICIONES

El vector de estado a estimar es el siguiente:

$$Y = [x, \dot{x}, z, c, k, \alpha, A, \beta, \gamma, n, v, \eta]^T = [y_1, \dots, y_{12}]^T \quad (7.10)$$

Se tienen las siguientes ecuaciones de estado

### 7.3 ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS DE MODELOS CONTINUOS

En esta sección se estudia la estimación de parámetros de sistemas representados por el modelo de Bouc-Wen.

En el modelo de Bouc-Wen, la ecuación que rige el comportamiento es la siguiente

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \alpha kx + (1 - \alpha)kz = f(t) \quad (7.8)$$

donde

$$\dot{z} = \frac{A\dot{x} - v(\beta|\dot{x}| |z|^{n-1}z + \gamma\dot{x}|z|^n)}{\eta} \quad (7.9)$$

Los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $A$ ,  $v$ ,  $\eta$  y  $n$  controlan la forma de los ciclos histéricos y el nivel de degradación del sistema. En la literatura [Sues y cols., 1988] es común encontrar que los valores de  $A$  y  $n$  se fijan igual a 1, y los valores de  $\gamma$  y  $\beta$  se adoptan de acuerdo al tipo de material de que está constituido el sistema. En el caso de concreto reforzado se sugiere una combinación de  $3\gamma = -\beta$ ; para acero se recomienda  $\gamma = \beta$ . El parámetro  $n$  controla la transición entre las ramas de los ciclos de histéresis; para  $n \gg 1$  se tiene un cambio brusco entre las pendientes del ciclo histérico (el caso elastoplástico).

#### 7.3.1 ECUACIONES DE ESTADO Y DE MEDICIONES

El vector de estado a estimar es el siguiente:

$$Y = [x, \dot{x}, z, c, k, \alpha, A, \beta, \gamma, n, v, \eta]^T = [y_1, \dots, y_{12}]^T \quad (7.10)$$

Se tienen las siguientes ecuaciones de estado

$$f(Y, t) = \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \\ \vdots \\ \dot{y}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_2 \\ -\frac{1}{m}(y_4 y_2 + y_6 y_3 y_1 + (1 - y_6) y_3 y_3 + f(t)) \\ y_7 y_2 - y_{11}(y_8 |y_2| |y_3|^{y_{10}-1} y_3 + y_9 y_2 |y_3|^{y_{10}}) \\ y_{12} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.11)$$

Si se conocen desplazamientos y velocidades del sistema, entonces la ecuación de mediciones es la siguiente

$$Z = HY ; \quad \text{donde} \quad H = [I_2 | 0_{2 \cdot 10}] \quad (7.12)$$

#### 7.4 EJEMPLO NUMÉRICO

Se pretende estimar los parámetros de un sistema con comportamiento no lineal del tipo Bouc-Wen. Con el propósito de simular las señales de respuesta (fig. 7.1) de un sistema de un grado de libertad y poder emplearlas en el proceso de estimación, se utilizó un modelo con las siguientes propiedades.

Porcentaje de amortiguamiento	: 5%
Periodo natural	: 1 s
Parámetro $\alpha$	: 0.05
Parámetro $A$	: 1.0
Parámetro $\gamma$	: 0.75
Parámetro $\beta$	: -0.25
Parámetro $n$	: 1.0

Parámetro  $\eta$  : 1.0

Parámetro  $\nu$  : 1.0

En este ejemplo se considera que las variables  $A$ ,  $n$ ,  $\eta$ ,  $\nu$ , permanecen fijas e iguales a 1.

Por lo tanto el vector de estado por estimar es el siguiente:

$$Y = [x, \dot{x}, z, c, k, \alpha, \beta, \gamma]^T = [y_1, \dots, y_8]^T$$

Las ecuaciones de estado y de mediciones, en este caso, son las siguientes

$$f(Y, t) = \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \\ \vdots \\ \dot{y}_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_2 \\ -\frac{1}{m}(y_4 y_2 + y_6 y_3 y_1 + (1 - y_6) y_3 y_3 + f(t)) \\ y_2 - (y_7 |y_2| y_3) + y_8 |y_3| y_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_8 \end{Bmatrix}$$

Con las ecuaciones de estado y de mediciones y las ecuaciones del filtro de Kalman extendido es posible estimar los parámetros del modelo no lineal. En la fig. 7.2 se presentan los ciclos de histéresis real y estimado para este ejemplo.

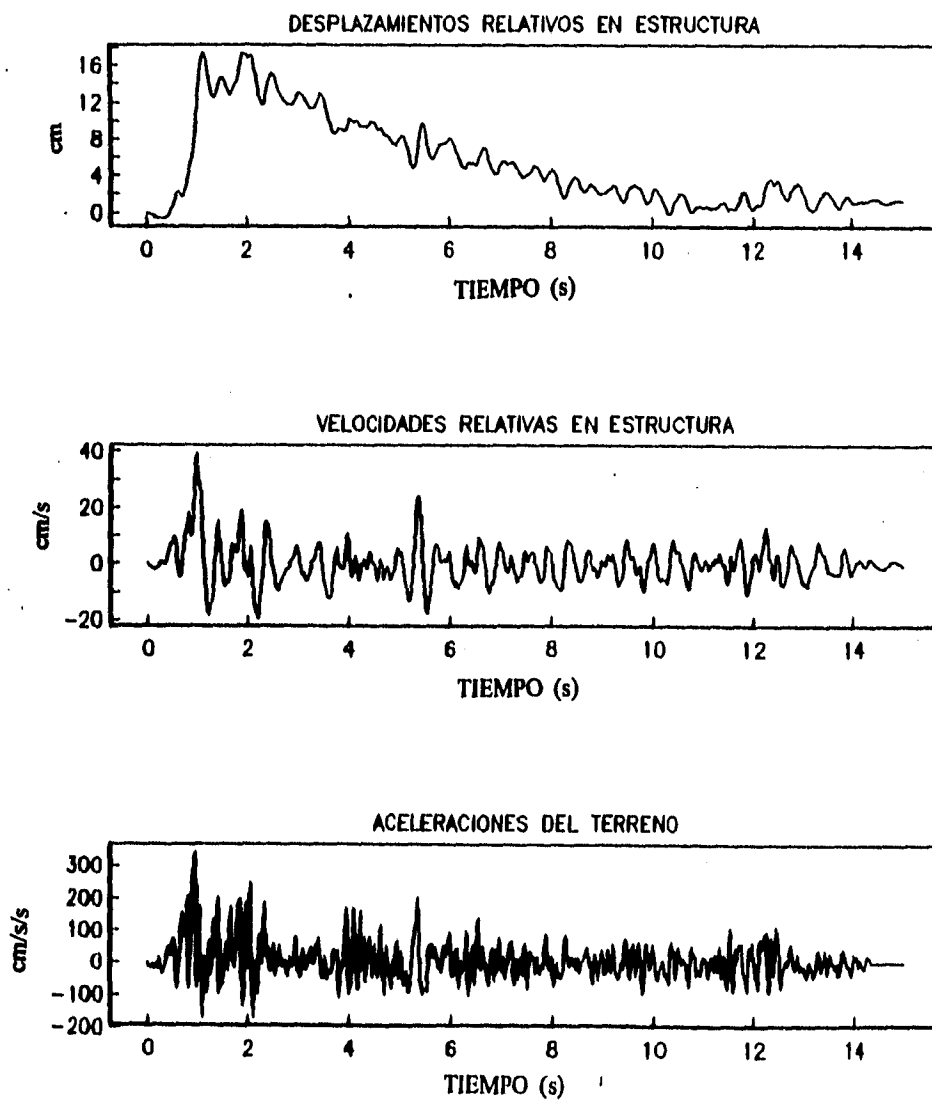


Fig. 7.1 Historias empleadas en el ejemplo numérico.

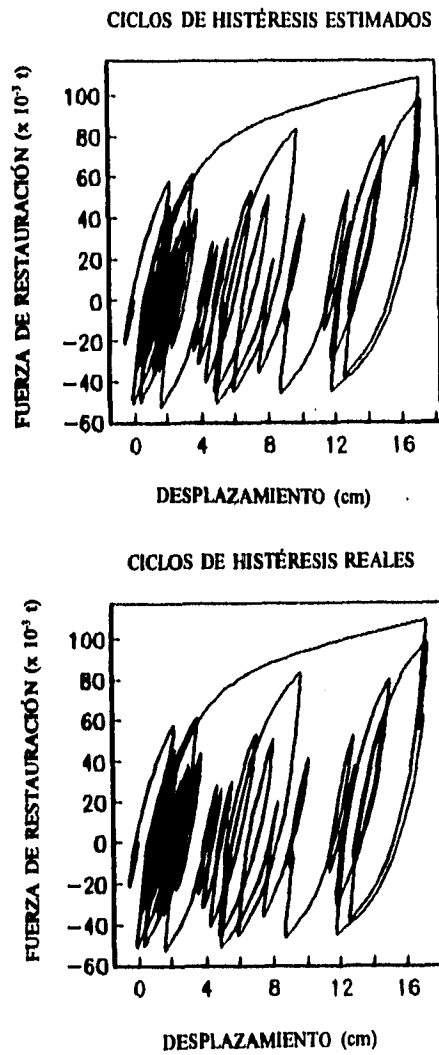


Fig. 7.2 Ciclos Histeréticos reales y estimados en el ejemplo numérico.

### **7.5 PROBLEMAS EN LA IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS ESTRUCTURALES NO LINEALES DE MÚLTIPLES GRADOS DE LIBERTAD**

Tratar de identificar sistemas estructurales no lineales de múltiples grados de libertad es sumamente difícil. La dificultad estriba en la gran cantidad de parámetros que involucran en su formulación los modelos estructurales no lineales conocidos.

En el caso del modelo de Bouc-Wen, para representar el comportamiento de un sólo elemento se requiere la estimación de 12 variables. Para el caso de estructuras de múltiples grados de libertad, la cantidad de parámetros que se tendrían que estimar es tal que en la práctica no es posible realizarlo, aún suponiendo, por ejemplo, comportamiento de cortante. La divergencia siempre se presenta, aún en el caso de valores iniciales de los parámetros muy cercanos a los reales (10% de error inicial).

En el capítulo 8 de este trabajo se propone una metodología para resolver el problema de identificación de propiedades de estructuras no lineales de múltiples grados de libertad.



**SIMBOLOGÍA**

$m$	masa del sistema
$c$	coeficiente de amortiguamiento viscoso
$\psi(x, \dot{x})$	fuerza histerética en el modelo bilineal
$x, \dot{x}, \ddot{x}$	desplazamiento, velocidad, y aceleración
$\psi_1, \psi_2$	valores posibles de la fuerza histerética en el modelo bilineal
$k_1$	rigidez del sistema antes de la fluencia en el modelo bilineal
$k_2$	rigidez del sistema después de la fluencia en el modelo bilineal
$d_y$	deformación de fluencia en el modelo bilineal
$p$	valor que depende de la trayectoria en el modelo bilineal
$\{\theta\}$	vector de parámetros por estimar en el modelo bilineal
$Y$	vector de estado
$Z$	vector de mediciones
$H$	matriz de coeficientes linealizados de la ecuación de mediciones
$F$	matriz de coeficientes linealizados de la ecuación de estado
$z$	variable de comportamiento histerético del modelo de Bouc-Wen
$\alpha, \beta, \gamma, A, v, \eta, n$	parámetros por estimar en el modelo de Bouc-Wen

# 8

## IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS NO LINEALES MEDIANTE MODELOS REDUCIDOS

---

8.1 Condiciones presentes en la práctica y modelo estructural propuesto .....	108
8.2 Dimensión y número de elementos en el modelo propuesto .....	109
8.3 Estimación de los parámetros del modelo .....	110
8.3.1 Matriz de masa .....	110
8.3.2 Rigideces secantes .....	112
8.3.3 Coeficientes de amortiguamiento viscoso equivalente .....	114
8.3.4 Parámetros del modelo de deterioro .....	115
8.3.4.1 Función objetivo o de error .....	116
8.3.4.2 Algoritmo de estimación .....	117
8.4 Ejemplo numérico .....	120
8.4.1 Estimación de los parámetros del modelo .....	121
Símbología .....	133

---

El objetivo de este capítulo es presentar una metodología para estimar propiedades dinámicas de estructuras de edificios que presentan comportamiento no lineal. La metodología propuesta toma en cuenta las condiciones de instrumentación que se presentan en la práctica. El método propuesto se aplica en un ejemplo numérico.

### **8.1 CONDICIONES PRESENTES EN LA PRÁCTICA Y MODELO ESTRUCTURAL PROPUESTO**

En la práctica, las estructuras se instrumentan con pocos aparatos que miden su respuesta ante sismos fuertes. Durante sismos severos (y en ocasiones aunque no sean tan fuertes), las estructuras pueden presentar cambios importantes en sus propiedades y por lo tanto exhibir un comportamiento no lineal. Dos aspectos principales se presentan en la práctica: poca información y un comportamiento estructural complejo por modelar.

La construcción de modelos de sistemas reales a partir de observaciones de los mismos requiere de la propuesta de un conjunto de modelos posibles. Las condiciones de la práctica restringen el espectro de posibles modelos que puedan representar en forma adecuada al sistema real. Se trata de representar un comportamiento complejo con un modelo que no necesite mucha información para el ajuste de sus parámetros. Dichos parámetros no deben ser numerosos, para permitir su estimación. Pero, a la vez, el modelo no debe ser tan simple como para dejar fuera de su formulación las principales características del sistema real.

En este capítulo se propone una solución al problema anterior.

En la sección 1.4 se ha presentado la primera parte de la solución propuesta. En dicho capítulo se proponen un conjunto de modelos posibles (ecuaciones 1.10, 1.11 y 1.12) para representar el comportamiento no lineal de estructuras sometidas a sismos severos. En el

presente capítulo se propone la metodología para elegir el mejor modelo (en cierto sentido) del conjunto de modelos posibles. El modelo a representar el sistema real es un lineal equivalente con variación de propiedades, las cuales se expresan como funciones de la respuesta. Las funciones que se proponen son las siguientes:

$$k = k_0 * e^{(a_k \Delta^{r_k} + b_k D^{s_k})} \quad (8.1)$$

$$c = c_0 * (1 + a_c \ln(1 + \Delta^{r_c})) * (1 + b_c \ln(1 + D^{s_c})) \quad (8.2)$$

Donde  $k$  y  $c$  son los valores instantáneos de la rigidez y amortiguamiento equivalentes respectivamente.  $\Delta$  es la amplitud de deformación de medio ciclo de respuesta.  $D$  es el daño acumulado.  $k_0$  y  $c_0$ , son los valores de  $k$  y  $c$  cuando la estructura todavía no presenta daño (fase inicial del sismo).  $D$  es función de los valores de las amplitudes de deformación de los medios ciclos previos:

$$D = \sum_{i=1}^N \Delta_i^q \quad (8.3)$$

Los parámetros  $a_{k/c}$ ,  $b_{k/c}$ ,  $r_{k/c}$ ,  $s_{k/c}$ ,  $q$ , controlan las variaciones de  $k$  y  $c$  con respecto a las variables de respuesta y al daño acumulado.

## 8.2 DIMENSIÓN Y NÚMERO DE ELEMENTOS EN EL MODELO PROPUESTO

Se han definido, mediante las ecuaciones (8.1), (8.2) y (8.3), las leyes que determinan las propiedades de cada elemento del modelo con respecto a las variables de respuesta; el siguiente paso, en la identificación del sistema, es la determinación de la dimensión y el número de elementos del modelo considerado.

La dimensión se refiere al número de grados de libertad del modelo propuesto, y se elige

igual al número de pisos instrumentados de la estructura. Si se considera un número de grados de libertad mayor al número de pisos instrumentados se presentan problemas numéricos en la estimación de los parámetros.

El número de elementos que participan en el modelo también se elige igual al número de pisos instrumentados (suposición de comportamiento de cortante), por la razón siguiente: la mayor contribución a la respuesta estructural se debe a los primeros modos de vibración. La interacción entre niveles lejanos se manifiesta principalmente en los modos superiores, y estos tienen, generalmente, poca influencia en la respuesta traslacional de la estructura. Por lo tanto, se pueden despreciar las interacciones lejanas y manejar esta omisión como un error asociado a la determinación de las rigideces y amortiguamientos equivalentes. Lo anterior es mejor a tener que considerar estas interacciones y no contar con suficiente información de la respuesta para determinar los parámetros de manera confiable.

### 8.3 ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL MODELO

A continuación se describe la metodología propuesta para estimar la masa, rigidez, amortiguamiento, y parámetros del modelo de deterioro del sistema reducido.

#### 8.3.1 MATRIZ DE MASA

La energía cinética del sistema se puede representar como:

$$E_c = (1/2) \dot{y}^T M \dot{y} \quad (8.4)$$

Las coordenadas del sistema se pueden descomponer en instrumentadas (ci) y no instrumentadas (ni), por lo tanto

$$y^T = [y_{ni}^T \mid y_{ci}^T] \quad (8.5)$$

Independientemente de la configuración que adopte el sistema, siempre es posible, mediante interpolación, obtener  $y_{nl}$  a partir de  $y_{cl}$  (fig. 8.1).

$$y_{nl} = \bar{T}y_{cl} ; y = Ty_{cl} ; T = \begin{bmatrix} \bar{T} \\ \dots \\ I \end{bmatrix} \quad (8.6)$$

Al sustituir los valores de la ecuación (8.6) en la ecuación (8.4), se obtiene

$$E_c = (1/2)y_{cl}^T T^T M T y_{cl} \quad (8.7)$$

Ya que la energía cinética de ambos sistemas debe ser la misma, la matriz de masas del sistema condensado se puede aproximar como

$$\bar{M} = T^T M T \quad (8.8)$$

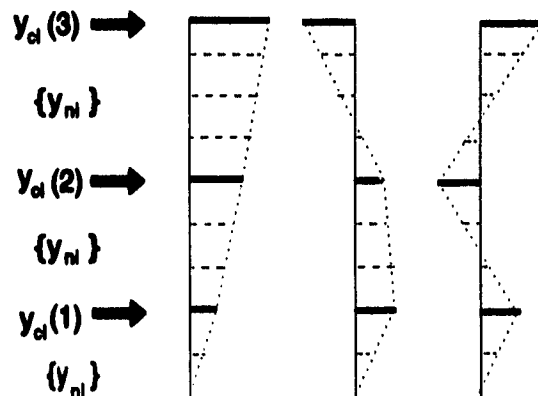


Figura 8.1 Relación entre coordenadas instrumentadas y no instrumentadas.

### 8.3.2 RIGIDECES SECANTES

Durante un sismo, si es intenso (y en ocasiones aunque no lo sea tanto), se pueden presentar cambios en la rigidez de algunos elementos del sistema. El comportamiento no lineal introduce el problema de la deriva o desplazamientos permanentes. En los casos donde la deriva es importante, no es posible aplicar, en forma confiable, el enfoque tradicional de estimación de parámetros del modelo lineal equivalente por ventanas. Dicho enfoque se basa en reducir el error cuadrático medio entre la respuesta medida y la respuesta predicha por el modelo, regido éste por la siguiente ecuación.

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = -MJ\ddot{x}_g \quad (8.9)$$

En el modelo lineal anterior, las variables de respuesta se encuentran referidas a un origen de coordenadas donde toman el valor de cero. Las deformaciones permanentes que se presentan en los sistemas no lineales modifican el punto de equilibrio, para desplazamientos, del sistema. Estos cambios en el punto de equilibrio no pueden introducirse en las expresiones para la estimación de los parámetros del modelo lineal equivalente por tramos o ventanas. Por lo tanto aplicar el modelo de la ecuación (8.9), de manera directa, ocasiona una estimación errónea de los parámetros (fig. 8.2a). Los errores en la estimación de rigideces se pueden incrementar de manera importante en la fase final del sismo (fig. 8.2.b), ya que en esta etapa la estructura queda vibrando con respecto a la deformación permanente final.

Para evitar lo anterior, se propone trabajar con las rigideces secantes de los ciclos histeréticos (fig. 8.3), para lo cual se plantea el equilibrio dinámico del sistema en los puntos de máximo desplazamiento relativo. En estos puntos, la fuerza amortiguadora vale cero, ya que la velocidad se anula. Por lo tanto, en dichos instantes es posible plantear la siguiente ecuación:

$$M(\ddot{X} + J\ddot{x}_g) = -KX \quad (8.10)$$

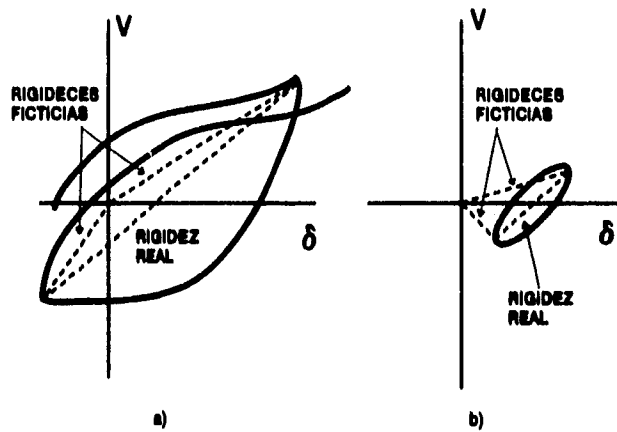


Fig. 8.2 Rigideces reales y ficticias. a) Durante la fase intensa del sismo. b) Durante la fase final del sismo.

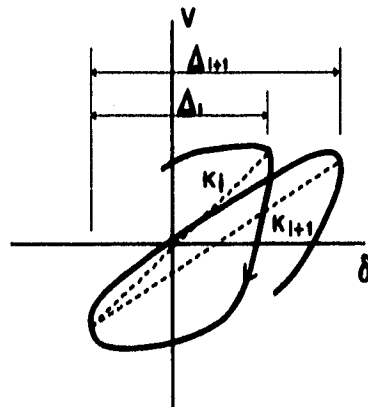


Fig. 8.3 El concepto de la rigidez secante.



Existe una rigidez secante para cada semiciclo histerético. Para cada bloque o subsistema de la estructura es posible obtener las rigideces secantes de cada semiciclo mediante la siguiente ecuación:

$$K_i = V_i/\Delta_i \quad (8.11)$$

Donde,  $\Delta_i$  es el desplazamiento relativo del semiciclo  $i$ .  $V_i$  es la fuerza cortante correspondiente a dicho desplazamiento relativo.

En la práctica normalmente se utilizan aparatos que registran aceleraciones. Para obtener desplazamientos los registros de aceleraciones se tienen que integrar dos veces con respecto al tiempo. El proceso de integración suele introducir ciertos errores en los registros de desplazamientos obtenidos. Dichos errores se pueden minimizar eligiendo las condiciones iniciales adecuadas en los registros de aceleraciones por integrar [Trifunac y cols., 1973; Hudson, 1979].

### 8.3.3 COEFICIENTES DE AMORTIGUAMIENTO VISCOSO EQUIVALENTE

Tal como se demostró en el capítulo 1, La energía que disipa un sistema lineal está relacionada con el área de los ciclos histeréticos. En este caso, ya que se está considerando un modelo lineal equivalente, el concepto es análogo. El coeficiente de amortiguamiento viscoso equivalente para cada uno de los semiciclos histeréticos se calcula como sigue

$$\xi_{eq_i} = \frac{4}{\pi} \frac{A_i}{K_i \Delta_i^2} \quad (8.12)$$

$$C_{eq_i} = \frac{2\xi_{eq}K_l}{\omega_i} \quad (8.13)$$

Donde  $C_{eq}$  es el coeficiente de amortiguamiento viscoso equivalente.  $\xi_{eq}$  es el factor de amortiguamiento histerético.  $K_l$  es la rigidez secante.  $\omega_i$  es la frecuencia de vibración (considerada en este caso como la frecuencia fundamental de vibración).  $A_l$  es el área del semiciclo histerético (fig. 8.4).

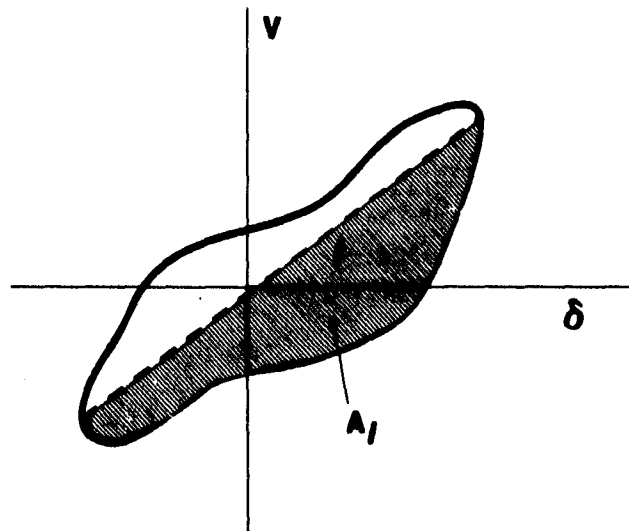


Fig. 8.4 Area de semiciclo histerético.

### 8.3.4 PARÁMETROS DEL MODELO DE DETERIORO

Una vez que se han determinado las rigideces secantes y los coeficientes de amortiguamiento viscoso equivalente de todos los semiciclos histeréticos y de todas las porciones de la estructura se procede a la determinación de los coeficientes que aparecen

en la leyes de variación de los parámetros anteriores. Se considera independencia entre las leyes de variación de las rigideces y las correspondientes a los amortiguamientos.

#### 8.3.4.1 FUNCIÓN OBJETIVO O DE ERROR

El proceso de identificación requiere la definición de la función objetivo o de error a ser minimizada. En este caso dicha función está dada por [Hoshiya y Saito, 1984]:

$$FO_{k,c} = \left[ \sum_{i=1}^N (\gamma_{k,c}(i) - \beta_{k,c})^2 \right]^{1/2} \quad (8.14)$$

Donde

$$\beta_{k,c} = \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{k,c}(i)}{N} \quad (8.15)$$

y

$$\gamma_k(i) = \frac{(K_i - K_i^*)^2}{K_i^2} ; \quad \gamma_c(i) = \frac{(C_i - C_i^*)^2}{C_i^2} \quad (8.16)$$

Donde  $K_i^*$  y  $C_i^*$  son los valores de la rigidez secante y amortiguamiento viscoso equivalente predichos por el modelo respectivamente.  $K_i$  y  $C_i$  son los valores de los mismos parámetros mencionados pero obtenidos de los datos reales. Los valores de  $K_i$  y  $C_i$  se utilizan normalizados con respecto a los valores correspondientes al intervalo de comportamiento lineal.  $N$  es el número de semiciclos histeréticos empleados en la estimación.

$\gamma_{k,c}(i)$  representa el valor cuadrático normalizado de la diferencia entre las mediciones y estimaciones; ya que  $\beta_{k,c}$  es el promedio de  $\gamma_{k,c}(i)$ , la función objetivo,  $FO$ , muestra la dispersión en términos de la raíz cuadrada del valor cuadrático medio de cada  $\gamma_{k,c}(i)$  con respecto al valor central  $\beta_{k,c}$ . Por lo tanto  $FO_{\min}$  significa que la diferencia entre cada observación y su estimación correspondiente es mínima tanto en valor medio como en dispersión.

Los coeficientes a ser determinados y que aparecen en las ecuaciones (8.1) y (8.2) son los siguientes:  $a_{k,c}$ ,  $b_{k,c}$ ,  $r_{k,c}$ ,  $s_{k,c}$ ,  $q$ .

Es decir, se trata de obtener

$$FO_{\min} = FO(a_{k,c}, b_{k,c}, r_{k,c}, s_{k,c}, q) \quad (8.17)$$

La información que se tiene hasta este punto para cada uno de los semiciclos histeréticos es la siguiente: rigidez secante, coeficiente de amortiguamiento viscoso equivalente y número de semiciclos acumulados.

#### 8.3.4.2 ALGORITMO DE ESTIMACIÓN

Para la estimación de los parámetros de del modelo de deterioro se propone un procedimiento combinado (fig. 8.5) de filtro de Kalman extendido estacionario y optimización iterativa convencional. Para lo cual, se dividen en dos grupos el conjunto de variables.

Grupo I: variables  $r_{k,c}$ ,  $s_{k,c}$  y  $q$ .

Grupo II: variables  $a_{k,c}$ ,  $b_{k,c}$ .

El procedimiento es el siguiente:

1. Se fijan dos de las variables del grupo I. Con la variable restante (*var*) se procede al análisis.
2. Se determina el error para diferentes valores de *var*. Se determinan los valores óptimos de las variables del grupo II mediante el filtro de Kalman.
3. Se escoge el valor de *var* correspondiente al error mínimo.
4. Se vuelve a iterar (paso 1) con otra variable del grupo I.
5. Se repiten los pasos del 1 al 4 hasta que las diferencias entre las variables entre dos ciclos consecutivos sean insignificantes.

En el paso 2 del procedimiento anterior se utiliza el filtro de Kalman en una forma estacionaria. Es decir, el vector de estado no cambia durante todo el proceso. Las ecuaciones dinámica y de mediciones son las siguientes:

$$\begin{Bmatrix} a_{k,c} \\ b_{k,c} \end{Bmatrix}_{\text{semiciclo}_i} = \begin{Bmatrix} a_{k,c} \\ b_{k,c} \end{Bmatrix}_{\text{semiciclo}_{i+1}} \quad (8.18)$$

$$h_{\text{semiciclo}_i} = \begin{Bmatrix} k_o * e^{(a_k \Delta^{r_k} + b_k D^{s_k})} \\ c_o * (1 + a_c \ln(1 + \Delta^{r_c})) * (1 + b_c \ln(1 + D^{s_c})) \end{Bmatrix} \quad (8.19)$$

El par  $[F, H]$  en la estimación de las leyes de variación de las rigideces, en este caso, está dado por:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \left[ \Delta^{r_k} e^{(a_k \Delta^{r_k} + b_k D^{s_k})}, D^{s_k} e^{(a_k \Delta^{r_k} + b_k D^{s_k})} \right] \right\} \quad (8.20)$$

Para los amortiguamientos se tiene el siguiente par  $[F, H]$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \left[ \ln(1 + \Delta^{r_c})(1 + b_c \ln(1 + D^{s_c})), \ln(1 + D^{s_c})(1 + a_c \ln(1 + \Delta^{r_c})) \right] \right\} \quad (8.21)$$

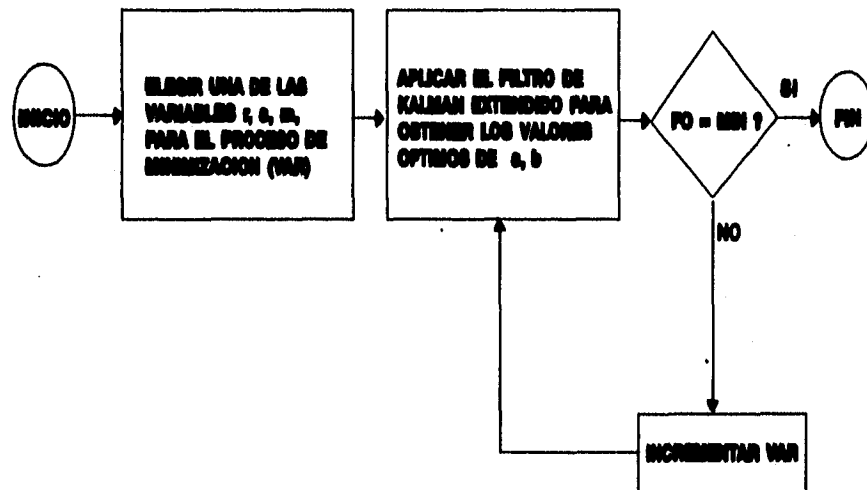


Fig. 8.5 Procedimiento propuesto de estimación de los parámetros del modelo de deterioro.

#### 8.4 EJEMPLO NUMÉRICO

La metodología propuesta se aplicó en la determinación de las propiedades dinámicas de un modelo de un marco de edificio de 10 niveles de concreto reforzado (fig. 8.6). El edificio en cuestión fue diseñado de acuerdo al Reglamento de Construcciones del Distrito Federal de 1987. Se obtuvieron señales simuladas de respuesta en desplazamientos y aceleraciones (figs. 8.8 y 8.9) en los niveles 3, 7 y 10 del modelo, ante el componente (escalado) EW (fig. 8.7) del registro SCT del sismo del 19 de septiembre de 1985. El factor de escala arbitrario de la excitación fue de 2.

Las señales se obtuvieron con el programa DRAIN-2D [Kanaan y Powell, 1973]. Las traveses del modelo fueron representadas mediante el modelo de comportamiento con degradación de Takeda. Para las columnas se utilizó un modelo elastoplástico.

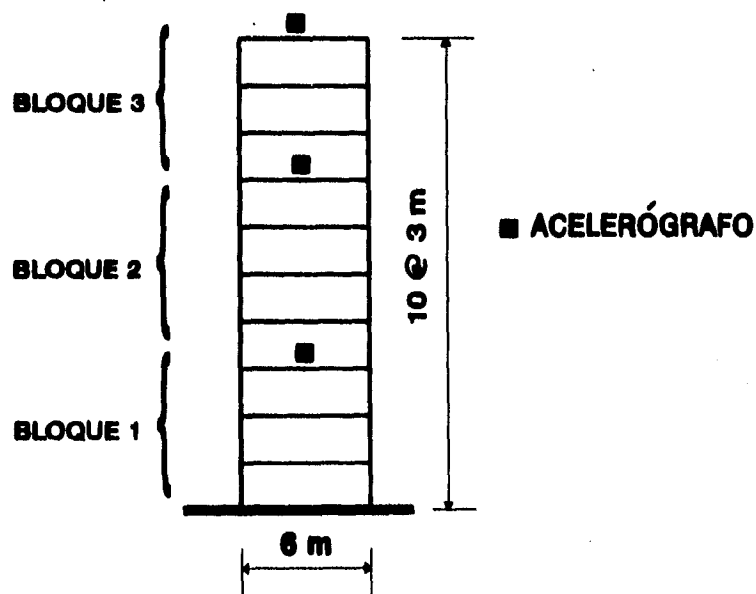


Fig. 8.6 Modelo de edificio de concreto reforzado.

#### 8.4.1 ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL MODELO

##### MATRIZ DE MASA

Se supusieron conocidas las masas de todos los niveles e iguales a 0.05 t s<sup>2</sup>/cm. El orden del sistema reducido es igual a tres y la matriz de masas se condensó a esa dimensión mediante la utilización de un polinomio de interpolación de tercer orden. La matriz de masa que se obtuvo es la siguiente:

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} 0.1787 & 0.0103 & -0.0097 \\ 0.0103 & 0.1787 & 0.0172 \\ -0.0097 & 0.0172 & 0.0663 \end{bmatrix}$$

##### RIGIDECES SECANTES Y COEFICIENTES DE AMORTIGUAMIENTO

Mediante la utilización de los registros de aceleraciones, desplazamientos y de la matriz de masa, arriba calculada, fue posible determinar los ciclos histeréticos y por lo tanto las rigideces secantes y coeficientes de amortiguamiento viscoso de cada uno de los semiciclos para los distintos bloques del modelo de marco del edificio en cuestión. En la fig. 8.10, se muestran los ciclos histeréticos para cada uno de los bloques. En dichos ciclos se pueden apreciar grandes fluctuaciones, sobre todo en los bloques con mayor comportamiento no lineal (bloques 1 y 2). Dichas fluctuaciones se deben al efecto combinado de los modelos empleados para representar traveses y columnas del sistema y al comportamiento no lineal de conjunto de cada uno de los bloques. En las figs. 8.11a, 8.12a, y 8.13a, se muestran las rigideces secantes con respecto a los desplazamientos relativos de los semiciclos. En las figs. 8.14a, 8.15a, y 8.16a, se muestran los factores de amortiguamiento histerético con respecto a los desplazamientos relativos de los semiciclos.



### PARÁMETROS DEL MODELO DE DETERIORO

De acuerdo a los modelos utilizados para representar el comportamiento de traveses y columnas del modelo de edificio, las funciones del modelo de deterioro para este caso son las siguientes:

$$k = k_0 * e^{(a_k \Delta + b_k D)} \quad (8.22)$$

$$c = c_0 * (1 + a_c \ln(1 + \Delta)) * (1 + b_c \ln(1 + D)) \quad (8.23)$$

Donde el coeficiente de daño acumulado  $D$  está dado en este caso por el desplazamiento relativo máximo alcanzado en los semiciclos previos.

Los valores estimados de los parámetros del modelo de deterioro se muestran en la Tabla 8.1. También se presentan en la misma tabla los valores de la función de error, definida por la ecuación (8.14), para cada uno de los bloques del modelo del marco del edificio.

En las figs. 8.11, 8.12, y 8.13, se comparan las rigideces secantes reales y predichas para cada uno de los bloques del marco del edificio en cuestión.

En las figuras 8.14, 8.15, y 8.16 se comparan los coeficientes de amortiguamiento histerético equivalentes reales y predichos para cada uno de los bloques del marco del edificio en cuestión.

Se observa que en general si se logra reproducir el comportamiento real del sistema. Las rigideces secantes reales y predichas son muy parecidas, lo cual se refleja en valores pequeños de la función objetivo o de error. En el caso del amortiguamiento, aún cuando el comportamiento general si se logra reproducir, se presenta una dispersión mayor entre valores reales y predichos, lo cual se refleja en valores mayores de la función objetivo con

respecto a los que se obtienen en el caso de las rigideces.

Tabla 8.1 Resultados de la estimación de los parámetros del modelo de deterioro.

BLOQUE	P A R A M E T R O S					
	R I G I D E Z			A M O R T I G U A M I E N T O		
	$a_r$	$b_r$	FO	$a_c$	$b_c$	FO
1	-0.0189	-0.0130	1.57	0.1209	0.5665	47.84
2	-0.0069	-0.0113	1.63	0.0163	0.5260	93.27
3	-0.0164	-0.0227	2.08	0.0133	0.8859	85.85

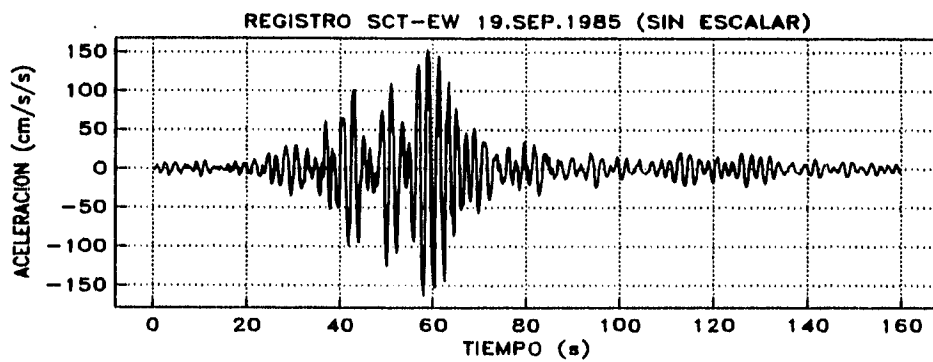


Fig. 8.7 Excitación utilizada en el ejemplo numérico.

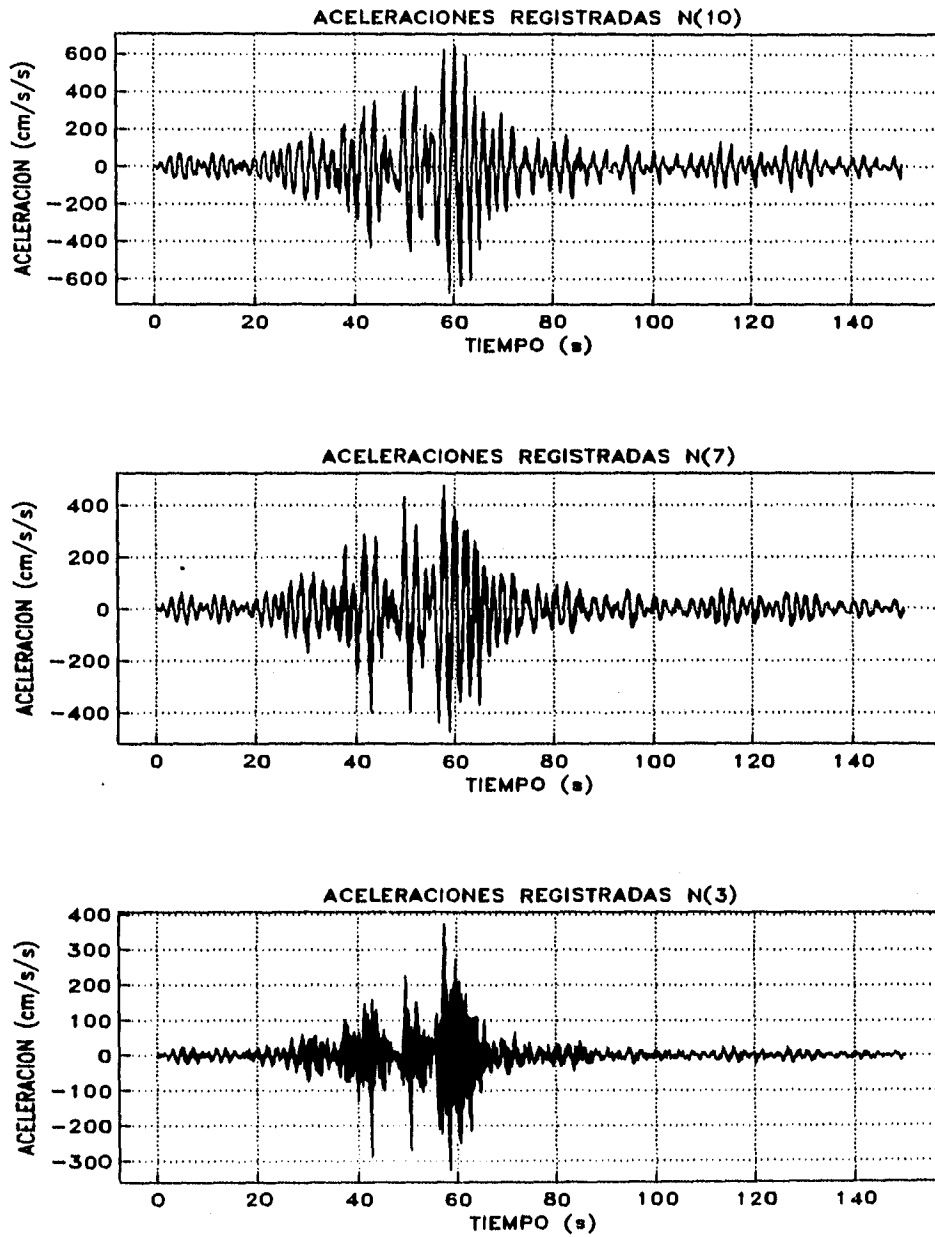


Fig. 8.8 Aceleraciones registradas en el edificio.

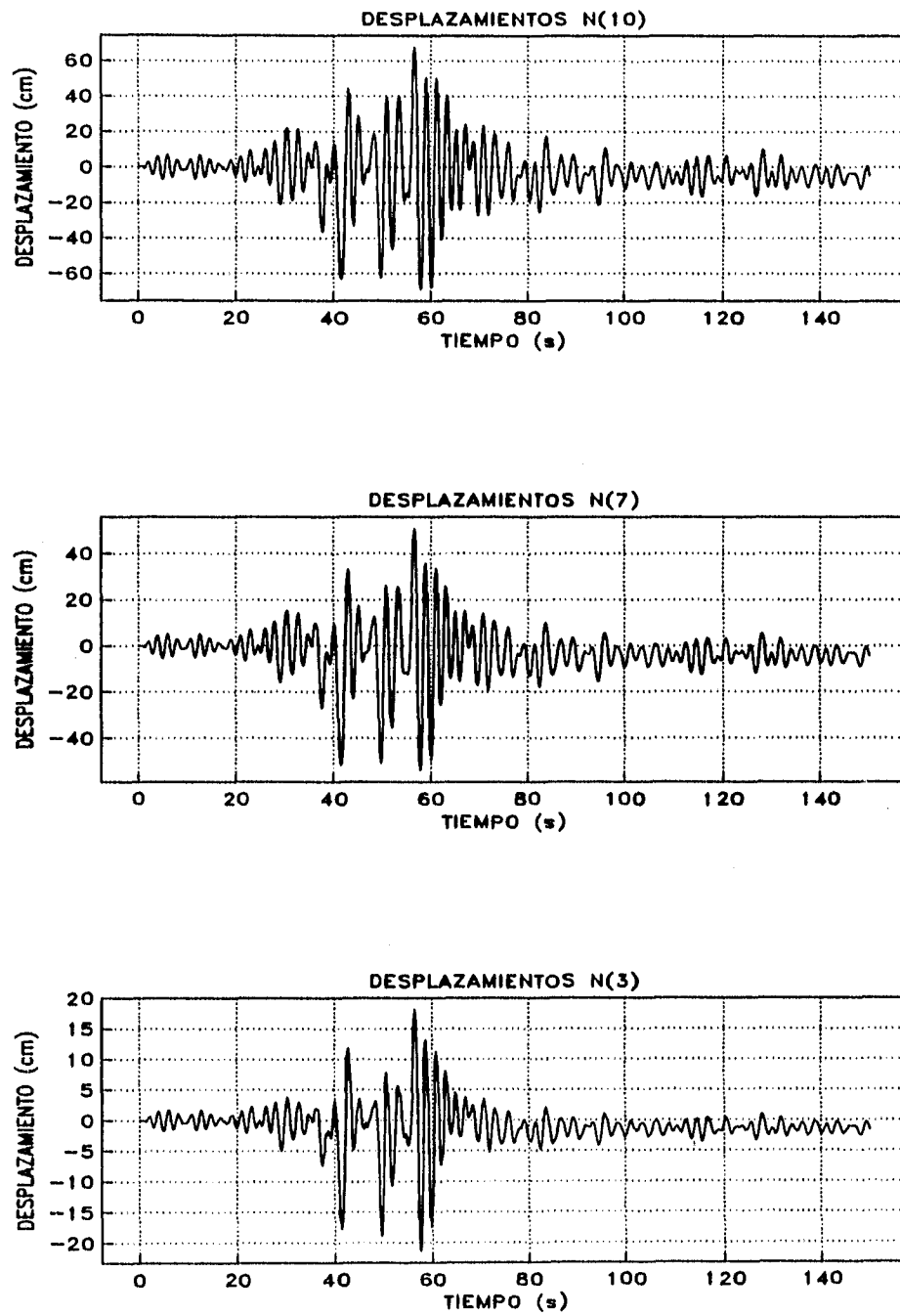


Fig. 8.9 Desplazamientos obtenidos del edificio

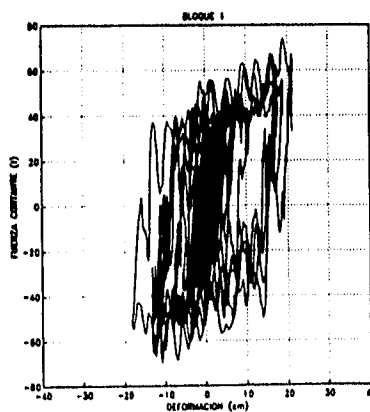
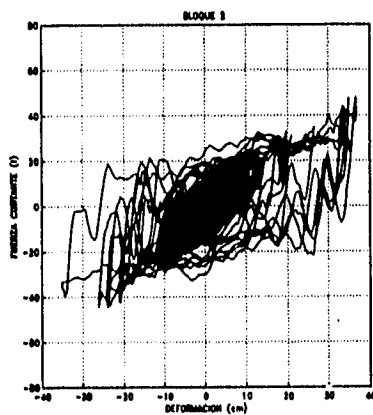
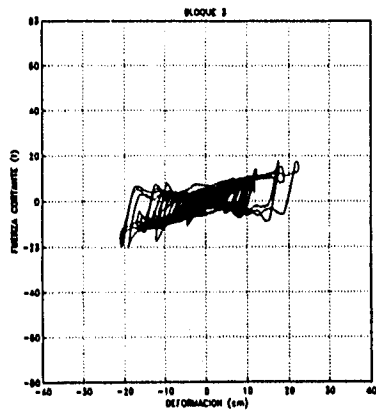
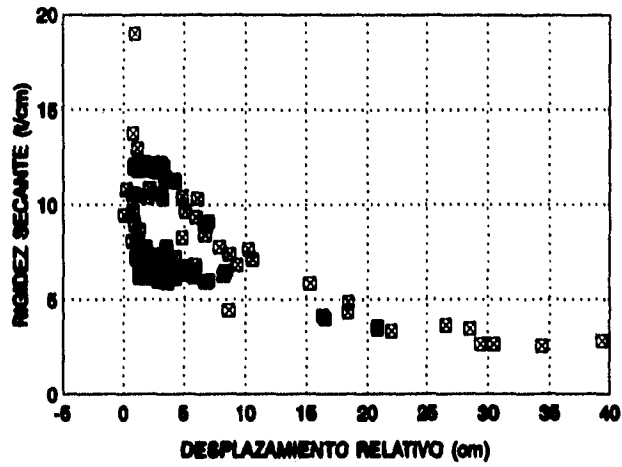


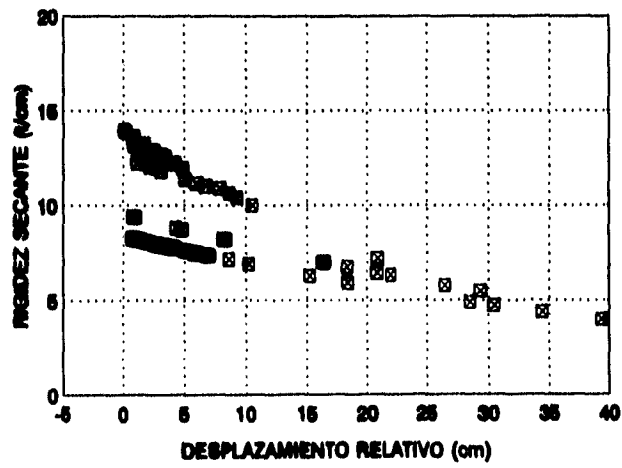
Fig. 8.10 Ciclos histeréticos de los tres bloques del edificio.

**REAL (BLOQUE 1)**



a)

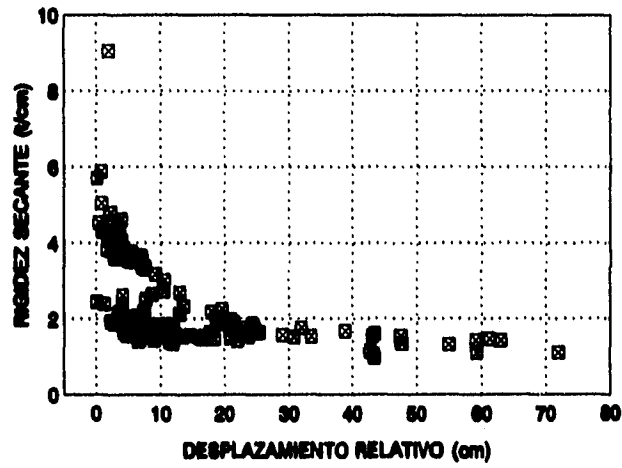
**PREDICHO (BLOQUE 1)**



b)

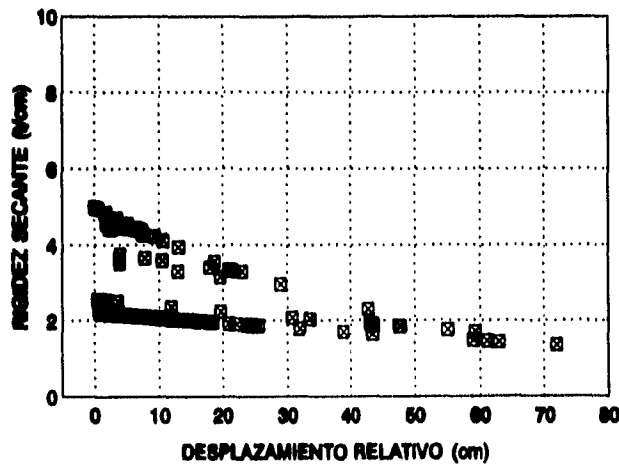
Fig. 8.11 Rigideces secantes reales (a) y predichas (b) para el bloque 1.

REAL (BLOQUE 2)



a)

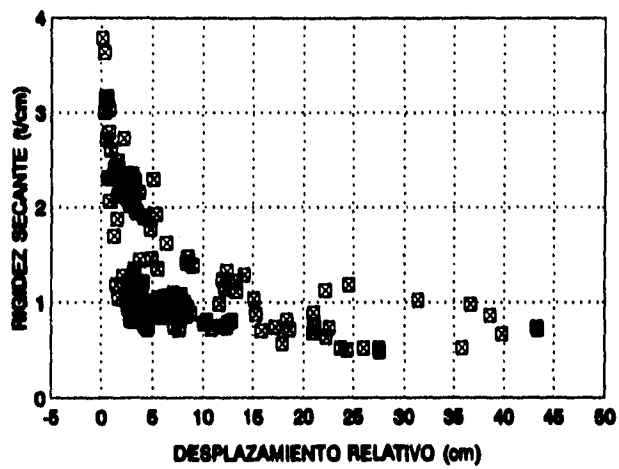
PREDICHO (BLOQUE 2)



b)

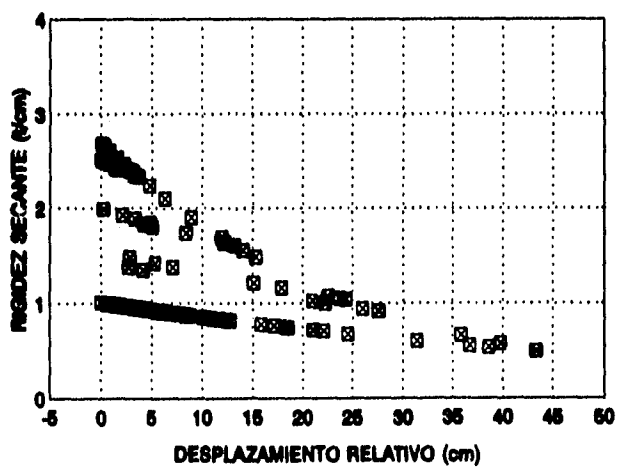
Fig. 8.12 Rigideces secantes reales (a) y predichas (b) para el bloque 2.

**REAL (BLOQUE 3)**



a)

**PREDICHO (BLOQUE 3)**

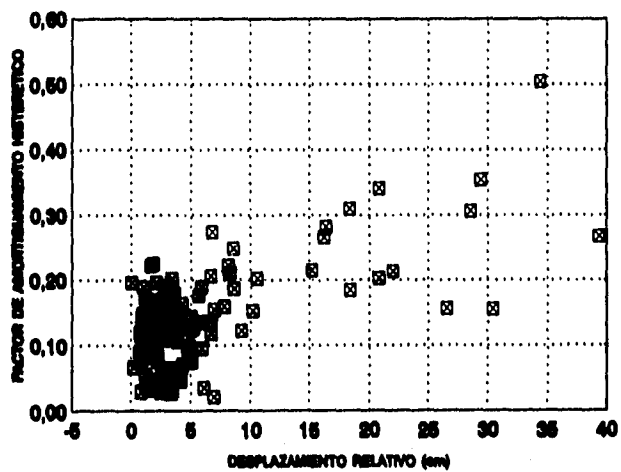


b)

Fig. 8.13 Rigideces secantes reales (a) y predichas (b) para el bloque 3.

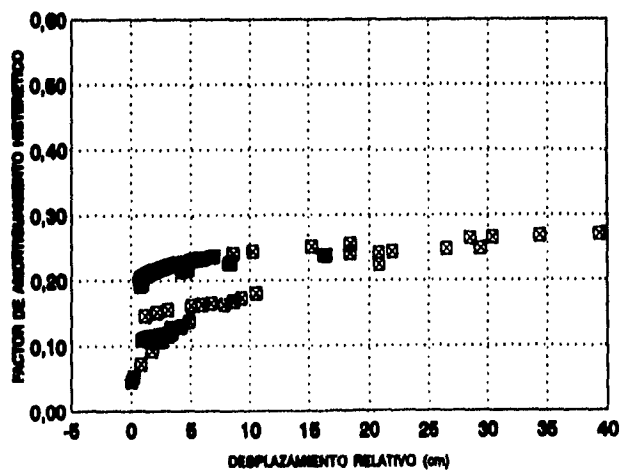


## REAL (BLOQUE 1)



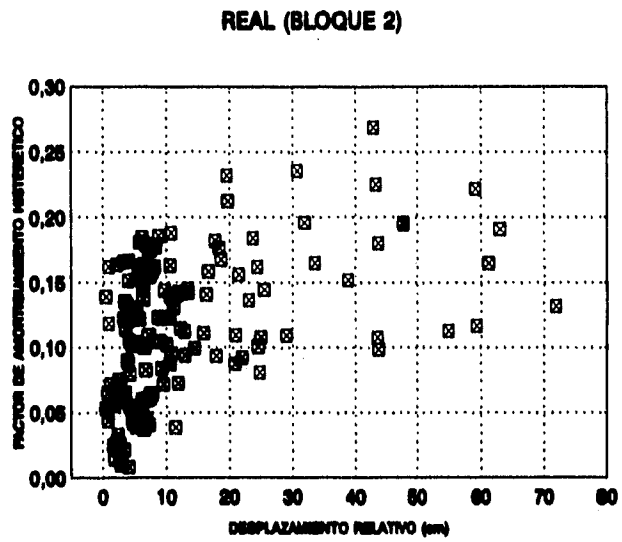
a)

## PREDICHO (BLOQUE 1)

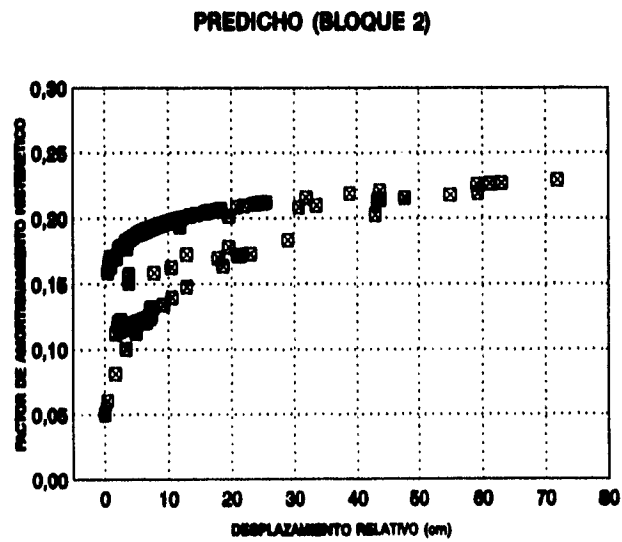


b)

Fig. 8.14 Amortiguamiento histérico real (a) y predicho (b) del bloque 1.



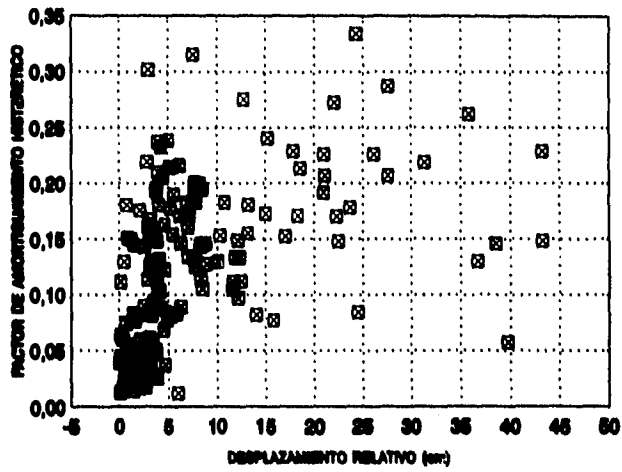
a)



b)

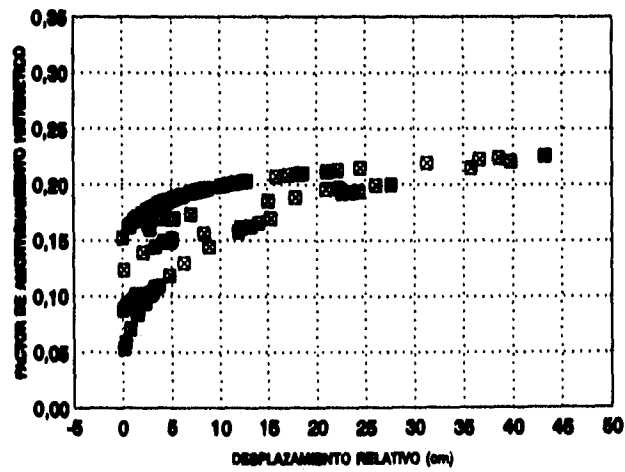
Fig. 8.15 Amortiguamiento histerético real (a) y predicho (b) del bloque 2.

REAL (BLOQUE 3)



a)

PREDICHO (BLOQUE 3)



b)

Fig. 8.16 Amortiguamiento histerético real (a) y predicho (b) del bloque 3.

## SIMBOLOGÍA

$k_0$	rigidez secante inicial
$c_0$	coeficiente de amortiguamiento viscoso inicial
$\Delta$	amplitud de medio ciclo de respuesta
$D$	coeficiente de daño estructural acumulado
$a, b, r, s, q$	parámetros del modelo de deterioro
$E_c$	energía cinética
$M$	matriz de masa
$\bar{M}$	matriz condensada de masa
$C$	matriz de amortiguamiento
$K$	matriz de rigidez
$X, \dot{X}, \ddot{X}$	vectores de desplazamientos, velocidades, y aceleraciones
$J$	vector de direccionalidad de la excitación
$\ddot{x}_g$	aceleración del terreno
$Y_{cl}$	coordenadas con instrumentos
$Y_{nl}$	coordenadas sin instrumentos
$T$	matriz de transformación
$K_i$	rigidez secante del semiciclo $i$
$V_i$	fuerza cortante asociada al semiciclo $i$
$\xi_{eq}$	coeficiente de amortiguamiento histerético equivalente
$C_{eq}$	coeficiente de amortiguamiento viscoso equivalente
$\omega$	frecuencia natural de vibración
$A_i$	área del semiciclo histerético $i$
$FO$	función objetivo o de error
$\gamma$	valor cuadrático normalizado de la diferencia entre mediciones y estimaciones
$\beta$	promedio de las $\gamma$ 's

- $K^*$  rigidez secante predicha por el modelo
- $C^*$  amortiguamiento viscoso equivalente predicho por el modelo
- $h$  vector de funciones de medición
- $H$  matriz de coeficientes linealizados de la ecuación de mediciones
- $F$  matriz de coeficientes linealizados de la ecuación de estado

# 9

## PREDICCIÓN DE RESPUESTA SÍSMICA

---

9.1 El problema de la predicción de respuesta con modelos simplificados .....	136
9.2 Algoritmo de predicción propuesto .....	139
9.2.1 Estimación de los parámetros óptimos .....	140
9.3 Corrección de la respuesta por deriva o desplazamientos permanentes .....	142
9.4 Ejemplos numéricos .....	144
Simbología .....	150

---

El objetivo de este capítulo es presentar una estrategia de cálculo o predicción de respuesta de sistemas cuyas propiedades dinámicas dependen de ciertas características de la respuesta. La validación de la estrategia de predicción propuesta se realiza para dos excitaciones diferentes.

### **9.1 EL PROBLEMA DE LA PREDICCIÓN DE RESPUESTA CON MODELOS SIMPLIFICADOS**

Uno de los propósitos de construir modelos de sistemas reales a partir de observaciones de los mismos es tratar de conocer con anticipación el comportamiento del sistema ante excitaciones futuras.

La utilización de modelos lineales equivalentes representativos de sistemas no lineales, como se ha visto, requiere el establecimiento de ciertas leyes que determinen los cambios en sus propiedades. En estos casos, las propiedades o parámetros dependen de la respuesta del modelo y, a su vez, la respuesta del modelo depende de las propiedades del mismo.

Lo anterior es un problema común encontrado en el cálculo de respuesta paso a paso de sistemas no lineales. Se han planteado varias formas de resolver este problema. Entre ellas destacan las siguientes:

1. Se utilizan propiedades del instante o ventana  $i$  para el cálculo de la respuesta en el instante o ventana  $i+1$ . Para intervalos pequeños de tiempo, este método puede ser adecuado, pero cuando se manejan ventanas de tiempo el error puede ser importante.
2. Se utilizan procedimientos iterativos, es decir, se suponen al principio valores tentativos de las propiedades o parámetros (normalmente se escogen los del instante o ventana anterior) y se realizan correcciones sucesivas con base en las funciones que relacionan la

respuesta y los parámetros del modelo (funciones de predicción). Este procedimiento presenta, en ocasiones, divergencia. Esta divergencia se presenta cuando la función de error (ver figs. 9.1 y 9.2), definida por la ecuación (6.1), no cruza por cero, debido a las características de las funciones de predicción empleadas.

$$FO = \left[ \sum_{i=1}^n (\gamma_i - \beta)^2 \right]^{1/2} \quad (6.1)$$

Donde

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^n \gamma_i}{n} \quad (6.2)$$

y

$$\gamma_i = \frac{\sum_{j=1}^m (g_{ij} - g_{ij}^*)^2}{\sum_{j=1}^m g_{ij}^2} \quad (6.3)$$

$g_{ij}$  es la observación de la función de respuesta del muestreo  $j$  en el instante  $i$ ;  $g_{ij}^*$  es el valor predicho de la función de respuesta del muestreo  $j$  en el instante  $i$ ;  $m$  es el número de puntos de muestreo a cada instante;  $n$  es el número total de instantes de tiempo en la ventana.

Se han encontrado los siguientes problemas:

1. Los parámetros se quedan fluctuando cerca del error mínimo, entre dos conjuntos de valores (fig. 9.1).



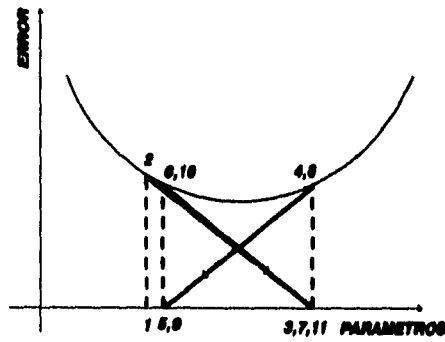


Fig. 9.1 Problema de divergencia en método convencional. Fluctuación entre conjuntos de parámetros.

2. Se presenta inestabilidad numérica creciente. Los parámetros de rigidez bajan a cada iteración, lo que hace que los desplazamientos aumenten y por consiguiente la rigidez baje aún más y así sucesivamente (fig. 9.2).

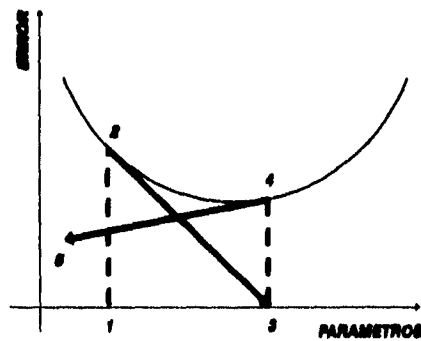


Fig. 9.2 Problema de divergencia en método convencional. Inestabilidad creciente.

## 9.2 ALGORITMO DE PREDICCIÓN PROPUESTO

El algoritmo de predicción de respuesta que se propone, es un procedimiento iterativo que opera por ventanas. En cada ventana de tiempo se realizan iteraciones con el fin de obtener los parámetros óptimos del sistema y la respuesta asociada a éstos. A cada iteración, sobre toda la ventana, se calcula la respuesta paso a paso del sistema, la cual se utiliza como información dentro del proceso de estimación de los parámetros. Los parámetros se estiman mediante el filtro de Kalman extendido. El esquema general de este procedimiento se puede ver en el diagrama de flujo de la fig. 9.3.

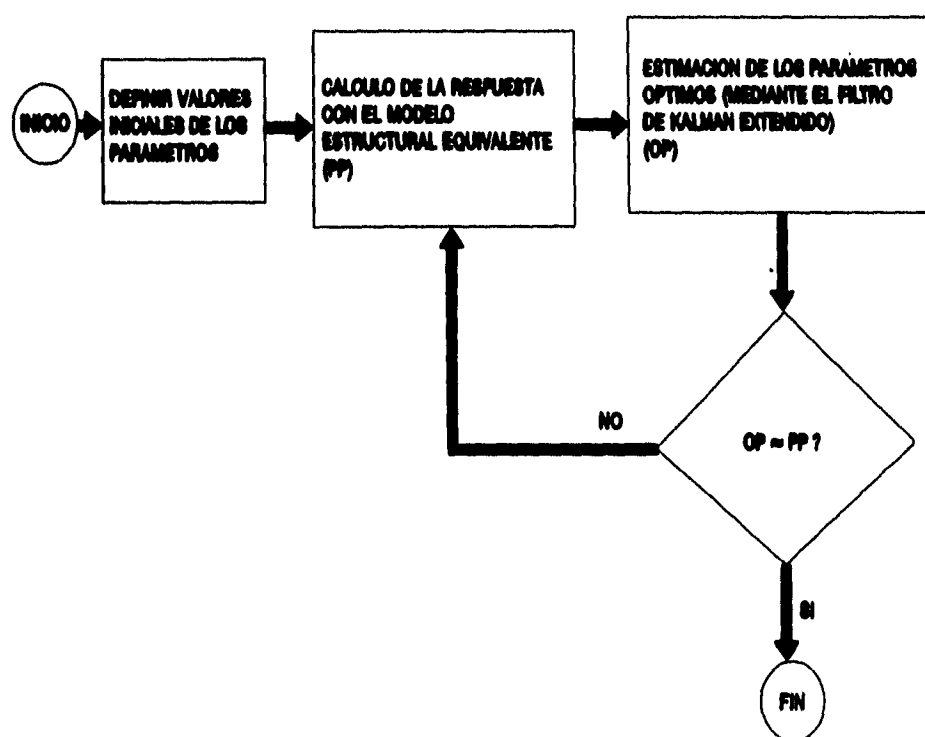


Fig. 9.3 Diagrama de flujo del procedimiento de predicción de respuesta propuesto.

### 9.2.1 ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS ÓPTIMOS

Para el cálculo o predicción de respuesta se emplean las funciones de predicción, definadas por las ecuaciones 8.1 a 8.3.

De acuerdo a dichas expresiones, la rigidez y amortiguamiento equivalentes, en una determinada ventana, dependen de los valores de  $\Delta_i$  y  $D_i$ , los cuales no se conocen de antemano. En este trabajo, se propone estimar dichos valores para cada ventana, y como consecuencia de lo mismo se obtienen las historias de respuesta y las propiedades equivalentes del sistema para dicha ventana de cálculo. El proceso descrito se ilustra en el diagrama de la figura 9.4.

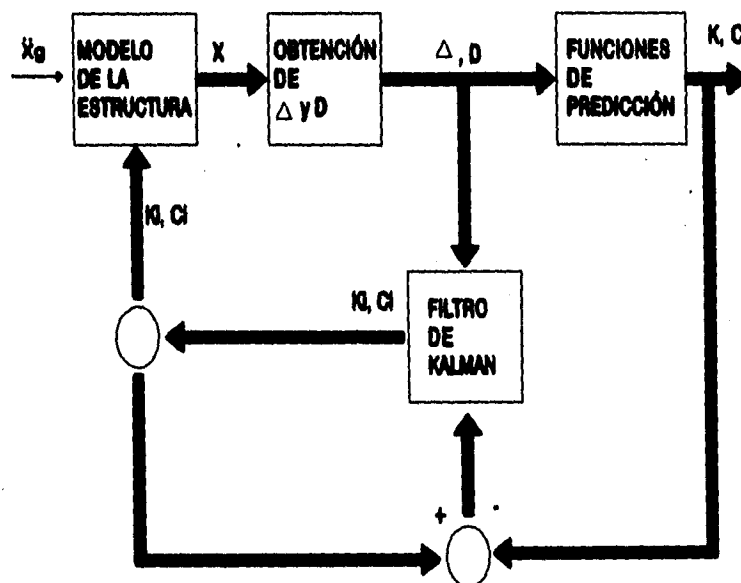


Fig. 9.4 Procedimiento de estimación de parámetros para predicción de respuesta.

El cálculo de la respuesta se realiza de acuerdo al siguiente diagrama:

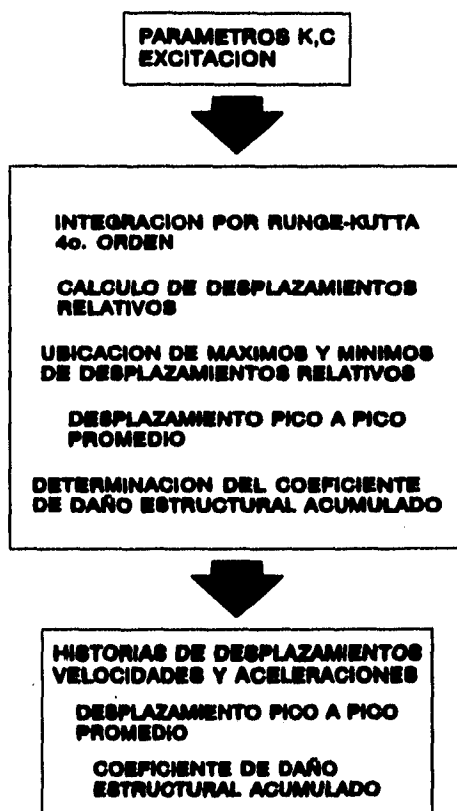


Fig. 9.5 Procedimiento de cálculo de respuesta.

El coeficiente de daño estructural acumulado en el semiciclo  $j$  se calcula con la siguiente expresión

$$D_j = \sum_{i=1}^j \Delta_i^q$$

El comportamiento de las estimaciones de los parámetros mejora notablemente (se evita la divergencia) con respecto al método iterativo convencional. Con el procedimiento propuesto se presenta un comportamiento asintótico hacia los parámetros óptimos (fig. 9.6).

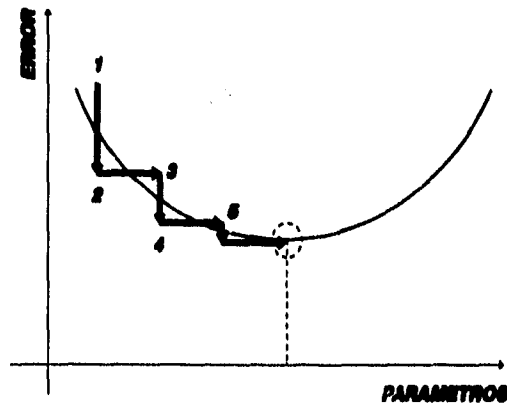


Fig. 9.6 Comportamiento de las estimaciones con el algoritmo de predicción propuesto.

### 9.3 CORRECCIÓN DE LA RESPUESTA POR DERIVA O DESPLAZAMIENTOS PERMANENTES

Como se ha mencionado, el empleo de un modelo lineal equivalente para el cálculo de respuesta supone que las variables están referidas al origen de coordenadas. Es decir, los valores en el origen, de desplazamientos, velocidades y aceleraciones, son cero. El comportamiento no lineal de los sistemas estructurales durante temblores fuertes y la asimetría de los ciclos de carga y descarga hacen que el origen de coordenadas cambie a cada instante.

Se considera que existen dos factores principales que definen la magnitud de la deriva en los semiciclos histeréticos. Dichos factores son:

1. Variaciones de rigidez de un semiciclo a otro.
2. Asimetría en los semiciclos de carga y descarga.

Considere los siguientes semiciclos histeréticos

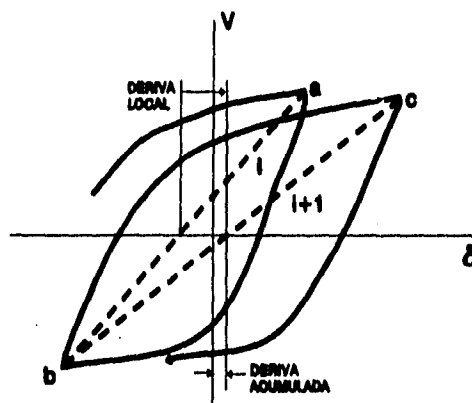


Fig. 9.7 Derivas locales y acumuladas en los semiciclos histeréticos.

Por geometría, la deriva local del semiciclo  $i+1$  con respecto al semiciclo  $i$  está dada por

$$\rho_{i+1} = \frac{V_b}{K_i} \left( 1 - \frac{K_{i+1}}{K_i} \right) \quad (9.1)$$

Donde  $K_i$  y  $K_{i+1}$  son las rigideces de los semiciclos  $i$  e  $i+1$  respectivamente.  $V_b$  es la fuerza cortante al inicio del semiciclo  $i+1$ . La deriva total o acumulada del semiciclo  $i+1$  es la siguiente

$$P_{i+1} = \sum_{j=1}^{i+1} p_j \quad (9.2)$$

Por lo tanto, en cada ventana, así como se estima una rigidez y un amortiguamiento viscoso equivalente, se determina también una deriva local equivalente, consecuencia del cambio de rigidez con respecto a la ventana anterior y a la asimetría media de los semiciclos de carga y descarga en la ventana.

Para la ventana  $s+1$ , la deriva local equivalente está dada por la siguiente expresión:

$$p_{s+1} = \left(1 - \frac{K_{s+1}}{K_s}\right) (\delta_{s+1}^+ + \delta_{s+1}^-) \quad (9.3)$$

Donde,  $\delta_{s+1}^+$  y  $\delta_{s+1}^-$  son los desplazamientos máximos promedios por carga y descarga en la ventana, respectivamente.

#### 9.4 EJEMPLOS NUMÉRICOS

Se calcularon respuestas de un sistema estructural con un método convencional [DRAIN-2D, Kanaan y Powell, 1973] y con el método propuesto en este capítulo. Como sistema estructural se utilizó el modelo del marco de concreto reforzado empleado en el capítulo 8 de este trabajo.

Las respuestas en desplazamientos y aceleraciones, calculadas con ambos métodos, se presentan en las figs. 9.10 a 9.13.

A las respuestas obtenidas con el método convencional se les denomina "reales". A las obtenidas con el método propuesto se les denomina "predichas".

Se estudiaron los dos casos siguientes:

**CASO 1:**

Sismo SCT-EW, 19-septiembre-1985 (fig. 9.8). Este sismo se utilizó escalado por un factor arbitrario de 2.0.

**CASO 2:**

Sismo simulado AX120D [Grigoriu, Ruiz y Rosenblueth, 1988] (fig. 9.9). Este sismo fue escalado por un factor arbitrario de 4.0.

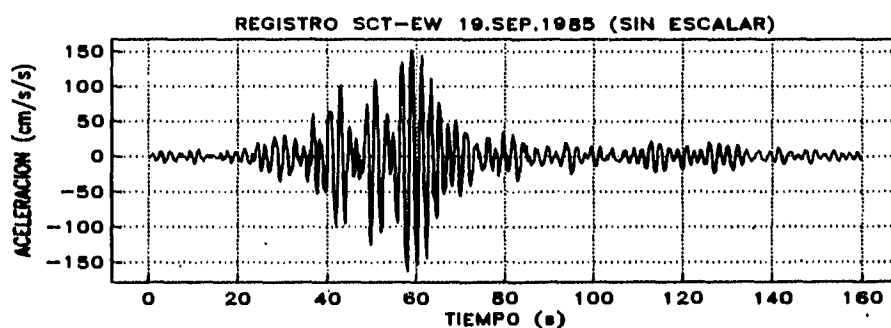


Fig. 9.8 Excitación utilizada en el caso 1.

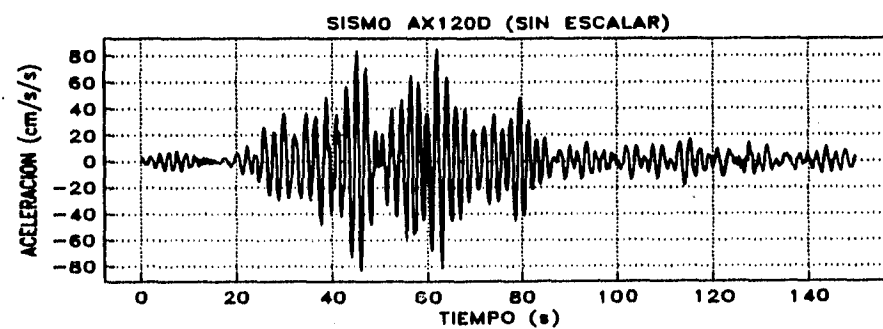


Fig. 9.9 Excitación utilizada en el caso 2.



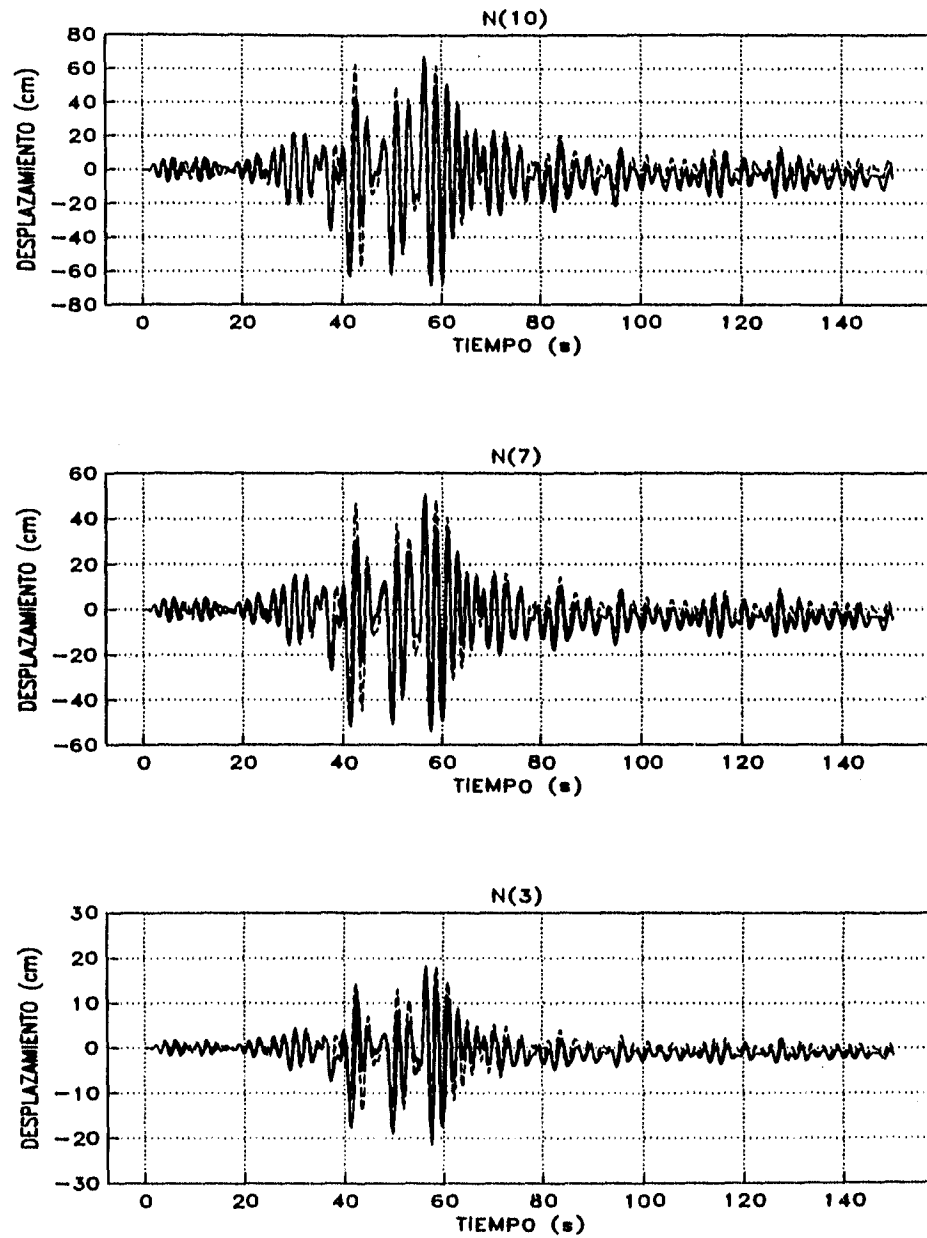


Fig. 9.10 Comparación entre desplazamientos reales (línea continúa) y predichos (línea discontinua) para el caso 1.

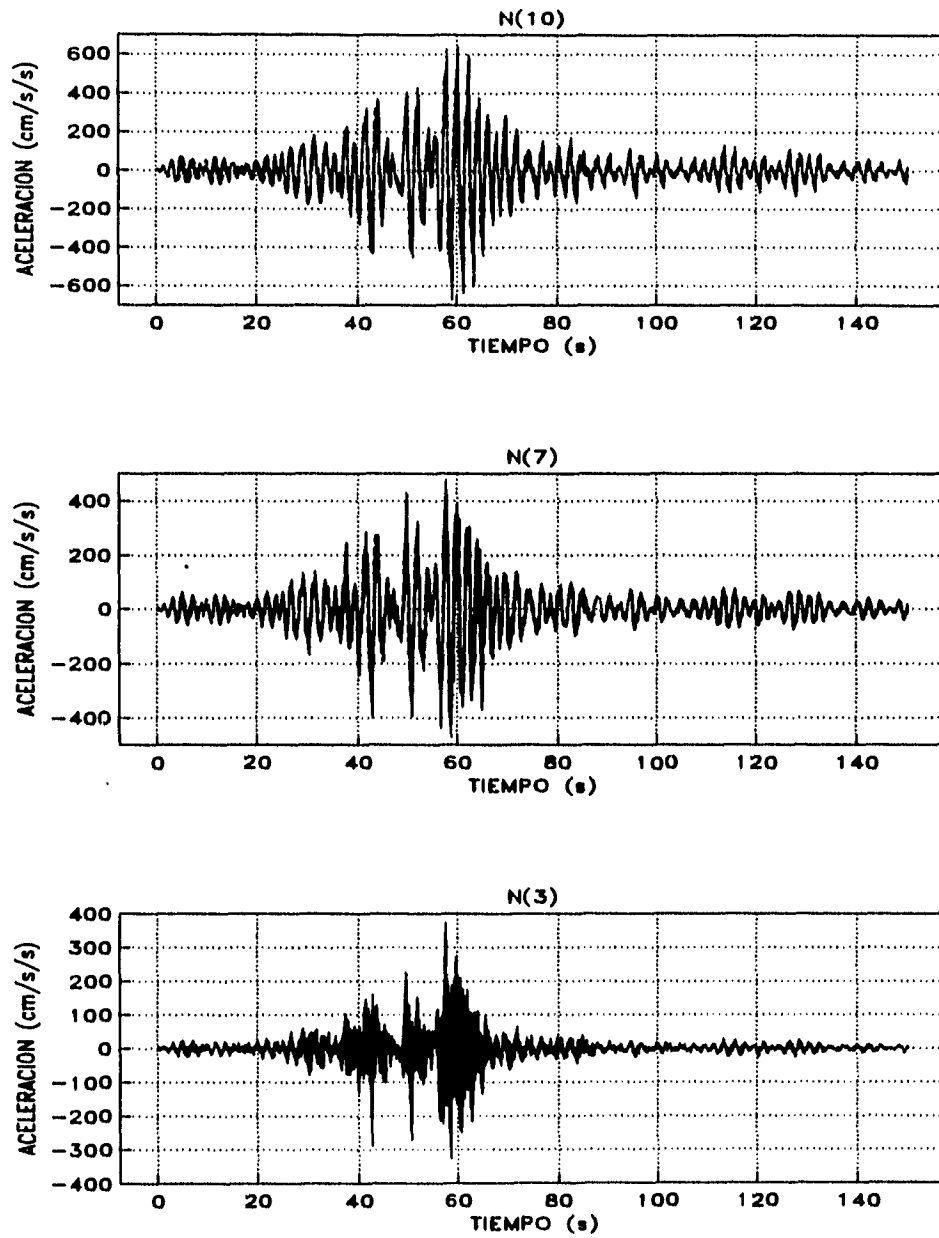


Fig. 9.11 Comparación entre aceleraciones reales (línea continua) y predichas (línea discontinua) para el caso 1.

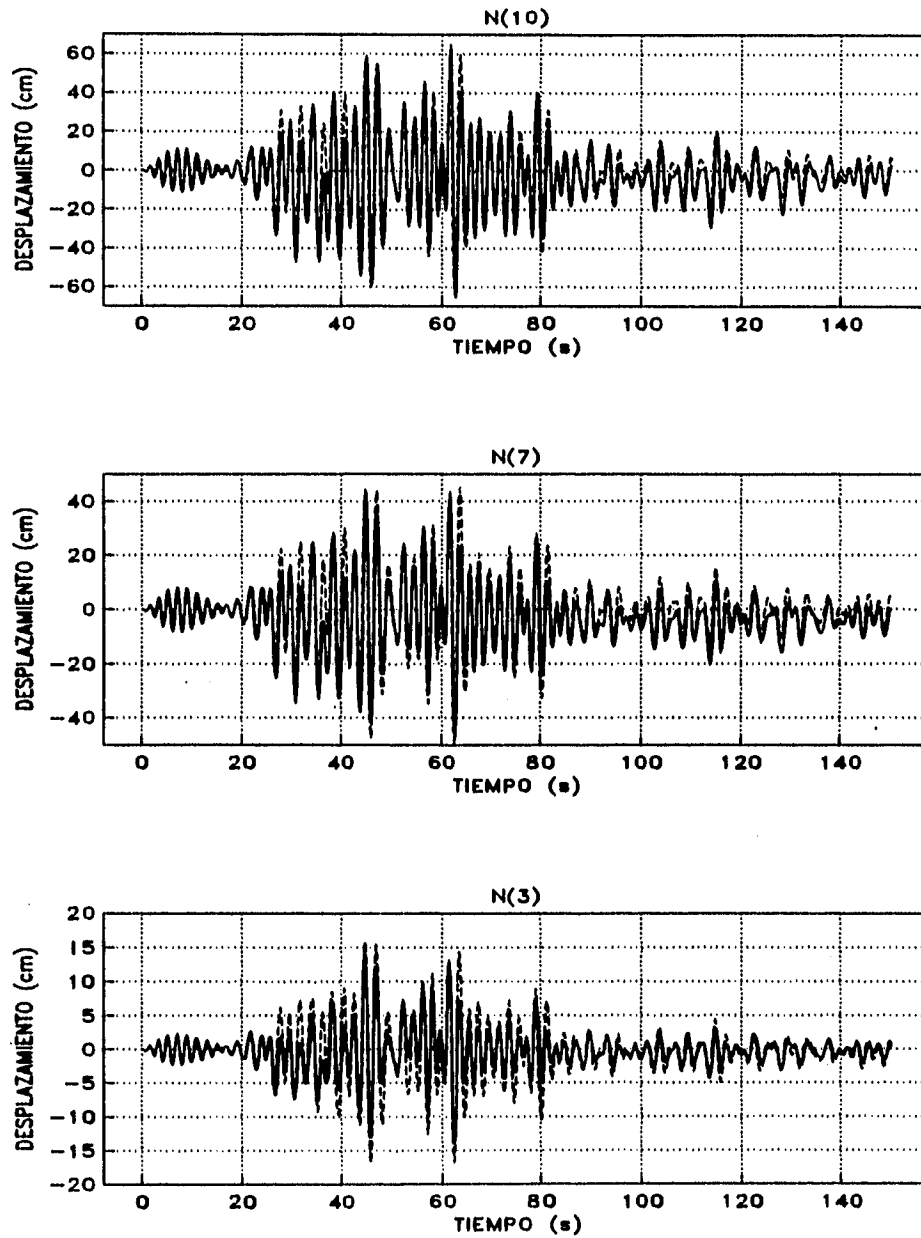


Fig. 9.12 Comparación entre desplazamientos reales (línea continúa) y predichos (línea discontinua) para el caso 2.

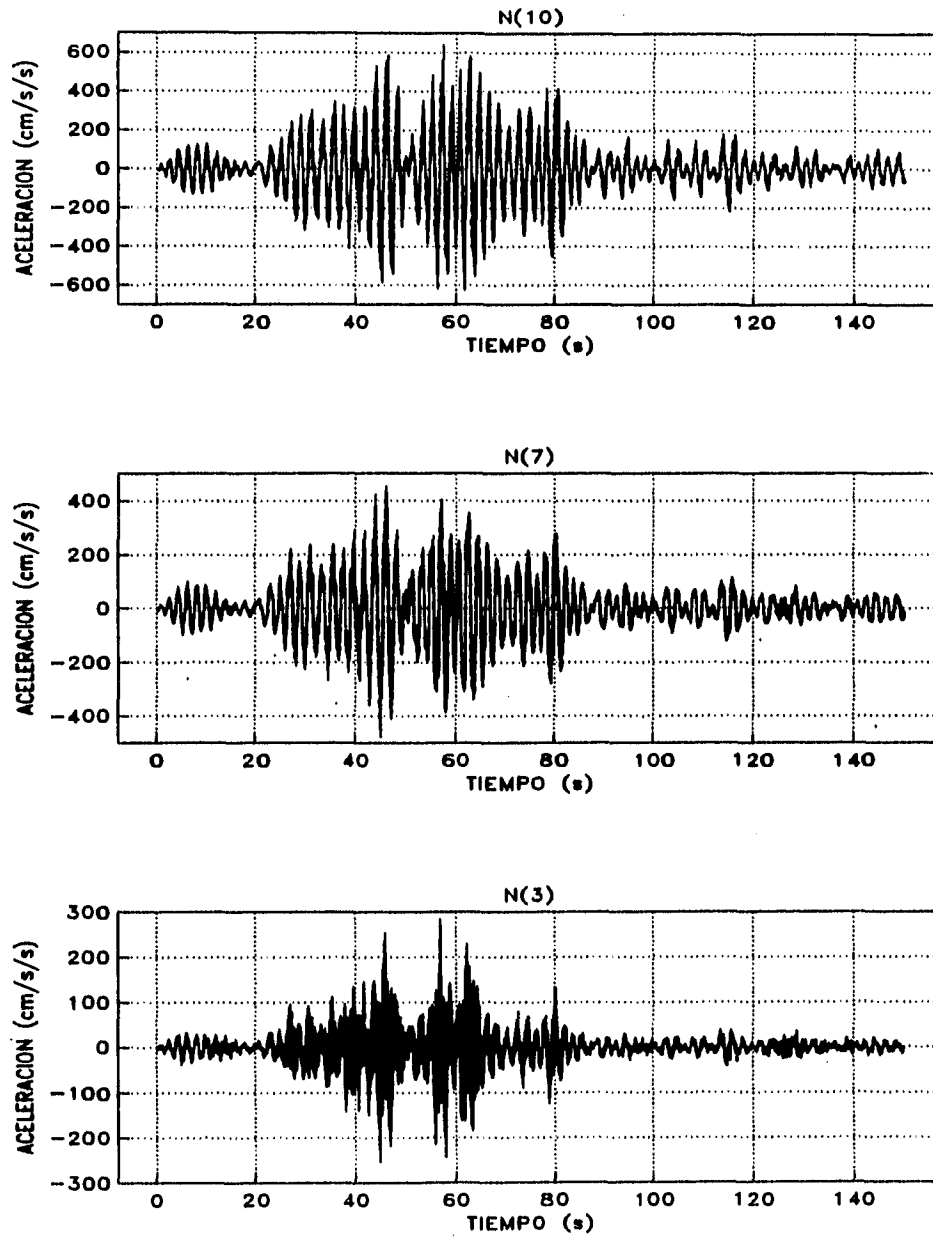


Fig. 9.13 Comparación entre aceleraciones reales (línea contínua) y predichas (línea discontínua) para el caso 2.

Se observa que, en general, existe una buena correlación entre las historias de respuesta reales y predichas obtenidas en los ejemplos. La correlación es mejor para el caso de las historias de respuesta de aceleraciones que las correspondientes a desplazamientos. En las historias de respuesta de desplazamientos se aprecian ciertas diferencias provocadas por el comportamiento no lineal localizado, y las derivas asociadas a dicho comportamiento.

### SIMBOLOGÍA

$FO$	función objetivo o de error
$\gamma$	valor cuadrático normalizado de las diferencias entre mediciones y estimaciones
$\beta$	promedio de las $\gamma$ 's
$g_{ij}$	observación de la función de respuesta del muestreo $j$ en el instante $i$
$g_{ij}^*$	valor predicho de la función de respuesta del muestreo $j$ en el instante $i$
$D$	coeficiente de daño estructural acumulado
$\Delta$	amplitud de medio ciclo de respuesta
$q$	párametro del modelo de deterioro
$\rho_i$	deriva local del semiciclo $i$ con respecto al semiciclo $i-1$
$V$	fuerza cortante
$K_i$	rigidez secante del semiciclo $i$
$P_i$	deriva acumulada en el semiciclo $i$
$\delta_s^+$	desplazamiento máximo promedio por carga en la ventana $s$
$\delta_s^-$	desplazamiento máximo promedio por descarga en la ventana $s$

## **CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

En la práctica ordinaria del diseño sísmico las estructuras se conciben con base en modelos básicamente estáticos, y aun cuando se toman en cuenta consideraciones dinámicas en su concepción, los parámetros empleados en su diseño suelen ser inadecuados para predecir su respuesta ante sollicitaciones dinámicas. Aún en el caso de tratar de ajustar los parámetros con base en la experiencia, en sistemas formados por muchos elementos, como en el caso de edificios, el proceso de ensaye y error conduce generalmente a estimaciones erróneas y por ende al fracaso en la estimación de las propiedades de la estructura.

La importancia de identificar las propiedades de las estructuras durante los eventos sísmicos va más allá del hecho de conocer las propiedades que presentó la estructura durante un evento específico. El proceso de identificación puede permitir adicionalmente lo siguiente:

- a. Calibrar modelos de comportamiento estructural.
- b. Predecir la respuesta sísmica.
- c. Determinar el grado de seguridad de las estructuras.

Durante los últimos años se ha prestado especial atención al desarrollo y mejoramiento de técnicas numéricas para la estimación de parámetros. Hace falta mucho por hacer en esta área, pero existe un área que se ha descuidado y que tal vez es tanto o más importante que la anterior. Esta área es la de las propuestas de modelos de comportamiento estructural simplificado.

El modelo estructural propuesto aquí permite rescatar las variables significativas de los sistemas estructurales con comportamiento no lineal importante y es acorde con el comportamiento sísmico observado de estos sistemas.

El método de identificación que se propone en este trabajo funciona aun en condiciones de escasa información de la respuesta, como es el caso de contar con un sólo registro en la estructura.

Las dispersiones que se presentan en los resultados se deben a los efectos no considerados en el modelado. Las funciones que se proponen para los cambios en las propiedades del sistema podrían ser sustituidas por otras funciones de la misma forma. Ante esta situación, se considera que los resultados, en materia de predicción, no se alterarían mucho.

En este trabajo se ha aplicado el filtro de Kalman extendido bajo dos versiones: la versión normal o de solución de ecuaciones diferenciales a cada instante, y la versión estacionaria, donde la no linealidad se concentra en las ecuaciones de mediciones. Siempre que sea posible se recomienda el uso del filtro de Kalman en su versión estacionaria. La razón que se evita resolver un conjunto de ecuaciones diferenciales a cada instante y, además, los vectores de estado, con este enfoque, resultan de una dimensión menor. También con este enfoque se evita el sesgo producido en las estimaciones por el desconocimiento que se tiene, en algunos casos, de las condiciones iniciales en las variables de respuesta.

En este trabajo se ha presentado un estudio sobre la estimación de parámetros de modelos denominados de esqueleto de pescado. Aún cuando se ha demostrado que para señales de respuesta traslacionales el sistema es no observable, se debe continuar explorando este modelo. Para la estimación en forma única de los parámetros del sistema se requiere la determinación (vía consideraciones analíticas o mediciones) de las deformaciones angulares promedio que se presentan en los elementos del sistema de piso de la estructura, lo cual, hasta ahora, se ve difícil de lograr.

La estrategia de estimación de parámetros del tipo de sistema suelo-estructura que se presenta aquí puede ser útil en condiciones del subsuelo como las que se presentan en la zona del lago de la ciudad de México, donde las funciones de frecuencia de la excitación son casi monocromáticas. La estrategia que se presenta aquí permite estimar la masa que participa en la interacción suelo-estructura. Este parámetro es de mucha utilidad en este tipo de estudios.



La estrategia de identificación de sistemas no lineales de múltiples grados de libertad que se presenta en este trabajo muestra que la estimación de los parámetros de amortiguamiento equivalente presentan mayor dispersión que los correspondientes a rigideces. En realidad el amortiguamiento en las estructuras es un parámetro que requiere mayor estudio con el fin de mejorar su modelado.

El método de predicción de respuesta propuesto aquí obtiene en forma óptima los parámetros equivalentes en cada ventana de cálculo de la respuesta. El método iterativo convencional presenta divergencias a menudo. En este caso el filtro de Kalman extendido se utiliza en una forma poco convencional, donde el sistema está dado por un modelo matemático de cálculo de respuesta. El filtro de Kalman es una técnica excelente para resolver problemas de optimización.

El procedimiento para incorporar la deriva en las respuestas en desplazamiento produce resultados razonables. Se observó que, a menor longitud de la ventana de cálculo, los resultados mejoran (se aproximan más a los reales). Lo anterior es debido a que los promedios que se realizan en cada ventana afectan a menos puntos de la respuesta, perdiéndose menos detalles del comportamiento no lineal.

## REFERENCIAS

Aoyama, H., (1964), "Moment-Curvature Characteristics of Reinforced Concrete Members Subjected to Axial Load and Reversal of Bending," Proceedings of The International Symposium on the Flexural Mechanics of Reinforced Concrete, ASCE-ACI, pp. 183-212.

Beck, J. L., Jennings, P. C., (1980), "Structural Identification Using Linear Models and Earthquake Records," Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.8, pp. 145-160.

Bertero, V. V., Bresler, B., (1969), "Seismic Behaviour of Reinforced Concrete Frame Structures," Proceedings of The Fourth Conference on Earthquake Engineering, Vol. 1, pp. 109-124.

Bouc, R. (1967), "Forced Vibration of Mechanical System with Hysteresis," Proceedings of 4th Conference on Non-linear Oscillation, Prague, Czechoslovakia.

Caravani, P., Thomson, W. T., (1974), "Identification of Damping Coefficient in Multidimensional Linear Systems," J. of Applied Mech., Vol.41, No.2, pp. 379-382.

Caravani, P., Watson, M. L., Thomson, W. T., (1977), "Recursive Least-Squares Time Domain Identification of Structural Parameters," J. of App. Mech., Transaccions of ASME, pp. 135-140.

Carmichael, D. G., (1979), "The State Estimation Problem in Experimental Structural Mechanics," Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering, 3rd. Ed., International Conference.

Clough, R. W., Penzien, J., (1993), *Dynamics of Structures*, 2nd Ed. McGraw-Hill.

Collins, J. y Cols., (1979), "Statistical Identification of Structures," J. AIAA, Vol.12, No.2, pp. 185-190.

Distefano, N., Rath, A., (1975), "System Identification in Nonlinear Structural Seismic Dynamics," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.5, pp. 353-372.

Distefano, N., Rath, A., (1975a), "Sequential Identification of Hysteretic and Viscous Models in Structural Seismic Dynamics," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.6, pp. 219-232.

Fisher, R. A., (1912), "On the Absolute Criterion for Fitting Frequency Curves," Messenger of Math., Vol. 41, p. 155.

Ghanem, R. G., Gavin, H., Shinozuka, M., (1991), "Experimental Verification of a Number of Structural System Identification Algorithms," Technical Report NCEER-91-0024.

Gauss, K. F., (1963), *Theory of the Motion of the Heavenly Bodies About the Sun in Conic Sections*, Dover.

Grigoriu, M., Ruiz, S. E., Rosenblueth, E. (1988). "Nonstationary Models of Seismic Ground Acceleration," Earthquake Spectra, 4, pp. 551-568.

Hoshiya, M., Saito, E., (1984), "Structural Identification by Extended Kalman Filter," J. of Engng. Mech., ASCE, Vol.110, No.12, pp. 1757-1770.

Hoshiya, M., Sutoh, A., (1992), "Extended Kalman Filter Weighted Local Iteration Method for Dynamic Structural Identification," X World Conference on Earthquake Engineering, pp. 3715-3720.

Hudson, D. E., (1979), *Reading and Interpreting Strong Motion Accelerograms*, Earthquake Engineering Research Institute.

Imai, H., Yun, C-B., Maruyama, O., Shinozuka, M., (1989), "Fundamentals of System Identification in Structural Dynamics," Technical Report NCEER-89-008.

Iwan, W. D., (1966), "A Distributed-Element Model for Hysteresis and its Steady-State Dynamic Response," J. of Applied Mechanics, Trans. ASME, 33, 4, pp. 893-900.

Iwan, W. D., Cifuentes, A. O., (1986), "A Model for System Identification of Degrading Structures," Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.14, pp. 877-890.

Jacobsen, L. S., (1930), "Steady Forced Vibration as Influenced by Damping," Trans. ASME, 52, 22, part 1, p. 169.

Jazwinski, A. H., (1970), *Stochastic Processes and Filtering Theory*, Academic Press.

Jennings, P. C., (1963), "Response of Simple Yielding Structures to Earthquake Excitation," Ph.D. Thesis, California Institute of Technology.

Kalman, R. E., (1960), "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems," J. of Basic Engineering, ASME, March, pp. 32-45.

Kalman, R. E., Bucy, R. S., (1961), "New Results in Linear Filtering and Prediction Theory," J. of Basic Engineering, ASME, March, pp. 95-108.

Kanaan, A. E., Powell, G. H., (1973). *Drain 2-D. User's Guide*. University of California at Berkeley.

Koh, C. G., See, L. M., Balendra, T., (1991), "Estimation of Structural Parameters in Time Domain. A Substructure Approach," Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.20, pp. 787-801.

Koh, C. G., See, L. M., Balendra, T., (1995), "Determination of Storey Stiffness of Three-Dimensional Frame Buildings," Engineering Structures, Vol. 17, No. 3, pp. 179-186.

Kolmogorov, A. N., "Interpolation and Extrapolation Von Stationaren Zufalligen Folgen," Bull. Acad. Sci. USSR, Ser. Math., 5, pp. 3-14.

Ljung, L., (1987), *System Identification: Theory for the User*, Prentice Hall.

Loh, C.-H., Tsaur, Y.-H., (1988), "Time Domain Estimation of Structural Parameters," Engineering Structures, Vol.10, pp. 95-105.

Mahin, S. A., Bertero, V. V., (1976), "Nonlinear Seismic Response of a Coupled Wall System," Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 102, No. ST9, pp. 1759-1780.

Maruyama, O., Yun, C.-B., Hoshiya, M., Shinozuka, M., (1989), "Program EXKAL2 for Identification of Structural Dynamic Systems," NCEER Technical Report, No. NCEER-89-0014.

McVerry, G. H., (1980), "Structural Identification in the Frequency Domain from Earthquake Records," Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 8, pp. 183-201.

Natke, H. G., Tomlinson, G. R., Yao, J. T. P., (1994), "Safety Evaluation of Structures Using System Identification Approaches," Structural Safety and Reliability (Ed. por Schüeller y cols.), Balkema, pp. 829-833.

Newmark, N. M., Rosenblueth, E., (1971), *Fundamentos de Ingeniería Sísmica*, Diana.

Otani, S., (1981), "Hysteresis Models of Reinforced Concrete for Earthquake Response Analysis," J. of the Fac. of Engineering, University of Tokio, Vol. XXXVI, No.2, pp. 407-441.

Park, Y., Ang, A., (1985), "Mechanistic Seismic Damage Model for Reinforced Concrete," J. of Structural Engineering, ASCE, 111(4), pp. 740-757.

Peng, C.-Y., Iwan, W. D., (1992), "An Identification for a Class of Hysteretic Structures," Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.21, pp. 695-712.

Pilkey, W. D., Cohen, R., (Eds), (1972), "System Identification of Vibrating Structures," ASME publication, Shock and Vibration Committee.

Ramberg, W., Osgood, W. R., (1943), "Description of Stress-Strain Curves by three Parameters," National Advisory Committee on Aeronautics, Technical Note 902.

Salgado, A., (1989), "Identificación de Rigideces y Amortiguamientos en Estructuras en Movimiento," Trabajo de Maestría, DEPI-UNAM.

Shinozuka, M., Yun, C.-B., Imai, H., (1982), "Identification of Linear Structural Dynamic Systems," J. of Engng. Mech., ASCE, Vol.108, No. EM6, pp. 1371-1390.

Stephens, E., Yao, J. T. P., (1988), "Damage Assessment Using Response Measurements," J. of Structural Engineering, ASCE, 113(4), 787-801.

Strang, G., (1980), Linear Algebra, 2nd Edition, Academic Press.

Sues, R. H., Mau, S. T., Wen, Y.-K., (1988), "System Identification of Degrading Hysteretic Restoring Forces," J. of Engng. Mech., ASCE, Vol.114, No.5, pp. 833-846.

Takeda, T., Sozen, M. A., Nielsen, N. N., (1970), "Reinforced Concrete Response to Simulated Earthquakes," J. of Structural Division, ASCE, 96, ST-12, pp. 2555-2573.

Trifunac, M. D., Udawadia, F. E., Brady, A. G., (1973), "Analysis of Errors in Digitized Strong-Motion Accelerograms," Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 63, No. 1, pp. 157-187.

Udawadia, F. E., Garba, J. A., Afshin, G., (1984), "Parameter Identification Problems in Structural and Geotechnical Engineering," J. of Engng. Mech., ASCE, Vol. 110, No. 9, pp. 1409-1432.

Udawadia, F. E., Jerath, N., (1980), "Time Variations of Structural Properties During Strong Ground Shaking," J. of Engng. Mech., ASCE, Vol.106, No. EM1, pp. 111-121.

Wen, Y.-K., (1976), "Method for Random Vibration of Hysteretic Systems," J. of Engng. Mech., ASCE, Vol.102, No. EM2, pp. 249-263.

Wiener, N., (1942), *The extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series*, OSRD 370, MIT.

Wiener, N., (1949), *The extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series*, John Wiley and Sons.

Wolf, J. P., (1985), *Dynamic Soil-Structure Interaction*, Prentice-Hall.



# APÉNDICES

**APÉNDICE A****CÁLCULO DE LA RESPUESTA MEDIANTE LA MATRIZ DE TRANSICIÓN. FORMULACIÓN DE ESTADO.**

La matriz fundamental de soluciones ó matriz de transición de estado es una herramienta muy utilizada en la teoría de la identificación de sistemas y ofrece una alternativa para el cálculo de la respuesta de un sistema dinámico. Esta técnica presenta cierta ventaja computacional con respecto a algunos métodos tradicionales de la dinámica estructural ya que permite, entre otras cosas, calcular simultáneamente los vectores de desplazamientos y velocidades del sistema.

Considere un sistema  $n$  dimensional regido por la siguiente ecuación diferencial

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = -MJ\ddot{u}_g \quad (\text{A.1})$$

si se definen

$$\bar{C} = M^{-1}C \quad ; \quad \bar{K} = M^{-1}K \quad (\text{A.2})$$

se puede obtener la siguiente ecuación transformada

$$\begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\bar{K} & -\bar{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ J \end{Bmatrix} \ddot{u}_g$$

Si se realiza el siguiente cambio de variable

$$X(t) = \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix}; F(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\bar{K} & -\bar{C} \end{bmatrix}; G(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ J \end{Bmatrix}; u(t) = -\ddot{u}_g$$

la ecuación (A.1) se convierte en

$$\dot{X}(t) = F(t)X(t) + G(t)u(t) \quad (\text{A.3})$$

A  $X(t)$  se le conoce como vector de estado del sistema. El vector de estado de un sistema es una colección de variables que definen completamente el comportamiento del mismo.

Si se considera que se trata de un sistema invariante en el tiempo, entonces  $F(t) = F$  y  $G(t) = G$  y la ecuación (A.3) se convierte en

$$\dot{X}(t) = FX(t) + Gu(t) \quad (\text{A.4})$$

La solución homogénea a la ecuación anterior está dada por

$$X(t) = e^{Ft}X(0) \quad (\text{A.5})$$

Donde

$X(0)$  = vector de estado inicial

$e^{Ft}$  = matriz de orden  $2n$  que se puede expresar de la siguiente manera

$$e^{Ft} = I + tF + \frac{t^2}{2!}F^2 + \frac{t^3}{3!}F^3 + \dots \quad (\text{A.6})$$

Para el caso de la solución no homogénea; sea  $S(t)$  una matriz de orden  $2n$ . Si se premultiplica la ecuación (A.4) por  $S(t)$  se obtiene

$$S(t)\dot{X}(t) = S(t)FX(t) + S(t)Gu(t) \quad (\text{A.7})$$

al considerar que

$$\frac{d}{dt}(S(t)X(t)) = \dot{S}(t)X(t) + S(t)\dot{X}(t) \quad (\text{A.8})$$

la ecuación (A.7) se puede reescribir como

$$\frac{d}{dt}(S(t)X(t)) - \dot{S}(t)X(t) = S(t)FX(t) + S(t)Gu(t) \quad (\text{A.9})$$

se puede escoger  $S(t)$  de manera que satisfaga

$$\dot{S}(t) = -FS(t) \quad (\text{A.10})$$

la cual tiene solución

$$S(t) = e^{-Ft}S(0) \quad (\text{A.11})$$

en donde

$$e^{-Ft} = I - tF + \frac{t^2}{2!}F^2 - \frac{t^3}{3!}F^3 + \dots \quad (\text{A.12})$$

Si  $S(0)$  se escoge como la matriz identidad, entonces la ecuación (A.11) se reduce a

$$S(t) = e^{-Ft} \quad (\text{A.13})$$

De la ecuación (A.12) se observa que las matrices  $S(t)$  y  $F$  conmutan, es decir  $FS(t) = S(t)F$ .

Al sustituir esta igualdad en la ecuación (A.10) se obtiene

$$\dot{S}(t) = -S(t)F \quad (\text{A.14})$$

Si se sustituye (A.14) en (A.9) y se reducen términos, se obtiene

$$\frac{d}{dt}(S(t)X(t)) = S(t)Gu(t) \quad (\text{A.15})$$

Si se integra (A.15) resulta

$$\begin{aligned} S(t)X(t) &= S(0)X(0) + \int_0^t S(\tau)Gu(\tau)d(\tau) \\ &= X(0) + \int_0^t S(\tau)Gu(\tau)d(\tau) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Si se premultiplica la ecuación (A.16) por  $S(t)^{-1}$  se obtiene finalmente la solución.

$$X(t) = e^{Ft}X(0) + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)d(\tau) \quad (\text{A.17})$$

La cual contiene la solución homogénea y la solución particular.

A la matriz  $e^{F(t-\tau)}$  se le conoce como matriz de transición de estado y se representa usualmente como  $\phi(t, \tau)$ . Por lo tanto la solución del sistema se expresa como sigue

$$X(t) = \phi(t, t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t, \tau)Gu(\tau)d(\tau) \quad (\text{A.18})$$

**SIMBOLOGÍA**

$M$	matriz de masa
$C$	matriz de amortiguamiento
$K$	matriz de rigidez
$q, \dot{q}, \ddot{q}$	vectores de desplazamientos, velocidades, y aceleraciones
$J$	vector de direccionalidad de la excitación
$\ddot{u}_g$	aceleración del terreno
$X$	vector de estado
$\Phi$	matriz de transición de estado
$F, G, S$	matrices empleadas en la formulación de estado

## APÉNDICE B

## DEDUCCIÓN DE LAS EXPRESIONES DEL FILTRO DE KALMAN

El antecedente directo del filtro de Kalman aparece en los estudios realizados por Gauss sobre estimación mediante mínimos cuadrados en 1795. Estos estudios fueron publicados por él mismo en 1809. Posteriormente, los trabajos de Fisher en 1912, de Kolmogorov y Wiener en 1942 y de Kalman en 1960, establecieron las bases de lo que hoy se conoce como filtro de Kalman.

Considere un sistema dinámico lineal cuyo estado se puede describir por la siguiente ecuación vectorial en diferencias

$$X_k = \phi_{k,k-1} X_{k-1} + G_{k-1} + W_{k-1} \quad (\text{B.1})$$

$X_k$  representa el estado del sistema en el instante  $k$ .  $G_{k-1}$  es un vector de funciones de fuerza conocidas.  $W_k$  es una secuencia aleatoria vectorial con estadísticas conocidas,

$$E(W_k) = 0 \quad \forall k ; E(W_k W_k^T) = Q_k \delta_{kj}$$

$\delta_{kj}$  es la delta de Kronecker,  $\phi_{k,k-1}$  es una matriz de transición con las propiedades siguientes:

$$\phi_{k,k} = I \quad \forall k ; \phi_{k,j} \phi_{j,l} = \phi_{k,l} ; \phi_{k,j}^{-1} = \phi_{j,k}$$

Sea  $Z_k$  el vector de las mediciones del sistema en el instante  $k$ , las cuales están relacionadas con el vector de estado de acuerdo con la siguiente ecuación de mediciones:

$$Z_k = H_k X_k + V_k \quad (\text{B.2})$$

$H_k$  se conoce como matriz de observación.  $V_k$  es una secuencia aleatoria vectorial con estadísticas conocidas,

$$E(V_k) = 0 \quad \forall k ; \quad E(V_k V_k^T) = R_k \delta_{kj}$$

El objetivo es estimar el valor del estado en el instante  $k$  como una combinación lineal del estado estimado en el instante  $k-1$  y los datos en el instante  $k$ . La estimación debe ser "la mejor" en el sentido de que el valor esperado de la suma de los cuadrados de los errores en la estimación sea mínimo; es decir,

$$E[(\hat{X}_k - X_k)^T (\hat{X}_k - X_k)] = \text{mínimo}$$

$$\tilde{X}_k = \hat{X}_k - X_k ; \quad P_k \triangleq E[\tilde{X}_k \tilde{X}_k^T]$$

Es posible probar que la mejor estimación en el instante  $k$ , conocidas las mediciones hasta el instante  $k-1$ , está dada por la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \hat{X}_{k/k-1} &= E[X_k | Z_1, \dots, Z_{k-1}] \\ &= E[(\Phi_{k,k-1} X_{k-1} + G_{k-1} + W_{k-1}) | Z_1, \dots, Z_{k-1}] \\ &= \Phi_{k,k-1} E[X_{k-1} | Z_1, \dots, Z_{k-1}] + E[G_{k-1} | Z_1, \dots, Z_{k-1}] \\ &\quad + E[W_{k-1} | Z_1, \dots, Z_{k-1}] \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

El primer valor esperado de la ecuación anterior es por definición

$$E[X_{k-1} | Z_1, \dots, Z_{k-1}] = \hat{X}_{k-1} \quad (\text{B.4})$$

$G_{k-1}$  no es una secuencia aleatoria, por lo tanto

$$E[G_{k-1} | Z_1, \dots, Z_{k-1}] = G_{k-1} \quad (\text{B.5})$$

Por hipótesis el ruido del modelo  $W_{k-1}$  es independiente del estado y también del ruido de medición, por lo tanto



$$E[W_{k-1} | Z_1, \dots, Z_{k-1}] = E[W_{k-1}] = 0 \quad (\text{B.6})$$

Por lo tanto, la mejor estimación del estado en el instante  $k$  con base en las mediciones hasta el instante  $k-1$  es

$$\hat{X}_{k/k-1} = \Phi_{k,k-1} \hat{X}_{k-1} + G_{k-1} \quad (\text{B.7})$$

Al contar con la medición en el instante  $k$  y de acuerdo a las hipótesis de partida de que las estimaciones son función lineal de las mediciones, se tiene que

$$\hat{X}_k = \hat{X}_{k/k-1} + K_k [Z_k - H_k \hat{X}_{k/k-1}] \quad (\text{B.8})$$

donde  $K_k$  es una matriz de ganancia desconocida y se determina bajo la condición que

$$E[(\hat{X}_k - X_k)^T (\hat{X}_k - X_k)] = \text{mínimo}$$

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= \hat{X}_k - X_k \\ &= (\Phi_{k,k-1} \hat{X}_{k-1} + G_{k-1} + K_k [Z_k - H_k \hat{X}_{k/k-1}]) - \Phi_{k,k-1} X_{k-1} - G_{k-1} - W_{k-1} \\ &= \Phi_{k,k-1} \tilde{X}_{k-1} - K_k H_k \Phi_{k,k-1} \tilde{X}_{k-1} + K_k H_k W_{k-1} - W_{k-1} + K_k V_k \\ &= (I - K_k H_k) (\Phi_{k,k-1} \tilde{X}_{k-1} - W_{k-1}) + K_k V_k \end{aligned}$$

La matriz de covariancia del error en la estimación se puede formar como sigue

$$\begin{aligned} P_k &= E\{[(I - K_k H_k) (\Phi_{k,k-1} \tilde{X}_{k-1} - W_{k-1}) + K_k V_k] \\ &\quad \times [(I - K_k H_k) (\Phi_{k,k-1} \tilde{X}_{k-1} - W_{k-1}) + K_k V_k]^T\} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

además se tiene que

$$E\{[\Phi_{k,k-1} \tilde{X}_{k-1} - W_{k-1}] [\Phi_{k,k-1} \tilde{X}_{k-1} - W_{k-1}]^T\} = \Phi_{k,k-1} P_{k-1} \Phi_{k,k-1}^T + Q_{k-1} \quad (\text{B.10})$$

ya que

$$E[W_{k-1}W_{k-1}^T] = Q_{k-1}$$

si se define  $P_{k/k-1}$  como

$$P_{k/k-1} \triangleq \Phi_{k,k-1}P_{k-1}\Phi_{k,k-1}^T + Q_{k-1} \quad (\text{B.11})$$

Entonces  $P_k$  se puede escribir como

$$P_k = (I - K_k H_k)P_{k/k-1}(I - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k^T \quad (\text{B.12})$$

### OBTENCIÓN DE LA MATRIZ DE GANANCIA

Si se desarrolla la ecuación (B.12), se obtiene

$$P_k = P_{k/k-1} - K_k H_k P_{k/k-1} - P_{k/k-1} H_k^T K_k^T + K_k (H_k P_{k/k-1} H_k^T + R_k) K_k^T \quad (\text{B.13})$$

Se desea minimizar el error cuadrático medio; es decir, se desea minimizar la traza de  $P_k$ . Se procede a diferenciar la traza de  $P_k$  con respecto a  $K_k$ . Es importante notar que la traza de  $P_{k/k-1} H_k^T K_k^T$  es igual a la traza de su transpuesta. Por lo tanto

$$\frac{d(\text{traza de } P_k)}{dK} = -2(H_k P_{k/k-1})^T + 2K_k (H_k P_{k/k-1} H_k^T + R_k) \quad (\text{B.14})$$

Si la ecuación (B.14) se iguala a cero y se resuelve para  $K_k$  se obtiene la matriz de ganancia de Kalman

$$K_k = P_{k/k-1} H_k^T (H_k P_{k/k-1} H_k^T + R_k)^{-1} \quad (\text{B.15})$$

En resumen, las ecuaciones del filtro de Kalman lineal son las siguientes:

PREDICCIÓN

$$\begin{aligned}\hat{X}_{k|k-1} &= \Phi_{k,k-1} \hat{X}_{k-1} + F_{k-1} \\ P_{k|k-1} &= \Phi_{k,k-1} P_{k-1} \Phi_{k,k-1}^T + Q_{k-1}\end{aligned}\quad (\text{B.16})$$

FILTRADO

$$\begin{aligned}\hat{X}_k &= \hat{X}_{k|k-1} + K_k [Z_k - H_k \hat{X}_{k|k-1}] \\ P_k &= (I - K_k H_k) P_{k|k-1} (I - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k^T\end{aligned}\quad (\text{B.17})$$

B.1 PROBLEMAS NO LINEALES. EL FILTRO DE KALMAN EXTENDIDO.

Cuando se utiliza el filtro de Kalman para estimar parámetros de un sistema, estos se incorporan dentro del vector de estado como variables aumentadas. Las ecuaciones que rigen el comportamiento del sistema se transforman en un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales. Lo anterior no permite que se puedan aplicar las ecuaciones del filtro lineal. Para estimar el estado de un sistema no lineal mediante el filtro de Kalman es necesario linealizar las ecuaciones que lo describen. La suposición fundamental es la siguiente: una solución nominal a las ecuaciones diferenciales no lineales debe existir. Dicha solución debe proveer una "buena" aproximación al comportamiento real del sistema. La aproximación es buena si las diferencias entre la trayectoria nominal y la trayectoria real se pueden describir mediante un sistema de ecuaciones diferenciales lineales. Estas ecuaciones se les llama ecuaciones lineales de perturbación.

Suponga que el estado de un sistema evoluciona de acuerdo con la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{X} = f(X, u(t), t) \quad (\text{B.18})$$

El vector  $u(t)$  representa las funciones de fuerza del sistema. Si se define la trayectoria nominal y sus condiciones iniciales como sigue:

$$\dot{X}^*(t) = f(X^*(t), t) ; X^*(t_0) = X^*_0 \quad (\text{B.19})$$

Las desviaciones de la trayectoria nominal satisfacen la siguiente ecuación diferencial

$$\delta \dot{X}(t) = f(X(t), u(t), t) - f(X^*(t), u(t), t) \quad (\text{B.20})$$

Si las desviaciones son pequeñas, entonces la ecuación anterior se puede desarrollar en series de Taylor (despreciando términos de orden superior).

$$f(X(t), u(t), t) - f(X^*(t), u(t), t) \approx F[t; X^*(t_0)] \delta X(t) \quad (\text{B.21})$$

Donde

$$F[t; X^*(t_0)] \triangleq \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial X_n} \end{pmatrix}_{X = X^*} \quad (\text{B.22})$$

Para la ecuación de mediciones se realiza una linealización similar. La ecuación variacional de mediciones es la siguiente:

$$\delta Z(k) = Z(k) - Z^*(k) = H[k; X^*(k)] \delta X(k) \quad (\text{B.23})$$

Donde

$$Z(k) = h(X(k), k) ; Z^*(k) = h(X^*(k), k) \quad (\text{B.24})$$

y

$$H[k, X^*(k)] \triangleq \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial X_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial h_n}{\partial X_n} \end{pmatrix}_{X = X^*} \quad (\text{B.25})$$

Con las ecuaciones linealizadas es posible aplicar el filtro de Kalman. Las ecuaciones finales quedan de la siguiente forma

### PREDICCIÓN

$$\hat{X}(k+1|k) = \hat{X}(k|k) + \int_{k\Delta t}^{(k+1)k\Delta t} f(X(t|k), u; t) dt \quad (\text{B.26})$$

$$P(k+1|k) = \Phi(k+1|k)P(k|k)\Phi^T(k+1|k) + Q(k) \quad (\text{B.27})$$

### FILTRADO

$$\hat{X}(k+1|k+1) = \hat{X}(k+1|k) + K(k+1)[Z(k+1) - h(\hat{X}(k+1|k); k)] \quad (\text{B.28})$$

$$P(k+1|k+1) = [I - K(k+1)H(k+1)]P(k+1|k)[I - K(k+1)H(k+1)]^T + K(k+1)RK^T(k+1) \quad (\text{B.29})$$

### MATRIZ DE GANANCIA DE KALMAN

$$K(k+1) = P(k+1|k)H^T(k+1)[H(k+1)P(k+1|k)H^T(k+1) + R(k+1)]^{-1} \quad (\text{B.30})$$

**SIMBOLOGÍA**

$X$	vector de estado
$\hat{X}$	vector de estado estimado
$\Phi$	matriz de transición de estado
$G$	vector de funciones de fuerza
$W$	vector de ruido en el modelo
$V$	vector de ruido en las mediciones
$Q$	matriz de covariancia del ruido en el modelo
$R$	matriz de covariancia del ruido en las mediciones
$Z$	vector de mediciones
$h$	vector de funciones de medición
$H$	matriz de coeficientes (linealizados en el caso del filtro de Kalman extendido) de la ecuación de mediciones.
$P$	matriz de covariancia del error en las estimaciones
$K$	matriz de ganancia de Kalman
$f$	vector de funciones de estado
$F$	matriz de coeficientes linealizados de la ecuación de estado
$X'$	vector de estado de la trayectoria nominal
$Z'$	vector de mediciones de la trayectoria nominal
$I$	matriz unitaria
$E\{X\}$	esperanza del vector $X$